

03063

16



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE LA  
COMPUTACION

"UN AUTOMATA CELULAR PROBABILISTA PARA LA  
SIMULACION DEL TRANSITO DE AUTOMOVILES  
AUTOMATIZADOS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRA EN CIENCIAS**  
P R E S E N T A  
**MARIA ELENA LARRAGA RAMIREZ**

289883

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO DEL RIO PÓRTILLA

MARZO DE 2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A lo mejor que me ha pasado en mi vida, Daniel:

Que con su amor, comprensión y empuje

me alienta en cada momento para seguir adelante

# Contenido

Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	vii
Introducción	1
<b>1 Conceptos, técnicas y teorías del tránsito vehicular: modelación del tránsito vehicular</b>	<b>9</b>
1.1 Conceptos y técnicas para modelar el tránsito vehicular . . . . .	10
1.2 La modelación del tránsito vehicular: Antecedentes . . . . .	12
1.3 Los Autómatas Celulares . . . . .	19
1.3.1 Notación y formalismo del AC . . . . .	20
1.3.2 Algunas aplicaciones de los ACs . . . . .	23
1.4 Un modelo de partículas saltando: El modelo de Nagel-Schreckenberg (NS)	24
1.4.1 El modelo NS determinista. . . . .	26
1.4.2 El modelo NS probabilista . . . . .	27
<b>2 Un Autómata Celular Probabilista (ACP) para describir el flujo de una clase de automóviles automatizados</b>	<b>28</b>
2.1 Descripción del modelo . . . . .	29
2.2 La simulación del modelo: Resultados y análisis . . . . .	32
2.2.1 El modelo con condiciones de frontera periódicas: El AC en anillo. .	33
2.2.2 El modelo con condiciones de frontera abiertas: El AC con densidad variable . . . . .	42
2.3 Comentarios del capítulo . . . . .	50
<b>3 Posible existencia de autorganización en un ACP para tránsito vehicular: El desempeño promedio.</b>	<b>54</b>
3.1 Descripción de la simulación promedio del modelo . . . . .	55
3.1.1 La importancia de la definición adecuada de la muestra . . . . .	57
3.2 El comportamiento promedio: Resultados . . . . .	58
3.2.1 Análisis de resultados: Análisis cualitativo y cuantitativo . . . . .	61

3.3 Comentarios del capítulo . . . . .	70
<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>

# Lista de Figuras

- 1.1 Un autómata celular unidimensional con condiciones de frontera periódicas donde las celdas separadas son espejos de la primera y la última celda, A y G, respectivamente. . . . . 22
- 2.1 Ejemplo paso a paso de la aplicación de las reglas de nuestro AC, cada número asignado a un vehículo significa su velocidad actual. Asumimos  $v_{max}=5$  y  $R = \frac{1}{3}$ . Lo que significa que una tercera parte de los vehículos bajan su velocidad en el paso de ruido. . . . . 33
- 2.2 Diagramas velocidad promedio vs tiempo para  $L = 400$  para dos valores de  $R$ . Se puede ver que el sistema ha alcanzado el estado de equilibrio . . . . . 36
- 2.3 Diagrama fundamental  $q$  vs  $\rho$ , para  $L = 400$ ,  $R = 0.4$ ,  $v_{min} = 0$ . Los datos son resultado de promediar  $10 * L$  pasos de tiempo después de obtener el estado de equilibrio. La línea sólida corresponde a nuestro AC, mientras la línea discontinua es el modelo NS. Se observa un incremento considerable en el flujo máximo alcanzado debido a la consideración de vehículos automatizados. 37
- 2.4 Diagrama fundamental de nuestro AC propuesto, para  $R = 0.4$  y  $0.5$ ,  $L = 400$ . Las líneas son resultado de promediar el flujo  $10 * L$  pasos del tiempo a partir del estado de equilibrio. Los puntos (fp) son el resultado de promediar únicamente sobre periodos,  $L/4$  pasos de tiempo, a partir del equilibrio (existen variaciones debido al ruido). Se observa, que como no existen vehículos en reposo, la densidad máxima aumenta con respecto al modelo con  $v_{min} = 0$ . Además, el ruido determina esta densidad máxima. . . . . 39
- 2.5 Diagrama espacio tiempo, correspondiente a nuestro AC de anillo,  $L = 400$ ,  $R = 0.5$ ,  $\rho = 0.3$ . Cada renglón de puntos corresponde al estado actual del AC, donde cada punto es un vehículo existente con un color de acuerdo a su velocidad. Los renglones hacia abajo de puntos corresponden a los mismos vehículos a tiempos sucesivos . . . . . 40
- 2.6 Diagrama espacio tiempo para nuestro AC de anillo;  $R = 0.5$ ,  $\rho = 0.6$ ,  $L = 400$ . Se observa como se forma un bloque de vehículos con flujo congestionado, y como se desprenden algunos pequeños cúmulos y avanzan alejándose del bloque. . . . . 41
- 2.7 AC abierto para modelar el tránsito vehicular . . . . . 42

2.8	Diagrama espacio-tiempo para el AC abierto para $R = 0.7$ , $\rho_{ini} = 0.2$ , $L = 400$ . Se observa como la densidad aumenta en el tiempo hasta generar un congestionamiento. . . . .	43
2.9	Diagrama espacio tiempo, para $\rho_{ini} = 0.2$ , $R = 0.2$ , AC abierto. No se presentan congestioanmientos. (código de colores igual que las gráficas anteriores) . . . . .	44
2.10	Diagrama espacio tiempo, para $\rho_{ini} = 0.7$ , $R = 0.2$ , distribución de velocidad uniforme, AC abierto. Se observa que al inicio existe un congestionamiento debido a la densidad alta, pero conforme el sistema evoluciona, como el ruido es pequeño el sistema llega a un flujo libre (código de colores igual que las gráficas anteriores) . . . . .	45
2.11	Diagrama espacio tiempo para $R = 0.6$ , $\rho_{ini} = 0.2$ , velocidad promedio uniforme, para el AC abierto. Se observa que no se presenta un congestionamiento. . . . .	46
2.12	Diagrama espacio tiempo para $R = 0.6$ , $\rho_{ini} = 0.2$ . para el AC abierto, mismas condiciones de la Fig. 2.11. Aún cuando las condiciones iniciales son iguales a los de la figura anterior, un cambio en la elección de estado inicial provoca que se genere una región congestionada. . . . .	46
2.13	Diagrama velocidad vs densidad promedio. Cada punto en una gráfica representa un experimento con las mismas condiciones iniciales para: $\rho_{ini} = 0.3$ , $R = 0.6$ , $L = 400$ . La gráfica a), b) y c) corresponden a $\langle v_{ini} \rangle$ aproximadamente 4.3, 3.5 y 2.5 respectivamente. La gráfica d) es una combinación de ellas. Se aprecia que a menor velocidad inicial mayor variación en los estados finales del AC abierto para cada experimento. . . . .	48
2.14	Gráfica $\rho$ vs $t$ para $\rho_i = 0.3$ , $L = 400$ $\langle v \rangle_{ini} \approx 2.5$ respectivamente, resultantes de la evolución del AC abierto. Cada línea en la gráfica representa la evolución de la densidad con respecto al tiempo para una simulación. . . . .	49
2.15	Gráficas $q$ vs <i>tiempo</i> para el AC abierto con $\rho_{ini} = 0.4$ para diferentes valores de $R$ . Cada línea de las gráficas corresponde a un experimento. Cuando el ruido es pequeño, el flujo tiende a incrementarse por arriba de 1. Cuando el flujo es congestionado, se decrementa por abajo de 1 en el tiempo. Esta separación de fases se presenta antes de alcanzar el estado permanente. . . . .	51
3.1	Distribución de velocidades $F(v_i, t)$ , $L = 400$ , $\rho_i = 0.7$ , $R = 0.4$ , para $N = 10$ y 100 elementos del ensamble respectivamente para el AC abierto propuesto. Se observa como las curvas se suavizan a mayor número de elementos. . . . .	59
3.2	Relación $\rho$ vs <i>tiempo</i> que muestran las densidades como resultado de promediar 100 simulaciones del autómata abierto para $\rho_{ini} = 0.2$ , cada línea corresponde al promedio de una muestra con diferente valor de ruido: a) Corresponde a $L = 1000$ . (b) Muestra el resultado para $L = 400$ . . . . .	63
3.3	La gráfica corresponde a $\rho_{ini} = 0.7$ , $L = 400$ del AC abierto promediado. Se observa que sólo se producen estados del autómata de flujo libre y congestionado, pero no intermedios. . . . .	64

- 3.4 Diagramas espacio\_ tiempo. Estos diagramas corresponde a una misma simulación,  $R = 0.5$ ,  $\rho_{ini} = 0.7$ ,  $L = 300$  a diferentes tiempos de evolución. El orden de evolución es a), b), c), d). Se aprecia como se genera un congestionamiento momentáneo en a), b) pero a partir del tiempo de evolución c) el sistema empieza a alcanzar un estado de flujo libre. . . . . 66
- 3.5 Transición de fase del flujo vehicular para el ACP abierto. La densidad y velocidad promedio como una función de  $R$  para  $L = 400$  para  $\rho_{ini} = 0.2$  y  $0.7$ . En la gráfica muestra que las densidades y velocidades promedio del estado permanente, para un mismo valor de  $R$  y  $L$  son independientes de la densidad inicial antes del punto de transición. . . . . 67
- 3.6 Transición de fase del AC abierto como una función de  $R$ .  $L_c = 400$  y  $L_m = 1000$ . Se observa que existe una independencia del tamaño de  $L$  hasta antes del punto de transición. . . . . 68
- 3.7 Relación  $\Delta\rho/\Delta R$  vs  $R$  para  $\rho_i = 0.2$  y  $0.7$  respectivamente para el AC abierto. Se observa el punto de transición de fase de flujo libre a congestionado. Además se aprecia que antes del punto de transición, el AC no depende de las condiciones iniciales. . . . . 69
- 3.8 En la gráfica  $\rho$  vs *tiempo* para el AC abierto, se puede observar como el estado permanente del AC es independiente de  $\rho_{ini}$  para valores de  $R$  antes del punto de transición. En este caso  $R = 0.4$ . . . . . 71



## Lista de Tablas

- 2.1 Tabla del comportamiento del sistema abierto, las x's indican los estados que se encontraron para las condiciones iniciales del AC . . . . . 47

## Agradecimientos

Agradezco al IIMAS-UNAM las atenciones brindadas durante mi estancia como estudiante de esta institución, principalmente a la Dra. María Garza, a Lulú y Violeta.

Al Centro de Investigación en Energía por su gran hospitalidad que hicieron más placentera la realización de este trabajo, en particular al grupo de física teórica.

Al doctor Antonio del Río por su enorme paciencia, su tiempo, por compartir conmigo un poco de sus conocimientos, su apoyo incondicional, pero sobre todo por ser más que un tutor, un gran amigo.

A cada uno de los integrantes de mi comité tutorial que con sus valiosos comentarios enriquecieron la realización de este trabajo.

A DGAPA-UNAM por la beca otorgada bajo el proyecto IN117798 para la realización de mis estudios de maestría.

Al compañero de mi vida, Daniel, que cada día hace más grande su amor para alentarme en todo momento.

A mis amados padres, hermanos y muy queridos sobrinos, por sus palabras de aliento en todo momento y su valioso amor que me demuestran día con día.

A mis queridos Susana y Sebastián, por ser ahora parte de mi gran familia y estar siempre pendientes de mis logros.

A mi amiga de siempre Irene y a su familia. A Gaby Hernández por el ánimo transmitido, Oscar Jaramillo por la amistad demostrada, sin olvidar a mis buenos compañeros de la Maestría.

# Introducción

Registros históricos, indican que aún en las ciudades antiguas la gente se enfrentó al “problema del tránsito” [10] surgiendo congestionamientos de carruajes, carretas y aún de peatones. La invención de los automóviles y la construcción de carreteras adicionó una nueva dimensión a este problema. El tránsito vehicular provocó efectos positivos como el incremento de la prosperidad económica y movilidad individual, pero también trajo consigo efectos negativos como *el incremento de volúmenes de tránsito que conduce a incrementar los impactos humanos y ambientales*, especialmente en áreas urbanas. Actualmente en la ciudad de México, por ejemplo, el congestionamiento vehicular es un problema cotidiano que ocasiona un deterioro en la calidad de vida, ya que ocasiona un aumento en el tiempo requerido para el traslado de un lugar a otro y genera grandes pérdidas económicas al contribuir enormemente a la contaminación ambiental. Se sabe que en muchos países, una fracción significativa de la contaminación es causada por el estancamiento vehicular, donde los vehículos contaminan el aire aún sin moverse. En el Valle de México, el 80% de la contaminación es generada por los automóviles [29].

Cuando el problema del tránsito vehicular empezó a hacerse presente en países industrializados, la reacción estándar fue aumentar la infraestructura del transporte para satisfacer la demanda, que para esa fase de rápido crecimiento las herramientas de planeación existentes fueron suficientes. Sin embargo, en los últimos años las ciudades industrializadas empiezan a ver los límites de la expansión de infraestructura de transporte como un medio para resolver el estancamiento vehicular generado por el congestionamiento en carreteras. En regiones densamente pobladas existe un espacio disponible limitado para la extensión de

los sistemas de transporte y nos enfrentamos ante un crecimiento de la contaminación, la frecuencia de accidentes y desde luego, una disminución del flujo vehicular. Además, estos problemas han ocasionado que aún cuando exista espacio disponible para la construcción de nuevas vías de transporte, la población que habita en los alrededores se oponga a ello. Esto ha originado que el tránsito vehicular sea considerado un factor económico para el desarrollo de un país, por ejemplo en 1990, casi el 15% del producto interno bruto de los Estados Unidos fué absorbido por los costos de sistemas de transporte [18]. En consecuencia, la optimización vehicular es sin duda un desafío importante de las sociedades modernas.

El estudio sistemático del tránsito vehicular tuvo sus inicios en los años 30's con la aplicación de la teoría de probabilidad a la descripción del tráfico de carreteras [1] y los estudios pioneros dirigidos por Bruce D. Greenshield en el Yale Bureau of Highway Traffic[25]; el estudio de modelos relacionando volúmen y velocidad [31] y la investigación del desempeño del tráfico en intersecciones [32]. Posteriormente, con el incremento del uso de automóviles y la expansión del sistema de carretera, hubo un surgimiento en el estudio de las características del tráfico y el desarrollo de las teorías del tránsito vehicular. En los años 50's se desarrollaron diversas propuestas teóricas para el estudio del tránsito vehicular, tal como autos siguiendo (car following), teoría de ondas de tráfico (analogía hidrodinámica) y teoría de colas [51, 55, 57, 69] (propuestas que describiremos más adelante). Como dato histórico, uno de los primeros éxitos en análisis sistemático de tránsito fué logrado en los 60's en el Túnel Lincoln, que conecta Manhattan con el estado de Nueva Jersey[72]. Por medio de semáforos en la entrada del túnel se podía estabilizar un flujo alto y homogéneo, que de otra forma solamente podía ser metaestable e inevitablemente decaía a una situación de

estancamiento. El resultado de este análisis fue el incremento de un 20% del flujo vehicular, reduciendo la contaminación del aire y evitando construir un túnel adicional [72]. Así, la creación de nuevas herramientas de predicción y planeación más confiables que en el pasado para hacer un mejor uso de las infraestructuras de transportación es una necesidad.

Debido a la alta complejidad del estudio del tránsito vehicular, muchas aproximaciones analíticas son imposibles. La existencia de computadoras cada vez más potentes ha motivado las aproximaciones del tránsito vehicular basadas en simulaciones como un medio para crear nuevas herramientas de predicción, planeación y control vehicular [3, 17, 12, 61, 64].

Los sistemas de transporte de calles y carreteras son por naturaleza dinámicos y aleatorios, es decir, el número de unidades en el sistema varía de acuerdo al tiempo y con una cantidad considerable de comportamiento aleatorio. El gran número de actividades que se realizan al mismo tiempo en el sistema significa un gran número de interacciones simultáneas. Los modelos son diseñados para imitar el desempeño de tales sistemas a través de su simulación. Estas simulaciones proporcionan una herramienta útil para analizar una amplia variedad de problemas dinámicos usualmente asociados con procesos complejos que no pueden ser descritos en términos analíticos. Usualmente, estos procesos son caracterizados por la interacción de muchos componentes del sistema o entidades. Frecuentemente, el desempeño de cada entidad y la interacción de un número limitado de entidades puede ser bien entendido y puede ser representado matemática y lógicamente en forma aceptable. Sin embargo, las interacciones simultáneas complejas de muchos componentes del sistema no pueden ser, en general, adecuadamente descritos en forma cerrada. Técnicamente, podemos

decir que algunos sistemas complejos son computacionalmente irreducibles, es decir, que la única manera de estudiar su evolución es permitiendo que estos evolucionen; su estudio se realiza simulando a sus componentes, especificando las interacciones, conectándolos entre sí y observando la dinámica emergente.

Los modelos de simulación son representaciones matemáticas / lógicas (o abstracciones) de sistemas del mundo real o abstracto, que toman la forma de sistemas ejecutados en una computadora digital en forma experimental. Sin embargo, para generar estos modelos se requiere una simplificación del fenómeno de interés: No es posible codificar una representación perfecta de la realidad debido a los límites del conocimiento, límites de recursos humanos para codificar todos los detalles y límites de los recursos computacionales. Las simulaciones prácticas tienen que establecer una relación entre resolución, fidelidad y escala. La resolución se refiere a las entidades más pequeñas a tratar (objetos, partículas, etc.), la fidelidad al grado de realismo de cada una de las entidades y la escala al tamaño del problema. De acuerdo a la experiencia, se sabe que a mayor fidelidad menor resolución y viceversa. Actualmente, la modelación del tránsito vehicular tiene una unidad de resolución fija y es el desempeño del viajero individual, la seguridad y la estabilidad. Debido a que esto repercute a escalas más grandes, en ocasiones es necesario sacrificar fidelidad para lograr tiempos de cómputo razonables.

Una adición reciente al desarrollo de la teoría del tránsito vehicular son los modelos de "partícula saltando" (particle hopping) para simulación a gran escala [49]. En estos modelos, una carretera es representada como una cadena de celdas que están vacías u ocupadas por exactamente una partícula. El movimiento tiene lugar mediante el salto en

pasos de tiempo discretos entre las celdas de acuerdo a un conjunto de reglas. Todas las partículas son cambiadas en paralelo (síncronamente), es decir, las reglas son aplicadas a cada una de las partículas cada paso de tiempo. Las velocidades, posiciones, espacio y tiempo son discretos. Por lo que muchos de estos modelos se han realizado basados en autómatas celulares (que describiremos más adelante) por su similitud en cuanto a la discretización. Los estudios realizados con estos modelos de Autómatas Celulares (AC) han permitido tratar conceptos como la metaestabilidad y las fluctuaciones (variaciones en el tiempo). Actualmente, existen modelos con ACs para simulaciones por computadora del tránsito urbano de ciudades completas. Buenos ejemplos de proyectos que utilizan ACs son PARAMICS y TRANSIMS [17, 61]. Esto ha permitido la creación de herramientas para la investigación del tránsito vehicular contribuyendo a la planeación, construcción y a optimización del tránsito vehicular.

Por otra parte, el continuo crecimiento de las poblaciones, sugiere buscar nuevas alternativas que resuelvan el problema al que se enfrentan los planeadores de transporte ocasionado por la infraestructura insuficiente. La automatización de carreteras y vehículos parece ser ya una realidad como un medio para su solución. La automatización de carreteras se está contemplando desde muchos puntos de vista: letreros digitales que informen de la velocidad promedio y los congestionamientos existentes, estudios de arquitecturas de control mediante sensores en puntos fijos y pilotos inteligentes, el considerar vehículos con computadoras individuales que le permita conocer información de las condiciones del flujo existente y ajustar su velocidad, etc. En los Estados Unidos, por ejemplo, la asociación ITS (Intelligent Transport Society) realiza estudios con vehículos automatizados, equipados con

una computadora que mediante la adición de un sensor infrarrojo pueden compartir información de la velocidad y distancia con los vehículos de enfrente en el carril automatizado, tal como la velocidad y el estado físico de la carretera [58]. Esto ha propiciado que en la modelación un vehículo considere la velocidad del vehículo de enfrente y no sólo su distancia en el proceso de desaceleración, lo que también conduce a la consideración de la seguridad como un factor importante en el frenado (por ejemplo ver [3, 62], para incrementar y estabilizar la velocidad y el flujo promedio y disminuir los congestionamientos en las carreteras en la forma más económica posible).

Todo lo anterior nos ha motivado para que en este trabajo presentemos un modelo minimal para microsimulación del flujo vehicular en carreteras dentro del contexto de la teoría de tránsito vehicular inteligente (vehículos automatizados) [41]. De aquí en adelante, utilizaremos las palabras “automóviles automatizados” para designar automóviles provistos de un dispositivo capaz de recoger la información de la velocidad del vehículo que lo precede en forma casi simultánea. Proponemos un modelo de partícula saltando, a través de un AC, para analizar la ventaja de usar vehículos automatizados en la optimización del flujo vehicular y poder determinar el punto de transición de flujo libre a congestionado en un sistema abierto donde la densidad varía en el tiempo. Hemos modificado el modelo de Nagel y Schreckenberg (NS) para considerar vehículos automatizados y el tamaño de la autopista. Para ello hemos removido las condiciones de frontera periódicas del modelo NS y estamos trabajando con sistemas abiertos y sistemas no homogéneos.

Queremos anticipar la organización del trabajo, dando una breve descripción de los contenidos de cada capítulo. En el capítulo uno se presenta un resumen de los conceptos



y técnicas empleadas para modelar el tránsito vehicular. En particular, introducimos la motivación y bondades del uso de los AC para este fin. A continuación describimos formalmente el concepto de autómata celular y mencionamos algunas otras de sus aplicaciones para modelar sistemas complejos. Al final del capítulo, describimos el AC de NS que es el antecedente inmediato de nuestra propuesta.

En el capítulo dos presentamos en detalle el modelo de autómata celular probabilista que proponemos para describir el flujo vehicular de automóviles automatizados en carreteras de un sólo carril. Comparamos nuestros resultados con el modelo NS y obtenemos que la introducción de automóviles automatizados genera un incremento en el flujo vehicular y la capacidad de carreteras. Este es un resultado alentador para el uso de estos automóviles. También en este capítulo presentamos el estudio de simulaciones individuales de nuestro AC en situación de fronteras abiertas. Para este caso, encontramos una fuerte dependencia del estado final sobre las condiciones iniciales del autómata. Esto nos recuerda los recientes resultados en teoría de la computación acerca de la clasificación de los AC de Baldwin y Shelah [4]; Cattaneo et. al[9].

En el capítulo tres analizamos el comportamiento promedio de una muestra representativa de nuestro modelo para distintas condiciones iniciales y encontramos evidencia de una clara transición de fase entre flujo libre y congestionado independiente de las condiciones iniciales. Sin embargo, la naturaleza de la transición es fuertemente dependiente de estas condiciones. De tal manera que bajo condiciones iniciales de flujo libre, la transición de fase recuerda a la transición vítrea y muestra la existencia de un estado de coexistencia de fases. Finalmente, para intensidades bajas en la variable aleatoria (ruido) encontramos

que el sistema se autorganiza.

Para terminar presentamos las conclusiones de nuestro trabajo.

## Capítulo 1

# Conceptos, técnicas y teorías del tránsito vehicular: modelación del tránsito vehicular

La teoría del tránsito vehicular ha existido desde los años 30's. Diversos modelos y enfoques se han creado y se siguen creando en nuestros días. El advenimiento de computadoras cada día más potentes y la complejidad del estudio del sistema del tránsito vehicular ha motivado diversos modelos y su posterior simulación.

En este capítulo, presentamos un resumen de algunas teorías del tránsito vehicular, desde sus inicios hasta la situación actual. Con la finalidad de que exista un mayor entendimiento de nuestro trabajo, empezamos por definir algunos conceptos esenciales.

## 1.1 Conceptos y técnicas para modelar el tránsito vehicular

Como ya mencionamos, a lo largo de la historia, se han desarrollado diversas teorías del flujo vehicular. Las descripciones van del desempeño de objetos individuales hasta su desempeño colectivo; pero independientemente del enfoque de estudio, se deben considerar tres variables esenciales para el estudio del tránsito vehicular: *el flujo, la velocidad y la densidad*.

El *flujo vehicular* es el número de vehículos pasando por un punto en un periodo de tiempo dado.

La *velocidad* se define como el cambio de posición de un vehículo por unidad de tiempo, y

La *densidad* vehicular es el número de vehículos por unidad de longitud de carretera en un tiempo dado.

Estas variables pueden ser estudiadas utilizando diferentes técnicas de simulación a nivel microscópico o macroscópico. Uno de los objetivos es determinar la densidad máxima a partir de la cual se genera un congestionamiento, denominada *capacidad* de carretera.

Los modelos microscópicos, son aquellos donde los objetos y eventos son representados individualmente [25]. Este tipo de modelos permite distinguir las características y el desempeño de los individuos y son adecuados para estudios de simulaciones donde el desempeño aleatorio puede ser representado mediante técnicas probabilistas. Los modelos que utilizan teorías de este tipo, por lo general requieren un análisis estadístico cuidadoso para establecer sus resultados. Las características de las aproximaciones microscópicas suelen ser costosas, pero como beneficio las propiedades y la dinámica de los objetos pueden

ser representadas en detalle.

Por su parte, las teorías de modelación en donde los procesos y la población son representados como un todo se denotan como modelos macroscópicos [25]. Los modelos de este tipo, adoptan una descripción paramétrica y la dinámica de los sistemas es descrita en términos promedio. Dentro de este tipo de modelos se ubican los modelos continuos del tránsito vehicular, modelos para selección de ruta óptima y algunos modelos para el estudio de formación de colas. Las aproximaciones macroscópicas carecen de flexibilidad. Los análisis macroscópicos son adecuados para trabajos de diseño y optimización.

Existen teorías para modelos intermedios entre los microscópicos y los macroscópicos y se denominan mesoscópicos. Estos modelos son por lo general propuestos ad hoc y adoptan una descripción del estado simplificada con dinámica simplificada y frecuentemente, se basan en una combinación complementaria de análisis macroscópico. Estos modelos son adecuados y dan resultados razonables acordes con el costo computacional [25].

Muchos de los estudios actuales acerca del tránsito vehicular están enfocados en los efectos causados por las fluctuaciones generadas en el flujo vehicular. Las fluctuaciones en el tránsito vehicular se refieren a pequeñas perturbaciones que se pueden ocasionar en la estabilidad vehicular, por ejemplo, por la introducción o el paro total de un vehículo. Desde el punto de vista de la teoría del tránsito vehicular, cuando el flujo vehicular es insensible a fluctuaciones se denomina flujo estable, es decir, cualquier alteración pequeña se absorbe y se retorna al estado inicial. Sin embargo, como veremos más adelante, el estudio del problema del tránsito vehicular ha permitido profundizar en el estudio de la metaestabilidad.

Términos como metaestabilidad y fluctuaciones, han atraído la atención recientemente [11, 50]. Y en este contexto, en este trabajo nos referiremos a estados de equilibrio del flujo vehicular para especificar aquellos estados donde el flujo vehicular y otros parámetros macroscópicos son homogéneos y estacionarios [16]. Y se dice que se tiene un estado permanente, cuando los parámetros macroscópicos permanecen constantes en el tiempo, por ejemplo, la densidad vehicular promedio es la misma y el flujo es constante a lo largo del sistema. Dentro del área de física estadística se están desarrollando teorías basadas en Autómatas Celulares (que describiremos más adelante) para describir el tránsito vehicular.

## 1.2 La modelación del tránsito vehicular: Antecedentes

La teoría del tránsito vehicular busca las relaciones entre las tres variables fundamentales del flujo vehicular, como ya se mencionó, la velocidad  $v$ , densidad  $\rho$  y el flujo  $q$ . Solamente dos de estas variables son independientes debido a que están relacionadas mediante  $q = v\rho$ . Las unidades usadas para estas variables son  $[v] = \text{km/h}$ ,  $[\rho] = \text{vehículos/km}$ ,  $[q] = \text{vehículos/h}$ .

Los primeros modelos de tránsito vehicular estaban basados en propiedades colectivas del mismo, tal como la conservación del número de vehículos, la velocidad promedio y otras propiedades más complejas del flujo vehicular. La primera aproximación de la teoría de tránsito vehicular fue para buscar relaciones independientes del tiempo entre  $\rho$ ,  $v$  y  $q$ . Estas relaciones son llamadas *diagramas fundamentales*. La forma de estas relaciones, sin embargo, es todavía discutida en la literatura de flujo vehicular [2, 33]. El problema parece ser el hecho de que las mediciones son efectuadas bajo condiciones no estacionarias, es decir,

el flujo varía constantemente en el tiempo.

El segundo paso de la teoría del tránsito vehicular fue para introducir una dinámica, es decir, una descripción que depende del tiempo. Uno de los primeros intentos fue el trabajo de Lighthill and Whitham, publicado en 1955 [43]. Este trabajo introdujo una descripción basada en la ecuación de continuidad, junto con la suposición de que el flujo depende sólo de la densidad, es decir, no existe un tiempo de relajación, la velocidad se adapta instantáneamente a la densidad existente. Estos modelos macroscópicos describen la evolución de la densidad y velocidad promedio de los vehículos en cada sección de la carretera.

Prigogine y Herman desarrollaron un modelo utilizando la teoría cinética para el flujo vehicular [56]. Ellos derivaron el modelo de Lighthill y Whitham como un caso límite de la teoría cinética. La teoría cinética anticipa muchos de los fenómenos, pero probablemente debido a que las matemáticas para trabajar en este enfoque requieren una labor ardua y tienen un detalle excesivo, no se ha desarrollado ampliamente [34].

En 1971, Payne reemplazó la suposición de adaptación instantánea de la teoría de Lighthill-Whitham por una ecuación de inercia, que es similar a la ecuación de Navier-Stokes [30, 53]. Kühne, en 1984 agregó un término de viscosidad y empezó a usar los métodos de dinámica no lineal para analizar las ecuaciones resultantes [39]. Estos modelos son ampliamente usados en algoritmos de control del tránsito vehicular en carreteras [7, 14, 44, 52].

La teoría llamada car-following (auto-siguiendo) considera el flujo desde un punto de vista microscópico: El desempeño de cada vehículo es modelado con relación al vehículo de adelante. Esta teoría se concentra en situaciones donde un conductor reacciona a los

movimientos de los vehículos de adelante. La aceleración en algunos modelos de este tipo es de la forma

$$a(t + T) \propto \frac{v(t)^m}{[\Delta x(t)]^l} \Delta v(t)$$

donde  $v$  es la velocidad del vehículo en consideración;  $\Delta x$  es la distancia al vehículo de adelante,  $\Delta v$  la diferencia de velocidad a ese vehículo y  $m$  y  $l$  son constantes,  $T$  es un tiempo de espera entre estímulo y respuesta. Este tiempo considera todos los efectos de espera tal como el tiempo de reacción humana, el tiempo que el mecanismo de un vehículo necesita para reaccionar a la entrada, etc. Los primeros modelos microscópicos de este tipo conocidos se deben a Reuschel y Pipes [55, 57]. Esta teoría ha dado resultados sobre la estabilidad de cadenas que se forman en el tránsito.

Por otra parte, con la finalidad de proporcionar una utilización más eficiente de las carreteras mediante el incremento de la capacidad de autos, especialmente en áreas donde la construcción adicional de carriles en carreteras es imposible o no deseada, ha surgido el concepto de carreteras y vehículos automatizados. Las carreteras automatizadas son tales que los autos podrían operar tanto en carreteras convencionales bajo un cierto control manual [58] y sobre caminos instrumentados y dirigidos especialmente bajo control automático.

Refiriéndonos al control automático la investigación se ha enfocado sobre el desarrollo de controladores que podrían realizar automáticamente esta tarea. Ya en la feria mundial en 1939, la General Motor's presentó conceptualmente una visión de carreteras automatizadas donde los autos eran controlados longitudinalmente (car-following) dándole la libertad al conductor para realizar más actividades conforme se movían en carreteras.



Esto dió origen a la teoría llamada auto automatizado siguiendo (automated car following). Existen tres estudios de investigación sobresalientes en control de vehículos automatizados siguiendo: un estudio de sistemas de carretera automática dirigido por General Motors de 1971 a 1981 [5], un programa sobre diversos aspectos de carreteras automatizadas dirigido en la Universidad del Estado de Ohio de 1964 a 1980 [20] y el Programa sobre Tecnología Avanzada para la Carretera (PATH) en la Universidad de California, Berkeley desde 1976 hasta el presente [59]. Los modelos microscópicos de vehículos automatizados siguiendo son abundantes en la literatura y pueden encontrarse referencias en la disertación de Swaroop [63]; pero actualmente, en lo que se refiere al diseño de control del flujo vehicular para carreteras automatizadas están desarrollándose nuevos modelos de control de flujo vehicular que combinan las características macroscópicas con las microscópicas (modelos mesoscópicos) y conceptos como los de la arquitectura utilizada por PATH con el control del flujo vehicular en más de un carril, lo que permite un estudio de la estabilidad del flujo vehicular [3, 62], es decir, la evolución de la densidad y velocidad del tránsito con respecto al auto automatizado siguiendo.

Actualmente asociaciones como (Intelligent Transport Society) ITS están llevando acabo estudios referentes a la construcción de carriles automatizados como un medio económico para solucionar el problema de la infraestructura de transporte. Estudios recientes en Europa y Asia han demostrado que se optimiza el flujo vehicular [58]. El disponer de automóviles automatizados parece que ha dejado de ser un sueño y en la actualidad estamos muy cerca de verlo hecho realidad. ITS está considerando diversas herramientas y teorías de flujo vehicular para la solución del tránsito vehicular: letreros digitales que informen

de la velocidad promedio y los congestionamientos existentes, control mediante sensores en puntos fijos del flujo vehicular, considerar vehículos con computadoras individuales que les permitan conocer información de las condiciones del flujo existente y ajustar su velocidad, etc. La adición de un sensor infrarrojo a los vehículos, que permita la comunicación con los vehículos de adelante, de tal forma que pueda adquirir la información de la velocidad y la distancia segura entre un vehículo tiene como finalidad incrementar la velocidad promedio en forma segura y así aumentar la capacidad de las carreteras y disminuir el estancamiento vehicular.

Esto obliga a la generación de nuevos modelos del tránsito vehicular donde la consideración de la velocidad del vehículo de adelante sea considerado en el proceso de desaceleración vehicular (por ejemplo, ver los modelos mesoscópicos [3, 62], para control del tránsito vehicular automatizado). Desde luego, que estos modelos pueden realizarse desde los diversos enfoques que existen en la teoría del tránsito vehicular.

Por otro lado, los modelos de enfoque dinámico, aquellos donde el tiempo es una variable relevante, han llegado a ser una herramienta ampliamente usada en la ingeniería de transporte con una variedad de aplicaciones desde la investigación fundamental, hasta la planeación, preparación y demostraciones. Todos estos modelos se han basado en las teorías de tránsito existentes y considerando nuevos aspectos como la formación de cadenas, estabilidad del flujo, herramientas de física estadística para el estudio de transiciones de fase y el caos [49]. De aquí, que el proponer modelos para contribuir al problema del tránsito vehicular y la ingeniería de transporte es una necesidad en nuestros días. Sin embargo, es necesario probar las propuestas antes de introducirlas y la generación de modelos y sus

simulaciones en computadora es una forma de probarlo. Las simulaciones prácticas tienen que establecer una relación entre resolución, fidelidad y escala, es decir, el nivel de detalle de los objetos, el grado de realismo de cada entidad y el tamaño del problema.

Los modelos microscópicos como la teoría de auto-siguiendo ( alta fidelidad), ocasionan que el software resultante para la simulación de los modelos sea de costoso desarrollo. Un modelo mesoscópico generalmente representa muchas entidades en un nivel de detalle alto, pero describe sus actividades e interacciones a un nivel de detalle mucho más grueso que el microscópico [62]. Pero cuando se desea describir las entidades, sus actividades e interacciones a un nivel de detalle global, por ejemplo, el flujo, densidad y velocidad promedio en el tiempo, se usan los modelos macroscópicos (baja fidelidad), aunque este tipo de modelos corren el riesgo de ser menos aproximados a la realidad. Casi todos los modelos para simulación del tránsito vehicular describen sistemas dinámicos y el tiempo es siempre la variable independiente. Los modelos continuos proponen ecuaciones continuas, describiendo variables continuas, en un espacio y tiempo continuo. Mientras que los modelos discretos proponen que las variables tomen únicamente valores discretos. La simulaciones de computadora del tránsito vehicular pueden representar una amplia variedad de fenómenos observados en el flujo vehicular guiándonos hacia un entendimiento cualitativo de sus principios básicos [11].

Precisamente dentro de los modelos dinámicos, recientemente se han introducido al desarrollo de teoría de flujo vehicular los modelos de "partícula saltando" (particle hopping). En este tipo de modelos, una carretera es representada como una cadena de celdas que pueden estar o bien ocupadas o vacías por exactamente una partícula [49]. El

movimiento de las partículas tiene lugar mediante el salto de las partículas de un lugar a otro de acuerdo a reglas de movimiento. En el contexto de tránsito vehicular, uno puede imaginar una carretera como un conjunto de celdas donde cada una puede contener un auto. Si el movimiento tiene lugar mediante el salto entre las celdas y si todas las partículas se cambian simultáneamente (cambio en paralelo), este tipo de modelos son también formalmente llamados *autómatas celulares*. Como veremos a continuación los modelos de partículas saltando pueden ser definidos como AC. La diferencia entre los modelos de vehículos siguiendo (car following) y de AC es que en este último, el espacio y tiempo son discretos. Las simulaciones de vehículos siguiendo discretizan el tiempo, pero usan el espacio continuo.

La metodología basada en AC ha sido usada como una opción de alta velocidad en proyectos de simulación del tránsito en Alemania [12] y los Estados Unidos[61]. Desde un punto de vista teórico, la metodología de los modelos de partícula saltando se sitúan entre las teorías de dinámica de flúidos y de vehículos siguiendo (car following) y ayudan a esclarecer las conexiones entre estas aproximaciones. Los modelos basados en AC son inherentemente microscópicos, lo que permite adicionar propiedades de cada vehículo como la identidad de los viajeros, plan de ruta y temperatura del motor [49] de acuerdo a las políticas de evaluación de los procesos.

Estos modelos de partícula saltando son probabilistas por naturaleza. Así, para una misma configuración inicial puede producir diferentes resultados cuando se usan diferentes semillas aleatorias. En principio esto es considerado una desventaja desde el punto de vista de de los ingenieros de tránsito. Sin embargo, el sistema vehicular es inherentemente

aleatorio y la varianza de las salidas es una variable importante en sí misma; pero como ventaja, se tiene la ejecución rápida y fácil de implementar de los modelos de partícula saltando.

La propuesta inicial de modelos de AC para tránsito vehicular es de Gerlough [28] y ha sido extendido por Cremer y colaboradores [13]. En 1992, Nagel y Schreckenberg (NS) introdujeron un modelo simple de ACs probabilista, es decir, una de las reglas de movimiento es aleatoria, llamando la atención dentro de la comunidad de física estadística [50]. Antes de iniciar abordaremos formalmente a los autómatas celulares. Y posteriormente en la siguiente sección describiremos el modelo NS basado en AC y su enfoque dentro de los modelos de partícula saltando.

### 1.3 Los Autómatas Celulares

El concepto de Autómata Celular (AC) fué originalmente concebido por Ulam and von Neumann en los años 40's como un marco formal para investigar el desempeño de los sistemas complejos, cuando formuló una teoría abstracta de máquinas de computación autorreplicables [68]. Los ACs son sistemas dinámicos en donde el espacio y tiempo son discretos. Un AC consiste de una red (arreglo) de celdas, donde cada una de ellas puede estar en un número finito de  $k$  estados posibles. El cambio de estado de las celdas es realizado en paralelo (síncronamente), en pasos de tiempo discretos, de acuerdo a una regla de interacción idéntica local. El estado actual de una celda es determinado por el estado previo de una vecindad de celdas [67, 73]. Esencialmente un AC consiste de [74]:

1. Una red espacial discreta de celdas.

2. La evolución tiene lugar en pasos de tiempo discretos
3. Cada celda es caracterizada por un estado tomado de un conjunto finito de estados.  
En cada instante, cada elemento deberá encontrarse en un cierto estado. El caso más sencillo corresponde a los elementos biestables, los cuales se pueden encontrar en sólo uno de dos estados posibles, 0 y 1, por ejemplo. Pero también el estado puede venir representado por un vector de componentes reales o por una cadena de un lenguaje formal.
4. Cada celda evoluciona de acuerdo a un conjunto de reglas de transición, que determinan las transiciones de estado de la celda como una función del estado de la celda misma y un número finito de celdas vecinas. La regla de transición define la dinámica del sistema. Dado un elemento y un instante determinados, la regla devuelve el siguiente estado del elemento, para ello necesita como argumentos los estados actuales, tanto del elemento considerado como de aquellos que conforman su vecindad. Las reglas de transición pueden ser deterministas o probabilistas, además, no todos los elementos necesitan obedecer a la misma regla.

### 1.3.1 Notación y formalismo del AC

Formalmente, un AC se puede definir como una cuatripleta  $(\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{N}, \phi)$  [9] donde:

- $\mathbf{L}$  es el arreglo de celdas que integran el sistema en un espacio  $n$ -dimensional,  $i$  denota la posición de cada celda.
- $\mathbf{S}$  es un conjunto finito de estados formado por todos los valores posibles que una

celda puede tomar en un instante de tiempo determinado (con valores de 0 a  $k - 1$ ) :

$$\mathbf{S} = \{0, 1, \dots, k - 1\}.$$

- $\mathbf{N}$  es el conjunto finito de números para definir la vecindad que afecta el estado de una celda  $N = \{-r, \dots, 0, \dots, r\}$  de cardinalidad  $|N| = 2r + 1 = n$ , donde  $r$  determina el número de celdas hacia adelante y hacia atrás que afectan el estado de una celda cualquiera de  $L$ . Es decir, el nuevo estado de la celda  $i \in L$  toma como entrada los estados de las celdas  $i + c$ , para toda  $c \in N$ .
- $\mathbf{S}^n$  es un conjunto finito integrado por todas las combinaciones posibles de los estados tanto del elemento considerado como de aquellos  $n - 1$  sitios que conforman su vecindad.  $\phi : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}$  es la función de transición local para cada celda, el efecto de la función de transición es cambiar la configuración de una celda a cada paso de tiempo. Esta regla de transición depende del tipo de red, el radio de la vecindad y los estados de las celdas.

Los estados de cada celda evolucionan mediante la iteración en el tiempo del mapeo  $\phi$ , involucrando una vecindad de sitios alrededor de este (que especifica la regla del AC), tal que para un AC unidimensional:

$$\alpha_i^{(t)} = \phi(\alpha_{i-r}^{(t-1)}, \alpha_{i-r+1}^{(t-1)}, \dots, \alpha_i^{(t-1)}, \dots, \alpha_{i+r}^{(t-1)})$$

donde  $\alpha_i^{(t)}$  es el nuevo estado en la celda  $i$  al tiempo de evolución  $t$ .

En la definición formal de un AC, normalmente se requiere que la red (arreglo) sea infinita en todas sus dimensiones. Para consideraciones de computabilidad y complejidad, esto es razonable y necesario; pero resulta imposible simular fielmente una red infinita en

una computadora (al menos que la región activa siempre sea finita). La evolución de un AC finito, depende de las condiciones de frontera aplicadas, es decir, las condiciones que se impongan en los límites. Estas condiciones determinan las vecindades en los bordes de la malla. Se suelen considerar dos casos [35]:

**Bordes periódicos.** Células opuestas se consideran vecinas, de forma que en una retícula plana la superficie se convierte en un toro.

Para un AC unidimensional, la condición de frontera periódica es aquella donde el primero y último sitio son identificados (como una lista circular, ver Fig. 1.1).

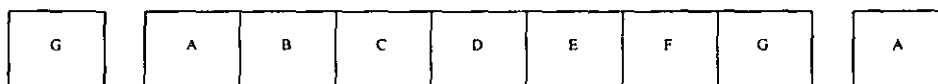


Figura 1.1: Un autómata celular unidimensional con condiciones de frontera periódicas donde las celdas separadas son espejos de la primera y la última celda, A y G, respectivamente.

Por ejemplo, para un arreglo circular de  $L$  celdas con condiciones de frontera periódicas (densidad constante) y tamaño de la vecindad  $n = 3$  (radio=1) se tiene que:

$$\alpha_1^{(t)} = \phi(\alpha_{L-1}^{(t-1)}, \alpha_0^{(t-1)}, \alpha_1^{(t-1)})$$

$$\alpha_L^{(t)} = \phi(\alpha_{L-2}^{(t-1)}, \alpha_{L-1}^{(t-1)}, \alpha_0^{(t-1)})$$

es la forma de especificar la condición periódica.

**Bordes absorbentes.** Las células de los bordes no tienen vecinos más allá de los límites del retículo.

Esta definición formal de AC como máquinas computacionales ha tenido muy diversas aplicaciones, [4, 9, 74].



### 1.3.2 Algunas aplicaciones de los ACs

A través de los años, los ACs han sido utilizados para el estudio de aspectos fenomenológicos generales, incluyendo comunicación, computación, construcción, crecimiento, reproducción, modelos financieros y evolución biológica (ver por ejemplo, [8, 54, 60, 67]). Una de las reglas de AC más conocida es la llamada "el juego de la vida", creada por Conway a finales de los 60's [23, 24]. Él mostró que este juego era una máquina universal [6]. Un resumen de resultados teóricos de AC en el área de computación pueden encontrarse en [15] (además, ver por ejemplo, [4, 9]). La cuestión acerca de si un AC no sólo puede modelar aspectos fenomenológicos, sino también modelar directamente las leyes de física en sí mismas fué tratada en [21, 65].

Además, los ACs pueden ser considerados como aproximaciones discretas a las ecuaciones diferenciales parciales [70] y usados como modelos discretos para una amplia variedad de sistemas (por ejemplo ver [66]). En este contexto, han sido usados para producir modelos muy simples de ecuaciones diferenciales, tal como la ecuación de Navier-Stokes [22]. También se han realizado modelos biológicos usando ACs [19]. Finalmente, los ACs pueden ser vistos como sistemas computacionales cuya información de los procesos de evolución es contenida en sus configuraciones iniciales. Los AC son también usados para la simulación de sistemas en computadoras digitales [74]. En particular, los AC son idóneos para proponer modelos de sistemas complejos y posteriormente analizar su comportamiento mediante simulación a gran escala, como el tránsito vehicular [61].

## 1.4 Un modelo de partículas saltando: El modelo de Nagel-Schreckenberg (NS)

El modelo NS simula el tránsito en un solo carril y se ha usado para estudiar la transición de flujo libre a congestionado. La dinámica del modelo está determinada por tres parámetros, la velocidad máxima  $v_{\max}$ , el parámetro de ruido  $R$  y la densidad global de los sitios ocupados (el número de automóviles existentes)  $\rho = N/L$ ; donde  $N$  denota el número total de automóviles, y  $L$  el tamaño del sistema respectivamente. Las variables que describen un sitio de la carretera  $i$  al tiempo  $t$  son su posición  $r_i \in \{1, 2, \dots, L\}$ , su velocidad  $v_i \in \{0, 1, \dots, v_{\max}\}$  y el hueco  $d_i$  que es el número de celdas vacías enfrente de una celda ocupada (la distancia en celdas entre dos automóviles). Debido a la discretización de espacio y tiempo, las unidades propias son frecuentemente omitidas en el contexto de partícula saltando o modelos de ACs. Las unidades propias aquí, podrían ser:  $[d_j]$ =número de celdas,  $[v_j]$  =número de celdas por paso de tiempo,  $[t]$  =número de pasos de tiempo, etc, pero el paso de tiempo es 1. Por esa razón, es posible escribir alguna relación tal como  $v_j < d_j$ , que apropiadamente debería ser  $v_j < d_j/(\text{paso-tiempo})$ . En particular, para este modelo un paso de tiempo  $t \rightarrow t + 1$  corresponde a 1seg ( $\Delta t = 1$ ) y cada celda equivale a  $7.5m$  ( $\Delta x$ ), es decir,  $v = 1$  significa  $27 \text{ Km/h}$  en unidades reales. Regresando a la dinámica del autómata, la función de transición para determinar el estado nuevo de una celda al tiempo  $t + 1$  de su estado al tiempo  $t$  es una función multipasos [35], es decir, la función de transición se compone de cuatro reglas que en conjunto determinan la nueva configuración de una celda. Las primeras tres reglas modifican temporalmente la velocidad de la partícula que se encuentre en la celda  $j$  (y lo indicamos mediante primas) hasta obtener la nueva

velocidad  $v_{nueva}$  (nuevo estado de una celda) y con base en esta nueva velocidad la última regla determina el estado de una celda.

Encontrar el número de sitios vacíos adelante ( $=d_j$ ) al tiempo  $t$

**R1** ( $\mathcal{A}$ ) Aceleración:  $v_j \rightarrow v'_j = v_j + 1$  (sólo si  $v_j < v_{max}$ ) ó  $v_j \rightarrow v'_j = v_j$

**R2** ( $\mathcal{D}$ ) Desaceleración:  $v'_j \rightarrow v''_j = d_j$  (para  $v_j > d_j$ )

**R3** ( $\mathcal{R}$ ) Ruido:  $v''_j \xrightarrow{p} v_{nueva} = v''_j - 1$  con probabilidad  $p$  (si  $v''_j > 0$ )

**R4** ( $\mathcal{M}$ ) Movimiento: el automóvil  $j$  se mueve  $v_{nueva}$  celdas

Aquí,  $d_j$  denota la distancia (en celdas) adelante del automóvil  $j$  al vehículo de enfrente. La velocidad máxima puede ser considerada como un límite de velocidad. Los cuatro pasos tienen interpretaciones simples. El paso  $\mathcal{A}$  significa que todos los conductores desean manejar a la más alta velocidad posible. El paso  $\mathcal{D}$  evita colisiones entre los vehículos. El paso de ruido  $\mathcal{R}$  toma en cuenta diversos efectos, por ejemplo las condiciones de la carretera (alcance, clima, etc.), las reacciones del conductor, etc. Finalmente el paso  $\mathcal{M}$  es el movimiento de actualización de los automóviles (el estado al siguiente paso de tiempo). El modelo NS es un modelo minimal en el sentido que los cuatro pasos son necesarios para reproducir las propiedades básicas del tránsito real. Pero para situaciones más complejas, por ejemplo 2 carriles, se deben adicionar reglas. Una parte esencial para las simulaciones de sistemas de transporte de gran escala es una representación minimal del tránsito de carreteras como un punto inicial correcto [49], para el estudio del comportamiento del tránsito vehicular.

Antes de continuar, definamos formalmente al autómata NS, por razones de exposición primero para el caso determinista.

### 1.4.1 El modelo NS determinista.

Uno puede tomar el límite determinista del AC NS colocando  $p = 0$ . Si consideramos  $v_{\max} = 1$  y que la vecindad es de 3 elementos, cada celda del AC de NS pueden estar en uno de tres estados: celda libre (-1), celda ocupada con un vehículo en reposo (0) u ocupada con un vehículo moviéndose (1). Cada vehículo necesita al menos un espacio de una celda para moverse. Si los estado 0 y 1 se colapsan en el estado 1 para indicar que una celda está ocupada y el -1 en 0 para indicar que una celda está vacía, es decir, consideramos el AC como un arreglo de posiciones con dos estados al que se le asocia un arreglo de velocidades; esto es equivalente a la regla 184 de la notación de Wolfram para AC (10111000) [74]. La regla de movimiento es tal que un vehículo salta a su celda vecina más próxima, al menos que esta celda esté ya ocupada por otro vehículo. Y en forma booleana considerando '+' como disyunción, '.' como conjunción y '~' como negación se define como:

$$\alpha_i^{(t)} = \phi(\alpha_{i-1}^{(t-1)}, \alpha_i^{(t-1)}, \alpha_{i+1}^{(t-1)}) \quad (1.1)$$

$$\phi(\alpha_{i-1}^{(t-1)}, \alpha_i^{(t-1)}, \alpha_{i+1}^{(t-1)}) = \alpha_{i-1}^{(t-1)} \cdot \tilde{\alpha}_i^{(t-1)} + \alpha_i^{(t-1)} \cdot \alpha_{i+1}^{(t-1)}$$

donde  $\alpha_i$  el valor de la celda  $i$  ( $\alpha_i = 0$  significa una celda libre y  $\alpha_i = 1$  significa que un vehículo está presente en el sitio  $i$ ). La cantidad  $\alpha_{i-1}$  representa el estado de la celda anterior y  $\alpha_{i+1}$  el estado de la celda siguiente. La regla (1.1) significa que el próximo estado de la celda  $i$  es 1 si un vehículo está presente y la próxima celda está ocupada, o si ningún vehículo está presente y existe un vehículo en la celda anterior.

La extensión al caso aleatorio la presentamos a continuación.

### 1.4.2 El modelo NS probabilista

En el caso del AC con  $p > 0$ , con  $v_{\max} = 1$ , la regla del AC se debe dividir en dos pasos para determinar el estado siguiente de una celda. En el primer paso, sólo la celda de adelante es considerada para aplicar las reglas R1-R3. Y en el segundo paso, los vehículos son desplazados. Aquí sólo se toma en cuenta el vecino de atrás (izquierda) para saber si la celda estará ocupada con base a la velocidad actual obtenida del paso 1. Sin embargo, debido a la condición de aleatorio  $p$ , la combinación adecuada de los pasos es determinante para el nuevo estado de una celda. Esto lo podemos definir como:

$$\alpha_i^{(t)} = \phi(\alpha_{i-1}^{(t-1)}, \alpha_i^{(t-1)}, \alpha_{i+1}^{(t-1)}) = \mathcal{M} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{A}(\alpha_{i-1}^{(t-1)}, \alpha_i^{(t-1)}, \alpha_{i+1}^{(t-1)}) \quad (1.2)$$

Es decir, el estado de una celda  $\alpha_i$  es resultado de la aplicación de cada una de las reglas (que indicamos mediante  $\circ$ ) que definen la regla general del modelo. Esta relación se debe a que una celda al siguiente paso va a estar ocupada sólo si está ocupada al tiempo actual y enfrente de ella hay un vehículo estacionado. O está vacía y atrás hay un vehículo con velocidad 1. Este nuevo estado está determinado por el movimiento.

De la misma forma, se puede hacer una relación para  $v_{\max} \geq 2$ , pero la cardinalidad de la vecindad será  $2v_{\max} + 1$  (contando a la celda misma), lo que significa  $2^{2v_{\max}+1}$  posibles valores de las  $2v_{\max} + 1$  variables en la vecindad. Desde luego, que una celda puede estar ocupada dependiendo de si existen partículas en las  $v_{\max}$  celdas anteriores.

Con base en el AC de NS para modelar el tránsito vehicular, en el capítulo siguiente presentamos un nuevo AC para la descripción de automóviles automatizados. Este autómata considera la velocidad del ente de adelante en la regla de desacelerado como lo haría un vehículo automatizado.

## Capítulo 2

# Un Autómata Celular Probabilista (ACP) para describir el flujo de una clase de automóviles automatizados

En este capítulo, presentamos una modificación del modelo de partícula saltando con autómatas celulares de NS descrito en el capítulo anterior enfocado a automóviles automatizados. Nuevamente enfatizamos que de aquí en adelante al referirnos a un vehículo automatizado consideramos a aquel carro que posee tanto la información de la velocidad como de la distancia que lo separa del vehículo que lo precede. La modificación consiste en considerar la velocidad del vehículo de adelante en el proceso de desaceleración vehicular y no solamente el espacio que existe entre un vehículo y el de adelante. Consideramos para la

modelación primeramente, un circuito con geometría de anillo donde la densidad se conserva en el tiempo, es decir, utilizamos un AC con condiciones de frontera periódicas tal y como se describió en el capítulo uno. Hacemos una comparación con los resultados para el modelo NS para velocidad máxima 5. Además también se considera para este mismo AC el caso cuando la velocidad mínima es 1, es decir, no pueden existir vehículos en reposo. Y por último, mostramos resultados obtenidos de la simulación del modelo propuesto, pero para un circuito abierto, donde cada paso de tiempo se introduce un vehículo por la parte más a la izquierda y se remueven los vehículos que salen de la frontera derecha en el movimiento. Los resultados que mostramos en este trabajo, son para diferentes valores de densidad y velocidad inicial (diferentes configuraciones iniciales para el AC que representa el sistema).

## 2.1 Descripción del modelo

Para nuestro modelo hemos modificado el modelo NS[50], para considerar el tamaño de la autopista y el cambio en la densidad vehicular. El modelo que presentamos a continuación se ubica dentro del contexto de la teoría de partícula saltando para el tránsito vehicular.

Al igual que para el modelo NS la carretera es dividida en  $L$  segmentos (celdas) de longitud  $\Delta x \simeq 7.5m$ . Cada celda puede contener a lo más un vehículo. El número de celdas vacías entre dos ocupadas lo llamaremos distancia,  $d$ .

Uno cambia el estado de la carretera en pasos de tiempo regular, que usualmente son identificados con el tiempo de reacción del conductor,  $\Delta t = 1 \text{ seg}$ . La discretización de espacio y tiempo implica que solamente pueden ser implementadas velocidades discretas,

$v \in \{0, 1, 2, \dots, v_{max}\}$  que son múltiplos de  $\Delta x / \Delta t \simeq 27 \text{ km/h}$ . Así, una velocidad máxima de  $135 \text{ km/h}$  corresponde a  $v_{max} = 5 \text{ celdas / pasos de tiempo}$ . Y  $v_{min}$  es la mínima velocidad que un vehículo puede adquirir.

La dinámica del flujo del tránsito es especificada por un conjunto de reglas, por medio de las cuales la nueva velocidad  $v_{nueva}$  y posición  $x_{nueva}$  de cada vehículo son calculadas. El cálculo de  $v_{nueva}$  procede en tres pasos, desempeñados simultáneamente a todos los vehículos (cambio paralelo):

1. Aceleración ( $\mathcal{A}$ ): Debido a que la velocidad  $v_{max}$  no ha sido alcanzada, cada vehículo trata de acelerar, es decir, incrementar su velocidad actual  $v_{ant}$  en 1:

$$v' \leftarrow \min(v_{ant} + 1, v_{max})$$

2. Frenado aleatorio ( $\mathcal{R}$ ):

$$v'' \leftarrow \max(v_{min}, v' - 1)$$

con probabilidad  $R$ .

3. Desaceleración ( $\mathcal{D}$ ): La idea de las interacciones vehículo a vehículo en esta regla, es con el deseo de evitar colisiones. Para ello, consideramos la distancia existente entre un vehículo y el de enfrente y ademas consideramos la velocidad  $v_f$  del vehículo de adelante, de tal forma que:

$$v_{nueva} \leftarrow \min(v'', d + v_f)$$



4. Movimiento ( $\mathcal{M}$ ): La posición de los vehículos es actualizada de acuerdo a su nueva velocidad y su posición actual  $x_{ant}$  a su nueva posición

$$x_{nueva} = x_{ant} + v_{nueva}$$

La modificación importante radica en la regla  $\mathcal{D}$  al considerar  $d + v_f$ .

La dinámica que proponemos es determinada por tres parámetros, la velocidad máxima  $v_{max}$ , el parámetro de ruido  $R$  y la densidad global de los automóviles  $\rho = N/L$ .

Desde un punto de vista formal, nuestro conjunto de estados es  $S = \{-1, v_{min}, \dots, v_{max}\}$ , es decir, una celda vale -1 si no existen una partícula en ella, o el valor de la velocidad de la partícula. El estado de la celda  $i$  al tiempo  $t$ ,  $\alpha_i^{(t)}$ , es resultado de la aplicación de las reglas descritas:

$$\alpha_i^{(t)} = \phi(\{\alpha_j^{(t-1)} : j \in \eta(i)\}) = \mathcal{M} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{A}(\{\alpha_j^{(t-1)} : j \in \eta(i)\}) \quad (1)$$

donde  $\eta(i)$  es el conjunto de las celdas vecinas de la celda  $i$ .

$$\eta(i) = [i - v_{max}, i + v_{max}]$$

El radio de la vecindad es  $v_{max}$ .

Los resultados, que mostraremos a continuación son de la simulación del modelo tal y como lo hemos descrito y su evolución en el tiempo. Una microsimulación de este modelo y el NS se puede encontrar en la página del CIE-UNAM <sup>1</sup>

<sup>1</sup><http://www.cie.unam.mx/~arp/simtraffic.html>

## 2.2 La simulación del modelo: Resultados y análisis

Para generar el estado inicial del AC se inicializan todas las celdas en -1, posteriormente se arrojan aleatoriamente  $n$  vehículos al circuito con velocidad  $v \in \{v_{\min}, \dots, v_{\max}\}$ . Se establece un valor para la densidad y la velocidad promedio inicial deseada, el valor del parámetro de ruido  $R$  y el tamaño del circuito  $L$  (arreglo) a estudiar. Entonces, se deja evolucionar el AC en el tiempo aplicando la regla a todos los vehículos (celdas ocupadas) en paralelo hasta que se alcanza un estado de equilibrio, es decir, cuando las variables macroscópicas no cambian en el tiempo y son homogéneas en promedio. El modelo que proponemos, es un modelo minimal, ya que es necesario aplicar las cuatro reglas descritas para garantizar la dinámica del sistema.

Además del cambio realizado en la regla de desaceleración con respecto al modelo NS, también un cambio en el orden de las reglas es llevado a cabo. Nosotros aplicamos las reglas en el orden  $\mathcal{RDMA}$  (es decir,  $A \circ M \circ D \circ \mathcal{R}(\alpha_i)$ ). En el AC del modelo NS las reglas son aplicadas en el orden  $\mathcal{DRMA}$ , para garantizar el frenado al siguiente paso de tiempo. En cambio en nuestro AC, como la velocidad del vehículo precedente es considerada en el frenado la aplicación de la regla  $\mathcal{D}$  antes de la  $\mathcal{R}$  imposibilita una buena reacción de frenado, lo que puede generar que los vehículos choquen (colisiones). El orden en que se aplican las reglas es muy importante, ya que una alteración en dicho orden redundaría en un resultado diferente, debido a que el conjunto de reglas del autómata es no abeliano, es decir, las reglas son no conmutativas.

En la Fig. 2.1 mostramos una posible evolución del AC concreto. Partimos de una configuración del AC al tiempo  $t$ , al aplicar la regla  $\mathcal{R}$  con  $R = 1/3$ , el vehículo de

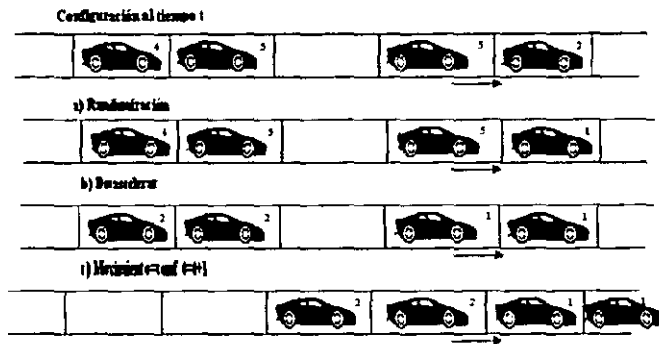


Figura 2.1: Ejemplo paso a paso de la aplicación de las reglas de nuestro AC, cada número asignado a un vehículo significa su velocidad actual. Asumimos  $v_{max}=5$  y  $R = \frac{1}{3}$ . Lo que significa que una tercera parte de los vehículos bajan su velocidad en el paso de ruido.

más adelante fue seleccionado y baja su velocidad en una unidad, de acuerdo a la regla  $\mathcal{R}$ . Al aplicar la regla  $\mathcal{D}$  (partiendo del vehículo más a la derecha), esta desaceleración se propaga hacia atrás a todos los vehículos produciendo que la configuración del AC al siguiente tiempo (donde ya los vehículos se han movido) se ubique en un estado congestionado. Si nosotros hubiéramos considerado únicamente la distancia como en NS se hubiera generado un estancamiento ( $v = 0$ ), ya que el vehículo 1 y 3 (de izquierda a derecha) hubieran tenido que estacionarse totalmente sin importar si la velocidad del vehículo de adelante les permite avanzar.

Pasemos al análisis del sistema cerrado o anillo.

### 2.2.1 El modelo con condiciones de frontera periódicas: El AC en anillo.

Por AC en anillo, nos referimos a un AC lineal con condiciones de frontera periódicas. Entonces, en la evolución en el tiempo, se conserva el mismo número de vehículos

en el sistema lo que implica que la densidad del AC es constante en el tiempo.

La evolución del AC es como sigue:

- Para generar el estado inicial, se arrojan los  $n$  vehículos en las  $L$  casillas con la restricción de que en cada casilla exista a lo más 1 vehículo.
- Luego, al azar se asigna una velocidad entre  $v_{\min}$  y  $v_{\max}$  a cada vehículo para posteriormente seguir de cerca a cada uno de estos y aplicarles las reglas de evolución antes mencionadas.
- Como el número de vehículos  $n$ , no cambia en el tiempo, es posible definir una densidad constante:

$$\rho = \frac{\text{número de vehículos en el anillo}}{\text{número de celdas en el anillo}}$$

esta generalmente no puede ser obtenida en la realidad, por lo que para emular condiciones reales, medimos la densidad promedio  $\bar{\rho}$  en un sector del circuito  $ml = \frac{1}{3}L$ , a partir de un tiempo de equilibrio  $t_0$  hasta un tiempo  $T$ :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{(T - t_0)} \sum_{i=t_0}^{T-t_0} \left( \frac{1}{ml} \sum_{j=1}^{ml} n_j^{(t)} \right)$$

donde  $n_j^{(t)}$  representa el estado de la celda  $j$  al tiempo  $t$ , ( $n_j^{(t)} = 1$  si hay un vehículo en la posición  $i$  y 0 en caso contrario),  $j \in ml$ .

- Determinamos la velocidad promedio en la sección  $ml$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{(T - t_0)} \sum_{i=t_0}^{T-t_0} \left( \frac{1}{\text{veh}_{sml}} \sum_{j=1}^{ml} v_j^{(t)} \right),$$

donde  $v_j^{(t)}$  es la velocidad del vehículo en la posición  $j \in ml$  (si existe y cero en caso contrario) y  $vehs_{ml}$  es el número de vehículos al tiempo actual en la sección  $ml$  (este número de vehículos puede variar).

- Por último determinamos el flujo

$$q = \bar{\rho} * \bar{v}.$$

que es el número promedio de vehículos pasando a través de una sección dada por unidad de tiempo.

Estas cantidades: velocidad, densidad y flujo, se analizan mediante simulaciones de este modelo de tránsito vehicular. La simulación se realiza para diferentes valores de los parámetros definidos:  $\rho$ ,  $n$  y  $R$ . Los resultados que presentamos son para redes (circuitos) de longitud  $L$  con valores de 200 a 10,000 celdas. La distribución de velocidades inicial es una distribución uniforme, es decir, se distribuye al azar el mismo número de vehículos para cada velocidad.

La simulación se deja evolucionar hasta que un estado de equilibrio es alcanzado. Este estado de equilibrio, lo garantizamos mediante el análisis estadístico aplicado a los resultados de la simulación utilizando la función de distribución  $\chi^2$  (ver [37]). El número de pasos de tiempo requerido para alcanzar el estado de equilibrio, depende de la longitud  $L$  y del valor de ruido  $R$ .

En las figura 2.2 mostramos la evolución de la velocidad promedio con respecto al tiempo hasta que se alcanza el estado de equilibrio para una densidad del AC  $\rho = 0.2$  y ruido  $R = 0.6$  y  $0.2$  respectivamente. Cualitativamente, podemos apreciar que el sistema está ya en equilibrio.

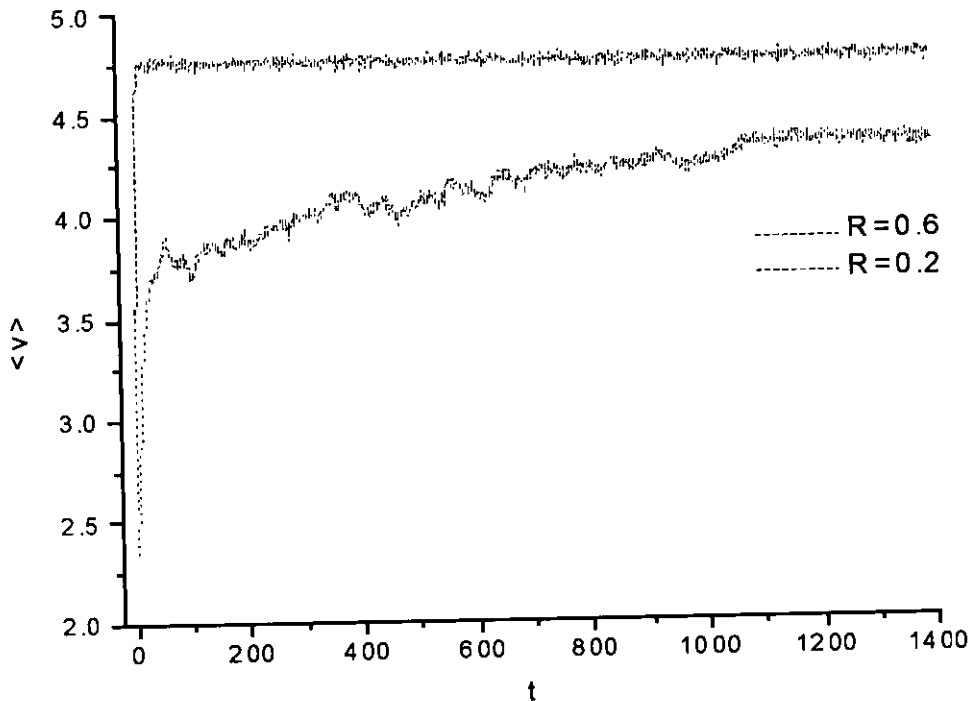


Figura 2.2: Diagramas velocidad promedio vs tiempo para  $L = 400$  para dos valores de  $R$ . Se puede ver que el sistema ha alcanzado el estado de equilibrio

Antes de proseguir, es importante resaltar que el estado inicial del autómata en cada ejecución es diferente, pues la asignación tanto de posiciones como de velocidades es aleatoria para no perjudicar los resultados de la simulación.

Empezaremos, por mostrar los resultados obtenidos del análisis del diagrama fundamental. El diagrama fundamental, permite visualizar el punto donde el flujo en carreteras es el máximo, es decir, la densidad máxima que puede existir en una carretera antes de que se produzca un estancamiento o congestionamiento, y es la relación flujo - densidad.

Primeramente, en las gráficas de la Fig. 2.3 se muestran los diagramas fundamen-

tales para el AC de NS y el nuestro respectivamente, con  $v_{\min} = 0$ ,  $v_{\max} = 5$ ,  $R = 0.4$  y  $L = 10,000$ .

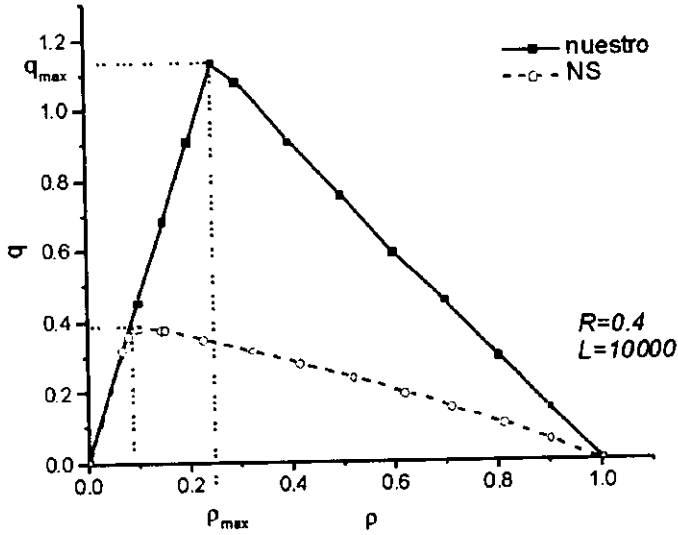


Figura 2.3: Diagrama fundamental  $q$  vs  $\rho$ , para  $L = 400$ ,  $R = 0.4$ ,  $v_{\min} = 0$ . Los datos son resultado de promediar  $10 * L$  pasos de tiempo después de obtener el estado de equilibrio. La línea sólida corresponde a nuestro AC, mientras la línea discontinua es el modelo NS. Se observa un incremento considerable en el flujo máximo alcanzado debido a la consideración de vehículos automatizados.

Estas condiciones significan que pueden existir vehículos en reposo y además se cumple

$$q(\rho = 0) = 0 \text{ y } q(\rho = 1) = 0$$

es decir, el flujo es cero cuando no existen vehículos o el sistema está totalmente lleno, indicando que los vehículos están estacionados (su velocidad es 0). El punto de interés en estos diagramas es  $(\rho_{\max}, q_{\max})$  que establece la densidad máxima  $\rho_{\max}$ , que puede haber antes de que comience el congestionamiento y por lo tanto el flujo máximo posible del sistema

$q_{\max}$ . Notamos que ambos modelos coinciden para valores pequeños de la densidad; pero después de ese punto observamos como el flujo del sistema con AC que proponemos sigue aumentando, de hecho la densidad  $\rho_{\max}$  es dos veces mayor que en NS. Este incremento, se debe a la consideración de vehículos automatizados. El conocimiento de la velocidad de un vehículo de enfrente permite reducir el espacio existente entre ambos.

También realizamos un estudio de nuestro modelo con  $v_{\min}=1$ , es decir, no pueden existir vehículos en reposo (que es otra idea de la introducción del carril con vehículos automatizados). Este cambio es factible en el modelo que proponemos, debido a que la consideración de la velocidad y distancia en el frenado permite que aún cuando el circuito está totalmente lleno los vehículos continúen uno detrás del otro con velocidad  $v_{\min} = 1$ . Un punto importante a mencionar, es que el modelo NS no permite esta consideración. En la Fig. 2.4, se presenta el diagrama fundamental de este caso para dos valores de  $R$ ,  $R = 0.4$  y  $R = 0.5$ . Debido a que no existen vehículos en reposo, notamos que  $\rho_{\max}$  aumenta en comparación con nuestro modelo con  $v_{\min} 0$ , y además el flujo a lo más baja a 1.

Aún cuando aquí mostramos solamente estas gráficas, el análisis de los diagramas fundamentales se realizó para diferentes valores de  $\rho$  y  $R$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Cabe mencionar que existe un caso especial, si se establece una configuración inicial con un flujo homogéneo, donde todos los vehículos tienen velocidad máxima, encontramos que el autómata es insensible al ruido  $R$ , es decir, no se producen congestionamientos, independientemente de la longitud  $L$ .

Por otra parte, para determinar los congestionamientos con base al desempeño individual de los vehículos, realizamos un estudio de los diagramas espacio-tiempo. Es-



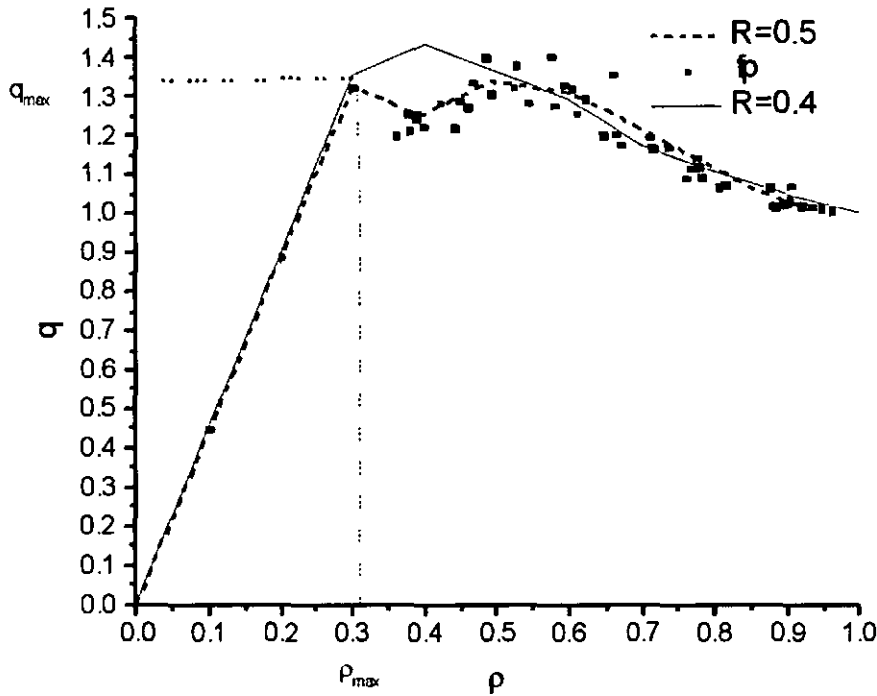


Figura 2.4: Diagrama fundamental de nuestro AC propuesto, para  $R = 0.4$  y  $0.5$ ,  $L = 400$ . Las líneas son resultado de promediar el flujo  $10 * L$  pasos del tiempo a partir del estado de equilibrio. Los puntos (fp) son el resultado de promediar únicamente sobre periodos,  $L/4$  pasos de tiempo, a partir del equilibrio (existen variaciones debido al ruido). Se observa, que como no existen vehículos en reposo, la densidad máxima aumenta con respecto al modelo con  $v_{min} = 0$ . Además, el ruido determina esta densidad máxima.

tos diagramas nos permiten apreciar la formación de congestionamientos con respecto al tiempo. Los diagramas se componen de un conjunto de reglones, donde cada reglón de puntos representa el estado del AC en conjunto, es decir, los vehículos existentes a un tiempo determinado, y cada renglón hacia abajo representa los mismos vehículos a tiempos sucesivos. En las Figs. 2.5 y 2.6 mostramos los diagramas espacio tiempo correspondientes a nuestro AC con  $v_{min} = 1$ , para las variables  $R = 0.5$ ,  $\rho = 0.3$  y  $0.6$  respectivamente. Al igual que en el diagrama fundamental, la velocidad de los vehículos es alta aún para

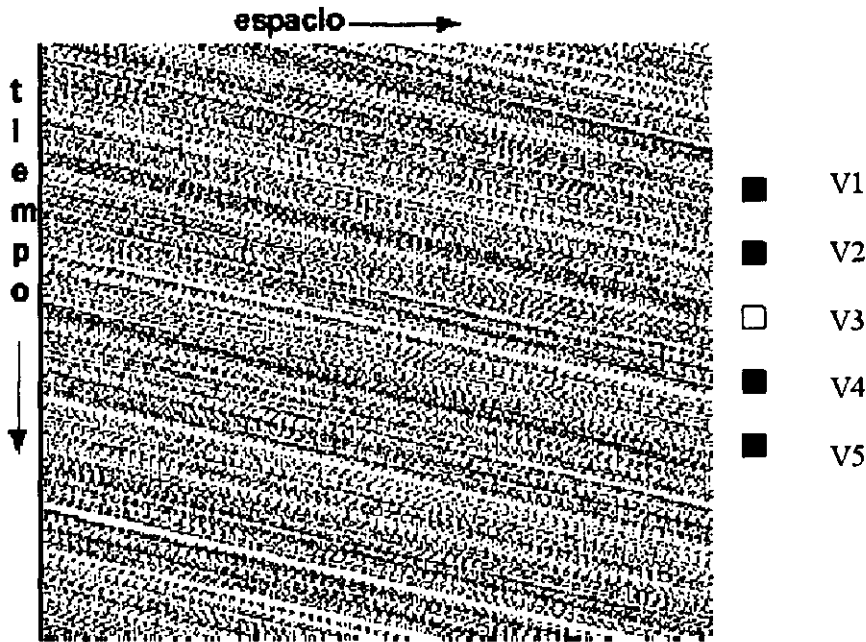


Figura 2.5: Diagrama espacio tiempo, correspondiente a nuestro AC de anillo,  $L = 400$ ,  $R = 0.5$ ,  $\rho = 0.3$ . Cada renglón de puntos corresponde al estado actual del AC, donde cada punto es un vehículo existente con un color de cauero a su velocidad. Los renglones hacia abajo de puntos corresponden a los mismos vehículos a tiempos sucesivos

$\rho = 0.3$ , es decir, los vehículos mantienen velocidades mayores o iguales a cuatro, por lo que decimos que el flujo es libre. En la Fig. 2.6, que corresponde a una densidad  $\rho = 0.6$  se aprecia la existencia de cúmulos de vehículos con velocidad mínima; lo que genera un congestionamiento. Este tipo de análisis, se hizo para diferentes parámetros del AC.

Si partimos de un estado de congestionamiento (vehículos con velocidad mínima por ejemplo) y hacemos  $R = 0$ , es decir, hacemos que el sistema se mantenga sin variaciones de frenado aleatorias, todos los vehículos tienden a aumentar su velocidad para alcanzar la máxima. Esto se debe a que al igual que en las carreteras, si no existe nada que haga disminuir la velocidad de los vehículos, estos tienden a aumentar su velocidad. Aunque en la realidad, una forma de lograr  $R = 0$ , es un estado de la carretera excelente y que no exista

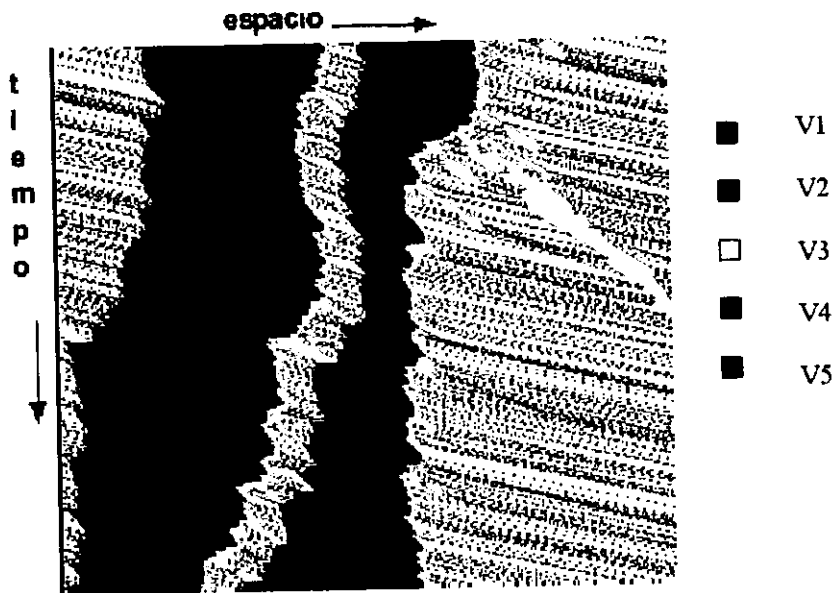


Figura 2.6: Diagrama espacio tiempo para nuestro AC de anillo;  $R = 0.5$ ,  $\rho = 0.6$ ,  $L = 400$ . Se observa como se forma un bloque de vehículos con flujo congestionado, y como se desprenden algunos pequeños cúmulos y avanzan alejándose del bloque.

algún medio como la distracción del conductor que provoque sobrerreacciones inesperadas. Quizás este resultado sea útil en el caso del piloto automático, pero esa no es nuestra finalidad.

El estudio presentado en esta sección, para circuitos donde suponemos la densidad se mantiene constante en el tiempo; es útil como un medio de planeación para la solución de la prevención de congestionamientos ante condiciones específicas. Sin embargo, en la realidad la densidad no es constante, esta tiende a cambiar. En la siguiente sección presentamos un estudio del mismo AC propuesto pero para condiciones de frontera abiertas, es decir, la densidad puede variar en el tiempo.

### 2.2.2 El modelo con condiciones de frontera abiertas: El AC con densidad variable



Figura 2.7: AC abierto para modelar el tránsito vehicular

En esta sección, presentamos los resultados de cambiar el AC e imponer una condición de frontera abierta, es decir, donde la densidad no permanece constante en el tiempo (como el de la Fig. 2.7). Cada paso de tiempo, se remueven los vehículos que en el movimiento exceden la frontera derecha y si la frontera izquierda está desocupada, se introduce un nuevo vehículo con velocidad máxima. Esto implica, que las celdas de los extremos sólo interactúan con una celda (la derecha o la izquierda), pero todas las celdas restantes del AC tienen el mismo comportamiento del AC del modelo de anillo. Esto ocasiona, que la densidad existente pueda variar en el tiempo con base en los parámetros asignados al inicio. Los resultados que presentamos, son para  $v_{min}=1$ .

Para estas condiciones de no equilibrio, encontramos que la densidad y velocidad promedio de la configuración inicial como  $\rho_{ini}$  y  $\langle v_{ini} \rangle$  son importantes. Los resultados que presentaremos en esta sección se enfocan al estudio de simulaciones individuales con las mismas condiciones iniciales para observar la tendencia en el comportamiento del sistema.

Al igual que el AC con condiciones de frontera periódicas, realizamos un análisis de la densidad y velocidad promedio, pero este lo hacemos cuando se alcanza un estado permanente, es decir, un estado donde los parámetros permanecen constantes aunque las

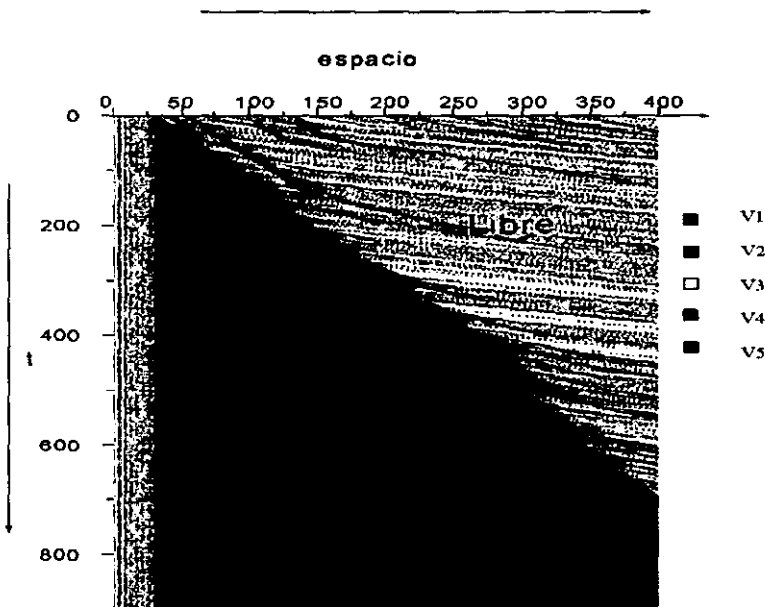


Figura 2.8: Diagrama espacio-tiempo para el AC abierto para  $R = 0.7$ ,  $\rho_{ini} = 0.2$ ,  $L = 400$ . Se observa como la densidad aumenta en el tiempo hasta generar un congestionamiento.

variables no son homogéneas.

Primeramente, presentamos los diagramas espacio -tiempo para observar que a diferencia del modelo cerrado, la densidad  $n_p$  permanece constante en el tiempo y así, determinar si se presenta un cambio de densidad. En la Fig. 2.8, mostramos el diagrama espacio-tiempo del AC con condiciones iniciales  $\rho_{ini} = 0.2$ ,  $L = 400$ ,  $R = 0.7$  y a una distribución de velocidad uniforme ( $v_{ini} \simeq 3$ ,  $1/5$  de vehículos con  $v_i, i = 1, \dots, 5$ ). En este diagrama observamos como aún cuando inciamos con una densidad pequeña, con el paso del tiempo el flujo se congestiona. De mantener la aplicación de una condición de ruido mayor de 0.5 esto se observa frecuentemente. Podemos notar como el congestionamiento se propaga hacia adelante debido a la consideración de la velocidad en el paso de desaceleración, esto no ocurre en el modelo NS.

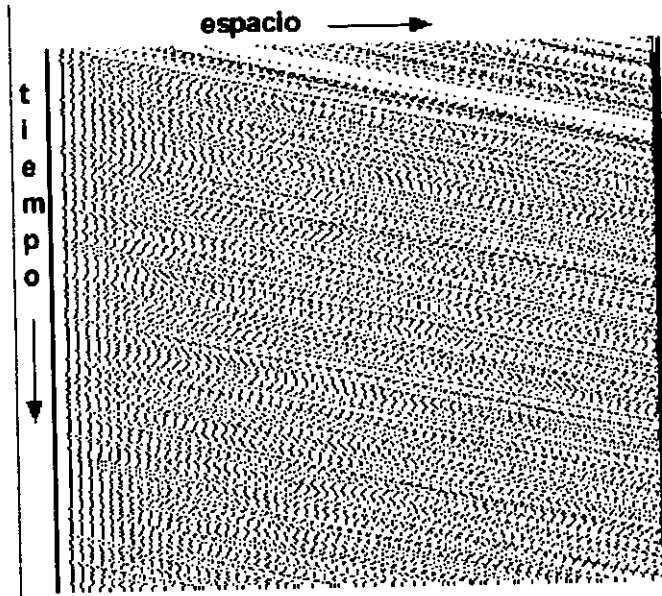


Figura 2.9: Diagrama espacio tiempo, para  $\rho_{ini} = 0.2$ ,  $R = 0.2$ , AC abierto. No se presentan congestioanmientos. (código de colores igual que las gráficas anteriores)

El analizar los diagramas espacio-tiempo para diferentes valores de los parámetros iniciales nos permitio notar la dependencia que existe entre la densidad inicial asignada y el comportamiento del ruido  $R$ . Dada la condición  $R < 0.50$ , y si  $\rho_{ini} > 0.5$ , el sistema empieza a ser sensible al ruido, es decir, la densidad determina los congestionamientos. Esto se observa claramente en las Figs. 2.9 y 2.10 que corresponden a  $L = 400$ ,  $R=0.2$ ,  $\rho_{ini} = 0.2$  y  $0.7$  respectivamente. Para  $R > 0.5$  el flujo libre y congestionado puede ser posible dependiendo de  $\langle v_{ini} \rangle$  y del comportamiento aleatorio del AC, es decir para experimentos diferentes con las mismas condiciones iniciales, el estado del AC puede ser flujo libre o congestionado. Esto lo podemos observar en las Figs 2.11 y 2.12, donde presentamos los diagramas espacio tiempo para dos experimentos con las mismas condiciones iniciales  $R = 0.6$ ,  $L = 400$ ,  $\rho_{ini} = 0.2$ . En el diagrama de la Fig. 2.12, se pueden notar la formación de

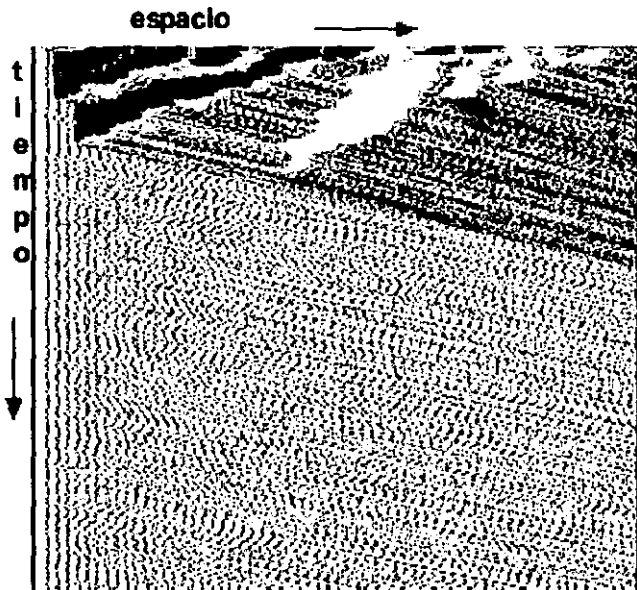


Figura 2.10: Diagrama espacio tiempo, para  $\rho_{ini} = 0.7$ ,  $R = 0.2$ , distribución de velocidad uniforme, AC abierto. Se observa que al inicio existe un congestionamiento debido a la densidad alta, pero conforme el sistema evoluciona, como el ruido es pequeño el sistema llega a un flujo libre (código de colores igual que las gráficas anteriores)

pequeños cúmulos en el AC abierto y como algunos vehículos se desprenden.

Debido a esta variación del estado final que se presenta en el AC abierto bajo las mismas condiciones iniciales, decidimos hacer un análisis de las velocidades y densidades promedio para cada experimento y ver la tendencia de que los congestionamientos se presenten.

Para ello, realizamos diferentes experimentos por separado con los mismos valores para  $\rho_{ini}$ ,  $v_{ini}$ ,  $R$  y  $L$ . Con los datos obtenidos hicimos unas gráficas que relacionan la densidad y la velocidad promedio final  $\langle v \rangle$ , del estado final del AC para diferentes velocidades iniciales y un mismo valor de  $R$  tal y como los que mostramos en las gráficas de las Figs. 2.13 a), b), c), d). Estos diagramas corresponden a experimentos para  $\langle v_{ini} \rangle$  1.5, 2.5 y 4.2,

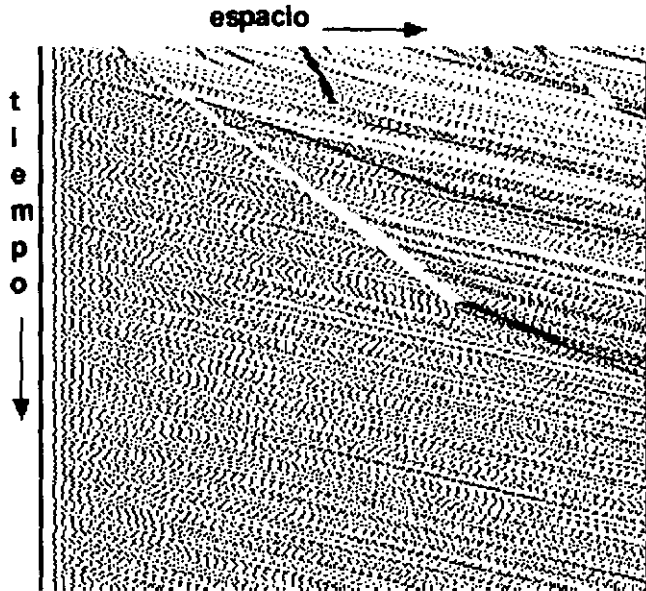


Figura 2.11: Diagrama espacio tiempo para  $R = 0.6$ ,  $\rho_{ini} = 0.2$ , velocidad promedio uniforme, para el AC abierto. Se observa que no se presenta un congestionamiento.

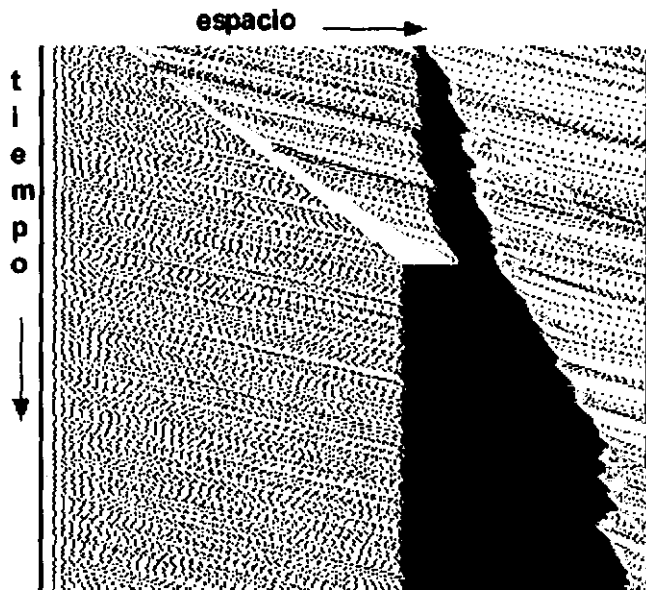


Figura 2.12: Diagrama espacio tiempo para  $R = 0.6$ ,  $\rho_{ini} = 0.2$ , para el AC abierto, mismas condiciones de la Fig. 2.11. Aún cuando las condiciones iniciales son iguales a los de la figura anterior, un cambio en la elección de estado inicial provoca que se genere una región congestionada.



con un ruido  $R = 0.6$ . En estas figuras se aprecia que a menor velocidad promedio inicial, existe una variación mayor de estados finales. Si la velocidad promedio inicial es menor, el número de vehículos con velocidad baja aumenta. En este ejemplo en particular la densidad que colocamos como configuración inicial permite que exista un espacio de aproximadamente 4 celdas entre los vehículos (suficiente para que tuvieran velocidades altas). Además, el ruido es mayor de 0.5 y a medida que existen más vehículos con velocidad baja, el ruido  $R$  genera más variaciones en los estados finales, dependiendo de la celda que se elija aleatoriamente como punto de partida y de su estado actual (velocidad).

Configuración inicial	Edos. libre	Edos. congestionados	Mezcla
$R \leq 0.5$	x		
$R = 0.6, \rho_{ini} \geq 0.5, \langle v_{ini} \rangle < 4$	x		
$R = 0.8, \rho_{ini} > 0.25, \langle v_{ini} \rangle < 4$	x		
$R = 0.8, \rho_{ini} \geq 0.8, \langle v_{ini} \rangle > 4$	x		
$R = 0.9, \rho_{ini} \leq 0.5, \langle v_{ini} \rangle > 4^*$	x	x	
$R = 0.6, \rho_{ini} < 0.5, \langle v_{ini} \rangle < 3$	x	x	x
$R = 0.6, \rho_{ini} < 0.8$ y $\langle v_{ini} \rangle > 4$	x	x	
$R = 0.8, \rho_{ini} \leq 0.25$	x	x	
$R = 0.8, \rho_{ini} < 0.8, \langle v_{ini} \rangle > 4$	x	x	
$R = 0.9, \rho_{ini} > 0.5$		x	

Tabla 2.1: Tabla del comportamiento del sistema abierto, las x's indican los estados que se encontraron para las condiciones iniciales del AC

Además, el análisis de diagramas de densidad promedio con respecto al tiempo como el de la Fig 2.14 también muestran el comportamiento del AC. Esta gráfica corresponde  $R = 0.6, L = 400, \rho_{ini} = 0.2, \langle v_{ini} \rangle \sim 2.5$ . Cada línea graficada en la misma representa la densidad promedio de un experimento diferente con respecto al tiempo. Al igual que en las gráficas de velocidad promedio con respecto a la densidad, mostramos diferentes estados finales del AC (pero con las mismas condiciones iniciales). Este desempeño, nos indica la presencia de tres estados: un estado con flujo libre (densidad promedio menor o igual de

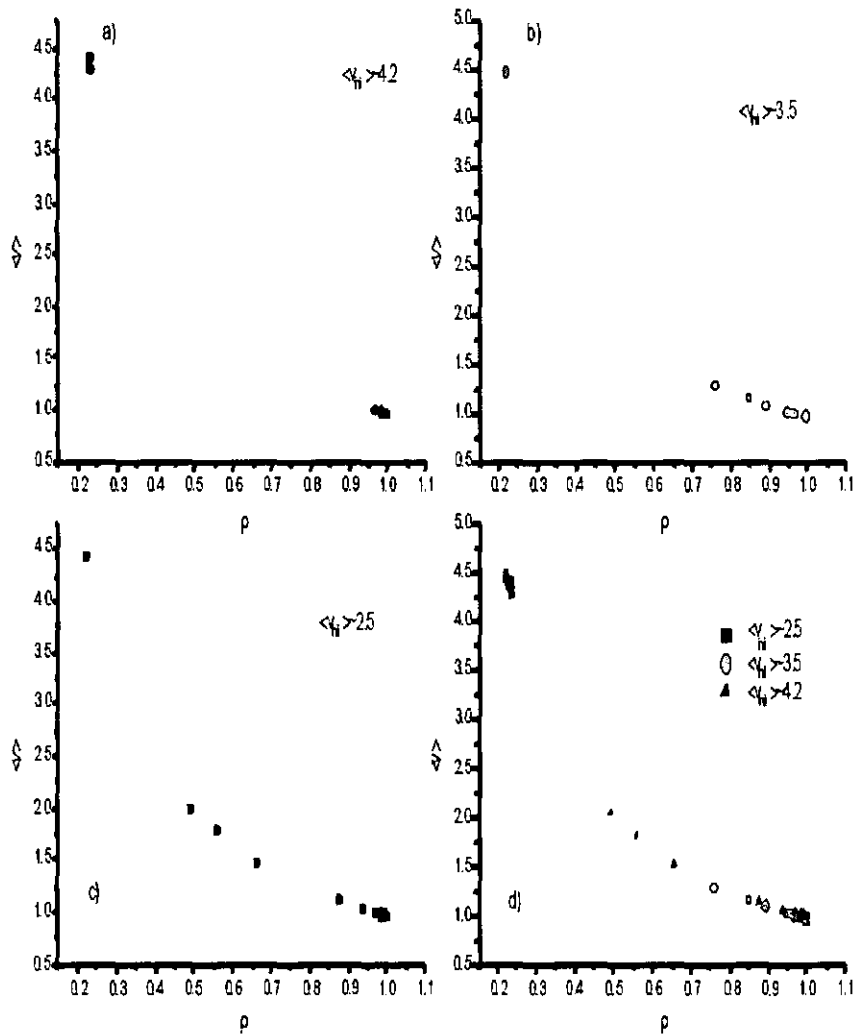


Figura 2.13: Diagrama velocidad vs densidad promedio. Cada punto en una gráfica representa un experimento con las mismas condiciones iniciales para:  $\rho_{ini} = 0.3$ ,  $R = 0.6$ ,  $L = 400$ . La gráfica a), b) y c) corresponden a  $\langle v_{ini} \rangle$  aproximadamente 4.3, 3.5 y 2.5 respectivamente. La gráfica d) es una combinación de ellas. Se aprecia que a menor velocidad inicial mayor variación en los estados finales del AC abierto para cada experimento.

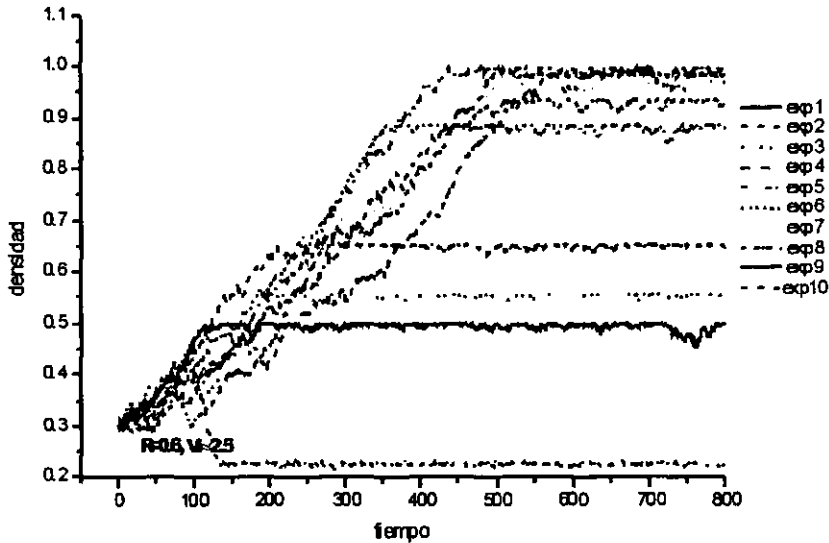


Figura 2.14: Gráfica  $\rho$  vs  $t$  para  $\rho_i = 0.3$ ,  $L = 400$   $\langle v \rangle_{ini} \approx 2.5$  respectivamente, resultantes de la evolución del AC abierto. Cada línea en la gráfica representa la evolución de la densidad con respecto al tiempo para una simulación.

0.3), un estado congestionado (densidad mayor de 0.7) y un estado mezcla de ambos estados como el caso de la Fig. 2.12 (densidad promedio mayor de 0.3 y menor o igual de 0.7).

Realizamos simulaciones para diferentes parámetros iniciales del AC:  $\rho_{ini}$ ,  $R \in [0, 1]$  y  $\langle v \rangle_i \in [2, 5]$ . Lo que nos permitió obtener el comportamiento del sistema especificado en la tabla 2.1.

El comportamiento descrito en la tabla 2.1, nos hace recordar lo que normalmente observamos en las carreteras, en donde a un instante dado el flujo vehicular puede ser libre y en otro totalmente congestionado. De hecho, aún cuando podría parecer que estos estados diferentes no son relevantes para la planeación del tránsito, la varianza de los estados permite introducir criterios para la optimización del tránsito vehicular

Por último, para el AC abierto en lugar de los diagramas fundamentales (que no se pueden realizar debido a que la densidad varía) realizamos un estudio del comportamiento del flujo con respecto al tiempo. En la Fig. 2.15, se muestran algunos ejemplos de resultados de este análisis. La gráfica corresponde a un AC abierto con las condiciones iniciales  $\rho_{ini} = 0.4$ ,  $L = 400$ ,  $(v_{ini})$  con distribución uniforme para diferentes valores del ruido  $R$ . Encontramos que para aquellos valores de  $R$  donde existen diferentes estados como en c) y d), el comportamiento del flujo es tal que los estados libres inician por arriba de 1 y los congestionados por abajo de 1. Sin embargo, en el estado permanente ambos valen 1. Esto es consecuencia del comportamiento del sistema, de tal forma que la velocidad promedio tiende a ser el inverso de la densidad existente, como se observa en la Fig. 2.13.

### 2.3 Comentarios del capítulo

En este capítulo, el cambio en la regla de desacelerado en nuestro modelo, nos permitió obtener el corrimiento esperado en la transición de fase entre flujo libre y congestionado al modelar vehículos automatizados. En el caso del circuito de anillo encontramos que el congestionamiento puede formarse espontáneamente aún en densidades bajas si el ruido existente en el sistema es más grande. Al comparar nuestro modelo con el NS se obtuvo que el flujo máximo ocurre a una densidad mayor, debido a la consideración de vehículos automatizados. Y la sensibilidad del sistema al ruido disminuye para nuestro AC, es decir, el modelo es menos sensible al ruido. Estos dos resultados dos resultados indican que efectivamente la automatización vehicular, en particular, la introducción de un dispositivo que permita conocer la velocidad del vehículo de adelante aumenta la capacidad en

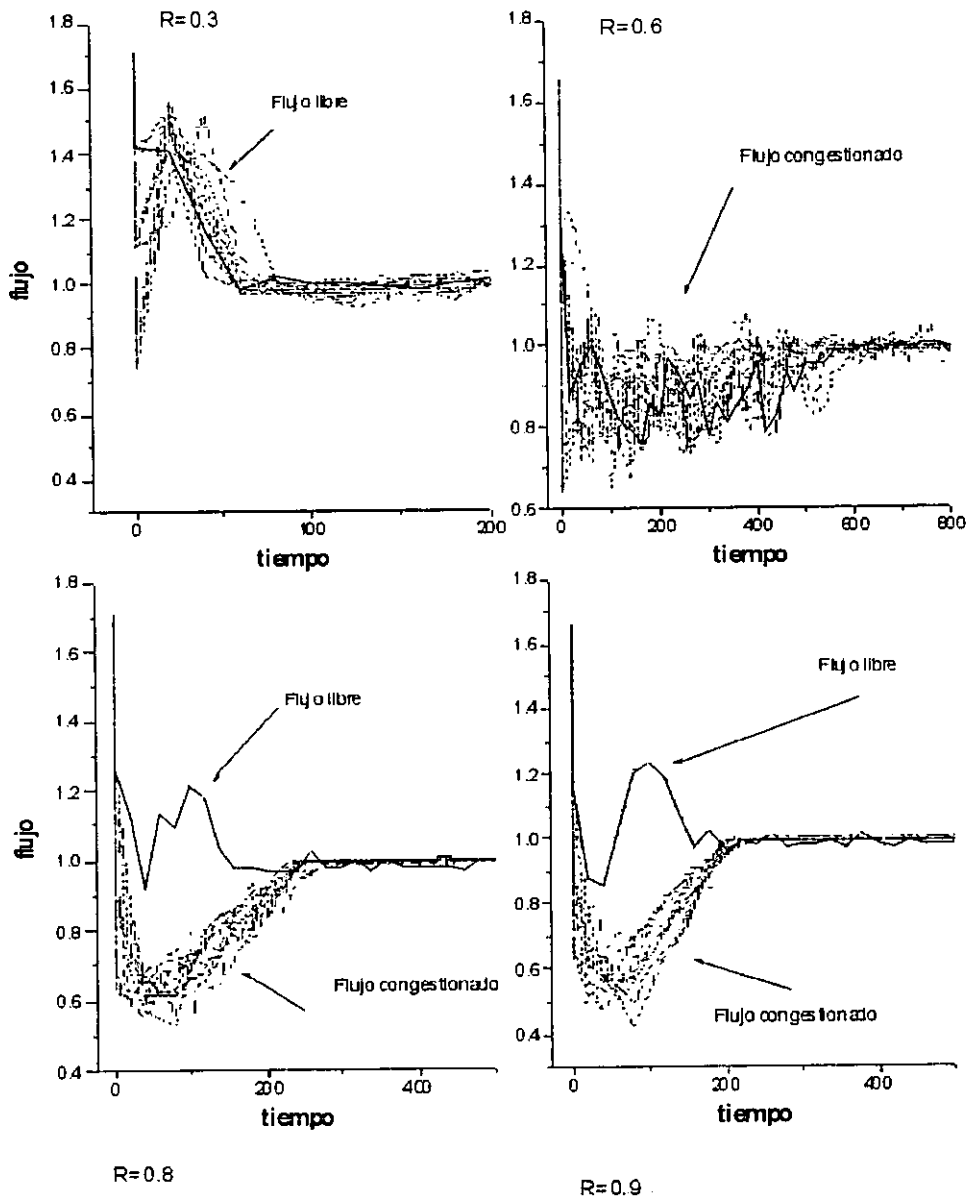


Figura 2.15: Gráficas  $q$  vs *tiempo* para el AC abierto con  $\rho_{ini} = 0.4$  para diferentes valores de  $R$ . Cada línea de las gráficas corresponde a un experimento. Cuando el ruido es pequeño, el flujo tiende a incrementarse por arriba de 1. Cuando el flujo es congestionado, se decrementa por abajo de 1 en el tiempo. Esta separación de fases se presenta antes de alcanzar el estado permanente.

carreteras debido a la reducción en el espacio necesario entre los vehículos. Pero lo más importante, es el hecho de que un vehículo conozca la velocidad del de adelante y la considere junto con la distancia para desacelerarse puede permitir anular el estancamiento y reducir congestionamientos; y por lo tanto incrementar el flujo vehicular. Desde luego que este aumento en el flujo vehicular, se debe a la consideración de la velocidad en el paso de desaceleración del modelo, demás que es de esperarse al considerar este tipo de vehículos automatizados.

Además, si se procura mantener una cierta velocidad en todos los vehículos existentes es posible evitar que existan congestionamientos inesperados que produzcan un estancamiento. Aún en el caso de que todos los vehículos no entraran con la misma velocidad, es posible optimizar la velocidad máxima alcanzable y la densidad máxima posible para evitar un estancamiento, lo que permite que no existan vehículos estacionados. Nuestros resultados indican que si el ruido es menor que 0.2 es posible tener una densidad máxima de 0.7 en el que la velocidad promedio es mayor de 4. En el caso de modelo abierto, obtuvimos una tabla de condiciones para los diferentes estados del sistema, lo que puede permitir en un momento dado determinar el tiempo necesario para que un conductor llegue a su destino dependiendo de las condiciones existentes en el circuito. También notamos como el factor de ruido reduce notablemente el flujo. De hecho encontramos que el sistema es insensible al parámetro de ruido si las velocidades de inicio se procuran altas. El valor de ruido determina el tiempo en que el sistema alcanza un estado permanente, es decir, el tiempo de relajación.

Desde un punto de vista general es importante determinar si existe transición de

fase, flujo libre a flujo congestionado y para ello, en el capítulo siguiente estudiamos en detalle el AC abierto en términos de las variables promedio.

## Capítulo 3

# Posible existencia de autorganización en un ACP para tránsito vehicular: El desempeño promedio.

En el capítulo anterior, obtuvimos que apartir de las mismas condiciones iniciales se pueden generar diversos estados finales del AC. También encontramos una posible transición de fase para el AC abierto. Esto nos motiva a realizar el análisis promedio del mismo. Así, en este capítulo, presentamos un estudio del tránsito vehicular utilizando el AC probabilístico (ACP) que proponemos para una geometría abierta. El estudio está basado en las reglas microscópicas del AC descritas en el capítulo anterior, pero analizando el promedio de un conjunto de configuraciones finales que nos permitieran determinar el comportamiento



macroscópico de la densidad y la velocidad. Para analizar el comportamiento, aplicamos técnicas de física estadística a los datos obtenidos de la simulación del modelo. Este análisis nos permitió determinar transiciones de fase de flujo libre a congestionado en términos del ruido aplicado al sistema diferente a la que se presenta en los modelos con AC con condiciones de frontera periódicas.

### 3.1 Descripción de la simulación promedio del modelo

Nos referimos a la simulación promedio, como aquella que resulta de promediar el estado permanente de una muestra de configuraciones finales del AC, partiendo de las mismas condiciones iniciales. Sabemos que existen diversas técnicas para el tratamiento de procesos dinámicos con variables estocásticas, tal como la teoría de campo medio y el método de simulación Monte Carlo.

El método de simulación Monte Carlo fue creado para resolver integrales que no se pueden resolver por métodos analíticos, para resolver estas integrales se usaron números aleatorios. Posteriormente se utilizó para cualquier esquema que emplee números aleatorios, usando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas, el cual es usado para resolver ciertos problemas **estocásticos** y **deterministas**, donde el tiempo no juega un papel importante [47]. Por lo tanto es un proceso computacional que utiliza números aleatorios para obtener una salida, por lo que en vez de tener entradas con puntos dados, se asignan distribuciones de probabilidad a alguna o todas las variables de entrada. Esto generará una distribución de probabilidad para una salida después de una corrida de la simulación.

En lo que respecta a la aplicación del método Monte Carlo a los ACs, se utiliza para asignar las configuraciones iniciales aleatorias y determinar la densidad a un paso de tiempo  $t$  con base en la densidad calculada. De hecho, la idea inicial al utilizar ACs para modelar el desempeño del tránsito vehicular fue precisamente con estos métodos [49]. Recordemos que como se mencionó en el capítulo 1, el AC del modelo NS cumple la regla 184 de Wolfram [72] para el caso determinista, cuando  $v_{max} = 1$  y  $R = 0$ . En este caso, por medio de números aleatorios se determinan las configuraciones iniciales y se le da el valor a la densidad (partiendo de 0 hasta 1). Posteriormente, se aplican las reglas  $N$  veces y se mide el flujo promedio y la densidad (que no cambia en el tiempo) y se grafica. Con este método se generan las gráficas del diagrama fundamental (flujo vs. densidad).

Sin embargo, el AC que enfocamos en este capítulo es no determinista, es decir, tiene muchas variables aleatorias en las reglas de evolución. Sus condiciones de frontera son abiertas, la densidad puede variar en el tiempo. Debido a que el método Monte Carlo no es adecuado para describir situaciones de no equilibrio, como los casos permanentes que estudiamos, no usamos esta metodología.

El diagrama de transición de fase que presentaremos en este capítulo está determinado por el ruido  $R$ , como veremos  $R$  juega un papel similar al de la temperatura en sistemas reales, como los flúidos. Como ya dijimos, el estudio realizado en el capítulo anterior para experimentos individuales, nos mostró que es posible obtener diferentes configuraciones finales para un mismo valor de los parámetros iniciales; así, estamos interesados en determinar una muestra que nos permita predecir el comportamiento promedio del sistema. La pregunta ahora es ¿qué tan grande debe ser la muestra de datos para que su promedio

se pueda considerar un valor representativo?

Así, el análisis que presentaremos a continuación, es realizado con la finalidad de obtener una muestra de experimentos no correlacionados, para representar el comportamiento promedio del sistema.

### 3.1.1 La importancia de la definición adecuada de la muestra

Es importante hacer notar que existen dos formas de ver el sistema: La primera, es considerar un sistema microscópico, el cual está caracterizado por variables como posición  $x_i$ , velocidad de la partícula en esa posición  $v_i$ , y el tiempo; mientras que la segunda es una perspectiva mesoscópica caracterizada por la distribución de velocidades  $F(v, t)$  que puede adoptar el sistema, donde  $v \in \{v_{\min}, \dots, v_{\max}\}$ . La distribución de velocidades  $F(v, t)$  es una función que nos indica cuantos sitios tienen la velocidad  $v$  al tiempo  $t$ , sin importar la ubicación de los mismos. La distribución de velocidades, es una variable que utiliza la información microscópica del AC pero elimina las variaciones en la posición para determinar el desempeño del mismo. Debe notarse que  $F(v, t)$  dependerá no sólo de  $\rho$  y  $\langle v \rangle$  (densidad y velocidad promedio respectivamente), sino del trazado mismo de la carretera, esto es, de la presencia de curvas, subidas o bajadas, factores que serán motivo de otro estudio.

Es importante tener en mente que un mismo estado macroscópico (promedio) puede ser generado por un conjunto de diferentes estados microscópicos. Por ejemplo, en un circuito de longitud 100 con una densidad del 10%, es posible tener una velocidad promedio 3.5, si existen 5 vehículos con velocidad 3 y 4, o 5 vehs. con velocidad 2 y 5 con velocidad 5. Nótese entonces, que aquí no importa donde estaban situados los vehículos, lo importante es cuántos eran y qué porcentaje de estos tienen la velocidad  $v$ . Es esta visión

macroscópica una de las de interés para el diseño de carreteras, pues no importa el estado de una celda  $i$  al tiempo  $t$ ,  $\{\alpha_i(t)\}$ , sólo cuantas están en el estado  $v$ , para saber cual será la distribución de velocidades  $F(v, t)$  o en su defecto en una forma macroscópica la velocidad promedio con la que se mueven los vehículos.

El determinar parámetros promedios del comportamiento de un sistema es adecuado para trabajos de diseño y optimización del mundo real. Mientras que el estudio de las partículas individuales es apto para estudios de simulaciones donde el desempeño aleatorio puede ser representado mediante técnicas probabilistas. En el estudio presentado a continuación, hacemos una combinación de ambos y utilizamos técnicas estadísticas para determinar una muestra que aproxime el comportamiento del sistema.

### 3.2 El comportamiento promedio: Resultados

Así entonces, el papel que juega la implementación computacional del modelo de AC es determinante. Ya que para obtener una muestra adecuada, se ejecuta varias veces el programa resultante del AC con base en las reglas propuestas en el modelo, que es equivalente a repetir varias veces un experimento en carreteras o tomar varias fotos.

Para cada ejecución se asignan la misma  $\langle v_{ini} \rangle$ ,  $L$ ,  $\rho_{ini}$  y valor de  $R$ . Cada ejecución se deja evolucionar, hasta que se presenta un estado a partir del cual el flujo en promedio permanece en un estado constante en el tiempo, es decir, las fluctuaciones en el tiempo son pequeñas y lo denominaremos permanente (desde luego, sin aplicar variación en los parámetros iniciales) y la distribución de velocidades no cambia. La configuración final de cada ejecución, es tomada como un elemento de la muestra. Durante cada ejecución, se

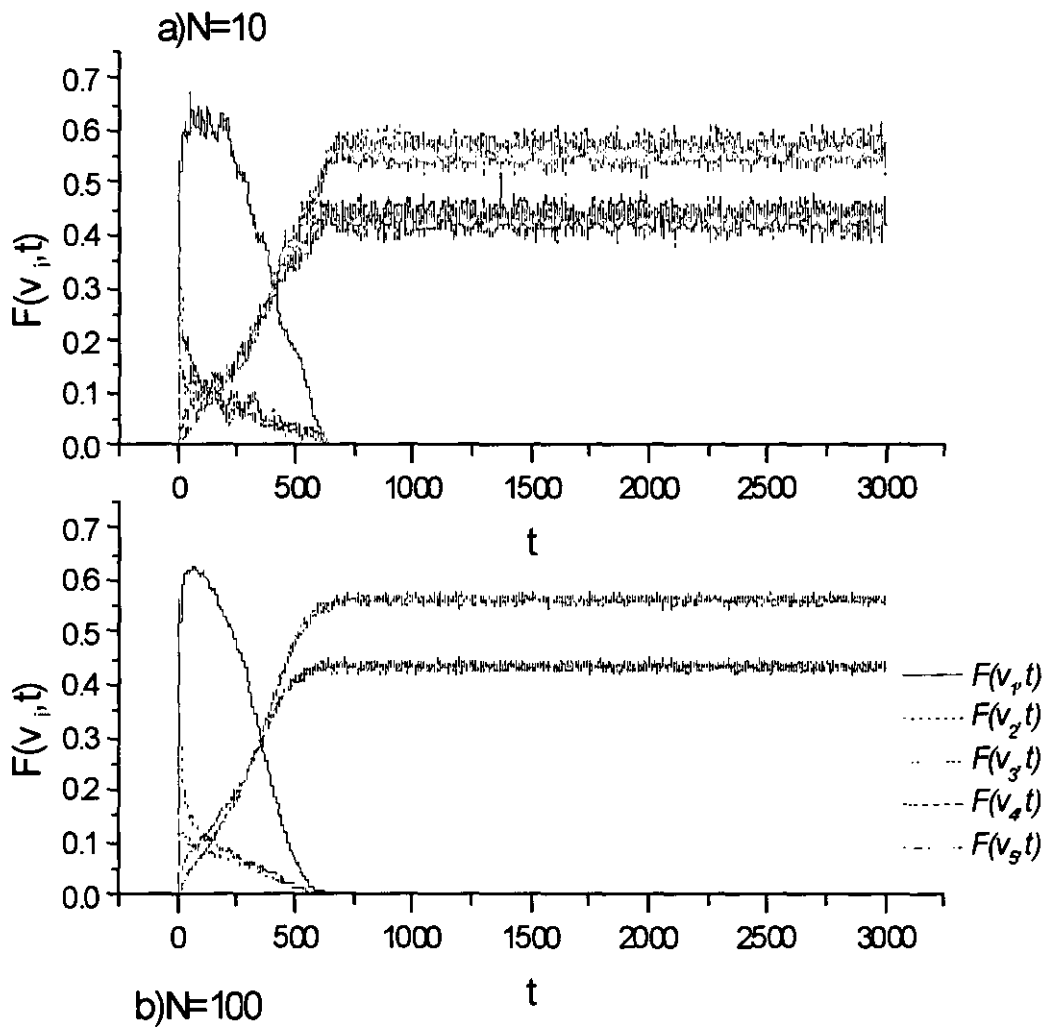


Figura 3.1: Distribución de velocidades  $F(v_i, t)$ ,  $L = 400$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $R = 0.4$ , para  $N = 10$  y 100 elementos del ensamble respectivamente para el AC abierto propuesto. Se observa como las curvas se suavizan a mayor número de elementos.

calcula la densidad, velocidad y las distribuciones de velocidad promedio.

Para obtener el estado promedio del sistema resultante de las configuraciones finales de cada uno de los elementos de la muestra se realiza lo siguiente:

1. Primeramente, para cada elemento de la muestra, se calcula la frecuencia de aparición de cada una de las velocidades en el sistema en cada intervalo de tiempo (a partir del estado permanente) sumando el número de veces que aparece una velocidad y dividiendo entre el número total de elementos del AC ( $n$ ).
2. Posteriormente, una vez obtenido el comportamiento promedio de cada elemento de la muestra, se suman entre si las distribuciones de velocidad para cada uno de ellos.
3. Por último, se divide cada una de las distribuciones entre el número total de elementos de la muestra ( $N$ ).

Para determinar qué tan grande debe ser la muestra de medidas para que su promedio se pueda considerar representativo del sistema, se comparan las distribuciones de velocidad en función del tiempo para simulaciones con diferente número de elementos de la muestra. En las gráficas de la figura 3.1, se ilustra el comportamiento de las distribuciones de velocidad, para conjuntos representativos de 10 y 100 elementos respectivamente (esto corresponde a realizar el promedio de  $N$  ejecuciones del programa). Vemos que al aumentar el número de elementos de la muestra ensamble las distribuciones se suavizan.

Como ya lo mencionamos, el desempeño aleatorio del AC puede ocasionar que una variación en la elección del estado inicial genere diversas configuraciones finales. Por ello, también se realizó un análisis estadístico para diferentes muestras independientes con el

mismo número de elementos de la muestra  $N$ , para ver si todas aproximadamente llegaban a un mismo comportamiento promedio final. Si la variación de resultados no es significativa el número de la muestra es una buena elección. El análisis estadístico de este tipo nos permitió determinar a 100 como un número de elementos de la muestra adecuado.

Una vez de que determinamos el número de elementos adecuado para formar parte de la muestra, podemos pasar al análisis de resultados para definir el comportamiento macroscópico del AC probabilístico.

### **3.2.1 Análisis de resultados: Análisis cualitativo y cuantitativo**

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos con base a la elección de una muestra de las configuraciones iniciales del AC. Es importante mencionar, que estos resultados se obtuvieron solamente para el enfoque del ACP con condiciones de frontera abierta. La densidad vehicular no se conserva en el tiempo y un vehículo puede entrar o salir del sistema si excede la frontera cada paso de tiempo. El modelo utilizado, es el mismo que describimos en el capítulo anterior para el ACP abierto.

Primeramente presentamos un análisis cualitativo para posteriormente dar aspectos cuantitativos del comportamiento del tránsito vehicular.

#### **Análisis cualitativo.**

Para simular el AC, seleccionamos sistemas de tamaño  $L$  de 200 a 10,000 unidades. Como información del tiempo de evolución requerido para alcanzar un estado permanente de los parámetros, mencionamos que a medida que  $L$  crece el número de pasos de tiempo necesarios para alcanzar el estado permanente del flujo vehicular se incrementa. En este

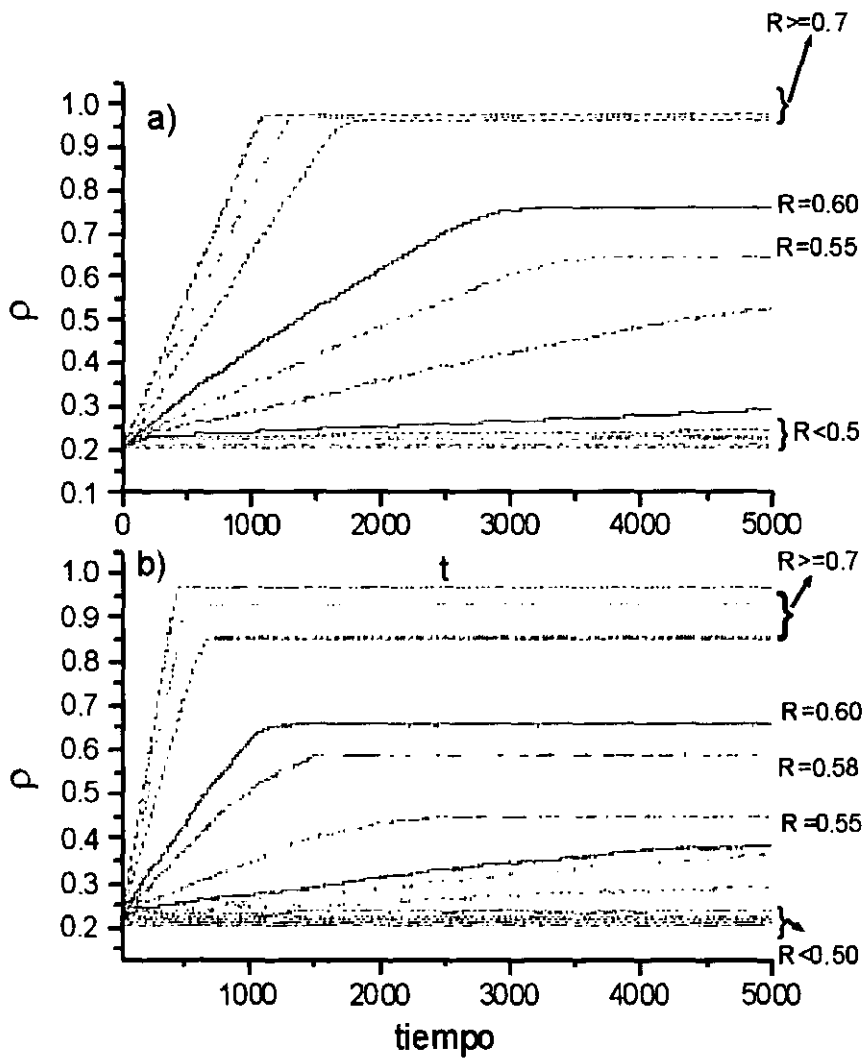


Figura 3.2: Relación  $\rho$  vs *tiempo* que muestran las densidades como resultado de promediar 100 simulaciones del autómata abierto para  $\rho_{ini} = 0.2$ , cada línea corresponde al promedio de una muestra con diferente valor de ruido: a) Corresponde a  $L = 1000$ . (b) Muestra el resultado para  $L = 400$ .



trabajo, presentamos resultados para circuitos de  $L = 400, 1000$  y  $10,000$ . Empezaremos por

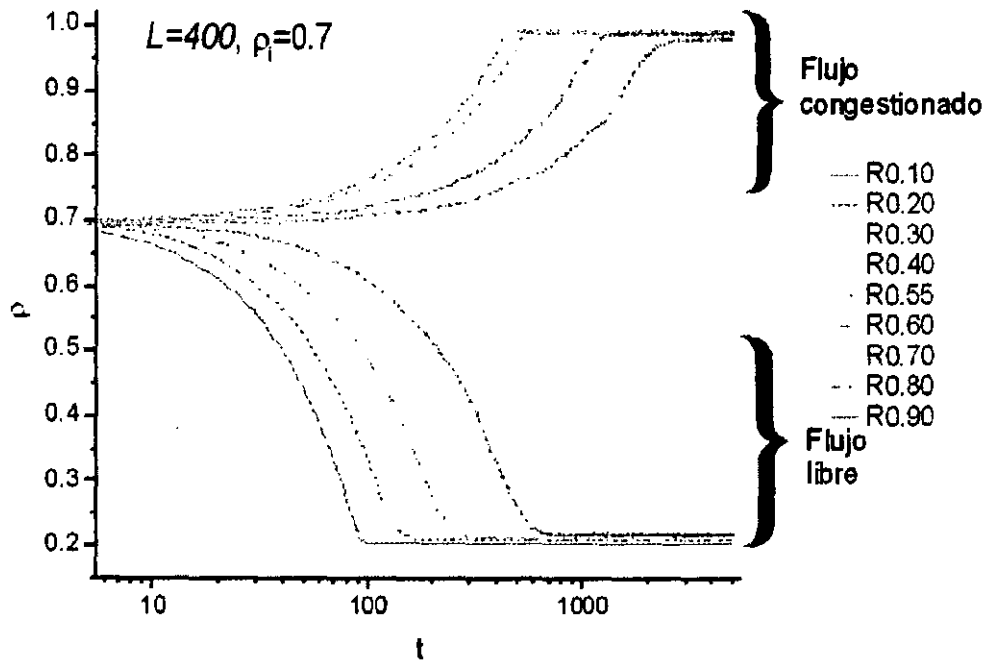


Figure 3.3: La gráfica corresponde a  $\rho_{ini} = 0.7, L = 400$  del AC abierto promediado. Se observa que sólo se producen estados del autómata de flujo libre y congestionado, pero no intermedios.

mostrar la evolución de la densidad del AC con respecto al tiempo. En las figuras 3.2 a), b), notamos que el tiempo requerido por el sistema para alcanzar un estado permanente varía dependiendo de la longitud  $L$ , la densidad promedio inicial ( $\rho_{ini}$ ) y el valor del ruido aleatorio  $R$ . En particular, observamos que para  $R = 0.4, L = 400$ , se requiere aproximadamente 160 tiempos mientras que para  $R = 0.4, L = 1000$  se requieren 260 tiempos (iteraciones) aproximadamente; sin embargo, la densidad promedio final del AC es  $\rho < 0.3$  y el flujo es libre en ambos casos.

Por otra parte, si el valor del ruido  $R$  es mayor de 0.5, se pueden generar dos fases. Una fase donde  $\rho$  final es  $0.4 \leq \rho < 0.7$  con una velocidad promedio  $\langle v \rangle$  que varía entre 2 y 3.5. Y una fase totalmente congestionada, donde  $0.7 < \rho \leq 0.99$ , con  $\langle v \rangle \approx 1$  (como se observa en la Fig.3.2). En esta última fase, los pasos de tiempo requeridos son muy cortos conforme aumenta el valor de  $R$ , lo que nos indica que la probabilidad de tener estados en flujo libre tiende a cero.

Los resultados cualitativos de la existencia de una fase intermedia, nos hace pensar que precisamente es en esta región de valores de  $R$  donde existe la transición entre flujo libre y congestionado; ya que la dispersión de los valores promedio aumenta, es decir, existen diferentes estados permanentes: libres, totalmente congestionados y además aquellos con  $\langle v \rangle$  intermedia (de 3.5). La fase intermedia se debe a que existen segmentos del circuito con flujo congestionado y libre; desde un punto de vista termodinámico se podría mencionar la coexistencia de fases. Sin embargo, esta dispersión se va perdiendo conforme  $R$  crece hasta llegar al congestionamiento. Tenemos que enfatizar, que esta transición de fase ocurre aún para  $\rho_{ini} < 0.5$ , es decir, independiente de la densidad inicial, pero determinada por el valor de  $R$  mayor de 0.5.

El analizar  $\rho_{ini} \geq 0.5$  forma parte también de nuestro estudio. Como ejemplo, el caso de  $\rho_{ini} = 0.7$  que se muestra en la Fig. 3.3, sólo tenemos flujo libre ó congestionado (recordemos que en capítulo anterior, ya no existían estados intermedios en el autómata sin promediar para densidades mayores de 0.5 y velocidad inicial menor o igual que 4; como se aprecia en la Fig. 3.3). Desde luego, que esto indica que la transición de fase entre flujo libre y congestionado es para un valor de  $R$  menor.

Además, en la figura 3.3, notamos que si  $R = 0.5$ , aún el estado permanente no se ha alcanzado, y aparentemente  $\rho$  tiende a ser  $\geq 0.4$ ; sin embargo, el estado permanente final es un autómata con flujo libre. Esto se debe a que el valor del ruido  $R$  está en un valor intermedio, lo que implica que un vehículo tiene la misma probabilidad de disminuir o no su velocidad, por lo que se presentan los congestionamientos temporales hasta que se establece, como se observa desde la perspectiva microscópica, en el diagrama espacio tiempo de la Fig. 3.4.

Notamos que en el sistema abierto diferentes distribuciones de velocidad inicial y densidades arbitrarias producen diferentes estados permanentes para un  $R$  dado, caracterizados por una densidad promedio y distribución de velocidad que muestran transiciones de fase entre flujo libre y congestionado. Además, como veremos en la siguiente subsección,  $R$  determina esta transición de fase en el autómata, y a través del análisis cuantitativo determinamos el cambio de fase.

### Análisis cuantitativo

En esta subsección interpretamos los resultados cuantitativos de las velocidades y densidades promedio de los vehículos en el estado permanente y analizamos las diferentes situaciones de la transición de fase del flujo vehicular, para el caso en que la velocidad inicial es una distribución uniforme ( $\langle v \rangle \simeq 3$ ). En las Figs. 3.5 y 3.6, mostramos la transición de fase para el AC abierto. La densidad y velocidad promedio son graficadas como una función del ruido  $R$ . En la gráfica 3.5 se presenta esta relación para sistemas de tamaño  $L = 400$  y  $1000$  para una misma  $\rho_{ini} = 0.2$ . Las curvas coinciden hasta antes del punto de transición, lo que indica que en la fase de flujo libre el sistema no depende de la longitud del autómata.

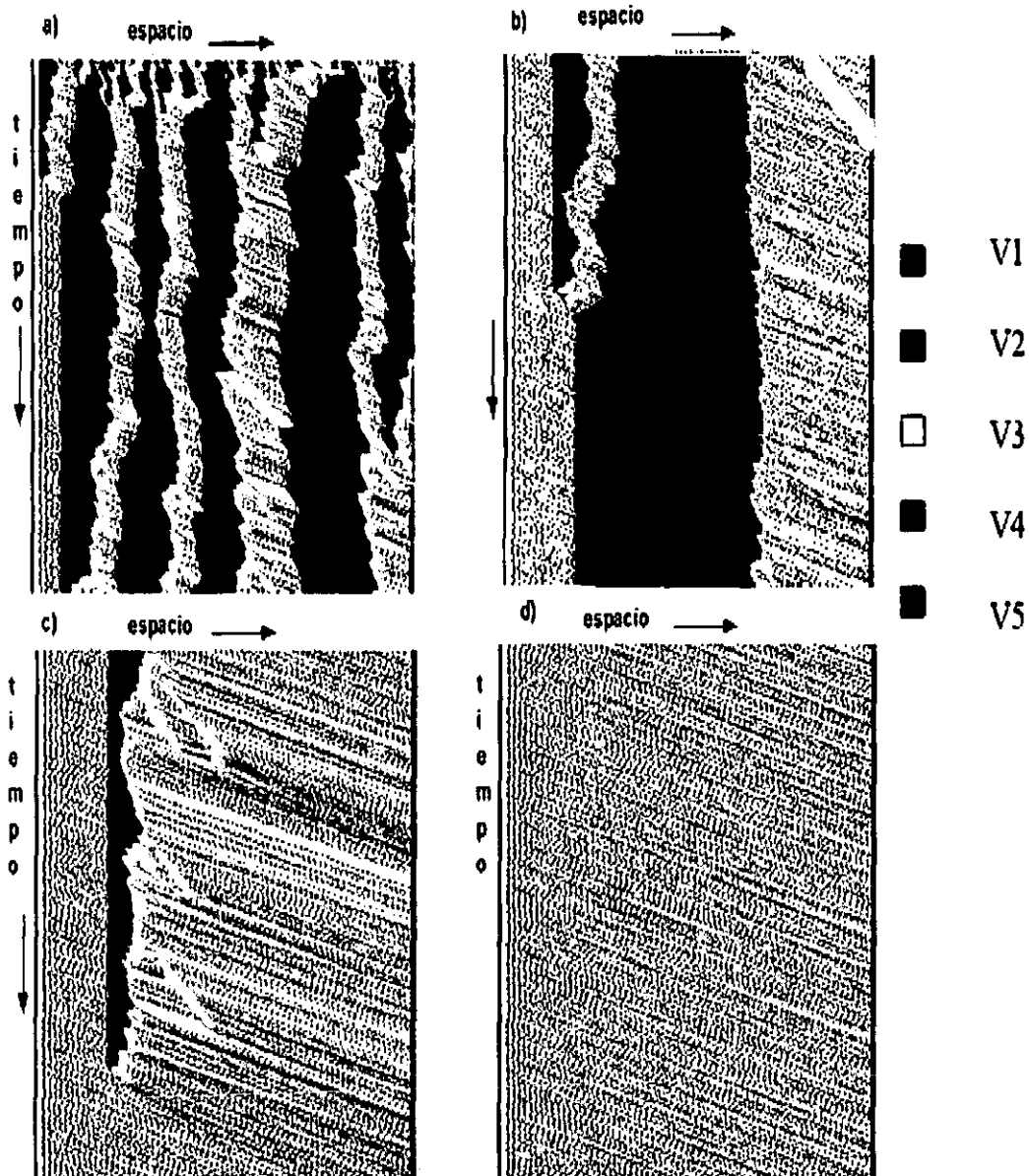


Figura 3.4: Diagramas espacio\_tiempo. Estos diagramas corresponde a una misma simulación,  $R = 0.5$ ,  $\rho_{ini} = 0.7$ ,  $L = 300$  a diferentes tiempos de evolución. El orden de evolución es a), b), c), d). Se aprecia como se genera un congestionamiento momentáneo en a), b) pero a partir del tiempo de evolución c) el sistema empieza a alcanzar un estado de flujo libre.

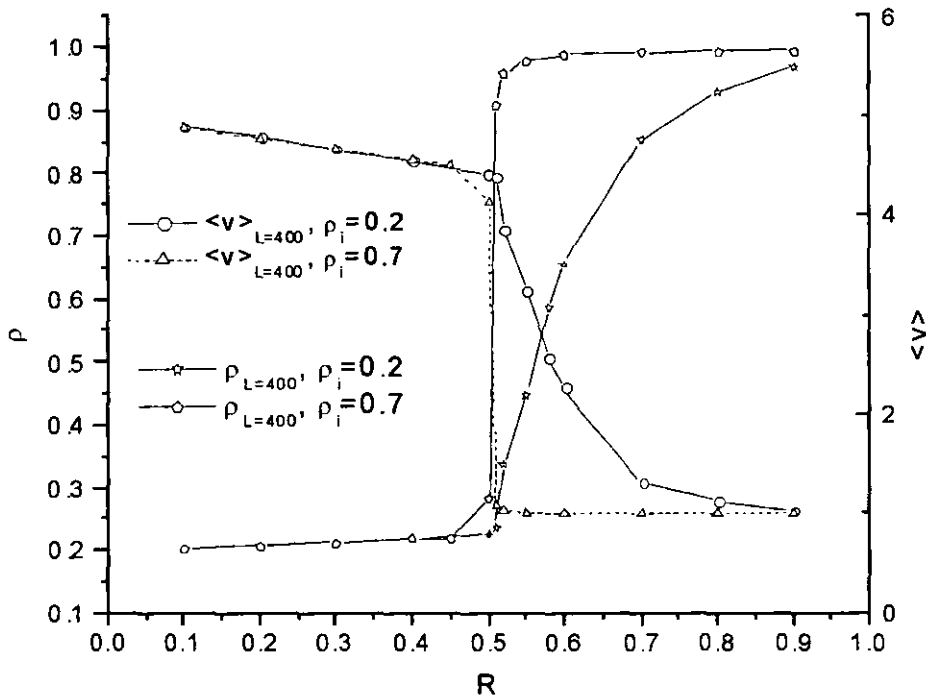


Figura 3.5: Transición de fase del flujo vehicular para el ACP abierto. La densidad y velocidad promedio como una función de  $R$  para  $L = 400$  para  $\rho_{ini} = 0.2$  y  $0.7$ . En la gráfica muestra que las densidades y velocidades promedio del estado permanente, para un mismo valor de  $R$  y  $L$  son independientes de la densidad inicial antes del punto de transición.

Además en la gráfica 3.6 de esta figura, se observa esta misma relación para  $L = 400$ , pero para diferentes  $\rho_{ini}$ ; se observa que existe un único estado permanente del autómata, el cual es independiente de las condiciones iniciales para un mismo valor de  $R$  antes del punto de transición. Lo que permite confirmar que hasta antes del punto de transición, el autómata abierto está caracterizado por una única densidad y velocidad promedio independientemente de las condiciones iniciales. Una fuerte evidencia de transición de fase entre flujo libre y congestionado es observada en la Fig. 3.6. Aproximadamente esta transición se presenta en

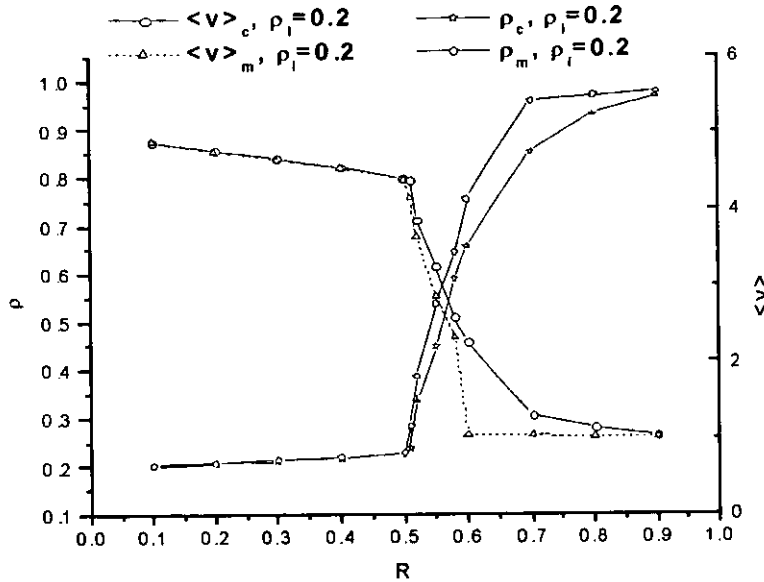


Figura 3.6: Transición de fase del AC abierto como una función de  $R$ .  $L_c = 400$  y  $L_m = 1000$ . Se observa que existe una independencia del tamaño de  $L$  hasta antes del punto de transición.

$R_c \approx 0.5$ ,  $\rho_{ini} \approx 0.34$  (estos números son obtenidos de un análisis de  $\frac{\Delta\rho}{\Delta R}$  vs  $R$  que veremos más adelante (Fig. 3.7). Es importante mencionar, que este punto de transición depende ligeramente de la  $\rho_{ini}$  y del tamaño  $L$ . En otras palabras, el decaimiento de la velocidad y por lo tanto el incremento en la densidad es más rápido conforme  $\rho_{ini}$  y  $L$  son mayores y determinan la sensibilidad del sistema al ruido y por lo tanto, el punto de transición entre flujo libre y congestionado.

Para  $\rho_{ini} < 0.5$  (régimen de densidad-bajo) este decaimiento es gradual, es decir, la transición va ocurriendo con el paso del tiempo lo que permite observar tres fases: la fase de *flujo libre*, *congestionado* y una fase que resulta de un *mezcla* de ambos (intermedia,  $0.4 \leq \rho < 0.7$ ). Sin embargo, para  $\rho_{ini} \geq 0.5$  (régimen de densidad-alto) el decaimiento es

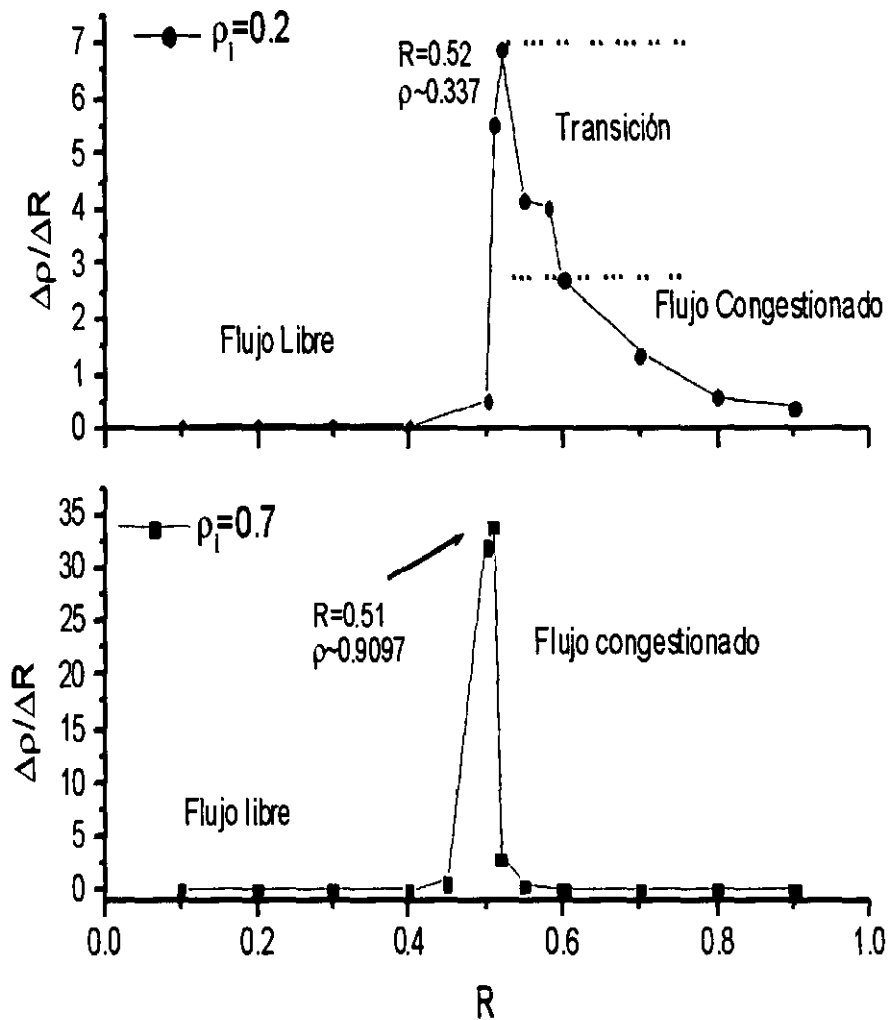


Figura 3.7: Relación  $\Delta\rho/\Delta R$  vs  $R$  para  $\rho_i = 0.2$  y  $0.7$  respectivamente para el AC abierto. Se observa el punto de transición de fase de flujo libre a congestionado. Además se aprecia que antes del punto de transición, el AC no depende de las condiciones iniciales.

mucho más rápido, es decir, sólo hay estados congestionados después del punto de transición (como ya se había apreciado en el capítulo anterior). Para analizar la formación de estas fases, se calcula la derivada de la densidad  $\frac{\Delta \rho}{\Delta R}$  con respecto a  $R$  y claramente permite observar el punto de transición a partir del cual el autómata empieza a ser sensible al ruido y a recordar sus condiciones iniciales. Esto es muy importante, ya que indica que el autómata recuerda su estado inicial después del punto de transición, pero antes se puede decir que el autómata no tiene memoria (ver fig. 3.8).

En la fig. 3.7 se pueden apreciar las tres fases que se presentan en el autómata del sistema abierto; cuando la densidad inicial es 0.7, se observa como únicamente existen las fases de flujo libre y congestionado debido a que la densidad inicial se encuentra dentro del régimen alto y las fluctuaciones impiden que se produzcan estados como resultado de la mezcla de ambas fases.

La gráfica de la Fig. 3.7, recuerda la transición de fase  $\lambda$  [40]. La aparición de esta transición y de estados metaestables, también recuerda a la llamada transición vítrea, donde aparece un comportamiento diferente al de la fase fluida o congestionada. A nivel microscópico, el autómata es una mezcla de fases. Este resultado requiere un estudio más profundo para determinar la posible existencia de una autorganización.

### 3.3 Comentarios del capítulo

El análisis cuantitativo del *modelo de AC promediado del tránsito vehicular* nos permite determinar el comportamiento del flujo vehicular para sistemas abiertos con base



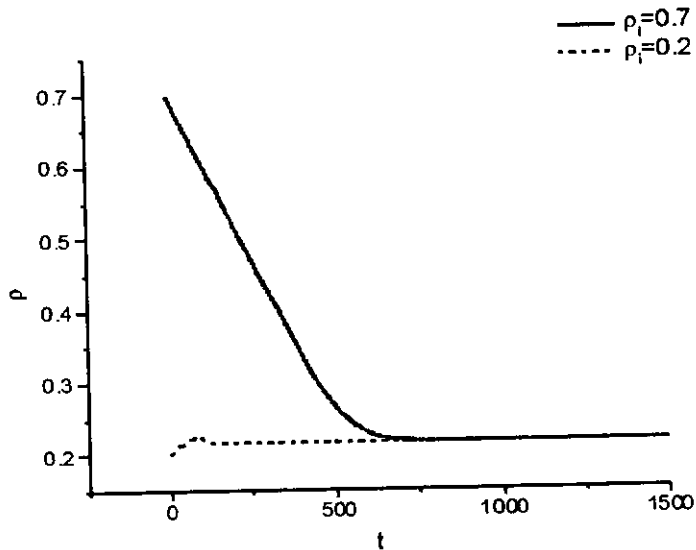


Figura 3.8: En la gráfica  $\rho$  vs tiempo para el AC abierto, se puede observar como el estado permanente del AC es independiente de  $\rho_{ini}$  para valores de  $R$  antes del punto de transición. En este caso  $R = 0.4$ .

a los estados finales del autómata y el valor inicial de los parámetros:

1. El análisis de los diagramas  $\rho$  vs  $R$  como los de la Fig 3.7 indica que para densidad inicial en la región 0, 0.5 pueden ser observadas tres fases de flujo vehicular: flujo libre, intermedio (mezcla de ambos) y congestionado, que están determinadas por el valor del ruido  $R$  en el autómata.
2. Pero si las densidades iniciales se ubican en un régimen alto y  $\langle v_{ini} \rangle < 4$ , sólo dos fases de flujo vehicular se presentan: el flujo libre y congestionado.
3. La fase intermedia, es resultado de una combinación de segmentos del circuito con flujo libre y congestionado y la velocidad promedio  $\langle v \rangle$  varía entre 2 y 3.5, recordando la coexistencia de fases líquido sólido.

4. Como se observa en la Figs. 3.5 y 3.6, a medida que  $\rho_{ini}$  crece existen menos estados con densidad baja. Y antes del punto de transición las velocidades y densidades promedio del estado permanente son independientes las condiciones iniciales y el autómata es casi insensible al ruido. Lo que implica que si se frena un número de vehículos menor al del punto de transición, aún cuando la densidad sea muy grande el flujo es óptimo; debido a la consideración de la velocidad del vehículo de adelante en el desacelerado. Por lo tanto, este resultado es alentador para introducir vehículos automatizados que pueden incrementar el flujo vehicular y el número de vehículos que existan sin llegar al estancamiento.
5. Con base en los resultados previos,  $R$  podría parecer ser análogo a una variable tal como la temperatura que determina la densidad  $\rho$  (dependiendo de las condiciones iniciales).
6. Por último, la gráfica  $\frac{\Delta\rho}{\Delta R}$  como función de  $R$  nos permite calcular el punto de transición de fase de flujo libre a congestionado.

Varias situaciones del AC modelando el tránsito vehicular han sido examinadas e investigadas, se ha encontrado una región donde el autómata no tiene memoria, es decir, no recuerda su estado inicial; situación similar se ha encontrado antes en el caso de la región del flujo de un gran estancamiento bajo condiciones de señales de control [48]. Nuestro trabajo, se centra en investigar el diagrama de transición de fase como una función del ruido  $R$  con distintas condiciones iniciales, un estudio más detallado de esta transición debe realizarse para saber la posible existencia de autorganización, sin embargo, modificaciones en el modelo como la restricción en el número máximo de vehículos que pueden entrar implican

otro tipo de transición que enfocaremos en trabajos futuros.

## Conclusiones

En este trabajo usamos un modelo de AC para estudiar algunas características del tránsito vehicular en carreteras. Como hemos visto, los modelos de autómatas celulares pueden reproducir aproximadamente fenómenos del tráfico real. Estos modelos se ubican en el contexto de partícula saltando. Sin embargo, las aceleraciones y desaceleraciones de los vehículos en estos modelos son mucho mayor que en la realidad, debido a la discretización [38]. Estos modelos permiten simulaciones a gran escala y han contribuido para un mejor entendimiento del mecanismo microscópico en la consideración de carriles, formación de pelotones y en la determinación de la capacidad vehicular. Además, han establecido las situaciones que dan origen a la transición entre flujo libre y flujo congestionado [50, 72].

El trabajo que presentamos es un modelo basado en AC para microsimulaciones del tránsito vehicular en el enfoque de vehículos automatizados. Recordemos que al hablar de vehículos automatizados nos referimos a vehículos equipados con un dispositivo que permite que un conductor conozca información de los vehículos vecinos. Esta propuesta vehicular, está de acuerdo con estudios recientes reportados por la ITS (Intelligent Transport Society)[58]. Por lo que en nuestro AC consideramos la velocidad del vehículo de adelante, en el proceso de desaceleración vehicular.

En particular, en el caso del AC con condiciones de frontera periódica al comparar nuestros resultados con los del modelo NS obtuvimos que el punto de transición entre flujo libre y congestionado aumenta considerablemente para este tipo de vehículos. Esto es consecuencia de la consideración de la automatización vehicular (cuyo objetivo es precisa-

mente un incremento del flujo). Desde luego, que con esto reforzamos el esfuerzo de la automatización de carreteras y vehículos (ya sea manual o totalmente) como un medio para solucionar el problema del tránsito vehicular.

Al realizar el estudio de simulaciones individuales con nuestro AC en situación de fronteras abiertas, encontramos una fuerte dependencia del estado final del AC sobre las condiciones iniciales. Este comportamiento del AC, nos recordó los resultados recientes en el área de teoría de la computación referentes a la clasificación de los autómatas celulares realizado por Baldwin y Shelah[4] y al estudio del desempeño dinámico de los mismos con respecto a sus estados iniciales hecho por Cattaneo et. al [9]. Además, con este estudio confirmamos que un cambio en el estado inicial puede generar diversos estados del flujo vehicular debido a la consideración de reglas aleatorias. El análisis estadístico realizado a estos estados nos permitió representar un comportamiento promedio del tránsito vehicular y determinar una clara transición de fase de flujo libre a congestionado como una función del ruido existente en el sistema independientemente de las condiciones iniciales. En la determinación del punto de transición de flujo libre a congestionado encontramos que antes de punto de transición las densidades y las velocidades no son un factor determinante de congestionamiento, lo que nos recuerda la autorganización. Sin embargo, después del punto de transición las condiciones iniciales del circuito determinan la velocidad y el flujo, es decir, el AC recuerda su estado inicial. Además, bajo condiciones iniciales del sistema donde el flujo es libre, esta transición muestra la existencia de coexistencia de fases [40]. El haber encontrado transiciones de fase en el comportamiento vehicular, lo consideramos como un punto de partida adecuado para el estudio de problema vehicular.

Es importante mencionar que el trabajo aquí presentado, es un modelo que se ubica dentro del contexto de la teoría minimal del flujo vehicular. Si se desea predecir que efecto un desarrollo urbano tendrá en el tránsito, se necesitan considerar otros aspectos como lo son estadísticas de origen- destino, fuentes de puntos de cruce (nodos) y redes de más de un carril; aunque modelos de este tipo con AC han mostrado descripciones de situaciones reales, ver [12, 61].

Aclaremos que para maximizar la efectividad del modelo presentado, aún hace falta considerar otros aspectos para la predicción y seguridad del flujo vehicular tales como el ruteo de acuerdo al destino y punto de origen y la consideración de más de un carril, que lo dejaremos para un trabajo futuro. Pero consideramos que es este tipo de estudios son una buena alternativa para simulaciones de transporte a gran escala.

# Bibliografía

- [1] Adams, W. F., Road Traffic Considered as a Random Series, *J. Inst. Civil Engineers*, 4, 121-130 (1936)
- [2] Agyemang-Duah, K., Hall, F. L., Highway Capacity and Level of service, Balkema Rotterdam (1991)
- [3] Alvarez, L., Horowitz, R., Li, P., Traffic flow control in automated highway systems, *Control Engineering Practice*, 7, 1071-1078 (1999)
- [4] Baldwin, J., Shelah, S., On the classifiability of cellular automata, *Theoretical Computer Science*, 230, 117-129 (2000)
- [5] Bender, J. G., An Overview of Systems Studies of Automated Highway Systems, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, IEEE Vehicular Technology Society, 40, 82-99 (1991)
- [6] Berlekamp, E., Conway, J., Guy, R., Winning ways for your mathematical plays, 2, 817-850, Academic Press (New York, 1982)

- [7] Blinkin, Ya, M., Problem of optimal control of traffic flow on highways. Automation and Remote Control, 37, 662-667 (1976)
- [8] Burks, A., Essays on cellular automata, University of Illinois Press, (Urbana, Illinois, 1970)
- [9] Cattaneo, G., Formenti, E., Margara, L., Mauri, G., On the dynamical behavior of chaotic cellular automata, Theoretical Computer Science, 217, 31-51 (1999)
- [10] Chowdhury, D., Wolf, D., Schreckenberg, M., Particle Hopping Models for Two-lane Traffic with two kinds of vehicles: Effects of Lane-changing Rules, Physyca A, 235, 417-439 (1997)
- [11] Chowdury, D., Santen, L., Schadschneider, A., Simulation of vehicular traffic: a statistical physics perspective, Computers Science & Engineering, Computer Simulation, 2(5), 80-87 (2000)
- [12] Cooperative Research Project "Verkehrsverbund NRW," c/o Center for Parallel Computing, University of Cologne, Germany (1995). See <http://www.zpr.uni-koeln.de/GroupBachem/VERKEHR.PG/>
- [13] Cremer, M., Ludwig, J., A fast simulation model for traffic flow on basis of boolean operations, Mathematics and Computers in Simulation , 28, 297-303 (1986)
- [14] Cremer, M., Papageorgiou, M., Parameter identification for a traffic flow model, Automatica, 17, 837-843 (1981)

- [15] Culik, K., II, Hurd, L., Yu, S., Computation theoretic aspects of cellular automata, *Physica D*, 45, 357-378 (1990)
- [16] del Río, J.A., Vázquez, F., Sánchez, P., On the states of thermodynamic equilibrium, *Revista Mexicana de la Física*, 34, 670- (1988)
- [17] Duncan, C.I.D., in *Proceedings of the 28th International Symposium on Automotive Technology and Automation (ISATA)*, edited by Soliman, J.I., and Roller, D., (Automotive Automation Ltd., Croydon, England 1995), 475; McArthur, D., and Brown, M.D., Edingburgh Parallel Computing Centre, University of Edingburgh, Report No. EPCC-PARAMICS-CT.10, (1992).
- [18] Eno Foundation for Transportation, *Transportation in America*, published by Transportation Policy Associates, National transportation Statistics, Report DOT-VNTFC-RSPA-92-1 (1992)
- [19] Ermentrout, G., Edelstein-Keshet, L., Cellular automata approaches to biological modeling, *Journal of Theoretical Biology*, 160, 97-133, (1993)
- [20] Fenton, R. E., Mayhan, R.J., *Automated Highway Studies at The Ohio State University - An Overview*, *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, *IEEE Vehicular Technology Society*, 40, 100-113 (1991).
- [21] Fredkin, E., Toffoli, T., Conservative Logic, *International Journal of Theoretical Physics*, 21, 219-253 (1982)
- [22] Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y., Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, *Physical Review Letters*, 56, 1505-1508, (1986)



- [23] Gardner, M., The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", Scientific American, 222, 120-123, (1970)
- [24] Gardner, M., On cellular automata, self-reproduction, the Garden of Eden and the game "life", Scientific American, 224, 112-117, (1971)
- [25] Gartner, N., Mahmassani, H., Messer, C., Lieu, H., Cunard R., Rathy, A., Traffic Flow Theory: A State-of-the-Art-Report, monograph, published by Transportation Research Board Committee on Traffic Flow Theory and Characteristic (1987)
- [26] Gazis, D.C., Traffic Science, Wiley New York Press, (1973).
- [27] Gerlough, D. L., Huber, M. J. , Traffic Flow Theory, Special Report No. 165, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, DC (1975)
- [28] Gerlough, D.L., in Proceedings of the 35th Annual Meeting edited by Burggrat, F. and Ward, E.M., Highway Research Board, Washington, D.C., 543 (1956)
- [29] Gómez, M., Danglot, C., Contaminación en el Valle de México, ¿Estamos haciendo lo necesario?, Revista Mexicana de Pediatría 65(6), 254-260, (1998)
- [30] Greenlee, T.L., Payne, H.J., Freeway ramp metering strategies for responding to incidents., In Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control, 987-992 (1977).
- [31] Greenshield, B. D., A Study in Highway Capacity, Highway Research Board, Proceedings, 14, 458 (1935)

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

- [32] Greenshield, B. D., Schapiro, D., Erickson, E. L., Traffic Performance at Urban Intersections, Bureau of Highway Traffic , Technical Report No. 1, Yale university Press, New Haven, CT., (1947)
- [33] Hall, F.L., Allen, B.J., Gunter, M.A., Transportation Research A 20, 197 (1986)
- [34] Helbing, D., Treiber, M., Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition, Physical Review Letters 81, 3042-3045 (1998)
- [35] Jiménez, F.J., Autómatas Celulares y Vida Artificial,  
<http://complez.us.es/~jimenez/CA/ac/ac.html>
- [36] Kerner, B. S. , The physics of traffic, Physics World 12, 25-28 (1999)
- [37] Kreyszing, E., Introducción a la estadística matemática, (Limusa, México 1981)
- [38] Krauß, S., Microscopic Modelling of Traffic Flow: Investigation of Collision Free Vehicle Dynamics, Doctoral Thesis, Universität zu Köln, DLR-Forschungsbericht 98-08 (1998)
- [39] Kühne, R., Proceedings of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, edited by J. Volmuller and R. Hamerslag (VNU Science Press, 1984)
- [40] Landau, L. D., Lifshitz, E.M., Statistical Physics (Addison Wesley, 1970)
- [41] Larraga, M.E. "*Simulación del Tránsito vehicular en carreteras usando Autómatas celulares*". Tesis de Licenciatura en Ciencias Computacionales, Fac. de Ciencias de la Computación, BUAP, (Julio, 1997)

- [42] Lárraga, M.E., del Río, J.A. and Mehta, A. "Possible Self-Organised and Dynamical Clustering of Traffic Flow in Open Systems", <http://arXiv.org/abs/physics/9910049>
- [43] Lighthill, M. J., Whitham, G. B., On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads, Proceedings of Royal Society of London Series A 229, pp 317-345 (1955)
- [44] Looze, D.P., Houpt, K., Sandell, N.R., Athans, M., On decentralized Estimation and Control with Application to Freeway Ramp Metering, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-23, 268-275 (1978)
- [45] May, A. D., Traffic Flow Fundamentals, Prentice -Hall, Englewood Cliffs, NJ (1990)
- [46] Mehta, A. Granular Matter, Springer-Verlag, Berlin (1993)
- [47] Morales Ponce, Oscar., Simulación de Monte Carlo en Autómatas Celulares, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/s1998/oscar/resumen.html>
- [48] Nagatani, T., Self-organized criticality in 1D traffic flow model with inflow or outflow, Journal Physica A, 28, L119 (1995).
- [49] Nagel, K., Particle hopping models and Traffic flow theory, Physical Review E, 53, 4655-4672, (1996)
- [50] Nagel, K., Schreckenberg, M., Cellular automaton models for freeway traffic, J. Phys. I, 2, 2221-2229, (1992)
- [51] Newell, G. F., Mathematical Models for Freely Flowing Highway Traffic, Operation Research, 3, 176-186, (1955)

- [52] Papargeorgiou, M., Mayr, R., Optimal decomposition methods applied to motorway traffic control, *International Journal of Control*, 35, 269-280 (1982)
- [53] Payne, H.J., Models of freeway traffic and control. *Simulations Council Proceedings*, 1, 51-61 (1971)
- [54] Perrier, J. -Y., Sipper, M., Zahnd, J., Toward a viable, self-reproducing universal computer, *Physica D*, 97, 335-352 (1996)
- [55] Pipes, L. A., An Operational Analysis of Traffic Dynamics, *J. Appl. Phys.*, 24, 274-281 (1953)
- [56] Prigogine, I., Herman, R., *Kinetic Theory of Vehicular Traffic* , Elsevier, New York (1971)
- [57] Reuschel, A., Fahrzeugbewegungen in der Kolonne, *Oesterreichisches Ingenieur-Archiv* 4, No. 3/4, 193-215, (1950)
- [58] Rillings, J. H., Automated Highways, *Scientific American* 365, 60-63 (1997)
- [59] Shladover, S. E., Desoer, C. A. , Hedrick, J. D. , Tomizuka, M., Walrand, J., Zhang, W.B., McMahon, D.H., Peng, H., Shiekhoslam, S., McKeown, N., Automated vehicle control developments in the PATH program, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 40, 114-130 (1991)
- [60] Smith, A., Cellular automata theory. Technical Report 2, Stanford Electronic Lab., Stanford University, (1969)

- [61] Smith, L., Beckman, R., Anson, D., Nagel, K., and Williams, M. TRANSIMS: Transportation analysis and simulation system. Proceedings of the 5th National Transportation Planning Methods Applications Conference, (Seattle, 1995)
- [62] Swaroop, D., Rajagopal, K.R., Intelligent cruise control systems and traffic flow stability, *Transportation Research Part C*, 7, 329-352 (1999).
- [63] Swaroop, D., String Stability of Interconnected Systems: An Application to platooning in automated highway systems, Ph. D. dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley (1994)
- [64] TRAF, User reference guide, Publication No. FHWA-RD-92-060, U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration (1992)
- [65] Toffoli, T., Cellular automata mechanics, Technical Report (208), Computation Communication, Science Dept., The University of Michigan, (1977)
- [66] Toffoli, T., Cellular automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics, *Physica D*, 10, 117-127 (1984)
- [67] Toffoli, T., Margolus, P., *Cellular Automata Machines*. The MIT Press, (Cambridge, Massachusetts, 1987)
- [68] von Neumann, *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Illinois, 1966. Edited and completed by A.W. Burks.
- [69] Wardrop, J.G., Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, 1, 325-362 (1952)

- [70] Weimar, J.R., *Simulation with Cellular Automata*, Logos-Verlag Press, (Berlin, 1997)
- [71] White, R., Engelen, G., High-resolution integrated modelling of the spatial dynamics of urban and regional systems, *Computers, Environment and Urban Systems*, V24, 383-400 (2000).
- [72] Wolf, D., Cellular Automata for Traffic Simulations, *Physica A*, V263, 438-451 (1999)
- [73] Wolfram, S., Universality and complexity in cellular automata, *Physica D*, 10, 1-35 (1984)
- [74] Wolfram, S., *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press, (Singapore, 1986)