

01173¹



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**MODELADO DE TRANSFERENCIA DE
CALOR CONJUGADA EN CONDICIONES
DE FLUJO MULTIFASICO**

T E S I S

**PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA**

P R E S E N T A:

HECTOR ARVIZU DAL PIAZ

ASESOR: DR. YURI V. FAIRUZOV



MEXICO, D. F..

MARZO DEL 2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	5
RESUMEN.....	7
LISTA DE FIGURAS.....	8
LISTA DE TABLAS.....	10
NOMENCLATURA.....	11
Símbolos griegos.....	12
Subíndices.....	13
Superíndices.....	14
1. INTRODUCCIÓN	
1.1 Transferencia de calor conjugada en sistemas multifásicos	15
1.2 Antecedentes.....	18
1.2.1 Oleoductos submarinos.....	18
1.2.2 Inestabilidades en sistemas bifásicos, ebullición y flasheo.....	22
1.2.3 Modelos multifásicos.....	23
1.2.4 El fenómeno de transferencia de calor conjugada.....	26
1.3 Objetivos de la tesis.....	29
1.4 Descripción de la tesis.....	30

2	FORMULACIÓN DEL MODELO	
2.1	Planteamiento del problema.....	32
2.2	Análisis riguroso.....	33
2.2.1	Modelo hidrodinámico.....	33
2.2.2	Condiciones iniciales y de frontera del modelo hidrodinámico.....	37
2.2.3	Modelo de transferencia de calor.....	38
2.2.4	Condiciones iniciales y de frontera del modelo de transferencia de calor.....	39
2.2.5	Acoplamiento de los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor.....	40
2.3	Análisis simplificado.....	41
2.3.1	Ecuaciones básicas.....	41
2.3.2	Condiciones iniciales y de frontera.....	46
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	
3.1	Modelo numérico hidrodinámico.....	47
3.2	Modelo numérico de transferencia de calor.....	49
3.3	Verificación del modelo numérico de transferencia de calor.....	51
3.3.1	Comparación con solución analítica.....	51
3.3.2	Balance de energía.....	54
3.3.3	Comparación con una solución analítica para el transitorio.....	55
3.4	Acoplamiento de los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor numéricos.....	58
3.5	Modelo numérico simplificado.....	59
3.6	Cálculo de propiedades termodinámicas de fluidos.....	60
3.7	Comparación entre los modelos riguroso y simplificado.....	61
4.	VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA SIMPLIFICADA.....	64
4.1	Pruebas realizadas con el modelo riguroso.....	66
4.2	Pruebas realizadas con el modelo simplificado.....	73

4.3 Comparación de los resultados entre ambos modelos.....	75
4.4 Comparación de tiempos de cómputo.....	77
4.5 Ventajas del modelo simplificado.....	78
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
5.1 Sumario.....	79
5.2 Contribuciones hechas.....	80
5.3 Conclusiones.....	81
5.4 Recomendaciones para futuros trabajos.....	82
REFERENCIAS.....	84
APÉNDICE A	
A 1 Desarrollo algebraico del modelo numérico hidrodinámico	88
A.2 Desarrollo algebraico de la solución analítica (modelo de transferencia de calor, estado permanente).....	95
A.3 Desarrollo algebraico de la solución analítica basada en la solución de Luikov (1968) (modelo de transferencia de calor, transitorio).. ..	97
A 4 Desarrollo algebraico del modelo numérico simplificado	103
APÉNDICE B	
CÁLCULO DE PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE FLUIDOS.....	107

AGRADECIMIENTOS

A la UNAM toda y en especial forma a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería y al Instituto de Ingeniería, que durante más de dos años han sido mi casa.

A mi tutor y Maestro, Dr. Yuri V. Fairuzov, que me ha enseñado a ser Ingeniero mucho más allá del aula y la academia.

A mis sinodales y profesores Dr. José Luis Fernández, Dr. Francisco Solorio, Dr. Arturo Palacio y Dr. Alejandro Rodríguez, por la dedicación y enormemente valiosa ayuda, tanto en el salón de clase, como en la elaboración de esta tesis.

A mi madre, Dra. Giuliana Dal Piaz, que siempre se ha esforzado tanto por darme una plataforma alta desde la cual despegar y que ha sabido encontrar razones, para aceptarme y quererme, que la razón no puede explicar.

A mis hermanos: Michelle, Daniel, Claudia, Adriana y Arturo, por la amistad, por la paciencia que me han tenido y por todo lo que me han enseñado.

A Marie Alsace, el amor de mi vida, mi compañera y esposa. Porque no tengo palabras para expresar todo lo que hay por agradecerte, todo lo que te amo y cómo cada vez te amo más y más.

A la familia que me adoptó, Koko, Delia, Angélica y Paola. Porque en mucho me debo a ellos, como persona y como Ingeniero.

A mis amigos: Juan Carlo, mi compadrito querido, Iván y Luis, mis primos, tan locos como yo, que me han acompañado por tanto camino; Arturo, que me ha enseñado que no es tan necesario estar loco; Rafael, mi hermano de sangre, vecino por siempre, que me ha enseñado que estar loco no es necesariamente tan malo; Karima, mi amiga distante que siempre está cerca; Cosette, salvavidas de los pantanos; Guillermo, Nacho, Marco Tuho y Alberto Isaac, por esos primeros semestres de ingeniería y los años subsecuentes; Elías y Enrique, por la gran y profunda amistad, por disfrutar y enseñarme a disfrutar tanto de la Ingeniería.

A las familias de todos mis amigos, que me han recibido siempre con los brazos abiertos, me han cobijado, alimentado y alentado más allá de lo que puedo explicar.

A Yago, que me enseñó que las respuestas a los problemas más complejos y profundos son simples.

RESUMEN

En este trabajo se considera el calentamiento directo de una tubería larga que transporta un flujo bifásico de una sustancia volátil parcialmente evaporada. El fenómeno se describe de dos formas: el primer análisis emplea un modelo riguroso que toma en cuenta la conducción de calor radial en la pared de la tubería y el intercambio de calor por convección forzada entre la tubería y el fluido. La segunda se basa en una formulación simplificada que asume que la pared de la tubería y el fluido están en equilibrio térmico local y toma en cuenta el efecto de la conductividad térmica de la pared mediante un término adimensional adicional en la ecuación de la energía. Se mostró que el planteamiento simplificado facilita el análisis y reduce los tiempos de cómputo. Se investigó la respuesta del sistema ante una generación súbita de calor. Se realizó una comparación de los resultados de las simulaciones para encontrar las condiciones en las que la formulación simplificada es aplicable. Se discute el significado práctico de los resultados obtenidos y se analizan aplicaciones reales del modelo simplificado. También se crearon un programa de cómputo y una base de datos para poder calcular numéricamente las propiedades termodinámicas de distintas sustancias volátiles. Los resultados obtenidos muestran que la aplicación del modelo simplificado es un método viable para la solución de problemas conjugados cuando sea posible asumir que existen condiciones cercanas al equilibrio térmico local.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema de los sistemas de producción y calentamiento (Vanvik, 1998). .	20
1.2	Esquema de una línea coaxial calentada eléctricamente (Hojo et al , 1987)	21
1.3	Conexión intermedia para evitar conducción en el fluido (Epstein y White, 1996).....	22
1.4	Esquema de un circuito experimental (Epstein y White, 1996).	25
2.1	Flujo bifásico en una tubería (esquema de la geometría del problema).	33
2.2	Modelo de transferencia de calor (esquema de la geometría del problema)	39
2.3	Volumen de control que incluye un elemento de fluido y un elemento de pared de la tubería.....	43
3.1	Esquema de diferencias escalonadas usado en el modelo hidrodinámico....	48
3.2	Modelo de transferencia de calor (esquema de discretización).....	51
3.3	Variación radial de la temperatura en la pared, a la entrada ($x = 0$), (estado permanente).....	52
3.4	Variación radial de la temperatura en la pared en $x = L/2$, (estado permanente).....	53
3.5	Variación radial de la temperatura en la pared, a la salida ($x = L$), (estado permanente).....	53
3.6	Variación del campo de temperaturas radial.	57
4.1	Escalón en la generación de calor	66

4.2	Variación de la presión en tres puntos de la tubería.....	67
4.3	Variación de la velocidad en tres puntos de la tubería.....	67
4.4	Variación de la fracción de vacío en tres puntos de la tubería.....	68
4.5	Variación de la fracción de vacío desde $x = 0$ hasta $x = 0.07L$	68
4.6	Variación de la velocidad de mezcla desde $x = 0$ hasta $x = 0.07L$	69
4.7	Fracción de vacío a la salida ($x = L$).....	70
4.8	Velocidad de mezcla a la salida ($x = L$).....	70
4.9	Variación de la velocidad másica en tres puntos de la tubería	71
4.10	Diferencia entre gasto másico a la entrada y a la salida.	72
4.11	Variación del flujo de calor en tres puntos de la tubería.....	73
4.12	Presión a la entrada considerando y no el efecto de la pared.....	74
4.13	Fracción de vacío a la entrada considerando y no el efecto de la pared.....	75
4.14	Velocidad másica a la salida considerando y no el efecto de la pared.	75
4.15	Presión a la entrada con ambos modelos	76
4.16	Fracción de vacío a la entrada con ambos modelos	76
4.17	Velocidad másica a la salida con ambos modelos.....	77
A.1	Conducción radial unidimensional en cilindro hueco.	99

LISTA DE TABLAS

3.1	Valores en la comparación de transitorios.....	56
3.2	Ecuaciones básicas de los modelos.....	61
3.3	Ecuaciones discretizadas de los modelos.....	62
3.4	Algoritmos de cálculo.....	63
4.1	Geometría de la tubería y condiciones de operación.....	65
B.1	Intervalos de aplicación y errores producidos.....	111
B.2	Valores de las constantes en las ecuaciones de Reynolds (1979)	112

NOMENCLATURA

- A = área, m^2
- c, c_p = calor específico, J/kgK
- D = diámetro interno de la tubería, m
- E = energía interna (μ) del volumen de control (fluido más pared), J
- f = factor de fricción en la pared para una fase (correlación de Colebrook)
- F_w = fuerza de fricción por unidad de volumen de fluido, N/m^3
- Fa = factor de adiabaticidad
- g = aceleración de la gravedad, m/s^2
- G = velocidad másica de la mezcla, kg/sm^2
- h = entalpía específica, J/kg; coeficiente de transferencia de calor convectiva, W/m^2K
- k = conductividad térmica, W/mK
- K = coeficiente de fricción en la pared
- L = longitud, m
- m = flujo o gasto másico, kg/s
- M = inventario másico, kg
- p = presión, bar
- P = perímetro, m
- q = calor, W; flujo de calor, W

\bar{q}	= flujo de calor por unidad de volumen de fluido, W/m^3
q'	= flujo de calor por unidad de longitud, W/m
q''	= flujo de calor externo, W/m^2
q'''	= tasa de generación de calor en la pared de la tubería, W/m^3
\dot{Q}	= tasa de calor transferido al volumen de control, W/m^3
r	= radio, m
Re_D	= número de Reynolds ($\rho VD / \mu$)
t	= tiempo, s
T	= temperatura, K
u	= energía interna específica, J/kg
U	= energía interna, J
v	= volumen específico, m^3/kg
V	= velocidad del flujo, m/s
\forall	= volumen, m^3
\dot{W}	= tasa de realización de trabajo, W
x	= coordenada longitudinal, m
X	= calidad
z	= elevación, m

Símbolos griegos

α	= fracción de vacío
δ	= espesor de la pared de la tubería, m
Δ	= elemento diferencial
ε	= rugosidad de la pared, m
θ	= temperatura en exceso, K

Θ	= razón de temperaturas
λ	= calor latente, J/kg
μ	= viscosidad, kg/sm
φ	= ángulo en el modelo de transferencia de calor, rad
ρ	= densidad, kg/m ³
ρu	= energía interna por unidad de volumen (volumétrica), J/m ³
ϕ	= ángulo en coordenadas polares, rad
Φ_1^2	= multiplicador de fricción para dos fases (McAdams, 1942)

Subíndices

cv	= volumen de control
E	= nodo "Este". Es decir, nodo "anterior" (dirección del flujo)
f	= final (el sistema ha alcanzado el estado permanente)
fg	= diferencia entre las propiedades del gas y del líquido
g	= gas
gen	= generado
i	= interior
in	= a la entrada
ini	= inicial
j	= referente al nodo j
l	= líquido
N	= nodo "Norte". Es decir, nodo "superior" en un modelo en 2D
NN	= referente al último nodo
o	= externo
out	= a la salida
P	= nodo local

- sat = de saturación
- S = nodo "Sur". Es decir, nodo "inferior" en un modelo en 2D
- tp = bifásico
- w = referente a la pared
- wf = en la interfaz pared-fluido
- W = nodo "Oeste" Es decir, nodo "siguiente" (dirección del flujo)

Superíndices

- n = valor en el instante de tiempo actual (ya conocido)
- $n+1$ = valor en el "próximo" instante de tiempo (aun por calcular)

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Transferencia de calor conjugada en sistemas multifásicos

A lo largo de las últimas décadas, los problemas de transferencia de calor en condiciones de flujo multifásico han sido un desafío para muchos investigadores.

La fase es una porción de materia, homogénea y mecánicamente separable, con características físicas distinguibles. Si se presenta sólo una fase, el sistema será físicamente homogéneo. Si las fases presentes son más de una, el sistema será heterogéneo.

En el entorno de la mecánica de fluidos, los flujos se pueden clasificar como monofásicos y multifásicos. Estos últimos, a su vez, pueden catalogarse de forma menos general al especificar el número de fases presentes bifásico, trifásico, etc

En años recientes, también se ha visto un incremento en la investigación sobre transferencia de calor convectiva transitoria ya que ha aumentado la necesidad de contar con controles térmicos precisos de diferentes dispositivos intercambiadores de calor, así como un entendimiento detallado de las características de transferencia transitoria de

calor en sistemas relacionados con manejo energético durante los períodos de arranque, apagado, o cualquier pico en un funcionamiento que debería ser permanente (Lin y Kuo, 1988)

En ocasiones, es necesario conocer la temperatura superficial y el flujo de calor de un sólido en contacto con un fluido, cuando existen variaciones en las condiciones de operación. Por ejemplo, cuando se analizan intercambiadores de calor recuperativos y regenerativos, turbinas de gas en plantas generadoras y material radioactivo en reactores nucleares

Los análisis más realistas de superficies sólidas interactuando con un fluido a través de convección transitoria toman en cuenta que las condiciones en la interfaz entre el sólido y el fluido no se conocen a priori. Lo que se suele conocer, es una condición de frontera en otra superficie del sólido, una generación interna en el sólido ó la temperatura de entrada del fluido. A este tipo de problemas en los que se deben calcular simultáneamente los campos de temperatura del fluido en movimiento y del sólido circundante, debido a que dichos campos son mutuamente dependientes, se les conoce como problemas conjugados.

En general estos problemas, aún en condiciones de flujo monofásico, son tan complejos que sólo se puede encontrar una solución aproximada mediante el planteamiento cuasi estático clásico. Básicamente, este planteamiento utiliza un coeficiente de transferencia convectiva de calor desde la superficie, constante en tiempo y espacio, ó uno que exhiba una dependencia funcional con respecto al espacio y que es válido para una superficie isotérmica. Por lo tanto, este planteamiento no toma en cuenta el efecto de la historia térmica, es decir, la dependencia de la temperatura superficial de la posición o de la capacidad de almacenamiento de energía por parte del fluido (Sucec, 1975). En condiciones de flujo multifásico, el grado de complejidad de estos problemas se incrementa de forma notable, como se explica más adelante.

Aplicaciones de flujo multifásico y transferencia de calor conjugada pueden encontrarse en una gran variedad de sistemas ingenieriles como plantas de generación de electricidad tanto térmicas (convencionales) como nucleares, intercambiadores de calor.

columnas de destilación, motores de cohetes, procesos metalúrgicos de alta temperatura (incluyendo la fabricación de aceros), diferentes tipos de intercambiadores de calor por evaporación y condensación en la industria química (Kakaç, 1976) y en muchos de los sistemas relacionados con la industria del petróleo, como son pozos, oleoductos y procesos de liquefacción de hidrocarburos volátiles.

Estas aplicaciones pueden involucrar diferentes sistemas de fluidos, como son agua-vapor (los más comunes), criogénicos, orgánicos (que frecuentemente son de varios componentes), metales líquidos, refrigerantes, sistemas de dos componentes, que pueden ser gas-líquido o dos líquidos inmiscibles.

Los requerimientos de diseños económicos y de optimización de las condiciones de operación de todos los sistemas que involucran transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo multifásico, marcan una necesidad cada vez mayor de información cuantitativa precisa. Los aumentos en la competitividad y en los costos de capital y operación, así como la importancia de la confiabilidad y de la seguridad, han acentuado esta necesidad en las últimas décadas. Por lo tanto, el propósito del estudio de flujos multifásicos y de fenómenos conjugados de transferencia de calor, es el de poder predecir con exactitud los cambios en ciertos parámetros ingenieriles que describen el comportamiento de un sistema, como lo son la caída de presión, la fracción de vacío y los coeficientes de transferencia de calor, siendo la fracción de vacío, α , la razón entre el área de sección transversal del gas y la sección transversal total

$$\alpha = \frac{A_g}{A} \quad (1.1)$$

donde la sección transversal total es la suma de las áreas ocupadas por las fases (Chisholm, 1983)

$$A = A_g + A_l \quad (1.2)$$

También es esencial entender los fenómenos físicos que podrían limitar el rendimiento del equipo. Como ejemplos de esto, se pueden mencionar las inestabilidades hidrodinámicas en turbinas de vapor o el sobrecalentamiento en reactores nucleares enfriados por líquido. Esta información no sólo es indispensable para las situaciones de operación en estado permanente, sino también para transitorios y condiciones de accidente previamente postuladas.

1.2 Antecedentes

Muchas de las tecnologías ya existentes, así como las que están surgiendo, requieren herramientas de predicción confiables para fenómenos de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo bifásico.

1.2.1 Oleoductos submarinos

En la industria petrolera, por ejemplo, el calentamiento eléctrico se considera actualmente como uno de los métodos efectivos para prevenir la formación de hidratos en oleoductos multifásicos submarinos durante etapas de muy bajos niveles de producción.

Los hidratos de gas son cristales semejantes a copos de nieve que se forman cuando moléculas de hidrocarburos ligeros (metano, etano, propano y butano) entran en contacto con agua. Otras moléculas pequeñas, como CO_2 y H_2S también pueden formar hidratos. Estas moléculas pequeñas se alojan en una matriz formada de H_2O y estabilizan la malla. Por lo tanto, los hidratos se pueden encontrar a temperatura ambiente (aunque suele ser necesario un sobreenfriamiento para iniciar su crecimiento) y su estabilidad aumenta con la presión.

En una línea (de un oleoducto) que se encuentre a una presión normal de 150 bar puede haber presencia de hidratos, si hay presencia de agua libre, a cualquier temperatura por debajo de los 22°C . Puede presentarse cohesión entre los hidratos, formando así bultos que pueden bloquear conductos, válvulas y otros equipos. Los hidratos se fundirán

si la presión baja lo suficiente o se les aplica calor. El tiempo que se requiera para este proceso dependerá de la eficiencia con la que se les pueda transmitir calor.

En líneas submarinas, debido a la diferencia entre las temperaturas del crudo y del océano circundante (que en algunas regiones se encuentra a temperaturas situadas entre 6°C y 8°C en las zonas cercanas al fondo marino), puede presentarse condensación de agua incluso si no se produce agua de formación.

Los métodos tradicionales de manejo de hidratos incluyen el uso de sustancias químicas que previenen su formación y disminuyen su punto de fusión. Sin embargo, debido a razones de orden ecológico y de contaminación del producto final mismo, así como de costos de operación, el uso de estas sustancias no es ya viable y se presenta la necesidad de métodos innovadores de control de hidratos. En este campo, el calentamiento eléctrico se considera actualmente como uno de los métodos efectivos para lograrlo, especialmente en períodos de muy baja producción. Mediante el calentamiento eléctrico, los hidratos pueden fundirse una vez formados (medidas correctivas) o se podrían evitar las condiciones en las que los hidratos son estables previniendo así su formación (medidas preventivas).

Se han propuesto varios sistemas de calentamiento eléctrico: calentamiento directo, calentamiento por inducción y calentamiento por rastreo (tracing), entre otros, (Aarseth, 1997). El esquema propuesto por Vanvik (1998) se muestra en la Figura 1.1. En este sistema, la tubería es un conductor activo en un circuito eléctrico de una sola fase y la potencia eléctrica es proporcionada desde una plataforma a través de dos cables de alimentación que se conectan a cada uno de los extremos de la tubería. La generación de calor y la eficiencia del sistema dependen de la corriente que pasa a través de la pared de la tubería, las dimensiones y las características eléctricas y magnéticas.

La generación de calor requerida se alcanza a través de la disipación resistiva que se presenta debido a la resistencia eléctrica que la tubería ofrece al paso de corriente en el interior de su pared. La disipación de potencia depende de las propiedades resistivas y magnéticas del acero y la distancia entre la superficie externa de la tubería y el cable de alimentación que corre de forma paralela a la tubería.

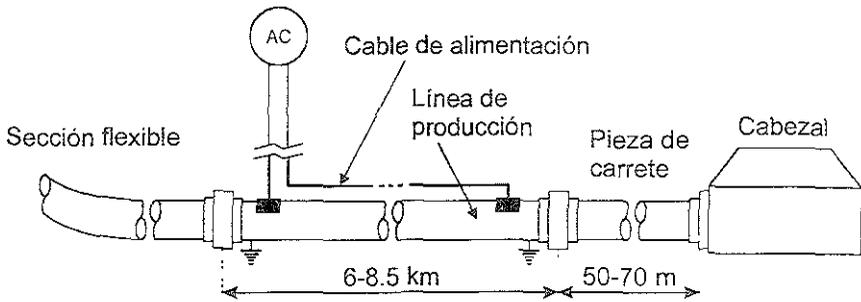


Figura 1.1 Esquema de los sistemas de producción y calentamiento (Vanvik, 1998)

Esta distancia es importante porque tiene influencia sobre la magnitud de la corriente. El valor de la resistencia eléctrica alcanza un valor máximo cuando el cable está a la menor distancia posible de la tubería.

Algunos requerimientos que se sugieren para esta configuración, son.

1. La temperatura del flujo debe mantenerse por encima de la temperatura de formación de hidratos, cuando éste alcanza las plataformas. Esto puede lograrse, por lo general, mediante el aislamiento de las líneas.
2. Durante un corte de la producción las líneas deben mantener una temperatura por encima de la de formación de hidratos durante un tiempo mínimo preestablecido.
3. La temperatura del flujo no debe exceder la temperatura máxima admisible por las secciones flexibles de la línea (si las hay) que, en algunas ocasiones, elevan el flujo desde el fondo marino hasta las plataformas, ya que son de material plástico que se degrada rápidamente a altas temperaturas.

Es importante notar que puede haber un conflicto entre el tercer requisito y los dos primeros. Si las condiciones de operación fuesen a permanecer constantes en el tiempo, sería más fácil enfrentar el problema, pero se espera que las condiciones varíen significativamente.

Hojo et al. (1987) proponen calentar eléctricamente las tuberías coaxiales de material ferromagnético que se utilizan para el transporte del crudo. Estas líneas constan, como su nombre lo indica, de dos tuberías concéntricas (Figura 1.2) mantenidas en posición por separadores que se encuentran espaciados a intervalos regulares. La corriente se puede aplicar directamente a las tuberías de modo que este método permite la eliminación de cables conductores o tuberías secundarias que, en el caso de líneas submarinas, pueden ser problemáticos.

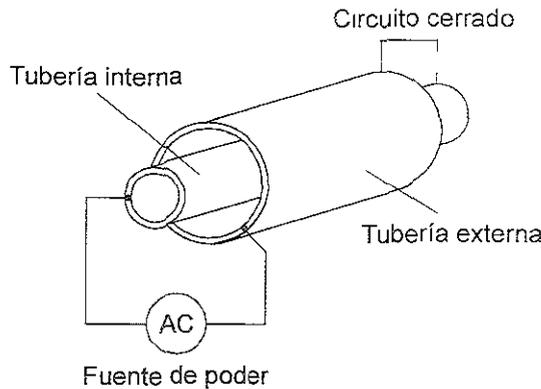


Figura 1.2 Esquema de una línea coaxial calentada eléctricamente (Hojo et al., 1987)

En algunas ocasiones, la conductividad eléctrica del fluido que se transporta o en el que está inmersa una tubería calentada eléctricamente puede constituir una vía alternativa para la corriente que en vez de recorrer la pared de la tubería pasa a través del fluido. Esto no es deseable puesto que el efecto que se busca obtener es el de calentamiento por disipación resistiva en el interior de la pared de la tubería. Para obviar este inconveniente, Epstein y White (1996) proponen utilizar una conexión intermedia junto con los cables de retorno desde los extremos de la tubería (Figura 1.3).

Esto pone cada mitad de la tubería eléctricamente en paralelo e impide la formación de un potencial eléctrico por fuera de la longitud de la pared calentada.

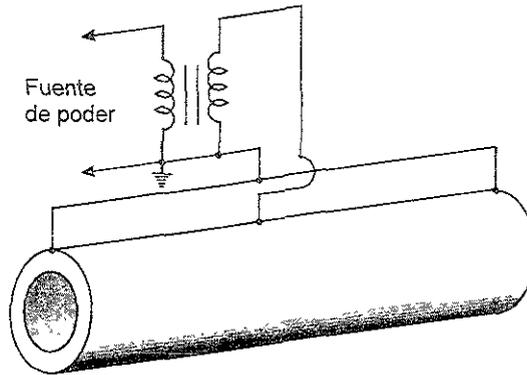


Figura 1.3 Conexión intermedia para evitar conducción en el fluido (Epstein y White, 1996)

Epstein y White (1996) llevaron a cabo numerosos experimentos para encontrar la respuesta de tuberías ante la aplicación de una corriente eléctrica, tanto alterna como directa. Se utilizaron tuberías de diferentes longitudes y en la Figura 1.4 se muestra un esquema de los arreglos que típicamente se utilizaron en las pruebas de laboratorio.

Cualquiera que sea el método de calentamiento eléctrico o su configuración, el modelado de flujo multifásico y transferencia de calor transitorios en estos sistemas es una etapa importante de su diseño y operación

1.2.2 Inestabilidades en sistemas bifásicos, ebullición y flasheo

Otro problema que requiere la predicción de la transferencia de calor conjugada es el análisis de inestabilidades de sistemas bifásicos (Bergles, 1981). Las inestabilidades en el flujo dentro de canales calentados no son deseables puesto que pueden causar vibraciones mecánicas de los componentes, así como temperaturas oscilantes en las paredes y pueden, también, inducir crisis de ebullición, también conocidas como "secado" (dry out); en estas crisis, todo el líquido se evapora, dejando las paredes "secas". lo que podría disparar su temperatura. El análisis que se lleva a cabo para predecir el umbral de la inestabilidad del flujo, especialmente el análisis de inestabilidad

dinámica, requiere una descripción precisa de la interacción entre el flujo en ebullición y la pared calentada

Una condición limitante que es de particular importancia en equipo industrial es la que se conoce como condición de “flujo de calor crítico” (“critical heat flux”, CHF) también conocido como “burnout”. Cuando se alcanza la condición de CHF, ocurre un deterioro abrupto del proceso de transferencia de calor durante la ebullición. En la ebullición de un líquido estancado (“pool boiling”), este deterioro parece estar parcialmente relacionado con una limitación hidrodinámica en la que no llega la suficiente cantidad de líquido a la superficie calentada debido a la tasa a la que el vapor se aleja de la superficie misma (Collier, 1976). En flujos de convección forzada ocurren dos procesos distintos relacionados con el estado CHF: “alejamiento de la ebullición por nucleación” (“departure from nucleate boiling”, DNB) y “secado” (“dryout”). En el análisis de canales calentados, es importante tomar en consideración la posible aparición de condiciones críticas.

Desde el punto de vista de transferencia de calor, la evaporación se puede definir como el cambio de fase debido a la adición de energía, en forma de calor, a un sistema que comprende a un líquido de modo tal que ocurre generación de gas por la evaporación del líquido. Esta definición establece una diferencia entre este proceso y el de “evaporación por despresurización” (flasheo), en el que se utiliza la energía interna del líquido mismo (al ser sometido a una caída de presión) para producir gas. También vale la pena mencionar que los coeficientes de transferencia de calor en sistemas evaporativos son, normalmente, mucho mayores en condiciones de flujo multifásico que cuando existe una sola fase (incluso dos órdenes de magnitud).

1.2.3 Modelos multifásicos

Las leyes básicas que se utilizan para predecir el comportamiento hidrodinámico y termodinámico de un flujo bifásico son exactamente las mismas que las que gobiernan la dinámica de fluidos de una sola fase. En general, se empieza escribiendo las leyes de conservación de masa, momento y energía, para después resolver las ecuaciones en el

interior del marco de un modelo simplificado mediante una serie de suposiciones adecuadas.

Puesto que se tienen dos fases fluyendo de forma conjunta, se tienen al menos dos veces el número de ecuaciones básicas que se tienen para el caso de flujo monofásico. Además, las condiciones de frontera son más complicadas puesto que involucran factores como la tensión superficial y el cambio de fase. También tienen importancia las fuerzas entre las fases y las fuerzas externas, así como los procesos de transferencia de calor y de masa. Hay diferentes maneras de formular las ecuaciones de conservación y de realizar las suposiciones para simplificar el modelo.

Históricamente, los modelos que se han desarrollado se pueden clasificar de la siguiente manera (Collier, 1976):

- Flujo homogéneo: se asume que el flujo bifásico es equivalente a un flujo monofásico con pseudo propiedades.
- Flujo separado: se hace una consideración artificial en la que las fases se toman como segregadas (es necesario modelar la interacción entre las fases).
- Flujo de deriva: este es un modelo de flujo “separado” en el que se presta especial atención al movimiento relativo entre las fases.
- Modelos de patrón de flujo (modelos mecánicos, fenomenológicos): se asume que las fases se encuentran configuradas en una de varias geometrías definidas con base en observaciones.

Al tratar con flujos bifásicos se pueden identificar tres dificultades principales que se enlistan primero y se amplían más abajo, es decir:

1. El gran número de propiedades físicas relevantes involucradas.
2. La caracterización de la interfaz.
3. La presencia de efectos que se oponen al equilibrio

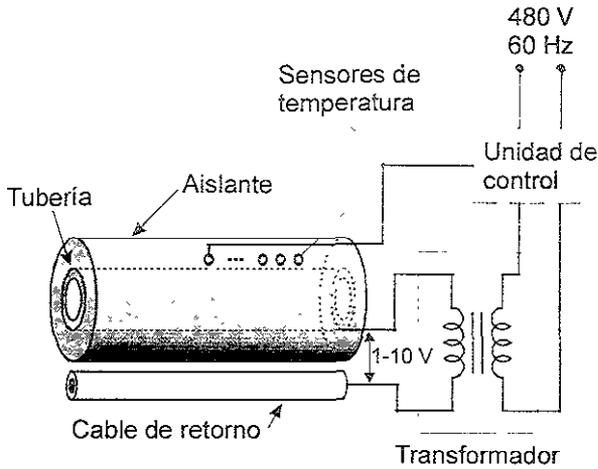


Figura 1.4 Esquema de un circuito experimental (Epstein y White, 1996)

Suele ser posible caracterizar a los flujos monofásicos en términos de unos cuantos grupos adimensionales como el número de Reynolds o el número de Mach. En los flujos bifásicos, en cambio, no sólo hay el doble de propiedades (como viscosidad, densidad, etc.) que en los de una sola fase, sino que además se tienen propiedades adicionales (tensión superficial, calor latente de evaporación, calidad, etc.) asociadas con el cambio de fase (flujo bifásico de un componente) o la interacción entre las fases (flujo bifásico de componentes inmiscibles, ya sea líquido-gas o líquido-líquido). El número de grupos adimensionales independientes aumenta en uno por cada propiedad adicional, por lo que se puede terminar con diez grupos adimensionales relevantes o más. Es frecuente que los ingenieros deseen modelar las condiciones de operación para un componente en particular con el fin de estar seguros de su comportamiento.

El segundo problema, relacionado con la interfaz, es verdaderamente complejo. En su forma más simple puede ser considerado como la necesidad de especificar un patrón de flujo. Sin embargo, la interfaz gas-líquido puede tomar un sinfín de posibles perfiles y, por añadidura, se puede tener la ulterior complicación de actividad, reacción o contaminación interfacial. Al profundizar en el modelo de flujo separado, se requiere la

evaluación empírica de “coeficientes de interacción” que deberán ser incluidos en las ecuaciones de cada fase.

La tercera de las grandes dificultades antes enumeradas está relacionada con efectos que alejan al sistema del equilibrio. Se deben considerar tanto la falta de equilibrio hidrodinámico (flujo no completamente desarrollado) como la falta de equilibrio termodinámico (diferentes temperaturas en las fases). Como un ejemplo de esto, considérese un flujo isotérmico de agua y aire en el que toda el agua se inyecta a la entrada de un conducto, en la región cercana a la pared, mientras que el aire fluye por el centro. Después de una distancia finita, el flujo se habrá acomodado de forma tal que la disposición del líquido y del gas ya no cambia con la distancia. Sin embargo, bajo condiciones de evaporación, podría ser imposible alcanzar esas condiciones de equilibrio debido al incremento, progresivo con la distancia, de vapor de agua.

En general, se puede decir que estas condiciones que se oponen al equilibrio son resultado de disparidades de temperatura a lo largo de la sección, capa límite transitoria alrededor de burbujas o gotas y los límites en las tasas de evaporación y condensación. De modo que será posible que existan burbujas gaseosas en líquidos sobre enfriados o gotas líquidas en gases sobrecalentados.

También se pueden presentar situaciones que alejen al sistema del equilibrio cuando coexistan dos fases con diferentes temperaturas promedio, en fenómenos de transferencia de calor subsiguientes a una crisis de ebullición (secado), en flujos críticos y volátiles, y en situaciones de accidentes como despresurización e interacción de combustibles y refrigerantes.

1.2.4 El fenómeno de transferencia de calor conjugada

Se ha realizado una considerable cantidad de investigación sobre fenómenos de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo monofásico. Los métodos existentes para resolver este problema incluyen técnicas exactas, aproximadas y numéricas. Los primeros intentos de enfrentar el problema se basan en los métodos exactos y aproximados, en los que se hacen suposiciones de simplificación con respecto a

la capacidad térmica del fluido y las capacidades térmicas y de conducción de la pared de la tubería (Sucec, 1975 y 1981; Lin et al. 1991) La formulación matemática más rigurosa del problema (Lin y Kuo, 1988) toma en consideración tanto las conducciones de calor radial y axial, como los efectos de las capacidades térmicas del fluido y la pared de la tubería. En ese caso, se resolvieron numéricamente las ecuaciones para el flujo y para la pared.

Una revisión de las técnicas existentes para resolver problemas de transferencia de calor conjugada (Fairuzov, 2000) muestra que un planteamiento riguroso del problema en condiciones de flujo bifásico, involucra modelado numérico de la conducción de calor transitoria dentro de la pared de la tubería y la predicción de la transferencia de calor evaporativa mediante el uso de correlaciones experimentales. El comportamiento del fluido se modela mediante un sistema de ecuaciones para flujo bifásico en el que la ecuación de la energía incluye un término fuente que describe la transferencia de calor entre la pared y el fluido. La conducción de calor transitoria, en la pared que limita al fluido, se modela mediante la ecuación de conducción de calor.

Para acopiar el modelo del flujo (modelo hidrodinámico) con el modelo de conducción de calor en la pared (modelo de transferencia de calor), se formula una ecuación de balance de energía en la interfaz entre el fluido y la pared. Se han propuesto numerosas correlaciones para transferencia de calor convectiva bifásica (por ejemplo, Chen, 1966, Klimenko, 1988; Shah, 1976).

Fairuzov (1998) propuso un nuevo planteamiento para abordar y resolver el problema de transferencia de calor conjugada en flujos de líquidos volátiles sometidos a evaporación por despresurización (flasheo). Este planteamiento está basado en la suposición de que la pared de la tubería y el fluido están en equilibrio térmico local. La ecuación de la energía está formulada para un volumen de control que incluye un elemento del fluido y un elemento de la pared adyacente. El efecto de la capacidad térmica de la pared se incorpora en la ecuación de la energía para el fluido mediante la incorporación de un término adicional. Por lo tanto, un modelo basado en este

planteamiento no requiere predecir la conducción de calor en el interior de la pared de la tubería, para tomar en cuenta la transferencia de calor entre la pared y el fluido.

En Fairuzov (1999), se presenta un ulterior desarrollo de este planteamiento y se introduce un nuevo parámetro adimensional fundamental que describe el efecto de la capacidad térmica de la pared sobre el comportamiento del flujo bifásico. Para un líquido de un solo componente, volátil, sometido a evaporación por despresurización (flasheo), que fluye a través de un conducto de sección transversal A , delimitado por una pared de área de sección transversal A_w , este parámetro adimensional (conocido como factor de adiabaticidad) se define como

$$Fa = \frac{\rho_w c_w v_{fg} A_w T}{h_{fg} A} \quad (1.3)$$

donde T es la temperatura de la pared en grados Kelvin y h_{fg} es el calor latente de evaporación.

De acuerdo con la Ecuación (1.3) el *factor de adiabaticidad*, Fa , proporciona una medida de la razón entre la energía almacenada en la pared y la energía que se requiere para la evaporación del líquido por algún motivo que podría ser su despresurización

Fairuzov (1999) demostró que para un líquido volátil en una tubería que sufre una pérdida repentina de presión, la formulación del modelo utilizando el factor de adiabaticidad para tomar en cuenta el efecto de la pared en el fenómeno de transferencia de calor ofrece muy buenos resultados de concordancia con el modelo riguroso si se aplica en el intervalo de validez

La validez del nuevo modelo depende de la razón entre los tiempos característicos de dos procesos: el decaimiento de la temperatura del fluido y la conducción transitoria de calor en la pared (Fairuzov, 1998) El proceso de decaimiento de temperatura del fluido está gobernado por los efectos de fricción con la pared y las dimensiones de la fractura que provocan la caída repentina de presión (en una tubería). El tiempo característico del proceso de transferencia de calor en la pared es el tiempo requerido para

alcanzar una nueva distribución de temperatura de estado permanente después del cambio abrupto de temperatura o de flujo de calor en la interfaz pared-líquido. Este tiempo depende de la geometría de la tubería y de las propiedades termodinámicas y de transporte del material de la pared.

En el caso analizado por Fairuzov (1999) se concluyó que el modelo es válido para tuberías largas, es decir cuando la longitud de la tubería es mucho mayor que el diámetro ($L_f/D > 200$), pero presenta errores no despreciables si la longitud de la tubería no es mucho mayor que su diámetro ($L_f/D < 200$)

En el caso de los oleoductos calentados, estos suelen fabricarse de acero u otro metal. Cuando la tasa de generación de calor está por debajo de los 10^7 W/m^3 , el gradiente transversal de temperatura en la pared es pequeño debido a la gran conductividad térmica de los metales. Esta situación causa dificultades en el análisis numérico riguroso de la transferencia de calor conjugada, que utiliza la formulación tradicional. Las diferencias en la temperatura de los distintos nodos del mallado de la tubería son tan pequeñas que el problema se vuelve susceptible a los errores de redondeo inherentes a los métodos numéricos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas. Bajo estas circunstancias se vuelve difícil obtener el balance térmico en la interfaz existente entre la pared y el fluido.

Por esta razón, además de motivos de simplificación del modelo con la consiguiente reducción en tiempos de cómputo, sería de sumo interés comprobar la aplicabilidad del planteamiento que involucra al factor de adiabaticidad, F_a , para tomar en cuenta el efecto de la pared, para simular oleoductos calentados eléctricamente, o cualquier otro sistema de flujo bifásico transitorio confinado a una tubería con generación interna de calor.

1.3 Objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis es plantear un modelo simplificado de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo multifásico de un componente que fluye en una tubería que presenta generación de calor en la pared. Este modelo permitirá reducir la complejidad del análisis y, por consiguiente, los tiempos y recursos de cómputo necesarios para modelar numéricamente los fenómenos transitorios del sistema.

Los objetivos específicos de este trabajo se enumeran a continuación:

1. Plantear la formulación del modelo que se propone (simplificado) Dicho modelo se basa en el factor de adiabaticidad, F_a , para tomar en cuenta el efecto de la pared sobre el fenómeno de transferencia de calor conjugada.
2. Plantear la formulación del modelo riguroso de transferencia de calor conjugada.
3. Elaborar modelos numéricos basados en las dos diferentes formulaciones.
4. Llevar a cabo las correspondientes simulaciones
5. Validar el modelo propuesto mediante comparación con el modelo riguroso.
6. Especificar en qué casos la nueva formulación es válida y aplicable.

1.4 Descripción de la tesis

En el Capítulo 2 se plantea el problema y se presentan las formulaciones matemáticas de los dos modelos: el riguroso y el simplificado. El modelo riguroso se divide, a su vez, en un modelo hidrodinámico (que describe el flujo bifásico) y un modelo de transferencia de calor dentro de la pared de la tubería.

En el Capítulo 3 se presentan y comparan los modelos numéricos correspondientes a los modelos matemáticos riguroso y simplificado. Estos modelos numéricos son la base sobre la que se desarrollaron dos programas de cómputo para

realizar las simulaciones que permiten comparar entre si el desempeño de los modelos. También se presenta un programa de cómputo que permite calcular las propiedades termodinámicas de diferentes fluidos de trabajo

Las predicciones obtenidas con los programas basados en la formulación rigurosa y simplificada, así como la comparación entre ellas, se presentan en el Capítulo 4

Las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros, al igual que un breve análisis de las contribuciones que el presente trabajo aporta, se ofrecen en el Capítulo 5

El Apéndice A contiene el desarrollo algebraico que se llevó a cabo para llegar a los modelos numéricos descritos en el Capítulo 3.

En el Apéndice B se encuentran las ecuaciones y los datos que se utilizaron para desarrollar el programa de cómputo para calcular las propiedades termodinámicas de fluidos, presentado en el Capítulo 3

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN DEL MODELO

2.1 Planteamiento del problema

El problema que será examinado en este trabajo se muestra esquemáticamente en la Figura 2.1. Una mezcla bifásica (gas-líquido) de un solo componente fluye a través de una tubería aislada de diámetro interno D y longitud L . El espesor de la pared es δ . Inicialmente el sistema, que incluye el flujo y la pared de la tubería, se encuentra en estado permanente. En un instante inicial ($t = 0$), se hace pasar una corriente eléctrica a través de la pared de la tubería para provocar generación de calor en esta. La tasa de generación de calor en el interior de la pared es uniforme a lo largo de toda la longitud de la tubería y constante en el tiempo posterior al instante inicial ($t > 0$). A lo largo del transitorio que se produce antes de que el sistema alcance una nueva condición de estado permanente, se mantienen constantes la velocidad másica y las propiedades termodinámicas del flujo a la entrada, así como la presión existente a la salida de la tubería. El problema consiste en predecir la respuesta transitoria del sistema ante la generación de calor en la pared de la tubería.

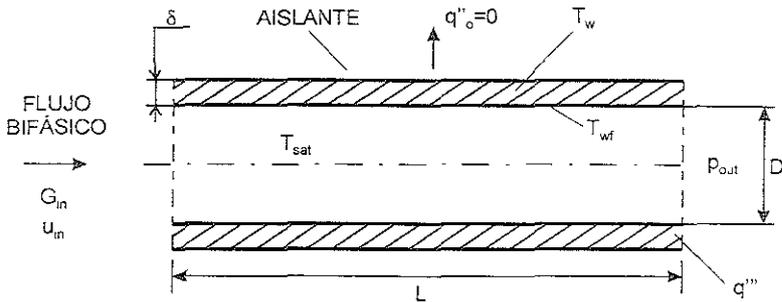


Figura 2.1 Flujo bifásico en una tubería (esquema de la geometría del problema)

2.2 Análisis riguroso

2.2.1 Modelo hidrodinámico

A continuación se enumeran las suposiciones que se realizan en el planteamiento del modelo hidrodinámico con el fin de reducir la complejidad del problema, así como la justificación de las mismas:

- 1 El flujo es unidimensional. Debido a la diferencia entre la longitud y el diámetro ($L \gg D$), la componente dominante de velocidad en el flujo será la longitudinal. Al grado que las componentes transversales pueden ignorarse.
2. Las dos distintas fases presentes en el flujo se encuentran en equilibrio térmico. En transitorios lentos el efecto del desequilibrio térmico es despreciable puesto que existe el tiempo suficiente para alcanzar el equilibrio.
3. El flujo bifásico es homogéneo ($V_l = V_g$). Esta suposición se realiza simplemente para simplificar la derivación de la ecuación combinada de la energía. Si el fenómeno de deslizamiento fuese importante, el planteamiento propuesto podría aplicarse a otras formulaciones de modelos para flujos bifásicos como, por ejemplo, el modelo de flujo de deriva o el modelo de dos fluidos.

4. La conducción de calor en la pared de la tubería, en la dirección longitudinal, es despreciable. Esto se debe a que el área de la sección transversal de la pared de la tubería es muy pequeña en comparación con la superficie a través de la cual se presenta transferencia de calor por conducción en la dirección radial.

Este modelo es, esencialmente, el conocido modelo de equilibrio homogéneo de una mezcla multicomponente aplicado, en este caso, a un flujo bifásico de una componente. La aplicabilidad de la teoría de equilibrio homogéneo para el análisis de flujos bifásicos en tuberías largas horizontales ha sido demostrada por Wallis (1980) y Chen et al. (1995).

En el problema planteado, el flujo bifásico sustrae calor de la pared que se genera en la misma. Es por ello conveniente definir un término fuente de calor que exprese la cantidad de calor generada en la pared, por unidad de volumen del fluido en vez que por unidad de volumen de la pared. Puesto que la relación entre el volumen del fluido y el volumen de la pared es la misma que entre sus áreas de sección transversal, es posible definir

$$\bar{q} = q'' \frac{A_w}{A} \quad (2.1)$$

Bajo las suposiciones antes hechas y utilizando la definición establecida por la Ecuación (2.1) las ecuaciones que rigen el fenómeno hidrodinámico se pueden escribir de la siguiente manera:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (2.2)$$

Ecuación de cantidad de movimiento lineal

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - KV|V| + g \quad (2.3)$$

Ecuación de la energía (formulación convencional)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial x}(pV) = \bar{q} \quad (2.4)$$

Ecuación de estado

$$\rho = \rho(p, u) \quad (2.5)$$

cuya derivada es

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_u \left[1 - u \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_v\right] \quad (2.6)$$

Las Ecuaciones (2.2) a (2.5) constituyen el sistema de ecuaciones fundamental que rige el fenómeno analizado. Para predecir el comportamiento del sistema físico, deberá resolverse este sistema de ecuaciones.

Para ello, será necesario que el sistema de ecuaciones satisfaga el criterio de cerradura. Ello requiere la especificación de relaciones constitutivas para el término de fricción en la pared, K , y el término fuente de calor, \bar{q} .

La fuerza de arrastre por unidad de volumen de fluido ejercida por la pared sobre el flujo bifásico se estima utilizando, tanto la correlación del multiplicador de fricción para flujo bifásico basada en la expresión de McAdams (1942) para la viscosidad promedio de fluidos bifásicos, como la correlación de Colebrook para el factor de fricción en una sola fase, mediante la expresión

$$F_w = \Phi_1^2 \frac{f_1}{2D} \frac{G^2}{\rho_1} \quad (2.7)$$

donde Φ_1^2 es el multiplicador de fricción para flujo bifásico y se calcula mediante la correlación de McAdams (1942)

$$\Phi_1^2 = \left(1 + X \frac{(v_g - v_l)}{v_l}\right) \times \left(1 + X \frac{(\mu_l - \mu_g)}{\mu_l}\right) \quad (2.8)$$

y f es el factor de fricción para una sola fase y se calcula mediante la correlación de Colebrook (White, 1993)

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_D f^{1/2}} \right) \quad (2.9)$$

Se asume que el término fuente de calor que aparece en la ecuación de la energía es de la forma

$$\bar{q} = \frac{4h_{tp}(T_1 - T_{sat})}{D} \quad (2.10)$$

donde h_{tp} es el coeficiente de transferencia de calor convectiva para un flujo bifásico

De modo que para poder calcular el término fuente de calor, \bar{q} , será necesario calcular antes h_{tp} . Existe información para conocer el valor del coeficiente de transferencia de calor convectiva para flujos monofásicos. Sin embargo, la literatura publicada acerca de ebullición en condiciones de convección forzada en fluidos de más de una fase es muy limitada. Una de las correlaciones existentes es la correlación modificada de Chen para flujos bifásicos en tuberías horizontales, pero sólo es válida para situaciones en las que la totalidad de la pared interna de la tubería se mantiene mojada. Por lo tanto, la aplicación de la correlación de Chen en condiciones en las que puede aparecer segregación de fases, no sería apropiada. En el presente trabajo, para calcular h_{tp} se utilizó la correlación de Gungor y Winterton (1987):

$$\frac{h_{tp}}{h_l} = 1 + 3000 \times \text{Bo}^{0.86} + 1.12 \left\{ \frac{X}{1-X} \right\}^{0.75} \left\{ \frac{\rho_l}{\rho_g} \right\}^{0.41} \quad (2.11)$$

donde x es la calidad y Bo es un número adimensional conocido como “boiling number” o “número de ebullición.

La generación de vapor en un proceso convectivo que involucra ebullición, produce una perturbación importante en la capa límite que incrementa la transferencia de calor. El número de ebullición, Bo , es una valor adimensional de la medida de la importancia que tiene este efecto y se define como

$$Bo = \frac{q''}{\lambda G} \quad (2.12)$$

donde λ es el calor latente.

La correlación de Gungor y Winterton goza de la ventaja de ser sumamente simple y fácil de incluir en un programa de cómputo, además de que se comprobó que en muchos casos (incluyendo el analizado) ofrece mejores resultados que otras correlaciones más complejas

2.2.2 Condiciones iniciales y de frontera del modelo hidrodinámico

Las condiciones iniciales consisten en que, en el tiempo inicial, $t = 0$, la densidad, velocidad y energía interna del fluido son funciones conocidas, que dependen de la distancia, que fueron calculadas previamente. Es decir

$$\begin{aligned} &\text{Para } t = 0: \\ &\rho, u, V = \rho(x), u(x), V(x) \text{ conocidas} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Los valores de las condiciones de frontera se determinan para tiempos mayores que cero ($t > 0$). En este caso, como condiciones de frontera se tiene que los valores de gasto másico y energía interna del fluido, a la entrada, son conocidos y constantes y la presión a la que se encuentra el fluido a la salida es conocida y constante

Para $t > 0$:

A la entrada ($x = 0$).

$$\begin{aligned} G_{x=0} &= G_{in} = \text{cte} \\ u_{x=0} &= u_{in} = \text{cte} \end{aligned} \quad (2.14)$$

A la salida ($x = L$):

$$p_{x=L} = p_{out} = \text{cte} \quad (2.15)$$

2.2.3 Modelo de transferencia de calor

Expresado de forma general, el fenómeno físico de interés consiste en conducción de calor en estado transitorio, con generación de calor, en un cilindro hueco (la tubería) de longitud mucho mayor al diámetro ($L \gg D$). Ver Figura 2.2.

Este fenómeno se encuentra regido por la ecuación general de conducción de calor que, en su forma polar y si se supone que el material es isotrópico, es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial z} \right) + q''' = \rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t} \quad (2.16)$$

Puesto que se parte del supuesto que $L \gg D$, y ya que es posible considerar que el gradiente de temperaturas en el sentido angular es nulo, se puede entonces reducir el problema a un fenómeno de conducción de calor unidimensional (radial), con generación de calor. De modo que la Ecuación (2.16) se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + q''' = \rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t} \quad (2.17)$$

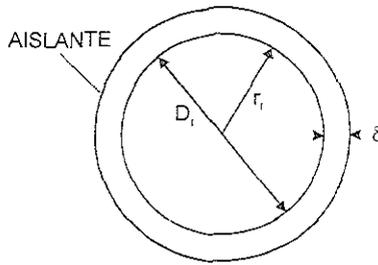


Figura 2.2 Modelo de transferencia de calor (esquema de la geometría del problema)

La solución analítica de la Ecuación (2.17) es relativamente compleja y sólo puede ser obtenida para condiciones de frontera (del 1^{ro}, 2^{do} y 3^{er} tipo) fijas (constantes). Por lo tanto, también para encontrar el campo de temperaturas en la pared del cilindro hueco (en este caso, el oleoducto) en el presente trabajo se utiliza un modelo numérico

2.2.4 Condiciones iniciales y de frontera del modelo de transferencia de calor

Las condiciones iniciales y de frontera que se especifican para la Ecuación (2.17), en el problema específico analizado, se presentan a continuación.

En el tiempo inicial, $t = 0$, el campo de temperaturas en la pared del cilindro es conocido. Es decir

Para $t = 0$

$$T|_{t=0,r} = T_m(r) \quad (2.18)$$

Para $t > 0$, en la pared exterior se tiene un flujo de calor igual a cero para cualquier valor de tiempo. Es decir, la pared exterior se encuentra aislada. Así mismo, puesto que el modelo riguroso se divide a su vez en dos partes que posteriormente se acoplan, es posible asumir que la temperatura en la pared interior es conocida para cualquier valor de tiempo. De modo que

Para $t > 0$:

En la cara externa de la pared ($r = r_o$):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{t, r=r_o} = 0 \quad (2.19)$$

En la cara interna de la pared ($r = r_i$):

$$T|_{t, r=r_i} = T_i \quad (2.20)$$

2.2.5 Acoplamiento de los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor

Para acoplar los dos modelos que constituyen el modelo riguroso, se utiliza la ecuación de balance de energía. La cantidad de calor generada en el interior de la pared debe ser igual a la cantidad de calor conducida a la interfaz pared-líquido y que el flujo que se desplaza en el interior de la tubería sustrae de la pared. El balance de energía puede formularse de la siguiente manera

$$k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=r_i} = \bar{q} \frac{D}{4} \quad (2.21)$$

donde $\frac{D}{4}$ es la relación entre el volumen del fluido $\left(\frac{\pi D^2 L}{4} \right)$, y la superficie de la cara interna de la tubería (πDL), que es la superficie a través de la cual el calor es sustraído por el flujo.

El gradiente de temperatura que aparece en el lado izquierdo de la Ecuación (2.21) es, precisamente, el que calcula numéricamente el modelo de transferencia de calor.

2.3 Análisis simplificado

Al igual que en el análisis riguroso, para reducir la complejidad del problema se realiza una serie de suposiciones en el planteamiento del modelo simplificado que se enumeran a continuación, así como la justificación de las mismas:

1. El flujo es unidimensional. Debido a la diferencia entre la longitud y el diámetro ($L \gg D$), la componente dominante de velocidad en el flujo será la longitudinal al grado que las componentes transversales pueden ignorarse.
2. Las dos distintas fases presentes en el flujo se encuentran en equilibrio térmico. En transitorios lentos el efecto del desequilibrio térmico es despreciable puesto que existe el tiempo suficiente para alcanzar el equilibrio.
3. El flujo bifásico es homogéneo ($V_l = V_g$). Esta suposición se realiza simplemente para simplificar la derivación de la ecuación combinada de la energía. Si el fenómeno de deslizamiento fuese importante, el planteamiento propuesto podría aplicarse a otras formulaciones de modelos para flujos bifásicos como, por ejemplo, el modelo de flujo de deriva o el modelo de dos fluidos.
4. El fluido y la pared se encuentran en equilibrio térmico local. Una alta conductividad del acero con el que está fabricada la tubería, así como un alto ($>10^4$ W/m²K, Gungor y Winterton, 1987) valor del coeficiente convectivo bifásico de transferencia de calor, resultan en gradientes radiales de temperatura pequeños.
5. La conducción de calor en la pared de la tubería en la dirección longitudinal es despreciable. Esto se debe a que el área de la sección transversal de la pared de la tubería es muy pequeña en comparación con la superficie a través de la cual se presenta transferencia de calor por conducción en la dirección radial.

2.3.1 Ecuaciones básicas

En el análisis simplificado, las dos primeras ecuaciones fundamentales que describen el fenómeno, es decir, la ecuación de conservación de masa (ecuación de

continuidad), Ecuación (2.2), y la ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal, Ecuación (2.3), permanecen sin modificación alguna. La modificación que este análisis aporta se centra en la ecuación de la energía. El punto de partida es una formulación alternativa de la ecuación de la energía, llamada ecuación combinada de la energía, de la siguiente manera:

Ecuación combinada de la energía:

Aplicando la primera ley de la termodinámica a un volumen de control fijo que comprende un elemento de fluido y un elemento de la tubería (Figura 2.3) conduce a

$$\frac{\partial E_{cv}}{\partial t} = \dot{Q} - \dot{W} + \left[\int_A \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) V \rho dA \right]_{in} - \left[\int_A \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) V \rho dA \right]_{out} \quad (2.22)$$

Asumiendo que los cambios en energía cinética y potencial son pequeños comparados con los cambios en energía interna, la Ecuación (2.22) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial U_{cv}}{\partial t} = \dot{Q} - \dot{W} + \left[\int_A (u + pv) V \rho dA \right]_{in} - \left[\int_A (u + pv) V \rho dA \right]_{out} \quad (2.23)$$

El único trabajo ejercido en las fronteras del volumen de control es trabajo de flujo a la entrada y salida del elemento de fluido, por lo que el término \dot{W} se puede igualar a cero. Las tasas de cambio de energía interna y flujo de trabajo a la entrada y salida se pueden expresar, a su vez, en términos de valores promedio sobre la sección transversal. Por lo tanto

$$\frac{\partial U_{cv}}{\partial t} = \dot{Q} + (\rho V h) A - \left[(\rho V h) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V h) dx \right] A \quad (2.24)$$

$$h = u + pv$$

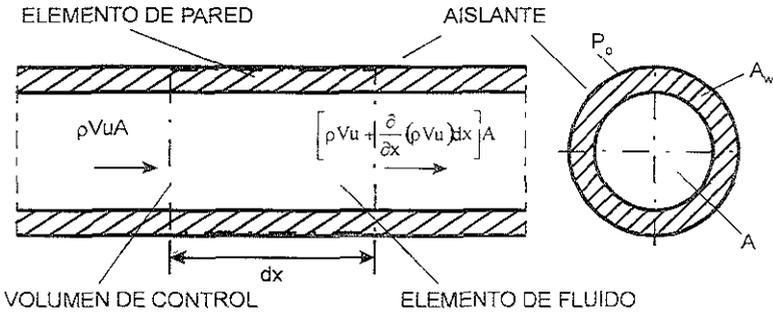


Figura 2.3 Volumen de control que incluye un elemento de fluido y un elemento de pared de la tubería

La tasa de cambio de la energía interna contenida en el volumen de control se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{\partial U_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_w}{\partial t} \quad (2.25)$$

donde $\frac{\partial U}{\partial t}$ y $\frac{\partial U_w}{\partial t}$ son las tasas de cambio en la energía interna en los elementos de fluido y pared de la tubería, respectivamente. Estos términos pueden ser escritos como integrales de volumen

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho u) dV \\ \frac{\partial U_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_w} (\rho_w u_w) dV_w \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sin embargo, ambos elementos (de fluido y de tubería) son tan pequeños que las integrales de volumen se pueden reducir, simplemente, a los términos derivativos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho u) dV &\approx \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} A dx \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_w} (\rho_w u_w) dV_w &\approx \frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial x} A_w dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

La tasa de calor transferida al volumen de control puede ser expresada como la suma de la tasa de calor generado en el elemento de la tubería y la tasa de calor a través de la frontera del volumen de control (que en este caso es igual a cero)

$$\dot{Q} = q''' dV_w + q_o'' dA = q''' dV_w \quad (2.28)$$

o, lo que es lo mismo

$$\dot{Q} = (q''' A_w) dx \quad (2.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.27) y (2.29) en la ecuación (2.24) se llega a

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} A dx + \frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial t} A_w dx + \frac{\partial(\rho V h)}{\partial x} A dx = (q''' A_w) dx \quad (2.30)$$

Dividiendo entre el volumen del elemento del fluido, $A dx$, y reordenando el segundo término del lado izquierdo de la Ecuación (2.30) resulta en

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial t} \frac{A_w}{A} + \frac{\partial(\rho V h)}{\partial x} = q''' \frac{A_w}{A} \quad (2.31)$$

Tomando en cuenta la ecuación de Clausius-Clapeyron

$$\frac{dT_{sat}}{T_{sat}} = \frac{v_{fg}}{h_{fg}} dp \quad (2.32)$$

y considerando que ρ_w y c_w son constantes, se tiene que

$$\frac{A_w}{A} \rho_w c_w \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A_w}{A} \rho_w c_w T_{sat} \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.33)$$

Recordando el parámetro adimensional Fa (factor de adiabaticidad), definido por la Ecuación (1.3)

$$Fa = \frac{\rho_w c_w v_{fg} A_w T}{h_{fg} A}$$

finalmente se puede llegar a

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + Fa \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h V) = q'' \frac{A_w}{A} \quad (2.34)$$

Expresar la Ecuación (2.34) en términos de la energía interna en vez de la entalpía y utilizar la definición de \bar{q} produce

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + Fa \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial x}(p V) = \bar{q} \quad (2.35)$$

Un examen minucioso de la Ecuación (2.35) revela que el efecto de la capacidad térmica de la pared sobre el comportamiento del flujo se vuelve importante cuando el factor de adiabaticidad se hace mayor que uno ($Fa > 1$) y la presión del sistema varía con el tiempo.

El examen de la Ecuación (2.35) también revela que esta formulación de la ecuación de la energía conduce a una ecuación muy similar a la que se obtiene con la formulación convencional, Ecuación (2.4), con la excepción del término adicional

$$Fa \frac{\partial p}{\partial t}.$$

2.3.2 Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales y de frontera para el modelo simplificado son exactamente las mismas que para el modelo hidrodinámico riguroso, Ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15).

CAPÍTULO 3

MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 Modelo numérico hidrodinámico

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales formado por las Ecuaciones (2.2) a (2.5) se resuelve mediante el esquema de solución numérica RELAP5 (Ransom y Trapp, 1978). Este método se basa en sustituir el sistema original de ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas que son parcialmente implícitas en el tiempo. Las cantidades escalares (presión, densidad, energía interna) se obtienen para los centros de las celdas de mallado, mientras que las cantidades vectoriales se obtienen para las fronteras de las celdas, como se muestra en la Figura 3.1. En las nuevas variables temporales, todos los términos implícitos son lineales.

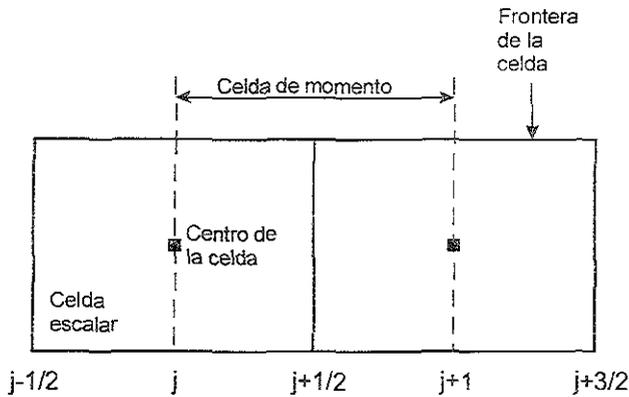


Figura 3.1 Esquema de diferencias escalonadas usado en el modelo hidrodinámico

El desarrollo algebraico mediante el cual se manipulan dichas ecuaciones en diferencias finitas (desarrollo que se presenta en el Apéndice A, Sección A1) conduce a una expresión del tipo

$$C_1 p_{j-1}^{n+1} + C_2 p_j^{n+1} + C_3 p_{j+1}^{n+1} = C_4 \quad (3.1)$$

donde los coeficientes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son conocidos y los valores de la presión son las incógnitas que se desea calcular.

La Ecuación (3.1) se establece para cada uno de los nodos del mallado del sistema. Este hecho implica que se tienen dos matrices: una formada por los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 que será del tipo tridiagonal (sólo las tres diagonales centrales tendrán valores distintos de cero) y otra formada por los valores del lado derecho, C_4 . Esto significa que se tiene un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que se puede resolver mediante una subrutina numérica para este fin. En este caso, se utilizó la subrutina *Tridag* (Numerical Recipes, 1992).

3.2 Modelo numérico de transferencia de calor

La ecuación transitoria de conducción de calor para cada segmento de tubería. Ecuación (2.17), se resolvió numéricamente mediante una formulación basada en un volumen de control (Patankar, 1980) que permite obtener un sistema de ecuaciones discretizadas que describen la conducción de calor transitoria en la dirección radial. La formulación basada en un volumen de control proporciona el balance global, los flujos de calor, las fuentes y los sumideros para cualquier número de puntos de malla. Esta circunstancia es muy importante para una predicción precisa del flujo de calor en la interfaz pared-fluido para el estudio del efecto de la pared de la tubería sobre el comportamiento del flujo.

La formulación basada en un volumen de control reduce el problema a un sistema de ecuaciones algebraico formado por las ecuaciones planteadas para cada uno de los nodos de un mallado en el que se divide el sistema. La Figura 3.2 nos muestra el esquema de discretización. Este se realiza en la dirección radial y todo el problema se considera unidimensional puesto que al tratarse de un cilindro hueco de longitud mucho mayor al diámetro la conducción axial es despreciable en comparación con la conducción radial. Así mismo, por simetría, la conducción angular se considera nula (como se mencionó en la Sección 2.2 3).

Las ecuaciones en diferencias finitas que el programa utiliza son las siguientes:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (3.2)$$

donde

$$a_E = \frac{k_E r_E \Delta \phi}{(\Delta r)_E}, \quad a_w = \frac{k_w r_w \Delta \phi}{(\Delta r)_w} \quad (3.3)$$

$$a_N = 0, \quad a_S = 0 \quad (3.4)$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} \quad (3.5)$$

$$b = q'' \Delta V + a_p^0 T_p^0 \quad (3.6)$$

$$a_p = a_n + a_s + a_p^0 \quad (3.7)$$

$$\Delta V = 0.5 \times (r_E + r_W) \times \Delta r \quad (3.8)$$

Siendo T_p^0 , en la Ecuación (3.6), el valor de temperatura en el nodo de interés (nodo P) para el paso de tiempo anterior. La diferencial del ángulo $\Delta\phi$ puede ser igualada a uno puesto que la conducción se considera puramente radial.

La razón de la Ecuación (3.4) radica en el hecho de que el modelo se reduce a una dimensión. Los únicos nodos que se consideran son el local, el "Este" y el "Oeste". Por lo que la Ecuación (3.2) se reduce y se puede reacomodar como

$$-a_E T_E + a_p T_p - a_W T_W = b \quad (3.9)$$

Se puede ver que la Ecuación (3.9) corresponde, de forma similar a lo que ocurre en el modelo hidrodinámico, a un sistema de ecuaciones que se puede ordenar en forma de una matriz tridiagonal en donde las incógnitas son las temperaturas correspondientes al paso de tiempo actual y los demás términos son conocidos. Este sistema de ecuaciones algebraicas se puede resolver mediante la misma subrutina utilizada en el modelo hidrodinámico, *Tridag* (Numerical Recipes, 1992).

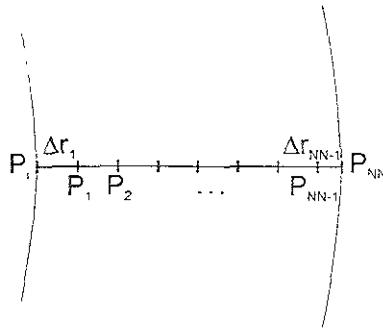


Figura 3.2 Modelo de transferencia de calor (esquema de discretización)

3.3 Verificación del modelo numérico de transferencia de calor

Para validar los resultados obtenidos con el programa, se utilizaron tres métodos distintos e independientes. En los dos primeros métodos se supone que el tiempo es lo suficientemente grande para que se establezca un estado permanente en los campos de temperatura en el cilindro hueco. El tercer método consiste en un modelo que se basa en la solución de Liukov que permite considerar el transitorio.

3.3.1 Comparación con solución analítica

En el primero de los métodos de verificación utilizados, el nuevo campo de temperaturas en estado permanente que se alcanza después del transitorio, puede ser comparado con un campo de temperaturas encontrado mediante la ecuación

$$T = -\frac{q''' r^2}{4k} + \frac{q''' r_o^2}{2k} \ln(r) + T_i + \frac{q'''}{2k} \left[\frac{r_i^2}{2} - r_o^2 \ln(r_i) \right] \quad (3.10)$$

a la que se llegó a través del desarrollo algebraico mostrado en el Apéndice A, Sección A.2.

Para las condiciones de frontera que se tiene, la Ecuación (3.10) proporciona el valor de la temperatura en función del radio, una vez que el sistema se encuentra nuevamente en estado permanente. Este valor de temperatura puede ser utilizado como punto de comparación para el que se obtiene con el modelo numérico de transferencia de calor y así validar este último.

Para hacer esto, se realizó un programa más que lleva a cabo una discretización idéntica a la del modelo numérico de transferencia de calor y calcula las temperaturas en los nodos mediante la Ecuación (3.10).

Las temperaturas en la pared obtenidas mediante el método analítico y mediante el modelo numérico de transferencia de calor (acoplado al modelo numérico hidrodinámico, dentro del modelo riguroso) se comparan mediante las gráficas que aparecen en las Figuras 3.3 a 3.5. Como se puede ver, en el eje de las ordenadas aparece el radio adimensionalizado. Los dos campos de temperatura encontrados por los distintos métodos son prácticamente indistinguibles. Las diferencias que se presentan están muy por debajo de la resolución de los instrumentos de medición utilizados en la práctica en los ámbitos en los que se trabaja con fluidos multifásicos.

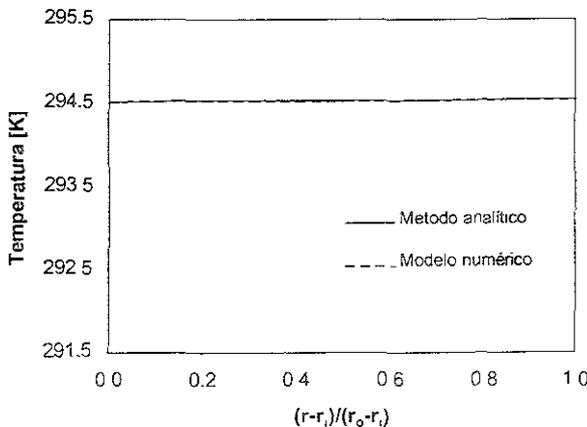


Figura 3.3 Variación radial de la temperatura en la pared, a la entrada ($x=0$), (estado permanente)

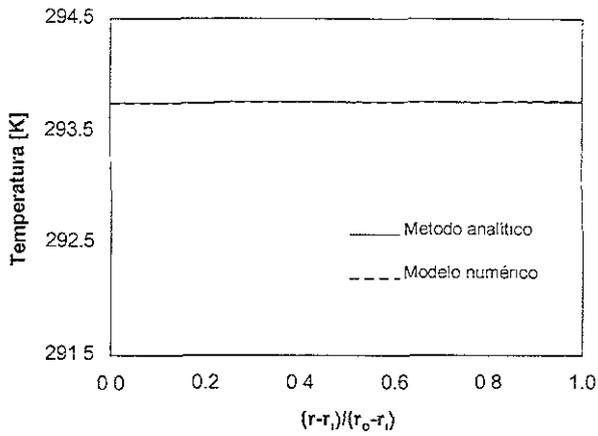


Figura 3.4 Variación radial de la temperatura en la pared en $x=L/2$, (estado permanente)

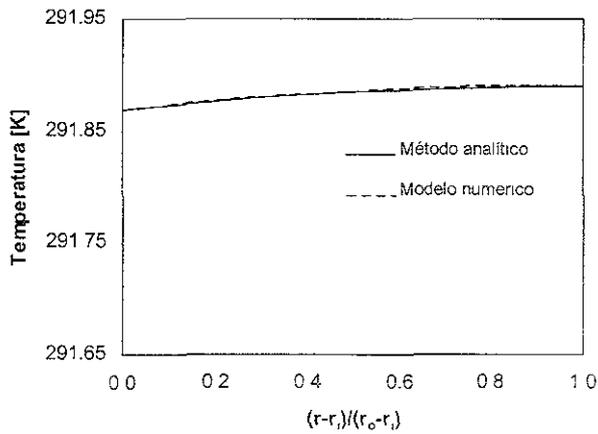


Figura 3.5 Variación radial de la temperatura en la pared, a la salida ($x=L$), (estado permanente)

3.3.2 Balance de energía

El segundo método de verificación consiste en hacer un balance entre el calor generado internamente en la pared y el calor que sale a través de la cara interna de la pared del cilindro, una vez que el sistema ha alcanzado el estado permanente.

Para calcular el calor generado internamente sólo se debe multiplicar el calor generado por unidad de volumen, q''' , por el volumen de la pared del cilindro:

$$q_{\text{gen}} = q'''V = q'''A_w L \quad (3.11)$$

donde el área es la de sección transversal de la pared del cilindro. La longitud se puede hacer igual a 1 puesto que se trata de un balance que se puede establecer por unidad de longitud. Por lo que de la Ecuación (3.42) se puede llegar a

$$q'_{\text{gen}} = q'''\pi(r_o^2 - r_i^2) \quad (3.12)$$

El valor de q_{gen} debe ser igual al de q_i (calor que fluye a través de la cara interna de la pared del cilindro) y que se puede calcular de la siguiente manera (Janna, 1999)

$$q_i = q''A = Ak \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_i} \approx Ak \frac{T_1 - T_2}{r_i - r_2} \quad (3.13)$$

donde el área es la de la cara interior de la pared del cilindro. Es decir $A = 2\pi r_i L$. Nuevamente es posible hacer unitaria la longitud, por lo que la Ecuación (3.13) se vuelve

$$q'_i = 2\pi r_i k \frac{T_1 - T_2}{r_i - r_2} \quad (3.14)$$

El modelo incluye un paso en el que se calculan los valores de q'_{gen} y de q'_1 , y se comparan entre sí. Tanto en la pantalla como en el archivo de salida, aparece indicada la diferencia porcentual entre ellos. En las simulaciones que se llevaron a cabo, se llegó a obtener discrepancias de menos del 0.5%.

Este método de verificación permitió notar la sensibilidad del modelo a los errores de redondeo. Las diferencias de temperatura entre nodos adyacentes del mallado son tan pequeñas, que el programa utilizado para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas se vuelve muy sensible al número de nodos. De forma contraria a lo que se hubiese podido esperar antes de notar dicha sensibilidad, la discrepancia aumenta a medida que se aumenta el número de nodos en la pared (dirección radial), mientras que con un número relativamente pequeño (10 nodos) resultan los errores sumamente bajos antes mencionados.

3.3.3 Comparación con una solución analítica para el transitorio

Los dos métodos de verificación antes expuestos tienen la limitación de que se pueden utilizar sólo para comprobar el estado permanente. El método presentado en esta Sección permite llevar a cabo una verificación del modelo de conducción transitoria. El método se basa en la solución para conducción obtenida por Luikov (1968). El desarrollo algebraico seguido a partir de la solución de Luikov se presenta en el Apéndice A, Sección A.3.

Si se define la temperatura en exceso

$$\theta = T - T_i \quad (3.15)$$

la ecuación a la que finalmente se llega a partir de la solución de Luikov, que permite obtener la temperatura en la pared del cilindro como función del radio y del tiempo, es

$$\theta(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^3 J_0^2(\beta_m r_1)}{J_0^2(\beta_m r_1) - \beta_m^2 J_1^2(\beta_m r_0)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \cdot [J_1(\beta_m r_0) Y_0(\beta_m r) - J_0(\beta_m r) Y_1(\beta_m r_0)] \cdot \theta_{m1} r_1 [Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_1) - J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_1)] \quad (3.16)$$

Como se puede ver la Ecuación (3.16) es una sumatoria infinita por lo que la solución que se puede encontrar en la práctica será aproximada. La sumatoria converge muy lentamente, por lo que fue necesario llevarla a cabo con 4,000 términos. Primero fue necesario encontrar los valores β_m , eigenvalores de la Ecuación (A.42)

$$J_0(\beta_m r_1) Y'_0(\beta_m r_0) - J'_0(\beta_m r_0) Y_0(\beta_m r_1) = 0$$

Para esto se utilizó un paquete comercial (Mathcad, 1994), y se fijaron arbitrariamente los valores de r_1 en 0.127 m y r_0 en y 0.1397 m como se muestra en la Tabla 3.1. Esto corresponde a un oleoducto comercial de 10 in de diámetro interno y con un espesor de pared de 0.5 in.

Con los 4,000 eigenvalores se realizó la sumatoria de la Ecuación (3.16) para cada uno de los valores de radio para distintos intervalos de tiempo.

Tabla 3.1 Valores en la comparación de transitorios

Radio interno, r_1	0.1270 m
Radio externo, r_0	0.1397 m
θ_{m1}	60 K

El número de términos utilizado en la sumatoria se determinó por convergencia de la solución. Es decir, cuando el valor de temperatura, para un radio y tiempo dados, se mantuvo con variaciones menores al 5% al variar el número de términos, se consideró que los términos eran suficientes. Esta convergencia se obtuvo con 4,000 términos.

El hecho de que θ_{mi} sea igual a 60 K corresponde, por ejemplo, a una temperatura inicial de 20°C ($T_{mi} = 293$ K) y una temperatura interna de -40°C ($T_i = 233$ K). Estos valores son coherentes con un fenómeno de despresurización repentina de un conducto que transporta un hidrocarburo volátil (Fairuzov, 1998).

Los resultados así obtenidos se compararon con los valores de temperatura predichos por el modelo numérico de transferencia de calor (Sección 3.2), para las mismas condiciones de operación, radios e instantes de tiempo. Cabe mencionar que la solución de Luikov no incluye generación interna de calor, por lo que en el modelo numérico se tomó el caso especial $q''' = 0$. Esto implica también que la temperatura en la tubería no será función de la distancia, por lo que el campo de temperaturas será el mismo para cualquier x .

Si se define $\Theta = \theta/\theta_{mi}$, la Figura 3.7 muestra una comparación entre los modelos numérico y de Luikov durante los primeros instantes (de $t = 0.01$ s a $t = 1$ s) y para la parte final ($t = 20$ s) del transitorio.

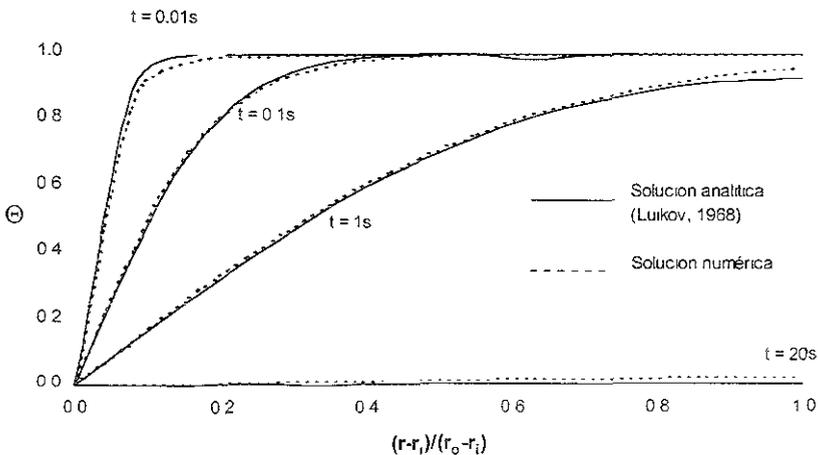


Figura 3.6 Variación del campo de temperaturas radial

Como se puede apreciar, la concordancia es buena. La diferencia entre los valores predichos por uno y otro modelo se mantuvieron por debajo del 10%. Esta diferencia es razonable si se toma en consideración el error que se estableció como margen de convergencia (5%) al truncar la sumatoria infinita también muestra la comparación entre las predicciones de los modelos para tiempos de. Finalmente el sistema alcanza un nuevo estado estacionario de temperatura uniforme. En el estado estacionario prácticamente no hay diferencia en el campo de temperaturas predicho por los dos modelos.

3.4 Acoplamiento de los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor numéricos

Para acoplar los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor se utiliza la ecuación de balance de energía, Ecuación (2.21)

$$k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \bar{q} \frac{D}{4}$$

La cantidad de calor generada en la pared debe ser igual a la cantidad de calor conducida a la interfaz pared-fluido, que el flujo en el interior de la tubería recibe de la pared. El balance de energía expresado en diferencias finitas toma la forma

$$k_w \frac{T_i - T_{wf}}{r_1 - r_i} = \bar{q} \frac{D}{4} \tag{3.17}$$

La Ecuación (3.17) es una ecuación de una incógnita, la temperatura en la interfaz entre la pared y el fluido, T_{wf} . Para acoplar los modelos, se expresó de la forma común $f(x) = 0$, y se resolvió numéricamente mediante el método de Newton-Raphson.

3.5 Modelo numérico simplificado

El modelo numérico simplificado es del todo análogo al modelo numérico hidrodinámico. La única diferencia consiste en la ecuación de la energía, Ecuación (2.35) en lugar de la Ecuación (2.4), en la que aparece un término adicional y en la que se toma en cuenta de forma diferente el flujo de calor.

En la formulación convencional, el flujo de calor se debe calcular, mediante el modelo de transferencia de calor, y acoplar con el modelo hidrodinámico dentro de cada celda. En la nueva formulación, en cambio, se hace un cálculo que es válido para todo el sistema y las condiciones específicas de cada celda se toman en consideración mediante el término adicional antes mencionado. Es decir, el fenómeno conjugado se resuelve como si no lo fuese. El efecto de la pared se toma en cuenta únicamente mediante el término adicional y ya no es necesario analizar a detalle el fenómeno de conducción.

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se debe resolver, será ahora el que está formado por las Ecuaciones (2.2), (2.3), (2.5) y (2.35). En este modelo numérico, este sistema de ecuaciones también se resuelve mediante el esquema de solución numérica RELAP5 (Ransom y Trapp, 1978) explicado anteriormente.

Al igual que en el modelo riguroso esta ecuación puede reordenarse en forma de factorizar los términos comunes de p_j^{n+1} para llegar a una expresión de la forma

$$C_1 p_{j-1}^{n+1} + C_2 p_j^{n+1} + C_3 p_{j+1}^{n+1} = C_4 \quad (3.18)$$

También de forma análoga a lo que ocurre con el modelo riguroso, la Ecuación (3.18) se establece para cada uno de los nodos del mallado del sistema y de nuevo se tienen dos matrices: una formada por los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 y otra formada por los valores del lado derecho, C_4 . Este sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas se puede resolver mediante la misma subrutina numérica, *Tridag* (Numerical Recipes, 1992), utilizada en el modelo numérico riguroso.

3.6 Cálculo de propiedades termodinámicas de fluidos

Dentro de los modelos numéricos, tanto riguroso como simplificado, que se utilizan para la predicción del comportamiento de flujos multifásicos transitorios, en condiciones de transferencia de calor conjugada, es necesario conocer las propiedades del fluido de trabajo para parámetros dados. Es decir, se debe poder conocer una propiedad (presión, por ejemplo) a partir de otra propiedad que es conocida (por ejemplo, temperatura), para condiciones de saturación.

Para conseguir esto se realizó un programa en forma de subrutina, en Fortran, que utiliza las ecuaciones aproximadas de Reynolds (1979). En el Apéndice B se describe el programa y el trabajo en el que se basa.

El programa desarrollado puede a su vez ser utilizado por otros programas. Esto proporciona una gran flexibilidad y amplía notablemente las posibilidades de aplicación. El programa permite elegir una de las siguientes sustancias como fluido de trabajo

1. Butano
2. Etano
3. Heptano
4. Hexano
5. Isobutano
6. Isopentano
7. Octano
8. Pentano
9. Propano

y calcular, a partir de la temperatura (T), presión (P) o energía interna específica (u), propiedades como calidad (X), volumen específico (v), entalpía específica (h) y entropía específica (s) entre otras. Así mismo, la forma abierta en la que está estructurado el programa, permite ampliar su alcance a un mayor número de sustancias, en un futuro

3.7 Comparación entre los modelos riguroso y simplificado

Recapitulando y con el fin de una mayor claridad, se presenta una comparación sintética de ambos modelos, en forma de tablas. La primera, Tabla 3.2, ofrece una comparación de las ecuaciones básicas que describen a los modelos. La Tabla 3.3 presenta las ecuaciones discretizadas y finalmente, la Tabla 3.4, una comparación entre los algoritmos de cálculo.

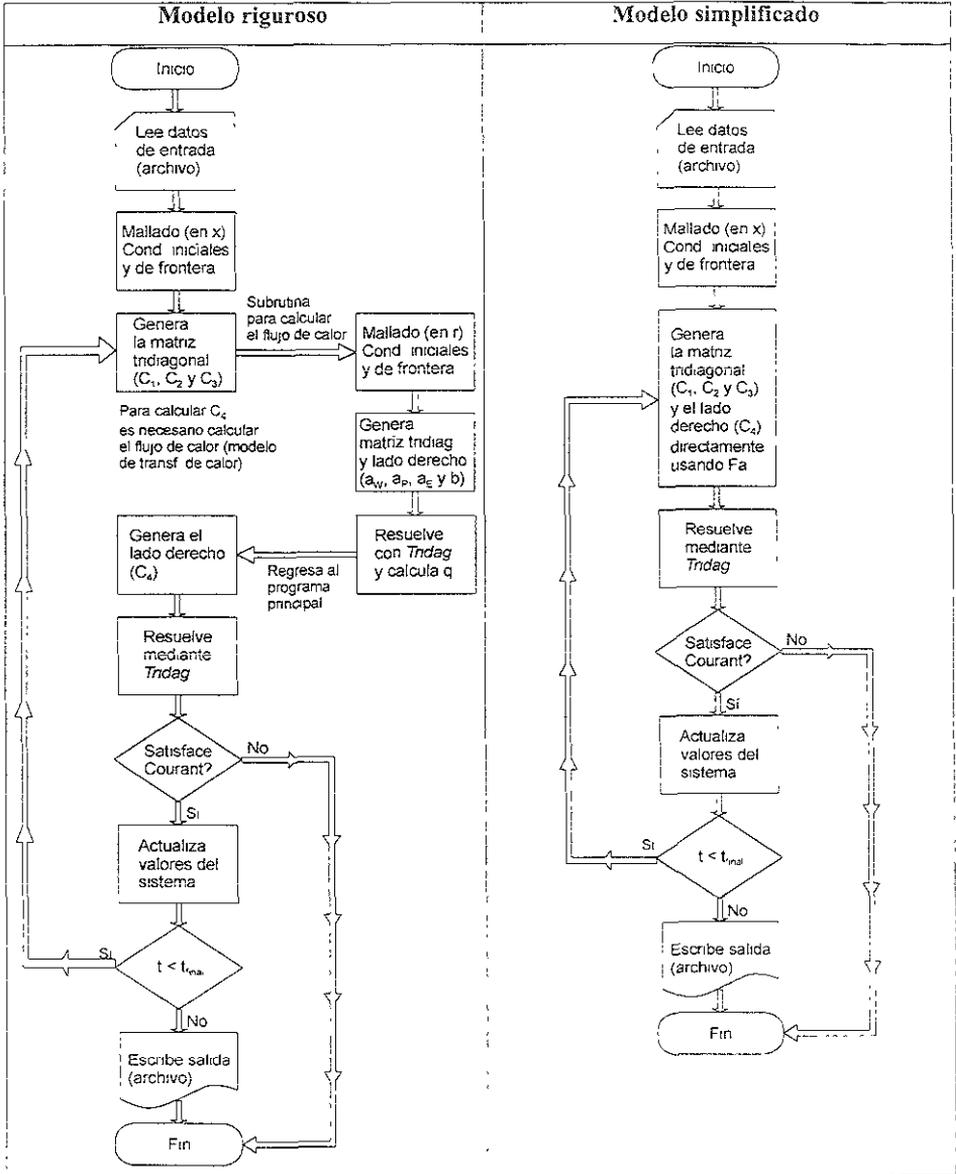
Tabla 3.2 Ecuaciones básicas de los modelos

Modelo riguroso	Modelo simplificado
<i>Ec de continuidad.</i>	<i>Ec de continuidad.</i>
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0$
<i>Ec de cantidad de movimiento lineal</i>	<i>Ec de cantidad de movimiento lineal</i>
$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - KV V + g$	$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - KV V + g$
<i>Ec de la energía</i>	<i>Ec de la energía</i>
$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial x}(p V) = \bar{q}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + Fa \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial x}(p V) = \bar{q}$
<i>Derivada de la ec de estado</i>	<i>donde</i>
$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_u \left[1 - u \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \right]$	$Fa = \frac{\rho_w c_w v_{fg} A_w T}{h_{fg} A}$
<i>Ec de conducción en la pared</i>	<i>Derivada de la ec de estado</i>
$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + q'' = \rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t}$	$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_u \left[1 - u \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \right]$
<i>Ec de acoplamiento.</i>	
$k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \Big _{r=r_f} = \bar{q} \frac{D}{4}$	

Tabla 3.3 Ecuaciones discretizadas de los modelos

Modelo riguroso	Modelo simplificado
<p><i>Ec de continuidad.</i></p> $\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} = \frac{(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2}}{\Delta x}$	<p><i>Ec de continuidad</i></p> $\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} = \frac{(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2}}{\Delta x}$
<p><i>Ec de cantidad de movimiento lineal</i></p> $\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -V_{j+1/2}^n \left(\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \left(\frac{p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^n + g$	<p><i>Ec de cantidad de movimiento lineal</i></p> $\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -V_{j+1/2}^n \left(\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \left(\frac{p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^n + g$
<p><i>Ec de la energía</i></p> $\frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{p_j^{n+1} V_{j+1/2}^n - p_j^{n+1} V_{j-1/2}^n}{\Delta x} = \bar{q}_j$	<p><i>Ec. de la energia</i></p> $\frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{c_w M_w}{V_c} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j \frac{(p_j^{n+1} - p_j^n)}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + p_j^{n+1} \frac{V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n}{\Delta x} = \bar{q}$
<p><i>Derivada de la ec. de estado</i></p> $\rho_j^{n+1} - \rho_j^n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{pu} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p [(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n]$	<p><i>Derivada de la ec de estado</i></p> $\rho_j^{n+1} - \rho_j^n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{pu} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p [(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n]$
<p><i>Ec de conducción en la pared</i></p> $-a_E T_E + a_P T_P - a_W T_W = b$	
<p><i>Ec de acoplamiento</i></p> $k_w \frac{T_1 - T_{wf}}{r_1 - r_i} = \bar{q} \frac{D}{4}$	

Tabla 3.4 Algoritmos de cálculo



CAPÍTULO 4

VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA SIMPLIFICADA

Para llevar a cabo la verificación del modelo simplificado propuesto se realizaron numerosas simulaciones con distintas geometrías y características de la tubería y de condiciones de operación. De forma paralela, se realizaron las simulaciones correspondientes al modelo numérico riguroso para poder efectuar una comparación. La validez de ambos modelos se comprobó para condiciones permanentes, con y sin generación de calor, verificando que las predicciones obtenidas con los modelos coincidiesen con las predicciones teóricas.

Para ejemplificar los resultados obtenidos se eligió un caso ilustrativo que fuese consistente con las condiciones reales de operación que se pueden esperar en oleoductos calentados eléctricamente que transportan mezclas bifásicas de hidrocarburos. Los detalles de la geometría de la tubería, las condiciones de operación, las propiedades termodinámicas y de transporte del material del que la pared está hecha, se presentan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Geometría de la tubería y condiciones de operación

Diámetro interno, D	0.1317 m
Longitud, L	5,000 m
Espesor de la pared, δ	0.0182 m ($\delta/D=0.14$)
Rugosidad de la pared	0.05 mm
Capacidad térmica del acero, c_p	400 J/kgK
Densidad del acero, ρ	7,800 kg/m ³
Conductividad térmica del acero, k	60.5 W/mK
Velocidad másica de la mezcla a la entrada, G_{in}	75 kg/sm ²
Presión a la salida, p_{out}	8 bar
Tasa de generación de calor en la pared, q'''	7 kW/m ³
Fluido de trabajo	Propano
Calidad inicial del fluido de trabajo, X_{im}	5×10^{-2}

Es importante señalar que las formulaciones presentadas en las secciones anteriores pueden ser utilizadas para condiciones previas a las críticas. Si el flujo se vuelve crítico, el proceso de transferencia de calor se deteriora y el sobrecalentamiento de la pared puede llegar a ser muy grande, como se explica en la Sección 1.1

Se realizaron pruebas sistemáticas de independencia de la finura del mallado para poder obtener una precisión numérica adecuada. Se encontró que un mallado uniforme de 100 celdas es adecuado para mantener los errores de discretización por debajo del 1% en todas las simulaciones numéricas planteadas en el presente trabajo. El intervalo de tiempo, Δt , se encuentra limitado por el criterio de convergencia de Courant:

$$V \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{4.1}$$

La satisfacción del criterio de Courant se comprueba en cada celda, para cada paso de tiempo. En el caso del ejemplo ilustrativo el valor de Δt se fijó en 4 segundos.

4.1 Pruebas realizadas con el modelo riguroso

Con los datos que aparecen en la Tabla 4.1 se realizó una simulación utilizando el modelo numérico riguroso, compuesto por el modelo numérico hidrodinámico y por el modelo numérico de transferencia de calor, para analizar la respuesta del sistema ante un escalón en el flujo de calor, q''' , como se muestra en la Figura 4.1. Cuando inicia el flujo de calor, el sistema se encuentra en estado permanente con un flujo de velocidad másica de la mezcla a la entrada, G_m , de $75 \text{ kg/m}^2\text{s}$ y presión a la salida, p_{out} , de 8 bar. Estas condiciones permanecen constantes a lo largo de toda la simulación y son parte de las condiciones de frontera del problema.

Una vez que inicia el flujo de calor, el sistema pasa por un transitorio que inicia en $t=0$ y que conduce a un nuevo estado permanente después de un cierto tiempo característico, que para este caso resultó ser de casi cuatro horas y media.

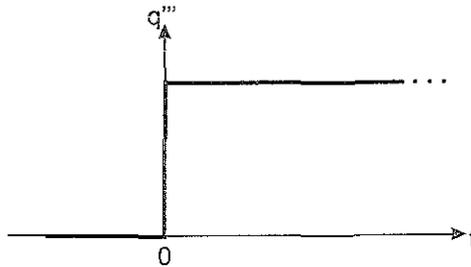


Figura 4.1 Escalón en la generación de calor

La Figura 4.2 muestra la variación en el tiempo del valor de la presión a la entrada de la tubería (en el primer nodo del mallado), en $x=0.5L$ (nodo central) y a la salida (último nodo). Se aprecia claramente la existencia de un estado permanente antes de $t=0$. En ese instante, al iniciar el flujo de calor en el sistema, se tiene una discontinuidad. Se pasa entonces por un transitorio que, para estas condiciones

específicas, es de aproximadamente 16,000 s y posteriormente el sistema llega a un nuevo estado permanente. El aumento de la presión es coherente con el fenómeno físico que se está llevando a cabo

Como se puede apreciar en las Figuras 4.3 y 4.4, a diferencia del comportamiento de la presión, el de la velocidad y de la fracción de vacío, α , sí presentan un cambio cualitativo a lo largo de la tubería.

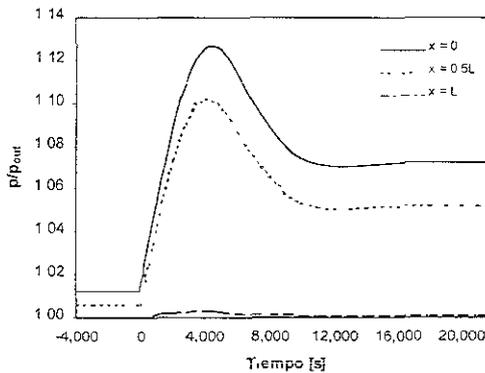


Figura 4.2 Variación de la presión en tres puntos de la tubería

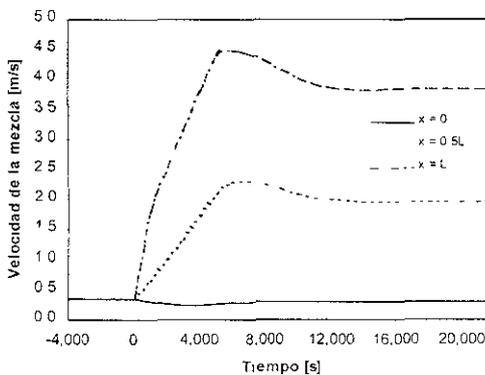


Figura 4.3 Variación de la velocidad en tres puntos de la tubería

Las Figuras 4.5 y 4.6 muestran con mayor detalle como a partir de una distancia $x/L \approx 0.07$ los transitorios de la velocidad y fracción de vacío sólo presentan aumento y no ya una oscilación. Este aumento se hace más notable a medida que la observación se aleja de la entrada hasta llegar en la región de salida ($x = L$, último nodo) a valores de fracción de vacío cercanos a la unidad, Figura 4.7, y al valor máximo de la velocidad, Figura 4.8.

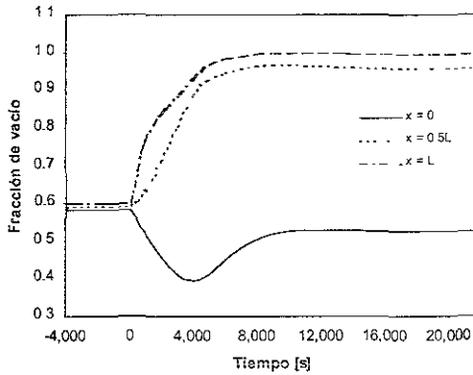


Figura 4.4 Variación de la fracción de vacío en tres puntos de la tubería

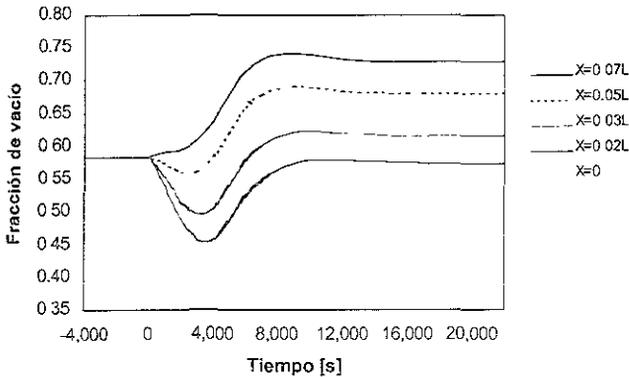


Figura 4.5 Variación de la fracción de vacío desde $x = 0$ hasta $x = 0.07L$.

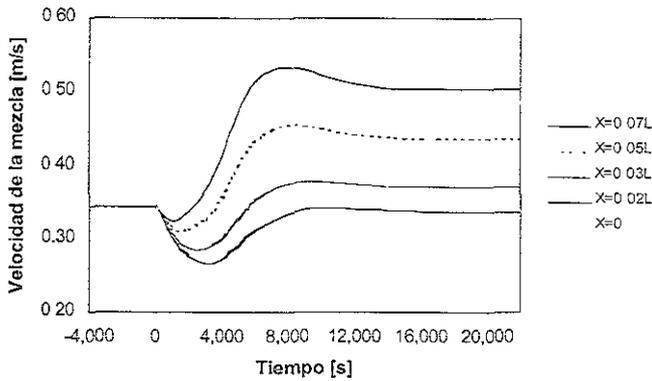


Figura 4.6 Variación de la velocidad de mezcla desde $x = 0$ hasta $x = 0.07L$

El aumento de la presión a la entrada, Figura 4.2, trae como consecuencia condensación de vapor en el estado inicial del transitorio por lo que la fracción de vacío disminuye (así también la velocidad), Figura 4.4 (para $x = 0$). Después de que la presión a la entrada alcanza su valor máximo, ocurre flasheo debido a que la presión empieza a disminuir, por lo que la fracción de vacío aumenta.

En la región de la tubería subsiguiente a $x/L \approx 0.07$ se sigue observando un comportamiento de la presión similar al de la entrada. Sin embargo la fracción de vacío de estas regiones siempre aumenta, Figura 4.5, tanto porque el aumento inicial de la presión es menor hacia la salida, como porque la cantidad total de calor transferida al flujo aumenta con la distancia, además de que el mismo aumento de fracción de vacío incrementa el coeficiente de transferencia de calor convectiva, h_p . Es por estas razones que la fracción de vacío a la salida tiende a uno. Cerca de la salida prácticamente no se tiene líquido, sólo vapor.

Las variaciones en la fracción de vacío a su vez exigen variaciones cualitativamente similares en la velocidad para que se respete la ecuación de continuidad, puesto que la densidad local de la mezcla disminuye cuando la fracción de vacío aumenta y viceversa.

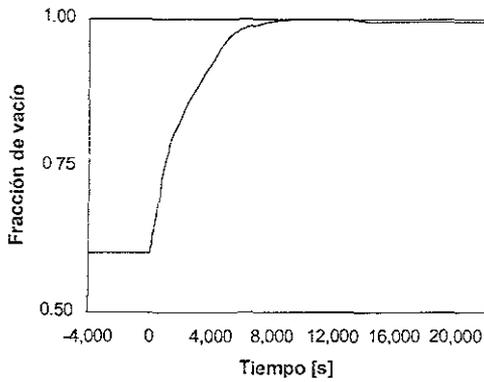


Figura 4.7 Fracción de vacío a la salida ($x = L$)

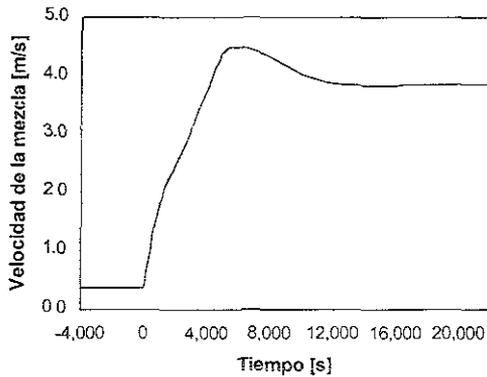


Figura 4.8 Velocidad de mezcla a la salida ($x = L$)

El comportamiento de la velocidad másica se muestra en la Figura 4.9. A la entrada la velocidad másica se mantiene constante por las condiciones de frontera impuestas

Hacia la salida la velocidad másica aumenta notablemente para después regresar, en estado permanente, al valor inicial. Esto está directamente relacionado con el cambio

en la fracción de vacío. Cuando se alcanza nuevamente el permanente la fracción de vacío, α , aumentó de forma importante. Hacia la salida prácticamente se tiene sólo gas y ya no líquido. Esto implica que la densidad promedio del fluido de trabajo disminuye a lo largo del transitorio para finalmente alcanzar un valor menor al inicial en el nuevo permanente. Esto a su vez implica que el inventario másico final del fluido que se encuentra dentro de la tubería es menor que el inventario másico inicial. Esta diferencia en los inventarios másicos de fluido requiere de un aumento en la velocidad másica durante el transitorio. Una vez que se alcanza el nuevo estado permanente, la velocidad másica regresa al valor inicial ya que el gasto másico a la entrada se mantiene constante.

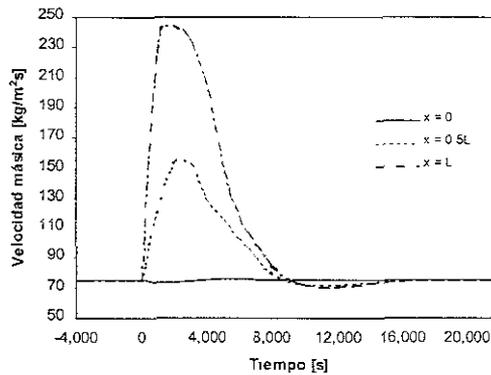


Figura 4.9 Variación de la velocidad másica en tres puntos de la tubería

La diferencia entre los inventarios másicos inicial y final de fluido dentro de la tubería se podría calcular, entre otras formas, como la diferencia de las áreas bajo las curvas de gasto másico a la entrada y a la salida, como se ilustra en la Figura 4.10. Es decir

$$\frac{dM_{tp}}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \quad (4.2)$$

Separando variables e integrando a ambos lados de la igualdad

$$\int_0^{t_c} dM = \int_0^{t_c} (\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}) dt \quad (4.3)$$

o lo que es lo mismo

$$\int_0^{t_c} dM = \int_0^{t_c} \dot{m}_{in} dt - \int_0^{t_c} \dot{m}_{out} dt \quad (4.4)$$

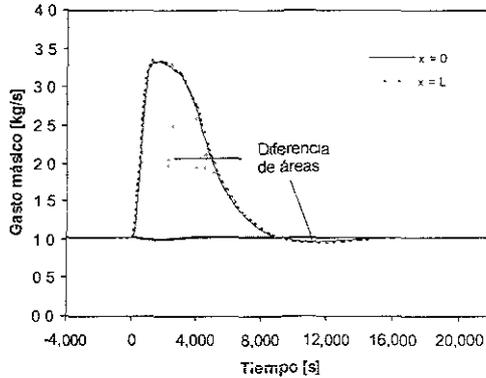


Figura 4.10 Diferencia entre gasto másico a la entrada y a la salida

El flujo de calor de la pared hacia el fluido calculado por el programa y que corresponde al acoplamiento entre los modelos hidrodinámico y de transferencia de calor de acuerdo con la Ecuación (2.21), se muestra en la Figura 4.11.

El flujo de calor parte de cero, ya que en el estado permanente previo al escalón en la generación de calor, el fluido y la pared se encuentran en equilibrio térmico. En el transitorio varía conforme al coeficiente de transferencia de calor convectiva, h_{tp} , que a su

vez depende de la calidad, densidad y velocidad másica del fluido, así como de la transferencia de calor misma, como se puede ver en las Ecuaciones (2.11) y (2.12).

En el presente cálculo, para obtener el balance de flujos de calor en la interfaz pared-líquido se llevó a cabo un estudio de refinamiento y engrosamiento del mallado radial para determinar la mejor resolución, lo que representó un trabajo considerable

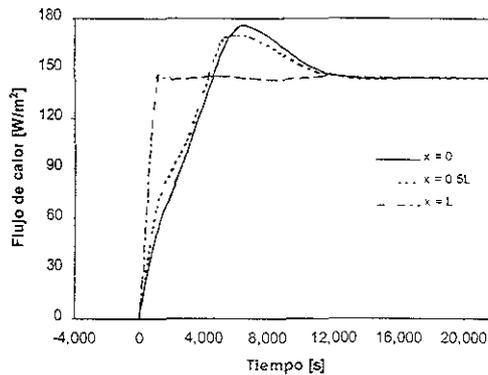


Figura 4.11 Variación del flujo de calor en tres puntos de la tubería

4.2 Pruebas realizadas con el modelo simplificado

El uso del modelo simplificado se justifica por el bajo gradiente radial de temperatura que se tiene en la pared de la tubería. Como se pudo ver en las Figuras 3.3 a 3.5, la pared se encuentra en un estado muy cercano al equilibrio térmico local que es el supuesto del que se parte.

Los cálculos numéricos realizados con el modelo simplificado se hicieron utilizando las mismas condiciones de operación, geometría y propiedades de la pared que con el modelo riguroso. El modelo simplificado no incluye un modelo de transferencia de

calor como el del modelo riguroso (Secciones 2.2.3 a 2.2.5) pero los datos utilizados son los mismos puesto que el factor de adiabaticidad, que permite tomar en cuenta el efecto de la pared sobre el sistema, incluye las propiedades físicas y térmicas del material de la pared de la tubería. Los datos de entrada utilizados para la simulación con el modelo simplificado del caso ilustrativo son los mismos que se tomaron en cuenta en la Sección 4.1 y aparecen en la Tabla 4.1.

Para resaltar la importancia de considerar el efecto de la pared sobre el comportamiento del flujo, se llevó a cabo una simulación en la que este no se tomó en cuenta. Esto equivale a igualar a cero el factor de adiabaticidad

$$Fa = 0 \tag{4.5}$$

Las Figuras 4.12 a 4.14 muestran que ignorar la capacidad térmica de la pared en tuberías con factores de adiabaticidad grandes ($Fa > 1$) acarrea errores importantes en la predicción de la respuesta transitoria del sistema. Estos errores de predicción pueden llevar a errores importantes en los parámetros de diseño y criterios de operación, especialmente en cuanto a los valores máximos que alcanzan las variables del sistema.

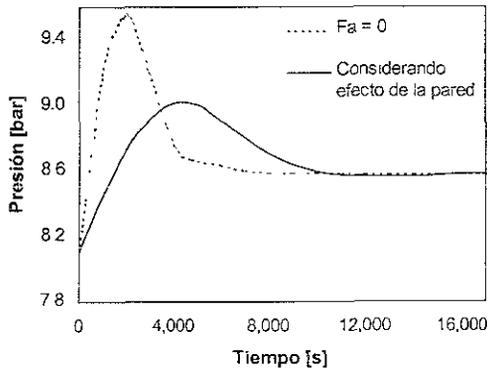


Figura 4.12 Presión a la entrada considerando y no el efecto de la pared

Se puede ver que si se hace $Fa = 0$ en el caso analizado, se sobreestima la presión a la entrada en medio bar (6%) y la velocidad másica a la salida en más del 50%. También el error en la fracción de vacío a la entrada es del orden del 50%.

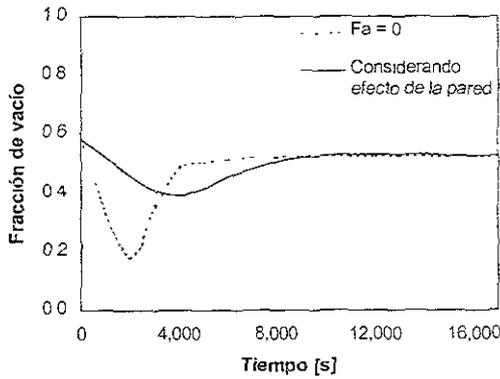


Figura 4.13 Fracción de vacío a la entrada considerando y no el efecto de la pared

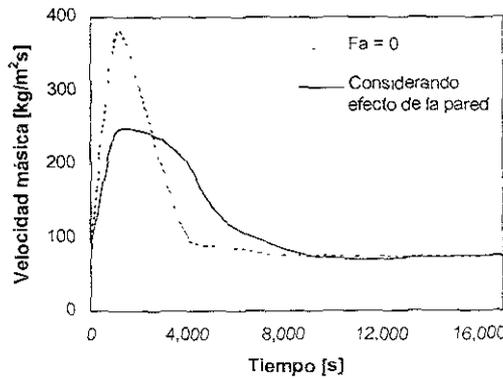


Figura 4.14 Velocidad másica a la salida considerando y no el efecto de la pared

4.3 Comparación de los resultados entre ambos modelos

Los resultados obtenidos con el modelo simplificado presentan una buena concordancia con los que arrojó el modelo riguroso. Como se puede ver en las Figuras 4.15 a 4.17, para las condiciones de operación consideradas en este ejemplo, los parámetros analizados con un modelo y con el otro son prácticamente indistinguibles.

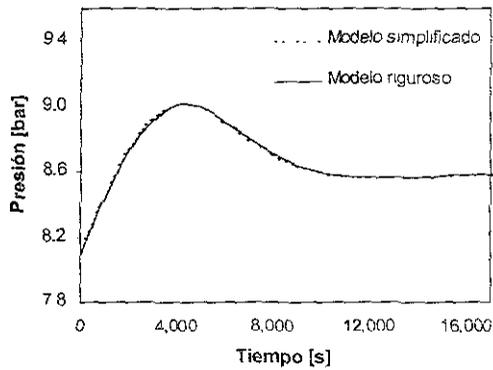


Figura 4.15 Presión a la entrada con ambos modelos

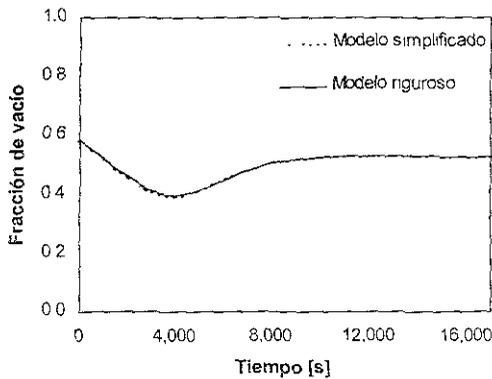


Figura 4.16 Fracción de vacío a la entrada con ambos modelos

Las figuras que se presentan son ilustrativas del grado de coincidencia que los resultados con ambos modelos presentan. Muestran los puntos del sistema en los que el transitorio es más pronunciado para el parámetro de interés. En los demás nodos de la tubería los transitorios son menos pronunciados y las diferencias entre los modelos también. En la gran mayoría de ellos las gráficas se superponen y no es posible distinguirlos entre sí. Las figuras reportadas son las que permiten apreciar las mayores diferencias entre los modelos.

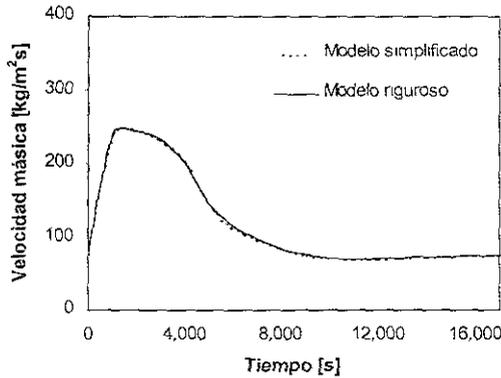


Figura 4.17 Velocidad másica a la salida con ambos modelos

4.4 Comparación de tiempos de cómputo

Los modelos riguroso y simplificado se utilizaron para simular el comportamiento de un sistema relativamente simple. La geometría de la tubería es simétrica y regular, la generación de calor es constante y uniforme (aunque no así la transferencia de calor hacia el fluido) y la transferencia de calor es unidimensional (se puede modelar con relativa simplicidad). En estas condiciones, el tiempo de cómputo que requirió el modelo

simplificado para simular los primeros 18,000 segundos después del instante inicial $t = 0$ (es decir, hasta que se alcanza un nuevo estado permanente), para las condiciones de operación de la Tabla 4.1, fue de 210.50 segundos. El tiempo necesario para la simulación del mismo sistema pero empleando el modelo riguroso, fue de 259.05 segundos. Es decir, el modelo riguroso empleó un poco más del 23% de tiempo de cómputo adicional al modelo simplificado sin diferencias apreciables en los resultados.

4.5 Ventajas del modelo simplificado

En aplicaciones reales en las que la pared presenta una geometría más compleja, como flujo bifásico a través de un medio poroso o tuberías corrugadas, el uso de la formulación propuesta permite obtener una reducción aun más importante que la reportada en el presente trabajo en tiempo de cómputo o memoria requerida, ya que el correspondiente análisis de transferencia de calor y su modelo numérico serán aun más complejos y requerirán más recursos de cómputo. Cabe también recordar que la formulación simplificada elimina una de las fuentes de posibles errores de redondeo inherentes a los métodos numéricos utilizados, al no ser necesario el modelado de la conducción en la pared. Especialmente si se toma en cuenta que la diferencia entre los valores de temperatura en nodos adyacentes es pequeña.

Por lo tanto, la presente solución es una alternativa sencilla y viable a métodos basados en el cálculo riguroso de la transferencia de calor conjugada en situaciones en las que se puede asumir que se tiene una condición de equilibrio térmico local.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Sumario

Se derivó una formulación de la ecuación de balance de energía para un volumen de control que abarca un elemento de fluido y un elemento de pared adyacente, en el que se genera calor. Se obtuvo un modelo simplificado para transferencia de calor conjugada transitoria en tuberías que transportan flujos bifásicos basada en la anterior formulación de la ecuación de energía. El modelo simplificado se verificó mediante comparación con un modelo que toma en cuenta la conducción radial de calor en la pared de la tubería y los efectos de la convección forzada (modelo riguroso). El modelo riguroso consta de un modelo hidrodinámico y un modelo de transferencia de calor. El modelo de transferencia de calor utiliza la correlación de Gungor y Winterton (1987) para convección forzada, Ecuación (2.11), y se verificó a su vez con:

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

- Un modelo analítico basado en la ecuación general de conducción de calor para verificar la validez del modelo de transferencia de calor en condiciones de estado permanente (Sección 3.3.1).
- Un análisis de balance de energía, también para verificar la validez del modelo de transferencia de calor en condiciones de estado permanente (Sección 3.3.2).
- Un modelo analítico basado en la solución de Luikov (1968) para verificar la validez de la simulación del transitorio (Sección 3.3.3).

La solución de Luikov se obtiene en forma de una serie infinita para cada valor de radio y para cada valor de tiempo. El modelo que se desarrolló aproxima la solución de Luikov mediante una sumatoria truncada de 4,000 términos que se obtuvieron utilizando el paquete Mathcad 5.0, para cada valor de radio y tiempo. Se desarrolló un programa para calcular las propiedades termodinámicas de 9 sustancias volátiles que pueden ser utilizadas como fluido de trabajo en los cálculos numéricos realizados con los modelos riguroso y simplificado (Sección 3.6). Se estudió el efecto de la capacidad térmica de la pared sobre la respuesta del sistema (tubería + flujo bifásico) a un transitorio provocado por generación de calor (Sección 4.2). Se compararon los resultados de los cálculos numéricos que utilizan el modelo simplificado con los resultados obtenidos mediante el modelo riguroso (Sección 4.3). Se compararon los tiempos de cómputo necesarios para realizar las diferentes simulaciones y se establecieron las ventajas de orden práctico de la formulación simplificada sobre la formulación rigurosa (Sección 4.5).

5.2 Contribuciones hechas

Las contribuciones del presente trabajo han sido en términos del modelado riguroso y simplificado del fenómeno de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo bifásico.

Con respecto al modelo riguroso, las principales contribuciones se pueden resumir

en:

1. El modelado hidrodinámico de flujo bifásico de una sustancia volátil
2. El modelado de transferencia de calor en cilindros huecos con generación de calor en la pared y su verificación.
3. El estudio comparativo de la utilidad de distintas correlaciones para transferencia de calor por convección forzada, en canales calentados.

Con respecto al modelado simplificado, las principales contribuciones son:

1. El estudio del efecto de la capacidad térmica de la pared sobre la respuesta del sistema a un transitorio.
2. El estudio de la aplicabilidad práctica del modelo simplificado.

El modelo simplificado y su formulación parten de la suposición de equilibrio térmico local entre la pared y el fluido. El modelo propuesto es, por lo tanto, aplicable cuando el gradiente de temperatura en la pared del conducto es poco importante.

5.3 Conclusiones

Las principales conclusiones de este trabajo son:

1. Para conductos calentados, horizontales, que transportan un flujo bifásico, la correlación para transferencia de calor por convección forzada de más sencilla aplicación, con buenos resultados, es la de Gungor y Winterton (1987).
2. El efecto de la capacidad térmica de la pared influye considerablemente en la respuesta del sistema a un transitorio.
3. Cuando las tuberías están fabricadas con materiales de alta conductividad térmica (metales) y la generación de calor en la pared es menor a 10^7 W/m^3 , los gradientes de temperatura que se presentan en el interior de la pared son despreciables. Se puede asumir que existe equilibrio térmico local en la interfaz pared-flujo.

4. En situaciones en las que se puede asumir equilibrio térmico local en la interfaz pared-flujo, la formulación simplificada aquí presentada representa una alternativa simple y confiable a métodos más rigurosos para modelar flujo bifásico transitorio en canales calentados.

Las ventajas que la formulación simplificada ofrece son:

1. Mayor sencillez en el planteamiento del problema
2. Menores tiempos y requerimientos de cómputo.
3. Posibilidad de modelar sistemas con geometrías complejas como flujo bifásico a través de un medio poroso o tuberías corrugadas.

Los resultados del presente trabajo han sido publicados en forma de:

- Artículo en una revista: Fairuzov, Y. V., Arvizu, H., "Numerical Study of Transient Conjugate Heat Transfer in a Long Two-Phase Pipeline", Journal of Heat Transfer (en revisión).
- Artículo en una conferencia: Fairuzov, Y. V., Arvizu, H., "Numerical Study of Conjugate Heat Transfer in a Long Two-Phase Pipeline", ASME IMECE 2000, Orlando, Noviembre 5-9, 2000.

5.4 Recomendaciones para futuros trabajos

Se ha alcanzado el objetivo de formular y desarrollar un modelo simplificado del fenómeno de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo bifásico en un canal calentado. Sin embargo, es necesario complementar este con otros estudios. Las recomendaciones para trabajos futuros incluyen:

- Aplicar el modelo simplificado a conductos inclinados o verticales.
- Emplear la formulación de la energía aquí presentada para mezclas multicomponentes, es decir flujos de dos líquidos inmiscibles ó de más de dos fases.

- Emplear la formulación de la energía aquí presentada para tuberías que presenten alguna dificultad para modelar la conducción de calor (geometrías complejas, excesiva rugosidad de la pared).
- Acoplar la formulación de la energía aquí presentada con otros modelos hidrodinámicos como podría ser el de flujo de deriva, para flujos con deslizamiento entre fases.
- Extender el análisis a tuberías no aisladas.

REFERENCIAS

- Aarseth, F., 1997, "Use of electrical power in control of wax and hydrates", Offshore Technology Conference, Annual Proceedings, v 4, Offshore Technol. Conf., Richardson, TX, USA, 13 pp.
- Bergles, A. E., 1981, "Instabilities in Two-Phase Systems", in: Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries, Collier J. G., Delhaye J. M., Hewitt G. F., Mayinger F., eds., Hemisphere Publishing Corporation, ch 13, pp. 383-423.
- Chen, J. C., 1966, "Correlation for Boiling Heat Transfer to Saturated Liquids in Convective Flow", Int. Eng. Chem. Process Design and Development, v 5, pp. 322-333.
- Chen, J. R., Richardson, S. M., Saville, G., 1995, "Modelling of Two-Phase Blowdown from Pipelines-II. A Simplified Numerical Method for Multi-Component Mixtures", Chemical Engineering Science, v 50, pp. 2173-2187.
- Chisholm, D., 1983, "Two-Phase Flow in Pipelines and Heat Exchangers", George Godwin, London, pp. 3-16.
- Colebrook, C. F., 1938-1939, Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws", J. Inst. Civ. Eng. Lond., v 11, pp. 133-156.

-
- Collier, 1976, "Introduction to Two-Phase Flow and Heat Transfer Phenomena" in *Two-phase flows and heat transfer: Proceedings*, S. Kakaç, F. Mayinger, eds., NATO Advanced Study Institute On Two-phase Flows And Heat Transfer, University Of Bosphorus, Hemisphere, Washington, v 1.
 - Collier, J. G., 1981, "Multicomponent Boiling and Condensation" in *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*, Bergels, A. E., Collier, J. G., Delhaye, J. M., Hewitt, G. F., and Mayinger, F., eds., Hemisphere, pp. 520-557.
 - Epstein, F. S., White, G. L., 1996, "Understanding impedance heating", *Chemical Engineering*, v 103, n 5, May, pp. 112-118.
 - Fairuzov, Y. V., 1998, "Blowdown of Pipelines Carrying Flashing Liquids", *AIChE Journal*, v 44, pp. 245-254.
 - Fairuzov, Y. V., 1999, "Numerical Solution for Blowdown of Pipeline Containing Flashing Liquid", *AIChE Journal*, September, pp. 2124-2128.
 - Fairuzov Y. V., 2000, "Modeling of Conjugate Two-Phase Heat Transfer During Depressurization of Pipelines", *Journal of Heat Transfer*, v 122, Feb, pp. 99-106.
 - Gungor, A. E., Winterton, R. H. S., 1986, "A General Correlation for Flow Boiling in Tubes and Annuli", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v 29/3, pp. 351-358.
 - Gungor, A. E., Winterton, R. H. S., 1987, "Simplified General Correlation for Saturated Flow Boiling and Comparisons of Correlations With Data", *Chem. Eng. Res. Dev.*, v 65, pp. 148-156.
 - Hojo, H., Nagamune, A., Murakami, K., 1987, "Some considerations on a new oil transporting system using the magnetic coaxial pipe". *IEEE Transactions on Magnetics*, n 5 Sep, INTERMAG '87: Int Magn. Conf., Tokyo, Jpn, Apr 14-17, 1987, pp. 3281-3283.
 - Janna, W. S., 1999, "Engineering Heat Transfer", Second Edition, CRC Press, USA, pp. 48-49.

-
- Kakaç, 1976, "Introduction" to Two-phase flows and heat transfer: Proceedings, S. Kakaç, F. Mayinger, eds., NATO Advanced Study Institute On Two-phase Flows And Heat Transfer, University Of Bosphorus, Hemisphere, Washington, vol. I.
 - Klimenko, V. V., 1988, "A Generalized Correlation for Two-Phase Forced Flow Heat Transfer", International Journal of Heat and Mass Transfer, v 31, pp. 541-552.
 - Lin, Y. K., Kuo, J. C., 1988, "Transient Conjugated Heat Transfer in Fully Developed Laminar Pipe Flows", Int. J. Heat Mass Transf., 31, pp. 1093-1102.
 - Lin, Y. K., Yin C. P., Yan, W. M., 1991, "Transient Laminar Mixed Convective Heat Transfer in a Flat Duct", ASME Journal of Heat Transfer, v 113, pp. 384-390.
 - Luikov, 1968, A. V., "Analytical heat diffusion theory", James P. Hartnett, ed., Academic, New York, 685 pp.
 - Mathcad 5.0, MathSoft, Inc. © 1986-1994, International CorrectSpell, 1993. Houghton Mifflin Company.
 - McAdams, W. H., Woods, W. K., Heroman, L. C., 1942, "Vaporization inside horizontal tubes. II-Benzane-Oil Mixtures", Trans. ASME, 64, pp. 193-300
 - Numerical Recipes Software©, 1986-92, Microsoft Developer Studio, Microsoft Corporation.
 - Özişik, M. N., 1993, "Heat Conduction", Second Edition, J. Wiley, New York. pp. 112-113.
 - Patankar, V. S., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington, D.C.
 - Ransom, V. H., Trapp, J. A., 1978, "RELAP5 Progress Summary," PILOT Code Hydrodynamic Model and Numerical Scheme. Idaho National Engineering Laboratory report No CD-AP-TR-005.
 - Reynolds, W. C., 1979, "Thermodynamic Properties in SI", Stanford University, Stanford, CA.

- Shah, M., 1976, "A New Correlation for Heat Transfer During Boiling Flow Through Tubes," ASHRAE Trans., v 82 (2), pp. 66-72.
- Sucec J., 1975, "Unsteady Heat Transfer Between a Fluid With Time Varying Temperature and a Plate: An Exact Solution", Int. J Heat Mass Transf., 18. pp. 25-34.
- Vanvik T., Moe R., 1998, "Direct Heating of Multiphase Flowlines for Hydrate Control on Åsgard", Multiphase Technology, Technology from the Arctic to the Tropics, Brill J. P., Gregory G. A , eds., bHr Group, pp 207-216.
- Wallis, G. B., 1980, "Critical Two-Phase Flow", International Journal of Multiphase Flow, v 6, pp. 97-112.
- White, F. M., 1994, "Fluid Mechanics", Third Edition, McGraw-Hill, USA.

APÉNDICE A

A.1 Desarrollo algebraico del modelo numérico hidrodinámico

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas para el método parcialmente implícito que corresponde al modelo riguroso es

Ecuación de masa:

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} = \frac{(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2}}{\Delta x} \quad (\text{A.1})$$

ó, reordenando

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2} \right] \quad (\text{A.2})$$

Ecuación de cantidad de movimiento lineal.

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -V_{j+1/2}^n \left(\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \left(\frac{P_{j+1}^{n+1} - P_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{j+1/2}^{n+1} |V_{j+1/2}^n| + g \quad (\text{A.3})$$

Ecuación de la energía (formulación convencional):

$$\frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{P_j^{n+1} V_{j+1/2}^n - P_j^{n+1} V_{j-1/2}^n}{\Delta x} = \bar{q}_j \quad (\text{A.4})$$

o, reordenando

$$\frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \rho_j^{n+1} \frac{V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n}{\Delta x} = \bar{q}_j \quad (\text{A.5})$$

Para asegurar la estabilidad del esquema numérico, se utiliza una formulación de tipo “donante” para calcular las cantidades escalares en las fronteras de las celdas, en dónde no están definidas

$$\Phi_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\Phi_j + \Phi_{j+1}) + \frac{V_{j+1/2}}{|V_{j+1/2}|}(\Phi_j - \Phi_{j+1}) \quad (\text{A.6})$$

dónde

$$\Phi_{j+1/2} = [\rho_{j+1/2}, (\rho u)_{j+1/2}] \quad (\text{A.7})$$

Para definir el término de flujo de momento, se utiliza una formulación semejante a la de tipo donante en la ecuación de momento

$$V_{j+1} - V_j = \begin{cases} V_{j+1/2} - V_{j-1/2}, & V_{j+1/2} \geq 0 \\ V_{j+3/2} - V_{j+1/2}, & V_{j+1/2} < 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

De la Ecuación (A.1) es posible despejar la primera de las incógnitas que debe ser calculada (ρ_j^{n+1})

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2}] \quad (\text{A.9})$$

La segunda de las incógnitas que debe ser calculada $(V_{j+1/2}^{n+1})$, puede obtenerse de la Ecuación (A.3) Despejando

$$V_{j+1/2}^{n+1} = V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^{n+1} - p_j^{n+1}) - k^n V_{j+1/2}^{n+1} |V_{j+1/2}^n| \Delta t + g \Delta t \quad (\text{A.10})$$

Si se define

$$\tilde{V}_{j+1/2} \equiv V_{j+1/2}^n - V_{j+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^n - p_j^n) + g \Delta t \quad (\text{A.11})$$

entonces

$$V_{j+1/2}^{n+1} = \tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_j^n) - k^n V_{j+1/2}^{n+1} |V_{j+1/2}^n| \Delta t \quad (\text{A.12})$$

y si se define

$$B_{j+1/2}^n = 1 + k^n |V_{j+1/2}^n| \Delta t \quad (\text{A.13})$$

finalmente es posible llegar a

$$V_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_j^n) \right] \quad (\text{A.14})$$

De forma análoga, de la Ecuación (A.5) es posible aislar la tercera incógnita, $(\rho u)_j^{n+1}$

$$(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}] + p_j^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) = \bar{q}_1 \quad (\text{A.15})$$

y reordenando se puede llegar a

$$(\rho u)_j^{n+1} = (\rho u)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j-1,2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1,2}^n V_{j-1/2}^{n+1} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} P_j^{n+1} (V_{j+1,2}^n - V_{j-1,2}^n) + \bar{q}_j \Delta t \quad (\text{A.16})$$

La cuarta incógnita, p_j^{n+1} , aparece tanto en la Ecuación (A.14) como la Ecuación (A.16).

Recapitulando, el sistema de tres ecuaciones en diferencias finitas, Ecuaciones (A.2) a (A.5) contienen cuatro incógnitas: ρ_j^{n+1} , $(\rho u)_j^{n+1}$, p_j^{n+1} y $V_{j+1/2}^{n+1}$. La cuarta ecuación requerida para satisfacer la cerradura, es la que corresponde con la derivada de la ecuación de estado, Ecuación (2.5).

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_u \left[1 - u \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_\rho \right]$$

Una expansión en series de Taylor de la diferencial de la densidad que se obtiene de la derivada de la ecuación de estado es

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_\rho \left[(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n \right] \quad (\text{A.17})$$

Igualando las Ecuaciones (A.17) y (A.2) se llega a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_\rho \left[(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n \right] = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho^n V^{n+1})_{j+1,2} - (\rho^n V^{n+1})_{j-1,2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Se puede sustituir el valor de la Ecuación (A.16) en la Ecuación (A.18) y se llega

a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_{\rho_a} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)}\right)_p \left\{ -\frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}] + \right. \\ \left. -\frac{\Delta t}{\Delta x} p_j^{n+1} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \bar{q}_j \Delta t \right\} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2} \quad (A.19)$$

Sustituyendo en la Ecuación (A.19) los valores de $V_{j+1/2}^{n+1}$ y $V_{j-1/2}^{n+1}$ de la Ecuación (A.14) se llega a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)}\right)_p \left\{ -\frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \cdot \right. \\ \left. \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_j^n) \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \cdot \right. \\ \left. \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^{n+1} - p_j^n - p_{j-1}^{n+1} + p_{j-1}^n) \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_j^{n+1} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \bar{q}_j \Delta t \right\} = \\ = \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^{n+1} - p_j^n - p_{j-1}^{n+1} + p_{j-1}^n) \right] + \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_j^n) \right] \quad (A.19)$$

Esta ecuación puede reordenarse en forma de factorizar los términos comunes de p_j^{n+1} (por claridad se muestran separados, pero forman parte de una sola ecuación):

$$\left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1,2}^n} \frac{1}{\rho_{j-1,2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j-1,2}^n} \right\} p_{j-1}^{n+1} + \quad (\text{A.21a})$$

$$\begin{aligned} &+ \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1,2}^n} \frac{1}{\rho_{j+1,2}^n} + \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1,2}^n} \frac{1}{\rho_{j-1,2}^n} + \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j-1/2}^n} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \right\} p_j^{n+1} + \quad (\text{A.21b}) \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \right\} p_{j+1}^{n+1} = \quad (\text{A.21c})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} p_j^n - \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)} \right)_p \left\{ - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \right. \\ &\quad \left. \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^n - p_{j+1}^n) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1,2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1,2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^n - p_j^n) \right] + \bar{q}_1 \Delta t \right\} + \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1,2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1,2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^n - p_j^n) \right] + \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1,2}^n} \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1,2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^n - p_{j+1}^n) \right] \quad (\text{A.21d}) \end{aligned}$$

Las Ecuaciones (A.21a) a (A.21c) forman el lado izquierdo de una ecuación y contienen términos desconocidos y que deben ser calculados (precisamente los términos p_a^{n+1}). La Ecuación (A.21d) corresponde al lado derecho de dicha ecuación y sólo contiene términos conocidos.

Se puede ver que la expresión formada por las Ecuaciones (A.21a) a (A.21d), es de la forma

$$C_1 p_{j-1}^{n+1} + C_2 p_j^{n+1} + C_3 p_{j+1}^{n+1} = C_4 \quad (\text{A.22})$$

Factorizando algunos términos y reordenando, los coeficientes de la Ecuación (A.22) se pueden determinar de la siguiente manera

$$C_1 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} - 1 \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$C_2 = \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_{\rho u} + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p \left\{ - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot \left[(\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} + (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) \right\} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{1}{B_{j-1/2}^n} + \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$C_3 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} - 1 \right\} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = & \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left[\rho_{j-1,2}^n - \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j-1,2}^n \right] \left[\tilde{V}_{j-1,2} - \frac{1}{\rho_{j-1,2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^n - p_j^n) \right] + \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[-\rho_{j+1,2}^n + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j+1,2}^n \right] \left[\tilde{V}_{j+1,2} - \frac{1}{\rho_{j+1,2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^n - p_{j+1}^n) \right] + \\
 & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{pu} p_j^n - \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p \bar{q}_j \Delta t
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

A.2 Desarrollo algebraico de la solución analítica (modelo de transferencia de calor, estado permanente)

Si se supone estado permanente, la Ecuación (2.16)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + q''' = \rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t}$$

se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q'''r \tag{A.27}$$

Integrando una vez con respecto al radio y ordenando términos se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q'''r}{2k} + \frac{c_1}{r} \tag{A.28}$$

donde c_1 es una constante de integración.

Integrando nuevamente con respecto al radio se obtiene

$$T = -\frac{q'' r^2}{4k} + c_1 \ln(r) + c_2 \quad (\text{A.29})$$

donde c_2 es otra constante de integración.

Las constantes de integración serán determinadas mediante las condiciones iniciales y de frontera.

Aplicando la segunda condición de frontera correspondiente a la pared externa, Ecuación (2.18)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_o} = 0$$

a la Ecuación (A.28) se tiene

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_o} = 0 = -\frac{q'' r_o}{2k} + \frac{c_1}{r_o} \quad (\text{A.30})$$

y despejando c_1 se llega a

$$c_1 = \frac{q'' r_o^2}{2k} \quad (\text{A.31})$$

Sustituyendo c_1 en la ecuación (A.29) y aplicando la condición de frontera que corresponde a la cara interna de la pared, Ecuación (2.19)

$$T|_{r=r_i} = T_1$$

se tiene que

$$T_1 = -\frac{q'' r_i^2}{4k} + \frac{q'' r_o}{2k} \ln(r_i) + c_2 \quad (\text{A.32})$$

Despejando c_2 se puede ver que su valor es igual a

$$c_2 = T_1 + \frac{q''}{2k} \left[\frac{r_1^2}{2} - r_o^2 \ln(r_1) \right] \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo las constantes de integración en la Ecuación (A.29) se llega finalmente a la ecuación analítica para determinar la temperatura en la pared cuando el sistema ha alcanzado un nuevo estado permanente

$$T = -\frac{q'' r^2}{4k} + \frac{q'' r_o^2}{2k} \ln(r) + T_1 + \frac{q''}{2k} \left[\frac{r_1^2}{2} - r_o^2 \ln(r_1) \right] \quad (\text{A.34})$$

A3 Desarrollo algebraico de la solución analítica basada en la solución de Luikov (1968) (modelo de transferencia de calor, transitorio)

El planteamiento es el siguiente: si se tiene un cilindro hueco de radio interno r_i y radio externo r_o (Figura A.1), es posible escribir la solución general que describe la conducción de calor transitoria unidimensional (radial) como una función del tiempo y del radio. Si se define la temperatura en exceso

$$\theta = T - T_1 \quad (\text{A.35})$$

la solución de Luikov (1968) es de la forma

$$\theta(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_o(\beta_m, r) \int_{r_i}^{r_o} r' R_o(\beta_m, r') F(r') dr' \quad (\text{A.36})$$

donde, tanto la ecuación de normalización $N(\beta_m)$, como la función R_0 , se definirán más adelante en términos de las condiciones de frontera, y $F(r)$ es la función que describe la distribución de la temperatura en la pared del cilindro en el instante de tiempo igual a cero. Es decir

$$\theta(r, t)|_{t=0} = F(r) \tag{A.37}$$

Los términos r dentro de la integral aparecen con una comilla para resaltar el hecho de que, en los términos que aparecen fuera de la integral, el valor del radio se fija para calcular la temperatura en ese valor. Dentro de la integral, en cambio, el valor del radio va desde r_i hasta r_o .

En el caso específico que se analiza, las condiciones de frontera son similares a las planteadas en los capítulos previos. La pared externa está aislada y la temperatura de la pared interna es fija y conocida, por lo que las condiciones de frontera se pueden expresar de la siguiente manera

En la cara interna:

$$\theta(r, t)|_{r=r_i} = 0 \tag{A.38}$$

En la cara externa:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=r_o} = 0 \tag{A.39}$$

Para estas condiciones de frontera, se tiene que (Özışık, 1993)

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 J_0^2(\beta_m r_i)}{J_0^2(\beta_m r_i) - J_0^2(\beta_m r_o)} \tag{A.40}$$

$$R_0(\beta_m, r) = J_0(\beta_m r) Y_0'(\beta_m r_o) - J_0'(\beta_m r_o) Y_0(\beta_m r_i) \tag{A.41}$$

donde J_0 y Y_0 son ecuaciones de Bessel de primera clase, y J'_0 y Y'_0 son las primeras derivadas de esas ecuaciones anteriores.

Los valores de β_m son los eigenvalores (las raíces positivas) de la siguiente eigenfunción, que también depende de las condiciones de frontera

$$J_0(\beta_m r_1)Y'_0(\beta_m r_0) - J'_0(\beta_m r_0)Y_0(\beta_m r_1) = 0 \tag{A.42}$$

En el caso específico analizado, la función del radio que describe a la temperatura en el instante de tiempo $t = 0$ (condición inicial), es igual a una constante

$$\theta(r,0) = F(r) = \theta_m \tag{A.43}$$

Esto permite evaluar la integral de la función principal de la siguiente manera

$$\int_{r_1}^{r_0} r R_0(\beta_m, r) \theta_m dr = \theta_m \int_{r_1}^{r_0} r [J_0(\beta_m r)Y'_0(\beta_m r_0) - J'_0(\beta_m r_0)Y_0(\beta_m r)] dr \tag{A.44}$$

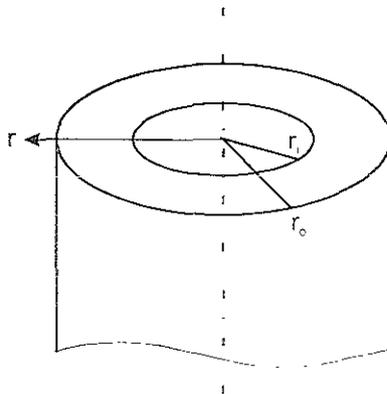


Figura A.1 Conducción radial unidimensional en cilindro hueco

La integral del lado derecho de la Ecuación (A.44) se puede desarrollar como

$$\begin{aligned}
 \theta_{im} \int_{r_i}^{r_o} r [J'_o(\beta_m r) Y'_o(\beta_m r_o) - J'_o(\beta_m r_o) Y_o(\beta_m r)] dr &= \\
 = \theta_{im} Y'_o(\beta_m r_o) \int_{r_i}^{r_o} r J_o(\beta_m r) dr - \theta_{im} J'_o(\beta_m r_o) \int_{r_i}^{r_o} r Y_o(\beta_m r) dr &= \\
 = \theta_{im} \left\{ Y'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r J_1(\beta_m r) \right]_{r_i}^{r_o} - J'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r Y_1(\beta_m r) \right]_{r_i}^{r_o} \right\} & \tag{A.45}
 \end{aligned}$$

Evaluando en los límites de integración se llega a

$$\begin{aligned}
 \theta_{im} \left\{ Y'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r J_1(\beta_m r) \right]_{r_i}^{r_o} - J'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r Y_1(\beta_m r) \right]_{r_i}^{r_o} \right\} &= \\
 = \theta_{im} \left\{ Y'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r_o J_1(\beta_m r_o) - \frac{1}{\beta_m} r_i J_1(\beta_m r_i) \right] + \right. & \\
 \left. - J'_o(\beta_m r_o) \left[\frac{1}{\beta_m} r_o Y_1(\beta_m r_o) - \frac{1}{\beta_m} r_i Y_1(\beta_m r_i) \right] \right\} = B & \tag{A.46}
 \end{aligned}$$

Factorizando el término común $\frac{1}{\beta_m}$ y agrupando términos se tiene que

$$\begin{aligned}
 B = \frac{\theta_{im}}{\beta_m} \{ r_o Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_o) - r_i Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_i) + & \\
 - r_o J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_o) + r_i J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_i) \} & \tag{A.47}
 \end{aligned}$$

Factorizando

$$B = \frac{\theta_{im}}{\beta_m} \{r_o [Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_o) - J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_o)] + r_i [J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_i) - Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_i)]\} = M \quad (A.48)$$

De modo que la ecuación de la temperatura puede escribirse como

$$\theta(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_o(\beta_m, r) M \quad (A.49)$$

Sustituyendo en la Ecuación (A.49) los valores de M, Ecuación (A.48), y R_o , Ecuación (A.41), se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \theta(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 J_0^2(\beta_m r_i)}{J_0^2(\beta_m r_i) - J_0^2(\beta_m r_o)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \cdot \\ \cdot [J_0(\beta_m r) Y'_o(\beta_m r_o) - J'_o(\beta_m r_o) Y_0(\beta_m r)] \cdot \\ \cdot \frac{\theta_{im}}{\beta_m} \{r_o [Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_o) - J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_o)] + \\ + r_i [J'_o(\beta_m r_o) Y_1(\beta_m r_i) - Y'_o(\beta_m r_o) J_1(\beta_m r_i)]\} \end{aligned} \quad (A.50)$$

Para poder simplificar la Ecuación (A.50), se puede considerar la siguiente igualdad

$$Y'_o(\beta_m x) = \beta_m Y_{-1}(\beta_m x) = -\beta_m Y_1(\beta_m x) \quad (A.51)$$

Utilizando dicha igualdad, es posible escribir la Ecuación (A.50) como

$$\begin{aligned} \theta(r,t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 J_0^2(\beta_m r_1)}{J_0^2(\beta_m r_1) - \beta_m^2 J_1^2(\beta_m r_0)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \cdot \\ & \cdot \beta_m [J_1(\beta_m r_0) Y_0(\beta_m r) - J_0(\beta_m r) Y_1(\beta_m r_0)] \cdot \\ & \cdot \frac{\theta_{mi}}{\beta_m} \{r_0 [-\beta_m Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_0) + \beta_m J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_0)] + \\ & + r_1 [-\beta_m J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_1) + \beta_m Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_1)]\} \end{aligned} \quad (A.52)$$

Ó, lo que sería lo mismo

$$\begin{aligned} \theta(r,t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^2 J_0^2(\beta_m r_1)}{J_0^2(\beta_m r_1) - \beta_m^2 J_1^2(\beta_m r_0)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \cdot \\ & \cdot \beta_m [J_1(\beta_m r_0) Y_0(\beta_m r) - J_0(\beta_m r) Y_1(\beta_m r_0)] \cdot \\ & \cdot \theta_{mi} \{r_0 [-Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_0) + J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_0)] + \\ & + r_1 [Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_1) - J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_1)]\} \end{aligned} \quad (A.53)$$

Pero el término entre corchetes multiplicado por r_0 es igual a cero, por lo que finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \theta(r,t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\beta_m^3 J_0^2(\beta_m r_1)}{J_0^2(\beta_m r_1) - \beta_m^2 J_1^2(\beta_m r_0)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \cdot \\ & \cdot [J_1(\beta_m r_0) Y_0(\beta_m r) - J_0(\beta_m r) Y_1(\beta_m r_0)] \cdot \\ & \cdot \theta_{mi} r_1 [Y_1(\beta_m r_0) J_1(\beta_m r_1) - J_1(\beta_m r_0) Y_1(\beta_m r_1)] \end{aligned} \quad (A.54)$$

A.4 Desarrollo algebraico del modelo numérico simplificado

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas que corresponde al modelo simplificado es

Ecuación de continuidad:

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho^n V^{n+1})_{j-1,2} - (\rho^n V^{n+1})_{j+1,2} \right] \quad (\text{A.55})$$

Ecuación de cantidad de movimiento lineal:

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -V_{j+1/2}^n \left(\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \left(\frac{p_{j-1}^{n+1} - p_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{j+1/2}^{n-1} |V_{j+1/2}^n| + g \quad (\text{A.56})$$

Ecuación de la energía (nueva formulación):

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{c_w M_w}{V_{c_v}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_t^n \frac{(p_j^{n+1} - p_j^n)}{\Delta t} + \\ & + \frac{(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \\ & + p_j^{n+1} \frac{V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n}{\Delta x} = \bar{q} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Las incógnitas que deben ser calculadas son las mismas que para el modelo numérico riguroso. La primera de ellas, (ρ_j^{n+1}) , se despeja de la misma forma que en la Ecuación (A.9). De la misma manera, la segunda incógnita, $(V_{j+1/2}^{n+1})$, puede obtenerse como en la Ecuación (A.14).

De la Ecuación (A.57) es posible aislar la tercera incógnita, $(\rho u)_j^{n+1}$

$$\begin{aligned}
 (\rho u)_j^{n+1} &= (\rho u)_j^n - \frac{c_w M_w}{V_{c_v}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j^n (p_j^{n+1} - p_j^n) + \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left[(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1} \right] + \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta X} p_j^{n+1} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \bar{q} \Delta t
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

La expansión en series de Taylor de la diferencial de la densidad que se obtiene de la ecuación de estado es la misma que en el modelo numérico riguroso, Ecuación (A.17).

Igualando las Ecuaciones (A.17) y (A.55) se llega a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p \left[(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n \right] = \frac{\Delta t}{\Delta X} \left[(\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} \right] \tag{A.59}$$

Se puede sustituir el valor de la Ecuación (A.58) en la Ecuación (A.59) y se llega

a

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p \left\{ - \frac{c_w M_w}{V_{c_v}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j^n (p_j^{n+1} - p_j^n) + \right. \\
 \left. - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left[(\rho u)_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^{n+1} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta X} p_j^{n+1} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \bar{q} \Delta t \right\} = \\
 = \frac{\Delta t}{\Delta X} (\rho^n V^{n+1})_{j-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta X} (\rho^n V^{n+1})_{j+1/2}
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

Sustituyendo en la Ecuación (A.60) los valores de $V_{j+1/2}^{n+1}$ y $V_{j-1/2}^{n+1}$ de la Ecuación (A.14) se llega a

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_{\rho u} (p_j^{n+1} - p_j^n) + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p \left\{ - \frac{c_w M_w}{V_{c_v}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j^n (p_j^{n+1} - p_j^n) \right\} + \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_1^n) \right] + \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^{n+1} - p_j^n - p_{j-1}^{n+1} + p_{j-1}^n) \right] + \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_j^{n+1} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) + \bar{q} \Delta t \Big\} = \\
 & = \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^{n+1} - p_j^n - p_{j-1}^{n+1} + p_{j-1}^n) \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n - p_j^{n+1} + p_j^n) \right]
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

Al igual que en el modelo riguroso esta ecuación puede reordenarse en forma de factorizar los términos comunes de p_j^{n+1} para llegar a una expresión de la forma

$$C_1 p_{j-1}^{n+1} + C_2 p_j^{n+1} + C_3 p_{j+1}^{n+1} = C_4 \tag{A.62}$$

Los coeficientes de la Ecuación (A.62) son similares a los establecidos en las Ecuaciones (A.23) a (A.26). Para este modelo son

$$C_1 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} - 1 \right\} \tag{A.63}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = & \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_{pu} + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p \left\{ - \frac{c_v M_w}{V_{cvj}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right. \\
 & \left[(\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} + (\rho u)_{j-1/2}^n \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \right] + \\
 & \left. - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{j+1/2}^n - V_{j-1/2}^n) \right\} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{1}{B_{j-1/2}^n} + \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \right] \quad (A.64)
 \end{aligned}$$

$$C_3 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j+1/2}^n \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} - 1 \right\} \quad (A.65)$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = & \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{B_{j-1/2}^n} \left[\rho_{j-1/2}^n - \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j-1/2}^n \right] \left[\tilde{V}_{j-1/2} - \frac{1}{\rho_{j-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j-1}^n - p_j^n) \right] + \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{B_{j+1/2}^n} \left[-\rho_{j+1/2}^n + \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p (\rho u)_{j+1/2}^n \right] \left[\tilde{V}_{j+1/2} - \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^n - p_{j+1}^n) \right] + \\
 & + \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_{pu} p_j^n - \left(\frac{\partial p}{\partial(\rho u)} \right)_p \left[\frac{c_v M_w}{V_{cvj}} \left(\frac{dT}{dp} \right)_j p_j^n + \bar{q} \Delta t \right] \quad (A.66)
 \end{aligned}$$

APÉNDICE B

CÁLCULO DE PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE FLUIDOS

En este apéndice se presenta un programa realizado para calcular las propiedades termodinámicas del fluido transportado en la tubería. Este fluido puede ser uno de varios posibles líquidos volátiles, como se señala más adelante.

El cálculo de las propiedades termodinámicas de una sustancia compresible simple requiere expresiones de dos tipos: ecuaciones de tipo P- ρ -T (presión, densidad y temperatura) y ecuaciones para c_v a bajas densidades (gas ideal), denotada por lo general como $c_v^0(T)$ (Reynolds, 1979).

Reynolds propuso aproximaciones, que se utilizaron en el presente trabajo, para cuatro ecuaciones:

Ecuación de presión, densidad y temperatura

$$P = P(\rho, T) \tag{B.1}$$

Ecuación de calor específico del gas ideal:

$$c_v^0 = c_v^0(T) \quad (\text{B.2})$$

Ecuación de presión de saturación:

$$P_{\text{sat}} = P_{\text{sat}}(T_{\text{sat}}) \quad (\text{B.3})$$

Ecuación de densidad de líquido saturado:

$$\rho_f = \rho_f(T_{\text{sat}}) \quad (\text{B.4})$$

Las sustancias para las que se realizó el programa, y que pueden ser elegidas como el fluido de trabajo transportado por la tubería, son:

1. Butano
2. Etano
3. Heptano
4. Hexano
5. Isobutano
6. Isopentano
7. Octano
8. Pentano
9. Propano

que son hidrocarburos volátiles que se encuentran con frecuencia en la industria en general y petrolera en particular

En el caso específico de las sustancias consideradas (para otras sustancias esto podría no ser cierto), las aproximaciones propuestas por Reynolds a las Ecuaciones (B.1) a (B.4) son las siguientes

Ecuación P-ρ-T:

$$P = \rho RT + \left(B_0 RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} + \frac{D_0}{T^3} - \frac{E_0}{T^4} \right) \rho^2 + \left(bRT - a - \frac{d}{T} \right) \rho^3 + \alpha \left(a + \frac{d}{T} \right) \rho^6 + c \frac{\rho^3}{T^2} (1 + \gamma \rho^2) e^{-\rho^2} \quad (B.5)$$

Ecuación P_{sat}:

$$\ln \left(\frac{P}{P_c} \right) = \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right) \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{T}{T_p} - 1 \right)^{i-1} \quad (B.6)$$

Ecuación ρ_f:

$$\rho_f = \sum_{i=1}^6 D_i X^{\frac{i-1}{3}} \quad (B.7)$$

$$X = 1 - \frac{T}{T_c}$$

Ecuación c_v:

$$c_v^0 = \sum_{i=1}^6 G_i T^{i-2} \quad (B.8)$$

La mayoría de las incógnitas de las Ecuaciones (B.5) a (B.8) son constantes que varían para cada sustancia. Los valores de dichas constantes para los hidrocarburos considerados se reportan en la Tabla B.2 que aparece al final de este Apéndice.

Como una forma de comprobación de la validez del programa, este se utilizó para generar tablas de propiedades para las nuevas sustancias y esas tablas se compararon con tablas ya existentes en la literatura para calcular el error que el uso del programa introduce.

Para valores muy altos de temperatura o presión (para regiones cercanas al punto crítico) los errores crecen drásticamente llegando incluso a ser del orden del 50%. Por

esta razón es importante tomar en cuenta el intervalo de temperatura y presión dentro de los cuales es válido usar el programa.

En la Tabla B.1 se enlistan las máximas diferencias encontradas entre las tablas reportadas en la literatura para las sustancias mencionadas, y los resultados arrojados por el programa aquí presentado. Estas diferencias se encontraron al utilizar el programa para calcular las propiedades de las sustancias dentro de los intervalos de temperatura y presión que aparecen en la misma tabla. Fuera de esos intervalos las diferencias son mucho mayores.

Como se puede apreciar el error que se introduce con el uso de este programa, en los intervalos de temperatura y presión señalados, es aceptable. En muchos casos, no hay diferencia alguna entre el valor de la tabla obtenida con el programa y el valor reportado en la literatura, por lo que es razonable utilizar el programa libremente si se respetan los límites en los que el error se mantiene pequeño.

Tabla B.1 Intervalos de aplicación y errores producidos

GAS	Intervalo de T	Intervalo de p	Error máximo
Butano	200K—380K	1 886kPa—1 727MPa	0.15%
Etano	150K—270K	9 591kPa—2.749MPa	0.17%
Heptano	300K—480K	6 638kPa—1 089MPa	0.04%
Hexano	250K—480K	1 520kPa—2 0017MPa	0 10%
Isobutano	200K—370K	3.751kPa—2.320MPa	0 34%
Isopentano	200K—420K	0.3494kPa—1 775MPa	0 18%
Octano	300K—520K	2.055kPa—1.252MPa	0 24%
Pentano	250K—430K	7.604kPa—1 786MPa	1 03%
Propano	200K—330K	19.97kPa—1.9815MPa	0.13%

Tabla B.2 Valores de las constantes en las ecuaciones de Reynolds (1979)

Butano:			
M = 58.12 kg/kmol T _c = 423.95 K P _c = 3.7183 Mpa ρ _c = 204.00 kg/m ³ T ₀ = 200 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_g, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 1.430797x10 ²	F ₁ = -6.4773780	D ₁ = 2 0399757x10 ²	G ₁ = 9.4817634x10 ³
B ₀ = 1.681919x10 ⁻³	F ₂ = -3.0579064x10 ⁻²	D ₂ = 5.0903116x10 ²	G ₂ = 3.9633418x10 ²
A ₀ = 2.588747x10 ²	F ₃ = -2.0756011	D ₃ = 7.0925596x10 ²	G ₃ = 2.8576075
C ₀ = 3.374153x10 ⁷	F ₄ = 9.3845364x10 ⁻¹	D ₄ = -1 9959517x10 ³	G ₄ = 4.8802965x10 ⁻³
D ₀ = 4.544053x10 ⁸	F ₅ = -5.7943269	D ₅ = 1 7838737x10 ³	G ₅ = -6 4100047x10 ⁻⁶
E ₀ = 1.749633x10 ⁹	F ₆ = -5.2770385	D ₆ = -3.6126335x10 ³	G ₆ = 2 0651236x10 ⁻⁹
b = 1.054551x10 ⁻³	F ₇ = 2.6036457x10 ¹		u ₀ = 4.2760753x10 ³
a = 6.081677x10 ⁻¹	F ₈ = 6.2752788x10 ¹		s ₀ = 1 8916540x10 ³
d = 1.728889x10 ²	T _p = 300.		
c = 1.846013x10 ⁵	P _c = 3.7180959x10 ⁶		
α = 4.968935x10 ⁻⁹			
γ = 8.700251x10 ⁻⁶			
Etano:			
M = 30.07 kg/kmol T _c = 305.88 K P _c = 5.0102 Mpa ρ _c = 217.59 kg/m ³ T ₀ = 150 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_g, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 2.767735x10 ²	F ₁ = -5 9040507	D ₁ = 2 1758939x10 ²	G ₁ = 2.6209109x10 ⁴
B ₀ = 1.716337x10 ⁻³	F ₂ = 2.6293983x10 ⁻³	D ₂ = 3 9512352x10 ²	G ₂ = 3.9731855x10 ²
A ₀ = 4.000173x10 ²	F ₃ = -1 6989361	D ₃ = -4.1074978x10 ²	G ₃ = 2.0372154
C ₀ = 2 711853x10 ⁷	F ₄ = 2.5761218x10 ⁻¹	D ₄ = 2 0021645x10 ³	G ₄ = 6 3813897x10 ⁻³
D ₀ = 1.314084x10 ⁹	F ₅ = -9 6655814x10 ⁻¹	D ₅ = -3 2750407x10 ³	G ₅ = -7.2185581x10 ⁻⁶
E ₀ = 4.162885x10 ¹⁰	F ₆ = 3.7608925	D ₆ = 1.9447815x10 ³	G ₆ = 2 2048025x10 ⁻⁹
b = 1 343479x10 ⁻⁵	F ₇ = -6.2752642		u ₀ = 4.9861617x10 ³
a = 1.385571	F ₈ = -2.5027513x10 ¹		s ₀ = 3 1934536x10 ³
d = 2 412543x10 ¹	T _p = 200		
c = 1 301434x10 ⁵	P _c = 5.0106051x10 ⁶		
α = 8.159501x10 ⁻⁹			
γ = 1.293618x10 ⁻⁵			
Heptano:			
M = 100.20 kg/kmol T _c = 537.68 K P _c = 2.6199 Mpa ρ _c = 197.60 kg/m ³ T ₀ = 300 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_g, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 8 299504x10 ¹	F ₁ = -7.2298764	D ₁ = 1 9760405x10 ²	G ₁ = 1 1925213x10 ³

$B_0 = 2.246032 \times 10^{-3}$	$F_2 = 3.8607475 \times 10^{-1}$	$D_2 = 8.9451237 \times 10^2$	$G_2 = -7.7231363 \times 10^2$
$A_0 = 2.082990 \times 10^2$	$F_3 = -3.4216472$	$D_3 = -1.1462908 \times 10^3$	$G_3 = 7.4463527$
$C_0 = 5.085745 \times 10^7$	$F_4 = 4.6274432 \times 10^{-1}$	$D_4 = 1.7996947 \times 10^3$	$G_4 = -3.0888167 \times 10^{-3}$
$D_0 = 3.566396 \times 10^9$	$F_5 = -9.7926124$	$D_5 = -1.7250843 \times 10^3$	$u_0 = 3.4058439 \times 10^5$
$E_0 = 1.622168 \times 10^9$	$F_6 = -4.2058094 \times 10^1$	$D_6 = 9.7088329 \times 10^2$	$s_0 = 1.1080254 \times 10^3$
$b = 1.065237 \times 10^{-5}$	$F_7 = 7.5468678 \times 10^1$		
$a = 5.987922 \times 10^{-1}$	$F_8 = 3.1758992 \times 10^2$		
$d = 7.736602$	$T_p = 400.$		
$c = 1.929386 \times 10^5$	$P_c = 2.6197435 \times 10^6$		
$\alpha = 5.291379 \times 10^{-9}$			
$\gamma = 9.611604 \times 10^{-6}$			

Hexano:

$M = 86.18 \text{ kg/kmol}$
 $T_c = 506.13 \text{ K}$
 $P_c = 2.9265 \text{ Mpa}$
 $\rho_c = 191.63 \text{ kg/m}^3$
 $T_0 = 250 \text{ K}$

P - ρ - T , Ecuación (B.5)	P_{sat} , Ecuación (B.6)	ρ_p , Ecuación (B.7)	c_p , Ecuación (B.8)
$R = 9.650393 \times 10^1$	$F_1 = -7.0231374$	$D_1 = 1.9162870 \times 10^2$	$G_1 = 1.2149350 \times 10^5$
$B_0 = 1.928741 \times 10^{-3}$	$F_2 = -2.1827311 \times 10^{-1}$	$D_2 = -3.2794532 \times 10^2$	$G_2 = -7.8379325 \times 10^2$
$A_0 = 1.640433 \times 10^2$	$F_3 = -1.9928180$	$D_3 = 6.2017594 \times 10^3$	$G_3 = 7.4139795$
$C_0 = 5.875423 \times 10^7$	$F_4 = 3.9897963 \times 10^{-1}$	$D_4 = -1.4823173 \times 10^4$	$G_4 = -3.0234462 \times 10^{-3}$
$D_0 = 3.426013 \times 10^9$	$F_5 = 1.0736773 \times 10^1$	$D_5 = 1.4904295 \times 10^4$	$u_0 = 3.8436664 \times 10^5$
$E_0 = 2.159373 \times 10^{11}$	$F_6 = 1.5436086 \times 10^2$	$D_6 = -5.1866270 \times 10^3$	$s_0 = 1.3669737 \times 10^3$
$b = 1.548178 \times 10^{-5}$	$F_7 = 4.7486454 \times 10^2$		
$a = 1.139100$	$F_8 = 5.0555122 \times 10^2$		
$d = 4.769149 \times 10^1$	$T_p = 400.$		
$c = 2.576318 \times 10^5$	$P_c = 2.9263747 \times 10^6$		
$\alpha = 3.689017 \times 10^{-9}$			
$\gamma = 7.805367 \times 10^{-6}$			

Isobutano:

$M = 58.12 \text{ kg/kmol}$
 $T_c = 409.07 \text{ K}$
 $P_c = 3.6846 \text{ Mpa}$
 $\rho_c = 194.51 \text{ kg/m}^3$
 $T_0 = 200 \text{ K}$

P - ρ - T , Ecuación (B.5)	P_{sat} , Ecuación (B.6)	ρ_p , Ecuación (B.7)	c_p , Ecuación (B.8)
$R = 1.430797 \times 10^2$	$F_1 = -6.3016457$	$D_1 = 1.9450561 \times 10^2$	$G_1 = 1.7563902 \times 10^5$
$B_0 = 2.018128 \times 10^{-1}$	$F_2 = 2.1880736 \times 10^{-1}$	$D_2 = -9.1725345 \times 10^1$	$G_2 = -1.7524300 \times 10^3$
$A_0 = 2.964140 \times 10^2$	$F_3 = -1.1288158$	$D_3 = 2.4446128 \times 10^3$	$G_3 = 1.1642389 \times 10^1$
$C_0 = 2.489763 \times 10^7$	$F_4 = 2.2391095$	$D_4 = -2.7219989 \times 10^3$	$G_4 = -1.0197170 \times 10^{-2}$
$D_0 = 1.163672 \times 10^9$	$F_5 = 1.0653363$	$D_5 = 1.9324597 \times 10^2$	$G_5 = 4.9006615 \times 10^{-6}$
$E_0 = 6.371519 \times 10^{10}$	$F_6 = 9.3322720$	$D_6 = 8.7037158 \times 10^2$	$G_6 = -9.8234416 \times 10^{-10}$
$b = 9.906333 \times 10^{-6}$	$F_7 = 2.4836848 \times 10^1$		$u_0 = 3.9342075 \times 10^5$
$a = 4.100261 \times 10^{-1}$	$F_8 = 3.7187854 \times 10^1$		$s_0 = 1.8189390 \times 10^3$
$d = 1.029360 \times 10^2$	$T_p = 300.$		
$c = 1.072632 \times 10^5$	$P_c = 3.6845470 \times 10^6$		
$\alpha = 5.253972 \times 10^{-9}$			
$\gamma = 8.208362 \times 10^{-6}$			

Isopentano:			
M = 72.15 kg/kmol			
T _c = 460.98 K			
P _c = 3.4089 Mpa			
ρ _c = 216.38 kg/m ³			
T ₀ = 200 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_f, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 1.152638x10 ²	F ₁ = -6.6220707	D ₁ = 2.1637787x10 ²	G ₁ = 2.4294906x10 ⁴
B ₀ = 1.105421x10 ⁻³	F ₂ = 5.5018040x10 ⁻¹	D ₂ = 5.1544885x10 ²	G ₂ = -2.4667775x10 ²
A ₀ = 1.845091x10 ²	F ₃ = -1.9645926	D ₃ = 1.0103369x10 ²	G ₃ = 6.4031034
C ₀ = 3.639545x10 ⁷	F ₄ = 8.8295088x10 ⁻¹	D ₄ = 3.0133300x10 ²	G ₄ = -2.3405578x10 ⁻³
D ₀ = 1.257944x10 ⁹	F ₅ = -1.0240822	D ₅ = -1.2696332x10 ³	u ₀ = 3.8740774x10 ⁻⁵
E ₀ = 1.186733x10 ¹⁰	F ₆ = -4.4620424	D ₆ = 1.1035964x10 ³	s ₀ = 1.5693410x10 ³
b = 1.485342x10 ⁻⁵	F ₇ = 7.9209958		
a = 9.127686x10 ⁻¹	F ₈ = -8.6762249x10 ⁻¹		
d = 8.666134x10 ¹	T _p = 300.		
c = 1.779602x10 ⁵	P _c = 3.4088951x10 ⁶		
α = 3.991801x10 ⁻⁹			
γ = 8.788781x10 ⁻⁶			
Octano:			
M = 114.22 kg/kmol			
T _c = 567.51 K			
P _c = 2.3997 Mpa			
ρ _c = 181.05 kg/m ³			
T ₀ = 300 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_f, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 7.280376x10 ¹	F ₁ = -7.4537707	D ₁ = 1.8105379x10 ²	G ₁ = 4.0859678x10 ⁴
B ₀ = 2.661451x10 ⁻³	F ₂ = 1.0592936	D ₂ = -2.3535183x10 ³	G ₂ = -3.2250398x10 ²
A ₀ = 1.682414x10 ²	F ₃ = -2.7218674	D ₃ = 1.7830977x10 ⁴	G ₃ = 6.6958265
C ₀ = 6.334511x10 ⁷	F ₄ = 2.4984120	D ₄ = -3.8108204x10 ⁴	G ₄ = -2.6759063x10 ⁻³
D ₀ = 2.791813x10 ⁹	F ₅ = 5.0654376	D ₅ = 3.4999123x10 ⁴	u ₀ = 3.4468913x10 ⁻⁵
E ₀ = 6.796298x10 ⁹	F ₆ = 2.8024876x10 ¹	D ₆ = -1.1666436x10 ⁴	s ₀ = 1.0494787x10 ³
b = 3.163488x10 ⁻⁶	F ₇ = 5.0827052x10 ¹		
a = 1.481799x10 ⁻¹	F ₈ = -3.9836446x10 ¹		
d = 1.162525x10 ²	T _p = 400		
c = 2.230527x10 ⁵	P _c = 2.3996292x10 ⁶		
α = 5.634268x10 ⁻⁹			
γ = 6.568151x10 ⁻⁶			
Pentano:			
M = 72.15 kg/kmol			
T _c = 467.00 K			
P _c = 3.2396 Mpa			
ρ _c = 196.67 kg/m ³			
T ₀ = 250 K			
<i>P-ρ-T, Ecuación (B.5)</i>	<i>P_{sat}, Ecuación (B.6)</i>	<i>ρ_f, Ecuación (B.7)</i>	<i>c_v, Ecuación (B.8)</i>
R = 1.152638x10 ²	F ₁ = -6.8036867	D ₁ = 1.9667315x10 ²	G ₁ = 1.2766578x10 ³
B ₀ = 2.114907x10 ⁻³	F ₂ = -8.1097531x10 ⁻¹	D ₂ = 2.7200889x10 ²	G ₂ = -8.2486411x10 ²
A ₀ = 2.638332x10 ²	F ₃ = -2.0780180	D ₃ = 2.2915110x10 ³	G ₃ = 7.4242679
C ₀ = 3.567863x10 ⁷	F ₄ = 1.6335438x10 ¹	D ₄ = -5.6090395x10 ³	G ₄ = -2.9601101x10 ⁻³

$D_0 = 9.008177 \times 10^8$	$F_5 = 1.2800516 \times 10^2$	$D_5 = 5.4614858 \times 10^3$	$u_0 = 3.7830502 \times 10^5$
$E_0 = 1.922074 \times 10^{10}$	$F_6 = 4.8994794 \times 10^2$	$D_6 = -1.7170116 \times 10^3$	$s_0 = 1.4741582 \times 10^5$
$b = 1.243400 \times 10^{-5}$	$F_7 = 8.6353004 \times 10^2$		
$a = 7.244518 \times 10^{-1}$	$F_8 = 5.9111580 \times 10^2$		
$d = 9.641415 \times 10^1$	$T_p = 400.$		
$c = 1.865119 \times 10^5$	$P_c = 3.2395335 \times 10^6$		
$\alpha = 4.578423 \times 10^{-9}$			
$\gamma = 8.879302 \times 10^{-6}$			

Propano:

$M = 44.09 \text{ kg/kmol}$
 $T_c = 369.82 \text{ K}$
 $P_c = 4.2362 \text{ Mpa}$
 $\rho_c = 197.38 \text{ kg/m}^3$
 $T_0 = 200 \text{ K}$

P - ρ - T , Ecuación (B.5)	P_{sat} , Ecuación (B.6)	ρ_p , Ecuación (B.7)	c_p , Ecuación (B.8)
$R = 1.887326 \times 10^2$	$F_1 = -6.2309993$	$D_1 = 1.9738193 \times 10^2$	$G_1 = 2.0582170 \times 10^5$
$B_0 = 1.366892 \times 10^{-3}$	$F_2 = -4.4226860 \times 10^{-1}$	$D_2 = -2.1307184 \times 10^1$	$G_2 = -1.9109547 \times 10^3$
$A_0 = 2.579108 \times 10^2$	$F_3 = -1.8839624$	$D_3 = 3.3522024 \times 10^3$	$G_3 = 1.1622054 \times 10^1$
$C_0 = 3.401044 \times 10^7$	$F_4 = 3.6383362 \times 10^{-1}$	$D_4 = -7.7040243 \times 10^3$	$G_4 = -9.7951510 \times 10^{-3}$
$D_0 = 1.076728 \times 10^9$	$F_5 = 1.5177354 \times 10^1$	$D_5 = 7.5224059 \times 10^3$	$G_5 = 4.5167026 \times 10^6$
$E_0 = 3.375879 \times 10^{10}$	$F_6 = 1.1216551 \times 10^2$	$D_6 = -2.5663363 \times 10^3$	$G_6 = -8.6345035 \times 10^{-10}$
$b = 1.096523 \times 10^{-5}$	$F_7 = 2.7635840 \times 10^2$		$u_0 = 4.2027216 \times 10^5$
$a = 7.856721 \times 10^{-1}$	$F_8 = 2.3585357 \times 10^2$		$s_0 = 2.1673997 \times 10^3$
$d = 1.639769 \times 10^2$	$T_p = 300.$		
$c = 1.661103 \times 10^5$	$P_c = 4.2359300 \times 10^6$		
$\alpha = 5.728034 \times 10^{-9}$			
$\gamma = 9.157270 \times 10^{-6}$			