2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

APLICACION DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES A LA ADMINISTRACION DE INVENTARIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

P R E S E N T A :

PEDRO CRUZ HERNANDEZ

ASESOR:
FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

285887

NOVIEMBRE 2000

DOY GRACIAS A DIOS POR HABER ESTADO CONMIGO EN ESTA ETAPA DE MI VIDA Y POR DARME: SALUD, PACIENCIA, PERSEVERANCIA Y UNA FAMILIA, YA QUE SIN ESTAS BENDICIONES NO SE HUBIERA HECHO REALIDAD ESTE SUEÑO.

DEDICO ESTE TRABAJO A MIS PADRES: PEDRO Y MARTHA GUADALUPE, Y A MIS HERMANAS: TITI Y GABY, AGRADECIÉNDOLES SU AMOR, APOYO, CONSEJOS, MOTIVACIÓN, COMPRENSIÓN Y SACRIFICIOS QUE TUVIERON HACIA MÍ.

AGRADEZCO A MILDRED SU VALIOSA AYUDA, CARIÑO, IMPULSO Y CONSEJOS QUE ME BRINDO.

AL FIS. MAT. JORGE LUIS SUÁREZ MADARIAGA POR EL ASESORAMIENTO Y CONOCIMIENTOS QUE APORTÓ PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO.

A MIS AMIGOS Y PROFESORES POR EL APOYO Y AMISTAD QUE ME BRINDARON.

"CONSIDERO A CADA HOMBRE COMO UN DEUDOR
DE SU PROFESIÓN,
Y YA QUE DE ELLA RECIBE SUSTENTO Y PROVECHO,
ASÍ DEBE PROCURAR
MEDIANTE EL ESTUDIO
SERVIRLE DE AYUDA Y ORNATO".

FRANCIS BACON

"SER CONSCIENTE
DE LA PROPIA IGNORANCIA ES UN GRAN PASO
HACIA EL SABER".

BENJAMÍN DISRAELI.

APLICACION DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES A LA ADMINISTRACION DE INVENTARIOS

ÍNDICE

OBJETIVO GENERAL

Analizar los modelos de la Investigación de Operaciones para la solución de los problemas que se presentan en la Administración de Inventarios, de modo que a través de la aplicación de ellos la empresa pueda maximizar sus ganancias e ingresos, minimizar sus costos relativos al inventario y pronosticar la demanda de un producto; y de esta manera brindarle al Administrador Financiero una herramienta práctica que pueda usar para evitar el fracaso de la empresa.

RESUMEN POR CAPÍTULO

En el **CAPÍTULO I** se presenta el origen y desarrollo de la Investigación de Operaciones; así como su definición, características, procesos y la importancia que tiene en la empresa; el método científico como base en la toma de decisiones; y la definición de modelo y sus clasificaciones, los cuales se aplicarán en el CAPÍTULO IV.

En el **CAPÍTULO II** se muestra una conceptualización y descripción de la Administración del Capital de Trabajo y posteriormente se profundiza en la Administración de Inventarios. También se presenta a la Investigación de Operaciones como una herramienta para solucionar problemas en la Administración de Inventarios.

En el **CAPÍTULO III** se explica la función de los inventarios y las características de los sistemas así como un análisis de ellos bajo demanda determinística y estocástica con algunas de las variantes más comunes.

En el **CAPÍTULO IV** se plantea un caso de estudio para obtener una visión práctica de los sistemas descritos y de esta manera se aprecie la importancia de una eficiente y eficaz Administración de Inventarios.

INTRODUCCIÓN

Los modelos de la Investigación de Operaciones para la solución de los problemas que se presentan en la Administración de Inventarios son necesarios, ya que a través de ellos la empresa pueda maximizar sus ganancias e ingresos, minimizar sus costos relativos al inventario y pronosticar la demanda de un producto; y de esta manera brindarle al Administrador Financiero una herramienta práctica que pueda usar para evitar el fracaso de la empresa.

Los modelos que emplea la Administración Financiera para la solución de problemas que se presentan en la Administración de Inventarios, no considera todas las posibles situaciones a las que se puede enfrentar una empresa, siendo la Investigación de Operaciones, mediante los Sistemas de Inventarios la solución a esta problemática.

A través del siguiente trabajo se pretende analizar los modelos de la Investigación de Operaciones para la solución de problemas que se presentan en la Administración de Inventarios de modo que mediante la aplicación de ellos la empresa pueda maximizar sus ganancias e ingresos, minimizar sus costos relativos al inventario y pronosticar la demanda de un producto, y de esta manera brindarle al Administrador Financiero una alternativa práctica que pueda usar evitar el fracaso de la empresa.

Durante los cuatro años que fui estudiante de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "ACATLAN", existieron dos materias que fueron la razón para la realización de este trabajo: la Investigación de Operaciones y Finanzas II. En esta última tuve la oportunidad de exponer el tema "ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS" donde observé lo importante que es para una empresa contar con un adecuado control de inventarios, por las siguientes razones: para muchas compañías manufactureras el inventario es una cuenta con mayor peso que esta situada del lado del activo en el balance general donde el inventario representa más del 25% del capital total invertido; una mala administración podría llevar a una empresa al fracaso, si se toman en cuenta los problemas de inventario asociados a cantidades en existencia muy pequeñas o demasiado grandes, es decir, si un empresario no tiene un artículo en inventario podría ocasionar que la producción se detuviera y por otro lado, si contara con una existencia en inventario muy grande, traería consigo costos muy elevados. Si el empresario tuviera pocos artículos en inventario conllevaría a que el comprador se fuera con la competencia, porque el cliente espera que el comerciante tenga en existencia el producto que necesita en el momento que él lo desea y de esta forma la empresa perdería un cliente. Conviene señalar que la administración de inventarios no toma en cuenta el tipo de demanda, esto en cuanto a los libros de Administración Financiera se refiere, y que en su momento se verán las razones para tomarla en cuenta y es aquí donde se considera que la Investigación de Operaciones es de gran utilidad, ya que mediante sus sistemas de inventarios se pueden analizar dos tipos de demanda: determinística y estocástica, con esto contemplaríamos todas las situaciones en las que se puede encontrar una empresa. Otra de las razones por la que es importante considerar a la investigación de operaciones es por ser clave en la toma de decisiones gerenciales, ya que es una disciplina que no se basa en un sentido empírico para la solución de problemas, si no que sigue una metodología sistemática que esta fundamentada en la aplicación del método científico.

CAPÍTULO I
ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

CAPÍTULO I

I. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

1.1. Marco histórico de la Investigación de Operaciones

Durante el desarrollo del presente capítulo se pretende analizar el origen y desarrollo de la Investigación de Operaciones, así como su definición, características, procesos y la importancia que tiene en la empresa; la aplicación del método científico como base en la toma de decisiones; y la definición de modelo y sus clasificaciones, los cuales se aplicarán en el capítulo IV.

La Ciencia de la Administración o la Investigación de operaciones como comúnmente se le conoce en la actualidad, tuvo su origen formal durante la Segunda Guerra Mundial, sin embargo, muchos de sus inicializadores realizaron trabajos que ahora serían considerados como Investigación de Operaciones.

Se analizará la historia de la investigación de Operaciones siguiendo un orden cronológico.

1.1.1. Antes de la Segunda Guerra Mundial

Se comenzará con la historia antigua, en el año 212 a. de J.C. en la ciudad de Siracusa cuando se le encomendaba a Arquímedes la tarea de idear métodos para romper el sitio naval en la que estaba la ciudad por los ataques romanos.

En el año 1760, aproximadamente, los economistas comenzaron a representar los sistemas económicos en modelos matemáticos. Desarrollaron modelos para la asignación de recursos escasos, que en la actualidad son conocidos con el nombre de "programación lineal". FranÇois Quesnay[1] fue el primero en utilizar los modelos lineales. El precursor de la programación lineal se le atribuye a Wassily Leontieff, profesor de la Universidad de Harvard. Elaboró un modelo de programación lineal que

[1]Médico y economista francés. Fundador de la escuela económica de los fisiócratas. Su principal obra fue Tabla Económica donde compara los flujos de rentas y el llamado "orden natural", relativo a que la sociedad humana se rige por las leyes naturales que no pueden ser modificadas.

representaba la totalidad de la economía de los Estados Unidos. Tal fue la importancia de la programación lineal, que sus modelos fueron aplicados tanto al ámbito militar como industrial.

Durante la Primera Guerra Mundial, en los años 1914-1915, la Investigación de Operaciones se desarrolló tanto en Europa como en América, en el área militar. En Inglaterra. F.W. Lanchester, intentó representar las operaciones militares por medio de fórmulas matemáticas. Cabe señalar, que Lanchester modelaba una situación que comprendía opciones estratégicas y después las aplicaba en una situación real. En 1916 publicó su libro *Aircraftin Warfare*, en el expone su perspectiva del análisis cuantitativo aplicado a tácticas militares. Simultáneamente, en los Estados Unidos, la Investigación de Operaciones también crecía. Aquí le correspondió a Tomás Alva Edison, quien desempeñaba el cargo de presidente de la Oficina de Consultoria Naval durante la Primera Guerra Mundial, desarrollar tácticas con el propósito de contrarrestar los ataques submarinos. A través de estadísticas creo maniobras para que los barcos evadieran los ataques además de destruir los submarinos.

Uno de los precursores de la teoría de colas o de línea de espera, fue A.K. Erlang, matemático danés. Trabajó en una compañía telefónica en la capital de Dinamarca. En 1917, Earlang, publicó su trabajo, "Soluciones a Algunos Problemas en la teoría de Probabilidades Importantes en las Centrales Telefónicas Automáticas", que es considerado como su obra más importante. Dicho trabajo comprendía modelos de tiempo de espera desarrollados con fundamentos estadísticos. En la actualidad, estos modelos son de gran importancia en la teoría de tráfico telefónico.

Walter Shewhart, H.F. Dodge y H.G. Roming, quienes trabajaban en Bell Telephone Laboratories, realizaron aplicaciones de la inferencia estadística y la teoría de probabilidades. Las primeras aplicaciones de la inferencia estadística fueron desarrolladas en las gráficas de control de calidad por Shewhart, en 1924. Posteriormente, Dodge y Roming, utilizaron la técnica de inspección por muestreo relacionándola con el control de calidad, y de esta forma, contribuyeron a la aplicación de la inferencia estadística y la teoría de probabilidades en la teoría de la administración.

Ahora bien, en el área del control de inventarios, también se desarrollaron modelos de inventarios, en los años 1925-1927. Se expondrán sus inicios con mayor profundidad en el capítulo III, ya que esta área es de interés.

En la década de los 20's, en los Estados Unidos, uno de los iniciadores en aplicar la Investigación de Operaciones en los negocios, fue el astrónomo Horace H. Levinson.

Desarrolló métodos que resolvían problemas relacionados al comercio tales como: la relación que existe entre la publicidad y las ventas, hábitos de compra de los consumidores y la forma en la que se relacionan los ingresos y la ubicación de los hogares de los clientes. Perfeccionó su modelo, auxiliándose de matemáticas superiores.

Como se ha visto, sin saber la Investigación de Operaciones se aplicaba en diferentes áreas. Pero como ya se mencionó, tuvo su origen formal en la Segunda Guerra Mundial que a continuación se analizan.

1.1.2. Segunda Guerra Mundial

La Investigación de Operaciones tuvo un lento desarrollo en la administración, sin embargo, se aceleró gracias a los progresos logrados por las organizaciones militares durante la Segunda Guerra Mundial.

Se considera que la Investigación de Operaciones comenzó formalmente en el Reino Unido con el propósito de resolver problemas de tipo militar.

Existió un grupo de científicos militares a quienes se les encomendó apoyar a los militares en diversos problemas: mejorar el sistema de radar para localizar a ,los aviones enemigos, encañoneo contra los aviones, en los ataques submarinos, la protección civil, determinar el tamaño óptimo de los convoyes para minimizar las pérdidas debido a los ataques submarinos, determinar el color con el que serán pintados los aviones para que los submarinos no los detectaran fácilmente, y así , maximizar la destrucción de submarinos. Con esto se pretendía tener una administración de recursos escasos de un modo efectivo mediante la Investigación Operacional, como era conocida en esos tiempos.

Más tarde, se formó otro grupo, que fue uno de los más conocidos, también para resolver problemas estratégicos. Este grupo estaba al mando de un famoso físico inglés, P.M.S. Blackett, profesor de la Universidad de Manchester, un ministro de la Royal Society y un ex oficial naval. Dicho grupo era conocido con el nombre de "El circo de Blackett", y estaba constituido por 11 científicos de la siguiente manera: tres fisiologístas, dos físicos matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército, un topógrafo, un físico general y dos matemáticos.

También en los Estados Unidos se desarrolló la Investigación de Operaciones, en los años 1940-1942. Era conocida por diferentes nombres: en la fuerza aérea como "Análisis Operacional" y en la armada y marina "Investigación y Evaluación de Operaciones". Este desarrollo que tuvo, fue gracias a dos norteamericanos, quienes observaron a los grupos de Inglaterra: James B. Conant, presidente del Comité de Investigación de la Defensa Nacional, y Vannevar Bush, presidente del Comité sobre Armamentos y Equipos, Estado Mayor Conjunto.

El general Spaatz, comandante general de la Octava Fuerza Aérea, en 1942, dio la orden al general Arnold, jefe del Estado Mayor, de enviar un comunicado a todos los comandantes generales de las fuerzas aéreas , para incluir "grupos de análisis de operaciones". El primer grupo fue asignado al Octavo comando de Bombardeo situado en Inglaterra, y después en el Laboratorio de Municiones Naval y en la Décima Flota. Los problemas a resolver por los norteamericanos eran: la creación de nuevos patrones de vuelo, la colocación de minas entre otros.

Además de Inglaterra y Estados Unidos, también la Investigación de Operaciones durante la Segunda Guerra Mundial se desarrolló en Francia y Canadá.

1.1.3. La Posguerra

Después de la Segunda Guerra Mundial, los altos militares de Estados Unidos no truncaron las funciones de la Investigación de Operaciones, sino todo lo contrario, se siguieron refinando las investigaciones a tal grado, que se creo en el ejercito una oficina de Investigación de Operaciones en Chevy Chase, Maryland, llamada: "Research Analysis Corporation", en el que fungía como director, Ellis M. Johnson. En la fuerza aérea también se continuó con grupos de análisis de operaciones donde se formó la División de Análisis de Operaciones. Por último, en la marina se constituyó un grupo de Evaluación de Operaciones al mando del profesor Morse en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Pero no solo la Investigación de Operaciones siguió su desarrollo en el ámbito militar, ahora se ocuparía de problemas industriales y gubernamentales, derivados de la nacionalización de la industria, además de la complejidad y especialización creciente de las organizaciones. Debido a esto, en la industria se vio la necesidad de refinar las herramientas formales de la Investigación de Operaciones y aplicarlas a: la asignación de recursos limitados, controles de inventario, colas de espera, reemplazos, etc.

Es importante señalar, que el crecimiento que tuvo la investigación de Operaciones no solo fue gracias al desarrollo y refinamiento de las técnicas, también se debe dar crédito al desarrollo de la computadora digital, la cual influyó enormemente en la resolución de problemas a una velocidad impresionante.

1.2. Perspectiva científica de la Investigación de Operaciones

Recordando que el afán de este trabajo es que el Administrador Financiero tome decisiones con un enfoque racional formal, y no bajo intuición, en este punto se analizará como el método científico ha sido importante a lo largo del tiempo, para los problemas de la administración.

Se dice que mucho tiene que ver el método científico en el avance de la humanidad, dejando atrás aquellas decisiones que se tomaban por costumbre, inercia o por tradición.

Se han encontrado escritos de casos en los que se han aplicado principios del método científico. Por ejemplo, *en el Antiguo Testamento, Jetro; suegro de Moisés, se le* atribuye un tratado sobre organización; en Venecia, los barcos eran reparados por una línea de ensamble, en donde cada barco se movía a través de ella y un grupo de trabajadores expertos realizaban operaciones específicas en cada segmento de la línea; en 1832, el más reciente, es la obra de Charles Babbage, en el cual escribió "Acerca de la Economía de la Maquinaria y los Fabricantes, haciendo énfasis en la Ingeniería Industrial.

La escuela de la Administración Científica tuvo su comienzo a principios del presente siglo, la cual intentaba aplicar métodos científicos a la administración, como la observación y la medición principalmente. El ingeniero norteamericano Frederick Winslow Taylor, es considerado "Padre de la Administración Científica", por sus investigaciones que hicieron a la Ingeniería Industrial una profesión. Su principal interés era acabar con el desperdicio y las pérdidas padecidas por las empresas norteamericanas, y a su vez, incrementar los niveles de producción a través de métodos y técnicas de la Ingeniería Industrial.

Frederick Winslow Taylor (1856-1915), nació en Filadelfia, Estados Unidos. Pertenecía a una familia de cuáqueros (miembros de una secta religiosa esparcida principalmente en Inglaterra y los Estados Unidos) inclinadas hacia el trabajo y el ahorro. Estudió en el Stevens Institute. Comenzó a trabajar como obrero en 1878 en la

Midvale Steel Co., ahí fue ascendiendo de puesto, pasando a capataz, supervisor, jefe de taller, y posteriormente a ingeniero. En 1889, dejó Midvale para trabajar en Bethlehem Steel Works. Registró alrededor de cincuenta patentes de inventos de procesos de trabajo, máquinas y herramientas.

Dichas investigaciones fundamentalmente analizaban las obligaciones y las tareas de los jefes encargados del taller, en los que los administradores llamados de *primera línea*, tenían la tarea de conocer los trabajos de sus subordinados con el objetivo de que lo realizaran de la mejor manera y más económico. Investigó cuanto podría producir un hombre durante el día, basándose en un metodología científica. Observó que muchos trabajadores no realizaban satisfactoriamente su trabajo, mientras que en otros sucedía todo lo contrario.

En 1903, Taylor publicó su libro Shop Management (Administración de Oficinas), en el cual explicaba las técnicas de racionalización del trabajo, por medio del estudio de tiempos y movimientos. Para Claude S. George Jr., lo que Taylor dio a entender en el libro Shop Management fue lo siguiente:

> **1. El objetivo de una buena administración era pagar salarios altos y tener bajos costos unitarios de producción.**
>
> **2. Para realizar ese objetivo, la administración debe aplicar métodos científicos de investigación y experimentación para su problema global, con el fin de formular principios y establecer procesos patronizados que permitiesen el control de las operaciones fabriles.**
>
> **3. Los empleados tenían que ser científicamente colocados en servicios o puestos en donde los materiales y las condiciones de trabajo fuesen científicamente seleccionados, para que las normas pudiesen cumplirse.**
>
> **4. Los empleados debían ser adiestrados científicamente para perfeccionar sus aptitudes, y por lo tanto, ejecutar un servicio o tarea de modo que la producción fuese cumplida.**
>
> **5. Una atmósfera de íntima y cordial cooperación tendría que ser cultivada entre la administración y los trabajadores, para garantizar la continuidad del ambiente psicológico que posibilite la aplicación de los otros principios por él mencionados"[2].**

[2]Claude S. George Jr., *Historia del pensamiento administrativo*, cit,. p. 136.

En 1911 Taylor publicó su libro Principios de Administración Científica, en el señaló que la racionalización del trabajo operacional va de la mano con la estructuración de la empresa. También realizó estudios relacionados con la administración general a la que le dio el nombre de Administración Científica.

Taylor señalaba, que las industrias de su época vivían problemas, los cuales se clasifican de tres maneras:

> "1. Holgazanería sistemática por parte de los operarios, quienes reducían a propósito la producción a cerca de una tercio de lo que sería la normal, para evitar que la gerencia redujese las tarifas de salarios.
>
> Hay tres causas determinantes del ocio en el trabajo, que pueden ser resumidas así:
>
> - El error que viene de épocas inmemoriales y que está casi universalmente diseminado entre los trabajadores: el mayor rendimiento del hombre y de la máquina lo cual dará como resultante el desempleo de gran número de operarios.
> - El sistema defectuoso de administración, comúnmente en uso, que obliga a los operarios a la ociosidad en el trabajo, con el fin de proteger sus intereses.
> - Los métodos empíricos ineficientes, generalmente utilizados en todas las empresas, con los cuales el operario desperdicia gran parte de su esfuerzo y de su tiempo.
>
> 2. Desconocimiento, por la gerencia, de las rutinas de trabajo y del tiempo necesario para su realización.
>
> 3. Falta de uniformidad de las técnicas o métodos de trabajo"[3].

Para resolver los problemas que se mencionaron en el párrafo anterior, Taylor creó un sistema el cual lo llamó Scientific Management, que en los países latinoamericanos fue conocido con los nombres de *gerencia científica, organización científica en el trabajo, sistema de Taylor* y *organización racional del trabajo.*

Es importante mencionar que Taylor señalaba que el Scientific Management esta compuesto por tres cuartas partes de análisis y una cuarta parte de sentido común.

[3]Frederick W. Taylor, Principios de AdministraÇÂo Científica, SÂo Paulo, De. Atlas, 1970, p. 34.

Descubrió trabajadores que no eran eficientes para una actividad lo serían en otra, y de esta forma utilizó la especialización en la manufactura. Taylor elaboró los cuatro principios de la administración científica:

1. *Principio de planeamiento*: sustituir en el trabajo el criterio individual del operario, la improvisación y la actuación empírico-práctica, por los métodos basados en procedimientos científicos. Sustituir la improvisación por la ciencia, mediante la planeación del método.

2. *Principio de la preparación*: seleccionar científicamente a los trabajadores de acuerdo con sus aptitudes y prepararlos, entrenarlos, para producir más y mejor, de acuerdo con el método planeado. Además de la preparación de la mano de obra, preparar también las máquinas y equipos de producción, como también la distribución física y la disposición racional de las herramientas y materiales.

3. *Principio del control*: controlar el trabajo para certificar que el mismo está siendo ejecutado de acuerdo con las normas establecidas y según el plan previsto. La gerencia debe cooperar con los trabajadores para que la ejecución sea la mejor posible.

4. *Principio de ejecución*: distribuir distintamente las atribuciones y las responsabilidades, para que la ejecución del trabajo sea disciplinada.

Como se vio, para Taylor la administración debe ser analizada en forma científica y no empírica, además dejar a una lado una actitud de improvisación y en su lugar la planeación, crear un ambiente de armonía y no de discordia, cooperar y no ser individualista, optimizar el rendimiento y no minimizar la producción y concientizar al hombre de tener una actitud de eficiencia y prosperidad.

Otro hombre precursor de la Administración Científica fue Henry L. Gantt, a él se le atribuye la programación de la producción. Resolvió las congestiones de trabajo, planeando cada tarea de una máquina a otra para acelerar la producción. Además solicitó la creación de un departamento de personal.

Del otro lado del Atlántico, el Ingeniero francés Henry Joseph Fayol, también hizo aportaciones a la Administración Científica. Publicó un libro titulado "Administration Industrielle et Générale" , en el cual se refería a los fundamentos de la administración. Aplicó el método científico para la solución de los problemas de los negocios.

Se dice, que la transición de la Ingeniería Industrial a la Investigación de Operaciones se dio cuando los ingenieros industriales se interesaron por problemas más complejos y se vieron en la necesidad de tener especialistas, cada uno experto en su ramo, mezclando ideas y técnicas, es decir crear un grupo multidiciplinario.

1.3. Importancia de la Investigación de Operaciones en la empresa

Existen dos formas de administrar los recursos materiales en toda empresa: en forma empírica y con un enfoque científico. Si se administra de esta última forma, se pueden alcanzar los objetivos que se proponga la empresa de una manera más eficaz, a través de métodos basados en procedimientos científicos dejando a un lado la improvisación y actitudes realizadas por tradición.

Los objetivos que persigue una empresa por lo general son:

1. Alcanzar el máximo beneficio.

2. Llegar a un máximo crecimiento.

3. Lograr el mayor número de ventas.

4. Tener una participación activa en el mercado.

5. Conseguir el liderato de la empresa en su ramo.

6. Mantener el nivel óptimo de inventario y al mismo tiempo minimizar sus costo.

A continuación se analizará el lugar que ocupa la Investigación de Operaciones en una empresa desde el punto de vista administrativo.

Conceptualmente es posible clasificar las actividades de una empresa en dos clases:

⇒ Actividad de *Línea.*

⇒ Actividad de *Staff.*

Se describe a la actividad de *línea* como aquella que tiene que ver con las acciones cotidianas de producción y distribución de una compañía, o bien como la nombra Javier Muro Sáenz en su libro, "Práctica de la Investigación Operativa Empresarial":

"Actividad de *línea*, es pues, toda aquella que se produzca para la compra de materias primas, para su transformación, para el almacenamiento de los productos acabados, para su transporte y para su venta".

Por otro lado, la actividad de *staff*, se denomina, como un servicio de asesoramiento y de consejo, tomando en cuenta que debe interesarse por el crecimiento de la empresa. También es importante señalar que esta actividad no tiene autoridad sobre la empresa, es decir, no tiene poder ejecutivo alguno. Javier Muro Sáenz describe lo siguiente respecto a la actividad de *staff*:

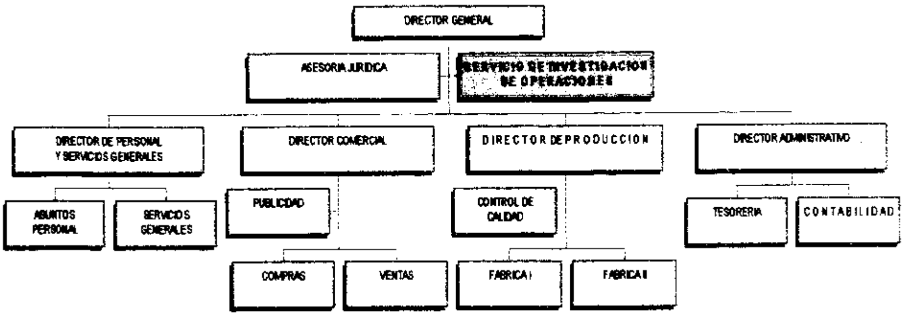
"... a la de *staff* se le ha asignado como misión la de programar ese proceso de producción y distribución a un plazo más lejano en el tiempo".

En otras palabras, la actividad de *staff* debe investigar y proponer lo que la actividad de línea quiera y necesite.

Por lo tanto, es catalogada la Investigación de Operaciones, como una actividad de *staff* que va asesorar y a realizar estudios para la toma de decisiones en la empresa. En la figura 1-1 se presenta el lugar que ocupa la Investigación de Operaciones en una empresa.

Es conveniente señalar que la Investigación de Operaciones en una empresa se puede realizar de dos formas: teniendo un cuerpo de especialistas en esta materia y por otro lado, recurrir a los servicios de consultorías externas. Lo ideal sería que la empresa tuviera su propio departamento de Investigación de Operaciones, porque se le daría seguimiento constante a los problemas o necesidades de la compañía. En cambio las consultorías privadas harían observaciones esporádicas.

Fig. 1-1 Organigrama de una empresa con servicio de estudios.



1.4. Esencia de la Investigación de Operaciones

Hasta este momento se ha analizado el origen, el enfoque científico y la importancia en la empresa de la Investigación de Operaciones, ahora se analizarán sus características y procesos , para que de esta forma se de una definición de ella.

1.4.1. Características de la Investigación de Operaciones

Como ya se mencionó anteriormente, durante la Segunda Guerra Mundial, se buscaban tácticas óptimas para vencer al enemigo y para encontrar estas estrategias se reunió a un grupo interdisciplinario y así llegar a la solución óptima a través del método científico. En base a esto se analizan sus factores característicos, que son:

A. Enfoque de sistemas.

B. Áreas de aplicación.

C. Enfoque metodológico.

D. Objetivo.

E. Equipo interdisciplinario.

F. Uso de modelos.

G. Computadora digital.

H. Deducción de nuevos problemas para su estudio.

A. Enfoque de sistemas

Claude Mcmillan y Richard F. González[4], dicen acerca de la palabra sistema lo siguiente:

"El término se utiliza en muchas formas y tiene significados reservados en todas las disciplinas y todos los campos de investigación. Se habla de sistemas educativos, sistemas de información, sistemas ecológicos, sistemas de transportes, sistemas políticos, etc. Se emplea la palabra sistema siempre que se desea dar una connotación de la relación o interacción con respecto a un conjunto de entidades".

Continua con la definición de sistema:

"Un sistema es un conjunto de entidades (componentes) juntas y relacionadas entre sí".

Más adelante señala:

"Los componentes de un sistema se describen por sus propiedades o atributos. Un individuo que forma parte de un sistema social poseerá una larga lista de atributos: edad, sexo, pertenencia a grupos diversos, memoria, creencias, actitudes, etc.".

[4]MCMILLAN, Claude y F. Richard: Análisis de Sistemas, México, Trillas, 1981, pag 17 y 18.

"Las relaciones que existen entre las entidades estructuran el sistema".

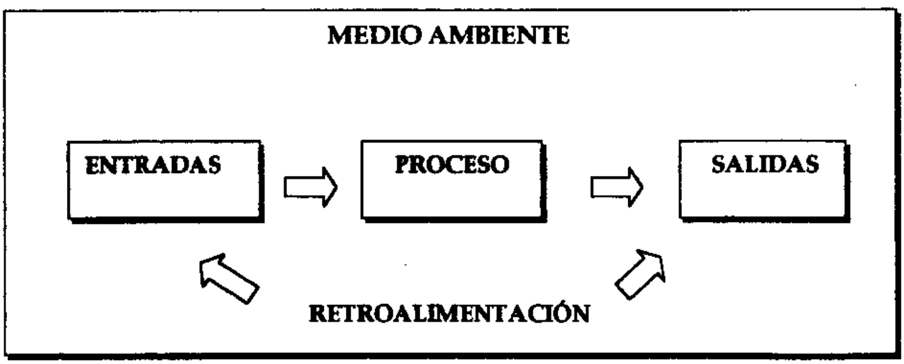
También define el ambiente del sistema:

"El ambiente es el conjunto de todas las entidades con atributos cuyo cambio afecta el sistema y, asimismo, aquellas entidades cuyos atributos sufren cambios debido al comportamiento del sistema".

Mari Carmen González Videgaray[5], describe el sistema así:

"Un sistema es un conjunto de elementos interrelacionados entre si que funcionan con un objetivo común".

También describe el sistema a través del siguiente diagrama:



Explica lo siguiente:

"Por ejemplo, un sistema de producción tiene materias primas, trabajo, *administración y recursos financieros como entradas. Estas entradas son procesadas o* transformadas en productos que se venden. El sistema tiene los objetivos propios de la organización, que generalmente incluyen capacidad, eficiencia y calidad de la producción".

[5] GONZALEZ, Mari Carmen: Modelos y Simulación, México, UNAM ENEP ACATLAN, 1996. pag 18 y 19.

"Un buen sistema debe contener una *retroalimentación*, es decir, un monitoreo del comportamiento con respecto a ciertos estándares de medición. De este modo, será posible tomar medidas de control cuando se encuentren desviaciones".

"La mayoría de los sistemas funcionan en un *medio ambiente* que afecta su conducta. Por ejemplo, en el sistema de la producción, la demanda es un factor externo que puede afectar al sistema, mientras que la buena o mala calidad del producto puede, a su vez, a la demanda, es decir el entorno".

De acuerdo a lo anterior, un sistema representa a una organización, en el cual, el investigador debe identificar los componentes del sistema, y de esta manera detectar las relaciones que existen entre sí. Se encontrará con dos tipos de componente: controlables y no controlables. En la primera, con certeza sabe lo que ocurrirá entre ellas y en las no controlables no se puede saber lo que ocurrirá. Antes de resolver un problema, se debe analizar las reacciones del sistema ante posibles cambios en los componentes. Es decir, si hay un cambio de actividad en un área de la empresa se analiza de que forma repercute en las actividades de las otras.

B. Áreas de aplicación

El campo de aplicación de la Investigación de Operaciones tiene que ver con la conducción y coordinación de operaciones y actividades de una empresa. La Investigación de Operaciones ha explorado y resuelto con éxito problemas en distintas áreas como:

- compras y obtención de materiales,
- mercados y distribución física
- finanzas y contabilidad,
- hospitales y
- gobierno.

C. Enfoque metodológico

Como ya se mencionó, la Investigación de Operaciones se basa en el método científico.

El método científico tiene el objeto de analizar un determinado suceso mediante un proceso sistemático, y dicho proceso consta de las siguientes fases:

i). observación,

ii) definición del problema real,

iii) desarrollo de soluciones alternativas,

iv) selección de la solución óptima,

v) validación de la solución óptima,

vi) implantación de la solución, y

vii) establecimiento de los controles adecuados.

i) Observación

Aquí se debe de analizar el entorno del problema, es decir, los hechos y opiniones, para que de esta manera se identifique la esencia del problema.

ii) Definición del problema real

Una vez identificado el problema, se tiene que definirlo tomando en cuenta los factores que lo ocasionan. Estos factores pueden ser de tres tipos: los factores variables, estos requieren decisiones; las limitaciones, restringen la solución del problema; y las suposiciones para el problema.

iii) Desarrollo de soluciones alternativas

En esta fase, se deben desarrollar hipótesis, es decir, soluciones tentativas del problema. Generalmente estas hipótesis son modelos que representan matemáticamente el problema.

iv) Selección de la solución óptima

Cuando se tenga el conjunto de solución, se debe evaluar cada uno de sus elementos con alguna de las técnicas de la Investigación de Operaciones. Existen cuatro tipos de procedimientos para la solución óptima: icónicos, heurísticos, analíticos y numéricos.

Los icónicos representan físicamente el sistema ya sea a escala reducida o aumentada. El heurístico se basa en la experiencia y en la intuición. Los analíticos utilizan símbolos matemáticos para llegar a la solución del problema. El numérico se basa en procedimientos iterativos hasta encontrar la solución óptima.

v) Validación de la solución óptima

En esta etapa, se comprobará la solución óptima seleccionada. Se someterá a un análisis de sensibilidad, que consiste en la alteración de datos y del modelo para prever los cambios que en la realidad se presentan.

vi) Implantación de la solución

En este paso, se aplica la solución óptima a la vida real. Por eso es importante el análisis de sensibilidad.

vii) Establecimiento de controles apropiados

Una vez implantada la solución óptima, se establecen controles para verificar que esta siga siendo la adecuada.

D. Objetivo

El objetivo de la Investigación de Operaciones es encontrar la solución óptima (maximizar o minimizar) a un problema planteado.

E. Equipo interdisciplinario

Se dice que muchas cabezas piensan mejor que una. Ya se ha mencionado que durante la Segunda Guerra Mundial se formó un grupo interdisciplinario para la solución de problemas militares de alta complejidad. Es imposible que una persona tenga conocimiento de todas las áreas de la Investigación de Operaciones. Por eso es importante contar con especialistas en distintas disciplinas, esto garantizará una mayor efectividad para la solución de problemas.

F. Usos de modelos

La Investigación de Operaciones utiliza modelos para representar la realidad del problema. Se analizarán los modelos con detalle más adelante.

G. Computadora digital

Muchos problemas que la Investigación de Operaciones resuelve, lo hace por medio de computadoras, debido a la complejidad del modelo matemático.

H. Determinación de nuevos problemas para su estudio

Después de solucionar el problema, se observa que no se haya generado otro que no se tenía contemplado al principio. Por esto es importante que las técnicas de Investigación de Operaciones resuelvan también aquellos problemas que puedan surgir como consecuencia de la implantación de la solución óptima, ya que no se cumpliría el objetivo que es obtener máximos beneficios.

1.4.2. Proceso de la Investigación de Operaciones

Para tener cierto grado de éxito en el proceso de planteamiento de modelos, se debe dar seguimiento a seis diferentes etapas que a continuación enuncian:

1. Descripción, identificación y planteamiento del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Desarrollo de una solución.
4. Evaluación y prueba de la solución.
5. Implantación de resultados.
6. Evaluación.

Estas etapas son similares a los factores característicos que fueron analizados en el apartado anterior.

1.4.2.1. Descripción, identificación y planteamiento del problema

Primero se define el problema de la empresa. Es decir, cuando el resultado que se desea no se produce. La descripción del problema debe incluir la especificación de los objetivos que pretende alcanzar la organización para poder resolver el problema. Además, se debe identificar el funcionamiento de la compañía.

1.4.2.2. Construcción del modelo

La segunda etapa, de acuerdo con la definición del problema, se debe decidir el tipo de modelo que representará el problema, pero una vez identificadas las variables que intervienen en éste. Se debe estimar los parámetros, obtenidos de forma subjetiva, datos históricos o estimados por un método estadístico. Este modelo contempla el objetivo y las restricciones del problema. Según el grado de dificultad del problema, el modelo puede ser matemático, de simulación o heurístico.

1.4.2.3. Desarrollo de una solución

En esta etapa se desarrolla un algoritmo o proceso de selección. Cabe señalar algo muy importante en esta etapa, se debe hacer una distinción entre algoritmo y proceso de selección. Cuando se decide desarrollar este último, es porque se tiene que utilizar un método heurístico o de simulación, ya que con ellos no se pretende alcanzar una solución óptima sino aproximada. Al desarrollar algoritmos se utilizan modelos matemáticos como el de programación lineal, los cuales permiten encontrar una solución óptima

Después de encontrar la solución, se realiza un análisis de sensibilidad con el objeto de observar el comportamiento del sistema ante posibles cambios que llegaran a realizar.

1.4.2.4. Evaluación y prueba de la solución

En este punto se evalúa y se prueba el método encontrado en la etapa anterior, con el fin de observar si produce resultados favorables para el problema real. Existe un método muy común para evaluar la validez del modelo, y consiste en comparar datos pasados con el sistema actual

1.4.2.5. Implantación de resultados

El implante inicia desde el primer día del estudio. La persona que construye el modelo debe de trabajar con el encargado de tomar las decisiones, además de comentar la validez del modelo y trabajar con él durante la utilización del modelo.

1.4.2.6. Evaluación

El modelo se debe evaluar continuamente con el fin de detectar en un momento dado, cambios en los valores de los parámetros, y también para verificar si el modelo continua satisfaciendo los objetivos de quien toma decisiones. En el caso de no satisfacer las metas se debe modificar el modelo. Si el costo de modificar el modelo es superior a los ahorros, se debe detener el proyecto

1.4.3. Definición de Investigación de Operaciones

Hasta este momento, se han presentado los antecedentes, características, procesos y la importancia que tiene en la empresa la Investigación de Operaciones, y de esta forma desarrollar una definición de ella. Pero a continuación vamos a presentar las definiciones de varios autores.

La Sociedad de Investigación de Operaciones de América, señala que "...es una ciencia experimental y aplicada dedicada a observar, entender y predecir la conducta o el comportamiento de los sistemas hombre-máquina bajo algún propósito; en la que los investigadores están comprometidos para que en forma activa apliquen su conocimiento a problemas prácticos de negocios, gobierno y sociedad".

Morse y Kimball[6], establecen: "La Investigación de Operaciones es un método científico para dar a los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para las decisiones relacionadas con las operaciones que están bajo su control".

[6]PHILIP, Morse y KIMBALL, George, Methods of Operations Research, Nueva York, John Wiley & Sons, Inc., 1951, p.1.

Thierauff y Klekampt[7] la definen, tomando en cuenta sus características, de la siguiente manera: "utiliza el método científico y un equipo interdisciplinario con el objeto de representar relaciones complejas funcionales mediante modelos matemáticos para proporcionar una base cuantitativa en la toma de decisiones para de esta forma deducir nuevos problemas a resolver a partir de la implantación de la solución".

Sin embargo, existe una definición que es muy aceptada por técnicos de Investigación de Operaciones, que es la de Churchman y Ackoff[8], que la definen como:

"En un sentido general la Investigación de Operaciones puede considerarse como la aplicación de métodos científicos, técnicas e instrumentos, a los problemas relacionados con la operación de los sistemas, a fin de proporcionar a los que controlan las operaciones las soluciones óptimas para los problemas.".

Se puede dividir en tres partes las técnicas cubiertas en Investigación de Operaciones:

1. **Probabilidad y toma de decisiones.**

   i. **Conceptos de probabilidad, modelos y técnicas.**
   ii. **Análisis de decisiones.**
   iii. **Objetivos múltiples**

2. **Programación matemática y optimización.**

   i. **Programación lineal.**
   ii. **Programación entera.**
   iii. **Programación meta.**

3. **Aplicaciones de la investigación de operaciones.**

   i. **Modelos y teorías de inventarios.**
   ii. **Modelos de líneas de espera y modelos de simulación.**
   iii. **CPM Y PERT: Operación con redes.**

[7] THIERAUFF, Robert J. y R.C., Klekampt, Decision Making Through Operations Research, John Wiley & Sons, Nueva York, 1975.
[8] G.W., Churchman, R.L., Ackoff y E.L., Arnoff, Introduction to Operations Research, Nueva York, John Wiley & Sons, págs. 8 y 9.

1.5. Modelos

Como se vio, en el proceso de la Investigación de Operaciones, una de las etapas es la construcción del modelo. Un modelo es la representación idealizada de un sistema de la vida real. Mediante un modelo, se puede identificar cuales variables son importantes. Los modelos se clasifican básicamente en cinco tipos:

- Modelos icónicos,
- Modelos analógicos,
- Modelos matemáticos,
- Modelos de simulación, y
- Modelos heurísticos.

A) Modelos icónicos

Este tipo de modelo representa físicamente a un sistema real, a escala diferente. Una característica del modelo icónico, son sus dimensiones, pueden ser: de dos o tres dimensiones. Por ejemplo: un automóvil a escala, es un modelo icónico de uno real.

B)Modelos analógicos

Este modelo puede representar situaciones dinámicas debido a que es posible representar las características del problema en estudio, por ejemplo: las curvas de distribución de frecuencia en estadística.

C) Modelos matemáticos

Estos modelos son de interés para analizar los modelos de inventarios que se estudiarán en el capítulo III.

Son modelos abstractos, en ellos se utilizan un conjunto de símbolos matemáticos y funciones para describir el comportamiento del sistema.

En la Investigación de Operaciones, los modelos utilizados son casi siempre matemáticos y tienen la ventaja de ser compactos. Los modelos matemáticos pueden a su vez dividirse en probabilísticos y determinísticos.

Los modelos probabilísticos se fundamentan en las probabilidades y estadísticas, y en ellos interviene la incertidumbre respecto a una actividad, por ejemplo: en Cálculo Actuarial, conocer la probabilidad de que una persona de edad (x) sobreviva n años más, es decir que llegue con vida a la edad (x+n) esta dada por el modelo:

$$nP_x = l_{x+n} / l_x$$

Los modelos determinísticos carecen de incertidumbre, llevan a cabo ciertas acciones que se pueden predecir con certeza, como son: las necesidades para efectuar esas acciones y el resultado de cualquier acción. Por ejemplo: en Geometría Analítica, el modelo lineal:

$$y = mx + b,$$

donde *m* es conocida como la pendiente de la recta y *b* representa la ordenada al origen.

Se dice que el modelo anterior es determinístico ya que una vez sustituido un valor fijo de *x* en la ecuación, el valor de *y* queda determinado.

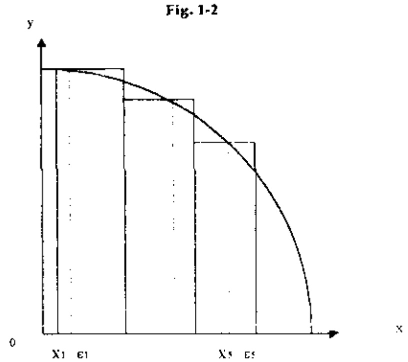
D) Modelos de simulación

Es el proceso de elaborar un modelo de un sistema real y realizar experimentos con él para entender el comportamiento del sistema. Estos experimentos se realizan en una computadora digital a través de gráficos, animaciones, etc. Por ejemplo, en Cálculo Integral, la suma de Riemann dada por el modelo:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

El cual consiste en encontrar el área bajo la curva (figura 1-2), de modo que entre más fina se haga la partición del eje de las abscisas, más próximo se estará del valor exacto del área bajo la curva y para resolverlo se emplearía la computadora.

Fig. 1-2



E) Modelos heurísticos

Los modelos heurísticos a diferencia de los matemáticos y de simulación no pretenden llegar a una solución óptima de un problema, sino que a través de la intuición se intenta llegar a soluciones mejoradas, es decir, se basa en el uso de la experiencia y en suposiciones empíricas de la realidad. Por ejemplo, servir a los clientes de una aerolínea donde, el primero que llega, primero se atiende.

CAPÍTULO II

CAPITAL DE TRABAJO Y ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

CAPÍTULO II

II. CAPITAL DE TRABAJO Y ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

En el capítulo anterior se ha señalado el área de aplicación como uno de los factores característicos de la Investigación de Operaciones. En este capítulo se va a analizar la forma en que la Investigación de Operaciones puede solucionar problemas que se presentan en el área de nuestro interés : la Administración de Inventarios, pero antes se da una conceptualización y descripción del capital de trabajo, ya que el inventario forma parte de ella como se verá a continuación.

2.1. Administración del capital de trabajo

Existen básicamente dos conceptos del capital de trabajo:

- Capital de trabajo neto, y
- Capital de trabajo bruto.

El capital de trabajo neto, es utilizado en contabilidad, y se define como la diferencia entre activos circulantes y pasivos circulantes, y representa la capacidad que tiene la empresa para afrontar las obligaciones a corto plazo. El activo circulante lo forman aquellos activos que se pueden convertir en efectivo en el plazo máximo de un año, como ejemplo: el efectivo en caja, los bancos, las cuentas por cobrar e inventarios. El pasivo circulante son obligaciones que deben pagarse a corto plazo, es decir, menos de un año, y esta integrado comúnmente por los siguientes conceptos: proveedores, documentos por pagar y acreedores diversos. La fórmula es la siguiente:

Capital de trabajo = Activo circulante – Pasivo circulante.

El capital de trabajo bruto, es utilizado por los analistas financieros, y es la inversión de la empresa en activos circulantes, concepto que se aplicará para el presente trabajo. Por lo tanto, cuando se mencione a la Administración del Capital de Trabajo, se estará considerando la Administración los activos circulantes, como son: efectivo y valores comerciales, cuentas por cobrar e inventarios.

En una empresa es muy importante contar con un nivel satisfactorio de capital de trabajo por la siguiente razón: el activo circulante nos debe dar la seguridad de ser lo suficientemente grande para cumplir con el pasivo a corto plazo.

A través del capital de trabajo, es posible medir la liquidez de una empresa, usando las pruebas de liquidez por medio de la Razón Circulante, cuya fórmula es la siguiente:

$$\frac{\text{ActivoCirc ulante}}{\text{Pasivo Circulante}}$$

Mediante esta razón, se puede ver cuantas veces es más grande el activo circulante que el pasivo circulante.

La Razón del Ácido o de pago inmediato, nos permite conocer el grado en que los recursos disponibles nos pueden servir para afrontar las obligaciones contraídas a corto plazo. Su fórmula es la siguiente:

$$\frac{\text{Activos Disponibles}}{\text{Pasivo Circulante}}$$

Los activos disponibles están constituidos por:

- Efectivo en caja y bancos
- Inversiones temporales de inmediata realización, y
- En algunas ocasiones las cuentas por cobrar.

Las cuentas por cobrar a capital de trabajo, es una razón que nos permite conocer la influencia o el peso que tienen las cuentas por cobrar en el capital de trabajo, cuya formula es la siguiente:

$$\frac{\text{Cuentas por Cobrar (netas)}}{\text{Capital de Trabajo}}$$

La razón de inventarios a capital de trabajo, al igual que el anterior, mide el peso o la influencia, pero ahora del inventario, sobre el capital de trabajo, y su fórmula es la siguiente:

$$\frac{\text{Inventario (neto)}}{\text{Capital de Trabajo}}$$

La Administración del Capital de Trabajo es importante debido a que los activos circulantes de muchas empresas representan más del 50% del total del activo. Para que una empresa se desarrolle adecuadamente es necesario supervisar y controlar las cuentas por cobrar y los inventarios, ya que si la empresa crece aceleradamente, la inversión en los activos circulantes puede quedar fuera de control. Niveles excesivos de activos circulantes pueden ocasionar que la empresa tenga menos rendimientos a los esperados, y por el contrario si tiene niveles bajos de activos circulantes podrá tener pérdidas y problemas para operar.

Por lo tanto, el principio de la Administración del Capital de Trabajo implica:

- Determinar el nivel óptimo de inversión en activos circulantes, y
- Hallar la combinación óptima de financiamiento a corto plazo y destinar la inversión en activos circulantes.

Los activos circulantes son manejados de forma incorrecta, si existen fondos inmovilizados en un activo que bien podrían ser utilizados con mayor resultado en otra parte. Tener niveles inadecuados de los activos circulantes pueden ser costosos, por ejemplo: se puede perder un negocio por escasez de inventario, ya que no permite satisfacer la demanda de los clientes. Además, en una buena administración se debe identificar la manera en la que se financiarán los activos.

Es importante señalar, que si una empresa conserva más activos circulantes que fijos reduce el riesgo de insolvencia, debido a que los activos circulantes pueden convertirse en dinero fácilmente.

Por lo tanto, la empresa puede elevar sus utilidades al máximo, si administra en forma óptima:

- El efectivo
- Las cuentas por cobrar
- El inventario

Y así disminuir el riesgo de insolvencia.

A continuación, se estudiará a la Administración de Inventarios ya que es tema de interés.

2.2. Administración de inventarios

Las cuentas por cobrar y los inventarios, forman una parte esencial en el capital de trabajo, debido a esto es importante la Administración de Inventarios. En primer lugar, como bien se mencionó en la introducción, por la cantidad de dinero que se invierte en el inventario. Para las empresas manufactureras el inventario representa más del 25 % del capital total invertido; y en segundo lugar, mantener y/o aumentar la producción de la empresa para que exista inventario, de lo contrario no tendría ventas y a falta de estas la compañía carecería de utilidades y de esta forma la empresa fracasaría.

En la administración de inventarios es importante la interrelación de tres áreas: ventas, producción y finanzas, para que en su conjunto se establezcan políticas que tendrán como objetivo elevar al máximo el rendimiento sobre la inversión y al mismo tiempo satisfacer la demanda.

Se analizará enseguida el inventario y sus diferentes clasificaciones.

2.2.1. El inventario

Se define el inventario como la cantidad de artículos, mercancías y otros recursos que son almacenados o se mantienen inactivos en un instante de tiempo dado.

El Act. Luis Gerardo Sánchez[1] hace una importante clasificación de los inventarios:

- Inventarios de recursos humanos.
- Inventarios de recursos materiales.

Para ilustrar el concepto de *inventarios de recursos humanos* se plantea el siguiente ejemplo: en una agencia de investigación de mercados, se realizan entrevistas telefónicas, por lo tanto, se debe decidir con que frecuencia tiene que capacitarse a las telefonistas y el número óptimo de éstas. Si tuviéramos un excedente de telefonistas tendríamos que capacitar a todas y esto conllevaría a pérdidas económicas por ser innecesario, y por lo contrario, si contáramos con pocas telefonistas, existiría un gran problema si la demanda se incrementara.

El inventario de recursos materiales según el estado de los materiales se clasifica de la siguiente forma:

- Productos terminados,
- Materias primas, y
- Producción en proceso.

---

[1] SANCHEZ L. Gerardo, Apuntes de investigación de operaciones, México, ENEP Acatlan, 1990, t. VII, Modelos de Inventario, p.2.

El inventario de *productos terminados*, son aquellos que están disponibles para la venta, como ejemplo: los automóviles y refrigeradores. Los inventarios de *materias primas* son utilizados para el proceso de fabricación como aquel fabricante de acero que requiere de mineral de hierro para su elaboración, es decir, son artículos comprados a otra empresa los cuales serán utilizados para fabricar un producto. Por último el de *producción en proceso*, contiene artículos parcialmente terminados en proceso de producción, por ejemplo la fabricación de automóviles, ya que los vehículos son parcialmente ensamblados.

En el presente trabajo solo se analizarán los inventarios de recursos materiales.

2.2.2. Objetivos de la administración de inventarios

La Administración de Inventarios persigue dos objetivos:

- Minimizar la inversión en inventarios, y
- Satisfacer la demanda del producto sin afectar la producción y ventas.

Si la empresa no tuviera inventarios y solo produjera sobre pedido, traería como resultado que los clientes se fueran a la competencia, ya que no se satisface la demanda a tiempo. Por lo tanto, es necesario contar con el inventario pero procurando minimizarlo ya que requiere de mantenimiento y este es muy costoso.

Por otro lado, si la empresa mantuviera grandes cantidades de inventario, jamás perdería clientes por no satisfacer la demanda, ni tendría pérdidas en las utilidades, pero resultaría muy costoso ya que contaría con un inventario estático y ese capital invertido podría ser más útil en otra parte.

Al respecto Kamlesh Mathur y Daniel Solow, señalan las ventajas de tener grandes inventarios:

"**1. Para evitar escasez.** Cuando se conoce la demanda futura de un artículo y se puede confiar el las entregas puntuales de un proveedor, siempre puede colocar pedidos de tal forma que se satisfaga toda la demanda sin necesidad de un inventario. Sin embargo, la incertidumbre en la demanda o los tiempos de entrega pueden ocasionar escasez si no se mantiene un inventario suficiente. Por ejemplo, sin un inventario suficiente, una ferretería podría perder una venta a causa de la falta de pintura debido a una demanda superior a la esperada. Un paciente de hospital podría perder mucho más si al hospital se le terminaran los suministros quirúrgicos cuando ocurre un retraso en un envio. La posibilidad escasez cuando la demanda o el tiempo de entrega es incierto es un argumento a favor de mantener grandes inventarios.

2. **Para aprovechar las economías a escala.** Al solicitar grandes cantidades, un negocio puede obtener sus suministros a un costo inferior. Asimismo, el negocio colocaría menos pedidos, lo que ahorraría esfuerzos y costos administrativos.

3. **Mantener un flujo de trabajo continuo en un medio de producción de múltiples etapas.** Por ejemplo, considere una compañía que produce zapatos deportivos. El inventario puede ser el material, la lona, la goma para las suelas, etc., que el departamento de corte necesita. Las figuras recortadas son el inventario de trabajo en proceso que el departamento de ensamble pega y cose. Si una descompostura ocasionara que se detenga la producción, el departamento de ensamble puede continuar operando solo utilizando inventarios de trabajo en proceso. De manera más general, cuando las tasas de producción varían en diferentes etapas, una compañía que mantiene inventarios de trabajo en proceso puede mantener operaciones continuas. Esto es, cada departamento puede funcionar de manera más independiente cuando tiene acceso a inventarios de trabajo en proceso"[2].

Las razones anteriores, justificarían tener grandes cantidades de inventario, y se reitera, el mantener artículos ociosos de inventario ocasionaría costos de mantenimiento, y algo muy importante, ese capital invertido en inventarios podría ser más provechoso invirtiéndolo de otra forma y de esta manera la empresa tendría ganancias.

Como se ve, estos dos objetivos son muy complicados, porque reducir el inventario implica minimizar costos, pero existe el riesgo de no poder afrontar la demanda, sin embargo, se aumenta la inversión y los costos.

[2] MATHUR, Kamlesh y SOLOW, Daniel, Investigación de operaciones, Prentice may, México, 1996, pag. 638.

2.3. Importancia de la Investigación de Operaciones en la administración de inventarios

Si el volumen de recursos depende del control de quien toma decisiones, y si existe algún costo del inventario que disminuye al aumentar este, se dice que existe un problema de inventario. Para dejar más claro lo antes mencionado, se ilustrará con un ejemplo que el Dr. Juan Prawda Witemberg señala en su libro:

"Si un hospital en caso de emergencia requiere 10 litros de sangre Arh positiva y por no tenerla en inventario en ese preciso momento, se les "petatea" el enfermo, ¿En qué clase de costo incurriría su administración? Si el difunto resultase hermano del amigo del amante del primo del secretario adjunto del subsecretario de la Secretaría de Salubridad y Asistencia, lo más probable es que no pase nada, amén de una regañada interna. En cambio, si el difunto resultase el mismo subsecretario, además de multar al hospital, de hacerle pagar una indemnización a los deudos del difunto equivalente a 130 veces su salario anual, le cierran el changarro, fusilan a su director y, después de muerto, lo encierran a 47 años de cárcel con trabajos forzados. Este costo, de llegar a ocurrir, hubiera disminuido (quizás no existiría), si el inventario de sangre Arh positiva hubiera aumentado"[3]

En los problemas que se presentan en la Administración de Inventarios, se deben tomar dos decisiones básicas:

- ¿Cuánto pedir?, y
- ¿Cuándo pedir?

Como se vio anteriormente, debe existir un nivel óptimo de inventario, el cual minimice los costos y podamos satisfacer la demanda. Aquí es donde juega un papel importante la Investigación de Operaciones. Ya que utilizando las herramientas cuantitativas se pueden diseñar modelos y obtener la cantidad óptima a pedir y de la misma forma cuando pedir.

En la mayoría de los libros de Administración Financiera solo consideran: la cantidad óptima a pedir, cuándo pedir, inventarios de seguridad y algunos modelos

[3] PRAWDA, Juan, Métodos y modelos de investigación de operaciones, Tomo II, Modelos estocásticos, México, Limusa, 1987

sencillos para el control de inventarios. Estos modelos no son muy aplicados a situaciones reales. Los modelos de inventarios desarrollados por la Investigación de Operaciones contemplan prácticamente cualquier situación a la que se puede enfrentar una empresa.

Los sistemas de inventarios desarrollados por la Investigación de Operaciones contemplan los siguientes factores, mismos que se describirán en el siguiente capítulo.

A. Costos de inventario

- Costos de pedir o costos de adquisición
- Costos de mantenimiento
- Costos de agotamiento o penales
- Precio de compra o costos de reorden
- Costos fijos
- Costos asociados con la capacidad

B. Demanda

- Determinística
- Probabilística

C. Ciclo de pedido

- Revisión continua
- Revisión periódica

D. Tiempo de reorden

E. Reabastecimiento del inventario

F. Horizonte de tiempo

G. Tamaño del lote

La demanda es el factor o componente más importante en los sistemas de inventario, otro motivo por el cual es necesario apoyarse en la Investigación de Operaciones.

El manejo adecuado de los factores antes mencionados llevarán al administrador financiero a tomar mejores decisiones, porque como ya se ha mencionado, se debe dejar a un lado el empirismo y sustituirlo por la ciencia. El administrador financiero, si puede pero no debe decidir, la cantidad de dinero que se invertirá simplemente por intuición, por ejemplo, que decidiera invertir $ 2 millones de pesos a inventarios y parar. Por estas razones se considera de suma importancia apoyarse en la Investigación de Operaciones, y de esta forma tomar decisiones fundamentadas en un pensamiento científico y no empírico.

En el siguiente capítulo se analizarán los distintos modelos de inventarios.

CAPÍTULO III

MODELOS DE INVENTARIOS

CAPÍTULO III

III. MODELOS DE INVENTARIOS

3.1. Introducción

Como se mencionó en el Capítulo I, en este apartado se expondrá el desarrollo de los modelos de inventarios.

Se considera a las técnicas matemáticas del control de inventarios como una de las herramientas más antiguas de la Investigación de Operaciones; además de ser una de las áreas donde tuvo mayor éxito.

Debido al crecimiento de la industria manufacturera, los investigadores comenzaron a utilizar técnicas para resolver problemas de inventario y programación de la producción. Se sabe que G. D. Babcock creó un modelo representado por una ecuación cúbica, la cual jamás fue publicada. El primer modelo publicado sobre lo que frecuentemente se conoce como *lote económico del inventario* se le atribuye a Ford Harris de la Westinghouse Corporation en 1915, pero también se le conoce como "fórmula de Wilson", ya que fue derivada por R. H. Wilson. Otros de los iniciadores de los modelos de inventarios fueron, H. S. Owen (1925), Benjamin Cooper (1926), y W. A. Mueller (1926-1927).

F. E. Raymond en 1931, extendió el trabajo realizado por Harris, hasta escribir el primer libro sobre problemas de inventario y tenía una peculiaridad: era un libro escrito de una manera simple para ser entendido por cualquier persona, aunque no fuera un experto en la materia.

Pero al igual que en la Investigación de Operaciones, los modelos de inventarios se desarrollaron con mayor rapidez después de la Segunda Guerra Mundial. Antes de la guerra, los modelos de inventarios eran tratados en forma determinística. Posteriormente, T. M. Whitin desarrolló un modelo estocástico simple del tamaño del lote; publicado en un libro en 1953. En 1959, Arrow, Karlin y Scarf realizaron escritos matemáticos sobre los sistemas de inventarios llamados: "Studies in the Mathematical Theory of Inventory an Production", (Estudios Sobre la Teoría Matemática del Inventario y la Producción).

En la actualidad se están desarrollando diversos estudios sobre modelos de inventarios, aunque con un enfoque abstracto pero sin perder el objetivo de llevarlo a la práctica.

3.2. Función del Inventario

En el capítulo anterior, se mencionó que el inventario se define como: la cantidad de artículos, mercancía, y otros recursos que son almacenados o se mantienen en un instante dado. Entre estos otros recursos se puede mencionar como lo señala el Dr. Juan Prawda Witenberg desde su muy particular punto de vista: "las cosas materiales, el dinero, las máquinas y el talento físico de los individuos (en este último caso se encuentra, por ejemplo, el inventario de prostitutas en las casas de "mala nota" el 31 de diciembre en la noche)[1]".

También se define al inventario como un conjunto de recursos útiles que en un instante de tiempo dado se encuentra ocioso. ¿Por qué se menciona que esos recursos son útiles y ociosos? Útil, porque sino se encontrara en existencia o almacenado, traería como consecuencia problemas para el consumidor, por ejemplo: una fábrica de papas fritas, sino almacenara papas, dicha fábrica ocasionaría una escasez de papas fritas, disminuirían sus ventas, la gente consumiría papas fritas de otra fábrica, etc. Y ocioso porque esos recursos no son vendidos ni transportados.

Se analiza como están constituidos los inventarios de toda empresa. SKU (stock keeping unit) que su traducción es unidad de almacenamiento de existencias, stock, renglones, ítem o artículos, se refieren a cada artículo distinto del inventario y cada SKU o alguno de los nombres antes mencionados tienen un número de unidades de existencia. Por ejemplo: una fábrica de zapato deportivo tiene dos modelos iguales de tenis, pero de distinto número, por lo tanto, se estaría hablando de dos SKU.

Una vez mencionado lo que es el inventario y como esta constituido, surge la siguiente pregunta: ¿Qué función tiene los inventarios? Es obvio que la demanda del público no coincida con la oferta, por ejemplo: la leche que produce una vaca no sería igual a la demanda del consumidor. Entonces, el inventario sirve para separar los procesos de producción y distribución, es decir, la existencia de un artículo hace innecesario relacionar la producción con el consumo o visto desde otra perspectiva, obligar el consumo de un ítem para ajustarlo a las necesidades de la producción.

[1]PRAWDA, Juan: Métodos y modelos de investigación de operaciones, Tomo II, Modelos Estocásticos, México, Limusa, 1987, pag. 96.

Al respecto Herbert Moskowitz y Gordon P. Wright señalan las funciones básicas de los inventarios como a continuación se indica:

"**1. Inventarios en tránsito o de conducto.** Estos inventarios están formados por suministros para cubrir retardos en el manejo y el tránsito.

2. Inventarios ciclo o de tamaño de lote. Estos son inventarios que se piden en tamaño de lote porque es más económico hacerlo así que pedirlo cuando sea necesario satisfacer la demanda. Por ejemplo, puede ser más económico llevar una cierta cantidad de inventario que pedir o producir en grandes lotes para reducir costos de alistamiento o pedido o para obtener descuentos en los artículos adquiridos.

3. Inventarios de amortiguación (material de seguridad). Estos son inventarios para prevenir faltantes debido a fluctuaciones inciertas de la demanda.

4. Inventarios de desacople. Estos inventarios tiene como función desacoplar operaciones, por ejemplo, en el sistema completo producción-distribución. Esto permite que las diversas actividades de producción operen más independientemente, sin tener que confiar completamente en la programación de salida de actividades previas en el proceso de producción.

5. Inventarios estaciónales. Los inventarios utilizados con este fin se diseñan para cumplir más económicamente la demanda estacional variando los niveles de producción para satisfacer fluctuaciones en la demanda"[2].

3.3. Características de los sistemas de Inventario

En el capítulo anterior, se mencionó que los costos de inventario, la demanda, el ciclo de pedido, el tiempo de reorden, el reabastecimiento del inventario, el horizonte de tiempo y el tamaño del lote, son factores que contempla la Investigación de Operaciones, los cuales son las características de los sistemas de inventario, y a continuación se definen.

[2] Moskowitz, Herbert y Gordon P.Wright. Investigación de Operaciones, Prentice Hall, Mexico, 1982, pag. 560 y 561.

3.3.1. Costos de inventario

Se ha señalado que uno de los objetivos que persigue la Administración de Inventarios es minimizar los costos. Los costos en que incurre una empresa en relación al control de inventarios son: costos de adquisición y mantenimiento. Los siguientes costos son los que se utilizarán en los sistemas de inventario, que serán analizados en el presente trabajo.

- **Costos de pedir o costos de adquisición.** Los costos de pedido son los relacionados para comprar artículos a un vendedor. Estos costos comprenden: costos de emisión, costos de requisición, costos de inspección al recibir un producto, colocar los productos en su área de almacenamiento, costos administrativos tales como papelería entre otros, pagar al vendedor, los salarios del personal involucrado en estas actividades, y costos contables. Si el artículo es manufacturado en la misma fábrica, existen costos de ajuste de máquina, de arranque, de papeleo, horas extras, contratación, capacitación y liquidación.

- **Costos de mantenimiento.** Estos costos incluyen todos los gastos relacionados al almacenamiento del inventario. Los costos son los siguientes:

A. Obsolescencia. Se presentan estos costos cuando el producto ya no se vende, generalmente afecta a los productos de moda , de alta tecnología, entre otros.

B. Deterioro. Los productos que se mantienen en inventario, se pueden ver afectados por la humedad, por inadecuado manejo e incluso por robo (que es muy frecuente en este país), de tal suerte que este producto ya no puede ser comercializado.

C. Impuestos. En varios estados y municipios se aplican impuestos sobre los inventarios según la inversión promedio que se tuvo almacenada durante el año.

D. Seguro. Ya que los inventarios están sujetos a todo riesgo, es conveniente asegurarlos ya sea total o parcialmente.

E. Almacenamiento. La bodega en la que se almacena el inventario, debe contar con un supervisor, montacargas, instalación de luz, calefacción, renta y depreciación del inmueble, etc.

F. Capital invertido. El dinero que se invierte en los inventarios podría ser utilizado en otras actividades de la compañía. Por ejemplo, si la empresa tiene invertido $1,000,000.00 en inventarios, ese capital depositado en un banco rendiría intereses, es decir, la compañía esta dejando de percibir dinero mensualmente.

- Costos de agotamiento o penales. Estos se originan cuando el cliente pide material y este no se encuentra disponible, entonces la empresa pierde un cliente y se refleja en las ventas, además de perder prestigio, en otras palabras, será lo que se deje de percibir por compras. También pueden ser considerados, los costos de emergencia, cuando se decide hacer corridas extras de producción para satisfacer la demanda que existe en ese momento.

- Precio de compra o costos de reorden. El valor de un ítem es su precio unitario de compra si se ordenan con el proveedor, o si es fabricado por la misma empresa es el costo unitario de producción. La cantidad que se invierte en un ítem que es producido, varía en función de su grado de depuración, es decir, entre más se perfeccione el artículo más costoso será. Este precio unitario de compra también puede variar en función de los descuentos en cantidades o intervalos de precios, por ejemplo cuando nos dicen la típica frase "por caja es más barato".

- Costos fijos. Son los relacionados con el proceso de producción o de reorden, pero independientes de la cantidad de artículos que se producen o se ordenen. Como ejemplo de costos fijos se tienen, aquellos costos asociados con el calentamiento del agua para que genere vapor para derretir el chocolate en una fábrica de dulces.

- Costos asociados con la capacidad. Estos costos pueden ser cuando es necesario incrementar o disminuir la capacidad, y son considerados los despidos y ocio, tiempo extra, contrataciones y capacitación.

3.3.2. Demanda

También conocida como uso o consumo, es el componente fundamental en un sistema de inventarios. La demanda es el número de artículos requeridos en un periodo. En muchas ocasiones lo que se vende es menor a la demanda debido a que el inventario es insuficiente. Se puede considerar la demanda de dos formas: déterminística o estocástica. Es determinística cuando se puede conocer con certeza la demanda. En el caso estocástico, la demanda en un periodo de tiempo no se conoce con certeza, en otras palabras, es incierta, pero se representa mediante una distribución de probabilidad. Además la demanda puede ser constante o variar durante el tiempo. En el primer caso la demanda se denomina *estática* y en el segundo *dinámica*. La demanda puede ser satisfecha *instantáneamente* al inicio de un periodo de tiempo o *uniformemente* en el transcurso de un periodo.

3.3.3. Ciclo de pedido

Es el periodo de tiempo que separa dos ordenes sucesivas (figura 3.2, pág. 50) . Esto se puede realizar de dos formas:

- **Revisión continua.** Este consiste en dar un seguimiento continuo del nivel de inventario hasta el momento en el que alcanza un punto el cual indica que se debe hacer un nuevo pedido. La ventaja al emplear esta revisión, es que continuamente se revisa el nivel de inventario hasta alcanzar un punto en el que se hace un nuevo pedido, por lo que es difícil quedarse sin inventario.

- **Revisión periódica.** En esta se predetermina un periodo de tiempo constante en la que los pedidos se colocan. Esta revisión no es de forma continua , por lo cual no se dedica mucho tiempo en el monitoreo del nivel de inventario, lo cual es una ventaja.

3.3.4. Tiempo de reorden

Es el lapso de tiempo que transcurre entre el momento que se pide un artículo o se fabrica éste y el instante que el cliente recibe el artículo o termina de producirse (figura 3.2, pág. 50). Los tiempos de entrega pueden ser a su vez determinísticos (cuando se conocen con certeza) o aleatorio. En el caso de que el tiempo sea cero, la entrega es inmediata.

3.3.5. Reabastecimiento del inventario

El reabastecimiento de un artículo puede ser *instantáneo* o *uniforme*. El primero ocurre cuando los artículos son comprados con el proveedor. Cuando el producto es manufacturado por la misma empresa se dice que el suministro es *uniforme*.

3.3.6. Horizonte de tiempo

Es el periodo que se determina para controlar el nivel de inventario. Dependiendo de la característica de la demanda, el horizonte puede ser finito o infinito.

3.3.7. Tamaño del lote

Es el número de unidades o piezas, pesadas, medidas, o contadas, que forman la cantidad adquirida por un pedido de compra para almacenar en el inventario. Esta cantidad puede ser determinística o estocástica. Es importante señalar que el lote puede ser expresado diferentes medidas: metros, litros, kilos o bien en dinero.

Estos factores no son considerados en la teoría de Administración de Inventarios que se encuentran en los libros de Administración Financiera. Una vez más, es considerado de gran importancia auxiliarse de la Investigación de Operaciones para solucionar problemas concernientes a los inventarios, ya que ella contempla muchas variantes que se presentan en la realidad.

3.4. Modelos determinísticos de inventarios

Antes de entrar en detalle con los modelos determinísticos de inventario, se expondrá la forma en la que se pueden clasificar los artículos o *sku* de un inventario.

Es claro que no todos los artículos de un inventario son iguales respecto a su valor o importancia. Alguna vez se ha escuchado la expresión que dice: "sale más caro el caldo que las albóndigas", lo que se quiere decir con esto, es que frecuentemente cuesta más controlar un artículo que lo que vale este. Por lo tanto, es conveniente dar prioridad a los artículos del inventario de acuerdo a su valor monetario.

Precisamente, el sistema de inventario *ABC* tiene como objetivo clasificar los artículos de acuerdo a su valor, desde aquellas que concentran la cantidad de inversión más alta, hasta los que tienen poca inversión. La clasificación del inventario que hace el sistema *ABC*, es de la siguiente manera:

1. *Clase A*.- Concentra todos los ítems que tienen un valor monetario muy alto. En términos de porcentaje, aquellos que representan entre el 70 y 80% del valor monetario acumulado. Estos artículos generalmente representan alrededor del 20% del total de artículos que comprende el inventario.

2. *Clase B*.- Contempla aquellos artículos que tienen un valor monetario porcentual alrededor del 15% del total acumulado. Además representan entre el 20 y 30% del total de artículos.

3. *Clase C*.- Esta última clase, contiene los artículos que tienen un valor monetario bajo, en puntos porcentuales representan entre el 5 y 10% del valor total acumulado y cuyo volumen oscila entre el 50 y 70% del total de ítems en el inventario.

De acuerdo a la distinción de artículos que realiza el sistema de inventario ABC, la clase A, requiere un control estricto ya que contiene los artículos más caros. A la clase B se le dará un control moderado, es decir se revisan con menos frecuencia que los de la clase A. Por último la clase C, tiene los artículos de poca importancia y es recomendable tener un excedente de ellos para no tener mayor control sobre ellos.

A continuación se presentan los pasos para clasificar, de acuerdo a sus valores, los artículos del inventario:

a) En este paso se enumeran los artículos de acuerdo a su valor y ordenarlos en forma decreciente.

b) Determinar el número de filas que pertenecen al porcentaje correspondiente para la clase A.

c) Contar las filas de la clase A.

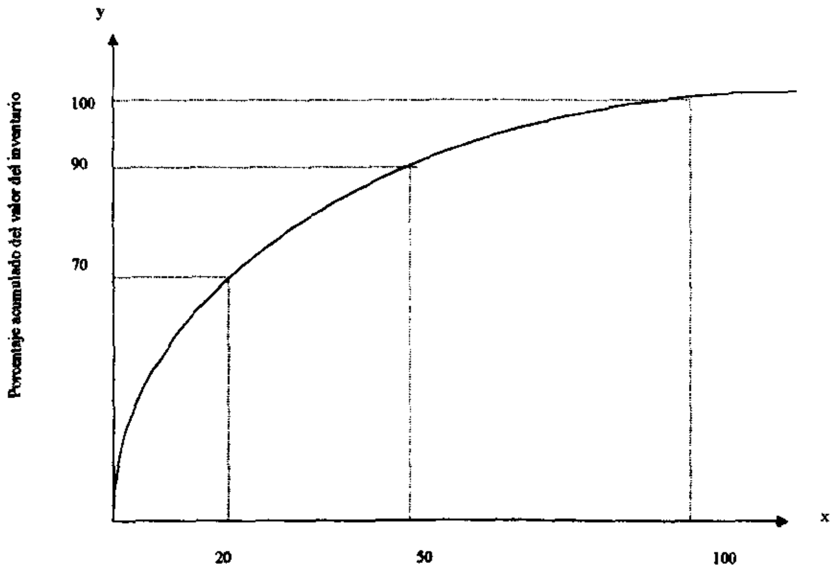
d) Marcar las filas de esta clase con la letra A.

e) Sumar los valores monetarios de las filas que tengan la letra A y dividir el resultado entre la suma total del valor monetario del inventario, para obtener el peso que representa la clase A en el mismo tanto en artículos como en valor.

f) Los pasos anteriores se aplican de la misma manera para los artículos de la clase B y C.

La representación gráfica de la clasificación que realiza el sistema de inventario ABC es como lo muestra la figura 3.1. Donde el eje X representa en términos porcentuales los artículos o ítems en el inventario. El eje Y señala también en términos porcentuales el valor monetario acumulado del inventario.

Ejemplo:
Supóngase que la empresa X desea aplicar el sistema de inventarios ABC. Utiliza 10 ítems y presenta los datos como lo muestra la tabla 1.



Porcentaje acumulado de artículos en en inventario.
Fig. 3.1

Tabla 1.

ÍTEMS	UNIDADES POR AÑO	COSTO UNITARIO
A	20,000	20
B	23,000	10
C	20,000	3
D	30,000	2
E	5,000	10
F	10,000	7
G	1,000	30
H	2,000	15
I	3,000	10
J	5,000	6

En la Tabla 2, se presentan dos columnas en las que representará el monto anual y en la otra se enumeran los ítems de acuerdo a su valor monetario.

Tabla 2.

ITEMS	UNIDADES POR AÑO	COSTO UNITARIO	MONTO ANUAL	NUMERACIÓN
A	20,000	20	400,000	1
B	23,000	10	230,000	2
C	20,000	4	80,000	4
D	30,000	2	60,000	6
E	5,000	10	50,000	7
F	10,000	7	70,000	5
G	1,000	30	30,000	10
H	2,000	17	34,000	9
I	3,000	30	90,000	3
J	5,000	9	45,000	8

En la tabla 3, se presentan aquellos productos que representen el 73.5% de la inversión como tipo A, del tipo B aquellos que contengan aproximadamente el 23.7% y los demás del tipo C.

Tabla 3.

ITEM	MONTO ANUAL	MONTO ANUAL ACUMULADO	PORCENTAJE ACUMULADO	TIPO
A	400, 000	400, 000	36.7	A
B	230, 000	630, 000	57.9	A
I	90, 000	720, 000	66.1	A
C	80, 000	800, 000	73.5	A
F	70, 000	870, 000	79.9	B
D	60, 000	930, 000	85.4	B
E	50, 000	980, 000	90.0	B
J	45, 000	1, 025, 000	94.1	B
H	34, 000	1, 059, 000	97.2	B
G	30, 000	1, 089, 000	100.0	C

Como se ve, es importante aplicar este sistema antes de determinar algún modelo de inventario, debido a que es posible darle prioridad a aquellos artículos que pertenecen a la clase C, sino que debe darse mayor seguimiento a los de la clase A que son los más costosos.

3.4.1. Cantidad económica de pedido.

Se puede expresar un modelo de inventario globalizado de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}\text{costo total}\\ \text{de inventario}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{costo de}\\ \text{compra}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{costo}\\ \text{fijo}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{costo}\\ \text{penal}\end{pmatrix}$$

Sin embargo, los modelos que serán analizados, presentan varios supuestos, es decir, algunos de estos componentes no se toman en cuenta según la características del modelo. Pero todos los modelos persiguen el mismo fin: minimizar los costos en función de la cantidad de pedido y el punto de reorden.

El modelo EOQ (Economic Order Quanty) o Cantidad Económica de Pedido es muy conocido en la literatura de inventarios. De él se derivan otros modelos como se verá más adelante.

El modelo EOQ puede usarse en las siguientes circunstancias:

1.- En el abastecimiento de productos de oficina como: cuadernos, lápices, gomas, etc.

2.- En el abastecimiento de artículos que se utilizan en la industria: tuercas, rondanas, tornillos, etc.

3.- En el abastecimiento de productos en un restaurante: pan, leche, azúcar, etc.

Anteriormente se mencionó que cada modelo de inventario trabaja con ciertas hipótesis. El modelo EOQ opera con las siguientes suposiciones:

* El tipo de demanda es determinística, constante y continua y puede ser diaria, mensual, trimestral, etc., con la condición de que todos los datos deben ser consistentes.

* No se permiten faltantes o escasez.

* Los costos se conocen con certeza y son constantes al igual que el precio de compra.

* Una vez que el nivel de inventario es cero se reabastece.

* El tiempo de anticipación es mayor o igual a cero y constante.

Las variables y parámetros que se utilizarán para el modelo EOQ son las siguientes:

CTI = costo total del inventario.

Q = cantidad pedida (unidades).

T = período de tiempo entre pedidos.

C_p = costo de pedir.

C_m = costo de mantener el inventario por unidad de tiempo.

D = demanda anual de un artículo.

C_u = costo unitario de compra.

T_a = tiempo de anticipación.

N = número de pedidos.

La mecánica del modelo se muestra en la figura 3.2.

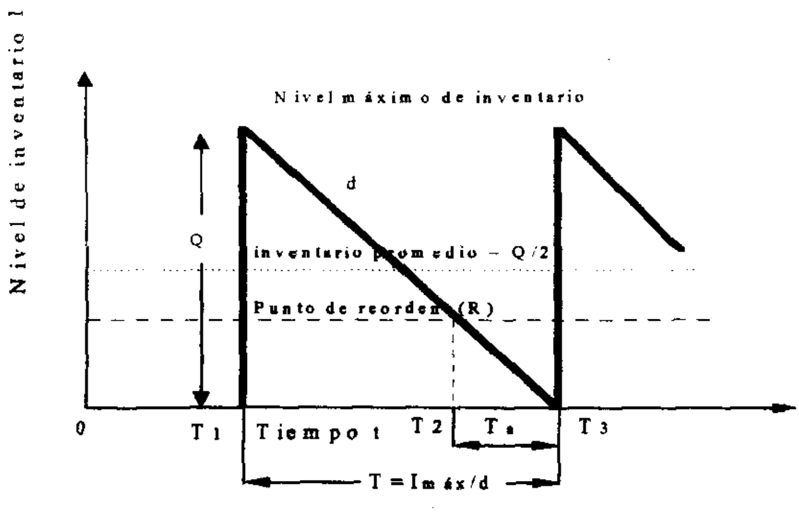


Fig. 3.2

En esta figura se puede observar que el nivel de inventario disminuye con el tiempo a una tasa de demanda (d) constante y determinística. En el momento en que el inventario coincide con el punto de reorden (R), se coloca el pedido de Q unidades de un ítem. El intervalo de tiempo T_2 a T_3 se le llama tiempo de anticipación, en el cual, una vez que el nivel de inventario llega a cero se recibe el pedido de Q artículos y de esta forma el nivel de inventario llega a su máximo repitiéndose este ciclo cuya duración es t.

Si el pedido de Q unidades es menor, la frecuencia de pedidos será mayor. Por otro lado, entre más grande sea Q los pedidos tendrán una frecuencia menor. Esto lo ilustra la figura 3.3 para Q_1 y Q_2 respectivamente.

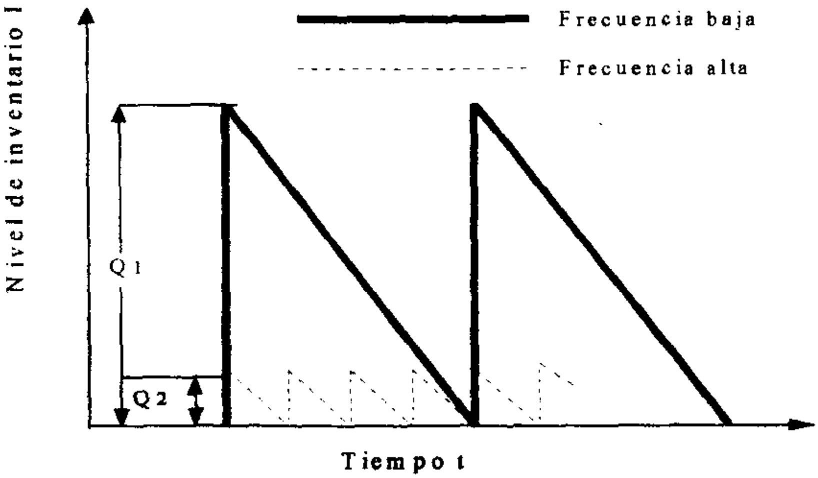


Fig. 3.3

El modelo EOQ se construye de la siguiente forma: la variable de decisión es Q, porque se tiene que determinar la cantidad a pedir. Entonces el objetivo es encontrar la cantidad óptima a pedir Q^*, la cual minimiza los costos totales de inventario CTI.

De este forma, la función que dependerá de Q se expresar así:

CTI = (costo de mantener el inventario por periodo t) + (costo de pedir por periodo t) ..(1)

Como se ve el costo de compra no aparece, debido a que se considera constante y no afecta a Q.

Ahora se analiza cada término de la ecuación (1)

costo de mantenimiento = (inventario promedio) (costo de mantener por unidad por periodo t)

Es importante entender el concepto de inventario promedio. En la figura 3.4, se observa el comportamiento del inventario en el período de un año. Como se ve, el área de un triángulo esta dado por Qt/2, está área representa la suma de los productos que se tiene en el inventario durante un periodo de tiempo t. Si se quiere obtener el inventario promedio durante el tiempo t, se divide Qt/2 entre t

$$\left(\frac{Qt/2}{t}\right)=\left(\frac{Qt}{2t}\right)=\frac{Q}{2}$$

donde Q/2 es el inventario promedio, que representa la mitad de la cantidad a pedir.

Por lo tanto el costo de mantener el inventario será:

$$\left(\frac{Q}{2}\right)C_m$$

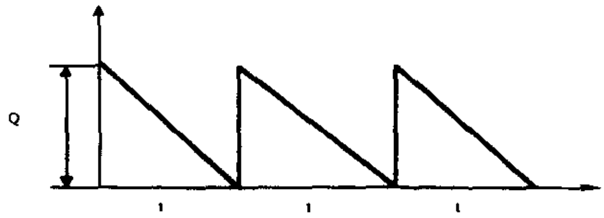


fig. 3.4

El costo de pedir esta dado por:

costo de pedir por año = (costo por pedido)(número de pedidos)

El número de pedidos por un año se obtiene de la siguiente forma:

$$N = \left(\frac{\text{demanda anual}}{\text{cantidad pedida}}\right) = \frac{D}{Q}$$

Entonces el costo de pedir será:

$$C_p\left(\frac{D}{Q}\right)$$

Ahora, la ecuación del costo total del inventario la puede expresar en función de Q así:

$$CTI = \left(\frac{Q}{2}\right)C_m + \left(\frac{D}{Q}\right)C_p \text{.............}(2)$$

El siguiente paso es obtener la cantidad óptima a pedir Q^* que minimiza la ecuación (2). Para solucionar este problema, se debe utilizar el cálculo diferencial. Recordando que la derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente que toca un punto dado de la curva. Por lo tanto si la pendiente de la recta es cero, indica la existencia un valor extremo relativo en la curva (ver anexos sección 3A.1).

Derivando pues la ecuación (2) con respecto a Q:

$$CTI(Q) = \left(\frac{Q}{2}\right)C_m + \left(\frac{D}{Q}\right)C_p \quad ,$$

$$\frac{d\,CTI(Q)}{dQ} = \frac{d\left(\frac{Q}{2}\right)C_m}{dQ} + \frac{d\left(\frac{D}{Q}\right)C_p}{dQ} = \frac{C_m}{2} - \left(\frac{D}{Q^2}\right)C_p$$

Ahora igualando a cero la derivada para encontrar una Q^*que minimice el CTI

$$\frac{d\,CTI(Q)}{dQ} = \frac{C_m}{2} - \left(\frac{D}{Q^2}\right)C_p = 0$$

Despejando Q se obtiene :

$$\frac{C_m}{2} = \frac{C_p\,D}{Q^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q^2}{2} = \frac{C_p\,D}{C_m} \qquad \Rightarrow \qquad Q^2 = \frac{2\,C_p\,D}{C_m}$$

$$\therefore \quad Q^* = \sqrt{\frac{2C_p\,D}{C_m}}\,.$$

Se toma la raíz positiva.

También se utiliza el cálculo diferencial para garantizar que Q* es una solución de mínimo costo. Esto es, si la segunda derivada es mayor a cero, se afirma que Q* es un mínimo relativo (ver anexos sección 3A.2).

$$\frac{d^2 CTI}{dQ} = \frac{d^2\left(\frac{C_m}{2} - \frac{C_p D}{Q^2}\right)}{dQ} = \frac{d^2 \frac{C_m}{2}}{dQ} - \frac{d^2 \frac{C_p D}{Q^2}}{dQ} = 0 - (-2)\frac{C_p D}{Q^3} = \frac{2 C_p D}{Q^3} = \frac{2 C_p D}{Q^3}$$

$$\therefore \frac{2 C_p D}{Q^{*3}} > 0.$$

Entonces Q', es efectivamente la solución de costo mínimo.

Para encontrar el costo total del inventario óptimo, simplemente se sustituye Q' en la ecuación (2).

$$CTI = \left(\frac{Q}{2}\right) C_m + \left(\frac{D}{Q}\right) C_p = \left(\frac{C_m}{2}\right)\sqrt{\frac{2 C_p D}{C_m}} + C_p\left(\frac{D}{\sqrt{\frac{2 C_p D}{C_m}}}\right) = \sqrt{\frac{2 C_m^2 C_p D}{4 C_m}} + \sqrt{\frac{C_p^2 D^2}{\frac{2 C_p D}{C_m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{C_m C_p D}{2}} + \sqrt{\frac{C_p^2 D^2 C_m}{2 C_p D}} = \sqrt{\frac{C_m C_p D}{2}} + \sqrt{\frac{C_p D C_m}{2}} = 2\sqrt{\frac{C_m C_p D}{2}} = \sqrt{\frac{4 C_m C_p D}{2}}$$

$$= \sqrt{2 C_m C_p D} \qquad \therefore \qquad CTI^* = \sqrt{2 C_m C_p D}.$$

El número óptimo de pedidos ya es posible calcularlo de acuerdo a los resultados anteriores.

$$N^* = \frac{D}{Q^*}.$$

Para encontrar el tiempo entre pedidos se calcula de la siguiente forma:

$$T^* = \frac{Q^*}{D}$$

Lo que indica que se debe ordenar Q^* unidades cada T^* unidades de tiempo.

Por último, hay que responder a la pregunta, ¿ Cuándo pedir ? Esta decisión se toma con el punto de reorden (R) que consiste en la cantidad a la cual debe disminuir el nivel de inventario que nos indica que debe de colocarse un pedido para reabastecer el inventario. Se obtiene de la siguiente forma:

punto de pedir = (tiempo de anticipación)(utilización diaria)

Donde el tiempo de anticipación consiste en la cantidad de tiempo entre la colocación de un pedido y el tiempo en que se recibe.

Ejemplo:

Una gasolinera vende cada mes 4,000 galones de gasolina. Cada vez que el distribuidor rellena los tanques de la gasolinera, cobra $50.70 por galón. El costo anual de almacenamiento de un galón de gasolina es de $0.30.

(a) ¿ Cuántos galones de gasolina se deben pedir ?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\ C_P\ D}{C_m}} = \sqrt{\frac{2(50.70)(48000)}{0.30}} = 4{,}027.9$$

(b) ¿ Cuántos pedidos se deben hacer cada año ?

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \frac{48000}{4027.90} = 11.91$$

(c) ¿ Cuánto tiempo pasa entre pedidos sucesivos ?

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{4027.9}{48000} = 0.08$$

Si se supone el año de 365 días, entonces (365) (0.08) = 29.2. Por lo que cada 29 días se debe colocar el pedido.

(d) Si el tiempo de entrega es de 2 semanas, ¿ Cuál es el punto de reorden ?

Punto de pedir = (tiempo de anticipación) (utilización diaria)

$$= (14)\left(\frac{48000}{365}\right) = (14)(131.50) = 1{,}841$$

3.4.2. Cantidad económica de pedido con faltantes

A diferencia del modelo anterior, en este se tomará en cuenta los costos de escasez o penales. Es posible aplicar este modelo en situaciones en las que el valor de cada artículo del inventario es alto. Un claro ejemplo en el que se utiliza este modelo es, en la venta de autos nuevos. Cuando el cliente compra un automóvil este no se encuentra disponible, sin embargo el vendedor lo solicita a la fábrica y posteriormente se le entrega al cliente, es decir, la entrega no es inmediata.

Los hipótesis son las mismas que el modelo anterior, excepto por supuesto, la de no permitir faltantes.

Los costos penales deben ser pequeños en relación a los costos de mantener el inventario con el fin de poder considerar la escasez del inventario. Resumiendo, los artículos vendidos son diferidos.

La mecánica de este modelo se presenta en la figura 3.5.

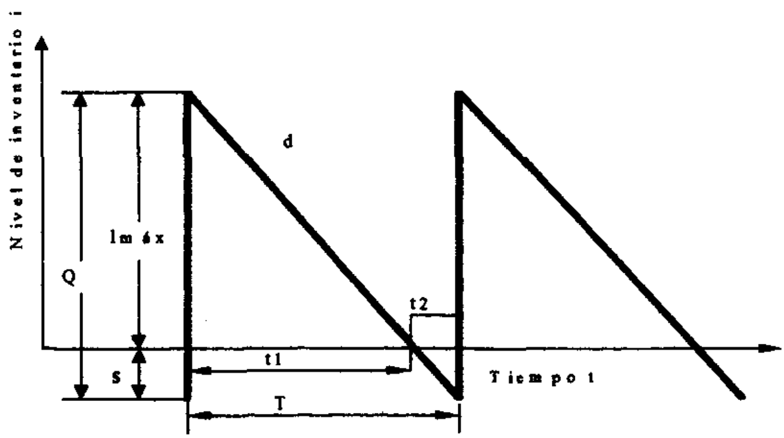


Fig. 3.5

Donde

S = número de faltantes por pedido
d = tasa de demanda
T = tiempo del periodo entre pedidos ($T = t_1 + t_2$).
t_1 = tiempo de disposición de inventario
t_2 = tiempo en el que existen faltantes.

Como se ve en la figura 3.5, existe un nivel de inventario negativo, el cual representa artículos ya vendidos, sin embargo son diferidos. Otra diferencia significativa en relación al modelo EOQ, radica en que el nivel máximo de inventario no llega a la cantidad pedida Q, debido a que los pedidos diferidos se satisfacen una vez que son recibidos. Entonces el nivel máximo de inventario queda determinado por la diferencia entre la cantidad pedida y los faltantes

Ahora se agrega otros términos que serán utilizados en este modelo además de los que ya se han definido anteriormente.

C_e = costo unitario penal por unidad de tiempo.

N_f = número de faltantes de pedido.

$I_{máx}$ = nivel máximo de inventario (Q-S).

El costo total del modelo se expresa a continuación:

CTI = costo pedir + costo de mantener + costo penal

A continuación se analiza cada término de la expresión anterior.

El costo de pedir se obtiene de la misma forma que en el modelo EOQ:

$$C_p \frac{D}{Q}.$$

Costos de mantenimiento:

El costo de mantenimiento se obtiene cuando el inventario esta disponible. Entonces el nivel de inventario sería

$I_{máx} = Q\text{-}S$

También se determinar el inventario promedio, como a continuación se explica:

En la figura 3.5, el área del triángulo en el que esta disponible el inventario es

$$\frac{(Q-S)t_1}{2}$$

cuyo promedio es

$$\frac{\frac{(Q-S)t_1}{2}}{t_1} = \frac{(Q-S)t_1}{2t_1} = \frac{(Q-S)}{2}.$$

Entonces se tiene

$$\frac{I_{máx}}{2} = \frac{(Q-S)}{2}.$$

De esta manera, el costo de mantenimiento durante el período T donde existe el inventario esta dado como:

$$C_m \frac{I_{máx}}{2} t_1 = C_m \frac{(Q-S)}{2} t_1 .$$

Pero el costo de mantenimiento que se obtuvo no es del periodo. Entonces el costo de mantener por año sería:

$$\text{tasa de demanda} = d = \frac{Q-S}{t_1}$$

En la figura 3.5 se puede ver que el triángulo de lados (Q-S) d t_1 es semejante al *triángulo cuyos catetos son QT. Entonces*

$$\frac{Q - S}{t_1} = \frac{Q}{T}$$

Despejando t_1 obtenemos

$$t_1 = \frac{T(Q - S)}{Q}$$

Sustituyendo el valor t_1 en $C_m \frac{Q - S}{2} t_1$

tenemos,

$$C_m \frac{(Q - S)}{2} \frac{(T[Q - S])}{Q} = \frac{C_m T (Q - S)^2}{2 Q}$$

Entonces, el costo de mantenimiento por periodo es

$$\frac{C_m T(Q - S)^2}{2Q}$$

Dado que existen N pedidos en el año, el costo de mantenimiento por año será:

$$\left(\frac{C_m T(Q - S)^2}{2Q}\right) N$$

pero,

$$T = \frac{1}{N} \qquad \Rightarrow \qquad T N = \frac{1}{N}(N) = 1$$

Entonces, el costo de manteniemiento por año es,

$$\frac{C_m (Q - S)^2}{2Q}$$

El costo penal se obtiene determinando el número promedio de escasez a partir del área del triángulo cuyos catetos son t_2 N_f. Entonces

$$\frac{t_2 N_f}{2}$$

Por lo tanto, el número promedio de faltantes será

$$\frac{\frac{t_2 N_f}{2}}{t_2} = \frac{t_2 N_f}{2 t_2} = \frac{N_f}{2}$$

El costo de un faltante en el periodo T será

$C_e \frac{N_f}{2} t_2$ donde t_2 es el tiempo en el que existe escasez.

Para encontrar el costo anual de escasez se debe determinar d (tasa de escasez)

$d = \frac{N_f}{t_2}$ pero de acuerdo al triángulosemejante tenemos que $d = \frac{Q}{T}$

ahora, igualandolos dos últimosresultados, obtenemos

$$\frac{N_f}{t_2} = \frac{Q}{T} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{N_f T}{Q}$$

Sustituyendo t_2 en

$$C_e \frac{N_f}{2} t_2$$

Se tiene que

$$C_e \frac{N_f}{2}\left(\frac{N_f T}{Q}\right) = \frac{C_e T N_f^2}{2Q}$$

Por lo tanto, el costo de escasez por periodo es

$$\frac{C_e T N_f^2}{2Q}$$

Si se consideran los números de pedidos en el tiempo que existe escasez, el costo anual de faltantes por año será

$$\left(\frac{C_e T N_f^2}{2Q}\right)N \qquad \text{pero,} \qquad T = \frac{1}{N}$$

por lo tanto, el costo anual de faltantes es

$$\frac{C_e N_f^2}{2Q}$$

Entonces CTI se expresa así

$$CTI = C_P \frac{D}{Q} + \frac{C_m(Q - N_f)^2}{2Q} + \frac{C_e N_f^2}{2Q}$$

Ahora se tiene que encontrar Q^*, $(Q - N_f)^*$ ó $I^*_{máx}$ y N^*_f los cuales minimizarán el CTI. Para determinar el punto óptimo (Q^*, N^*_f) que minimizará la ecuación del costo total del inventario se aplican algunos conceptos de programación no lineal. (ver anexos sección 3A.3).

Primero, se debe encontrar el punto estacionario para CTI(Q, N_f), es decir se debe satisfacer lo siguiente:

$$\frac{\partial CTI(Q\ ,N_f)}{\partial Q} = \frac{\partial CTI(Q\ ,N_f)}{\partial N_f} = 0.$$

Entonces, se tiene

$$CTI(Q,N_f) = C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{(Q - N_f)^2}{2Q} + \frac{C_e N_f^2}{2Q}$$

$$= C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{\left(Q^2 - 2QN_f + N_f^2\right)}{2Q} + \frac{C_e N_f^2}{2Q} = C_p \frac{D}{Q} + C_m\left(\frac{Q}{2} - N_f + \frac{N_f^2}{2Q}\right) + \frac{C_e N_f^2}{2Q}$$

$$= C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{Q}{2} - C_m N_f + C_m \frac{N_f^2}{2Q} + \frac{C_e N_f^2}{2Q} = C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{Q}{2} + (C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q} - C_m N_f.$$

Entonces,

$$CTI(Q,N_f) = C_p\frac{D}{Q} + C_m\frac{Q}{2} + (C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q} - C_m N_f.$$

La derivada parcial respecto a Q será :

$$\frac{\partial CTI(Q,N_f)}{\partial Q} = \frac{dC_p\frac{D}{Q}}{dQ} + \frac{dC_m\frac{Q}{2}}{dQ} + \frac{d\left[(C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q}\right]}{dQ} - \frac{dC_m N_f}{dQ}$$

$$= -C_p\frac{D}{Q^2} + \frac{C_m}{2} - (C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q^2}.$$

Haciendo la derivada parcial respecto a N_f tenemos,

$$\frac{\partial CTI(Q,N_f)}{\partial N_f} = \frac{dC_p\frac{D}{Q}}{dN_f} + \frac{dC_m\frac{Q}{2}}{dN_f} + \frac{d\left[(C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q}\right]}{dN_f} - \frac{dC_m N_f}{dN_f}$$

$$= \frac{2}{2}(C_m + C_e)\frac{N_f}{Q} - C_m = (C_m + C_e)\frac{N_f}{Q} - C_m$$

Igualando a cero las derivadas parciales obtenidas

$$\frac{\partial CTI(Q,N_f)}{\partial Q} = \frac{\partial CTI(Q,N_f)}{\partial N_f} = 0$$

$$-C_p\frac{D}{Q^2} + \frac{C_m}{2} - (C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q^2} = 0 \text{......................(i)}$$

$$(C_m + C_e)\frac{N_f}{Q} - C_m = 0 \text{...(ii)}$$

despejando N_f de (ii), tenemos

$$(C_m + C_e)\frac{N_f}{Q} = C_m \qquad \Rightarrow \qquad N_f = \frac{C_m Q}{(C_m + C_e)}$$

Si la ecuación (i) se multiplica por $2Q^2$, obtenemos lo siguiente

$$2Q^2\left(-C_p\frac{D}{Q^2} + \frac{C_m}{2} - (C_m + C_e)\frac{N_f^2}{2Q^2}\right) = 0$$

$$-2C_pD + C_mQ^2 - (C_m + C_e)N_f^2 = 0 \quad \text{.......... ....(iii).}$$

Ahora se sustituye N_f en (iii),

$$-2C_pD + C_mQ^2 - (C_m + C_e)\left(\frac{C_mQ}{(C_m + C_e)}\right)^2 = 0$$

$$-2C_pD + C_mQ^2 - (C_m + C_e)\left(\frac{C_m^2Q^2}{(C_m + C_e)^2}\right) = 0$$

$$-2C_pD + C_mQ^2 - \left(\frac{C_m^2Q^2}{C_m + C_e}\right) = 0$$

$$-2C_pD + C_mQ^2\left(1 - \frac{C_m}{C_m + C_e}\right) = 0$$

$$C_mQ^2\left(1 - \frac{C_m}{C_m + C_e}\right) = 2C_pD$$

$$Q^2 = \frac{2C_p D}{C_m\left(1 - \frac{C_m}{C_m + C_e}\right)} = \frac{2C_p D}{\left(C_m - \frac{C^2{}_m}{C_m + C_e}\right)} = \frac{2C_p D}{\left(\frac{C^2{}_m + C_m C_e - C^2{}_m}{C_m + C_e}\right)}$$

$$= \frac{2C_p D}{\left(\frac{C_m C_e}{C_m + C_e}\right)} = \frac{2C_p D(C_m + C_e)}{C_m C_e} = \left(\frac{2C_p D}{C_m}\right)\left(\frac{C_m + C_e}{C_e}\right)$$

$$Q^2 = \left(\frac{2C_p D}{C_m}\right)\left(\frac{C_m + C_e}{C_e}\right) \qquad \Rightarrow \qquad Q^* = \sqrt{\left(\frac{2C_p D}{C_m}\right)}\sqrt{\left(\frac{C_m + C_e}{C_e}\right)}$$

Ahora, se debe encontrar N_f^* de la siguiente forma:

Despejando N_f de (ii), se obtiene

$$(C_m + C_e)\frac{N_f}{Q} - C_m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{(C_m + C_e)N_f}{C_m}$$

Ahora se sustituye Q en (iii),

$$-2C_p D + C_m\left(\frac{(C_m + C_e)N_f}{C_m}\right)^2 - (C_m + C_e)N_f^2 = 0$$

$$-2C_p D + C_m\left(\frac{(C_m + C_e)^2 N_f^2}{C_m^2}\right) - (C_m + C_e)N_f^2 = 0$$

$$-2C_p D + \left(\frac{(C_m + C_e)^2 N_f^2}{C_m}\right) - (C_m + C_e)N_f^2 = 0$$

$$\left(\frac{(C_m + C_e)^2 N_f^2}{C_m}\right) - (C_m + C_e)N_f^2 = 2C_p D$$

$$N_f^2\left(\frac{(C_m+C_e)^2}{C_m}\right)-(C_m+C_e)=2\,C_p\,D$$

$$N_f^2\left(\frac{(C_m^2+2\,C_mC_e+C_e^2-C_m(C_m+C_e)}{C_m}\right)=2\,C_p\,D$$

$$N_f^2\left(\frac{(C_m^2+2\,C_mC_e+C_e^2-C_m^2-C_mC_e}{C_m}\right)=2\,C_p\,D$$

$$N_f^2\left(\frac{(C_mC_e+C_e^2}{C_m}\right)=2\,C_p\,D$$

$$N_f^2=\frac{2\,C_p\,D}{\dfrac{C_mC_e+C_e^2}{C_m}}=\frac{2\,C_p\,D\,C_m}{C_mC_e+C_e^2}\qquad\Rightarrow\qquad N_f^*=\sqrt{\frac{2\,C_p\,D\,C_m}{C_e(C_m+C_e)}}$$

Entonces CTI tiene un punto estacionario en (Q^*,N_F^*).

Ahora, para comprobar que CTI tiene un mínimo relativo o mínimo local en (Q^*,N_F^*), se debe cumplir lo siguiente (ver anexos sección 3A.4):

$$H_k(Q^*,N_f^*)>0$$

$$H(Q,N_f)=\begin{bmatrix}2\,C_p\dfrac{D}{Q^3}+(C_m+C_e)\dfrac{N_f^2}{Q^3} & -(C_m+C_e)\dfrac{N_f}{Q^2}\\ -(C_m+C_e)\dfrac{N_f}{Q^2} & \dfrac{(C_m+C_e)}{Q^2}\end{bmatrix}$$

Entonces, los menores principales de $H_k(Q^*, N_f^*)$ son los elementos de la diagonal y son mayores a cero

$$2C_p\frac{D}{Q^{*3}} + (C_m + C_e)\frac{N_f^{*2}}{Q^{*3}} > 0 \qquad , \qquad \frac{(C_m + C_e)}{Q^{*2}} > 0$$

El segundo menor principal es también mayor a cero

$$\left(2C_p\frac{D}{Q^{*3}} + (C_m + C_e)\frac{N_f^{*2}}{Q^{*3}}\right)\left(\frac{(C_m + C_e)}{Q^{*2}}\right) - \left(-(C_m + C_e)\frac{N_f^{*}}{Q^{*2}}\right)\left(-(C_m + C_e)\frac{N_f^{*}}{Q^{*2}}\right) > 0$$

$$\left(2C_p\frac{D}{Q^{*3}} + (C_m + C_e)\frac{N_f^{*2}}{Q^{*3}}\right)\left(\frac{(C_m + C_e)}{Q^{*2}}\right) - \left(-(C_m + C_e)\frac{N_f^{*}}{Q^{*2}}\right)^2 > 0$$

$$\left(2C_p\frac{D(C_m + C_e)}{Q^{*5}} + (C_m + C_e)^2\frac{N_f^{*2}}{Q^{*5}}\right) - \left((C_m + C_e)^2\frac{N_f^{*2}}{Q^{*4}}\right) > 0$$

Por lo tanto Q^* y N_f^* minimizan el Costo Total del Inventario.

El nivel máximo de inventario se calcula así:

$$I^*_{máx} = Q^* - N_f^*$$

Ejemplo:

Una compañía enfrenta una demanda anual de 1,000 unidades para un producto en particular, los costos de preparación son de \$200 por preparación, los costos anuales de mantener el inventario por unidad son 25% del valor del producto, que es de \$12, y la pena convencional por pedidos pendientes es de \$10 al año. ¿Cuál es la cantidad óptima de pedido?.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,C_p\,D}{C_m}}\sqrt{\frac{C_m + C_e}{C_e}} = \sqrt{\frac{2\,(200)(1000)}{12}}\sqrt{\frac{12+10}{10}} = \sqrt{33333.33}\,\sqrt{2.2} = 270.80$$

$$N_f^* = \sqrt{\frac{2\,C_p\,D\,C_m}{C_e(C_m + C_e)}} = \sqrt{\frac{2\,(200)(1000)(12)}{10(12+10)}} = \sqrt{\frac{4800000}{220}} = \sqrt{21818.18} = 147.70$$

$$I^*_{máx} = Q^* - N_f^* = 270.80 - 147.70 = 123.1$$

3.4.3. Modelo de inventario de cantidad de pedidos de producción

En el modelo EOQ la cantidad pedida es recibida en forma instantánea. Este tipo de modelo opera en forma diferente. Se puede aplicar en aquellas fábricas que manufacturan sus productos internamente. Una vez realizado el pedido, comienza la producción con un crecimiento igual a la tasa de producción menos la tasa de demanda y los artículos salen llenando el inventario hasta alcanzar el lote de producción deseado, **después de un tiempo t_p y en ese momento se debe de para la producción, de lo contrario crecería más de lo necesario, después del tiempo t_p el nivel de inventario decrece a una tasa d. Sin embargo, a diferencia del EOQ, al mismo tiempo que se produce, los artículos se demandan y consumen a una tasa constante. Para que subsista el inventario, es necesario que la producción sea mayor a la demanda, de lo contrario se estaría en una situación de faltantes. La figura 3.6 muestra la forma de trabajar de este modelo.**

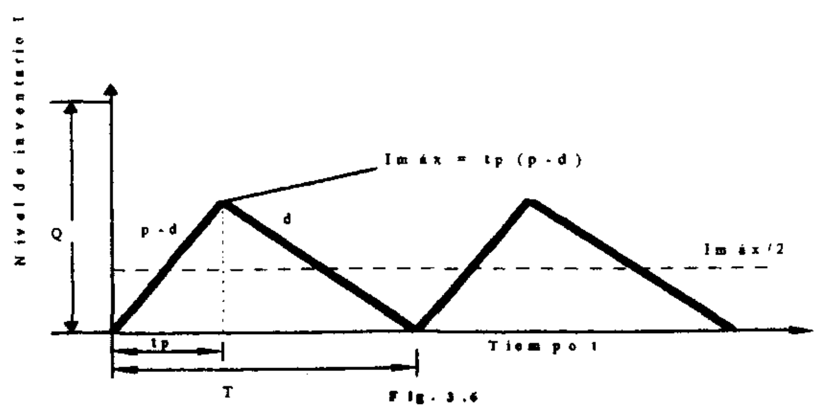


Fig. 3.6

Cabe señalar algo muy importante, durante la producción en un periodo de tiempo t_p los artículos llegan al inventario no en grandes cantidades, debido a que se esta consumiendo *simultáneamente.*

Se definen los siguientes parámetros, también considerados constantes, para la formulación de este modelo.

p = tasa de producción o tasa de reabastecimiento.

d = tasa de demanda.

El costo total del inventario se expresa así:

CTI= costo de pedidos + costo de mantenimiento

Como anteriormente se hizo, hay que analizar cada término de la ecuación CIT:

$$\text{costo de pedido} = C_p \frac{D}{Q}.$$

El costo de mantenimiento se determina de la siguiente forma:

si $t_p = \frac{Q}{P}$ que es el tiempo en que se realiza el lote de producción

y el nivel máximo de inventario es

$I_{máx} = t_p(p - d)$ donde (p - d), es la diferencia entre la oferta y la demanda, y representa la acumulación del inventario por unidad de tiempo.

Entonces el inventario promedio será

$\frac{t_p(p - d)}{2}$ que representa el área del triángulo durante el tiempo de producción como lo muestra *la figura* 3.6

El inventario promedio se expresa en función de Q, de la siguiente manera,

$$t_p \frac{(p-d)}{2} = \frac{Q}{p}\frac{(p-d)}{2} = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

De esta forma, el costo anual de mantenimiento será

$$C_m \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

Por lo tanto,

$$CTI = C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

Para encontrar Q^* se deriva el costo total de inventario con respecto a Q, como sigue

$$\frac{dCTI}{dQ} = \frac{d\left(C_p \frac{D}{Q}\right)}{dQ} + \frac{dC_m\left(\frac{Q}{2}\right)\left(1-\frac{d}{p}\right)}{dQ} = -C_p \frac{D}{Q^2} + \frac{C_m}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right) = 0$$

$$\frac{C_m}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right) = C_p \frac{D}{Q^2} \quad \Rightarrow \quad 2C_pD = C_m\left(1-\frac{d}{p}\right)Q^2 \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{2C_pD}{C_m\left(1-\frac{d}{p}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_m\left(1-\frac{d}{p}\right)}}$$

Haciendo la segunda derivada, se tiene

$$\frac{d^2\,CTI}{dQ} = \frac{d\left(-C_p \dfrac{D}{Q^2}\right)}{dQ} + \frac{d\left(\dfrac{C_m}{2}\right)\left(1-\dfrac{d}{p}\right)}{dQ} = 2C_p \frac{D}{Q^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\,CTI}{dQ} = 2C_p \frac{D}{Q^3}$$

Como $2C_p \dfrac{D}{Q^{*3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q^*$ garantiza el costo mínimo en el CTI.

Ejemplo:

Una máquina fabrica un producto a una velocidad de 2,000 unidades diarias. La demanda anual de 200,000 se genera a una tasa constante durante los 250 días hábiles del año. Los costos de mantener inventarios son de 30% anual y el costo variable de producción por unidad es de \$25. El costo de preparación es de \$500. ¿ Cuál es la cantidad económica de producción ?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,C_p\,D}{C_m\left(1-\dfrac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2\,(500)\,(200000)}{25\left(1-\dfrac{2}{5}\right)}} = 3,651.48$$

3.4.4. Modelo EOQ con descuentos.

El modelo EOQ, como ya se mencionó, no toma en cuenta el factor de descuentos en grandes cantidades (precio de compra). Comprar en grandes cantidades tiene ciertas ventajas y desventajas. Las ventajas que tiene son: tendría pocos agotamientos de existencias, los costos de transportación sería bajos, costos unitarios bajos y costos más bajos en pedidos. Por el lado de las desventajas: la inversión en los inventarios sería mayor, mayores costos relacionados con el inventario, podría caer en la obsolescencia y depreciación de los artículos.

Con mucha frecuencia, los proveedores nos ofrecen descuentos por comprar en cantidades muy grandes, siendo así muy bajo el costo unitario.

Como el costo del artículo está en función volumen del pedido, ahora si se considera en el costo total del inventario (CTI) como a continuación se muestra:

CTI = costo de pedir + costo de mantenimiento + costo de compra

donde

costo de compra = (costo unitario de compra)(demanda) = CD

Entonces el CTI se expresa así:

$$CTI = C_p\left(\frac{D}{Q}\right) + C_m\left(\frac{Q}{2}\right) + CD$$

***Sin embargo, no es posible obtener Q^* debido a que el término costo de compra* de la función anterior no contempla a Q, por lo tanto no aparecería en Q^*.**

En seguida se presentan los pasos a seguir para analizar si al momento de hacer un pedido, éste ayudará en un futuro a disminuir el número de ordenes y como consecuencia reducir los costos; y por el contrario, determinar si una cantidad grande de inventario ocasionaría incrementos en los costos de mantenimiento.

Sea

c = el precio de compra (descuento incluido).

Q_i = cantidad a pedir para el i-ésimo descuento.

Paso 1.- Encontrar Q_i para el último descuento, mediante la expresión

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,C_P\,D}{C_m\,C}}$$

Paso 2.- Si Q_i se encuentra en el intervalo del volumen para que el descuento sea efectivo, ir al paso 5.

Paso 3.- En caso de no ser aceptado Q_i , tome en cuenta el EOQ igual al limite ínfimo del presente descuento, y determine el CTI.

Paso 4.- Ahora considere el siguiente descuento y repita el paso 2.

Paso 5.- Calcular el costo total de inventario.

Paso 6.- El último paso consiste en comparar el costo anterior con los restantes que hayan sido determinados previamente. Los óptimos serán el menor su respectivo EOQ.

Ejemplo:

La compañía de chocolates Vera Chuck and Dave, fabricantes de conejillos rellenos, estima que necesitará 12,000 libras de relleno para el año próximo. El costo del pedido es de $24 por pedido, y el costo de inventario es de $0.30 por libra de relleno por mes. El costo del relleno se en lista a continuación. Encontrar el EOQ y el costo total.

TAMAÑO DEL PEDIDO	COSTO POR LIBRA
1a 299 lbs.	$1.20
300 a 499 lbs.	1.10
500 a 799 lbs.	1.00
800 ó más lbs.	0.90

Último descuento.

$$Q_4 = \sqrt{\frac{2\,C_P\,D}{C_m\,C}} = \sqrt{\frac{2\,(24)\,(12000)}{(0.30)\,(0.40)}} = \sqrt{\frac{576000}{0.27}} = 1,460.59$$

$$CTI = C_p\left(\frac{D}{Q}\right) + C_m\left(\frac{Q}{2}\right) + CD$$

$$= 24\left(\frac{12000}{1460.59}\right) + 0.30\left(\frac{1460.59}{2}\right) + 0.90\,(12000)$$

$$= 197.18 + 219.08 + 10800 = 11,216.26$$

Tercer descuento.

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2\,(24)\,(12000)}{(0.30)\,(1)}} = 1,385.64 \quad Q_3 = \sqrt{\frac{2\,(24)\,(12000)}{(0.30)\,(1)}} = 1,385.64$$

Como Q_3 no se encuentra $Q_3 = 500$

$$CTI = 24\left(\frac{12000}{500}\right) + 0.30\left(\frac{500}{2}\right) + 12000$$

$$= 576 + 75 + 12000 = 12,651$$

Segundo descuento.

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\,(24)\,12000)}{(0.30)\,(1.10)}} = \sqrt{\frac{576000}{0.33}} = 1,321.15$$

Como Q_2 no se encuentra en el intervalo $Q_2 = 300$

$$CTI = 24\left(\frac{12000}{300}\right) + 0.30\left(\frac{300}{2}\right) + 1.10\,(12000)$$

$$= 960 + 45 + 13200 = 14,205$$

Primer descuento.

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\,(24)\,(12000)}{(0.30)\,(1.20)}} = \sqrt{\frac{576000}{0.36}} = 1,264.91$$

Ya que Q_1 no se encuentra en el intervalo $Q_1 = 1$

$$CTI = 24\left(\frac{12000}{1}\right) + 0.30\left(\frac{1}{2}\right) + 1.20\,(12000)$$

$$= 288000 + 0.15 + 14400 = 302,400.15$$

Por lo tanto se elige el cuarto descuento.

3.5. Modelos estocásticos de inventario

En los modelos determinísticos de inventarios, dado que tienen una demanda fija conocida, no es necesario mantener artículos de reserva para afrontar los pedidos inesperados, por ende, el tiempo de anticipación es constante. Sin embargo, el administrador financiero, frecuentemente no tiene conocimiento de los cambios que se pueda tener la demanda y el tiempo de adelanto, de ser así, se estaría en problemas de inventarios con incertidumbre. Desgraciadamente los modelos determinísticos ya analizados anteriormente, no son muy aplicables en la realidad. Por lo tanto, el objetivo es determinar niveles de inventario que sean capaces de satisfacer la demanda que pudiera surgir inesperadamente. Esto es muy probable que ocurra cuando el volumen de inventario es bajo por lo que se estaría en el dilema de que los artículos se terminen antes de recibir el pedido solicitado.

Se analizará el modelo cantidad económica de pedido con demanda y tiempo de anticipación incierta, para el caso pedidos atrasados y ordenes perdidas pospuestas.

3.5.1. Cantidad económica de pedido con demanda y tiempo de anticipación incierto: caso pedidos atrasados

En el caso de pedidos atrasados la demanda se satisface, aún aquellos pedidos pendientes, es decir, las ventas no se pierden.

En el modelo EOQ analizado, la cantidad de pedido (Q^*) y el punto de reorden (R) se pueden determinar de manera independiente. Esto no sucede en los modelos probabilísticos de inventario como se demostrará posteriormente. También en estos modelos se debe determinar la cantidad óptima de pedido (Q^*) y el punto de reorden (R) los cuales minimizarán los costos en que incurren los inventarios. Solo que en estos modelos, debido a que ahora se involucra la incertidumbre, todos los costos y la demanda serán esperadas o estimadas. Entonces el costo esperado total de inventario se representa de la siguiente manera:

$$CET = \begin{pmatrix} \text{costo esperado} \\ \text{de carencias} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{costo esperado} \\ \text{de pedido} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{costo esperado de} \\ \text{almacenami ento} \end{pmatrix}$$

Es Importante señalar, que debido a que se estará en una situación de incertidumbre, la demanda y el tiempo de anticipación serán consideradas como variables aleatorias. Por lo tanto, a continuación, se mencionan algunos conceptos estadísticos:

Frecuencia de clase.- Cuando se dispone de un gran número de datos, es útil el distribuirlos en clases o categorías y determinar el número de individuos pertenecientes a cada clase, que es la frecuencia de clase.

Frecuencia relativa.- Es el cociente de la frecuencia absoluta con respecto al número combinado de observaciones totales, n, o sea,

$$\frac{f_a}{n}$$

Variable aleatoria.- Cuando los posibles resultados de un evento suceden dentro de lo que se llama espacio muestral y asumen distintos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ y además se les asigna una probabilidad de ocurrencia, se tiene una función cuyo dominio son los valores de la variable y el contradominio son sus probabilidades de ocurrencia. A esto se le define como variable aleatoria. Las variables aleatorias o azarosas tienen dos clasificaciones: discretas y continuas.

Variable aleatoria discreta.- Una función es de variable aleatoria discreta si entre los distintos valores que asume, existe una distancia definida entre un valor cualquiera posible y su subsecuente; y todos estos valores pueden ser contados. Por ejemplo: el número de hijos varones en una familia con tres hijos.

Variable aleatoria continua.- Se dice que una función es de variable aleatoria continua si en el intervalo comprendido entre dos valores cualesquiera de la variable, esta puede asumir infinito número de valores además de que se pueden medir. Por ejemplo, la estatura de un alumno, la edad de una persona, el tiempo, etc.

Distribución de probabilidad.- Las probabilidades que se asocian a cada uno de los valores que toma la variable aleatoria (X) constituyen lo que se conoce como distribución de probabilidad. Lo que en estadística descriptiva se representa como distribución de frecuencias para los valores observados de la variable, la cual consiste en representar, a manera de una función, en el plano cartesiano; la variable aleatoria X y sus valores que asume, en el eje horizontal y la probabilidad de ocurrencia asociada para cada uno de ellos en el eje vertical.

Para una variable discreta: la probabilidad para todo valor que asuma la variable aleatoria x_i, será mayor o igual a cero. La suma de todas las probabilidades asociadas a todos los valores que toma la variable aleatoria X, es igual a uno, es decir:

$$P(x_i) \geq 0 \quad \forall \; x_i$$

$$\sum_{1}^{n} P(x_i) = 1$$

Por otro lado, para una variable aleatoria continua: la probabilidad para todo valor que asuma la variable aleatoria X también será mayor o igual a cero. La masa probabilística es igual a uno.

$$P(x_i) \geq 0 \quad \forall \; x_i$$

$$\int_{\infty}^{\infty} P(x_i)\, dx = 1$$

Dado que en esta sección se analizan los modelos de inventario con demanda probabilística, en algunos de ellos se utilizará la distribución normal para representar la demanda, ya que se ha demostrado su confiabilidad para estimar la demanda .

Distribución normal continua.- La distribución normal, curva o campana de Gauss o curva normal lógica de probabilidades es considerada como el modelo teórico de probabilidad más importante y es comúnmente empleada en el análisis estadístico ya que existe una gran cantidad de fenómenos continuos de tipo económico y de cualquier otro tipo que se pueden expresar con ella; sirviendo de base tanto para la descripción como para la inferencia.

La distribución normal tiene las siguientes características:

1.- Es unimodal ya que sólo tiene un valor máximo en el que coincide la media, la mediana y la moda.

2.- Es simétrica con respecto a la media aritmética.

3.- Se aproxima asintóticamente al eje de las abscisas.

4.- El número de valores que toma la variable aleatoria X es infinita.

5.- Esta determinada por dos parámetros: la media y la desviación estándar.

6.- El área bajo la curva se considera igual a uno.
7.- El área comprendida bajo la curva entre dos valores de la variable aleatoria X, es igual a la probabilidad de que dicha variable asuma cualquier valor dentro de ellos.

8.- El área bajo la curva comprendida entre la media y cualquier valor de la variable aleatoria se expresa en función del número de desviaciones estándar que dicho valor diste de la media aritmética.

Como existen tantas formas de distribución de probabilidad de tipo normal, se hace dificultosos el cálculo de la integral correspondiente a cada una de ellas. Para resolver este problema es posible reducir todas las curvas normales a una curva normal estándar cuya media vale cero y cuya desviación estándar vale uno. De esta manera a cualquier valor de la variable aleatoria X de la curva normal cualquiera le corresponde un determinado valor z_i de la curva normal estándar cuya variable aleatoria se denomina Z.

$$x_i = \mu + z_i \sigma \qquad \Rightarrow \qquad z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Esperanza matemática.- Las funciones de distribución de probabilidad de una variable aleatoria están determinadas una de otra por ciertas magnitudes llamadas momentos de la distribución. Los momentos que diferencian en términos más generales dos distribuciones, son la esperanza matemática o también conocida como la media aritmética como medidas de centralización y la desviación estándar, como principal medida de dispersión. A continuación presento sus fórmulas:

a) **La media aritmética para funciones de variables discreta, se calcula con la fórmula**

$$\mu = E(X) = \sum_{i}^{n} x_i \, p(x_i)$$

b) la varianza para funciones de variable discreta se calcula con

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \sum_{i}^{n} (x_i - \mu)\, p(x_i)$$

Se analiza cada componente de la ecuación del costo esperado total de inventario.

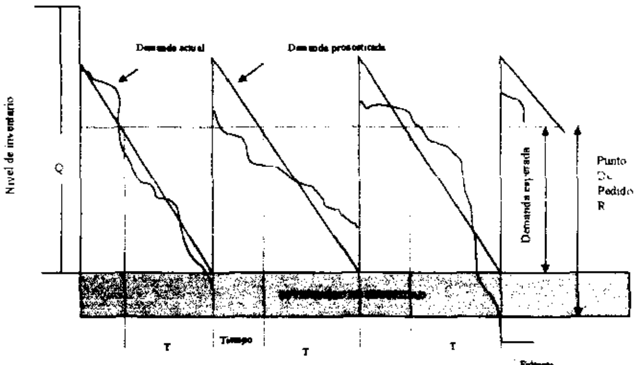


Fig 3.5.1

Costo esperado de almacenamiento.- Este costo es determinado por el costo de mantenimiento unitario por el promedio de artículos en el inventario. El inventario promedio tiene un componente más que es el inventario de seguridad. Esto se ve en la figura 3.5.1. Entonces el inventario promedio se expresa:

$$\frac{Q}{2} + \text{inventario de seguridad}$$

Sin embargo, se representa el inventario promedio en función de R, debido a que el inventario de seguridad es la diferencia del punto de pedido (R) y la demanda esperada durante el tiempo de anticipación, entonces el inventario promedio se puede representar así:

$$\frac{Q}{2} + R - E(X)$$

donde,

X = variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de entrega.

La expresión que representa el costo esperado de mantenimiento es:

$$C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(X)\right)$$

Costo esperado por carencias.- Representa el número esperado de artículos demandados pero que no se encuentran en existencia durante el tiempo de entrega, y se multiplica por el costo unitario de escasez. Si se representa a F_r como la variable aleatoria que expresa el número de faltantes o pedidos rezagados durante el tiempo de anticipación cuando el punto de reorden es R.

La expresión del costo anual esperado por carencias es:

$$\left(\frac{\text{costo espera por faltantes}}{\text{periodo}}\right)\left(\frac{\text{periodos esperados}}{\text{año}}\right)$$

Entonces,

$$\frac{\text{costo esperado por faltantes}}{\text{periodo}} = C_f\, E(F_r)$$

Donde,

C_f = costo incurrido por cada unidad faltante.

Si se supone que toda la demanda será satisfecha, el número de periodos de tiempo de entrega por un año se determina al dividir la demanda anual esperada entre la cantidad pedida

$$\frac{E(D)}{Q}$$

Por lo tanto,

$$\text{Costo esperado por faltantes} = \frac{C_f\, E(F_r)\, E(D)}{Q}$$

Costo esperado de pedido.- Se determina por el costo de colocar un pedido (C_p) multiplicado por el número de pedidos colocados por año. Pero como ya se mencionó, se trabajará bajo incertidumbre, entonces, la demanda es esperada E(D), por lo que el número de pedidos será

$$\frac{E(D)}{Q}$$

entonces,

$$\text{costo de pedir} = C_p \frac{E(D)}{Q}$$

La expresión del costo esperado total será

$$CTE(Q,R) = C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(X)\right) + \frac{C_f\, E(F_r)\, E(D)}{Q} + C_p \frac{E(D)}{Q}$$

Como lo muestra la expresión anterior, el costo total esperado esta en función de Q y R. Anteriormente se señaló que Q y R no se determinarían independientemente, por lo que se tiene que encontrar una combinación óptima la cual minimizará el costo total esperado. Se puede solucionar esto de dos formas, primero encontrando la solución por ensayo y error, y enseguida por un modelo matemático que también involucra ensayo y error, ya que como se verá Q y R interactúan entre sí.

3.5.2. Método ensayo y error

A continuación se presentan los pasos a seguir que conforman este método.

1. **Distribución de la demanda.**- Construir una distribución de frecuencia absoluta, además de una distribución de la frecuencia relativa de la demanda diaria de ítem.

2. **Distribución del tiempo de entrega.**- De la misma forma en la que se determinó la distribución de la demanda, se tiene que construir la distribución de frecuencia absoluta y la distribución de frecuencia relativa del tiempo de anticipación, identificando el número de días que tarda en llegar el pedido una vez solicitado.

3. **Distribución de la demanda durante el tiempo de entrega.**- Esta distribución se obtiene mediante la distribución de la demanda y la distribución del tiempo de entrega. Construyendo un árbol de probabilidades que combine todos los eventos posibles.

4. **Estimación del número de faltantes.**- $E(F_r)$ representa el número esperado de faltantes por pedido.

$$E(F_r) = \sum_{x>R}^{\infty}(x-R)P(x).$$

Donde:

$P(x)$ es la probabilidad de la demanda durante el tiempo de anticipación para un punto R de pedido específico.

$(x - R)$ es el número de artículos que no están en existencia después de ocurrir esta demanda. Además con la condición de que $x>R$.

5. **Encontrar Q^* y R^*.**- Por último se encontrará la pareja Q^* y R^* que minimizara el costo total esperado, utilizando las fórmulas ya conocidas.

$$Q = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_m}}$$

3.5.3. Modelo para determinar Q^* y R^*

Para encontrar Q^* y R^*, se debe auxiliar del cálculo diferencial.

Se tiene que,

$$CTE\,(Q,R) = C_m \left(\frac{Q}{2} + R - E\,(x) \right) + \frac{C_f\,E\,(F_r)\,E\,(D)}{Q} + C_p\,\frac{E(D)}{Q} + C\,E(D)$$

Derivando CTE (Q,R) con respecto a Q y posteriormente respecto a R, utilizando derivadas parciales, se tiene:

$$\frac{\partial\,CTE}{\partial\,Q}(Q,R) = \frac{d\,C_m \left(\frac{Q}{2} + R - E\,(X) \right)}{d\,Q} + \frac{d\,\frac{C_f\,E\,(F_r)\,(ED)}{Q}}{d\,Q} + \frac{d\,C_P\,\frac{E(D)}{Q}}{d\,Q}$$

$$= \frac{C_m}{2} - \frac{C_f\,E\,(F_r)\,E\,(D)}{Q^2} - \frac{C_P\,E\,(D)}{Q^2}$$

Ahora igualando a cero, se obtiene

$$\frac{\partial CTE}{\partial Q}(Q,R) = \frac{C_m}{2} - \frac{C_f\,E\,(F_r)\,E\,(D)}{Q^2} - \frac{C_P\,E\,(D)}{Q^2} = 0$$

Por lo tanto

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,E\,(D)\,(C_P + C_f\,E(F_r))}{C_m}}$$

Derivando respecto a R la siguiente expresión, se tiene

$$CTE(Q,R) = C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(x)\right) + \frac{C_F\, E(F_r)E(D)}{Q} + C_P\,\frac{E(D)}{Q}$$

$$\frac{\partial CTE(Q,R)}{\partial R} = \frac{d\, C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(x)\right)}{dr} + \frac{d(C_f\, E(F_r)E(D))}{dR} + \frac{d\, C_p\,\frac{E(D)}{Q}}{dR}$$

$$= C_m + \frac{C_f\, E(D)}{Q}\,\frac{dE(F_r)}{dR}$$

$$E(F_r) = \sum_{x>R}^{\infty}(x-R)p(x) = \sum_{x=R+1}^{\infty}(x-R)p(x)$$

$$= C_m + \frac{C_f\, E(D)}{Q}\;\frac{d\left(\sum_{x=R+1}^{\infty}(x-R)p(x)\right)}{dR}$$

$$= C_m + \frac{C_f\, E(D)}{Q}\left((-1)\sum_{x=R+1}^{\infty} p(x)\right)$$

$$= C_m - \frac{C_f\, E(D)}{Q}(p(F_r)) = 0$$

$$P(F_r) = \frac{Q\, C_m}{C_f\, E(D)}$$

Ejemplo:

Determinar una política óptima de inventarios, que consista en obtener el lote económico de tamaño (Q) y un punto de pedido (R), mediante la siguiente información

Costo de pedir: $ 15.00 por pedido,
Costo de mantenimiento: $ 2.00 por unidad,
Costo de faltantes: $15.00 por unidad.

Supóngase 250 días laborables del año.

Distribución de probabilidad de la demanda diaria.

Demanda por día	Probabilidad
1	0.4
2	0.6

Distribución de probabilidad del tiempo de anticipación.

Tiempo de anticipación	Probabilidad
1	0.3
2	0.7

$$\text{Costo esperado de almacenamiento} = C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(X)\right) = 2\left(\frac{Q}{2} + R - E(X)\right)$$

$$\text{Costo esperado de pedido} = C_p \frac{E(D)}{Q} = 15 \frac{E(D)}{Q}$$

La demanda esperada diaria se obtiene usando los datos de la tabla de distribución de la demanda diaria de la siguiente forma:

$$E(D) = \sum_{i}^{n} d_i \, p(d_i) = \sum_{i=1}^{2} d_i \, p(d_i) = 1(0.4) + 2(0.6) = 1.6$$

Ahora multiplicando 1.6 por 250, se obtiene:

E(D) = 400.

Entonces el costo anual de pedir es:

$$\text{Costo de pedir por año} = 15\,\frac{400}{Q}$$

El costo esperado por carencias se representa así:

$$\frac{C_f\ E(F_r)\,E(D)}{Q} = \frac{15\ E(F_r)\,400}{Q}$$

Por lo tanto el costo esperado total de inventario (CTE) será:

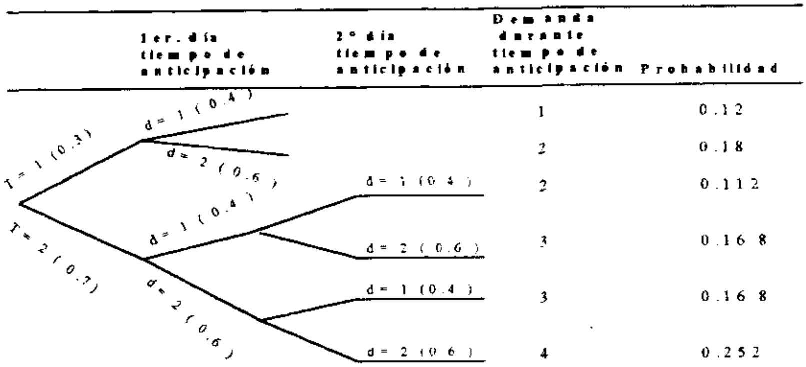
$$CTE\,(Q,R) = 2\left(\frac{Q}{2} + R - E(X)\right) + 15\left(\frac{400}{Q}\right) + \left(\frac{15\,E(F_r)\,400}{Q}\right)$$

Mediante el método de ensayo y error se determinará a continuación la combinación de Q y R que minimicen el costo esperado total.

Dado que en este ejemplo ya se cuenta con la distribución de la demanda y la distribución del tiempo de anticipación, se comenzará en el paso 3.

Paso 3.- Determinación de la distribución de la demanda durante el tiempo de anticipación.

Elaborando el árbol de probabilidades para mostrar todos los tiempos de anticipación posibles se tiene:



Ahora es posible construir la distribución de probabilidad de la demanda durante el tiempo de anticipación, recordando que X es la variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de anticipación, como lo muestra la siguiente tabla:

Distribución de la demanda durante el tiempo de anticipación.

X	P(X)	P(S) Probabilidad de un faltante para un punto de pedido dado.
1	0.12	0.88
2	0.292	0.588
3	0.336	0.252
4	0.252	0.000
	1.000	

Entonces la demanda esperada durante el tiempo de anticipación E(X) es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i) = 1(0.12) + 2(0.292) + 3(0.336) + 4(0.252) = 2.72$$

Paso 4.- Este paso consiste en determinar el número esperado de faltantes, E(S) para cada punto posible de pedido R. Se analizarán todos los puntos posibles de pedido de uno a cuatro.

El número esperado de unidades faltantes se determina con la siguiente ecuación:

$$E(F_r) = \sum_{x>R}^{\infty} (x - R) P(x).$$

Cálculos del número esperado de unidades faltantes para cada R.

R	(X-R)	P(X)	(X-R) * P(X)
1	(4-1)	0.252	0.756
	(3-1)	0.336	0.672
	(2-1)	0.292	0.292
			E(S) = 1.72
2	(4-2)	0.252	0.504
	(3-2)	0.336	0.336
			E(S) = 0.84
3	(4-3)	0.252	0.252
			E(S) = 0.252
4	(4-4)	0.252	0.000
			E(S) = 0.000

Paso 5.- En este paso se determina Q^* y R^* que son las únicas cantidades que quedan por determinar:

$$CTE(Q,R) = 2\left(\frac{Q}{2} + R - 1.72\right) + 15\frac{400}{Q} + \frac{15\,E(F_r)\,400}{Q}$$

Para encontrar una pareja Q, R que ayudará a obtener el costo esperado total mínimo, se debe ensayar las diferentes combinaciones de esta pareja. Para obtener un valor de Q que sirva como punto de partida, se puede hacer mediante la siguiente expresión:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_p D}{C_m}}$$

Determinación de Q y R óptimos

Q	R	CTE	Costo de almacenamiento = 2(Q/2 + R - 1.72)	Costo de pedir = 15 (400/Q)	Costo por carencias = 15 E(F_r) 400 / Q
77	4	$ 159.48	$ 81.56	$ 77.92	$ 0.00
	3	177.11	79.56		19.63
	2	201.29	77.56		45.81
	1	222.05	75.56		68.57
79	4	159.51	83.56	75.95	0.00
	3	176.64	81.56		19.13
	2	200.16	79.56		44.65
	1	220.34	77.56		66.83
81	4	159.63	85.56	74.07	0.00
	3	176.3	83.56		18.67
	2	199.18	81.56		43.55
	1	218.18	79.56		65.18
83	4	159.85	87.56	72.29	0.00
	3	176.07	85.56		18.22
	2	198.36	83.56		42.51
	1	217.46	81.56		63.61

Por lo tanto, la cantidad óptima a pedir es $Q^* = 77$, el punto de reorden $R^* = 4$ y el Costo Total Esperado del inventarios será CTE= 159.48, que representa el costo mínimo total.

Ahora bien, se debe aplicar las fórmulas que fueron desarrolladas en la sección 3.5.2 para determinar Q^* y R^* que son:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2E(D)(E(F_r)C_f + C_p)}{C_m}} \qquad \text{y} \qquad P(F_r) = \frac{Q\,C_m}{C_f\,E(D)}$$

Como se observa en estas dos últimas fórmulas no se puede encontrar una solución de forma independiente. Por consiguiente, se debe resolver aplicando un método de ensayo y error.

El primer paso consiste en utilizar la ecuación:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2E(D)(E(F_r)C_f + C_p)}{C_m}}$$

y suponiendo $E(F_r) = 0$, para llegar al siguiente resultado:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2E(D)(E(F_r)C_f + C_p)}{C_m}} = \sqrt{\frac{2(400)15}{2}} = 77.46$$

En el siguiente paso se remplaza $Q^* = 77.46$ en la siguiente ecuación:

$$P(F_r) = \frac{Q\,C_m}{C_f\,E(D)}$$

con lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$P(F_r)^* = \frac{77.46\,(2)}{15(400)} = \frac{154.92}{6000} = 0.0258$$

En el tercer paso se utiliza la tabla de la distribución de probabilidad de la demanda durante el tiempo de anticipación para encontrar el R que resulta más próximo a $P(F_r) = 0.0258$. Este resultado se encuentra entre R=3 ($P(F_r) = 0.252$) y R=4 ($P(F_r) = 0.000$). Por lo tanto el valor más cercano es R=4.

En el siguiente paso, se utiliza el valor $P(F_r) = 0.00$ correspondiente a R=4, para determinar el Q^* actualizado, obteniendo:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(400)[(0)15 + 15]}{2}} = \sqrt{\frac{2(400)(15)}{2}} = = 77.46$$

Por último, se reemplaza el valor de Q^* actualizado en la ecuación de $P(F_r)$, llegando al siguiente resultado:

$$P(F_r)^* = \frac{77.46\ (2)}{15(400)} = \frac{154.92}{6000} = 0.0258$$

Como se observa, R^* sigue manteniendo el valor 4. Concluyendo que para obtener el mínimo costo de inventario, se debe tener $Q^* = 77$ y $R^* = 4$. Estos pasos se siguen hasta que la solución llegue a una estabilización.

3.5.4. Modelo para determinar Q^* y R^* cuando se pierden las ventas

Ahora suponiendo que toda la escasez nos ocasiona pérdidas, es decir, los pedidos pendientes se pierden. Entonces la demanda esperada se reduce por el número de pedidos en el periodo, es decir,

$$\frac{E(D)E(F_r)}{Q}$$

Considerando que al inventario promedio se le tiene que agregar el término $E(F_r)$, debido a que cuando llega el pedido Q, no se le resta al inventario que se mantenía, porque los pedidos pospuestos se pierden, entonces el número esperado de faltantes es cubierto pero no vendido.

Entonces, se expresa el costo esperado total como:

$$CET(Q,R) = C_m\left(\frac{Q}{2} + R - E(x) + E(F_r)\right) + \frac{C_f\ E(F_r)E(D)}{Q} + C_p\frac{E(D)}{Q} + \left[CE(D) - \frac{E(D)}{Q}E(F_r)\right]$$

$$= C_m\left(\frac{Q}{2} - R - E(x) + E(F_r)\right) + \frac{E(D)}{Q}\left(C_f E(F_r) + C_p\right) + \left[E(D) - \frac{E(D)}{Q}E(F_r)\right]$$

3.5.5. Modelos de periodo único

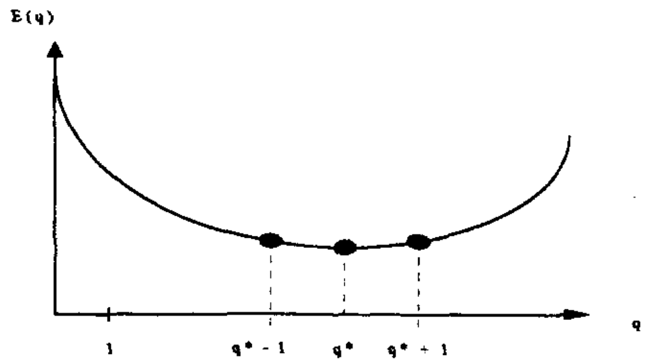
En estos modelos, también se debe determinar el valor de la variable q y el valor d que toma la variable aleatoria D que representa la demanda. Una vez conocidos estos valores se encuentra un costo c(d,q), el cual debe ser minimizado eligiendo un q. Se dice que es de periodo único, porque sólo se tiene una oportunidad para ordenar. El periodo puede ser de un día, una hora, etc.

Para entender este tipo de modelos, primero se examina el Análisis Marginal o Análisis incremental. Suponiendo D una variable aleatoria discreta, en la que P(D = d) = p(d) y nombrando E(q) al costo esperado si se elige q, esto es:

$$E(q) = \sum_{d} p(d)\, c(d,q).$$

Por otro lado, la gráfica de una función convexa es como lo muestra la figura 3.5.4.1.:

FIG. 3.5.4.1. REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION CONVEXA E(q).



En la práctica, generalmente E(q) representa una función convexa de q. Suponiendo que q^* minimiza el costo esperado E(q) como se ve en la figura anterior. Entonces es claro que:

$$E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0$$

Donde el miembro izquierdo de la desigualdad representa la variación en el costo esperado como resultado de incrementar una unidad a q, ya que $E(q^*)$ es una función convexa. Se puede determinar el valor q que minimice el costo esperado y que satisface la desigualdad anterior.

Analizando el comportamiento de E(q) al tomar valores de $q < q^*$ de la gráfica anterior. Si q=0 y q=1 y la desigualdad es de la siguiente forma para ambos valores respectivamente:

$$E(1) - E(0) \leq 0$$
$$E(2) - E(1) \leq 0$$

Se dice que el costo esperado disminuye al aumentar q en una unidad. Esto sucede hasta que aumenta q^* a q^*+1, es decir, si es aumentado q^* en una unidad, a partir de este punto el costo esperado se incrementará. Entonces en forma general, la diferencia entre los costos esperados es mayor o igual a cero para todos aquellos valores de q mayores o iguales a q^*, es decir:

$$E(q+1) - E(q) \geq 0 \quad \forall \ q \geq q^*$$

Por lo tanto q^* es el valor que toma q, el cual garantiza el mínimo valor que asume E(q).

En la literatura relativa a los sistemas de inventarios, existe un problema llamado: "el problema del voceador" o "el problema del vendedor de periódicos".

3.5.5.1. Problema del vendedor de periódicos

Este tipo de problemas generalmente tienen la siguiente secuencia:

i) La compañía toma la decisión de cuantas unidades pedir, donde q representa las unidades solicitadas,
ii) La demanda d tiene una probabilidad p(d). Dado que se está en el caso de

demanda discreta, los valores de d son mayores o iguales a cero, con una variable aleatoria D que representa la demanda,

iii) Y por último un costo c(d,q) que esta en función de d y q.

El problema del vendedor de periódicos consiste en lo siguiente: sea un voceador ubicado en una esquina esperando a que el camión repartidor de periódicos le deje el número de periódicos que él solicite. El camión sólo reparte una vez, por consiguiente el voceados sólo pide en una ocasión ya sea al día o a cada hora según la unidad de tiempo que se establezca. Es obvio que el voceador debe pagar por los periódicos recibidos; si le quedan algunos al final del periodo, no representan ningún valor. Si la demanda fue mayor a lo que pidió tendrá que disculparse con sus clientes. Entonces el voceador se hace la pregunta de ¿Cuántos periódicos debe comprar?

En este problema es posible utilizar el concepto de análisis marginal de la siguiente manera: en lugar de determinar el número de unidades que debe solicitar el voceados en una exhibición, se deben tomar las decisiones en forma sucesiva, con las alternativas de comprar o no comprar. Entonces, se inicia determinando si el primer periódico debe comprarse. En caso de aceptar la compra, se determina si el segundo periódico debe comprarse. Si se acepta la compra, se analiza si el tercer periódico debe comprarse, así hasta que la respuesta sea no, es decir, no comprar el i-ésimo periódico sino hasta el i-1 periódico. Pero para evitarse todos esos pasos, existe una manera más sencilla de determinar la cantidad óptima a pedir.

Como se ha visto, existen dos tipos de costos o pérdidas que resultan del valor q:

$c(d,q) = hq$ donde $(d<=q)$ ....(1)
$c(d,q) = -uq$ donde $(d>=q+1)$.............(2)

La ecuación (1) representa la situación en la que se pide una cantidad q que es mayor o igual a la demanda , es decir, se esta sobreabastecido. El factor h, representa el costo unitario por comprar en exceso. La ecuación (2) indica el caso contrario, la cantidad q+1 que pedimos resulto ser menor o igual a la demanda, por consiguiente, se esta en una situación de subabastecimiento o existe un déficit en las existencias.

Al aplicar el análisis marginal para encontrar la cantidad óptima de pedido se tiene como objetivo determinar el valor q^* el cual minimiza el costo esperado E(q). Supóngase a E(q) como una función convexa de q.

Tomando en cuenta la ecuación

$$E(q^{*}+1)-E(q^{*}) \geq 0$$

se identifican dos casos:

Primer caso (d< =q).- En este caso como ya se mencionó, se presenta un sobreabastecimiento donde P(D< =q) indica la probabilidad de que la cantidad pedida sea mayor o igual a la demanda, representada por la variable aleatoria D.

Segundo caso (d>=q+1).- Representa el caso de tener un déficit en las existencias, o sea , se queda corto ante la demanda. Su probabilidad es P(D>=q+1)=1- P(D<=q).

$$E(q+1)-E(q)=h[P(D \leq q)]-u[1-P(D \leq q)]=(h+u)P(D \leq q)-u$$

Entonces para que se cumpla E(q+1) - E(q) >= 0 se debe satisfacer:

$$(h+u)P(D \leq q)-u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad P(D \leq q) \geq \frac{u}{n+u}$$

Para ilustrar este modelo, resuélvase el siguiente problema:

Supóngase que la compañía Mercedes Benz desea determinar en agosto de 1999, cuántos modelos 2000 debe pedir. El costo de pedido por automóvil en agosto de 1999 es de 10, 000 dólares. El cuadro 1 se presenta la distribución de probabilidad de la demanda para los automóviles. Cada automóvil se vende a un costo de 16, 000 dólares. Si la demanda es menor a lo pedido, la empresa se puede deshacer de los automóviles a un precio de 8, 000 dólares cada uno. La pregunta es ¿ La Mercedes Benz cuantos automóviles modelo 2000 debe pedir en agosto de 1999?

Cuadro 1. Distribución de la probabilidad de la demanda	
Demanda de automóviles	**Probabilidad**
19	.30
24	.15
29	.15
34	.20
39	.20
	1.00

q = número de automóviles modelo 2000 que se deben pedir.
d = número de automóviles 2000 demandados.

Si $d \geq q+1$

Cálculo del costo total si $d \geq q+1$

Compra de q automóviles a $ 10, 000 por unidad, el costo es 10000q.
La venta de los autos es de $ 16, 000 por unidad, por lo que el costo es de -16000q.
Entonces el costo total será: -6000q.

$$-C_u = -6000 \quad \Rightarrow \quad C_u = 6000$$

Si $d \leq q$

Cálculo del costo total si $d \leq q$

Compra de q automóviles a $ 10, 000 por unidad, el costo es de 10000q.
Venta de d automóviles a $ 16, 000 por unidad, el costo es de -16000d.
La devolución de (q-d) automóviles a $ 8, 000 por unidad, tendrá un costo de -8000(q-d).
Entonces el costo total se representa por la siguiente expresión: 2000q - 24000d. Por lo que

$$C_h = 2000$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{C_u}{C_h + C_u} = \frac{6000}{2000+6000} = \frac{2}{3} = 0.75 \qquad \Rightarrow \qquad P(D \leq q^{*}) \geq \frac{2}{3}$$

$P(D \le 19) = 0.30$, $P(D \le 24) = 0.45$, $P(D \le 29) = 0.60$, $P(D \le 34) = 0.80$.

Entonces como $P(D \le 34)$ es mayor o igual que $\frac{2}{3}$ $\therefore$ $q^* = 200$.

3.5.5.2. Modelo de revisión continua

En los modelos determinísticos de inventario, se analizó que es posible conocer la demanda exacta de forma tal, que conocida la cantidad de pedido Q^* se conoce el día exacto en el que se debe hacer el pedido. Sin embargo, en los sistemas de inventario con demanda probabilística, no es posible conocer con certeza la demanda, sólo se puede pronosticar. Debido a esto, se utiliza un sistema de inventarios, con el cual es posible conocer cuando ordenar un pedido.

Se Analizarán dos sistemas de inventario, según el tiempo en el que se observe el nivel del inventario. A saber son:

1.- Modelo de revisión continua, y
2.- Modelo de revisión periódica.

En esta sección se examina el Modelo de Revisión Continua y el segundo en la siguiente sección.

Al hablar de un modelo con revisión continua, se refiere, a revisar los niveles de inventario en forma continua, en otras palabras, evaluar el nivel del inventario en cualquier momento y una vez que el nivel llega al punto de hacer un pedido, se ordenan Q^* unidades. Un ejemplo sencillo para ilustrar este modelo, es el medidor de combustible de un avión. En cualquier momento es posible conocer el nivel de combustible con sólo mirarlo.

Conocer la distribución de la demanda en la realidad, puede ser muy difícil. Para solucionar este problema se puede emplear el modelo EOQ, sólo que con una demanda probabilística. Esto es, determinando un promedio de la demanda durante un periodo de tiempo; y sustituyéndola por la demanda determinística del modelo EOQ.

Pero existe un riesgo de que durante el tiempo de anticipación la cantidad de inventario que existe fuera superada por la demanda, con lo que se hablaría de escasez. Además el tiempo que toma al nivel de inventario llegar al punto de ordenar esta en función de la demanda probabilística, lo que ocasiona que el tiempo entre pedidos varíe. Para disminuir este riesgo de regular el déficit, se analiza el concepto de Nivel de Seguridad.

3.5.5.3. Nivel de seguridad

Para resolver el problema del déficit, se puede utilizar el Nivel de Servicio (α) que es un número que representa la probabilidad de satisfacer la demanda durante el tiempo de anticipación, en caso de tener una demanda probabilística. El nivel de servicio se denota de la siguiente forma:

$$\text{Nivel de servicio } \alpha = \text{P(demanda durante el tiempo de anticipación} \leq \text{R)}$$

Se Introduce un nuevo concepto: existencias de seguridad (S), que representa un inventario complementario para cubrir cambios que pudiera sufrir la demanda en el transcurso del tiempo de anticipación.

Conociendo el número de unidades como seguridad (S) junto con R, hay que determinar:

$$\text{P(demanda durante el tiempo de anticipación} \leq \text{R} + \text{S}) \geq \alpha$$

Aunque esta presente la existencia de seguridad, se debe que encontrar la cantidad mínima de esta, ya que si (S) es muy grande, los costos de mantener el inventario se elevarían mucho. Se ha demostrado que el uso de la distribución normal de probabilidades confiable para estimar la demanda.

Debido a que será utilizada la distribución normal, se deben identificar sus parámetros:

μ_T = R, promedio de la demanda durante el tiempo de anticipación T.
σ_T = desviación estándar de la demanda durante el tiempo de anticipación T.

Donde μ_T y σ_T son calculados de la siguiente forma:

$$\mu_T = D * T \qquad \text{y} \qquad \sigma_T = \sigma * \sqrt{T}$$

Se presenta el siguiente problema:

Una tienda de computadoras cada año presenta un promedio en ventas de 1800 cajas de disquetes. Se estima una desviación estándar de 100 cajas de esta demanda anualmente, previo análisis estadístico. El pedido se ejecuta cada semana. El costo por cada pedido es de \$ 50.00 y el costo de almacenamiento es de \$ 10.00. El costo por escasez es de \$ 20.00. Suponga que la demanda anual se distribuye normalmente. Donde el nivel de servicio es del 95%.

$$\mu_T = R = D' * T = 1800 * \left(\frac{1}{52}\right) = 34.61$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 * T \quad \Rightarrow \quad \sigma_T = \sigma * \sqrt{T} = 100 * \sqrt{\frac{1}{52}} = 13.87$$

P(demanda durante el tiempo de anticipación $\leq R + S) = c$

$$z = \frac{(R+S) - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{R + S - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{S}{\sigma_T} \quad \Rightarrow \quad S = z * \sigma_T$$

S =1.645 * 13.87 = 22.81.

Para calcular Q^* y R del modelo EOQ, se sustituye la demanda determinística por la demanda promedio (1800). Con lo que Q^* = 134.16 y R = 34.61. Entonces, la tienda de computadoras deberá pedir 134 cajas de disquetes, cuando el nivel de inventario alcance R + S = 35 + 23 = 58 cajas de disquetes.

3.5.5.4. Modelo de revisión periódica

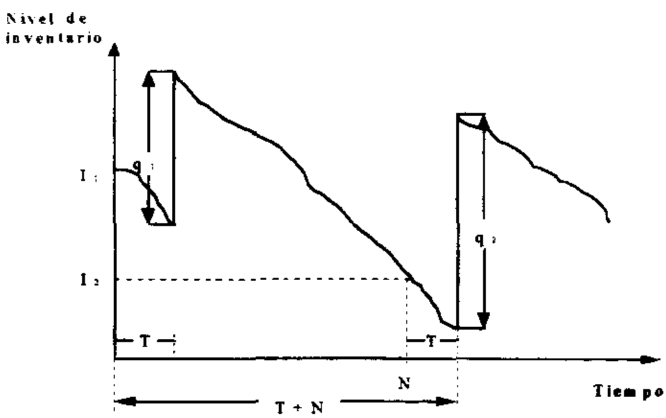
Regresando al ejemplo del medidor de combustible en la sección anterior, el nivel de aceite del avión se revisa cada vez que éste toma combustible. Por consiguiente, el nivel de aceite se revisa en forma periódica. Se dice entonces, que la revisión periódica, es cuando el nivel de inventario se conoce mediante una revisión que ocurre en forma periódica.

Supóngase que el nivel de inventario se observa al final de N periodos y en ese momento se encuentra en existencia I_1 unidades. Conociendo este número, se coloca un pedido q_1 de unidades, donde esta cantidad llegará después del tiempo de anticipación T y durante este tiempo la cantidad I_1 satisface la demanda probabilística.

Ahora, al situarse en el tiempo T, se incrementa el nivel de inventario debido a que se recibe el pedido q_1. El nivel del inventario a partir de este punto decrece con una demanda aleatoria. El inventario se revisa en el siguiente punto de revisión N y se realiza un pedido nuevo de q_2 unidades derivado del nivel de inventario revisado I_2. Repitiendo este proceso cada N periodos, como lo muestra la figura 3.5.5.3. Entonces, si al momento de la revisión existen I unidades y se realiza un pedido de q unidades, el número de unidades I+q satisfará la demanda hasta el siguiente pedido. Sin embargo, se tiene que determinar la cantidad de q que satisfaga la demanda en el transcurso de tiempo N+T con un nivel de servicio α. Como se supone una demanda con una distribución normal, se tiene que:

$$\mu_{N+T} = D^{*} * (N+T) \qquad y \qquad \sigma_{N+T} = \sqrt{(N+T)}\,\sigma$$

Figura 3.5.5.3. Descripción del modelo de revisión periódica.



Como ejemplo, resuélvase el problema de la sección anterior sólo que el punto de revisión es de N = 4 semanas y suponiendo que I = 50.

$$\mu_{N+T} = D' * (N + T) = 1800 * \left(\frac{5}{52}\right) = 173.07$$

$$\sigma_{N+T} = \sqrt{(N + T) * \sigma} = \sqrt{\left(\frac{5}{52}\right) * 100} = 3.1$$

$$z = \frac{(I + q) - \mu_{N+T}}{\sigma_{N+T}}$$

despejando q tenemos :

$$q = \mu_{N+T} + (z * \sigma_{N+T}) - I \qquad =173.07 + (1.645 * 3.1) - 50 = 128.16$$

Entonces, si existen 50 cajas de disquetes al momento de la revisión, se deben pedir 128 cajas de disquetes, con el que es alcanzado un nivel de servicio del 95%.

3.5.6. Pronóstico de la demanda

Las predicciones estadísticas son muy importantes en la administración pública y en los negocios tanto a corto como a largo plazo. Al hablar de pronósticos a corto plazo se consideran plazos no mayores a un año, por ejemplo: pronósticos de la demanda de algún producto, ventas, cambios de precio, etc. Por otro lado, los pronósticos a largo plazo consideran plazos de dos a diez años y se utilizan para la toma de decisiones de la línea de los productos e inversiones de capital por mencionar algunos.

Las técnicas de predicción estadística son muy utilizadas en la administración de inventarios. Sin embargo, su uso se ha extendido a otras áreas como: control de calidad, investigación de mercados, planeación financiera, análisis de inversiones, etc.

Al hablar de pronóstico se involucra al futuro y éste a su vez esta asociado con la incertidumbre. Por lo tanto no se puede esperar que el pronóstico sea siempre exacto. Lo que si es posible es mejorar el pronóstico para tomar mejores decisiones y evitar las pérdidas que pueda ocasionar la incertidumbre.

3.5.6.1. Modelos de predicción

Los modelos de predicción se clasifican comúnmente en dos categorías:

I. Modelos cualitativos.

II. Modelos cuantitativos.

I. Modelos cualitativos

Estos modelos se utilizan cuando no se cuentan con datos sobresalientes, o no existen, o no están disponibles. Como el caso en que una compañía introduce un nuevo producto en el mercado, y por ello no contará con datos históricos. Por lo tanto, este tipo de modelos se fundamentan en opiniones para pronosticar, es decir, utilizan la intuición. Se explica a continuación brevemente algunos de los métodos cualitativos más conocidos.

Método de consenso del panel.- Este método es usado en aquellas empresas que cuentan con expertos cuyos conocimientos les permiten identificar los sucesos inciertos que se pudieran presentar en un futuro. Además, los expertos basados en sus conocimientos, llegan a un consenso para pronosticar las ventas de la empresa.

Método delfi. - Este método se basa en cuestionarios que se aplican a expertos de la misma empresa o a asesores externos, con el fin de detectar los factores que ayuden a alcanzar un buen pronóstico. Es un método sistemático o secuencial, ya que las respuestas del primer cuestionario se utilizan para formar un segundo cuestionario y así sucesivamente hasta que los expertos consideren que tienen los datos necesarios.

Método de analogía histórica.- Este método se basa en el supuesto de utilizar la historia de ventas de un artículo introducido al mercado en el pasado y esta forma pronosticar las ventas del artículo actual, tomando en cuenta que las condiciones del mercado deben ser iguales para ambos artículos.

II. Modelos cuantitativos

A diferencia de los modelos cualitativos, los modelos cuantitativos se basan en datos históricos, con un proceso puramente matemático. Estos modelos suponen el ajuste de un modelo a un conjunto de datos. Los modelos cuantitativos se clasifican en dos categorías:

1. Modelos de series de tiempo.

2. Modelos causales.

1. **Modelos de series de tiempo.** Estos modelos se basan en datos históricos. William Mendenhall define estos modelos como: "se le llama serie de tiempo a cualquier sucesión de observaciones de un fenómeno que es variable con respecto al tiempo"[1]. También se basan en el supuesto de seguir una tendencia clara y relativamente estable. Este tipo de modelos se aplican a pronósticos a corto plazo.

A continuación se mencionan algunos tipos de modelos de series de tiempo:

- *Proyecciones de tendencia.*
- *Promedio móvil.*
- *Suavización exponencial.*
- *Box-Jenkins.*

1. Más adelante se explica a detalle: el promedio móvil y suavización exponencial en virtud de ser los métodos que se usan con mayor frecuencia en la práctica.

2. **Modelos causales.** En estos modelos también es importante contar con datos históricos. Este tipo de modelos tratan de pronosticar valores futuros de una variable (variable dependiente) por medio de datos pasados, y de esta forma estimar la relación que existen entre la variable dependiente y una o más variables independientes, ya que en estos modelos pueden existir más de una variable.

Los métodos de predicción causal o modelos causales, toman en cuenta lo que causo los datos del pasado. Estos modelos son los más sofisticados, y sirven para pronosticar a largo plazo, a diferencia de los modelos de series de tiempo. Como ejemplo de estos modelos se mencionan los modelos de regresión y econométricos.

[1]Mendenhall, William y Reinmuth, James E., Estadística para Administración y Economía, México, 1981, p. 448.

Modelos de regresión.- Los elementos fundamentales de los modelos de regresión, son las variables y la ecuación de regresión, donde puede haber dos a más número de variables. Las variables se clasifican en variables independientes y dependientes. La variable dependiente es aquella cuyo cambio está en función de la variación de la o las variables independientes. Este cambio o relación se puede dar en forma lineal, por lo que utiliza la regresión lineal para estimar esta relación.

Modelos econométricos.- Estos modelos consisten en un sistema de una o más ecuaciones que describen la relación entre variables económicas y de series de tiempo. Son modelos probabilísticos, de tal forma que utilizan la relación probabilistica que existe entre una variable dependiente representada por la serie de tiempo y variables independientes. Sin embargo, este tipo de modelos son muy costosos de elaborar pero tienen la ventaja de hacer pronósticos más exactos que los modelos de regresión ordinarios.

3.5.6.2. Promedio móvil

Una de las componentes de una serie de tiempo es la variación aleatoria, movimientos irregulares o al azar, que se refieren a movimientos esporádicos en un sentido creciente o decreciente de la serie debido a eventos ocasionales . Son los cambios inexplicables que sufre la serie en un corto periodo de tiempo, que pueden ser consecuencia de sucesos políticos, el clima, inundaciones, huelgas, etc. Se supone que los eventos producen variaciones cuya duración es corta.

Los métodos de análisis de series de tiempo están fundamentados en las técnicas de suavizamiento, las cuales tienen como objetivo eliminar el efecto de variación aleatoria. Este suavizamineto puede alcanzarse a través del uso de un promedio móvil o media variable de las observaciones más recientes sobre un número fijo de periodos de tiempo y así pronosticar el periodo siguiente.

Así y_1, y_2, y_3, ..., y_t son valores observados de una serie temporal, y sea y_t el valor de la serie observada en el tiempo t. Si los datos son anuales o mensuales, se dice que es un movimiento medio de M años o movimiento de M meses, respectivamente, de forma general se indica como movimiento medio de orden M. También se utilizan otras unidades de tiempo. Para calcular el promedio móvil al tiempo t de las observaciones de la serie sobre M periodos de tiempo, se utiliza la siguiente expresión:

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-(M-1)/2} + y_{t+1-(M-1)/2} + y_{t+2-(M-1)/2} + \dots + y_{t+(M-1)/2}}{M}$$

donde: M es un número impar,

y_t observación del proceso en el tiempo t,
y_{t-1} observación del proceso en el tiempo t-1.

El motivo por el cual se considera a M un número impar obedece a que si M es par, los promedios móviles estarían entre los puntos de tiempo en lugar de coincidir con estos. Por esto resulta conveniente considerar a M un número impar para que de esa manera sea posible tener una comparación con los valores originales.

Ahora surge una pregunta, ¿Como seleccionar a M? , y para contestarla hay que entender primero el concepto de error de pronóstico y la desviación absoluta media. Se define a e_t , error de pronóstico, mediante la siguiente expresión:

$$e_t = y_t - (\text{pronóstico de } y_t)$$

donde: y_t es el valor de la serie en el tiempo t.

Por último, la desviación absoluta media es el promedio de los valores absolutos de todas las e_t. Entonces, la M óptima que será seleccionada es aquella que minimice la desviación absoluta media.

Para ilustrar el uso de este método, se tiene el siguiente problema:

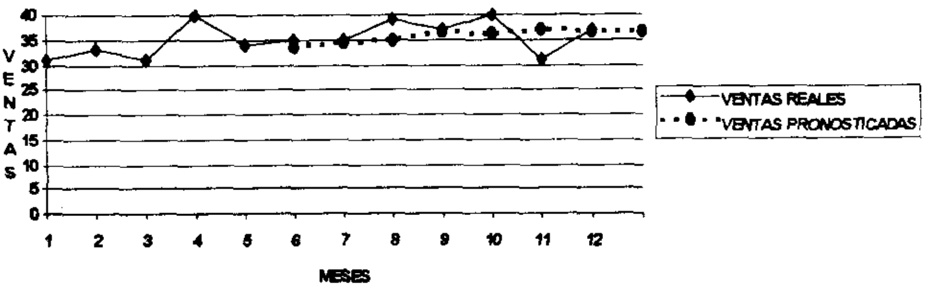
En la tabla siguiente se presentan las ventas mensuales de zapato deportivo de la empresa Nike durante los últimos doce meses. La empresa desea pronosticar las ventas mediante el método de media variable.

		M=3			M=5		
MES	VENTAS REALES	PRONÓS-TICO	ERROR DE PRONÓSTICO	ERROR ABS. DE PRONÓSTICO	PRONÓS-TICO	ERROR DE PRONÓSTICO	ERROR ABS. DE PRONÓSTICO
ENERO	31						
FEBRERO	33						
MARZO	31						
ABRIL	40	31.67	8.33	8.33			
MAYO	34	34.67	-0.67	0.67			
JUNIO	35	35.00	0.00	0.00	33.8	1.2	1.2
JULIO	35	36.33	-1.33	1.33	34.6	0.4	0.4
AGOSTO	39	34.67	4.33	4.33	35	4	4
SEPTIEMBRE	37	36.33	0.67	0.67	36.6	0.4	0.4
OCTUBRE	40	37.00	3.00	3.00	36	4	4
NOVIEMBRE	31	38.67	-7.67	7.67	37.2	-6.2	6.2
DICIEMBRE	37	36.00	1.00	1.00	36.4	0.6	0.6
DESVIACION ABSOLUTA MEDIA				3.00			2.4

En este ejemplo, se aplica un movimiento medio de 3 meses y otro de 5 meses. Como se observa en la columna de errores absolutos de pronóstico, para M=3 existe una desviación absoluta media de 3.00 contra 2.4 para M=5. Así, para un movimiento medio de 5 meses se pueden obtener los mejores pronósticos de ventas para la marca Nike.

En la figura 3.6 se comparan los datos reales contra el movimiento medio de 5 meses. En esta gráfica se observa que existe una tendencia ascendente en las ventas del zapato deportivo.

Figura 3.6



Sin embargo, este método tiene las siguientes deficiencias:

a) solamente se utilizan algunos datos del pasado para pronosticar,

b) tanto a los datos pasados como a los recientes se les da el mismo peso, en lugar de dar más peso a los últimos datos ya que son más relevantes,

c) sería muy costoso mantener una gran cantidad de información en la computadora cada periodo de tiempo para pronosticar .

3.5.6.3. Suavización exponencial

Este método también es conocido como Atenuación Exponencial Simple, el cual es más eficiente el método anterior, dado que en la Suavización Exponencial para pronosticar un valor en el futuro no es necesario mantener una gran cantidad de datos del pasado, sino el dato del periodo en curso; los pesos que se les dan a los datos pasados no son iguales.

La observación suavizada exponencialmente en el tiempo t se expresa así:

$$\hat{F}_t = \hat{F}_{t-1} + \alpha(D_{t-1} - \hat{F}_{t-1})$$

Donde,

$\hat{F}_t$ = nueva predicción
$\hat{F}_{t-1}$ = última predicción
α = constante de suavización, donde $0 < \alpha < 1$
D_{t-1} = Ultimodato

Agrupando términos en la expresión anterior, se obtiene la ecuación básica de *suavizamiento o atenuación simple:*

$$\hat{F}_t = \alpha D_{t-1} + (1-\alpha)\hat{F}_{t-1} \text{ ....(i)}$$

A continuación se demuestra que en el método de suavización exponencial son más relevantes los datos más recientes, en el cálculo se involucran todos los datos pasados y además es un *promedio ponderado de todos los datos históricos.*

Haciendo un pronóstico para el periodo t -1 y t -2 con la úiltima ecuación, se tiene:

$$F_{t-1} = \alpha D_{t-2} + (1-\alpha) F_{t-2} \text{ ....(ii)}$$

$$F_{t-2} = \alpha D_{t-3} + (1-\alpha) F_{t-3} \text{ ....(iii)}$$

Reemplazando la ecuación (iii) en (ii) y (ii) en la ecuación (i), se obtiene:

$$F_t = \alpha D_{t-1} + (1-\alpha)\left[\alpha D_{t-2} + (1-\alpha)(\alpha D_{t-3} + (1-\alpha) F_{t-3})\right].$$

Desarrollando, se obtiene

$$F_t = \alpha D_{t-1} + \alpha(1-\alpha) D_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-3} + (1-\alpha)^3 F_{t-3}$$

Repitiendo el proceso se tiene

$$F_t = \alpha D_{t-1} + \alpha (1-\alpha) D_{t-2} + \alpha (1-\alpha)^2 D_{t-3} + \alpha (1-\alpha)^3 D_{t-4} + \ldots + \alpha (1-\alpha)^n D_{t-n+1} + (1-\alpha)^{n+1} D_{t-n+1}$$

Obsérvese que en esta última ecuación aparecen todos los datos pasados. Además, este método no elimina los datos más antiguos como en el caso de los promedios móviles.

De la última ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\alpha_{t-1} + \alpha (1-\alpha) + \alpha (1-\alpha)^2 + \alpha (1-\alpha)^3 + \ldots = 1$$

Esto quiere decir, que si es utilizado un número infinito de periodos se obtiene un promedio ponderado de todas las observaciones del pasado. Los datos pasados disminuyen por una razón de progresión de $(1-\alpha)$. Entonces entre mayor sea el valor de a, más peso se les dará a los más actuales. Obsérvese la siguiente tabla:

α	1a. Observación	2a.Observación	3a. Observación	Total
0.2	20%	16%	13%	49%
0.5	50%	25%	13%	88%

También en este método se utiliza el error de pronóstico que se representa como:

$$e_t = y_t - F_{t-1}$$

que será útil para encontrar la desviación absoluta media.

Ejemplo:

Una compañía de chocolates vende un producto que se llama "Chocolatines". En la tabla siguiente se muestran las ventas reales del año de este producto. El director del área de Investigación de Operaciones desea pronosticar las ventas de este chocolate mediante el método de suavización exponencial, utilizando una constante de suavización de α =.1 y α=.5. Determinar que constante de suavización produce la menor desviación.

$\alpha = .1$

MES	VENTAS ACTUALES D_t	PRONOSTICO NUEVO F_t	PRONOSTICO DE LAS ULTIMAS VENTAS F_{t-1}	PRONOSTICO DE ERROR	ERROR ABSOLUTO DE PRONOSTICO
ENERO	71	68.3	68	3	3
FEBRERO	70	68.47	68.3	1.7	1.7
MARZO	70	68.62	68.47	1.53	1.53
ABRIL	69	68.65	68.62	0.38	0.38
MAYO	64	68.18	68.65	-4.68	4.68
JUNIO	65	67.86	68.18	-3.18	3.18
JULIO	73	68.37	67.86	5.14	5.14
AGOSTO	79	69.43	68.37	10.63	10.63
SEPTIEMBRE	76	70.08	69.43	6.57	6.57
OCTUBRE	74	70.47	70.08	3.92	3.92
NOVIEMBRE	75	70.92	70.47	4.53	4.53
DICIEMBRE	71	70.92	70.92	0.08	0.08
DESVIACION ABSOLUTA MEDIA					3.77

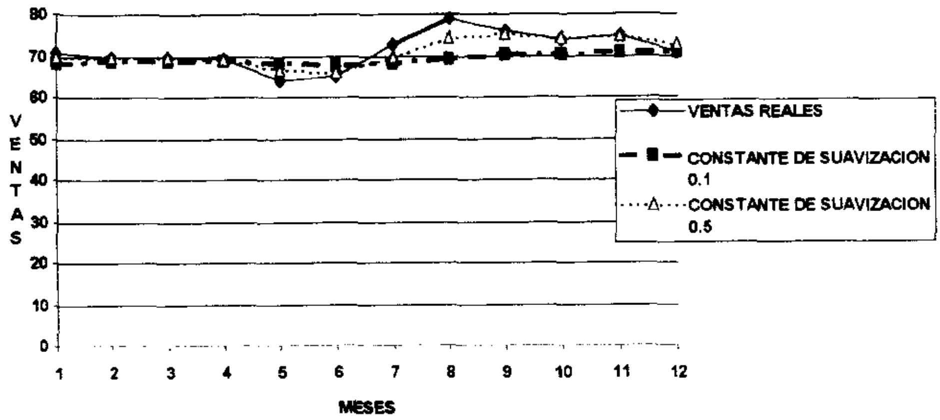
$\alpha = .5$

MES	VENTAS ACTUALES D_t	PRONOSTICO NUEVO F_t	PRONOSTICO DE LAS ULTIMAS VENTAS F_{t-1}	PRONOSTICO DE ERROR	ERROR ABSOLUTO DE PRONOSTICO
ENERO	71	69.5	68	3	3
FEBRERO	70	69.75	69.5	0.5	0.5
MARZO	70	69.87	69.75	0.25	0.25
ABRIL	69	69.43	69.87	-0.87	0.87
MAYO	64	66.71	69.43	-5.43	5.43
JUNIO	65	66.35	66.71	-1.71	1.71
JULIO	73	69.67	66.35	6.65	6.65
AGOSTO	79	74.33	69.67	9.33	9.33
SEPTIEMBRE	76	75.16	74.33	1.67	1.67
OCTUBRE	74	74.58	75.16	-1.16	1.16
NOVIEMBRE	75	74.79	74.58	0.42	0.42
DICIEMBRE	71	72.89	74.79	-3.79	3.79
DESVIACION ABSOLUTA MEDIA					2.04

Por lo tanto la constante de suavización que produce la menor desviación

absoluta media es .5. En la figura 3.7 se gráfica las ventas reales y los procesos de suavización exponencial para las constantes de suavización α =.1 y α =.7.

Figura 3.7



CAPÍTULO IV

CASO PRÁCTICO

IV. CASO PRÁCTICO

- **ANTECEDENTES**

LEO DULCES Y CHOCOLATES

En 1984 se funda Tultiave S.A. productora de dulces y chocolates, manejada por la familia Ávila Hernández, ubicada en Prolongación Allende No. 39 Barrio de Santiaguito, Tultitlán Edo. de México. Para el año de 1997 Francisco Leonardo Ávila Hernández decide crear su propia empresa poniéndole por nombre LEO DULCES Y CHOCOLATES, ubicada en la misma dirección, por lo que Tultiave S. A. cambia de residencia. Hoy en día la empresa LEO ha llegado a superar a Tultiave en ventas y en productos de mejor calidad.

- **RAZÓN SOCIAL:** Persona física: Margarita Lilia Delgado Santoyo.
- **GIRO:** Productora y comercial.
- **TAMAÑO:**

	NUMERO DE EMPLEADOS
PEQUEÑA EMPRESA	**8 en el área administrativa** **14 área laboral**
TOTAL	22

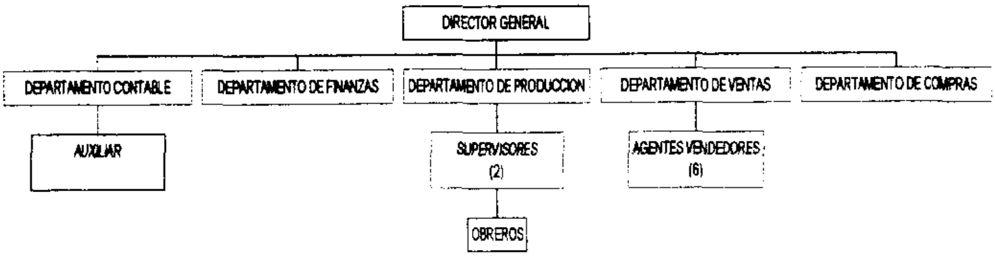
- **OBJETIVOS GENERALES:**

Esta empresa tiene como objetivo principal consolidar su presencia como la mejor dentro de su ramo, ofreciendo productos de calidad, por lo que continuamente están buscando nuevas técnicas, materiales, maquinaria, materias primas para ofrecerle a sus clientes productos de la mejor calidad posible al mejor precio y con un buen servicio.

- ESTRUCTURA DE LA EMPRESA

En la figura 4.1 se presenta el organigrama de la empresa:

FIG.4.1 ORGANIGRAMA DE LEO DULCES Y CHOCOLATES



- FUNCIONES DEPARTAMENTALES

Director General

⇒ **Toma de decisiones.**
⇒ **Supervisar las operaciones de la empresa realizadas por sus subordinados para la toma de decisiones y así mismo dirigir la buena administración de la empresa.**

Departamento contable

⇒ **Registro diario de las entradas y salidas (elaboración de pólizas, ingresos, egresos y de diario)**
⇒ **Control de inventarios.**
⇒ **Registro de ventas (mensuales y anuales).**
⇒ **Determinación de costos.**
⇒ **Pago de impuestos.**
⇒ **Elaboración de nóminas.**

Departamento de Finanzas

⇒ Crédito y cobranzas.
⇒ Programa pago a los proveedores.
⇒ Control de valores.
⇒ Determinación de precio de venta.

Departamento de Producción

⇒ Transformar la materia prima en productos terminados.
⇒ Vigilar el proceso de fabricación.
⇒ Vigilar que los productos cumplan con la calidad requerida.

Departamento de Ventas

⇒ Distribución de productos al mercado.
⇒ Atención a clientes.
⇒ Busca de nuevos mercados.

Departamento de compras

⇒ Compra de materia prima.
⇒ Compra de materiales indirectos.
⇒ Compra de material de empaque.
⇒ Cotización de proveedores.
⇒ Compra de otros artículos.

Dando seguimiento a las etapas que persigue la Investigación de Operaciones expuestas en la sección 1.4.2, se tiene:

A) Formulación del problema

La Compañía LEO actualmente no aplica ningún sistema de inventario, es decir, administra su inventario en forma empírica o por intuición, teniendo así costos relativos al inventario altos. Los objetivos de la empresa son minimizar los costos relacionados con el inventario, maximizar sus ganancias y pronosticar la demanda de algún producto.

B) Construcción del modelo

El modelo matemático que representa el problema es Cantidad Económica de Pedido, analizado en la sección 3.4.1, ya que presenta las siguientes suposiciones:

1. La demanda es aproximadamente determinística, constante y continua.

2. No se permiten faltantes, ya que al no contar con azúcar no se pueden producir dulces y chocolates.

3. Los costos se conocen con certeza y son constantes al igual que el precio de compra.

4. Una vez que los bultos de azúcar se agotan, se reabastece.

5. El tiempo de anticipación es mayor o igual a cero y constante.

Este modelo ayudará a predecir los valores de las siguientes variables:

CTI = Costo total del inventario

Q = Cantidad pedida

T = Periodo de tiempo entre pedidos

D = Demanda de un artículo

N = Número de pedidos

El modelo matemático que relaciona estas variables es

$$CTI = \left(\frac{Q}{2}\right)C_m + \left(\frac{D}{Q}\right)C_p$$

donde

C_m= costo de mantener el inventario

C_p = Costo de pedir

La cantidad óptima pedida que minimizará el costo total de inventario será

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_m}}$$

El número de pedidos se obtiene mediante la siguiente expresión

$$N = \frac{D}{Q}$$

El periodo de tiempo entre pedidos se calcula así

$$T^* = \frac{Q^*}{D}$$

C) Desarrollo de una solución

La empresa presenta los siguientes datos:

LEO utiliza mensualmente 572 bultos de azúcar para su línea de productos: dulces y chocolates. Cada vez que la Compañía LEO coloca un pedido a su proveedor de azúcar se incurre en un gasto de $ 11.00 mensuales, con un tiempo de anticipación de un día. El precio por bulto de azúcar fue de $ 253.00 durante el mes. La tasa anual del costo de capital de LEO es 6.5%. El comportamiento de la demanda durante el mes en estudio lo muestra el siguiente cuadro A.

CUADRO A

DÍA	DEMANDA (BULTOS)
1	26
2	27
3	26
4	26
5	26
6	26
7	25
8	27
9	27
10	26
11	25
12	26
13	27
14	25
15	26
16	26
17	26
18	26
19	27
20	25
21	25
22	26
TOTAL DE BULTOS	**572**
PROMEDIO DE BULTOS POR DÍA DURANTE EL MES (BASADO EN 22 DÍAS)	**26**

Como se analizó en el capítulo III, el costo total de inventario para la Cantidad Económica de Pedido se expresa de la siguiente manera:

$$CTI = (\text{costo de mantener el inventario menualment e}) + (\text{costo de pedir mensualmen te})$$

El cálculo del costo de mantener el inventario de la ecuación anterior, se obtiene de la siguiente manera:

El precio de compra por bulto de azúcar fue de \$ 253.00. La tasa anual del costo de capital de LEO es 6.5%. Entonces el costo de mantenimiento por bulto por mes es:

$$C_m = \left(\frac{(6.5\%)\ (\$\,253)}{12}\right) = 1.37$$

$$(\text{costo de mantener el inventario}) = (\text{Inventario promedio})(\text{Costo de mantener por mes})$$

$$= \left(\frac{Q}{2}\right)C_m = \left(\frac{Q}{2}\right)(1.37)$$

Ahora utilizando la siguiente fórmula para encontrar el número de pedidos por mes:

$$N = \left(\frac{\text{demanda mensual}}{\text{cantidad pedida}}\right) = \frac{D}{Q} = \frac{572}{Q}$$

Por lo que el costo de pedir será:

Costo de pedir por mes = (Costo por pedido) (Número de pedidos)

$$C_p\left(\frac{D}{Q}\right) = 11\left(\frac{572}{Q}\right)$$

La ecuación del costo total de inventario se expresa de la siguiente forma:

$$CTI = \left(\frac{Q}{2}\right)(1.37) + \left(\frac{572}{Q}\right)(11)$$

Para encontrar la cantidad óptima de pedido, se aplica la siguiente fórmula:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,C_p D}{C_m}} = \sqrt{\frac{2(11)(572)}{1.37}} = 95.84$$

D) Evaluación y prueba de la solución

En el siguiente cuadro, se muestra como el costo total del inventario cambia en función a la cantidad pedida, Q, mediante el procedimiento de ensayo y error. Como se puede observar, la cantidad óptima de pedir se encuentra entre 90 y 100 bultos de azúcar, ya que sus respectivos costos totales de inventario son los más bajos.

Cantidad pedida	Costo de mantener	Costo de pedir	Costo total del inventario
30	20.52	209.73	230.25
40	27.4	157.3	184.7
60	41.1	104.87	145.97
90	**61.65**	**69.91**	**131.56**
100	**68.5**	**62.92**	**131.42**

El costo total del inventario se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$CTI^{*} = \sqrt{2\,C_m C_p\,D} = \sqrt{2(1.37)(11)(572)} = 131.30$$

El número óptimo de pedidos será:

$$N^{*} = \frac{D}{Q^{*}} = \frac{572}{95.84} = 5.97$$

El tiempo entre pedidos se calcula con la siguiente ecuación:

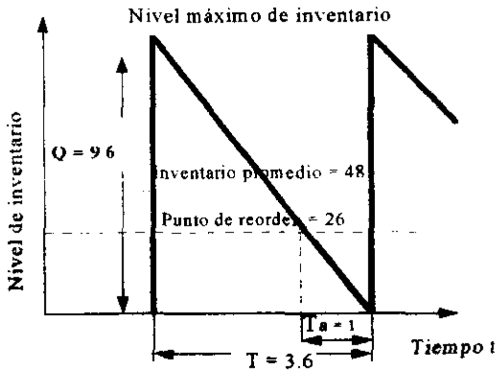
$$T^{*} = \frac{Q^{*}}{D} = \frac{95.84}{572} = 0.167$$

Suponiendo el mes de 22 días, (0.167) * (22) = 3.6. Entonces un pedido debe colocarse cada 3.6 días.

El punto de pedir se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\text{Punto de pedir} = (\text{tiempo de anticipación})(\text{utilización diaria}) = (1)\left(\frac{572}{22}\right) = 26$$

La siguiente figura muestra la mecánica del modelo:



E) Implantación de resultados

En este caso, LEO debe pedir 96 bultos de azúcar, el cual minimiza el costo total de inventario, que es de $ 131.30. El número óptimo de pedidos durante el mes es igual a 6, donde el tiempo entre pedidos es de 4 días. Por último, se debe colocar un pedido cuando el nivel de inventario disminuya a 26 bultos de azúcar.

• PRONÓSTICO DE LA DEMANDA

De la línea de productos de LEO, se pronosticará la demanda para el dulce MONKYQUE observando las ventas durante ocho semanas, utilizando los dos métodos analizados: Promedio Móvil y Suavización Exponencial.

⇒ ***Promedio Móvil***

Se Calculará para M = 3 y M = 5 periodos.

Pronóstico de ventas mediante promedio móvil ocho semanas.

		M=3			M=5		
Semana	**Ventas Reales**	*Pronóstico* de la **Demanda**	*Error de* Pronóstico	*Error* Absoluto del **Pronóstico**	*Pronóstico* de la Demanda	*Error de* Pronóstico	*Error* Absoluto del **Pronóstico**
1	321						
2	310						
3	315						
4	319	315.33	3.67	3.67			
5	308	314.67	- 6.67	6.67			
6	317	314	3	3	314.6	2.4	2.4
7	311	314.67	- 3.67	6.67	313.8	- 2.8	2.8
8	316	312	4	4	314	2	2
Desviación Absoluta Media				4.20			2.4

La M óptima que minimiza la desviación absoluta media es M = 5.

⇒ Suavización Exponencial

Ahora se utiliza la suavización exponencial para pronosticar las ventas del dulce Monkyque para ocho semanas, con una constante de suavización de 0.1 y 0.5 respectivamente.

Pronóstico de ventas mediante Suavización Exponencial para ocho semanas, con α = 0.1 y suponiendo F_0 = 309.

Semana	Ventas Reales	Pronóstico	F_t	Pronóstico del Error	Error Absoluto del Pronóstico
1	321	309	310.2	12	12
2	310	310.2	310.18	- 0.2	0.2
3	315	310.18	310.66	4.82	4.82
4	319	310.66	311.49	8.34	8.34
5	308	311.49	311.14	- 3.49	3.49
6	317	311.14	311.73	5.86	5.86
7	311	311.73	311.66	- 0.73	0.73
8	316	311.66	312.09	4.34	4.34
9		312.09			
Desviación Absoluta Media					4.97

Pronóstico de ventas mediante Suavización Exponencial para ocho semanas, con α = 0.5 y suponiendo F_0 = 309.

Semana	Ventas Reales	Pronóstico	F_t	Pronóstico del Error	Error Absoluto del Pronóstico
1	321	309	315	12	12
2	310	315	312.5	- 5	5
3	315	312.5	313.75	2.5	2.5
4	319	313.75	316.37	5.25	5.25
5	308	316.37	312.18	- 8.37	8.37
6	317	312.18	314.59	4.82	4.82
7	311	314.59	312.79	- 3.59	3.59
8	316	312.79	314.39	3.21	3.21
9		314.39			
Desviación Absoluta Media					5.59

La constante de suavización que produce la menor desviación media absoluta es α = 0.1.

Tomando en cuenta que la Suavización Exponencial, como ya se mencionó, es más eficiente que los Promedios Móviles, utilizaría esta para pronosticar las ventas del dulce Monkyque.

BIBLIOGRAFÍA

1. ACKOFF, Russell y SASIENI, Maurice: Fundamentos de investigación de operaciones, Editorial Limusa, México.

2. APÓSTOL, Tom M.: Calculus volumen II, Editorial Reverté, México, 1980.

3. ÁVILA GONZALEZ, JAVIER: Teoría del inventario y su aplicación, México, 1967.

4. BERANEK, William: Administración del capital de trabajo, Ediciones Contables y Administrativas, México, 1976.

5. BLOCK, Stanley y HIRT, Geoffrey: Fundamentos de administración financiera, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., México, 1987.

5. BOLTEN, Steven: Manual de administración financiera, Ediciones Ciencia y Técnica, S.A., México, 1987.

6. CANAVOS, George C.: Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos, Editorial McGraw-Hill, México, 1992.

8. CURRAN, Ward: Principies of financial Management, Editorial McGraw-Hill, USA, 1970.

9. DUCKWORTH, Eric: Guía para la investigación de operaciones, Editorial C.E.C.S.A., México, 1978.

10. GARZA, Tomás: Elementos de cálculo de probabilidades, UNAM, México, 1990.

11. GITMAN, Lawrences: Fundamentos de administración financiera, Editorial Harla, México, 1986.

12. GONZÁLEZ, Mari Carmen: Modelos y simulación, UNAM, México, 1996.

13. JOHNSON, R.: Administración financiera, Editorial C.E.C.S.A., México, 1989.

14.LEVIN, Richard y KIRKPATRICK, Charles: Enfoques cuantitativos a la administración, Editorial McGraw-Hill, México, 1987.

15. LEITHOLD, Louis: El Cálculo, Editorial HARLA, México, 1987.

16. MCMILLAN, Claude y F. Richard: Análisis de sistemas, Editorial Trillas, México, 1981.

17. MCKOWN, Davis: Modelos cuantitativos para administración, Grupo editorial Iberoamérica.
18. MAO, James: Análisis financieros, Editorial el Ateneo, Buenos Aires, 1980.

19. MATHUR, Kamlesh y SOLÓW, Daniel: Investigación de operaciones, Editorial Prentice Hall, México, 1996.

20. MENDENHALL, William: Estadística para administración y economía, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1981.

21. MONTGOMERY, Douglas: Operations research in production planning, sheduling, and inventory control, De. John Wiler and Sons, Inc.,USA, 1974.

22. MORENO, Joaquín: La administración financiera del capital de trabajo, Ed.Instituto mexicano de contadores públicos A.C., México, 1997.

23. NARASIMHAN, Sim: Planeación de la producción y control de inventarios, Editorial Prentice Hall, México, 1996.

24. PRAWDA, Juan: Métodos y modelos de investigación de operaciones Tomo I y II, Editorial Limusa, México, 1981.

25. PERDOMO, A.: Administración financiera del capital de trabajo, Ediciones contables y administrativas, México, 1991.

26. SANCHEZ, Luis: Apuntes de investigación de operaciones, Modulo1, UNAM, 1990.

27. SHANNON, Robert E.: Simulación de sistemas, Editorial Trillas, México, 1988.

28. TAHA, Hamdy: Investigación de operaciones, Editorial Alfaomega, México, 1993.

29. WINSTON, Wayne: Investigación de operaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.

30. WESTON, F: Fundamentos de administración financiera, Editorial McGRAW-HILL, México, 1990.

31. ZUWAYLIF, Fadik: Ciencia de la administración, Editorial Limusa, México, 1981.

32. SCHALL, Lawrence: Administración financiera, Editorial McGRA, HILL, México., 1983.

ANEXOS

Sección 3A.1

Teorema.- Si $f(x)$ para todos los valores de x en el intervalo abierto (a,b) y si f tiene un extremo relativo en c, donde a< c< b, entonces si $f'(c)$ existe, $f'(c) = 0$.

Sección 3A.2

Teorema (Prueba de la segunda derivada para extremos relativos).- Sea c un número critico de una función f en la cual $f'(c) = 0$, y f' existen para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c. Si $f''(c)$ existe y

i. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.
ii. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Sección 3A.3

Definición.- Un punto $\bar{x}$, con $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ para i = 1,2,...,n, se llama punto estacionario de f.

Sección 3A.4

Definición.- El hessiano de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la matriz n x n, cuyo ij-ésimo elemento es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Definición.- El i-ésimo menor principal de una matriz n x n es el determinante de cualquier matriz i x i que se obtiene al quitar n – i renglones y las n – i columnas correspondientes de la matriz.

Definición.- El k-ésimo menor principal dominante de una matriz n x n es el determinante de la matriz k x k que se obtiene al quitar los últimos n - k renglones y columnas de la matriz.

Teorema.- Si $H_k(\bar{x}) > 0, k = 1,2,\ldots,n$, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ será un mínimo local para un problema de programación no lineal.