UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LA CURVA CERRADA SIMPLE EN EL PLANO

240310

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EDGAR DIAZ HERRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LA CURVA CERRADA SIMPLE EN EL PLANO

realizado por EDGAR DIAZ HERRERA

con número de cuenta 9554334-3 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ	
Propietario	DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA	
Propietario	DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA	
Suplente	DR. RAUL ESCOBEDO CONDE	
Suplente	DR. GERARDO ACOSTA GARCIA	Gerardo Acosta García

Héctor Méndez L.

Consejo Departamental de MATEMATICAS

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

Agradecimientos

... pero esta edad es dura y de hierro, el tiempo de los milagro o pasó ya o está aún por llegar, aparte de que el milagro, por más que nos digan, no es nada bueno, si hay que torcer la lógica y la razón misma de las cosas para hacerlas mejores.

En esta página, que posiblemente es la primera en leerse pero la última que escribí en esta tesis, quisiera incluir a las personas que todo este tiempo estuvieron cerca de mí. Creo que no debo forzarme en incluir a mi madre, la persona más fuerte que he conocido y, que incondicionalmente cree y confía en mí. Mis hermanos: Pablo, Esther, Araceli, Oralia (¡uf!... ya casi termino) Arturo, Mercedes, Diana y Sonia. Alguien que no estuvo físicamente, pero que con su gran lado humano y su buen ejemplo, basta para decirle gracias: mi padre Prof. Juvencio Díaz Xalteno.

Quisiera agradecerle a la UNAM y casi todo lo que ella contiene, a la Facultad de Ciencias la formación y la libertad que ahí se respira. A cada uno de mis profesores y muy especialmente a mis sinodales: Alejandro por la última peinada que le diste a mi tesis, Sergio porque realmente nunca me dejó solo y por sus prontas respuestas, Raúl por la gran ayuda a tapar los hoyos matemáticos.

Como en todas partes siempre hay colados, aquí no habrá excepción.

Índice General

Introducción

A pesar de existir una cantidad infinita (no numerable) de continuos -espacios métricos compactos y conexos - se conocen sólo tres en el plano que sean no degenerados y homogéneos. Efectivamente hay tantos continuos en el plano como números reales, pero homogéneo, sólo podemos dibujar a una curva cerrada simple.

Para darnos una idea, decimos que un conjunto es homogéneo si por todos lados se ve igual. Por ejemplo, el conjunto de Cantor, $\mathbb{R}^n$, una curva cerrada simple, el toro, etc. son conjuntos homogéneos. El intervalo cerrado $[0,1]$ no es homogéneo, pues dos de sus puntos, el cero y el uno, no tienen "vecinos"por un lado. De nuestros ejemplos anteriores sólo la curva cerrada simple y el toro cumplen con las definiciones de ser continuos homogéneos. Sin embargo sólo la curva cerrada simple "*vive*"en el plano.

Hemos dicho entonces que sólo se conocen tres continuos homogéneos del plano y que uno de ellos es una curva cerrada simple. Los otros dos, *El pseudo arco* y *El círculo de pseudo arcos* tienen la particularidad de que no podemos dar una representación gráfica de ellos.

En 1920 Knaster y Kuratowski [18] plantearon la siguiente pregunta: Si un continuo homogéneo está en el plano entonces ¿es necesariamente una curva cerrada simple?

En el capítulo uno se contesta de manera afirmativa si pedimos, además, es esencialmente el mismo que Knaster describió veintiséis años antes por métodos diferentes.

En 1954, trabajando de forma independiente, Bing y Jones descubrieron un continuo homogéneo en el plano, que no era ni la curva cerrada simple ni el pseudo arco. Cuando se dieron cuenta de que estaban trabajando en el mismo ejemplo decidieron hacerlo conjuntamente [4]. La primera parte de dicho artículo demuestra que el ejemplo -*el círculo de pseudo arcos*- es homogéneo, fue demostrado por Bing. La parte que demuestra que el círculo de pseudo arcos puede encajarce en el plano, se debe a Jones.

Después de que se establece la existencia de un tercer continuo homogéneo en el plano -el círculo de pseudo arcos- queda planteada la pregunta: ¿Existirá otro? En 1959, R. H. Bing demuestra que uno de los tres continuos que se conocen, una curva cerrada simple es el único que contiene un arco. la demostración de este teorema conforma el capítulo cuatro. Debemos resaltar la importancia de este hecho, pues de existir otro, según este resultado, no deberá contener ningún arco.

Finalmente en 1975, Charles L. Hagopian hace una generalización al resultado de Bing, lo cual comprende el capítulo cinco del presente trabajo. Dicha generalización establece que si existe otro continuo homogéneo del plano que no sea ninguno de los tres que se conocen. no contiene un subcontinuo *hereditariamente descomponible*[3]. Un ejemplo de un continuo del plano hereditariamente descomponible que no contiene ningún arco se puede encontrar en [24, Ejercicio 2.27, pág. 28].

[3]Sección 5.2

Capítulo 1

Teorema de Mazurkiewicz

El objetivo principal de este capítulo es demostrar que una curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que es localmente conexo. la demostración no se hace sino hasta la sección 1.4. Esta caracterización de una curva cerrada simple fue la primera respuesta parcial que dio S. Mazurkiewicz a la pregunta que plantearon Knaster y Kuratowski.

1.1 Definiciones básicas

En esta sección se enuncian algunas de las definiciones básicas que serán de utilidad para el resto del trabajo.

Definición 1.1. Una función continua y biyectiva f, tal que f^{-1} es continua también, la llamaremos un *homeomorfismo*. Se dice que los espacios topológicos X y Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo f entre ellos.

Definición 1.2. Diremos que un conjunto $\mathbf{X}$ es un *continuo* si $\mathbf{X}$ es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos:

$C \cap A \neq \varnothing$. Cuando A consta de un sólo punto p, decimos que p es un *punto de corte débil en* X.

Definición 1.7. Sean X un espacio topológico y C un subconjunto de X, se dice que C *corta* a X si $X \setminus C$ no es conexo. Cuando C consta de un sólo punto p, se dice que p es un *punto de corte en* X.

Cabe mencionar que si un conjunto corta a un espacio topológico entonces lo corta débilmente.

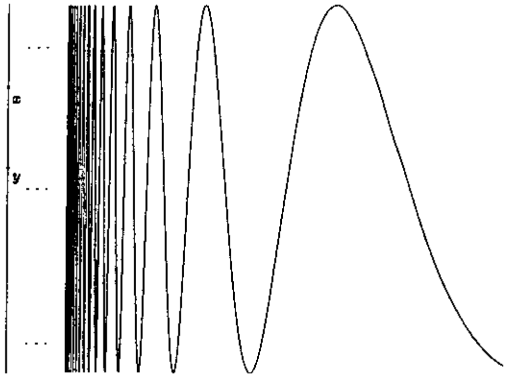

Figura 1.1: El conjunto $\{x, y\}$ corta débilmente a X, pero no lo corta

La implicación inversa no siempre se cumple, por ejemplo, consideremos a X como la cerradura de la gráfica de la función real $f(x) = sen(1/x)$ y, si tomamos dos puntos diferentes x y y en "la barra límite"(ver figura 1.1) entonces el conjunto $\{x, y\}$ corta débilmente a X entre cualesquiera dos puntos de X, tales que, uno esté en la barra límite y el otro fuera, en la "víbora", V. Sin embargo el conjunto $\{x, y\}$ no corta a X porque $X \setminus \{x, y\}$ es conexo pues se tiene lo siguiente:

$$V \subset X \setminus \{x, y\} \subset \overline{V} = X ,$$

Además la curva cerrada simple formada por $L_j \cup L_k$, determina dos dominios complementarios, dados por:

$$G_i \text{ y } G_j \cup G_k \cup (L_i \setminus \{a,b\}).$$

El lema 1.11 es una consecuencia del teorema de la curva de Jordan [8], pues son curvas cerradas simples en el plano.

Los continuos que son localmente conexos y que no contienen ninguna curva cerrada simple se les llama *dendritas*.

Teorema 1.12. Todo subcontinuo no degenerado de una dendrita es una dendrita [24, Corolario 10.6, pág. 167].

Teorema 1.13. **(Janiszewski)** Si A y B son continuos que no cortan al plano, tales que $A \cap B$ es conexo y no vacío, entonces $A \cup B$ no corta al plano [15].

Definición 1.14. Un espacio topológico X es *localmente conexo en un punto* p, si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p, la cual es abierta en X.

Teorema 1.15. Si X es un continuo en el plano, localmente conexo y que no contiene ninguna curva cerrada simple, entonces X no corta débilmente al plano.

Demostración. Supóngase que X corta débilmente al plano, entre los puntos x y $y \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Existe un subcontinuo de X, irreducible con respecto a la propiedad de cortar débilmente al plano entre x y y [19]. Sea C_1 dicho continuo.

Veamos que C_1 es descomponible, es decir, $C_1 = C_2 \cup C_3$, donde C_2 y C_3 son subcontinuos propios de C_1. Si C_1 es un arco, claramente, se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios. Así que si C_1 no es un decimos que A es un *continuo de convergencia* de X si existe una sucesión de subcontinuos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de X tal que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A\,, \quad \text{donde,} \quad A \cap A_n = \varnothing \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Nota. La convergencia en el límite de la definición anterior es en el sentido de la métrica de Hausdorff [24, Definición 4.1, pág. 52]

Si en la definición anterior X es un compacto entonces los A_n se pueden elegir de tal forma que sean mutuamente ajenos [24, Ejercicio 5.23, pág. 84].

Algunos continuos no contienen continuos de convergencia, por ejemplo, un arco, una curva cerrada simple, un triodo simple [2], etc.

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico. Si x es un punto de X, entonces se dice que X es *conexo en pequeño en* x si cada vecindad de x contiene una vecindad conexa de x.

Claramente, si un espacio es localmente conexo en un punto p entonces es conexo en pequeño en p. Sin embargo, la implicación inversa es falsa, inclusive en continuos. El continuo X en la figura 1.2 es conexo en pequeño en p pero no es localmente conexo en p.

Figura 1.2: X no es localmente conexo en p

[2]Ver la definición 3.4

Teorema 1.20. Un espacio X es conexo en pequeño en x, para toda $x \in X$ si y sólo si X es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Para demostrar que X es localmente conexo usaremos la equivalencia del teorema 1.19, es decir, si U es un abierto de X y C es una componente de U, bastará verificar que C es un abierto de X.

Sea $x \in C$, como C es una componente de U, entonces $x \in U$, ahora para esta x y esta U existe, por hipótesis, una vecindad conexa V tal que: $x \in V \subset U$. Como C es la componente de U que tiene a X, $V \subset C$. De lo anterior se tiene que C es un abierto, pues x fue un punto arbitrario de C. La implicación inversa es clara. $\square$

La noción de conexidad en pequeño nos ayudará a dar una condición suficiente para garantizar que un continuo contiene un continuo de convergencia.

Teorema 1.21. Sean X un continuo y $N = \{x \in X : \ X \text{ no es conexo en pequeño en } x\}$. Si $p \in N$ entonces existe un continuo de convergencia K en X tal que $p \in K \subset N$ [24, Teorema 5.12, pág. 76].

Definición 1.22. Sea X un espacio métrico. Decimos que un subconjunto no vacío Y de X tiene la *propiedad S* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de subconjuntos conexos $A_1, \ldots, A_n$ de Y tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad diám(A_i) < \varepsilon \ \text{ para toda } \ i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 1.23. Si X es un espacio métrico que tiene la propiedad S entonces, para toda $\varepsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos los cuales tienen la propiedad S y sus diámetros son menores que ε; además estos conjuntos pueden escogerse abiertos o cerrados en X [24, Teorema 8.9, pág. 124].

ii) $K_n \cap X_j \neq \varnothing$

iii) $X_i \cap X_j = \varnothing$

Justificación: Sean $n > k_0$ y x_n y y_n puntos de K_n tales que $diám(K_n) = d(x_n, y_n)$. Los puntos x_n y y_n existen porque K_n es un compacto. Por otra parte, como

$$\mathbf{X} = \bigcup_{j=1}^{m} X_j\,,$$

existen j_0 y $j_1 \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $x_n \in X_{j_0}$ y $y_n \in X_{j_1}$. Como el diámetro de X_{j_0} y de X_{j_1} es menor que ε y $d(x_n, y_n) > 8\varepsilon$, se tiene que $X_{j_0} \neq X_{j_1}$, de hecho ni siquiera se intersectan. Por lo tanto cada K_n intersecta a dos conjuntos diferentes X_i.

Como el número de conjuntos X_i es finito y el de K_n es infinito, entonces hay una pareja X_j y X_k que intersecta a por lo menos tres conjuntos del tipo K_n, digamos K_1, K_2 y K_3, es decir, para estos conjuntos se tiene:

$$K_\ell \cap X_j \neq \varnothing \neq K_\ell \cap X_k \quad \ell = 1, 2, 3$$

Sea $\delta > 0$ tal que $8\delta <$ mín $\{d(K_1, K_2), d(K_2, K_3), d(K_3, K_1), d(X_i, X_j)\}$ y $R_\delta(x)$ denotará la componente de $V_\delta(x) \cap \mathbf{X}$ que contiene a x, donde, $V_\delta(x)$ es la bola de radio δ con centro en x en $\mathbb{R}^2$. Definimos

$$R_\delta(K_i) = \bigcup_{x \in K_i} R_\delta(x)\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Como, por definición, cada K_i es conexo y $R_\delta(x)$ es abierto, pues es una componente de un abierto conexo. Se tiene entonces que cada $R_\delta(K_i)$ es un abierto y conexo, por lo tanto $R_\delta(K_i)$ es arcoconexo [24, Teorema 8.26, pág. 132].

Dada $i \in \{1, 2, 3\}$, sea $a_i b_i$ un arco en $R_\delta(K_i)$, tal que $a_i b_i \cap X_j = \{a_i\}$ y $a_i b_i \cap X_k = \{b_i\}$. Es decir, los extremos a_1, a_2, a_3 de los arcos $a_i b_i$ quedan en la frontera de X_j y b_1, b_2 y b_3 en la de X_k; por otra parte los conjuntos X_i son contenida en **X**, se tiene que

$$D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{X} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \theta,$$

de donde, D está contenido en R_i, entonces $\overline{D} \subset \overline{R}_i$.

Notemos que $y_3 \in Fr(D)$, pues $y_3 \in K_3 \subset Fr(D)$, pero $y_3 \notin \overline{R}_1$, entonces $y_3 \notin \overline{D}$, lo cual es una contradicción. De manera análoga se puede contradecir si elegimos a y_2 o a y_1. Por lo tanto $Fr(D)$ es localmente conexo. □

1.4 Demostración del teorema

En lo que resta de este capítulo **X** denotará un contínuo localmente conexo y homogéneo en el plano. El siguiente teorema es el principal del presente capítulo, se debe a Mazurkiewicz y es una de las primeras respuestas parciales que se le dio a la pregunta planteada por Knaster y Kuratowski en 1920 (*Si un continuo homogéneo está en el plano, ¿Es necesariamente la curva cerrada simple?*) De esta manera, dicho teorema responde a la pregunta afirmativamente, si nuestro continuo es además localmente conexo. La demostración será por contradicción, suponiendo a partir de la segunda parte de esta sección que, **X** no es una curva cerrada simple.

Teorema 1.26 (S. Mazurkiewicz, 1924). Todo continuo, localmente conexo y homogéneo en el plano es una curva cerrada simple.

La demostración se basará en las afirmaciones siguientes.

Afirmación 1.27. **X** contiene una curva cerrada simple.

Demostración. Sabemos que cualquier continuo tiene al menos dos puntos que no lo cortan [24, Teorema 6.6], en particular, hay un punto p que no corta a **X**, como **X** es un continuo localmente conexo, p no corta débilmente a **X**, por el lema 1.8. Además **X** es homogéneo, entonces ninguno de sus un punto $x \in B_k$ y $y \in B_l$, $k \neq l$. Así, tenemos un continuo localmente conexo que corta al plano, entonces por la contrapuesta del teorema 1.15, $Fr(B_k)$ contiene una curva cerrada simple. $\square$

Afirmación 1.30. La frontera de cualquier dominio complementario de $\mathbf{X}$ es una curva cerrada simple.

Demostración. Por la afirmación anterior, $Fr(B_k)$ contiene un curva cerrada simple. Sea C una curva cerrada simple contenida en $Fr(B_k)$. Demostraremos que $Fr(B_k) = C$.

Supóngase que $Fr(B_k) \setminus C \neq \varnothing$. Como C es una curva cerrada simple en el plano, entonces C genera dos dominios complementarios D_1 y D_2, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $B_k \subset D_1$.

Sean $x_1 \in Fr(B_k) \setminus C$, y $x_2 \in C$. Construiremos tres arcos coextremales en $Fr(B_k)$ como sigue.

Sea M_1, un arco que va de x_1 a x_2 contenido en $Fr(B_k)$. Ahora sea x_3, el primer punto de M_1 contenido en C a partir de x_1. Sea M_2 el arco que va de x_1 a x_3 en M_1. Sea x_4 un punto en C, tal que $x_4 \neq x_3$. Quisiéramos unir a $x_1 \in Fr(B_k) \setminus C$ con x_4 por medio de un arco en $\mathbf{X}$ sin pasar por x_3, si esto no fuera posible estaríamos diciendo que x_3 es un punto de corte débil en $\mathbf{X}$, que por lema 1.8, dicho punto sería de corte, lo cual no es posible porque $\mathbf{X}$ es homogéneo, es decir, todos los puntos de $\mathbf{X}$ serían de corte, lo qu contradice al hecho de que todo continuo contiene al menos dos puntos que no son de corte [24, Teorema 6.6, pág. 89] . Por lo tanto existe un arco en $\mathbf{X}$ que une a x_1 con x_4 y que no contiene a x_3 al cual llamaremos M_3.

Consideramos a x_5 el primer punto de M_3 a partir de x_1 contenido en C. Sea M_4 el arco contenido en M_3 de x_1 a x_5.

Así, M_2 y M_4 son dos subcontinuos localmente conexos de $\mathbf{X}$, cuya intersección es no vacía, pues son dos arcos en $\mathbf{X}$ que tienen al punto x_1 en común, en otras palabras $M_2 \cup M_4$ es un continuo localmente conexo [14, Proposición 10.7] y, está en el plano, entonces $M_2 \cup M_4$ es arcoconexo [24, pero $G_2 \cap L_2 = \varnothing$, entonces $L_2 \subset L_1 \cup L_3$, lo cual es una contradicción, pues L_2 sólo intersecta a los otros dos arcos en sus extremos. Por lo tanto $Fr(B_k) \setminus C = \varnothing$, entonces $Fr(B_k) = C$. □

Para la siguiente afirmación necesitamos una caracterización de una curva cerrada simple, la cual se enuncia en el siguiente lema. Para cualquier conjunto A, denotaremos a la *cardinalidad* de A como $|A|$.

Definición 1.31. Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y p es un punto de X. Decimos que *p es de orden n en X*, denotado como $ord(p, X) = n$, si dado un abierto U de X que contiene a p, existe un abierto V tal que $p \in V \subset U$ y $|Fr(V)| = n$.

Lema 1.32. Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si todo punto de X es de orden 2 en X [24, Corolario 9.6, pág. 142].

Afirmación 1.33. Si $Fr(B_k) \cap Fr(B_\ell)$ contiene un arco, donde $k \neq \ell$, entonces $\mathbf{X}$ es una curva cerrada simple.

Demostración. Como $\mathbf{X}$ es homogéneo, por el lema 1.32, basta encontrar un punto $x \in \mathbf{X}$ que sea de orden dos.

Tenemos, por hipótesis, que $Fr(B_k) \cap Fr(B_l)$ contiene un arco, sea N dicho arco y tomemos dos puntos x y y en el arco N. Definimos los siguientes arcos: N_1 un arco con puntos extremos x y y tal que $N_1 \setminus \{x, y\} \subset B_k$. Si $Fr(B_k) = S^1$ no habría problema en tomar de esta manera a N_2, pues B_k es arcoconexo, ya que es un abierto conexo del plano; por otra parte, $Fr(B_k)$ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$, afirmación 1.30, entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(Fr(B_k)) = S^1$, una prueba de este hecho puede encontrarse en [6, Teorema (5D9), pág. 153]; Definimos a N_2, un arco con puntos extremos x y y contenido en N; finalmente N_3 un arco con puntos extremos x y y contenido en $Fr(B_l) \setminus N_2$.

de esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\setminus(P_1\cup P_2) &= \mathbf{X}\setminus N_2\\
&= (\mathbf{X}\setminus N_2)\cap\mathbb{R}^2\\
&= (\mathbf{X}\setminus N_2)\cap(N_1\cup N_2\cup N_3\cup B_\ell\cup K_2\cup K_3)\\
&= [(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap N_1]\cup[(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap N_2]\cup[(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap N_3]\cup\\
&\quad\ [(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap B_\ell]\cup[(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap K_2]\cup[(\mathbf{X}\setminus N_2)\cap K_3]\\
&\subseteq N_1\cup N_3\cup(\mathbf{X}\cap B_\ell)\cup K_2\cup(\mathbf{X}\cap B_k)\\
&= N_1\cup N_3\cup K_2\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{X}\setminus(P_1\cup P_2)\subseteq N_1\cup N_3\cup K_2$. Ahora, por la igualdad 1.1, el complemento de $\mathbf{X}\setminus(P_1\cup P_2)$ en $\mathbb{R}^2$ también se queda contenido en $N_1\cup N_3\cup K_2$, entonces

$$(\mathbf{X}\setminus(P_1\cup P_2))\cap\{z\}=\varnothing\,.$$

Por otra parte la unión de P_1 y P_2 es un arco cuya intersección es el punto z. Por lo tanto z es un punto de orden 2 en $\mathbf{X}$, pues si U es un abierto de $\mathbf{X}$ que contiene a z y $2\varepsilon = \min\{d(x,z), d(z,y), d(z, Fr(U))\}$, entonces, definimos a $V = V_\varepsilon(z)\cap\mathbf{X}$, de esta forma, se cumple que $z\in V\subset U$ y $|Fr(V)| = 2$. En virtud de la homogeneidad de $\mathbf{X}$, todos los puntos son de orden dos, por el lema 1.32, $\mathbf{X}$ es una curva cerrada simple.

□

Supóngase que X no es un curva cerrada simple

Recordemos que $\mathbf{X}$ denota un continuo homogéneo localmente conexo en el plano. En lo que resta de la demostración supondremos que $\mathbf{X}$ no es una curva cerrada simple, para llegar así a una contradicción.

Afirmación 1.34.

$$\mathbf{X}\setminus\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k)\Big)\neq\varnothing. \tag{1.2}$$

pág. 48], por lo tanto $\mathbb{R}^2 \setminus E$ es un abierto conexo del plano, entonces es arcoconexo, es decir, existe un arco S de $\mathbb{R}^2$ con extremos a_1 y a_2, tal que $S \cap E = \varnothing$. Queremos demostrar que $\mathbf{X} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k) \neq \varnothing$. Supongamos lo contrario, es decir, $\mathbf{X} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k) = \varnothing$, entonces

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_k \cup Fr(B_k)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_k ,$$

pero como S está contenido en $\mathbb{R}^2$, se debe tener que

$$S = S \cap \mathbb{R}^2 = S \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\overline{B}_k \cap S).$$

Observemos que se cumple lo siguiente:

$$(\overline{B}_k \cap S) \cap (\overline{B}_\ell \cap S) = S \cap (\overline{B}_k \cap \overline{B}_\ell) = S \cap E_{k,\ell} = \varnothing$$

además al menos hay dos conjuntos de la union que son no vacíos, $a_1 \in \overline{B}_1 \cap S$ y $a_2 \in \overline{B}_2 \cap S$. Lo cual no puede ser posible porque estaríamos poniendo al continuo S como la union a lo más numerable y ajena de conjuntos cerrados, con al menos dos de ellos no vacíos [24, Teorema 5.15, pág. 80]. Por lo tanto $\mathbf{X} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k) \neq \varnothing$. $\square$

Afirmación 1.35. Si tomamos un punto z_1 en $\mathbf{X} \setminus (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k))$ y otro z_2 en $\mathbf{X}$, de tal forma que $z_1 \neq z_2$ entonces el conjunto $\{z_1, z_2\}$ no corta débilmente a $\mathbf{X}$.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, el conjunto $\{z_1, z_2\}$ corta débilmente a $\mathbf{X}$ entonces, por definición, existen dos puntos z_3 y z_4 en $\mathbf{X} \setminus \{z_1, z_2\}$ tales que para todo subcontinuo C de $\mathbf{X}$ que contenga a z_3 y z_4, se cumplirá que:

$$C \cap \{z_1, z_2\} \neq \varnothing . \tag{1.3}$$

Sabemos que un punto no puede cortar a $\mathbf{X}$, pues por hipótesis, $\mathbf{X}$ es homogéneo, es decir, todo punto sería de corte, lo cual contradice el hecho de

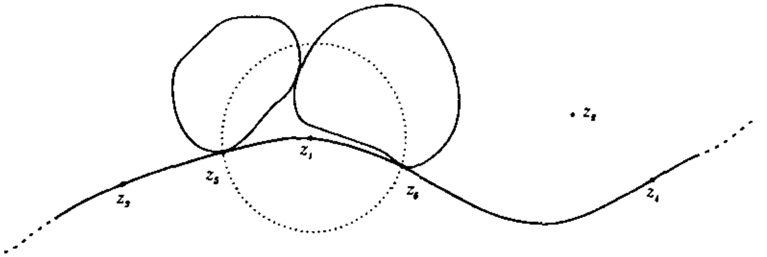

Figura 1.7:

Sean entonces dos puntos z_5 y z_6 en $U_1 \cap V_1$ definidos como: z_5 el primer punto de U_1 contenido en V_1 a partir de z_3 y z_6 el primer punto de U_2 contenido en V_1 a partir de z_4. Ahora consideramos dos subarcos U_3 y U_4 en U_1 y U_2, respectivamente, con puntos extremos z_3 y z_5 para U_3 y z_4 y z_6 para U_4. Claramente U_3 y U_4 están contenidos en $\mathbf{X}$, además no intersectan al conjunto $\{z_1, z_2\}$. Por otra parte $z_5 \in (\mathbf{X} \cap V_1) \subset V_2$, entonces $z_5 \in U_3 \cap V_2$, análogamente $z_6 \in U_4 \cap V_2$.

Observemos que z_1 y z_2 no son elementos de V_2. Primero $z_1 \notin V_2$ ya que z_1 no está en $Fr(B_k)$ para ninguna $k \in \mathbb{N}$ y, por construcción, tampoco está en V_1. Luego, $z_2 \notin V_2$, de lo contrario contradecimos la definición de nuestra $\varepsilon_2 = \text{mín}\{\varepsilon_1, d(z_1, \bigcup_{k=1}^{q} B_k)\}$, es decir, si z_2 está en V_2, tendríamos que $z_2 \in V_1 \cap \mathbf{X}$ o bien $z_2 \in Fr(B_{k_i})$, donde $B_{k_i} \cap V_1 \neq \varnothing$, la primera no es posible porque $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, la segunda tampoco es posible porque los diámetros de los B_k son menores que ε_1 a partir del número q. Por lo tanto V_2 es un continuo en $\mathbf{X} \setminus \{z_1, z_2\}$.

Finalmente al continuo que andamos buscando lo definimos como

$$C = (U_3 \cup V_2 \cup U_4),$$

por todo lo anterior C así definido es un continuo en $\mathbf{X} \setminus \{z_1, z_2\}$ que además contiene a $\{z_3, z_4\}$, lo cual contradice la suposición que hicimos al inicio de esta demostración 1.3. Por lo tanto el conjunto $\{z_1, z_2\}$ no corta débilmente

B_{k_n} fueron elegidos de tal forma que intersectaran a V_1. Por lo tanto $x \in V_1$, así queda demostrado que V_2 es compacto.

V_2 ES CONEXO.
Supóngase que V_2 no es conexo, entonces $V_2 = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son conjuntos cerrados ajenos y no vacíos. Notamos que $V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$ es un conjunto conexo, pues V_1 intersecta a cada B_{k_n}. Nosotros llegaremos a que este conjunto no es conexo, esta contradicción surge de nuestra falsa suposición de que V_2 no es conexo. Para esto definimos los siguientes conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$H_n^1 = V_1 \cap B_{k_n}, \quad H_n^2 = \varnothing \ \text{ si } \ Fr(B_{k_n}) \subseteq A_1$$

$$H_n^1 = \varnothing, \quad H_n^2 = V_1 \cap B_{k_n} \ \text{ si } \ Fr(B_{k_n}) \subseteq A_2 .$$

Ahora definimos a los siguientes dos conjuntos

$$L_1 = A_1 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^1) \quad \text{y} \quad L_2 = A_2 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2) .$$

Los conjuntos L_1 y L_2 así definidos determinan una separación para el conjunto $V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$, es decir, cumplen los siguientes tres incisos

i) $L_1 \cup L_2 = V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$,

ii) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$,

iii) $L_1 \cap \overline{L_2} = \varnothing$ y $\overline{L_1} \cap L_2 = \varnothing$.

Justificación (inciso i). Consideremos un punto $x \in L_1 \cup L_2$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x \in L_1$, entonces x está en A_1 o en H_n^1, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in A_1$, entonces $x \in V_2$, por lo tanto, $x \in V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$. Si $x \in H_n^1$, entonces $x \in V_1 \cap B_{k_n}$, por lo tanto, $x \in V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$. Hemos demostrado que $L_1 \cup L_2 \subseteq V_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fr(B_{k_n}))$.

inciso *ii*).

Justificación (inciso iii). Demostraremos que $L_1 \cap \overline{L_2} = \varnothing$, la demostración será por contradicción. Supóngase que existe $x \in L_1 \cap \overline{L_2}$, por como está definido L_1, se tiene que $x \in A_1$ o $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^1$. Veamos que x se queda en A_1, ya que si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^1$, entonces x es un elemento de H_n^1 para alguna $n \in \mathbb{N}$, pero H_n^1 es un conjunto abierto de $V_1 \cup (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Fr(B_k))$, entonces $L_2 \cap H_n^1 \neq \varnothing$, de donde $L_1 \cap L_2$ es no vacío, pues x está en L_1 y L_2, lo cual no es posible por el inciso *ii*) . Por lo tanto $x \in A_1$.
Por otra parte como $x \in \overline{L_2}$ se tiene que x está en $\overline{A_2}$ o en $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^2}$. Notemos que x no puede estar en $\overline{A_2}$ ya que x está en A_1 y sabemos que $\overline{A_2} \cap A_1 = \varnothing$, por lo tanto x es elemento de $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_n^2}$. Ahora observemos que que x no puede ser un punto límite de H_n^2, para ninguna $n \in \mathbb{N}$, ya que si $x \in \overline{H_n^2}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces como

$$\begin{aligned} \overline{H_n^2} &= \overline{V_1 \cap B}_{k_n} = V_1 \cap \overline{B}_{k_n} = V_1 \cap (B_{k_n} \cup Fr(B_{k_n})) \\ &= (V_1 \cap B_{k_n}) \cup (V_1 \cap Fr(B_{k_n})), \end{aligned}$$

pero x no puede estar en $(V_1 \cap B_{k_n})$, porque V_1 es un subconjunto de $\mathbf{X}$, por lo tanto $x \in V_1 \cap Fr(B_{k_n})$, de donde $x \in Fr(B_{k_n}) \subset A_2$, es decir, x está en A_2 lo cual es una contradicción porque $x \in A_1$. Hemos demostrado que si $x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^2}$ entonces x no está en ningún $\overline{H_n^2}$, por lo tanto, x debe ser un punto límite de $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^2}$. Entonces existe una sucesión $(x_r)_{r=1}^{\infty}$ de $\overline{bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n^2}$ tal que:

$$\lim_{r\to\infty} x_r = x\,,$$

podemos tomar a cada x_r en $H_{n_r}^2 \subset B_{k_{n_r}}$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Sabemos, por la igualdad (1.4), que los diámetros de los dominios complementarios de $\mathbf{X}$ tienden a cero, entonces:

$$\lim_{r\to\infty} \left[diám(B_{k_{n_r}}) \right] = 0 \text{ entonces } \lim_{r\to\infty} Fr(B_{k_{n_r}})\,,$$

pero como $Fr(B_{k_{n_r}})$ está en A_2 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in A_2$, lo cual no puede ser. Con lo que hemos demostrado que $L_1 \cap \overline{L_2} = \varnothing$. Mediante un razonamiento análogo se demuestra que $\overline{L_1} \cap L_2 = \varnothing$.

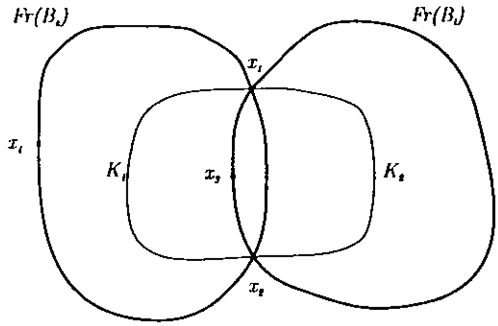

Figura 1.8:

$x_3 \in G_1 \cap \mathbf{X}$ y $x_4 \in G_2 \cap \mathbf{X}$, se tiene que:

$$\{x_3, x_4\} \subset \mathbf{X} \setminus \{x_1, x_2\}.$$

Veamos que $\{x_1, x_2\}$ corta débilmente a $\mathbf{X}$ entre los puntos x_3 y x_4, es decir, cualquier continuo L de $\mathbf{X}$ que contenga a x_3 y a x_4, se tendrá que $L \cap \{x_1, x_2\} \neq \varnothing$. Basta probarlo para un arco, pues $\mathbf{X}$ es localmente conexo. Así, consideremos un arco L en $\mathbf{X}$ con extremos x_3 y x_4, veremos que L contiene a x_1 o a x_2. Como L es un subconjunto de $\mathbf{X}$, entonces

$$L \cap C = (\mathbf{X} \cap L) \cap C = L \cap (C \cap \mathbf{X}) = L \cap \{x_1, x_2\} \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, cualquier arco contenido en $\mathbf{X}$ que una a x_3 con x_4 intersectará a $\{x_1, x_2\}$, es decir, $\mathbf{X}$ es cortado débilmente por $\{x_1, x_2\}$, lo cual contradice a la afirmación 1.36. □

Afirmación 1.38. Ninguna frontera de un dominio complementario de $\mathbf{X}$ corta débilmente a $\mathbf{X}$.

Demostración. Sea B_k un dominio complementario de $\mathbf{X}$. Para demostrar que $Fr(B_k)$ no corta débilmente a $\mathbf{X}$, tenemos que verificar que para cualquier va de z_1 a z_3 y L_2 el subarco de L que va de z_4 a z_2,

$$L_1 \cup L_2 \subset \mathbf{X} \ \ y \ \ (L_1 \cup L_2) \cap Fr(B_k) = \emptyset \,.$$

Ordenamos los B_k que se intersecten a P con sucesiones de índices $k_1, k_2, \ldots,$ y $\ell_1, \ell_2, \ldots,$ para las cuales se tiene que:

$$P \cap B_{k_n} \neq \emptyset \ , \ Fr(B_k) \cap Fr(B_{k_n}) = \emptyset \ \text{ y}$$
$$P \cap B_{\ell_m} \neq \emptyset \ , \ Fr(B_k) \cap Fr(B_{\ell_m}) \neq \emptyset \,.$$

Como $Fr(B_k) \cap Fr(B_{\ell_m}) \neq \emptyset$, por la afirmación 1.37, consta de un sólo punto, sea x_m dicho punto. Observamos que x_m no es un punto de P, ya que $P \cap Fr(B_k) = \emptyset$, por lo tanto es posible encontrar un arco E_m tal que:

i) $x_m \notin E_m$,

ii) $(Fr(B_{\ell_m}) \cap P) \subset E_m \subset Fr(B_{\ell_m})$ y

iii) $E_m \cap Fr(B_k) = \emptyset$

Se necesita encontrar un continuo que cumpla lo descrito al inicio de esta demostración, para esto se define un conjunto el cual nos servirá para poder encontrar al continuo C, sea

$$P_1 = (P \cap \mathbf{X}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)$$

La prueba de que P_1 es un subcontinuo de $\mathbf{X}$, está al final de esta demostración.

El conjunto P_1 nos ayudará a definir a C de la siguiente manera: Notemos primero que P_1 no intersecta a $Fr(B_k)$, pues a P la tomamos justamente de tal forma que $P \cap Fr(B_k) = \emptyset$, recordemos también que el conjunto de índices $k_1, k_2, \cdots$, es tal que $P \cap B_{k_n} \neq \emptyset$ y $Fr(B_k) \cap Fr(B_{k_n}) = \emptyset$. Finalmente por el inciso *iii)*, $E_m \cap Fr(B_k) = \emptyset$.

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})$, entonces bastará demostrar que $x \in P$ ya que $x \in \mathbf{X}$.

Supongamos que $x \notin P$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \cap P = \varnothing$. Por otra parte, como $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})}$, que es un compacto, entonces toda sucesión contiene una subsucesión convergente, consideremos directamente $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})$ tal que (x_k) converge a x, para facilitar la notación. Por la igualdad (1.4) sabemos que la sucesión formada por los diámetros de los dominios complementarios B_k converge a cero, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\textit{diám}(B_{k_n}) < \varepsilon/2$ para toda $n \geq N$, por lo tanto, es posible encontrar un B_{k_n} el cual este totalmente contenido en $V_\varepsilon(x)$. Así hemos llegado a que $B_{k_n} \cap P = \varnothing$, lo cual es una contradicción, ya que los B_{k_ℓ} fueron elegidos de tal forma que intercectan a P. Por lo tanto $x \in P$ con lo que queda demostrado 1.6. De esta manera $x \in P_1$.

Finalmente para el inciso *iii*), como $(Fr(B_{\ell_m}) \cap P) \subset E_m \subset Fr(B\ell_m)$, de forma análoga al inciso anterior se puede demostrar que:

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \subseteq P \cap \mathbf{X} \tag{1.7}$$

de esta forma x está en P, si $x \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m}$ por 1.7. Con lo que hemos demostrado que P_1 es un compacto.

P_1 ES CONEXO.

Para demostrar que P_1 es conexo, lo haremos por contradicción. Supongamos que $P_1 = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son abiertos, ajenos y no vacíos. Recordemos que:

$$\begin{aligned} P_1 &= (P \cap \mathbf{X}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) \\ &= \mathbf{X} \cap [P \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)] \end{aligned}$$

Es conveniente poner a P_1 de esta forma, ya que para llegar a una contradicción usaremos la parte que está entre paréntesis cuadrados, que claramente tal que x está en el dominio complementario B_r. Consideremos dos casos: $Fr(B_r) \cap Fr(B_k)$ es igual o diferente del vacío, si es el primer caso, tenemos que $r = k_n$ y de esta manera, $x \in P \cap B_{k_n}$, de donde, $x \in H_n^1$ o $x \in H_n^2$ lo que nos lleva a que $x \in N_1$ o $x \in N_2$. Ahora si se da el segundo caso, tendríamos $r = \ell_m$ entonces $x \in P \cap B_{\ell_m}$, de donde, $x \in L_m^1$ o $x \in L_m^2$, por lo tanto, $x \in N_1$ o $x \in N_2$. Resta ver qué pasa cuando x está en $Fr(B_{k_n})$ o en E_m, como estos dos conjuntos están contenidos en $\mathbf{X}$, entonces $x \in \mathbf{X}$ para cualquiera de los dos casos, así que $x \in P_1 = A_1 \cup A_2$, entonces $x \in N_1$ o $x \in N_2$, con lo que hemos demostrado una contención.

Ahora sea $x \in N_1 \cup N_2$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x está en N_1, entonces $x \in A_1, x \in H_n^1$, para alguna $n \in \mathbb{N}$ o $x \in L_m^1$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Claramente, para el caso en que x esté en A_1, se tiene que $x \in P_1$; para los otros dos casos basta ver que x esté en P, ya que P está contenido en $P \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)$. Si $x \in H_n^1$, entonces $x \in P \cap B_{k_n}$, análogamente si $x \in L_m^1$, entonces $x \in P \cap B_{\ell_m}$. Por lo tanto en cualquier caso tenemos que

$$x \in P \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_{k_n})) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m).$$

Justificación (2). Supóngase que existe $x \in N_1 \cap N_2$, entonces x está en $A_1 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^1) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} L_m^1)$ y en $A_2 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} L_m^2)$, se tienen los siguientes nueve casos:

i) $x \in A_1 \cap A_2$

ii) $x \in A_1 \cap H_n^2$ o $x \in A_2 \cap H_n^1$

iii) $x \in A_1 \cap L_m^2$ o $x \in A_2 \cap L_m^1$

iv) $x \in H_i^1 \cap H_j^2$ o $x \in L_i^1 \cap L_j^2$

v) $x \in H_n^1 \cap L_m^2$ o $x \in L_m^1 \cap H_n^2$

$N_2 \cap H_n^1$, entonces $x \in N_1 \cap N_2$ lo cual contradice la afirmación anterior. Obsérvese que para el caso en que x estuviera en L_m^1, se demuestra de manera análoga al caso anterior mediante un cambio de índices. Por lo tanto a x sólo le queda estar en A_1.

Por otra parte, como $x \in \overline{N}_2$, entonces $x \in \overline{A}_2 \cup (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2}) \cup (\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m})$, pero x no puede estar en $\overline{A}_2$ porque entonces x estaría en $A_1 \cap \overline{A}_2$ lo cual no es posible, por definición de A_1 y A_2, son una separación para P_1, por lo tanto sólo quedan dos posibilidades: $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2}$ o bien, $x \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m}$.

Vamos a suponer el primer caso, es decir, $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2}$, luego observamos que x no puede ser punto límite de ningún H_n^2, para ninguna $n \in \mathbb{N}$, ya que si $x \in \overline{H_n^2}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces como $\overline{H_n^2} = \overline{P \cap B_{k_n}} = P \cap \overline{B}_{k_n} = P \cap (B_{k_n} \cup Fr(B_{k_n})) = (P \cap B_{k_n}) \cup (P \cap Fr(B_{k_n}))$, se tiene que $x \notin P \cap B_{k_n}$, pues $x \in A_1$ y A_1 es un subconjunto de $\mathbf{X}$, por lo tanto $x \in P \cap Fr(B_{k_n})$, de donde, $x \in Fr(B_{k_n}) \subset A_2$, es decir, $x \in A_2$ lo cual es una contradicción porque $x \in A_1$. Hemos demostrado que, si $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2}$, entonces x no está en ningún $\overline{H_n^2}$; de esta manera x debe se un punto límite de $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2}$, que es un compacto, entonces toda sucesión contiene una subsucesión convergente, consideremos directamenet a $(x_r)_{r=1}^{\infty}$ de $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2$ tal que:

$$\lim_{r \to \infty} x_r = x\,,$$

para facilitar la notación. Podemos tomar a cada x_r en $H_{n_r}^2 \subset B_{k_{n_r}}$ para cada $r \in \mathbb{N}$, pero sabemos, por la igualdad (1.4), que los diámetros de los dominios complementarios de $\mathbf{X}$ tienden a cero, entonces:

$$\lim_{r \to \infty} \left[\textit{diám}(B_{k_{n_r}}) \right] = 0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{r \to \infty} Fr(B_{k_{n_r}}) = \{x\}$$

pero como $Fr(B_{k_n})$ está en A_2 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in A_2$, lo cual no puede ser. Con lo que se demostró que $N_1 \cap \overline{N}_2 = \varnothing$. Para el caso $\overline{N}_1 \cap N_2$, la demostración es análoga. Por lo tanto P no es conexo, lo cual es una contradicción.

a $\mathbf{X}$. Por otra parte $h(Fr(B_k))$ es una curva cerrada simple que no corta débilmente a $\mathbf{X}$ y contiene a un punto de $\mathbf{X} \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} Fr(B_n))$, lo cual contradice a la afirmación 1.39. La contradicción surge por haber supuesto que $\mathbf{X}$ no es una curva cerrada simple. Por lo tanto lo es, con lo que queda demostrado que *la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que es localmente conexo.*

Capítulo 2

Teorema de F. Burton Jones

En su tesis doctoral, E. E. Moise demostró que existe un continuo en el plano que es homeomorfo a cada uno de sus subcontinuos [21]. Posteriormente, Bing demostró que este continuo es homogéneo [1]. Ambos resultados contradicen un resultado que publicó G. Choquet [5], que dice, *un continuo homogéneo del plano debe ser una curva cerrada simple.*

Choquet supuso en su prueba la hipótesis de que el continuo es *aposindético*. El objetivo de este capítulo será demostrar el teorema de Choquet, agregándole la hipótesis de ser aposindético. De esta manera, una curva cerrada simple del plano quedará caracterizada de tal forma que es el único continuo homogéneo del plano que es aposindético. Este resultado se debe a F. Burton Jones.

2.1 Preliminares para el teorema de Jones

En esta sección se definen dos conceptos, que un espacio sea semilocalmente conexo (definición 2.1) y el ser aposindético (definición 2.2), posteriormente se demuestra que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 2.1. Diremos que un espacio X es *semilocalmente conexo en* p, Supongamos ahora que X es semilocalmente conexo y sean x y $y \in \mathbf{X}$ dos puntos diferentes, queremos mostrar que existe un subcontinuo A de X tal que $x \in int(A)$ pero $y \notin A$.

Como X es un espacio métrico, existen abiertos ajenos, U_x y U_y de X tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$. Además por hipótesis, X es semilocalmente conexo, así que existe un abierto V_y que cumple: $y \in V_y \subset U_y$ y además $X \setminus V_y$ tiene una cantidad finita de componentes. Sean $G_1, \ldots, G_n$ las componentes de $X \setminus V_y$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x \in G_1$ y, por como se definió a V_y, se tiene que $x \in int(X \setminus V_y)$ y por otra parte, los conjuntos G_i son compactos y mutuamente ajenos, entonces $d(G_i, G_j) > 0$, para toda $i \neq j$; sea

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \operatorname{mín}_{i \neq j}\{d(G_i, G_j)\},$$

observemos que $\varepsilon_1 > 0$, así que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset int(X \setminus V_y)$ con $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Notemos que $V_\varepsilon(x) \subset G_1$. En caso contrario se tendría que $V_\varepsilon(x) \cap G_j \neq \emptyset$, para alguna $j \neq 1$, sea pues $z \in V_\varepsilon(x) \cap G_j$, entonces $\varepsilon > d(x,z) \geq d(G_1, G_j) \geq \varepsilon_1$, lo cual implica que $\varepsilon \geq \varepsilon_1$. Pero esto es una contradicción, entonces $V_\varepsilon(x) \subset G_1$. Por lo tanto G_1 es un continuo que satisface que

$$x \in int_X(G_1) \subset G_1 \subset X \setminus \{y\}.$$

$\square$

2.2 Demostración del Teorema

En esta sección demostraremos que un continuo homogéneo del plano que es aposindético debe ser una curva cerrada simple. La demostración de este teorema está basada en la prueba que dio G. Choquet, quien supuso la hipótesis de ser aposindético, es decir, el resultado originalmente se enunció como: *Si un continuo homogéneo está en el plano, debe ser una curva cerrada simple.*

Justificación. Nótese que la imagen de la frontera de algún dominio complementario bajo h, está contenida en la frontera de $\mathbf{X}$, es decir, $h(J_i) \subset Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{X})$. Si esto no pasara existirían, un punto $p \in h(J_i) \setminus Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{X})$ y un abierto U de $\mathbb{R}^2$ tal que $p \in U \subset \mathbf{X}$ pero por *el teorema de la invariancia del dominio en* $\mathbb{R}^2$ [11, Corolario 18.9, pág 110] tendríamos que $h^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$, que cumple con que $h^{-1}(p) \in h^{-1}(U) \subset \mathbf{X}$, de donde $h^{-1}(p) \notin J_i$. Lo que es una contradicción, por lo tanto, $h(J_i) \subset Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{X})$.

Como h es un homeomorfismo, $h(J_i)$ también es una curva cerrada simple, por *el teorema de la curva de Jordan*, $h(J_i)$ genera dos dominios complementarios que dividen al plano en dos regiones, H y K, de donde $\mathbb{R}^2 \setminus h(J_i) = H \cup K$. Por hipótesis tenemos que, $\mathbf{X} \setminus J_i$ es conexo. La conexidad se preserva bajo homeomorfismos, entonces $h(\mathbf{X} \setminus J_i) = \mathbf{X} \setminus h(J_i)$ es conexo, y por otra parte, $\mathbf{X} \setminus h(J_i)$ está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus h(J_i)$, entonces $\mathbf{X} \setminus h(J_i)$, está contenido en H o en K; podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\mathbf{X} \setminus h(J_i) \subset H$, y entonces $K \cap \mathbf{X} = \varnothing$. Recordemos que K es un dominio complementario, cuya frontera está contenida en $\mathbf{X}$, entonces existe un elemento D de $\mathcal{G}$ tal que $K \subset D$, pero si un dominio complementario está contenido en otro, las fronteras preservan la contención, es decir, $Fr(K) \subset Fr(D)$. Para ver esto, sea $x \in Fr(K)$ entonces por la definición de frontera, cualquier abierto V que contenga a x, cumple que

$$V \cap K \neq \varnothing \ \text{ y } \ V \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K) \neq \varnothing .$$

Como K está contenida en D, se tiene que: $V \cap D \neq \varnothing$ y $V \cap \mathbf{X} \neq \varnothing$, lo cual implica que $V \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \varnothing$, entonces $x \in Fr(D)$, por lo tanto $Fr(K) \subset Fr(D)$.

Como la frontera de K es una curva cerrada simple y además está contenida en la frontera de D, que también es una curva cerrada simple, es decir, una curva cerrada simple está contenida en otra, eso pasa sólo si son iguales, entonces $Fr(D) = Fr(K)$. Por lo tanto, $K = D$ lo que implica que la frontera de K es un J_k para alguna $k \in \mathbb{N}$. Con lo que queda demostrada

$\mathbf{X} \setminus \{a, b\}$ no es conexo.

Sabemos que cualquier continuo contiene un punto que no lo corta [24, Teorema 6.6, pág. 89], como $\mathbf{X}$ es homogéneo, ningún punto de $\mathbf{X}$ lo corta. Observemos que, en nuestro caso a es *un punto de separación local*[1], ya que $\mathbf{X} \setminus \{b\}$ es conexo y $\mathbf{X} \setminus \{a, b\}$ no lo es. Nuevamente por la homogeneidad de $\mathbf{X}$, todo punto de $\mathbf{X}$ es de separación local. Pero en un continuo, todos los puntos, salvo una cantidad numerable deben ser de separación local [29, Teorema 9.1, pág. 61], lo cual contradice nuestra suposición de que $\mathbf{X}$ no contiene ningún punto de orden dos.

Así, en los dos casos se llega a una contradicción por haber supuesto que $\mathbf{X}$ no contiene ningún punto de orden dos, entonces contiene al menos uno, por ser $\mathbf{X}$ homogéneo, todos sus puntos son de orden dos, por el lema 1.32 $\mathbf{X}$ es una curva cerrada simple. □

---

[1]Sean X un continuo y $p \in X$. Se dice que x es ***un punto de separación local de*** X si existe un abierto U de X tal que $X \setminus \{p\}$ no es conexo.

Capítulo 3

Teorema de Herman J. Cohen

En el capítulo 1 demostramos que la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que es localmente conexo, este resultado se debe a Mazurkiewicz. En este capítulo veremos que el resultado de Mazurkiewicz arroja dos caracterizaciones más de la curva cerrada simple. La primera será demostrar que si un continuo homogéneo del plano contiene una curva cerrada simple, entonces debe ser una curva cerrada simple. La segunda será demostrar que una curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que es arcoconexo.

3.1 Preliminares

Definición 3.1. Decimos que un conjunto es G_δ, si es la intersección de una cantidad a lo más numerable de conjuntos abiertos.

En la definición 1.18 se definen los espacios que son *conexos en pequeño*, en el siguiente lema se retoma este concepto.

Lema 3.2. Si X es un espacio métrico completo[1] tal que no es conexo en

[1] X es completo si toda sucesión de Cauchy converge en X.

los V_n se tiene que si $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$, entonces $p \in G$, por lo tanto, G es conexo en pequeño en p, lo cual contradice la forma en que está definido G. La contradicción surge por haber negado la existencia de U, por lo tanto X contiene un conjunto abierto con una cantidad no numerable de componentes.

□

Comentario 3.3. Si al lema anterior le cambiáramos la hipótesis de conexo en pequeño por la de conexidad local, el resultado no sería cierto en general, ya que Grace dio un ejemplo de un espacio que no es localmente conexo en ninguno de sus puntos, el cual no contiene un conjunto abierto con una cantidad no numerable de componentes [10].

Definición 3.4. Decimos que un continuo X es un *triodo*, si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres conjuntos no vacíos de X, separados dos a dos. Diremos que X es un *triodo simple* si Z es un punto de X y los tres conjuntos son arcos. Si un espacio no contiene ningún triodo se dice que es *atriódico*

Lema 3.5. Todo continuo homogéneo del plano no tiene triodos simples.

Demostración. Sea X un continuo homogéneo del plano. Si X es localmente conexo, por el teorema de Mazurkiewicz 1.26, X es una curva cerrada simple y no contiene triodos simples. Si X no es localmente conexo, entonces no es conexo en pequeño, por el teorema 1.20. De esta forma, por el lema 3.2, X contiene un conjunto abierto U con un número no numerable de componentes ajenas. Si X tuviera un triodo simple, como X es homogéneo tendríamos un triodo simple en cada una de las componentes de U. Pero esto no es posible ya que el plano no contiene una cantidad no numerable de triodos simples ajenos dos a dos [23, Teorema 84, pág. 222]. Por lo tanto X es atriódico. □

Lema 3.6. Dada una colección de curvas cerradas simples ajenas $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en el plano, donde A es un conjunto no numerable de índices, existen tres de ellas, digamos $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}$ y J_{α_3}, tales que J_{α_2} separa a J_{α_1} y J_{α_3} en el plano.

Veamos que el inciso $i)$ no se puede dar. Sean J_{α_β} los elementos de la familia $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que intersectan a $Fr(D)$, entonces

$$Fr(D) \subset \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} J_{\alpha_\beta}\,,$$

notemos que los J_{α_β} son ajenos también. Por lo tanto, por el lema 3.6, existen tres curvas cerradas simples, digamos $J_{\alpha_{\beta_1}}$, $J_{\alpha_{\beta_2}}$ y $J_{\alpha_{\beta_3}}$ tales que $J_{\alpha_{\beta_2}}$, separa a $J_{\alpha_{\beta_1}}$ y $J_{\alpha_{\beta_3}}$ en el plano. Sean U y V los dominios complementarios de $J_{\alpha_{\beta_2}}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $J_{\alpha_{\beta_1}} \subset U$ y $J_{\alpha_{\beta_3}} \subset V$. Por otra parte

$$D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^2 \setminus J_{\alpha_{\beta_2}} = U \cup V\,.$$

Supongamos que $D \subset U$, entonces $\overline{D} \cap J_{\alpha_{\beta_3}} = \varnothing$, lo cual es una contradicción, pues los J_{α_β} se eligieron de tal forma que intersectan a $Fr(D)$. Por lo tanto $Fr(D) \subset J_\alpha$, para alguna $\alpha \in \mathcal{A}$.

Demostraremos que $Fr(D) = J_\alpha$. Sean G_1 y G_2 los dominios complementarios de J_α, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $D \subset G_1$. Demostraremos que $D = G_1$ y así tendremos que $Fr(D) = Fr(G_1) = J_\alpha$. Supongamos que D es un subconjunto propio y no vacío en el conexo G_1, entonces $Fr_{G_1}(D) \neq \varnothing$, y así $Fr_{G_1}(D) \cap J_\alpha \neq \varnothing$. Por otro lado

$$Fr_{G_1}(D) \subset Fr(D) \subset J_\alpha\,,$$

de esta manera, $Fr_{G_1}(D) \subset J_\alpha$ lo cual es una contradicción, pues D es un subconjunto propio de G_1. Por lo tanto $Fr(D) = J_\alpha$. Así tenemos el inciso $ii)$

Sea J la curva cerrada simple de $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ la cual coincide con $Fr(D)$. Resta demostrar que J no corta a X. Vamos a suponer lo contrario, es decir, que $X \setminus J$ no es conexo, entonces $X \setminus J = A \cup B$, donde A y B son dos conjuntos abiertos ajenos de $\mathbf{X}$. Como J es una curva cerrada simple, tiene dos dominios complementarios G_1 y G_2. Sabemos que uno de ellos es acotado y el otro no lo es; podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

Esta unión debe ser ajena, ya que dos curvas cerradas simples en $\mathbf{X}$ no se pueden intersectar, pues formarían un triodo simple lo cual contradiría al lema 3.5. Por otra parte, dicha unión de curvas cerrada simples debe ser no numerable, pues si no, estaríamos poniendo al continuo $\mathbf{X}$ como la unión numerable de cerrados y esto no es posible por [24, Teorema 5.16, pág. 80]. Por lo tanto

$$\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} J_\alpha . \tag{3.2}$$

Así, estas curvas cerradas simples cumplen las hipótesis del lema 3.6, entonces existe una curva cerrada simple J_{α_2} en $\{J_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ que corta a $\mathbf{X}$ y, nuevamente como $\mathbf{X}$ es homogéneo, entonces todas las curvas $\{J_\alpha\}$ cortan a $\mathbf{X}$. Esto contradice al lema 3.7, pues en este lema se asegura que $\mathbf{X}$ contiene una que no lo corta. Así la contradicción surge de haber supuesto que $\mathbf{X}$ no es una curva cerrada simple, por lo tanto lo es. □

Teorema 3.9 (Herman J. Cohen, 1949). Si $\mathbf{X}$ es un continuo homogéneo y arcoconexo en el plano, entonces $\mathbf{X}$ es una curva cerrada simple.

Demostración. La demostración la haremos por contradicción. Supóngase que $\mathbf{X}$ no es una curva cerrada simple, por el teorema 3.8, $\mathbf{X}$ no contiene ninguna curva cerrada simple. Por hipótesis $\mathbf{X}$ es arcoconexo, entonces cualquier par de puntos pueden ser unidos por un arco que se queda totalmente contenido en $\mathbf{X}$, este arco es único, ya que si hubiese otro arco en $\mathbf{X}$ con los mismos extremos se formaría una curva cerrada simple lo cual contradiría nuestra suposición.

Sean x un punto de $\mathbf{X}$ y ab un arco que contiene a x, el cual lo denotaremos por axb, definimos a los siguientes conjuntos:

$$M_1 = \{y \in \mathbf{X} \setminus axb \; : \; yx \supset ax\} \;\; \text{y} \;\; M_2 = \{y \in \mathbf{X} \setminus axb \; : \; yx \supset bx\}. \tag{3.3}$$

Veamos primero que M_1 y M_2 son conjuntos no vacíos. Sea $y_1 \in \mathbf{X} \setminus axb$ y consideramos el arco xy_1, como $\mathbf{X}$ no contiene triodos simples, se tiene que

Anteriormente se justificó que $\mathbf{X}$ es la unión de M_1, M_2 y el arco axb y, por las igualdades (3.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} p_i x \setminus ax\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} q_i x \setminus bx\right) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} p_i x\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} q_i x\right) \end{aligned}$$

Estamos poniendo al continuo $\mathbf{X}$ como la unión numerable de conjuntos cerrados 3.5. Por el teorema de la categoría de Baire [9, Teorema 10.3, pág. 250] uno de estos arcos debe contener un subconjunto abierto de $\mathbf{X}$. De esta forma si U es dicho abierto, $\mathbf{X}$ tendría que ser localmente conexo en cada punto de U, y en virtud de la homogeneidad, $\mathbf{X}$ es localmente conexo. Por el teorema de Mazurkiewicz, teorema 1.26, $\mathbf{X}$ debería ser una curva cerrada simple, lo cual contradice nuestra suposición. $\square$

Capítulo 4

Teorema de R. H. Bing

Este capítulo aborda una de las caracterizaciones más importantes para una curva cerrada simple, pues se demostrará que una curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que contiene un arco.

Teorema 4.1 (R. H. Bing, 1959). Una curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que contiene un arco.

Para demostrar este teorema haremos una lista de propiedades que posee cualquier continuo homogéneo en el plano, el cual contiene un arco y no es una curva cerrada simple; así llegaremos a que dicho continuo no puede existir.

4.1 Propiedades básicas

En todo el capítulo X denotará un continuo homogéneo en el plano que contiene un arco pero no es una curva cerrada simple.

Propiedad 4.2. X no es localmente conexo.

Demostración. En el capítulo 1 se demostró que *el único continuo homogéneo localmente conexo del plano es la curva cerrada simple*, por lo tanto si X fuera

Demostración. Por el teorema 3.8 sabemos que todo continuo homogéneo en el plano que contiene una curva cerrada simple, es una curva cerrada simple, por lo tanto, si **X** tuviera una curva cerrada simple **X** sería una y estamos bajo la suposición de que **X** no es una curva cerrada simple. □

4.2 Arcocomponentes

En esta sección demostraremos que la cerradura de cualquier *arcocomponente de* **X** es un conjunto homogéneo y para esto empezaremos con algunas definiciones.

Definición 4.7. Diremos que un subconjunto A de **X** es una *arcocomponente* si es maximal [2]con respecto a la propiedad de que para cualquier par de puntos x y y de A se tiene que x y y están en un arco contenido en A.

Es conveniente trabajar sólo con ciertas partes de las arcocomponentes. Estas partes se les llama *rayos* y de definen como sigue.

Definición 4.8. Sean A una arcocomponente de **X** y x y y dos puntos diferentes de A. La unión de todos los arcos en **X** que tienen a x como punto extremo y que contengan a y, le llamaremos un *rayo que empieza en x.*

Cabe notar que estos rayos difieren de un rayo ordinario del plano, en el sentido que los rayos aquí definidos no son cerrados ni "derechos"[3] necesariamente. Observemos que, por la propiedad 4.6, si dos puntos se pueden conectar por un arco en **X**, entonces dicho arco es único.

Propiedad 4.9. Todo rayo en **X** es la unión numerable de arcos.

---

[2]Lo de maximal se refiere a que si existiera otro subconjunto C con la misma propiedad y $A \subset C$, entonces $C = A$

[3]Aquí, derechos, tradúzcalo como un segmento recto en el plano

Demostración. Sean A una arcocomponente de $\mathbf{X}$ y p un punto de A. Como A está contenido en $\mathbf{X}$ y además $\mathbf{X}$ es homogéneo, tenemos que p está en un arco abierto [4] de $\mathbf{X}$, es decir, $p \in ab \setminus \{a, b\}$. Como $\mathbf{X}$ no tiene triodos simples (propiedad 4.5), hay un rayo R_1 que tiene a p como punto inicial y que pasa por a, es decir, R_1 es la unión de todos los arcos de $\mathbf{X}$ que tienen a p como punto inicial y que contienen a a y, lo que se afirma es que todos estos arcos se quedan contenidos en A pues A es una arcocomponente. Análogamente hay un rayo R_2 que tiene a p como punto inicial y que pasa por b.

Ahora resta verificar que los rayos R_1 y R_2 satisfacen lo descrito en los incisos i), ii) y iii).

Para el inciso i), los rayos R_1 y R_2 están contenidos en A, por lo tanto sólo hay que justificar que si $x \in A$, se tiene que $x \in R_1 \cup R_2$. Esto pasa pues basta con fijarse en el arco px, entonces si a o b están en px entonces px está en R_1 o en R_2. Si ni a ni b están en px entonces px está contenido en pa o en pb, ya que de otra forma se tendría un triodo. Por lo tanto R_1 y R_2 cumplen i).

Para el inciso ii), si R_1 y R_2 se intersectaran en otro punto distinto de p se formaría una curva cerrada simple, pero eso no es posible por la propiedad 4.6. Por lo tanto se tiene el inciso ii).

El iii) se cumple por como se construyen R_1 y R_2. □

Propiedad 4.11. $\mathbf{X}$ tiene una cantidad no numerable de arcocomponentes.

Demostración. Si $\mathbf{X}$ tuviera sólo una cantidad numerable de arcocomponentes, se seguiría de las propiedades 4.9 y 4.10 que $\mathbf{X}$ sería la unión numerable de arcos, ya que la propiedad 4.10 dice que cada arcocomponente es la unión de dos rayos y la propiedad 4.9 dice que cada rayo es la unión

[4] Diremos que A es un *arco abierto* si no contiene a sus extremos

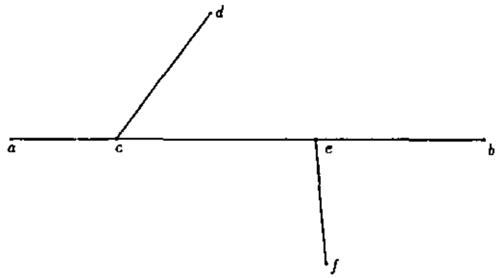

Figura 4.1: cd y ef están en lados opuestos a ab

si para toda $\varepsilon > 0$ existen, un número natural N tal que para toda $k > N$ existe un homeomorfismo $h_k : A_k \to A_0$ tal que $d(x, h_k(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in A_k$.

A los homeomorfismos que son como el de la definición anterior se les suele llamar *ε-homeomorfismos*, ya que mueven a los puntos del dominio en menos que ε.

Definición 4.14. Sean ab, cd y ef arcos como en la definición 4.12 y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos que converge de manera homeomorfa a ab. Diremos que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge de manera homeomorfa por el lado cd a ab*, si ningún arco de $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ intersecta a ab y si todos excepto quizás una cantidad finita intersectan a cd, es decir:

i) $A_n \cap ab = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

ii) $A_k \cap cd \neq \emptyset$ a partir de cierta $k \in \mathbb{N}$.

Definición 4.15. Se dice que dos sucesiones de arcos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergen de manera homeomorfa en lados opuestos* al arco ab, si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge por el lado cd y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ por el lado ef.

Teorema 4.16. Toda colección no numerable $\mathcal{W}$ de arcos en el plano mutuamente excluyentes tiene una subcolección numerable $\mathcal{W}'$, tal que cada existe una cantidad no numerable de arcocomponentes, por lo tanto, existe una cantidad no numerable de homeomorfismos $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, donde el dominio para cada h_α es $ab\cup\overline{R}$ tal que si $\alpha\neq\beta$, entonces $h_\alpha(ab)$ y $h_\beta(ab)$ están en arcocomponentes distintas. Para cada $\alpha\in\mathcal{A}$, sea

$$A_\alpha = h_\alpha(ab)\,,$$

la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ cumple las hipótesis del teorema 4.16, entonces existen un arco A_0 y dos sucesiones de arcos (A_{2n}) y (A_{2n+1}) de $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que convergen de manera homeomorfa en lados opuestos a A_0.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A_0 = ab$. Demostraremos que alguno de los arcos A_{2k} o A_{2k+1} corta débilmente[5] a $\overline{R}$ entre un punto de A_0 y otro en alguno de los arcos A_{2k} o A_{2k+1}.

Como las sucesiones (A_{2n}) y (A_{2n+1}) convergen de manera homeomorfa en lados opuestos a A_0, podemos suponer que, para cada $n\in\mathbb{N}$, A_{2n} está arriba de A_0 y que A_{2n+1} está abajo de A_0, además para toda $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $k>N$ existe un ε-homeomorfismo $h_{2k}: A_{2k}\to A_0$ análogamente existe $h_{2k+1}: A_{2k+1}\to A_0$. Pensaremos en los arcos de la forma A_{2k}, se justifica de manera análoga para los A_{2k+1}. Para alguna $k>N$ $A_{2k}\cap\overline{R}\neq\varnothing$, además como los A_{2k} convergen a A_0, $A_{2k}\cap A_0=\varnothing$, entonces existe $q\in A_{2k}\cap(\overline{R}\setminus A_0)$. De esta manera si $k_1>k$, el arco A_{2k_1} corta débilmente a $\overline{R}$ entre p y q, es decir el arco pq intersecta a A_{2k_1} formando un triodo, lo cual no es posible por la propiedad 4.5. La contradicción surge por haber supuesto que todo rayo que tiene a p como punto inicial no se queda contenido en $\overline{R}$. □

Propiedad 4.18. Si $\overline{R}_1$ es la cerradura de un rayo de $\mathbf{X}$, entonces $\overline{R}_1$ contiene un continuo $\overline{R}$ que es irreducible respecto a la propiedad de ser la cerradura de un rayo.

[5]Ver definición 1.6

Demostración. Como $p \in \mathbf{X}$, entonces p está en una arcocomponente A de $\mathbf{X}$ y, por la propiedad 4.10, $A = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 son dos rayos que tienen a p como punto inicial y, además es en el único punto en que se intersectan.

Al rayo R_1 le aplicamos la propiedad 4.18, entonces se tiene que: $\overline{R_1}$ contiene un continuo $\overline{R'}$ el cual es irreducible con respecto a la propiedad de ser la cerradura de un rayo.

Sea $q \in R'$, como $\mathbf{X}$ es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tal que $h(q) = p$, entonces $h(R')$ es un rayo contenido en R_1 y p es un elemento de $h(R')$. Además $\overline{R'}$ es irreducible con respecto a la propiedad de ser la cerradura de un rayo, por lo tanto, $h(\overline{R'})$ lo es también. Hacemos $R = h(R')$, entonces R así definido satisface los requerimientos. $\square$

Propiedad 4.20. Los rayos y las arcocomponentes de $\mathbf{X}$ que los contienen tienen la misma cerradura, es decir, si A es una arcocomponente de $\mathbf{X}$ y R es un rayo de A, entonces $\overline{R} = \overline{A}$.

Demostración. Sean A una arcocomponente de $\mathbf{X}$ y R un rayo en A. Sabemos por hipótesis que $R \subset A$ y, queremos demostrar que $\overline{R} = \overline{A}$. Claramente $\overline{R} \subseteq \overline{A}$, así que resta demostrar la otra contención.

Supóngase que no se tiene la otra contención, entonces existe $p \in A \setminus \overline{R}$, por la observación 4.19, podemos encontrar un rayo R' que tenga a p como punto inicial y que $\overline{R'}$ sea irreducible con respecto a ser la cerradura de un rayo. Entonces $\overline{R'}$ no contiene a R, es decir, se tiene que $R \setminus \overline{R'} \neq \varnothing$.

Sea entonces un punto q en $R \setminus \overline{R'}$, análogamente al caso anterior, podemos encontrar un rayo R'' que empiece en q y tal que $\overline{R''}$ sea irreducible con respecto a ser la cerradura de un rayo.

Mostraremos que

$$R' \cap R'' = \varnothing \tag{4.1}$$

para esto veamos primero que R' no está contenido en R'' y que R'' no está

Demostración. Supóngase que A_1 y A_2 son dos arcocomponentes de $\mathbf{X}$ tales que la intersección de sus cerraduras es no vacía, sean $p \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ y A_p la arcocomponente que contiene a p.

Afirmación: $\overline{A}_p \subseteq \overline{A}_1$ y $\overline{A}_p \subseteq \overline{A}_2$

Sabemos que A_1 es la unión de dos rayos P_1 y P_2 (propiedad 4.10), entonces tenemos que $\overline{A}_1 = \overline{P}_1 \cup \overline{P}_2$. Como $p \in \overline{A}_1$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $p \in \overline{P}_1$. Entonces por la propiedad 4.17 existe un rayo R que tiene a p como punto inicial y que se queda contenido en $\overline{P}_1$, de esta manera R está contenido en $\overline{A}_1$. Ahora como A_p es la unión de dos rayos R_1 y R_2 que tienen a p como su punto inicial, lo que pasa para R pasa para R_1 y R_2. Por lo tanto $\overline{A}_p \subseteq \overline{A}_1$, análogamente $\overline{A}_p \subseteq \overline{A}_2$.

Ahora consideremos un punto $x \in A_1$, por la observación 4.19, existe un rayo R_x que tiene a x como su punto inicial y $\overline{R}_x$ es irreducible con respecto de ser la cerradura de un rayo. Entonces R_x es un rayo de A_1, entonces por la propiedad 4.20, $\overline{R}_x = \overline{A}_1$. Por otra parte $\overline{A}_p \subseteq \overline{A}_1$ y $\overline{R}_x$ es irreducible respecto de ser la cerradura de un rayo, lo cual implica que, como $R_1 \subset A_1$, se tiene que $\overline{R}_1 = \overline{R}_x$. Por otra parte $\overline{R}_1 = \overline{A}_p$ (propiedad 4.20) y $\overline{R}_x = \overline{A}_1$. Por tanto $\overline{A}_1 = \overline{A}_p$. Análogamente se demuestra que $\overline{A}_2 = \overline{A}_p$, así $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$. $\square$

Propiedad 4.22. La cerradura de cada arcocomponente de $\mathbf{X}$ es un conjunto homogéneo.

Demostración. Sea A una arcocomponente de $\mathbf{X}$, queremos verificar que $\overline{A}$ es homogéneo. Demostraremos que si $p \in A$ y $q \in \overline{A} \setminus A$, existe un homeomorfismo $h : \overline{A} \to \overline{A}$ tal que $h(p) = q$.

Como $\mathbf{X}$ es homogéneo, existe un homeomorfismo $h_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tal que $h_0(p) = q$. Por otra parte, las arcocomponentes se preservan bajo homeomorfismos, además la cerradura de A y la de $h(A)$ se intersectan, entonces por la propiedad 4.21, se tiene que $\overline{A} = \overline{h(A)} = h(\overline{A})$.

Restará ver que existe un homeomorfismo $h : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ para el caso en

Ahora, por la igualdad (4.2) se tiene que A es denso en $\mathbf{X}'$ y, como $\mathbf{X}'$ es homogéneo, esto pasa para cualquier arcocomponente de $\mathbf{X}'$. Por lo tanto las arcocomponentes de $\mathbf{X}'$ son densas en $\mathbf{X}$. □

En el resto del capítulo, $\mathbf{X}'$ denotará un continuo homogéneo en el plano, cuyas arcocomponentes son densas y no contiene curvas cerradas simples.

Propiedad 4.24. Si C es un subcontinuo no degenerado de $\mathbf{X}'$ que no es un arco entonces C intersecta a una cantidad no numerable de arcocomponentes de $\mathbf{X}'$.

Demostración. Cabe notar que, por la propiedad 4.11, $\mathbf{X}'$ tiene una cantidad no numerable de arcocomponentes.

Para el caso $C = \mathbf{X}'$ se tiene que C intersecta a una cantidad no numerable de arcocomponentes, así supondremos que C es un subcontinuo propio de $\mathbf{X}'$. Sean p un punto de $\mathbf{X}' \setminus C$ y A' la arcocomponente de $\mathbf{X}'$ que contiene a p.

Obsérvese que todo rayo de $\mathbf{X}'$ es denso en $\mathbf{X}'$, ya que si R es un rayo de A', entonces la cerradura de R y la de A' son iguales, (propiedad 4.20) es decir:

$$\overline{R} = \overline{A'} = \mathbf{X}'.$$

Sabemos que las arcocomponentes son la unión de dos rayos, así A' es la unión de dos rayos R_1 y R_2 que tiene a p como su punto inicial y, además, es en p en el único punto en que se intersectan. Podemos elegir una sucesión de puntos $p_1, p_{-1}, p_2, p_{-2}, \ldots$, de puntos en A', tomando los puntos de índice negativo en R_1 y los de índice positivo en R_2 tal que:

$$A' = \bigcup_{i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} p_i p_{i+1}\,, \tag{4.3}$$

donde los arcos $p_i p_{i+1}$ no se intersectan, salvo en sus puntos extremos, entonces

$$A' \cap C = \Big(\bigcup_{i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} p_i p_{i+1} \Big) \cap C = \bigcup_{i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} (p_i p_{i+1} \cap C)\,,$$

Propiedad 4.27. Todo subcontinuo propio y no degenerado de $\mathbf{X}'$ es un arco.

Demostración. Supóngase que C es un subcontinuo no degenerado de $\mathbf{X}'$ y que C no es un arco. Por la propiedad 4.24, sabemos que C intersecta a una cantidad no numerable de arcocomponentes, entonces podemos elegir un arco en cada arcocomponente para así formar una colección no numerable de arcos en el plano $\{B_\alpha\}$, tal que $C \cap B_\alpha \neq \varnothing$ para toda α; podemos pedir que los extremos de los arcos B_α no estén en C, pues los rayos son densos en $\mathbf{X}'$.

Por el teorema 4.16, la colección $\{B_\alpha\}$ contiene un arco B y dos sucesiones $B_1, B_3, \ldots$, y $B_2, B_4, \ldots$, que convergen de manera homeomorfa a B por lados opuestos. Además el continuo C intersecta a todos los arcos, así que C no intersecta a los extremos de B de esta forma podemos aplicar el teorema 4.25, el cual dice que si $h : M \to \mathbb{R}^2$ es un encaje, donde $M = C \cup B \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots$, entonces las sucesiones $h(B_1), h(B_3), \ldots$, y $h(B_2), h(B_4), \ldots$, convergen de manera homeomorfa a $h(B)$ en lados opuestos. De esta manera notamos que si b está en el arco abierto B, entonces $h(b)$ es un punto no accesible desde $\mathbb{R}^2 \setminus h(B)$, lo cual es una contradicción ya que $\mathbf{X}'$ es homogéneo y hay puntos de $\mathbf{X}'$ que sí son accesibles. La contradicción surge de suponer que C no es un arco, por lo tanto lo es. □

Definición 4.28. Diremos que un continuo X es *indescomponible* si no es la unión de dos subcontinuos propios de él.

Propiedad 4.29. $\mathbf{X}'$ es indescomponible.

Demostración. Si $\mathbf{X}'$ fuese la unión de dos subcontinuos propios, éstos deberían ser arcos (propiedad 4.27). Es decir $\mathbf{X}' = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son arcos, consideramos un punto en $x \in A_1$ tal que $ord(x, \mathbf{X}') = 2$ y, como $\mathbf{X}'$ es homogéneo entonces todos sus puntos son de orden dos. Así por el lema 1.32, $\mathbf{X}'$ es una curva cerrada simple, pero estamos bajo la suposición

Como, ninguna componente de $\mathbf{X}' \setminus (V_1 \cup V_n)$ intersecta a xy y a $\mathbf{X}' \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i$ al mismo tiempo, entonces $\mathbf{X}' \setminus (V_1 \cup V_n)$ está contenido en dos conjuntos abiertos ajenos A y B [23, Teorema 35, pág. 21], tales que

$$xy \subset A \;\text{ y }\; \mathbf{X}' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i \subset B\,.$$

El eslabón i-ésimo de la cadena $\{U_1, \ldots, U_n\}$ lo definimos haciendo $U_i = D_i \cap (A \cup V_1 \cup V_2)$, restará verificar que se cumple la contención (4.4).

Pero notemos que $\mathbf{X}' = (A \cup B) \cup (V_1 \cup V_n)$ y si intersectamos a $\mathbf{X}'$ en ambos lados de la igualdad, tenemos que $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}' \cap A) \cup (\mathbf{X}' \cap [B \cup V_1 \cup V_n])$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}' \cap [\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i] &= \mathbf{X}' \cap [Fr(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)] \\
&= [(\mathbf{X}' \cap A) \cup (\mathbf{X}' \cap [B \cup V_1 \cup V_n])] \cap \\
&\quad\; [Fr(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)] \\
&\subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cup V_1 \cup V_n\,, \quad \text{de donde,} \\
\mathbf{X}' \cap Fr(\cup_{i=1}^{n} U_i) &\subseteq \overline{V}_1 \cup \overline{V}_n \subseteq \overline{U}_1 \cup \overline{U}_n\,.
\end{aligned}$$

por lo tanto queda demostrada la contención (4.4). □

Definición 4.33. Sean $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$, una sucesión de arcos que convergen a xy (no necesariamente de manera homeomorfa). Llamaremos a ésta una *sucesión de arcos doblados* que converge a xy, si la sucesión de puntos extremos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, converge a x.

El siguiente teorema es clave en este capítulo, pues éste afirma que en caso de existir sucesiones de arcos doblados en $\mathbf{X}$, éstas no convergen a un arco. Esto ayudará a encontrar una contradicción y así concluir la prueba del teorema 4.1.

Tomamos otro punto q en xy entre p y y, demostraremos que q es accesible desde U. Sea

$$\varepsilon = mín\,\{d(r,p), d(x,p), \frac{1}{2}d(q,y)\},$$

para esta $\varepsilon > 0$, por la propiedad 4.35, existe $\delta > 0$ (podemos suponer $\delta < \varepsilon$) tal que si ab es un arco en $\mathbf{X}'$ con $d(a,b) < \delta$, entonces $diám\,(ab) < \varepsilon$ o bien ab es ε-denso en $\mathbf{X}'$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ una δ-cadena tal que cubre al arco xy, $x \in D_1$ y $y \in D_n$, que cumpla con las condiciones de la propiedad 4.32, esto es:

$$\mathbf{X}' \cap Fr(\bigcup_{i=1}^{n} D_i) \subset \overline{D}_1 \cup \overline{D}_n.$$

Denotemos a la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ por $\mathcal{D}^*$. Si q no fuera un punto accesible desde U existiría un punto $s \in \mathbf{X}' \cap \mathcal{D}^*$, el cual se queda abajo de q. Sea ab un arco de $\mathbf{X}' \cap \mathcal{D}^*$ que contiene a s tal que ab está abajo de xy y de tal forma que sus extremos están en un mismo eslabón D_1 o D_n de $\mathcal{D}$, a no puede estar en el eslabón D_1 pues ab atravesaría al arco pr negando así que p es accesible y, por otra parte, $\delta < \varepsilon$ y cada eslabón D_i tiene diámetro menor que δ, entonces $d(a,b) < \delta$ y los extremos de ab están en el eslabón D_n. Por otra parte ab no es ε-denso en $\mathbf{X}'$, ya que el punto x dista en más de ε de ab y tampoco ab es tal que $diám\,(ab) < \varepsilon$, pues $(1/2)\,d(q,y) \geq \varepsilon$. Por lo tanto, el suponer que q no es accesible, contradice la propiedad 4.35, ya que encontramos un arco ab con $d(a,b) < \delta$ y no se cumple que ab sea ε-denso ni tampoco que $diám\,(ab) < \varepsilon$, entonces q es accesible desde U. □

En la siguiente propiedad concluye la demostración del teorema 4.1 afirmando que el continuo $\mathbf{X}'$ construido en la igualdad (4.2) contiene una sucesión de arcos doblados que convergen a un arco lo cual contradice al teorema 4.34.

Necesitaremos del siguiente teorema, para el cual damos la siguiente definición.

es. Entonces existe una sucesión $\{h_{\alpha_n}\}$ de elementos de $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que converge a un elemento h_{α_0} de $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Definimos

$$h_k = h_{\alpha_k} \circ h_{\alpha_0}^{-1},$$

claramente la sucesión (h_k) converge a la identidad. Si $x_1, x_2, \ldots$, está en diferentes composante de X, entonces $h_{\alpha_0}(x_1), h_{\alpha_0}(x_2), \ldots$, están en diferentes composantes también, las cuales son $h_1^{-1}(p), h_2^{-1}(p), \ldots$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Propiedad 4.40. El continuo $\mathbf{X}'$ contiene una sucesión de arcos doblados que convergen a un arco.

Demostración. Sea a_0a_6 un arco en $\mathbf{X}'$ el cual es accesible desde una componente de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que arco a_0a_6 es horizontal en el plano, sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 puntos en a_0a_6 tales que

$$d(a_i, a_{i+1}) = 1\,, \quad (i = 0, 1, \ldots, 5)\,.$$

podemos suponer además que a_0a_6 es accesible desde $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ por abajo[8].

Afirmación 1: Existe un número positivo ε_1 tal que abajo de a_0a_6 no hay puntos de $\mathbf{X}'$ que estén a distancia menor que ε_1.

Justificación: El razonamiento es similar al que se hizo para encontrar el ε de la propiedad 4.36.

Sea $p \in a_0a_1$ un punto accesible desde $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ por abajo, existe $r \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ tal que el arco pr está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ excepto p, es decir, $(pr \setminus \{p\}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ y el arco pr sólo intersecta a a_0a_6 en p. Por la propiedad 4.36 podemos tomar un punto q en pa_6 accesible desde el mismo lado que p y, definimos a un número positivo $\varepsilon' = mín\,\{d(r,p), d(a_1,p), 1/2\, d(q,a_6)\}$, por

[8] El "abajo" quiere decir que como el arco a_0a_6 está en el plano y es horizontal, hay que considerar la parte que está abajo de a_0a_6

de $\mathcal{D}$ forman un abierto entonces, como los arcos son cerrados, el conjunto $(\bigcup_{i=1}^{n} D_i \setminus a_1a_5 \cap \mathbf{X}')$ es un abierto en $\mathbf{X}'$ y las arcocomponentes son densas en $\mathbf{X}'$, lo que implica que existe un punto p en $A \cap (D_j \setminus a_1a_5)$. Por lo tanto p queda aproximadamente arriba de a_3 ya que el diámetro de los eslabones es a lo más $\varepsilon_2 < 1/2$, a_3 y p están en el mismo eslabón D_j y, por nuestra afirmación 1, abajo de a_1a_5 no hay puntos que disten en menos que ε_1; por otra parte, como p y a_3 están en la misma arcocomponente A, hay un arco α de A que contiene a a_3 y a p, como a_3 es accesible por abajo desde $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$ entonces, por la propiedad 4.36, p es accesible desde $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{X}'$. Notemos que α no puede tener sus extremos en un mismo eslabón de $\mathcal{D}$, pues sería un arco cubierto por $\mathcal{D}$, lo cual implicaría que $diám(\alpha) < \varepsilon_2$, por lo tanto α pasa por arriba de a_0 y a_6. Ahora, por un razonamiento análogo al de la *afirmación 1* podemos encontrar un número positivo, tal que no hay puntos de $\mathbf{X}'$ abajo de α formando así toda una "bandita"debajo del arco α. En esta bandita tomamos un arco rs (poligonal si fuese necesario) y, por lo tanto, rs satisface por construcción lo requerido, con lo que hemos demostrado la afirmación 2.

Sea K la 2-celda acotada por a_1a_5, a_1r, rs, y a_5s, claramente K contiene puntos de $\mathbf{X}'$, entonces sea $x \in \mathbf{X}' \cap K$.

Afirmación 3: Sea $x \in \mathbf{X}' \cap int_{\mathbf{R}^2}(K)$ un punto arriba de a_3. Si U es la componente de $\mathbf{X}' \cap int_{\mathbf{R}^2}(K)$ que contiene a x entonces $\overline{U}$ es un arco irreducible entre los arcos a_1r y a_5s.

Justificación: Claramente la cerradura de una componente es un subcontinuo, entonces $\overline{U}$ es un arco, pues los subcontinuos propios y no degenerados de $\mathbf{X}'$ son arcos. Resta demostrar que $\overline{U}$ es irreducible entre los arcos a_1r y a_5s. Si no fuera irreducible entonces $\overline{U}$ sería un arco que entra y sale del disco K por el mismo lado a_1r o a_5s, supóngase que es por a_1r, entonces la intersección de $\overline{U}$ con a_1r contiene al menos dos puntos a y b, es decir, ab es un arco que es cubierto por $\mathcal{D}$ y con sus dos extremos en un mismo eslabón D_1, además, como x está arriba de a_3 y $d(a_i, a_i + 1) = 1$, entonces

Como A' es denso en $\mathbf{X}'$, existe un arco xy en $A' \cap K$ que *corta débilmente*[9] a K entre a_3 y $h(a_3)$, además xy es irreducible entre a_1r y a_5s (afirmación 3). La razón por la que el arco xy corta débilmente a K se debe a que a_3 y $h(a_3)$ están en diferentes arcocomponentes, así cualquier continuo en K que contenga a a_3 y $h(a_3)$ deberá intersectar a xy. Considerando puntos un poco arriba de a_3, vemos que el arco xy tiene la siguiente propiedad.

Propiedad espacial de separación. El arco xy corta débilmente a K entre dos puntos de $K \cap (\mathbf{X}' \setminus A')$ tal que uno de estos está arriba de a_3 y el segundo es la imagen del primero bajo h.

Sea $x_1x_2x_3 \cdots x_{2n}$ el arco en A' tal que $x_1x_2 = xy$, $x_{2n-1}x_{2n} = a_1a_5$ y $x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-1}x_{2n}$ son las cerraduras de las componentes que se forman al intersectar $x_1x_2x_3 \cdots x_{2n}$ con el interior de K, que son arcos irreducibles entre a_1r y a_5s. Por lo anterior, x_1x_2 tiene la propiedad especial de separación pero el arco $x_{2n-1}x_{2n}$ no la tiene.

Por otra parte, demostraremos que si el arco $x_{2i-1}x_{2i}$ tiene la propiedad especial de separación, entonces el arco $x_{2i+1}x_{2i+2}$ la tiene también, de esta manera estaríamos construyendo una contradicción pues sabemos que no todos los arcos tienen la propiedad. La contradicción surge como una consecuencia de haber supuesto que $\mathbf{X}'$ no contiene ninguna sucesión de arcos doblados los cuales convergen a un arco.

Para probar lo anterior tomamos dos puntos p y $h(p)$ en $K \cap (\mathbf{X}' \setminus A')$ tal que p está exactamente arriba de a_3. Supóngase que el arco $x_{2i-1}x_{2i}$ corta débilmente a K entre p y $h(p)$ en K, veremos que el arco $x_{2i+1}x_{2i+2}$ corta débilmente a K entre los puntos q y $h(q)$ de $K \cap (\mathbf{X}' \setminus A)$. Por conveniencia suponemos que $x_{2i+1}x_{2i+2}$ está abajo de $x_{2i-1}x_{2i}$ y que $h(p)$ está arriba de $x_{2i-1}x_{2i}$ (Para el caso opuesto a este se hace con un argumento similar).

La demostración la dividimos en dos casos.

Caso 1: Los puntos x_{2i} y x_{2i+1}, están en el mismo lado (figura 4.2.)

[9] Definición 1.6

ii) $diám(pq) > \varepsilon_3$

iii) pq no es ε_3-denso en $\mathbf{X}'$, pues $d(pq, a_4) > \varepsilon_3$

lo cual contradice la definición de ε_4. Por lo tanto q debe estar abajo del arco tu y, además tenemos que pedir que

$$d(q, x_{2i-1}x_{2i}) > \varepsilon_4\,,$$

de lo contrario $d(p,q) < \varepsilon_4$ y el arco pq tendría las características de los incisos *i)*, *ii)* y *iii)*.

Ahora veremos que $x_{2i+1}x_{2i+2}$ corta débilmente a q y $h(q)$ en K. Observemos que q está "arriba"de $x_{2i+1}x_{2i+2}$. Consideramos la curva cerrada simple J determinada por la unión de un segmento vertical que pasa por a_4 y un arco de $x_{2i-1}x_{2i+2}$ que contenga a $x_{2i}x_{2i+1}$. Si un punto se mueve de p a q, entonces su imagen bajo h no intersecta a J. De aquí que $h(q)$ está arriba de $x_{2i-1}x_{2i}$ o está abajo de $x_{2i+1}x_{2i+2}$, pero no puede estar arriba porque $d(q, x_{2i-1}x_{2i}) > \varepsilon_4$ y h es un ε_3-homeomorfismo, por lo tanto $h(q)$ está abajo de $x_{2i+1}x_{2i+2}$, es decir, $x_{2i+1}x_{2i+2}$ tiene la propiedad especial de separación. Así termina el caso 1.

Caso 2: Los puntos x_{2i} y x_{2i+1} están en diferentes lados.

Suponemos que los puntos x_{2i}, u y x_{2i+2} están en el mismo lado, digamos en, a_5s. Definimos a vw y a q como en el caso 1; por hipótesis $x_{2i-1}x_{2i}$ tiene la propiedad especial de separación, demostraremos que $x_{2i+1}x_{2i+2}$ también tiene la propiedad.

Al definir a vw y a q como en el caso 1, tenemos dos posibilidades: v queda abajo de $x_{2i+1}x_{2i+2}$ o arriba de $x_{2i+1}x_{2i+2}$.
Si v queda abajo, termina la demostración porque q estaría abajo de $x_{2i+1}x_{2i+2}$ y $h(q)$ arriba.
Si v está arriba de $x_{2i+1}x_{2i+2}$, quedaría v entre los puntos x_{2i} y x_{2i+2}, entonces q estaría entre los arcos $x_{2i-1}x_{2i+2}$ y $x_{2i+1}x_{2i+2}$, y $h(q)$ quedaría arriba

homogéneo del plano que contenga un arco y que no sea una curva cerrada simple. Así, hemos demostrado que una curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que contiene un arco.

Capítulo 5

Teorema de Charles L. Hagopian

5.1 Introducción

La curva cerrada simple, el pseudo arco y el círculo de pseudo arcos [4] son los únicos continuos no degenerados homogéneos del plano que se conocen. ¿Existirá un cuarto continuo homogéneo del plano? De acuerdo al capítulo anterior, si existiera otro continuo homogéneo del plano, no debería contener ningún arco, es decir, la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo del plano que contiene un arco. En este capítulo se hace una generalización a este resultado. Así, dicha generalización dirá que cualquier continuo homogéneo del plano que contenga un subcontinuo hereditariamente descomponible es una curva cerrada simple. Un ejemplo de un continuo del plano hereditariamente descomponible que no contiene ningún arco se puede encontrar en [24, Ejercico 2.27, pág. 28].

argumento similar al lema 3.6, existen tres de ellos, digamos $h_{\alpha_1}(F)$, $h_{\alpha_2}(F)$ y $h_{\alpha_3}(F)$ tales que $h_{\alpha_2}(F)$ separa a $h_{\alpha_1}(F)$ y a $h_{\alpha_3}(F)$ en el plano. Sean $x \in h_{\alpha_3}(F)$ y $y \in h_{\alpha_1}(F)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$(B_\varepsilon(y) \cap X) \cap (h_{\alpha_2}(F) \cup h_{\alpha_3}(F)) = \varnothing .$$

Como las composantes de X son densas [23, Teorema 135, pág. 58], existe un subcontinuo propio A de X tal que $x \in A$ y $A \cap (B_\varepsilon(y)) \neq \varnothing$. Como $h_{\alpha_2}(F)$ separa a $h_{\alpha_1}(F)$ y a $h_{\alpha_3}(F)$, se tiene que $A \cap h_{\alpha_2}(F) \neq \varnothing$ lo cual no es posible, pues están en diferentes composantes. La contradicción surge por haber supuesto que X no es hereditariamente unicoherente, por lo tanto lo es. □

El siguiente lema nos dice que en un continuo homogéneo podemos definir un ε-homeomorfismos del continuo en sí mismo.

Lema 5.3 (E. G. Effros). Sea X un continuo homogéneo, dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe un subconjunto abierto W de X, tal que $x \in W$ y W tiene la siguiente propiedad:
Para cada par de puntos y y $z \in W$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(z) = y$ y $d(v, h(v)) < \varepsilon$, para toda $v \in X$. [12, Lema 4]

5.3 Principales resultados

En esta sección necesitaremos de un concepto que introdujo E. S. Thomas [28], un continuo del *tipo* A'.

Definición 5.4. Sea X un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X se dice que es una *descomposición semicontinua superiormente* si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U de X, con $D \subset U$, existe un abierto V de X, con $D \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \varnothing$, entonces $A \subset U$.

El objetivo de este capítulo es demostrar que todo continuo homogéneo del plano y que contenga un subcontinuo descomponible es una curva cerrada simple. Para demostrar esto, el siguiente teorema es fundamental.

Teorema 5.8. Si X es un continuo homogéneo del plano e indescomponible y si A es un subcontinuo descomponible de X, entonces A contiene un continuo homogéneo indescomponible.

Demostración. Sea A un subcontinuo descomponible de X, existen dos subcontinuos propios B y C de A tales que $A = B \cup C$. Demostraremos que A contiene un continuo homogéneo indescomponible.

Sean b y c puntos de $B \setminus C$ y $C \setminus B$ respectivamente. Como A es un continuo no degenerado, existe un subcontinuo de A que es irreducible entre los puntos b y c [24, Ejercicio 4.35, pág. 68]. Sea E dicho subcontinuo de A que es irreducible entre los puntos b y c. Demostraremos primero que E es un continuo del tipo A', para esto, por el lema 5.7, bastará demostrar la siguiente afirmación:

Afirmación. Los subcontinuos de E con interior no vacío, son descomponibles.

Justificación. Será por contradicción, supongamos que E tiene un subcontinuo I con interior no vacío relativo a E y que es indescomponible. Como $int_E(I) \neq \varnothing$, tomamos un abierto Q de E en I. Por otra parte $E = (E \cap B) \cup (E \cap C)$, el continuo X es hereditariamente unicoherente, $E \cap B$ y $E \cap C$ son conexos, entonces I está contenido en $E \cap B$ o $E \cap C$ pues I es indescomponible. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $I \subset E \cap B$.

Sea F la componente de $E \setminus Q$ que contiene a c, por el teorema de los golpes en la frontera [24, Teorema 5.4, pág. 73], sabemos que $F \cap Fr(Q)$ es no vacío, entonces $F \cap I$ es no vacío también, por lo tanto $F \cap I$ es un continuo y los continuos están en una sola composante, de esta manera hemos justificado que F intersecta a una sola composante de I.

esto último por [24, Corolario 5.5, p. 74]. Por lo tanto,

$$I \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \subset I \cup F \cup f(F) \cup g(F)$$

entonces

$$(I \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3) \setminus I = (R_1 \setminus I \cap F) \cup (R_2 \setminus I \cap f(F)) \cup (R_3 \setminus I \cap g(F)) .$$

Así hemos demostrado que T contiene un triodo, de donde X contiene un triodo, lo cual contradice al lema 5.2. Por lo tanto, los subcontinuos con interior no vacío de E, son descomponibles.

De esta manera, por el lema 5.7, E es del tipo A'. Sea entonces $\mathfrak{D}$ la descomposición admisible minimal para E dada por el lema 5.6, recordemos que $\mathfrak{D}$ cumple, por definición, con:

1. $\mathfrak{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente
2. Los elementos de $\mathfrak{D}$ son conjuntos conexos
3. El espacio cociente $E/\mathfrak{D}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$
4. El interior relativo a E de los elementos de $\mathfrak{D}$ es vacío

Consideramos a $\pi : E \to E/\mathfrak{D}$ la función cociente, por inciso 3, podemos suponer que π va de E al $[0, 1]$. Notamos que debe existir un número $s \in (0, 1)$ para el cual $\pi^{-1}(s)$ es un conjunto no degenerado. Si $\pi^{-1}(s)$ tuviera un sólo punto, para toda $s \in (0, 1)$, entonces E contendría un arco, lo cual implicaría, por teorema 4.1, que X es la curva cerrada simple, que es un descomponible y esto contradice a la hipótesis. Por lo tanto existe $s \in (0, 1)$ para el cual $\pi^{-1}(s)$ es un conjunto no degenerado. Definimos a

$$Y = \pi^{-1}(s) .$$

Queremos demostrar que el subcontinuo descomponible A de X contiene un continuo homogéneo e indescomponible El conjunto Y que hemos definido nos servirá para concluir la demostración.

que contienen a $h_i(\pi^{-1}(r))$ y $h_i(\pi^{-1}(t))$ respectivamente. Notemos que

$$R \cup T \subset \pi^{-1}\big([0,d] \cup [e,1]\big) \cup h_i\big(\pi^{-1}([0,r] \cup [t,1])\big)\,.$$

Entonces el conjunto $h_i(\pi^{-1}(r))$ corta a $h_i(E)$ entre $h_i(\pi^{-1}([0,r)))$ y $h_i(Y)$ [28, Teorema 5, pág.10], de igual manera el conjunto $h_i(\pi^{-1}(t))$ corta a $h_i(E)$ entre $h_i(\pi^{-1}([t,1)))$ y $h_i(Y)$.

Así el conjunto $\overline{R \cup T}$ no intersecta a ningún elemento de $\mathcal{H}$, de donde, $h_i(Y)$ contiene un subconjunto abierto no vacío de $h_i(E)$, lo cual contradice al hecho que $h_i(Y)$ sea un elemento de $\{h_i(\pi^{-1}(u)) : 0 \leq u \leq 1\}$, la descomposición admisible mínima para $h_i(E)$. Por lo tanto $h_i(Y)$ es un subconjunto de Y.

Usando un argumento análogo, uno puede demostrar que si Y no está contenido en $h_i(Y)$ entonces el interior relativo a E de Y es diferente del vacío, lo que contradice el hecho que Y sea un elemento de $\mathcal{D}$, por lo tanto, $h_i(Y)$ contiene a Y. Consecuentemente cada h_i manda a Y en sí mismo, es decir, $h_i(Y) = Y$.

De nuestra afirmación podemos deducir que la composición de los homeomorfismos $h_1, \ldots, h_n$ restringida a Y es un homeomorfismo de Y en sí mismo que manda a p en q. De aquí que Y es homogéneo.

Por el lema 5.2 X es hereditariamente unicoherente, Y es un continuo del plano, homogéneo y unicoherente, entonces es indescomponible por [16, Teorema 2]. □

Corolario 5.9. *Si X es un continuo del plano, homogéneo e indescompoible, entonces ningún subcontinuo de X es hereditariamente descomponible.*

Antes de probar el teorema principal de este capítulo enunciaremos el *Teorema de Descomposición Aposindética* de Jones, el cual será útil para la demostración de dicho resultado.

Teorema 5.10 (Descomposición Aposindética, Jones). Sea X un continuo homogéneo descomponible y no aposindético y $L(x) = \{z \in X\ :\ X$ no

Se sigue del corolario 5.9 que H no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{G}$. Sin embargo, si la intersección de H con al menos dos elementos $\mathcal{G}$ fuera diferente del vacío entonces H contendría un elemento de $\mathcal{G}$ [16, Teorema 1], lo cual contradiría lo que estamos suponiendo de H, que es hereditariamente descomponible. Por lo tanto X es una curva cerrada simple. $\square$

Conclusiones

Como ya hemos dicho en la introducción, en el presente trabajo se persiguen las respuestas que se le dieron a la pregunta planteada por Knaster y Kuratowski: Si un continuo homogéneo está en el plano, ¿es necesariamente la curva cerrada simple? Cabe mencionar también que después de que se contesta de manera negativa, pues se encontró otro continuo homogéneo del plano -el pseudo arco- La pregunta tomó un rumbo un poco diferente, al encontrar un tercer continuo homogéneo del plano -el círculo de pseudo arcos- se quiere saber si existirá otro.

Al tratar de responder esto surgen resultados que dejan caracterizada a una curva cerrada simple por medio de la teoría de los continuos y a la vez se restringe mucho la existencia de otro continuo homogéneo del plano, sería el cuarto. En efecto, digamos que **X** denota un continuo homogéneo del plano, si **X** fuese tal que no es una curva cerrada simple, el pseudo arco ni el círculo de pseudo arcos entonces **X no deberá cumplir con ninguna de las siguientes propiedades:**

1. **X** es localmente conexo
2. **X** es conexo en pequeño en algún punto
3. **X** es aposindético
4. **X** es arco conexo

Bibliografía

[1] R. H. Bing, *A homogeneous indescomposable plane continuum*, Dake Math. J. **15** (1948), 724–742.

[2] ———, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math **1** (1951).

[3] ———, *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that caontains an arc*, Canad. J. Math. **12** (1960), 209–230.

[4] R. H. Bing and F. B. Jones, *Another homogeneous plane continunum*, Trans amer. Math. soc. **90** (1959), 171–192.

[5] G. Choquet, *Prolongement d'homeomorphies. Ensembles topologiquement nommables. Characterisation topologique individuelle des ensembles fermer totalement discontinuum*, C. R. Acad. Sci. Paris **219** (1944), 542–544.

[6] C. Christenson and W. Voxman, *Aspects of topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1977.

[7] H. J. Cohen, *Some results concerning homogeneous plane continua*, Duke Math. J. **18** (1951), 467–474.

[8] C. O. Cristenson and W. L. Voxman, *Aspect of topology*, Moral Dekker, lac., New York, 1977.

[22] ———, *A note on the pseudo-arc*, Trans Amer. Math. soc. **67** (1949), 57-58.

[23] R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, vol. 13, Rev. Ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1962.

[24] S. B. Jr. Nadler, *Continuum theory, an introduction*, Marcel Dekker, 1992.

[25] J. H. Roberts, *Collections filling a plane*, Duke Math. J. **2** (1936), 10–19.

[26] J. T. Jr Rogers, *Cell-like decomposition of homogeneous continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 375–377.

[27] A. Schoenflies, *Die entwickelung d. lehre von d. punktmannigfaltigkeiten II*, **6**, 237.

[28] E. S. Jr. Thomas, *Monotone decompositions of irreducible continua*, Rozprawy Mat. **50** (1966), 1–70.

[29] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, vol. 28, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications.

[30] ———, *Semi-locally-connected sets*, American Journal Mathematics **61** (1939), 733–749.