9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

228703

EL MODELO DE VALUACION DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPITAL ASSET PRICING MODEL, CAPM): UNA APLICACION PARA EL CASO DE MEXICO

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

MARIA DE LOURDES ATILANO MIRELES

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. GABRIEL VARGAS VILCHIS

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
2001

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"EL MODELO DE VALUACIÓN DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPITAL ASSET PRICING MODEL, CAPM): UNA APLICACIÓN PARA EL CASO DE MÉXICO"

realizado por **ATILANO MIRELES MARÍA DE LOURDES**

con número de cuenta **8817959-9**, pasante de la carrera de **ACTUARÍA**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis Propietario	**ACT. GABRIEL VARGAS VILCHIS**
Propietario	**M. en E. ARTURO LORENZO VALDÉS**
Propietario	**ACT. ERIC MANUEL RODRÍGUEZ HERRERA**
Suplente	**ACT. BÁRBARA RUTH TREJO BECERRIL**
Suplente	**M. en E. JOSÉ GONZALO RANGEL LÓPEZ**

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSÉ ANTONIO FLORES DÍAZ

Agradecimientos

Gracias a mi padre Martín Atilano, por enseñarme que la vida, aún en los momentos más difíciles, resulta ser fácil.

Gracias a mi madre Socorro Mireles, por haberme educado.

Gracias a Ricardo Leyva, por todo lo que me ha dado.

Gracias a mi hijo, Rodrigo Leyva por agregarle cada día un significado especial a mi vida.

Gracias a mis hermanas, Silvia, Claudia y Alma, por crecer conmigo y apoyarme en cada paso que doy.

Gracias a todos aquellos que compartieron conmigo buenos momentos a lo largo de la licenciatura y que de alguna manera se encuentran cerca o lejos de mí.

El Modelo de Valuación de Activos de Capital

(Capital Asset Pricing Model, CAPM):

Una aplicación para el caso de México

ÍNDICE

Introducción

El problema fundamental que enfrentan los inversionistas es invertir su capital de la manera más conveniente, se tienen que elegir de entre un gran número de activos a aquellos que reúnan las características deseadas para integrar sus portafolios de inversión. De manera sucinta, el problema es tratar de obtener los rendimientos más altos con el menor riesgo posible, esto es conocido en la literatura como invertir de manera eficiente.

La teoria clásica de optimización de portafolios es una herramienta que permite al inversionista decidir cómo invertir en un portafolio de activos que sea eficiente en términos de riesgo y rendimiento, y que incluya tanto las características exclusivas de cada activo como la manera en que los diferentes instrumentos se relacionan entre sí. Esta teoria surge a partir del trabajo de Markowitz[1] en donde se establecen las bases para cuantificar el riesgo de una inversión a través de la varianza ó la desviación estándar.

A partir de estas bases Sharp[2] y Lintner[3] desarrollaron un modelo para la valoración de activos, el Modelo de Valuación de Activos de Capital *(Capital Asset Pricing Model, CAPM)*. Este modelo es útil para fijar los precios de los activos con relación a su riesgo y determina una relación lineal entre el costo de oportunidad del capital y el rendimiento del activo. Dicha relación lineal permite que el riesgo esperado de un activo se relacione con una medida de riesgo llamada β.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar las ideas que conducen al modelo CAPM para posteriormente intentar una estimación del mismo para el caso mexicano, tomando acciones que cotizan actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores. Parea realizar la estimación se verifican cada uno de los supuestos que

[1] Markowitz, Harry, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York, 1959.
[2] Sharpe, W.F. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, September 1964.

subyacen en el modelo, como son las pruebas de normalidad, caminata aleatoria y cointegración que se exponen con detalle.

La conclusión a la que se llega en este trabajo es que no es posible realizar la estimación del modelo CAPM en el caso de México, debido a que los rendimientos de las acciones consideradas no admiten una función de distribución normal. La violación de este supuesto invalida toda posibilidad de estimación. Sin embargo, el modelo CAPM ha sido utilizado con frecuencia, a pesar de que no se cumplen todos los supuestos en los que subyace.

El objetivo de este trabajo es mostrar a las personas interesadas, como pueden ser los estudiantes de nivel licenciatura en áreas relacionadas con las finanzas privadas, la construcción del modelo CAPM y las consideraciones que deben ser tomadas en cuenta para su estimación; y destacar que este modelo no puede ser estimado sin verificar el supuesto de normalidad, y que este supuesto no se cumple en el caso de México y en consecuencia se deben considerar modelos alternativos.

Es importante señalar que en el ejercicio empírico que se realizó en este trabajo no se encontró evidencia suficiente para aceptar el supuesto de normalidad, pero que esto no imposibilita a que el modelo pueda ser estimado con datos en los que este supuesto si se cumpla.

[3] Lintner, J. *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*, Journal of Finance, December 1965.

CAPÍTULO 1

El Modelo de Valuación de Activos de Capital CAPM
(The Capital Asset Pricing Model, CAPM)

En este capítulo se presenta una serie de resultados que tienen como conclusión el modelo de valuación de activos de capital, CAPM. Se plantean algunos antecedentes y se define a la frontera media-desviación estándar, para proseguir con la demostración de 6 proposiciones que conducen al teorema de los dos fondos de inversión, llamado en este trabajo teorema 1. Todos estos resultados y definiciones son para el caso de N activos riesgosos. Posteriormente se generaliza la definición de frontera, y los resultados demostrados, para el caso de N activos riesgosos y un activo sin riesgo. Con todo esto, y algunas definiciones adicionales, se presenta en el teorema 2 una demostración del CAPM.

Antecedentes, El Modelo de Markowitz

El primer modelo que consideró explícitamente al riesgo bajo una perspectiva de portafolio fue desarrollado por Markowitz en los 50's. En su trabajo considera a un inversionista que elige entre varios portafolios sobre la base de su riesgo (varianza del portafolio) y de su rendimiento. El inversionista elegirá al subconjunto de portafolios que le ofrezca el mayor rendimiento posible dado cierto nivel de riesgo, o bien aquél que le ofrezca el menor riesgo posible dado cierto nivel de rendimiento. Los portafolios de este subconjunto, todos con un nivel óptimo de rendimiento, son llamados portafolios eficientes.

Una vez identificado este subconjunto de portafolios eficientes, el inversionista deberá elegir un portafolio específico. Su elección dependerá ahora de la aversión o preferencia que tenga por asumir cierto nivel de riesgo. Si este es medido con la varianza del activo podría preferir un portafolio con mayor varianza y en consecuencia, con mayor rendimiento esperado ó por el contrario podría elegir un portafolio con menor varianza y menor rendimiento esperado.

Un primer problema al utilizar la metodologia propuesta por Markowitz sobreviene con la gran cantidad de cálculos que se tienen que hacer. Por ejemplo, para un portafolio formado por dos posibles inversiones es necesario estimar los rendimientos de cada una de éstas, su correlación, y la varianza del portafolio; a la vez, para calcular esta última es necesario calcular también la varianza de cada una de las dos inversiones. En la medida que el número de inversiones comprendidas en un portafolio aumenta, el número de cálculos que se tienen que hacer aumenta significativamente.

En el caso general de un portafolio con N activos, el número de correlaciones a calcular es $N(N+1)/2$. Por ejemplo, para un portafolio con 15 activos es necesario calcular 120 correlaciones para con base en éstas estimar la varianza del portafolio. Si se considera que esta metodología fue desarrollada en los años cincuenta, mucho antes de que se tuviera acceso a una computadora, resulta fácil comprender porqué el modelo desarrollado por Markowitz no fue adoptado en la práctica.

El segundo inconveniente en el Modelo de Markowitz es que, antes de calcular las correlaciones entre los diferentes activos contenidos en un portafolio, es necesario hacer estimaciones de los rendimientos esperados, así como de la probabilidad de ocurrencia de éstos. La estimación de los rendimientos esperados de un activo en particular es relativamente sencilla, pero para que los coeficientes de correlación de todo un portafolio sean correctos, en principio se deben estimar los rendimientos esperados sobre todos los activos contenidos en éste.

De otra forma, si solamente se estiman los rendimientos esperados de un parte de los activos del portafolio, se corre el riesgo de que los coeficientes de correlación estimados no sean correctos. Más aún, si se tomaran los rendimientos históricos de los activos contenidos en el portafolio como *proxy* para las estimaciones, entonces se estarían mezclando dos tipos de información: Los rendimientos esperados *ex ante* y los rendimientos realizados *ex post*. En un entorno de expectativas racionales no necesariamente es cierto que la historia sea capaz de explicar los eventos futuros, y se puede caer fácilmente en el error de creer que el modelo utilizado no está correctamente especificado.

El Concepto de Riesgo en el entorno del CAPM

En la versión tradicional del CAPM, el riesgo está definido como la covariabilidad entre el rendimiento de un activo y el rendimiento del mercado. En otras palabras, podría decirse que riesgo es la volatilidad en el rendimiento del portafolio de mercado. De hecho, cualquier otra variabilidad podría ser diversificada, o minimizada mediante la inclusión de activos en un portafolio.

Normalmente, un inversionista requiere de mayores rendimientos sobre un activo a fin de compensarlo por el riesgo de que los rendimientos realizados sean menores que los esperados. Sin embargo, un inversionista no requiere de ningún rendimiento adicional que le compense por el riesgo de la variabilidad que puede ser diversificada o minimizada en su portafolio, ya que los activos están evaluados de manera que reflejan el impacto de su riesgo implícito sobre el portafolio.

Aquellos inversionistas que elijan no tener su portafolio completamente diversificado tampoco serán compensados por asumir el riesgo implícito en cada uno de los activos. Solamente el riesgo sistemático esta evaluado y puede tener una recompensa por asumirlo. Por tanto, existe un incentivo real y muy fuerte a diversificar el portafolio tanto como sea posible.

La porción de riesgo que puede ser eliminada mediante la diversificación eficiente de un portafolio es conocida como *riesgo no sistemático*, ya que es causado por cambios o alteraciones directamente relacionados con la naturaleza de quien emite una acción o título de deuda. Así, el riesgo no sistemático es inesperado impredecible y en principio, no retribuible.

En retrospectiva es posible identificar ciertas fuentes no sistemáticas de rendimientos extra normales, o bien de perdidas, a lo largo de la vida de una activo en particular. Sin embargo, es precisamente por esta porción de riesgo, que puede ser diversificada, que normalmente los inversionistas no la consideran en su proyección de rendimientos esperados.

Un inversionista espera ser compensado por aquella porción de riesgo que no puede ser diversificada, y a la que se conoce como riesgo sistemático. Normalmente, este tipo de riesgo tiene su fundamento en eventos políticos o socioeconómicos que afectan directamente el rendimiento de un activo. De está forma un activo con riesgo sistemático por arriba del promedio reflejará este hecho en su precio, de tal forma que tendrá un rendimiento esperado por arriba del promedio.

En conclusión, el riesgo sistemático es un estimado de cómo se comportan los rendimientos de un activo o portafolio con relación a los rendimientos de un portafolio de mercado.

Supuestos del modelo

El modelo CAPM se basa en una serie de supuestos:

- Los inversionistas pueden escoger entre portafolios con base a su rendimiento esperado y su varianza, siempre y cuando la distribución de probabilidad de los rendimientos sea normal.
- Un inversionista siempre escoge al portafolio con un rendimiento esperado mayor de entre dos o más portafolios.
- No hay fricciones en el mercado de capitales, es decir, se supone que no hay costos de transacción, ni impuestos, ni restricciones a vender.
- Existe una tasa libre de riesgo a la que se puede prestar y pedir prestado.
- Todos los inversionistas son aversos al riesgo.

CAPÍTULO 2

Frontera media-desviación estándar y construcción del CAPM

A continuación en la sección 2.1 se presentan 6 proposiciones que conducen al teorema de los dos fondos de inversión. Se presentan estos resultados y definiciones para el caso de N activos riesgosos.

2.1 Frontera media-desviación estándar de N activos riesgosos

Sean $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ el vector de rendimientos de N activos riesgosos y $R_p = \mathbf{w}'\mathbf{R}$ el rendimiento de un portafolio tal que $\mathbf{w}'\mathbf{1}_N = 1$. El vector $\mathbf{w}$ representa la proporción de la riqueza invertida en cada activo. El valor esperado del rendimiento del portafolio esta dado por $E(R_p) = \mathbf{w}'E(\mathbf{R})$ y la varianza del portafolio esta dada por $\mathrm{var}(R_p) = \mathrm{var}(\mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}$, donde $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ es la matriz de varianza-covarianza del vector $\mathbf{R}$, la cual se supone invertible.

Existen una infinidad de portafolios cada uno con un valor esperado de rendimiento y una cierta varianza. Si se considera que el objetivo de cualquier inversionista es maximizar el valor esperado del rendimiento de su portafolio con el menor riesgo posible, y este riesgo puede ser medido por la varianza, entonces el inversionista enfrenta el siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} & Min\,\mathrm{var}(R_p) \\ s.a.\quad & E(R_p) = E \\ & R_p = \mathbf{w}'\mathbf{R} \\ & \mathbf{w}'\mathbf{1}_N = 1 \end{aligned}$$

La solución de este problema conduce a la frontera media-desviación estándar. Para llegar ella se utilizan los siguientes resultados del Cálculo Vectorial.

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son vectores en $\Re^N$ se tiene que

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{b})}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{b}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{b}'$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $N \times N$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{x}'[\mathbf{A} + \mathbf{A}']$$

y si además $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

Al resolver el problema de optimización por el método de Lagrange

$$\begin{aligned} Min_{\mathbf{w}}\ \operatorname{var}(R_p) &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} \\ s.a.\quad E(R_p) &= E \\ R_p &= \mathbf{w}'\mathbf{R} \\ \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathbf{N}} &= 1 \end{aligned}$$

se tiene que el *lagrangiano* esta dado por

$$L(\mathbf{w},\lambda_1,\lambda_2) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} - 2\lambda_1(\mathbf{w}'E(\mathbf{R}) - E) - 2\lambda_2(\mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathbf{N}} - 1)$$

De acuerdo con los resultados mencionados con anterioridad se tiene que las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{w}} = 2\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} - 2\lambda_1 E(\mathbf{R}) - 2\lambda_2\mathbf{1}_{\mathbf{N}}' = 0 \quad\text{.......}(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_1} = \mathbf{w}'E(\mathbf{R}) - E = 0 \quad\text{.......}(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_2} = \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathbf{N}}' - 1 = 0 \quad\text{.......}(3)$$

por lo tanto para encontrar el óptimo hay que resolver este sistema de $N+2$ ecuaciones con $N+2$ incógnitas. De la ecuación (1) se tiene que

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \lambda_1 E(\mathbf{R})' + \lambda_2 \mathbf{1}_N'$$

Si se supone que $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ es invertible se obtiene

$$\mathbf{w}' = (\lambda_1 E(\mathbf{R})' + \lambda_2 \mathbf{1}_N')\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}$$

dado que $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ y $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R})\lambda_1 + \mathbf{1}_N \lambda_2)$$

$$= \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} \qquad \text{(4)}$$

Por otro lado de la ecuación (2) tenemos que

$$\mathbf{w}'E(\mathbf{R}) = E = E(\mathbf{R})'\mathbf{w}$$

sustituyendo al $\mathbf{w}$ de la expresión (4) se tiene que

$$E(\mathbf{R})'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} = E$$

entonces

$$E(\mathbf{R})'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R})\lambda_1 + E(\mathbf{R})'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N\lambda_2 = E \qquad \text{(5)}$$

Procediendo de manera análoga se considera la ecuación (3)

$$\mathbf{1}'_N\mathbf{w} = 1$$

y se obtiene que

$$\mathbf{1}_N'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R})\lambda_1 + \mathbf{1}_N'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N\lambda_2 = 1 \qquad \text{(6)}$$

Por lo tanto el problema se ha simplificado a resolver dos ecuaciones lineales, (5) y (6) con 2 incógnitas: λ_1 y λ_2.

Planteando el problema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} E(\mathbf{R})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R}) & E(\mathbf{R})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N \\ \mathbf{1}_N'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R}) & \mathbf{1}_N'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ 1\end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación considere la matriz anterior con la siguiente abreviatura

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(\mathbf{R})\\ \mathbf{1}_N\end{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_N\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots(7)$$

por lo tanto el problema queda como

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ 1\end{pmatrix}$$

Nótese que esta es una matriz simétrica y por lo tanto invertible por lo que la solución para λ_1 y λ_2 esta dada por

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}E\\ 1\end{pmatrix}$$

en donde

$$A^{-1}=\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

y en conclusión la ecuación (4) queda como

$$\mathbf{w}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ 1\end{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(8)$$

en donde $a=E(\mathbf{R})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R})$; $b=E(\mathbf{R})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N=\mathbf{1}_N'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}E(\mathbf{R})$; y $c=\mathbf{1}_N'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{1}_N$; con lo que se resuelve el problema de optimización. Es decir dado un valor esperado del rendimiento de un portafolio, E, la solución anterior representa los ponderadores que se requieren para formar el portafolio de mínima varianza.

Esta mínima varianza esta caracterizada como:

$$\operatorname{var}^*(R_p) = \mathbf{w}^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^*$$

sustituyendo la expresión (8) que caracteriza al $\mathbf{w}^*$ se tiene que

$$\operatorname{var}^*(R_p) = \operatorname{var}(\mathbf{w}^{*\prime}\mathbf{R}) = \mathbf{w}^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^*$$

considere primero el producto $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^*$, sustituyendo la expresión (8) se tiene que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{w}^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} E & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} E(\mathbf{R})' \\ \mathbf{1}'_N \end{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\begin{pmatrix} E(\mathbf{R}) & \mathbf{1}_N \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

pero de acuerdo con la definición de $\mathbf{A}$ en la ecuación (7)

$$\mathbf{w}^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} E & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\mathbf{A}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

recuerde que

$$A^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{w}^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} E & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

simplificando se tiene que

$$\operatorname{var}^*(Rp) = \frac{cE^2 - 2bE + a}{ac-b^2}$$

si denotamos la varianza en términos de la desviación estándar se tiene que

$$\sigma^2 = \sigma^2(E) = \frac{cE^2 - 2bE + a}{ac - b^2}$$

que puede ser reescrito como

$$\frac{\sigma^2}{\left(\sqrt{1/c}\right)^2} - \frac{\left(E - \frac{b}{c}\right)^2}{\left(\sqrt{ac - b^2/c^2}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

De acuerdo con la geometría analítica, la ecuación

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

representa una hipérbola con centro en (x_0, y_0). Por lo tanto la ecuación (9) representa el lugar geométrico de una hipérbola en el espacio (σ, E), con centro $(\sqrt{1/c}, b/c)$. Esta hipérbola es llamada en la literatura especializada como la frontera media-desviación estándar. De aquí en adelante se le llamara, la frontera.

Proposición 1: *Dado el rendimiento,* $R^* = \mathbf{w}'\mathbf{R}$, *de un portafolio en la frontera, existe un portafolio en la frontera, con rendimiento* $R_z = \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{R}$, *tal que* $\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = 0$.

Dem:

$\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cov}(R^*, R_Z) = \operatorname{cov}(\mathbf{w}'\mathbf{R}, \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{R}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\gamma}' = 0$

$\Rightarrow$ sustituyendo las expresiones para $\mathbf{w}'$ y $\boldsymbol{\gamma}'$ se obtiene que

$$\begin{pmatrix} E(R^*) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} E(\mathbf{R})' \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1} \begin{pmatrix} E(\mathbf{R}) & \mathbf{1}_N \end{pmatrix} \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(R_Z) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

simplificando de acuerdo con la definición de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ se tiene que

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma_R}\gamma = \begin{pmatrix}E(R^*) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} E(R_Z) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

haciendo las operaciones y simplificando se tiene que

$$E(R_Z) = \frac{bE(R^*)-a}{cE(R^*)-b} \quad ; \text{ y } \quad \gamma = \mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}), \mathbf{1_N})\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bE(R^*)-a \\ cE(R^*)-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Proposición 2: *Si* $R^* = \mathbf{w}'\mathbf{R}$ *es el rendimiento de un portafolio en la frontera y* $R_z = \gamma'\mathbf{R}$ *es el portafolio tal que* $\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = 0$, *que por la proposición 1 existe, entonces* $E(R_i) - E(R_Z) = \beta_{i*}(E(R^*) - E(R_Z))$ *con* $\beta_{i*} = \dfrac{\operatorname{cov}(R_i, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$, *para* $i = 1,2...N$; *es decir*

$$E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N}E(R_Z) = \mathbf{b}(E(R^*) - E(R_Z)); \text{ con } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1*} \\ \beta_{2*} \\ \vdots \\ \beta_{N*} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$$

Dem:

Sea $R^* = \mathbf{w}'\mathbf{R}$, el rendimiento de un portafolio en la frontera

$$\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*) = \operatorname{cov}(\mathbf{R}, \mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{1_N}\mathbf{\Sigma_R}\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma_R}\mathbf{w}$$

como R^* esta en la frontera

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}), \mathbf{1_N})\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{\Sigma_R}\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma_R}\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}), \mathbf{1_N})\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

como $\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = 0$ se tiene que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} = (E(\mathbf{R}), \mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{1}_N \operatorname{cov}(R^*, R_Z)$$

pero según la demostración de la proposición 1

$$\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = \begin{pmatrix} E(R_Z) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} = (E(\mathbf{R}), \mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{1}_N (E(R_Z), \mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N E(R_Z), \mathbf{1}_N - \mathbf{1}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N E(R_Z), \mathbf{0}_N)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

con lo que se obtiene que

$$\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*) = (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N E(R_Z))\frac{cE(R^*) - b}{ac-b^2}$$

por otro lado

$$\operatorname{var}(R^*) = \operatorname{cov}(R^*, R^*) = \operatorname{cov}(\mathbf{wR}, R^*) = \mathbf{w}'\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)$$

$$= \mathbf{w}'(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N E(R_Z))\frac{cE(R^*) - b}{ac-b^2}$$

$$= (E(R^*) - E(R_Z))\frac{cE(R^*) - b}{ac-b^2}$$

por lo que

$$\frac{cE(R^*) - b}{ac-b^2} = \frac{\operatorname{var}(R^*)}{E(R^*) - E(R_Z)}$$

entonces

$$(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N E(R_Z))\frac{\text{var}(R^*)}{E(R^*)-E(R_Z)}=\text{cov}(\mathbf{R},R^*)$$

es decir

$$(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N E(R_Z))=\frac{\text{cov}(\mathbf{R},R^*)}{\text{var}(R^*)}E(R^*)-E(R_Z)$$

por lo tanto se tiene que

$$E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N E(R_Z)=\mathbf{b}(E(R^*)-E(R_Z)) \text{ con } \mathbf{b}=\begin{pmatrix}\beta_{1*}\\ \beta_{2*}\\ \vdots\\ \beta_{N*}\end{pmatrix}=\frac{\text{cov}(\mathbf{R},R^*)}{\text{var}(R^*)}$$

en particular para $i=1,2...N$ se concluye que

$$E(R_i)-E(R_Z)=\beta_{i*}(E(R^*)-E(R_Z)) \text{ con } \beta_{i*}=\frac{\text{cov}(R_i,R^*)}{\text{var}(R^*)}$$

Q.E.D.

Cabe señalar que el número $E(R^*)-E(R_Z)$ es una constante por lo que la relación anterior indica que los cambios en el valor esperado del rendimiento del $i$ésimo activo, $E(R_i)-E(R_Z)$, son una proporción de la β_i, que es una medida del riesgo. En conclusión se tiene uno de los postulados básicos de la teoría de finanzas. A mayor rendimiento corresponde un mayor riesgo.

Proposición 3: *Si* $R^*=\mathbf{w}'\mathbf{R}$ *es el rendimiento de un portafolio formado por* N *activos normalmente distribuidos entonces* $R_i=(E(R_i)-\beta_{i*}E(R^*))+\beta_{i*}E(R^*)+\varepsilon_i$ *con* $E(\varepsilon_i)=0$ *y* $\text{cov}(\varepsilon_i,R^*)=0$ *para todo* $i=1,2,...,N$.

Dem:

Como los activos se normalmente distribuidos, se puede considerar la regresión lineal del rendimiento de algún activo i, R_i, sobre R^*

$$R_i=a+bR^*+\varepsilon_i$$

con $E(\varepsilon_i)=0$; y ε_i independiente de R^*, entonces

$$\operatorname{cov}(\varepsilon, R^*) = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{cov}(R_i - a - bR^*, R^*) = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{cov}(R_i - bR^*, R^*) = 0$$

pero como la covarianza es un operador bilineal se tiene que

$$\operatorname{cov}(R_i, R^*) - b\operatorname{cov}(R^*, R^*) = 0$$

es decir

$$\operatorname{cov}(R_i, R^*) - b\operatorname{var}(R^*) = 0$$

de donde

$$b = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)} = \beta_{i*}$$

Por otro lado

$$E(\varepsilon_i) = E(R_i - a - bR^*) = E(R_i) - a - \beta_{i*}E(R^*) = 0$$

de donde

$$a = E(R_i) - \beta_{i*}E(R^*)$$

por lo tanto

$$R_i = (E(R_i) - \beta_{i*}E(R^*)) + \beta_{i*}E(R^*) + \varepsilon_i$$

con $E(\varepsilon_i) = 0$ y $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*) = 0$ para todo $i = 1,2,\dots,N$.

Q.E.D.

Proposición 4: *Si* $R^* = \mathbf{w}'\mathbf{R}$ *es el rendimiento de un portafolio en la frontera y* $R_z = \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{R}$ *es el portafolio tal que* $\operatorname{cov}(R^*, R_Z) = 0$ *entonces* $\mathbf{R} - \mathbf{1}_N E(R_Z) = \mathbf{b}(R^* - E(R_Z)) + \boldsymbol{\varepsilon}$ *en donde* $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{N\times 1}$ *;* $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, R^*) = \mathbf{0}_{N\times 1}$*; y*

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1*} \\ \beta_{2*} \\ \vdots \\ \beta_{N*} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}.$$

Dem:

Por la proposición 3 se tiene que

$$R_i = (E(R_i) - \beta_{i*}E(R^*)) + \beta_{i*}E(R^*) + \varepsilon_i$$

en donde $E(\varepsilon_i)=0$ y $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*)=0$ para todo $i=1,2,\ldots,N$

pero de acuerdo con la proposición 2

$$E(R_i)=E(R_Z)+\beta_{i\bullet}(E(R^*)-E(R_Z))$$

por lo que sustituyendo se tiene que

$$R_i=((E(R_Z)+\beta_{i\bullet}(E(R^*)-E(R_Z)))-\beta_{i\bullet}E(R^*))+\beta_{i\bullet}R^*+\varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \quad R_i-E(R_Z)=\beta_{i\bullet}(R^*-E(R_Z)+\varepsilon_i$$

en donde $E(\varepsilon_i)=0$ y $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*)=0$ para todo $i=1,2,\ldots,N$

por lo tanto

$$\mathbf{R}-\mathbf{1_N}E(R_Z)=\mathbf{b}(R^*-E(R_Z))+\boldsymbol{\varepsilon}$$

en donde $E(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}_{\mathbf{N\times 1}}$; $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, R^*)=\mathbf{0}_{\mathbf{N\times 1}}$; y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\beta_{1\bullet}\\ \beta_{2\bullet}\\ \vdots\\ \beta_{N\bullet}\end{pmatrix}=\dfrac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$

Q.E.D.

Proposición 5: *Sean* $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_N\end{pmatrix}$ *un vector de* N *activos riesgosos con matriz de varianza-covarianza* $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ *invertible y* $R^*=\mathbf{w}'\mathbf{R}$ *el rendimiento de un portafolio tal que existen* λ_0 *y* $\lambda_1\in\Re$ *que cumplen que* $E(R_i)-\lambda_0=\lambda_1\beta_{i\bullet}$ *para todo* $i=1,2,\ldots,N$, *es decir* $E(\mathbf{R})-\mathbf{1_N}\lambda_0=\mathbf{b}\lambda_1$ *con* $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\beta_{1\bullet}\\ \beta_{2\bullet}\\ \vdots\\ \beta_{N\bullet}\end{pmatrix}=\dfrac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$

entonces R^* *es el rendimiento de un portafolio en la frontera.*

Dem:

$$\mathbf{b}=\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}=\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}=\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{1}_N\mathbf{R},\mathbf{w}'\mathbf{R})}{\operatorname{var}(R^*)}=\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}\,\frac{1}{\operatorname{var}(R^*)}$$

por otra parte

$$E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N\lambda_0=\mathbf{b}\lambda_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{b}=E(\mathbf{R})\frac{1}{\lambda_1}+\mathbf{1}_N\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$$

entonces

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}\,\frac{1}{\operatorname{var}(R^*)}=E(\mathbf{R})\frac{1}{\lambda_1}+\mathbf{1}_N\left(\frac{-\lambda_0}{\lambda_1}\right).$$

Si definimos a g y h como

$$g=\frac{\operatorname{var}(R^*)}{\lambda_1}\;\text{ y }\; h=\left(\frac{-\lambda_0}{\lambda_1}\right)\operatorname{var}(R^*)$$

se tiene que

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}=E(\mathbf{R})g+\mathbf{1}_N h$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{w}=\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix} E(\mathbf{R})\\ \mathbf{1}_N\end{pmatrix}\mathbf{w}=\begin{pmatrix} E(\mathbf{R})\\ \mathbf{1}_N\end{pmatrix}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}),\mathbf{1}_N)\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix} E(R^*)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix}=\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*)\\ 1\end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{w}=\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R})\quad \mathbf{1}_N\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R^*)\\ 1\end{pmatrix}$$

y por lo tanto R^* es el rendimiento de un portafolio en la frontera.

Teorema 1, Teorema de los dos fondos de inversión: *Sean* $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ *un vector de* N *activos riesgosos con matriz de varianza-covarianza* , $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$, *invertible;* $\mathbf{w}_{\mathbf{A}}'\mathbf{R}$ *el rendimiento de un portafolio en la frontera y* $\mathbf{w}_{\mathbf{B}}'\mathbf{R}$ *el rendimiento de otro portafolio en la frontera, entonces*

1. *Cualquier portafolio de los 2 en la frontera, esta también en la frontera*
2. *Cualquier portafolio en la frontera es un portafolio de* $\mathbf{w}_{\mathbf{A}}'\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{w}_{\mathbf{B}}'\mathbf{R}$

Dem:

1) Sea $R_C = \alpha\mathbf{w}_{\mathbf{A}}'\mathbf{R} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{\mathbf{B}}'\mathbf{R}$ con $\alpha \in \Re$ entonces

$$E(R_C) = \alpha E(R_A) + (1-\alpha)E(R_B).$$

Al calcular el portafolio en la frontera con este rendimiento esperado se tiene que

$$\mathbf{w}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_{\mathbf{N}}\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(R_C) = \alpha E(R_A) + (1-\alpha)E(R_B) \\ 1 = \alpha + (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_{\mathbf{N}}\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha E(R_A) \\ \alpha \end{pmatrix} +$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_{\mathbf{N}}\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-\alpha)E(R_B) \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

por lo tanto $\mathbf{w}_{\mathbf{C}} = \alpha\mathbf{w}_{\mathbf{A}} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{\mathbf{B}}$, que corresponde al portafolio con rendimiento $R_C = \alpha\mathbf{w}_{\mathbf{A}}'\mathbf{R} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{\mathbf{B}}'\mathbf{R}$ y por lo tanto es un portafolio en la frontera con valor esperado $E(R_C)$.

2) Sea $\gamma'\mathbf{R}$ el rendimiento del portafolio en la frontera con rendimiento E_0, entonces

$$\gamma = \Sigma_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_N\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte dados: E_0, $E(R_A)$ y $E(R_B)$ $\in \Re$ se tiene que si $\alpha = \frac{E_0 - E_B}{E_A - E_B}$ entonces $E_0 = \alpha E(R_A) + (1-\alpha)E(R_B)$ por lo que

$$\mathbf{w}_C = \Sigma_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_N\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha E(R_A) + (1-\alpha)E(R_B) \\ 1 = \alpha + (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \Sigma_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_N\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha E(R_A) \\ \alpha \end{pmatrix} +$$

$$\Sigma_{\mathbf{R}}^{-1}\left(E(\mathbf{R}) \quad \mathbf{1}_N\right)\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-\alpha)E(R_B) \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\gamma = \alpha \mathbf{w}_A + (1-\alpha)\mathbf{w}_B$$

Q.E.D.

Proposición 6, pricing portfolio: *Sea* $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ *un vector de* N *activos, con matriz de varianza-covarianza invertible* $\Sigma_{\mathbf{X}}$*, entonces existe un portafolio* $C = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}$ *tal que el precio del activo* i *esta dado por* $\pi(X_i) = E(X_i C)$*;* C *es llamado el portafolio que fija los precios (pricing portfolio). En particular para todo portafolio* $P = \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}$*, se tiene que su precio esta dado por* $\pi(P) = E(PC)$

Dem:

$$\pi(\mathbf{X}) = E[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\alpha})] \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi(X_1) \\ \vdots \\ \pi(X_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\mathbf{X}'\boldsymbol{\alpha}) \\ \vdots \\ X_N(\mathbf{X}'\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \Rightarrow \pi(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\mathbf{X}')\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X}\mathbf{X}')}$$

y por lo tanto $C = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X} = \pi(\mathbf{X})' E(\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}$

Q.E.D.

En la próxima sección se generaliza la definición de frontera, y los resultados demostrados, para el caso de N activos riesgosos y un activo sin riesgo. Con todo esto, y algunas definiciones adicionales, se presenta en el teorema 2 una demostración del CAPM.

2.2 Frontera media-desviación estándar de N activos riesgosos y un activo sin riesgo

En las economías existen activos que se consideran como libres de riesgo. Estos son típicamente los papeles que emiten los gobiernos para financiarse o para implementar medidas de política económica a través de influencias en las tasas de interés. Las empresas pueden desaparecer pero en el caso de los gobiernos, esta posibilidad es remota, y aunque el riesgo existe, es tan minúsculo que se ha adoptado la convención de tomarlo como nulo. En el caso de México el ejemplo de un activo sin riesgo es el CETE. A continuación se presenta la definición de frontera en este caso que es similar al de considerar solo activos riesgosos.

Sean $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ el vector de rendimientos de N activos riesgosos; R_0 el rendimiento de un activo sin riesgo tal que $E(R_0) = R_0$ y $\mathrm{var}(R_0) = 0$; y $R_p = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}$ el rendimiento de un portafolio tal que $w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{1}_N = 1$.

El valor esperado del rendimiento de este portafolio esta dado por

$$E(R_p) = w_0 R_0 + \mathbf{w}' E(\mathbf{R})$$

y la varianza del portafolio esta dada por

$$\mathrm{var}(R_p) = \mathrm{var}(w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathrm{var}(\mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}$$

en donde $\Sigma_{\mathbf{R}}$ es la matriz de varianza-covarianza del vector $\mathbf{R}$, la cual se supone invertible.

Entonces el problema de optimización del inversionista queda como:

$$
\begin{aligned}
& Min\,\mathrm{var}(R_p) \\
s.a.\quad & E(R_p) = E \\
& R_p = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R} \\
& w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathrm{N}} = 1
\end{aligned}
$$

La solución de este problema de optimización conduce a la frontera de media-desviación estándar considerando un activo sin riesgo. Las ultimas dos restricciones pueden ser reescritas en una sola, despejando w_0 de la última restricción y sustituyéndolo en las otras restricciones. Es decir, se tiene que

$$w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathrm{N}} = 1 \;\Rightarrow\; w_0 = 1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathrm{N}}$$

por lo que

$$w_0 R_0 + \mathbf{w}'E(\mathbf{R}) = E$$

puede ser reescrito como

$$(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}_{\mathrm{N}})R_0 + \mathbf{w}'E(\mathbf{R}) = E$$

entonces

$$\mathbf{w}'(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_{\mathrm{N}} R_0) = E - R_0$$

así que el problema queda finalmente como

$$Min_{\mathbf{w}}\ \mathrm{var}(R_p) = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}$$

$$s.a.\ \mathbf{w}'(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_{\mathrm{N}} R_0) = E - R_0$$

Al igual que en el caso de considerar únicamente activos riesgosos, el problema se resuelve por el método de Lagrange.

Se tiene que el *lagrangiano* esta dado por:

$$L(\mathbf{w},\lambda_1,\lambda_2)=\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma_R}\mathbf{w}-2\lambda((\mathbf{w}'(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)-(E-R_0))$$

y entonces las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}}=2\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma_R}-2\lambda(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-2(\mathbf{w}'(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)-(E-R_0))=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De la ecuación (1) se tiene que:

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma_R}=\lambda(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'$$

Si se supone que $\mathbf{\Sigma_R}$ es invertible se obtiene

$$\mathbf{w}'=\lambda(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma_R^{-1}}$$

Por otro lado de la ecuación (2) tenemos que

$$(\mathbf{w}'(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)=(E-R_0)$$

entonces

$$\lambda(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)=E-R_0$$

por lo que

$$\lambda=\frac{E-R_0}{(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)}$$

entonces, dado que

$$\mathbf{w}=\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)\lambda$$

el problema queda resuelto con

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}\right]$$

Por lo que la mínima varianza en este proceso de optimización esta caracterizada como

$$\sigma^2(E) = \mathbf{w}(E)^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w}(E)^*$$

sustituyendo la expresión que caracteriza a $\mathbf{w}^*$ se tiene que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}\right]$$

$$= (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}\right]$$

y entonces

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{w} = \left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}\right](E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)$$
$$\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}\right]$$

por lo que la frontera queda caracterizada como

$$\sigma^2 = \frac{(E - R_0)^2}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}$$

de donde

$$E - R_0 = \sqrt{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}(\sigma)$$

y entonces la frontera es un cono en el plano (E, σ) caracterizado por la ecuación:

$$E = R_0 \pm \sqrt{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}(\sigma).$$

Proposición 7: *Sean* $\mathbf{R}=\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ *el vector de rendimientos de* N *activos riesgosos con matriz de varianza-covarianza* $\mathbf{\Sigma_R}$ *invertible;* R_0 *el rendimiento de un activo sin riesgo; y* $R^* = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}$ *el rendimiento de un portafolio en la frontera, entonces*

$E(R_i) - R_0 = \beta_{i\bullet}(E(R^*) - R_0)$ *con* $\beta_{i\bullet} = \dfrac{\operatorname{cov}(R_i, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$, *para* $i = 1,2...N$; *es decir*

$$E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0 = \mathbf{b}(E(R^*) - R_0);\ \text{con}\ \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1\bullet} \\ \beta_{2\bullet} \\ \vdots \\ \beta_{N\bullet} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$$

Dem:

Sea $R^* = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}$, el rendimiento de un portafolio en la frontera

$$\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*) = \operatorname{cov}(\mathbf{R}, w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}) = \operatorname{cov}(\mathbf{R}, \mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{1}_N \mathbf{\Sigma_R w} = \mathbf{\Sigma_R w}$$

como R^* esta en la frontera

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)'\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)}\right]$$

por lo que

$$\mathbf{\Sigma_R w} = (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)\left[\frac{E - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)'\mathbf{\Sigma_R^{-1}}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1_N} R_0)}\right]$$

por otro lado

$$\operatorname{var}(R^*) = \operatorname{var}(w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}) = \operatorname{var}(\mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma_R w}$$

$$=\left[\frac{E(R^*)-R_0}{(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)}\right](E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)$$

$$\left[\frac{E(R^*)-R_0}{(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)}\right]$$

entonces

$$\operatorname{var}(R^*)=\frac{(E(R^*)-R_0)^2}{(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)}$$

por lo que

$$\operatorname{cov}(\mathbf{R},R^*)=(E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0)\frac{\operatorname{var}(R^*)}{E(R^*)-R_0}$$

de donde

$$E(\mathbf{R})-\mathbf{1}_N R_0=\mathbf{b}(E(R^*)-R_0)\text{; con } \mathbf{b}=\begin{pmatrix}\beta_{1*}\\ \beta_{2*}\\ \vdots\\ \beta_{N*}\end{pmatrix}=\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$$

en particular

$$E(R_i)-R_0=\beta_{i*}(E(R^*)-R_0) \text{ con } \beta_{i*}=\frac{\operatorname{cov}(R_i,R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}\text{, para } i=1,2\ldots N$$

Q.E.D.

Cabe señalar que el número $E(R^*)-R_0$ es una constante, por lo que la relación anterior indica que los cambios en el valor esperado del rendimiento del $i$ésimo activo con respecto al activo sin riesgo $E(R_i)-R_0$, conocido como prima de riesgo, es una proporción de la β_i, que es una medida de riesgo. En conclusión existe una relación directa entre la prima de riesgo y el riesgo.

Proposición 8: *Sean* $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_N\end{pmatrix}$ *el vector de rendimientos de* N *activos riesgosos con matriz de varianza-covarianza* $\Sigma_{\mathbf{R}}$ *invertible;* R_0 *el rendimiento de un activo* *sin riesgo; y* $R^* = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}$ *el rendimiento de un portafolio en la frontera, entonces*

$R_i - R_0 = \beta_{i\bullet}(R^* - R_0) + \varepsilon_i$ *con* $E(\varepsilon_i) = 0$ *y* $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*) = 0$ *para todo* $i = 1,2,\ldots,N$*; es decir*

$$\mathbf{R} - \mathbf{1}_N R_0 = \mathbf{b}(R^* - R_0) + \varepsilon$$

con $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1\bullet} \\ \beta_{2\bullet} \\ \vdots \\ \beta_{N\bullet} \end{pmatrix} = \dfrac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$; $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{N\times 1}$; $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, R^*) = \mathbf{0}_{N\times 1}$

Dem:

De acuerdo con la proposición 3,

$$R_i = (E(R_i) - \beta_{i\bullet}E(R^*)) + \beta_{i\bullet}E(R^*) + \varepsilon_i$$

con $E(\varepsilon_i) = 0$ y $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*) = 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,N$.

Por la proposición 7 se tiene que

$$E(R_i) - R_0 = \beta_{i\bullet}(E(R^*) - R_0)$$

entonces

$$R_i = ((R_0 + \beta_{i\bullet}E(R^* - R_0)) - \beta_{i\bullet}E(R^*)) + \beta_{i\bullet}E(R^*) + \varepsilon_i$$

por lo que

$$R_i - R_0 = \beta_{i\bullet}(R^* - R_0) + \varepsilon_i$$

con $E(\varepsilon_i) = 0$ y $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R^*) = 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,N$

y por lo tanto

$$\mathbf{R} - \mathbf{1}_N R_0 = \mathbf{b}(R^* - R_0) + \varepsilon \quad \text{con} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1\bullet} \\ \beta_{2\bullet} \\ \vdots \\ \beta_{N\bullet} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)};\ E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{N\times 1}\ ;\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, R^*) = \mathbf{0}_{N\times 1}$$

Q.E.D.

Proposición 9: *Sean* $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ *el vector de rendimientos de* N *activos riesgosos con matriz de varianza-covarianza* $\Sigma_{\mathbf{R}}$ *invertible;* R_0 *el rendimiento de un activo sin riesgo; y* $R^* = w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R}$ *un portafolio, con rendimiento,* $E(R^*) = E_0$*, tal que existe* $\lambda \in \Re$ *que cumple que* $E(R_i) - R_0 = \lambda \beta_{i*}$ *para todo* $i = 1,2,\ldots,N$*, es decir*

$$E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0 = \mathbf{b}\lambda \quad \textit{con} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_{1*} \\ \beta_{2*} \\ \vdots \\ \beta_{N*} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)}$$

entonces R^* *es el rendimiento de un portafolio en la frontera.*

Dem:

$$\mathbf{b} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R}, R^*)}{\operatorname{var}(R^*)} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{1}_N \mathbf{R}, w_0 R_0 + \mathbf{w}'\mathbf{R})}{\operatorname{var}(R^*)} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}} \mathbf{w} \frac{1}{\operatorname{var}(R^*)}$$

por otra parte $E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0 = \mathbf{b}\lambda \Rightarrow \mathbf{b} = (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{1}{\lambda}$, entonces

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}} \mathbf{w} \frac{1}{\operatorname{var}(R^*)} = (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{1}{\lambda}$$

entonces

$$(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)' \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{\operatorname{var}(R^*)}{\lambda} = (E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{w}$$

$$= E(\mathbf{R})'\mathbf{w} - R_0 \mathbf{1}_N{}'\mathbf{w}$$

pero

$$E_0 = E(R^*) = w_0 R_0 + \mathbf{w}' E(\mathbf{R}) \quad \text{y} \quad \mathbf{w}'\mathbf{1}_N = 1 - w_0$$

entonces

$$E(\mathbf{R})'\mathbf{w} - R_0 \mathbf{1}_N{}'\mathbf{w} = (E_0 - w_0 R_0) - R_0(1 - w_0) = E_0 - R_0$$

por tanto

$$(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{\mathrm{var}(R^*)}{\lambda} = E_0 - R_0$$

despejando, se tiene que

$$\lambda = \frac{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\,\mathrm{var}(R^*)}{E_0 - R_0}$$

entonces

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{\mathrm{var}(R^*)}{\frac{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}{E_0 - R_0}\mathrm{var}(R^*)}$$

al simplificar se obtiene que

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)\frac{E_0 - R_0}{(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)'\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{-1}(E(\mathbf{R}) - \mathbf{1}_N R_0)}$$

y por lo tanto R^* es el rendimiento de un portafolio en la frontera.

Q.E.D.

Proposición 10, pricing portfolio: Sean $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ un vector de N activos, con matriz de varianza-covarianza invertible $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}}$, y x_0 un activo sin riesgo. Sea $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$; entonces existe un portafolio $C = \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}$ tal que el precio del activo i esta dado por $\pi(X_i) = E(X_i C)$; C es llamado el portafolio que fija los precios (pricing portfolio). En particular para todo portafolio $P = \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}$, se tiene que su precio esta dado por $\pi(P) = E(PC)$

Dem:

$$\pi(\mathbf{Z}) = E[\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\gamma)] \Rightarrow \pi(\mathbf{Z}) = E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}')\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\pi(\mathbf{Z})}{E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}')}$$

y por lo tanto $C = \gamma'\mathbf{Z} = \pi(\mathbf{Z})' E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}')^{-1}\mathbf{Z}$

Q.E.D.

Proposición 11: *Sea C el portafolio que fija los precios de la proposición 10 tal que $E(C) \neq 0$ y $\pi(C) \neq 0$. Definamos $r = \frac{1}{E(C)}$ entonces para todo portafolio, con rendimiento R_P tal que $\pi(P) \neq 0$ se tiene que*

$$E(R_P) - r = \beta_{PC}(E(R_C) - r)$$

que por las proposiciones anteriores equivale a decir que C está en la frontera.

Dem:

$$\beta_{PC} = \frac{\operatorname{cov}(R_P, R_C)}{\operatorname{var}(R_C)} = \frac{E(R_P R_C) - E(R_P)E(R_C)}{E(R_C^2) - E^2(R_C)}$$

como $R_C = \frac{C}{\pi(C)}$ se tiene que

$$\beta_{PC} = \frac{E\left(R_P \frac{C}{\pi(C)}\right) - E(R_P)E\left(\frac{C}{\pi(C)}\right)}{E\left(R_C \frac{C}{\pi(C)}\right) - E(R_C)E\left(\frac{C}{\pi(C)}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\pi(C)}\pi(R_P) - E(R_P)\frac{E(C)}{\pi(C)}}{\frac{1}{\pi(C)}\pi(R_C) - \frac{E(R_C)}{\pi(C)}E(C)}$$

como

$$\pi(R_X) = \pi\left(\frac{X}{\pi(X)}\right) = 1$$

se tiene que

$$\beta_{PC} = \frac{1-(E(R_P)\frac{1}{r})}{1-(E(R_C)\frac{1}{r})} = \frac{r-E(R_P)}{r-E(R_C)} = \frac{E(R_P)-r}{E(R_C)-r}$$

y por lo tanto

$$E(R_P)-r = \beta_{PC}(E(R_C)-r)$$

Q.E.D.

Definición: Aversidad a la varianza

Se dice que el inversionista i con relación de preferencias, $\succ_i$, es averso a la varianza $\Leftrightarrow$ dada la elección entre:

$i)X$
$ii)X+\varepsilon$ *con* $\varepsilon \neq 0$, $E(\varepsilon)=0$ *y* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon)=0$

el inversionista prefiere a X, es decir $X \succ_i X+\varepsilon$.

Se le llama aversión a la varianza pues como $\varepsilon \neq 0$ se tiene que $\operatorname{var}(\varepsilon) \neq 0$ lo que implica que $\operatorname{var}(X+\varepsilon)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(\varepsilon)+2\operatorname{cov}(X,\varepsilon)$ y como $\operatorname{cov}(X,\varepsilon)=0$ se tiene que el inversionista elige al que tiene menor varianza pues $\operatorname{var}(X+\varepsilon) > \operatorname{var}(X)$.

Proposición 12: *En el contexto de la función de utilidad esperada, si el inversionista tiene una función de utilidad cóncava, es decir, de la forma:*

$$U(z) = Az - Bz^2 + C \text{ con } B > 0$$

entonces es un inversionista averso a la varianza.

Dem:

$$E[U(X+\varepsilon)] = E\left[A(X+\varepsilon) - B(X+\varepsilon)^2 + C\right]$$

$$= AE(X) + AE(\varepsilon) - BE(X)^2 - 2BE(X\varepsilon) - BE(\varepsilon^2) + C$$

$$= E(U(X)) - BE(\varepsilon^2) \text{ pues } E(\varepsilon)=0 \text{ y } E(X\varepsilon)=0$$

como $B > 0$ y $E[\varepsilon^2] > 0$ se concluye que $E[U(X+\varepsilon)] < E[U(X)]$ y por lo tanto el inversionista preferiría a X sobre $X+\varepsilon$, lo cual es justamente la definición de adversidad a la varianza.

Q.E.D.

Proposición 13: *Si el vector de rendimientos de los activos se distribuye multinormal, es decir,*

$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \approx \mathbf{N}_N(\mathbf{E}(\mathbf{R}), \Sigma)$ *entonces el inversionista es averso a la varianza sin importar cual sea su función de utilidad*[4].

[4] La demostración de esta última proposición esta fuera de los alcances de este trabajo. Sin embargo es un resultado que esta demostrado.

Teorema 2: Modelo CAPM

Sean $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ *el vector de* N *activos con riesgo, y* x_0 *un activo sin riesgo.*

Considere que el rendimiento de los activos esta dado por $R_i = \frac{x_i}{\pi(x_i)}$ *con* $i = 1,2,...N$, *en donde* $\pi(x_i)$ *representa el precio del activo* i.

Por otra parte considere que existen I *inversionistas, aversos a la varianza, con dotaciones:* $e_i = a_{0,i}x_0 + \alpha_i'\mathbf{X}$ *con* $i = 1,...,I$; *y suponga que en el mercado de activos no hay producción. Es decir, en el mercado solo se intercambian las dotaciones de los activos.*

Adicionalmente, suponga que cada inversionista tiene una relación de preferencias, $\prec_i$, *que le permite elegir entre cualesquiera dos activos.*

Por otro lado, definamos al portafolio de mercado como la suma de las dotaciones de todos los inversionistas:

$$M = \sum_{i=1}^{I} e_i = \sum_{i=1}^{I} a_{0,i}x_0 + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i'\mathbf{X} \quad \textit{con} \quad \mathrm{var}(M) > 0$$

con esta definición, se hace el supuesto de que el mercado esta en equilibrio general, es decir, el equilibrio existe y es único. Por lo tanto, dados los precios de todos los activos, los inversionistas sacian sus demandas y se vacían los mercados. Esto es, si en equilibrio los inversionistas tienen dotaciones $a_{0,i}^{*}x_0 + \alpha_i^{*}\mathbf{X} = P_i^{*}$, *se tiene que:* $\sum_{i=1}^{I} P_i^{*} = \sum_{i=1}^{I} e_i = M$.

Todos estos supuestos implican que el portafolio de mercado está en la frontera media-desviación estándar, lo que por la proposición 7 equivale a decir que,

$$E(R_i) - R_0 = \beta_{im}(E(R_m) - R_0)$$

ó que par todo portafolio

$$E(R_p)-R_0=\beta_{pm}(E(R_m)-R_0)$$

Dem:

Considere la regresión lineal entre P_i^* y el portafolio que fija los precios (pricing portafolio) C al que se refiere la proposición 10,

$$P_i^* = \gamma_i + \eta_i C + \varepsilon_i \text{ con } E(\varepsilon_i)=0 \text{ y } E(\varepsilon_i C)=0=\pi(\varepsilon_i)$$

El coeficiente respectivo al portafolio que fija los precios esta dado por:

$$\eta_i = \frac{\operatorname{cov}(P_i^*, C)}{\operatorname{var}(C)}$$

entonces como los precios son lineales y $\pi(\varepsilon_i)=0$ se tiene que

$$\pi(P_i^*) = \pi(\gamma_i + \eta_i C + \varepsilon_i) = \pi(\gamma_i + \eta_i C) + \pi(\varepsilon_i) = \pi(\gamma_i + \eta_i C)$$

como el inversionista, en equilibrio, escogió P_i^*, se tiene que

$$\gamma_i + \eta_i C + \varepsilon_i \succ_i \gamma_i + \eta_i C$$

y por el supuesto de que el inversionista es averso a la varianza se concluye que:

$$\varepsilon_i = 0$$

por lo tanto se tiene que P_i^* puede ser descompuesto como

$$P_i^* = \gamma_i + \eta_i C$$

si definimos a γ_i^* como $\gamma_i^* = \dfrac{\gamma_i}{x_0}$, se tiene que $P_i^* = \gamma_i + \eta_i C = \gamma_i^* x_o + \eta_i C$

pero de acuerdo con la proposición 11, C es un portafolio en la frontera

y x_o, de acuerdo con la definición, también esta en la frontera.

Por lo tanto, de acuerdo con teorema 1, cualquier combinación lineal de portafolios en la frontera también esta en la frontera y por lo tanto se concluye que

$$\sum_{i=1}^{I} P_i^* = \sum_{i=1}^{I} e_i = M \text{ está en la frontera.}$$

lo que por la proposición 7 equivale a decir que;

$$E(R_i) - R_0 = \beta_{im}(E(R_m) - R_0)$$

ó que para todo portafolio en el mercado

$$E(R_p) - R_0 = \beta_{pm}(E(R_m) - R_0).$$

Q.E.D.

CAPÍTULO 3

VERIFICACIÓN DE LAS CONDICIONES NECESARIAS PARA ESTIMAR EL MODELO

Para intentar estimar el modelo anterior, se tomaron los precios diarios de 10 acciones que cotizan en la bolsa mexicana de valores; el primer paso lo constituye la elección del periodo histórico que se toma para obtener datos estadísticos de los rendimientos, y así calcular la matriz de varianzas y covarianzas requerida en la construcción de la frontera eficiente. La elección del periodo de tiempo en el que se considera los precios debe tomar en cuenta lapsos en los cuales se presenten movimientos a la alza y a la baja del mercado. Dado que se observan movimientos alcistas durante 1994 y bajistas en 1995, se considera apropiado tomar en cuenta el periodo a partir de Septiembre del 1994 y hasta Junio del 2000.

La muestra está formada por los rendimientos diarios[5] de 10 acciones en el periodo comprendido del 11 de Septiembre de 1994 al 31 de Mayo del 2000. Del total de acciones se eligieron a aquellas que tenían una mayor bursatilidad. Las acciones que conforman el portafolio se presentan en el cuadro 1.

CUADRO 1

ACCIONES CONSIDERADAS EN LA MUESTRA

	Rendimiento Promedio	Desviación Estándar
ALFA 'A'	0.00073496	0.02747038
BANACCI 'O'	0.00041797	0.03781232
CEMEX CPO	0.00035686	0.02985956
ELEKTRA CPO (CPO = 1 SR.L + 2 SR.B)	0.00061403	0.03373292
GCARSO 'A1'	0.00017967	0.02856505
GMODELO 'C'	0.00107552	0.02349335
SORIANA 'B'	0.00149195	0.02710938
TLEVISA 'CPO'	0.00068070	0.03079742
TELMEX 'L'	0.00103413	0.02224234
VITRO 'A'	-0.00034228	0.03006563

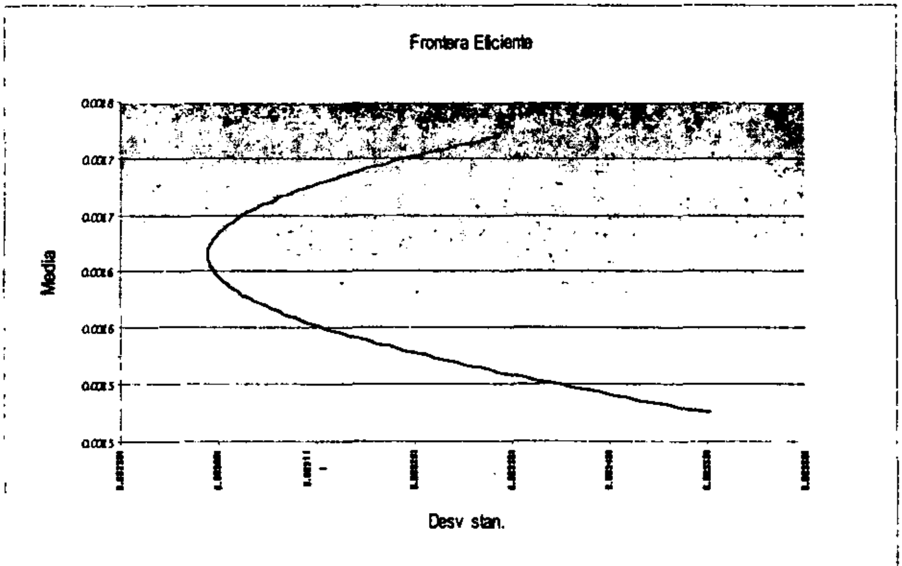
[4] Lor rendimientos fueron obtenidos de la forma $\ln(P_t/P_{t-1})$, donde P_t representa al precio de la acción en el tiempo t.

La matrix de varianzas y covarianzas de los activos elegidos se presenta a continuación

Matriz de varianza-covarianza

	ALFA 'A	BANACCI O	CEMEX CPO	ELEKTRA CPO	GCARSO A1	GMODELO C	SORIANA B	TLEVISA CPO	TELMEX L	VITRO A
ALFA 'A'	0.00075	0.00040	0.00032	0.00039	0.00040	0.00026	0.00028	0.00033	0.00027	0.00031
BANACCI 'O'	0.00040	0.00143	0.00051	0.00059	0.00055	0.00032	0.00044	0.00049	0.00036	0.00043
CEMEX CPO	0.00032	0.00051	0.00089	0.00035	0.00042	0.00025	0.00028	0.00035	0.00024	0.00034
ELEKTRA CPO	0.00039	0.00059	0.00035	0.00114	0.00044	0.00023	0.00037	0.00040	0.00031	0.00041
GCARSO 'A1'	0.00040	0.00055	0.00042	0.00044	0.00082	0.00033	0.00033	0.00044	0.00034	0.00044
GMODELO 'C'	0.00026	0.00032	0.00025	0.00023	0.00033	0.00055	0.00022	0.00025	0.00021	0.00026
SORIANA 'B'	0.00028	0.00044	0.00028	0.00037	0.00033	0.00022	0.00073	0.00029	0.00025	0.00029
TLEVISA 'CPO'	0.00033	0.00049	0.00035	0.00040	0.00044	0.00025	0.00029	0.00095	0.00041	0.00038
TELMEX 'L'	0.00027	0.00036	0.00024	0.00031	0.00034	0.00021	0.00025	0.00041	0.00049	0.00028
VITRO 'A'	0.00031	0.00043	0.00034	0.00041	0.00044	0.00026	0.00029	0.00038	0.00028	0.00090

La frontera eficiente definida en el capítulo anterior, para el portafolio de 10 acciones es



Antes de realizar la estimación del modelo es necesario verificar un conjunto de condiciones que tienen que cumplirse para hacer una estimación correcta del modelo.

Pruebas sobre la eficiencia de los mercados

- **La caminata aleatoria (random walk)**

Se habla de que los mercados son eficientes cuando en el precio de las acciones se refleja en forma instantánea y completa en toda la información relevante disponible hasta el momento. Fama[6] define tres tipos de eficiencia, cada una de las cuales se basa en una noción diferente de qué tipo de información es relevante:

1. **Eficiencia Forma Débil** Ningún inversionista puede obtener rendimientos extraordinarios desarrollando reglas de negociación basadas en la información de precios o rendimientos históricos.
2. **Eficiencia Forma Semifuerte**. Ningún inversionista puede obtener rendimientos en exceso de reglas de negociación basadas en cualquier información disponible
3. **Eficiencia Forma Fuerte.** Ningún inversionista puede obtener rendimientos extraordinarios utilizando cualquier tipo de información, sea pública disponible o nó.

Existen tres teorías sobre el comportamiento histórico de los precios

1) Modelo de Juego Justo .
2) Modelo Martingala o submartingala.
3) Modelo de caminata aleatoria.

En este trabajo se realizan pruebas de caminata aleatoria debido a que en el modelo CAPM se supone que los precios siguen una caminata aleatoria.

[6] Fama, E.F. (1970) *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance, May 1970.

En la caminata aleatoria se establece que no existen diferencias entre la distribución condicional de los rendimientos dada una estructura de información y la distribución incondicional de los rendimientos. Lo anterior se puede escribir matemáticamente como:

$$f(r_{1,t+1},...r_{n,t+1}) = f(r_{1,t+1},...r_{n,t+1} \mid \eta_t)$$

Las caminatas aleatorias son condiciones mucho más fuertes que los juegos justos y que las martingalas porque requieren que todos los parámetros de la distribución sean los mismos con o sin estructura de información.

Una caminata aleatoria básica sigue el siguiente modelo matemático:

$$P_t = \rho P_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \approx N(0,\sigma^2)$$

Esta es una representación de un modelo autorregresivo de orden 1. Para corroborar si los precios de las acciones siguen una caminata aleatoria, se utiliza la prueba de raíces unitarias, introducida por Dickey y Fuller[7], la cual se describe a continuación:

PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA SOBRE ESTACIONARIEDAD

Esta prueba sobre estacionariedad se conoce como la prueba de raíz unitaria. La forma más fácil de introducir esta prueba es considerar el siguiente modelo:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t es el término de error estocástico que sigue media cero, varianza constante σ^2 y no esta autocorrelacionado. Un término de error con tales propiedades es conocido también como término de error ruido blanco. Si se efectúa la regresión de Y en el tiempo t sobre su valor en el tiempo $t-1$ y el coeficiente de Y_{t-1} es igual a 1, surge lo que se conoce como el problema de raíz

[7] Dickey, D. & W. Fuller (1979) *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Journal of the American Statistical Association, 74 pp. 427-431.
Dickey D. & W. Fuller (1981) *Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Econometrica 49, pp. 1057-1072.

unitaria, es decir una situación de no estacionariedad. Por consiguiente si se efectúa la regresión

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y se encuentra que $\rho = 1$, entonces se dice que la variable estocástica Y_t tiene una raiz unitaria. En econometría una serie de tiempo que tiene una raíz unitaria se conoce como una caminata aleatoria. Una caminata aleatoria es un ejemplo de una serie de tiempo no estacionaria.

La ecuación anterior se expresa en forma alternativa como:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= (\rho - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t\end{aligned}$$

en donde $\delta = (\rho - 1)$ y Δ es el operador de primera diferencia, $\Delta Y_t = (Y - Y_{t-1})$

Ahora se tiene la hipótesis nula de que $\delta = 0$

Si $\delta = 0$ se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = \varepsilon_t$$

La ecuación anterior dice que la primera diferencia de una serie de caminata aleatoria $(= \varepsilon_t)$ es una serie de tiempo estacionaria pues existe el supuesto de que ε_t es puramente aleatoria.

Ahora bien si una serie de tiempo ha sido diferenciada una vez y la serie diferenciada resulta ser estacionaria, se dice que la serie original (caminata aleatoria) es integrada de orden 1 y se denota por I(1). En general si una serie de tiempo debe ser diferenciada d veces, se dice que esta integrada de orden d o I(d). Así que siempre que se disponga de una serie de tiempo integrada de orden 1 o más, se tiene una serie de tiempo no estacionaria. Para averiguar si una serie de tiempo Y_t es no estacionaria, efectúese la regresión $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ y determínese si $\hat{\rho}$ es estadísticamente igual a 1 o, en forma equivalente, estímese $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ y determínese si $\hat{\delta} = 0$.

Bajo la hipótesis nula de que $\rho = 1$, el estadístico t calculado convencionalmente se conoce como el estadístico τ (tau), cuyos valores críticos han sido tabulados por Dickey y Fuller con base en simulaciones Monte Carlo.

Obsérvese que, si la hipótesis nula de que $\rho = 1$ es rechazada (es decir, la serie de tiempo es estacionaria) se puede utilizar la prueba t (de Student) usual. En su forma más simple, se estima una regresión como $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, se divide el coeficiente ρ estimado por su error estándar para calcular el estadístico τ de Dickey–Fuller y se consultan las tablas de Dickey-Fuller para ver si la hipótesis nula $\rho = 1$ es rechazada.

Si el valor estadístico calculado del estadístico τ (es decir $|\tau|$) excede los valores absolutos τ críticos de Dickey-fuller, entonces no se rechaza la hipótesis de que la serie de tiempo dada es estacionaria. Si, por el contrario, éste es menor que el valor crítico, la serie de tiempo es no estacionaria.

Por razones teóricas y prácticas, la prueba de Dickey-Fuller se aplica a regresiones efectuadas en las siguientes formas:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

en donde t es la variable de tiempo o tendencia. En cada caso, la hipótesis nula es que $\delta = 0$. Es decir, que hay una raíz unitaria. La diferencia entre las regresiones se encuentra en la inclusión de la constante (el intercepto) y el término de tendencia.

Si el término de error ε_t está autocorrelacionado se modifica la siguiente ecuación:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde, por ejemplo $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$, $\Delta Y_{t-2} = (Y_{t-2} - Y_{t-3})$, etcétera. Es decir, se utilizan términos en diferencia rezagados.

El número de términos en diferencia rezagados que debe incluirse con frecuencia se determina empíricamente. La hipótesis nula continua siendo que $\delta = 0$ o $\rho = 1$, es decir, que existe una raíz unitaria en Y (es decir Y es no estacionaria).

Cuando se aplica la prueba de Dickey-Fuller a modelos como la ecuación anterior, ésta se llama prueba Dickey-Fuller aumentada y se utilizan los mismos valores criticos que la prueba Dickey-Fuller normal.

Si se supone que el comportamiento de los precios está regido por la siguiente ecuación:

$$P_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)P_{t-1} + \lambda \Delta P_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde $\Delta P_{t-1} = P_{t-1} - P_{t-2}$. Al utilizar mínimos cuadrados ordinarios, se efectúa primero la regresión sin restricciones

$$P_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)P_{t-1} + \lambda \Delta P_{t-1} + \varepsilon_t$$

y después la ecuación restringida

$$P_t - P_{t-1} = \alpha + \lambda \Delta P_{t-1}$$

Se calcula posteriormente la razón F para probar si las restricciones $\beta = 0$ y $\rho = 1$ se mantienen.

$$F = \left[(N - K) * (SRC_{restr} - SRC_{norestr})\right] / \left[q * SRC_{norestr}\right]$$

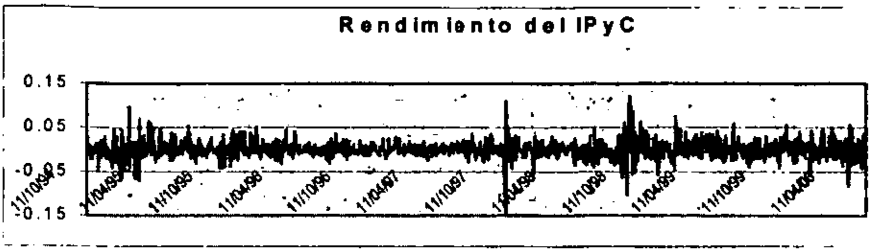
donde N es el número de observaciones, K es el número de parámetros a estimar por la regresión no restringida, q es el número de parámetros a estimar por la regresión restringida, SRC_{restr} es la suma de los residuales al cuadrado de la regresión restringida y $SRC_{norestr}$ es la suma de los residuales al cuadrado de la regresión no restringida.

Esta razón no se distribuye como una distribución F estándar bajo la hipótesis nula sino que los valores encontrados deben compararse con las distribuciones tabuladas por Dickey y Fuller. Esta prueba permite rechazar (o no rechazar) la hipótesis de que un variable no es una caminata aleatoria. El no poder rechazar es una evidencia débil a favor de la hipótesis de caminata aleatoria.

Se aplicó la prueba de Dickey Fuller a los precios de las 10 acciones consideradas y al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, en todos los casos los rendimientos analizados no siguen un modelo no estacionario de caminata aleatoria. Es decir, no hay evidencia para rechazar que son una caminata aleatoria.

Para ilustrar el uso de la prueba de caminata aleatoria sólo se presentan 2 casos, como ya se mencionó, en los demás casos el resultado es el mismo.

Prueba de Caminata Aleatoria para el rendimiento diario del Índice de Precios y cotizaciones.



Gráfica: Comportamiento histórico del rendimiento del IPyC

No de observaciones: 1410

No. De parámetros ec. No restringida: 4

No. De parámetros ec. Restringida: 2

Ho: El rendimiento de IPYC sigue un modelo no estacionario de caminata aleatoria.

	α	β	ρ	λ	SRC
Reg. no restringida	0.000233	3.88E-07	0.089078	0.010424	0.53761796
Reg. restringida	1.19E-05			-0.444984	0.78444498

Estadístico F : 322.75594

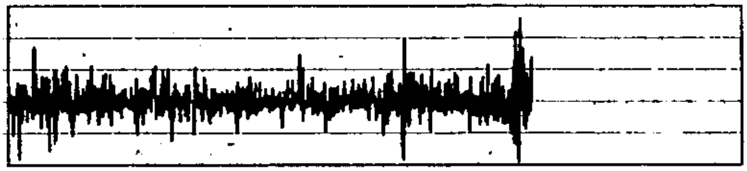
Valor crítico: 8.27 para un tamaño de muestra mayor de 500 y pvalue =0.99

0.77 para un tamaño de muestra de más de 500 y pvalue =0.77

Resultado: Rechazamos la hipótesis nula de que el rendimiento de IPyC sigue una caminata aleatoria con un nivel de confianza del 1%

Por tanto los rendimientos analizados no siguen un modelo no estacionario de caminata aleatoria.

Prueba de Caminata Aleatoria para el rendimiento diario de Telmex



Gráfica: Comportamiento histórico del rendimiento de Telmex "L"

No de observaciones: 1410

No. De parámetros ec. No restringida: 4

No. De parámetros ec. Restringida: 2

Ho: El rendimiento de Telmex sigue un modelo no estacionario de caminata aleatoria

	α	β	ρ	λ	*SRC*
Reg. no restringida	0.000260	1.09E-06	0.015110	-0.006923	0.71566606
Reg. restringida	2.78E-05			-0.499364	1.0638669

Estadístico F : 342.03827

Valor crítico: 8.27 para un tamaño de muestra mayor de 500 y pvalue =0.99

0.77 para un tamaño de muestra de más de 500 y pvalue =0.77

Resultado: Rechazamos la hipótesis nula de que el rendimiento de Telmex sigue una caminata aleatoria con un nivel de confianza del 1%

En conclusión, los rendimientos analizados no siguen un modelo no estacionario de caminata aleatoria.

- **Cointegración**

En la especificación completa del modelo de regresión

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$$

esta implícito el supuesto de que los residuos ε_t son una serie estacionaria ruido blanco, pero probablemente este no es el caso cuando x_t e y_t son integradas.

En general, si dos series son integradas para diferentes órdenes, las combinaciones lineales de ambas estarán integradas para el más alto de los dos ordenes. Así si x_t e y_t son I(1) entonces normalmente esperaríamos que $y_t - \beta x_t$ sea I(1), independientemente del valor de β. Si x_t y y_t se mueven ambas hacia arriba con su propia tendencia. A menos de que haya alguna relación entre esas tendencias, la diferencia entre ellas debería estar creciendo, con otra tendencia adicional.

Por otra parte, si ambas series son I(1) puede existir una β tal que

$$\varepsilon_t = y_t - \beta x_t$$

sea I(0). Intuitivamente, si las dos series son I(1), esta diferencia entre ellas tiene que ser estable alrededor de una media fija. La implicación sería que las series crecen simultáneamente a aproximadamente la misma tasa. Dos series que satisfacen estos requisitos se dice que están cointegradas y el vector $[1,-\beta]$ (o un múltiplo de él) es un vector de cointegración.

En tal caso, podemos distinguir entre una relación de largo plazo entre x_t y y_t. Es decir, la forma en la cual las dos variables crecen, y la dinámica de corto plazo, es decir las relaciones entre las desviaciones de y_t y x_t respecto de sus tendencias de corto plazo. Si éste es el caso, una diferenciación de los datos sería contraproducente, ya que podría oscurecer la relación de largo plazo entre y_t y x_t.

Una forma alternativa de probar si una serie sigue una caminata aleatoria, es probar si la serie está cointegrada con otra serie de tiempo. El realizar una regresión de una variable que sigue una caminata aleatoria contra otra puede conducir a resultados espúreos. En el sentido de que las pruebas de significancia que pueden resultar de la regresión indicarán que existe una relación entre variables cuando en realidad esa relación es inexistente. Si una prueba falla en rechazar la hipótesis nula de caminata aleatoria, lo más indicado es diferenciar la serie antes de utilizarla en la regresión.

Se supone que se ha realizado ya anteriormente la prueba Dickey-Fuller para determinar si dos series X_t y Y_t son caminatas aleatorias, y que por tanto ΔX_t y ΔY_t son estacionarios. Se puede probar si las series están co-integradas corriendo la regresión de cointegración.

$$X_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t$$

y después se probará si los residuales ε_t de esta regresión son estacionarios (Si X_t y Y_t están no cointegrados, cualquier combinación de ellas será no estacionario, y por tanto, los residuales ε_t serán no estacionarios). La hipótesis a probar será que ε_t es no estacionario, es decir que X_t y Y_t están no cointegrados.

Para probar la hipótesis de que ε_t es no estacionario existen dos formas. La primera es realizar la prueba de Dickey-Fuller sobre los residuales. La segunda es verificar el valor del estadístico Durbin- Watson de la regresión de cointegración.

$$DW = \frac{(\sum(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2)}{\sum(\varepsilon_t)^2}$$

Si ε_t es una caminata aleatoria, el valor esperado de $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$ es cero, por lo que el estadístico Dubin- Watson debe ser cercano a cero, se prueba entonces que el DW sea=0.

Al igual que en el caso de las pruebas de caminata aleatoria se aplicó la prueba de cointegración. Para ilustrar el uso de esta prueba se presentan algunos casos representativos, en los demás casos el resultado es el mismo.

Prueba de cointegración para IPyC y CETES

No de observaciones: 1410

No. De parámetros ec. No restringida: 4

No. De parámetros ec. Restringida: 2

Ho: Los resisuales de CETES y el IpyC son no estacionarios
(CETES y el IPyC están no cointegrados)

	α	β	ρ	λ	SRC
Reg. no restringida	-0.001580	2.19E-06	0.078268	0.015350	0.534182651
Reg. restringida	1.17E-05			-0.445411	0.783745131

Estadístico F : 328.4315264

Valor crítico: 8.27 para un tamaño de muestra mayor de 500 y pvalue = 0.99
0.77 para un tamaño de muestra de más de 500 y pvalue = 0.77

Resultado: Rechazamos la hipótesis nula de que las series están no co-integradas

Prueba de cointegración para GMODELO y CETES

No de observaciones: 1410

No. De parámetros ec. No restringida: 4

No. De parámetros ec. Restringida: 2

Ho: Los resisuales de CETES y GMODELO son no estacionarios (CETES y el GMODELO están no co-integrados)

	α	β	ρ	λ	SRC
Reg. no restringida	0.000430	-6.59E-07	-0.066920	0.078662	0.793068282
Reg. restringida	-2.40E-05			-0.454751	1.250330042

Estadístico F : 405.3308205

Valor crítico: 8.27 para un tamaño de muestra mayor de 500 y pvalue =.99
.77 para un tamaño de muestra de más de 500 y pvalue = .77

Resultado: Rechazamos la hipótesis nula de que las series están no co-integradas

Prueba de cointegración para IPyC y TELMEX

No de observaciones: 1410

No. De parámetros ec. No restringida: 4

No. De parámetros ec. Restringida: 2

Ho: Los resisuales de IPyC y TELMEX son no estacionarios (CETES y el GMODELO están no co-integrados)

	α	β	ρ	λ	SRC
Reg. no restringida	-0.000430	6.56E-07	-0.072728	0.042621	0.668971921
Reg. restringida	2.71E-05			-0.493406	1.044366233

Estadístico F : 394.4892061

Valor crítico: 8.27 para un tamaño de muestra mayor de 500 y pvalue =.99

.77 para un tamaño de muestra de más de 500 y pvalue = .77

Resultado: Rechazamos la hipótesis nula de que las series están no co-integradas

- **Normalidad en la distribución de los rendimientos**

Un supuesto muy importante en la teoría financiera es la distribución normal de los rendimientos accionarios. La prueba Jarque-Bera[8] de normalidad es una prueba asintótica o de grandes muestras.

Esta prueba calcula primero la asimetría y la kurtosis o apuntamiento de los datos y posteriormente utiliza el siguiente estadístico de prueba:

$$JB = n\left[\frac{A^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right]$$

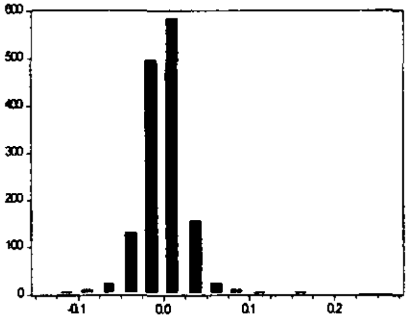
en donde A representa la asimetría y K representa la kurtosis o apuntamiento.

Puesto que para una distribución normal el valor de la asimetría es cero y el valor de la kurtosis es 3, en la ecuación anterior $(k-3)$ representa la kurtosis excedente. Bajo la hipótesis nula de que los residuos están normalmente distribuidos, Jarque y Bera demostraron que, en muestras grandes, el estadístico JB sigue una distribución χ^2 con 2 grados de libertad. Si el valor p del estadístico ji cuadrado calculado en una aplicación es suficientemente pequeño, se puede rechazar la hipótesis de que los residuos están normalmente distribuidos. Pero si el valor de p es razonablemente alto, no se rechaza el supuesto de normalidad.

Se aplicó la prueba anterior al conjunto de 10 acciones considerados en este trabajo. Como puede observarse en los cuadros que contienen la información estadística para cada serie histórica de rendimientos, ningún valor de p nos conduce a no rechazar la hipótesis nula de normalidad. Es decir no tenemos evidencia estadística para afirmar que los rendimientos analizados presentan una distribución normal.

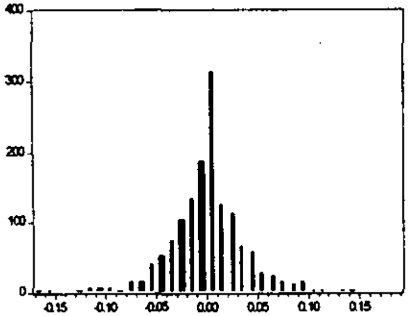
[8]Jarque C. M. and A. K. Bera (1987) *A test for normality of observations and regression residuals*, International Statistical Review 55, pp. 163-172.

ACCION: ALFA A



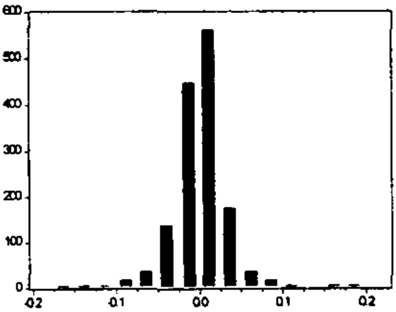
Series: ALFAA	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000735
Median	0.000000
Maximum	0.252414
Minimum	-0.145712
Std. Dev.	0.027470
Skewness	0.674220
Kurtosis	11.65148
Jarque-Bera	4667.066
Probability	0.000000

ACCION: BANACCI O



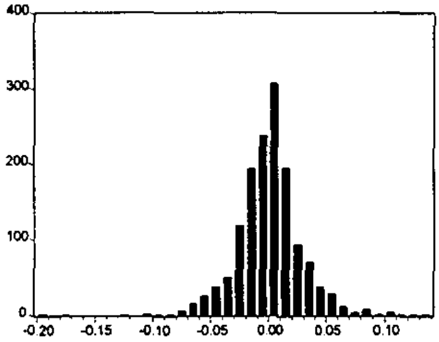
Series: BANACCI	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000418
Median	0.000000
Maximum	0.180097
Minimum	-0.162519
Std. Dev.	0.037812
Skewness	0.049295
Kurtosis	5.502092
Jarque-Bera	381.6975
Probability	0.000000

ACCION: ELEKTRA



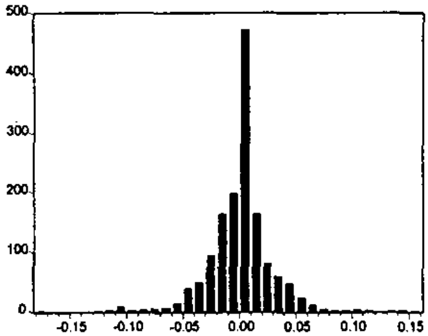
Series: ELEKTRA	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000614
Median	0.000000
Maximum	0.213574
Minimum	-0.198851
Std. Dev.	0.033733
Skewness	0.131344
Kurtosis	9.552163
Jarque-Bera	2617.616
Probability	0.000000

ACCION:GCARSO



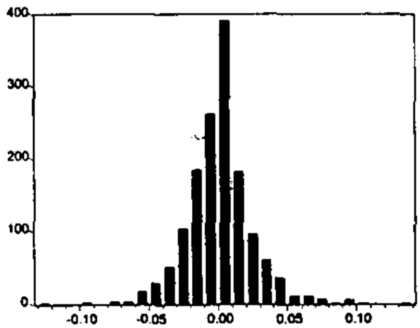
Series: GCARSO	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000180
Median	0.000000
Maximum	0.138573
Minimum	-0.198671
Std. Dev.	0.028565
Skewness	-0.353844
Kurtosis	8.440701
Jarque-Bera	1832.462
Probability	0.000000

ACCION: CEMEXA



Series: CEMEXA	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000419
Median	0.000000
Maximum	0 151573
Minimum	-0.175075
Std. Dev.	0.027910
Skewness	0.118184
Kurtosis	8.722255
Jarque-Bera	1996.704
Probability	0.000000

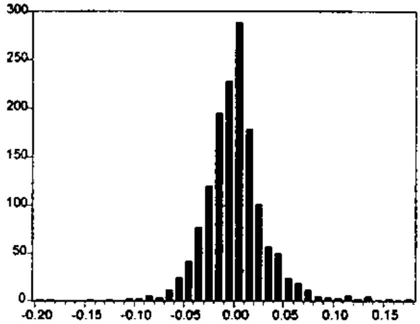
ACCION: GMODELO C



Series: GMODELOC	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.001076
Median	0.000000
Maximum	0.130596
Minimum	-0.121537
Std. Dev.	0.023493
Skewness	0.370953
Kurtosis	6.036231
Jarque-Bera	594.6956
Probability	0.000000

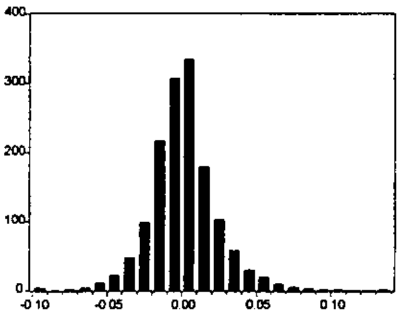
ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

ACCION: TELEVISA CPO



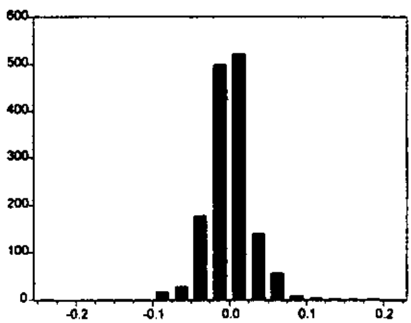
Series: TELEVISACPO	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.000681
Median	0.000000
Maximum	0.179954
Minimum	-0.190518
Std. Dev.	0.030797
Skewness	0.302454
Kurtosis	8.064226
Jarque-Bera	1583.498
Probability	0.000000

ACCION: TELMEX L



Series: TELMEXL	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	0.001034
Median	0.000000
Maximum	0.130770
Minimum	-0.094491
Std. Dev.	0.022242
Skewness	0.415814
Kurtosis	5.764397
Jarque-Bera	507.3016
Probability	0.000000

ACCIÓN: VITROA



Series: VITROA	
Sample 1 1461	
Observations 1461	
Mean	-0.000342
Median	0.000000
Maximum	0.222595
Minimum	-0.238736
Std. Dev.	0.030066
Skewness	0.398249
Kurtosis	11.24703
Jarque-Bera	4178.944
Probability	0.000000

CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrollaron las ideas que conducen al modelo CAPM, se presento una demostración del mismo considerando los supuestos y resultados en los que se apoya. Se intentó hacer una estimación del mismo para el caso mexicano, tomando acciones que cotizan actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores, sin embargo esto no fue posible debido a la violación del supuesto de normalidad.

Se verificaron cada uno de los supuestos que subyacen en el modelo, como son las pruebas de normalidad, caminata aleatoria y cointegración que se exponen con detalle.

Con respecto a la prueba de caminata aleatoria no se encontró ningún problema con los datos y las pruebas pasaron satisfactoriamente.

En el caso de las pruebas de cointegración tampoco se encontró algún inconveniente para estimar el modelo.

Sin embargo al efectuar las pruebas de normalidad no pasaron satisfactoriamente.

La conclusión principal a la que se llega en este trabajo es que no es posible realizar la estimación del modelo CAPM en el caso de México, debido a que los rendimientos de las acciones consideradas no admiten una función de distribución normal. La violación de este supuesto invalida toda posibilidad de estimación.

El modelo CAPM ha sido utilizado con frecuencia, a pesar de que no se cumplen todos los supuestos en los que subyace por lo que es importante considerar modelos alternativos. Finalmente, es importante señalar que en el ejercicio empírico que se realizó en este trabajo no se encontró evidencia suficiente para aceptar el supuesto de normalidad, pero que esto no imposibilita a que el modelo pueda ser estimado con datos en los que este supuesto se cumpla.

BIBLIOGRAFÍA

Berndt, E. (1991) *The Practice of Econometrics Classic and Contemporary*, Adisson Wesley, USA.

Caldiño E. (1996) *On the mean-standar deviation frontier*, Estudios Económicos 22, El Colegio de México, pp. 297-319

Campbell, J. (1998) *The Econometrics of Financial Markets*, Chapter 5 The Capital Asset Pricing Model.

Duffie, D. (1988) Security markets, Stochastic Models, San Diego, Academic Press.

Dickey, D. and W. Fuller (1979) *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Journal of the American Statistical Association, 74 pp. 427-431.

Dickey D. and W. Fuller (1981) *Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Econometrica 49, pp. 1057-1072.

Greene, W. (1993) *Econometric Analysis*, 2nd ed., New York, Macmillan.

Haugen, R. A. (1996) *Modern Investment Theory* Fourth Edition Chapter 8 The Capital Asset Pricing Model .

Huang, C. and R. Litzenberger. (1988) *Foundations for Financial Economics*, New York, North-Holland.

Ingersoll, J. (1987) *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, Totowa.

Jarque C. M. and A.K. Bera (1987) *A test for normality of observations and regression residuals*, International Statistical Review 55, pp. 163-172.

Lintner. J. (1965) *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*, Journal of Finance, December 1965.

Markowitz. H. (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York.

Shanken, J. (1985) *Multivariate Test of the Zero-Beta CAPM*. Journal of Financial Economics 14 pp. 327-348

Sharpe, W.F. (1964) *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, September 1964.

APÉNDICE 1: Resultados de las regresiones para las pruebas de caminata aleatoria

Dependent Variable: TELMEX-TELMEX(-1)
Method: Least Squares
Date: 10/13/00 Time: 16:12
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
TELMEX-TELMEX(-1)=C(1)+C(2)*TIME+(C(3)-1)*TELMEX(-1)+C(4)
*(TELMEX(-1)-TELMEX(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.000260	0.001205	0.215634	0.8293
C(2)	1.09E-06	1.48E-06	0.740529	0.4591
C(3)	0.015110	0.037657	0.401255	0.6883
C(4)	-0.006923	0.026725	-0.259061	0.7956

R-squared	0.494852	Mean dependent var	2.73E-05
Adjusted R-squared	0.493774	S.D. dependent var	0.031710
S.E. of regression	0.022561	Akaike info criterion	-4.742336
Sum squared resid	0.715666	Schwarz criterion	-4.727438
Log likelihood	3347.347	Durbin-Watson stat	1.994515

Dependent Variable: TELMEX-TELMEX(-1)
Method: Least Squares
Date: 10/13/00 Time: 16:15
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
TELMEX-TELMEX(-1)=C(1)+C(2)*(TELMEX(-1)-TELMEX(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	2.78E-05	0.000732	0.037922	0.9698
C(2)	-0.499364	0.023107	-21.61078	0.0000

R-squared	0.249077	Mean dependent var	2.73E-05
Adjusted R-squared	0.248544	S.D. dependent var	0.031710
S.E. of regression	0.027488	Akaike info criterion	-4.348721
Sum squared resid	1.063867	Schwarz criterion	-4.341272
Log likelihood	3067.848	Durbin-Watson stat	2.279866

Dependent Variable: IPC-IPC(-1)
Method: Least Squares
Date: 10/13/00 Time: 15:57
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
IPC-IPC(-1)=C(1)+C(2)*TIME+(C(3)-1)*IPC(-1)+C(4)*(IPC(-1)-IPC(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.000233	0.001044	0.222642	0.8238
C(2)	3.88E-07	1.28E-06	0.303437	0.7616
C(3)	0.089078	0.035854	2.484430	0.0131
C(4)	0.010424	0.026697	0.390469	0.6962
R-squared	0.450226	Mean dependent var		1.30E-05
Adjusted R-squared	0.449053	S.D. dependent var		0.026344
S.E. of regression	0.019554	Akaike info criterion		-5.028401
Sum squared resid	0.537618	Schwarz criterion		-5.013504
Log likelihood	3549.023	Durbin-Watson stat		1.997640

Dependent Variable: IPC-IPC(-1)
Method: Least Squares
Date: 10/13/00 Time: 16:00
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
IPC-IPC(-1)=C(1)+C(2)*(IPC(-1)-IPC(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	1.19E-05	0.000629	0.018988	0.9849
C(2)	-0.444984	0.023881	-18.63364	0.0000
R-squared	0.197818	Mean dependent var		1.30E-05
Adjusted R-squared	0.197248	S.D. dependent var		0.026344
S.E. of regression	0.023604	Akaike info criterion		-4.653410
Sum squared resid	0.784445	Schwarz criterion		-4.645961
Log likelihood	3282.654	Durbin-Watson stat		2.250984

APÉNDICE 2: Resultados de las regresiones de co-integracion

Residuales de CETES e IpyC (modelo no restringido)

Dependent Variable: RESIPCCET-RESIPCCET(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:38
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESIPCCET-RESIPCCET(-1)= C(1)+C(2)*TIME+(C(3)-1)*RESIPCCET(
-1)+C(4)*(RESIPCCET(-1)-RESIPCCET(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.001580	0.001042	-1.515496	0.1299
C(2)	2.19E-06	1.28E-06	1.715363	0.0865
C(3)	0.078268	0.035965	2.176225	0.0297
C(4)	0.015350	0.026689	0.575162	0.5653

R-squared	0.453510	Mean dependent var	1.28E-05
Adjusted R-squared	0.452344	S.D. dependent var	0.026339
S.E. of regression	0.019492	Akaike info criterion	-5.034812
Sum squared resid	0.534183	Schwarz criterion	-5.019914
Log likelihood	3553.542	Durbin-Watson stat	1.998505

Residuales de CETES e IpyC (modelo restringido)

Dependent Variable: RESIPCCET-RESIPCCET(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:44
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESIPCCET-RESIPCCET(-1)= C(1)+C(2)*(RESIPCCET(-1)
-RESIPCCET(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	1.17E-05	0.000628	0.018574	0.9852
C(2)	-0.445411	0.023875	-18.65595	0.0000

R-squared	0.198198	Mean dependent var	1.28E-05
Adjusted R-squared	0.197629	S.D. dependent var	0.026339
S.E. of regression	0.023593	Akaike info criterion	-4.654302
Sum squared resid	0.783745	Schwarz criterion	-4.646854
Log likelihood	3283.283	Durbin-Watson stat	2.251271

Residuales de CETES y GMODELO (modelo no restringido)

Dependent Variable: RESMODCET-RESMODCET(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:50
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESMODCET-RESMODCET(-1)=C(1)+C(2)*TIME+(C(3)-1)
RESMODCET(-1)+C(4)(RESMODCET(-1)-RESMODCET(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.000430	0.001267	0.339429	0.7343
C(2)	-6.59E-07	1.55E-06	-0.424314	0.6714
C(3)	-0.066920	0.037353	-1.791557	0.0734
C(4)	0.078662	0.026563	2.961336	0.0031

R-squared	0.498106	Mean dependent var	-2.12E-05
Adjusted R-squared	0.497036	S.D. dependent var	0.033449
S.E. of regression	0.023722	Akaike info criterion	-4.641984
Sum squared resid	0.791212	Schwarz criterion	-4.627087
Log likelihood	3276.599	Durbin-Watson stat	2.006446

Residuales de CETES y GMODELO (modelo restringido)

Dependent Variable: RESMODCET-RESMODCET(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:52
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESMODCET-RESMODCET(-1)=C(1)+C(2)*(RESMODCET(-1)
-RESMODCET(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-2.40E-05	0.000794	-0.030253	0.9759
C(2)	-0.454751	0.023730	-19.16372	0.0000

R-squared	0.206871	Mean dependent var	-2.12E-05
Adjusted R-squared	0.206308	S.D. dependent var	0.033449
S.E. of regression	0.029800	Akaike info criterion	-4.187223
Sum squared resid	1.250330	Schwarz criterion	-4.179775
Log likelihood	2953.993	Durbin-Watson stat	2.304059

Residuales de IpÿC y TELMEX (modelo no restringido)

Dependent Variable: RESTELIPC-RESTELIPC(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:55
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESTELIPC-RESTELIPC(-1)=C(1)+C(2)*TIME+(C(3)-1)*RESTELIPC(-
1)
+C(4)*(RESTELIPC(-1)-RESTELIPC(-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.000430	0.001165	-0.368719	0.7124
C(2)	6.56E-07	1.43E-06	0.459234	0.6461
C(3)	-0.072728	0.038191	-1.904337	0.0571
C(4)	0.042621	0.026627	1.600638	0.1097

R-squared	0.515330	Mean dependent var	2.06E-05
Adjusted R-squared	0.514296	S.D. dependent var	0.031299
S.E. of regression	0.021813	Akaike info criterion	-4.809807
Sum squared resid	0.668972	Schwarz criterion	-4.794910
Log likelihood	3394.914	Durbin-Watson stat	2.004511

Residuales de IpÿC y TELMEX (modelo restringido)

Dependent Variable: RESTELIPC-RESTELIPC(-1)
Method: Least Squares
Date: 01/22/01 Time: 04:58
Sample(adjusted): 3 1412
Included observations: 1410 after adjusting endpoints
RESTELIPC-RESTELIPC(-1)=C(1)+C(2)*(RESTELIPC(-1)-
RESTELIPC(
-2))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	2.71E-05	0.000725	0.037428	0.9701
C(2)	-0.493406	0.023186	-21.28033	0.0000

R-squared	0.243357	Mean dependent var	2.06E-05
Adjusted R-squared	0.242820	S.D. dependent var	0.031299
S.E. of regression	0.027235	Akaike info criterion	-4.367221
Sum squared resid	1.044366	Schwarz criterion	-4.359772
Log likelihood	3080.891	Durbin-Watson stat	2.315979