00362

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS

13

ANÁLISIS DE UN SISTEMA CON LIBERTAD DE NORMA Y DOS COORDENADAS TEMPORALES DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL MÉTODO DE DIRAC.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

pcf
sgrado en ciencias fisicas
u n a m

ASESORES:

Dr. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER.
Dr. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO.

2001

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México las facilidades que me otorgó para realizar el presente trabajo. Además agradezco a todas las personas que de alguna manera me ayudaron a completar esta tesis.

Índice

0.1 Introducción

La producción y distribución de conocimiento han sido motores de las transformaciones que han ocurrido en la Historia, no en balde son hoy la principal fuente de poder y riqueza de las naciones. El estudio del comportamiento de la Naturaleza ha cambiado nuestra forma de ver al mundo y a nosotros mismos. Así, sin temor a equivocarnos, podemos decir que el mundo, para el hombre, no es el mismo después de las grandes obras de pensadores como I. Newton, A. Einstein, C. Darwin, K. Marx o S. Freud.

Dentro de la Historia del conocimiento, el sometimiento de explicaciones de diversos fenómenos, aparentemente ajenos, a unos pocos principios básicos, es decir las grandes síntesis, han dado lugar a verdaderas revoluciones científicas. En la Física, al formular las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos, sin importar si son celestes o terrenos, y explicar de manera consistente fenómenos astronómicos con la ley de interacción gravitacional, I. Newton (1667) logró la primera gran síntesis. A principios del Siglo XIX se pensaba que los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos estaban gobernados por leyes naturales diferentes. Sin embargo, con las contribuciones de R. Faraday y J.K. Maxwell (S. XIX), se logró construir la Electrodinámica con la cual se pueden explicar de forma consistente esos tres feñomenos. Mas a finales del siglo XIX y principios del siglo XX se encontró que las leyes de I. Newton no son compatibles con la Electrodinámica ni con fenómenos que se observan a escalas atómicas. Así, para salvar la primera inconsistencia se construyó la Teoría de la Relatividad Especial (A. Einstein, 1905) y para salvar la segunda se construyó la Mecánica Cuántica (W. Heisenberg y E. Schrödinger, 1926). Con la unión de estas dos nuevas teorías se conocen nuevos fenómenos naturales, como la existencia de antimateria. A mediados del siglo XX, con el estudio de fenómenos nucleares, se descubren dos nuevas interacciones: la interacción nuclear fuerte y la débil. Para explicar correctamente las diferentes interacciones a escalas nucleares y a altas energías se modificó ligeramente la teoría surgida de la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial dando lugar a la Teoría de Partículas. En el contexto de esta teoría se logró mostrar que la interacción electromagnética y la débil son parte de una interacción más fundamental: la electro-débil (Salam y Weinberg, 1967).

Por otra parte, desde el nacimiento de la Teoría de la Relatividad Especial se encontró que ésta no es compatible con los fenómenos gravitacionales. Por lo cual se construyó la Teoría de la Relatividad General (A. Einstein, 1915). La cual, entre otras cosas, resulta ser una reformulación de la interacción gravitacional, y cuando esta interacción es nula se obtiene la

Teoría de la Relatividad Especial. Con la Relatividad General se han comprendido diversos fenómenos astronómicos, como la expansión del universo.

Así, actualmente vemos al mundo a través de dos ventanas. En una se encuentra la Teoría de Partículas, con la cual entendemos los fénomenos que producen las interacciones electro-débiles y las fuertes. En otra se encuentra la Teoría de la Relatividad General, con la que entendemos fenómenos gravitacionales. Sin embargo, estas dos ventanas son incompatibles, pues, por un lado la Teoría de Partículas se estudia en el regimén cuántico, mientras que la Relatividad General se estudia en el clásico. En principio para unir las ventanas bastaría aplicar los fundamentos cuánticos a la Relatividad General, es decir, cuantizar el campo gravitatorio. Mas los procesos matemáticos que son exitosos en la Teoría de Partículas, como la renormalización, fracasan con la interacción gravitacional.

Actualmente se trabaja para lograr una nueva síntesis del conocimiento. Para construir una teoría que explique todos los fenómenos que provocan las interacciones fundamentales Para lograr dicho objetivo se trabaja en diferentes intentos. Algunos buscan una descripción consistente de la Mecánica Cuántica con la Relatividad General, es decir, cuantizar el campo gravitatorio. Otros intentos son más ambiciosos y tratan de unificar todas las interacciones y, al mismo tiempo, someter la Relatividad General dentro de un contexto cuántico.

Una de las teorías que más ha llamado la atención en los últimos años es la Teoría de Cuerdas. Esta supone que los objetos fundamentales de la naturaleza no son puntuales, como las partículas, sino objetos extendidos, cuerdas. Hoy en día es una de las áreas de la Física en la que se trabaja con mayor intensidad. Esto se debe a que se han obtenido algunos resultados teóricos espectaculares, como lograr calcular la entropía de un hoyo negro extremal o mostrar que ciertos modelos (teorías) de cuerdas son equivalentes a ciertos modelos de partículas (ver [3]). Dentro de la Teoría de Cuerdas, una de las mayores metas está en la construcción de la llamada Teoría **M**, la cual, en principio, contendría a los diferentes modelos de cuerdas que existen y permitiría construir conexiones (dualidades) entre éstos.

En la Teoría de Cuerdas se toman conceptos que no son comunes al resto de la Física. En particular se supone que el universo tiene más de cuatro dimensiones e incluso algunos autores suponen que existe más de una coordenada temporal (ver [5] y [6]). Trabajar con más de dos coordenadas temporales no resulta extraño en la Teoría de Cuerdas, puesto que la simetría conforme es fundamental en ésta. Y esta simetría está representada por el álgebra del grupo $SO(2,d)$. En realidad los sistemas con más de una coordenada temporal no son nuevos. En los setentas R. Marnelius (ver [22]) estudió un sistema mecánico, de dimensión $d+2$, con libertad de norma, el cual por consistencia debe tener una métrica plana, η, con signatura

$$\mathrm{sign}(\eta) = (-,-,+,...,+). \tag{1}$$

Así, en principio, el sistema tiene dos coordenadas temporales. Sin embargo, al fijar la norma, R. Marnelius muestra que puede obtener sistemas con una sóla coordenada temporal. Los sistemas que obtiene son la partícula libre masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d y la partícula libre sin masa en el espacio de anti-de Sitter de dimensión $d+1$ (AdS_{d+1}) [22]. Actualmente se sigue estudiando este sistema desde el mismo punto de vista que inició R. Marnelius, incluso existe una generalización supersimétrica que es de interés para diferentes autores (ver [8] y [7]).

Por otra parte, ese mismo sistema ha despertado interés en algunos autores que trabajan en Teoría de Cuerdas. Esto se debe a que el sistema tiene como simetría global al grupo conforme $SO(2,d)$. Además de que se ha encontrado que al imponer otras condiciones de norma se obtienen sistemas como la partícula no-relativista en un potencial arbitrario [27] y la partícula libre no-relativista [29]. Así, de acuerdo a la teoría de constricciones todos estos sistemas, que se obtienen al fijar la norma, pueden ser conectados mediante una transformación de norma. Como vemos, esto es muy parecido al comportamiento que en la Teoría de Cuerdas se espera de la teoría **M**(ver [2]).

En este trabajo, bajo la mirada de la teoría de constricciones, hacemos una revisión y crítica de los trabajos que se han realizado sobre el sistema original que planteó R. Marnelius. Estudiaremos unicamente la parte bósonica y nos concentramos en los trabajos de I. Bars y R. Marnelius [22],[23], [27],[28] y [29].

El trabajo que realizamos se divide en dos capítulos. En el primero se desarrolla la teoría de constricciones de Dirac, que consiste en el estudio de los sistemas mecánicos para los cuales la transformación de Legendre no es invertible. Es importante estudiar estos sistemas puesto que incluyen a los sistemas con libertad de norma. En el segundo capítulo se muestra como podemos asociar una acción con libertad de norma a un álgebra de Lie. Después todo el trabajo se enfoca a estudiar la acción asociada al álgebra de Lie

del grupo simpléctico $Sp(2)$, este es el sistema que originalmente estudió R. Marnelius. Se encuentran las transformaciones de norma infinitesimales que, de acuerdo a la teoría de constricciones, tiene este sistema. También se muestra que para este sistema particular es posible construir las transformaciones de norma finitas, y que es invariante ante el grupo $S0(2,d)$.
Se analizan cuatro casos de fijación de norma, hechas por Marnelius y Bars. Primero se muestra que las condiciones de norma que se imponen en [27] para obtener la partícula no relativista en un potencial $V(r)$ no son consistentes. Después se muestra que las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$, la partícula libre masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d, la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} son consistentes.
Se da una generalización de las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula libre no relativista, se muestra la transformación de norma finita que conecta la partícula libre masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d con la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} y se muestran nuevas condiciones de norma que dan como resultado el modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión. En cada uno de los casos en que se fija la norma de manera consistente se muestra que existe una relación entre la métrica y la estructura simpléctica del espacio reducido.

del grupo simpléctico $Sp(2)$, este es el sistema que originalmente estudió R. Marnelius. Se encuentran las transformaciones de norma infinitesimales que, de acuerdo a la teoría de constricciones, tiene este sistema. También se muestra que para este sistema particular es posible construir las transformaciones de norma finitas, y que es invariante ante el grupo $SO(2, d)$.
Se analizan cuatro casos de fijación de norma, hechas por Marnelius y Bars. Primero se muestra que las condiciones de norma que se imponen en [27] para obtener la partícula no relativista en un potencial $V(r)$ no son consistentes. Después se muestra que las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$, la partícula libre masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d, la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} son consistentes.
Se da una generalización de las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula libre no relativista, se muestra la transformación de norma finita que conecta la partícula libre masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d con la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} y se muestran nuevas condiciones de norma que dan como resultado el modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión. En cada uno de los casos en que se fija la norma de manera consistente se muestra que existe una relación entre la métrica y la estructura simpléctica del espacio reducido.

Capítulo 1

Método de Dirac

1.1 Introducción

En este capítulo damos una introducción al estudio de los sistemas mecánicos, con un número finito, n, de grados de libertad, que tienen constricciones. Estos sistemas se caracterizan porque su Lagrangiana, L, satisface que la matriz

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \qquad i, j = 1, ..., n$$

no es invertible. A las Lagrangianas que satisfacen esta propiedad se les llama singulares. En un curso estándar de mecánica clásica no se estudian estos sistemas. Sin embargo, sistemas como la partícula libre relativista, la electrodinámica, la gravitación y la teoría de cuerdas tienen Lagrangianas singulares.

Mostraremos que a pesar de que la matriz W_{ij} es singular el espacio fase y la Hamiltoniana canónica se pueden construir. También veremos que existen casos en que, en el espacio fase, hay variables que dependen de parámetros arbitrarios, a esto se le llama libertad de norma. Como estas ambigüedades del sistema no se pueden eliminar dentro de la teoría, se debe recurrir a elementos externos a la teoría para eliminarlas, a esto se le conoce como condiciones de norma. Por último veremos que las condiciones de norma no pueden ser arbitrarias, si no que deben ser compatibles con el sistema.
En el estudio de los sistemas mecánicos que tienen constricciones han existido aportaciones de diferentes autores. Sin embargo, la contribución de mayor importacia fue hecha por P.A.M. Dirac, por ello esta teoría se le

nombra Método de Dirac.
El tratamiento que se encuentra en este capítulo sobre la teoría de constricciones no es el más formal que existe, sin embargo, se proporcionan los elementos que se requieren en el segundo capítulo. Para un versión completa se puede consultar [12] o [17].

1.2 Principio de acción

Supongamos que tenemos un sistema mecánico con n coordenadas: $q^1, ..., q^n$ y acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(q, \dot{q}). \tag{1.1}$$

El principio de acción nos dice que S tiene un extremo en la trayectoria que sigue el sistema para pasar de q_1^i a q_2^i. Así, al buscar los extremos de S con condiciones de borde

$$q^i(\tau_1) = q_1^i \qquad \text{y} \qquad q^i(\tau_2) = q_2^i \qquad (i = 1, ..., n) \tag{1.2}$$

estamos buscando la trayectoria del sistema. Por otra parte, se puede mostrar que los extremos de S, con condiciones de borde (1.2), satisfacen que

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q^i}) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^i}. \tag{1.3}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento del sistema y se les conoce como ecuaciones de Euler-Lagrange. La solución de las ecuaciones (1.3) con las condiciones de borde (1.2) nos dan las posibles trayectorias del sistema. Es importante observar que el principio de acción de ninguna manera nos garantiza tener una única trayectoria, y que las aceleraciones, $\ddot{q}^i$, se pueden poner en términos de las velocidades, las coordenadas y el tiempo sólo cuando la matriz

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{1.4}$$

es invertible.
Las ecuaciones de Euler-Lagrange son un conjunto de n ecuaciones de segundo orden. Si definimos las variables

$$z^i = \dot{q}^i \tag{1.5}$$

podemos escribir las ecuaciones (1.3) como un conjunto de $2n$ ecuaciones de primer orden:

$$\dot{z}^j \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j} + z^j \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{1.6}$$

$$z^i = \dot{q}^i. \tag{1.7}$$

Estas no son las únicas ecuaciones de primer orden equivalentes a (1.3). Si definimos los momentos canónicos como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{1.8}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.3) tienen la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L(q,p)}{\partial q^i}, \tag{1.9}$$

$$\dot{q}^i = z^i(q,p). \tag{1.10}$$

Es claro que esto se puede hacer sólo si la transfromación de coordenadas del conjunto $(q^i, z^i = \dot{q}^i)$ al espacio fase (q^i, p_i) es válido, es decir, si la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial p_i}{\partial z^j} = W_{ij}$$

es invertible.

Por otra parte, para cualquier Lagrangiana siempre podemos definir los momentos canónicos (1.8) y la Hamiltoniana

$$H = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}). \tag{1.11}$$

Haciendo una variación en (1.11) y tomando en cuenta a las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.3) y los momentos canónicos conjugados (1.8) tenemos que

$$\delta H = \delta p \cdot \dot{q} - \dot{p} \cdot \delta q. \tag{1.12}$$

Por lo tanto, para cualquier Lagrangiana, la Hamiltoniana (1.11) sólo depende del espacio fase, (q^i, p_i). Entonces, (1.12) también se puede escribir como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i. \tag{1.13}$$

Igualando (1.12) con (1.13) obtendremos

$$\delta p_i[\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}] - \delta q^i[p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}] = 0. \tag{1.14}$$

En el caso en que la matriz (1.4) es invertible las variables q^i y p_i son independientes, entonces, la ecuación (1.14) implica

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.15}$$

A estas ecuaciones (1.15) se les llama ecuaciones de Hamilton. Cuando (1.4) es invertible, se puede verificar que las ecuaciones de Hamilton(1.15) son completamente equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Evidentemente siempre podemos definir la acción Hamiltoniana

$$S_H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q} \cdot p - H(q,p)]. \tag{1.16}$$

Cuando la matriz W_{ij} es invertible podemos extremar a (1.16) con las condiciones de borde (1.2). Si se hace ésto se obtiene las ecuaciones (1.15) con las condiciones (1.2)

Definamos los paréntesis de Poisson, para dos funciones del espacio fase $F(q,p)$ y $G(q,p)$, como

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}, \tag{1.17}$$

entonces las ecuaciones de Hamilton (1.15) se pueden escribir de la forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{1.18}$$

Para algunas áreas de la Física es más natural expresar sus principios en términos de variables del espacio fase Por ejemplo, la Física Estadística y la Mecánica Cuántica expresan sus fundamentos tomando como base las variables del espacio fase y no existe una formulación Lagrangiana de estas dos teorías. Por ello es importante comprender a cualquier sistema mecánico desde el punto de vista Hamiltoniano.

Antes de estudiar los sistemas con Lagrangianas singulares veamos un ejemplo de estos sistemas y observemos algunas de sus características.

Sea el sistema que tiene como acción a

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2. \tag{1.19}$$

Los momentos canónicos de este sistema son:

$$p_y = 0 \qquad \text{y} \qquad p_x = \dot{x} - y. \tag{1.20}$$

Lo primero que podemos notar es que det W_{ij}=0. Por otra parte, las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\dot{y} - \ddot{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad y - \dot{x} = 0. \tag{1.21}$$

Es claro que estas ecuaciones no son independientes y, por lo tanto, no pueden tener soluciones con condiciones iniciales independientes. Las únicas condiciones iniciales que podemos pedir son de la forma

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \dot{x}(0) = y_0 \quad \text{y} \quad \dot{y}(0) = v_{y0}. \tag{1.22}$$

La solución del sistema de ecuaciones con las condiciones (1.22) está dada por

$$\begin{aligned} x(\tau) = x_0 + y_0\tau + \frac{1}{2}v_{y0}\tau^2 + \int_0^\tau d\tau\psi(t) \\ \text{y} \qquad y(\tau) = y_0 + v_{y0}\tau + \psi(\tau), \end{aligned} \tag{1.23}$$

con ψ una función arbitraria que cumple $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$. Como vemos la "trayectoria" del sistema no es única.

Otra característica del sistema es que la acción es invariante bajo las transformaciones " de norma"

$$x \longmapsto x' = x + \mu \qquad \text{y} \qquad y \longmapsto y\prime = y + \dot{\mu}. \tag{1.24}$$

La Hamiltoniana canónica del sistema, definida por (1.11), es

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + p_x y. \tag{1.25}$$

Luego, las ecuaciones (1.15) para este sistema son

$$\begin{aligned} \dot{x} = p_x + y, \qquad \dot{p}_x = 0, \\ \dot{y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_y = -p_x. \end{aligned} \tag{1.26}$$

A diferencia de un sistema con Lagrangiana no-singular, las ecuaciones Hamiltonianas (1.26) no son equivalentes a las ecuaciones Lagrangianas (1.21).

Como vemos los sistemas con W_{ij} singular tienen propiedades que pueden ser diferentes a las de un sistemas con W_{ij} invertible. En el resto de este capítulo estudiaremos a estos sistemas.

1.3 Lagrangianas singulares

Cuando tenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.3) como un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden . (1.6) y (1.7), el conjunto de variables (q^i, z^i) se considera independiente, por lo tanto, se tiene un espacio de dimensión $2n$.

Al pasar al espacio fase deberíamos tener el mismo número de variables independientes. Sin embargo, si la matriz W_{ij} es singular, y el rango de W_{ij} es R, entonces tendremos $M = n - R$ relaciones linealmente independientes entre las coordenadas y los momentos canónicos. Es decir, tendremos relaciones de la forma

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0, \qquad m = 1, ..., M. \tag{1.27}$$

Debido a que no se utilizaron las ecuaciones de movimiento, a estas relaciones les llamaremos constricciones primarias. A la superficie definida por las constricciones primarias le llamaremos superficie de constricción primaria. El hecho de tener estas constricciones implica que la dimensión del espacio fase accesible al sistema no es $2n$, si no $2n - M$.

Como vimos anteriormente, la Hamiltoniana canónica (1.11) y la acción Hamiltoniana (1.16) siempre están bien definidas. Para obtener las ecuaciones Hamiltonianas de un sistema que tiene constricciones supondremos que el principio de acción aplicado a la acción Hamiltoniana (1.16) sigue siendo válido. Evidentemente que para extremar a S_H debemos tomar en cuenta las constricciones. Por lo tanto, para obtener las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas correctas debemos extremar S_H con las condiciones

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad q^i(\tau_1) = q_1^i \quad \text{y} \quad q^i(\tau_2) = q_2^i. \tag{1.28}$$

Este problema es bien conocido en la teoría del cálculo de variaciones (ver [14]) y se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Aplicando este método, se sabe que el problema es equivalente a extremar la acción

$$S_T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p \cdot q - H - u^m \phi_m] \tag{1.29}$$

suponiendo que las variables q^i, p_i y u^m son independientes. A los parámetros u^m se les llama multiplicadores de Lagrange.

De un cálculo directo se puede ver que las ecuaciones de movimiento que se obtienen son

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \tag{1.30}$$

$$\dot{p}_i = -(\frac{\partial H}{\partial q^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}) \tag{1.31}$$

$$\text{y} \qquad \phi_m(q,p) = 0. \tag{1.32}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en su forma Hamiltoniana para un sistema que tiene constricciones.
Como puede observarse los parámetros u^m son arbitrarios. Estos multiplicadores de Lagrange son, en número, la cantidad de parámetros independientes extras que se requiere para que la dimensión del espacio (q^i, p_i, u^m) concuerde con la dimensión del espacio (q^i, z^i).

Por otra parte, de las ecuaciones (1.30), (1.31) y (1.32) se puede ver que con los parámetros extras y las constricciones primarias podemos recuperar todas las velocidades, es decir, tenemos una transformación que nos lleva del espacio fase al espacio (q^i, z^i).

Los multiplicadores de Lagrange dan una forma natural para extender la Hamiltoniana canónica fuera de la superficie de constricción en la forma

$$H_T = H + u^m \phi_m. \tag{1.33}$$

A esta extensión le llamaremos Hamiltoniana total, mientras que a S_T le llamamos acción total.

Apliquemos estas ideas a la acción (1.19) que tratamos en la sección anterior. Este sistema tiene una sóla constricción primaria

$$\phi = p_y = 0. \tag{1.34}$$

Luego, para este sistema la Hamiltoniana total (1.33) y la acción total (1.16) son:

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + p_x y + u p_y \qquad \text{y} \tag{1.35}$$

$$S_H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - (\frac{1}{2}p_x^2 + p_x y + u p_y)], \tag{1.36}$$

mientras que las ecuaciones de movimiento (1.30) y (1.31) son

$$\dot{x} = p_x + y, \qquad \dot{y} = u, \tag{1.37}$$

$$\dot{p}_x = 0, \qquad \dot{p}_y = 0, \qquad p_y = 0, \tag{1.38}$$

es decir,

$$\ddot{y} = \dot{u}, \qquad \dot{x} = u, \qquad p_x = 0, \quad \text{y} \quad p_y = 0 \tag{1.39}$$

Las solución de estas ecuaciones con las condiciones de borde (1.22) son (1.23) y , por lo tanto, este sistema de ecuaciones es equivalente a las ecuaciones Lagrangianas del sistema (1.21). Otra forma de comprobar que la acción (1.36) describe al mismo sistema que la acción (1.19) es observando que sustituyendo (1.37) en (1.36) se obtiene (1.19).

Existen diferentes formas para representar a una superficie, sin embargo, para que los extremos de S_H y S_T, con sus respectivas condiciones, coincidan se debe pedir que las constricciones satisfagan las condiciones de regularidad (ver [13] y [14]). Estas condiciones exigen que la superficie de constricción pueda ser cubierta por regiones abiertas sobre cada una de las cuales, localmente, la matriz jacobiana, $\frac{\partial \phi_m}{\partial(q^i, p_i)}$ es de rango M.

Las condiciones de regularidad pueden formularse de las tres formas siguientes:

(1).- Localmente los gradientes $d\phi_1, .., d\phi_M$ son linealmente independientes sobre la superficie de constricción.

(2).-Las funciones ϕ_m pueden ser tomadas localmente como las primeras M coordenadas de un nuevo sistema coordenado regular en cualquier vecindad de la superficie de constricción.

(3).- Las variaciones de ϕ_m son de orden ϵ para variaciones arbitrarias δq^i y δp_i de orden ϵ (formulación de Dirac).

Con las condiciones de regularidad se pueden demostrar dos teoremas importantes (ver [12]).

Teorema 1. Si una función suave, $G = G(q^i, p_i)$, del espacio fase se anula sobre la superficie de constricción, entonces,

$$G = g^m \phi_m, \tag{1.40}$$

para algunas funciones g^m.

Teorema 2. Si se cumple

$$\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0, \tag{1.41}$$

para variaciones arbitrarias de δq^i y δp_i tangentes a la superficie de constricción, entonces

$$\lambda_i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \qquad \text{y} \qquad \mu^i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}. \tag{1.42}$$

El teorema 2 da una forma alternativa para obtener las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas. Recordemos que la ecuación (1.14) es válida siempre, luego, por el teorema 2, se deben cumplir las ecuaciones (1.30) y (1.31).

Las condiciones de regularidad son muy importantes, pues, nos garantizan la validez del método de los multiplicadores de Lagrange. En efecto tomando una representación de la superficie de constricción que no cumple estas condiciones podemos cometer errores graves. Para ilustrar esto en nuestro ejemplo consideremos como constricción a

$$\phi = \frac{1}{2}p_y^2 = 0, \tag{1.43}$$

que no cumple las condiciones de regularidad, en lugar de $\phi = p_y = 0$ que sí las cumple. Con esta constricción la Hamiltoniana canónica es

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + p_x y + u^1 \frac{1}{2}p_y^2. \tag{1.44}$$

Luego, las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas son

$$\dot{x} = p_x + y, \qquad \dot{y} = u^1 p_y, \qquad \dot{p}_x = 0, \qquad \dot{p}_y = 0, \qquad \text{y} \qquad p_y^2 = 0, \tag{1.45}$$

es decir,

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad p_x = 0, \quad \text{y} \quad p_y = 0. \tag{1.46}$$

Estas ecuaciones tienen como solución

$$x = x_0 + y_0 \tau, \qquad y = y_0 \qquad \text{y} \qquad p_y = p_x = 0. \tag{1.47}$$

Claramente estas trayectorias no son equivalentes a (1.23).

1.3.1 Ecuaciones débiles y fuertes

Al trabajar en el espacio fase completo es importante hacer notar cuándo una igualdad es válida sólo en la superficie de constricción y cuándo lo es

sobre todo el espacio fase. Para el primer caso se dice que se tiene una igualdad "débil", y se denota con "$\approx$". Para el segundo caso decimos que tenemos una igualdad "fuerte", y la denotamos con "$=$". Por ejemplo, si dos funciones del espacio fase, F y G, son iguales sobre la superficie de constricción se escribe $F \approx G$ (en este ejemplo podemos ver que, aplicando el teorema 1 , como $F - G \approx 0$, entonces $F - G = \mu^m \phi_m$).
También, podemos ver que las constricciones se pueden escribir como $\phi_m \approx 0$.

Esta notación nos permitirá escribir ecuaciones en una forma más compacta. Por ejemplo, si tenemos una función del espacio fase, $F = F(q, p)$, entonces

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i. \tag{1.48}$$

Ocupando las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas (1.30) y (1.31) tendremos

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\}. \tag{1.49}$$

Por otra parte, con la Hamiltoniana total tenemos que

$$\{F, H_T\} = \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\} + \phi_m\{F, \mu_m\}. \tag{1.50}$$

Estas dos ecuaciones difieren sólo por un término que se anula en la superficie de constricción, es decir,

$$\{F, H_T\} \approx \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\}. \tag{1.51}$$

De donde, podemos escribir

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \tag{1.52}$$

En particular las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas (1.30), (1.31) y (1.32) tienen la forma

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\}, \tag{1.53}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\}, \tag{1.54}$$

$$\phi_m(q, p) \approx 0. \tag{1.55}$$

1.4 Condiciones de consistencia

Tenemos bien definida la superficie de constricción primaria. Sin embargo, nada nos asegura que sólo sobre esta superficie ocurre la dinámica. Luego, por consistencia debemos pedir que todas las constricciones primarias cumplan:

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, H\} + u^m\{\phi_n, \phi_m\} \approx 0, \qquad \text{con} \qquad m, n = 1, ..., M. \quad (1.56)$$

Este es un conjunto de M ecuaciones lineales con M incogintas para u^m

Si la matriz $C_{nm} = \{\phi_n, \phi_m\}$ es invertible el conjunto de ecuaciones tiene solución única dada por

$$u^m \approx -C^{mn}\{H, \phi_n\}. \quad (1.57)$$

Pero, si C_{nm} no es invertible no se cumple la condición para determinar los multiplicadores de Lagrange y asegurar (1.56).
En general pueden ocurrir tres casos:
a) que algunas ecuaciones se cumplan identicamente;
b) que algunas ecuaciones determinen multiplicadores de Lagrange;
c) que algunas ecuaciones den lugar a nuevas constricciones $\phi_s(q, p)$, independientes de las anteriores. A estas nuevas constricciones les llamaremos secundarias.

Los multiplicadores de Lagrange que se determinan tienen la forma

$$u^\alpha = f^\alpha(q, p) + g_b^\alpha(q, p)u^b, \quad (1.58)$$

con u^b los multiplicadores de Lagrange que no se determinan. Sustituyendo en H_T tendremos

$$H_T = H + f^\alpha\phi_\alpha + u^b(\phi_b + g_b^\alpha\phi_\alpha). \quad (1.59)$$

Si ocurre el tercer caso definiremos una nueva superficie de constricción dada por

$$\phi_I = 0, \quad (1.60)$$

donde I es un índice que corre por el conjunto de constricciones primarias y secundarias. A esta nueva superficie también le debemos aplicar la condición de consistencia, es decir,

$$\dot{\phi}_I \approx \{\phi_I, H_T\} \approx 0. \quad (1.61)$$

Aquí la igualdad débil se define sobre la superficie definida por (1.60). Es claro que de nuevo puede ocurrir cualquiera de los tres casos, por lo tanto, aplicaremos otra vez la condición de consistencia. El proceso se detiene hasta que ya no ocurra el tercer caso.

Como resultado de este proceso obtendremos una Hamiltoniana total de la forma

$$H_T = H' + u^a(\phi_a + g_a^\beta \phi_\beta) \tag{1.62}$$

con

$$H' = H + f^\beta \phi_\beta \tag{1.63}$$

Aquí a corre en el conjunto de multiplicadores de Lagrange que no se pueden determinar y β por el de los que sí se determinan. Ahora, como el conjunto de constricciones

$$(\phi_m) = (\phi_\beta, \phi_a)$$

es completo, también lo es el conjunto definido por

$$\bar{\phi}_\beta = \phi_\beta \tag{1.64}$$

$$\bar{\phi}_a = (\phi_a + g_a^\beta \phi_\beta). \tag{1.65}$$

Por lo tanto, podemos usar al conjunto $(\bar{\phi}_m)$ en lugar de (ϕ_m).

Al sustituir los multiplicadores de Lagrange en las ecuaciones de movimiento (1.30), (1.31) y (1.32) tenemos

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} + f^d(q,p)\{q^i, \bar{\phi}_d\} + u^i\{q^i, \bar{\phi}_d\}, \tag{1.66}$$

$$p_i = \{p_i, H\} + f^d(q,p)\{p_i, \bar{\phi}_d\} + u^i\{p_i, \bar{\phi}_d\} \tag{1.67}$$

$$\text{y} \qquad \bar{\phi}_m(q,p) \approx 0. \tag{1.68}$$

Por otra parte, si el número total de constricciones secundarias es N, entonces, el conjunto de constricciones que define la superficie de constricción está dado por

$$\phi_I \approx 0, \qquad \text{con} \qquad I = 1, .., M, M+1, .., M+N, \tag{1.69}$$

donde las primeras M constricciones son primarias y las restantes son secundarias. Supondremos que todas estas constricciones están escritas de tal forma que satisfacen las condiciones de regularidad.

También podemos ver que, una vez terminado el proceso de consistencia, se cumple identicamente la ecuación (1.61) para cualquier constricción. entonces,

$$\{\phi_I, \bar{\phi}_a\} \approx 0 \quad \text{para} \quad \text{toda} \qquad I. \tag{1.70}$$

1.5 Clasificación de constricciones

Sea F una función del espacio fase, $F = F(p, q)$, entonces si

$$\{F, \phi_I\} \approx 0, \qquad \text{con} \qquad I = 1, ..., M + N \tag{1.71}$$

se dice que F es una función de primera clase. En caso contrario, se dice que F es de segunda clase.

Como las ϕ_I son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero sobre la superficie de constricción, entonces, por el teorema 1, si F es de primera clase,

$$\{F, \phi_I\} = f_I^{I'} \phi_{I'}. \tag{1.72}$$

Si F y G son funciones de primera clase, $\{F, G\}$ también es de primera clase. Veamos como se demuestra esta afirmación. Sea ϕ_I una constricción cualquiera, entonces, por la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} \{\{F,G\}, \phi_I\} &= \{F, \{G, \phi_I\}\} - \{G, \{F, \phi_I\}\} \\ = \{F, g_I^{I'}\}\phi_{I'} + g_I^{I'} f_{I'}^{I''} \phi_{I''} &- \{G, f_I^{I'}\}\phi_{I'} - f_I^{I'} g_{I'}^{I''} \phi_{I''} \approx 0. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Luego, $\{F, G\}$ es de primera clase.

Para un sistema arbitrario que tiene constricciones, la evolución del sistema implica que la Hamiltoniana total, definida por (1.62), es de primera clase. Por otra parte, debido a que se cumple la ecuación (1.70), las constricciones $\bar{\phi}_a$ son un conjunto completo de constricciones primarias de primera clase. Además, como $H' = H_T - u^a \bar{\phi}_a$, H' también es de primera clase.

Por otra parte, cómo los multiplicadores de Lagrange indeterminados están asociados a constricciones de primera clase, hay una distinción importante entre las constricciones de primera y segunda clase, por ello, ocuparemos diferente notación para distingirlas. Denotaremos con γ a las constricciones de primera clase y con χ a las de segunda.

1.5.1 Separación en constricciones de primera y segunda clase

Es claro que si existe una constricción ϕ_I tal que $\{\phi_I, \phi_J\} \approx 0$ (para cualquier J), entonces det $C_{IJ} = \{\phi_I, \phi_J\} \approx 0$.

Ahora supongamos que det $C_{IJ} \approx 0$, entonces existe un conjunto de vectores, de dimensión $N + M$, $\{\lambda_a \not\approx 0\}$ $(a = 1, ..., A)$ tal que

$$\lambda_a^I C_{IJ} = \lambda_a^I \{\phi_I, \phi_J\} \approx 0. \tag{1.74}$$

Así, $\gamma_a = \lambda_a^I \phi_J$ es una combinación lineal de constricciones que resulta de primera clase.
Si $\gamma = \lambda^I \phi_I$ es una combinación lineal de primera clase, con $\lambda \not\approx 0$ entonces λ es un vector del conjunto $\{\lambda_a\}$ Por lo tanto, las únicas combinaciones lineales de constricciones que dan como resultado una función de primera clase están en el conjunto $\{\gamma_a\}$.

Con los vectores λ_a podemos construir los primeros, A, renglones de una matriz a_J^I invertible tal que

$$\phi_I \qquad \longmapsto \qquad \tilde{\phi}_I = a_I^J \phi_J. \tag{1.75}$$

La matriz a_J^I no es única. Sin embargo, de cualquier forma que la construyamos, las primeras A constricciones $\tilde{\phi}_I$ serán el conjunto $\{\gamma_a\}$. Mientras que las restantes, $M + N - A$, son un conjunto de constricciones de segunda clase $\{\chi_\alpha\}$. Así, si cambiamos el conjunto completo de constricciones (ϕ_I) por el conjunto (γ_a, χ_α), que también es completo, tendremos separadas las constricciones de primera clase de las de segunda clase. También podemos ver que el número de constricciones de primera clase es igual a la dimensión del núcleo de la matriz C_{IJ} sobre la superficie de constricción.
Es claro que el conjunto de constricciones primarias $(\bar{\phi}_m)$ definido por (1.35) ya está separado en constricciones de primera y de segunda clase. Una vez construido el conjunto $(\bar{\phi}_m)$ sólo nos "resta" clasificar las constricciones secundarias. En lo que resta de este capítulo supondremos que las constricciones $\bar{\phi}_m$ están en el conjunto (γ_a, χ_α).

Supongamos que tenemos un conjunto completo de constricciones que hemos separado, (γ_a, χ_α). Mediante un pequeño cálculo, podemos mostrar que si F es una función de primera clase, entonces

$$\{F, \gamma_a\} = C_a^b(q,p)\gamma_b + T_a^{\alpha\beta}(q,p)\chi_\alpha\chi_\beta.$$

Así, los paréntesis de Poisson entre las constricciones tienen la forma

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = C_{ab}{}^c(q,p)\gamma_c + T_{ab}{}^{\alpha\beta}(q,p)\chi_\alpha\chi_\beta, \tag{1.76}$$

$$\{\gamma_a, \chi_\alpha\} = C_{a\alpha}^b(q,p)\gamma_b + C_{a\alpha}^\beta(q,p)\chi_\beta \tag{1.77}$$

$$\text{y} \qquad \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha\beta}(q,p) \tag{1.78}$$

con $C_{\alpha\beta}$ una matriz invertible.
En la nueva base C_{IJ} tiene la forma

$$\tilde{C}_{IJ} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Si se cumple que el rango de C_{IJ} es constante en todo el espacio fase, entonces $C_{\alpha\beta}$ es una matriz invertible en todo el espacio fase.
Por otra parte, como $C_{\alpha\beta}$ es una matriz invertible y antisimétrica, debe tener dimensión par. Por lo tanto, el número de constricciones de segunda clase siempre es par.

1.6 Hamiltoniana extendida

Una vez concluido el proceso que genera la condición de consistencia, tenemos una Hamiltoniana canónica H y un conjunto de constricciones

$$\chi_\beta \approx 0 \qquad \text{y} \qquad \gamma_b \approx 0 \tag{1.79}$$

donde β y b corren por todas las constricciones de segunda y primera clase, respectivamente.

La dinámica ocurre en la superficie (1.79) y no en la superficie de constricción primaria. Así, para tener ecuaciones de movimiento consistentes con la superficie (1.79) debemos extremar a S_H, definida en (1.16), con las condiciones

$$\chi_\beta \approx 0, \qquad \gamma_b \approx 0, \qquad q^i(\tau_1) = q_1^i \qquad \text{y} \qquad q^i(\tau_2) = q_2^i. \tag{1.80}$$

Por lo tanto, la acción a extremar es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q} \cdot p - H(q,p) - u^\beta \chi_\beta - u^b \gamma_b], \tag{1.81}$$

con la condiciones de borde (1.2).

Si tenemos $\mathcal{B}$ constricciones de segunda clase, entonces, B de ellas serán primarias definidas por (1.64). Supongamos que ordenamos el conjunto de las constricciones de segunda clase de tal forma que las primeras B de ellas son las primarias. Entonces cambiaremos los multiplicadores de Lagrange u^β por otros, igualmente arbitrarios, de la siguiente forma

$$u^\beta = u'^\beta + f^\beta \text{si} \qquad \beta \leq B$$

con f^β definido en (1.63) y

$$u'^\beta = u^\beta \qquad \text{si} \qquad \beta > B.$$

Entonces (1.81) tienen la forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q} \cdot p - H' - u'^{\beta}\chi_{\beta} - u^b\gamma_b]. \tag{1.82}$$

Al aplicar el principio de acción a (1.82) obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H'\} + u^b\{q^i, \gamma_b\} + u'^{\beta}\{q^i, \chi_{\beta}\}, \tag{1.83}$$

$$p_i \approx \{p_i, H'\} + u^b\{p_i, \gamma_b\} + u'^{\beta}\{p_i, \chi_{\beta}\}, \tag{1.84}$$

$$\gamma_c \approx 0, \tag{1.85}$$

$$\text{y} \qquad \chi_{\beta} \approx 0. \tag{1.86}$$

Como todas las constricciones satisfacen las condiciones de regularidad, los teoremas 1 y 2 siguen siendo válidos.

Para la superficie (1.79) también se debe cumplir la condición de consistencia. Como H' es de primera clase, para las constricciones de primera clase es claro que

$$\dot{\gamma}_b \approx 0$$

Pero, para una constricción de segunda clase arbitraria se tiene la restricción

$$\dot{\chi}_{\alpha} \approx \{\chi_{\alpha}, H'\} + u^c\{\chi_{\alpha}, \gamma_c\} + u'^{\beta}\{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\} \approx u'^{\beta}\{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\} \approx 0. \tag{1.87}$$

Como $\{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\}$ es invertible, $u'^{\beta} \approx 0$.
Definamos la Hamiltoniana extendida como

$$H_E = H' + u^b\gamma_b. \tag{1.88}$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_E\}, \tag{1.89}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_E\}, \tag{1.90}$$

$$\gamma_c \approx 0 \tag{1.91}$$

$$\text{y} \qquad \chi_{\alpha} \approx 0. \tag{1.92}$$

Para (1.88) podemos definir la acción extendida

$$S_E(u^a, p, q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q}^i p_i - H_E] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q}^i p_i - H' - u^c\gamma_c]. \tag{1.93}$$

Las ecuaciones de movimiento que implica (1.93) coinciden con las ecuaciones del sistema sólo si éste no tiene constricciones primarias de segunda clase. Como vemos, la necesidad de extender la Hamiltoniana total a H_E no es inducida por la teoría Lagrangiana, ésta proviene de las características inherentes al esquema Hamiltoniano y tiene como consecuencia producir ecuaciones más generales que las generadas por H_T, es decir, por las ecuaciones de movimiento Lagrangianas originales. Es claro que cuando tomamos a los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones secundarias de primera clase como nulos se recupera la acción Hamiltoniana total.

1.7 Transformaciones de norma y paréntesis de Dirac

Cuando no podemos determinar todos los multiplicadores de Lagrange tendremos variables que tienen ambigüedades en su evolución en el tiempo, pues, si F es una función arbitraria del espacio fase y tomamos un conjunto de parámetros u^a tenemos

$$\dot{F}_u \approx \{F, H'\} + u^a\{F, \gamma_a\}. \tag{1.94}$$

Pero si tomamos otro conjunto v^a

$$\dot{F}_v \approx \{F, H'\} + v^a\{F, \gamma_a\}. \tag{1.95}$$

Sin embargo, la evolución no es arbitraria para cualquier variable. Por ejemplo, para todas las funciones de primera clase la evolución está bien determinada. Y en general cualquier función, O, que cumple

$$\{O, \gamma_a\}, \qquad \text{para} \quad \text{toda} \quad a \tag{1.96}$$

no tiene ambigüedad en su evolución. A las funciones que satisfacen la propiedad (1.96) se les llama observables o invariantes de norma.

Por otra parte, las variables canónicas deben satisfacer las ecuaciones de movimiento (1.89) y (1.90), sobre la superficie de constricción. Estas ecuaciones se deben resolver con las condiciones de borde (1.2) ó iniciales de la forma

$$q^i(\tau_1) = q^i_1 \qquad \text{y} \qquad p_i(\tau_1) = p_{i1}. \tag{1.97}$$

Cualquiera de estas dos condiciones limita el conjunto de los posibles multiplicadores de Lagrange que se pueden elegir.
Para hacer notar que se está tomando un conjunto de parámetros en particular pondremos un subíndice en las variables que no son invariantes de

norma.
Si imponemos las condiciones (1.97) sobre las ecuaciones de movimiento, entonces, para dos conjuntos diferentes de parámetros, v^a y u^a, y una función arbitraria del espacio fase F se debe cumplir que

$$F_v(q,p)(\tau_1) = F(q_v, p_v)(\tau_1) = F(q_1, p_1) = F_1 = F_u(q,p)(\tau_1). \qquad (1.98)$$

Ahora, si $\tau' = \tau_1 + \delta\tau$, por una parte tenemos que

$$F_u(\tau') = F(\tau_1) + \delta\tau(\{F, H'\} + u^a\{F, \gamma_a\}), \qquad (1.99)$$

y por otra

$$F_v(\tau') = F(\tau_1) + \delta\tau(\{F, H'\} + v^a\{F, \gamma_a\}). \qquad (1.100)$$

Luego,

$$\delta F = F_u(\tau') - F_v(\tau') = \delta\tau(u^a - v^a)\{F, \gamma_a\} = \epsilon^a\{F, \gamma_a\}. \qquad (1.101)$$

Por lo tanto, existe una transformación de F_u a F_v al tiempo τ', dada por (1.101). A (1.101) le llamaremos transformación de norma. Decimos, entonces, extendiendo la terminología usada en la teoría de campos de norma, que las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma.

Es claro que para los observables la evolución es la misma con las Hamiltonianas H', H_T y H_E. Por lo tanto, el formalismo extendido describe al mismo sistema de observables. La acción extendida simplemente contiene variables adicionales de norma pura, los nuevos multiplicadores de Lagrange, y, consecuentemente, invariantes de norma adicionales. Sin embargo, para cualquier variable que no sea invariante de norma la evolución debe tomarse con la Hamiltoniana extendida.

1.7.1 Paréntesis de Dirac

Si O_1 y O_2 son observables, no es posible asegurar que $\{O_1, O_2\}$ es observable. Sin embargo, si los dos observables son de primera clase, como vimos anteriormente, el paréntesis de Poisson entre ellos si es de primera clase y, entonces, observable.
Por otra parte, para una función de primera clase da lo mismo tomar la evolución con la Hamiltoniana canónica o extendida. Sin embargo, para un observable ésto no ocurre.

Sea O un observable, entonces, $O^* = O + v^\beta\chi_\beta$ es observable, para cualquier conjunto (v^β). También se cumple que $O \approx O^*$. Veamos si podemos fijar valores de v^β de tal forma que O^* sea de primera clase. Esto equivale a pedir que para toda χ_α se satisfaga la ecuación

$$\{O^*, \chi_\alpha\} \approx \{O, \chi_\alpha\} + v^\beta \{\chi_\beta, \chi_\alpha\} \approx 0. \tag{1.102}$$

De (1.102) concluimos que

$$O^* = O - \{O, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \chi_\beta \tag{1.103}$$

es de primera clase. Por lo tanto, a cada observable, O, le podemos asociar una función de primera clase, O^*, con la que coincide sobre la superficie de constricción.

En particular, para cualquier constricción de segunda clase

$$\chi^*_\beta = 0. \tag{1.104}$$

En general a cualquier función, F, del espacio fase le podemos asociar la función

$$F^* = F - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \chi_\beta. \tag{1.105}$$

Ahora, si F y G son dos funciones del espacio fase, se puede mostrar que

$$\{F^*, G^*\} \approx \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}. \tag{1.106}$$

Entonces, definiremos los paréntesis de Dirac como:

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}. \tag{1.107}$$

Con estos nuevos paréntesis, podemos ver que

$$\{\chi_\alpha, F\}^* \approx 0 \tag{1.108}$$

para cualquier función, F, del espacio fase.

También se puede probar que los paréntesis de Dirac satisfacen las propiedades

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*, \tag{1.109}$$
$$\{F_1 + F_2, G\}^* = \{F_1, G\}^* + \{F_2, G\}^*, \tag{1.110}$$
$$\{F_1 F_2, G\}^* = F_2\{F_1, G\}^* + F_1\{F_2, G\}^* \quad \text{y} \tag{1.111}$$
$$\{\{F, G\}^*, H\}^* + \{\{G, H\}^*, F\}^* + \{\{H, F\}^*, G\}^* = 0. \tag{1.112}$$

Estas son las mismas propiedades que satisface los paréntesis de Poisson. Por otra parte, si G es una función de primera clase se cumple

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\}, \tag{1.113}$$

con F una función del espacio fase cualquiera. En particular se tiene que $\{O, \gamma_a\} \approx 0$ si y sólo si $\{O, \gamma_a\}^* \approx 0$. Por lo tanto, podemos definir observable con los paréntesis de Poisson o de Dirac. Sin embargo, se puede mostrar con (1.112) que si O_1 y O_2 son observables, $\{O_1, O_2\}^*$ es observable.

Con los paréntesis de Dirac las ecuaciones de movimiento para q^i y p_i tienen la forma

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_E\}^*, \tag{1.114}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_E\}^*. \tag{1.115}$$

Y en general la evolución para cualquier variable $F(q, p)$

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}^*. \tag{1.116}$$

Así, con los paréntesis de Dirac la evolución de un observable es la misma si se toma con la Hamiltoniana canónica, total o extendida.

Como los generadores de las transformaciones de norma son funciones de primera clase, las transformaciones de norma también se pueden expresar en términos de los paréntesis de Dirac, es decir,

$$\{F, \gamma_\alpha\} \approx \{F, \gamma_\alpha\}^*.$$

Es claro que para el sistema físico es lo mismo cambiar todas las variables observables O del espacio fase por su asociada O^* que cambiar los paréntesis de Poisson por los de Dirac. Tomaremos el segundo camino. En ambos casos todos los observables coinciden con las funciones de primera clase.

Por las ecuaciones (1.108) y (1.104), podemos hacer fuertemente igual a cero las constricciones de segunda clase, antes o después de evaluar los paréntesis de Dirac. Por lo tanto, en lo sucesivo, todas las ecuaciones de la teoría son formuladas en términos de los paréntesis de Dirac, y las constricciones de segunda clase son identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras, es decir, las tomaremos como ecuaciones fuertes.

1.8 Invariancia de norma de la acción Hamiltoniana extendida

Supongamos que tenemos la acción extendida

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q}^i p_i - (H' + u^a\gamma_a)] \tag{1.117}$$

y las variaciones

$$\delta p_i = \{p_i, \mathcal{G}\}, \qquad \delta q_i = \{q_i, \mathcal{G}\}, \tag{1.118}$$

$$\delta H = \{p_i, \mathcal{G}\} \qquad y \qquad \delta\gamma_a = \{\gamma_a, \mathcal{G}\} \tag{1.119}$$

con $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, p, q)$. En esta sección los índices a, b y c corren en todas las constricciones de primera clase.
Con estas variaciones δS_E tiene la forma

$$\delta S_E = [p_i\delta q^i - \mathcal{G}]|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a\gamma_a)]. \tag{1.120}$$

Por lo tanto, si δu^a es tal que

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a\gamma_a) = 0, \tag{1.121}$$

se cumple

$$\delta S_E = [p_i\delta q^i - \mathcal{G}]|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.122}$$

En general dada una $\mathcal{G}$ no es fácil encontrar a δu^a. Pero si

$$\mathcal{G} = \epsilon^a(t, p, q)\gamma_a, \tag{1.123}$$

con $\epsilon^a(t, p, q)$ una función cualquiera, tomando en cuenta que

$$\{H', \gamma_a\} = V_a^b\gamma_b \qquad \text{y} \qquad \{\gamma_a, \gamma_b\} = C_{ab}^c\gamma_c,$$

tenemos

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a\gamma_a) =$$

$$\gamma_a[\frac{\partial\epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\}u^c + u^c\epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a - \delta u^a]. \tag{1.124}$$

Entonces, si

$$\delta u^a = \frac{\partial\epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\}u^c + u^c\epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a, \tag{1.125}$$

para el caso particular de (1.123), (1.122) tiene la forma

$$\delta S_E = [p_i \frac{\partial(\epsilon^a \gamma_a)}{\partial p_i} - \epsilon^a \gamma_a]|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.126}$$

Así, siempre que (1.126) se anule en los extremos, la acción es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\delta_\epsilon p_i = \{p_i, \epsilon^a \gamma_a\}, \tag{1.127}$$
$$\delta_\epsilon q^i = \{q^i, \epsilon^a \gamma_a\} \tag{1.128}$$

$$\text{y} \qquad \delta u^a = \frac{\partial \epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\} u^c + u^c \epsilon^b C^a_{bc} - \epsilon^b V^a_b. \tag{1.129}$$

Ahora, si $\mathcal{F}$ es una función de primera clase,

$$\{\mathcal{F}, \gamma_c\} = F^b_c \gamma_b, \tag{1.130}$$

entonces, para cada función del espacio fase, R, podemos definir la transformación

$$\delta_{cF} R = \{R, \epsilon\{\mathcal{F}, \gamma_c\}\} = \{R, \epsilon F^b_c \gamma_b\}. \tag{1.131}$$

Para este caso la ecuación (1 121) implica que si $\delta_{aF} u^b$ tiene la forma

$$\delta_{a\mathcal{F}} u^b = \frac{\partial(\epsilon F^b_c)}{\partial \tau} - [\{H', \epsilon F^b_c\} + \epsilon F^a_c V^b_a + u^a \epsilon F^d_c C^b_{ab} + u^a \{\gamma_a, \epsilon F^b_c\} \tag{1.132}$$

entonces, si

$$\delta_{a\mathcal{F}} S_E = (p_i \delta_{a\mathcal{F}} q^i - \epsilon F^b_a \gamma_b)|_{\tau_1}^{\tau_2} \tag{1.133}$$

se anula en los bordes, la acción S_E es invariante bajo las transformaciones

$$\delta_{a\mathcal{F}} q^i, \qquad \delta_{a\mathcal{F}} p_i \qquad \text{y} \qquad \delta_{a\mathcal{F}} u^b. \tag{1.134}$$

Para terminar esta sección veamos las simetrías de norma del sistema que presentamos al principio de este capítulo.

Como la Hamiltoniana total es (1.35) y la única constricción es (1.34), la condición de consistencia implica que

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\} = -p_x \approx 0, \tag{1.135}$$

y nada más. Entonces la Hamiltoniana extendida y la acción extendida son, respectivamente,

$$H_E = \frac{1}{2}p_x + yp_x + \lambda^1 p_y + \lambda^2 p_x, \tag{1.136}$$

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - (\frac{1}{2}p_x + yp_x + \lambda^1 p_y + \lambda^2 p_x). \tag{1.137}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento extendidas son

$$\dot{x} = p_x + y + \lambda^2, \tag{1.138}$$

$$\dot{y} = \lambda^1, \tag{1.139}$$

$$\dot{p}_x = 0, \tag{1.140}$$

$$\dot{p}_y = -p_x, \tag{1.141}$$

$$p_x = 0, \tag{1.142}$$

$$p_y = 0. \tag{1.143}$$

Como se esperaba, estas ecuaciones son más generales que las ecuaciones Lagrangianas.

Para este sistema las transformaciones de norma son

$$\delta_\epsilon x = \epsilon^2, \tag{1.144}$$

$$\delta_\epsilon y = \epsilon^1, \tag{1.145}$$

$$\delta_\epsilon p_x = 0, \tag{1.146}$$

$$\delta_\epsilon p_y = 0, \tag{1.147}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^1 = \dot{\epsilon}^1, \tag{1.148}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^2 = \dot{\epsilon}^2 - \epsilon^1. \tag{1.149}$$

Cuando ocurre que $\delta_\epsilon \lambda^2 = 0$ tendremos

$$\delta_\epsilon x = \epsilon^2, \tag{1.150}$$

$$\delta_\epsilon y = \dot{\epsilon}^2, \tag{1.151}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^1 = \ddot{\epsilon}^2, \tag{1.152}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^2 = 0. \tag{1.153}$$

Esta es la versión infinitesimal de las transformaciones (1.24). Sin embargo, es claro que éste es sólo un caso particular de las simetrías de S_E.

Para este sistema, con cualquier transformación de norma, (1.126) se anula identicamente. Por lo tanto, la acción (1.137) es invariante ante cualquier transformación de norma.

1.9 Fijación de la norma

Cuando tenemos constricciones de primera clase y, por lo tanto, libertad de norma los multiplicadores de Lagrange asociados a estas constricciones son indeterminados. De hecho dentro de la teoría no tenemos forma de determinarlos. Por lo que debemos recurrir a elementos exteriores a la teoría para fijar estos parámetros.

Una forma natural para determinar los multiplicadores de Lagrange es implementando tantas constricciones nuevas como parámetros arbitrarios haya. Es decir, definiendo una nueva superficie de constricción

$$\chi_\beta(q,p) = 0, \qquad \gamma_a(q,p) = 0. \qquad N_a(q,p) = 0. \tag{1.154}$$

Las constricciones N_a deben satisfacer las condiciones de regularidad y deben ser tales que la condición de consistencia aplicada a (1.154) implique que se determinen todos los multiplicadores de Lagrange.
Para que esto se cumpla debe pasar que

$$\det\{N_a, \gamma_b\} \not\approx 0. \tag{1.155}$$

La condición (1.155) implica que en (1.154) ya no hay constricciones de primera clase ni transformaciones de norma. A las constricciones N_a les llamaremos condiciones de norma.

Una vez determinados los multiplicadores de Lagrange los podemos sustituir en las ecuaciones de movimiento, lo que nos dará como resultado:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H'\} + u^b(q,p,\tau)\{q^i, \gamma_b\}, \tag{1.156}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H'\} + u^b(q,p,\tau)\{p_i, \gamma_b\}. \tag{1.157}$$

Este sistema de ecuaciones estará definido sobre la superficie (1.154) y tiene las condiciones de borde (1.2). Para que tenga sentido este problema definido sobre la superficie (1.154), debemos imponer que N_a sea tal que:

(a) Las condiciones de norma deben satisfacer las condiciones de frontera del principio de acción. Es decir, se debe cumplir que

$$N_a(q_1^i, p) = 0 \qquad \text{y} \qquad N_a(q_2^i, p) = 0. \tag{1.158}$$

Por otra parte, la forma de fijar la norma no debe afectar los elementos observables de la teoría. Por lo tanto, el conjunto de constricciones N_a también debe satisfacer que:

(b) Las constricciones N_a deben ser accesibles. Es decir, dado cualquier conjunto de variables canónicas que cumplen

$$\chi_\beta(q,p) = 0, \qquad \text{y} \qquad \gamma_a(q,p) = 0 \tag{1.159}$$

debe existir una transformación de norma que mapee el conjunto dado de variables q^i y p_i sobre un conjunto que satisfaga las condiciones (1.154). Esta transformación debe ser obtenida por iteración de transformaciones $\delta u^a\{F, \gamma_a\}$.

Esta condición nos asegura que las condiciones de norma no modificarán las propiedades físicamente relevantes del sistema, pero sí restringen la libertad de norma. Al conjunto de variables canónicas que satisfacen (1.154) se le llama espacio reducido. Si imponemos dos conjuntos de condiciones de norma accesibles, N_{a1} y N_{a2}, la condición **(b)** nos permite mapear el espacio reducido definido por N_{a1} al definido por N_{a2} mediante una transformación de norma.

Si tomamos una norma que no satisfaga la condición **(a)**, tendremos que cambiar las condiciones de borde (1.2) a las ecuaciones (1.156) y (1.157). Esto implica cambiar de principio variacional.
Sin embargo, es posible proponer condiciones de norma que no se satisfacen en los bordes, pero existe una transformación de norma que mapea la norma impuesta a otra que si cumple las condiciones de borde. Esto lo veremos en la siguiente sección

Si imponemos condiciones de norma que no son accesibles, por ejemplo si hay variables canónicas de primera clase que no cumplen (1.154), tendremos trayectorias en las superficie de constricción que no están en el espacio reducido (1.154) y no podemos conectarlas con (1.154) mediante transformaciones de norma. Entonces esas condiciones de norma definirán un espacio reducido desconectados de un sector de la superficie de constricción.

Una vez fijada la norma podemos pasar al paréntesis de Dirac. Finalmente, tendremos un teoría libre de constricciones en el sentido de que todas las constricciones podrán ser consideradas como identidades que expresan algunas variables en términos de otras.

1.10 Condiciones de borde y principio de acción

En esta sección estudiaremos las condiciones de borde del principio de acción y la forma en que se pueden modificar agregando un término de borde a la acción. Primero lo haremos para sistemas sin constricciones y posteriormente para sistemas que tienen constricciones. Para los sistemas que tienen constricciones mostraremos que las condiciones de borde de las ecuaciones de movimiento también se pueden modificar mediante una transformación de norma.

1.10.1 Sistemas sin constricciones

Supongamos que tenemos la acción Hamiltoniana

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i \dot{q}^i - H]. \tag{1.160}$$

Si hacemos las variaciones

$$\tilde{q}^i = q^i + \delta q^i, \tag{1.161}$$

$$\text{y} \qquad \tilde{p}_i = p_i + \delta p_i \tag{1.162}$$

tenemos que

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\delta p_i (\dot{q}^i - \{q^i, H\}) - \delta q^i (\dot{p}_i + \{p_i, H\})] + [p_i \delta q^i]_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{1.163}$$

Por lo tanto, si pedimos que

$$\delta q^i(\tau_1) = \delta q^i(\tau_2) = 0, \tag{1.164}$$

entonces, se cumple

$$\delta S = 0 \tag{1.165}$$

sólo si se satisfacen la ecuaciones

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \tag{1.166}$$

$$p_i = \{p_i, H\}, \tag{1.167}$$

$$q^i(\tau_1) = q^i_1 \qquad \text{y} \qquad q^i(\tau_2) = q^i_2. \tag{1.168}$$

Ahora, consideremos la acción

$$\begin{aligned} S_F &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i \dot{q}^i - H - \frac{dF(q,p,\tau)}{d\tau}] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i q^i - H] - [F(q,p,\tau)]_{\tau_1}^{\tau_2}. \end{aligned} \tag{1.169}$$

(1.169) difiere de (1.160) sólo por el término de borde

$$F(q,p,\tau)|_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{1.170}$$

En general (1.170) es diferente para cada trayectoria, $(q^i(\tau), p_i(\tau))$, del espacio fase.

El término de borde (1.170) es útil para cambiar las condiciones de borde de las ecuaciones (1.166) y (1.167). Si hacemos las variaciones (1.161) y (1.162) a la acción (1.169) tendremos que

$$\delta S_F = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\delta p_i(\dot{q}^i - \{q^i, H\}) - \delta q^i(\dot{p}_i + \{p_i, H\})] + [p_i \delta q^i - \delta F]_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{1.171}$$

Si F depende de p e imponemos (1.164), $\delta S_F = 0$ no implica las ecuaciones (1.166) y (1.167).

Ahora, si F es tal que

$$p_i \delta q^i - \delta F = P_i(q,p)\delta Q^i(q,p), \tag{1.172}$$

con $Q^i(q,p)$ un conjunto de funciones independientes, y pedimos que se cumpla

$$\delta Q^i(q,p)(\tau_1) = \delta Q^i(q,p)(\tau_2) = 0, \tag{1.173}$$

entonces, $\delta S_F = 0$ implica las ecuaciones (1.166) y (1.167) con las condiciones de borde

$$Q^i(q,p)(\tau_1) = Q_1^i \qquad \text{y} \qquad Q^i(q,p)(\tau_2) = Q_2^i. \tag{1.174}$$

Por lo tanto, el término de borde (1.170) nos permite cambiar las condiciones de borde de las ecuaciones de movimiento (1.166) y (1.167).

Supongamos que la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \tag{1.175}$$

es invertible, entonces, podemos expresar todos los términos de la ecuación (1.172) como funciones de las variables (Q^i, P_i). Así, (1.172) tiene la forma

$$\delta Q^i(p_k \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} - \frac{\partial F}{\partial Q^i} - P_i) + \delta P_i(p_k \frac{\partial q^k}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i}) = 0. \tag{1.176}$$

Para este caso ((1 175) invertible) P_i y Q^i son independientes y la ecuación (1.176) implica

$$P_i = p_k \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} - \frac{\partial F}{\partial Q^i} \tag{1.177}$$

$$\text{y} \qquad p_k \frac{\partial q^k}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} = 0. \tag{1.178}$$

Si expresamos la acción (1.169) en términos de (Q^i, P_i), y usamos (1.177) y (1.178), tendremos que

$$S_F = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P_i \dot{Q}^i - K(Q, P)] \tag{1.179}$$

con

$$K(Q, P) = H(Q, P) + \frac{\partial F(Q, P, \tau)}{\partial \tau}. \tag{1.180}$$

Aplicando el principio de acción a (1.179) con las condiciones de borde

$$\delta Q^i(q, p)(\tau_1) = \delta Q^i(q, p)(\tau_2) = 0, \tag{1.181}$$

las ecuaciones para el extremo son

$$\dot{Q}^i = \{Q^i, K\}, \tag{1 182}$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, K\}, \tag{1.183}$$

$$Q^i(\tau_1) = Q^i_1 \qquad \text{y} \qquad Q^i(\tau_2) = Q^i_2. \tag{1.184}$$

Ocupando la ecuación (1.172) y cambiando la dependencia de F podemos obtener las diferentes relaciones que se tienen para las transformaciones canónicas. Por ejemplo, si hacemos depender a F sólo de q^i y Q^i, entonces, (1.172) tiene la forma

$$p_i \delta q^i - \frac{\partial F}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial F}{\partial Q^i} \delta Q^i = P_i \delta Q^i. \tag{1.185}$$

De donde,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \tag{1.186}$$

$$\text{y} \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}. \tag{1.187}$$

Si tomamos $F = F_2(q,P,\tau) - P_i Q^i$ y expresamos (1.172) en términos de q y P tendremos las relaciones

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \tag{1.188}$$

$$\text{y} \qquad Q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \tag{1.189}$$

Las relaciones para las demás funciones generadoras se pueden obtener de la misma manera. Hemos hecho una deducción de las transformaciones canónicas que nos será útil posteriormente para relacionar las condiciones de borde del principio de acción y las condiciones de norma.

Si podemos resolver las ecuaciones (1.166) y (1.167) con las condiciones de borde (1.174), podemos resolver las ecuaciones (1.182), (1.183) y (1.184), y a la inversa. F nos da una forma de pasar de un sistema de ecuaciones a otro. Observese que ambos sistemas de ecuaciones tienen las mismas condiciones de borde. Por otra parte, es claro que no podemos decir que el sistema de ecuaciones (1.166) y (1.167) con las condiciones de borde (1.168) es el mismo que con las condiciones de borde (1.174).
Por ejemplo, si tomamos $F = p_i q^i$ (1.169) tiene las ecuaciones de movimiento (1.166) y (1.167) con las condiciones de borde

$$p_i(\tau_1) = p_{i1} \qquad p_i(\tau_2) = p_{i2}. \tag{1.190}$$

Antes de pasar al análisis de las condiciones de norma y las condiciones de borde veremos la equivalencia entre diferentes sistemas a través de las transformaciones canónicas.

Sea

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p\dot{q} - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)] \tag{1.191}$$

las ecuaciones de movimiento para (1.191) son

$$\dot{q} = p, \tag{1.192}$$

$$\dot{p} = -q, \tag{1.193}$$

$$q(\tau_1) = q_1 \qquad q(\tau_2) = q_2 \tag{1.194}$$

cuya solución es

$$q(\tau) = \frac{q_1 \mathrm{sen}(\tau_2 - \tau) + q_2 \mathrm{sen}(\tau - \tau_1)}{\mathrm{sen}(\tau_2 - \tau_1)}, \tag{1.195}$$

$$p(\tau) = \frac{-q_1 \cos(\tau_2 - \tau) + q_2 \cos(\tau - \tau_1)}{\mathrm{sen}(\tau_2 - \tau_1)}. \tag{1.196}$$

Es importante hacer notar que cuando imponemos las condiciones de borde genéricas la dinámica sigue existiendo, pero, si se toma $q_1 = q_2 = 0$, la dinámica se elimina.

Ahora, consideremos la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[p\dot{q} - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{d(qp)}{dt}]. \tag{1.197}$$

Para este caso el término de borde (1.172) es

$$-q\delta p = P\delta Q. \tag{1.198}$$

Luego las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{q} = p, \tag{1.199}$$

$$\dot{p} = -q, \tag{1.200}$$

$$p(\tau_1) = p_1 \qquad \text{y} \qquad p(\tau_2) = p_2. \tag{1.201}$$

cuya solución es

$$q(\tau) = \frac{p_1 \cos(\tau_2 - \tau) - p_2 \cos(\tau - \tau_1)}{\operatorname{sen}(\tau_2 - \tau_1)}, \tag{1.202}$$

$$p(\tau) = \frac{p_1 \operatorname{sen}(\tau_2 - \tau) + p_2 \operatorname{sen}(\tau - \tau_1)}{\operatorname{sen}(\tau_2 - \tau_1)}. \tag{1.203}$$

Consideremos la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[p\dot{q} - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{1}{2}\frac{d(qp)}{dt}]. \tag{1.204}$$

Para este caso el término de borde (1.172) es

$$\frac{1}{2}(p\delta q - q\delta p) = P\delta Q. \tag{1.205}$$

La ecuación (1.205) es satisfecha por las funciones

$$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \tag{1.206}$$

$$Q = \tan^{-1}(\frac{q}{p}). \tag{1.207}$$

Por lo tanto, si $\delta Q(\tau_1) = \delta Q(\tau_2) = 0$, $\delta S = 0$ implica las ecuaciones

$$\dot{q} = p, \tag{1.208}$$

$$\dot{p} = -q, \tag{1.209}$$

$$Q(\tau_1) = Q_1 \qquad \text{y} \qquad Q(\tau_2) = Q_2. \tag{1.210}$$

Sustituyendo (1.206) y (1.207) en (1.204) tendremos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P\dot{Q} - P]. \tag{1.211}$$

Aquí la Hamiltoniana es $H = P$, ésta representa la Hamiltoniana de un fonón. Para ver el significado físico que puede adquirir un sistema con esta Hamiltoniana se puede consultar el tercer capítulo de [21].

Las ecuaciones de movimiento para la acción (1.211) son

$$\dot{Q} = 1, \tag{1.212}$$

$$\dot{P} = 0, \tag{1.213}$$

$$Q(\tau_1) = Q_1 \qquad \text{y} \qquad Q(\tau_2) = Q_2. \tag{1.214}$$

La solución del sistema de ecuaciones de (1.211) son

$$Q = Q_1 + (\frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1})(Q_2 - Q_1), \tag{1.215}$$

$$P = \frac{Q_2 - Q_1}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{1.216}$$

Con la ayuda de las ecuaciones (1.206) y (1.207) tenemos que la solución para las ecuaciones (1.208), (1.209), (1.210) son:

$$q(\tau) = \sqrt{2\frac{(Q_2 - Q_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}}\mathrm{sen}(Q_1 + (\frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1})(Q_2 - Q_1)), \tag{1.217}$$

$$p(\tau) = \sqrt{2\frac{(Q_2 - Q_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}}\cos(Q_1 + (\frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1})(Q_2 - Q_1)). \tag{1.218}$$

Existe una transformación para pasar de (1.204) a (1.211), sin embargo, como vemos, no podemos decir que ambas acciones representan al mismo sistema físico.

1.10.2 Condiciones de borde y transformaciones de norma

El procedimiento para cambiar las condiciones de borde de las ecuaciones de movimiento de sistemas Hamiltonianos sin constricciones también se puede hacer para sistemas Hamiltonianos que tienen constricciones.

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas canónicas q^i y p^i ($i = 1, ..., n$), un conjunto de constricciones de primera clase γ_a ($a = 1, ..., m$) y una Hamiltoniana de primera clase H_0. Así, este sistema tiene la acción Hamiltoniana

$$S(q,p,\lambda) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \gamma_a]. \tag{1.219}$$

Al aplicar el principio de acción con variaciones δq^i tales que se anulan en los extremos, $\delta q^i(\tau_1) = \delta q^i(\tau_2) = 0$, es decir, con los extremos de $q^i(\tau)$ fijos en τ_1 y τ_2, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} + \lambda^a \{q^i, \gamma_a\}, \tag{1.220}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} + \lambda^a \{p_i, \gamma_a\}, \tag{1.221}$$

$$\gamma_a = 0, \tag{1.222}$$

$$q^i(\tau_1) = q_1^i \qquad \text{y} \qquad q^i(\tau_2) = q_2^i \tag{1.223}$$

Consideremos la acción

$$S_B(q,p,\lambda) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i q^i - H_0 - \lambda^a \gamma_a - \frac{dB(q,p,\tau)}{d\tau}]. \tag{1.224}$$

Al hacer una variación a (1.224) tenemos

$$\begin{aligned} \delta S_B = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\delta p_i (\dot{q}^i - \{q^i, H\} - \lambda^a \{q^i, \gamma_a\}) - \\ \delta q^i (\dot{p}_i + \{p_i, H\} + \lambda^a \{p_i, \gamma_a\}) + \delta \lambda^a \gamma_a] \\ -(p_i \delta q^i - \delta B)_{\tau_1}^{\tau_2}. \end{aligned} \tag{1.225}$$

Ahora, si B es tal que

$$p_i \delta q^i - \delta B = P_i(q,p) \delta Q^i(q,p), \tag{1.226}$$

con $Q^i(q,p)$ funciones independientes, y se cumple

$$\delta Q^i(\tau_1) = \delta Q^i(\tau_2) = 0, \tag{1.227}$$

$\delta S_B = 0$ implica las ecuaciones (1.220), (1.221) y (1.222) con las condiciones de borde

$$Q^i(\tau_1) = Q_1^i \qquad \text{y} \qquad Q^i(\tau_2) = Q_2^i. \tag{1.228}$$

En este caso, en la acción (1.224) podemos cambiar las condiciones de borde sobre $q^i(\tau)$ a otras condiciones en las que las funciones $Q^i(q,p)$ estén fijas en τ_1 y τ_2.

De la misma manera que en el caso sin constricciones, si la matriz (1.175) es invertible, podemos expresar la acción (1.224) en terminos de las variables Q^i y P_i. En este caso (1.224) tiene la forma

$$S_B(Q,P,\lambda) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[P_i\dot{Q}^i - K_0(Q,P) - \lambda^a\gamma_a(Q,P)] \tag{1.229}$$

con

$$K_0(Q,P) = H_0(Q,P) + \frac{\partial B(Q,P,\tau)}{\partial\tau}. \tag{1.230}$$

También podemos cambiar las condiciones de borde a un principio de acción mediante una transformación de norma.
Definamos

$$z_l = (q_1,...,q_n,p_1,...,p_n). \tag{1.231}$$

Sea (y_a) $(a = 1,...,m)$ un subconjunto de las coordenadas de z_l. Supongamos que se satisfacen las condiciones de borde

$$y^a(\tau_1) = \zeta_{a1} \qquad \text{y} \qquad y^a(\tau_2) = \zeta_{a2} \tag{1.232}$$

y consideremos la transformación de norma

$$\bar{y}_a(\tau) = y_a(\tau) - \{y_a, \epsilon^b\gamma_b\}. \tag{1.233}$$

Tomemos la transformación de norma tal que las $\bar{y}_a(\tau)$ satisfagan

$$y_a(\tau_1) = y_{a1} \qquad \text{y} \qquad y_a(\tau_2) = y_{a2}. \tag{1.234}$$

Si las (y_a) satisfacen que det $\{y_a,\gamma_a\} \not\approx 0$, la condición (1.234) determina completamente a ϵ^a en la frontera. Con ϵ^a que satisface (1.234) se puede construir la transformación de norma

$$Q^i = \bar{q}^i(\tau) = q^i(\tau) - \{q^i, \epsilon^a\gamma_a\} \tag{1.235}$$

$$\text{y} \qquad P_i = \bar{p}_i(\tau) = p_i(\tau) - \{p_i, \epsilon^a\gamma_a\}. \tag{1.236}$$

Para este caso particular (1.226) tiene la forma

$$\bar{p}_i\delta\bar{q}^i = p_i\delta q^i - \delta B. \tag{1.237}$$

De un cálculo a primer orden encontramos que

$$B = (p_i \delta q^i - \epsilon^a \gamma_a). \tag{1.238}$$

De donde, (1.224) tiene la forma

$$S_B = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \gamma_a] - (p_i \delta q^i - \epsilon^a \gamma_a)_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{1.239}$$

Ahora, si aplicamos las transformaciones de norma (1.127), (1.128) y (1.129), con $-\epsilon^a$, a (1.219) tendremos

$$S_B = S(\bar{q}^i, \bar{p}_i, \bar{\lambda}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\bar{p}_i \frac{d\bar{q}^i}{dt} - \bar{H}_0 - \bar{\lambda}^a \bar{\gamma}_a]. \tag{1.240}$$

Por lo tanto, al extremar a S_B tomado como variables independientes a $\bar{q}^i, \bar{p}_i$ y $\bar{\lambda}^a$ obtendremos las ecuaciones de movimiento (1.220), (1.221) y (1 222) para estas variables, con las condiciones de borde que determina (1.235). Es importante remarcar que este proceso se hace mediante una transformación de norma, pues, esto implica que no se alteran las variables físicas del sistema y, por lo tanto, el sistema físico es el mismo.

Ilustremos el procedimiento que acabamos de mostrar con un ejemplo concreto. Sea la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{x}\pi_x + \dot{y}\pi_y - \lambda\phi] \tag{1.241}$$

con

$$\phi = (\pi_x \pi_y - \frac{\pi_y^2}{2} + e^{2y}). \tag{1.242}$$

(1.241) es la versión extendida de la acción de un modelo gravitacional en dos dimensiones (ver [20]). Así, tenemos las transformaciones de norma

$$\delta_\epsilon x \approx \epsilon \pi_y, \tag{1.243}$$

$$\delta_\epsilon y \approx \pi_x - \pi_y, \tag{1.244}$$

$$\delta_\epsilon \pi_x \approx 0, \tag{1.245}$$

$$\delta_\epsilon \pi_y \approx -2\epsilon e^{2y}, \tag{1.246}$$

$$\delta_\epsilon \lambda \approx \dot{\epsilon}. \tag{1.247}$$

Por lo que,

$$x = \bar{x} + \epsilon \bar{\pi}_y, \tag{1.248}$$

$$y = \bar{y} + \epsilon(\bar{\pi}_x - \bar{\pi}_y), \tag{1.249}$$
$$\pi_x = \bar{\pi}_x, \tag{1.250}$$
$$\pi_y = \bar{\pi}_x - 2\epsilon e^{2\bar{y}}, \tag{1.251}$$
$$\lambda = \bar{\lambda} + \dot{\epsilon}. \tag{1.252}$$

Entonces, la ecuación (1.126) para este sistema es igual a

$$\epsilon(\pi_x\pi_y - \frac{\pi_y^2}{2} - e^{2y}). \tag{1.253}$$

Luego, al aplicar una transformación de norma (1.241)

$$\begin{aligned} S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{x}\pi_x + \dot{y}\pi_y - \lambda\phi] - [\epsilon(\pi_x\pi_y - \frac{\pi_y^2}{2} - e^{2y})]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\frac{d\bar{x}}{dt}\bar{\pi}_x + \frac{d\bar{y}}{dt}\bar{\pi}_y - \bar{\lambda}\bar{\phi}]. \end{aligned} \tag{1.254}$$

Por otra parte, supongamos que imponemos la norma

$$\chi = y(\tau) - f(\tau, \pi_x). \tag{1.255}$$

La condición (1.255) fija la norma, dado que

$$\{\chi, \phi\} = -\pi_y + \pi_x. \tag{1.256}$$

Es claro que si f cumple que

$$f(\tau, \pi_x)(\tau_1) = y_1 \qquad \text{y} \qquad f(\tau, \pi_x)(\tau_2) = y_2, \tag{1.257}$$

la norma satisface las condiciones de borde del principio de acción.

Sin embargo, tomemos una $f(\tau, \pi_x)$ arbitraria. Entonces apliquemos las transformaciones de norma, tal que,

$$y_1 = \bar{y}(\tau_1) = y(\tau_1) - \epsilon(\tau_1)(\pi_x - \pi_y), \tag{1.258}$$
$$y_2 = \bar{y}(\tau_2) = y(\tau_2) - \epsilon(\tau_2)(\pi_x - \pi_y). \tag{1.259}$$

De un cálculo directo encontramos que

$$\epsilon(\pi_x, \pi_y, \tau) = \frac{f(\tau, \pi_x) - b(\tau)}{(-\pi_y + \pi_x)}. \tag{1.260}$$

Con $b(\tau)$ cualquier función que satisfaga que

$$b(\tau_1) = y_1 \qquad \text{y} \qquad b(\tau_2) = y_2.$$

Es claro que cuando f satisface las condiciones de borde (1.257) ϵ se anula en la frontera, y la acción no se modifica.

Al cambiar de variables en la condición de norma tenemos

$$\chi = \bar{y}(\tau) - b(\tau). \tag{1.261}$$

Esta norma satisface las condiciones a la frontera y, además, al cambiar de variables en la norma tenemos

$$\{\chi(\bar{y}, \tau), \bar{\phi}\} = \bar{\pi}_t - \bar{\pi}_y, \tag{1.262}$$

por lo tanto, χ sigue fijando bien la norma. También se cumple que la norma final (1.262) no depende de la función f.

Supongamos que desde un principio tomamos la norma (1.255) con f tal que se satisfacen las condiciones de borde. Para tener el espacio reducido debemos hacer igualdades fuertes a (1.242) y (1.255). De (1.242) tenemos que

$$\pi_y = \pi_x \pm \sqrt{\pi_x^2 + 2e^{2f(\tau,\pi_x)}}. \tag{1.263}$$

Al sustituir χ y π_y en la acción tendremos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[x\pi_x + \dot{f}(\tau,\pi_x)(\pi_x \pm \sqrt{\pi_x^2 + 2e^{2f(\tau,\pi_x)}})]. \tag{1.264}$$

Sea $t(\tau)$ tal que $\frac{dt}{d\tau} = \dot{f}(\tau,\pi_x)$, entonces, integrando de τ_1 a τ

$$t - t_1 = f(\tau,\pi_x)(\tau) - f(\tau,\pi_x)(\tau_1) = f(\tau,\pi_x)(\tau) - y_1. \tag{1.265}$$

De donde,

$$f(\tau,\pi_x)(\tau) = y_1 + t - t_1. \tag{1.266}$$

Luego, la acción reducida tiene la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt[\dot{x}\pi_x + \pi_x \pm \sqrt{\pi_t^2 + 2e^{2(y_1+t-t_1)}}]. \tag{1.267}$$

Por lo tanto, el espacio reducido representa un sistema de una dimensión con la Hamiltoniana

$$H = -[\pi_x \pm \sqrt{\pi_x^2 + 2e^{2(y_1+t-t_1)}}]. \tag{1.268}$$

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento de este sistema reducido son

$$\dot{x} = -1 \mp \frac{\pi_x}{\sqrt{\pi_x^2 + 2e^{2(y_1+t-t_1)}}} \tag{1.269}$$

$$\text{y} \qquad \dot{\pi}_x = 0. \tag{1.270}$$

De un cálculo directo se puede ver que si obtenemos las ecuaciones de movimiento del la acción (1.241), sustituimos en ellas la condición de norma (1.255) y tomamos el mismo parámetro t, se obtienen las ecuaciones (1.269) y (1.270).

Se puede observar que el sistema final no depende de la función $f(\tau, \pi_x)$ que se tomó en la condición de norma.

1.11 Número de grados de libertad

Cuando una teoría tiene sólo constricciones de segunda clase, y por lo tanto no tiene libertad de norma, no tenemos parámetros indeterminados. En este caso un conjunto de variables canónicas que satisfagan las constricciones determinan un y sólo un estado físico.

En un sistema con libertad de norma tendremos sólo constricciones de segunda clase después de fijar la norma . Por lo tanto, si $\mathbf{N_F}$ es el número de grados de libertad físicos del sistema, N_T el número total de variables canónicas, N_{ca} el número de grados de variables canónicas independientes que se obtienen una vez fijada la norma, N_χ el número de constricciones de segunda clase antes de fijar la norma, N_γ el número de constricciones de primera clase y N_n el número de condiciones de norma, entonces, el número de grados de libertad físicos son

$$\begin{aligned} \mathbf{N_F} \equiv \frac{N_{ca}}{2} &= \frac{1}{2}[N_T - N_\chi - N_\gamma - N_n] \\ &= \frac{1}{2}[N_T - N_\chi - 2N_\gamma]. \end{aligned} \tag{1.271}$$

Como el número de constricciones de segunda clase es siempre par, el número total de variables canónicas independientes es también par. Esto corresponde a un número entero de grados de libertad físicos.

El conteo está bien definido y no es ambiguo para un número finito de grados de libertad.

1.12 Cuantización por el Método de Dirac

Si bien no vamos a cuantizar a ningún sistema en el segundo capítulo, mostraremos un método natural para cuantizar sistemas que tienen constricciones.

Existen varios métodos para cuantizar un sistema con constricciones (ver [12]). El método de Dirac nos da una forma natural para cuantizar a los sistemas con libertad de norma. El primer paso es promover a operadores las constricciones de primera clase en el espacio de Hilbert del problema, esto se hace reemplazando las variables clásicas por sus operadores. Generalmente se tienen problemas de ordenamiento para construir dichos operadores, estos problemas deben ser resueltos con algún criterio adicional.
En el formalismo cuántico los operadores $\hat{\gamma}_a$ serán los generadores de las transformaciones de norma infinitesimales, es decir, si $\hat{O}$ es un operador

$$\delta\hat{O} = \epsilon^a[\hat{O}, \hat{\gamma}_a]$$

representa una transformación de norma.

Es claro que los estados físicos $|\Psi>$ del sistema deben ser invariantes de norma. Por lo tanto, deben satisfacer que

$$e^{\alpha^a\hat{\gamma}_a}|\Psi>=|\Psi>, \tag{1.272}$$

con α_a un parámetro cualquiera. Esta restricción implica que

$$\hat{\gamma}_a|\Psi>=0. \tag{1.273}$$

Por otra parte, se definen como operadores observables de la teoría a todos aquellos operadores Hermíticos que conmutan con todas las constricciones de primera clase, es decir,

$$\hat{F} = \hat{F}^\dagger \text{ es observable} \Longleftrightarrow \qquad \delta\hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a\hat{\gamma}_a] = 0.$$

De esta forma se construye la versión cuántica de un sistema con libertad de norma. Sin embargo, se tienen problemas sin resolver, pues, por ejemplo, las constantes de estructura del álgebra de constricciones de primera clase son funciones del espacio fase, por lo que tenemos un problema de ordenamiento que puede resultar muy serio. Por otra parte, el método de Dirac no da una regla para definir el producto escalar de los estados físicos, luego, no tenemos directamente una interpretación probabilística de la teoría. Sin embargo, se tiene la ventaja de no necesitar fijar la norma antes de cuantizar al sistema.

1.12.1 Ejemplos

1.12.2 Partícula no relativista.

La acción para la partícula no-relativista en un potencial $V(x)$ es

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L_0, \tag{1.274}$$

con la Lagrangiana

$$L_0 = \frac{m}{2} x_i'^2 - V(x) \qquad (i = 1, ..., d). \tag{1.275}$$

En este caso denotamos con x_i' la derivada con respecto al tiempo t. Reparametrizando al tiempo con un nuevo parámetro, τ, de tal forma que $t = t(\tau)$ sea mónotona y creciente, y sustituyendo en la acción obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L_1, \tag{1.276}$$

con

$$L_1 = \frac{m}{2} \frac{\dot{x}_i^2}{\dot{t}} - V(x)\dot{t}. \tag{1.277}$$

Donde $\dot{x}_i$ y $\dot{t}$ denotan las respectivas derivadas con respecto al parámetro τ. Es fácil ver que la nueva Lagrangiana es invariante ante reparametrizaciones.
Los momentos canónicos de este sistema son

$$P_i = m \frac{\dot{x}_i}{\dot{t}} \qquad \text{y} \tag{1.278}$$

$$P_t = -\frac{m}{2} \frac{\dot{x}_i^2}{\dot{t}^2} - V(x). \tag{1.279}$$

De estos momentos canónicos tenemos la constricción

$$\phi = P_t + \frac{P^2}{2m} + V(x) = P_t + H_0 \approx 0, \tag{1.280}$$

$$\text{con} \qquad H_0 = \frac{P^2}{2m} + V(x) \qquad \text{y} \qquad P^2 = P_i P^i. \tag{1.281}$$

Como la Lagrangiana es una función homógenea de primer orden en las velocidades, la Hamiltoniana canónica es nula:

$$H_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \dot{t} - L = 0. \tag{1.282}$$

Por otra parte, como tenemos sólo una constricción, ϕ, es de primera clase. Por lo tanto, la Hamiltoniana total está dada por

$$H_T = \lambda\phi. \tag{1.283}$$

Con esta Hamiltoniana total es evidente que la evolución de la constricción no producirá nuevas constricciones, y $H_E = H_T$. Así, la acción extendida para este sistema es

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{t}P_t + \dot{X}^i P_i - \lambda(P_t + \frac{P^2}{2m} + V(x))]. \tag{1.284}$$

Para fijar la norma de este sistema podemos imponer la condición de norma

$$\chi = t - f(\tau), \tag{1.285}$$

con $f(\tau)$ tal que χ se anule en los bordes. Es claro que esta constricción es una buena norma, pues, hace de segunda clase a ϕ.

Tomando a las constricciones como igualdades fuertes y sustituyendo en la acción, tenemos

$$S_* = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X}^i P_i - \dot{f}(\frac{P^2}{2m} + V(x))]. \tag{1.286}$$

Esta acción es invariante ante un cambio de parámetro de evolución. Si tomamos un parámetro $\bar{\tau}$ tal que $\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} = \dot{f}$, tenemos la acción

$$S = \int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} d\bar{\tau}[\dot{X}^i P_i - (\frac{P^2}{2m} + V(x))]. \tag{1.287}$$

Que es la acción Hamiltoniana para una partícula clásica.

Por último, según el método de cuantización de Dirac, como ϕ es una constricción de primera clase, los estados físicos cuántico son tales que satisfacen

$$\hat{\phi}|\psi\rangle = [\hat{P}_t + \hat{H}_0]|\psi\rangle = 0. \tag{1.288}$$

Si en la representación de coordenadas hacemos las asignaciones

$$\hat{P}_t = -i\partial_t \qquad \text{y} \qquad \hat{P}_i = -i\partial_i, \tag{1.289}$$

los estados físicos son aquellos que satisfacen la ecuación de Schrödinger:

$$\partial_t|\psi >= \left[\frac{-1}{2m}\partial_i^2 + V(x)\right]|\psi > . \tag{1.290}$$

Es importante hacer notar que hemos deducido la ecuación de Schrödinger imponiendo la condición de que la teoría clásica sea invariante bajo reparametrizaciones. Así, la imposición de esta simetría dicta la evolución cuántica del sistema.

1.12.3 Partícula libre relativista

Tomemos la acción de la partícula libre relativista

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} \tag{1.291}$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski. Es fácil ver que la acción es invariante bajo reparametrizaciones. Además, tenemos que

$$P_\mu = \frac{m\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \qquad \text{y} \qquad \phi = P_\mu P^\mu + m^2 \approx 0. \tag{1.292}$$

Por lo que, $H_c = \dot{X}^\mu P_\mu - L = 0$. Así, como ϕ es la única constricción,

$$H_T = H_E = \frac{1}{2}\lambda(P_\mu P^\mu + m^2). \tag{1.293}$$

De donde, las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{X}^\mu = \lambda P^\mu, \qquad \dot{P}^\mu = 0. \tag{1.294}$$

Por otra parte,

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X} \cdot P - \frac{\lambda}{2}(P^2 + m^2)]. \tag{1.295}$$

Sustituyendo $P^\mu = \frac{\dot{X}^\mu}{\lambda}$ en S_E tendremos

$$S_* = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\frac{\dot{X}^2}{\lambda} - \lambda m^2]. \tag{1.296}$$

Finalmente, al obtener la ecuación de movimiento para λ y sustituyendola en S_* obtenemos la acción original, S. Podemos ver que las acciones S_E y S_* pueden contemplar el caso en que $m = 0$, el cual no puede ser tratado con la acción S. Sin embargo, cuando la masa no es nula las tres acciones son equivalentes.

Al cuantizar el sistema con el método de Dirac, tenemos que los estado físicos, $|\psi>$, del sistema son tales que cumplen la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\hat{P}_\mu \hat{P}^\mu + m^2)|\psi>= 0. \tag{1.297}$$

Capítulo 2

Análisis de un sistema con dos coordenadas temporales

¿Por qué imaginar una sola serie de tiempo?
Yo no sé si la imaginación de ustedes
acepta esa idea.
Jorge Luis Borges.

2.1 Introducción

En este capítulo se muestra como se puede asociar una acción Hamiltoniana extendida a un álgebra de Lie. Se aplica en particular al caso del álgebra de Lie del grupo simpléctico $Sp(2)$ y se muestra que, por consistencia, se debe considerar una métrica con dos "tiempos" Para la acción construida a partir del álgebra de Lie de $Sp(2)$ se encuentran sus simetrías de norma. También se construyen las transformaciones de norma finitas para este sistema y se encuentran las cantidades conservadas asociadas a las transformaciones de norma.

Otros autores (ver [22],[23], [27],[28] y [29]) han trabajado con el sistema que estudiaremos, ellos, con diferentes condiciones de norma, han obtenido sistemas como la partícula no relativista en un potencial $V(r)$, la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$, la partícula libre relativista con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d y la partícula libre relativista sin masa en el espacio AdS_{d+1}. También han conjeturado que existe una transformación de dualidad entre estos sistemas. Dualidad que suponen es una transformación de norma.

Nosotros mostraremos que las condiciones de normas impuestas para obtener la partícula no relativista en un potencial $V(r)$ dan ecuaciones de movimiento inconsistentes. Para el resto de las condiciones de norma impuestas se muestra que se tienen ecuaciones de movimiento consistentes. Para el caso de la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$ fijaremos nuevas condiciones de norma que incluyen a este sistema. Se muestra la transformación de norma que existe entre la partícula libre relativista masiva en el espacio de Minkowski de dimensión d y la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1}. Y, con nuevas condiciones de norma, se obtiene como sistema reducido al modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión. En cada sistema reducido que se obtiene de manera consistente se muestra que hay una relación entre la métrica y los parénteisis de Dirac.

2.2 El grupo simpléctico y su acción asociada

Supongamos que tenemos un álgebra de Lie A de dimensión D con generadores, G_b, que cumplen

$$[G_a, G_b] = C^c_{ab} G_c \qquad (a, b, c = 1, ..., D). \tag{2.1}$$

Si encontramos funciones del espacio fase, $\phi_b(p, x)$, tales que, con los paréntesis de Poisson, satisfagan

$$\{\phi_a(p, x), \phi_b(p, x)\} = C^c_{ab} \phi_c(p, x), \tag{2.2}$$

entonces, formando la superficie

$$\phi_b(p, x) = 0 \tag{2.3}$$

tenemos un conjunto de constricciones de primera clase. Con estas constricciones podemos construir la acción Hamiltoniana extendida

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p \cdot \dot{x} - \lambda^b \phi_b]. \tag{2.4}$$

Así, los generadores del álgebra de Lie A serán los generadores de las transformaciones de norma de la acción (2.4).

Veamos que pasa en particular con el grupo simpléctico $Sp(2)$. Primero consideremos el grupo $Sp(2n)$, sea $\{A\}$ el conjunto de matrices cuadradas de dimensión $2n$ que satisfacen

$$A^T J_0 A = J_0, \qquad \text{con} \tag{2.5}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de dimensión n. Es claro que si A está en (2.5), se cumple $(\det A)^2 = 1$. También se puede mostrar que $\{A\}$ satisface las propiedades de grupo, a este grupo se le llama grupo simpléctico.

Ahora nos limitaremos a estudiar el caso $Sp(2)$, es decir $n = 1$. Para este caso se puede mostrar que si A está en $Sp(2)$ se cumple que det $A = +1$. En este caso se puede mostrar que un elemento infinitesimalmente cercano a la unidad tiene la forma

$$\delta A = \begin{pmatrix} \delta k_2 & \delta k_1 \\ -\delta k_3 & -\delta k_2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

La matriz (2.7) se puede escribir como $\delta A_i^k = \epsilon_{ij}\omega^{jk}$ donde

$$\omega^{ij} = \begin{pmatrix} \delta k_3 & \delta k_2 \\ \delta k_2 & \delta k_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Sin embargo, también se puede escribir como

$$\delta A = \delta k_1 \phi_1 + \delta k_2 \phi_2 + \delta k_3 \phi_3, \tag{2.9}$$

con las matrices

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Por tanto, las matrices (2.10) generan al álgebra de Lie de $Sp(2)$. Estas matrices satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\phi_2, \phi_3] = -2\phi_3, \qquad [\phi_2, \phi_1] = 2\phi_1, \qquad \text{y} \qquad [\phi_1, \phi_3] = -\phi_2. \tag{2.11}$$

Ahora, si en el espacio fase tomamos

$$\phi_1 = \frac{1}{2}P^2, \qquad \phi_2 = X \cdot P, \qquad \text{y} \qquad \phi_3 = \frac{1}{2}X^2 \tag{2.12}$$

y consideramos que $\{X^M, P_N\} = \delta_N^M$, obtenemos el álgebra de Lie (2.11), es decir,

$$\{\phi_2, \phi_3\} = -2\phi_3, \qquad \{\phi_2, \phi_1\} = 2\phi_1, \qquad \text{y} \qquad \{\phi_1, \phi_3\} = -\phi_2. \tag{2.13}$$

Así, la superficie definida por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}P^2 = 0, \qquad \phi_2 = X \cdot P = 0, \qquad \text{y} \qquad \phi_3 = \frac{1}{2}X^2 = 0 \qquad (2.14)$$

es de primera clase.

Supongamos que la dimensión del espacio de configuraciones es $\mathbf{D}$, entonces, el espacio fase tiene dimensión $2\mathbf{D}$. Si tomamos la métrica de Euclides como métrica del sistema, las constricciones (2.14) implican que

$$X^I = 0 \qquad \text{y} \qquad P_I = 0 \qquad I = 1, ..., \mathbf{D}.$$

Ahora, si tomamos la métrica de Minkowski como métrica del sistema, las constricciones (2.14) implican

$$X_0^2 = X_i X^i, \quad P_0^2 = P_i P^i \quad \text{y} \quad P_0 X_0 = P_i X^i \quad i = 1, ..., \mathbf{D} - 1, \quad (2.15)$$

entonces, si

$$\cos\theta = \frac{X^i P_i}{\sqrt{X^i X_i}\sqrt{P^i P_i}} \qquad (2.16)$$

las ecuaciones (2.15) implican que $\cos\theta = \pm 1$, es decir, que los vectores

$$\mathbf{X} = (X_1, ..., X_{\mathbf{D}-1}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P} = (P_1, ..., P_{\mathbf{D}-1})$$

sean paralelos o antiparalelos, claramente esto es absurdo.

Supongamos que la dimensión del espacio de configuraciones es $\mathbf{D} = d + 2$ y consideremos una métrica plana, η_{MN}, con signatura

$$\text{sig}(\eta) = (-, -, +, ..., +), \qquad (2.17)$$

es decir,

$$\eta_{NM} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & -1 & 0\ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

con $\mathbf{I}$ la matriz identidad de dimensión d y $\mathbf{0}$ el vector columna nulo de dimensión d.
Para esta caso las constricciones (2.14) implican

$$\begin{aligned} & X_0^2 + X_{0'}^2 = X_i X^i, \qquad P_0^2 + P_{0'}^2 = P_i P^i \\ \text{y} \qquad & X_0 P_0 + X_{0'} P_{0'} = P_i X^i \qquad (i = 1, ..., \mathbf{D} - 2), \end{aligned} \qquad (2.19)$$

por lo tanto, si

$$\cos\vartheta = \frac{X^i P_i}{\sqrt{X^i X_i}\sqrt{P^i P_i}}, \tag{2.20}$$

tenemos que

$$\cos\vartheta = \frac{X_0 P_0 + X_{0'} P_{0'}}{\sqrt{X_0^2 + X_{0'}^2}\sqrt{P_0^2 + P_{0'}^2}} \tag{2.21}$$

esto define una superficie no trivial en el espacio fase. Por esta razón tomaremos la métrica (2.18) como la métrica del sistema.

Con las constricciones (2.12) podemos formar la acción Hamiltoniana extendida

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X}\cdot P - (\lambda^1 \frac{1}{2}P^2 + \lambda^2 X\cdot P + \lambda^3 \frac{1}{2}X^2)], \tag{2.22}$$

cuya Hamiltoniana extendida es

$$H_E = \lambda^1 \frac{1}{2}P^2 + \lambda^2 X\cdot P + \lambda^3 \frac{1}{2}X^2. \tag{2.23}$$

Para escribir esta acción de una forma más compacta haremos las definiciones:

$$X_i^M = (X^M, P^M), \tag{2.24}$$

$$D_\tau X_i^M = \dot{X}_i^M - \epsilon_{ik} Z^{kj} X_k \tag{2.25}$$

$$\text{y} \qquad Z^{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Así, (2.22) se puede escribir como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X}_1^M X_2^N - \frac{1}{2}Z^{ij} X_i^M X_j^N]\eta_{NM}. \tag{2.27}$$

Al aplicar el principio de acción a (2.22) con

$$\delta X_1^M(\tau_1) = \delta X_1^M(\tau_2) = 0, \tag{2.28}$$

las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$D_\tau X_i^M = 0 \tag{2.29}$$

$$\text{y} \qquad X_i^M X_{jM} = 0 \tag{2.30}$$

Como se mostró en el primer capítulo, las constricciones de primera clase generan transformaciones de simetría de la acción extendida. Para nuestro caso particular las constricciones (2.12) son de primera clase, luego, generan transformaciones de norma. Para las variables del espacio fase, X^M y P_M, tenemos:

$$\delta_\epsilon X^M = \delta k_1\{X^M, \phi_1\} + \delta k_2\{X^M, \phi_2\} + \delta k_3\{X^M, \phi_3\}$$

$$\text{y} \qquad \delta_\epsilon P_M = \delta k_1\{P_M, \phi_1\} + \delta k_2\{P_M, \phi_2\} + \delta k_3\{P_M, \phi_3\},$$

que tienen la forma explicita:

$$\begin{pmatrix} \delta_\epsilon X^M \\ \delta_\epsilon P^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta k_2 & \delta k_1 \\ -\delta k_3 & -\delta k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^M \\ P^M \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Ocupando las matrices (2.8), las variaciones (2.31) se pueden escribir de la forma

$$\delta_\epsilon X_i^M = \epsilon_{ij}\omega^{jk} X_k^M. \tag{2.32}$$

De acuerdo al primer capítulo, las variaciones de los multiplicadores de Lagrange bajo las cuales la acción extendida es invariante, salvo un término de borde, están dadas por las ecuaciones (1.127), (1.128) y (1.129). Para este sistema en particular son:

$$\delta_\epsilon X_i^M = \epsilon_{ij}\omega^{jk} X_k^M \tag{2.33}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^1 = \delta\dot{k}_1 + 2(\lambda^1\delta k_2 - \lambda^2\delta k_1), \tag{2.34}$$

$$\delta_\epsilon \lambda^2 = \delta\dot{k}_2 + (\lambda^1\delta k_3 - \lambda^3\delta k_1) \tag{2.35}$$

$$\text{y} \qquad \delta_\epsilon \lambda^3 = \delta\dot{k}_3 + 2(\lambda^2\delta k_3 - \lambda^3\delta k_2). \tag{2.36}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta la ecuación (1.126), la variación de la acción (2.22) ante las transformaciones de norma es

$$\delta_\epsilon S = (\delta k_1 \frac{1}{2}P^2 - \delta k_3 \frac{1}{2}X^2)_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{2.37}$$

De donde, la acción (2.22) es invariante bajo las transformaciones para las cuales el término de borde (2.37) es nulo.

2.2.1 Acción de I.Bars

En la referencia [25] I. Bars trabaja con la acción

$$S = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [D_\tau X_i^M \epsilon^{ij} X_{jN}]\eta_{NM}$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X}_1^M X_2^N - \frac{1}{2}Z^{ij}X_i^M X_j^N - \frac{1}{2}\frac{d(X_1^M X_2^N)}{d\tau}]\eta_{NM}. \tag{2.38}$$

Esta acción difiere de (2.22) sólo por una derivada total, luego, tiene las ecuaciones de movimiento (2.29) y (2.30). En [25] se dice que para obtener las ecuaciones de movimiento de (2.38) se debe imponer las condiciones de borde

$$X_i^M(\tau_1) = X_{i1}^M \qquad \text{y} \qquad X_i^M(\tau_2) = X_{i2}^M. \tag{2.39}$$

Estas condiciones sobredeterminan las ecuaciones de movimiento (2.29). Sin embargo, esto se puede arreglar si se imponen otras condiciones de borde. Al hacer una variación a la acción (2.38) tenemos:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [D_\tau X_i^M \epsilon^{ij} \delta X_{jM} - \frac{\delta Z^{ij}}{2} X_i^M X_{jM} \\ + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(P_M \delta X^M - X^M \delta P_M)].\end{aligned} \tag{2.40}$$

Si f es una función de una variable y no tiene extremos, entonces, podemos definir

$$Q^M = f(\frac{X^M}{P_M}) \qquad \text{y} \qquad \tilde{P}_M = \frac{(P_M)^2}{2f'}, \tag{2.41}$$

aquí f' representa la derivada de f y en la definición de $\tilde{P}_M$ no se está ocupando la convención de suma de Einstein. Con estas definiciones se tiene que

$$\frac{1}{2}(P_M \delta X^M - X^M \delta P_M) = \tilde{P}_M \delta Q^M. \tag{2.42}$$

Por lo tanto, si se pide que en los bordes se satisfaga

$$Q^M(\tau_1) = Q_1^M \qquad \text{y} \qquad Q^M(\tau_2) = Q_2^M, \tag{2.43}$$

el principio variacional aplicado a (2.38) da las ecuaciones de movimiento correctas.

Por otra parte, para que la variación (2.32) sea una simetría de la acción (2.38) los multiplicadores de Lagrange, Z^{ij}, deben de variar de una forma particular. Si variamos la acción (2.38) con (2.32) y a δZ^{ij} la dejamos libre, entonces,

$$\delta L = -\frac{1}{2} X_l^M X_r^M [\delta Z^{lr} - (\partial_\tau \omega^{rl} + \omega^{lq}\epsilon_{qs} Z^{sr} + \omega^{rq}\epsilon_{qs} Z^{sl})]. \tag{2.44}$$

Luego, la acción es invariante bajo las variaciones infinitesimales

$$\delta X_i^M = \epsilon_{ij}\omega^{jk} X_k^M \tag{2.45}$$

$$\text{y} \qquad \delta Z^{lr} = \partial_\tau \omega^{lr} + \omega^{lq}\epsilon_{qs} Z^{sr} + \omega^{rq}\epsilon_{qs} Z^{sl}. \tag{2.46}$$

Las transformaciones de norma (2.46) se pueden escribir de forma explícita como (2.34), (2.35) y (2.36). Así, la acción (2.38) es invariante ante cualquier transformación de norma

2.2.2 Transformaciones de norma finitas

Usando (2.7) las transformaciones de norma infinitesimales (2.31) se pueden escribir como

$$\bar{X}_i^M = (\mathbf{1}_{ij} + (\delta A)_{ij})X_j^M. \tag{2.47}$$

Anteriormente vimos que, con (2.10), δA se puede escribir como (2.9). Sin embargo, también se puede escribir como

$$\delta A = \delta l_1\bar{\phi}_1 + \delta l_2\bar{\phi}_2 + \delta l_3\bar{\phi}_3, \tag{2.48}$$

con

$$\bar{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\phi}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

y

$$\delta l_1 = \delta k_2, \qquad \delta l_2 = \frac{\delta k_1 - \delta k_3}{2}, \qquad \delta l_2 = \frac{\delta k_1 + \delta k_3}{2}. \tag{2.50}$$

Las nuevas matrices (2.49) satisfacen

$$\bar{\phi}_1^2 = 1, \qquad \bar{\phi}_2^2 = 1, \qquad \bar{\phi}_3^2 = -1 \tag{2.51}$$

$$\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j + \bar{\phi}_j\bar{\phi}_i = 0 \qquad (i \neq j) \qquad i,j = 1,2,3. \tag{2.52}$$

Por otra parte, la versión finita de la transformación (2.47) tiene la forma (ver [32])

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbf{1} + \frac{1}{n}(l_1\bar{\phi}_1 + l_2\bar{\phi}_2 + l_3\bar{\phi}_3)]^n = e^{(l_1\bar{\phi}_1 + l_2\bar{\phi}_2 + l_3\bar{\phi}_3)} \tag{2.53}$$

donde $\delta l_i = \frac{l_i}{n}$ $(i = 1,2,3)$.
Usando (2.51) y (2.52), tenemos que:

$$e^{(l_1\bar{\phi}_1 + l_2\bar{\phi}_2 + l_3\bar{\phi}_3)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^n}{(2n)!}$$

$$+(l_1\bar{\phi}_1 + l_2\bar{\phi}_2 + l_3\bar{\phi}_3)\sum_{n\geq 0}\frac{(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^n}{(2n+1)!}. \tag{2.54}$$

Si $l_2 = l_3 = 0$ tenemos

$$e^{k_2\bar{\phi}_1} = \begin{pmatrix} e^{k_2} & 0 \\ 0 & e^{k_2} \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Si $l_1 = l_3 = 0$ tenemos

$$e^{(\frac{k_1-k_3}{2})\bar{\phi}_2} = \begin{pmatrix} \cosh(\frac{k_1-k_3}{2}) & \operatorname{senh}(\frac{k_1-k_3}{2}) \\ \operatorname{senh}(\frac{k_1-k_3}{2}) & \cosh(\frac{k_1-k_3}{2}) \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Si $l_1 = l_2 = 0$ tenemos

$$e^{(\frac{k_1+k_3}{2})\phi_3} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{k_1+k_3}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{k_1+k_3}{2}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{k_1+k_3}{2}) & \cos(\frac{k_1+k_3}{2}) \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Por lo tanto, las matrices (2.55), (2.56) y (2.57) son las transformaciones de norma finitas. Ocupando estas matrices podemos recuperar los resultados que tenemos en forma infinitesimal.

Ahora, supongamos que tenemos la transformación

$$\begin{pmatrix} \bar{X}^M \\ \bar{P}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^M \\ P^M \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad ad - bc = 1. \tag{2.58}$$

Entonces, la acción (2.22) en función de las variables $\bar{X}, \bar{P}$ y $\bar{\lambda}$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\frac{d\bar{X}}{d\tau} \cdot \bar{P} - (\bar{\lambda}^1 \frac{1}{2}\bar{P}^2 + \bar{\lambda}^2 \bar{X} \cdot \bar{P} + \bar{\lambda}^3 \frac{1}{2}\bar{X}^2)] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X} \cdot P - (\lambda^1 \frac{1}{2}P^2 + \lambda^2 X \cdot P + \lambda^3 \frac{1}{2}X^2) \\ &\qquad + \frac{d}{d\tau}(db\frac{1}{2}P^2 + bcX \cdot P + ac\frac{1}{2}X^2)] \end{aligned} \tag{2.59}$$

donde

$$\lambda^i = B_{ij}\bar{\lambda}^j + R^i \tag{2.60}$$

con

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} d^2 & 2db & b^2 \\ dc & bc + da & ba \\ c^2 & 2ac & a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad R^i = -\begin{pmatrix} \dot{b}d - b\dot{d} \\ \dot{a}d - b\dot{c} \\ ac - a\dot{c} \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

Se puede probar que se cumple det $B_{ij} = 1$. Por lo tanto, se tiene que

$$\bar{\lambda}^i = B_{ij}^{-1}(\lambda^j - R^j). \tag{2.62}$$

Así, la acción (2.22) es invariante, salvo un término de borde, bajo las transformaciones de norma (2.58) y (2.62).

Por otra parte, podemos ver que X^2, P^2, $X \cdot P$ y $\dot{X} \cdot P$ son invariantes bajo transformaciones globales de $SO(2,d)$. Así, el sistema tiene como simetría global a $SO(2,d)$. Como se muestra en el apéndice A, las cantidades

$$L^{MN} = \epsilon^{ij} X_i^M X_j^N = X^M P^N - X^N P^M \tag{2.63}$$

generan el álgebra de $SO(2,d)$. Se puede mostrar que las cantidades (2.63) conmutan con todas las constricciones:

$$\{L^{MN}, \phi_1\} = \{L^{MN}, \phi_2\} = \{L^{MN}, \phi_3\} = 0, \tag{2.64}$$

es decir, son cantidades invariantes de norma. También se puede mostrar que L^{MN} es invariante bajo las transformaciones de norma finitas (2.58). Las cantidades L^{MN} satisfacen el álgebra

$$\{L^{MN}, L^{KR}\} = L^{RM}\eta^{NK} + L^{KN}\eta^{MR} + L^{NR}\eta^{MK} + L^{MK}\eta^{NR}. \tag{2.65}$$

Como se muestra en el apéndice A, (2.65) es el álgebra del grupo $SO(2,d)$.

Veamos el número de grados de libertad efectivos que tiene el sistema En principio hay $2(d+2)$ coordenadas independientes en el espacio fase, (X,P), sin embargo, como tenemos tres constricciones de primera clase, los grados efectivos de libertad son $(d-1)$.

2.3 Condiciones de norma inconsistentes

Si tenemos un sistema con libertad de norma y consideramos condiciones de norma incorrectas podemos obtener diferentes sistemas reducidos, pero estos sistemas no son equivalentes al que se obtiene al fijar la norma de manera correcta.

Para mostrar que esto ocurre, veamos como partiendo de la partícula libre reparametrizada podemos, fijando mal la norma, obtener una partícula en un potencial cualquiera.

Consideremos la acción

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{t}P_t + \dot{X}^i P_i - \lambda(P_t + \frac{P^2}{2})]. \tag{2.66}$$

Las ecuaciones de movimiento de la acción (2.66) son

$$\dot{t} = \lambda, \tag{2.67}$$

$$\dot{X}^i = \lambda P^i, \tag{2.68}$$

$$\dot{P}_t = 0, \tag{2.69}$$

$$\dot{P}_i = 0, \tag{2.70}$$

$$P_t + \frac{P_i P^i}{2} = 0. \tag{2.71}$$

Impongamos la condición de norma

$$\dot{t} = (1 + \frac{2V(X)}{P_i P^i}). \tag{2.72}$$

Al despejar P_t de (2.71) y sustituirla en (2.66), junto con (2.72), tendremos la acción de una partícula en un potencial $V(X)$:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(P_i \dot{X}^i - [\frac{P_i P^i}{2} + V(X)]). \tag{2.73}$$

De esta acción obtenemos las ecuaciones de Hamilton para una partícula en un potencial $V(x)$.
Pero al sustituir (2.72) en las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\lambda = (1 + \frac{2V(X)}{P_i P^i}), \tag{2.74}$$

$$\dot{X}_i = (1 + \frac{2V(X)}{P_j P^j})P_i, \tag{2.75}$$

$$\dot{P}_t = 0 \tag{2.76}$$

$$\text{y} \qquad \dot{P}_i = 0. \tag{2.77}$$

Evidentemente estas no son las ecuaciones de movimiento para una partícula clásica en un potencial $V(X)$. Por lo tanto, la condición de norma (2.72) no es consistente con el sistema.

2.3.1 Norma de una partícula en un potencial $V(r)$

En trabajos recientes se ha venido trabajando con la acción (2.22). En [27] se hace el siguiente razonamiento.

Tomemos la acción (2.22), la métrica de dos tiempos (2.18) y

$$X^M = (X^{0'}, X^0, X^I), \qquad P^M = (P^{0'}, P^0, P^I) \qquad (I = 1, ..., d). \quad (2.78)$$

Si tomamos las coordenadas

$$X^M = F(\cos\upsilon, \mathrm{sen}\upsilon, n^I), \qquad P^M = G(-\mathrm{sen}\upsilon, \cos\upsilon, m^I). \quad (2.79)$$

Entonces, las constricciones tienen la forma

$$X^2 = F^2(n^2 - 1) = 0, \quad (2.80)$$
$$P^2 = G^2(m^2 - 1) = 0 \quad (2.81)$$
$$\text{y} \qquad X \cdot P = FG(n \cdot m) = 0. \quad (2.82)$$

Por otra parte, de un cálculo directo se obtiene

$$\dot{X} \cdot P = FG(-\upsilon + \dot{n} \cdot m). \quad (2.83)$$

Así, al sustituir estos resultados en la acción (2.22), obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[FG(-\dot{\upsilon} + \dot{n} \cdot m) - \lambda_1 \frac{1}{2} G^2(m^2 - 1)$$
$$-\lambda_2 FG(m \cdot n) - \lambda_3 \frac{1}{2} F^2(n^2 - 1)]. \quad (2.84)$$

Por lo tanto, si tenemos las constricciones resueltas, la acción (2.84) resulta ser

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[FG(-\dot{\upsilon} + \dot{n} \cdot m)]. \quad (2.85)$$

Para resolver las constricciones de n_I y m_I consideremos

$$n_I = [-\frac{(r \cdot p)\sqrt{-2H}}{rV}, \frac{r^i}{r} + \frac{(r \cdot p)p^i}{rV}], \quad (2.86)$$
$$m_I = [(1 + \frac{p^2}{V}), \frac{\sqrt{-2H}}{rV} p^i] \quad (i = 1, ..., d-1) \quad (2.87)$$

con $H = \frac{P^2}{2} + V(x)$.
Se puede mostrar que (2.86) y (2.87) resuelven (2.80), (2.81) y (2.82).
Además, se tiene que

$$n \cdot m = \frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r \cdot \dot{p}) + (r \cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})], \quad (2.88)$$

con V una función que sólo depende de r.
Sustituyendo en la acción (2.85) tenemos que

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau FG[-\dot{v} + \frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r \cdot \dot{p}) + (r \cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})]]. \qquad (2.89)$$

Finalmente, si imponemos las condiciones de norma

$$FG = \frac{rV}{\sqrt{-2H}} \qquad (2.90)$$

$$\text{y} \qquad \dot{v} = \frac{\sqrt{-2H}}{rV}[(r \cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H}) + H] \qquad (2.91)$$

obtenemos la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{r} \cdot p - [\frac{p^2}{2} + V(r)]], \qquad (2.92)$$

que es la acción para una partícula no relativista en un potencial $V(r)$ cualquiera. Las ecuaciones de movimiento para esta acción son:

$$\dot{r}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (2.93)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{r^i}{r}. \qquad (2.94)$$

Si el razonamiento que acabamos de mostrar es correcto, la acción asociada al grupo simpléctico $Sp(2)$ tiene como espacio reducido la partícula clásica en un potencial $V(r)$ arbitrario. Sin embargo, veamos si este razonamiento es correcto. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de (2.89) son

$$FG = \alpha = \text{cte}, \qquad (2.95)$$

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r \cdot \dot{p}) + (r \cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})], \qquad (2.96)$$

$$\frac{d}{d\tau}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}(-r_i + \frac{r \cdot p}{2H}p_i)] =$$
$$\frac{\partial}{\partial p^i}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r \cdot \dot{p}) + (r \cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})]] \qquad (2.97)$$

y $$\frac{d}{d\tau}[\frac{(r\cdot p)\partial_i V}{rV\sqrt{-2H}}] = \frac{\partial}{\partial r^i}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r\cdot\dot{p}) + (r\cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})]]. \quad (2.98)$$

Con las condiciones de norma (2.90) y (2.91), tenemos las ecuaciones

$$\frac{rV}{\sqrt{-2H}} = \alpha = \text{cte}, \quad (2.99)$$

$$H = -(r\cdot\dot{p}), \quad (2.100)$$

$$\frac{d}{d\tau}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}(-r_i + \frac{r\cdot p}{2H}p_i)] =$$
$$\frac{\partial}{\partial r^i}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r\cdot\dot{p}) + (r\cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})]] \quad \text{y} \quad (2.101)$$

$$\frac{d}{d\tau}[\frac{(r\cdot p)\partial_i V}{rV\sqrt{-2H}}] = \frac{\partial}{\partial p^i}[\frac{\sqrt{-2H}}{rV}[-(r\cdot\dot{p}) + (r\cdot p)\partial_\tau \ln(\sqrt{-2H})]]. \quad (2.102)$$

De donde, si tenemos buenas condiciones de normas, las ecuaciones reducidas (2.99)-(2.102) deben ser equivalentes a las ecuaciones de una partícula no-relativista en un potencial $V(r)$.

De la ecuación (2.99) tenemos que

$$V = \frac{\alpha\sqrt{-2H}}{r}. \quad (2.103)$$

Por otra parte, tomando en cuenta (2.94), la ecuación (2.100) tiene la forma

$$H = r\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.104)$$

Sin embargo, de (2.103) obtenemos

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\alpha H}{r\sqrt{-2H} + \alpha}. \quad (2.105)$$

Igualando esta ecuación con (2 104) obtenemos que

$$\sqrt{-2H} = \frac{\alpha}{r}. \quad (2.106)$$

Al sustituir este resultado en (2.103), obtenemos

$$V = \frac{\alpha^2}{r^2}, \tag{2.107}$$

pero al sustituirlo en (2.104) tenemos

$$V = \frac{\alpha^2}{4r^2} + \beta \tag{2.108}$$

esto implica que $\alpha = 0$, es decir, $V = 0$. Cuando $V = 0$ toda la dinámica se elimina y, además, pierden sentido las ecuaciones (2.86) y (2.87). Así, las ecuaciones (2.99)-(2.102) no son equivalentes a (2.93) y (2.93). Por lo tanto, las condiciones de norma (2.90) y (2.91) no son correctas.

2.3.2 Método de Dirac y reducción de I. Bars

Para obtener la acción (2.85) no se ocupó el método de Dirac. En esta sección ocuparemos este método para mostrar que no se puede obtener de forma consistente la acción (2.85).
Lo primero que podemos observar es que el espacio definido por las coordenadas (2.79) tienen $2d + 3$ grados de libertad y no $2d + 4$. Por lo tanto, ocuparemos otras coordenadas con $2(d + 1)$ grados de libertad que contengan a (2.79) como caso particular. Antes de hacer esto haremos un paréntesis.

En principio tenemos el espacio fase compuesto por X^M y P_M, junto con el paréntesis de Poisson $\{X^M, P_N\} = \delta^M_N$. Sin embargo, para evitar grandes cálculos veamos el espacio fase de

$$X^M, P^M, \Pi_{XM} \quad \text{y} \quad \Pi_{PM}. \tag{2.109}$$

El cual suponemos tiene los paréntesis de Poisson $\{X^M, \Pi_{XN}\} = \delta^M_N$, $\{P^M, \Pi_{PN}\} = \delta^M_N$ y cero en cualquier otro caso. Al espacio fase original le hemos aumentado el número de variables. Sin embargo, podemos regresar al espacio fase original. Impongamos las constricciones

$$\chi_{1M} = \Pi_{XM} - P_M \qquad \text{y} \qquad \chi_{2M} = \Pi_{PM} \tag{2.110}$$

las cuales tienen el paréntesis de Poisson

$$\{\chi_{1M}, \chi_{2N}\} = -\eta_{MN}. \tag{2.111}$$

Así, todas estas constricciones serán de segunda clase. Por otra parte, se puede verificar que al construir el paréntesis de Dirac, con sólo estas constricciones, obtendremos que el paréntesis de Dirac de las variables X^M y P_N son

$$\{X^M, P_N\}^* = \delta^M_N. \tag{2.112}$$

Por tanto, al hacer fuertes las constricciones (2.110) obtenemos el espacio fase original.
Así, podemos tomar el conjunto de constricciones

$$\phi_1 = P^M \Pi_{XM} - \frac{1}{2}P^2, \tag{2.113}$$

$$\phi_2 = X^M \Pi_{XM} - P^M \Pi_{PM}, \tag{2.114}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}X^2 - X^M \Pi_{PM}, \tag{2.115}$$

$$\chi_{1M} = \Pi_{XM} - P_M, \tag{2.116}$$

$$\chi_{2M} = \Pi_{PM} \tag{2.117}$$

pues, como vemos, al hacer fuertes las constricciones (2.110) recuperamos las constricciones originales. El álgebra de constricciones del conjunto (2.113)-(2.117) es

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -2\phi_1, \tag{2.118}$$

$$\{\chi_{1M}, \phi_1\} = 0, \tag{2.119}$$

$$\{\chi_{2M}, \phi_1\} = -\chi_{1M}, \tag{2.120}$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = -\phi_2, \tag{2.121}$$

$$\{\chi_{1M}, \phi_2\} = -\chi_{1M}, \tag{2.122}$$

$$\{\chi_{2M}, \phi_2\} = \chi_{2M}, \tag{2.123}$$

$$\{\phi_2, \phi_3\} = -2\phi_3, \tag{2.124}$$

$$\{\chi_{1M}, \phi_3\} = \chi_{2M}, \tag{2.125}$$

$$\{\chi_{2M}, \phi_3\} = 0 \tag{2.126}$$

$$\text{y} \qquad \{\chi_{1M}, \chi_{2N}\} = -\eta^M_N. \tag{2.127}$$

De estas relaciones, es claro que las constricciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 siguen siendo de primera clase y las constricciones (2.110) de segunda. Con el conjunto (2.113)-(2.117) podemos formar la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{P}^M \Pi_{PM} + \dot{X}^M \Pi_{XM} - [\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 + u_1^M \chi_{1M} + u_2^M \chi_{2M}]). \tag{2.128}$$

Al introducir variables extras el espacio fase incrementó su dimensión, sin embargo, al mismo tiempo tenemos $2(d+2)$ constricciones de segunda clase más. Así, el número de grados efectivos de libertad del sistema sigue siendo el mismo, $2(d-1)$.

Por otra parte, sabemos que toda transformación de coordenadas es una transformación canónica [10], con función generadora $F_2 = f_i(q_1, ..., q_n)P_i$ y las relaciones

$$Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f^i(q_1, ..., q_n), \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} = \frac{\partial f^j}{\partial q^i}P_j. \tag{2.129}$$

Entonces, consideremos la transformación de coordenadas

$$P^M = F(\cos\omega, \mathrm{sen}\omega, n^I) = (P^0, P^{0'}, P^I), \tag{2.130}$$

$$X^M = G(-\mathrm{sen}\upsilon, \cos\upsilon, m^I) = (X^0, X^{0'}, X^I). \tag{2.131}$$

La transformación inversa de (2.130) y (2.131) es

$$G = \sqrt{(P^0)^2 + (P^{0'})^2}, \tag{2.132}$$

$$\upsilon = \tan^{-1}(\frac{-P^0}{P^{0'}}), \tag{2.133}$$

$$m^I = \frac{P^I}{\sqrt{(P^0)^2 + (P^{0'})^2}}, \tag{2.134}$$

$$F = \sqrt{(X^0)^2 + (X^{0'})^2}, \tag{2.135}$$

$$\omega = \tan^{-1}(\frac{X^{0'}}{X^0}), \tag{2.136}$$

$$n^I = \frac{X^I}{\sqrt{(X^0)^2 + (X^{0'})^2}}. \tag{2.137}$$

Por lo tanto, la función generadora de la transformación canónica es

$$F_2 = \frac{X^I \Pi_{nI}}{\sqrt{(X^0)^2 + (X^{0'})^2}} + \Pi_F\sqrt{(X^0)^2 + (X^{0'})^2} + \Pi_\upsilon \tan^{-1}(\frac{-P^0}{P^{0'}}) +$$

$$\Pi_\omega \tan^{-1}(\frac{X^{0'}}{X^0}) + \sqrt{(P^0)^2 + (P^{0'})^2}\Pi_G + \frac{P^I \Pi_{mI}}{\sqrt{(P^0)^2 + (P^{0'})^2}}. \tag{2.138}$$

De donde obtendremos

$$\Pi_F = \frac{X^M \Pi_{XM}}{F}, \qquad \Pi_{nI} = \Pi_{XI}F, \tag{2.139}$$

$$\Pi_G = \frac{p^M \Pi_{PM}}{G}, \qquad \Pi_{mI} = \Pi_{PI} G, \tag{2.140}$$

$$\Pi_\omega = -F\Pi_{X0}\mathrm{sen}\omega + F\Pi_{X0'}\cos\omega, \tag{2.141}$$

$$\Pi_\upsilon = -G\Pi_{P0}\cos\upsilon - G\Pi_{P0'}\mathrm{sen}\upsilon. \tag{2.142}$$

Por lo que,

$$\Pi_{X0} = (\Pi_F - \frac{n^I\Pi_{nI}}{F})\cos\omega - \frac{\Pi_\omega}{F}\mathrm{sen}\omega, \tag{2.143}$$

$$\Pi_{P0} = -\frac{\Pi_\upsilon}{G}\cos\upsilon - (\Pi_G - \frac{m^I\Pi_{mI}}{G})\mathrm{sen}\upsilon, \tag{2.144}$$

$$\Pi_{X0'} = (\Pi_F - \frac{n^I\Pi_{nI}}{F})\mathrm{sen}\omega + \frac{\Pi_\omega}{F}\cos\omega, \tag{2.145}$$

$$\Pi_{P0'} = -\frac{\Pi_\upsilon}{G}\mathrm{sen}\upsilon + (\Pi_G - \frac{m^I\Pi_{mI}}{G})\cos\upsilon, \tag{2.146}$$

$$\Pi_{XI} = \frac{\Pi_{nI}}{F}, \qquad \Pi_{PI} = \frac{\Pi_{mI}}{G}. \tag{2.147}$$

En estas coordenadas las constricciones de primera clase tienen la forma

$$\phi_1 = \frac{G}{F}[F(\Pi_F - \frac{n^I\Pi_{nI}}{F})\mathrm{sen}(\omega-\upsilon) + \Pi_\omega\cos(\omega-\upsilon) + m^I\Pi_{nI} -$$

$$\frac{FG}{2}(m^2-1)], \tag{2.148}$$

$$\phi_2 = F\Pi_F - G\Pi_G \qquad \text{y} \tag{2.149}$$

$$\phi_3 = \frac{F}{G}[-G(\Pi_G - \frac{m^I\Pi_{mI}}{G})\mathrm{sen}(\omega-\upsilon) + \Pi_\upsilon\cos(\omega-\upsilon) - n^I\Pi_{mI} +$$

$$\frac{FG}{2}(n^2-1)] \tag{2.150}$$

Mientras que las de segunda clase

$$\chi_{10} = -\frac{\Pi_\omega}{F}\mathrm{sen}\omega + (\Pi_F - \frac{n^I\Pi_{nI}}{F})\cos\omega - \mathrm{sen}\upsilon, \tag{2.151}$$

$$\chi_{20} = -\frac{\Pi_\upsilon}{G}\cos\upsilon - (\Pi_G - \frac{m^I\Pi_{mI}}{G})\mathrm{sen}\upsilon, \tag{2.152}$$

$$\chi_{10'} = \frac{\Pi_\omega}{F}\cos\omega + (\Pi_F - \frac{n^I\Pi_{nI}}{F})\mathrm{sen}\omega + \cos\upsilon, \tag{2.153}$$

$$\chi_{20'} = -\frac{\Pi_v}{G}\mathrm{sen}v + \cos v(\Pi_G - \frac{m^I\Pi_{mI}}{G})\cos v, \tag{2.154}$$

$$\chi_{1I} = \frac{\Pi_{nI} - FGm_I}{F}, \tag{2.155}$$

$$\chi_{2I} = \frac{\Pi_{mI}}{G}. \tag{2.156}$$

Como la transformación de coordenadas (2.130) y (2.131) es canónica el álgebra de constricciones no se altera.
Por otra parte, para hacer fuertemente igual a cero las constricciones (2.110) debemos construir los paréntesis de Dirac correspondientes. Sean

$$\chi_1 = \chi_{10}, \chi_2 = \chi_{10'}, \chi_3 = \chi_{11}, ..., \chi_{d+2} = \chi_{1d+2},$$

$$\chi_{(d+2)+1} = \chi_{20}, \chi_{(d+2)+2} = \chi_{20'}, \chi_{(d+2)+3} = \chi_{21}, \cdots$$
$$, \chi_{2(d+2)} = \chi_{2(d+2)} \tag{2.157}$$

las constricciones de segunda clase. Tomando en cuenta el álgebra entre las constricciones (2.157), el paréntesis de Dirac entre dos funciones, A y B, cualesquiera del espacio fase es

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + \eta^{MN}\{A,\chi_{2M}\}\{\chi_{1N},B\} -$$
$$\eta^{MN}\{A,\chi_{1M}\}\{\chi_{2N},B\}. \tag{2.158}$$

Así, tenemos los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{F,G\}^* = -\mathrm{sen}(\omega - v), \tag{2.159}$$
$$\{G,v\}^* = 0, \tag{2.160}$$
$$\{F,v\}^* = \cos(\omega - v), \tag{2.161}$$
$$\{G,\omega\}^* = \frac{1}{F}\cos(\omega - v), \tag{2.162}$$
$$\{F,\omega\}^* = 0, \tag{2.163}$$
$$\{G,n_I\}^* = -\frac{n_I}{F}\mathrm{sen}(\omega - v), \tag{2.164}$$
$$\{F,n_I\}^* = 0, \tag{2.165}$$
$$\{F,m_I\}^* = 0, \tag{2.166}$$
$$\{F,m_I\}^* = \frac{m_I}{G}\mathrm{sen}(\omega - v), \tag{2.167}$$
$$\{\omega,v\}^* = -\frac{1}{FG}\mathrm{sen}(\omega - v), \tag{2.168}$$
$$\{v,m_I\}^* = 0, \tag{2.169}$$

$$\{\upsilon, n_I\}^* = \frac{n_I}{FG}\cos(\omega - \upsilon), \tag{2.170}$$

$$\{\omega, n_I\}^* = 0, \tag{2.171}$$

$$\{\omega, m_I\}^* = \frac{m_I}{FG}\cos(\omega - \upsilon), \tag{2.172}$$

$$\{n_k, m_l\} = \frac{\delta_{kl}}{FG} - \frac{n_k m_l}{FG}\mathrm{sen}(\omega - \upsilon). \tag{2.173}$$

Al hacer las constricciones de segunda clase fuertemente igual a cero encontramos que

$$\pi_\upsilon = 0, \qquad \pi_\omega = -FG\cos(\omega - \upsilon), \tag{2.174}$$

$$\pi_G = 0, \qquad \pi_F = G(n \cdot m - \mathrm{sen}(\omega - \upsilon)), \tag{2.175}$$

$$\pi_{nI} = 0, \qquad \pi_{mI} = FGm_I. \tag{2.176}$$

Por lo que, las constricciones de primera clase tienen la forma

$$\phi_1 = \frac{G^2}{2}(m^2 - 1), \tag{2.177}$$

$$\phi_2 = FG[n \cdot m - \mathrm{sen}(\omega - \upsilon)], \tag{2.178}$$

$$\phi_3 = \frac{F^2}{2}(n^2 - 1). \tag{2.179}$$

$$\tag{2.180}$$

Ocupando los paréntesis de Dirac se puede verificar que el álgebra de las constricciones de primera clase se preserva. Sustituyendo las ecuaciones (2.174)-(2.176) en la acción (2.128) tenemos:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[FG(-\dot{\omega}\cos(\omega - \upsilon) + \dot{n} \cdot m) - (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3)]. \tag{2.181}$$

Si tomamos el caso $\omega - \upsilon = 0$, obtendremos (2.84). Pero veamos si al imponer la condición de norma $\omega - \upsilon = 0$, con el método de Dirac, obtenemos la acción (2.84).
Definamos

$$\Phi_+ = \frac{F}{G}\phi_1 + \frac{G}{F}\phi_2 = \frac{FG}{2}(n^2 + m^2 - 2), \tag{2.182}$$

$$\Phi_- = \frac{F}{G}\phi_1 - \frac{G}{F}\phi_2 = \frac{FG}{2}(n^2 - m^2). \tag{2.183}$$

Con la ayuda de nuestra lista de paréntesis de Dirac podemos ver que

$$\{\Phi_+, \Phi_-\}^* = 2[\phi_2 - \Phi_+\mathrm{sen}(\omega - \upsilon)], \tag{2.184}$$

$$\{\Phi_+, \phi_2\}^* = 0. \tag{2.185}$$

Por lo tanto, de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 podemos obtener el conjunto Φ_+, Φ_- y ϕ_2, y a la inversa. Además como ambos conjuntos son de primera clase, podemos tomar como constricciones del sistema a cualquiera de los dos conjuntos.
Consideremos el conjunto Φ_+, Φ_-, ϕ_2 e impongamos la condición de norma

$$\chi_a = \omega - v = 0. \tag{2.186}$$

Podemos ver que se cumple el álgebra

$$\{\chi_a, \phi_2\}^* = 0, \tag{2.187}$$

$$\{\chi_a, \Phi_+\}^* = \frac{2}{FG}\Phi_- \cos(\omega - v), \tag{2.188}$$

$$\{\chi_a, \Phi_-\}^* = (\frac{\Phi_+}{FG} + 1)2\cos(\omega - v). \tag{2.189}$$

De donde, la constricción (2.186) es una buena condición de norma, pues hace de segunda clase a Φ_-. Haciendo fuertes las constricciones χ_a y Φ_-, las constricciones de primera clase restantes son

$$\Phi_+ = FG(n^2 - 1) \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = FG(n \cdot m). \tag{2.190}$$

Y los nuevos paréntesis de Dirac para dos funciones del espacio fase, A y B, cualesquiera son

$$\{A, B\}^{**} = \{A, B\}^* - \{A, \chi_a\}^*\{\Phi_-, B\}^* + \{A, \Phi_-\}^*\{\chi_a, B\}^*. \tag{2.191}$$

Por otra parte, al hacer fuertes a χ_a y Φ_- la acción que obtendremos es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[FG(-\dot{v} + m \cdot \dot{n}) - (\lambda_1 FG(n^2 - 1) + \lambda_2 FG(n \cdot m))]. \tag{2.192}$$

Por lo tanto, con el método de Dirac la condición (2.186) no implica la acción (2.84).
Así, el método de Dirac no da los mismos resultados que el método de reducción de I.Bars.

2.4 Partícula libre no-relativista en un espacio de dimensión d

Hasta ahora hemos ocupado las coordenadas

$$\begin{aligned} X^M &= (X^{0'}, X^{1'}, X^0, X^i) \qquad \text{y} \\ P^M &= (P^{0'}, P^{1'}, P^0, P^i) \quad (i = 1, .., d-1). \end{aligned} \tag{2.193}$$

Sin embargo, podemos considerar cualquier otras coordenadas, en esta sección ocuparemos las coordenadas del cono de luz. Consideremos el cambio de coordenas

$$
\begin{aligned}
X^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{0\prime} + X^{1\prime}), \qquad X^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{0\prime} - X^{1\prime}), \qquad X^{0} = X^{0}, \qquad X^{i} = X^{i} \\
P^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P^{0\prime} + P^{1\prime}), \qquad P^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^{0\prime} - P^{1\prime}), \qquad P^{0} = P^{0}, \qquad P^{i} = P^{i}.
\end{aligned}
$$

Es claro que este cambio de coordenadas es invertible. Como sabemos, al hacer un cambio de coordenadas la métrica también cambia. En el caso particular que tenemos la nueva métrica es la métrica del cono de luz, para una coordenada temporal y una espacial, dada por

$$
\begin{aligned}
\eta_{-+} = \eta_{+-} = -1, \qquad \eta_{--} = \eta_{++} = 0, \\
\eta_{00} = -1, \qquad \eta_{ij} = \delta_{ij} \qquad i = 1, .., d-1
\end{aligned} \tag{2.194}
$$

y todos los demás términos nulos.

Con las coordenadas del cono de luz la acción (2.22) tiene la forma

$$
\begin{aligned}
S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(-P^{+}X^{-} - P^{-}\dot{X}^{+} - P^{0}\dot{X}^{0} + P^{i}\dot{X}^{i} \\
-\frac{\lambda_1}{2}P^{2} - \lambda_2 P\cdot X - \frac{\lambda_3}{2}X^{2}).
\end{aligned} \tag{2.195}
$$

Las ecuaciones de movimiento (2.29) y (2.30) para este caso son

$$
\begin{aligned}
\dot{X}^{-} &= \lambda_1 P^{-} + \lambda_2 X^{-}, && (2.196)\\
\dot{X}^{+} &= \lambda_1 P^{+} + \lambda_2 X^{+}, && (2.197)\\
\dot{X}^{0} &= \lambda_1 P^{0} + \lambda_2 X^{0}, && (2.198)\\
\dot{X}^{i} &= \lambda_1 P^{i} + \lambda_2 X^{i}, && (2.199)\\
P^{-} &= -\lambda_2 P^{-} - \lambda_3 X^{-}, && (2.200)\\
\dot{P}^{-} &= -\lambda_2 P^{+} - \lambda_3 X^{+}, && (2.201)\\
\dot{P}^{0} &= -\lambda_2 P^{0} - \lambda_3 X^{0}, && (2.202)\\
\dot{P}^{i} &= -\lambda_2 P^{i} - \lambda_3 X^{i}, && (2.203)\\
P^{2} &= -2P^{+}P^{-} - P^{0}P^{0} + P^{i}P_{i} = 0, && (2.204)\\
P\cdot X &= -P^{+}X^{-} - P^{-}X^{+} - P^{0}X^{0} + P_{i}X^{i} = 0 && (2.205)\\
\text{y} \qquad X^{2} &= -2X^{+}X^{-} - X^{0}X^{0} + X_{i}X^{i} = 0. && (2.206)
\end{aligned}
$$

Impongamos las condiciones de norma

$$
\chi_1 = X^{+} - \tau, \qquad \chi_2 = P^{+} - m \qquad \text{y} \qquad \chi_3 = P^{0}. \tag{2.207}
$$

De las ecuaciones de movimiento (2.197), (2.201) y (2.202) podemos ver que los multiplicadores de Lagrange se determinan, y son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{m}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{2.208}$$

Así, tendremos que las ecuaciones reducidas son:

$$\dot{P}^- = 0, \tag{2.209}$$
$$\dot{P}^+ = 0, \tag{2.210}$$
$$\dot{P}^0 = 0, \tag{2.211}$$
$$\dot{P}^i = 0, \tag{2.212}$$
$$\dot{X}^- = 0, \tag{2.213}$$
$$\dot{X}^+ = 0, \tag{2.214}$$
$$\dot{X}^0 = 0, \tag{2.215}$$
$$\dot{X}^i = \frac{P^i}{m}, \tag{2.216}$$
$$X_0 = \sqrt{X^i X_i - \frac{2\tau}{m} P^i X_i + \frac{\tau^2}{m^2} P^i P_i} = \text{cte}, \tag{2.217}$$
$$P^- = \frac{P_i^2}{2m} \tag{2.218}$$
$$\text{y} \qquad X^- = \frac{P^i X_i - \tau P^-}{m}. \tag{2.219}$$

Estas ecuaciones resultan ser consistentes. Por lo que, finalmente tenemos las ecuaciones de la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión d, más dos identidades y una constante de movimiento no trivial.

Sustituyendo (2.207) en (2.195) encontramos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\dot{X}^i P_i - \frac{P_i P^i}{2m}], \tag{2.220}$$

que claramente es la acción de una partícula libre no relativista de dimensión $d-1$. Sin embargo, se puede observar que esta acción depende de la norma $P^+ = m$.

La constante de movimiento (2.217) es sólo un caso particular de las cantidades conservadas L^{NM}. El conjunto total de estas constantes de movimiento es:

$$L^{ij} = X^i P^j - X^j P^i, \tag{2.221}$$

$$L^{i0} = -P^i \sqrt{X_k X^k - \frac{2\tau}{m} P^k X_k + \frac{\tau^2}{m^2} P^k P_k}, \tag{2.222}$$

$$L^{i+} = m X^i - P^i \tau, \tag{2.223}$$

$$L^{+0} = -m \sqrt{X_k X^k - \frac{2\tau}{m} P^k X_k + \frac{\tau^2}{m^2} P^k P_k}, \tag{2.224}$$

$$L^{-0} = \frac{-1}{2m} P^k P_k \sqrt{X_k X^k - \frac{2\tau}{m} P^k X_k + \frac{\tau^2}{m^2} P^k P_k} \tag{2.225}$$

$$\text{y} \qquad L^{-+} = P_k X^k - \frac{\tau}{m} P^k P_k. \tag{2.226}$$

Ahora para realizar la reducción ocuparemos el método de Dirac. Al hacer la evolución de las condiciones de norma (2.207) con la Hamiltoniana extendida (2.23) se obtienen los multiplicadores de Lagrange (2.208).

Por otra parte, usando la notación

$$\chi_4 = \frac{1}{2} P^2, \qquad \chi_5 = \frac{1}{2} X^2, \qquad \chi_6 = P \cdot X \tag{2.227}$$

tenemos que

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\alpha\} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m & 0 & -X^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X^+ & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X^0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^+ & -X^0 & 0 & 0 & 0 \\ X^- & m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.228}$$

cuyo determinante es

$$\det C_{\alpha\beta} \approx m^4 (X^0)^2. \tag{2.229}$$

Así las condiciones de norma (2.207) son correctas si $X^0 \neq 0$.
La matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$ está dada por

$$C^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X^-}{(2m)^2} & 0 & \frac{1}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X^+ X^-}{(2m)^2 X^0} & \frac{-1}{2X^0} & \frac{-X^+}{m X^0} \\ \frac{1}{2m} & -\frac{X^-}{(2m)^2} & -\frac{X^+ X^-}{(2m)^2 X^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{X^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2m} & \frac{-X^+}{m X^0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.230}$$

De donde, los paréntesis de Dirac son:

$$\{A,B\}^{*}=\{A,B\}-\frac{1}{m}\{A,\chi_{1}\}\{\chi_{4},B\}$$

$$+\{A,\chi_{2}\}(\frac{X^{-}}{m^{2}}\{\chi_{4},B\}+\frac{1}{m}\{\chi_{6},B\})$$

$$+\{A,\chi_{3}\}(\frac{X^{-}X^{+}}{m^{2}X^{0}}\{\chi_{4},B\}+\frac{X^{+}}{mX^{0}}\{\chi_{6},B\}-\frac{1}{X^{0}}\{\chi_{5},B\})$$

$$+\frac{1}{m}\{A,\chi_{4}\}(\{\chi_{1},B\}-\frac{X^{-}}{m^{2}}\{\chi_{2},B\}-\frac{X^{-}X^{+}}{m^{2}X^{0}}\{\chi_{3},B\})$$

$$+\frac{1}{X^{0}}\{A,\chi_{5}\}\{\chi_{3},B\}-\frac{1}{m}\{A,\chi_{6}\}(\{\chi_{2},B\}+\frac{X^{+}}{X^{0}}\{\chi_{3},B\}). \qquad (2.231)$$

De un cálculo directo se puede mostrar que si $A=A(X^{i},P_{i})$ y $B=B(X^{i},P_{i})$, se cumple

$$\{A,B\}^{*}=\{A,B\}. \qquad (2.232)$$

Con los multiplicadores de Lagrange (2.208) y las condiciones de norma (2.207) la Hamiltoniana (2.23) tiene la forma

$$H_{E}=\frac{1}{2m}P_{i}P^{i}. \qquad (2.233)$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento que tendremos son

$$\dot{P}_{i}=0 \qquad \text{y} \qquad \dot{X}_{i}=\frac{1}{m}P_{i}. \qquad (2.234)$$

Así, con el método de Dirac también obtenemos como espacio reducido a la partícula libre no relativista.
A pesar de que resulta trivial en este caso, se puede notar que los paréntesis de Dirac de las variables X^{i} y P_{i} coincide con la métrica del espacio reducido.

2.4.1 Normas genéricas

Las condiciones de norma que se impusieron para obtener la partícula libre no-relativista no son las únicas que se pueden imponer al sistema que estamos estudiando. Ahora, ocupando la métrica del cono de luz (2.194), impondremos condiciones de norma que contienen como caso particular a (2.207) y que fijan la norma de forma correcta.

Consideremos las condiciones de norma

$$\chi_1 = X_+ - f_1(\tau), \qquad \chi_2 = P_+ - f_2(\tau), \qquad \chi_3 = P_0 - f_3(\tau) \quad (2.235)$$

Como estamos ocupando la métrica (2.194) la acción que tenemos es (2.195). Al sustituir (2.235) en las ecuaciones (2.197), (2.201) y (2.202) encontramos que

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 & 0 \\ 0 & -f_2 & -f_1 \\ 0 & -f_3 & -X_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.236)$$

$$P_- = \frac{1}{2f_2}(P_i^2 - f_3^2), \quad (2.237)$$

$$X_0 = \frac{f_3 f_1}{f_2} \mp \frac{1}{f_2}\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2} \qquad \text{y} \quad (2.238)$$

$$X_- = \frac{1}{f_2}[P_i X^i - \frac{f_1}{2f_2}(P_i^2 - f_3^2) - \frac{f_1 f_3^2}{2f_2} \pm \frac{f_3}{f_2}\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2}]. \quad (2.239)$$

De estas relaciones podemos determinar los multiplicadores de Lagrange siempre y cuando

$$f_2(f_2 X_0 - f_1 f_3) = \mp f_2\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2} \neq 0, \qquad (2.240)$$

es decir,

$$f_2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2} \neq 0. \qquad (2.241)$$

Mediante un cálculo directo se puede verificar que estas son las condiciones para que las condiciones de norma (2.235) y las constricciones originales (2.14) formen un conjunto de constricciones de segunda clase.

Despejando los multiplicadores de Lagrange (2.236) tenemos que

$$\lambda_1 = \frac{d(f_1 f_2)}{d\tau}\frac{1}{f_2^2} \pm \frac{f_1^2(\dot{f}_3 f_2 - f_3 \dot{f}_2)}{f_2^2\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2}}, \qquad (2.242)$$

$$\lambda_2 = -\partial_\tau \ln f_2 \mp \frac{f_1(\dot{f}_3 f_2 - f_3 \dot{f}_2)}{f_2\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2}} \qquad \text{y} \qquad (2.243)$$

$$\lambda_3 = \pm\frac{(\dot{f}_3 f_2 - f_3 \dot{f}_2)}{\sqrt{(f_2 X_i - f_1 P_i)^2}}. \qquad (2.244)$$

Con estos multiplicadores de Lagrange las ecuaciones de movimiento para P_+, P_-, P_0, X_+, X_- y X_0 son identidades. Para las variables restantes tenemos

$$\dot{X}_i = (\frac{d(f_1 f_2)}{d\tau}\frac{1}{f_2^2} \pm \frac{f_1^2(\dot{f}_3 f_2 - f_3\dot{f}_2)}{f_2^2\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}})P_i +$$

$$(-\partial_\tau \ln f_2 \mp \frac{f_1(\dot{f}_3 f_2 - f_3\dot{f}_2)}{f_2\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}})X_i, \quad (2.245)$$

$$\dot{P}_i = -(-\partial_\tau \ln f_2 \mp \frac{f_1(\dot{f}_3 f_2 - f_3\dot{f}_2)}{f_2\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}})P_i$$

$$\mp(\frac{(\dot{f}_3 f_2 - f_3\dot{f}_2)}{\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}})X_i. \quad (2.246)$$

Por otra parte, al sustituir en la acción (2.195) las variables que no son independientes tenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X}^i P_i - \frac{P^2}{2f_2^2}\frac{d(f_1 f_2)}{d\tau} + (X^i P_i)\partial_\tau \ln f_2$$

$$\pm\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}\frac{(\dot{f}_3 f_2 - f_3\dot{f}_2)}{f_2^2} + \frac{d}{d\tau}(\frac{f_1 f_3^2}{f_2})]. \quad (2.247)$$

Se puede mostrar que las ecuaciones de movimiento que obtenemos de la acción (2.247) son (2.245) y (2.246).

Con las condiciones de norma que hemos impuesto, las cantidades L^{MN} tienen la forma

$$L_{ij} = X_i P_j - X_j P_i, \quad (2.248)$$

$$L_{+i} = f_1 P_i - f_2 X_i, \quad (2.249)$$

$$L_{0+} = \mp\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}, \quad (2.250)$$

$$L_{0i} = P_i(\frac{f_3 f_1}{f_2} \mp \frac{1}{f_2}\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2}) - f_3X_i, \quad (2.251)$$

$$L_{-i} = (\frac{1}{f_2}[P_i X^i - \frac{f_1}{2f_2}(P_i^2 - f_3^2) - \frac{f_1 f_3^2}{2f_2}$$

$$\pm\frac{f_3}{f_2}\sqrt{(f_2X_i - f_1P_i)^2})P_i - \frac{1}{2f_2}(P_i^2 - f_3^2)X_i. \quad (2.252)$$

Se puede verificar que, para cualquier f_1, f_2 y f_3, estas cantidades son constantes de movimiento.

También podemos notar que con estas condiciones de norma el espacio reducido depende de parámetros de las condiciones de norma.

2.5 Partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d

Al imponer las condiciones de norma para obtener la partícula libre no-relativista se eliminó toda la libertad de norma del sistema. Sin embargo, también es posible imponer condiciones de norma que no eliminen toda la libertad de norma y, de esta forma, obtener, como espacios reducidos, sistemas que tienen libertad de norma.
En esta sección mostraremos la forma en que se puede obtener la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d.

Consideremos las coordenadas en el espacio fase

$$X^M = (X^0, X^{0'}, X^{1'}, X^1, ..., X^{d-1}), \tag{2.253}$$

$$P^M = (P^0, P^{0'}, P^{1'}, P^1, ..., P^{d-1}) \tag{2.254}$$

y la métrica de dos tiempos (2.18). Con esta métrica las ecuaciones de movimiento (2.29) y (2.30) tienen la forma

$$\dot{P}^M = -\lambda_2 P^M - \lambda_3 X^M, \tag{2.255}$$

$$\dot{X}^M = \lambda_1 P^M + \lambda_2 X^M, \tag{2.256}$$

$$P^2 = -P_0^2 - P_{0'}^2 + P_{1'}^2 + P^i P_i = 0 \qquad (i = 1, ...d-1), \tag{2.257}$$

$$X^2 = -X_0^2 - X_{0'}^2 + X_{1'}^2 + X^i X_i = 0 \tag{2.258}$$

$$\text{y} \qquad X \cdot P = -P_0 X_0 - P_{0'} X_{0'} + P_{1'} X_{1'} + P_i X^i = 0. \tag{2.259}$$

Si imponemos las condiciones de norma

$$P_{1'} = m \qquad \text{y} \qquad P_{0'} = 0, \tag{2.260}$$

tenemos que

$$\dot{P}^{1'} = -\lambda_2 P^{1'} - \lambda_3 X^{1'}, \tag{2.261}$$

$$\dot{P}_{0'} = -\lambda_2 P_{0'} - \lambda_3 X_{0'}, \tag{2.262}$$

de donde,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{2.263}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento reducidas son

$$\dot{P}^M = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{X}^M = \lambda_1 P_M. \tag{2.264}$$

De las ecuaciones (2.258) y (2.259) podemos despejar

$$X_{0'} = \sqrt{\frac{(P_\mu X^\mu)^2}{m^2} + X_\mu X^\mu} \qquad \text{y} \tag{2.265}$$

$$X_{1'} = -\frac{(P_\mu X^\mu)}{m} \qquad (\mu = 0, 1, ..., d-1). \tag{2.266}$$

con $P_\mu X^\mu = \eta^{\mu\nu} P_\mu X_\nu$ y $\eta^{\nu\mu}$ la métrica de Minkowski. Así, las ecuaciones de movimiento para las variables independientes son

$$\dot{P}_\mu = 0, \tag{2.267}$$

$$\dot{X}^\mu = \lambda_1 P^\mu, \tag{2.268}$$

$$\phi = P_\mu P^\mu + m^2 = 0, \tag{2.269}$$

$$X_{0'} = \sqrt{\frac{(P_\mu X^\mu)^2}{m^2} + X_\mu X^\mu} = \text{cte}, \tag{2.270}$$

$$X_{1'} = -\frac{(P_\mu X^\mu)}{m}, \tag{2.271}$$

$$\text{y} \qquad \dot{X}^{1'} = \lambda_1 m. \tag{2.272}$$

Estas ecuaciones de movimiento son consistentes.
Como la ecuación de movimiento para X^1 es sólo una identidad, hemos obtenido las ecuaciones de la partícula relativista libre y una constante de movimiento.

También podemos ver que al sustituir (2.260) en la acción (2.22) tenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X}^\mu P_\mu - \frac{\lambda}{2}(P^\mu P_\mu + m^2)].$$

Que es la acción de una partícula libre con masa m en el espacio de Minkowski de dimensión d.
El conjunto de constantes de movimiento L^{NM} para este sistema es

$$L^{\nu\mu} = X^\nu P^\mu - X^\mu P^\nu, \tag{2.273}$$

$$L^{\nu 1'} = m X^\nu + \frac{1}{m} P^\alpha X_\alpha P^\nu, \tag{2.274}$$

$$L^{\nu 0'} = -P^{\nu}\sqrt{\frac{(P_\alpha X^\alpha)^2}{m^2} + X_\alpha X^\alpha} \tag{2.275}$$

$$\text{y} \qquad L^{1'0'} = -m\sqrt{\frac{(P_\alpha X^\alpha)^2}{m^2} + X_\alpha X^\alpha}. \tag{2.276}$$

Al hacer la reducción mediante el método de Dirac obtenemos los mismos resultados. Primero definamos el conjunto

$$\chi_1 = P_{1'} - m, \tag{2.277}$$

$$\chi_2 = P_0, \tag{2.278}$$

$$\chi_3 = P \cdot X, \tag{2.279}$$

$$\chi_4 = X^2. \tag{2.280}$$

Es fácil verificar que este conjunto de constricciones forman un conjunto de constricciones de segunda clase, pues,

$$C_{\alpha\beta} \approx \{\chi_\alpha, \chi_\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m & -2X_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2X_0 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 2X_1 & 2X_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.281}$$

la cual es singular sólo si $m = 0$ o $X_0 = 0$. También se puede verificar que la constricción P^2 sigue siendo de primera clase.

Al hacer la evolución de las constricciones (2.260) con la Hamiltoniana extendida (2.23) se obtienen los multiplicadores de Lagrange (2.263). La matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$ es

$$C^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-X_1}{mX_0} & \frac{X_0}{2} \\ \frac{-1}{m} & \frac{X_1}{mX_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-X_0}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.282}$$

Mediante un cálculo directo se puede ver que para la variables X_μ y P_μ los paréntesis de Dirac coinciden con los paréntesis de Poisson, es decir,

$$\{X^\mu, P_\nu\}^* = \delta^\mu_\nu.$$

Por otra parte, al sustituir (2.260) y (2.263) en (2.23) tenemos que

$$H_E = \frac{\lambda}{2}(P^\mu P_\mu + m^2). \tag{2.283}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para P^μ y X^μ son (2.267) y (2.268).

En este caso ya no resulta tan trivial notar que los paréntesis de Dirac de las variables X^ν y P_ν coincide con la métrica del espacio reducido.

2.6 Partícula libre sin masa en AdS_{d+1}

Para obtener como sistema reducido a la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} tomaremos las condiciones de norma

$$\chi_1 = X_{1'} - 1 \qquad \text{y} \qquad \chi_2 = P_{1'}. \tag{2.284}$$

Para este caso también tomaremos la métrica (2.18), esto implica que las ecuaciones de movimiento son (2.255)-(2.259).
De las ecuaciones de movimiento para $X_{1'}$ y $P_{1'}$ podemos determinar dos multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{2.285}$$

Por lo que, las ecuaciones de movimiento reducidas son

$$\dot{X}^\mu = \lambda_1 P^\mu, \tag{2.286}$$

$$\dot{P}^\mu = 0, \tag{2.287}$$

$$\phi_1 = P^\mu P_\mu - \frac{(P^\mu X_\mu)^2}{1 + X^\mu X_\mu}, \tag{2.288}$$

$$X^{0'} = \sqrt{1 + X^\mu X_\mu}, \tag{2.289}$$

$$\dot{X}^{0'} = \lambda_1 P^{0'} \qquad \text{y} \tag{2.290}$$

$$P_{0'} = \frac{-(P^\mu X_\mu)}{\sqrt{1 + X^\mu X_\mu}} = \text{cte}. \tag{2.291}$$

Mediante un cálculo directo se puede mostrar que estas ecuaciones de movimiento son autoconsistentes.

Sustituyendo los multiplicadores de Lagrange (2.285), las variables $X_{0'}$ y $P_{0'}$ en la acción (2.23) obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X}^\mu (P_\mu - X_\mu \frac{(P^\beta X_\beta)}{1 + X^\beta X_\beta}) - \frac{\lambda_1}{2} (P^\nu P_\nu - \frac{(P^\nu X_\nu)^2}{1 + X^\nu X_\nu})]. \tag{2.292}$$

De esta acción tenemos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{X}^\mu (\delta_\mu^\alpha - \frac{X_\mu X^\alpha}{1 + X^\beta X_\beta}) = \lambda_1 (P^\alpha - \frac{X^\alpha (P^\beta X_\beta)}{1 + X^\beta X_\beta}), \tag{2.293}$$

$$\frac{d}{d\tau}(P_\alpha - \frac{X_\alpha(P^\beta X_\beta)}{1+X^\beta X_\beta}) = \lambda_1(\frac{(P_\beta X^\beta)}{1+X^\beta X_\beta})(P_\alpha - \frac{X_\alpha(P^\beta X_\beta)}{1+X^\beta X_\beta})$$
$$-\dot{X}_\nu \frac{\partial}{\partial X^\alpha}(P^\nu - \frac{X^\nu(P^\beta X_\beta)}{1+X^\beta X_\beta}), \quad (2.294)$$

$$\text{y} \qquad \phi_1 = P^\mu P_\mu - \frac{(P^\mu X_\mu)^2}{\sqrt{1+X^\mu X_\mu}}. \quad (2.295)$$

Multiplicando la ecuación (2.293) por la matriz

$$\delta^\nu_\alpha + X_\alpha X^\nu \quad (2.296)$$

obtenemos (2.286) Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.294), tenemos que

$$\dot{P}^\mu = \lambda_1 \phi_1.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de la acción (2.292) son:

$$X^\mu = \lambda_1 P^\mu, \quad (2.297)$$
$$\dot{P}^\mu = \lambda_1 \phi_1, \quad (2.298)$$
$$\phi_1 = P^\mu P_\mu - \frac{(P^\mu X_\mu)^2}{1+X^\mu X_\mu} = 0. \quad (2.299)$$

No obtenemos la constante de movimiento ni la identidad que teniamos anteriormente, no obstante estas se siguen cumpliendo.

Ahora definamos

$$\bar{\mathbf{P}}_\alpha = P_\alpha - X_\alpha \frac{P_\beta X^\beta}{1+X_\beta X^\beta} = P_\mu(\delta^\mu_\alpha - \frac{X^\mu X_\beta}{1+X_\beta X^\beta}) \quad (2.300)$$
$$\text{y} \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + X^\mu X^\nu. \quad (2.301)$$

Con estas definiciones las ecuaciones (2.293), (2.294) y (2.295) se pueden escribir como

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}}_\alpha = -\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial X^\alpha}\bar{\mathbf{P}}_\mu \bar{\mathbf{P}}_\nu, \quad (2.302)$$
$$\dot{X}_\alpha = \lambda_1 g^{\alpha\nu}\bar{\mathbf{P}}_\nu \quad (2.303)$$
$$\text{y} \qquad \phi_1 = g^{\mu\nu}\bar{\mathbf{P}}_\mu \bar{\mathbf{P}}_\nu = 0. \quad (2.304)$$

Al poner la acción (2.292) en términos de las nuevas variables obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{X}^\mu \bar{\mathbf{P}}_\mu - \frac{\lambda_1}{2} g^{\mu\nu}\bar{\mathbf{P}}_\mu \bar{\mathbf{P}}_\nu). \quad (2\ 305)$$

Si aplicamos el principio de acción a (2.305) suponiendo que las variables X^α y $\bar{\mathbf{P}}_\alpha$ son independientes, obtenemos las ecuaciones de movimiento (2.302)-(2.302). Por lo tanto el sistema reducido que obtenemos representa a una partícula sin masa en un espacio curvo con métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}X^\alpha X^\beta}{1 + \eta_{\mu\alpha}X^\alpha X^\mu}. \tag{2.306}$$

Como se muestra en el apéndice B, la métrica (2.306) es la métrica del espacio de anti-de Sitter de dimensión $d+1$ (AdS_{d+1}). Así, el sistema reducido es equivalente a el sistema de una partícula sin masa en AdS_{d+1}.

De la definición de $\mathbf{P}_\alpha$, podemos ver que

$$P_\nu = \bar{\mathbf{P}}_\alpha(\delta^\alpha_\nu + \eta_{\nu\mu}X^\mu X^\alpha), \tag{2.307}$$

de donde

$$\frac{(P_\mu X^\mu)}{\sqrt{1+\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}} = \bar{\mathbf{P}}_\alpha X^\alpha(\sqrt{1+\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}). \tag{2.308}$$

También se puede verificar que se cumple

$$\sqrt{1+\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}}. \tag{2.309}$$

Así,

$$\frac{(P_\mu X^\mu)}{\sqrt{1+\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}} = \frac{\bar{\mathbf{P}}_\alpha X^\alpha}{\sqrt{1-g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}}. \tag{2.310}$$

Esta es la constante de movimiento que teniamos anteriormente. Haciendo la derivada con respecto al tiempo del lado derecho, y ocupando las ecuaciones de movimiento para la partícula en el espacio curvo, encontramos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{\mathbf{P}}_\alpha X^\alpha}{\sqrt{1-g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}}\right) = \lambda_1\frac{(g^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{P}}_\alpha\bar{\mathbf{P}}_\beta)}{\sqrt{1-g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}} = 0. \tag{2.311}$$

Por lo tanto, (2.310) es una constante de movimiento.
El conjunto total de las constantes de movimiento L^{NM}, para este sistema, son:

$$L^{\mu\nu} = X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu, \tag{2.312}$$

$$L^{\mu 0'} = X^\mu \frac{P_\beta X^\beta}{\sqrt{(1+X_\alpha X^\alpha)}} + \sqrt{(1+X_\alpha X^\alpha)}P^\mu, \tag{2.313}$$

$$L^{\mu 1'} = -P^{\mu}, \tag{2.314}$$

$$\text{y} \qquad L^{1'0'} = \frac{P_\beta X^\beta}{\sqrt{(1 + X_\alpha X^\alpha)}} \tag{2.315}$$

esto si $1 + X_\alpha X^\alpha > 0$. Si $1 + X_\alpha X^\alpha < 0$, se tienen las constantes

$$L^{\mu\nu} = X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu, \tag{2.316}$$

$$L^{\mu 0'} = X^\mu \frac{P_\beta X^\beta}{\sqrt{-(1 + X_\alpha X^\alpha)}} + \sqrt{-(1 + X_\alpha X^\alpha)} P^\mu, \tag{2.317}$$

$$L^{\mu 1'} = -P^\mu, \tag{2.318}$$

$$\text{y} \qquad L^{1'0'} = \frac{P_\beta X^\beta}{\sqrt{-(1 + X_\alpha X^\alpha)}}. \tag{2.319}$$

Con las variables del espacio curvo tenemos

$$L^{\mu\nu} = X^\mu \bar{\mathbf{P}}^\nu - X^\nu \bar{\mathbf{P}}^\mu, \tag{2.320}$$

$$L^{\mu 0'} = -X^\mu \frac{\bar{\mathbf{P}}_\beta X^\beta}{\sqrt{1 - g_{\beta\alpha} X^\alpha X^\beta}} + \frac{\bar{\mathbf{P}}^\mu}{\sqrt{1 - g_{\beta\alpha} X^\alpha X^\beta}}, \tag{2.321}$$

$$L^{\mu 1'} = -\bar{\mathbf{P}}^\mu, \tag{2.322}$$

$$\text{y} \qquad L^{1'0'} = \frac{\bar{\mathbf{P}}_\beta X^\beta}{\sqrt{1 - g_{\beta\alpha} X^\alpha X^\beta}}. \tag{2.323}$$

Para verificar que la fijación de norma es correcta, pasemos al formalismo de Dirac.
Definamos

$$\chi_1 = X'^1 - 1, \tag{2.324}$$

$$\chi_2 = P'^1, \tag{2.325}$$

$$\chi_3 = P \cdot X, \tag{2.326}$$

$$\chi_4 = X^2 \tag{2.327}$$

$$\text{y} \qquad \phi = P^2. \tag{2.328}$$

Es fácil verificar que la constricción ϕ es una constricción de primera clase, mientras que las demás son de segunda clase. Así,

$$C_{\alpha\beta} \approx \{\chi_\alpha, \chi_\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.329}$$

de donde, det $C_{\alpha\beta} = 4$. Por otra parte, la inversa de $C_{\alpha\beta}$ tiene la forma

$$C^{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.330}$$

Por tanto, para cualquier dos funciones del espacio fase, A y B, el paréntesis de Dirac tiene la forma

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \frac{1}{2}[-2\{A,\chi_1\}\{\chi_3,B\} + \{A,\chi_2\}\{\chi_4,B\}$$
$$+\{A,\chi_3\}(2\{\chi_1,B\} - \{\chi_4,B\}) + \{A,\chi_4\}(-\{\chi_2,B\} + \{\chi_3,B\})]. \tag{2.331}$$

Si A y B sólo dependen de X_ν y P_ν tenemos

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + X^\alpha X^\beta[\frac{\partial B}{\partial P^\alpha}\frac{\partial A}{\partial X^\beta} - \frac{\partial A}{\partial P^\alpha}\frac{\partial B}{\partial X^\beta}] -$$
$$X^\alpha P^\beta[\frac{\partial B}{\partial P^\alpha}\frac{\partial A}{\partial P^\beta} - \frac{\partial A}{\partial P^\alpha}\frac{\partial B}{\partial P^\beta}]. \tag{2.332}$$

En particular tenemos que

$$\{X^\mu, P_\nu\}^* = \delta^\mu_\nu + X^\mu X_\nu, \tag{2.333}$$
$$\{P_\mu, P_\nu\}^* = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu, \tag{2.334}$$
$$\{X^\mu, X_\nu\}^* = 0, \tag{2.335}$$
$$\{X^\mu, \bar{\mathbf{P}}_\nu\}^* = \delta^\mu_\nu \tag{2.336}$$
$$\text{y} \qquad \{\bar{\mathbf{P}}_\mu, \bar{\mathbf{P}}_\nu\}^* = 0. \tag{2.337}$$
(2.338)

Por lo que, las ecuaciones de movimiento para X^μ y P^μ son

$$\dot{X}^\mu = \{X^\mu, \lambda_1\phi\}^* = 2\lambda_1 P^\mu \quad \text{y} \quad \dot{P}^\mu = \{P^\mu, \lambda_1\phi\}^* = 2\lambda_1 X^\mu\phi. \tag{2.339}$$

Como vemos el paréntesis de Dirac de X^ν con P^ν da la métrica que resulta en la acción (2.305) de la partícula en AdS_{d+1}, es decir,

$$g^{\mu\nu} = \{X^\mu, P^\nu\}^*. \tag{2.340}$$

Por otra parte, las variables $\bar{\mathbf{P}}_\mu$ y X^ν, con los paréntesis de Dirac, son conjugadas canónicas. Mientras que la constricción la podemos escribir como

$$\phi = \{X^\mu, P^\nu\}^* \bar{\mathbf{P}}_\mu \bar{\mathbf{P}}_\nu = g^{\mu\nu}\bar{\mathbf{P}}_\mu\bar{\mathbf{P}}_\nu. \tag{2.341}$$

Así, con los paréntesis de Dirac, podemos recuperar las ecuaciones de movimiento para $\tilde{P}_\mu$ y X^μ.
En este caso, más que trivial, resulta ser una sorpresa encontrar que el paréntesis de Dirac de las variables X^ν y P_ν coincide con la métrica de AdS_{d+1}.

El procedimiento por el cual I.Bars obtiene este sistema se encuentra en el apéndice B, también se puede ver en [28].

2.6.1 Dualidad de la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d con la partícula libre sin masa AdS_{d+1}

Consideremos el conjunto de ecuaciones (2.286)-(2.291) y la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{X}_{1'} & -(\frac{\tilde{X}_{1'}X_{0'}}{P_{0'}} + \frac{1}{m}) \\ m & -(\frac{mX_{0'}}{P_{0'}}) \end{pmatrix}. \tag{2.342}$$

La matriz T cumple que det $T = 1$, entonces, pertenece a $Sp(2)$. Con esta matriz podemos hacer la transformación de norma finita

$$\tilde{X}_i^M = T_{ij}X_j^M. \tag{2.343}$$

De (2.343) tenemos que

$$\tilde{P}_{1'} = m, \tag{2.344}$$
$$\tilde{X}_{1'} = \tilde{X}_{1'}, \tag{2.345}$$
$$\tilde{P}_{0'} = 0, \tag{2.346}$$
$$\tilde{X}_{0'} = -\frac{P_{0'}}{m}, \tag{2.347}$$
$$\tilde{X}_\mu = \tilde{X}_{1'}X_\mu - (\frac{\tilde{X}_{1'}X_{0'}}{P_{0'}} + \frac{1}{m})P_\mu \tag{2.348}$$
$$\text{y} \qquad \tilde{P}_\mu = mX_\mu - \frac{mX_{0'}}{P_{0'}}P_\mu. \tag{2.349}$$

También se puede mostrar que se cumplen las ecuaciones

$$\tilde{P}_\mu\tilde{P}^\mu + m^2 = 0, \tag{2.350}$$
$$\tilde{X}_M\tilde{X}^M = 0, \tag{2.351}$$
$$\tilde{X}_{1'} = \frac{-\tilde{X}_\mu\tilde{P}^\mu}{m}, \tag{2.352}$$

$$\tilde{X}_{0'} = \sqrt{\frac{(\tilde{P}_\mu \tilde{X}^\mu)^2}{m^2} + \tilde{X}_\mu \tilde{X}^\mu} = \text{cte}, \tag{2.353}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{P}_\mu = 0, \tag{2.354}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}^\mu = \tilde{\lambda}_1 \tilde{P}^\mu, \tag{2.355}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_{1'} = \tilde{\lambda}_1 m. \tag{2.356}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a (2.267)-(2.272). Por otra parte, se puede mostrar que la transformación (2.62) da resultados consistentes. Por lo tanto, para este caso, la transformación de norma (2.343) nos permite transformar el conjunto de ecuaciones (2.286)-(2.291) al conjunto (2.268)-(2.272), es decir, nos permite pasar de la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} a la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d.

2.7 Modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión

Para obtener el modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión consideraremos la métrica (2.18) y tomaremos las condiciones de norma

$$\chi_1 = X_0 - 1 \qquad \text{y} \qquad \chi_2 = P_0. \tag{2.357}$$

De las ecuaciones de movimiento para X_0 y P_0 obtenemos que

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{2.358}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento reducidas son:

$$\dot{X}^i = \lambda_1 P_i, \qquad (i = 1, .., d) \tag{2.359}$$

$$\dot{P}^i = 0, \tag{2.360}$$

$$\phi_1 = P^i P_i - \frac{(P^i X_i)^2}{X^j X_j - 1}, \tag{2.361}$$

$$X^{0'} = \sqrt{X^i X_i - 1}, \tag{2.362}$$

$$\dot{X}^{0'} = \lambda_1 P^{0'} \tag{2.363}$$

$$\text{y} \qquad P^{0'} = \frac{(P^i X_i)}{\sqrt{X^i X_i - 1}} = \text{cte}. \tag{2.364}$$

Para este caso también se puede mostrar que las ecuaciones de movimiento reducidas son autoconsistentes.
Sustituyendo (2.358), las condiciones de norma (2.357) y las ecuaciones (2.362) y (2.364) en la acción (2.23) obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{X}^i(P_i - X_i\frac{(P^j X_j)}{X^k X_k - 1}) - \frac{\lambda_1}{2}(P^i P_i - \frac{(P^i X_i)^2}{X^k X_k - 1})]. \quad (2.365)$$

Definamos

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{X_j X_i}{1 - X_k X^k}, \quad (2.366)$$

entonces, las ecuaciones de movimiento de la acción (2.365) se pueden escribir como

$$g_{ji}\dot{X}^i = \lambda_1 g_{ji} P^i, \quad (2.367)$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_{ij}P^j) = P^k \dot{X}^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial X^i} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial X^i} P^k P^l \quad (2.368)$$

$$\text{y} \qquad \phi_1 = g_{ij} P^i P_j = P^i P_i - \frac{(P^i X_i)^2}{X^j X_j - 1} = 0. \quad (2.369)$$

Multiplicando (2.367) por la matriz

$$g_i^j = \delta_i^j + X_i X^j \quad (2.370)$$

obtenemos (2.359) Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.368) tenemos (2.360). Por lo tanto, la ecuaciones de movimiento de la acción (2.365) son

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \lambda_1 P^i, \\ P^i &= \lambda_1 \phi_1 \\ \text{y} \qquad \phi_1 &= g_{ij} P^i P_j = 0. \end{aligned} \quad (2.371)$$

Por otra parte, ocupando que $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ y la ecuación (2.359), la ecuación (2.368) se puede escribir como

$$\frac{d}{d\tau}(g_{ij}P^j) = -\frac{\lambda}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial X^i} g_{ks} g_{lr} P^s P^r, \quad (2.372)$$

Por lo tanto, definiendo

$$\bar{\mathrm{P}}_i = g_{ij} P^j, \quad (2.373)$$

las ecuaciones de movimiento (2.367)-(2.369) se pueden escribir como

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}}_i = -\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial X^i}\bar{\mathbf{P}}_k\bar{\mathbf{P}}_l, \tag{2.374}$$

$$\dot{X}^i = \lambda_1 g^{ik}\bar{\mathbf{P}}_k \tag{2.375}$$

$$\text{y} \qquad \phi_1 = g^{ij}\bar{\mathbf{P}}_i\bar{\mathbf{P}}_j = 0. \tag{2.376}$$

Ahora, al poner la acción (2.365) en términos de las nuevas variables obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{X}^i\bar{\mathbf{P}}_i - \frac{\lambda_1}{2}g^{ij}\bar{\mathbf{P}}_i\bar{\mathbf{P}}_j). \tag{2.377}$$

Si aplicamos el principio de acción a (2.377), suponiendo que las variables X^α y $\bar{\mathbf{P}}_\alpha$ son independientes, obtenemos las ecuaciones de movimiento (2.374)-(2.376).
La acción (2.377) no puede ser interpretada como la acción de una partícula libre sin masa en un espacio con métrica g_{ij}. Sin embargo, si sustituimos (2.374) en (2.377) obtenemos

$$S = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}j}{\lambda_1}. \tag{2.378}$$

Para el caso de $\lambda_1 = 1$, (2.378) representa la acción de el modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión (ver [33] o [34]) .

Las constantes de movimiento L^{NM} para este sistema reducido son

$$L^{ij} = X^iP^j - X^jP^i, \tag{2.379}$$

$$L^{i0'} = X^i\frac{P_kX^k}{\sqrt{-1+X_kX^k}} - \sqrt{-1+X_kX^k}P^i, \tag{2.380}$$

$$L^{i0} = P^i, \tag{2.381}$$

$$\text{y} \qquad L^{00'} = \frac{P_kX^k}{\sqrt{X_kX^k-1}} \tag{2.382}$$

esto si $-1+X_kX^k > 0$. Pero si $1 - X_kX^k > 0$, tenemos

$$L^{ij} = X^iP^j - X^jP^i, \tag{2.383}$$

$$L^{i0'} = -(X^i\frac{P_kX^k}{\sqrt{1-X_kX^k}} + \sqrt{1-X_kX^k}P^i), \tag{2.384}$$

$$L^{i0} = P^i, \tag{2.385}$$

$$\text{y} \qquad L^{00'} = -\frac{P_kX^k}{\sqrt{1-X_kX^k}}. \tag{2.386}$$

Para verificar que la fijación de norma es correcta, pasemos al formalismo de Dirac.
Definamos

$$\chi_1 = X_0 - 1, \tag{2.387}$$
$$\chi_2 = P_0, \tag{2.388}$$
$$\chi_3 = \frac{1}{2}X^2, \tag{2.389}$$
$$\chi_4 = P \cdot X, \tag{2.390}$$
$$\text{y} \qquad \phi = \frac{1}{2}P^2. \tag{2.391}$$

Es fácil verificar que la constricción ϕ es una constricción de primera clase, mientras que las demás son de segunda clase. Así,

$$C_{\alpha\beta} \approx \{\chi_\alpha, \chi_\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.392}$$

de donde, det $C_{\alpha\beta} = 1$. Por otra parte,

$$C^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.393}$$

Por lo tanto, para cualquier dos funciones del espacio fase, A y B, el paréntesis de Dirac tiene la forma

$$\begin{aligned} \{A,B\}^* = \{A,B\} - [\{A,\chi_1\}\{\chi_4,B\} - \{A,\chi_2\}\{\chi_3,B\} \\ +\{A,\chi_3\}(\{\chi_2,B\} - \{\chi_4,B\}) - \{A,\chi_4\}(\{\chi_1,B\} - \{\chi_3,B\})]. \end{aligned} \tag{2.394}$$

Si tenemos funciones que sólo dependen de X_i y P_i el paréntesis de Dirac se reduce a

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + \{A,\chi_3\}\{\chi_4,B\} - \{A,\chi_4\}\{\chi_3,B\}. \tag{2.395}$$

De donde,

$$\{X^i, P_j\}^* = \delta^i_j - X^i X_j, \tag{2.396}$$
$$\{P_i, P_j\}^* = X_i P_j - X_j P_i, \tag{2.397}$$

$$\{X^j, X_i\}^* = 0, \tag{2.398}$$
$$\{X^i, \bar{\mathbf{P}}_j\}^* = \delta^i_j \tag{2.399}$$
$$\text{y} \qquad \{\bar{\mathbf{P}}_j, \bar{\mathbf{P}}_j\}^* = 0. \tag{2.400}$$

Para este caso también ocurre que

$$g^{ij} = \{X^i, P^j\}^*. \tag{2.401}$$

Así, de la misma forma que en el caso de la partícula sin masa en AdS_{d+1}, tenemos una relación entre la estructura simpléctica del espacio reducido y su métrica en unas coordenadas particulares.

Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado la forma en que se puede asociar una acción con libertad de norma a un álgebra de Lie. Se tomó en concreto la acción asociada a el álgebra de Lie del grupo $Sp(2)$, originalmente planteada por R. Marnelius. Este caso es interesante ya que en la literatura se encuentran resultados muy llamativos sobre este sistema. Por ejemplo, sin utilizar el método de Dirac, se imponen condiciones de norma con las cuales se obtienen sistemas reducidos como la partícula clásica en un potencial $V(r)$, la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$, la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d, la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1}.
Para la acción asociada a $Sp(2)$ encontramos las transformaciones de norma finitas y se mostró que el sistema tiene como simetría global al grupo conforme $SO(2,d)$. Utilizando el método de Dirac, mostramos que las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula clásica en un potencial $V(r)$ dan lugar a ecuaciones de movimiento inconsistentes. Sin embargo, también se mostró que con el método de Dirac las condiciones de norma que se imponen para obtener la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión $d-1$, la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d, la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1} sí son consistentes.

Se impusieron condiciones de norma que generalizan las impuestas para obtener la partícula libre en el espacio Euclidiano de dimensión d, se mostró la transformación de norma que conecta la partícula libre con masa en el espacio de Minkowski de dimensión d con la partícula libre sin masa en el espacio AdS_{d+1}. Se mostraron nuevas condiciones de norma con las cuales se obtiene como sistema reducido al modelo sigma nolineal-$O(d+1)$ en una dimensión. Y para cada sistema de condiciones de norma consistentes se mostró una relación entre los paréntesis de Dirac entre las variables canónicas y la métrica del espacio reducido.

Como se mencionó en la introducción. este sólo es un trabajo de exploración. Aún quedan temas pendientes, por ejemplo, no tenemos el espacio reducido en términos de variables invariantes de norma. Otro tema que queda pendiente es la cuantización del sistema. Por la conexión que hay entre los paréntesis de Dirac y los conmutadores del sistema cuántico, y la relación que se mostró que hay entre los paréntesis de Dirac y la métrica de los diferentes sistemas reducidos, la cuantización de este sistema puede ser bastante interesante. Se pueden plantear otro tipo de interrogantes, por ejemplo, nos podemos preguntar si es posible obtener, de manera consistente, como sistema reducido a todos los sistemas mécanicos que tienen como simetría al grupo conforme, como el átomo de Hidrógeno.

Por otra parte, debido a que para la acción de $Sp(2)$ se tienen las transformaciones de norma finitas, en la teoría de constricciónes se pueden poner a prueba algunos resultados que sólo se tienen en forma infinitesimal y se suponen ciertos de forma finita. También podría resultar interesante construir la acción asociada a otros grupos de Lie, estudiar la superficie de constricción de estos sistemas, sus posibles condiciones de norma y los diferentes sistemas reducidos que se pueden obtener. La métrica que se utilizó en el espacio fase también nos puede ser útil para ampliar horizontes, pues, recientemente en otras áreas, como la teoría de cuerdas, se está estudiando esta métrica.

Apéndice A

Generadores del álgebra de Lie de $SO(2,d)$

Tomemos el conjunto de matrices (tensores de segundo orden) que cumplen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \tag{A.1}$$

con η el tensor métrico que cumple

$$\eta = \eta^{-1}. \tag{A.2}$$

Es claro que este conjunto de matrices satisface que $\det \Lambda = \pm 1$. También se puede mostrar que satisface las propiedades de grupo. Consideremos el subgrupo que cumple $\det \Lambda = 1$. Para este caso un elemento infinitesimalmente cercano a la identidad tiene la forma

$$\Lambda_{ab} = \delta_{ab} + \epsilon J_{ab}. \tag{A.3}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación que define al grupo tenemos que

$$J_{ab} = -J_{ba} \tag{A 4}$$

Así, al aplicar la transformación a (A.3) a un vector z^a tenemos

$$\bar{z}^a = z^a + \epsilon_b{}^a z^b \qquad \text{con} \qquad \epsilon_b{}^a = -\epsilon^a{}_b, \tag{A.5}$$

entonces

$$\delta z^a = \epsilon^a{}_b z^b. \tag{A.6}$$

En el espacio fase las transformaciones infinitesimales para una función, u, son de la forma

$$\delta u = \epsilon\{u, G\} \tag{A.7}$$

con G el generador de la transformación. En nuestro caso el generador debe ser un tensor de segundo orden. Por lo que, la transformación infinitesimal debe tener la forma

$$\delta z^a = \alpha_{cd}\{z^a, J^{cd}\} = \epsilon^a{}_b z^b. \tag{A.8}$$

Si queremos que J^{cd} tenga las propiedades del generador de la transformación debemos tomar a α_{cd} arbitraria
Por otra parte, los únicos vectores del espacio fase con los que podemos formar un tensor de rango dos son las variables canónicas, X^a y P^a. Así, se puede mostrar que si consideramos el caso particular $z^a = X^a$, como $\epsilon_a{}^b$ es antisimétrico y α_{ab} es un tensor cualquiera, el único tensor que tiene las propiedades adecuadas es

$$J^{ab} = X^a P^b - X^b P^a, \tag{A.9}$$

en dicho caso tenemos $\alpha_{cd}\{X^a, J^{cd}\} = \epsilon^a{}_b X^b$ con $\alpha_b{}^a - \alpha^a{}_b = \epsilon^a{}_b$. Se puede verificar que tomando otro z^a el tensor (A.9) sigue cumpliendo las propiedades que se requieren.
Por lo tanto
(a) Si tomamos la métrica euclidiana tenemos

$$J^{ij} = X^i P^j - X^j P^i. \tag{A.10}$$

(b) Si tomamos la métrica de Minkowski tenemos

$$J^{\mu\nu} = X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu. \tag{A.11}$$

(c) Si tomamos la métrica de "dos tiempos" tenemos

$$J^{MN} = X^M P^N - X^N P^M. \tag{A.12}$$

También se puede verificar que el álgebra que satisfacen los generadores es

$$\{J^{ab}, J^{rs}\} = \eta^{br} J^{sa} + \eta^{as} J^{rb} + \eta^{ar} J^{bs} + \eta^{bs} J^{ar}. \tag{A.13}$$

Apéndice B

Espacio de anti-de Sitter (AdS_{d+2})

B.0.1 Espacio de anti-de Sitter (AdS_{d+2})

El espacio de anti-de Sitter (AdS_{d+2}) puede ser representado como el espacio hiperbólico

$$-X_{0'}^2 - X_0^2 + X_i X^i = -1 \qquad i = 1, ..., d \tag{B.1}$$

inmerso en un espacio cuyo elemento de línea es

$$dS^2 = -d^2 X_{0'} - d^2 X_0 + dX_i dX^i. \tag{B.2}$$

Despejando la coordenada $X_{0'}$ de (B.1) y sustituyendola en (B.2) tenemos que

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dX^\nu dX^\mu \tag{B.3}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{X_\nu X_\mu}{1 + \eta_{\alpha\beta} X^\beta X^\alpha} \tag{B.4}$$

Por lo tanto, la métrica del espacio AdS_{d+2} es (B.4). También se puede probar que la métrica (B.4) tiene la propiedad

$$g_{\mu\nu} X^\nu X^\mu = \Omega \eta_{\mu\nu} X^\nu X^\mu \tag{B.5}$$

con

$$\Omega = \frac{1}{1 + \eta_{\alpha\beta} X^\beta X^\alpha} \tag{B.6}$$

Así, $g_{\nu\mu}$ es conformalmente plana.
Otro sistema de coordenadas que se puede para usar el espacio AdS_{d+2} es

$$X_0 = \cosh\rho\cos\tau, \tag{B.7}$$

$$X_{0'} = \cosh\rho\,\mathrm{sen}\tau, \tag{B.8}$$

$$X_i = \mathrm{senh}\rho\Omega_i \qquad (\sum_{1\leq i\leq d} (\Omega_i)^2 = 1). \tag{B.9}$$

Con este sistema de coordenadas (B.3) tiene la forma

$$dS^2 = -(\cosh\rho)^2(d\tau)^2 + (d\rho)^2 + (\mathrm{senh}\rho)^2(d\Omega)^2. \tag{B.10}$$

B.0.2 Deducción de I.Bars de la partícula en AdS_{d+2}

En esta sección mostramos el razonamiento por el cual I.Bars obtiene la partícula en AdS_{d+2}.

Sea la acción

$$S = \int d\tau[\dot{X}\cdot P - (\lambda_1\frac{1}{2}P^2 + \lambda_2 X\cdot P + \lambda_3\frac{1}{2}X^2)] \tag{B.11}$$

y la métrica $\eta_{MN} = (-', +', -, +, ..., +)$.
Consideremos las condiciones de norma

$$X^{1'} - 1 = 0 \qquad \mathrm{y} \qquad P^{1'} = 0 \tag{B.12}$$

y resolvamos las constricciones X^2 y $X \cdot P$. Para resolver estas constricciones, tomemos las coordenadas

$$X^M = (A(r)\mathrm{cos}t, 1, A(r)\mathrm{sen}t, B(r)\hat{r}) \qquad \mathrm{y} \tag{B.13}$$

$$P^M = (\frac{-P_0}{A}\mathrm{sen}t + \frac{AP_r}{\partial_r \mathrm{ln}B}\mathrm{cos}t, 0, \frac{P_0}{A}\mathrm{sen}t + \frac{A}{\partial_r \mathrm{ln}B}\mathrm{sen}t, \frac{r}{B}(P - P_r\hat{r}) + \frac{A^2}{\partial_r B}P_r\hat{r}), \tag{B.14}$$

con $A^2(r) - B^2(r) = 0$. De un cálculo directo se puede mostrar que se satisface

$$X^2 = 0, \qquad X\cdot P = 0 \qquad \mathrm{y} \qquad \dot{X}\cdot P = \dot{X}^\mu P_\mu \qquad (\mu = 0, 1, ..., d) \tag{B.15}$$

Ahora consideremos la métrica

$$G_{\mu\nu} = -A^2(dt)\mu(dt)\nu + \frac{(\partial_r B)^2}{A^2}(dr)_\mu(dr)_\nu + (B)^2(d\Omega)_{\mu\nu} \qquad \text{(B.16)}$$

y tomemos en cuenta que

$$P_\mu = P_0(dt)_\mu + P_r(dr)_\mu + P_\Omega(d\Omega)_\mu, \qquad \text{(B.17)}$$

con $P_\Omega = \sqrt{P^2 - P_r^2}$ entonces, con las coordenadas (B.14) y (B.13), tenemos que

$$P^2 = G_{\mu\nu}P^\mu P^\nu. \qquad \text{(B.18)}$$

Por lo tanto, con las condiciones de norma (B.12) la acción reducida tiene la forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{X}^\mu P_\mu - \frac{\lambda}{2}G_{\mu\nu}P^\mu P^\nu). \qquad \text{(B.19)}$$

Esta es la acción para una partícula libre sin masa en un espacio curvo.

Es claro que $A = \cosh r$ y $B = \mathrm{senh} r$ son soluciones de las restricciones para A y B. En este caso el elemento de línea se puede escribir como

$$dS^2 = -(\cosh r)^2(dt)^2 + (dr)^2 + (\mathrm{senh} r)^2(d\Omega)^2. \qquad \text{(B.20)}$$

Como vimos anteriormente, este es el elemento de línea en el espacio de anti-de Sitter.

Referencias

[1] J. Schwarz hep-th/0008017.

[2] J. Schwarz y N. Seiberg, hep-th/9803179.

[3] J. Maldacena, hep-th/0002092.

[4] C Vafa, Nucl. Phy. **B 469** (1996), 403.

[5] R. Manvelyan y Mkrtchyan, hep-th/9907011.

[6] L. Andrianopolis, M. Derix, G W. Gibbons, C. Herdeiro, A. Santambrogio, y A. Van Proeyen, hep-th/0003023.

[7] U. Martensson, Int. J. Mod. Phys. **A 8** (1993), 5305.

[8] Sigel, Int. J. Mod. Phys. **A 3** (1988), 2713.

[9] H. Golstein, *Clasical Mechanics*, Addison-Wesley (1950).

[10] W. Dittrich y M. Reuter *Classical and Quantum Dynamics*, Springer-Verlag, (1992).

[11] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* , Yeshiva University Press (1964).

[12] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge System*, Princeton University Press (1992).

[13] R. Courant y F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2*, Editorial Limusa (1993).

[14] R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Matematical Physics Vol. I*, John Wiley and Sons (1989).

[15] E.C.G. Sudarshan y N. Mukunda, *Classical Mechanics: A Modern Perspective* , Wiley (1978).

[16] M. Chaichian y N.F Nelipa, *Introduction to Field Theory*, Springer-Verlag (1984).

[17] D.M. Gitman y I.V. Tyutin, *Quantization of Field with Constraints,* Springer-Verlag (1990).

[18] M. Henneaux, C. Teitelboim y J D. Vergara, Nucl. Phys. **B 387** , 391 (1992).

[19] C. Teitelboim, Phys. Rev. **D 25** (1992), 3159.

[20] R. Linares y J.D. Vergara, Field Theory, Integrable Systems and Symetries, ed. por F.Khanna y L. Vinet. Publications CRM 1997

[21] L. D Landau y E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica Volumen 9*, Editorial Reverté (1986).

[22] R. Marnelius y B. Nilsson, Phys. Rev. **D 20** (1979), 839.

[23] R. Marnelius, Phys. Rev. **D 20** (1979), 2091 .

[24] I. Bars y C. Kounnas, Phys. Lett. **B 402** (1997), 25.

[25] I. Bars y C. Kounnas, Phys Rev. **D 56** (1997) , 3664.

[26] I. Bars, C. Deliduman y O. Andreev, Phys. Rev. **D 58** (1998), 066004.

[27] I. Bars, Phys. Rev. **D 58** (1998), 066006.

[28] I. Bars, hep-th 9809034.

[29] I. Bars, Phys. Rev. **D 59** (1999). 045019, hep-th 9810025.

[30] I. Bars, Phys. Rev. **D 62** (2000), 085015, hep-th 0002140.

[31] I Bars, hep-th 0008164.

[32] R. Gilmore, *Lie Group, Lie Algebra, and Some of Their Applications*, John Wiley and Sons (1974).

[33] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1996).

[34] A.M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Cambridge University (1995).

[35] Borges, J.L., *Obras Completas 1923-1972*, Emecé, Buenos Aires, 1974.