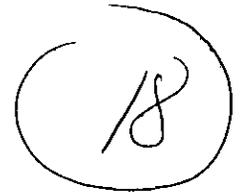


01161



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**TESIS**

**Análisis de la respuesta sísmica de apéndices  
y aplicaciones al Valle de México**

**PRESENTADA POR:**

**Ismael Arturo Pérez Pérez**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERIA  
( Estructuras )**

**DIRIGIDA POR:**

**Dr. Ernesto Heredia Zavoni**

**Ciudad Universitaria, enero 2001**

288207



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres*

*Agradezco sinceramente la orientación y apoyo del Dr. Ernesto Heredia, a la DEP-FI y al Instituto de Ingeniería por la educación recibida, a mis compañeros por hacer mi estancia agradable y al Conacyt por la beca-crédito otorgada.*

*Un agradecimiento especial para Alana, la Sra. Teresa y Cynthia por su motivación, comprensión y amabilidad, respectivamente.*

<b>Índice</b>	<b>Página</b>
Capítulo I Introducción	1
Capítulo II Espectros de piso: interacción dinámica y amortiguamiento no-clásico	5
II.1 Ecuaciones de movimiento del sistema acoplado	5
II.2 Espectros de Piso	8
II.3 Método iterativo de solución	12
II.4 Ejemplo ilustrativo	18
Capítulo III Caso de estudio	25
III.1 Funciones de densidad espectral asociadas con los espectros de diseño NTC-DF	25
III.2 Análisis de convergencia	30
III.3 Espectros de respuesta	43
Capítulo IV Conclusiones y comentarios	55
Bibliografía	60
Apéndice A	62
A.1 Funciones de densidad espectral de la aceleración sísmica del terreno asociadas con espectros de diseño	62
A.2 Factores Pico $P_s(\omega)$	70
Apéndice B Espectros de respuesta	73

## Índice de figuras

## Página

2.1	Sistema primario y apéndice	6
2.2	Sistema estructura-apéndice	18
2.3	Variación del radio espectral $ \lambda_{\max} $	22
2.4	Variación de $\lambda_0$ con $\xi_1 - \xi_2$	24
2.5	Variación del factor de forma $ \lambda_{\max} $ con $\xi_1 - \xi_2$	24
2.6	Variación de $ \lambda_{\max} $ con la relación $\omega_2/\omega_1$ para $\xi_1 - \xi_2 = 0.07$	24
3.1	Espectros de diseño de las Zonas I, II y III para estructuras del grupo A con un amortiguamiento $\xi$ del 5% de acuerdo con las NTC-DF	27
3.2	Espectros de desplazamiento relativo $D(\omega_0, \xi)$ de las distintas zonas de acuerdo a las NTC-DF	28
3.3	Funciones de densidad espectral de aceleración del terreno $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)$ de las distintas zonas de acuerdo a las NTC-DF	29
3.4	Sistema estructural analizado	30
3.5	Variación del radio espectral $ \lambda_{\max} $ de la matriz <b>A</b> considerando el apéndice en el piso 10 con una relación $r_a=1/200$ y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice $\xi_n=2\%$	34
3.6	Variación del radio espectral $ \lambda_{\max} $ de la matriz <b>A</b> considerando el apéndice en el piso 10 con una relación $r_a=1/200$ y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice $\xi_n=20\%$	35
3.7	Variación del radio espectral $ \lambda_{\max} $ de la matriz <b>A</b> considerando el apéndice en el piso 10 con una relación $r_a=1/50$ y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice $\xi_n=2\%$	36
3.8	Variación del radio espectral $ \lambda_{\max} $ de la matriz <b>A</b> considerando el apéndice en el piso 10 con una relación $r_a=1/50$ y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice $\xi_n=20\%$	37
3.9	Variación del valor $ A_{ij}^k _{\max}$ al incrementar el valor de k, considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas $r_a=1/200$ y una frecuencia del apéndice $\omega_n=1.018$ Hz	39

3.10	Variación del valor $\left A_{ij}^k\right _{\max}$ al incrementar el valor de k, considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas $r_a=1/50$ y una frecuencia del apéndice $\omega_n=1.018$ Hz	40
3.11	Variación del valor $\left A_{ij}^k\right _{\max}$ al incrementar el valor de k, considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas $r_a=1/5$ y una frecuencia del apéndice $\omega_n=1.018$ Hz	41
3.12	Variación del valor $\left A_{ij}^k\right _{\max}$ al incrementar el valor de k, considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas $r_a=1/2$ y una frecuencia del apéndice $\omega_n=1.018$ Hz	42
3.13	Espectros de respuesta para el piso 10 obtenidos con el método propuesto y por medio de la solución exacta	45
3.14	Espectro de respuesta del apéndice colocado en el piso 10 utilizando el método propuesto para la Zona I, II y III.	46
3.15	Espectros de respuesta del apéndice colocado en el piso 10 utilizando el método propuesto para las Zonas I y III	49
3.16	Espectros de respuesta para la Zona I y III de los pisos 10, 8 y 6 utilizando el método propuesto	50
3.17	Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 10)	52
3.18	Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 8)	53
3.19	Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 6)	54
A.1	Representación esquemática del espectro de respuesta de desplazamientos relativos $D(\omega_o, \xi) = \left x_{o_{\max}}\right $	63
B.1	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 10	74
B.2	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 8	75
B.3	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 6	76
		77
B.4	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 10	

B.5	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 8	78
B.6	Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 6	79

<b>Índice de tablas</b>		<b>Página</b>
3.1	Datos empleados para definir los espectros de diseño de la figura 3.1 de acuerdo a las NTC-DF. Se anexan los valores utilizados de $T_0^*$ y $\tau$	26
3.2	Propiedades del edificio de estudio	31
3.3	Frecuencias y vectores modales del sistema primario	31

# *Capítulo I*

## *Introducción*

El presente estudio está orientado al análisis de la respuesta sísmica de un sistema estructural lineal de múltiples grados de libertad, o sistema primario, al que se le conecta un apéndice o sistema secundario. Un ejemplo típico de sistemas acoplados estructura-apéndice, o primario-secundario, es el caso de maquinaria o equipo instalados en algún nivel de un edificio. En estos sistemas la masa y amortiguamiento del apéndice generalmente difieren de las masas y amortiguamiento del sistema primario. El análisis de la respuesta lineal del sistema acoplado estructura-apéndice debe entonces considerar, en principio, la interacción dinámica y el carácter no-clásico del amortiguamiento. Sin embargo, la solución convencional a este tipo de problemas en la práctica profesional consiste en despreciar la presencia del apéndice en el cálculo de la respuesta del sistema primario para posteriormente utilizar la respuesta del piso al que se conecta dicho apéndice como excitación en su base. Esta solución no considera la interacción dinámica y el amortiguamiento no-clásico del sistema acoplado apéndice-estructura y sólo es válida en algunos casos.

En el análisis de sistemas con amortiguamiento no-clásico, Igusa et al. (1984) han obtenido la respuesta lineal de sistemas sometidos a una excitación aleatoria

estacionaria empleando un método de descomposición modal que considera eigenvectores y eigenvalores complejos; si bien el método permite obtener la solución exacta, su uso es bastante complicado. Suarez y Singh (1987) propusieron un método de solución modal clásico que considera la interacción dinámica apéndice-estructura mediante el acoplamiento de las propiedades modales de ambos, pero que no considera el amortiguamiento no-clásico del sistema. Por su parte Claret y Venancio (1991) desarrollaron un método iterativo de descomposición modal en el dominio del tiempo, conocido como el método de la pseudo-fuerza, para el caso determinista en el que el sistema acoplado se somete a una excitación conocida. Posteriormente, Jangid y Datta (1993) utilizaron el concepto de la pseudo-fuerza para proponer un método iterativo que permite obtener funciones de transferencia de sistemas estructurales con amortiguamiento no-clásico. La principal desventaja del método que proponen es que no se definen las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia.

Barranco et al. (1994) extendieron el método de la pseudo-fuerza para considerar la interacción dinámica y el amortiguamiento no-clásico de sistemas acoplados estructura-apéndice. El método iterativo permite obtener simultáneamente las funciones de transferencia asociadas con los grados de libertad del sistema primario así como la función de transferencia correspondiente del apéndice. En dicho trabajo solamente se definen las condiciones necesarias para la convergencia del método.

El objetivo de esta tesis es analizar el método de solución iterativo para sistemas acoplados estructura-apéndice con amortiguamiento no-clásico propuesto por

Barranco et al. (1994) y determinar las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia. Una vez realizado el análisis de convergencia el método iterativo se aplicará a la solución de un sistema lineal estructura-apéndice ubicado en el Valle de México. La excitación será modelada como un proceso aleatorio cuya función de densidad espectral sea compatible con el espectro de diseño especificado para cada zona por las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Distrito Federal (NTC DF, 1987). Con este fin, una meta del trabajo es obtener las funciones de densidad espectral de aceleración del terreno compatibles con los espectros de diseño de las Zonas I, II y III de las NTC.

En el capítulo II se desarrollan las ecuaciones de movimiento del sistema acoplado. Haciendo uso de la teoría de vibraciones aleatorias, se plantea la solución para los espectros de piso del apéndice considerando una excitación sísmica incierta modelada como un proceso aleatorio estacionario. Se presenta luego el método iterativo de Barranco et al. (1994) para obtener la matriz de funciones de transferencia del sistema acoplado, es decir considerando la interacción dinámica del apéndice y el amortiguamiento no-clásico del sistema. Se estudia la serie matricial para el proceso iterativo y se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia. Se ilustra la aplicación del método mediante un ejemplo sencillo y se comparan los resultados con la solución exacta.

En el capítulo tercero se calculan las funciones de densidad espectral de aceleración del terreno congruentes con los espectros de diseño de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Distrito Federal (NTC; DF

1987) para las zonas de suelo duro (Zona I), suelo de transición (Zona II) y suelo blando (Zona III). Para obtener estas funciones de densidad espectral se utiliza el método de Der Kiureghian y Neuenhofer (1991). Dicho método permite obtener iterativamente la función de densidad espectral de la aceleración del terreno en la base de un oscilador simple tal que la esperanza de su respuesta máxima sea congruente con la ordenada correspondiente en el espectro de diseño. Se realiza el análisis de la convergencia del método para un caso de estudio de un edificio lineal a corte de 10 niveles al cual se le conecta un apéndice. Se verifica la exactitud del método iterativo al comparar sus resultados con la solución exacta. Se analiza la influencia de la masa y amortiguamiento del apéndice en el cálculo de la respuesta y se muestra el efecto del tipo de suelo. Se evalúa el error que se comete en el cálculo de la respuesta al utilizar el método convencional de análisis que no considera la interacción dinámica y amortiguamiento no-clásico del sistema acoplado apéndice-estructura.

En el capítulo IV se presentan las conclusiones y comentarios finales del trabajo. El método de Der Kiureghian y Neuenhofer se describe con detalle en el apéndice A.

# Capítulo II

## *Espectros de piso: interacción dinámica y amortiguamiento no-clásico*

### II.1 Ecuaciones de movimiento del sistema acoplado

Consideremos un sistema lineal de  $n-1$  grados de libertad, que denominaremos sistema primario, sometido a una excitación sísmica en su base. Consideremos también un apéndice modelado como un oscilador simple de masa  $m_n$ , rigidez  $k_n$  y amortiguamiento  $c_n$ , que se encuentra conectado al  $k$ -ésimo grado de libertad del sistema primario tal como se muestra en la figura 2.1. Las ecuaciones de movimiento del sistema acoplado se pueden escribir en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_p \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_p \\ x_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_p \mathbf{j} \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{x}_g(t) \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}_p$  es el vector de desplazamientos relativos del sistema primario con respecto a la base;  $x_n$  es el desplazamiento relativo del apéndice con respecto a

la base;  $M_p$ ,  $C_p$  y  $K_p$  son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema primario;  $K_{ac}$  y  $C_{ac}$  son las matrices de acoplamiento de rigidez y amortiguamiento entre los grados de libertad del sistema primario y el del apéndice, respectivamente;  $j$  es un vector unitario y  $\ddot{x}_g(t)$  es la aceleración sísmica del terreno en la base del sistema primario.

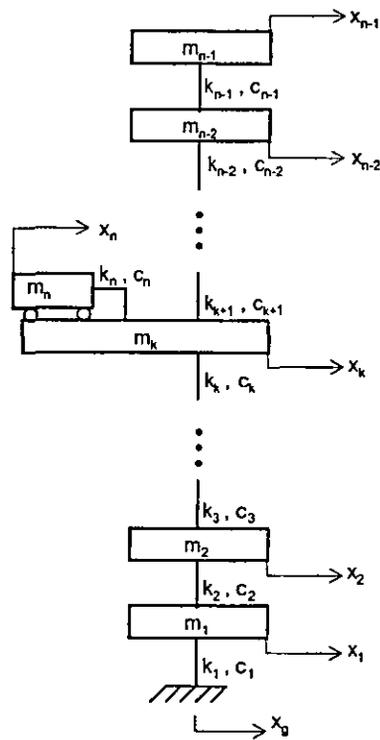


Figura 2.1.- Sistema primario y apéndice.

Consideremos la siguiente transformación lineal para los desplazamientos relativos del sistema

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{U}$  es una matriz de transformación de coordenadas,  $\Phi_p$  es la matriz modal normalizada del sistema primario,  $\phi_{nn} = 1/\sqrt{m_n}$ , y  $\mathbf{y}$  es un vector de coordenadas generalizadas. Substituyendo 2.2 en 2.1 las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en coordenadas generalizadas,

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}^* \mathbf{y} = -\gamma^* \ddot{\mathbf{x}}_g(t) ; \quad \gamma^* = \mathbf{U}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_p \mathbf{j} \\ m_n \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

En 2.3  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y las matrices generalizadas de amortiguamiento y rigidez,  $\mathbf{C}^*$  y  $\mathbf{K}^*$ , están dadas por

$$\mathbf{C}^* = \text{diag}[2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_i\omega_i, \dots, 2\xi_{n-1}\omega_{n-1}, 0] + \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{ac} \mathbf{U} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{K}^* = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_{n-1}^2, 0] + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{ac} \mathbf{U} \quad (2.5)$$

donde  $\text{diag}[\ ]$  denota matriz diagonal con los elementos en el argumento y  $\omega_i$ ,  $\xi_i$  son la frecuencia y coeficiente de amortiguamiento crítico del  $i$ -ésimo modo del sistema primario, respectivamente. Los términos asociados con el acoplamiento del apéndice al  $k$ -ésimo grado de libertad en el lado derecho de las ecs. 2.4 y 2.5,

que corresponden a la interacción dinámica,  $U^T K_{ac} U$ , y al amortiguamiento no-clásico,  $U^T C_{ac} U$ , se pueden expresar como sigue

$$U^T K_{ac} U = m_n \omega_n^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.6)$$

$$U^T C_{ac} U = 2 m_n \xi_n \omega_n \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.7)$$

donde  $\omega_n$  y  $\xi_n$  son la frecuencia y coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice,  $\mathbf{v}^T = \{-\phi_{k1}, -\phi_{k2}, \dots, -\phi_{ki}, \dots, -\phi_{k(n-1)}, \phi_{nn}\}$ ,  $\phi_{ki}$  es el elemento en la fila  $k$  y columna  $i$  de la matriz modal  $\Phi_p$ , y  $k$  es el grado de libertad del sistema primario en el que se encuentra conectado el apéndice.

## II.2 Espectros de piso

Supongamos que el segmento de fase intensa de la aceleración sísmica del terreno se puede modelar como un proceso aleatorio estacionario, gaussiano y con media cero. Con base en la teoría de vibraciones aleatorias, se deduce de la ec. 2.3 que la matriz de funciones de densidad espectral (FDE) de la respuesta en coordenadas generalizadas,  $S_{yy}(\omega)$ , está dada por

$$S_{yy}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) S_{pp}(\omega) \mathbf{H}^*(\omega)^T \quad (2.8)$$

en la que  $S_{pp}(\omega)$  es la matriz de FDE de las fuerzas de excitación en coordenadas generalizadas;  $H(\omega)$  es la matriz compleja de funciones de transferencia del sistema acoplado en coordenadas generalizadas y  $H^*(\omega)^T$  es la transpuesta de la matriz conjugada compleja. Las funciones que se encuentran en la diagonal principal de  $S_{yy}(\omega)$  y  $S_{pp}(\omega)$  son autoespectros y las funciones que se encuentran fuera de dicha diagonal son funciones de densidad espectral cruzada. La matriz de FDE de las fuerzas de excitación en coordenadas generalizadas está dada por

$$S_{pp}(\omega) = \gamma^* (\gamma^*)^T S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \quad (2.9)$$

donde  $S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)$  es la función de densidad espectral de la aceleración del terreno. Sustituyendo 2.9 en 2.8 se obtiene que

$$S_{yy}(\omega) = H(\omega) \gamma^* (\gamma^*)^T H^*(\omega)^T S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \quad (2.10)$$

Si consideramos la transformación en 2.2,  $x = U y$ , entonces

$$S_{xx}(\omega) = U S_{yy}(\omega) U^T \quad (2.11)$$

Reemplazando 2.10 en 2.11 se tiene que

$$S_{xx}(\omega) = U H(\omega) \gamma^* (\gamma^*)^T H^*(\omega)^T U^T S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \quad (2.12)$$

Definamos el vector  $r$  como sigue

$$r = U H(\omega) \gamma^* \quad (2.13)$$

entonces, el transpuesto  $r^T$  es

$$r^T = (\gamma^*)^T H^*(\omega)^T U^T \quad (2.14)$$

La matriz de FDE de desplazamientos relativos del sistema acoplado se puede escribir como

$$S_{xx}(\omega) = r r^T S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \quad (2.15)$$

Usualmente es de interés conocer la respuesta del apéndice en términos de su aceleración absoluta. En el caso de equipo o maquinaria es necesario por ejemplo calcular el momento de volteo para el diseño del soporte. La aceleración absoluta es igual a,

$$a = \ddot{x}_n + \ddot{x}_g \quad (2.16)$$

La FDE de la aceleración absoluta del apéndice es entonces

$$S_{aa}(\omega) = S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) + S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_n}(\omega) + 2 \operatorname{Re} \left[ S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_g}(\omega) \right] \quad (2.17)$$

donde  $\operatorname{Re}[\ ]$  denota la parte real del argumento,  $S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_n}(\omega)$  es la FDE de la aceleración relativa del apéndice, y  $S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_g}(\omega)$  es la FDE cruzada entre la aceleración relativa del apéndice y la aceleración del terreno. Se puede demostrar que (Vanmarcke, 1983)

$$S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_n}(\omega) = \omega^4 S_{x_n x_n}(\omega) \quad (2.18)$$

$$S_{\ddot{x}_n \ddot{x}_g}(\omega) = -\omega^2 H_{nn}(\omega) S_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \quad (2.19)$$

En 2.18 y 2.19,  $S_{x_n x_n}(\omega)$  y  $H_{nn}(\omega)$  son las funciones en la fila  $n$  y columna  $n$  de las matrices  $S_{xx}(\omega)$  y  $H(\omega)$ , respectivamente. Por definición, la varianza de la respuesta del apéndice,  $\sigma_a^2$ , se puede calcular como,

$$\sigma_a^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{aa}(\omega) d\omega \quad (2.20)$$

Dado que la respuesta es un proceso aleatorio estacionario y gaussiano, el valor esperado de la respuesta máxima se puede escribir como

$$E[a_{\max}] = K \sigma_a \quad (2.21)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(2v^+(0)T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(2v^+(0)T)}} \quad (2.22)$$

donde  $K$  se conoce factor pico (Davenport, 1964) y  $T$  y  $v^+(0)$  son la duración y la tasa de cruces por cero con pendiente positiva de la respuesta del apéndice, respectivamente.

### II.3 Método iterativo de solución

El método de la pseudo-fuerza es un procedimiento iterativo que permite obtener la matriz de funciones de transferencia de sistemas de varios grados de libertad con amortiguamiento no-clásico (Jangid y Datta, 1993). Barranco et al. (1994) propusieron extender este método para evaluar la matriz de funciones de transferencia en el caso de sistemas acoplados estructura-apéndice. A continuación se presenta el método propuesto por Barranco et al. y se analiza luego la convergencia del proceso iterativo. Consideremos las ecuaciones de movimiento del sistema acoplado en coordenadas generalizadas cuando éste se somete a una excitación armónica en la base (ec. 2.3)

$$I \ddot{y} + C^* \dot{y} + K^* y = p_0 e^{i\omega t} \quad (2.23)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la excitación,  $\mathbf{p}_0 = a \boldsymbol{\gamma}^*$  y  $a$  es la amplitud de la excitación.

La respuesta armónica estacionaria del sistema está dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{p}_0 e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{H}(\omega)$  es la matriz de funciones de transferencia correspondientes.

Sustituyendo 2.24 en 2.23 se obtiene que

$$\mathbf{H}(\omega) = \left\{ -\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^* \right\}^{-1} \quad (2.25)$$

Las matrices  $\mathbf{C}^*$  y  $\mathbf{K}^*$  en 2.4 y 2.5 pueden descomponerse en

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_r \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_r \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{C}_d$  y  $\mathbf{K}_d$  son matrices diagonales que contienen los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{C}^*$  y  $\mathbf{K}^*$  respectivamente; las matrices  $\mathbf{C}_r$  y  $\mathbf{K}_r$  contienen los elementos fuera de la diagonal principal de las matrices  $\mathbf{C}^*$  y  $\mathbf{K}^*$ . Es

importante anotar que los elementos en las diagonales de  $C_d$  y  $K_d$  corresponden a la suma de los elementos en las diagonales de las matrices en el lado derecho de las ecuaciones 2.4 y 2.5. Los elementos en las diagonales principales de las matrices  $C_r$  y  $K_r$  son cero.

Utilizando las ecuaciones 2.24, 2.26 y 2.27, la ec. 2.23 se puede escribir entonces de la siguiente forma

$$\{-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{C}_d + \mathbf{K}_d\} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{p}_o e^{i\omega t} = \mathbf{p}_o e^{i\omega t} - \{i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r\} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{p}_o e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

o bien

$$\mathbf{H}(\omega) \mathbf{p}_o e^{i\omega t} = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - (i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r) \mathbf{H}(\omega) \} \mathbf{p}_o e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

donde

$$\mathbf{H}_d(\omega) = \{-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{C}_d + \mathbf{K}_d\}^{-1} \quad (2.30)$$

Dada la definición de las matrices  $C_d$  y  $K_d$ , y según las expresiones en 2.6 y 2.7, se puede mostrar que  $H_d(\omega)$  es una matriz diagonal de funciones de transferencia  $h_i(\omega)$  de sistemas equivalentes de un grado de libertad

$$\mathbf{H}_d(\omega) = \text{diag}[h_1(\omega), h_2(\omega), \dots, h_{n-1}(\omega), h_n(\omega)]^{-1} \quad (2.31)$$

$$h_j(\omega) = \left\{ \left( \omega_j^2 + m_n \omega_n^2 \phi_{kj}^2 \right) - \omega^2 + i\omega \left( 2\xi_j \omega_j + 2m_n \xi_n \omega_n \phi_{kj}^2 \right) \right\}^{-1}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.32)$$

$$h_n(\omega) = \left\{ \omega_n^2 - \omega^2 + i\omega \left( 2\xi_n \omega_n \right) \right\}^{-1} \quad (2.33)$$

Las funciones en 2.32 se pueden interpretar como funciones de transferencia de osciladores modales equivalentes;  $h_n(\omega)$  es la función de transferencia del desplazamiento relativo del apéndice sometido a una aceleración en su base.

El término  $-\{i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r\} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$  en el lado derecho de 2.29 se considera como un vector de pseudofuerzas. La matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{H}(\omega)$  se puede obtener iterativamente suponiendo lo siguiente:

$$\mathbf{H}^{(k)}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \left\{ \mathbf{I} - (i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r) \mathbf{H}^{(k-1)}(\omega) \right\} \quad (2.34)$$

Si para el primer ciclo iterativo despreciamos la presencia de las pseudofuerzas, entonces

$$\mathbf{H}^{(1)}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \quad (2.35)$$

para el segundo ciclo tendremos

$$\mathbf{H}^{(2)}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - (i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r) \mathbf{H}^{(1)}(\omega) \} = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - \mathbf{A} \} \quad (2.36)$$

donde la matriz

$$\mathbf{A} = \{ i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r \} \mathbf{H}_d(\omega) \quad (2.37)$$

se denotará como matriz de divergencia. Para el tercer ciclo se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(3)}(\omega) &= \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - (i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r) \mathbf{H}^{(2)}(\omega) \} \\ &= \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - [i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r] [\mathbf{H}_d(\omega)(\mathbf{I} - \mathbf{A})] \} \\ &= \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - [\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})] \} = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Así, para el k-ésimo ciclo se tendría que

$$\mathbf{H}^{(k)}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^3 + \dots + (-1)^{k-1} \mathbf{A}^{k-1} \} \quad (2.39)$$

El procedimiento iterativo continúa hasta que se satisfaga que

$$\frac{|H_{ij}^{(k)}(\omega)| - |H_{ij}^{(k-1)}(\omega)|}{|H_{ij}^{(k)}(\omega)|} < \varepsilon, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

donde  $\varepsilon$  es una tolerancia de convergencia suficientemente pequeña.

La serie geométrica en 2.39 puede expresarse de la siguiente manera

$$\mathbf{H}^{(k)}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \{ \mathbf{I} - (1)^{k-1} \mathbf{A}^k \} \{ \mathbf{I} + \mathbf{A} \}^{-1} \quad (2.41)$$

Si la serie converge,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{0}$ , se puede demostrar de 2.30, 2.37 y 2.41 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{H}^{(k)}(\omega) = \{ -\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^* \}^{-1} \quad (2.42)$$

que corresponde a la matriz de funciones de transferencia del sistema acoplado (ver ec. 2.25).

Dado que la matriz de divergencia  $\mathbf{A}$  es compleja de orden  $n \times n$ , el límite de la secuencia matricial,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{0}$ , se cumple si y solo si

$$|\lambda_{\max}| < 1 \quad (2.43)$$

donde  $\lambda_{\max}$  es el radio espectral de la matriz de divergencia  $\mathbf{A}$ , definido como

$$|\lambda_{\max}| = \max\{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_i|, \dots, |\lambda_n| \} \quad (2.44)$$

y  $|\lambda_i|$  es la norma de los valores característicos  $\lambda_i$  de dicha matriz (Cullen, 1972).

## II.4 Ejemplo ilustrativo

Como ejemplo sencillo de aplicación del método al problema estructura-apéndice consideremos el sistema mostrado en la figura 2.2. El sistema está compuesto por un oscilador simple de masa  $m_1$ , rigidez  $k_1$  y amortiguamiento  $c_1$  al que se le conecta el apéndice de masa, amortiguamiento y rigidez  $m_2$ ,  $c_2$  y  $k_2$ , respectivamente. Este sistema ha sido resuelto anteriormente por Igusa et al. (1984) utilizando un método de descomposición modal que considera los modos y frecuencias complejas del sistema con amortiguamiento no-clásico. Puede observarse que el sistema tendrá amortiguamiento clásico si la relación entre rigideces ( $k_1/k_2$ ) es igual a la relación entre coeficientes de amortiguamiento ( $c_1/c_2$ ).

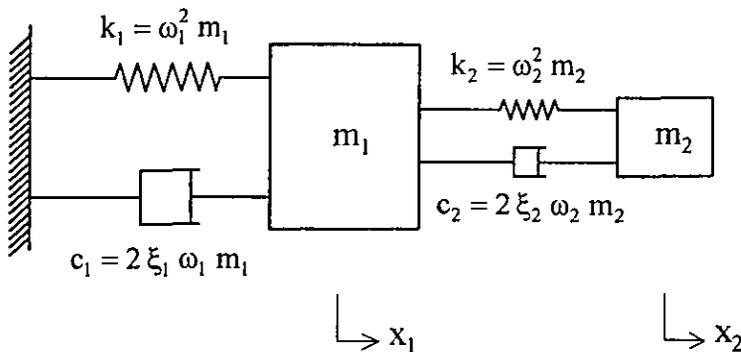


Figura 2.2.- Sistema estructura-apéndice

Es posible escribir la ecuación del movimiento del sistema en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \ddot{x}_g(t) \quad (2.45)$$

Utilizando la siguiente transformación

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (2.46)$$

y premultiplicando por  $\mathbf{U}^T$  la ec. 2.45, obtenemos

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}^* \mathbf{y} = -\boldsymbol{\gamma}^* \ddot{x}_g(t) \quad (2.47)$$

donde

$$\boldsymbol{\gamma}^* = \mathbf{U}^T \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{m_1} \\ \sqrt{m_2} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{C}^* = \text{diag}[2\xi_1\omega_1, 0] + 2m_2\xi_2\omega_2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.49)$$

$$\mathbf{K}^* = \text{diag}[\omega_1^2, 0] + m_2\omega_2^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.50)$$

$$\mathbf{v}^T = \left\{ -1/\sqrt{m_1}, 1/\sqrt{m_2} \right\} \quad (2.51)$$

De esta forma, las matrices  $\mathbf{K}^*$  y  $\mathbf{C}^*$  quedan definidas como

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 + 2m_2\xi_2\omega_2/m_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2m_2\xi_2\omega_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ \frac{-2m_2\xi_2\omega_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 m_2 / m_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-m_2\omega_2^2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ \frac{-m_2\omega_2^2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

y las matrices  $\mathbf{H}_d(\omega)$  y  $\mathbf{A}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(\omega) &= \left\{ -\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{C}_d + \mathbf{K}_d \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (\omega_1^2 + m_2\omega_2^2/m_1) - \omega^2 + i\omega(2\xi_1\omega_1 + 2m_2\xi_2\omega_2/m_1) & 0 \\ 0 & \omega_2^2 - \omega^2 + i\omega(2\xi_2\omega_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{A} = \left\{ i\omega \mathbf{C}_f + \mathbf{K}_f \right\} \mathbf{H}_d(\omega)$$

$$= \left\{ i\omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2m_2\xi_2\omega_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ \frac{-2m_2\xi_2\omega_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-m_2\omega_2^2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ \frac{-m_2\omega_2^2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & 0 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{H}_d(\omega) \quad (2.55)$$

Si el radio espectral de la matriz de divergencia  $\mathbf{A}$  es menor a la unidad, se puede calcular la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{H}(\omega)$  mediante la serie matricial de la ec. 2.39.

La matriz de funciones de densidad espectral de los desplazamientos relativos del sistema con respecto a la base,  $S_{xx}(\omega)$ , se obtiene de la ec. 2.15. La función de densidad espectral del desplazamiento relativo entre el apéndice y el sistema primario,  $z = x_2 - x_1$ , se calcula mediante la siguiente relación

$$S_{zz}(\omega) = S_{x_1x_1}(\omega) + S_{x_2x_2}(\omega) - 2 \operatorname{Re}[S_{x_1x_2}(\omega)] \quad (2.56)$$

donde  $\operatorname{Re}[\ ]$  denota la parte real del argumento. De acuerdo con la teoría de vibraciones aleatorias, los tres primeros momentos espectrales de  $S_{zz}(\omega)$  se definen como

$$\beta_m = \int_0^{\infty} \omega^m S_{zz}(\omega) d\omega \quad m = 0, 1, 2 \quad (2.57)$$

Supongamos para el análisis una relación de masas  $m_2/m_1 = 0.001$ ; una relación de coeficientes de amortiguamiento crítico  $\xi_1 + \xi_2 = 0.08$ ; una relación de frecuencias  $\omega_2/\omega_1 = 1$  y una tolerancia  $\varepsilon = 0.001$ . La excitación en el apoyo del sistema se modela como un proceso de ruido blanco con amplitud  $1.0 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . Se calcula el desplazamiento relativo  $z = x_2 - x_1$  considerando una frecuencia  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ .

La figura 2.3 muestra la variación del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  con la frecuencia para varios valores de la diferencia  $\xi_1 - \xi_2$ . En todos los casos existe convergencia dado que  $|\lambda_{\max}|$  es menor que la unidad. Cuando la diferencia  $\xi_1 - \xi_2$  aumenta, se tiende a sistemas con una mayor diferencia de amortiguamiento entre el sistema primario y el apéndice; si  $\xi_1 - \xi_2 \rightarrow 0.08$ ,  $\xi_1 \rightarrow 0.08$  y  $\xi_2 \rightarrow 0$ . A medida que se incrementa el valor de  $\xi_1 - \xi_2$ , se incrementa  $|\lambda_{\max}|$  y es más difícil lograr la convergencia. Por otro lado, si  $\xi_1 - \xi_2 \rightarrow 0$  entonces  $\xi_1 = \xi_2 = 0.04$  y el sistema tiene una distribución uniforme de amortiguamiento. El valor máximo del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  se obtiene cuando la frecuencia coincide con la frecuencia del sistema primario y con la del apéndice.

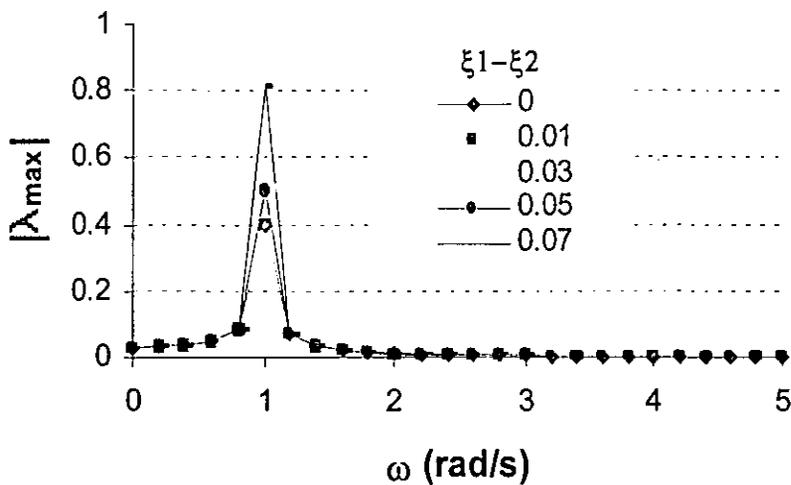


Figura 2.3.- Variación del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$

La figura 2.4 muestra la varianza del desplazamiento relativo,  $\beta_0$ , en función de la diferencia de coeficientes de amortiguamiento crítico  $\xi_1 - \xi_2$ . La varianza  $\beta_0$  crece

con  $\xi_1 - \xi_2$ ; por lo tanto, se producen mayores desplazamientos relativos máximos a medida que el amortiguamiento del apéndice tiende a ser muy pequeño comparado con el del sistema primario. La figura muestra también la varianza cuando se obtienen las funciones de transferencia con la solución exacta que consiste en invertir la matriz de la ec. 2.25. Los resultados obtenidos con el método iterativo coinciden con los obtenidos con la solución exacta. En la fig. 2.5 se grafica el factor de forma  $\delta = \left\{ 1 - (\beta_1)^2 / (\beta_0 \beta_2) \right\}^{1/2}$  en función de  $\xi_1 - \xi_2$ . Se observa que cuando  $\xi_1 - \xi_2 \rightarrow 0.08$ , el desplazamiento relativo tiende a ser un proceso de banda angosta. Nuevamente se observa la coincidencia entre los resultados obtenidos con el método iterativo y los que corresponden a la solución exacta.

La fig. 2.6 muestra la influencia de la relación de frecuencias  $\omega_2/\omega_1$  en el radio espectral para una diferencia de amortiguamientos  $\xi_1 - \xi_2 = 0.07$ . El radio espectral es menor que la unidad en todos los casos considerados y el procedimiento iterativo es convergente. Los picos del radio espectral se presentan cuando la frecuencia coincide con la frecuencia natural del sistema primario o con la frecuencia del apéndice. Sin embargo, el valor máximo se obtiene cuando las frecuencias del apéndice y del sistema primario son iguales,  $\omega_2 = \omega_1 = 1.0$ , tal como se observó en la fig. 2.3. Es de esperar que el número de ciclos en el procedimiento iterativo para alcanzar la tolerancia de convergencia sea mayor a medida que el radio espectral tienda a la unidad.

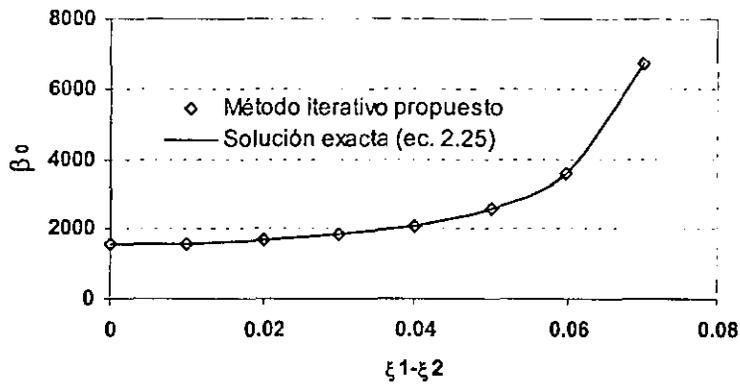


Figura 2.4.- Variación de  $\beta_0$  con  $\xi_1 - \xi_2$

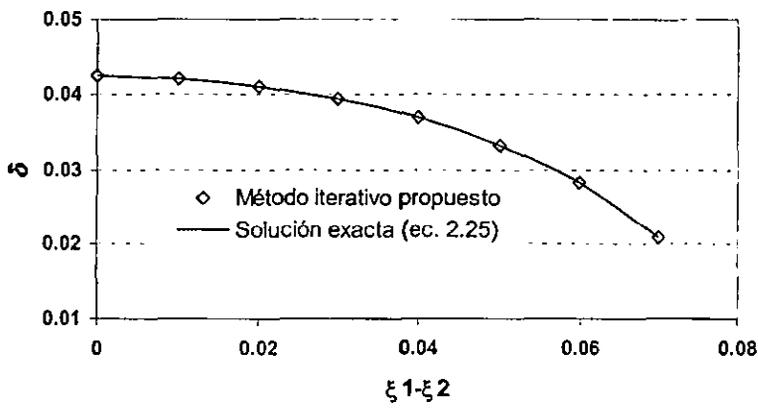


Figura 2.5.- Variación del factor de forma  $\delta$  con  $\xi_1 - \xi_2$

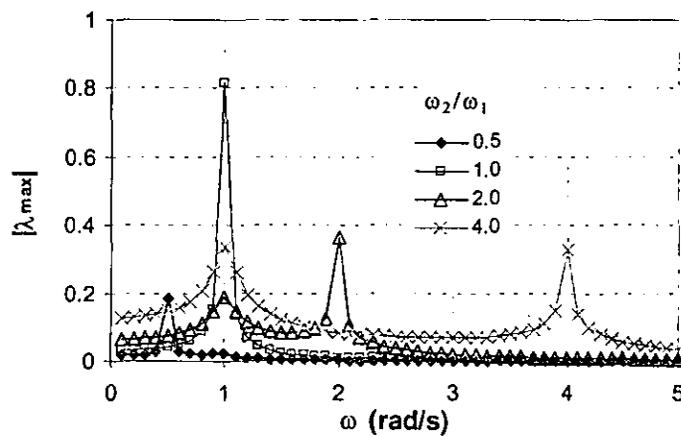


Figura 2.6.- Variación de  $|\lambda_{max}|$  con la relación  $\omega_2/\omega_1$  para  $\xi_1 - \xi_2 = 0.07$

# *Capítulo III*

## *Caso de Estudio*

### **III.1 Funciones de densidad espectral asociadas con los espectros de diseño NTC-DF**

En este trabajo se utiliza el método propuesto por Der Kiureghian y Neuenhofer (1991) para obtener las FDE asociadas a los espectros de diseño de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Distrito Federal (NTC DF, 1987). El método permite obtener iterativamente una función de densidad espectral de aceleración del terreno que relaciona las respuestas máximas medias de un oscilador simple con sus correspondientes ordenadas en el espectro de diseño de desplazamientos relativos. El **Anexo A** contiene una descripción detallada del método para referencia del lector.

Utilizando dicho método se obtuvieron las FDE de la aceleración del terreno asociadas con los espectros de diseño para cada una de las zonas especificadas por las NTC. Se consideraron los espectros de diseño del grupo A (ver figura 3.1) y un coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$  del 5%. En la tabla 3.1 se listan los valores de los parámetros que definen los espectros de la fig. 3.1.

ZONA	c (g)	Ta (s)	Tb (s)	r	T <sub>0</sub> <sup>*</sup> (s)	τ (s)
I	0.24	0.2	0.6	0.5	2.5	20
II	0.48	0.3	1.5	3.9	2.5	20
III	0.6	0.6	3.9	1	4	20

**Tabla 3.1.-** Datos empleados para definir los espectros de diseño de la figura 3.1

de acuerdo a las NTC-DF. Se anexan los valores utilizados de T<sub>0</sub><sup>\*</sup> y τ.

Los espectros de desplazamientos relativos  $D(\omega_0, \xi)$  mostrados en la figura 3.2 corresponden a los espectros de diseño de las NTC; el pico en las tres gráficas se ubica en la frecuencia mínima considerada en el espectro de diseño  $\omega_0^* = 1/T_0^*$  que es igual a 0.25 Hz para la Zona III y 0.4 Hz para las Zonas I y II. La amplitud máxima de los espectros de desplazamiento corresponde a la Zona III (suelo blando) con un valor de 2.3 m, el cual es aproximadamente trece veces mayor al correspondiente a la Zona I (suelo firme) cuya ordenada máxima es de aproximadamente 0.18 m.

La figura 3.3 muestra las FDE de aceleración del terreno,  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)$ , asociadas con los espectros de diseño de las NTC. Se puede apreciar que la Zona I corresponde a un proceso de banda ancha mientras que para la Zona III se trata de un proceso de banda angosta. Al igual que en los espectros de diseño, los valores máximos de las ordenadas espectrales se presentan en la Zona III. El espectro de desplazamiento relativo y la FDE de la aceleración del terreno de la Zona II (terreno de transición) de las figs. 3.2 y 3.3 muestran un comportamiento

intermedio al que se tiene para las Zonas I y III. Las FDE de la aceleración del terreno muestran un pico ubicado en la frecuencia mínima del espectro de respuesta  $\omega_0^*$ . El intervalo de frecuencias dominantes en la Zona I es de 0.3 a 2.7 Hz; en la Zona II, de 0.3 a 1.5 Hz y en la Zona III, de 0.2 a 0.5 Hz. Las FDE de la aceleración del terreno muestran un segundo pico en la frecuencia  $1/T_b$ , la cual es de 16.7 Hz para la Zona I; de 0.67 Hz para la Zona II y de 0.26 Hz para la Zona III.

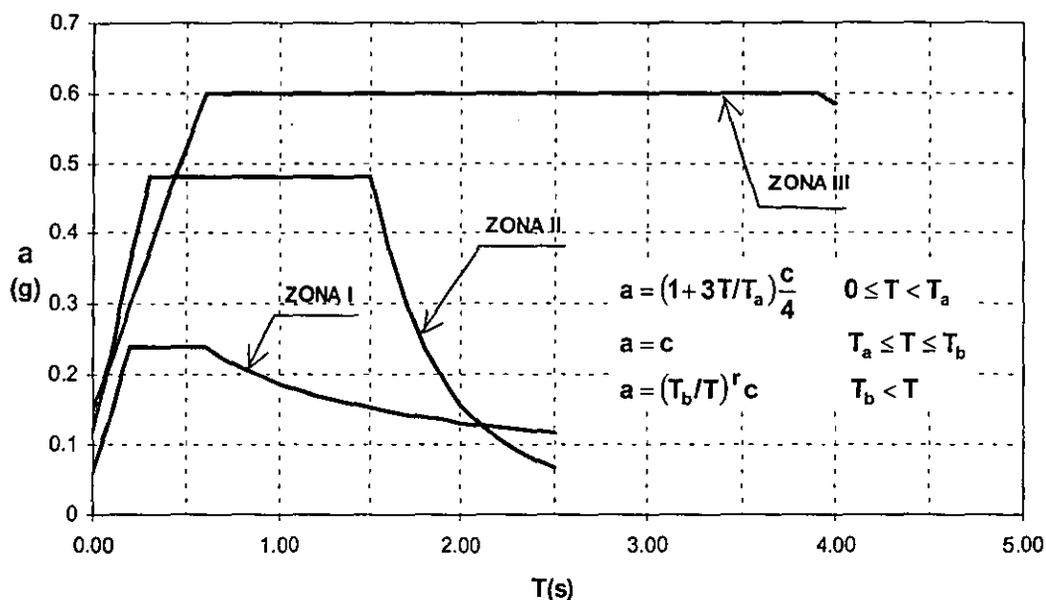


Figura 3.1.- Espectros de diseño de las Zonas I, II y III para estructuras del grupo A con un amortiguamiento  $\xi$  del 5% de acuerdo con las NTC-DF.

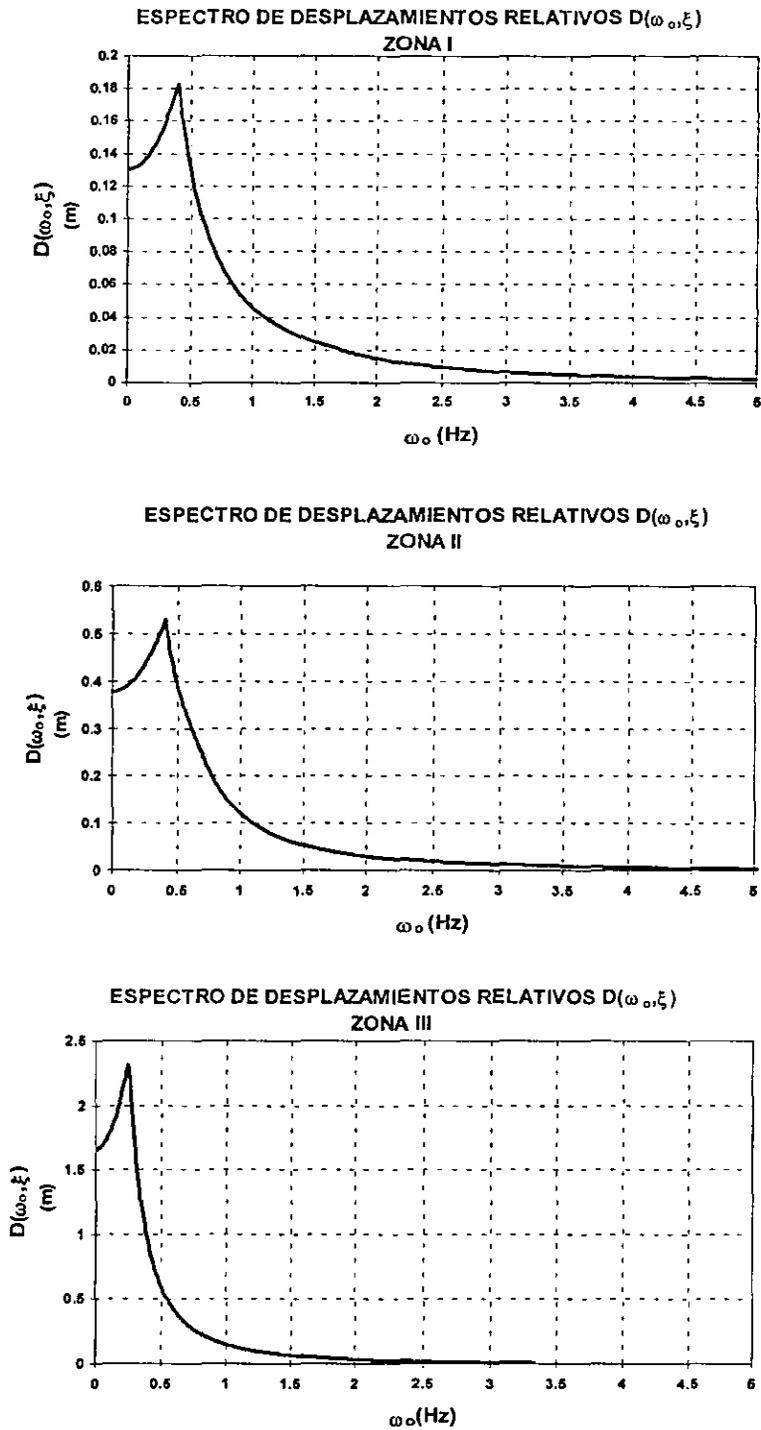
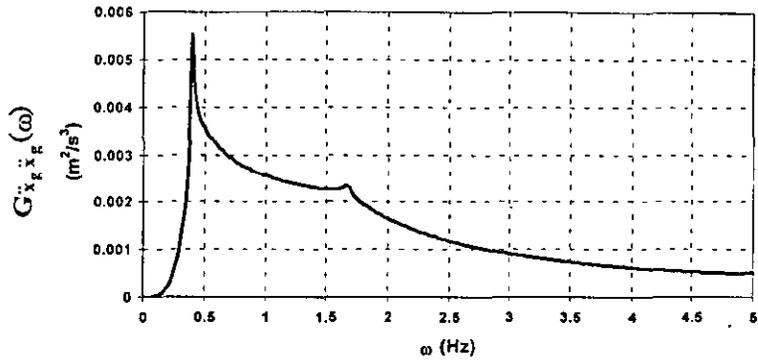
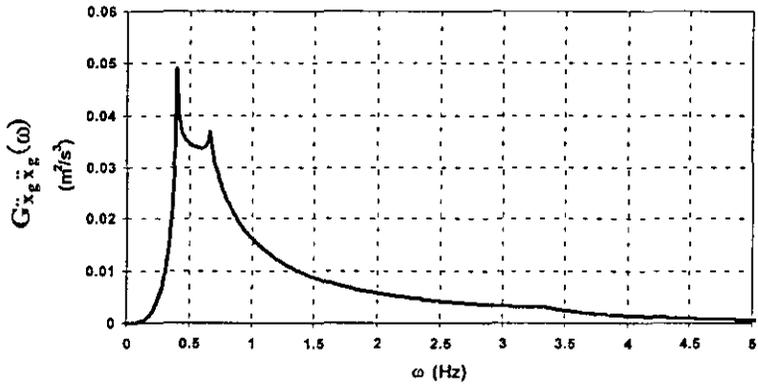


Figura 3.2.- Espectros de desplazamiento relativo  $D(\omega_0, \xi)$  de las distintas zonas de acuerdo a las NTC-DF.

FDE DE ACELERACION DEL TERRENO ZONA I



FDE DE ACELERACION DEL TERRENO ZONA II



FDE DE ACELERACION DEL TERRENO ZONA III

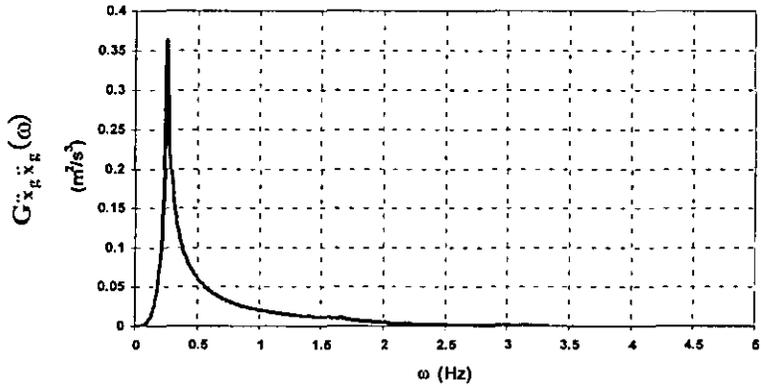


Figura 3.3.-Funciones de densidad espectral de aceleración del terreno  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)$

de las distintas zonas de acuerdo a las NTC-DF.

### III.2 Análisis de convergencia

Se considera como caso de estudio el edificio de cortante de 10 niveles que se muestra en la fig. 3.4 al que se conecta un apéndice en alguno de sus pisos. Utilizando el método desarrollado en el capítulo II se obtienen los espectros de respuesta de aceleración absoluta del apéndice. La relación de la masa del apéndice  $m_n$  entre la masa del nivel en el que está conectado se denota por  $r_a$ .

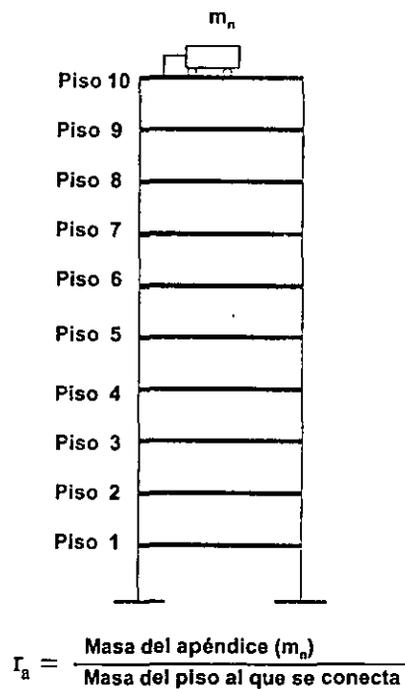


Figura 3.4.- Sistema estructural analizado.

Las propiedades del edificio se listan en la tabla 3.2; se consideró un coeficiente de amortiguamiento crítico del 5% para todos sus modos. Se utilizan las funciones de densidad espectral asociadas con los espectros de las NTC-DF para el análisis de la respuesta elástica del apéndice.

NIVEL	MASA ton-s <sup>2</sup> /cm	RIGIDEZ ton/cm
1	0.214	357.48
2	0.179	321.73
3	0.179	321.73
4	0.179	321.73
5	0.179	321.73
6	0.179	321.73
7	0.179	321.73
8	0.179	321.73
9	0.179	321.73
10	0.179	321.73

Tabla 3.2.- Propiedades del edificio de estudio

La tabla 3.3 muestra las frecuencias y vectores modales que resultan de analizar el edificio sin considerar la presencia del apéndice; la frecuencia de vibrar del primer modo es igual a 1.018 Hz y la del décimo es 13.33 Hz.

Frec. (Hz)	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10
1.018	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.021	2.084	1.871	1.470	0.926	0.288	-0.401	-1.094	-1.729	-2.241	-2.574
4.926	3.120	2.366	1.155	-0.062	-0.861	-0.962	-0.266	1.075	2.646	3.900
6.711	4.086	2.387	0.222	-0.989	-0.702	0.491	1.272	0.439	-2.065	-4.853
8.333	4.958	1.930	-0.829	-0.940	0.524	0.917	-0.587	-1.602	0.712	5.339
9.804	5.718	1.086	-1.437	0.037	0.954	-0.577	-0.879	1.484	0.905	-5.313
10.989	6.347	0.024	-1.278	0.977	-0.065	-0.863	1.177	-0.179	-2.186	4.778
12.048	6.832	-1.043	-0.436	0.953	-0.985	0.658	0.089	-1.269	2.650	-3.783
12.821	7.162	-1.901	0.639	-0.012	-0.409	0.801	-1.236	1.702	-2.127	2.426
13.333	7.329	-2.377	1.372	-0.965	0.789	-0.733	0.740	-0.773	0.810	-0.835

Tabla 3.3.- Frecuencias y vectores modales del sistema primario.

El método de solución propuesto en la sección A.1 es un método iterativo que puede converger o no dependiendo del valor del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  de la matriz de divergencia A (ec. 2.43). Consideremos el caso de un apéndice que se encuentra en el décimo piso del edificio en estudio, con una relación de masa  $r_a = 1/200$  y coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi_n = 2\%$  y  $20\%$ .

La figura 3.5(a) muestra el radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  en función de la frecuencia  $\omega$  y de la frecuencia natural  $\omega_n$  del apéndice. Las figuras 3.5(b) a (d) permiten apreciar la variación del radio espectral para distintos intervalos de frecuencia natural del apéndice. Los picos de las gráficas de la fig. 3.5 se encuentran en las frecuencias de los modos de vibrar del sistema primario y en la frecuencia natural del apéndice; sin embargo, el máximo valor del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  para todo el rango de frecuencias analizado se obtiene en la frecuencia de vibrar del modo fundamental del sistema primario ( $\omega_n = 1.018$  Hz). La fig. 3.6(a) muestra resultados para un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n = 20\%$ . Al incrementar el valor de  $\xi_n$  disminuye el valor del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  para todo el rango de frecuencias. En todas las gráficas de las figs. 3.5 y 3.6 se aprecia que habrá convergencia en el procedimiento iterativo de solución al ser  $|\lambda_{\max}| < 1$ .

Consideremos ahora el caso en el que se incrementa la masa del apéndice de manera que  $r_a = 1/50$ . Las figs. 3.7 y 3.8 muestran la variación del radio espectral en función de la frecuencia natural del apéndice. El comportamiento de  $|\lambda_{\max}|$  con la frecuencia es similar al de las figs. 3.5 y 3.6. La diferencia fundamental al incrementar la masa del apéndice es que  $|\lambda_{\max}| > 1$  para frecuencias altas del apéndice y no habrá convergencia en el método de solución.

Con objeto de analizar el comportamiento del límite de la secuencia matricial,

$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ , consideremos el elemento de mayor valor absoluto de la matriz de

divergencia  $A$  en el  $k$ -ésimo ciclo de iteración,  $|A^{k_{ij}}|_{\max}$ ,  $|A^{k_{ij}}|_{\max} = \max ( |A^{k_{ij}}| )$ ;  $i,j=1,2,\dots,n$ . La figura 3.9 muestra la variación de  $|A^{k_{ij}}|_{\max}$  normalizado respecto al elemento de mayor valor absoluto del primer ciclo  $|A_{ij}|_{\max}$  en función del número de ciclos de iteración para una relación de masas  $r_a = 1/200$ , una frecuencia de vibrar del apéndice que coincide con la frecuencia de vibrar del primer modo del sistema primario,  $\omega_n = 1.018$  Hz, y coeficientes de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n$  del 2%, 5%, 10% y 20%. La fig. 3.9 presenta también el radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  de la matriz de divergencia.

Se puede apreciar cómo se desarrolla la convergencia del método iterativo según

evoluciona  $A^k$ . El cociente  $\frac{|A^{k_{ij}}|_{\max}}{|A_{ij}|_{\max}}$  tiende rápidamente a cero en cuatro ciclos

iterativos para todos los coeficientes de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n$  utilizados. Esta convergencia rápida es congruente con los valores del radio espectral  $|\lambda_{\max}|$  que se muestran en la misma figura. La fig. 3.10 muestra resultados para una relación de masas  $r_a = 1/50$ . Dada la frecuencia natural del apéndice  $\omega_n$ , el radio espectral  $|\lambda_{\max}| \ll 1$ . Para los diversos valores de  $\xi_n$  se

observa que el cociente  $\frac{|A^{k_{ij}}|_{\max}}{|A_{ij}|_{\max}}$  tiende a cero en aproximadamente siete ciclos.

$ra=1/200, \xi_n=2\%$

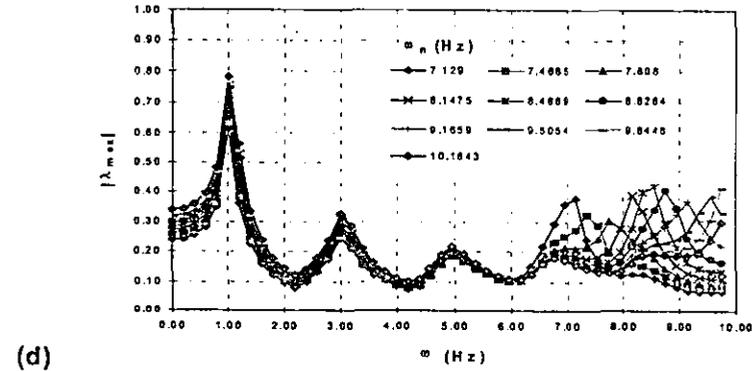
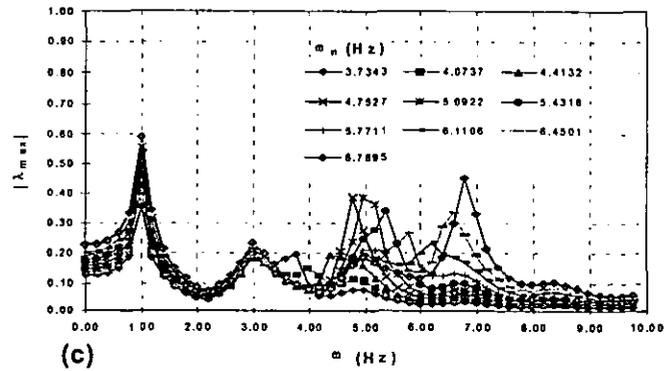
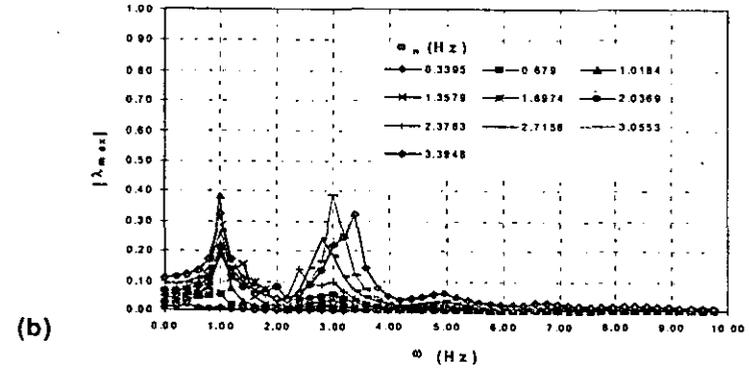
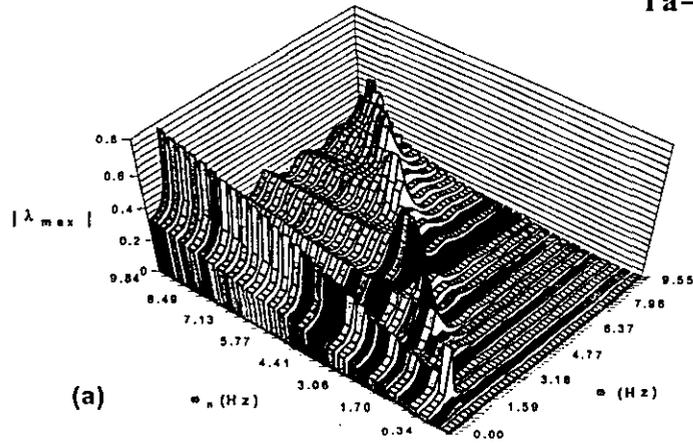


Figura 3.5.- Variación del radio espectral  $|\lambda_{max}|$  de la matriz A considerando el apéndice en el piso10 con una relación  $ra=1/200$  y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n=2\%$ .

$ra=1/200, \xi_n=20\%$

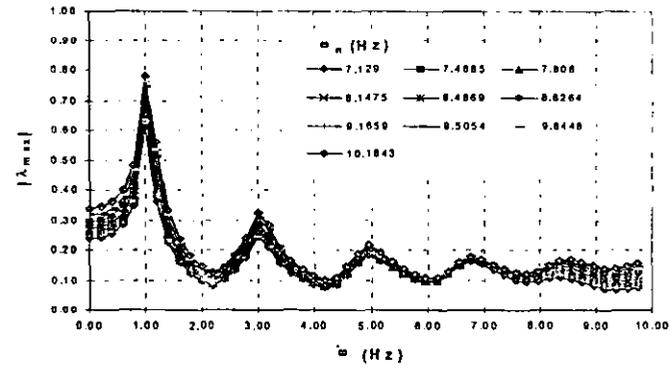
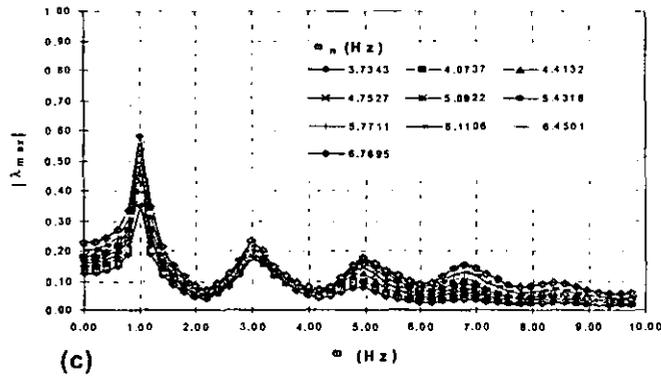
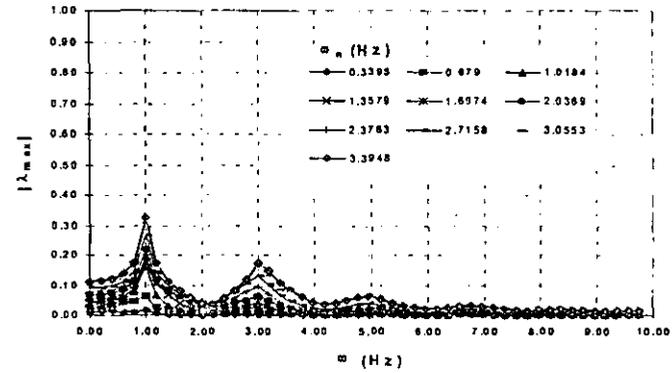
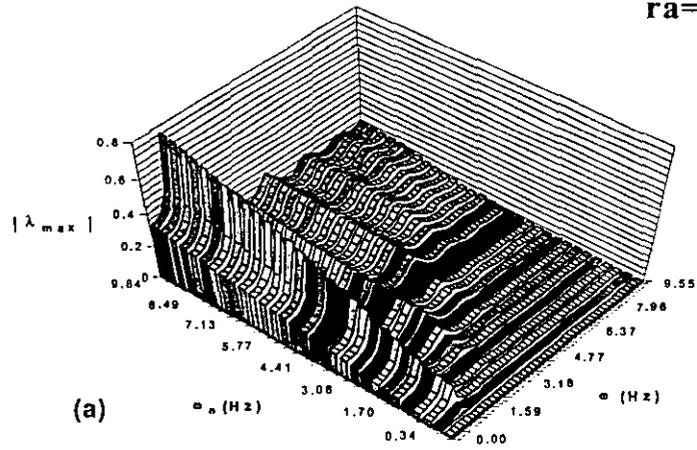


Figura 3.6.- Variación del radio espectral  $|\lambda_{max}|$  de la matriz  $\Lambda$  considerando el apéndice en el piso10 con una relación  $ra=1/200$  y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n=20\%$ .

$ra=1/50, \xi_n=2\%$

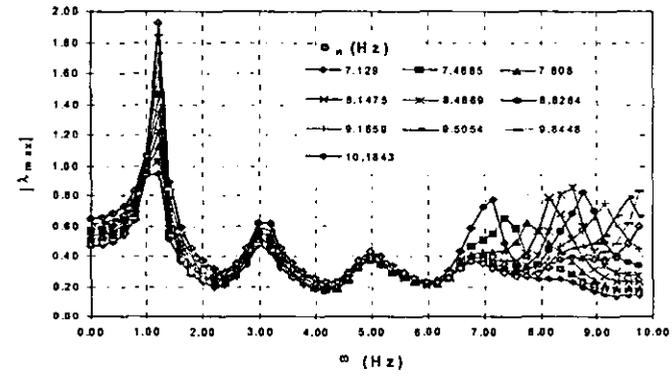
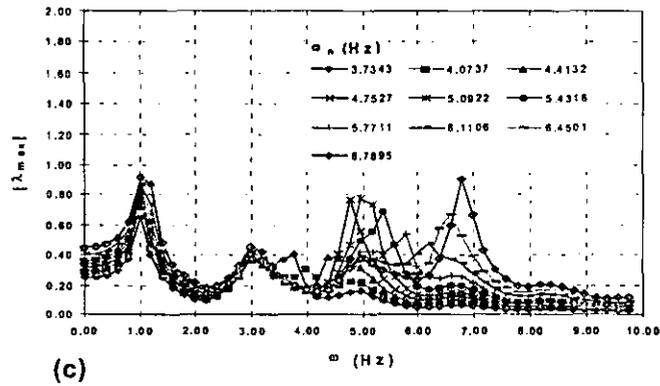
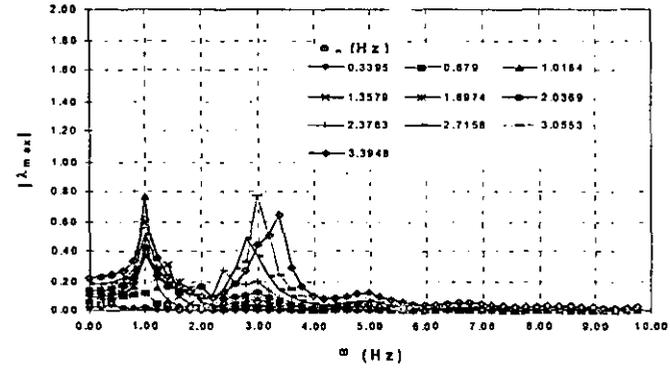
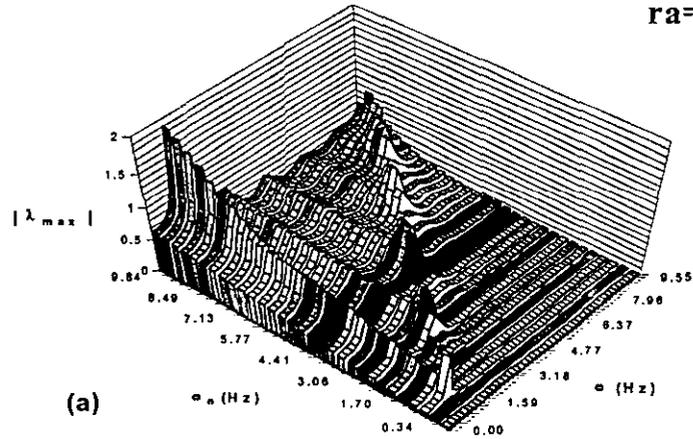


Figura 3.7.- Variación del radio espectral  $|\lambda_{max}|$  de la matriz A considerando el apéndice en el piso10 con una relación  $ra=1/50$  y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n=2\%$ .

$ra=1/50, \xi_n=20\%$

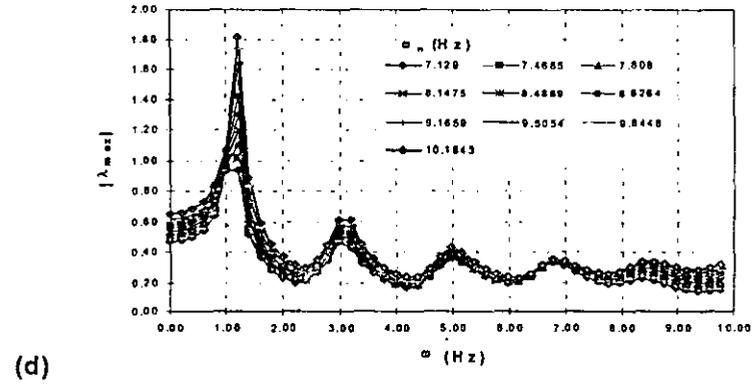
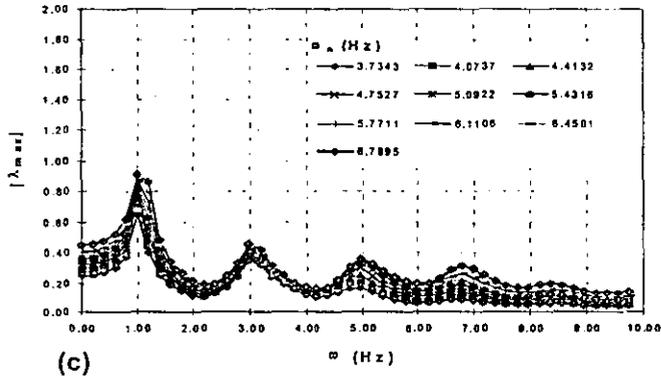
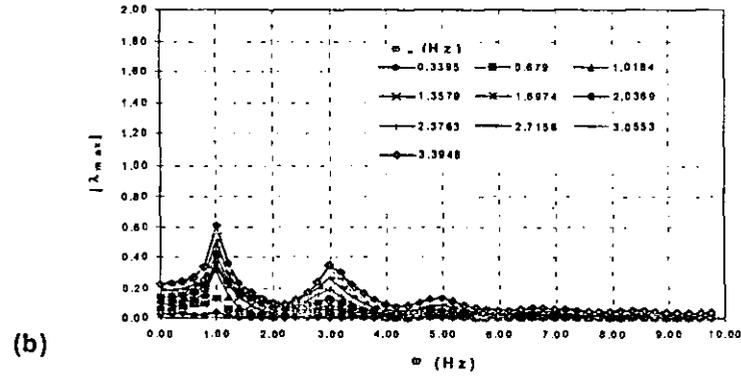
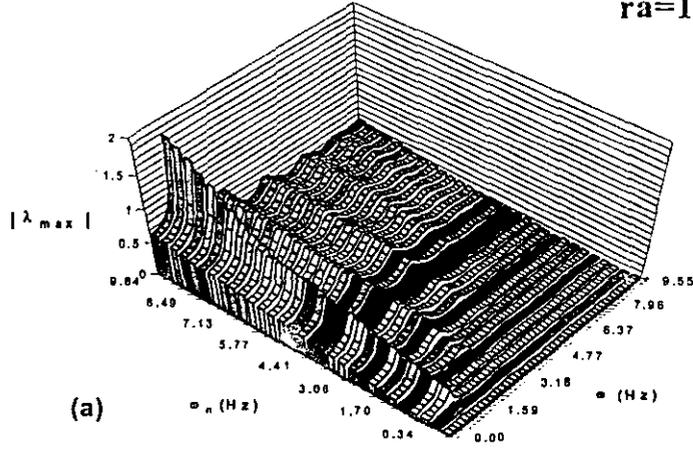


Figura 3.8.- Variación del radio espectral  $|\lambda_{max}|$  de la matriz A considerando el apéndice en el piso10 con una relación  $ra=1/50$  y un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n=20\%$ .

En los resultados que se muestran en la fig. 3.11 se considera un apéndice de gran masa y se emplea una relación  $r_a = 1/5$ . El radio espectral  $|\lambda_{\max}| \ll 1$  excepto cuando la frecuencia del apéndice coincide con la frecuencia fundamental del

edificio,  $\omega_n = 1.018$  Hz, y para  $\xi_n = 2\%$  y  $5\%$ . En estos casos el cociente  $\frac{|A_{ij}^k|_{\max}}{|A_{ij}|_{\max}}$

crece rápidamente con los ciclos de iteración y no se puede lograr la convergencia. Con el incremento del amortiguamiento  $\xi_n$  a  $10\%$  y  $20\%$ ,  $|\lambda_{\max}|$  es

menor que uno para todo el rango de frecuencias. Se observa que  $\frac{|A_{ij}^k|_{\max}}{|A_{ij}|_{\max}}$  tiende

a cero en un mayor número de ciclos dada la cercanía de  $|\lambda_{\max}|$  a la unidad.

La fig. 3.12 muestra resultados para una relación de masas  $r_a = 1/2$ . En este caso el valor de  $|\lambda_{\max}|$  indica que independientemente del amortiguamiento del apéndice no habrá convergencia cuando  $\omega_n = 1.018$  Hz. Se observa cómo el

cociente  $\frac{|A_{ij}^k|_{\max}}{|A_{ij}|_{\max}}$  no tiende a cero con el número de ciclos iterativos cuando

coinciden la frecuencia natural del apéndice y la del modo fundamental del edificio.

Las figs. 3.9 a 3.12 muestran que se requiere incrementar el número de ciclos iterativos en el proceso de solución cuando el índice de convergencia  $|\lambda_{\max}|$  se

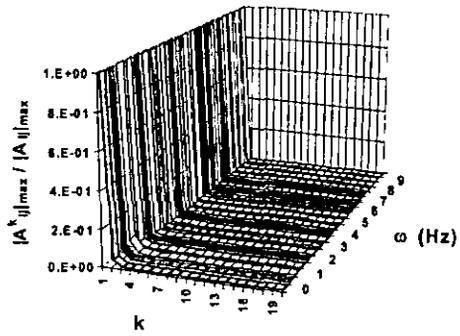
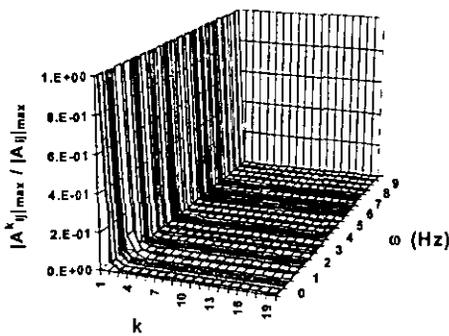
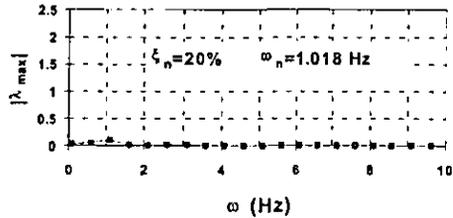
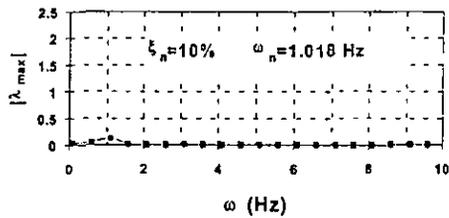
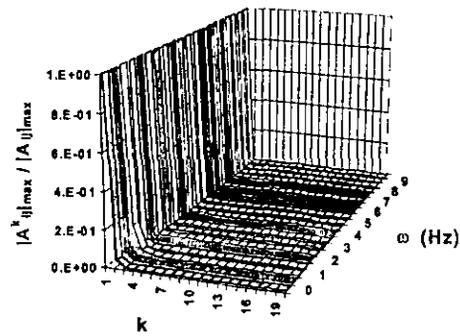
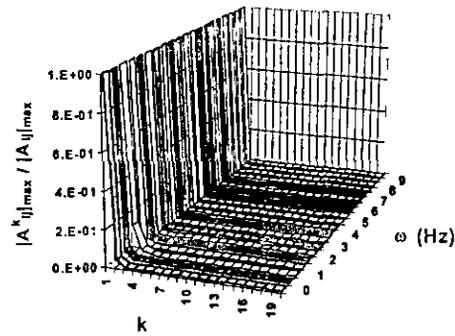
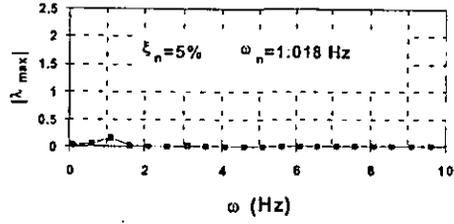
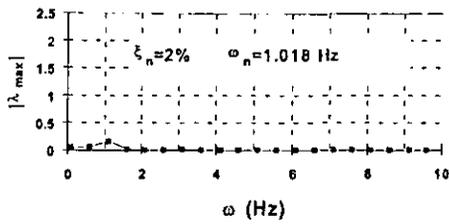


Figura 3.9.- Variación del valor  $|A^k_{ij}|_{\max}$  al incrementar el valor de  $k$ , considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas  $r_a=1/200$  y una frecuencia del apéndice  $\omega_n=1.018$  Hz.

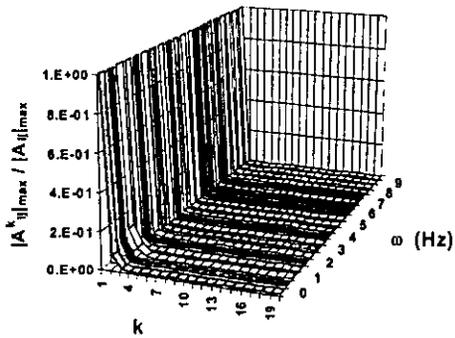
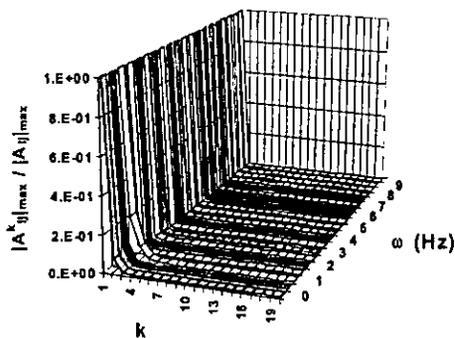
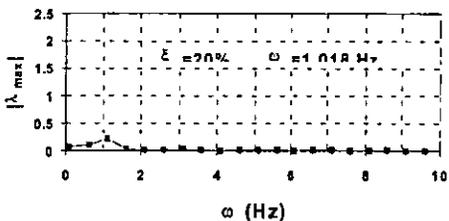
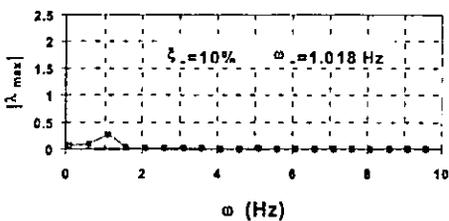
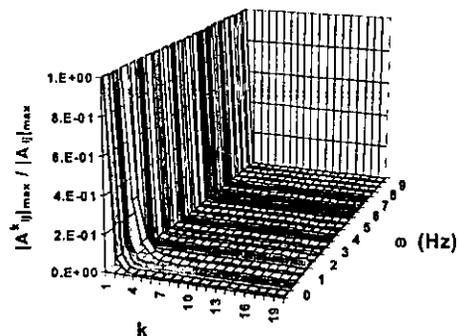
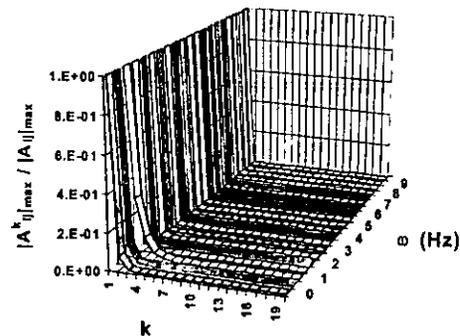
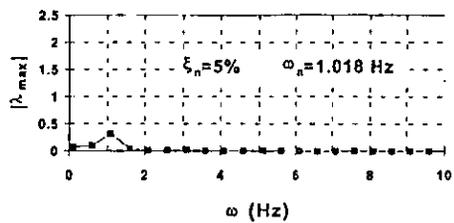
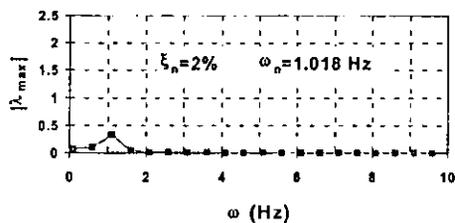


Figura 3.10.- Variación del valor  $|A^k_{ij}|_{\max}$  al incrementar el valor de  $k$ , considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas  $r_a=1/50$  y una frecuencia del apéndice  $\omega_n=1.018$  Hz.

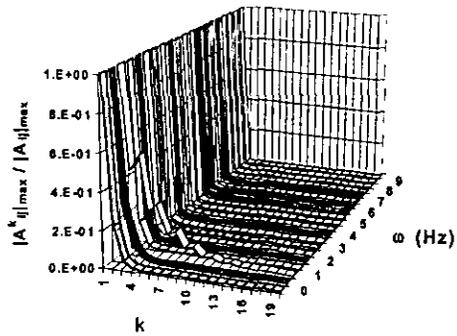
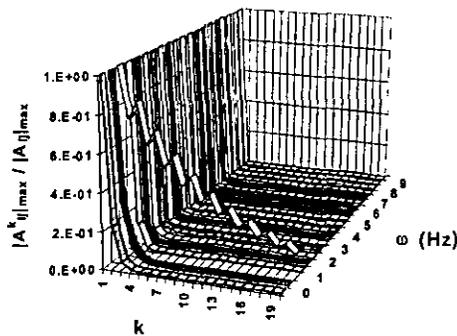
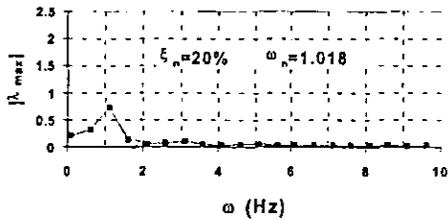
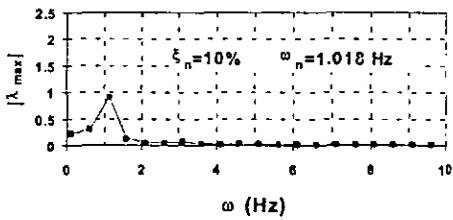
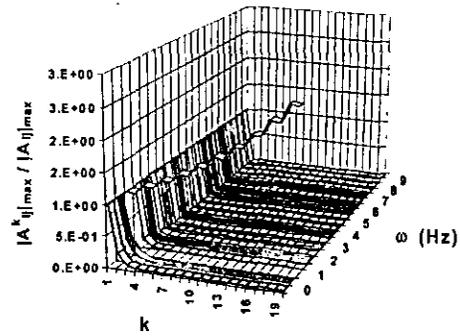
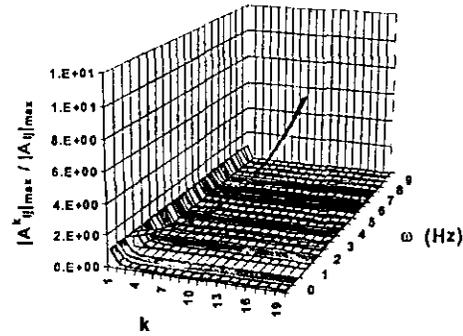
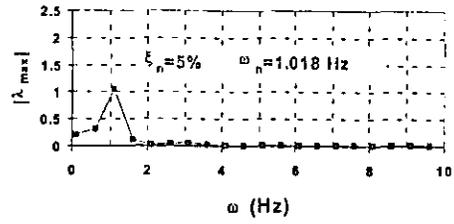
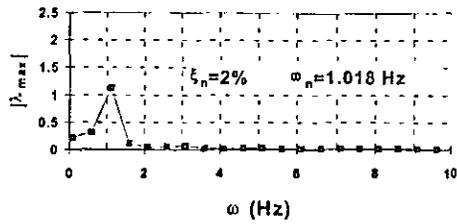


Figura 3.11.- Variación del valor  $|A^k_{ij}|_{max}$  al incrementar el valor de  $k$ , considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas  $r_a=1/5$  y una frecuencia del apéndice  $\omega_n=1.018$  Hz.

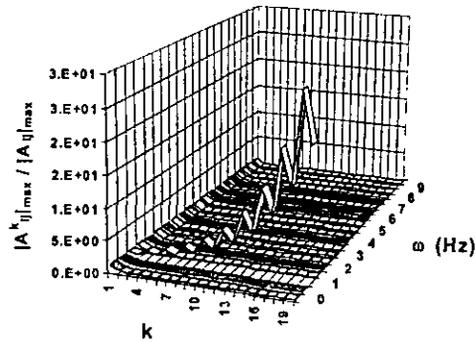
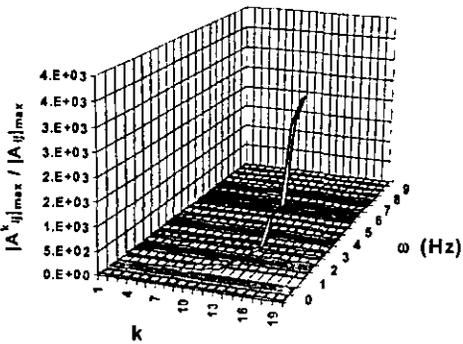
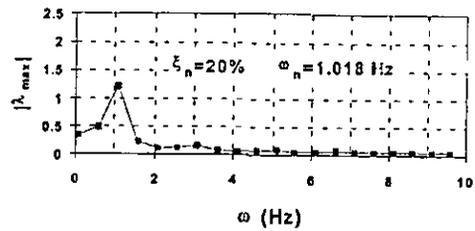
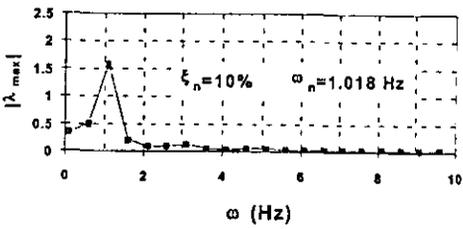
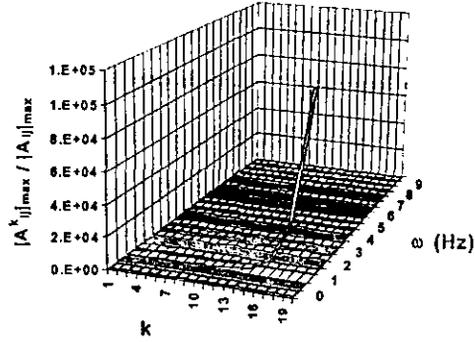
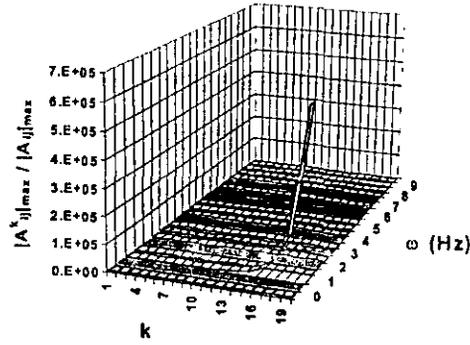
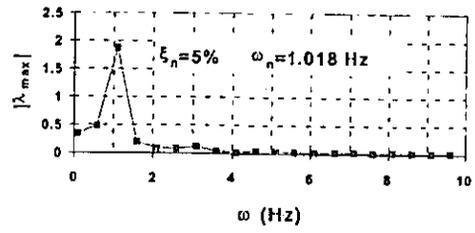
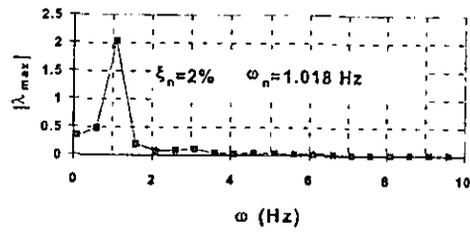


Figura 3.12.- Variación del valor  $|A^k_{ij}|_{max}$  al incrementar el valor de  $k$ , considerando el apéndice en el piso 10; una relación de masas  $r_a=1/2$  y una frecuencia del apéndice  $\omega_n=1.018$  Hz.

aproxima a la unidad. Cuando no existe convergencia, es decir  $|\lambda_{\max}| \geq 1.0$ , se tiene que  $|A^k_{ij}|_{\max} \rightarrow \infty$  con  $k \rightarrow \infty$ .

La relación de masa del apéndice,  $r_a$ , es un parámetro importante en el criterio de convergencia; para valores altos de  $r_a$  el método de solución iterativo puede no converger. Por otro lado, el incremento del amortiguamiento del apéndice,  $\xi_n$ , propicia la convergencia del método de solución. La frecuencia natural de vibración del apéndice,  $\omega_n$ , es el parámetro de mayor efecto en el proceso iterativo; dependiendo de su valor se puede o no lograr la convergencia en sistemas con diferentes relaciones de masa y distintos coeficientes de amortiguamiento crítico.

### III.3 Espectros de respuesta

Se calcularon los espectros de respuesta elástica del apéndice utilizando el método propuesto en el capítulo II. Se emplearon las FDE de aceleración sísmica del terreno asociadas a los espectros de diseño de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Distrito Federal previamente calculadas en el capítulo III.

La fig. 3.13 muestra los espectros de respuesta para el décimo piso en la Zona I y Zona III para un coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n = 2\%$  y una relación de masas  $r_a = 1/200$ . Se grafica también la respuesta que se obtiene con el método de solución exacta en el que la matriz de transferencia  $\mathbf{H}(\omega)$  se obtiene

directamente de la ec. 2.25. Como se puede observar, la precisión del método iterativo propuesto es comparable a la del método de solución exacta.

En la fig. 3.14 se grafican espectros de respuesta correspondientes a un apéndice ubicado en el piso 10, con  $r_a=1/200$  y  $\xi_n=2\%$ , para las Zonas I, II y III de las NTC-DF. El efecto del tipo de suelo se observa claramente en las amplitudes de los espectros de cada zona. Por ejemplo, para  $T_n=1s$  el valor máximo de aceleración es de 3g, 7.5g y 8.5g para las Zonas I, II y III, respectivamente. Los picos en los espectros de respuesta de la figura coinciden con los periodos fundamentales de vibrar del sistema primario (1, 0.33, 0.20s). En el espectro de la Zona III se observa un pico en  $T_n=4s$  que corresponde al periodo predominante de la FDE de aceleración del terreno de dicha zona.

La fig. 3.15 muestra espectros de respuesta calculados para relaciones de masa  $r_a=1/400$ ,  $1/200$  y  $1/50$ , coeficiente de amortiguamiento crítico del apéndice  $\xi_n=2\%$ , para la Zona I y III. La relación de masa apéndice-piso,  $r_a$ , no influye de manera significativa en los espectros obtenidos; solamente cuando el periodo del apéndice coincide con algún periodo fundamental del edificio se puede apreciar variación en la respuesta. La mayor variación de la respuesta con la relación de masas se obtiene cuando el periodo del apéndice coincide con el periodo fundamental del edificio. Dicha variación es mayor en la Zona III donde las ordenadas espectrales se pueden reducir en un 20% al incrementar  $r_a$  de  $1/400$  a  $1/50$ .

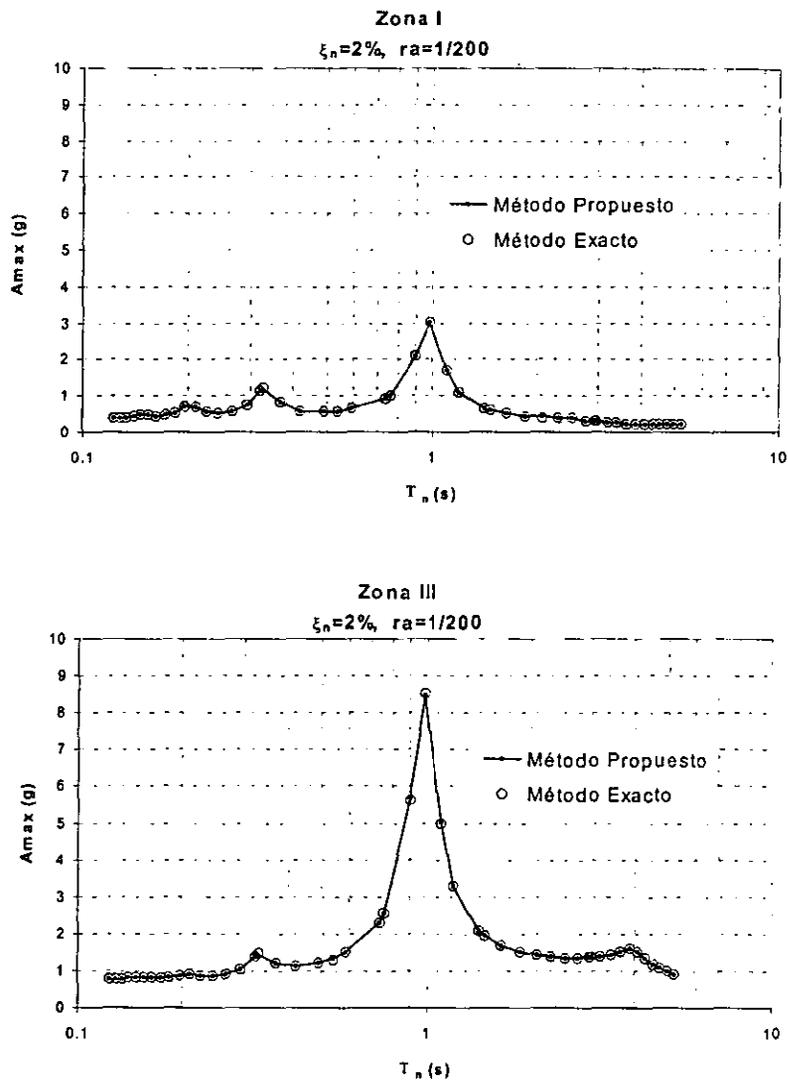


Figura 3.13.- Espectros de respuesta para el piso 10 obtenidos con el método propuesto y por medio de la solución exacta.

### Piso 10

$ra=1/200, \xi_n=2\%$

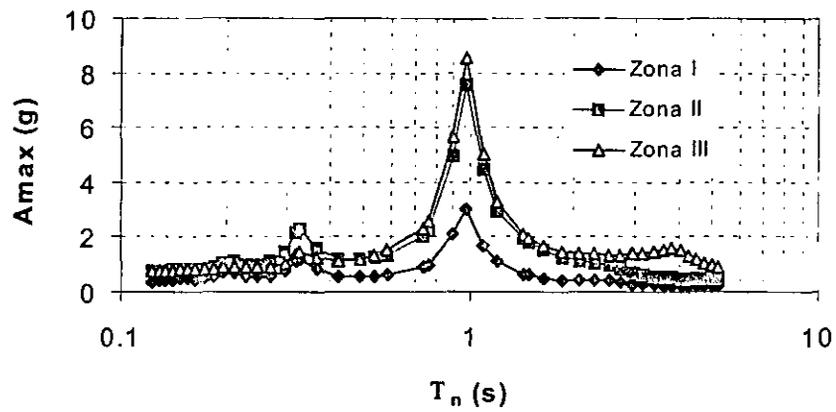


Figura 3.14.- Espectro de respuesta del apéndice colocado en el piso 10 utilizando el método propuesto para la Zona I, II y III.

La fig. 3.16 muestra espectros de respuesta en las Zonas I y III para apéndices colocados en los pisos 10, 8 y 6, con una relación de masa  $r_a=1/200$  y coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi_n=2\%$ . En general, las ordenadas de los espectros disminuyen a medida que el apéndice se coloca en pisos más bajos, sin embargo, dicha variación es muy pequeña. Solamente en el caso de apéndices con periodos cortos y en Zona I, se aprecia una variación mayor de las ordenadas espectrales con la ubicación del apéndice.

Con fines de comparación se utilizó también el método convencional de la práctica profesional que consiste en analizar el edificio sin considerar la interacción dinámica estructura-apéndice para luego usar las respuestas de un piso como excitación en la base del apéndice. Para ello, utilizando la teoría de vibraciones aleatorias se obtuvo la FDE de aceleración absoluta del piso que soporta al apéndice,  $G_{pp}(\omega)$ ; la FDE de aceleración absoluta del apéndice,  $S_{aa}(\omega)$ , se calculó luego con base en la respuesta de un oscilador simple con masa,  $m_n$ , amortiguamiento,  $\xi_n$ , y rigidez,  $k_n$ , cuya excitación en su base es modelada mediante la FDE  $G_{pp}(\omega)$ ,

$$S_{aa}(\omega) = |H_{aa}(\omega)|^2 G_{pp}(\omega) \quad (3.1)$$

donde  $H_{aa}(\omega)$  es la función de transferencia correspondiente

$$H_{aa}(\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2\xi_n \omega_n \omega i}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi_n \omega_n \omega i} \quad (3.2)$$

El valor esperado de la respuesta máxima se calculó de acuerdo a lo indicado en la ec. 2.21.

La fig. 3.17 muestra la relación entre los espectros de respuesta calculados con el método convencional y el método propuesto en las Zonas I, II y III de las NTC-DF, para un apéndice instalado en el piso 10 considerando coeficientes de amortiguamiento crítico  $\xi_n$  del 2% y 20% y relaciones de masa  $r_a = 1/400, 1/200$  y  $1/50$ . Recuérdese que el método propuesto calcula el valor esperado de la aceleración máxima del apéndice. Cuando el amortiguamiento del apéndice es bajo ( $\xi_n = 2\%$ ), se observa que se pueden esperar errores importantes en el cálculo de los espectros de respuesta utilizando el método convencional. En general, despreciar la interacción apéndice-estructura sobrestima la respuesta de apéndices con periodos menores que 1s. La sobrestimación de la respuesta del apéndice utilizando el método convencional no es mayor que 65% si el sistema está desplazado en Zona I, y que 50% si se encuentra en Zona III. En el caso de apéndices con periodos mayores que 1s, el uso del método convencional subestima la respuesta. El error en el cálculo en la respuesta está del lado de la inseguridad y tiende a crecer significativamente con el periodo del apéndice. Por ejemplo, para apéndices con periodo mayor de 3s en las Zonas I y III, el análisis

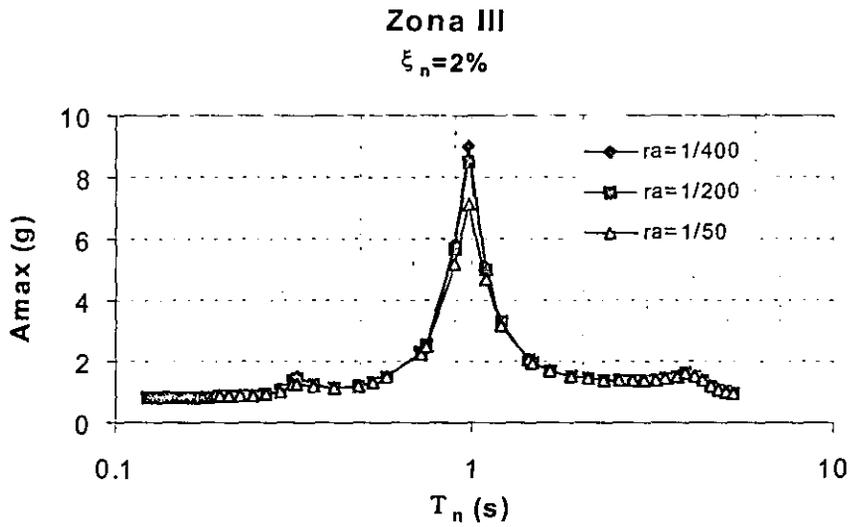
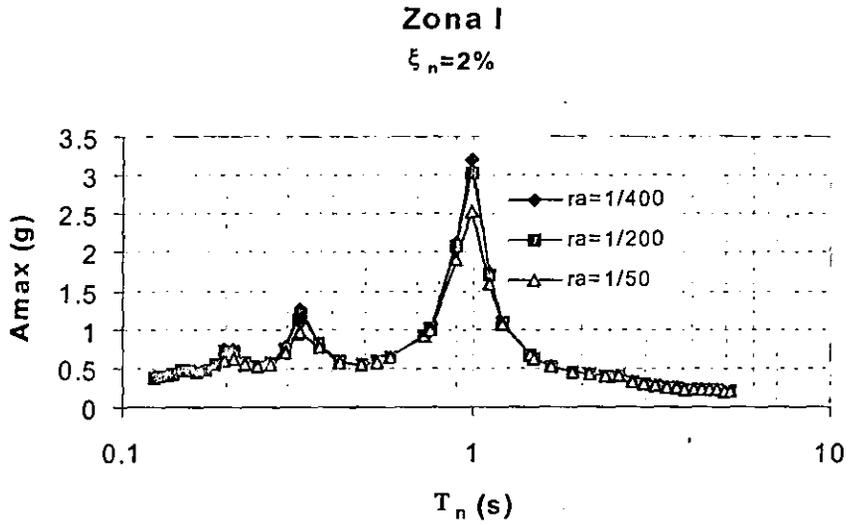
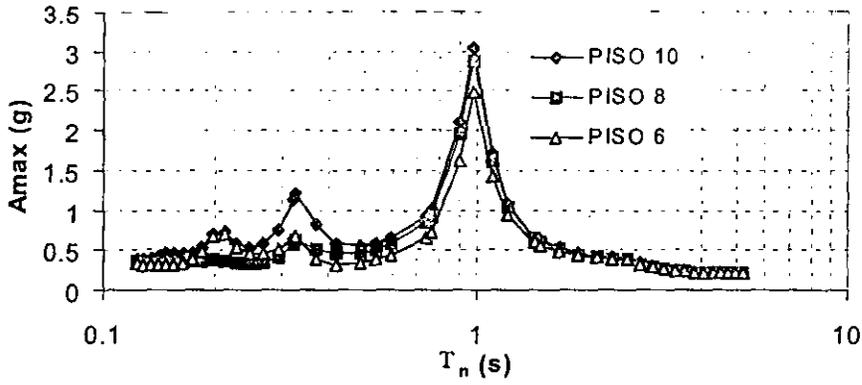


Figura 3.15.- Espectros de respuesta del apéndice colocado en el piso 10 utilizando el método propuesto para las Zonas I y III.

### Zona I

$$\xi_n=2\% \quad r_a=1/200$$



### Zona III

$$\xi_n=2\% \quad r_a=1/200$$

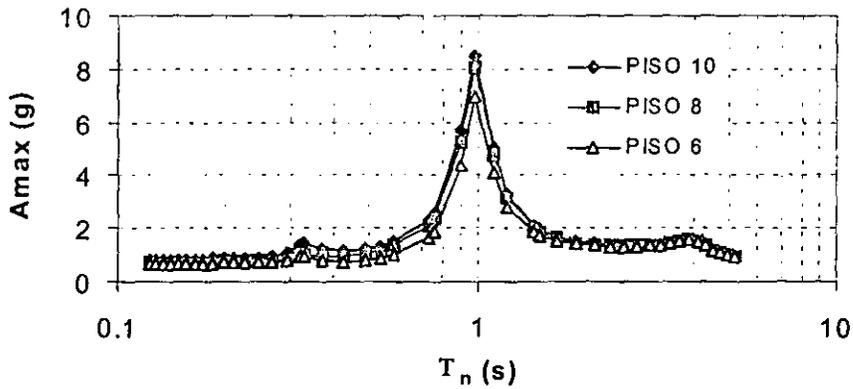


Figura 3.16.- Espectros de respuesta para la Zona I y III de los pisos 10, 8, y 6 utilizando el método propuesto.

acoplado apéndice-edificio resulta en ordenadas espectrales que son más del doble que las que se obtienen con el método convencional. El error es pequeño cuando la frecuencia del apéndice está cerca de la frecuencia fundamental del edificio.

El error en el cálculo de la respuesta con el método convencional disminuye con el amortiguamiento del apéndice. Para apéndices con periodos,  $T_n < 1s$ , el error en que se incurre usando el método convencional es menor al 10%. Sin embargo, para periodos,  $T_n > 1s$ , el método convencional subestima la respuesta del apéndice produciendo resultados del lado de la inseguridad. Por ejemplo, en Zona I y periodo  $T_n = 2s$ , el método convencional produce respuestas espectrales que son del orden del 50% de las obtenidas en el análisis del sistema acoplado. El error de subestimación del método convencional aumenta con el periodo.

Las figuras 3.18 y 3.19 muestran resultados para el apéndice instalado en los pisos 8 y 6. Como en los resultados anteriores, se observa que la relación de masas apéndice-piso no influye de manera significativa en la respuesta normalizada y que el efecto de incrementar el amortiguamiento consiste en disminuir el error que se comete en el cálculo de la respuesta de apéndices rígidos mediante el método convencional. La diferencia entre la respuesta calculada con ambos métodos para apéndices con periodo natural menor a 1s colocados en los pisos 6 y 10 muestra que la presencia de estos apéndices modifican en mayor proporción la respuesta del piso 6 de lo que lo hacen en el piso 10.

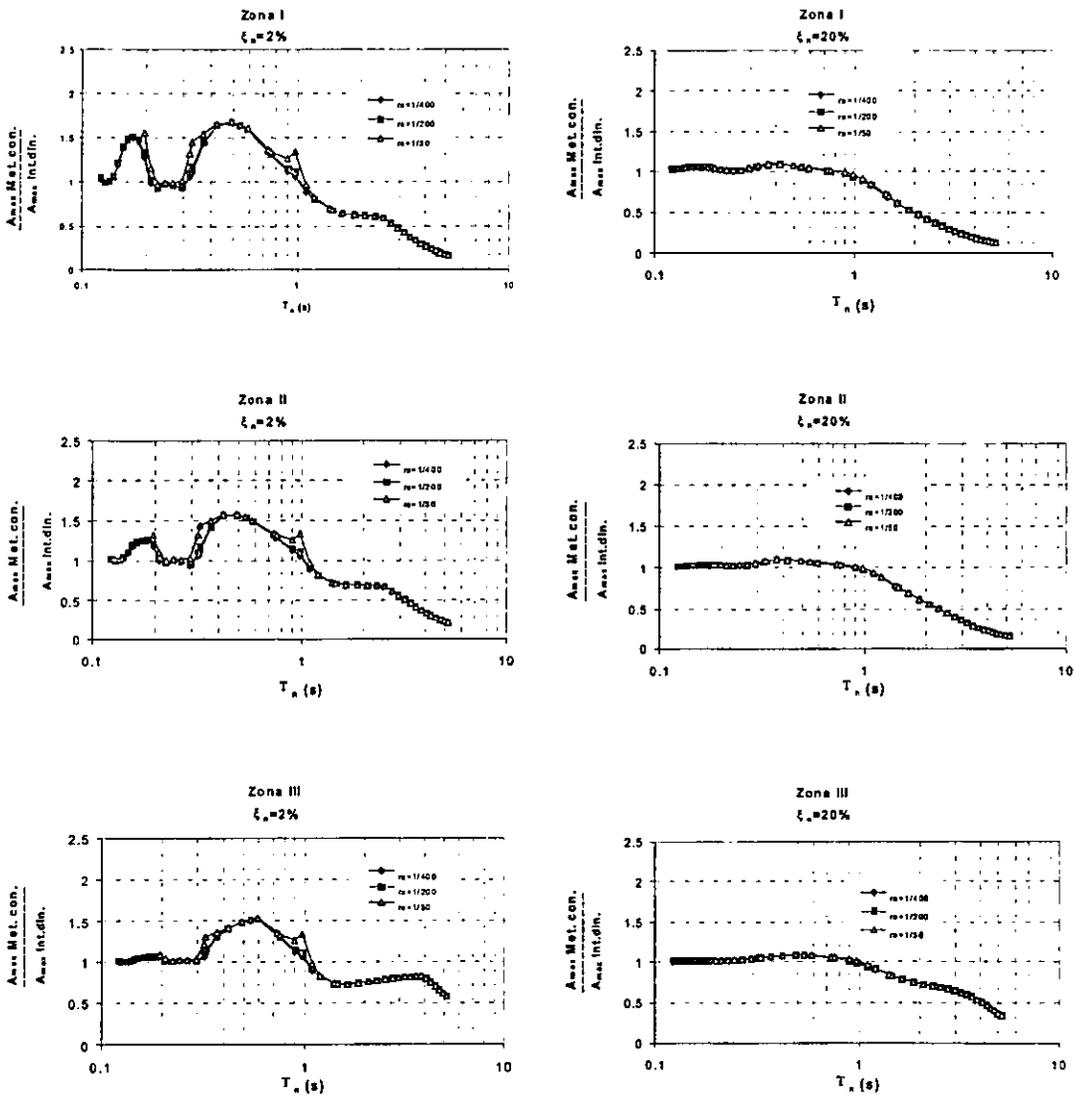


Figura 3.17.- Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 10).

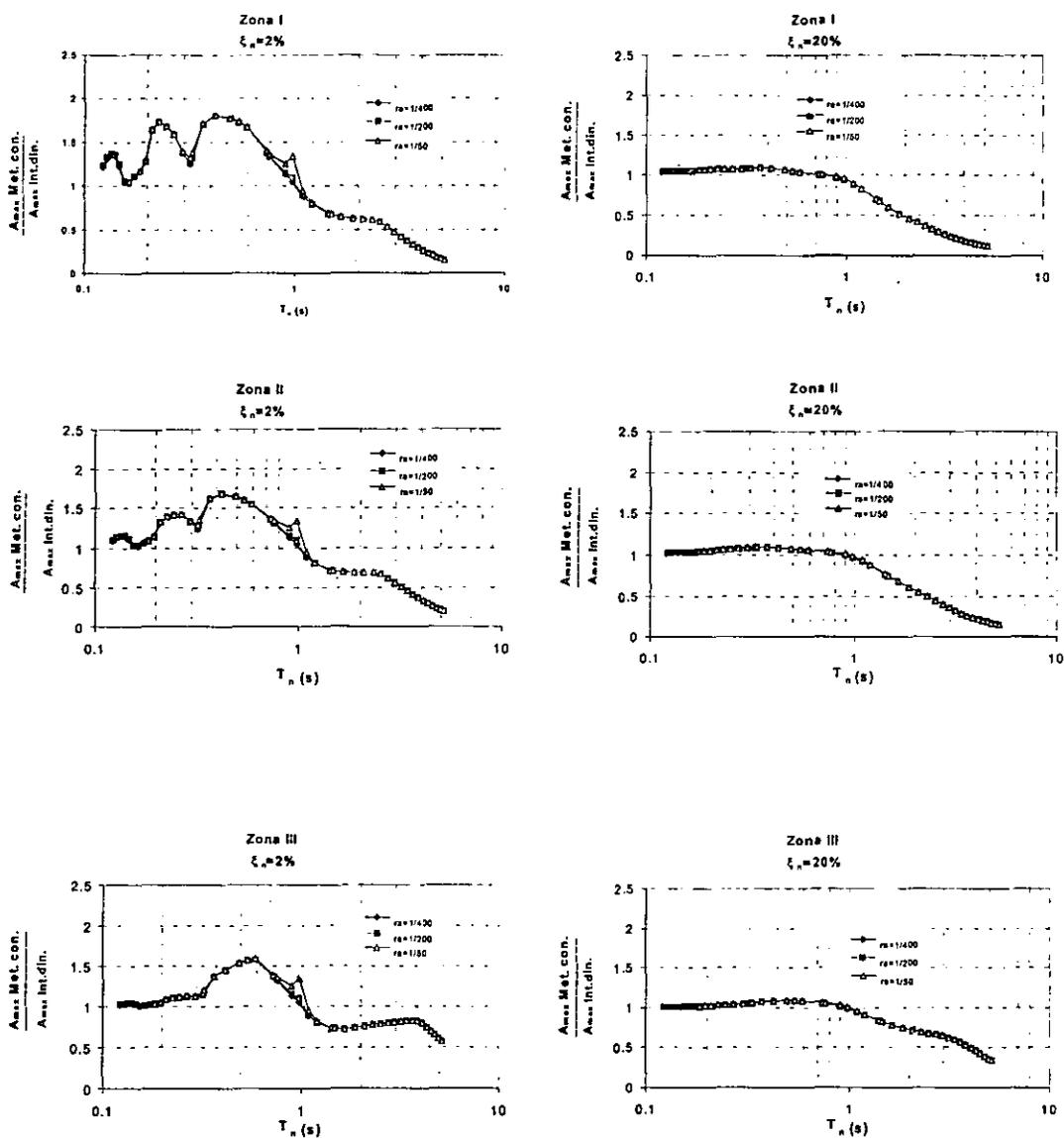


Figura 3.18.- Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 8).

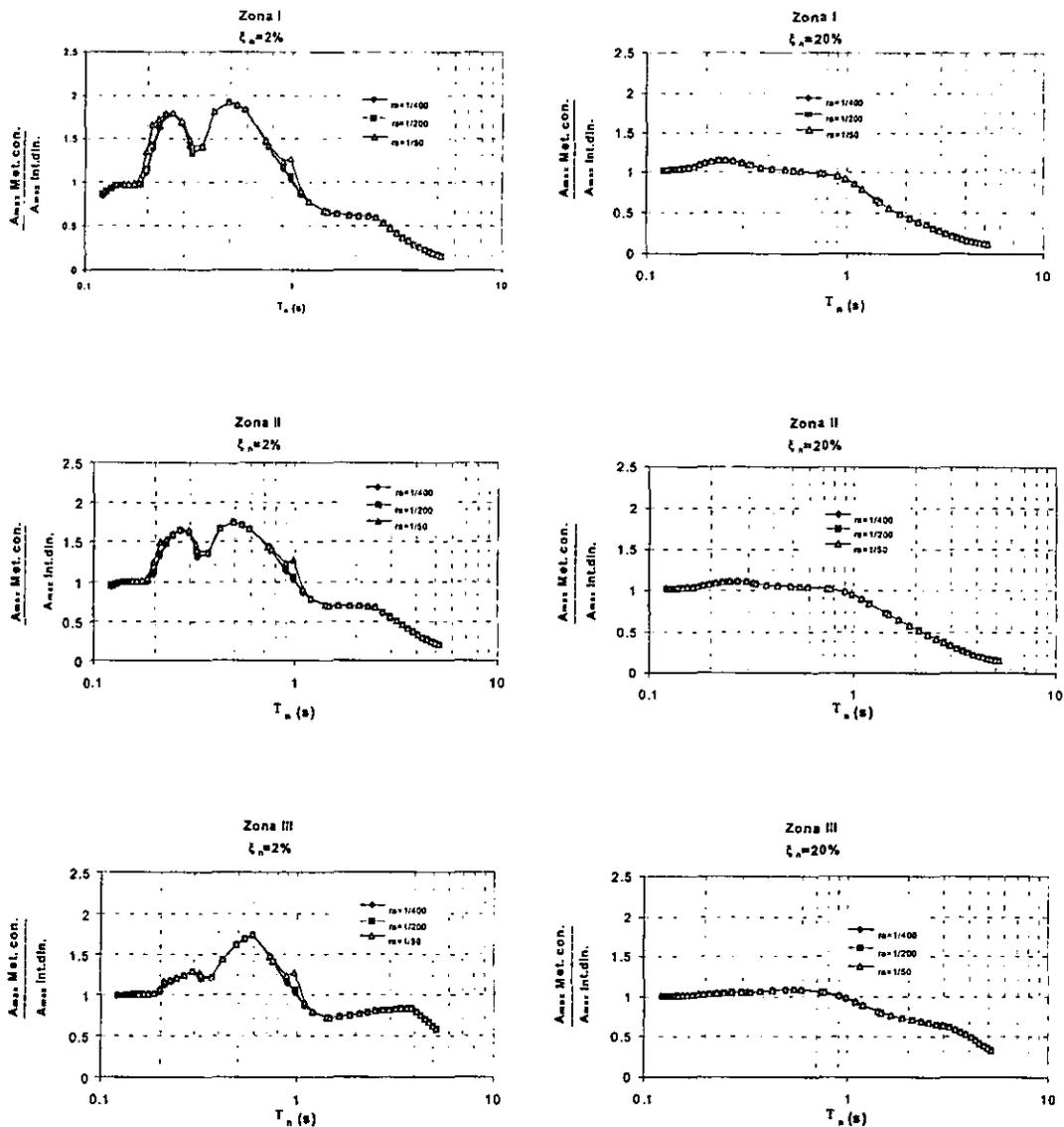


Figura 3.19.- Relación entre las ordenadas espectrales del método convencional y el método de la seudofuerza (apéndice en el piso 6).

# *Capítulo IV*

## *Conclusiones y comentarios*

Se analizó la convergencia del método iterativo propuesto por Barranco et al. (1994) para encontrar la matriz de funciones de transferencia de un sistema acoplado primario-apéndice en el cual el sistema primario consiste de un edificio de varios niveles. El método iterativo es una extensión del método de la pseudo-fuerza propuesto por Jangid y Datta para sistemas con amortiguamiento no-clásico (1993) y se basa en una descomposición de las matrices generalizadas de amortiguamiento y rigidez. Una ventaja del método iterativo es que no es necesario invertir matrices complejas para obtener la matriz de funciones de transferencia del sistema acoplado. El proceso iterativo se inicia con una matriz diagonal de funciones de transferencia conocidas de osciladores modales modificados por la presencia del apéndice. Como en el caso de cualquier método iterativo, es necesario analizar las condiciones necesarias y suficientes de convergencia. Barranco et al. (1994) establecieron las condiciones necesarias para la convergencia del método propuesto. Desafortunadamente, el uso de métodos en los que no existen condiciones suficientes de convergencia es muy limitado puesto que no se puede garantizar que el procedimiento iterativo converge a una solución. En esta tesis se analizó la serie geométrica matricial

mediante la cual se calcula la matriz de funciones de transferencia para un ciclo iterativo. Dicha serie depende de la llamada matriz de divergencia, la cual depende de los elementos de acoplamiento en las matrices generalizadas de rigidez y amortiguamiento. Se estableció que la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie geométrica es que el radio espectral de la matriz de divergencia sea menor que la unidad. De esta manera, el límite de la secuencia matricial para la matriz de divergencia es una matriz nula cuando el número de ciclos iterativos tiende a infinito. En consecuencia, la serie geométrica converge a la matriz de funciones de transferencia del sistema acoplado primario-apéndice.

El sistema acoplado primario-apéndice se somete a una aceleración sísmica del terreno modelada como un proceso aleatorio estacionario de media cero. Una vez conocida la matriz de funciones de transferencia del sistema acoplado y haciendo uso de la teoría de vibraciones aleatorias, se resuelve el problema de evaluar la función de densidad espectral de la aceleración total del apéndice conectado a un piso cualquiera del sistema primario. El valor esperado de la aceleración máxima del apéndice se calcula mediante la desviación estándar de la aceleración del apéndice y el factor pico correspondiente. El método iterativo se aplicó al cálculo de espectros de piso de apéndices para sistemas ubicados en el Valle de México. Se utilizaron los espectros de diseño especificados por las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Distrito Federal (NTC; DF 1987) para las zonas clasificadas como I (suelo duro), II (suelo de transición) y III (suelo blando). Se determinaron las funciones de densidad espectral de la aceleración sísmica del terreno congruentes con dichos espectros de diseño utilizando el

método iterativo propuesto por Der Kiureghian y Nueunhofer (1991). Las funciones de densidad espectral obtenidas para las tres zonas corresponden a aceleraciones aleatorias del terreno que generan respuestas máximas medias en un oscilador simple iguales a las ordenadas de los espectros de diseño del reglamento para el mismo oscilador. Para la Zona I se obtuvo una densidad espectral de un proceso de banda ancha, mientras que para la Zona III la densidad espectral es de mayores amplitudes y característica de un proceso de banda angosta. Estas densidades espectrales pueden utilizarse en estudios futuros como modelos de funciones de densidad espectral compatibles con los espectros de diseño de las NTC para cada una de las zonas consideradas.

El método iterativo se aplicó al caso de un sistema acoplado que consiste de un edificio de cortante de 10 niveles al que se le conecta un apéndice. Se analizó la convergencia del método y la influencia de algunas propiedades dinámicas del apéndice, tales como la masa, la frecuencia natural de vibración y el coeficiente de amortiguamiento crítico. Los valores máximos del radio espectral se producen cuando la frecuencia del apéndice coincide con la frecuencia de algún modo de vibrar del sistema primario. El incremento en el amortiguamiento crítico del apéndice favorece la convergencia disminuyendo los valores del radio espectral. Es más difícil lograr la convergencia en aquellos casos en los que se incrementa la relación de la masa del apéndice respecto al piso que lo soporta. En la medida en que el radio espectral se aleja de la unidad, el método converge generalmente en un número menor de ciclos.

Los espectros de piso calculados con el método iterativo coinciden con precisión con aquellos que se obtienen al calcular la matriz de funciones de transferencia mediante una inversión matricial directamente de la ecuación de movimiento del sistema acoplado. El método iterativo representa un proceso de solución rápido que utiliza operaciones matriciales simples.

El efecto del tipo de suelo en los espectros de piso se observó en las diferentes ordenadas espectrales para cada zona considerada en las NTC; los valores máximos corresponden a la Zona III y los mínimos a la Zona I. La relación de masa apéndice-piso influye en el cálculo de la respuesta cuando el periodo de vibración del apéndice coincide con el periodo de algún modo de vibrar del sistema primario; dicha influencia es mayor cuando se trata del primer modo. El incremento de amortiguamiento del apéndice disminuye la sensibilidad de la respuesta dada una relación de masas y la ubicación del apéndice. En general se observó que las ordenadas de los espectros de aceleración absoluta del apéndice disminuyen al ubicar al apéndice en pisos inferiores. En la Zona I la variación de la ordenada espectral con la ubicación del apéndice es considerable. Estos resultados sugieren que hay una mayor contribución o dominio del primer modo de vibrar, por lo tanto la respuesta disminuye con la altura del edificio; este efecto es común en edificios con geometría y propiedades mecánicas uniformes en altura. El dominio del primer modo se observa en todos los casos de análisis al presentarse el valor máximo esperado cuando el apéndice se encuentra en resonancia con la frecuencia de vibrar de dicho modo.

Para fines de comparación se calcularon espectros de piso usando el método convencional que consiste en obtener la respuesta del piso que soporta al apéndice para luego utilizar esta respuesta como excitación del mismo. El error que se comete al despreciar la interacción dinámica del sistema acoplado es importante. En los casos analizados se encontró que el método convencional puede sobrestimar la respuesta para apéndices con periodos,  $T_n < 1s$ ; por el contrario, en el caso de apéndices con periodos,  $T_n > 1s$ , el método convencional subestima la respuesta. Los errores de sobrestimación de la respuesta con el método convencional fueron mayores en la Zona I y variaron entre 50% y 80%. En el caso de apéndices de periodo,  $T_n > 1s$ , el método convencional puede subestimar la respuesta en más del 50%. Los resultados indican que dicho error no depende del amortiguamiento ni de la ubicación del apéndice.

La diferencia entre los resultados obtenidos con el método iterativo y el convencional ha mostrado la necesidad de utilizar métodos que consideren el sistema acoplado estructura-apéndice. De acuerdo a los casos de análisis realizados se observó que no existe convergencia del método para aquellos casos en los que se tiene una relación de masa apéndice/piso muy grande, o una frecuencia de vibrar del apéndice alta o un coeficiente de amortiguamiento bajo. En tales casos, será necesario usar métodos alternativos de solución.

## *Bibliografía*

1. Barranco, F., Heredia, E. y J. Silva. "Espectros de piso considerando los efectos de interacción dinámica y amortiguamiento no-clásico", Congreso Nacional de Ingeniería Estructural México, 455-463 (1994).
2. Christian, J. T. "Generating seismic design power spectral density functions", *Earthquake Spectra*, 5, 351-368 (1989).
3. Claret, A. M. y Venancio-fillio, F. "A modal superposition pseudo-force method for dynamic analysis of structural systems with non-proportional damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20, 303-315 (1991).
4. Cullen, Charles. "Matrices and Linear Transformations", Addison-Wesley Publishing Company, Second edition (1972).
5. Davenport, A.G. "Note on the distribution of the longest value of a random function with application to gust loading", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 28, 187-196 (1964).
6. Der Kiureghian, A. "Structural response to stationary excitation", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 106, 1195-1213 (1981).
7. Der Kiureghian, A. y Neuenhofer, A. "A response spectrum method for multiple support seismic excitations", *Earthquake Engineering Research Center, UCB/EERC-91/08* (1991).
8. Falsone, G. y Muscolino, G. "Combined dynamic response of primary and multiply connected cascaded secondary system", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20, 749-767 (1991).
9. Igusa, T., Der Kiureghian, A. y Sackman, J. L. "Modal decomposition method for response of non-classically damped systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 15, 141-158 (1987).
10. Jangid, R. S. y Datta, T. K. "Spectral analysis of systems with non-classical damping using classical mode superposition technique", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 723-735 (1993).
11. Kaul, M.K. "Stochastic characterization of earthquakes through their response spectrum", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, 497-509 (1978).
12. Newmark N. y Hall, W. J. "Seismic design criteria for nuclear reactor facilities", *Proc. 4<sup>th</sup> World Conference Earthquake Engineering, Santiago, Chile, II*, 37-50 (1969).

13. Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, No. 38, (1987).
14. Rosenblueth, E. y Elodury, J. "*Response of linear systems to certain transient disturbances*". Proc. 4<sup>th</sup> World Conference Earthquake Engineering, Santiago, Chile, I, 185-196 (1969).
15. Singh, M. P. "*Seismic response by SRSS for non-proportional damping*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 106, 1405-1419 (1980).
16. Suarez, L. E. y Singh, M. P. "*Floor response spectra with structure-equipment interaction effects by a mode synthesis approach*", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 12, 121-136 (1984).
17. Unruh J.f. y Kana, D. D. "*An alternative procedure for the generation of consistent power/response spectrum*", Nuclear Engineering and Design, 66, 427-435 (1981).
18. Vanmarcke, E. "*Random fields: Analysis and synthesis*", MIT Press (1983).

# Apéndice A

## A.1 Funciones de densidad espectral de la aceleración sísmica del terreno asociadas con espectros de diseño

Sea  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_0)$  la función de densidad espectral que se desea obtener asociada al espectro de respuesta  $D(\omega_0, \xi)$  definido como la esperanza del desplazamiento relativo máximo de osciladores simples con frecuencia natural  $\omega_0$  y amortiguamiento  $\xi$  sometidos a la aceleración sísmica aleatoria  $\ddot{x}_g(t)$ . (ver fig. A.1). Las ordenadas del espectro se definen como sigue

$$D(\omega_0, \xi) = P_s(\omega_0) \sqrt{\beta_0(\omega_0)} \quad (\text{A.1})$$

donde  $P_s(\omega_0)$  es el factor pico definido en la sección A.2 y  $\beta_0(\omega_0)$  es la varianza de la respuesta en términos del desplazamiento relativo.

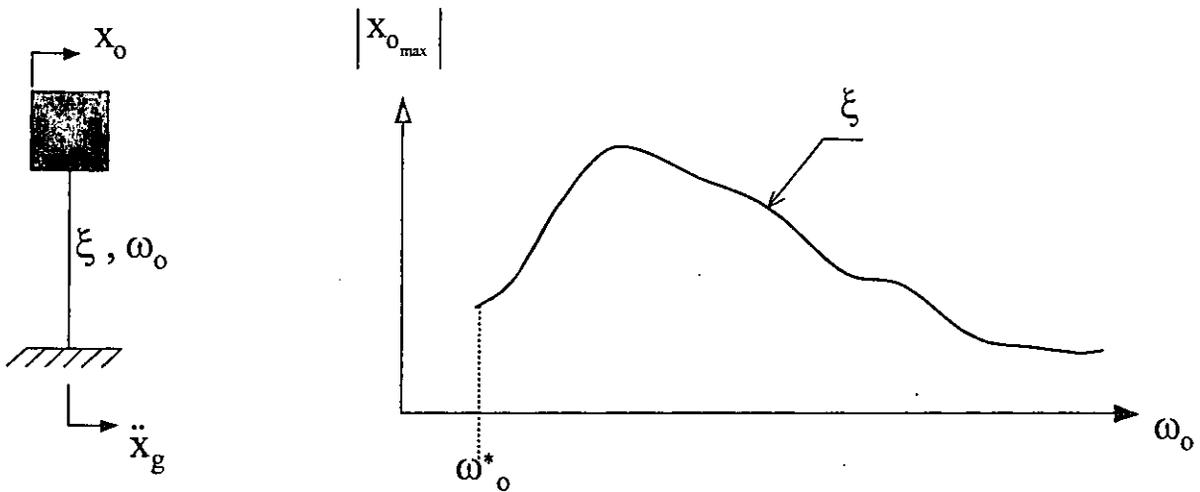


Figura A.1.- Representación esquemática del espectro de respuesta de desplazamientos relativos  $D(\omega_o, \xi) = |x_{o,max}|$

Es importante notar que la respuesta en términos del desplazamiento relativo de un oscilador infinitamente flexible es idéntica pero en dirección opuesta a la de su base; es decir  $D(0, \xi) = |x_{g,max}|$ . Por otro lado, la pseudo-aceleración de un oscilador infinitamente rígido se aproxima asintóticamente a la aceleración máxima del terreno cumpliéndose la relación  $\lim_{\omega_o \rightarrow \infty} \omega_o^2 D(\omega_o, \xi) = |\ddot{x}_{g,max}|$ .

Llamemos  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1$  a la primera aproximación de la FDE de la aceleración del terreno y  $\beta_0(\omega_o)_1$  a su varianza. Suponiendo que la excitación es un proceso de banda ancha y que  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1$  es constante entonces  $\beta_0(\omega_o)_1$  puede aproximarse usando la solución para Ruido Blanco.

$$\beta_0(\omega_o)_1 = \frac{\pi}{2\xi\omega_o^3} G_{\ddot{x}_g\ddot{x}_g}(\omega_o)_1 \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo  $\beta_0(\omega_o)_1$  de la ecuación A.2 en la ecuación A.1 se obtiene

$$G_{\ddot{x}_g\ddot{x}_g}(\omega_o)_1 = \frac{2\xi\omega_o^3}{\pi} \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_0} \right\}^2, \quad \omega_o \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

Cabe notar que esta expresión es inadecuada para frecuencias pequeñas debido a que la hipótesis de estacionariedad de la respuesta no es válida para el caso de osciladores con periodo largo en relación con la duración de la excitación  $\tau$ . Rosenblueth y Elorduy (1969) propusieron estimar la respuesta de un oscilador con frecuencia baja a través del uso de un amortiguamiento equivalente  $\xi_{eq}$ , de la siguiente forma

$$\xi_{eq} = \xi + \frac{2}{\omega_o \tau} \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando  $\xi_{eq}$  por  $\xi$  en la ec. A.1, obtenemos

$$G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1 = \omega_o^2 \left( \frac{2\xi\omega_o}{\pi} + \frac{4}{\pi\tau} \right) \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_0} \right\}^2, \quad \omega_o \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

La corrección anterior tiene el efecto de amplificar la forma de la FDE de la aceleración del terreno  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1$  en el intervalo de frecuencias bajas con el objeto de tomar en cuenta la no estacionariedad de la respuesta ante cargas transitorias.

La relación entre la FDE de aceleración y la FDE de desplazamiento del terreno está dada por

$$G_{x_g x_g}(\omega_o)_1 = \frac{1}{\omega_o^4} G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1 \quad (\text{A.6})$$

Se puede notar que la ecuación **A.5** no cumple con la relación  $D(0, \xi) = x_{g_{\max}}$ , pues en la FDE del desplazamiento  $G_{x_g x_g}(\omega_o)_1$  se tendría una amplitud infinita en el caso de que la frecuencia  $\omega_o$  fuera igual a cero. Es necesario utilizar en la ec. **A.5** un factor de corrección que contemple lo siguiente:

- La densidad espectral del desplazamiento del terreno debe aproximarse a un valor finito o cero cuando la frecuencia natural  $\omega_0$  tienda a cero.
- Sólo debe de afectar los intervalos de frecuencias bajas en los cuales la amplitud de la densidad espectral del desplazamiento del terreno tiende a infinito.
- El área bajo la curva de la FDE del desplazamiento del terreno (varianza) debe ser igual a  $(x_{g_{max}} / P_s(0))^2$  donde  $P_s(0)$  es el factor pico correspondiente a  $\omega_0 = 0$ .

Con base en estas consideraciones, Der Kiureghian y Neuenhofer (1991) propusieron un factor de corrección  $F_c$  de la forma

$$F_c = \omega_0^{r+2} / (\omega_0^{r+2} + \omega_f^{r+2}) \quad (\text{A.7})$$

donde  $\omega_f$  y  $r$  son constantes positivas. El factor  $F_c$  cumple con el primer requisito si  $r > 0$ ; el segundo se cumple al utilizar valores pequeños de  $\omega_f$ , pues en ese caso el factor  $F_c$  se aproxima rápidamente a la unidad. Para satisfacer el tercer requisito es necesario que se cumpla la siguiente igualdad

$$2 \int_0^{\infty} \frac{F_c}{\omega_o^2} \left( \frac{2\xi\omega_o}{\pi} + \frac{4}{\pi\tau} \right) \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_0} \right\}^2 d\omega_o = \left( \frac{x_{g_{max}}}{P_s(0)} \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

De esta manera al multiplicar por  $F_c$  el lado derecho de la ec. **A.5** se obtiene la primera aproximación de la función de densidad espectral que satisface todos los requisitos anteriormente mencionados.

$$G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1 = F_c \omega_o^2 \left( \frac{2\xi\omega_o}{\pi} + \frac{4}{\pi\tau} \right) \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_0} \right\}^2 \quad (\text{A.9})$$

Al sustituir el término  $2\xi\omega_o^3/\pi$  (ec. **A.3**) por el término que incluye el amortiguamiento equivalente y el factor de corrección,  $F_c \omega_o^2 \left( \frac{2\xi\omega_o}{\pi} + \frac{4}{\pi\tau} \right)$ , de la ec.

**A.9** en la ec. **A.2** se obtiene

$$\beta_o(\omega_o)_1 = \frac{1}{F_c \omega_o^2 \left( \frac{2\xi\omega_o}{\pi} + \frac{4}{\pi\tau} \right)} G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1 \quad (\text{A.10})$$

Para la segunda aproximación de la densidad espectral de la aceleración del terreno,  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_2$ , despejamos el término  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1/\beta_o(\omega_o)_1$  de la ec. **A.10** y lo sustituimos en la ec **A.9**

$$G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_2 = \frac{G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_1}{\beta_0(\omega_o)_1} \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_1} \right\}^2 \quad (\text{A.11})$$

Seguendo el proceso iterativo, para la k-ésima iteración se tendría entonces que

$$G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_k = \frac{G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega_o)_{k-1}}{\beta_0(\omega_o)_{k-1}} \left\{ \frac{D(\omega_o, \xi)}{P_s(\omega_o)_{k-1}} \right\}^2 \quad (\text{A.12})$$

En la ec. **A.12**,  $\beta_0(\omega_o)_{k-1}$  es el primer momento espectral de la respuesta del oscilador sometido a un proceso con FDE dada por  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)_{k-1}$ ,

$$\beta_0(\omega_o)_{k-1} = 2 \int_0^{\infty} S_{x_o x_o}(\omega)_{k-1} d\omega. \quad (\text{A.13})$$

donde  $S_{x_o x_o}(\omega)_{k-1}$  es la función de densidad espectral del desplazamiento relativo del oscilador con frecuencia  $\omega_o$

$$S_{x_o x_o}(\omega)_{k-1} = |H(\omega)|^2 G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)_{k-1} \quad (\text{A.14})$$

y  $H(\omega)$  es la función de transferencia

$$H(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\xi\omega_0\omega} \quad (\text{A.15})$$

Debido a que los espectros de diseño no especifican valores en el intervalo de frecuencias pequeñas, digamos  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_0^*$ , se puede asumir una variación cuadrática del espectro  $D(\omega_0, \xi)$  y ajustar a la forma

$$D(\omega_0, \xi) = x_{g_{\max}} (1 + a \omega_0^2), \quad 0 \leq \omega_0 \leq \omega_0^* \quad (\text{A.16})$$

donde  $\omega_0^*$  es la frecuencia mínima considerada en el espectro de diseño, "a" es una constante y  $x_{g_{\max}}$  es el desplazamiento relativo máximo del espectro para un oscilador con frecuencia  $\omega_0 = 0$ . El valor de  $x_{g_{\max}}$  se puede obtener mediante los factores de amplificación  $F_D$  propuestos por Newmark y Hall (1969)

$$x_{g_{\max}} = \frac{D(\omega_0^*, \xi)}{F_D} \quad (\text{A.17})$$

donde  $F_D$  es igual a 1.4 para el caso en el que el coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$  sea del 5%.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

## A.2 Factores Pico $P_s(\omega)$

Consideremos la FDE  $S_{x_o x_o}(\omega)$  del desplazamiento relativo de un oscilador con frecuencia  $\omega_o$  sometido a una excitación estacionaria  $\ddot{X}_g(t)$  con función de densidad espectral  $G_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega)$ . Los tres primeros momentos espectrales de la función  $S_{x_o x_o}(\omega)$  se definen como

$$\beta_m(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \omega^m S_{x_o x_o}(\omega) d\omega \quad m = 0, 1, 2 \quad (\text{A.18})$$

El factor pico  $P_s(\omega)$  relaciona la media del máximo valor del desplazamiento relativo para una duración  $\tau$ ,  $x_{o\max} = \max_{0 \leq t \leq \tau} |x_o(t)|$ , con la media cuadrada o varianza del proceso,  $\beta_0(\omega)$ , por medio de

$$x_{o\max} = P_s(\omega) \sqrt{\beta_0(\omega)} = P_s(\omega) \sigma_{x_o x_o} \quad (\text{A.19})$$

donde  $\sigma_{x_o x_o}$  es la desviación estándar correspondiente. Para calcular los factores pico  $P_s(\omega)$ , Der Kiureghian (1980) ha propuesto las siguientes expresiones que toman en cuenta la dependencia en la ocurrencia de los picos en procesos de banda angosta para los cuales el factor de forma  $\delta$  es pequeño,

$$P_s(\omega) = 1.253 + 0.209 v_e \tau \quad 0 \leq v_e \tau \leq 2.1 \quad (\text{A.20})$$

$$P_s(\omega) = \sqrt{2 \ln(v_e \tau)} + \frac{0.577}{\sqrt{2 \ln(v_e \tau)}} \quad 2.1 \leq v_e \tau \leq 1000 \quad (\text{A.21})$$

donde

$$v_e = 2 \delta v \quad 0 < \delta \leq 0.1 \quad (\text{A.22})$$

$$v_e = (1.63 \delta^{0.45} - 0.38)v \quad 0.1 < \delta \leq 0.69 \quad (\text{A.23})$$

$$v_e = v \quad 0.69 \leq \delta \leq 1.0 \quad (\text{A.24})$$

En A.22 a A.24  $v$  y  $\delta$  se definen en función de los tres primeros momentos espectrales,

$$\delta = \left( 1 - \frac{[\beta_1(\omega)]^2}{[\beta_0(\omega)][\beta_2(\omega)]} \right)^{1/2} \quad (\text{A.25})$$

$$v = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\beta_2(\omega)}{\beta_0(\omega)} \right)^{1/2} \quad (\text{A.26})$$

En el caso del desplazamiento relativo de un oscilador con frecuencia natural  $\omega_0$  y coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$ , sometido en su base a una aceleración modelada como un proceso de ruido blanco, las constantes  $v$  y  $\delta$  pueden estimarse como sigue

$$v = \frac{\omega_0}{\pi} \quad (\text{A.27})$$

$$\delta \approx 2 \left( \frac{\xi}{\pi} \right)^{1/2} \quad (\text{A.28})$$

De esta manera, para el primer ciclo iterativo los factores pico de la sección **A.1** se calculan con las ecs. **A.27** y **A.28**; en los siguientes ciclos se deberán utilizar las ecs. **A.20** a la **A.26** para obtener dichos factores.

# *Apéndice B*

## *Espectros de respuesta*

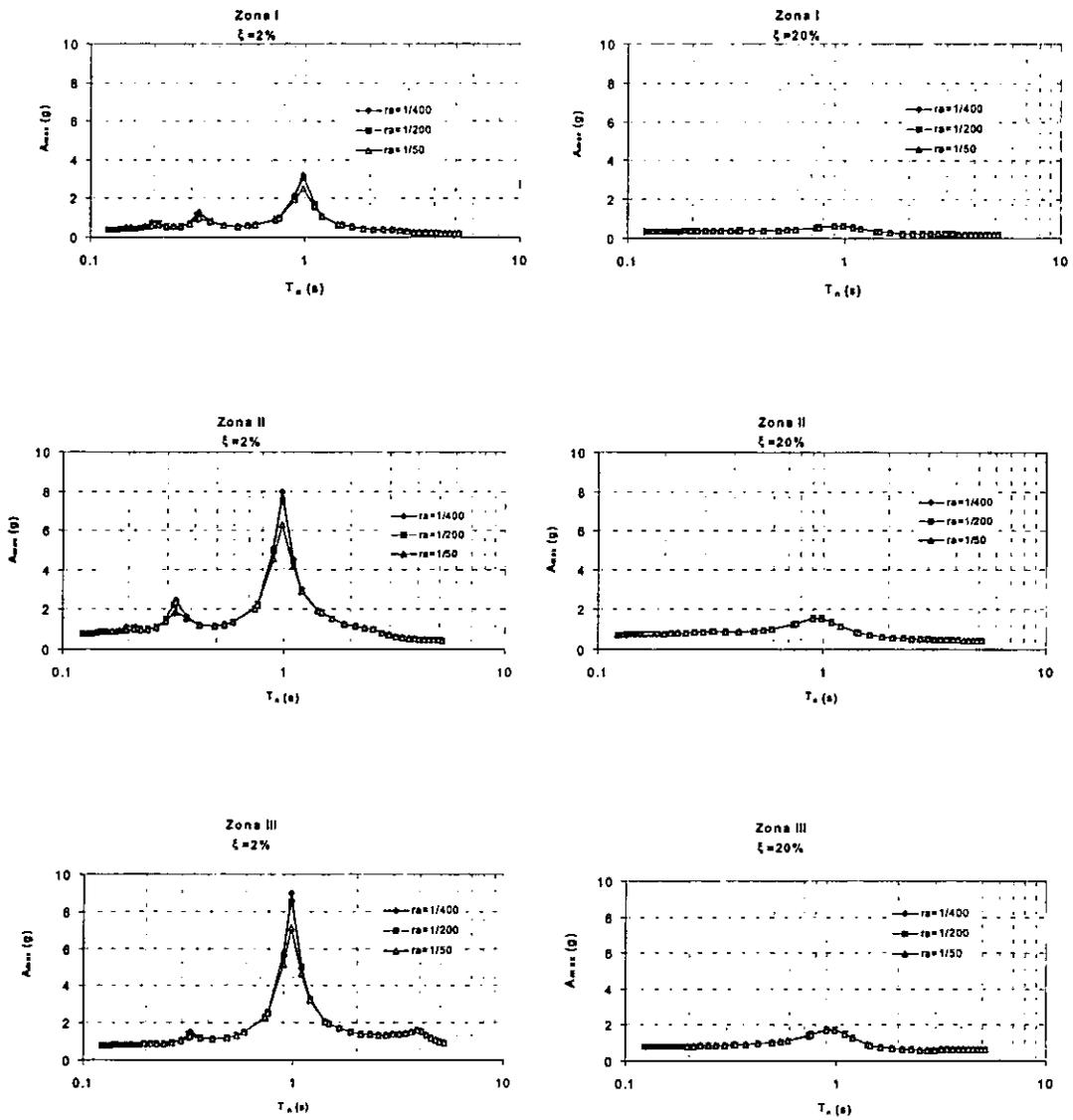


Figura B.1.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 10.

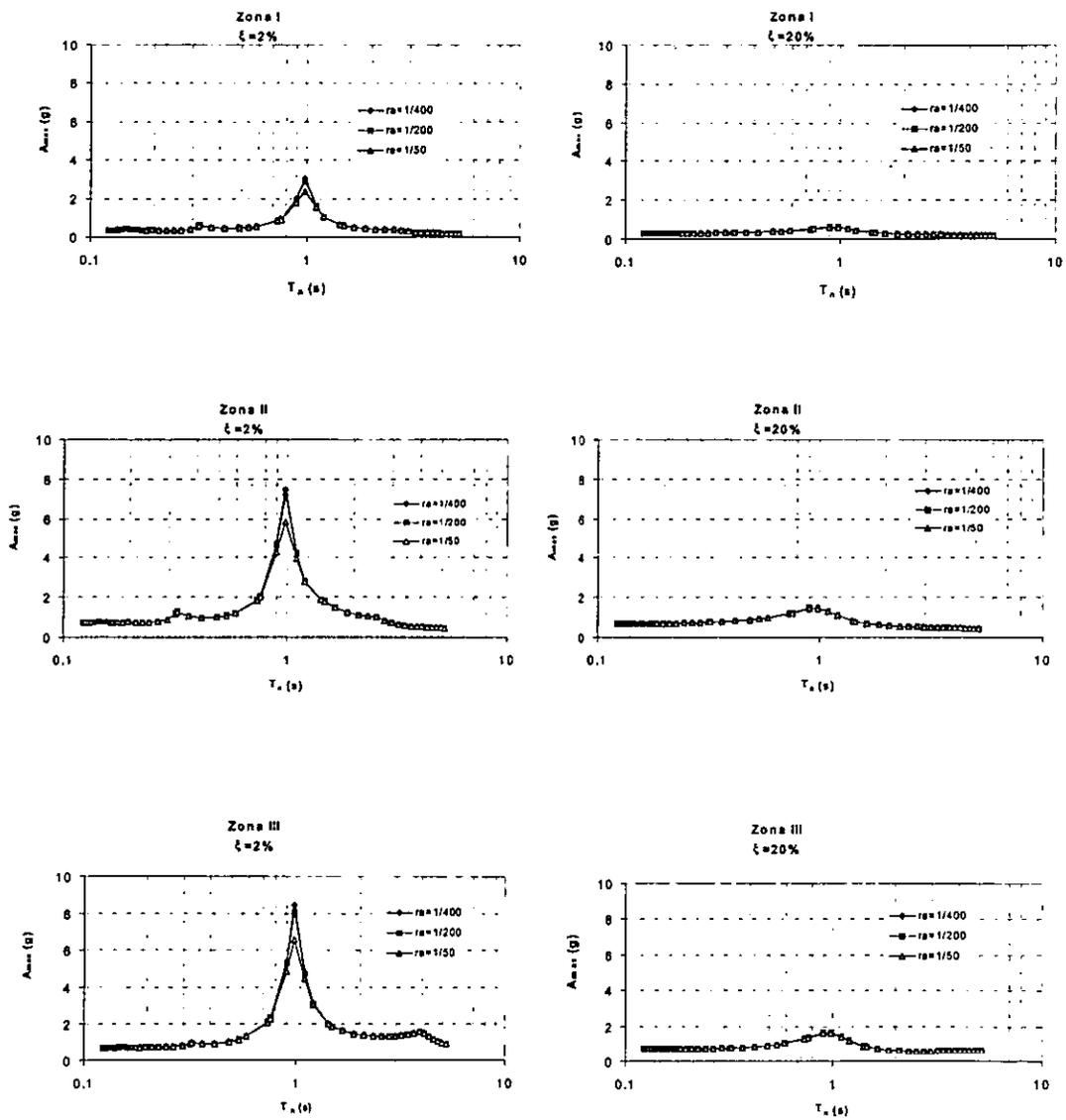


Figura B.2.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 8.

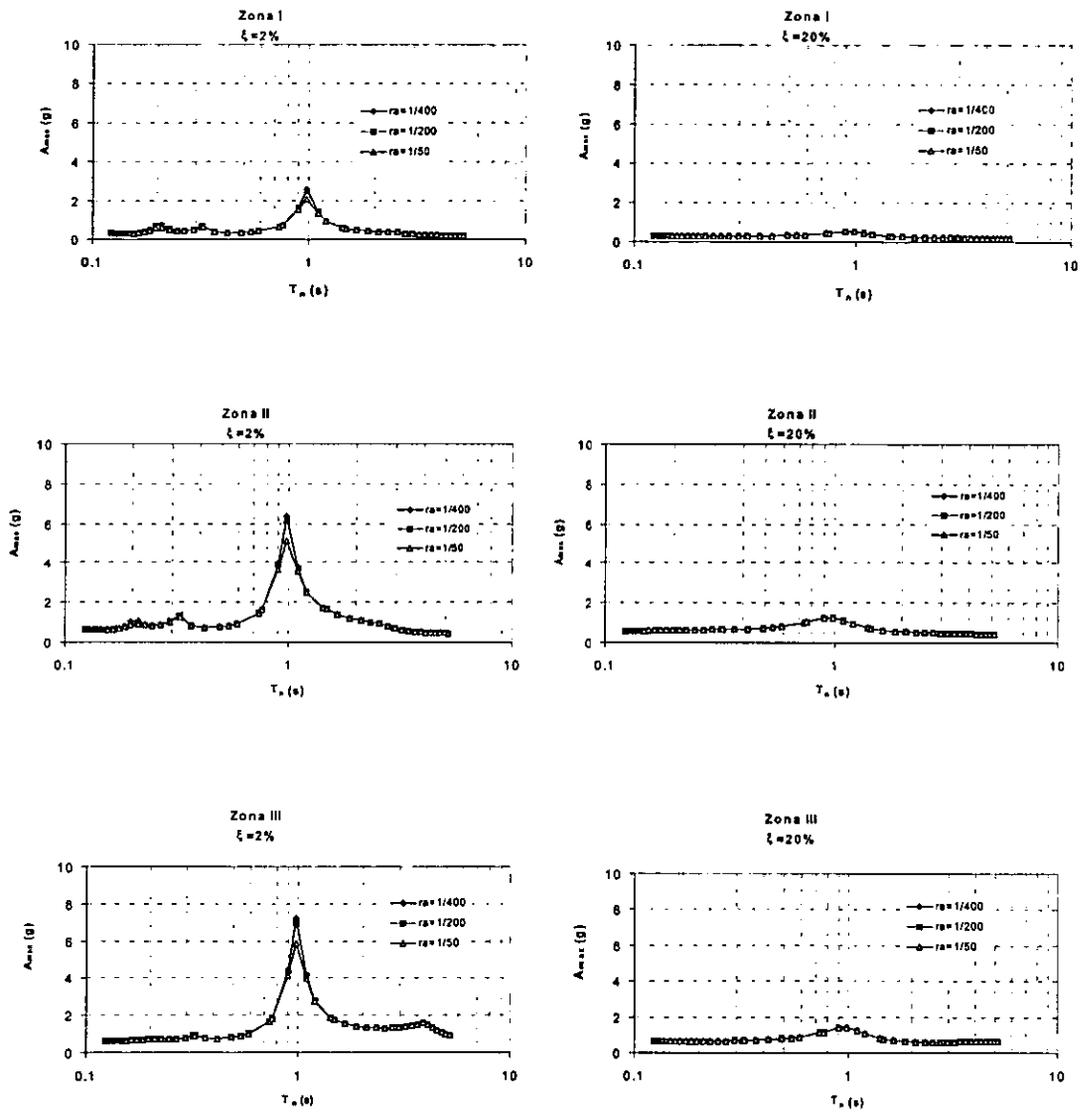


Figura B.3.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método propuesto y el apéndice en el piso 6.

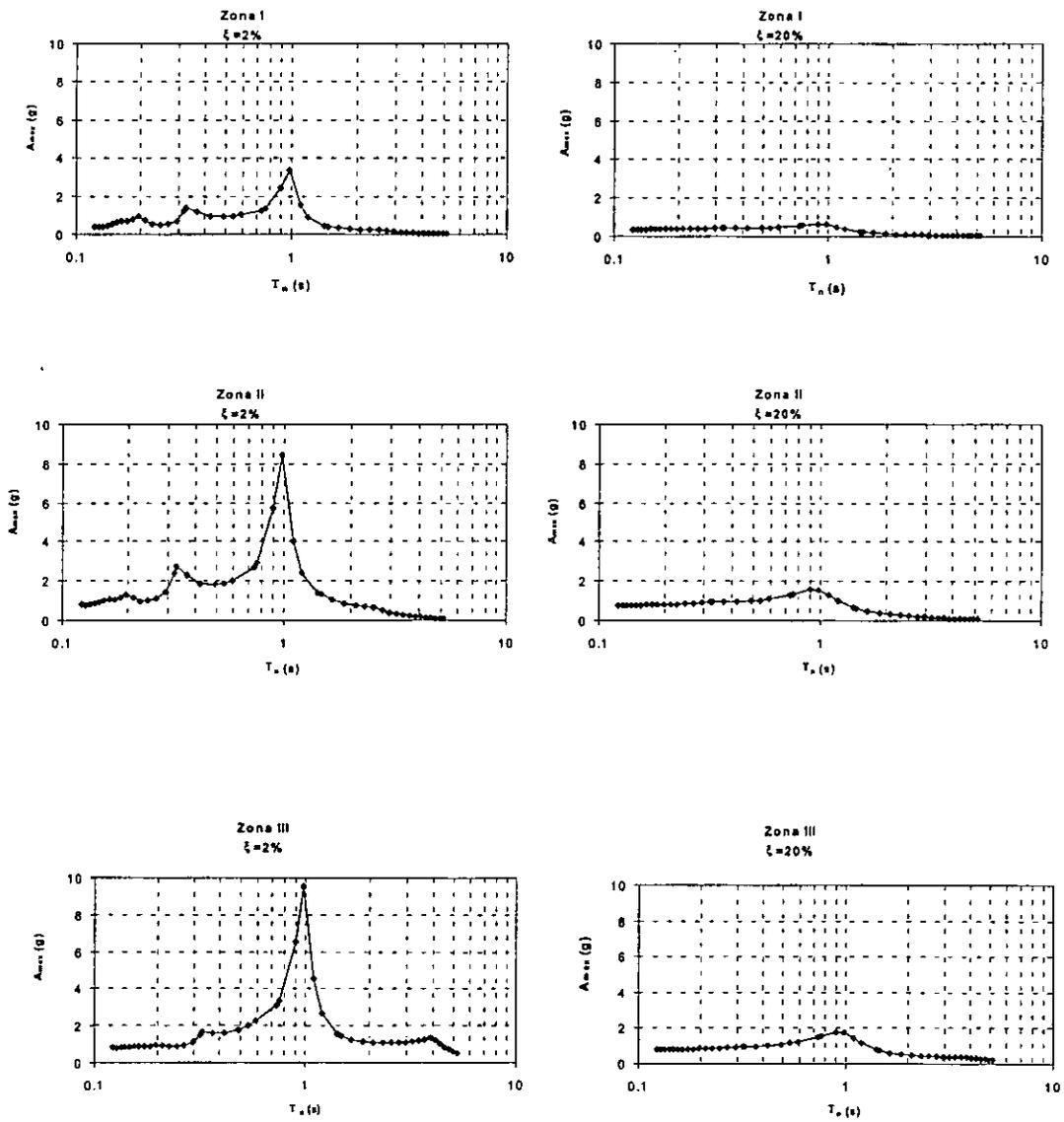


Figura B.4.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 10.

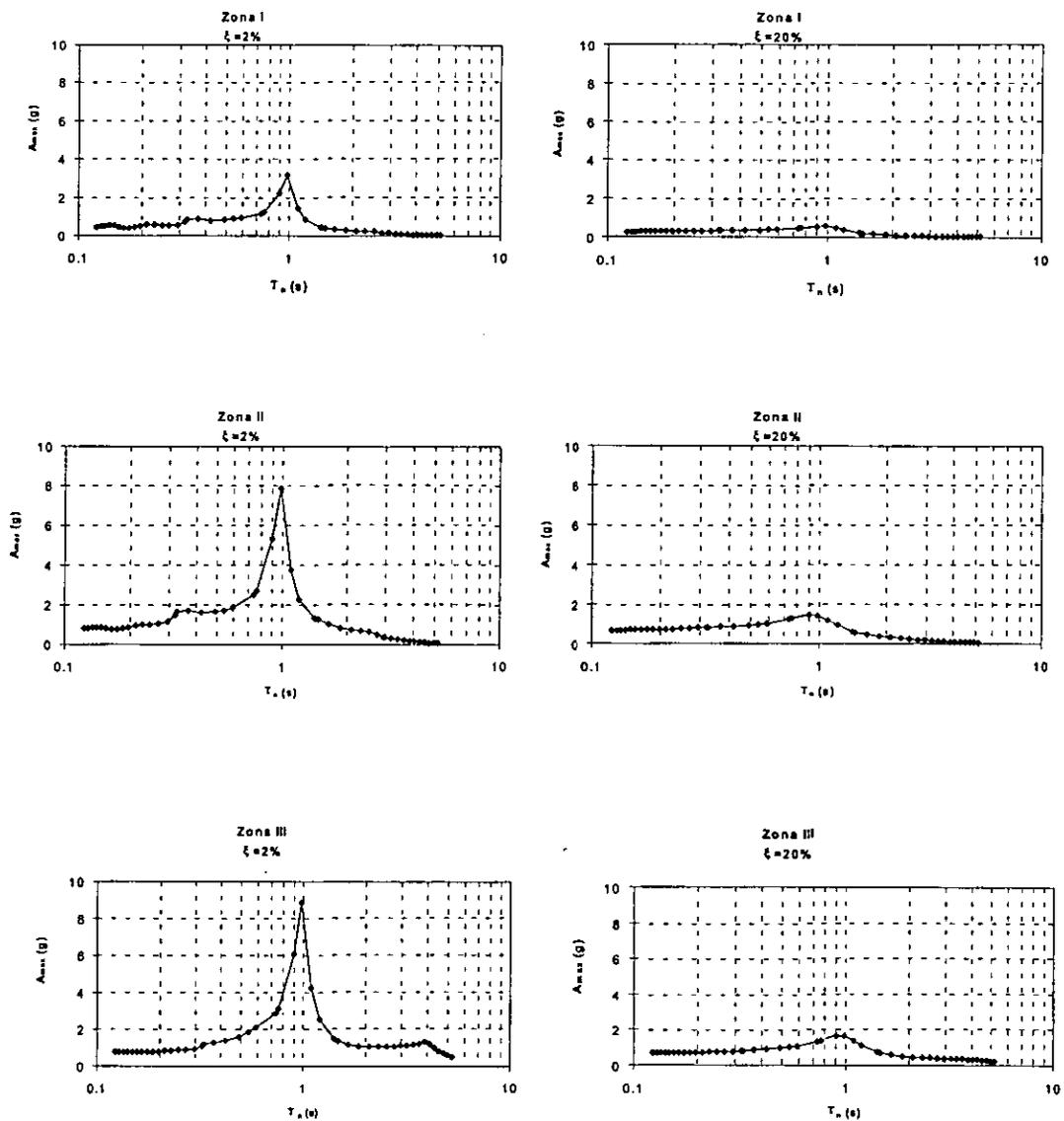


Figura B.5.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 8.

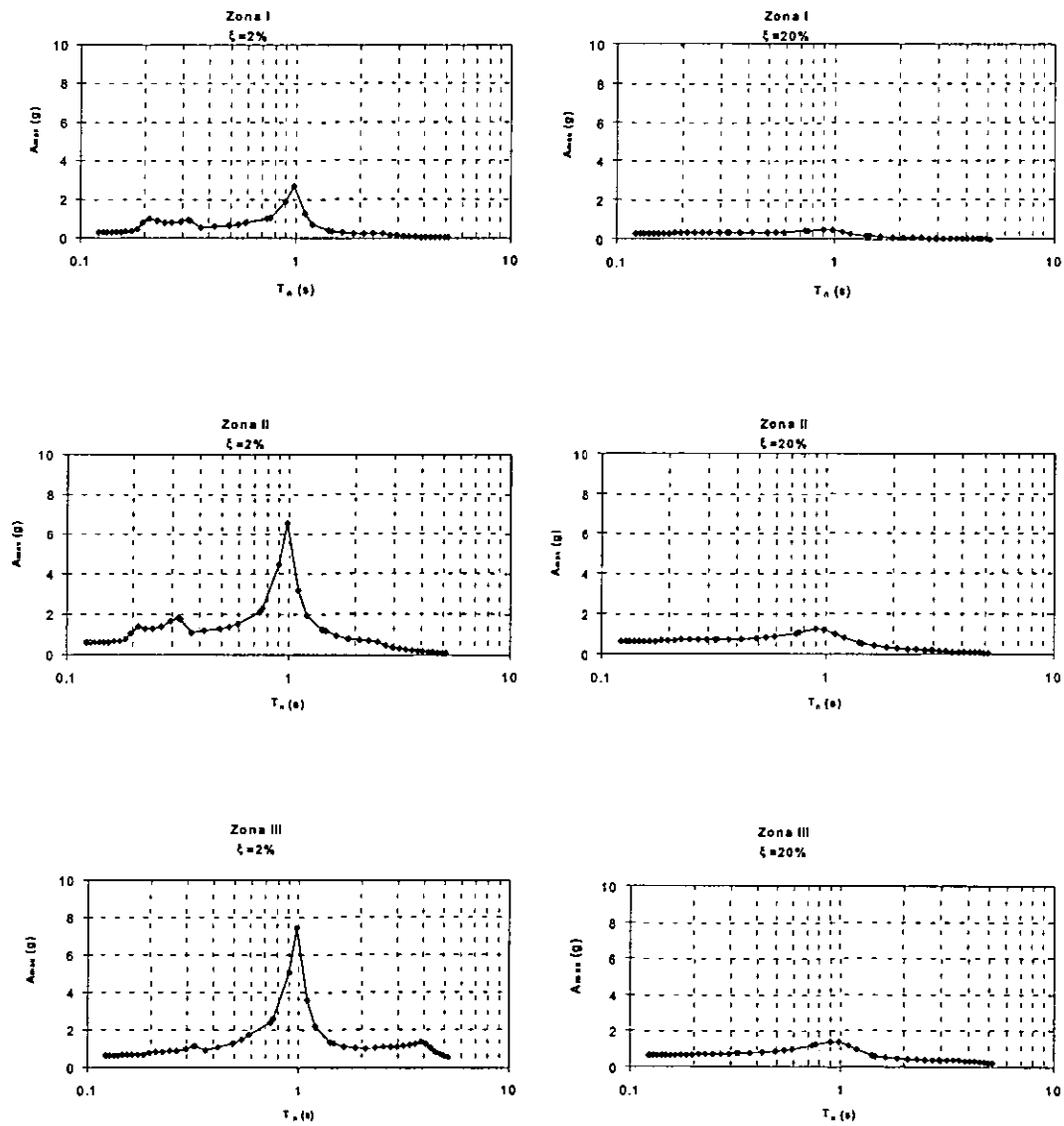


Figura B.6.- Espectros de respuesta de aceleración absoluta utilizando el método convencional y el apéndice en el piso 6.