UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENUNCIADOS INDECIDIBLES EN LA ARITMETICA DE PEANO.

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

EDUARDO ROQUE HARO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis:
M. en C. Carlos Torres Alcaraz

Universidad Nacional
Autónoma de
México

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Enunciados indecidibles en la Aritmética de Peano"

realizado por Eduardo Roque Haro

con número de cuenta 9023381 - 8, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Carlos Torres Alcaraz
Propietario	M. en C. José Alfredo Amor Montaño
Propietario	M. en C. Fernando René Martínez Ortiz
Suplente	M. en C. Favio Ezequiel Miranda Perea
Suplente	Mat. Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Héxtor Méndez Lango Héctor Méndez L.

Indice General

INTRODUCCION

El propósito del presente trabajo es mostrar algunas de las investigaciones más importantes que sobre la indecidibilidad aritmética se han realizado a fines del siglo XX. Estas investigaciones constituyen la primera aportación hecha en el campo después de los trabajos de Gödel y muestran que las capacidades deductivas de los sistemas formales de primer orden tienen límites más estrechos que los conocidos anteriormente; esto es, se han encontrado enunciados indecidibles de una naturaleza muy distinta a los presentados por Gödel[1].

La importancia de estos resultados radica en que los nuevos indecidibles no son traducciones aritméticas de propiedades sintácticas de los propios sistemas formales; por el contrario, estos enunciados pueden ser formulados recurriendo sólo a algunas nociones básicas de aritmética combinatoria. En otras palabras, los indecidibles de Gödel, a diferencia de los nuevos indecidibles, no representan propiedades de los números naturales que resulten relevantes desde un punto de vista matemático. Para ilustrar esta diferencia cabe señalar que uno de los nuevos enunciados indecidibles, el enunciado PH[2], es una variante del Teorema de Ramsey, el cual es un resultado fundamental para la aritmética combinatoria infinita.

CAPITULO I

En el capítulo I demostramos la indecidibilidad del enunciado PH siguiendo la prueba original de Jeff Paris y Leo Harrington. La idea básica de la prueba consiste en mostrar que dentro del sistema formal de la Aritmética de Peano (PA) se puede derivar la fórmula PH→Con(PA). Por el Teorema de Gödel sabemos que PA no puede probar su propia consistencia y por lo tanto el enunciado PH no puede ser derivado a partir de PA; por otro lado se demuestra que PH es verdadero en la interpretación natural de PA, concluyendo así que ¬PH tampoco es derivable en PA.

Para probar que PH→Con(PA) es derivable en PA se define una teoría (que llamaremos T) para la cual se cumple que las fórmulas PH→Con(T) y Con(T)→Con(PA) son teoremas de PA. La demostración de la derivalibidad de PH→ $Con\,(T)$ se hace en dos partes. La primera consiste en construir un modelo para cada subconjunto finito de enunciados de T. La segunda parte muestra cómo esta prueba semántica de consistencia puede ser formalizada en PA.

La derivabilidad de Con(T) →Con(PA) se demuestra de manera análoga, es decir, exhibiendo una prueba semántica que es formalizable en PA. La prueba semántica muestra que dado un modelo de T , una parte de éste (un segmento inicial) es modelo de PA.

[1] Es importante mencionar que al igual que los teoremas de Gödel, los resultados que presentaremos se aplican solamente a sistemas de primer orden. De hecho, los enunciados indecidibles que analizaremos son derivables en sistemas de segundo orden.

[2] de Paris-Harrington

Definiciones de Verdad y Pruebas de Consistencia

Dado un conjunto de enunciados Γ del lenguaje de PA decimos que la fórmula Tr_Γ es una definición de verdad de Γ si el enunciado $Tr_\Gamma([A]) \Leftrightarrow A$ es derivable en PA para cada fórmula A de Γ. Una forma de probar la PA-derivabilidad de enunciados que aritmetizan la consistencia de una teoría S es exhibiendo la existencia de una definición de verdad que incluya a los enunciados de S.

La manera en que las definiciones de verdad permiten probar la consistencia de alguna teoría $S \subset T$ se explica observando que la fórmula $\forall x(\mathrm{Pr}_S(x) \rightarrow Tr_\Gamma(x))$ es derivable en PA. Para conlcluir basta observar que si ϕ es un enunciado de Γ tal que $\neg Tr_\Gamma([\phi])$ es derivable en PA, entonces se tiene que $PA \vdash \neg \mathrm{Pr}_S([\phi])$. Como ejemplos de conjuntos de enunciados para los cuales existen definiciones de verdad tenemos a los conjuntos de $\Delta_n, \Sigma_n, \Pi_n$, etc.

Otro tipo de definiciones de verdad es el que se puede dar para un modelo particular M; en este caso la definición de verdad Tr_M es una fórmula que representa al conjunto de los números de Gödel de los enunciados verdaderos en M. En la formalización de $Con(T) \rightarrow Con(PA)$ recurriremos a este tipo de definiciones de verdad.

La Teoría T

Esta teoría se expresa en el lenguaje de PA más una cantidad infinita numerable de símbolos de constante $c_1, c_2 ...$ La teoría T incluye a los axiomas de PA que definen las funciones suma, producto y sucesor y a la relación $<$; también incluye el esquema de inducción sólo para fórmulas Δ_0. Respecto a las nuevas constantes se introducen axiomas que garantizan que dado cualquier modelo de T, la subestructura delimitada por estas constantes forma un modelo para PA.

PH $\rightarrow$ CON(T)

La formalización de la prueba de consistencia de la teoría T se explica básicamente por el hecho de que limita el esquema de inducción a fórmulas Δ_0, lo cual permite dar una definición de verdad a todos sus axiomas. El enunciado PH es usado para demostrar en PA que los subconjuntos finitos de axiomas de T que incluyan alguno de los nuevos axiomas tienen modelo.

CAPITULO II

En el capìtulo II daremos otra prueba de la inderivabilidad del enunciado PH en PA. De hecho mostraremos un resultado màs general que permite probar la inderivabilidad de enunciados Σ_1 bajo ciertas condiciones.

Este resultado consiste en mostrar que si un enunciado ϕ de la forma $\forall y \exists x R(y,x)$ (donde R es una relaciòn primitiva recursiva) es $PA-derivable$ entonces la funciòn σ_ϕ , definida como el mìnimo n tal que $R(m,n)$, es dominada por alguna funciòn de Hardy. Nos referiremos a esta proposiciòn como el resultado principal. Para probar la *inderivabilidad de un enunciado* ϕ *de esta forma*, por ejemplo el enunciado PH, basta probar que la funciòn σ_ϕ no es dominada por ninguna funciòn de Hardy. Si ademàs se sabe que el enunciado considerado es verdadero en la interpretaciòn natural de PA se concluye su indecidibilidad. Para la demostración del resultado principal recurriremos a la teorìa desarrollada por Gentzen en su prueba de la consistencia de la arirtmètica. Por el momento basta mencionar que esta prueba se basa en la asignación de ordinales menores que ε_0 a las pruebas de PA de manera que el ordinal asignado es un reflejo de la estructura de la prueba.[3]

De manera natural surge la pregunta sobre cómo la derivabilidad en PA de una fórmula ϕ (perteneciente a la clase Σ_1) se vincula con el crecimiento de la función σ_ϕ. Para explicar esto veamos cómo se da esta relación en sistemas más sencillos, por ejemplo el sistema CA, el cual es equivalente a PA sin inducciones. Consideramos una fórmula ϕ de la forma $\exists x R(x,a)$[4] y una prueba P de ϕ en CA. Para cada m llamamos $P(m)$ a la prueba que se obtiene al sustituir a por $\overline{m}$. Debe notarse que el número de Gödel p_m de $P(m)$ se puede calcular recursivamente a partir de m. Es decir, existe una función primitiva recursiva h tal que $h(m) = p_m$. Una adaptación del Teorema de Eliminación del Corte hace ver que $P(m)$ se puede transformar en una prueba $P'(m)$ que no contenga *cortes esenciales. No es difícil probar que bajo estas condiciones la prueba* $P'(m)$ de $\exists x R(\overline{m}, x)$ debe contener una fórmula $R(\overline{m}, \overline{n})$ para algún n. En este caso el número de Gödel de $P'(m)$ es mayor que n y por tanto mayor que $\sigma_\phi(m)$. Además la construcción de $P'(m)$ es de tal manera que el número de Gödel p' de $P(m)$se calcula recursivamente a partir del número de Gödel de $P(m)$. Llamemos f a la función primitiva recursiva para la cual $f(p) = p'$. De los resultados antes mencionados se infiere que la función σ_ϕ es dominada por una función primitiva recursiva: $f(h)$.

En el caso de PA recurriremos a la noción de funciónes $\alpha - recursivas$ para ordinales α menores que ε_0, las cuales extienden la noción de funciones primitivas recursivas a partir del tipo de orden inducido a los naturales por α.Veremos que la función σ_ϕ es $\alpha - recursiva$, donde α es el ordinal de la prueba P. A partir de la expresión de σ_ϕ como una función $\alpha - recursiva$ se puede probar que σ_ϕ es dominada por alguna función de Hardy. En adelante consideramos $P, P(m), h$ y $P'(m)$ definidas de manera análoga para el sistema PA.

Por lo expuesto para el sistema CA el lector se habrá dado cuenta que el punto clave en el caso de PA radica en dar un procedimiento que permita transformar la prueba $P(m)$ de $\exists x R(\overline{m}, x)$ en una prueba $P'(m)$ que no contenga inducciones. Adaptando el metodo de reducciòn desarrollado por Gentzen se obtiene tal procedimiento. Al igual que en el caso anterior $\sigma_\phi(m)$ es menor que el número de Gödel de $P'(m)$ y por tanto el problema se reduce a analizar el crecimiento del número de Gödel de $P'(m)$ respecto al de $P(m)$. Es claro que esto último depende de las inducciones y cortes esenciales que aparezcan

[3]Con esto queremos decir que si una prueba P es obtenida a partir de una prueba Q por la aplicación de una regla de inferencia l, entonces el ordinal de P depende del ordinal de Q y de l.

[4]En el cálculo de secuentes sucede que si la fórmula $\forall x \exists y R(x,y)$ es derivable, necesariamente tuvo que ser inferida a partir de $\exists y R(a,x)$ para alguna variable libre a.

en la prueba original P. La relación entre el ordinal asignado a P y las reglas de inferencia usadas en P nos permitirá demostrar que si $p = h(m)$ es el número de Gödel de $P(m)$ y p' el número de Gödel de $P'(m)$ entonces hay una función $\alpha - recursiva$ f tal que $p' = f(p)$. De esta manera concluimos que $\sigma_\phi(m) \leq f(h(m))$.

Siguiendo este bosquejo de la demostración hemos dividido el capítulo en cuatro partes de la siguiente manera:

1. Definimos las funciones $\alpha - recursivas$ y probamos que σ_ϕ es una función $\alpha - recursiva$.
2. Definimos las funciones de Hardy y probamos sus propiedades màs importantes.
3. Prueba del resultado principal.
4. Como aplicaciones del resultado principal demostramos la inderivabilidad del enunciado PH y del teorema de Goodstein. Esto es, probamos que las funciones σ_ϕ correspondientes a estos enunciados no son dominadas por ninguna funciòn de Hardy.

CAPITULO I

1.1 El enunciado Paris-Harrington

En esta sección presentamos las definiciones de teoría combinatoria necesarias para formular el enunciado PH ; asimismo mostramos que PH se puede expresar en PA. Finalmente presentamos una prueba de que PH es verdadero en la interpretación natural de PA. Esta prueba se hace a partir del Teorema de Ramsey Infinito y por tanto no es formalizable en PA.

Consideraremos a cada número natural como el conjunto de naturales menores que él. De esta manera un natural puede ser el dominio o la imagen de alguna función. Denotamos $[A]^e$ al conjunto de subconjuntos de A de tamaño e.

Definición

(i) Dada un conjunto A decimos que P es una partición de A en r partes si P es una función suprareyectiva con dominio A y rango r. Para cualquier subconjunto $B \subset A$ usamos la notación $P(B)$ para denotar a la imagen de B bajo P.

(ii) Dado un conjunto A y una partición P de $[A]^e$ en r decimos que un subconjunto $H \subset A$ es homogéneo para P si $P([H]^e) = \{i\}$ para algún $i < r$.

El Teorema de Ramsey afirma que para cada partición P de $[\omega]^e$ en r partes hay un subconjunto infinito $H \subset \omega$ homogéneo para P. La versión finita de este teorema afirma que dados naturales r, k y e existe M tal que para toda partición en la prueba original P. La relación entre el ordinal asignado a P y las reglas de inferencia usadas en P nos permitirá demostrar que si $p = h(m)$ es el número de Gödel de $P(m)$ y p' el número de Gödel de $P'(m)$ entonces hay una función $\alpha - recursiva$ f tal que $p' = f(p)$. De esta manera concluimos que $\sigma_\phi(m) \leq f(h(m))$.

Siguiendo este bosquejo de la demostración hemos dividido el capítulo en cuatro partes de la siguiente manera:

1. Definimos las funciones $\alpha - recursivas$ y probamos que σ_ϕ es una función $\alpha - recursiva$.
2. Definimos las funciones de Hardy y probamos sus propiedades màs importantes.
3. Prueba del resultado principal.
4. Como aplicaciones del resultado principal demostramos la inderivabilidad del enunciado PH y del teorema de Goodstein. Esto es, probamos que las funciones σ_ϕ correspondientes a estos enunciados no son dominadas por ninguna funciòn de Hardy.

CAPITULO I

1.1 El enunciado Paris-Harrington

En esta sección presentamos las definiciones de teoría combinatoria necesarias para formular el enunciado PH ; asimismo mostramos que PH se puede expresar en PA. Finalmente presentamos una prueba de que PH es verdadero en la interpretación natural de PA. Esta prueba se hace a partir del Teorema de Ramsey Infinito y por tanto no es formalizable en PA.

Consideraremos a cada número natural como el conjunto de naturales menores que él. De esta manera un natural puede ser el dominio o la imagen de alguna función. Denotamos $[A]^e$ al conjunto de subconjuntos de A de tamaño e.

Definición

(i) Dada un conjunto A decimos que P es una partición de A en r partes si P es una función suprareyectiva con dominio A y rango r. Para cualquier subconjunto $B \subset A$ usamos la notación $P(B)$ para denotar a la imagen de B bajo P.

(ii) Dado un conjunto A y una partición P de $[A]^e$ en r decimos que un subconjunto $H \subset A$ es homogéneo para P si $P([H]^e) = \{i\}$ para algún $i < r$.

El Teorema de Ramsey afirma que para cada partición P de $[\omega]^e$ en r partes hay un subconjunto infinito $H \subset \omega$ homogéneo para P. La versión finita de este teorema afirma que dados naturales r, k y e existe M tal que para toda partición

P:$[M]^e \to r$ existe un subconjunto $H \subset M$ homogéneo para P y de cardinalidad mayor o igual que k. El enunciado PH es una variante de la última proposición.

Teorema (*Ramsey*). *Sean e, r, naturales positivos. Para cada partición $P : [\omega]^e \to r$ existe un conjunto infinito $H \subset \omega$ homogéneo para P.*

PRUEBA. Primero lo probaremos para $r = 2$ por inducción sobre e. Para $e = 1$ es obvio a partir del principio de las casillas.

Supongamos el resultado cierto para e. Para cualquier partición $F : [\omega]^{e+1} \to 2$ definimos por recursión una sucesión $a_0, a_1, ...$ de elementos de ω y una sucesión $c_0, c_1, ...$ de subconjuntos de ω de la siguiente manera:

a_0 es cualquier elemento de ω $\qquad\qquad c_0 = \omega$

Suponiendo definidos c_i y a_i consideramos la partición $F_i : [c_i - \{a_i\}]^e \to 2$ tal que

$$F_i(b_1, ..., b_e) = 0 \quad \text{si} \quad F(a_i, b_1, ..., b_e) = 0$$
$$F_i(b_1, ..., b_e) = 1 \quad \text{si} \quad F(a_i, b_1, ..., b_e) = 1$$

Por la hipótesis inductiva existe un subconjunto infinito H_i homogéneo para F_i; definimos $c_{i+1} = H_i$ y a_{i+1} cualquier elemento de c_{i+1}[5].

Dada una partición $P : [G]^n \to m$ y un subconjunto homogéneo $H \subset G$ para P usamos la notación $P(H)$ para denotar el valor que toman los elementos de $[H]^n$ bajo P.

Nótese que alguno de los siguientes conjuntos tiene que ser infinito

$$A_0 = \{a_i : F_i(c_i - \{a_i\}) = 0\} \qquad\qquad A_1 = \{a_i : F_i(c_i - \{a_i\}) = 1\}.$$

Como ambos conjuntos son homogéneos para F, alguno de los dos es el conjunto buscado.

Consideramos una partición $F : [\omega]^e \to r + 1$ suponiendo el resultado para r. Notamos que $[\omega]^e = (A_0 \cup ... \cup A_{r-1}) \cup A_r$. De la demostración para $r = 2$ se sigue que existe un subconjunto infinito $B \subseteq \omega$ tal que $[B]^e \subseteq (A_0 \cup ... \cup A_{r-1})$ ó bien $[B]^e \subseteq A_r$. En el primer caso la hipótesis inductiva asegura que existe un conjunto infinito $C \subseteq B$ tal que $[C]^e \subseteq A_i$ p.a $i < r$. En el segundo caso B es el conjunto buscado.

$\boxdot$

Definición

(i) Un conjunto H de números naturales es *relativamente grande* si card(H)$\geq$min(H).
Dados los números naturales e, r, k y M usamos la notación

$$M \to *(k)^e_r$$

cuando se tiene que para cada partición $P : [M]^e \to r$ existe un $H \subset M$ relativamente grande , homogéneo para P y de cardinalidad mayor o igual que k.

Teorema.(*Enunciado PH*) Dados naturales positivos e, r, k, existe un natural M tal que

[5] Para aplicar la hipótesis inductiva se debe extender la función F_i de manera que su dominio sea ω.

$$M \to *(k)^e_r .$$

Dem. Fijemos e, r, k, y supongamos que no existe tal M. Decimos que P es un contraejemplo para M, si P es una partición de $[M]^e$ en r partes y que no tiene subconjuntos relativamente grandes homogéneos de cardinalidad al menos k. Dados dos contraejemplos P y P' de M y M' respectivamente, definimos un orden de la siguiente manera: $P < P'$ si y sólo si $M < M'$ y P es la restricción de P' a $[M]^e$. De esta manera vemos que el conjunto de contraejemplos forma un árbol infinito de ramas finitas. El lema de König garantiza la existencia de una partición $P : [\omega]^e \to r$, tal que para cada M la restricción de P a $[M]^e$ es un contraejemplo para M.

Por el Teorema de Ramsey Infinito existe un subconjunto infinito $H \subset \omega$ homogéneo para P , $H = \{h_1, h_2, ..., h_i, ...\}$, $h_i < h_{i+1}$, p.t $i \geq 1$. Sea $m = \max(\min(H), k)$; es claro que $h_m \cap H$ es un subconjunto relativamente grande y homogéneo para $P \restriction [h_m]^e$ de cardinalidad al menos k.

$\boxdot$

Debe notarse que el Teorema de Ramsey Infinito no es formalizable en PA, y por lo tanto la prueba anterior no se puede llevar a cabo en PA.

El enunciado PH es expresable en PA

Primero notemos que cualquier función unaria finita puede ser representada en PA por el número de Gödel para el cual el exponente del enésimo primo es el valor de n. Así por ejemplo, la función $\{(1,3), (2,5)\,(3,4)\}$ es codificada por el número $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^4$. Para poder expresar el enunciado PH necesitamos representar funciones de cualquier aridad. En este caso usamos aquellos números de Gödel cuyos exponentes sean a su vez números de Gödel. Para funciones con dominio $[m]^n$ usamos números de Gödel de longitud igual a las combinaciones de m en n y cuyos exponentes sean números de Gödel con longitud $n+1$. Hacemos esto para que los primeros n elementos representen el argumento de la partición y el último sea el valor de la misma. Por ejemplo para la función $\{(\{1,2\},3), (\{1,3\},1), (\{2,3\},4)\}$ el código correspondiente es el número $2^{2^1 3^2 5^3} 3^{2^1 3^3 5^1} 5^{2^2 3^3 5^4}$.

Para dar la fórmula que represente los números de Gödel que codifican particiones necesitamos las siguientes funciones y relaciones:

El número de combinaciones de n en m es denotado por $\left(\frac{n}{m}\right)$

Dado un número de Gödel $m = 2^{x_0} \cdot 3^{x_1} \cdot ... \cdot p_{n-1}^{x_{n-1}}$, $m\,[i]$ denotará al número $2^{x_0} \cdot ... \cdot p_{i-1}^{x_{i-1}}$.

El iésimo exponente de m, x_i, es denotado m_i

Sq(x) expresa "x es un número de Gödel".

lg(x) expresa la longitud de x.

Sq$^*(x, y)$ expresa "x es un número de Gödel cuyos exponentes están ordenados hasta y", es decir que si $i, j \leq y$, $p_i < p_j$ entonces $x_i < x_j$. (Obviamente $y \leq \lg(x)$).

Ex(x,y) expresa x es un exponente de y. (Es decir $\exists i \leq \lg(y)\ (\ x = y_i)\ )$

Es conocido por los resultados de representabilidad en lógica de primer orden que todas estas funciones y relaciones son representables en PA.

Así que para representar números de Gödel que codifiquen particiones P : $[M]^e \longrightarrow r$ la fórmula correspondiente, denotada $Fn\,(x,M,e,r)$, es la siguiente:

$$Sq\,(x) \wedge \lg(x) = \left(\tfrac{e}{M}\right) \wedge \forall y(Ex\,(y,x) \longrightarrow (Sq^*\,(y,e) \wedge \lg(y) = e+1 \wedge$$
$$\forall i \leq e\,(y_i \leq M) \wedge y_{e+1} \leq r)) \wedge$$
$$\forall w \forall z\,(\exists j\,(x_j = w) \wedge Ex\,(z,x) \wedge w\,[e] = z\,[e] \rightarrow z = x_j)$$

Debe notarse que esta última parte ha sido incluida para garantizar que x es función y al mismo tiempo que cubre el dominio deseado.

Para referirnos a conjuntos homogéneos de cierta cardinalidad necesitamos la siguiente fórmula Sq(x,y,z). La fórmula Sq(x,y,z) expresa x es un número de Gödel de longitud y donde los exponentes son distintos entre sí y menores que z. Así por ejemplo para el número $m = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^6$ tenemos que se cumple Sq$(m,4,6)$.

Ahora ya podemos expresar el Teorema de Ramsey finito con la siguiente fórmula :

$$\forall k \forall r \forall e \exists M \forall x(Fn\,(x,M,e,r) \rightarrow \exists y \exists c(Sq\,(y,k,M) \wedge c \leq r \wedge$$
$$\forall z\,(Ex\,(z,x) \wedge \forall w(\exists i \leq e(z_i = w) \rightarrow Ex\,(w,y)) \rightarrow z_{e+1} = c)))$$

1.2 PH$\rightarrow$PCT

En esta sección presentamos el principio combinatorio T (PCT), el cual servirá de enlace para demostrar la fórmula $PH \rightarrow Con\,(T)$; es decir que las fórmulas $PH \rightarrow PCT$ y $PCT \rightarrow Con\,(T)$ son derivables en PA. La prueba de la fórmula $PCT \rightarrow Con\,(T)$ se presenta en la sección 1.4.

Lema 1.1.1 *Dadas particiones P_0 y P_1 de $[M]^e$ en r y s partes, existe una partición P de $[M]^e$ en $r \cdot s$ partes tal que para todo $H \subset M$, H es homogéneo para P si y sólo si H es homogéneo para P_0 y P_1.*

`Demostración.` Sea $P(a) = (P_0\,(a), P_1\,(a))$. Es claro que por la definición de par ordenado se cumple que los conjuntos homogéneos de P son exactamnente aquellos que también los sean para P_0 y P_1.

Lema 1.2.2. *Un conjunto $H \subset M$ es homogéneo para una partición P de $[M]^e$ si y sólo si todo subconjunto de H de cardinalidad $e+1$ es homogéneo para P.*

`Demostración.`

$\Rightarrow$) Es trivial.

$\Leftarrow$) Sean $a = a_1, ..., a_e$ al conjunto de los primeros e elementos de H. Escogemos $b = b_1, ..., b_e$ de manera tal que $P(a) \neq P(b)$ y que la suma $b^+ = b_1 + ... + b_e$ sea mínima.Si i es el menor índice para el cual $a_i < b_i$, entonces $A = \{a_1, ..., a_i, b_i, ..., b_e\}$ es de cardinalidad $e+1$ y sin embargo no es homogéneo por lo siguiente. Sea $c = a_1, ...a_i, b_{i+1}, ..., b_e$. Nótese que tanto c como b pertenecen a $[A]^e$ y además $c^+ < b^+$. La minimalidad de b^+ implica que $P(c) = P(a) \neq P(b)$.

Definimos $\sqrt{r}$ como el primer número natural s tal que $s^2 \geq r$.Nótese que para todo $r \geq 7$ se tiene que $r \geq 1 + 2\sqrt{r}$.

Lema 1.2.3. *Dada una partición $P : [M]^e \to r$ existe una partición P':$[M]^{e+1} \to 1 + 2\sqrt{r}$ tal que para todo $H \subset M$ de cardinalidad mayor que e+1, H es homogéneo si y sólo si H es homogéneo para P'.*

`Demostración.` Sea $s = \sqrt{r}$. Definimos funciones Q y R de $[M]^e$ en s tales que $P(a) = s \cdot Q(a) + R(a)$. Dado b en $[M]^{e+1}$, $b = b_1, ..., b_{e+1}$, sea $b' = b_1, ..., b_e$. Ahora definimos P' de la siguiente manera:

$$P'(b) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si b es homogéneo para P} \\ \text{(0,R(b'))} & \text{si b es homogéneo para Q pero no para P} \\ \text{(1,Q(b'))} & \text{en cualquier otro caso} \end{array}$$

Sea H homogéneo para P' y de cardinalidad mayor que $e+1$ y sea c el conjunto de los primeros $e+1$ elementos de H. Por el lema anterior basta demostrar que $P'(c) = 0$ para verificar que H es homogéneo para P. Supongamos que $P'(c) = (1, i)$. Si a en $[c]^e$ entonces existe b en $[H]^{e+1}$ tal que $b' = a$. Como H es homogéneo para P' tenemos que $P'(b) = (1, i)$ y por lo tanto $Q(a) = i$. De esta manera c es homogéneo para Q, contradiciendo así la definición de P'. Ahora supongamos que $P'(c) = (0, j)$ y entonces c es homogéneo para Q , digamos $Q(a) = i$ para todo a en $[c]^e$. Además, repitiendo el razonamiento anterior se concluye que $R(a) = j$ para todo a en $[c]^e$. Pero entonces $P(a) = s \cdot i + j$ para todo a en $[c]^e$ y por lo tanto c es homogéneo para P , contradiciendo nuevamente la definición de P'.

Lema 1.2.4. *Dadas n particiones $P_i : [M]^{e_i} \to r_i$ $(i \leq n)$ sea e= max e_i y r= $\prod_i \max(r_i, 7)$. Existe una partición P :$[M]^e \to r$ tal que para todo $H \subset M$ de cardinalidad mayor que e, H es homogéneo para P si y sólo si H es homogéneo para todos las P_i.*

`Demostración.` Dada cualquier $P_i : [M]^{e_i} \to r_i$ con e_i menor que e, por el lema anterior se puede obtener una P_i' :$[M]^{e_i+1} \to \max(r_i, 7)$ que cumple con la simultaneidad de conjuntos homogéneos. Iterando este proceso se encuentra una $P_i^* : [M]^e \to \max(r_i, 7)$. Por el Lema 1 se pueden combinar todas las P_i^* para definir una $P : [M]^e \to \prod_i \max(r_i, 7)$ cuyos conjuntos homogéneos (de cardinalidad mayor que e) son exactamente aquellos que son homogéneos para todas las P_i.

Lema 1.2. 5. *Para cada p existe una partición $Q : [M]^1 \to p+1$ tal que si X es homogéneo para Q y de cardinalidad mayor que uno , entonces $min(X) \geq p$.*

`Demostración.` Sea $Q(a) = \min(a, p)$. Supongamos H homogéneo para Q y de cardinalidad al menos dos. Sea $a = \min(X)$. Supongamos $a < p$, entonces $Q(a) = a$. Sin embargo para cualquier otro b en H, $Q(b) = \min(b, p) > a = Q(a)$.

Definición. Para cada función g sea g^x la composición de g consigo misma x veces. Definimos ahora una familia numerable de funciones de la siguiente manera:

$$f_0(x) = x + 2$$
$$f_{n+1}(x) = (f_n)^x(2).$$

Nótese que cada f_n es estrictamente creciente. El lector familiarizado con la función de Ackerman se dará cuenta que cada f_n es primitiva recursiva y que cualquier función primitiva recursiva es dominada por alguna f_n.

Lema 1.2.6. *Sea M un natural dado. Para cada m existe una partición $R : [M]^2 \to r$ (donde r depende sólo de m) tal que si $X \subset M$ es relativamente grande y homogéneo para R y de cardinalidad mayor que tres, entonces para todo x,y en X, $x < y$ implica que $f_m(x) < y$. Como r sólo depende de m, usamos la notación $r = \delta(m)$.*

`Demostración.`Para cada $i \leq m$ definimos una partición $P_i : [M]^2 \to 2$ tal que $P(x, y) = 0$ si y sólo si $f_i(x) < y$. Sea Q definida como en el lema 5 para $p = 2$. Aplicando el proceso descrito en el lema 4 a las P_i y a Q obtenemos una $R : [M]^2 \to r$. Sea X relativamente grande y homogéneo para R, $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Por inducción sobre $i \leq m$ se prueba que $f_i(x_1) < x_n$ y por la homogeneidad de X se concluye que $f_i(x) < y$ para cualquier x, y en X.

Ahora demostramos la última afirmación.

(i) Para el paso base notamos que $f_0(x_1) = x_1 + 2 < x_n$ puesto que card(X) > 3.

(ii) Supongamos $f_i(x_1) < x_n$; por la homogeneidad de X, $f_i(x_1) < x_2$ y $f_i(x_2) < x_3$, de donde tenemos que $f_i(f_i(x_1)) < f_i(x_2) < x_3$; a su vez $f_i(x_3) < x_4$, i.e. $f_i^3(x_1) < x_4$. Induciendo este argumento se observa que $f_i^m(x_1) < x_{m+1}$ para toda $m < n$.

Como X es relativamente grande $x_1 < card(X) = n$. De la observación anterior se sigue $f_{i+1}(x_1) = f_i^{x_1}(2) \leq f_i^{x_1}(x_1) < x_{x_1+1} \leq x_n$. (En la primera desigualdad estamos suponiendo $x_1 \geq 2$, lo cual podemos hacer por la homogeneidad de Q)

Lema 1.2.7. *Sea P:$[M]^e \to s$ $(e \geq 2)$ .Para todo m existe una partición $P^* : [M]^e \to s'$,(en la cual s' sólo depende de e, s y m) tal que si hay un $Y \subset M$ relativamente grande y homogéneo para P^* de cardinalidad mayor que e, entonces hay un $X \subset M$ tal que X es homogéneo para P y cuya cardinalidad es mayor o igual que e+1 y mayor que $f_m(\min(X))$. Como s' sólo depende de m, e y s, usamos la notación $s' = \pi(e, s, m)$.*

Demostración. Sea $h(a)$ el máximo natural x tal que $f_m(x) \leq a$. Para todo $a = a_1, ..., a_2$, sea $h_a = h(a_1), ...h(a_e)$. Sea $S(a) = P(h_a)$ si h_a es una $e-$*neada*, es decir $h(a_1) < h(a_2) < ... < h(a_e)$; $S(a) = s$ en cualquier otro caso. Así que S es una partición de $[M]^e$ en $s+1$. Esta S ha sido definida para garantizar la homogeneidad del X buscado. Sea R obtenida de acuerdo al lema anterior para m .

Aplicamos el lema 4 a R y S para definir la P^* buscada, $P^*[M]^e \to s'$. Dado Y$\subset M$ relativamente grande y homogéneo para P^*, el conjunto X deseado es la imagen de Y bajo h.

Primero veamos que h es inyectiva sobre Y. Dados a y b en Y supongamos $a < b$. Y es también homogéneo para R y por lo tanto $f_m(a) < b$; de ahí se concluye que $h(b) \geq a > h(a)$. Así que h es inyectiva sobre Y y entonces card(X) =card(Y) $\geq \min(Y)$. Además por la definición de h se tiene que $f_m(\min(X)) \leq \min(Y)$ y por lo tanto card(X) $\geq f_m(\min(X))$.

Sólo resta mostrar que X es homogéneo para P. Sean a y b en $[X]^e$, $a = h_{a'}$, $b = h_{b'}$, p.a a', b' en $[Y]^e$. Como Y es homogéneo para P* también lo es para S y entonces $P(a) = P(h_{a'}) = S(a') = S(b') = P(h_{b'}) = P(b)$.

Principio combinatorio T. Dados naturales positivos e, k, r existe un M tal que para toda familia $(P_\ell; \ell < 2^M)$ de particiones $P_\ell : [M]^e \to r$, existe un $X \subset M$ de cardinalidad al menos k para el cual :

(II) si $a, b \in X$ y $a < b$,entonces $a^2 < b$

(III) si $a \in X$ y $\ell < 2^a$, entonces $X \sim (a+1)$ es homogéneo para P_ℓ, donde $X \sim (a+1) = \{x \in X : x > a\}$.

Proposición. *El enunciado PH implica al principio combintorio T.*

Demostración. Dados e, k y r debemos encontrar un M que satisfaga las condiciones de T. Recordemos que $f_3(y) \geq g^{(y)}(2)$, donde $g(x) = 2^x$. Así que existe un natural p tal que si $a \geq p$,entonces $f_3(a) > \max(\ k,\ e \cdot r^{(2^a)})$. Sean $e' = 2e+1$, $s = 7 \cdot p + 1 \cdot \delta(2)$ y $s' = \pi(e', s, 3)$. Encuéntrese un M para el cual $M \to_* [e'+1]^{e'}_{s'}$. Dada cualquier familia $P_\ell : [M]^e \to r$ para $\ell < M^n$ definimos una partición $S : [M]^{e'} \to 2$ de la siguiente manera: $S(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ si $P_\ell(\mathbf{b}) = P_\ell(\mathbf{c})$ para todo $\ell < 2^a$; $S(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ en caso contrario. Sea Q obtenida de acuerdo al lema 5 para p y sea R de acuerdo al lema 6 para $m = 2$. Ahora aplicamos la construcción del lema 4 para definir una P a partir de S, Q

y R. Finalmente usamos el lema 7 para construir una P^* a partir de esta P y para $m = 3$. Nótese que P es una partición de $[M]^{e'}$ en s y por tanto P^* es una partición de $[M]^{e'}$ en s'.

Por la elección de M se sabe que hay un conjunto $H \subset M$ que es homogéneo para P^* y de cardinalidad mayor que e, y entonces hay un $X \subset M$ homogéneo para P y de cardinalidad mayor que e y mayor que $f_3(\min(X))$. La construcción de P garantiza que X es también homogéneo para S, Q y R. De la homogeneidad para R se desprende que $f_2(x) < y$ para x, y en X, $x < y$; y entonces $x^2 < y$ $(x^2 < f_2(x))$. Así que se satisface $T(ii)$.

La homogeneidad de X para Q implica que $\min(X) \geq p$ y por lo tanto $f_3(\min(X)) \geq f_3(p)$. Además $card(X) > f_3(\min(X))$, i.e. $\text{card}(X) > f_3(p)$.

Sea $a = \min(X)$, basta probar que existen $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ en $[X]^e$ ajenos y tales que $S(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, es decir que $P_\xi(\mathbf{b}) = P_\xi(\mathbf{c})$ para todo $\xi < a^n$; la homogeneidad de S garantiza que sucede lo mismo para cualquier par de $e - adas$ de X.

A cada $\mathbf{y}$ en $[X]^e$ le asociamos la secuencia $v_{\mathbf{y}} = (y_0, ..., y_{a^n-1})$ donde $y_i = P_i(y)$, para cada $i < 2^a$. Puesto que el contradominio de cada P_i es r, el número de secuencias distintas de este tipo es $r^{(2^a)}$. Por otro lado tenemos que en $[X]^e$ hay más de $r^{(2^a)}$ $e - adas$ ajenas, así que existen $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in [X]^e$ tales que $v_{\mathbf{b}} = v_{\mathbf{c}}$.

1.3 Con(T) implica Con(PA)

En lo que resta de este capítulo identificaremos subconjuntos finitos de ω con sucesiones crecientes finitas de ω y usaremos las letras $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ para denotarlos. Los símbolos $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ denotarán conjuntos de variables, $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$; i, r, s, p denotarán números naturales. La expresión $i < \mathbf{k}$, significará que cada uno de los elementos de $\mathbf{k}$ es mayor que i.

Una fórmula limitada ψ es una fórmula en la cual todas las variables cuantificadas aparecen acotadas, es decir (suponiendo ψ en forma normal prenex) ψ es de la forma $\exists x_1 < z_1 ... \forall x_r < z_r\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con φ libre de cuantificadores. A una fórmula de este tipo la denotaremos $\psi(\mathbf{y}; \mathbf{z})$, donde $\mathbf{y}$ es el conjunto de variables libres de ψ y $\mathbf{z}$ representa al conjunto de cotas de las variables cuantificadas.

La teoría T está expresada en el lenguaje de PA más una cantidad infinita de nuevos símbolos de constante $c_0, c_1, ...$.

Los axiomas de T son los siguientes:

(i) Las definiciones recursivas de $+$, $\times$, $\leqslant$, y los axiomas de inducción sólo para fórmulas limitadas.

(ii) Para cada $i = 0, 1, ...,$ el axioma $(c_i)^2 < c_{i+1}$.

(iii) Para cada subconjunto finito $\mathbf{k} = k_1, ..., k_r$ de ω, sea $c(\mathbf{k}) = c_{k_1}, ..., c_{k_r}$. Para cada $i < \mathbf{k}, \mathbf{k}'$ y cada fórmula limitada $\psi(\mathbf{y}; \mathbf{z})$ (donde k, k' y $\mathbf{z}$ tienen la misma longitud) tenemos el axioma:

$$\forall y_1 < c_i, ... \forall y_n < c_i \left[\psi(y_1, ..., y_n; c(\mathbf{k})) \leftrightarrow \psi(y_1, ..., y_n; c(\mathbf{k}'))\right].$$

Para probar que Con(T) implica Con(PA) mostraremos que dado un modelo de T el segmento inicial I de aquellos $a < c_i$ para alguna i en ω (con las restricciones de $+, \times, <$) es un modelo de PA . La propiedad $T(ii)$ garantiza que I es cerrado bajo $+$ y $\times$. Así que basta probar que los axiomas de PA se satisfacen en $[I, +, \times, <]$. Es claro que sólo los axiomas de inducción deben ser probados. Para ello recurriremos al siguiente lema, el cual nos permitirá asociar una fórmula cualquiera a una fórmula limitada y así poder utilizar la inducción para ésta última.

Para cada fórmula $\theta(\mathbf{y})$ del lenguaje de PA, definimos una fórmula limitada $\theta^*(\mathbf{y}; \mathbf{z})$ de la siguiente manera. Escribimos θ en forma normal prenex, digamos $\exists x_1 ... \forall x_r \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, donde φ es libre de cuantificadores. Entonces $\theta^*(\mathbf{y}; \mathbf{z})$ es $\exists x_1 < z_1 ... \forall x_r < z_r \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Lema 1.3.1 Sea $\mathcal{U}$ un modelo de T y sea $\Im = [I, +, \times, <]$. Sean $i < \mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ de longitud m, $a = a_1, ..., a_n$ tales que $a < c_i$, es decir $a_1 < c_i, ..., a_n < c_i$. Si θ es una fórmula de n variables libres y m variables acotadas entonces

$$\Im \models \theta(a) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{U} \models \theta^*(a; c(\mathbf{k})).$$

`Demostración` *(por inducción sobre θ)*. Supongamos $\theta(\mathbf{y})$ es $\exists x_1 \psi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. En este caso $\theta^*(y; z)$ es $\exists x_1 < z_1 \psi^*(x_1, y; z_2, ..., z_m.)$. Sean $a < c_i$, $i < \mathbf{k}$.

$\Rightarrow$) Si se satisface $\Im \models \theta(a_1, ..., a_n)$ entonces existe algún b en I para el cual $\Im \models \psi(b, a_1, ..., a_n)$. Sea $r = \{\min s : b < c_s\}$, entonces tenemos que $a \cup \{b\} < c_p$, donde $p = \max\{i, r\}$. Por la hipótesis inductiva esto implica $\mathcal{U} \models \psi^*(b, a; c(\mathbf{j}))$ para el conjunto $\mathbf{j} = p+1, p+2, ..., p+m-1$ (ya que $p < \mathbf{j}$ y $a \cup \{b\} < c_p$), i.e. $\Im \models \theta^*(a; c(\mathbf{k}'))$ para $\mathbf{k}' = \mathbf{j} \cup \{p+m\}$. Debe notarse que $p < \mathbf{k}'$ y entonces $i < \mathbf{k}'$. Así que se cumplen las condiciones para $T(iii)$ y por lo tanto $\mathcal{U} \models \theta^*(a; c(\mathbf{k}))$.

$\Leftarrow$) Suponiendo $\mathcal{U} \models \theta^*(a; c(\mathbf{k}))$ se infiere por $T(iii)$ $\mathcal{U} \models \theta^*(a; c(\mathbf{k}'))$, donde $\mathbf{k}' = k_m + 1, k_m + 2, ..., k_m + m$ (k_m es el máximo de $\mathbf{k}$). De aquí es inmediato que existe un $b < c_{k_m+1}$ para el cual

$\mathcal{U} \models \psi^*(b, a_1, ..., a_n; c(\mathbf{k}''))$,donde $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}' - \{k_m + 1\}$.

Por la hipótesis inductiva esto implica $\Im \models \psi(b, a_1, ..., a_n)$ ya que $a \cup \{b\} < c_{k_m+1}$ y $k_m + 1 < \mathbf{k}''$.

$\boxdot$

Sea φ una fórmula del lenguaje de PA, debemos probar la inducción para φ. Probaremos que suponiendo $\mathcal{I} \models \forall x[\varphi(x) \to \varphi(x+1)] \wedge \varphi(\overline{0})$ se demuestra $\mathcal{U} \models \forall x \leqslant c_i [\varphi^*(x; c(k)) \to \varphi^*(x+1; c(k))] \wedge \varphi(\overline{0})$ para cada c_i y $k > i$.

Supongamos $b < c_i$ y $\mathcal{U} \models \varphi^*(b; c(k))$. Por el lema 1 se tiene que $\mathcal{I} \models \varphi(b)$ y por la hipótesis inicial $\mathcal{I} \models \varphi(b+1)$; nuevamente por el lema 1 $\mathcal{U} \models \varphi^*(b+1; c(k))$. Así que hemos probado $\mathcal{U} \models \forall x \leqslant c_i [\varphi^*(x; c(k)) \to \varphi^*(x+1; c(k))] \wedge \varphi(\overline{0})$.

El axioma de inducción para φ^* nos permite concluir $\mathcal{U} \models \forall x \leqslant c_i\, \varphi^*(x; c(k))$; por el lema 1 se tiene $\mathcal{I} \models \forall x \leqslant c_i\, \varphi(x)$ *i.e* $\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi(x)$.

Hemos probado que para cualquier modelo $\mathcal{U}$ de la teoría T, el conjunto

$I = \{a \in |\mathcal{U}| : a < c_i^{\mathcal{U}}$, p.a. $i \in \omega\}$ es un modelo de PA.

Formalización en PA

Como utilizaremos el segundo teorema de Gödel es necesario que la prueba anterior pueda ser formalizada en PA, es decir que $PA \vdash Con\,(T) \to Con\,(PA)$. De hecho veremos que este tipo de formalizaciones pueden hacerse para casi cualquier prueba de consistencia relativa presentada en Teoría de Modelos. Estos resultados se basan en una versión sintáctica del Teorema de Completud del Cálculo de Predicados. El teorema al que nos referimos se conoce como Teorema de Completud Hilbert-Bernays y afirma que en $PA + Con\,(S)$ podemos dar una definición de verdad para un modelo para S.

TEOREMA DE COMPLETUD HILBERT-BERNAYS. Sea U una teoría con un conjunto de axiomas primitivo recursivo. Existe un conjunto de fórmulas Δ_2, Tr_M, tal que en PA+Con(U) se puede probar que este conjunto define un modelo de U; es decir:

$$\text{PA+Con}(U) \vdash \forall x\,(\mathrm{Pr}_U\,(x) \to \mathrm{Tr}_M\,(x))\,. \qquad (*)$$

Al final de esta sección presentamos un esquema de la demostración de este teorema. Por el momento notemos que en realidad basta mostrar la existencia del modelo de U y de su definición de verdad, es decir que basta exhibir M y $\mathrm{Tr}_M\,(x)$ tales que

$$\begin{array}{ll} PA + Con\,(U) \vdash Tr_M\,([\psi]) & \text{si } \psi \text{ es verdadera en } M, \\ PA + Con\,(U) \vdash \neg Tr_M\,([\psi]) & \text{si } \psi \text{ es falsa en } M. \end{array}$$

Bajo estos supuestos la afirmación $(*)$ se prueba por inducción sobre la longitud de la prueba utlizando lo siguiente:

$$PA + Con\,(U) \vdash (Tr_M\,([\psi \to \phi]) \wedge Tr_M\,([\psi])) \to Tr_M\,([\phi])$$

Aplicando este teorema a la teoriía T tenemos que existe un modelo $\mathcal{U}$ de T tal que

$$\text{PA+Con}_T \vdash \forall x\,(\mathrm{Pr}_T\,(x) \to Tr_{\mathcal{U}}\,(x))$$

La prueba del lema 1.3.1 indica como transformar la definición de verdad para $\mathcal{U}$ en una definición de verdad para el modelo correspondiente de PA (el segmento inicial definido por los indiscernibles c_i). Es decir

$$\text{PA+Con}_T \vdash \forall x\,(\mathrm{Pr}_{PA}\,(x) \to Tr_{\mathcal{I}}\,(x))$$

donde $\mathcal{I}$ es la subestructura de $\mathcal{U}$ delimitada por los indiscernibles $c_i^{\mathcal{U}}$.

Para concluir basta considerar un enunciado falso α en $\mathcal{I}$ y obtener así por contraposición $\neg\,\mathrm{Pr}_{PA}\,([\alpha])$.

1.4 PCT implica Con(T)

El objetivo de esta sección es probar que el enunciado $PCT \to Con(T)$ es derivable en **PA.** Recordemos que anteriormente se probó la derivabilidad de $PH \to PCT$; combinando ambos resultados se concluye que

$$\mathbf{PA} \vdash PH \to Con(T).$$

Principio combinatorio T. Dados e, k, r, existe un M tal que para toda familia $(P_\ell; \ell < 2^M)$ de particiones $P_\ell : [M]^e \to r$, existe un $X \subset M$ de cardinalidad al menos k para el cual :

(II) si $a, b \in X$ y $a < b$,entonces $a^2 < b$

(III) si $a \in X$ y $\ell < 2^a$, entonces $X \sim (a+1)$ es homogéneo para P_ℓ, donde $X \sim (a+1) = \{x \in X : x > a\}$.

PROPOSICION 1.4.1 *El principio combinatorio T implica Con(T).*

Demostración.

Dado un subconjunto finito S de T , sean $c_0, ..., c_{k-1}$ todas las constantes de S; sea m el número de axiomas de S de la forma (iii) y para cualquier axioma de esta forma sean d_ψ y e_ψ las longitudes de $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$, respectivamente, en la fórmula $\psi(\mathbf{y};\mathbf{z})$ correspondiente y $d = \max(d_\psi)$, $e = \max(e_\psi)$. Sea M construida de acuerdo al principio combinatorio T para $e, k+e$, y 7^m . Es decir que para toda familia de particiones $(P_\ell;\ \ell < 2^M)$, $P_\ell : [M]^e \to 7^m$, existe un subconjunto $X \subset M$ de cardinalidad al menos $k+e$ que cumple (II) y (III).

Para cada natural n, denotaremos n^* al conjunto $[n]^1 \cup ... \cup [n]^n$. Obsérvese que dado un natural M , la suma $M + \left|[M]^2\right| + ... + \left|[M]^{M-1}\right| + \left|[M]^M\right| = 2^M - 1$, es decir que $|M^*| = 2^M - 1$.De lo anterior se sigue que podemos definir una función $g : 2^M \to M^*$ tal que para todo $\mathbf{a} \in b^*$ $g^{-1}(\mathbf{a}) < 2^b$

Para cada fórmula limitada $\psi(y_1 ..., y_n; \mathbf{z})$ que aparezca en un axioma de la forma (iii) y cada $\xi \in 2^M$ definimos una partición $F_\xi : [M]^{e_\psi} \to 2$ tal que $F_{\psi,\xi}(\mathbf{c}) = 0$ si y sólo si $\psi(g(\xi); \mathbf{c})$ es verdadera. Aplicando el lema 1.2.4 a estas particiones obtenemos una partición $P_\xi : [M]^e \to 7^m$. Como el número de particiones P_ξ es igual a 2^M sabemos que existe un $X \subset M$ de cardinalidad al menos $k+e$ y que cumple (II) y (III).

Sean $s_0, ..., s_{k-1}$, los primeros k elementos de X; afirmamos que

$$(\omega; +, \times, <,\ s_0, ..., s_{k-1})$$

es un modelo de S. Es claro que en este modelo se satisfacen los axiomas (i) de S. Como X cumple con (II) entonces para todo $s_i, s_j \in X$, $s_i < s_j$ se tiene que $(s_i)^2 < s_j$; así que los axiomas (ii) de S se satisfacen. Finalmente, sea ϕ un axioma (iii) de S, i.e., $\phi \equiv \forall y_1 {<} c_i, ..., \forall y_n < c_i\, [\psi(\mathbf{y}; c(k)) \leftrightarrow \psi(\mathbf{y}; c(k'))]$. Puesto que la interpretación de c_i es s_i debemos considerar las instancias de elementos menores que s_i. Por la elección de g tenemos que si $a \in s_i^*$ entonces $\xi = g^{-1}(a) < s_i$ y por (III) esto implica que $X \sim (s_i + 1)$ es homogéneo para P_ξ; la construcción de P_ξ garantiza que X es también homogéneo para $F_{\xi,\psi}$, de donde se concluye que $\psi(a; s(k))$ si y sólo si $\psi(a; s(k'))$ donde $s(k), s(k')$ son sucesiones formadas de elementos en $\{s_o, ..., s_{k-1}\}$ mayores que s_i.

Formalización en PA

La proposición 1.4.1 prueba, suponiendo el enunciado PH, que todo subconjunto finito de axiomas de T tiene modelo. En esta sección probamos algo más fuerte: en **PA**+PH se deriva el enunciado $Con\,(T)$ que aritmetiza la consistencia de T :

$$\mathbf{PA} + PH \vdash Con\,(T)$$

La formalización en **PA** de la proposición 1.4.1 depende de los siguientes hechos:

(i) Existe una definición de verdad para fórmulas Δ_0 del lenguaje de **PA**. Para fórmulas del lenguaje de la teoría T extendemos está definición simplemente sustituyendo las constantes c_i por numerales. Dada una fórmula ϕ del lenguaje T, la fórmula obtenida al sustituir el conjunto de constantes $c_1, ..., c_n$ por los numerales $a_0, ..., a_n$ es denotada ϕ_a, donde a es el número de Gödel que codifica la sucesión $a_1, ..., a_n$. (La definición de verdad para fórmulas Δ_0 se presenta al final de esta sección)

(ii) (Teorema de Eliminación del Corte) Si un secuente S es LK_e*−demostrable* entonces existe una prueba de S en LK_e que no contiene cortes esenciales.

(iii) Si un secuente es LK_e − *demostrable* entonces existe una prueba P de S en LK_e tal que todas las fórmulas de P son subfórmulas de S.

Para simplificar la escritura de ciertas afirmaciones usaremos las letras S, Γ como "variables" que denotan secuentes. Por ejemplo la expresión $\forall S\phi([S])$ es una abreviación de "para todo x, si x es el número de Gödel de un secuente entonces $\phi\,(x)$".

La prueba del (ii) tal como se presentó en el capítulo 1, es formalizable en PA en el siguiente sentido

$$\mathbf{PA} \vdash \forall S(\langle \vdash S\rangle \rightarrow \langle \vdash_* S\rangle) \tag{1}$$

donde $\langle \vdash S\rangle$ es la fórmula que representa "existe una prueba de S en LK_e" y $\langle \vdash_* S\rangle$ representa "existe una prueba de S en LK_e sin cortes esenciales".

Ahora supongamos que P es una prueba sin cortes esenciales de un secuente S del lenguaje de **PA** y cuyas fórmulas son Δ_0, i.e, cada fórmula en P es también Δ_0. Entonces podemos probar en **PA** que cada instancia numérica de S es verdadera; es decir:

$$\mathbf{PA} \vdash \forall S\,(\vdash_* S\,(b_1, ..., b_m)) \rightarrow \forall x_1...x_m Tr_{\Delta_0}\left(\langle S\,(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m)\rangle\right). \tag{2}$$

La prueba de (2) se hace por inducción sobre el número de secuentes en la prueba P. Debe notarse que es indispensable que la prueba P no contenga cortes esenciales, de otra manera P podría tener fórmulas que no sean Δ_0 a las cuales el predicado Tr_{Δ_0} no aplicaría. Los detalles los dejamos al final de esta sección.

Como consecuencia de este resultado y de la Proposición 1 se tiene que si S es un secuente que pertenece al lenguaje de la teoría T y además existe una prueba P de S libre de cortes esenciales (y por lo tanto todas sus fórmulas son Δ_0) se demuestra en PA que existe una interpretación de las constantes $c_1, ..., c_n$ de S para la cual cada instancia numérica de S es verdadera :

$$\mathbf{PA}{+}PH \vdash \forall S(\langle \vdash_* S\,(b_1, ..., b_m)) \rightarrow \exists y \forall x_1, ..., x_m Tr_{\Delta_0}(\left\langle S\,(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m)_y \right\rangle)$$

Supongamos que Γ es un subconjunto finito de axiomas de T, el resultado anterior implica que para el secuente $\Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}$ obtenemos:

$$\mathbf{PA}{+}PH \vdash \forall \Gamma(\langle \vdash_* \Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}\rangle \rightarrow \exists y Tr_{\Delta_0}(\langle \Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}\rangle_y)) \qquad (4)$$

Además también se puede probar

$$\mathbf{PA} + PH \vdash \forall \Gamma(\neg \exists y Tr_{\Delta_0}\left(\langle \Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}\rangle_y\right))$$

de donde se sigue por (4)

$$\mathbf{PA} + PH \vdash \forall \Gamma(\neg \langle \vdash_* \Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}\rangle)$$

y por (1)

$$\mathbf{PA} + PH \vdash \forall \Gamma(\neg \langle \vdash \Gamma \rightarrow \overline{0} = \overline{1}\rangle)$$

Esta última afirmación es equivalente a $\mathbf{PA} + PH \vdash Con\,(T)$

Definiciones de Verdad

Una definición de verdad en **PA** para un conjunto de enunciados Γ (del lenguaje de PA) es una fórmula Tr_Γ de **PA** con sólo una variable libre y tal que para todo enunciado A de Γ

$$\mathbf{PA} \vdash Tr_\Gamma\left(\overline{[A]}\right) \Leftrightarrow A$$

donde $[A]$ es el número de Gödel de A.

Nuestro objetivo es probar que existe una definición de verdad para las enunciados Δ_0. Como primer paso veamos una definición de verdad para fórmulas atómicas.

En el apéndice demostramos que dados términos cerrados $t, s,$ se tiene que $PA \vdash t = s$ ó $PA \vdash t \neq s$, donde además la longitud de la prueba depende de la complejidad de los términos, esto es, hay una función recursiva f tal que $f(\overline{[t = s]})$ acota la longitud de la prueba considerada. De esta manera se tiene que la fórmula $\exists y < f([\overline{\phi}]) Prov(y, ([\overline{\phi}]))$ sirve como definición de verdad para enunciados atómicos ϕ.

Para enunciados libres de cuantificadores la definición de verdad consiste en dar una representación (a través de números de secuencia) de la tabla de verdad del enunciado. En este caso consideraremos números de secuencia que pueden ser descompuestos en la forma $2^{x_0} \cdot 3^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{x_{n-1}}$, donde $x_i = 1$ ó 2 y p_i es el $i-$ésimo primo. Para formular la definición de verdad buscada necesitamos los siguientes predicados:

$st_P([A])$ representa "A es un enunciado libre de cuantificadores".
$seq(x, y)$ representa "x es un número de secuencia de longitud y"
$Tr_0([A])$ es la definición de verdad para fórmulas atómicas.

En lo que sigue la expresión $\forall [B]$ abrevia "para todo x, si x es el número de Gödel de una subfórmula de A". La definición de verdad para enunciados sin

cuantificadores es la siguiente

$$
\begin{aligned}
&Tr_P([A]) \Leftrightarrow \\
&st_P([A]) \wedge \exists x[seq(x,[A]) \wedge \forall i(i \leq [A]) \rightarrow \\
&\forall [B](i = [\neg B] \rightarrow (x(i) = 2 \Longleftrightarrow x([B]) = 1)) \\
&\wedge \forall [B] \forall [C] (i = [B \wedge C] \rightarrow (x(i) = 2 \Leftrightarrow x([B]) = 2 \wedge x([C]) = 2)) \\
&\wedge \forall [B] (At([B]) \rightarrow (x([B]) = 2 \Longleftrightarrow Tr_0([B])) \\
&\\
&\wedge x([A]) = 2
\end{aligned}
$$

Veamos un ejemplo para ilustrar el significado de esta fórmula. El enunciado $\phi \doteq 3+2=5 \wedge \neg(2<1)$ es derivable en PA, así que debe existir un número de secuencia con las características descritas en Tr_P. Este número es el siguiente:

$$p_d^1 \cdot p_c^2 \cdot p_b^2 \cdot p_a^2$$

donde a, b, c y d son los números de Godel de $\phi, 3+2=5, \neg(2<1)$ y $2<1$ respectivamente.

Lo anterior es suficiente para dar una definición de verdad para enunciados Δ_0 ya que cualquier enunciado de este tipo es equivalente a un enunciado libre de cuantificadores.

CAPITULO II

En este capìtulo daremos otra prueba de la inderivabilidad del enunciado PH en PA. De hecho mostraremos un resultado màs general que permite probar la inderivabilidad de enunciados Σ_1 bajo ciertas condiciones.

Este resultado consiste en mostrar que si un enunciado ϕ de la forma $\forall y \exists x R(y,x)$ (donde R es una relaciòn primitiva recursiva) es $PA-$*derivable* entonces la funciòn σ_ϕ, definida como el mìnimo n tal que $R(m,n)$, es dominada por alguna funciòn de Hardy. Funciones de esta forma son conocidas como *funciones recursivas demostrables.*

2.1 LAS FUNCIONES RECUSRSIVAS DEMOSTRABLES

verdad del enunciado. En este caso consideraremos números de secuencia que pueden ser descompuestos en la forma $2^{x_0} \cdot 3^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{x_{n-1}}$, donde $x_i = 1$ ó 2 y p_i es el $i-$ésimo primo. Para formular la definición de verdad buscada necesitamos los siguientes predicados:

$st_P([A])$ representa "A es un enunciado libre de cuantificadores".
$seq(x, y)$ representa "x es un número de secuencia de longitud y"
$Tr_0([A])$ es la definición de verdad para fórmulas atómicas.

En lo que sigue la expresión $\forall [B]$ abrevia "para todo x, si x es el número de Gödel de una subfórmula de A". La definición de verdad para enunciados sin cuantificadores es la siguiente

$$
\begin{aligned}
&Tr_P([A]) \Leftrightarrow \\
&st_P([A]) \wedge \exists x[seq(x, [A]) \wedge \forall i(i \leq [A]) \rightarrow \\
&\forall [B] (i = [\neg B] \rightarrow (x(i) = 2 \Longleftrightarrow x([B]) = 1)) \\
&\wedge \forall [B] \forall [C] (i = [B \wedge C] \rightarrow (x(i) = 2 \Leftrightarrow x([B]) = 2 \wedge x([C]) = 2)) \\
&\wedge \forall [B] (At([B]) \rightarrow (x([B]) = 2 \Longleftrightarrow Tr_0([B])) \\
&\wedge x([A]) = 2
\end{aligned}
$$

Veamos un ejemplo para ilustrar el significado de esta fórmula. El enunciado $\phi \leftrightharpoons 3+2=5 \wedge \neg(2<1)$ es derivable en PA, así que debe existir un número de secuencia con las características descritas en Tr_P. Este número es el siguiente:

$$p_d^1 \cdot p_c^2 \cdot p_b^2 \cdot p_a^2$$

donde a, b, c y d son los números de Godel de $\phi, 3+2=5, \neg(2<1)$ y $2<1$ respectivamente.

Lo anterior es suficiente para dar una definición de verdad para enunciados Δ_0 ya que cualquier enunciado de este tipo es equivalente a un enunciado libre de cuantificadores.

CAPITULO II

En este capìtulo daremos otra prueba de la inderivabilidad del enunciado PH en PA. De hecho mostraremos un resultado màs general que permite probar la inderivabilidad de enunciados Σ_1 bajo ciertas condiciones.

Este resultado consiste en mostrar que si un enunciado ϕ de la forma $\forall y \exists x R(y, x)$ (donde R es una relaciòn primitiva recursiva) es $PA-$*derivable* entonces la funciòn σ_ϕ, definida como el mìnimo n tal que $R(m, n)$, es dominada por alguna funciòn de Hardy. Funciones de esta forma son conocidas como *funciones recursivas demostrables.*

2.1 LAS FUNCIONES RECUSRSIVAS DEMOSTRABLES

El objetivo de esta sección es mostrar que toda función recursiva demostrable es una función ordinal recursiva. En este capítulo trabajaremos con la Aritmética de Peano fromalizada en el cálculo de secuentes LK (ver apéndice).

Aritmética de Peano

Para formular la aritmética de Peano utilizamos el siguiente lenguaje:

un símbolo de constante 0
símbolos de función $', +, \cdot$
símbolo de predicado binario $=$

La interpretación de casi todos estos símbolos debe ser bastante obvia. Sólo mencionamos que el símbolo de función $'$ interpreta la función sucesor. Denotamos $(t)'_n$ a la enésima aplicación consecutiva de la función $'$ al término t. Así que cualquier natural n está representado por el término $(0)'_n$, el cual será usualmente abreviado por $\overline{n}$.

El sistema PA es obtenido a partir de LK_e agregando seis secuentes iniciales (llamados secuentes iniciales matemáticos) y añadiendo la inducción como nueva regla de inferencia.

1) Los secuentes iniciales matemáticos son:

$s' = t' \to s = t$
$s' = 0 \to$
$\to s + 0 = s$
$\to s + t' = (s + t)'$
$\to s \cdot 0 = 0$
$\to s \cdot t' = s \cdot t + s$

2) La regla de inducción:

$$\frac{F(a), \Gamma \to \Delta, F(a')}{F(0), \Gamma \to \Delta, F(s)}$$

donde a no aparece en $F(0), \Gamma$ o Δ, s es un término arbitrario que no contiene a y $F(a)$ es cualquier fórmula del lenguaje.

El ordinal ε_0

Llamamos ε_0 al primer ordinal α que satisface la ecuación $\alpha^\omega = \alpha$, es decir, $\varepsilon_0 = \lim\left(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, ...\right)$. Es importante notar que ε_0 es numerable, razón por la cual al conjunto de los números naturales le puede ser inducido el tipo de orden de cualquier $\alpha < \varepsilon_0$.

Decimos que un ordinal α se encuentra expresado en forma normal si lo escribimos como la suma de potencias de ω, es decir, si existen ordinales $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ tales que $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + ... + \omega^{\alpha_n}$. Es un resultado conocido de la Teoría de Conjuntos que todo ordinal tiene una única forma normal.

Funciones α–recursivas

Sea π una función del conjunto de los números naturales en un ordinal α, es decir $\pi : \omega \to \alpha$. Entonces podemos definir clase de funciones α–recursivas primitivas de la siguiente manera:

(i) $f(a) = a + 1$

(ii) $f(a_1, ..., a_n) = 0$

(iii) $f(a_1, ..., a_n) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

(iv) $f(a_1, ..., a_n) = g(h_1(a_1, ..., a_n), ..., h_m(a_1, ..., a_n))$
donde g y h_i son α–primitivas recursivas.

(v)
$$f(0, a_2, ..., a_n) = g(a_2, ..., a_n),$$
$$f(a + 1, a_2, ..., a_n) = h(a, f(a, a_2, ..., a_n), a_2, ..., a_n)$$

donde g y h son α–primitivas recursivas.

(vi)
$$f(a_1, ..., a_n) = \begin{cases} h(f(\tau(a_1, ..., a_n), a_2, ..., a_n), a_1, ..., a_n) & \text{si } \pi(\tau(a_1, ..., a_n)) < \pi(a_1) \\ g(a_1, ..., a_n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde g, h y τ son α–primitivas recursivas.

Asignación de ordinales a las pruebas de PA.

Para mostrar la asignación de ordinales a las pruebas de PA necesitamos las siguientes definiciones:

1) El *grado de una fórmula* es el número de símbolos lógicos que contiene. El *grado de un corte* es el grado de la fórmula de corte. El *grado de una inferencia ind* es el grado de la fórmula de inducción.

2) La *altura de un secuente* S en una prueba P (denotada $h(S;P)$) es el máximo de los grados de los cortes e inducciones que aparecen en P antes que S.

3) Para cada ordinal α y cada natural n, definimos $\omega_n(\alpha)$ por inducción sobre n; $\omega_0(\alpha) = \alpha$, $\omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)}$.

Primero asignamos ordinales a los secuentes en una prueba. El ordinal asignado a un secuente S en una prueba es denotado $o(S;P)$ ó simplemente $o(S)$. Asumiremos que los ordinales se encuentran expresados en la forma normal. Si α y β son ordinales de la forma $\omega^{\alpha_1} + ... + \omega^{\alpha_n}$ y $\omega^{\beta_1} + ... + \omega^{\beta_m}$ respectivamente $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ y $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_m)$, entonces $\alpha\#\beta$ denota al ordinal $\omega^{\lambda_1} + \omega^{\lambda_2} + ... + \omega^{\lambda_{n+m}}$, donde $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+m}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \beta_1\beta_2, ...\}$. El ordinal $\alpha\#\beta$ es llamado la suma natural de α y β.

La asignación se define de la siguiente manera:

1) A un secuente inicial se le asigna el ordinal 1.

2) Si S es el secuente inferior de una inferencia débil, entonces $o(S)$ es el mismo que el de el secuente superior.

3) Si S es el secuente inferior de $\wedge$izquierda, $\vee$derecha, $\Rightarrow$derecha, $\neg$derecha, $\neg$izquierda o una inferencia que involucre un cuantificador, $o(S) = \alpha + 1$, donde α es el ordinal del secuente superior.

4) Si S es el secuente inferior de $\wedge$derecha, $\vee$izquierda, $\Rightarrow$izquierda y los secuentes superiores tienen ordinales α y β, entonces $o(S) = \alpha\#\beta$.

5) Si S es el secuente inferior de un corte y sus secuentes superiores tienen ordinales α y β , entonces $o(S) = \omega_{k-l}(\alpha + \beta)$, donde k y l son las alturas de los secuentes superiores de S, respectivamente.

6) Si S es el secuente inferior de una inducción y el ordinal del secuente superior es α,entonces $o(S) = \omega_{k-l+1}(\alpha_1 + 1)$, donde $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$; k y l son las alturas de los secuentes superiores de S.

7) El ordinal de una prueba P, o(P), es el ordinal de su secuente final.

Lema 2.1.3 *Supongamos que P es una prueba que contiene al secuente S_1 y que no hay inducciones abajo de S_1; llamemos P_1 a la subprueba con secuente final S_1. Si P_1' es otra prueba de S_1 tal que $o(P_1') < o(P_1)$ y P' es la prueba obtenida reemplazando P_1 por P_1' en P entonces $o(P') < o(P)$.*

Lema 2.1.4 *Sea S un secuente de la forma $\rightarrow \exists x R(a,x)$. Si P es una prueba en PA de S que contiene una inducción I entonces existe una prueba P' de S que no contiene a I; además $o(P') < o(P)$. Un resultado análogo se obtiene para pruebas que tengan cortes esenciales.*

Corolario. *Sea S un secuente de la forma $\rightarrow \exists x R(a,x)$. Si existe una prueba P de S en PA entonces existe una prueba P' de S que no contiene cortes esenciales ni inducciones; además $o(P') \leqslant o(P)$.*

La prueba de este lema requiere una gran cantidad de resultados del Cálculo de Secuentes y es bastante larga para incluirla aquí. Sólo presentamos aquí la forma de eliminar inducciones y mostramos además que el ordinal de la prueba reducida decrece. El lector puede encontrar una descripción detallada de estos resultados en [4] . Nos referiremos a resultados de este tipo, que consisten en dar pruebas de un mismo secuente sin usar ciertas reglas de inferencia, como métodos de reducción. Una prueba que contiene alguna regla eliminable es llamada prueba reducible.

Una observación importante respecto a este lema es que se da un procedimiento efectivo para construir P' a partir de P y de manera tal que el número de Gödel de P' se puede calcular recursivamente a partir del número se Gödel de P. Este hecho es crucial para los resultados que vinculan la derivabilidad de una fórmula Σ_1 con el crecimiento de su función σ correspondiente. Para tener un acercamiento al análisis del crecimiento de las pruebas reducidas en el caso de cortes esenciales sugerimos al lector ver el apéndice B, en donde damos como ejemplo de las técnicas de reducción una demostración del Teorema de Eliminación del Corte para el Cálculo de Secuentes. Este Teorema muestra una técnica de reducción que, aunque más sencilla que las referidas en el lema 2.1.4., sirve para ejemplificar cómo el crecimiento de una prueba reducida puede ser calculado recursivamente.

Eliminación de inducciones

Para ilustrar de alguna manera la estrategia de la prueba del lema 2.14 veamos cómo se puede eliminar una inducción en el caso en que ésta aparece como la última regla de inferencia; es decir que la última parte de la prueba $P(m)$ es de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{c} P_0(a) \\ \exists x\,(a,x) \to \exists x\,(a',x) \end{array}}{\exists x\,(0,x) \to \exists x\,(\overline{m},x)}$$

donde P_0 es la subprueba con secuente final $\exists x\,(a,x) \to \exists x\,(a',x)$, y sean l y k las alturas del secuente superior S y del secuente inferior S_0 de la inducción, además supongamos que $o(S) = \omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + ... + \omega^{\mu_n}$. Entonces

$$o(S_0) = \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1)$$

La prueba reducuida P' es

$$\begin{array}{lccc}
 & P_0(0) & P_0(1) & \\
S_1 & \exists x\,(0,x) \to \exists x(0',x) & \exists x\,(0',x) \to \exists x\,(0'',x) & P_0(2) \\
\hline
S_2 & \exists x\,(0,x) \to \exists x\,(0'',x) & & \exists x\,(0'',x) \to \exists x\,(0''',x) \\
\hline
S_3 & & \exists x\,(0,x) \to \exists x\,(0''',x) &
\end{array}$$

S_{m-1} $\quad \exists x\,(0,x) \to \exists x(\overline{m-1},x) \quad \exists x(\overline{m-1},x) \to$
$\exists x\,(\overline{m},x)$

$$\overline{\qquad\qquad \exists x\,(0,x) \to \exists x\,(\overline{m},x) \qquad\qquad}$$

Nótese que los secuentes $S_1, ..., S_{m-1}$ tienen todos altura l ya que las fórmulas $\exists x\,(\overline{n},x)$ tienen el mismo grado. Así que

$$o(\exists x\,(\overline{n},x) \to \exists x(\overline{n+1},x); P') = \mu \qquad \text{para } n = 0, ..., m-1$$

y entonces $o(S_2) = \mu\#\mu$; $o(S_3) = \mu\#\mu\#\mu$; ..., y en general $o(S_n) = \mu * n$ donde $\mu * n = \mu\#\mu\#...\#\mu$ n veces. De lo anterior se sigue que

$$o(S_0; P') = \omega_{l-k}(\mu * m - 1)$$

Además es claro que $\mu * (m-1) < \omega^{\mu_1+1}$ y por lo tanto

$$o(S_0; P') = \omega_{l-k}(\mu * (m-1)) < \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1) = o(S_0; P)$$

Por el lema anterior se sigue que $o(P') < o(P)$.

Con el resultado expuesto en el lema 2.1.4 podemos ya hacer un primer acercamiento al análisis del crecimiento de las funciones σ_ϕ.

Definición. Una secuencia de secuentes de una prueba P es una rama (de P) si satisface las siguientes condiciones:

1) La secuencia comienza con un secuente incial y termina con el secuente final.
2) Cada secuente en la secuencia, excepto el último, es un secuente superior de una inferencia y es seguido inmediatamente por el secuente inferior de dicha inferencia.

PROPOSICION. Supongamos que la fórmula ϕ es de la forma $\forall y \exists x R(y,x)$, donde el predicado R es recursivo primitivo. Si existe una prueba de $\rightarrow \exists x R(a,x)$ en **PA** con ordinal α, entonces la función σ_ϕ definida por:

$$\sigma_\phi(m) = \text{el mínimo } n \text{ tal que } R(m,n)$$

es α- recursiva primitiva

Demostración. Dada una prueba P de $\rightarrow \exists x R(a,x)$ tenemos que para cada m hay una prueba $P(\overline{m})$ de $\rightarrow \exists x R(\overline{m},x)$ en PA con el mismo ordinal y con número de Gödel recursivo primitivo. Nos referimos a la prueba obtenida al sustituir a por $\overline{m}$ en la prueba P. Es fácil ver que el número de Gödel de esta prueba se calcula recursivamente a partir de m, i.e. existe una función recursiva primitiva γ tal que $\gamma(m)$ es el número de Gödel de $P(\overline{m})$.

Sea r la función tal que si p es el número de Gödel de una prueba reducible, entonces $r(p)$ es el número de Gödel de la reducción obtenida por el lema 2.1.4; $r(p) = p$ en cualquier otro caso. Recordemos que r es primitiva recursiva.

Por el lema 2.1.4 sabemos que dada una prueba Q de $\rightarrow \exists x R(\overline{m},x)$ (con número de Gödel p) que contenga un corte esencial o una inducción podemos encontrar una prueba reducción para la cual $o(r(p)) < o(p)$, donde $r(p)$ es el número de Gödel de la reducción. Iterando este proceso encontramos finalmente una prueba Q' en PA de $\rightarrow \exists x R(\overline{m},x)$ que no contenga cortes esenciales o inducciones. En particular esto sucede para la prueba $P(m)$, de donde tenemos que existe una prueba $P'(m)$ que no contiene inducciones ni cortes esenciales.

Como la prueba $P'(m)$ no hace uso de cortes esenciales ni de inducciones proberemos que debe contener una fórmula verdadera $R(\overline{m},\overline{n})$ para algún n. Para esto haremos las siguientes observaciones.

En primer lugar podemos asumir que no aparecen variables libres en P. De ahí que si $\Gamma \to \Delta$ es un secuente de P, entonces cualquier fórmula en Γ es atómica cerrada y toda fórmula en Δ es una fórmula atómica cerrada o es $\exists x R(m,x)$.

Definimos ahora la siguiente propiedad Q de secuentes. Un secuente tiene la propiedad Q si cualquier fórmula atómica en el antecedente es verdadera y cualquier fórmula atómica en el consecuente es falsa.

Nótese que el secuente fnal de P satisface Q; además, si el secuente inferior de un corte en P satisaface Q uno de los secuentes superiores también debe satisfacerla ya que las fórmula de corte es cerrada y atómica. Ahora consideramos una rama de secuentes de P que satisfacen Q. La rama empieza con el secuente final de P y cada vez que cada vez que un secuente inferior aparezca en la rama tomamos un secuente superior que satisfaga Q. Es claro que ningún secuente inicial satisface Q, así que la rama debe detenerse antes de llegar a un secuente inicial. Esto sólo puede suceder en el siguiente caso:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, R(\overline{m},\overline{k})}{\Gamma \to \Delta, \exists x R(\overline{m},x)}$$

donde $R(\overline{m},\overline{k})$ es verdadera.

Definimos una función g de la siguiente manera:

$$g(p) = \begin{cases} g(r(p)) & \text{si } o(r(p)) < o(p) \\ p & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Es inmediato por definición que g es $\alpha-$primitiva recursiva y además

$$\sigma_\phi(m) \leqslant g([P(\overline{m})]) = g(\gamma(m))$$

donde $P(a)$ es la prueba de $\to \exists x R(a,x)$ considerada inicialmente y γ es la función recursiva primitiva que representa a los números de Gödel de las pruebas $P(\overline{m})$.

Definición. Decimos que una función f, $f : \omega \to \omega$, es recursiva demostrable en PA si existe una fórmula ϕ tal que:

1) ϕ es $PA-$derivable
2) ϕ pertenece a la clase Σ_1
3) $f(n) = \sigma_\phi(n)$, para todo natural n.

2.2 FUNCIONES DE HARDY

. Si $\omega^{\alpha_1}+...+\omega^{\alpha_n}$ es la forma normal de α $(\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n)$ y $\omega^{\beta_1}+...+\omega^{\beta_m}$ es la forma normal de β $(\beta_1 \geq ... \geq \beta_m)$ usaremos la expresión $\alpha+\beta$ sólo cuando $\alpha_n \geq \beta_1$. También podrá ser usada en el caso en que α sea vacía, y entonces $\alpha+\beta$ es β misma.

Definición 2.2.1 Para cada ordinal límite α, $\alpha < \varepsilon_0$, definimos una sucesión de ordinales $\{\alpha\}(0), \{\alpha\}(1), ... \{\alpha\}(n), ...$, de la siguiente manera:

i) Si α es de la forma $\beta+\omega^{\gamma+1}$, entonces $\{\alpha\}(n) = \beta+\omega^{\gamma}\cdot n$.

ii) Si α es de la forma $\beta+\omega^{\gamma}$ y γ es un ordinal límite, entonces $\{\alpha\}(n) = \beta+\omega^{\{\gamma\}(n)}$.

En el primer caso es bastante claro el resultado de $\{\alpha\}(n)$. Para el segundo caso mostramos los siguientes ejemplos. Para $\alpha = \beta+\omega^{\omega}$ tenemos que $\{\alpha\}(n) = \beta+\omega^{\{\omega\}(n)} = \beta+\omega^{n}$. De ahí es fácil observar que para $\alpha = \beta+\omega^{\omega^{\omega}}$, $\{\alpha\}(n) = \beta+\omega^{\omega^{n}}$.

Definición: A continuación definimos recursivamente la función de Hardy para cada ordinal menor que ε_0.

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x \\ h_{\beta+1}(x) &= h_{\beta}(x+1) \\ h_{\alpha}(x) &= h_{\{\alpha\}(x)}(x) \qquad \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{aligned}$$

Para verificar que las funciones de Hardy están bien definidas basta notar que dados un ordinal límite α y un natural n siempre se puede obtener a partir de $\{\alpha\}(n)$ un ordinal sucesor después de un número finito de aplicaciones sucesivas de $\{\}(n)$. .

Recordemos que para cada función unaria f, f^n denota la enésima iteración de f, es decir $f^o(x) = x$, $f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$.

Decimos que una función g de aridad k es dominada por una función unaria f si existe un natural n para el cual

$$g(x_1, ..., x_k) < f(\max(x_1, ..., x_k))$$

siempre que $\max(x_1, ..., x_k) > n$.

Proposición. Si $\alpha > 0$ y $x > 0$, entonces $h_{\alpha}(x) > x$.

Demostración. (por inducción sobre a).

Si $\alpha = \beta+1$ entonces $h_{\alpha}(x) = h_{\beta}(x+1) > x+1 > x$.

Si α es ordinal límite, entonces $h_{\alpha}(x) = h_{\{\alpha\}(x)}(x) > x$.

Lema 2.2.3 Si α es un ordinal límite, entonces $h_{\alpha+\beta}(x) = h_{\alpha}(h_{\beta}(x))$.

Demostración. Por inducción sobre β.

(i) $\beta = \beta_0+1$. Por la hipótesis inductiva $h_{\alpha+\beta_0}(x+1) = h_{\alpha}(h_{\beta_0}(x+1))$, de donde $h_{\alpha+\beta_0+1}(x) = h_{\alpha}(h_{\beta_0+1}(x))$.

(ii) Si β es ordinal límite entonces $\alpha+\beta$ es ordinal límite, así que por definición $h_{\alpha+\beta}(x) = h_{\{\alpha+\beta\}(x)}(x) = h_{\alpha+\{\beta\}(x)}(x)$ y por hipótesis inductiva $h_{\alpha+\{\beta\}(x)}(x) = h_{\alpha}\left(h_{\{\beta\}(x)}(x)\right)$. Nuevamente por definición (ya que β es ordinal límite) $h_{\alpha}\left(h_{\{\beta\}(x)}(x)\right) = h_{\alpha}(h_{\beta}(x))$.

Corolario. Se cumplen las siguientes ecuaciones.

(i)	$h_{\omega^0}(x) = h_1(x) = x+1$
(ii)	$h_{\omega^{\beta+1}}(x) = h^{x}_{\omega^{\beta}}(x)$
(iii)	$h_{\omega^{\alpha}}(x) = h_{\omega^{\{\alpha\}(x)}}(x)$ si α es ordinal límite

Sólo probamos (ii) notando que $h_{\omega^{\beta+1}}(x) = h_{\{\omega^{\beta+1}\}(x)}(x) = h_{\omega^{\beta}\cdot x}(x)$ y por el lema anterior $h_{\omega^{\beta}\cdot x}(x) = h^{x}_{\omega^{\beta}}(x)$.

Lema 2.2.4 Sea g una función creciente. Si una función $f(x_1,...,x_n)$ es dominada por g entonces existe un natural p tal que para toda instancia $x_1,...,x_n$

$$f(x_1,...,x_n) < \max(g(\max(x_1,...,x_n)),p)$$

Dem. Si f es dominada por g entonces existe m tal que

$$f(x_1,...,x_n) < g(\max(x_1,...,x_n))$$

cuando $\max(x_1,...,x_n) \geq m$. Sea $\{m\}^n$ el conjunto de eneadas de elementos menores que m y sea $p = \max(f(x_1,...,x_n) : (x_1,...,x_n) \in \{m\}^n)$. Debe ser claro que este es el natural que buscamos.

Lema 2.2.5 Si $f(x_1,...,x_m)$ y $g_1(x_1,...,x_n),...g_m(x_1,...,x_n)$ son dominadas por $h_{\omega^{\alpha}}$, entonces $f(g_1(x_1,...,x_n),...g_m(x_1,...,x_n))$ es dominada por $h_{\omega^{\alpha}\cdot 2}$.

Demostración. Si $f(x_1,...,x_m)$ es dominada por $h_{\omega^{\alpha}}$ entonces existe un natural p tal que para todo $x_1,...,x_m$

$$f(x_1,...,x_m) < \max(h_{\omega^{\alpha}}(\max(x_1,...,x_m)),p)$$

De igual manera se prueba que existen naturales $r_1,...,r_m$ tales que para $i \leqslant m$

$$g_i(x_1,...,x_n) < \max(h_{\omega^{\alpha}}(x_1,...,x_n),r_i)$$

Sea $r = \max(p,r_1,...,r_m)$ y $x = \max(x_1,...,x_n)$. Entonces para todo $y_1,...,y_m$ y $x_1,...,x_n$

$$f(y_1,...,y_m) < \max(h_{\omega^{\alpha}}(\max(y_1,...,y_m)),r)$$
$$g_1(x_1,...,x_n) < \max(h_{\omega^{\alpha}}(x),r)$$

$$g_m(x_1,...,x_n) < \max(h_{\omega^{\alpha}}(x),r)$$

y por lo tanto

$$f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n)) < \max(h_{\omega^\alpha}(\max(h_{\omega^\alpha}(x),r)),r) =$$
$$\max(h_{\omega^\alpha}(h_{\omega^\alpha}(x)),h_{\omega^\alpha}(r)) = \max(h_{\omega^\alpha\cdot 2}(x),h_{\omega^\alpha}(r)).$$

Esto último implica que si $x = \max(x_1,...,x_n) \geq r$ entonces $h_{\omega^\alpha\,2}(x) > h_{\omega^\alpha}(x) \quad \geq h_{\omega^\alpha}(r)$ de donde se sigue

$$f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n)) < h_{\omega^\alpha\cdot 2}(x).$$

Lema 2.2.6 Si $h(x)$ y $g(x,y,z)$ son dominadas por h_{ω^α} y $f(x,y)$ está definida por recursión primitiva a partir de h y g, es decir, $f(0,y) = h(y)$, $f(x+1,y) = g(x,y,f(x,y))$, entonces f es dominada por $h_{\omega^{\alpha+1}+1}$.

Demostración. Por el lema 2.2.4 sabemos que existe un natural p tal que

$$h(x) < \max(h_{\omega^\alpha}(x),p)$$

$$g(x,y,z) < \max(h_{\omega^\alpha}(\max(x,y,z)),p)$$

Por inducción sobre x se prueba $\quad f(x,y) < h_{\omega^\alpha}^{x+1}(\max(x,y,p))$. El caso $x=0$ es obvio.

$$\begin{aligned} f(x+1,y) &< \max\left(h_{\omega^\alpha}\left(x,y,h_{\omega^\alpha}^{x+1}(\max(x,y,p)),\right),p\right) \\ &\leqslant h_{\omega^\alpha}\left(h_{\omega^\alpha}^{x+1}(\max(x,y,p))\right) \\ &= h_{\omega^\alpha}^{x+2}(\max(x,y,p)) \\ &\leqslant h_{\omega^\alpha}^{x+2}(\max(x+1,y,p)) \end{aligned}$$

Para concluir simplemente recordemos que $h_{\omega^\beta}^{z}(z) = h_{\omega^{\beta+1}}(z)$. Sea $m = \max(x,y,p)$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &< h_{\omega^\alpha}^{x+1}(m) \\ &\leqslant h_{\omega^\alpha}^{m+1}(m) \\ &< h_{\omega^\alpha}^{m+1}(m+1). \\ &= h_{\omega^{\alpha+1}}(m+1) \\ &= h_{\omega^{\alpha+1}+1}(m) \end{aligned}$$

Así que si $\max(x,y) \geq p$ entonces $f(x,y) < h_{\omega^{\alpha+1}+1}(\max(x,y))$

Corolario. Cualquier función recursiva primitiva es dominada por h_{ω^ω}.

Lema 2.2.7 Si α es ordinal sucesor, h_α es creciente.

Demostración. Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $h_\alpha(x) = h_\beta(x+1) \leqslant h_\beta(x+2) = h_\alpha(x+1)$.

Proposición 2.2.8.

1) *Si $\alpha > 1$ y $n > 0$, entonces $\{\omega^\alpha\}(n)$ es un ordinal límite.*

Dem. Si $\alpha = \beta + 1\,(\beta > 0)$ entonces $\{\omega^\alpha\}(n) = \omega^\beta \cdot n$. Si α es límite entonces $\{\omega^\alpha\}(n) = \omega^{\{\alpha\}(n)}$. Es claro que en ambos casos el resultado es un ordinal límite.

2) *Si α es un ordinal límite y x es un natural positivo, entonces existen ordinales límites $\alpha = \alpha_1 > \alpha_2 > ,... > \alpha_k$ tales que α_{i+1} ($1 \leqslant i \leqslant k$) es $\{\alpha\}(0)$ ó $\{\alpha\}(x)$ y $\alpha_{k+1} = 0$.*

Dem. Por inducción sobre α. Si $\alpha = \alpha_0 + \omega$, entonces $\alpha_0 = \{\alpha\}(0)$ y por la hipótesis inductiva el problema se reduce a α_0. Si $\alpha = \alpha_0 + \omega^\beta$ entonces $\{\alpha\}(x) = \alpha_0 + \{\omega^\beta\}(x)$.

3)*Sea α un ordinal límite y no de la forma $\alpha_0 + \omega$. Si j y x son naturales positivos, entonces existen ordinales límites*

$$\{\alpha\}(j) = \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k,$$

tales que α_{i+1} ($1 \leqslant i \leqslant k$) es $\{\alpha\}(0)$ ó $\{\alpha\}(x)$ y $\alpha_k = \{\alpha\}(j-1)$.

Dem. Por inducción sobre α. Podemos asumir que $\alpha = \omega^\beta$ y $\beta > 1$.

I) β es ordinal sucesor, $\beta = \beta_0 + 1$. En este caso se tiene que $\{\alpha\}(j) = \omega^{\beta_0} \cdot j$ y por lo tanto $\{\{\alpha\}(j)\}(x) = \omega^{\beta_0}(j-1) + \{\omega^{\beta_0}\}(x)$. De aquí tenemos dos subcasos:

-Si β_0 es ordinal sucesor entonces $\{\omega^{\beta_0}\}(0) = 0$ y por tanto $\{\{\alpha\}(j)\}(0) = \omega^{\beta_0}(j-1) = \{\alpha\}(j-1)$.

- Si β_0 es un ordinal límite entonces $\{\omega^{\beta_0}\}(x)$ es un ordinal límite y por el inciso anterior se sabe que después de sucesivas aplicaciones de $\{\}(0)$ y $\{\}(x)$ se convierte en 0. Así que después de las mismas aplicaciones $\{\{\alpha\}(j)\}(x) = \omega^{\beta_0}(j-1) + \{\omega^{\beta_0}\}(x)$ se transforma en $\omega^{\beta_0}(j-1) = \{\alpha\}(j-1)$.

II) β es ordinal límite.

-Si $\beta = \beta_1 + \omega^n, n > 1$, entonces, por la hipótesis inductiva,$\{\beta_1 + \omega^n\}(j)$ puede ser obtenido a partir de $\{\beta\}(j-1)$ por aplicaciones de $\{\}(0)$ y $\{\}(x)$; así que $\{a\}(j-1) = \omega^{\{\beta\}(j-1)}$ es obtenido a partir de $\omega^{\{\beta\}(j)} = \{\alpha\}(j)$ por las mismas aplicaciones de $\{\}(0)$ y $\{\}(x)$.

-Si $\beta = \beta_1 + \omega$, entonces $\{\alpha\}(j) = \omega^{\beta_1 + j}$ y $\{\alpha\}(j-1) = \omega^{\beta_1 + (j-1)}$. Por lo tanto $\{\{\alpha\}(j)\}(x) = \omega^{\beta_1 + (j-1)} \cdot x$. Por (2) sabemos que $\{\alpha\}(j-1)$ se transforma en 0 después de algunas aplicaciones de $\{\}(0)$ y$\{\}(x)$. Iterando este proceso $x-1$ veces al ordinal $\{\{\alpha\}(j)\}(x)$, éste se transforma en $\omega^{\beta_1 + (j-1)} = \{\alpha\}(j-1)$.

Lema 2.2.9 Si α es un ordinal límite y $i < j \leqslant x$, entonces

$$h_{\{\alpha\}(i)}(x) \leqslant h_{\{\alpha\}(j)}(x).$$

Demostración. Podemos asumir que $i = j - 1$. Si $\alpha = \beta + \omega$, entonces

$h_{\{\alpha\}(j)}(x) = h_{\beta+j}(x) = h_{\beta+(j-1)}(x+1) \geq h_{\beta+i}(x) = h_{\{\alpha\}(i)}(x)$. (La desigualdad se cumple ya que $\beta + i$ es ordinal sucesor).

Supongamos que α no es de la forma $\beta + \omega$. Por la proposición 2.2.8 (3) sabemos que $\{\alpha\}(j-1)$ puede ser obtenido a partir de $\{\alpha\}(j)$ por aplicaciones de $\{\}(0)$ y $\{\}(x)$. Es decir que existen ordinales $\alpha_1, ..., \alpha_n$, tales que

$$\{\alpha\}(j) > \alpha_1 > ... > \alpha_n = \{\alpha\}(j-1)$$

donde α_{k+1} es $\{\alpha_k\}(0)$ ó $\{\alpha_k\}(x)$. Así que basta probar que $h_{\alpha_{k+1}}(x) \leqslant h_{\alpha_k}(x)$.

Si $\alpha_{k+1} = \{\alpha_k\}(0)$ entonces por la hipótesis inductiva tenemos que $h_{\alpha_{k+1}}(x) =$

$h_{\{\alpha_k\}(0)}(x) \leqslant h_{\{\alpha_k\}(x)}(x) = h_{\alpha_k}(x)$.

Si $\alpha_{k+1} = \{\alpha_k\}(x)$, entonces

$$h_{\alpha_{k+1}}(x) = h_{\{\alpha_k\}(x)}(x) = h_{\alpha_k}(x).$$

Lema 2.2.10 Para cada α, h_α es estrictamente creciente.

Demostración. (por inducción sobre α). Si α es ordinal sucesor entonces

$h_\alpha(x+1) = h_{\beta+1}(x+1) = h_\beta(x+2) > h_\beta(x+1) = h_{\beta+1}(x) = h_\alpha(x)$.

Si α es ordinal límite entonces

$$h_\alpha(x) = h_{\{\alpha\}(x)}(x) < h_{\{\alpha\}(x)}(x+1) \leqslant h_{\{\alpha\}(x+1)}(x+1) = h_\alpha(x+1).$$

La primera desigualdad se satisface por la hipótesis inductiva; la segunda por el lema anterior.

Corolario 1. Si $\beta < \alpha$, entonces h_β es dominada por h_α.

Deemostración. Si α es ordinal límite entonces podemos encontrar algún i tal que $\beta < \{\alpha\}(i)$. Por la hipótesis inductiva tenemos que h_β es dominada por $h_{\{\alpha\}(i)}$. Ahora veamos que $h_{\{\alpha\}(i)}$ es dominada por h_α. Si $x > i$, entonces por el lema 2.2.9 sucede que

$h_{\{\alpha\}(i)}(x) \leqslant h_{\{\alpha\}(x)}(x) = h_\alpha(x)$. Por lo tanto h_β es dominada por h_α.

Lema 2.2.11 Si a es ordinal límite, $\delta = \omega^{\delta_0}$ y $\omega^\delta > \alpha$, entonces

$$\omega^\delta \cdot \{\alpha\}(m) = \{\omega^\delta \cdot \alpha\}(m).$$

Demostración. Sea $\alpha = \alpha_0 + \omega^{\alpha_n}$ la forma normal de α.

Si $\alpha_n = \beta + 1$, entonces $\delta + \alpha_n = (\delta + \beta) + 1$ también es sucesor; así que $\omega^\delta \cdot \{\alpha\}(m) = \omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^\delta \cdot (\omega^\beta \cdot m) = \omega^\delta \cdot \alpha_0 + (\omega^{\delta+\beta}) \cdot m =$

$\{\omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^{(\delta+\beta)+1}\}(m) = \{\omega^\delta \cdot \alpha\}m.$

Si α_n es límite entonces $\omega^\delta \cdot \{\alpha\}(m) = \omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^\delta \cdot \omega^{\{\alpha_n\}(m)}$. De la hipótesis $\omega^\delta > \alpha$ se infiere que $\delta > \alpha_n$. Además $\delta + \alpha_n$ también es límite así que $\{\omega^\delta \cdot \alpha\}(n) = \{\omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^{\delta+\alpha_n}\}(m) = \omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^{\{\delta+\alpha_n\}(m)} =$

$\omega^\delta \cdot \alpha_0 + \omega^{\delta + \{\alpha_n\}(m)}$. ($\{\delta + \alpha_n\}(m) = \delta + \{\alpha_n\}(n)$ ya que $\delta > \alpha_n$)

Definición. Dado un ordinal α definimos la complejidad $c(\alpha)$ de la siguiente manera:

$$c(0) = 0, \qquad c(\omega^\alpha) = c(\alpha) + 1, \qquad c(\alpha + \beta) = c(\alpha) + c(\beta).$$

Lema 2.2.12. Sea β un ordinal límite, $\alpha < \beta$ y $c(\alpha) < n$. Entonces $\alpha < \{\beta\}(n)$.

Demostración. Primero notemos que si $\alpha = \delta + (\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{\alpha_s} \cdot a_s)$ $(\alpha_1 > \ldots > \alpha_s)$ y $\beta = \delta + (\omega^{\beta_1} \cdot b_1 + \ldots + \omega^{\beta_r} \cdot b_r)$ entonces $\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 < \omega^{\beta_1} \cdot b_1$. Además podemos afirmar que $\{\beta\}(n) \geq \delta + \omega^{\beta_1}(b_1 - 1) + \{\omega^{\beta_1}\}(n)$.

Caso 1. $\beta_1 > \alpha_1$

(a) Si $\beta_1 = \beta_0 + 1$ entonces $\beta_0 \geq \alpha_1$ y $\{\omega^{\beta_1}\}(n) = \omega^{\beta_0} \cdot n \geq \omega^{\alpha_1} \cdot n$. Además sucede que $n > c(\alpha) \geq a_1$; y por lo tanto $\{\omega^{\beta_1}\}(n) \geq \omega^{\alpha_1}(a_1+1) > \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{\alpha_s} \cdot a_s$.

(b) β_1 es ordinal límite, ie. $\beta_1 > \alpha + 1$. Por la hipótesis inductiva $\{\beta_1\}(n) > \alpha_1 + 1$, (ya que $n > c(\alpha) \geq c(\alpha_1 + 1)$) de donde $\{\omega^{\beta_1}\}(n) = \omega^{\{\beta_1\}(n)} > \omega^{\alpha_1+1} = \omega^{\alpha_1} \cdot \omega$.

Caso 2. $\beta_1 = \alpha_1$ y $b_1 > a_1$

En este caso $\omega^{\beta_1}(b_1 - 1) \geq \omega^{\alpha_1} \cdot a_1$ y por la hipótesis inductiva $\{\omega^{\beta_1}\}(n) > \omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + .. + \omega^{\alpha_s} \cdot a_s$ (ya que $n > c(\alpha) > c(\omega^{\alpha_2} \cdot a_2 + .. + \omega^{\alpha_s} \cdot a_s)$).

Lema 2.2.13 Sea $\delta = \omega^{\zeta}$, $\alpha < \beta < \omega^{\delta}$ y $c(\alpha) < x$. Entonces $h_{\omega^{\delta}\cdot\alpha}(x) < h_{\omega^{\delta}\cdot\beta}(x)$.

Demostración. Por inducción sobre β.

Si $\beta = \beta_0 + 1$, entonces

$$h_{\omega^{\delta}\cdot\alpha}(x) \leqslant h_{\omega^{\delta}\cdot\beta_0}(x) < h_{\omega^{\delta}\cdot\beta_0}(h_{\omega^{\delta}}(x)) = h_{\omega^{\delta}(\beta_0+1)}(x)$$

La desigualdad estricta se cumple ya que $h_{\omega^{\delta}}(x) > x$ y $h_{\omega^{\delta}\cdot\beta_0}$ es estrictamente creciente. La primera desigualdad se satisface por la hipótesis inductiva.

Si β es un ordinal límite por el lema anterior tenemos que $\alpha < \{\beta\}(x)$. Así que

$$h_{\omega^{\delta}\cdot\alpha}(x) < h_{\omega^{\delta}\cdot\{\beta\}(x)}(x) = h_{\{\omega^{\delta}\cdot\beta\}(x)}(x) = h_{\omega^{\delta}\cdot\beta}(x)$$

2.3 EL RESULTADO PRINCIPAL

PROPOSICION. Sea ϕ un enunciado $PA-$derivable de la forma $\forall y \exists x R(y,x)$. Entonces existe una función de Hardy h_α y una función resursiva primitiva $u(x)$ tal que para toda x, $\sigma_\phi(x) < h_\alpha(u(x))$.

Dem. De la prueba de la proposición 2.1.1 recordemos que existe una función g tal que

$$\sigma_\phi(m) = g([P(m)]) \, , \quad \text{donde } g \text{ está definida por}$$

$$g(x) = \begin{cases} g(r(x)) & \text{si } O(r(x)) < O(x) < \omega_n \\ x & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por el corolario de los lemas2.2.5 y 2.2.6 es suficiente que probemos que existen h_α y $u(x)$ tales que para toda x, $g(x) < h_\alpha(u(x))$. Nótese que la asignación de ordinales a pruebas que presentamos satisface la condición $x > c(O(x))$ para aquellos x que sean números de Gödel de alguna prueba. Definimos el ordinal $|x|$ de la siguiente manera:

$$|x| = \quad O(x) \quad \text{si } O(r(x)) < O(x) < \omega_n$$

$x \qquad$ en cualquier otro caso

Como $r(x)$ es primitiva recursiva existe un natural p tal que $r(x) \leqslant \max(h_{\omega_n}(x), p)$ y por lo tanto $\max(x, \max(r(x), p)) \leqslant h_{\omega_n}(\max(x,p))$. Definimos $u(x) = \max(x,p)$. Así que

$$\max(x, u(r(x))) = \max(x, \max(r(x), p)) \leqslant h_{\omega_n}(\max(x,p)) = h_{\omega_n}(u(x))$$

Por inducción sobre $|x|$ probaremos que

$$g(x) \leqslant h_{\omega_n \cdot |x|}(u(x)).$$

Si $|x|$=0, entonces $g(x) = x \leqslant u(x) = h_0(u(x))$. Ahora supongamos $|x| > 0$ y que la desigualdad se cumple para los s tales que $|s| < |x|$,entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant \max(x, g(r(x))) \\ &\leqslant \max\left(x, h_{\omega_n \cdot |r(x)|}(u(r(x)))\right) \\ &\leqslant h_{\omega_n \cdot |r(x)|}(\max(x, u(r(x)))) \\ &\leqslant h_{\omega_n \cdot |r(x)|}(h_{\omega_n}(u(x))) \\ &\leqslant h_{\omega_n \cdot (|r(x)|+1)}(u(x)) \\ &\leqslant h_{\omega_n \cdot |x|}(u(x)). \end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple por el lema 2.2.13 y porque

$$c(|r(x)|+1) \leqslant c(|r(x)|) + 1 \leqslant r(x) < u(x)$$

Nuevamente recurrimos al lema 2.2.13 y observamos que como $c(|x|) < x < u(x)$, se concluye que

$$g(x) < h_{\omega_n \cdot \omega_n}(u(x)).$$

$\boxdot$

Definición. Decimos que una función $f : N^n \to N$ es monótona si para $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in N$

si $x_1 \leqslant y_1, ..., x_n \leqslant y_n$ entonces $f(x_1, ..., x_n) \leqslant f(y_1, ..., y_n)$

Lema 2.3.2. Sean $g(x), p(x)$ y $h(x)$ funciones monótonas de ω en ω que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Toda función recursiva demostrable en PA es dominada por g.
(2) $p(x)$ es recursiva demostrable

(3) Para cada $x \in \omega$, $g(x) \leqslant h(p(x))$.

Entonces toda función recursiva demostrable en PA es dominada por h.

PRUEBA.Sea $p'(x) = \max(x, p(x))$ Dada una función recursiva demostrable en PA definimos $q(x)$ y $q_0(x)$ de la siguiente manera:

$$q(x) = \text{el mínimo } y \text{ tal que } y \leqslant x \text{ y } x \leqslant p'(y)$$
$$q_0(x) = q(x) - 1.$$

Notemos que $x \leqslant p'(q_0(x)+1) = p'(q(x))$ y por lo tanto
$f(x) \leqslant f(p'(q_0(x)+1))$

La función $f(p'(x+1))$ es recursiva demostrable en PA, así que por (1) existe un natural m tal que si $x \geq m$, entonces $f(p'(x+1)) < g(x)$. Además por las definiciones de q y q_0, $p'(q_0(x)) < x$. De lo anterior se sigue que si $x \geq m$, entonces

$$f(x) \leqslant f(p'(q_0(x)+1)) < g(q_0(x)) \leqslant h(p'(q_0(x))) \leqslant h(x)$$

Respecto al crecimiento de la prueba reducida observamos que en este caso la $\text{long}(P'(m)) = \text{long}(P(m)) \cdot m$ y entonces $\text{long}(P'(m)) < (\gamma(p))^2$. Además, cada uno de las fórmulas introducidas tiene número de Gödel calculable recursivamente a partir de p.

Por lo anterior tenemos que :

$$\begin{aligned}\max(x, u(r(x))) &= \max(x, \max(r(x), b) + b) \\ &\leqslant h_{\omega_n}(\max(x, b)) + b \\ &\leqslant h_{\omega_n}(\max(x, b) + b) \\ &= h_{\omega_n}(u(x))\end{aligned}$$

2.4. APLICACIONES DEL RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección mostramos cómo el resultado principal es usado para probar la inderivabilidad en PA de ciertos enunciados. Además del enunciado Paris-Harrington persentamos el teorema de Goodstein como ejemplo de un enunciado verdadero en la interpretación natural y que sin embargo es inderivable en PA.

Definición. Sean m, n números naturales, $n > 1$. Definimos la representación de m en base pura n como aquélla en la que sólo aparecen n y 1 y en la que no hay términos repetidos. Por ejemplo $10 = 2^{2+1} + 2$. También podemos representar al 10 como 2^2+2^2+2, sin embargo hay un término repetido. Debe notarse que es precisamente por este requerimiento que la representación en base pura n es única.

Ahora definimos el número de Goodstein $g_n(m)$ de la siguiente manera: $g_n(0) = 0$. Para $m > 0$ $g_n(m)$ es el número obtenido al remplazar n por $n+1$

en la representación base pura n de m y luego restar 1. Por ejemplo $g_2(10) = 3^{3+1} + 3 - 1$. La secuencia de Goodstein para m se define a continuación:

$$m_0 = m \qquad m_k = g_{k+1}(m_{k-1})$$

Veamos la secuencia de Goodstein para 10

$10_0 = 10 = 2^{2+1} + 2.$
$10_1 = 3^{3+1} + 3 - 1 = 3^{3+1} + 1 + 1$
$10_2 = 4^{4+1} + 1 + 1 - 1 = 4^{4+1} + 1.$
$10_3 = 5^{5+1} + 1 - 1 = 5^{5+1}$
$10_4 = 6^{6+1} - 1 = 5(6^6 + 6^5 + 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6 + 1)$
.

Dado un natural x y un ordinal $\alpha < \varepsilon_0$ definimos las siguientes funciones:

(1) $G_x(0) = 0, \qquad G_x(\alpha+1) = G_x(\alpha) + 1$
$G_x(\alpha) = G_x(\{\alpha\}(x))$ si α es ordinal.

(2) $P_x(0) = 0, \qquad P_x(\alpha+1) = \alpha$
$P_x(\alpha) = P_x(\{\alpha\}(x))$ si α es ordinal

Lema 2.4.1. $G_x(\alpha+\beta) = G_x(\alpha) + G_x(\beta)$
Demostración. Por inducción sobre β
(a) $\beta = \beta_0 + 1$
$G_x(\alpha + (\beta_0+1)) = G_x((\alpha+\beta_0)+1) = G_x(\alpha+\beta_0)+1 = G_x(\alpha) + G_x(\beta_0) + 1 = G_x(\alpha) + G_x(\beta_0+1)$.
(b) β es ordinal límite.
$G_x(\alpha+\beta) = G_x(\{\alpha+\beta\}(x)) = G_x(\alpha + \{\beta\}(x)) = G_x(\alpha) + G_x(\{\beta\}(x)) = G_x(\alpha) + G_x(\beta)$

Lema 2.4.2. $G_x(\omega^\alpha) = x^{G_x(\alpha)}$.
Demostración. Por inducción sobre α. Si α es ordinal límite $G_x(\omega^\alpha) = G_x(\{\omega^\alpha\}(x)) = G_x(\omega^{\{\alpha\}(x)}) = x^{G_x(\{\alpha\}(x))} = x^{G_x(\alpha)}$.
Para $\alpha+1$ tenemos que

$$G_x(\omega^{\alpha+1}) = G_x(\omega^\alpha \cdot x) = G_x\left(\overbrace{\omega^\alpha + \ldots + \omega^\alpha}^{x}\right) =$$
$$= \underbrace{x^{G_x(\alpha)} + \ldots + x^{G_x(\alpha)}}_{x} = x^{G_x(\alpha)+1} = x^{G_x(\alpha+1)}$$

Como corolario de lo anterior tenemos que $G_x(\alpha)$ es el resultado de remplazar ω por x en la forma normal de α.

Lema 2.4.3. Para cualquier natural x y $\alpha < \varepsilon_0$, se cumple la siguiente ecuación:

$$G_x P_x(\alpha) = P_x G_x(\alpha)$$

Demostración.

(a) $G_xP_x(\alpha+1) = G_x(\alpha) = P_x(G_x(\alpha)+1) = P_x(G_x(\alpha+1)) = P_xG_x(\alpha+1)$

(b) $G_xP_x(\alpha) = G_xP_x(\{\alpha\}(x)) = P_xG_x(\{\alpha\}(x)) = P_xG_x(\alpha)$

Ahora vamos a ver cómo se puede obtener la secuencia de Goodstein para cada natural m a partir de G_x y P_x. Sea α el ordinal obtenido de reemplazar n por ω en la representación estricta base 2 de m. Así que $m_0 = m = G_2(\alpha)$.

$m_1 = G_3(\alpha) - 1 = P_3G_3(\alpha) = G_3P_3(\alpha)$

$m_2 = G_4(P_3(\alpha)) - 1 =$

$= P_4G_4P_3(\alpha)$

$= G_4P_4P_3(\alpha)$

$m_k = G_{2+k}P_{2+k}P_{2+k-1}....P_3(\alpha)$

Como $G_x(\alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$ tenemos que el enunciado $\forall m\exists k(m_k = 0)$ es implicado por $\forall\alpha\exists kP_{2+k}P_{2+k-1}...P_3(\alpha) = 0$, lo cual es obvio ya que para $\alpha > 0$, $P_x(\alpha) < \alpha$.

PROPOSICION. Si $0 < \alpha < \varepsilon_0$ entonces $(\mu x)(P_xP_{x-1}...P_3(\alpha) = 0) = h_\alpha(3) - 1$, donde $\mu x\phi(x)$ es el mínimo natural que satisface $\phi(x)$.

Dem. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces

$$(\mu x)(P_x....P_3(\beta+1) = 0) = (\mu x)(P_x...P_4(\beta) = 0) = h_\beta(4) - 1 = \\ = h_\alpha(3) - 1$$

Si α es ordinal límite, entonces

$$(\mu x)(P_x...P_3(\alpha) = 0) = (\mu x)(P_x...P_4P_3(\{\alpha\}(3))) = h_{\{\alpha\}(3)}(3) - 1 = \\ = h_\alpha(3) - 1.$$

Ahora vamos a probar que el enunciado $\forall m\exists k(m_k = 0)$ no es derivable en PA. Definimos la sucesión de ordinales $\{\alpha_n\}$, donde para cada natural n $\alpha_n = \omega_n + \omega_{n-1} + \omega_{n-2} + ... + 1$; nótese que $\mu x(Px...P_3(\alpha_n) = 0) =$

$h_{\alpha_n}(3) - 1$. Sea a_n el natural que resulta de reemplazar 2 por ω en α_n. Así que $(a_n)_k = G_{2+k}P_{2+k}P_{2+k-1}...P_3(\alpha_n)$ y por lo tanto $\mu x((a_n)_x = 0) = \mu x(P_x...P_3(\alpha_n) = 0) = h_{\omega_n}(3) - 1$. Si $\forall m\exists k(m_k = 0)$ fuera derivable en PA entonces $h_{\alpha_n}(3)$ como función de n sería recursiva demostrable en PA, lo cual es una contradicción ya que $h_{\alpha_n}(3) \geqslant h_{\omega_n}(n)$ y $h_{\omega_n}(n)$ no es dominada por ninguna h_β $(\beta < \varepsilon_0)$.

El enunciado Paris-Harrington

A continuación mostraremos que a partir del resultado principal de la sección anterior también se puede demostrar la inderivabilidad de una variante del enunciado PH, al cual denotaremos PH'. Para ello basta probar que la función $\sigma_{PH'}$ no es dominada por ninguna función de Hardy, aunque de hecho mostraremos algo más fuerte: cualquier función de Hardy es dominada por $\sigma_{PH'}$. Recordemos que el enunciado PH es

$$\forall d\, \forall b \forall c \exists a \left(a \to_* (d)^b_c\right)$$

El enunciado PH' no es más que el enunciado PH para el caso $d = b$, es decir

$$\forall b \forall c \exists a \left(a \to_* (b)^b_c\right)$$

Sea $\sigma(b,c)$ el mínimo natural para el cual

$$\sigma(b,c) \to_* (b)^b_c$$

Probaremos que $\sigma(n,n)$ domina a cualquier función de Hardy. Para ello introducimos las siguientes definiciones:

(1) Dados naturales n y c, un $(n,c) - \acute{a}lgebra$ es un mapeo $G : N^{[n]} \to C$, donde C es un conjunto finito de cardinalidad c.

(2) Un subconjunto finito S de N es adecuado para un $(n,c) - \acute{a}lgebra$ G si S es grande y homogéneo para G y $|S| > n$.

TEOREMA 2.4.4 Para toda $n \geqslant 1$ existe un $(2n+3, \rho(n))$–álgebra G tal que si S es adecuado para G entonces $\max(S) > h_{\omega_n}(n)$.

Ahora veamos que como corolario de este teorema se tiene que

$$h_{\omega_n}(n) < \sigma(2n+3, \rho(n))$$

Sea $m = \sigma(2n+3, \rho(n))$ y sea G tal como en el teorema, i.e. $G : \omega^{[2n+3]} \to \rho(n)$. Definimos g como la restricción de G a m, es decir $g : m^{[2n+3]} \to \rho(n)$ y $g(i) = G(i)$ para cualquier $i \subset m$ de longitud $2n+3$. Es claro por la elección de m que existe un subconjunto $H \subset m$ tal que H es grande, homogéneo para g y de cardinalidad al menos $2n+3$, i.e H es adecuado para G ; por el teorema anterior se tiene que $\max(H) > h_{\omega_n}(n)$. Es obvio que $m > \max(H)$, así que $m > h_{\omega_n}(n)$.

Por el Lema 2.3.2 se concluye que toda función recursiva demostrable en PA es dominada por $\sigma(n,n)$.

En lo que resta de esta sección demostramos el teorema 2.4.4.

Definición.

(1) Decimos que el álgebra G_1 simula al álgebra G_2 si todo sunconjunto adecuado para G_1 también es adecualdo para G_2.

(2) Si G_1 y G_2 son álgebras con la misma dimensión entonces el álgebra G definida por $G(u) = (G_1(u), G_2(u))$ es llamado el álgebra producto de G_1 y G_2.

Observación.

Las siguientes proposiciones se siguen inmediatamente:

(1) Si F es el álgebra producto de F_1 y F_2, entonces F simula a F_1 y F_2.

(2) Cualquier (n, c_1c_2) −álgebra es isomorfa al producto de un (n, c) −álgebra y un (n, c_2) −álgebra.

(3) Si $c_1 \leqslant c_2$ entonces cualquier (n, c_1) −álgebra es también un (n, c_2)-álgebra.

Proposición 2.4.5. Sea G un (n, c)-álgebra y $S \subset N$. Si cada conjunto $T \subset S$ de cardinalidad $n+1$ es homogéneo para G entonces S es homogéneo para G.

Demostración. Por contrapuesta; supongamos que S no es homogéneo para G.. Sean $a_1, ...a_n = a$ los primeros n elementos de S. Escogemos $b = b_1, ..., b_n$ de manera que $G(a) \neq G(b)$ y $b_1 + ... + b_n$ es mínimo. Si i es el primer índice para el cual $a_i \neq b_i$, consideramos el conjunto $\{a_1, ..., a_i, b_i, ..., b_n\}$. Es claro por la elección de i que

$a_1 + ... + a_i + b_{i+1} + ... + b_n < a_1 + ... + a_{i-1} + b_i + ... + b_n$ y como $b = a_1, ..., a_{i-1}, b_i, ..., b_n$ sucede que $G(a_1, ..., a_i, b_{i+1}, ..., b_n) \neq G(b)$. Así que $\{a_1, ..., a_1, b_i, ..., b_n\}$ es de tamaño $n+1$ y sin embargo no es homogéneo.

Lema 2.4.6. *Sea* $G_i : \omega^{[n]} \to C_i$ *una familia de* (n, c_i) *−álgebras* $(1 \leqslant i \leqslant k)$. *El álgebra producto* $G : \omega^{[n]} \to C_1 \times ... \times C_k$ *puede ser simulada por un* $(n+1, c_1, ...c_k + 1) -$ *álgebra.*

Demostración. Definimos un álgebra $G' : \omega^{[n+1]} \to \{0\} \cup (\cup_{1 \leqslant i \leqslant k} \{i\} \times C_i)$ de la siguiente manera. (es claro que $|\cup_{1 \leqslant i \leqslant k} \{i\} \times C_i| = c_i + ... + c_k$).

Si $X \in \omega^{[n+1]}$ es homogéneo para cada G_i, entonces $G'(X) = 0$. En caso contrario, si i es el menor ídice para el cual X no es homogéneo, entonces $G'(X) = (i, G_i(Y))$, donde Y es integrado por los primeros elementos de X.

Corolario (1) Sea $c \leqslant c_1 \cdot ...c_k$, entonces cualquier $(n, c) -$ *álgebra* puede ser simulado por algún $(n+1, c_1 + ... + c_k)$ −álgebra.

(2) Cualquier $(n, 7)$ −álgebra puede ser simulado por algún $(n+1)$ −álgebra.

Lema 2.4.7

(1) Sea G un (n, c) −álgebra y $d \geqslant 1$. Existe un $(n, c+d) -$ álgebra G' que simula a G y tal que cualquier S adecuado para G', min$(S) \geqslant d$.

Demostración.

Sea C el contradominiode G. Definimos $G' : \omega^{[n]} \to (\{0\} \times d) \cup (\{1\} \times C)$ de la siguiente manera. Supongamos $X \in \omega^{[n]}$, si $\min(X) < d$, entonces $G'(X) = (0, \min X)$, en caso contrario $G'(X) = (1, G(X))$.

Sea $S = \{s_0, ..., s_m\}$ un conjunto adecuado para G', i.e. $m \geqslant n$. Si suponemos $s_0 \geqslant d$ entonces $G'(\{s_0, ..., s_{n-1}\}) = (0, s_0)$, y por la homogeneidad de S, $G'(\{s_1, ..., s_n\}) = (0, s_0)$. Por la definición de G' esto implicaría que s_0 es el mínimo de $\{s_1, ..., s_n\}$, lo cual es una contradicción.

Así que $G'(\{s_0, ..., s_{n-1}\}) = (1, G(\{s_0, ..., s_{n-1}\}))$ y entonces $G'(X) = (1, G(X)) = (1, G(\{s_0, ..., s_{n-1}\}))$ para todo $X \subset S$, es decir que S también es adecuado para G.

Lema 2.4.8. Para $n\geqslant 2$ existe un $(n,7)$ –álgebra G tal que si S es adecuado para G entonces $\min(S)\geqslant 2n+3$.

Dem. Primero definimos un $(1,4)$ –álgebra G' de la siguiente manera:

si $0\leqslant m<n$ $\quad G'(m)=0$
si $n\leqslant m<2n$ $\quad G'(m)=1$
si $2n<m<4n-1$ $\quad G'(m)=2$
si $4n-1\leqslant m$ $\quad G'(m)=3.$

Por el último corolario sabemos que existe un $(n,7)$ –álgebra que simula G'. El álgebra obtenido así es el que estamos buscando.

⊡

Definimos funciones $E_m:\omega\to\omega$ de la siguiente manera:

$$E_0(n)=n \qquad \text{y} \qquad E_{m+1}(n)=2^{E_m(n)}$$

El siguiente lema vincula estas funciones con las definiciones anteriores :

Lema 2.4.9. Sea $h:\omega^{[n]}\to\omega$. Supongamos que $h(x_1,...,x_n)<E_m(x_1)$ siempre que $1\leqslant x_1<...<x_n$. Entonces existe un $(n+m+1,10^{2m+2})$-álgebra G tal que para todo conjunto S adecuado para G, existe una función $g_s:S\to\omega$ tal que para cualquier $X\in S^{[n]}$, $h(X)=g_s(x_1)$. En este caso decimos que en h sólo depende de la primera coordenada en $S^{[n]}$.

Lema 2.4.10. Si $g:\omega^{[n]}\to\omega$ es tal que $g(x_1,...,x_n)\leqslant x_1$, entonces existe un $(n+1,10^4)$-álgebra G tal que para cualquier S adecuado:

(1) En $S^{[n]}$, g depende sólo de la primera coordenada.

(2) Si $X,Y\in S^{[n]}$ y $\min(X)<\min(Y)$, entonces $g(X)\leqslant g(Y)$.

Dem. G_1 es un $(n,2)$ –álgebra definido así: $G_1(X)=0$ si y sólo si $g(x)<\min(X)$.

Definimos $g':\omega^{[n]}\to\omega$ como sigue: si $g(X)<\min(X)$, $g'(X)=g(X)$, $g'(X)=0$ en caso contrario. Sea G_2 el $(n+1,100)$ –álgebra obtenido aplicando el lema anterior a g' ($m=0$ en ese lema) .

G_3 es un $(n+1,2)$ –álgebra; $G_3(X)=0$ si $g(x_1,...,x_n)<\left[\frac{1}{2}x_0\right]$; en caso contrario $G_3(X)=1$.

G_4 es un $(n+1,2)$ –álgebra; $G_4(x_0,...,x_n)=0$ si $g(x_0,...,x_{n-1})\leqslant g(x_1,...x_n)$, en caso contrario $G_4(x_0,...,x_n)=1$.

G_5 es el $(n,7)$ álgebra obtenido por el lema 2.4.8 ; de esta manera cualquier S adecuado para G_5 satisface que $\min(S)\geqslant 2n+3$.

El álgebra que buscamos es un $(n+1,10^4)$ –álgebra que simula a $G_1,G_2,...,G_5$. (lema 2.4.9).

Recuérdese que hasta el momento se ha definido $\{\alpha\}(n)$ sólo cuando α es ordinal límite. Ahora extendemos esta definición para todos los ordinales menores que ε_0 de la siguiente manera:

$$\{a+1\}(n)=\alpha \qquad \text{y} \qquad \{0\}(n)=0$$

Definición. Dados ordinales $\alpha, \beta, \alpha < \beta$ y una secuencia de ordinales $\gamma_0, ..., \gamma_r$, el hecho que $\gamma_0 = \beta, \gamma_r = \alpha$, y $\gamma_{i+1} = \{\gamma_i\}(n)$ para $0 \leqslant i < r$, será abreviado por la notación $\beta \rightarrow_n \alpha$.

Proposición 2.4.11

(1) Si $\alpha > 0$, entonces $\alpha \rightarrow_n 0$

(2) Para $n \geqslant 1$, si $\alpha_1 \rightarrow_n \alpha_2$, entonces $\omega^{\alpha_1} \rightarrow_n \omega^{\alpha_2}$.

(3) Si α es ordinal límite, $i < j < \omega$, y $0 < n < \omega$, entonces $\{\alpha\}(j) \rightarrow_n \{\alpha\}(i)$.

(4) Si $n > i$ y $\alpha \rightarrow_i \beta$ entonces $\alpha \rightarrow_n \beta$.

(5) Si $\alpha \rightarrow_n \beta$ entonces $h_\beta(n) \leqslant h_\alpha(n)$.

Prueba

(2) Suponemos $\alpha_2 = \{\alpha_1\}(n)$. Si α es ordinal límite entonces $\{\omega^{\alpha_1}\}(n) = \omega^{\{\alpha_i\}(n)} = \omega^{\alpha_2}$. Si $\alpha_1 = \beta + 1$, entonces $\alpha_2 = \beta$ y $\{\omega^{\alpha_1}\}(n) = \omega^{\alpha_2} \cdot n$. A través de sucesivas aplicaciones de $\{\}(n)$ se reduce $\omega^{\alpha_2} \cdot (n-1)$ a 0, próbandose así $\omega^{\alpha_1} \rightarrow_n \omega^{\alpha_2}$.

(3) Basta probar el caso $i = j - 1$.

$\boxdot$

Para naturales n, x definimos:

$$T(\omega_n, x) = \{a : \omega_n \rightarrow_x \alpha\}$$

Dado cualquier natural m definimos $m_{(n)}$ recursivamente de la siguiente manera

$$m_{(0)} = m \qquad m_{(n+1)} = m^{m_{(n)}}$$

Proposición 2.4.12

(1) La cardinalidad de $T(\omega_n, x)$ es menor o igual que $(x+1)_{(n-1)}$, es decir

$$m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}} \quad n \quad (m = x+1)$$

(2) $(x+1)_{(n-1)} \leqslant E_{2n}(x)$

PRUEBA. (1) Por inducción sobre n. El caso $n+1$ definimos M como el conjunto de los ordinales α tales que todos los exponentes en la forma normal de Cantor para α están en $T(\omega_{n+1}, x)$ y todos los coeficientes en la forma normal de Cantor para α son menores o iguales que x. Es fácil ver que si $\alpha \in M$ también lo está $\{\alpha\}(x)$ y que $\{\omega_n\}(x)$ está en M. Así que $T(\omega_{n+1}, x) \subsetneq M$ y entonces

$$|T(\omega_{n+1}, x)| \leqslant |M| \leqslant (x+1)^{|T(\omega_n, x)|}.$$

Definición. Para $m, n \in \omega$ definimos recursivamente $E(m, n)$ de la siguiente manera:

$E(m,0) = 1 \qquad E(m,n+1) = m^{E(m,n)}$

Proposición 2.4.13 . Para $x \geqslant 1, |T(\omega_n, x)| \leqslant E_{2n}(x)$.

Por la proposición anterior se tiene que $|T(\omega_n, x)| \leqslant E(m,n)$, así que basta probar que $E(m,n) \leqslant E_{2n}(x)$, donde $m = x+1$. Es obvio que $(1+n) \leqslant 2^n$.Por lo tanto $2(n+1) \leqslant 2 \cdot 2^n \leqslant 2^{n+1}$ y $2n \leqslant 2^n$ y entonces $n \cdot 2^n \leqslant 2^{2n} \leqslant 2^{2^n}$. Ahora probamos $E(m,n) \leqslant E_{2n}(x)$ por inducción sobre n. Para $n = k+1$ notamos que

$$\begin{aligned} \log_2 E(m,k+1) = E(m,k) \log_2 m &\leqslant x E_{2k}(x) \\ &\leqslant E_{2k-1}(x) \cdot E_{2k}(x) \\ &\leqslant 2^{E_{2k}(x)} = E_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

□

Dada una función $g : \omega^{[n]} \to \varepsilon_0$, decimos que g es débilmente controlada por un álgebra G si para cualquier conjunto adecuado S, g sólo depende de su primera coordenada en $S^{[n]}$, y entonces, si $X, Y \in S^{[n]}$ y min$X$ =min$Y$ entonces $g(X) = g(Y)$. En este caso definimos una función g_S de un sunconjunto S en ε_0 poniendo $g(x_0) =$
$g(x_0, ..., x_{i-1})$.

Decimos que g es controlada por G si g es débilmente controlada por G y además sucede que para todo conjunto S adecuado de G, si $x_0, x_1 \in S$, $x_0 < x_1$ y $g_s(x_0)$, $g_s(x_1)$ están definidas, entonces $g_s(x_0) \leqslant g_s(x_1)$.

A partir de ahora utlizaremos la expresión $n-$álgebra G para referirnos a un $(n,c)-$álgebra G con ciertas propiedades y en donde el número c se puede calcular recursivamente a partir de n, es decir $c = \rho(n)$ deonde ρ es primitiva recursiva.

Lema 2.4.14. Sea $g : \omega^{[n]} \to \varepsilon_0$. Si $g(x_0, ..., x_{n-1}) \in T(\omega_k, x_0)$ para cualquier $x \in \omega^{[n]}$, entonces g es débilmente controlada por un $n + 2k + 1-$álgebra.

Prueba. El caso $k = 0$ es trivial. Así que suponemos $k \geqslant 1$. Por el corolario anterior sabemos que $g(x_0, ..., x_{n-1}) \in T(\omega_k, x_0)$ implica $g(x_0, ..., x_{n-1}) \leqslant E_{2k}(x_0)$, así que el lema 2.4.9 garantiza la existencia de un $n + 2k + 1-$álgebra G en el que si S es adecuado para G, $g(x_0, ..., x_{n-1})$ depende sólo de x_0 en $S^{[n+2k+1]}$, suponiendo que $x_0 \geqslant 1$. Por lo tanto basta demostrar que G puede ser simulada por un $n + 2k + 1-$álgebra G' tal que si S es adecuado para G' entonces $\min(S) \geqslant 1$. Esto último sucede aplicando el lema 2.4.7 a G, tomando $d = 1$.

Lema 2.4.15 Sea $k \geqslant 1$. Sea $k \geqslant 1$ y supongamos $g : \omega^{[n]} \to \varepsilon_0$ satisface $g(x_0, ..., x_{n-1}) \in T(\omega_k, x_0)$. Entonces g puede ser controlada por algún $n + 2k + 1-$ álgebra.

Definición. Decimos que un álgebra $G : \omega^{[n]} \to C$ captura una función $f : \omega \to \omega$ si para cualquier conjunto adecuado S y $x, y \in S$, $x < y$ implica $f(x) \leqslant y$.

Teorema 2.4.16 Para cada $n \geqslant 1$, h_{ω_n} puede ser capturada por algún $2n+3-$ álgebra G.

PRUEBA.

Sea G_0 un $(2,2)-$álgebra; $G_0(x_0,x_1)=0$ si y sólo si $x_1 \geqslant h_{\omega_n}(x_0)$. Sea G_1 el $(2,5)-$álgebra de acuerdo al lema 2.4.7, i.e. G_1 simula a G_0 y cualquier conjunto adecuado S para G tiene $\min(S) \geqslant 3$.

Definimos una función $f: \omega^{[2]} \to \varepsilon_0$ como sigue: Si el conjunto de los ordinales α en $T(\omega_n, x_0)$ tales que $h_\alpha(x_0) \geqslant x_1$ es distinto del vacío, entonces $f(x_0,x_1)$ es el mínimo de dicho conjunto. En caso contrario $f(x_0,x_1)=0$. Es claro por la construcción de f que se satisfacen las hipótesis del lema 2.4.15 y por lo tanto existe un $2n+3-$álgebra G_2 que controla f.

Sea G algún $2n+3-$álgebra que simula a G_1 y a G_2; a contnuación mostramos que G captura h_{ω_n}.

Sea $S=\{s_0,...,s_m\}$ adecuado para G, debemos probar que si $x,y \in S, x<y$ entonces $h_{\omega_n}(x) \leqslant y$, lo cual es equivalente a probar que el valor constante de G_0 en $S^{[2]}$ es 0. Veamos que suponiendo que este valor es 1 se llega a una contradicción.

Sea $(x,y) \in S^{[2]}$. Ya que $G_0(x,y)=1$, $y<h_{\omega_n}(x)$. Si $\beta=f(x,y)$, entonces β es el mínimo ordinal en $T(\omega_n,x)$ tal que $y \leqslant h_\beta(x)$.

Veamos que β no puede ser ordinal límite; de lo contrario tendríamos que $\beta_1=\{\beta\}(n)<\beta$, $\beta_1 \in T(\omega_n,x)$ y $y \leqslant h_\beta(x)=h_{\beta_1}(x)$.

Así que $\beta=\delta+1$. Ya que G simula a G_2 y G_2 controla a f, f sólo depende de su primera coordenada en $S^{[2]}$; así que $f(x,y)=\delta(x)+1$ y entonces $f(x,y) \to_x \delta(x)$; de lo anterior se sigue que $\delta(x) \in T(\omega_n,x)$ y como $\delta<\beta$, tenemos que $y>h_{\delta(x)}(x)$. Además si $\delta(y)$ está definida entonces $\delta(x) \leqslant \delta(y)$.

Afirmamos que para $0 \leqslant i<s_0-1$, $s_{i+1}>h_{\delta(s_0)}(s_i)$. Del párrafo anterior se sigue que $s_{i+1}>h_{\delta(s_i)}(s_i)$ y que $\delta(s_0) \leqslant \delta(s_i)$; si $\delta(s_0)=\delta(s_i)$ hemos terminado. Supongamos $\delta(s_0)<\delta(s_i)$. Ya que $\omega_n \to_{s_0} \delta(s_0)$ y por (4) de la proposición 24.11, $\omega_n \to_{s_i} \delta(s_0)$; por (5) de la proposición 2.4.11, $h_{\delta(s_0)}(s_i) \leqslant h_{\delta(s_i)}(s_i)<s_i$, que es lo que buscamos demostrar.

Por último

$$h_{\delta(s_0)+1}(s_0)=h_{\delta(s_0)}(s_0+1) \leqslant h_{\delta(s_0)}(s_1)<s_2.$$

Pero $\delta(s_0)+1=f(s_0,s_2)$, por lo que de acuerdo a la definición de f $s_2 \leqslant h_{\delta(s_0)+1}(s_0)$.

TEOREMA 2.4.4. Para $n \geqslant 1$, existe un $2n+3-$álgebra G tal que si S es adecuado para G entonces $\max(S)>h_{\omega_n}(n)$.

PRUEBA. Sea G_0 un $2n+3-$álgebra que captura h_{ω_n}; sea G_1 un $(n+2,7)-$álgebra tal que si S es adecuado para G_1 entonces $\min(S) \geqslant 2n+3$.

Sea G un $2n+3-$álgebra que simula a G_0 y a G_1. Entonces, si S es adecuado para G,

$$\max(S) \geqslant s_2 \geqslant s_1 \geqslant h_{\omega_n}(s_0) \geqslant h_{\omega_n}(n).$$

Ap□ndice

Teorema 2.4.16 Para cada $n \geqslant 1$, h_{ω_n} puede ser capturada por algún $2n+3-$ álgebra G.

PRUEBA.

Sea G_0 un $(2,2)-$álgebra; $G_0(x_0,x_1)=0$ si y sólo si $x_1 \geqslant h_{\omega_n}(x_0)$. Sea G_1 el $(2,5)-$álgebra de acuerdo al lema 2.4.7, i.e. G_1 simula a G_0 y cualquier conjunto adecuado S para G tiene $\min(S) \geqslant 3$.

Definimos una función $f : \omega^{[2]} \to \varepsilon_0$ como sigue: Si el conjunto de los ordinales α en $T(\omega_n, x_0)$ tales que $h_\alpha(x_0) \geqslant x_1$ es distinto del vacío, entonces $f(x_0,x_1)$ es el mínimo de dicho conjunto. En caso contrario $f(x_0,x_1)=0$. Es claro por la construcción de f que se satisfacen las hipótesis del lema 2.4.15 y por lo tanto existe un $2n+3-$álgebra G_2 que controla f.

Sea G algún $2n+3-$álgebra que simula a G_1 y a G_2; a contnuación mostramos que G captura h_{ω_n}.

Sea $S=\{s_0,...,s_m\}$ adecuado para G, debemos probar que si $x,y \in S, x<y$ entonces $h_{\omega_n}(x) \leqslant y$, lo cual es equivalente a probar que el valor constante de G_0 en $S^{[2]}$ es 0. Veamos que suponiendo que este valor es 1 se llega a una contradicción.

Sea $(x,y) \in S^{[2]}$. Ya que $G_0(x,y)=1$, $y<h_{\omega_n}(x)$. Si $\beta = f(x,y)$, entonces β es el mínimo ordinal en $T(\omega_n,x)$ tal que $y \leqslant h_\beta(x)$.

Veamos que β no puede ser ordinal límite; de lo contrario tendríamos que $\beta_1 = \{\beta\}(n) < \beta$, $\beta_1 \in T(\omega_n,x)$ y $y \leqslant h_\beta(x) = h_{\beta_1}(x)$.

Así que $\beta=\delta+1$. Ya que G simula a G_2 y G_2 controla a f, f sólo depende de su primera coordenada en $S^{[2]}$; así que $f(x,y)=\delta(x)+1$ y entonces $f(x,y) \to_x \delta(x)$; de lo anterior se sigue que $\delta(x) \in T(\omega_n,x)$ y como $\delta<\beta$, tenemos que $y>h_{\delta(x)}(x)$. Además si $\delta(y)$ está definida entonces $\delta(x) \leqslant \delta(y)$.

Afirmamos que para $0 \leqslant i < s_0-1$, $s_{i+1} > h_{\delta(s_0)}(s_i)$. Del párrafo anterior se sigue que $s_{i+1} > h_{\delta(s_i)}(s_i)$ y que $\delta(s_0) \leqslant \delta(s_i)$; si $\delta(s_0)=\delta(s_i)$ hemos terminado. Supongamos $\delta(s_0)<\delta(s_i)$. Ya que $\omega_n \to_{s_0} \delta(s_0)$ y por (4) de la proposición 24.11, $\omega_n \to_{s_i} \delta(s_0)$; por (5) de la proposición 2.4.11, $h_{\delta(s_0)}(s_i) \leqslant h_{\delta(s_i)}(s_i) < s_i$, que es lo que buscamos demostrar.

Por último

$$h_{\delta(s_0)+1}(s_0) = h_{\delta(s_0)}(s_0+1) \leqslant h_{\delta(s_0)}(s_1) < s_2.$$

Pero $\delta(s_0)+1 = f(s_0,s_2)$, por lo que de acuerdo a la definición de f $s_2 \leqslant h_{\delta(s_0)+1}(s_0)$.

TEOREMA 2.4.4. Para $n \geqslant 1$, existe un $2n+3-$álgebra G tal que si S es adecuado para G entonces $\max(S) > h_{\omega_n}(n)$.

PRUEBA. Sea G_0 un $2n+3-$álgebra que captura h_{ω_n}; sea G_1 un $(n+2,7)-$álgebra tal que si S es adecuado para G_1 entonces $\min(S) \geqslant 2n+3$.

Sea G un $2n+3-$álgebra que simula a G_0 y a G_1. Entonces, si S es adecuado para G,

$$\max(S) \geqslant s_2 \geqslant s_1 \geqslant h_{\omega_n}(s_0) \geqslant h_{\omega_n}(n).$$

Ap□ndice

CALCULO DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN

En este apéndice presentamos una formulación de la lógica de primer orden conocida como Cálculo de Secuentes.

Para formular el cálculo de predicados lo primero que necesitamos es definir el lenguaje formal y las expresiones y enunciados válidos.

Definición. El lenguaje de primer orden consta de lod siguientes símbolos:

(1)Constantes:

(1.1) Costantes individuales : $k_0, ..., k_j, ...$

(1.2) Constantes de función de aridad i $(i = 1, 2, ...)$

$f_0^i, f_1^i, ...$

(1.3) Constantes de Predicado de aridad i

$R_0^i, R_1^i, ...,$

(2) Variables

(2.1) Variables libres: $a_0, a_1, ...$

(2.2) Vraiables acotadas: $x_1, x_2, ...$

(3) Símbolos Lógicos:

$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \exists, \forall.$

(4) Símbolos auxiliares :

paréntesis () y comas.

Definición de términos. Los términos son definidos inductivamente de la siguiente manera:

(1) Cada constante individual y cada variable es un término.

(2) Si f^i es un símbolo de función de aridad i y $t_1, ..., t_i$ son términos, entonces $f^i(t_1, ..., t_n)$ es un término.

(3) Los únicos términos son las expresiones obtenidas por (1) y (2).

Definición de fórmulas. Si R^i es un símbolo de predicado con i argumentos y $t_1, ..., t_i$ son términos entonces $R^i(t_1, ..., t_i)$ es una *fórmula atómica.*

El conjunto de fórmulas en LK es definido inductivamente de la siguiente manera:

(1) Cada fórmula atómica es una fórmula

(2) Si A y B son fórmulas, entonces $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B)$ y $(A \Rightarrow B)$ son fórmulas.

(3) Si A es una fórmula, a es una variable libre y x es una que no aparece en A, entonces $\forall x A'$ y $\exists x A'$ son fórmulas en donde A' es la expresión obtenida al reemplazar a por x en cada una de las presencias de a en A.

Como se puede observar, usaremos las letras $A, B, C, ..., F, G...$ como metavariables que designan fórmulas. Una fórmula sin variables libres es llamada un enunciado.

Debe notarse que por la condición impuesta en la cláusula (3) de la definición anterior elimina expresiones como $\forall x (B(x) \wedge \exists x A(x))$. Sin embargo esta restricción no límita de manera sustancial la clase de fórmulas ya que por ejemplo, la expresión anterior puede ser reemplazada por $\forall y\,(B\,(y) \wedge \exists x A\,(x))$ conservando el mismo significado.

Otra convención que se adopta normalmente es la omisión de paréntesis cuando se siguen ciertas prioridades en el orden. En este trabajo observaremos las siguientes prioridades: el conectivo $\neg$ lleva precedencia sobre $\vee$ y $\wedge$, y a su vea éstos llevan precedencia sobre $\Rightarrow$. Así que $\neg A \wedge B$ es una abreviación de $(\neg A) \wedge B$, y $A \wedge B \Rightarrow C$ es una abreviación de $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Definición.

(1)Sea A una expresión y $t_1, ..., t_n$ símblos primitivos distintos, y sean $s_1, ..., s_n$ símbolos cualquiera.

$$A\left(\frac{t_1, ..., t_n}{s_1, ..., s_n}\right)$$

es la expresión obtenida de A reemplazando $t_1, ..., t_n$ por $s_1, ..., s_n$ respectivamente en cada presencia de $t_1, ..., t_n$. No es necesario que de hecho $t_1, ..., t_n$ aparezcan en A.

(2) Sea A una fórmula y $t_1, ..., t_n$ términos cualquiera. Si existe una fórmula B y n variables distintas $b_1, ..., b_n$ tales que A es

$$B\left(\frac{b_1, ..., b_n}{t_1, ..., t_n}\right)$$

entonces decimos que cada una de las presencias t_i resultantes de este reemplazo está indicada en A. Puede suceder que A contenga otras presencias de t_i; este es el caso cuando B contiene t_i.

(3) Decimos que un término está totalmente indicado en A si cada presencia de t en A es obtenida por un reemlazo como el definido en (2) (de una fórmula B y con $n = 1$ y $t = t_1$).

PROPOSICION. Si $A\,(a)$ es una fórmula y x una variable que no aparece en $A\,(a)$, entonces $\forall x A\,(x)$ y $\exists x A\,(x)$ son fórmulas

En esta capítulo usaremos letras griegas mayúsculas $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda, \Gamma_0, ...$para denotar secuencias finitas (posiblemente vacías) de fórmulas separadas por comas. Para formular el cálculo de secuentes primero debemos introducir el símbolo auxiliar $\rightarrow$.

Definición 1. Para Γ, Δ arbitararias, $\Gamma \rightarrow \Delta$ es llamado un secuente.Γ es llamado el antecedente y Δ el consecuente. Cada fórmula en Γ y Δ es llamada una fórmula secuente.

Intuitivamente un secuente $A_1, ..., A_m \rightarrow B_1, ..., B_n$ $(m, n \geq 1)$ significa que $A_1 \wedge ... \wedge A_m$ implica $B_1 \vee ... \vee B_n$. Para $m \geq 1$, $A_1, ..., A_m \rightarrow$ quiere decir que $A_1 \wedge ... \wedge A_m$ lleva a una contradicción. Para $n \geq 1$, $\rightarrow B_1, ..., B_n$ significa que $B_1 \vee ... \vee B_n$ se cumple.El secuente vacío $\rightarrow$ significa que hay una contradicción. Los secuentes serán denotados por la letra S.

PRUEBAS FORMALES

Definición . Una inferencia es una expresión de la forma

$$\frac{S_1}{S} \qquad \text{ó} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

donde S, S_1, S_2 son secuentes. S_1 y S_2 son los secuentes superiores y S es el secuente inferior de la inferencia.

Intuitivamente esto significa que a partir de S_1 (S_1 y S_2) podemos inferir S. Nos restringiremos a las inferencias obtenidas de acuerdo a las siguientes reglas de inferencia, en las cuales $A, B, C, D, F(a)$ denotan fórmulas.

1) Reglas estructurales

1.1) Debilitamiento :

$$\text{izquierdo: } \frac{\Gamma \to \Delta}{D, \Gamma \to \Delta} \; ; \qquad \text{derecho: } \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, D}$$

D es llamada la fórmula de debilitamiento.

1.2) Contracción:

$$\text{izquierda: } \frac{D, D, \Gamma \to \Delta}{D, \Gamma \to \Delta} \; ; \qquad \text{derecha } \frac{\Gamma \to \Delta, D, D}{\Gamma \to \Delta, D}$$

1.3) Intercambio:

$$\text{izquierdo: } \frac{\Gamma, C, D, \Pi \to \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \to \Delta} \qquad \text{derecho: } \frac{\Gamma \to \Delta, C, D, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, D, C, \Lambda}$$

Nos referiremos a estos tres tipos de inferencia como "inferencias débles", mientras las demás serán llamadas "inferencias fuertes".

1.4) Corte

$$\frac{\Gamma \to \Delta, D \quad D, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

D es llamada la fórmula de corte de esta inferencia.

2) Reglas lógicas

$$2.1) \neg : \textit{izquierda} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, D}{\neg D, \Gamma \to \Delta} \qquad \neg : \textit{derecha} \quad \frac{D, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg D}$$

Decimos que D es la fórmula auxiliar y $\neg D$ la fórmula principal de esta inferencia.

2.2) $\wedge$: *izquierda* $\dfrac{C, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \rightarrow \Delta}$ y $\dfrac{D, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \rightarrow \Delta}$

$\wedge$: *derecha* $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, C \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \wedge D}$

C y D son las fórmulas auxiliares y $C \wedge D$ es la fórmula principal de esta inferencia.

2.3) $\vee$: *izquierda* $\dfrac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad D, \Gamma \rightarrow \Delta}{C \vee D, \Gamma \rightarrow \Delta}$

$\vee$: *derecha* $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, C}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \vee D}$ y $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \vee D}$

D y C son las fórmulas auxiliares y $C \vee D$ es la fórmula principal de esta inferencia.

2.4) $\supset$: *izquierda* $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, C \qquad D, \Pi \rightarrow \Lambda}{C \supset D, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$

$\supset$: *derecha* $\dfrac{C, \Gamma \rightarrow \Delta, D}{\Gamma \rightarrow \Delta, C \supset D}$

C y D son la fórmulas auxiliares de esta inferencia; $C \supset D$ es la fórmula principal.

Las últimas cuatro reglas son llamadas inferencias proposicionales.

2.5) $\forall$: *izquierda* $\dfrac{F(t), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$ $\forall$: *derecha* $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(a)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x F(x)}$

donde t es un término arbitrario y a no aparece en el secuente inferior. $F(t)$ y $F(a)$ son las fórmulas auxiliares de la inferencia; $\forall x F(x)$ es la fórmula principal. La variable a en $\forall -$ *derecha* es llamada la variable característica. (Nótese que en $\forall -$ *derecha* todas las presencias de a en $F(a)$ están indicadas).

2.6) $\exists$–*izquierda* $\dfrac{F(a), \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$ $\exists$–*derecha* $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x F(x)}$

donde a no aparece en el secuente inferior y t es un término arbitrario. $F(a)$ y $F(t)$ son las fórmulas auxiliares de la infercia; $\exists x F(x)$ es la fórmula principal. La variable a es la variable característica de $\exists -$ *izquierda*. Nótese que en $\exists -$ *izquierda* la variable a está totalmente indicada, mientras que en $\exists -$ *derecha* no toda t está necesariamente indicada.

Las reglas 2.5) y 2.6) son llamadas inferencias de cuantificador. La condición que se pide en $\forall - \textit{derecha}$ y $\exists - \textit{izquierda}$ a la variable a, que no aparezca en el secuente inferior, se llama la condición de la variable característica.

Llamamos axiomas a los secuentes de la forma $A \to A$

Definición de Prueba en LK

Una prueba en LK es un árbol de secuentes que satisface las siguientes condiciones:

1) Los secuentes iniciales de P deben ser axiomas.
2) Cada secuente de P, excepto el último, es el secuente superior de una inferencia cuyo secuente inferior también está en P.

El último secuente de una prueba P será llamado el secuente final. Decimos que P es una prueba de S si el secuente final de P es S. Un secuente es LK-demostrable si existe una prueba de S en LK. Una fórmula A es LK-demostrable si el secuente $\to A$ es demostrable en LK.

Lema Sea $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ un secuente LK-demostrable en el cual a está totalmente indicada, y sea $P(a)$ una prueba de $\Gamma(a) \to \Delta(a)$. Si b es una variable libre que no aparece en $P(a)$, entonces al substituir a por b en todas las presencias de a en $P(a)$ obtenemos una prueba $P(b)$ con secuente final $\Gamma(b) \to \Delta(b)$.

Demostración por inducción en el número de inferencias en $P(a)$. Si $P(a)$ no contiene inferencias entonces $P(a)$ es el secuente inicial $\Gamma(a) \to \Delta(a)$. En este caso $P(b)$ es el secuente inicial $\Gamma(b) \to \Delta(b)$.

Supongamos que la propiedad se cumple para pruebas con n ó menos inferencias, consideramos $P(a)$ con $n+1$ inferencias. La demostración se hace por casos dependiendo de la última inferencia J.

(i) J es $\forall-$ derecha

Si a es la variable principal de J, entonces la última parte de la $P(a)$ es

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)}$$

Llamamos $Q(a)$ a la subprueba con secuente final $\Gamma \to \Delta, A(a)$. Recuérdese que en este caso a no aparece en Γ, Δ ó $\forall x A(x)$. Por la hipótesis inductiva tenemos que reemplazando todas las presencias de a en la subprueba $Q(a)$ por b se obtiene una prueba con secuente final $\Gamma \to \Delta, A(b)$, en donde b no aparece en Γ ni en Δ. Por lo tanto podemos aplicar $\forall-$derecha a este secuente usando b como variable principal:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(b)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)}$$

Esta última es la prueba $P(b)$ buscada. Si a no es la variable principal de J, entonces la última parte de $P(a)$ es :

$$\frac{\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a), A(a,c)}{\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a), \forall x A(a,x)}$$

Por la hipótesis inductiva tenemos que al reemplazar a por b en la subprueba $Q(a)$ se obtiene una prueba con secuente final $\Gamma(b) \rightarrow \Delta(b), A(b,c)$ en donde

por la suposición original b no aparece en $P(a)$ y por lo tanto b no es c, aplicamos $\forall$–derecha a este secuente con c como variable principal, obteniendo así la prueba $P(b)$ con secuente final $\Gamma(b) \rightarrow \Delta(b), \forall A(b,x)$.

Lema. Si t es un término arbitrario y el secuente $\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$, con a totalmente indicada, es LK-demostrable con una prueba $P(a)$ en la cual cada variable principal es distinta de a y no contenida en t, entonces el resultado de reemplazar todas las presencias de a por t en $P(a)$ es una prueba con secuente final $\Gamma(t) \rightarrow \Delta(t)$.

Definición. Una secuencia de secuentes de una prueba P es una rama (de P) si satisface las siguientes condiciones:

1) La secuencia comienza con un secuente incial y termina con el secuente final.

2) Cada secuente en la secuencia, excepto el último, es un secuente superior de una infernecia y es seguido inmediatamente por el secuente inferior de dicha inferencia.

EL TEOREMA DE LA ELIMINACION DE CORTE

Este teorema, también conocido como Gentzen's Hauptsatz, es un resultado muy importante de LK.

Teorema de la eliminación de corte. Si un secuente es LK-demostrable entonces es LK-demostrable sin cortes.

Para demostrar este teorema seguiremos la prueba original presentada por Gentzen. Primero introducimos una nueva regla de inferencia y luego probamos que la regla de corte y la nueva regla son equivalentes. A continuación presentamos la nueva regla.

Dada una fórmula A la siguiente inferencia es una $A - e\lim inación$:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi' \rightarrow \Delta', \Lambda} \quad (A)$$

en donde Δ y Π contienen a la fórmula A, y Δ', Π' se obtienen a partir de Δ y Π respectivamente eliminando todas las presencias de A.

Ahora probaremos que si un secuente es LK-demostrable entonces es LK-demostrable sin eliminaciones. En realidad bastará demostrar que dada una prueba de S en LK' cuya única eliminación aparezca en la última inferencia se puede construir una LK' prueba de S que no tenga eliminaciones.

Para realizar esta prueba se necesitan algunas definiciones previas:

a) El grado de una fórmula A (denotado g(A)) es el número de símbolos lógicos contenidos en A. El grado de una $A - e\lim inación$ es el grado de A. Si una prueba P tiene sólo una eliminación y ésta es la última inferencia definimos el grado de P (g(P)) como el grado de la eliminación.

Una secuencia de secuentes es llamada una *rama* si comienza con un secuente inicial, termina con el secuente final y cada uno de sus secuentes, excepto el último, es el secuente superior de alguna inferencia y es inmediatamente seguido por el secuente inferior de dicha inferencia

Decimos que una rama es una rama izquierda (*derecha*) si contiene al secuente superior izquierdo (derecho) de la eliminación. Ahora definimos el rango de una rama izquierda (derecha) F como el número de secuentes consecutivos, a partir del secuente superior izquierdo (derecho), que contienen la fórmula de eliminación en el consecuente (antecedente). El rango izquierdo $ran_i\,(P)$ de una prueba es el máximo de los rangos de sus ramas izquierdas. El rango derecho se define análogamente. Finalmente el rango de una prueba ran(P) se define así:

$$\mathrm{ran}(P) = ran_i\,(P) + ran_d\,(P)$$

La prueba del teorema consiste en observar que cuando $ran\,(P) = 2$, es decir $ran_i\,(P) = ran_d\,(P) = 1$, podemos construir una prueba con el mismo secuente final y que no contenga eliminaciones o podemos construir una prueba con el mismo secuente final y cuya única eliminación tenga fórmula de eliminación de grado menor a la original.

Para pruebas con rango mayor que dos se demuestra que podemos construir una prueba con el mismo secuente final y que no tenga eliminaciones o bien podemos construir una prueba con el mismo secuente final y cuyo rango sea menor al de la prueba original.

Finalmente se demuestra que las pruebas cuya fórmula de eliminación sea una fórmula atómica pueden ser susutituidas por pruebas que no contengan eliminaciones.

PASO 1. Suponemos $\mathrm{ran}_i\,(P) = ran_d\,(P) = 1$

1.1) El secuente superior izquierdo es un segmento inicial. Así que P es de la forma

$$\frac{A \to A \qquad \Pi \to \Lambda}{A, \Pi^* \to \Lambda}$$

La siguiente prueba tiene el mismo secuente final y no contiene eliminaciones:

$$\frac{\Pi \to \Lambda}{\text{algunos intercambios}}$$
$$\frac{A, ..., A, \Pi^* \to \Lambda}{\text{algunas contracciones}}$$

$$\overline{\quad A, \Pi^* \to \Lambda \quad}$$

1.2) El secuente superior derecho es un secuente inicial. Se hace de manera similar usando las reglas de intercambio y contracción derechas.

1.3) Ninguno de los secuentes superiores S_1, S_2, es un secuente inicial y S_1 es el secuente inferior de una inferencia estructural M. Como $\text{ran}_i(P) = 1$ la fórmula A no puede aparecer en el consecuente del secuente superior de la inferencia M, de donde se sigue que M debe ser un debilitamiento derecho de la fórmula A. En este caso la última parte de la prueba es de la siguiente forma:

$$J \quad \dfrac{M\ \dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A} \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta, \Lambda} \ (A)$$

donde A no aparece en Δ. La siguiente prueba tiene el mismo secuente final y no contiene la A–eliminación J :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\text{algunos debilitamientos}}}{\dfrac{\Pi^*, \Gamma \to \Delta, \Lambda}{\dfrac{\text{algunos intercambios}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta, \Lambda}}}$$

1.4) Ninguno de los secuentes superiores S_1, S_2, es un secuente inicial y S_2 es el secuente inferior de una inferencia estructural M. Como $\text{ran}_d(P) = 1$ la fórmula A no pude aparecer en el antecedente del secuente superior de M, y por lo tanto M debe ser un debilitamiento izquierdo.

$$J \quad \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad M\ \dfrac{\Pi \to \Lambda}{A, \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Delta^*, \Lambda} \quad (A)$$

donde A no aparece en Π. De manera similar al caso anterior se construye una prueba con el mismo secuente final y que no contiene la A–eliminación J.

1.5) Tanto S_1 como S_2 son los secuentes inferiores de inferencias lógicas. En ambos casos la fórmula de eliminación tiene que ser la fórmula principal de la inferencia lógica, puesto que $\text{ran}_i(P) = ran_d(P) = 1$. En esta situación se demuestra que se puede construir una prueba con el mismo secuente final en la que la eliminación es sustituida por otra cuya fórmula de eliminación tiene grado menor que la original. La demostración se hace por casos dependiendo de la estructura de la fórmula A de eliminación.

(i) $A \doteq B \wedge C$. En este caso S_1 y S_2 deben los secuentes inferiores de $\wedge - derecha$ e $\wedge - izquierda$ respectivamente:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta, B \qquad \Gamma \to \Delta, C}{} \qquad\qquad \dfrac{B, \Pi \to \Lambda}{}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B \wedge C \qquad B \wedge C, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad (B \wedge C)$$

Ahora consideramos la siguiente B–eliminación :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B \qquad B, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda} \quad (B)$$

Usando las reglas de deblitamiento y contracción se obtiene el secuente $\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda$ a partir de $\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda$.

(*ii*) $A \rightleftharpoons \forall x F(x)$. En este caso la última parte de P es de la siguiente forma:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(a)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x F(x)} \qquad \dfrac{F(t), \Pi \rightarrow \Lambda}{\forall x F(x), \Pi \rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad (\forall x F(x))$$

en donde a es totalmente indicada en $F(a)$ y, por la condición de la variable principal, a no aparece en Γ, Δ o $F(a)$. Puesto que estamos suponiendo que la prueba con secuente final $\Gamma \rightarrow \Delta, F(a)$ no contiene eliminaciones, sabemos por el Lema que es posible construir una prueba con secuente final $\Gamma \rightarrow \Delta, F(t)$ que no contenga eliminaciones. Conisderamos ahora la siguiente $F(a)$ –eliminación:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(t) \qquad F(t), \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda} \quad (F(t))$$

PASO 2. Ahora suponemos ran(P) > 2. Debemos probar que en este caso se puede construir una prueba P' con el mismo secuente final y que no contenga eliminaciones o bien, que contenga sólo una eliminación y que el rango de ésta sea menor que el de P.

2.1) $\mathrm{ran}_i(P) > 1$

2.1.1) La fórmula A aparece en el consecuente Δ de S_1. P' se construye de la siguiente manera:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta^*, A}\ \text{algunos intercambios y contracciones}}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}\ \text{algunos debilitamientos intercambios}$$

De manera similar se construye P' si A aparece en el antecedente Γ de S_1.

2.1.2) S_2 es el secuente inferior de una inferencia J, donde J es una inferencia estructural o bien, si J es una inferencia lógica entonces A no es la fórmula principal. La última parte de la prueba es de la siguiente forma:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad J\ \dfrac{\Phi \rightarrow \Psi}{\Pi \rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}\ (A)$$

donde las pruebas de $\Gamma \rightarrow \Delta$ y $\Phi \rightarrow \Psi$ no contienen eliminaciones y la fórmula A aparece por lo menos una vez en Φ. Consideramos la siguiente prueba P':

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi^* \rightarrow \Delta^*, \Psi}\ (A)$$

Es claro que $\mathrm{ran}_d(P') = ran_d(P) - 1$. A partir de P' se construye la siguiente prueba:

$$J\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi^* \rightarrow \Delta^*, \Psi}{\text{algunos intercambios}}}{\Phi^*, \Gamma \rightarrow \Delta^*, \Psi}}{\Pi^*, \Gamma \rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Si la fórmula auxiliar en J en P es una eliminación en Φ se aplica un debilitamiento adicional antes de J en la última prueba.

2.1.3) S_2 es el secuente inferior de una inferencia lógica cuya fórmula principal es A. Bajo este supuesto se presentan carios casos dependiendo de la estructura de A.

(i) $A \rightleftharpoons B \Rightarrow C$. La última parte de la prueba es de la siguiente forma:

$$J\ \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad M\ \dfrac{\Pi \rightarrow \Lambda, B \qquad C, \Phi \rightarrow \Psi}{B \Rightarrow C, \Pi, \Phi \rightarrow \Lambda, \Psi}}{\Gamma, \Pi^*, \Phi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda, \Psi}\ (B \Rightarrow C)$$

Si la fórmula $B \Rightarrow C$ aparece en Π y Φ,consideramos las siguientes pruebas P_1, P_2 :

P_1

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad \Pi \rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}\ (B \Rightarrow C)$$

P_2

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta \qquad C, \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma, C, \Phi^* \rightarrow \Delta^*, \Psi}\ (B \Rightarrow C)$$

Si $B \Rightarrow C$ no está Π entonces P_1 se define de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \rightarrow \Lambda, B}{\text{debilitamientos e intercambios}}}{\Gamma, \Pi^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}$$

Si $B \Rightarrow C$ no aparece en Φ, entonces P_2 es :

$$\dfrac{C, \Phi \rightarrow \Psi}{\text{debilitamientos e intercambios}}$$

$$\Gamma, C, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi$$

Notemos que $ran_i(P_1) = ran_i(P_2) = ran_1(P)$ y $ran_d(P_1) = ran_d(P_2) = ran_d(P) - 1$. Ahora definimos la prueba P' de la siguiente manera:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda, B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, C, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi}{C, \Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi}\text{ intercambios}}{}}{B \Rightarrow C, \Gamma, \Pi^*, \Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Lambda, \Delta^*, \Psi}\,(B \Rightarrow C)}{\Gamma, \Gamma, \Pi^*, \Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda, \Delta^*, \Psi}$$

Así que $ran_i(P') = ran_i(P)$ y puesto que Γ no contiene presencias de $B \Rightarrow C$ tenemos que $ran_d(P') = ran_d(P) - 1$, y por lo tanto $ran(P') < ran(P)$.

(ii) $A \rightleftharpoons \exists x F(x)$. La última parte de la prueba es de la siguiente forma:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{F(a), \Pi \to \Lambda}{\exists x F(x), \Pi \to \Lambda}\,(\exists x F(x))}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}$$

Por el Lema sabemos que remplazando a por una variable libre b que no aparezca en P se obtiene una prueba con secuente final $F(b), \Pi \to \Lambda$ a partir de la subprueba con secuente final $F(a), \Pi \to \Lambda$. (Recuérdese que por la condición de la variable principal, a no aparece en Π ni en Λ). Además, como estamos suponiendo que P sólo tiene una eliminación, se concluye que esta prueba no tiene eliminaciones.

Consideramos la siguiente prueba:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad F(b), \Pi \to \Lambda}{\Gamma, F(b), \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\quad (\exists x F(x))$$

Es claro que $ran_d(P_1) = ran_d(P) - 1$ y $ran_i(P_1) = ran_i(P)$, de donde se sigue que $ran(P^1) < ran(P)$. Finalmente definimos P':

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, F(b), \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}{F(b), \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\text{ algunos intercambios}}{\exists x F(x), \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\quad (\exists x F(x))$$

EL CALULO DE PREDICADOS CON IGUALDAD

El Cálculo de predicados con igualdad (LK_e) se obtiene agregando al lenguaje de LK un predicado binario ($=$) y los siguientes secuentes como secuentes iniciales:

$$\rightarrow s = s$$

$$s_1 = t_1, ..., s_n = t_n \rightarrow f(s_1, ..., s_n) = f(t_1, ..., t_n)$$

para cada función f de aridad n.

$$s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, R(s_1, ..., s_n) \rightarrow R(t_1, ..., t_n)$$

para cada predicado R de aridad n, donde $s_1, ...s_n, t_1, ..., t_n$ son términos arbitrarios.

Estos secuentes son denominados aximas de igualdad de LK_e.

PROPOSICION 1. Sea $A(a_1, ..., a_n)$ una fórmula arbitraria, entonces :

$$s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, A(s_1, ..., s_n) \rightarrow A(t_1, ..., t_n)$$

es derivable en LK_e, para cualquier conjunto de términos s_i, t_i. También los secuentes $s = t \rightarrow t = s$ y $s_1 = s_2, s_2 = s_3 \rightarrow s_1 = s_3$ son LK_e−derivables.

Definición. Un corte en LK_e es llamado esencial si la fórmula de corte no es de la forma $s = t$.

TEOREMA . Si un secuente es LK_e−demostrable entonces es LK_e−demostrable sin cortes esenciales.

Prueba. Esta prueba es simplemente una adaptación de la dada en la sección anterior para LK. Sólo basta considerar lo siguiente.

Si el rango de P es 2 entonces el secuente superior $P(t_1, ..., t_n)$, donde P no es $=$. Si S_2 es también un axioma de igualdad tiene la siguiente forma

$s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, P(s_1, ..., s_n) \rightarrow P(t_1, ..., t_n)$, mientras que S_2 es de la forma

$t_1 = r_1, ..., t_n = s_n, P(t_1, ..., t_n) \rightarrow P(r_1, ..., r_n)$

y entonces por la eliminación se obtiene el secuente

$s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, t_1 = r_1, ..., t_n = r_n, P(s_1, ..., s_n) \rightarrow P(r_1, ..., r_n)$

Esta eliminación la reemplazamos por

$s_i = t_i, t_i = r_i \rightarrow r_i$ para $i \leq n$;

$s_1 = r_1, ..., s_n = r_n, P(s_1, ..., s_n) \rightarrow P(r_1, ..., r_n)$

y por sucesivas aplicaciones de corte de $s_i = r_i$ obtenemos el mismo secuente final.Es claro que todos los cortes inttroducisdos no son esenciales.

Si S_2 es el resultado de un deblitamiento de la fórmula $P(t_1, ..., t_n)$, entonces la última parte de la prueba es

$$\dfrac{s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, P(s_1, ..., s_n) \rightarrow P(t_1, ..., t_n) \qquad \dfrac{\Pi \rightarrow \Delta}{P(t_1, ..., t_n), \Pi \rightarrow \Delta}}{s_1 = t_1, ..., s_n = t_n, P(s_1, ..., s_n), \Pi \rightarrow \Delta}$$

Es obvio que aplicando $n + 1$ debilitamientos podemos obtener el mismo secuente final a partir de $\Pi \rightarrow \Delta$.

El resto de la prueba se sigue de lo expuesto en la demostración del teorema de la eliminación de corte de LK.

ARITMETICA DE PEANO

Para formular la aritmética de Peano utilizamos el siguiente lenguaje:
un símbolo de constante 0
símbolos de función $', +, \cdot$
símbolo de predicado binario $=$

La interpretación de casi todos estos símbolos debe ser bastante obvia. Sólo mencionamos que el símbolo de función $'$ interpreta la función sucesor. Denotamos $(t)'_n$ la enésima aplicación consecutiva de la función $'$ al término t. Así que cualquier natural n está representado por el término $(0)'_n$, el cual será usualmente abreviado por $\overline{n}$.

El sistema PA es obtenido a partir de LK_e agregando seis secuentes iniciales (llamados secuentes iniciales matemáticos) y añadiendo la inducción como nueva regla de inferencia.

1) Los secuentes iniciales matemáticos son:

$$s' = t' \to s = t$$
$$s' = 0 \to$$
$$\to s + 0 = s$$
$$\to s + t' = (s + t)'$$
$$\to s \cdot 0 = 0$$
$$\to s \cdot t' = s \cdot t + s$$

2) La regla de inducción:

$$\frac{F(a), \Gamma \to \Delta, F(a')}{F(0), \Gamma \to \Delta, F(s)}$$

donde a no aparece en $F(0), \Gamma$ o Δ, s es un término arbitrario que no contiene a y $F(a)$ es cualquier fórmula del lenguaje.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barwise J., (Ed), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam,1977.

[2] Ketonen J., Solovay R., " Rapidly growing Ramsey functions", en Annals of Mathematics, vol 113, 1981.

[3] Paris J., Harrington L. " A mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic", en: *Handbook of Mathematical Logic.* North Holland, 1977.

[4] Takeuti G., *Proof Theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* vol. 81, North Holland, 1987.

ARITMETICA DE PEANO

Para formular la aritmética de Peano utilizamos el siguiente lenguaje:
un símbolo de constante 0
símbolos de función $'$, $+$, $\cdot$
símbolo de predicado binario $=$

La interpretación de casi todos estos símbolos debe ser bastante obvia. Sólo mencionamos que el símbolo de función $'$ interpreta la función sucesor. Denotamos $(t)'_n$ la enésima aplicación consecutiva de la función $'$ al término t. Así que cualquier natural n está representado por el término $(0)'_n$, el cual será usualmente abreviado por $\overline{n}$.

El sistema PA es obtenido a partir de LK_e agregando seis secuentes iniciales (llamados secuentes iniciales matemáticos) y añadiendo la inducción como nueva regla de inferencia.

1) Los secuentes iniciales matemáticos son:

$$s' = t' \rightarrow s = t$$
$$s' = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow s + 0 = s$$
$$\rightarrow s + t' = (s + t)'$$
$$\rightarrow s \cdot 0 = 0$$
$$\rightarrow s \cdot t' = s \cdot t + s$$

2) La regla de inducción:

$$\frac{F(a), \Gamma \rightarrow \Delta, F(a')}{F(0), \Gamma \rightarrow \Delta, F(s)}$$

donde a no aparece en $F(0), \Gamma$ o Δ, s es un término arbitrario que no contiene a y $F(a)$ es cualquier fórmula del lenguaje.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barwise J., (Ed), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam,1977.

[2] Ketonen J., Solovay R., " Rapidly growing Ramsey functions", en Annals of Mathematics, vol 113, 1981.

[3] Paris J., Harrington L. " A mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic", en: *Handbook of Mathematical Logic.* North Holland, 1977.

[4] Takeuti G., *Proof Theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* vol. 81, North Holland, 1987.