UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERADORES TAUBERIANOS Y SUCESIONES BASICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

CARMEN MARTINEZ ADAME ISAIS

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA 2000

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis

Operadores Tauberianos y Sucesiones Básicas

realizado por Carmen Martínez Adame Isais

con numero de cuenta 9650518-0 , pasante de la carrera de matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo	
Propietario	Dr Carlos Hernández Garciadiego	
Propietario	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert	Hugo Arizmendi P.
Suplente	Dra Magalí Folch Gabayet	
Suplente	Dr. Guillermo Grabinsky Steider	

Consejo Departamental de Matemáticas

Héctor Méndez L.
Dr. Héctor Méndez Lango

A Emigdio Imelda Juan Carlos

Agradezco de manera especial al M. en C. Angel Carrillo por su dirección, apoyo y valiosas opiniones a lo largo de la realización de este proyecto.

Agradezco también el trabajo y los comentarios de mis sinodales, Carlos Hernández, Hugo Arizmendi, Magali Folch y Guillermo Grabinsky.

Contenido

Introducción

Un operador tauberiano entre espacios de Banach X y Y es un operador lineal y continuo cuyo doble adjunto T^{**} satisface que $T^{**^{-1}}\left(\widehat{Y}\right) \subset \widehat{X}$, donde $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$ son las inmersiones canónicas de X y Y en sus biduales X^{**} y Y^{**} respectivamente Estos operadores fueron introducidos formalmente por N. Kalton y A. Wilansky en [12] a mediados de la década de los setenta aunque ya antes. en 1972. D J. Garling y el mismo A. Wilansky habían usado en [6] la propiedad que los define para resolver un problema de sumabilidad. Por lo tanto. éste puede considerarse como el trabajo que dio origen a dichos operadores. De la misma manera surgieron los operadores que satisfacen la propiedad conocida como la propiedad N. Un operador T entre esapcios de Banach X y Y. satisface esta propiedad si $x^{**} \in \widehat{X}$ siempre que $T^{**}x^{**} = 0$. Ambas propiedades se estudiarán a detalle en esta tesis.

La parte culminante de la misma. la constituye un estudio de la relación entre los operadores tauberianos entre espacios de Banach y las sucesiones básicas. es decir las sucesiones que son una base del subespacio lineal cerrado generado por sus términos. Algunos resultados del mismo tipo se obtienen para los operadores con la propiedad N. En la sección dedicada a este estudio se sigue el artículo [9] de J R. Holub.

Se ha tratado que la tesis sea lo más autocontenida posible y se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 presentamos los resultados y conceptos del análisis funcional que deben tenerse en consideración para el resto del trabajo. Se dan por conocidos los teormeas clásicos, como lo son el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de la Gráfica Cerrada, el Teorema de la Función Abierta y el Teorema del Acotamiento Uniforme. Se omite la demostración de algunos resultados de este capítulo por considerarse que éstas son fácilmente localizables en muchos libros: de hecho, mucho del material se puede encontrar en [10] y [18]. Sin embargo. los Teoremas de Eberlein-Šmulian y Krein-Šmulian son vistos con todo detalle, al igual que sus antecedentes inmediatos. En la sección dedicada a operadores compactos y débilmente compactos sucede lo mismo y ésta concluye con una caracterización de los operadores débilmente compactos que permite ver que éstos se definen por una propiedad opuesta a la que define a los operadores tauberianos.

A continuación, en el Capítulo 2, se introducen las bases de Schauder y las sucesiones básicas. Se estudian diferentes tipos de bases de entre los que destacan, por su relevancia en el Capítulo 4, los conformados por bases que encogen y bases acotadamente completas. En este capítulo se demuestran casi todos los resultados, y vale la pena notar que la Proposición 2.5.17 sólo se enuncia para espacios de Banach reales, pues la demostración que presenta I. Singer en [20] no funciona en el caso complejo. No obstante, no se pudo determinar si el resultado es en sí mismo falso para espacios complejos. Esto, a su vez, obliga a establecer la misma restricción, de sólo trabajar en el caso real, al Teorema 4.4.5. La sección final del segundo capítulo se dedica a un tratamiento de los espacios simétricos de sucesiones para presentar tres espacios de sucesiones que no son de uso frecuente en la literatura y que sirven para dar el contraejemplo que termina la tesis; esta sección se basa en [5].

En el Capítulo 3 se trata de manera detallada el artículo de D. J. H. Garling y A. Wilansky, en donde por primera vez se presenta la propiedad, que al abstraerse, dio origen a los operadores tauberianos. Este trabajo se centra alrededor de una pregunta de sumabilidad que resulta bastante natural ¿Si consideramos una matriz conservadora A, es decir una matriz que suma a todas las sucesiones convergentes, cómo tiene que ser A para que no sume a ninguna sucesión acotada divergente? La pregunta se responde con dos Teoremas.

Teorema. Sea A una matriz conservadora. A no suma a ninguna sucesión acotada divergete si, y sólo si, $A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$; es decir, si el operador A es tauberiano.

Teorema. Sea A un matriz conservadora. A no suma a ninguna sucesión acotada divergete si, y sólo si, el operador $A : c \to c$ que ella determina, tiene rango cerrado y su núcleo es de dimensión finita; es decir, si el operador A es superiormente semi-Fredholm.

Para poder demostrar el primero de estos resultados fue necesario llevar a cabo un estudio previo sobre el concepto de matriz conula. En este estudio destaca la demostración de la primera parte del Teorema 3.2.5 en donde se da, cubriendo todos los detalles, la demostración originalmente ofrecida por K. Zeller en [25]; una consecuencia de este Teorema (toda matriz conula suma a alguna sucesión acotada divergente), es usada frecuentemente y algunos autores han dado sus propias demostraciones que, en general, son poco claras o bien usan técnicas que no son tan directas como las usadas por Zeller. Vale la pena mencionar que A. K. Snyder también tiene una prueba de la primera parte del Teorema 3.2.5 en un contexto mucho más abstracto y complejo.

Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan y definen los operadores tauberianos y los operadores con la propiedad N. Se dan ejemplos particulares de los operadores tauberianos y de clases de éstos, para esto último, se presenta el Teorema de Factorización de Operadores Débilmente Compactos, publicado en [3] por W. J. Davis et al Se presentan también los resultados centrales de esta tésis entre los cuales figuran diferentes caracterizaciones tanto de los operadores tauberianos, como de los operadores con la propiedad N, a partir de su comportamiento sobre sucesiones básicas; los resultados que para tal efecto se dan, piden, en general, que una cierta propiedad que es poseída por la imagen de una sucesión básica sea, en alguna medida, compartida por la propia sucesión básica o alguna de sus subsucesiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo X denota a un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Para $\alpha \in K$ y $A, B \subset X$ definimos:

$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\} \text{ y } A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}.$$

1.1 Espacios vectoriales topológicos y localmente convexos

Definición 1.1.1 *Sea $A \subset X$.*

i) A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $\lambda \in K$ y $|\lambda| \leq \alpha$

ii) A es balanceado si $\lambda A \subset A$ para toda $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| \leq 1$.

iii) A es convexo si $\alpha x + \beta y \in A$ para $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$.

Definición 1.1.2 *Sea τ una topología en X. (X, τ), o simplemente X, es un espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son continuas con respecto a la topología producto en $X \times X$ y en $K \times X$, respectivamente. En este caso se dirá que τ es una topología vectorial para X.*

Proposición 1.1.3 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea V una vecindad del cero, entonces V es absorbente.*

Demostración Para todo $x \in X$ se tiene que $0 \cdot x = 0$, por tanto, por la continuidad de la multiplicación por un escalar, existe en K una bola cerrada I con centro en 0 tal que si $\lambda \in I$, entonces $\lambda x \in V$, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \alpha$, entonces $\lambda x \in V$; por tanto, V es absorbente. ‖

Teorema 1.1.4 *Si existe una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes cinco propiedades:*

i) *Si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$;*

ii) *$\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$;*

iii) *Todo $A \subset \mathcal{B}$ es absorbente;*

iv) *Todo $A \subset \mathcal{B}$ es balanceado;*

v) *Para cada $A \in \mathcal{B}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B + B \subset A$,*

entonces existe una única topología vectorial τ para X, tal que la familia $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades del cero; es decir, todo $B \in \mathcal{B}$ es una vecindad de 0, en la topología τ, y para cada vecindad V de 0 existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Se dice que τ está determinada por la familia $\mathcal{B}$. Inversamente, toda topología vectorial en X está determinada por una familia que satisface de i) a v).

La topología τ a la que se refiere este Teorema está dada de la siguiente manera: $V \subset X$ es una vecindad de $x \in X$, si existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x+B \subset V$, y $U \subset X$ es abierto si es vecindad de cada uno de sus puntos.

Si $\mathcal{B}$ es como en el Teorema anterior, entonces las colecciones

$$\mathcal{B}' = \{Int\,(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

y

$$\mathcal{B}'' = \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$$

donde $Int\,(B)$ y $\overline{B}$ son el interior y cerradura de B, con respecto a τ, respectivamente, son familias que satisfacen de i) a v) y la topología determinada por cada una de ellas coincide con la topología τ.

Nota 1.1.5 *En todo espacio vectorial topológico hay un sistema fundamental $\mathcal{V}$ de vecindades de 0 formado por abiertos (o cerrados) que satisface de i) a v).*

Definición 1.1.6 *Un subconjunto B de un espacio vectorial topológico es acotado si toda vecindad de 0 lo absorbe, es decir si para cada vecindad V de 0 existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda B \subset V$ si $|\lambda| \leq \alpha$.*

Definición 1.1.7 *Un espacio vectorial topológico (X, τ) es localmente convexo si cada vecindad del cero contiene una vecindad convexa del cero. En este caso, τ es llamada una topología localmente convexa para X.*

Definición 1.1.8 *Una función real ρ, definida en X, es una seminorma en X si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\rho(x) \geq 0$ *si* $x \in X$;

ii) $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$ *si* $\alpha \in K$ *y* $x \in X$;

iii) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *si* $x, y \in X$.

Proposición 1.1.9 *Consideremos una colección finita, no vacía, de seminormas en* X, $\{\rho_1, ..., \rho_n\}$, *y sean* $\epsilon_1, ..., \epsilon_n > 0$, *el conjunto*

$$U = \{x \in X : \rho_i(x) < \epsilon_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

satisface las siguientes cuatro propiedades:

i) $0 \in U$;

ii) U *es absorbente;*

iii) U *es balanceado;*

iv) U *es convexo.*

Teorema 1.1.10 *Sea* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una familia no vacía de seminormas en* X. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ *y* $\epsilon_1, ..., \epsilon_n > 0$, *definamos*

$$U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n} = \left\{x \in X : \rho_{\alpha_i}(x) < \epsilon_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\right\}.$$

La familia

$$\mathcal{B} = \{U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n} : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in A \text{ y } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0\}$$

satisface las cinco propiedades i) a v) enunciadas en el Teorema 1.1.4 y por tanto, hay una única topología vectorial τ *en* X *que tiene a* $\mathcal{B}$ *como un sistema fundamental de vecindades del cero. Por tanto,* (X, τ) *es localmente convexo. Se dice que esta topología* τ *está determinada por la familia de seminormas* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$. *En este caso* (X, τ) *es un espacio de Hausdorff si, y sólo si, para cada* $x \in X$ *existe* $\alpha \in A$ *tal que* $\rho_\alpha(x) \neq 0$.
Inversamente, si (X, τ) *es localmente convexo, entonces* τ *está determinada por una familia de seminormas.*

Observación 1.1.11 *Cada conjunto*

$$U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}$$

es un abierto en la topología τ.
En tanto que si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ *y* $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$, *se define*

$$F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n} = \left\{x \in X : \rho_{\alpha_i}(x) \leq \epsilon_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\right\},$$

entonces

$$\mathcal{V} = \{F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n} : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in A \text{ y } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0\}$$

es un sistema fundamental de vecindades cerradas del cero para la topología τ.

Proposición 1.1.12 *Si la topología τ de un espacio localmente convexo X está dada por la familia de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, entonces $B \subset X$ es acotado si, y sólo si, $\rho_\alpha(B)$ es acotado en K, para cada $\alpha \in A$. Si A es acotado, entonces su cerradura es un conjunto acotado.*

1.2 Espacios duales. Topologías débil y débil*

Definición 1.2.1 *Toda transformación lineal $x' : X \to K$ es llamada una funcional lineal en X. El espacio dual algebraico de X, que denotamos por X', es el conjunto de todas las funcionales lineales en X.*

Definición 1.2.2 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico, denotaremos por $(X,\tau)^*$, o simplemente X^*, a la colección de todas las funcionales lineales en X que son continuas. Este espacio X^* es llamado el dual topológico o continuo de X. A un elemento genérico de X^* lo denotaremos por x^*. Escribiremos X^{**}, X^{***},... para denotar a los duales topológicos de X^*, X^{**},..., respectivamente. Así por ejemplo, $x^{**} \in X^{**}$ si $x^{**} : X^* \to K$ es una funcional lineal y continua. X^{**} es llamado el doble dual topológico de X.*

El espacio X puede considerarse como un subespacio de $(X^*)'$ vía la siguiente identificación:

$$X \overset{\frown}{\to} (X^*)'$$

$$x \to \widehat{x}$$

donde $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. $\widehat{X}$ denota a la imagen de X bajo esta transformación $\widehat{\ }$.

Los siguientes dos resultados son corolarios del *Teorema de Hahn-Banach*.

Teorema 1.2.3 *Si X es un espacio localmente convexo, M es un subespacio vectorial de X y $m^* \in M^*$, entonces m^* tiene una extensión continua a X; es decir, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(m) = m^*(m)$, para todo $m \in M$.*

Teorema 1.2.4 *Si X es un espacio localmente convexo, M es un subespacio vectorial cerrado de X y $x \in X - M$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(m) = 0$ para todo $m \in M$ y $x^*(x) = 1$. Por tanto, $X^* \neq \{0\}$ si X no es el espacio nulo, y si X es además un espacio de Hausdorff, entonces la condición $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in X^*$ implica $x = 0$.*

Definición 1.2.5 *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico y sea $x^* \in X^*$, la función $\rho_{x^*} : X \to \mathbb{R}$ definida como $\rho_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ es una seminorma en X. La topología localmente convexa para X determinada por la familia de seminormas $\{\rho_{x^*}\}_{x^*\in X^*}$ es llamada la topología débil en X (definida por X^*). Esta topología se denota por w o, de manera más explícita, por $\sigma(X, X^*)$.*

Observación 1.2.6 *Una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en X converge en la topología débil a $x \in X$ si y sólo si*

$$x^*(x_i) \to x^*(x_i)\,, \text{ cuando } i \to \infty$$

para todo $x^* \in X^*$.

De la definición de la topología débil y del Teorema 1.2.3 se sigue la siguiente proposición.

Proposición 1.2.7 *Sea X_0 un subespacio de un espacio vectorial topológico X. La topología $\sigma(X_0, X_0^*)$ coincide con la topología que $\sigma(X, X^*)$ induce en X_0.*

Demostración. Se sigue de que las topologías $\sigma(X_0, X_0^*)$ y $\sigma(X, X^*)$ están definidas por las familias de seminormas

$$\{\rho_{y^*} : y^* \in X_0^*\} \text{ y } \{\rho_{x^*} : x^* \in X^*\}\,,$$

respectivamente, y $\rho_{x^*}(x_0) = \rho_{x^*|X_0}(x_0)$ si $x^* \in X^*$, $x_0 \in X_0$. ||

Definición 1.2.8 *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico y sea $x \in X$. la función $\rho_x : X^* \to \mathbb{R}$ definida como $\rho_x(x^*) = |x^*(x)|$ es una seminorma en X^*. La topología localmente convexa para X^* determinada por la familia de seminormas $\{\rho_x\}_{x\in X}$ es llamada la topología débil* en X^* y es denotada por w^* o $\sigma(X^*, X)$.*

Observación 1.2.9 *Una sucesión $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ en X converge en la topología débil* a $x^* \in X$ si, y sólo si,*

$$x_i^*(x) \to x^*(x)\,, \text{ cuando } i \to \infty,$$

para todo $x \in X$.

De manera general, se puede hacer la siguiente definición.

Definición 1.2.10 *Sea $\Gamma \subset X'$, se define una topología localmente convexa $\sigma(X, \Gamma)$ para X, mediante la familia de seminormas $\{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, donde:*

$$\rho_\gamma(x) = |\gamma(x)|\,,\ x \in X,$$

para cada $\gamma \in \Gamma$. Se dice que Γ es total si $x'(x) = 0$ para toda $x' \in \Gamma$ implica que $x = 0$. Si Γ es total, entonces $\sigma(X, \Gamma)$ es un topología de Hausdorff.

La topología w se obtiene al tomar $\Gamma = X^*$ $(\subset X')$ y w^* es el resultado de tomar $\Gamma = \widehat{X}\left(\subset (X^*)'\right)$. Por tanto, w^* es una topología de Hausdorff para todo espacio vectorial topológico X y en virtud del Teorema 1.2.4 la topología w es de Hausdorff si X es un espacio localmente convexo y Hausdorff.

Proposición 1.2.11 $(X, \sigma(X, \Gamma))^* = \Gamma$. *Por tanto, si X es un espacio vectorial topológico, entonces*

$$(X, \sigma(X, X^*))^* = X^* \text{ y } (X^*, \sigma(X^*, X)) = \widehat{X}(= X).$$

Proposición 1.2.12 *Sea X un espacio vectorial con dos topologías τ_1 y τ_2 localmente convexas. Si (X, τ_1) y (X, τ_2) definen las mismas funcionales lineales continuas, entonces un conjunto convexo es cerrado en (X, τ_1) si, y sólo si, es cerrado en (X, τ_2).*

Al combinar las dos últimas proposiciones obtenemos:

Corolario 1.2.13 *Si (X, τ) es un espacio localmente convexo y $C \subset X$ es convexo, entonces C es cerrado en la topología τ si, y sólo si, es cerrado en la topología $\sigma(X, X^*)$.*

1.3 Espacios normados y de Banach

Definición 1.3.1 *Un espacio normado $(X, \| \ \|)$ es llamado un espacio de Banach si es completo con la distancia inducida por la norma $\| \ \|$.*

Definición 1.3.2 *En un espacio normado $(X, \| \ \|)$ definimos*

$$B_r[x_0] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\},$$

con $x_0 \in X$ y $r > 0$, y la llamamos la bola cerrada con centro en x_0 y radio r. Es claro que

$$B_r[x_0] = x_0 + rB_1[0]$$

El conjunto

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\},$$

con $x_0 \in X$ y $r > 0$, es llamada la bola abierta con centro en x_0 y radio r.

En lo sucesivo también escribiremos B y rB para denotar a $B_1[0]$ y $B_r[0]$, respectivamente.

Definición 1.3.3 *El dual topológico X^*, de un espacio normado $(X, \| \ \|)$, es un espacio de Banach con la norma*

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|;$$

esta norma es llamada la norma inducida por $\| \ \|$.

En el caso de espacios normados se tienen resultados más fuertes que los enunciados en la sección anterior para espacios localmente convexos, por ejemplo tenemos las siguientes versiones de los Teoremas 1.2.3 y 1.2.4.

Teorema 1.3.4 *Si $(X, \|\ \|)$ es un espacio normado, M es un subespacio vectorial de X y $m^* \in M^*$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \|m^*\|$ y $x^*(m) = m^*(m)$ para todo $m \in M$.*

Teorema 1.3.5 *Si $(X, \|\ \|)$ es un espacio normado, M es un subespacio vectorial cerrado de X y $x \in X - M$. Sea δ la distancia de x a M, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1, x^*(x) = \delta > 0$ y $x^*(m) = 0$ para todo $m \in M$.*

Al tomar $M = \{0\}$ se sigue el siguiente caso interesante:

Corolario 1.3.6 *Si $(X, \|\ \|)$ es un espacio normado no trivial y $x \in X$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1, x^*(x) = \|x\|$. De aquí se sigue que*

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|.$$

Asimismo, para los espacios normados tenemos las siguiente propiedad fundamental de la transformación $\widehat{\ }$.

Si $(X, \|\ \|)$ es normado, entonces para cada $x \in X$ se tiene que

$$\widehat{x} : X^* \to K$$

es continua ya que

$$|\widehat{x}(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|,$$

o sea $\widehat{x} \in X^{**}$

La transformación $\widehat{\ } : (X, \|\ \|) \to (X^{**}, \|\ \|)$ es una isometría, es decir $\|x\| = \|\widehat{x}\|$ para todo x en X, y en este caso es llamada la *inmersión canónica de X en X^{**}*.

Debido a que $\widehat{\ }$ es una isometría se sigue que si X es un espacio de Banach, entonces $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**} y por tanto, $\widehat{X}$ es también un espacio de Banach.

A partir de las definiciones dadas en la sección anterior pueden probarse fácilmente los siguientes dos resultados:

Proposición 1.3.7 *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado y X^* su dual. Entonces,*

$$\widehat{\ } : (X, \ \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^{***}))$$

es continua y

$$\widehat{\ } : (X, \ \sigma(X, X^*)) \to \left(\widehat{X}, \sigma\left(\widehat{X}, \widehat{X}^*\right)\right)$$

es un homeomorfismo.

Proposición 1.3.8 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado y X^* su dual. Entonces,*

$$\widehat{\ }: (X, \ \ \sigma(X, X^*)) \to \left(\widehat{X}, w^*\left(\widehat{X}\right)\right)$$

es un homeomorfismo, donde $w^*\left(\widehat{X}\right)$ es la topología inducida en $\widehat{X}$ por la topología w^* de X^{**}, es decir por $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Corolario 1.3.9 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado y X^* su dual. Entonces, $\sigma(X^{**}, X^{***})$ y $\sigma(X^{**}, X^*)$ inducen la misma topología en $\widehat{X}$.*

Demostración. Por las dos proposiciones anteriores la identidad

$$I : \left(\widehat{X}, w^*\left(\widehat{X}\right)\right) \to \left(\widehat{X}, \sigma\left(\widehat{X}, \widehat{X}^*\right)\right)$$

es un homeomorfismo, es decir $\sigma(X^{**}, X^*)$ induce en $\widehat{X}$ una topología equivalente a $\sigma\left(\widehat{X}, \widehat{X}^*\right)$, pero por la Proposición 1.2.7, esta última es la misma que la inducida en $\widehat{X}$ por $\sigma(X^{**}, X^{***})$. $\|$

En ocasiones $\widehat{\ }$ es un homeomorfismo cuando en X y X^{**} se considera la topología de la norma. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.3.10 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Si la inmersión canónica*

$$\widehat{\ }: (X, \| \ \|) \to (X^{**}, \| \ \|)$$

es sobre, es decir, si $\widehat{X} = X^{**}$, entonces se dice que X es un espacio reflexivo.

Teorema 1.3.11 *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si, y sólo si, X^* es reflexivo.*

Demostración. Sean $\widehat{\ }$ la inmersión canónica de X en X^{**} y $\widehat{\ }^*$ la inmersión canónica de X^* en X^{***}. Supongamos que X es reflexivo y sea $x^{***} \in X^{***}$. Definimos $x^* = x^{***} \circ \widehat{\ }$. Así, $x^* : X \to K$, y por ser x^* la composición de operadores lineales y continuos, tenemos $x^* \in X^*$. Sea $x^{**} \in X^{**}$, como $\widehat{X} = X^{**}$, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = \widehat{x}$; de donde,

$$x^{***}(x^{**}) = x^{***}(\widehat{x}) = x^{***} \circ \widehat{\ }(x) = x^*(x)$$

y

$$\widehat{x^*}^*(x^{**}) = x^{**}(x^*) = \widehat{x}(x^*) = x^*(x).$$

Es decir,

$$x^{***}(x^{**}) = \widehat{x^*}^*(x^{**}),$$

para todo $x^{**} \in X^{**}$. Por tanto, $x^{***} = \widehat{x^*}^*$ y X^* es reflexivo.

Inversamente, supongamos que X^* es reflexivo y que X no lo es, o sea, $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado y propio de X^{**}. Por el Teorema 1.2.4 existe $x_0^{***} \in X^{***}$ tal que $x_0^{***} \neq 0$ y $x_0^{***}(\widehat{x}) = 0$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Por ser X^* reflexivo, existe $x_0^* \in X^*$ tal que $\widehat{x_0^*} = x_0^{***}$, en particular, $x_0^* \neq 0$. Sea $x \in X$.

$$0 = x_0^{***}(\widehat{x}) = \widehat{x^*}(\widehat{x}) = x_0^*(x),$$

de donde, $x_0^* = 0$, lo que es una contradicción. ||

Teorema 1.3.12 (Alaoglu) *Sea X un espacio normado. La bola unitaria cerrada de X^* es compacta en la topología w^*.*

Corolario 1.3.13 *Un subconjunto A^* del dual X^* de un espacio normado $(X, \| \ \|)$, es compacto en la topología w^* si y sólo si es w^*-cerrado en la topología débil* y $\| \ \|-$acotado.*[1]

Proposición 1.3.14 (Goldstine) *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Denotemos por B y B^{**} a las bolas unitarias cerradas de X y X^{**}, respectivamente. entonces $\widehat{B}$ es denso en B^{**} en la topología w^* de X^{**} (es decir, en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$).*

Corolario 1.3.15 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. $\widehat{X}$ es w^*-denso en X^{**}.*

Teorema 1.3.16 *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si, y sólo si, la bola unitaria cerrada es un compacto en la topología débil.*

Teorema 1.3.17 (del Acotamiento Uniforme) *Sea X un espacio de Banach y sea $A^* \subset X^*$. Supongamos que para cada $x \in X$ la familia de escalares $\{x^*(x) : x^* \in A^*\}$ es acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|x^*\| \leq M$ para toda $x^* \in A^*$.*

Corolario 1.3.18 *Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x^* \in X^*$ la familia de escalares $\{x^*(x) : x \in A\}$ es acotada. Entonces A es acotado en X. es decir, existe M tal que $\|x\| \leq M$ para toda $x \in A$.*

1.4 El Teorema de Eberlein-Šmulian

La siguiente serie de lemas es enunciada y probada para la demostración del teorema que da nombre a esta sección.

[1] Usaremos expresiones tales como w^*-cerrado, $\| \ \|-$ acotado, etc para indicar que el espacio o conjunto tiene la propiedad mencionada con respecto a la topología que se indica.

Lema 1.4.1 *Sea (Z,τ) un espacio topológico $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones escalares, continuas, uniformemente acotadas en Z y que separan puntos de Z, entonces*

$$d(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(z) - f_n(w)|}{2^n}$$

es una distancia en Z y si τ_d es la topología que ella define en Z, entonces la función idéntica $I : (Z,\tau) \to (Z,\tau_d)$ es continua. En particular, si (Z,τ) es compacto, entonces (Z,τ) es metrizable.

Demostración. La convergencia de la serie se sigue del acotamiento uniforme de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ separa puntos de d,

$$d(z,w) = 0 \Longleftrightarrow z = w.$$

Es también fácil ver que d satisface las demás propiedades de una métrica. La sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada en Z, por lo tanto existe $M > 0$ tal que

$$|f_n(z)| < M \text{ para cada } z \in Z.$$

Sean $z_0 \in Z$ y $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4M}$$

y por la continuidad de las funciones f_n, existe una vecindad $V(z_0)$ de z_0 tal que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|f_n(z) - f_n(z_0)|}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } z \in V(z_0).$$

Por tanto

$$d(z,z_0) < \epsilon \text{ si } z \in V(z_0),$$

es decir, $I : (Z,\tau) \to (Z,\tau_d)$ es continua, o lo que es lo mismo $\tau_d \subset \tau$. Cuando (Z,τ) es compacto, entonces $\tau \subset \tau_d$ y por tanto, $\tau = \tau_d$. ||

Lema 1.4.2 *Sea X un espacio de Banach y supongamos que el dual X^* de X contiene una sucesión acotada y total $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Entonces la topología débil en todo subconjunto débilmente compacto de X es metrizable.*

Demostración. Aplicamos el lema anterior. ||

Lema 1.4.3 *Sea Z un subespacio de dimensión finita del dual Y^* de un espacio de Banach no trivial Y. Existe un conjunto finito de elementos $y_1,\dots,y_m \in Y$ de norma 1 tal que*

$$\max_{1\le i\le n} \|y^*(y_i)\| \geq \frac{1}{2}\|y^*\|,$$

para todo y^* en Z.

Demostración. Sea $S = \{y^* \in Z : \|y^*\| = 1\}$, S es compacto por ser Z de dimensión finita, y por tanto, totalmente acotado. Se sigue que existe una $\frac{1}{4}$–red finita de S, es decir, existen $m \in \mathbb{N}$ y $y_1^*, ..., y_m^* \in F$ tales que $S \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{1}{4}}(y_i^*)$, donde $B_{\frac{1}{4}}(y_i^*) = \left\{y^* \in Z : \|y^* - y_i^*\| < \frac{1}{4}\right\}$.
Sean $y_1, \ldots, y_m \in Y$ de norma 1 tales que

$$\frac{3}{4} < |y_i^*(y_i)|;$$

estos puntos existen ya que $\|y_i^*\| = \sup_{\|y_i\|=1} |y_i^*(y_i)| = 1$.
Sea $y^* \in S$, existe $1 \le i_0 \le m$ tal que $\|y^* - y_{i_0}^*\| < \frac{1}{4}$, de donde

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} < |y_{i_0}^*(y_{i_0})| - \|y^* - y_{i_0}^*\| \le |y_{i_0}^*(y_{i_0})| - |y^*(y_{i_0}) - y_{i_0}^*(y_{i_0})|$$

por lo que

$$\frac{1}{2} < |y_{i_0}^*(y_{i_0}) + y^*(y_{i_0}) - y_{i_0}^*(y_{i_0})|$$

y por tanto,

$$\frac{1}{2} < |y^*(y_{i_0})| \le \max_{1 \le i \le m} |y^*(y_i)|.$$

O sea, el lema es válido para todo $y^* \in S$. En general, dado $y^* \in Z$, distinto de 0, tenemos que $\frac{y^*}{\|y^*\|} \in S$. De la desigualdad anterior se sigue que

$$\frac{1}{2} < \max_{1 \le i \le m} \left|\frac{y^*}{\|y^*\|}(y_i)\right| .$$

y entonces,

$$\frac{1}{2}\|y^*\| < \max_{1 \le i \le m} |y^*(y_i)|.$$

Finalmente, si $y^* = 0$ el resultado es obvio. $\|$

Corolario 1.4.4 *En cualquier subespacio de dimensión finita del dual X^* de un espacio de Banach X, la topología de la norma coincide con la topología w^*.*

Lema 1.4.5 *Si $(X, \| \ \|)$ es un espacio normado y separable, entonces X^* es w^*–separable.*

Demostración. Si $X = \{0\}$, entonces es obvia la validez del lema. Supongamos $X \neq \{0\}$ y sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ un conjunto denso y numerable en la bola unitaria cerrada B en $(X, \| \ \|)$; así, $\|a_i\| = 1$ para toda i. Para cada $i \ge 1$ sea $a_i^* \in X^*$ tal que $\|a_i^*\| = 1$ y $|\widehat{a_i}(a_i^*)| > \frac{3}{4}$. Afirmamos que

$$X^* = \overline{S(a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*, ...)}^{w^*},$$

donde $\overline{S(a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*, ...)}^{w^*}$ es la w^*-cerradura del subespacio

$$S(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$$

generado por $(a_i)_{i=1}^{\infty}$. De no cumplirse dicha afirmación, existe

$$x^* \in X^* \text{ tal que } x^* \notin \overline{S(a_1, a_2, ..., a_n, ...)}^{w^*}$$

y por el Teorema 1.2.4, existe $x^{**} : X^* \to K$, funcional lineal y w^*-continua tal que $x^{**}(x^*) \neq 0$ y $x^{**}(a_i) = 0$, para todo $i \geq 1$.
Sabemos (Proposición 1.2.11) que $x^{**} = \widehat{x}$ para algún $x \in X$. Sea $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, por tanto, $\|x_0\| = 1$,

$$x^*(x_0) = \widehat{x_0}(x^*) \neq 0 \text{ y } a_i^*(x_0) = \widehat{x_0}(a_i) = 0$$

para todo $i \geq 1$. Así,

$$|\widehat{a_i}(a_i^*) - \widehat{x_0}(a_i^*)| = |\widehat{a_i}(a_i^*)| > \frac{3}{4}$$

si $i \geq 1$ y

$$\|a_i - x_0\| = \left\|\widehat{a_i - x_0}\right\| \geq \frac{3}{4}$$

para todo $i \geq 1$, lo que contradice la densidad de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ en B.
Así, hemos probado la afirmación. Finalmente, las *combinaciones lineales con coeficientes racionales*, es decir con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (o bien $\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ si $K = \mathbb{C}$) de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ forman un conjunto w^*-denso y numerable en X^*. $\|$

Lema 1.4.6 *Si $\{x_i^*\}_{i \in I}$ es un conjunto w^*-denso y numerable en el dual X^* de un espacio normado $(X, \|\ \|)$, entonces $\{x_i^*\}_{i \in I}$ es total. O sea, si el dual X^* de un espacio normado $(X, \|\ \|)$ es w^*-separable entonces X^* contiene una sucesión total, y esto sucede siempre que X es separable. Más aún, la sucesión total puede tomarse de vectores de norma menor o igual que 1 al dividir, de ser necesario, a x_i^* entre su norma.*

Demostración. Si $X = \{0\}$, entonces es obvia la validez del lema. Supongamos $X \neq \{0\}$ y sea $x \in X$ tal que $x_i^*(x) = 0$ para todo i. Sabemos por el Corolario 1.3.6 que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$. Por la w^*-densidad, dado $\epsilon > 0$ existe $i \geq 1$ tal que $|x_i^*(x) - x^*(x)| < \epsilon$, por lo que $|x^*(x)| < \epsilon$. Así, $\|x\| = |x^*(x)| < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. O sea, $\|x\| = 0$ y por tanto, $x = 0$. $\|$

Lema 1.4.7 *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Supongamos que $A \subset X$ es tal que si $A_0 \subset A$ y A_0 es numerable infinito, entonces A_0 tiene un w-punto de acumulación en X. Entonces $x^*(A)$ es relativamente compacto para todo $x^* \in X^*$.*

Demostración. Sea $x^* \in X^*$. Si $x^*(A)$ es finito, entonces $x^*(A)$ es compacto. Supongamos que $x^*(A)$ es infinito, entonces existe $A_0 \subset A$ numerable infinito tal que $x^*|A_0$ es inyectiva. Por hipótesis, A_0 tiene un $w-$punto de acumulación x_0 en X. Afirmamos que $x^*(x_0)$ es punto de acumulación de $x^*(A_0)$ y por tanto, de $x^*(A)$, por lo que $x^*(A)$ es relativamente compacto. Para probar la afirmación tomamos $\epsilon > 0$ Como

$$V = \{x \in X : |x^*(x) - x^*(x_0)| < \epsilon\}$$

es una $w-$vecindad de x_0, existe $a \in V \cap (A_0 - \{x_0\})$.
Si $x^*(a) \neq x^*(x_0)$, entonces $x^*(a) \in \{\alpha \in K : 0 < |\alpha - x^*(x_0)| < \epsilon\} \cap x^*(A_0)$.
Si $x^*(a) = x^*(x_0)$, entonces consideremos la siguiente $w-$vecindad de x_0,

$$W = \{x \in X : |x^*(x) - x^*(x_0)| < \epsilon, |y^*(x) - y^*(x_0)| < \|a - x_0\|\},$$

donde y^* es la funcional lineal (Corolario 1.3.6) tal que $\|y^*\| = 1$ y

$$y^*(a) - y^*(x_0) = y^*(a - x_0) = \|a - x_0\| > 0.$$

Existe $a_1 \in W \cap (A_0 - \{x_0\})$ y $a_1 \neq a$ ya que $|y^*(a_1) - y^*(x_0)| < \|a - x_0\|$, en tanto que $y^*(a) - y^*(x_0) = \|a - x_0\|$.
Por tanto, $x^*(a_1) \neq x^*(x_0)$ pues $x^*(a) = x^*(x_0)$ y $x^*|A_0$ es inyectiva. De donde,

$$x^*(a_1) \in \{\alpha \in K : 0 < |\alpha - x^*(x_0)| < \epsilon\} \cap x^*(A_0).$$

Así, en resumen, toda bola abierta de K con centro en $x^*(x_0)$ intersecta a $x^*(A_0) - \{x^*(x_0)\}$, y $x^*(x_0)$ es punto de acumulación de $x^*(A_0)$. $\|$

Corolario 1.4.8 *Sea A como en el lema anterior, entonces A es acotado.*

Demostración. Por el lema anterior $x^*(A)$ es acotado para toda $x^* \in X^*$ y por el Corolario del Teorema 1.3.17 se tiene que A es acotado en $(X, \|\ \|)$ que es lo que se quería demostrar. $\|$

Teorema 1.4.9 (Eberlein-Šmulian) *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|\ \|)$. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

i) La cerradura de A en la topología débil es compacta en esa topología (A es $w-$relativamente compacto);

ii) Toda sucesión de elementos en A contiene una subsucesión que converge débilmente a un elemento de X (A es $w-$relativamente compacto por sucesiones);

iii) Todo subconjunto numerable infinito A_0 de A tiene un punto de acumulación $x_0 \in X$ en la topología débil (A es $w-$relativamente BW-compacto).

Demostración

$i) \Rightarrow ii)$. Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en A, y sea X_0 la $\| \ \|$ $-$cerradura del subespacio generado por $(a_i)_{i=1}^{\infty}$. X_0 es un espacio de Banach, en particular X_0 es convexo y $\| \ \|$ $-$cerrado, por tanto, X_0 es $w-$cerrado en X (Corolario 1.2.13). Sea $\overline{A}^w$ la $w-$cerradura de A. Por hipótesis, $\overline{A}^w$ es $w-$compacto y como X_0 es $w-$cerrado, se sigue que $\overline{A}^w \cap X_0$ es $w-$compacto en X. Por la Proposición 1.2.7, sabemos entonces que $\overline{A}^w \cap X_0$ es $\sigma(X_0, X_0^*)$ $-$compacto. Basta tomar las combinaciones lineales con coeficientes racionales de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ para ver que X_0 es separable según la topología de la norma. Por el Lema 1.4.5, sabemos entonces que X_0^* es $\sigma(X_0^*, X_0)$ separable y por tanto, X_0^* tiene una sucesión total y acotada (Lema 1.4.6).
Por el Lema 1.4.2 aplicado a X_0, tenemos que la topología $\sigma(X_0, X_0^*)$ en $\overline{A}^w \cap X_0$ es metrizable. Como en los espacios métricos coincide la compacidad con la compacidad por sucesiones, se sigue que $\overline{A}^w \cap X_0$ es que es $\sigma(X_0, X_0^*)$ $-$compacto por sucesiones. En particular, existe una subsucesión $(a_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que converge a un elemento $a \in \overline{A}^w \cap X_0$ en la topología $\sigma(X_0, X_0^*)$; es decir, $\lim\limits_{k\to\infty} x^*(a_{i_k}) = x_0^*(a)$ para todo $x_0^* \in X_0^*$, y por tanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x^*(a_{i_k}) = x^*(a)$ para todo $x^* \in X^*$, ya que la igualdad se cumple para la restricción x_0^* de x^* a X_0^*. Así, $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge en X según la topología $\sigma(X, X^*)$.

$ii) \Rightarrow iii)$. Sea $A_0 \subset A$ numerable infinito: $A_0 = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge a $x_0 \in X$ según la topología $\sigma(X, X^*)$. Por tanto, dada cualquier vecindad V del cero en esta topología, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in x_0 + V$ si $k \geq K$, y se sigue que x_0 es un punto de acumulación de A_0, pues $x_{n_k} = x_0$ para a lo más un subíndice k.

$iii) \Rightarrow i)$. Supongamos que todo subconjunto numerable infinito de A tiene un punto de acumulación en la topología débil. Por el Corolario 1.4.8, tenemos que A es acotado.

Sea $\widehat{\ }$ la inmersión canónica de X en X^{**} y sea $\overline{\widehat{A}}^{w^*}$ la cerradura de $\widehat{A}$ en la topología débil* de X^{**}, es decir en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$. Si $\overline{A}^w \subset X$, entonces como A es acotado en la norma, la cerradura $\overline{\widehat{A}}^{w^*}$ también lo es; del Corolario 1.3.13 se sigue que $\overline{\widehat{A}}^{w^*}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)-$compacto. Por el Teorema 1.3.8, $\overline{A}^w$ es compacto.

Sólo resta probar que $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subset \widehat{X}$, lo que haremos a continuación. Si A es finito la afirmación es obvia, por tanto supongamos que A es infinito. Sea $x^{**} \in \overline{\widehat{A}}^{w^*}$ y sea $x_1 \in X$ de norma 1; existe $a_1 \in A$ tal que

$$|(x^{**} - \widehat{a_1})(x_1^*)| < 1.$$

Consideremos el espacio $S(x^{**}, \widehat{a_1})$ generado por x^{**} y $\widehat{a_1}$; este espacio es de dimensión finita y por tanto, se sigue del Lema 1.4.3 que existen vectores

$x_2^*, ..., x_{n(2)}^*$ de norma 1 en X^* tales que

$$\max_{2\leq m\leq n(2)} |y^{**}(x_m^*)| \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|$$

para todo y^{**} en $S(x^{**}, \widehat{a_1})$.
Si $x^{**} \neq \widehat{a_1}$, podemos tomar $a_2 \in A$ tal que $a_2 \neq a_1$ y

$$\max_{1\leq m\leq n(2)} |(x^{**} - \widehat{a_2})(x_m^*)| < \frac{1}{2}.$$

y nuevamente por el Lema 1.4.3, existen vectores $x_{n(2)+1}^*, ..., x_{n(3)}^*$ de norma 1 en X^* tales que

$$\max_{n(2)+1\leq m\leq n(3)} |y^{**}(x_m^*)| \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|$$

para todo y^{**} en $S(x^{**}, \widehat{a_1}, \widehat{a_2})$.
Al continuar este proceso obtenemos o una $\widehat{a_i} = x^{**}$, en cuyo caso $x^{**} \in \widehat{X}$, o bien tres sucesiones: una de naturales; $(n(k))_{k=1}^{\infty}$ que es estrictamente creciente otra $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ de elementos unitarios de X^* y una última $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en A, formada por elementos distintos entre sí. Estas sucesiones tienen las siguientes dos propiedades que las relacionan:

$$\max_{n(k-1)+1\leq m\leq n(k)} |y^{**}(x_m^*)| \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\| \text{ para } y^{**} \in S(x^{**}, \widehat{a_1}, ..., \widehat{a_{k-1}})$$

para $k \geq 2$, y donde $n(1) = 1$, y

$$\max_{1\leq m\leq n(k)} |(x^{**} - \widehat{a_k})(x_m^*)| < \frac{1}{k} \text{ para } k = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

En el segundo caso tomamos

$$X_0 = \overline{S(a_1, ..., a_n, ...)}$$

la $\|\ \|$−cerradura del subespacio generado por $\{a_1, ..., a_n, ..\}$. Por hipótesis existe $x_0 \in X$, tal que es un w−punto de acumulación de $\{a_1, ..., a_n, ..\}$. Como X_0 es cerrado según la norma y obviamente convexo, entonces es cerrado en la topología débil de X (Corolario 1.2.13), y por tanto $x_0 \in X_0$. Debido a la continuidad de $\widehat{\ }$ se tiene que

$$\widehat{x_0} \in \overline{S(\widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}, ...)}. \tag{1.2}$$

Como

$$\max_m |y^{**}(x_m^*)| \geq \max_{n(k-1)+1\leq m\leq n(k)} |y^{**}(x_m^*)|,$$

para cualquier $k \geq 1$ y para todo $y^{**} \in \overline{S(x^{**}, \widehat{a_1}, ..., \widehat{a_{k-1}}, ...)}$ se sigue que

$$\max_m |y^{**}(x_m^*)| \geq \frac{1}{2}\|y^{**}\|.$$

para $y^{**} \in \overline{S\left(x^{**}, \widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}, ...\right)}$. Por (1.2)se tiene que $\widehat{x_0} \in \overline{S\left(x^{**}, \widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}, ...\right)}$, de donde

$$\max_m \left|\left(x^{**} - \widehat{x_0}\right)\left(x_m^*\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left\|\left(x^{**} - \widehat{x_0}\right)\right\|. \tag{1.3}$$

Probaremos que para todo natural p se cumple

$$\max_m \left|\left(x^{**} - \widehat{x_0}\right)\left(x_m^*\right)\right| \leq \frac{2}{p}.$$

Sean m y p dos naturales. Tomemos $p_0 = \max(m, p)$. Como x_0 es un $w-$punto de acumulación de $\{a_1, ..., a_n, ..\}$ se sigue que también lo es de $\{a_{p_0}, ..., a_n, ..\}$, por tanto, existe $k \geq p_0$ tal que

$$|x_i^*(a_k - x_0)| < \frac{1}{p}$$

para $1 \leq i \leq p_0$. Como $1 \leq m \leq p_0$, tenemos

$$|x_m^*(a_k - x_0)| < \frac{1}{p}.$$

Por otra parte, $n(k) \geq k \geq p_0 \geq m$; por lo que de la desigualdad (1.1) se sigue

$$\left|\left(x^{**} - \widehat{a_k}\right)\left(x_m^*\right)\right| < \frac{1}{k} < \frac{1}{p_0} \leq \frac{1}{p}.$$

Así, de las dos últimas desigualdades obtenemos:

$$\left|\left(x^{**} - \widehat{x_0}\right)\left(x_m^*\right)\right| \leq \left|\left(x^{**} - \widehat{a_k}\right)\left(x_m^*\right)\right| + |x_m^*(a_k - x_0)| \leq \frac{2}{p}$$

como habíamos afirmado. De esto y de la desigualdad (1.3) se sigue entonces que

$$\left\|\left(x^{**} - \widehat{x_0}\right)\right\| < \frac{4}{p},$$

para todo natural p; de donde $x^{**} = \widehat{x_0}$ y $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subset \widehat{X}$. $\|$

1.5 La Universalidad del espacio de Banach C(0,1)

El resultado principal de esta sección se conoce como el Teorema de Banach-Mazur. Se presenta aquí, y no en la sección dedicada a espacios de Banach porque su prueba requiere resultados que aparecen en la sección precedente.

Lema 1.5.1 *Todo espacio métrico y compacto es una imagen continua del conjunto ternario de Cantor.*

Lema 1.5.2 *Sea X un espacio separable de Banach. La topología w^* en la bola unitaria cerrada B^* de X^* es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema de Alaoglu, el conjunto B^* es w^*−compacto. Si $\{x_n\}$ es un conjunto numerable y denso en la bola unitaria cerrada B de X, entonces $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones escalares. w^*−continuas, uniformemente acotadas en B^* y que separa puntos de B^*. El resultado se sigue del Lema 1.4 1 aplicado a (B^*, w^*). ||

Teorema 1.5.3 *Todo espacio de Banach separable X es isométrico a un subespacio cerrado de $C([0,1])$.*

Demostración. Por los 2 lemas inmediatos anteriores existe una función continua

$$Ca \rightarrow B^* \tag{1.4}$$
$$t \rightarrow x_t^* \tag{1.5}$$

del conjunto ternario de Cantor Ca al espacio métrico compacto (B^*, w^*). Para alguna $x \in X$ definimos la función

$$y_x(t) = x_t^*(x) \text{ para cada } t \in Ca,$$

la cual es una función continua en Ca, ya que si $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Ca que converge a t, entonces, por la continuidad de la función (1.4) tenemos, $x_{t_n}^* \xrightarrow{w^*} x_t^*$ y, en particular, $y_x(t_n) = x_{t_n}^*(x)$ converge a $y_x(t) = x_t^*(x)$. Extendemos y_x a $[0,1]$ definiéndola linealmente en la cerradura de los intervalos abiertos que son suprimidos en $[0,1]$ para formar Ca. Esta extensión, que seguimos denotando por y_x, es continua en $[0,1]$ y es claro que

$$\sup_{t \in Ca} |y_x(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |y_x(t)|. \tag{1.6}$$

Así. hemos definido una transformación

$$T : X \rightarrow C(0,1)$$

$$x \rightarrow y_x$$

la cual es claramente lineal.
Para ver que T es una isometría, dado $x \in X$ escogemos $x^* \in B^*$ tal que $x^*(x) = \|x\|$ Existe $s \in Ca$ tal que $x^* = x_s^*$. De donde,

$$|y_x(s)| = |x_s^*(x)| = \|x\|$$

y como

$$|y_x(t)| = |x_t^*(x)| = \|x_t^*\| \, \|x\| \leq \|x\|$$

para todo $t \in Ca$, se sigue de (1.6) que $\|y_x\| = \|x\|$. Por consiguiente, X es isométrico al espacio cerrado $T(X)$ de $C(0,1)$ ||

1.6 Polares, Anuladores y Operadores Adjuntos

Sea X un espacio vectorial topológico y sea $A \subset X$, la polar A^o de A es el conjunto

$$A^o = \{x^* \in X^* : |x^*(a)| \leq 1 \text{ para toda } a \in A\}.$$

Teorema 1.6.1 *Sea X un espacio vectorial topológico y sean $A, B \subset X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

i) Si $A \subset B$ entonces $B^o \subset A^o$;

ii) $(A \cup B)^o = A^o \cap B^o$;

iii) $\widehat{A} \subset A^{oo}$.

Lema 1.6.2 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea $A \subset X$. Entonces A^o es w^*−cerrado. Si A es finito, entonces $\{x^* \in X^* : |x^*(a)| < 1, \text{ si } a \in A\}$ es w^*−abierto.*

Demostración. La primera parte del lema se ve inmediatamente al escribir $A^o = \bigcap_{a \in A} \{x^* \in X^* : |\widehat{a}(x^*)| \leq 1\}$, pues sabemos que cada $\widehat{x}$, $x \in X$, es w^*−continua. Y por las mismas razones se sigue la segunda parte. ||

Nota 1.6.3 *Sea X un espacio vectorial topológico, entonces la topología w^* tiene por base de vecindades del cero a la colección*

$$\{A^o : A \subset X \text{ es finito y no vacío}\},$$

ya que dados $x_1, ..., x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, tenemos

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\} = \left\{\frac{x_i}{\epsilon} : 1 \leq i \leq n\right\}^o.$$

Teorema 1.6.4 (de la Bipolar) *Sea X un espacio vectorial topológico. Si A es un subespacio de X, entonces A^{oo} es la $\sigma(X^{**}, X^*)$−cerradura de $\widehat{A}$.*

Demostración. Se demostrará primero que $A^{oo} \subset \overline{\widehat{A}}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. Sea

$$x_0^{**} \in X^{**} - \overline{\widehat{A}}^{\sigma(X^{**},X^*)}.$$

Existe $x^* \in X^*$ tal que $x_0^{**}(x^*) > 1$ y $x^{**}(x^*) = 0$ para toda $x^{**} \in \overline{\widehat{A}}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. En particular, si $\widehat{x} \in \widehat{A}$

$$\widehat{x}(x^*) = x^*(x) = 0$$

y por tanto $x^* \in A^o$, y como $x_0^{**}(x^*) > 1$, entonces $x_0^{**} \notin A^{oo}$. La otra contención se sigue del lema anterior. ||

Definición 1.6.5 *Sea X un espacio vectorial topológico y sean $A \subset X$ y $C \subset X^*$ dos conjuntos. El anulador $A^\perp \subset X^*$ de A es el conjunto*

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para toda } x \in A\}.$$

El preanulador ${}^\perp C \subset X$ de C, es el conjunto

$${}^\perp C = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ para toda } x^* \in C\}.$$

Es claro que $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0\}$ y por tanto, $A^\perp$ es cerrado en la topología w^*. También es claro que ${}^\perp C$ es cerrado en la norma. En el caso que A y C son subespacios de X y X^* respectivamente, entonces $A^\perp$ y ${}^\perp C$ también son espacios vectoriales. Asimismo, $A^o = A^\perp$ si A es un subespacio de X.

Proposición 1.6.6 *Sea $Z \subset X^*$ un subespacio, entonces $\left({}^\perp Z\right)^\perp$ es la cerradura de Z en la topología w^* Si V es un subespacio de dimensión finita de X^*, entonces $\left({}^\perp V\right)^\perp = V$*

Demostración. Sea $x^* \in Z$, entonces $x^*(x) = 0$ para toda $x \in \left({}^\perp Z\right)$, es decir, $x^* \in \left({}^\perp Z\right)^\perp$. Entonces

$$Z \subset \left({}^\perp Z\right)^\perp \text{ y } \overline{Z}^{w^*} \subset \left({}^\perp Z\right)^\perp$$

ya que $\left({}^\perp Z\right)^\perp$ es w^*-cerrado.
Sea $x^* \notin \overline{Z}^{w^*}$, por el Teorema 1.2.4 existe $\widehat{x} \in \widehat{X}$ tal que $\widehat{x}(x^*) = 1$ y $\widehat{x}\left(\overline{Z}^{w^*}\right) = \{0\}$, por tanto, $x^* \notin \left({}^\perp Z\right)^\perp$.
Si V es un subespacio de dimensión finita, entonces, por el Corolario 1.4.4, $\overline{V}^{w^*} = \overline{V}$; de donde se sigue el resultado. ||

Teorema 1.6.7 *Sea X un espacio de Banach y $M \subset X$ un subespacio cerrado, entonces la transformación lineal*

$$M^* \to X^*/M^\perp$$

$$m^* \to \overline{x^*}$$

donde x^* es una extensión lineal y continua de m^* a X, es una isometría suprayectiva, llamada la isometría canónica entre esos dos espacios.

Demostración. En $X^*/M^\perp$ se toma la norma cociente:

$$\|\overline{x^*}\| = \inf_{y^* \in M^\perp} \|x^* + y^*\|.$$

Es claro que la transformación está bien definida, es lineal y es suprayectiva. Es una isometría ya que

$$\|\overline{x^*}\| \le \|x^*\| = \|m^*\|,$$

donde x^* es una extensión de Hahn–Banach de m^* y, por otra parte, es claro que

$$\|m^*\| \leq \|x^*\|$$

para toda extensión continua x^* de m^*; por consiguiente

$$\|m^*\| \leq \|\bar{x}^*\|. \ \|$$

Corolario 1.6.8 *Si V es un subespacio de dimensión finita de X^*, entonces hay una isometría suprayectiva entre X^*/V y $\left({}^{\perp}V\right)^*$. Si V es de dimensión finita $n \geq 1$, digamos $V = S\left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)$, entonces*

$$d\left(x^*, S\left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)\right) = \left\|x^* \ \left|^{\perp} S\left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)\right.\right\|$$

para todo $x^* \in X^*$.

Demostración. Por la proposición y el Teorema inmediatos anteriores se tiene: $\left({}^{\perp}V\right)^{\perp} = V$ y existe una isometría suprayectiva de $X^*/\left({}^{\perp}V\right)^{\perp}$ en $\left({}^{\perp}V\right)^*$. Para la prueba de la segunda afirmación observamos que

$$d\left(x^*, S\left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)\right) = \left\|\overline{x^*}\right\|. \ \|$$

Definición 1.6.9 *Sean X y Y dos espacios normados, al espacio de todos los operadores (transformaciones) lineales y continuas de X en Y lo denotamos por $B(X,Y)$ y en él definimos la norma $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$. Con esta norma $B(X,Y)$ es de Banach si, y sólo si, Y es de Banach.*

Teorema 1.6.10 *Sean X y Y dos espacios normados, para $T \in B(X,Y)$ definimos el operador lineal $T^* : Y^* \to X^*$ llamado el operador adjunto de T, mediante la siguiente regla:*

$$T^*(y^*) = y^* \circ T.$$

T^* es continuo y $\|T\| = \|T^*\|$.

Demostración. Sea $y^* \in Y^*$, definamos $T^*(y^*) = y^* \circ T$, así $T^*(y^*) \in X^*$. Claramente T^* es lineal y

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1,\ \|y^*\|=1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|x\|=1;\ \|y^*\|=1} |T^*(y^*)(x)|.$$

Así,

$$\|T\| = \sup_{\|y^*\|=1} \|T^*(y^*)\| = \|T^*\|. \ \|$$

El adjunto $(T^*)^* : X^{**} \to Y^{**}$ de T^* es llamado el *doble adjunto* de T y se denota como T^{**}. Este operador T^{**} puede interpretarse como una extensión del operador $T : X \to Y$ ya que:

$$T^{**}(\widehat{x})(y^*) = \widehat{x}(T^*(y^*)) = T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) = \widehat{T(x)}(y^*)$$

para todo $y^* \in Y^*$ y $x \in X$. O sea.

$$T^{**}(\widehat{x}) = \widehat{T(x)}. \tag{1.7}$$

De esta igualdad se sigue además que T^{**}tiene la propiedad

$$T^{**}\left(\widehat{X}\right) \subset \widehat{Y}, \text{ es decir } \widehat{X} \subset T^{**-1}\left(\widehat{Y}\right). \tag{1.8}$$

Proposición 1.6.11 *Sea $T \in B(X,Y)$. Entonces T^{**} es un operador acotado con $\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$ y*

$$T^{**} : (X^{**}, \sigma(X^{**}. X^*)) \to (Y^{**}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$$

es un operador continuo, lo que se expresa diciendo que T^{**} es w^*-continuo.

Definición 1.6.12 *Sean X, Y y Z espacios de Banach, y sean $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ operadores lineales y continuos, entonces $T^*S^* = (ST)^*$ y además, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, si $T^{-1} : Y \to X$ existe.*

Sea $T : X \to Y$ un operador, se denotará por $N(T)$ *al núcleo de* T y por $R(T)$ *al rango de* T.

Teorema 1.6.13 *Sean X y Y espacios de Banach y sea $T \in B(X,Y)$. Entonces:*

i) $N(T^*) = R(T)^{\perp}$;

ii) $N(T) = {}^{\perp}R(T^*)$.

Demostración. *i)* $y^* \in N(T^*) \iff T^*(y^*) = 0 \iff T^*(y^*)(x) = 0$, para todo $x \in X \iff y^*(T(x)) = 0$, para todo $x \in X \iff y^* \in R(T)^{\perp}$.

ii) $x \in N(T) \iff T(x) = 0 \iff y^*(T(x)) = 0$, para todo $y^* \in Y^* \iff T^*(y^*)(x) = 0$. para todo $y^* \in Y^* \iff x \in {}^{\perp}R(T^*)$. ||

Teorema 1.6.14 *[19]Sean X y Y espacios de Banach y sea $T \in B(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $R(T)$ *es cerrado;*

ii) $R(T^*)$ *es w^*-cerrado;*

iii) $R(T^*)$ *es cerrado.*

1.7 Operadores compactos y débilmente compactos.

Los siguientes resultados se presentan por su utilidad en el capítulo 4. Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Con U_X o simplemente U denotamos a la bola abierta unitaria de X.

Definición 1.7.1 *Decimos que T es compacto si $T(U)$ es relativamente compacto en Y.*

Proposición 1.7.2 *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) *T es compacto;*

ii) *La imagen bajo T de cualquier conjunto acotado es un conjunto relativamente compacto;*

iii) *Dada cualquier sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, la sucesión $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente en Y;*

iv) *$T(U)$ es totalmente acotado.*

Proposición 1.7.3 *Sea Z un espacio de Banach y $S \in B(Y,Z)$. Si S o T son operadores compactos entonces ST es compacto.*

Demostración. Como S y T son operadores continuos, mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados y conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente compactos; de esto se sigue inmediatamente el resultado. $\|$

Teorema 1.7.4 *T es compacto si y sólo si T^* es compacto.*

Lema 1.7.5 *Dado cualquier conjunto K totalmente acotado en X, existe una sucesión $(x_n)_{n-1}^{\infty}$ en X que converge a cero y tal que toda $u \in K$ es de lo forma $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} x_{n_j}$ para alguna subsucesión $\left(x_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Sea $K = K_1$. Como K es totalmente acotado existe un conjunto finito $D_1 \subset K_1$ tal que

$$K_1 \subset D_1 + \frac{1}{4}U.$$

Sea

$$K_2 = (K_1 - D_1) \cap \frac{1}{4}U,$$

donde $K_1 - D_1 = \{x - y : x \in K_1, y \in D_1\}$. K_2 es un conjunto totalmente acotado por estar contenido en K_1 y por tanto, existe un conjunto finito $D_2 \subset K_2$ tal que

$$K_2 \subset D_2 + \frac{1}{4^2}U.$$

Sea

$$K_3 = (K_2 - D_2) \cap \frac{1}{4^2}U,$$

existe un conjunto finito $D_3 \subset K_3$ tal que

$$K_3 \subset D_3 + \frac{1}{4^3}U.$$

Continuando este proceso obtenemos una sucesión $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjunto finitos y una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos totalmente acotados que satisfacen las siguientes propiedades:

$$D_n \subset K_n \subset D_n + \frac{1}{4^n}U$$

y

$$K_{n+1} = (K_n - D_n) \cap \frac{1}{4^n}U \subset \frac{1}{4^n}U.$$

Sea $u \in K$, existe $z_1 \in D_1$ tal que $u - z_1 \in K_2$. De la misma manera, existen $z_2 \in D_2$ y $z_3 \in D_3$ tales que $u - z_1 - z_2 \in K_3$ y $u - z_1 - z_2 - z_3 \in K_4$. Al continuar el proceso obtenemos

$$u - \sum_{j=1}^{n} z_j \in K_{n+1} \text{ donde } z_j \in D_j,$$

es decir,

$$u - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} y_j \in K_{n-1} \text{ donde } y_j = 2^j z_j \in 2^j D_j$$

Como $K_{n+1} \subset \frac{1}{4^n}U$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} y_j \right\| = 0,$$

o sea, $u = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} y_j$. Por otro lado, como todos los conjuntos $2^j D_j$ son finitos, podemos presentarlos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 2D_1 &= \{x_1, ..., x_{k_1}\}, \\ 2^2 D_2 &= \{x_{k_1+1}, ..., x_{k_2}\}, \\ &\vdots \\ 2^n D_n &= \left\{x_{k_{n-1}+1}, .., x_{k_n}\right\}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

y se sigue que

$$2^n D_n \subset 2^n K_n \subset 2^n \frac{1}{4^{n-1}} U \subset 2^n \frac{1}{4^n} U = \frac{1}{2^n} U$$

es decir, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por (1.9), es una sucesión que converge a cero y tomando $x_{n_j} = y_j$ tenemos $u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} x_{n_j}$. ||

Teorema 1.7.6 *Los siguientes propiedades son equivalentes:*

i) T es compacto;

ii) Existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que converge a cero en la norma y tal que
$$\|T(x)\| \leq \sup_{n \geq 1} |x_n^*(x)| \text{ para todo } x \in X;$$

iii) Existe un subespacio cerrado $M \subset c_0$, un operador R compacto de X en M y $S \in B(M, Y)$ tal que $T = SR$.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Como T es compacto, por el Teorema 1.7.4, T^* es compacto, es decir $T^*(U_{Y^*})$, donde U_{Y^*} es la bola unitaria abierta en Y^*, es totalmente acotado. Por el lema 1.7.5, existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que converge a cero en norma y tal que cada $u^* \in T^* U_{Y^*}$ es de la forma

$$u^* = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n_j}^* \text{ con } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = 1.$$

Sea $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{y^* \in U_{Y^*}} |y^*(T(x))| = \sup_{y^* \in U_{Y^*}} |T^*(y^*)(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sup_n |x_n^*(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sup_n |x_n^*(x)| \\ &\leq \sup_n |x_n^*(x)|. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Supongamos que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión nula en X^* tal que

$$\|T(x)\| \leq \sup_n |x_n^*(x)|$$

para todo $x \in X$. Se sigue que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es acotada y converge a cero puntualmente.

Sea $R : X \to c_0$ el operador definido como $R(x) = (x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}$. R es claramente lineal y si $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|R(x)\| = \|(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}\| =$$

$$\sup_n |x_n^*(x)| \leq \sup_n \|x_n^*\| \|x\| \leq \sup_n \|x_n^*\| .$$

Por tanto,

$$\|R\| \leq \sup_{n>1} \|x_n^*\| .$$

Sea $\epsilon > 0$. existen $n \geq 1$ y $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tales que

$$\sup_{n\geq 1} \|x_n^*\| - \epsilon < |x_n^*(x)| \leq \|R(x)\| \leq \|R\|$$

por tanto, $\sup\limits_{\|x\|=1} |x_n^*(x)| \leq \|R\|$ y entonces

$$\|R\| = \sup_n \|x_n^*\|$$

Además, $\|T(x)\| \leq \sup\limits_n |x_n^*(x)| = \|R(x)\|$ para toda $x \in X$. Sea

$$K = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : |x_n| \leq \|x_n^*\| \text{ para toda } n \geq 1\} .$$

Afirmamos que K es compacto en c_0. Sea

$$(\overline{x}_m)_{m=1}^{\infty} = ((x_{mn})_{n=1}^{\infty})_{m=1}^{\infty}$$

una sucesión en c_0 que converge a $x = (x_1, x_2, ...)$. Para cada $m \geq 1$, $|x_{mn}| \leq \|x_n^*\|$ para todo $n \geq 1$ y por tanto, $|x_n| \leq \|x_n^*\|$ para todo $n \geq 1$, es decir, K es cerrado.

Sea $\epsilon > 0$. existe $N > 0$, tal que $\|x_n^*\| < \epsilon$ si $n > N$. El conjunto K_N de $N-$adas obtenido al truncar a partir de $N+1$ a las sucesiones de K , es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$(o $\mathbb{C}^N$) y por tanto, totalmente acotado.

Si consideramos una $\epsilon-$red finita de K_N y a cada uno de sus elementos lo completamos con 0 para obtener una sucesión, entonces conseguimos una $\epsilon-$red finita de K, el cual es por tanto un conjunto totalmente acotado, y compacto por ser cerrado.

Como $R(U_X) \subset K$, $\overline{R(U_X)}$ es compacto, es decir, R es compacto. Como $\|T(x)\| \leq \|R(x)\|$ para toda $x \in X$, se sigue que $N(R) \subset N(T)$ y por tanto el operador

$$S : R(X) \subset c_0 \to Y$$

tal que $S(R(x)) = Tx$ está bien definido y es continuo. Como $T = SR$, $\|SR(x)\| = \|T(x)\| \leq \|R(x)\|$ y se sigue que S es continuo en $R(X)$. Extendemos S a $\overline{R(X)}$. Sea $M = \overline{R(X)}$, se cumple que R es un operador compacto de X en M y $S \in B(M, Y)$ es tal que $T = SR$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Es inmediata a partir de la proposición 1.7.3. $\|$

Definición 1.7.7 *Se dice que T es un operador débilmente compacto si $T(U)$ es relativamente débilmente compacto en Y, es decir si $\overline{T(U)}^{w}$ es $w-$compacto en Y.*

Obviamente todo operador compacto es débilmente compacto. Sin embargo el operador identidad

$$I : \ell^2 \to \ell^2$$

es débilmente compacto (Teorema 1.3.16) y no es compacto.

Teorema 1.7.8 *T es un operador débilmente compacto si, y sólo si,*

$$T^{**-1}\left(\widehat{Y}\right) = X^{**}.$$

Demostración. Supongamos que $T^{**-1}\left(\widehat{Y}\right) = X^{**}$. Por la Proposición 1.3.8 el operador

$$\widehat{\ }^{Y\,-1} : \left(\widehat{Y}, \sigma\left(Y^{**}, Y^{*}\right)\right) \to (Y, \ w)$$

es continuo, donde $\widehat{\ }^{Y} : Y \to Y^{**}$ es la inmersión canónica de Y en Y^{**}. Por tanto,

$$\widehat{\ }^{Y\,-1} \circ T^{**} : \left(X^{**}, \sigma\left(X^{**}, X^{*}\right)\right) \to (Y, \ w)$$

es continuo; de donde $\widehat{\ }^{Y\,-1} \circ T^{**}\left(B^{**}\right)$ es $w-$compacto en Y,donde B^{**} es la bola unitaria cerrada de X^{**}. Así $\widehat{\ }^{Y\,-1} \circ T^{**}\left(\widehat{U}\right)$ es $w-$relativamente compacto. Finalmente, como

$$\widehat{\ }^{Y\,-1} \circ T^{**} \circ \widehat{\ }^{X} = T \text{ (ver 1.7)},$$

entonces $T(U)$ es $w-$relativamente compacto.
Inversamente, supongamos que T es débilmente compacto, entonces

$$\overline{T(U)}^{\sigma(Y,Y^{*})},$$

y por tanto, $\overline{T(B)}^{\sigma(Y,Y^{*})}$ son compactos, donde B es la bola unitaria cerrada de X. Por la Proposición 1.3.7 y el Corolario 1.3.9 tenemos que

$$\overline{\widehat{T(B)}}^{\sigma\left(\widehat{Y},\widehat{Y}^{*}\right)} = \overline{\widehat{T(B)}}^{\sigma(Y^{**},Y^{***})}$$

es compacto.
Por la convexidad de $T(B)$

$$\overline{\widehat{T(B)}}^{\sigma(Y^{**},Y^{***})} = \overline{\widehat{T(B)}}$$

y por el Teorema de Goldstine $T^{**}\left(B^{**}\right) \subset \overline{T^{**}\left(\widehat{B}\right)}^{\sigma(Y^{**},Y^{*})}$.
De lo anterior y por la Proposición 1.6.11 tenemos

$$T^{**}\left(B^{**}\right) \subset \overline{T^{**}\left(\widehat{B}\right)}^{\sigma(Y^{**},Y^{*})} = \overline{\widehat{T(B)}}^{\sigma(Y^{**},Y^{*})} = \overline{\widehat{T(B)}} \subset \widehat{Y}$$

y así $T^{**}\left(X^{**}\right) \subset \widehat{Y}$. ‖

1.8 La topología acotada-w*. El Teorema de Krein-Šmulian

Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio de normado y $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$.

Definición 1.8.1 *La topología acotada–w^* en X^*, que denotamos por bw^*, es la topología en X^* más fuerte que induce la misma topología que w^* en cada subconjunto $\| \ \|$–acotado de X^*. Por tanto, $G \subset X^*$ es bw^*–abierto si $G \cap A$ es abierto en la topología inducida por w^* en A para todo $\| \ \|$–acotado $A \subset X^*$. Esto equivale a decir que $G \subset X^*$ es bw^*–abierto si y sólo si $G \cap aB^*$ es abierto en la topología inducida por w^* en cada bola cerrada $aB^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq a\}$, con $a > 0$.*

Observación 1.8.2 *Es obvio que $w^* \subset bw^*$. En particular las polares de subconjuntos de X y los múltiplos de la bola unitaria cerrada B^* de X^* son bw^*–cerrados.*

De la observación anterior y del Lema 1.6.2 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 1.8.3 *Sea $A \subset X$, la polar*

$$A^o = \{x^* \in X^* : |x^*(a)| \leq 1, a \in A\}$$

es bw^*–cerrada. Si A es finito, entonces

$$\{x^* \in X^* : |x^*(a)| < 1, a \in A\}$$

es bw^*–abierto

Lema 1.8.4 *Sea G una vecindad abierta del 0 en la topología bw^*. Sea n un natural, si $A_n \subset X$ es un conjunto finito tal que $A_n^o \bigcap nB^* \subset G$, donde $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$ es la bola unitaria cerrada en X^*, entonces existe un conjunto finito $C_n \subset X$ tal que*

$$(A_n \cup C_n)^o \bigcap (n+1)B^* \subset U \ \ y \ \ \|x\| \leq \frac{1}{n}$$

si $x \in C_n$.

Demostración. Por ser $X^* - G$ un cerrado en la topología bw^*, tenemos que $(n+1)B^* \cap (X^* - V)$ es w^*–cerrado en X^*.
Sea

$$\mathcal{F}_n = \left\{ C \subset X : C \text{ es finito y } \|x\| \leq \frac{1}{n} \text{ si } x \in C \right\},$$

y supongamos que no existe C_n con la propiedad enunciada. Afirmamos que entonces la familia de conjuntos w^*–cerrados

$$\{(A_n \cup C)^o \cap (n+1)B^* \cap (X^* - V) : \ C \in \ \mathcal{F}_n\}$$

tiene la propiedad de intersección finita. Y como todos ellos están contenidos en el w^*–compacto $(n+1)B^*$, tendremos que

$$\bigcap_{C\subset \mathcal{F}_n} (A_n \cup C)^o \cap (n+1)B^* \cap (X^* - V) \neq \emptyset. \tag{1.10}$$

En efecto, si $m \in \mathbb{N}$ y $C_1, ...C_m \in \mathcal{F}_n$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i \in \mathcal{F}_n$, y por nuestra suposición,

$$\left(A_n \cup \bigcup_{i=1}^{m} C_i\right)^o \cap (n+1)B^* \cap (X^* - V) \neq \emptyset,$$

y como $\left(A_n \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i\right)^o = \bigcap\limits_{i=1}^{m} (A_n \cup C_i)^o$, se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{m} ((A_n \cup C_i)^o \cap (n+1)B^* \cap (X^* - V)) \neq \emptyset.$$

Lo que prueba que

$$\{(A_n \cup C)^o \cap (n+1)B^* \cap (X^* - V) : \ C \in \ \mathcal{F}_n\}$$

tiene la propiedad de intersección finita y por tanto, se satisface 1.10.

Sea $x^* \in (A_n \bigcup C)^o \bigcap (n+1)B^* \bigcap (X^* - U)$ para todo $C \in \mathcal{F}_n$. En particular,

$$x^* \in \left(A_n \bigcup \{x\}\right)^o \bigcap (n+1)B^* \bigcap (X^* - V)$$

si $\|x\| \leq \frac{1}{n}$. Por consiguiente, $\|x^*(x)\| \leq n$ si $\|x\| \leq 1$ y así

$$x^* \in A_n^o \cap nB^* \cap (X^* - V),$$

lo que contradice que $A_n^o \cap nB^* \subset V$. ||

Proposición 1.8.5 *Un sistema fundamental de vecindades abiertas del cero para la topología bw^* consiste de los conjuntos de la forma*

$$V_{(x_i)} = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < 1, i \geq 1\}$$

donde $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a cero.

Demostración. Es claro que si $a > 0$, entonces

$$V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}} \cap aB^* = \{x^* \in X^* : |x^*(x)| < 1, x \in A\} \cap aB^*$$

donde $A = \left\{x \in \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \|x\| \geq \frac{1}{a}\right\}$, el cual es un conjunto finito ya que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a cero. Del Corolario 1.8.3 se sigue que

$V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}} \cap aB^*$ es w^*−abierto en aB^* y por tanto, $V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}$ es bw^*−abierto. Como es claro que $0 \in V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}$, se sigue que $V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}$ es una vecindad abierta de 0 en la topología bw^*. Por otra parte, sea V una vecindad abierta del origen en la topología bw^*. Así, por la definición de esta topología y la Nota 1.6.3. tenemos que existe un conjunto finito $A_1 \subset X$ tal que

$$A_1^o \cap B^* \subset V \cap B^* \,(\subset V)\,,$$

donde $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$ es la bola unitaria cerrada en X^*. Por el lema anterior, existe un conjunto finito C_1 de X tal que

$$(A_1 \cup C_1)^o \bigcap 2B^* \subset V \text{ y } \|x\| \leq \frac{1}{2} \text{ si } x \in C_1$$

Al aplicar nuevamente el lema, en este caso para $n = 2$ y $A_2 = A_1 \cup C_1$, obtenemos un conjunto C_2 tal que

$$(A_2 \cup C_2)^o \bigcap 3B^* \subset V \text{ y } \|x\| \leq \frac{1}{3} \text{ si } x \in C_2$$

Al continuar este proceso inductivo obtenemos una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos de X tal que

$$A_1 = A_1 \text{ y} A_n = A_{n-1} \cup C_{n-1}, \text{ para } n \geq 2$$

Esta sucesión satisface

$$A_n \subset A_{n+1}$$

y

$$A_n^o \cap nB^* \subset V$$

para todo $n \geq 1$.
Sea $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ una enumeración de A y $\epsilon > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ y escogemos $N > \max\left\{n : a_n \in \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i\right\}$. Así, $n \geq N$ implica $\|a_n\| < \epsilon$. Es decir toda enumeración de A es una sucesión convergente a 0. Por consiguiente, para una enumeración cualquiera $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ de A, tenemos

$$V_{(a_i)_{i=1}^{\infty}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^o \cap nB^*) \subset V. \,\|$$

Proposición 1.8.6 *La topología bw^* es una topología localmente convexa en X^*.*

Demostración. Es inmediata a partir del Teorema 1.1.4 aplicado a la familia de convexos $V_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}$ de la proposición anterior. ‖

Por c_0 denotamos al *espacio de sucesiones escalares que convergen a 0.*

Teorema 1.8.7 *Sea X un espacio de Banach. Una funcional x^{**} definida en X^* es w^*−continua si, y sólo si, es bw^*−continua.*

Demostración. Por la observación 1.8.2 toda funcional continua en la topología w^* es bw^*-continua.
Inversamente, sea la funcional lineal $x^{**} : X^* \to K$ continua en la topología bw^*. Para probar su w^* continuidad se hará ver que $x^{**} = \widehat{x}$ para alguna $x \in X$.
Como x^{**} es bw^*-continua, existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en X convergente a cero, tal que

$$|x^{**}(x^*)| \leq 1 \text{ si } |x^*(x_i)| < 1 \text{ para } i = 1, 2, ...$$

De aquí se sigue, considerando nx^*, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$x^{**}(x^*) = 0 \text{ si } x^*(x_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, ... \tag{1.11}$$

Sea $F : X^* \to c_0$ definida así: $F(x^*) = (x^*(x_i))$ y sea $f : F(X^*) \to K$ definida así: $f(F(x^*)) = x^{**}(x^*)$. La funcional lineal f está bien definida en $F(X^*)$ debido a que se cumple 1.11 y es continua ya que

$$|f(F(x^*))| = |x^{**}(x^*)| \leq \|x^{**}\| \|x^*\|.$$

Por tanto, existe $\widetilde{f} : c_0 \to K$ extensión lineal y continua de f. De donde,

$$\widetilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i$$

para alguna sucesión $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ absolutamente convergente y todo $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$.
Así, $x^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^*(x_i)$. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ converge en X por ser absolutamente convergente en un espacio de Banach, tomemos $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$, entonces

$$x^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^*(x_i) = x^*(x)$$

para todo $x^* \in X^*$, es decir, $x^{**} = \widehat{x}$ y por tanto, x^* es w^*-continua. ‖

Teorema 1.8.8 (Krein-Šmulian) *Un conjunto convexo $C \subset X^*$ es w^*-cerrado si y sólo si la intersección $C \cap aB^*$ es w^*-cerrado para todo $a > 0$.*

Demostración. Sea $C \subset X^*$ un conjunto w^*-cerrado, como aB^* es w^*-cerrado para toda $a > 0$ se tiene que $C \cap aB^*$ es w^*-cerrado si $a > 0$.
Inversamente, si $C \cap aB^*$es w^*-cerrado para todo $a > 0$, entonces el conjunto convexo C es bw^*-cerrado. Por el Teorema anterior y la proposición 1.2.12, se sigue que C es w^*-cerrado. ‖

Corolario 1.8.9 *Un subespacio $Z \subset X^*$ es w^*-cerrado si y sólo si su intersección $Z \cap B^*$ es w^*-cerrado.*

Capítulo 2

Bases de Schauder

2.1 Definiciones básicas

Definición 2.1.1 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X, es una base de Schauder si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $K (= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

Observación 2.1.2 *En virtud de la unicidad de los coeficientes a_n, se sigue que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en una base de un espacio de Banach X, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores; en particular, $x_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.*

En este capítulo no consideraremos otro tipo de bases que no sean bases de Schauder y por tanto, nos referiremos a ellas simplemente como bases.

Ejemplos 2.1.3 *Sea s el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares con las operaciones usuales.*

1. La sucesión $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ formada por los elementos $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ es una base de los siguientes espacios:

1.1 El subespacio c_0 de s formado por las sucesiones convergentes a 0 con la norma usual
$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

1.2 Los subespacios ℓ^p de s
$$\ell^p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$
donde $1 \leq p < \infty$, con la norma usual
$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. El espacio $C([0,1])$ de las funciones reales continuas definidas en $[0,1]$ con la norma usual

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ para } f \in C([0,1])$$

tiene por base a la sucesión $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s_0(t) &\equiv 1 \\ s_1(t) &= t \end{aligned}$$

y para $k \geq 2$, tómese el natural n tal que $2^{n-1} < k \leq 2^n$ y tómese

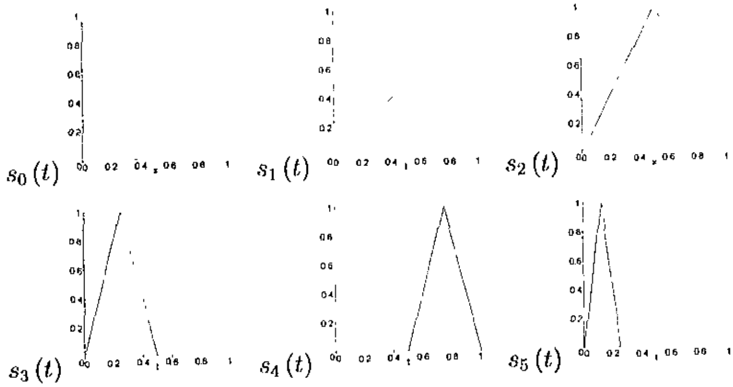
$$s_k(t) = \begin{cases} 2^n\left(t - \left(\frac{2k-2}{2^n} - 1\right)\right) & \text{si } \frac{2k-2}{2^n} - 1 \leq t < \frac{2k-1}{2^n} - 1 \\ 1 - 2^n\left(t - \left(\frac{2k-1}{2^n} - 1\right)\right) & \text{si } \frac{2k-1}{2^n} - 1 \leq t < \frac{2k}{2^n} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, si para $k \geq 2$, n_k es el natural que satisface

$$2^{n_k-1} < k \leq 2^{n_k},$$

entonces $s_k(t)$ es la función que vale 1 en $\frac{2k-1}{2^{n_k}} - 1$, vale 0 en $\frac{2k-2}{2^{n_k}} - 1$ y en $\frac{2k}{2^{n_k}} - 1$, es lineal en los intervalos $\left[\frac{2k-2}{2^{n_k}} - 1, \frac{2k-1}{2^{n_k}} - 1\right]$ y $\left[\frac{2k-1}{2^{n_k}} - 1, \frac{2k}{2^{n_k}} - 1\right]$, y vale 0 en el resto de $[0,1]$.

Para tener una idea más clara de la sucesión $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ damos las gráficas de sus 5 primeros términos:



Para probar la afirmación, consideramos la enumeración

$$d_0 = 0, d_1 = 1, d_k = \frac{2k-1}{2^{n_k}} - 1 \text{ para } k \geq 2,$$

donde n_k es el natural que satisface $2^{n_k-1} < k \leq 2^{n_k}$, del conjunto

$$D = \left\{\frac{a}{2^m} : a \text{ y } m \text{ son enteros no negativos y } a \leq 2^m\right\}$$

de los racionales diádicos en $[0,1]$ y suponemos que $f \in C([0,1])$. Definimos la siguiente sucesión $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ en $C([0,1])$:

$$\begin{aligned} p_0 &= f(d_0)\, s_0 \\ p_1 &= p_0 + (f(d_1) - p_0(d_1))\, s_1 \\ p_2 &= p_1 + (f(d_2) - p_1(d_2))\, s_2 \\ p_3 &= p_2 + (f(d_3) - p_2(d_3))\, s_3 \\ p_4 &= p_3 + (f(d_4) - p_3(d_4))\, s_4 \\ p_5 &= p_4 + (f(d_5) - p_4(d_5))\, s_5 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

Por inducción se puede probar que para $k \geq 0$, la función p_k coincide con f en todos los puntos d_j para $0 \leq j \leq k$ y que es lineal por pedazos.

Observamos que para cada entero $m \geq 0$, la función p_m es una combinación lineal de $s_0, s_1, \ldots, s_m$. Así, $p_m = \sum_{k=0}^{m} a_k s_k$ para cada $m \geq 0$.

Sea $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para toda x y $y \in [0,1]$. Tomamos la partición $\{d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{2^n}\}$, con $\frac{1}{2^n} < \delta$, de $[0,1]$, ésta tiene norma igual a $\frac{1}{2^n} < \delta$.

Sea $m > 2^n$. Para cada $x \in [0,1]$ existe $d_k \in D$ tal que $0 \leq k \leq 2^n$ y

$$|x - d_k| < \delta$$

y por tanto,

$$|p_m(x) - f(x)| \leq |f(x) - f(d_k)| + |f(d_k) - p_m(d_k)| < \epsilon,$$

es decir,

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} a_k s_k - f \right\| < \epsilon \text{ si } m > 2^n.$$

Así, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n$.

Veamos ahora que esta expresión es única. Sea $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tal que $f = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s_k$. Se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) s_k = 0$ y por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) s_k(t) = 0$ para $t \in [0,1]$. Al evaluar en $t = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ y $a_k = b_k$ para toda $k \geq 0$. Por consiguiente $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ es una base de $C([0,1])$.

Proposición 2.1.4 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $x \in X$, sea*

$$|||x||| = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| : n \in \mathbb{N} \right\},$$

donde $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, entonces $||| \ |||$ es una norma en X que domina a $\| \ \|$, es decir

$$\|x\| \leq |||x||| \text{ para todo } x \in X$$

Demostración. $|||x||| < \infty$ para toda $x \in X$, ya que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente.

Si $|||x||| = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, para todo n. Por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto linealmente independiente de vectores concluimos que $a_i = 0$, para todo $i \geq 1$ y por tanto, $x = 0$.

Las demás propiedades de norma se derivan de las propiedades del supremo y del hecho que $\| \ \|$ es norma en X. En tanto que la última afirmación del enunciado es obvia. $\|$

Teorema 2.1.5 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. El espacio $(X, ||| \ |||)$ es de Banach. De hecho, si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, ||| \ |||)$ y $(a_{ni})_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión de escalares tal que $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i$, para cada $n \geq 1$. Entonces $(a_{ni})_{i=1}^{\infty}$ converge a un escalar $a_i \in K$ para cada $n \geq 1$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, en $(X, ||| \ |||)$, a $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|||y_n - y_m||| < \epsilon$ si $n, m \geq N$, es decir,

$$\sup_{r \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{ni} x_i - a_{mi} x_i) \right\| < \epsilon \text{ si } n, m \geq N. \tag{2.1}$$

Por tanto, para cualquier $r \geq 1$ se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{r-1} (a_{ni} - a_{mi})\, x_i + (a_{nr} - a_{mr})\, x_r \right\| < \epsilon \text{ si } n, m \geq N.$$

donde convenimos, como es costumbre, en que $\sum_{i=1}^{r-1} (a_{ni} - a_{mi})\, x_i = 0$ si $r = 1$. Así,

$$\|(a_{nr} - a_{mr})\, x_r\| < \epsilon + \left\| \sum_{i=1}^{r-1} (a_{ni} - a_{mi})\, x_i \right\| < 2\epsilon \text{ si } n, m \geq N$$

O sea.

$$\|a_{nr} - a_{mr}\| < \frac{2\epsilon}{\|x_r\|} \text{ si } n, m \geq N \text{ y todo } r \geq 1$$

y la sucesión $(a_{nr})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el campo escalar K, para todo $r \geq 1$, y por tanto, converge a algún $a_r \in K$.
De (2.1) se sigue que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{ni} - a_i) x_i \right\| \leq \epsilon \text{ si } n \geq N \text{ y para todo } r \geq 1. \tag{2.2}$$

y por consiguiente, para $r' \geq r$ se cumple

$$\left\| \sum_{i=r}^{r'} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=r}^{r'} (a_{Ni} - a_i) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=r}^{r'} a_{Ni} x_i \right\| \leq 2\epsilon + \left\| \sum_{i=r}^{r'} a_{Ni} x_i \right\|.$$

De aquí se concluye que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ satisface una Condición de Cauchy según la norma $\|\ \|$ y por tanto, converge a un elemento $y \in Y$, o sea $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ en $(X \|\ \|)$.
De (2.2) se obtiene

$$\||\, y_n - y \,\|| = \sup_{r \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{ni} - a_i) x_i \right\| \leq \epsilon \text{ si } n \geq N.$$

Es decir $y_n \to y$, cuando $n \to \infty$ en $(X, \||\ \||)$. $\|$

Proposición 2.1.6 $\|\ \|$ *y* $\||\ \||$ *son normas equivalentes en* X.

Demostración. Sea $I : (X, \||\ \||) \to (X, \|\ \|)$ el operador identidad. Este es continuo ya que

$$\|x\| \leq \||x\|| \text{ para todo } x \in X$$

según se hizo notar en la proposición que antecede a la presente. Por el teorema de la función abierta se concluye que I es un isomorfismo entre espacios de Banach y por tanto existe $m > 0$ tal que

$$m\, \||x\|| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in X. \ \|$$

Teorema 2.1.7 *Sea* $(X, \|\ \|)$ *un espacio de Banach con base* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *Entonces los operadores proyección* $P_n : X \to X$ *definidos como*

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

son lineales, continuos y $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$ *es finito. Este supremo es llamado la constante básica de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Sea $n \geq 1$ un natural fijo. $P_n : X \to X$ es claramente lineal.

$$\|P_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \sup_r \left\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \right\| = |||x|||$$

para toda $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$.

Por la proposición 2.1.6, existe $m > 0$ tal que $m\,|||x||| \leq \|x\|$ para todo x. Por tanto,

$$\|P_n(x)\| \leq \frac{1}{m}\|x\|$$

para todo $x \in X$. Así, P_n es continuo y

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| \leq \frac{1}{m}. \;\|$$

Definición 2.1.8 *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si es una base de Schauder de la cerradura del espacio lineal generado por los elementos x_n, $n \geq 1$, y que denotamos por $[x_n]_{n=1}^{\infty}$.*

Definición 2.1.9 *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica de X. Una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, de elementos distintos de cero y de la forma $y_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j x_j$, donde $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares y $p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \ldots$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros.*

El que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sea en efecto, una sucesión básica, es una consecuencia de la proposición con que se inicia la siguiente sección.

2.2 Caracterización de las bases y las sucesiones básicas

Proposición 2.2.1 *Una sucesión$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de un espacio de Banach $(X, \|\ \|)$ si, y sólo si, se cumplen las siguientes tres propiedades:*

i) x_i es distinto de cero para todo $i \geq 1$.

ii) Existe una constante C tal que para toda sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y cualquier par de naturales $n < m$ se satisface que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

iii) El espacio lineal cerrado $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ generado por $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ coincide con X.

En tanto que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X si y sólo si se satisfacen *i)* y *ii)*.

Demostración. Supongamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X. Es claro que *i)* y *iii)* se cumplen. Sean $n < m$ dos naturales y $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión escalar arbitraria.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\right\| \leq \sup_n \|P_n\| \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

tomando $C = \sup\limits_n \|P_n\|$, se sigue *ii)*.

Inversamente, supongamos que se cumplen *i)*, *ii)* y *iii)*. Afirmamos que si alguna $x \in X$ tiene una expresión $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ entonces esta expresión es única, lo que equivale a decir que si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$, entonces $a_i = 0$ para todo $i \geq 1$.

Supongamos $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$. Sean n un natural arbitrario y $m > n$. Por *ii)* se cumple

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

El lado derecho tiende a 0. cuando $m \to \infty$; de donde concluimos que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Como n es un natural arbitrario y $x_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$, se sigue por inducción que $a_i = 0$ para todo $i \geq 1$.

Para ver que cada $x \in X$ se puede expresar en la forma $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ definimos

$$Y = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares } (a_i)_{i=1}^{\infty} \right\}$$

y probaremos que $Y = X$.

Es claro que $x_i \in Y$ para cada $i \geq 1$. Por tanto, $X = [x_i]_{i=1}^{\infty} \subset \overline{Y}$. Así sólo resta probar que Y es cerrado en X.

Y es un espacio vectorial que tiene por base a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y por *ii)* la norma $|||\ |||$ es equivalente con $\|\ \|$ en Y , ya que

$$\|x\| \leq |||x||| = \sup\left\{ \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| : n \in \mathbf{N} \right\} \leq C\,\|x\| \text{ para todo } x \in Y$$

Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y que converge a x en $(X, \|\ \|)$. Por tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(Y, |||\ |||)$. Al proceder como en la prueba del Teorema 2.1.5 se sigue que $x \in Y$. $\|$

Lema 2.2.2 *Sean $f_1, ..., f_n$ y f funcionales lineales de un espacio vectorial V sobre K. La condición $f(x) = 0$ si $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$ implica que f pertenece al espacio lineal $S(f_1, ..., f_n)$ generado por $f_1, ..., f_n$.*

Lema 2.2.3 *Sean X un espacio de Banach de dimensión infinita, $M \subset X$ un subespacio de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Existe $x \in X$ de norma 1 tal que*

$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\|$$

para todo $y \in M$ y para todo escalar λ.

Demostración. Sea $0 < \epsilon < 1$ y sea $E = \{y \in M : \|y\| = 1\}$. E es compacto y por tanto, totalmente acotado, es decir, existen $y_1, ..., y_m \in E$ tales que $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i)$.
Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach existen $y_1^*, ..., y_m^* \in X^*$ tales que $\|y_i^*\| = 1$ y $y_i^*(y_i) = 1$ para $1 \leq i \leq m$. Sea

$$N = \{x \in X : y_i^*(x) = 0, \ 1 \leq i \leq m\}.$$

Supongamos que $N = \{0\}$ y sea $y^* \in X^*$ arbitraria; y^* se anula en N. Por el lema anterior, $y^* \in S(y_1^*, ..., y_m^*)$ y así, $X^* \subset S(y_1^*, ..., y_m^*)$, pero esto es una contradicción ya que X^* es de dimensión infinita por serlo X. De donde, existe $x_0 \in N$ tal que $x_0 \neq 0$ y $y_i^*(x_0) = 0$ para $1 \leq i \leq m$.
Definimos $x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ que satisface que $y_i^*(x) = 0$ para $1 \leq i \leq m$. Sea $y \in E$, existe $1 \leq i \leq m$ tal que $\|y - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$,
Sea λ escalar,

$$|\|y_i + \lambda x\| - \|\lambda x + y\|| \leq \|y + \lambda x - \lambda x - y_i\| < \frac{\epsilon}{2},$$

por tanto,

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \frac{\epsilon}{2} \geq y_i^*(y_i + \lambda x) - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} > \frac{1}{1+\epsilon}.$$

O sea, $\|y + \lambda x\| \geq \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{\|y\|}{1+\epsilon}$ para todo escalar λ y $y \in E$.De donde, si $y \in E$

$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\| \text{ para todo escalar } \lambda.$$

Sea $y \in M - E$, si $y \neq 0$ entonces $\frac{y}{\|y\|} \in S$ y por consiguiente,

$$(1+\epsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \lambda x\right\| \geq \frac{\|y\|}{\|y\|} \text{ para todo escalar } \lambda,$$

es decir,

$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\| \text{ para todo escalar } \lambda.$$

Para $y = 0$ el resultado es claro. $\|$

Teorema 2.2.4 *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

Demostración. Sea $0 < \epsilon < 1$ y sea $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tales que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+\epsilon_n) \leq 1+\epsilon.$$

(Por ejemplo, podemos escoger $\epsilon_n = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2^{n-1}}$ para $n \geq 1$).
Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Por el lema 2.2.3, existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y

$$\|y\| \leq (1+\epsilon_1)\|y+\lambda x_2\| \text{ para } y \in S(x_1) \text{ y todo escalar } \lambda.$$

Por el mismo motivo, existe $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$ y

$$\|y\| \leq (1+\epsilon_2)\|y+\lambda x_3\| \text{ para } y \in S(x_1, x_2) \text{ y todo escalar } \lambda.$$

De este modo podemos construir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que satisface que todos sus elementos tienen norma 1 y son tales que

$$\|y\| \leq (1+\epsilon_{n-1})\|y+\lambda x_n\| \text{ para } y \in S(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

y todo escalar λ y $n \geq 1$, donde $\epsilon_0 = 0$ y $S(\emptyset) = 0$.
Afirmamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. Claramente $x_n \neq 0$ para toda $n \geq 1$ y afirmamos que existe una constante C tal que para toda sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y cualesquiera dos naturales $n < m$ se satisface que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en el campo K, como $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in S(x_1, x_2, ..., x_n)$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda x_{n+1}\right\| \text{ para cualquier } \lambda \text{ en } K;$$

en particular, vale para $\lambda = a_{n+1}$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\|.$$

De igual manera

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon_{n+1})\left\|\sum_{i=1}^{n+2} a_i x_i\right\|$$

y así sucesivamente hasta obtener

$$\left\|\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon_{m-1})\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

De donde,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon_n)(1+\epsilon_{n+1})\dots(1+\epsilon_{m-1})\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

y por la elección de $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, llegamos al siguiente resultado.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

y por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. $\|$

Proposición 2.2.5 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en el espacio de Banach $(X, \|\ \|)$. Si $x \in X$ es un $w-$punto de acumulación de $\{x_n : n \geq 1\}$, entonces $x = 0$. En particular si $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$, en la topología débil, entonces $x = 0$.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica y que x es un $w-$punto de acumulación de $\{x_n : n \geq 1\}$. Así, $x \in \overline{\{x_n\}}^{w}$ y por tanto, $x \in [x_n]_{n=1}^{\infty}$, por lo que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Cada coeficiente funcional x_i^* asociado a la sucesión básica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (ver la siguiente sección), puede extenderse a X, a dicha extensión la seguimos denotado por x_i^*.
Para cada $i \geq 1$ y cada $\epsilon > 0$, existe, debido a que x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$, $j \neq i$ tal que

$$|x_i^*(x) - x_i^*(x_j)| = |a_i| < \epsilon.$$

Por tanto, $x = 0$.
Supongamos que $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$, en la topología débil. Como $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$,entonces x es un $w-$punto de acumulación y por lo anterior $x = 0$. $\|$

2.3 Coeficientes funcionales

Definición 2.3.1 *Sea X un espacio de Banach. Una pareja de sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y X^*, respectivamente, se dice que forman un sistema biortogonal si*

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ para } i, j = 1, 2, \dots$$

Denotamos a esa pareja de sucesiones por $(x_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definición 2.3.2 *Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada natural n sea x_n^* la funcional lineal definida en X como $x_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n$. Así, para cada $x \in X$ podemos escribir*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, x_i.$$

Resulta entonces natural que estas funcionales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sean llamadas los coeficientes funcionales asociados a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Es claro que $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema biortogonal.

En el caso en que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es entonces una base de $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ y a las funcionales $x_n^* : [x_n]_{n=1}^{\infty} \to K$, para $n \geq 1$, las llamaremos los coeficientes funcionales asociados a la sucesión básica. De modo similar las proyecciones $P_n : [x_n]_{n=1}^{\infty} \to K$, para $n \geq 1$, son llamadas las proyecciones correspondientes a la sucesión básica.

Proposición 2.3.3 *Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \geq 1$, la funcional lineal x_n^* es continua. Más aún, $\|x_n^*\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|}$, donde C es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*

Demostración. Sabemos que para cada $n \geq 1$ la proyección $P_n : X \to X$ es lineal y continua, como se mostró en 2.1.7. Definamos $P_0 \equiv 0$, así

$$P_n - P_{n-1} : X \to X$$

$$(P_n - P_{n-1})\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n x_n.$$

Sean $x \in X$, con $x \neq 0$, y $T_x : S(x) = \{\lambda x : \lambda \in K\} \to K$ el operador definido como $T_x(\lambda x) = \lambda$. T_x es lineal y continuo, ya que

$$|T_x(\lambda x)| = \frac{1}{\|x\|}\|\lambda x\| \text{ para todo escalar } \lambda.$$

Para cada $n \geq 1$ hacemos $T_n = T_{x_n} . S(x_n) \to K$, se tiene que $\|T_n\| = \frac{1}{\|x_n\|}$. Es claro que

$$x_n^* = T_n \circ (P_n - P_{n-1})$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \|x_n^*\| &= \|T_n \circ (P_n - P_{n-1})\| \leq \|T_n\|\,\|P_n - P_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|T_n\|\left(\|P_n\| + \|P_{n-1}\|\right) \end{aligned}$$

y

$$\|T_n\|\left(\|P_n\| + \|P_{n-1}\|\right) \leq \frac{1}{\|x_n\|} 2C,$$

donde C es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Así,

$$\|x_n^*\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|}. \quad \| \tag{2.3}$$

Corolario 2.3.4 *Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y sean $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los coeficientes funcionales asociados a esta base. Entonces:*

i) $\inf_{n\geq 1} \|x_n\| > 0$ si y sólo si $\sup_{n\geq 1} \|x_n^*\| < \infty$

ii) $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$ si y sólo si $\inf_{n\geq 1} \|x_n^*\| > 0$.

Demostración. Es consecuencia directa de 2.3. $\|$

Teorema 2.3.5 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ de coeficientes funcionales asociados a ella, es una sucesión básica en $(X^*, \| \ \|)$. Además, para cada $x^* \in X^*$ se cumple*

$$x^* = w^*\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)\, x_n^*$$

donde $w^*\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)\, x_n^*$ significa convergencia en la topología w^*. Si $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $(X^*, \| \ \|)$, entonces las sucesiones $(P_n^*)_{n=1}^{\infty}$ y $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ son las sucesiones de proyecciones y de coeficientes funcionales asociados a $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, donde, para cada $n \geq 1$, P_n^* es el operador adjunto de la proyección P_n y $\widehat{x_n}$ es la imagen de x_n bajo la isometría canónica de X en X^{**}.

Demostración. Sea $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de proyecciones correspondientes a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares y cada dos naturales $n < m$ se cumple que $P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$; por esto y debido a que $\|P_n^*\| = \|P_n\|$ tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\|,$$

donde C es la constante básica de la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Del Teorema 2.2.1, se sigue que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^*.
Por otra parte, como $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, x_n$ para cada $x \in X$, se sigue que

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, x^*(x_n)$$

para cada $x^* \in X^*$. o sea

$$x^* = w^*\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)\, x_n^*.$$

Es importante observar que en general es falsa la igualdad $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)\, x_n^*$ en la topología de la norma; es decir, la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ no es siempre una base de $(X^*, \| \|)$, pero en el caso en que si lo es, se tiene que para cada $x^* \in X^*$ existe una sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n^*.$$

Como la convergencia en norma implica la w^*−convergencia concluimos que

$$b_n = x^*(x_n) = \widehat{x_n}(x^*) \text{ para cada } n \geq 1.$$

O sea, $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Finalmente, al inicio de la prueba se hizo notar que si P_n^* es el operador adjunto de la proyección P_n, entonces $P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$ si $m > n$. Por consiguiente si $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n^*$, entonces

$$P_n^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* \text{ para cada } n \geq 1,$$

por lo que si $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $(X^*, \| \|)$ entonces $(P_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de proyecciones correspondientes a $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. ‖

Corolario 2.3.6 *Sean X un espacio de Banach y $(x_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$, con $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en X^*, un sistema biortogonal. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^* entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de X.*

Demostración. Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de X^* se tiene que

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{**}(x^*)\, f_i \text{ para cada } x^* \in X^*$$

donde $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. En particular, se cumple

$$x^*(x_i) = x_i^{**}(x^*) \text{ para cada } i \geq 1,$$

es decir, $\widehat{x}_i(x^*) = x_i^{**}(x^*)$ para cada $i \geq 1$; por tanto, $x_i^{**} = \widehat{x}_i$ para cada $i \geq 1$ y

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x}_i(x^*) f_i \text{ para cada } x^* \in X^*.$$

Por la proposición anterior, $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^{**}. Así, $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es base de $[\widehat{x_n}]_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de $[x_n]_{n=1}^{\infty}$. Afirmamos que $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$. De no ser así, existe $x^* \in X^*$ y $x \in X - [x_n]_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$x^*(x) \neq 0 \text{ y } x^*(x_n) = 0 \text{ para todo } n \geq 1,$$

pero estas dos propiedades no son consistentes, ya que la segunda implica

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x}_i(x^*) f_i = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i) f_i = 0. \ \|$$

2.4 Bases que encogen y bases acotadamente completas

Proposición 2.4.1 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base del espacio de Banach X. Los coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son una base de X^* si y sólo si para cada $x^* \in X^*$ la norma de $x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty}$ tiende a cero cuando $n \to \infty$. A una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con esta propiedad se le dice que es una base que encoge.*

Demostración. Supongamos que los coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son una base de X^*. Por tanto, si $x^* \in X^*$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^* - x^*\| = 0. \tag{2.4}$$

Además, para cualquier $n \geq 1$ fija se cumple:

$$P_{n-1}^* x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} = 0,$$

donde $P_0 = 0$; por tanto,

$$\left\| P_{n-1}^* x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} - x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} \right\| = \left\| x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} \right\|$$

y se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} \right\| = 0$.
Supongamos ahora que $\left\| x^* \mid [x_i]_{i=n}^{\infty} \right\| \to 0$, cuando $n \to \infty$. Para cualquier $n \geq 1$ tenemos

$$\|x^* - P_n^* x^*\| = \|(I^* - P_n^*) x^*\| = \|x^*(I - P_n)\|.$$

Así,

$$\|(x^* - P_n^* x^*)(x)\| = \|x^*((I - P_n)x)\| \leq \left\| x^* \mid [x_i]_{i=n+1}^{\infty} \right\| \|I - P_n\|$$

y

$$\left\| x^* \mid [x_i]_{i=n+1}^{\infty} \right\| \|I - P_n\| \to 0. \text{ cuando } n \to \infty$$

ya que $(\|P_n\|)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Por tanto,

$$\|x^* - P_n^* x^*\| \to 0. \text{ cuando } n \to \infty$$

y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^*. $\|$

Proposición 2.4.2 *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X que encoge. Entonces X^{**} se puede identificar, como espacio de Banach, con el espacio $\mathfrak{L}$ de todas las sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$. Esta correspondencia está dada de la siguiente manera:*

$$x^{**} \to \left(x^{**}\left(x_1^*\right), x^{**}\left(x_2^*\right), \ldots \right).$$

Demostración. Sea $x^{**} \in X^{**}$. Como $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $(X^*, \| \|)$ se tiene

$$P_n^{**}\left(x^{**}\right)\left(x^*\right) = x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i\left(x^*\right) x_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(x_i^*\right) \widehat{x}_i\left(x^*\right)$$

para cada $x^* \in X^*$. Por tanto,

$$P_n^{**}\left(x^{**}\right) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(x_i^*\right) \widehat{x}_i$$

para todo $n \geq 1$ y así,

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(x_i^*\right) x_i \right\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(x_i^*\right) \widehat{x}_i \right\| \leq C \left\|x^{**}\right\|, \qquad (2.5)$$

donde C es la contante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
En particular, $\left(x^{**}\left(x_1^*\right), x^{**}\left(x_2^*\right), \ldots\right) \in \mathfrak{L}$. Para ver que la correspondencia es sobre tomamos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$, Sea x^{**} un w^*-punto de acumulación del conjunto acotado e infinito $\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{x}_i : n \in \mathbb{N} \right\}$, el cual existe por el Teorema de Alaoglu, entonces $x^{**}\left(x_i^*\right) = a_i$ para todo $i \geq 1$.
Se puede probar, siguiendo la demostración del Teorema 2.1.5 que el espacio lineal

$$\left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : \ \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty \right\}$$

es de Banach con la norma $\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$.

Debido a (2.5) se tiene que la transformación

$$x^{**} \to \left(x^{**}\left(x_1^*\right), x^{**}\left(x_2^*\right), \ldots\right).$$

es continua y por el teorema de la función abierta es un isomorfismo entre espacios de Banach. ||

Definición 2.4.3 *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X. Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa si para cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \infty$ se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge.*

Ejemplo 2.4.4

La sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $e_n = (\delta_{nm})_{m=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa de l^p, $1 \leq p < \infty$, pues si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_p < \infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sup_{m\geq 1} \sum_{n=1}^{m} |a_n|^p = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_p^p < \infty$$

y por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ converge a $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$.

Teorema 2.4.5 *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X. El espacio X es reflexivo si y sólo si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge y es acotadamente completa.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge y es acotadamente completa. Por la Proposición 2.4.2 la transformación

$$X^{**} \to \mathfrak{L} = \left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \infty \right\}$$

que asocia a cada $x^{**} \in X^{**}$ la sucesión $\left(x^{**}\left(x_1^*\right), x^{**}\left(x_2^*\right), \ldots\right)$ es un isomorfismo entre esos espacios Banach.
Como la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa entonces la transformación

$$\left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \infty \right\} \to X$$

que asocia a cada sucesión $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, tal que $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \infty$, el elemento $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, está bien definida y es también un isomorfismo entre esos espacios de Banach (recuérdese la Proposición 2.1.6).

En particular, la transformación

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x)\, x_i \to x^{**}$$

de X en X^{**}, donde x^{**} es aquella funcional que satisface $x^{**}(x_i^*) = x_i^*(x)$ para todo $i \geq 1$, es suprayectiva. Es obvio que tal x^{**} coincide con $\widehat{x}$ para cada $x \in X$. Es decir, la inmersión canónica $\widehat{}$ de X en X^{**} es sobre y por tanto, X es reflexivo.
Inversamente supongamos que X es reflexivo Al ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X se tiene que $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es base de X^{**} y por el Corolario 2.3.6 se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge.Como X es reflexivo todo subconjunto acotado de X es $w-$relativamente compacto. Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$, y $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i$ es un $w-$punto de acumulación del conjunto acotado e infinito $\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N} \right\}$; al considerar las vecindades débiles determinadas por cada x_i^* y cada $\epsilon > 0$, se sigue que $x_i^*(x) = a_i$ para todo $i \geq 1$. es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge a x $\|$

Proposición 2.4.6 *[20]Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una base que encoge. Entonces $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa de X^**

2.5 Otros tipos de bases

Definición 2.5.1 *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica de X. Si*

$$0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty,$$

entonces se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada .

Definición 2.5.2 *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en los espacios de Banach X y Y, respectivamente. Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se cumple: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.*
En este caso escribimos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 2.5.3 *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos bases de un espacio de Banach X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo n.*

Demostración. Supongamos que existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \geq 1$ y sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge}$$

por la linealidad y la continuidad de T y T^{-1}.

Inversamente, supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ en X definimos $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Claramente T es lineal, suprayectiva y $T(x_n) = y_n$ para toda $n \geq 1$. Por la continuidad de los coeficientes funcionales se sigue que T tiene gráfica cerrada y por tanto, T es continua. Así, T es un isomorfismo.

Teorema 2.5.4 *Sean X un espacio de Banach y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X con constante básica C que satisface que $\inf_n \|z_n\| \geq 1$. Si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - z_n\| < \frac{1}{2C}$, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base equivalente a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ definimos $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$, cuya convergencia se sigue de la hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - z_n\| < \frac{1}{2 \cdot C}$. T es lineal y además, por la Proposición 2.3.3 se tiene

$$\|x - Tx\| \leq 2C \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - z_n\| < \|x\|,$$

es decir, T es continuo y $\|I - T\| < 1$. Por tanto, T tiene inverso continuo y por el teorema anterior $(y_n)_{n=1}^{\infty} \sim (z_n)_{n=1}^{\infty}$. $\|$

Lema 2.5.5 *Sean X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en X satisface que $\inf_{n\geq 1} \|y_n\| = \delta > 0$ y $\lim_{n\to\infty} x_i^*(y_n) = 0$ para todo $i \geq 1$, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión básica que es equivalente a una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Para cada real $0 < \epsilon < 1$ y cada entero $p \geq 1$ existe $N > 0$ tal que

$$|x_i^*(y_n)| < \frac{\epsilon \cdot \delta}{2p \max_{1\leq i\leq p} \|x_i\|} \text{ si } n \geq N \text{ y } 1 \leq i \leq p.$$

En particular.

$$\left\|\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{2x_i^*(y_n)}{\delta}x_i\right\| = \left\|\frac{2}{\delta}y_n - \sum_{i=1}^{p}\frac{2x_i^*(y_n)}{\delta}x_i\right\| \geq 1 \text{ si } n \geq N.$$

O sea. dados dos naturales p y m y un real $\epsilon > 0$ existe $n > m$ tal que

$$\left\|\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{2x_i^*(y_n)}{\delta}x_i\right\| \geq 1 \text{ y } \left\|\sum_{i=1}^{p}\frac{2x_i^*(y_n)}{\delta}x_i\right\| < \epsilon\ .$$

Sean $p_0 = 0$ y $y_{n_1} = y_1$, entonces $\left\|\sum_{i=p_0+1}^{\infty}\frac{2x_i^*(y_{n_1})}{\delta}x_i\right\| \geq 1$ y por lo anterior se pueden definir inductivamente una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión creciente de enteros $0 < p_1 < p_2...$ tales que

$$\left\|\sum_{i=p_{k-1}+1}^{\infty}\frac{2x_i^*(y_{n_k})}{\delta}x_i\right\| \geq 1,\ \left\|\sum_{i=1}^{p_{k-1}}\frac{2x_i^*(y_n)}{\delta}x_i\right\| < \frac{1}{2\cdot 4^k\cdot C}$$

y

$$\left\|\sum_{i=p_{k-1}+1}^{\infty}\frac{2x_i^*(y_{n_k})}{\delta}x_i - \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k}\frac{2x_i^*(y_{n_k})}{\delta}x_i\right\| < \frac{1}{2\cdot 4^k\cdot C}$$

donde C es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por la primera y tercera de las anteriores desigualdades se tiene

$$z_k = \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k}\frac{2x_i^*(y_{n_k})}{\delta}x_i \neq 0 \text{ para todo } k \geq 1.$$

Y por la segunda y la tercera

$$\left\|\frac{2}{\delta}y_{n_k} - z_k\right\| < \frac{1}{4^k\cdot C} \text{ para todo } k \geq 1$$

De aquí.

$$\|z_k\| \geq 1 \text{ para todo } k \geq 1.$$

La sucesión $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y es tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{2}{\delta}y_{n_k} - z_k\right\| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k\cdot C} = \frac{1}{3\cdot C}$$

Por el teorema anterior es equivalente a la sucesión básica $\left(\frac{2}{\delta}y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ la cual obviamente es equivalente a $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. ||

Corolario 2.5.6 *Sea X un espacio de Banach y sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\inf_n \|y_n\| > 0$ y $y_n \xrightarrow{w} 0$. Entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que es una sucesión básica.*

Demostración. Como $[y_n]_{n=1}^{\infty}$ es un espacio separable, existe una isometría i entre $[y_n]_{n=1}^{\infty}$ y un subespacio de $C([0,1])$ como hicimos ver en el cápitulo anterior. Por hipótesis, $(i(y_n))_{n=1}^{\infty}$ satisface que

$$\inf_n \|i(y_n)\| > 0$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} x_i^*(i(y_n)) = 0$$

donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $C([0,1])$. Por el lema anterior $(i(y_n))_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión básica y por tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ contiene a su vez una subsucesión básica. ||

Proposición 2.5.7 *Sean X un espacio de Banach y $M \subset X$ un subconjunto acotado. Sea $x^{**} \in X^{**}$ un w^*-punto de acumulación de $\widehat{M}$ y supongamos que la distancia $d\left(x^{**}, \widehat{M}\right) = d$, con $d > 0$. Entonces existen una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ y una funcional $x^* \in X^*$ tales que:*

i) $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^{**}(x^*) \geq \frac{1}{2}\|x^{**}\|$

ii) $(\widehat{x_n} - x^{**})_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica en* X^{**}

iii) *si* $x^{**} \neq 0$, *entonces* $x^{**} \notin [\widehat{x_n} - x^{**}]_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Sea $0 < \epsilon_0 < 1$. Escojamos $0 < \epsilon_n < 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ de modo que $\prod_{i=p}^{q}(1-\epsilon_i) \geq 1 - \epsilon_0$ para $1 \leq p < q < \infty$, (por ejemplo, podemos escoger $\epsilon_n = \frac{1}{(n+N)^2}$ para $n \geq 1$, donde N se escoge suficientemente grande de acuerdo al Criterio de Cauchy para productos infinitos).
Sea $x^* \in X^*$ tal que

$$x^{**}(x^*) \geq \frac{1}{2}\|x^{**}\|.$$

Como x^{**} es un w^*-punto de acumulación de $\widehat{M}$, cada w^*-vecindad de x^{**} contiene una infinidad de puntos de $\widehat{M}$, por lo que en la vecindad

$$\{y^{**} \in X^{**} : |y^{**}(x^*) - x^{**}(x^*)| < 1\}$$

existe $\widehat{x_1} \in \widehat{M}$ tal que

$$|x^*(x_1) - x^{**}(x^*)| = |\widehat{x_1}(x^*) - x^{**}(x^*)| < 1.$$

Supongamos que para un natural $n \geq 1$ hemos construido $x_1, ..., x_n$ con las siguientes propiedades:

$$|x^*(x_k) - x^{**}(x^*)| < \frac{1}{k} \tag{2.6}$$

para $k = 1, ...n$ y

$$\left\|\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (\widehat{x_i} - x^{**})\right\| \geq \prod_{i=1}^{q-1} (1 - \epsilon_i) \left\|\sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\widehat{x_j} - x^{**})\right\| \tag{2.7}$$

para cualesquiera escalares $\alpha_1, .., \alpha_q$ y $1 \leq p < q \leq n$. En el caso de que $n = 1$ convenimos, como es costumbre, que el producto de la familia vacía es 1.

Sea $X_n = [\widehat{x_1} - x^{**}, ..., \widehat{x_n} - x^{**}] \subset X^{**}$, como $\dim X_n < \infty$, la esfera unitaria de X_n,

$$S(X_n) = \{y^{**} \in X_n : \|y^{**}\| = 1\},$$

es un conjunto compacto y por tanto, tiene una $\frac{\epsilon_n}{3}$−red finita. Es decir, existen $y_1^{**}, ..., y_{m_n}^{**} \in S_{X_n}$ tales que

$$S_{X_n} \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B_{\frac{\epsilon_n}{3}}(y_i^{**}).$$

Sean $z_1^*, ..., z_{m_n}^* \in X^*$ tales que $\|z_1^*\| = ... = \|z_{m_n}^*\| = 1$ y

$$|y_i^{**}(z_i^*)| > 1 - \frac{\epsilon_n}{3} \text{ para } i = 1, .., m_n.$$

Como x^{**} es un w^*−punto de acumulación de $\widehat{M}$, existe $x_{n+1} \in M$ tal que

$$|x^*(x_{n+1}) - x^{**}(x^*)| < \frac{1}{n+1}$$

y

$$|z_i^*(x_{n+1}) - x^{**}(z_i^*)| < \frac{d\epsilon_n}{6}$$

para $i = 1, .., m_n$.

Afirmamos que

$$\|y^{**} + \alpha(\widehat{x_{n+1}} - x^{**})\| \geq (1 - \epsilon_n)\|y^{**}\| \tag{2.8}$$

para cada $y^{**} \in X_n$ y todo escalar α.

Supongamos primero que $y^{**} \in S_{X_n}$, es decir $\|y^{**}\| = 1$, y analicemos dos casos:

a) Si $|\alpha| \geq \frac{2}{d}$ entonces,

$$\begin{aligned}\|\alpha(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}) + y^{**}\| &\geq \frac{2}{d}\|\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\| - \|y^{**}\| \\ &\geq \frac{2}{d}d - 1 = 1 \geq (1 - \epsilon_n)\|y^{**}\|.\end{aligned}$$

$b)$ Si $|\alpha| < \frac{2}{d}$ entonces escogemos i tal que $\|y^{**} - y_i^{**}\| < \frac{\epsilon_n}{3}$. Así,

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha\left(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\right) + y^{**}\right\| &\geq \left|\left(\alpha\left(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\right) + y^{**}\right)(z_i^*)\right| \\
&\geq \left|\left(y^{**} - y_i^{**} + y_i^{**}\right)(z_i^*)\right| - \left|\alpha\left(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\right)(z_i^*)\right| \\
&\geq \left|y_i^{**}(z_i^*)\right| - \left|\alpha\left(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\right)(z_i^*)\right| \\
&\qquad - \|y^{**} - y_i^{**}\| \, \|z_i^*\| \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon_n}{3} - \frac{2}{d}\frac{d\epsilon_n}{6} - \frac{\epsilon_n}{3} \\
&= 1 - \epsilon_n = (1 - \epsilon_n)\|y^{**}\|.
\end{aligned}$$

Por lo que el resultado es válido para todo $\|y^{**}\| = 1$ y, obviamente, cuando $y^{**} = 0$. Para un elemento $y^{**} \in X_n$, no nulo, el resultado se obtiene al aplicar lo anterior a $\frac{y^{**}}{\|y^{**}\|}$.

Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ escalares arbitrarios y $y^{**} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\widehat{x_i} - x^{**}\right)$, por (2.8), tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\widehat{x_i} - x^{**}\right) + \alpha_{n+1}\left(\widehat{x_{n+1}} - x^{**}\right)\right\| \geq (1 - \epsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\widehat{x_i} - x^{**}\right)\right\|.$$

Y por (2.7)

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\left(\widehat{x_i} - x^{**}\right)\right\| \geq \prod_{i=1}^{n}(1 - \epsilon_i)\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\left(\widehat{x_j} - x^{**}\right)\right\|$$

Así, hemos construido inductivamente una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que las desigualdades (2.6) y (2.7) se satisfacen para todo n. Por la primera de ellas se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^{**}(x^*) \geq \frac{1}{2}\|x^{**}\|$$

y en virtud de la segunda y de la Proposición 2.2.1 se tiene que $\left(\widehat{x_n} - x^{**}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^{**}.

Finalmente, si $x^{**} \neq 0$, entonces existe k_0 tal que $x^{**} \notin \left[\widehat{x_n} - x^{**}\right]_{n=k_0}^{\infty}$ ya que $\left(\widehat{x_n} - x^{**}\right)_{n=k}^{\infty}$ es una sucesión básica para todo $k \geq 1$ y por tanto, $\bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{x_n} - x^{**}\right]_{n=k}^{\infty} = \{0\}$. Así, la sucesión $(x_n)_{n=k_0}^{\infty}$ satisface $i)$, $ii)$ y $iii)$. ‖

Definición 2.5.8 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base del espacio de Banach X. Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de tipo l^+ si es acotada y existen $x^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$ tal que $\operatorname{Re} x^*(x_n) \geq \epsilon$ para todo $n \geq 1$.*

Teorema 2.5.9 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que*

$$0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión básica si, y sólo si, se cumple alguna de las siguientes dos propiedades:

i) $\{x_n : n \geq 1\}$ no es $w-$relativamente compacto;

ii) 0 es un $w-$punto de acumulación de $\{x_n : n \geq 1\}$.

Además si se tiene i) entonces la subsucesión básica que contiene $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de tipo l^+.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión básica $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Si $i)$ no se satisface entonces $\{x_n : n \geq 1\}$ es $w-$relativamente compacto y por tanto, $\{x_{n_k} : k \geq 1\}$ es $w-$relativamente compacto. Por el teorema de Eberlein-Šmulian $\{x_{n_k} . k \geq 1\}$ tiene un $w-$punto de acumulación y como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica se tiene que el $w-$punto de acumulación debe ser 0 (Proposición 2.2.5) y por tanto, se satisface $ii)$.
Inversamente, supongamos que se cumple $i)$. Por el teorema de Eberlein-Šmulian hay un subconjunto infinito A de $\{x_n : n \geq 1\}$ que no tiene un $w-$punto de acumulación en X. $\widehat{A}$ es un subconjunto infinito y acotado en X^{**}, y por tanto, w^*-relativamente compacto. Así, $\widehat{A}$ tiene un w^*-punto de acumulación $x^{**} \in X^{**}$; por lo antes dicho $x^{**} \in X^{**} - \widehat{X}$ (en particular $x^{**} \neq 0$). Así,

$$d\left(x^{**}, \{x_n : n \geq 1\}\right) \geq d\left(x^{**}, \widehat{X}\right) > 0.$$

Por la proposición inmediata anterior, existen $x^* \in X^*$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_{n_k}) = x^{**}(x^*) \geq \frac{1}{2}\|x^{**}\|$,

$b)$ $(\widehat{x_{n_k}} - x^{**})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^{**},

$c)$ $x^{**} \notin [\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$ (recuérdese que $x^{**} \neq 0$).

Sea $Z = \left[x^{**}, (\widehat{x_{n_k}})_{k=1}^{\infty}\right]$, como $x^{**} \notin [\widehat{x_{n_k}}]_{k=1}^{\infty}$ y $x^{**} \notin [\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$ entonces

$$codim_Z\, [\widehat{x_{n_k}}]_{k=1}^{\infty} = 1 = codim_Z\, [\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$$

y por tanto, existen proyecciones

$$p_1 : Z \to [\widehat{x_{n_k}}]_{k=1}^{\infty}$$

y

$$p_2 : Z \to [\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$$

tales que $p_1(x^{**}) = p_2(x^{**}) = 0$.
Observamos que cada $z \in Z$ es el límite de elementos de la forma

$$a_0 x^{**} + \sum_{k=1}^{p} a_k \widehat{x_{n_k}}$$

y por tanto, $z - p_1(z) = a_z x^{**}$, para algún escalar a_z que depende de z. Si $z \in [\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$, entonces $p_2(z) = z$ y

$$\begin{aligned} z - a_z x^{**} &= p_1(z) \\ p_2(z - a_z x^{**}) &= p_2(p_1(z)) \\ z &= p_2(z) = p_2(p_1(z)). \end{aligned}$$

De la misma manera si $y \in [\widehat{x_{n_k}}]$ entonces $y = p_1(y) = p_1(p_2(y))$. Es decir, p_1 es un isomorfismo de $[\widehat{x_{n_k}} - x^{**}]_{k=1}^{\infty}$ sobre $[\widehat{x_{n_k}}]_{k=1}^{\infty}$.
Como $p_1(\widehat{x_{n_k}} - x^{**}) = \widehat{x_{n_k}}$ para $k = 1, 2, ...$ y como $(\widehat{x_{n_k}} - x^{**})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^{**} se sigue que $(\widehat{x_{n_k}})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica y por tanto $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$es una sucesión básica. Por $a)$ tenemos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=n_0}^{\infty}$ de $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\inf\limits_{k \geq n_0} x^*(x_{n_k}) > 0$ y por tanto, la subsucesión así formada es una sucesión básica de *tipo* l^1.
Supongamos que $ii)$ se satisface. Si $\{x_n : n \geq 1\}$ no es w-relativamente compacto, entonces, por la prueba anterior, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión básica.
Analicemos el caso en que $\{x_n : n \geq 1\}$ es w-relativamente compacto. Como $[x_n]$ es separable, podemos suponer que X es separable y por tanto, existe un subconjunto numerable $M^* = \{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ de X^* que es total. La topología débil en $[x_n]$ es entonces metrizable (Lema 1.4.2) y existe una subsucesión $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente a 0, por ser *éste un $w-$punto* de acumulación de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por el corolario anterior, $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$, y por consiguiente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tiene una subsucesión que es básica. $\|$

Lema 2.5.10 *Sean X un espacio de Banach y $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal, con $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^*. Supongamos que $X = [x_n]_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \geq 0$ y $x^* \in X^*$ definimos*

$$\|x^*\|_n = \|x^*|[x_{n+1}, x_{n+2}, ...]\| .$$

Entonces

$$\|x^*\|_n = d(x^*, S(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*))$$

para cada $n \geq 1$ y $x^* \in X^*$, donde $S(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)$ es el espacio vectorial generado por $\{x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\}$.

Demostración. Sabemos que

$$d(x^*, S(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)) = \left\|x^* \;|^{\perp} S(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)\right\|$$

para todo $x^* \in X^*$. Así, basta probar que

$$^{\perp}S(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*) = [x_{n+1}, x_{n+2}, ...] .$$

Dado que el sistema $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es biortogonal se tiene

$$[x_{n+1}, x_{n+2}, ..] \subset^{\perp} S(x_1^*, x_2^*, ... x_n^*).$$

Para probar la contención contraria, sea $x \in X$ tal que

$$x_1^*(x) = x_2^*(x) = .. = x_n^*(x) = 0.$$

De la biortogonalidad del sistema $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ y de que $X = [x_n]_{n=1}^{\infty}$ se sigue

$$X = S(x_1, , x_n) \odot [x_{n+1}, x_{n+2}, ...].$$

Por tanto, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + y$, con $y \in [x_{n+1}, x_{n+2}, ..]$, pero $a_i = x_i^*(x) = 0$, para $1 \le i \le n$; por tanto, $x \in [x_{n+1}, x_{n+2}, ..]$. ||

Lema 2.5.11 *Sean X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión en X^* de coeficientes funcionales a ella asociada. Definimos*

$$V_1 = \left\{x^* \in X^* : \lim_{n\to\infty} \|x^* | [x_{n+1}, x_{n+2}, ..]\| = 0\right\};$$

$$V_2 = \left\{x^* \in X^* : \lim_{n\to\infty} x^*(y_n) = 0 \ si \ \{y_n : n \ge 1\} \subset X, \right.$$

$$\left. \sup_n \|y_n\| < \infty \ y \ \lim_{n\to\infty} x_i^*(y_n) = 0 \ para \ todo \ i \ge 1\right\};$$

$$V_3 = \left\{x^* \in X^* : \lim_{n\to\infty} x^*(y_n) = 0, \ si \ \{y_n : n \ge 1\} \subset X, \right.$$

$$\left. \sup_{n\ge 1} \|y_n\| < \infty \ y \ x_i^*(y_n) = 0 \ si \ 1 \le i < n\right\};$$

$$V_4 = \left\{x^* \in X^* : \lim_{n\to\infty} x^*(y_n) = 0 \ si \ \{y_n : n \ge 1\} \subset X, \right.$$

$$\sup_n \|y_n\| < \infty \ y \ y_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k x_k \neq 0 \ para \ todo \ n \ge 1,$$

$$\left. para \ alguna \ sucesión \ de \ enteros \ 0 = m_0 < m_1 < m_2 < ...\right\}.$$

Entonces $[x_n^*]_{n=1}^{\infty} = V_1 = V_2 = V_3 = V_4$.

Demostración. Por el lema anterior se tiene $x^* \in V_1$ si, y sólo si, se satisface

$$\lim_{n\to\infty} d(x^*, S(x_1^*, ..., x_n^*)) = 0,$$

o sea,

$$V_1 = [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$$

Es inmediato ver que

$$V_1 = [x_n^*]_{n=1}^{\infty} \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4.$$

Finalmente se demostrará que $V_4 \subset V_1$. Basta hacer ver que si $x^* \notin V_1$, entonces existen $\epsilon_0 > 0$, una sucesión estrictamente creciente de enteros $(m_n)_{n=0}^{\infty}$, donde $m_0 = 0$, una sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que:

$$y_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k x_k \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\|y_n\| \leq 1, \tag{2.10}$$

y

$$x^*(y_n) > \epsilon_0 \text{ para toda } n. \tag{2.11}$$

Supongamos que $x^* \notin V_1$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^*\|_n \neq 0$, donde

$$\|x^*\|_n = \|x^* \mid [x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots]\|.$$

Así,

$$\|x^* | [x_n]_{n=1}^{\infty}\| = \|x^*\|_0 \geq \|x^*\|_1 \geq \|x^*\|_2 \geq \ldots$$

y existe $\epsilon > 0$ tal que $\|x^*\|_n > \epsilon$ para todo $n \geq 0$.
Escogemos $m_0 = 0$. Como $\|x^*\|_0 > \epsilon$, existe $z_1 \in [x_j]_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\|z_1\| \leq \frac{1}{2} \text{ y } x^*(z_1) > \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.12}$$

Sean $m_1 > m_0$ y $y_1 = \sum\limits_{i=1}^{m_1} b_{1i} x_i \in S(x_1, \ldots, x_{m_1})$ tales que

$$\|y_1 - z_1\| \leq \frac{1}{2} \text{ y } x^*(y_1) > \frac{\epsilon}{2} \text{ (y por tanto } y_1 \neq 0).$$

Esto es posible ya que se cumple (2.12), $z_1 \in [x_j]_{j=1}^{\infty}$ y x^* es continua.
Debido a que también $\|x^*\|_n > \epsilon$ para todo $n \geq 1$ se pueden construir inductivamente tres sucesiones:

$$(m_n)_{n=0}^{\infty}, \text{de enteros y estrictamente creciente, con } m_0 = 0,$$

$$(z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ y } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ de elementos no nulos en } X,$$

donde

$$z_n \in [x_j]_{j=m_{n-1}+1}^{\infty} \text{ y } y_n \left(= \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} b_{ni} x_i \right) \subset S(x_j)_{j=m_{n-1}+1}^{m_n}$$

tales que

$$\|z_n\| \leq \frac{1}{2} \text{ y } x^*(z_n) > \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\|y_n - z_n\| \leq \frac{1}{2} \text{ y } x^*(y_n) > \frac{\epsilon}{2}.$$

Al tomar $a_i = b_{ni}$, para $i = m_{n-1} + 1, \ldots, m_n$ y $n = 1, 2, \ldots$,y $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$ se satisfacen 2.9, 2.10 y 2.11. $\|$

Teorema 2.5.12 *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge si, y sólo si, toda sucesión básica de bloques*

$$(y_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n x_n \right)_{n=1}^{\infty}$$

tal que $\sup_n \|y_n\| < \infty$, converge débilmente a cero.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge, entonces utilizando la notación del lema anterior $X^* = V_1$ y como $V_1 = V_4$, entonces $X^* = V_4$ y por tanto, toda sucesión básica de bloques $(y_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n x_n \right)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \|y_n\| < \infty$ converge débilmente a cero. Inversamente, si toda sucesión básica de bloques $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \|y_n\| < \infty$ converge débilmente a cero, entonces $V_4 = X^*$ y como $[x_n^*]_{n=1}^{\infty} = V_4$ se sigue que $X^* = [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es base de X^*. $\|$

Teorema 2.5.13 *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base acotada de X que encoge, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero.*

Demostración Si $x^* \in X^*$, entonces $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$, donde $x^*(x_n) = a_n$ para todo $n \geq 1$.
Tenemos que $a_n x_n^* \to 0$, cuando $n \to \infty$ y por el Corolario 2.3.4 se cumple que $\inf_n \|x_n^*\| > 0$, de donde $a_n \to 0$, cuando $n \to \infty$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero. $\|$

Definición 2.5.14 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica de X. Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de tipo P si es acotada y $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| < \infty$.*

Definición 2.5.15 *Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de tipo P^* en un espacio de Banach X si es acotada y existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_n) = 1$ para todo $n \geq 1$.*

Proposición 2.5.16 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base acotada de un espacio de Banach $(X, \| \ \|)$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de tipo P^* entonces:*

i) La sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$, de tipo P.

ii) La sucesión $\left(y_n^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)_{n=1}^{\infty}$ *es una base de* $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ *, y*

$$\left\| \widehat{x_i} \, | [x_n^*]_{n=1}^{\infty} \right\| \leq \|\widehat{x_i}\| \, (= \|x_i\|) \leq C \left\| \widehat{x_i} \, | [x_n^*]_{n=1}^{\infty} \right\| \tag{2.13}$$

donde C es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

iii) La sucesión $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots$ *es una sucesión básica.*

Demostración. i) Por la Proposición (2.3.4) $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotada de $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$. Para $x^* \in [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ y $n \geq 1$ se tiene

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i} \, (x^*) \, x_i^*$$

y

$$P_n^* \, (x^*) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i} \, (x^*) \, x_i^*$$

(véase la prueba del Teorema 2.3.5).
Es decir, $(\widehat{x_i} \, | [x_n^*]_{n=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ y $(P_i^* \, | [x_n^*]_{n=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ son las sucesiones de coeficientes funcionales y proyecciones asociadas a la base $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$.
Hagamos $Q_n = P_n^* \, | [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ para cada $n \geq 1$ y sea $\Phi \in ([x_n^*]_{n=1}^{\infty})^{**}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi \, (\widehat{x_i}) \, \widehat{x_i^*} = Q_n^{**}(\Phi)$$

para todo $n \geq 1$. En efecto, si $n \geq 1$, $f \in ([x_n^*]_{n=1}^{\infty})^*$ y $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i} \, (x^*) \, x_i^*$, entonces

$$Q_n^* \, (f) \, (x^*) = f Q_n \, (x^*) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i} \, (x^*) \, f(x_i^*) = \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i^*} \, (f) \, \widehat{x_i} \right) (x^*) \text{ y}$$

$$Q_n^{**}(\Phi) \, (f) = \Phi Q_n^* \, (f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \Phi \, (\widehat{x_i}) \, \widehat{x_i^*} \right) (f) \, .$$

Por tanto,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \Phi \, (\widehat{x_i}) \, \widehat{x_i^*} \right\| = \|Q_n^{**}(\Phi)\| \leq \|P_n^*\| \, \|\Phi\| \leq C \, \|\Phi\| \tag{2.14}$$

donde C es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, para todo $n \geq 1$ y $\Phi \in ([x_n^*]_{n=1}^{\infty})^{**}$.

Sabemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_n) = 1$ para todo $n \geq 1$. Podemos interpretar a esta funcional x^* como un elemento de $\left([\widehat{x_n}]_{n=1}^{\infty}\right)^*$ que admite una extensión de Hahn–Banach a un elemento $\Phi_{x^*} \in \left([x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right)^{**}$. Por tanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \Phi_{x^*}(\widehat{x_i})\,\widehat{x_i^*}\right\| \leq C\,\|x^*\| < \infty$$

O sea, $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$, de tipo P.

$ii)$ Para probar la segunda igualdad damos $\epsilon > 0$ y escogemos $x^* \in X^*$ tal que

$$\|x^*\| = 1 \text{ y } \|\widehat{x}\| - \epsilon < \|\widehat{x}(x^*)\|.$$

Sabemos por el Teorema 2.3.5 que

$$\widehat{x}(x^*) = x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(x^*)\,x_i^*(x),$$

por consiguiente, existe $n \geq 1$ tal que

$$\|\widehat{x}\| - \epsilon < \left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(x^*)\,x_i^*(x)\right\| = \left\|\widehat{x}\,|[x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right\| \left\|\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\,x_i^*\right\|.$$

Por (2.14)

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\,x_i^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \Phi_{x^*}(\widehat{x_i})\,\widehat{x_i^*}\right\| \leq C\,\|x^*\| = C$$

donde $\Phi_{x^*} \in \left([x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right)^{**}$ es una extensión de Hahn–Banach de x^* cuando éste se interpreta como un elemento de $\left([\widehat{x_n}]_{n=1}^{\infty}\right)^*$. Así,

$$\|\widehat{x}\| - \epsilon \leq C\,\left\|\widehat{x}\,|[x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right\|$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario se tiene $\|\widehat{x}\| \leq C\,\left\|\widehat{x}\,|[x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right\|$.

Como se cumple $i)$, la sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base (acotada) de $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$, de tipo P, por tanto la sucesión $\left(y_n^* = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*\right)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. La sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es $\left(\widehat{x_i}\,|[x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Para $n \geq 1$ definimos

$$z_n^{**} = \widehat{x_n} - \widehat{x_{n+1}}.$$

Es claro que para $i, j \geq 1$ se cumple

$$z_i^{**}\left(y_j^*\right) = \delta_{ij},$$

por lo que $(y_n^*, z_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ forma un sistema biortogonal.

Sea $x^* \in [x_n^*]_{n=1}^\infty$, por la fórmula de suma por partes de Abel tenemos que

$$\sum_{i=1}^n z_i^{**}(x^*)\, y_i^* = Z_n y_{n+1}^* - \sum_{i=1}^n Z_i\left(y_i^* - y_{i+1}^*\right)$$

donde $Z_i = \sum\limits_{j=1}^{i} z_j^{**}(x^*)$ para todo $i \geq 1$. De aquí obtenemos

$$\sum_{i=1}^n z_i^{**}(x^*)\, y_i^* = \sum_{i=1}^n \widehat{x_i}(x^*)\, x_i^* - \widehat{x_{n+1}}(x^*)\, y_n^*.$$

Como $\widehat{x_n}(x^*)\, x_n^* \to 0$, cuando $n \to \infty$ y $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es acotada tenemos que $\widehat{x_n}(x^*) \to 0$, cuando $n \to \infty$ y por tanto, $\widehat{x_{n+1}}(x^*)\, y_n^* \to 0$, cuando $n \to \infty$, ya que $\left(y_n^* = \sum\limits_{i=1}^n x_i^*\right)_{n=1}^\infty$ es acotada. Así,

$$\sum_{i=1}^\infty z_i^{**}(x^*)\, y_i^* = \sum_{i=1}^\infty \widehat{x_i}(x^*)\, x_i^* = x^*.$$

Por consiguiente, $\left(y_n^* = \sum\limits_{i=1}^n x_i^*\right)_{n=1}^\infty$ es una base de $[x_n^*]_{n=1}^\infty$.

iii) Por *ii*) se tiene que $\left(z_n^{**} = \left(\widehat{x_n} - \widehat{x_{n+1}}\right)|[x_n^*]_{n=1}^\infty\right)_{n=1}^\infty$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a una base de $[x_n^*]_{n=1}^\infty$. Por el Teorema 2.3.5 $\left(\left(\widehat{x_n} - \widehat{x_{n+1}}\right)|[x_n^*]_{n=1}^\infty\right)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica en $\left([x_n^*]_{n=1}^\infty\right)^*$. Por (2.13) y la Proposición 2.2.1, $(x_n - x_{n+1})_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica en X. ||

Proposición 2.5.17 *Sean X un espacio real de Banach y $(x_n)_{n=1}^\infty$ una base acotada de X. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

i) $(x_n)_{n=1}^\infty$ es de tipo l^+;

ii) Existe una sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ de reales tal que $0 < \inf\limits_{n\geq 1} a_n \leq \sup\limits_{n\geq 1} a_n \leq 1$ y $(a_n x_n)_{n=1}^\infty$ es una base de X de tipo P^*.

Demostración. Si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es de tipo l^+, entonces existen $\epsilon > 0$ y $x_0^* \in X^*$ tales que $x_0^*(x_n) \geq \epsilon$ para todo $n \geq 1$.
Definimos $a_n = \frac{\epsilon}{x_0^*(x_n)}$ para cada $n \geq 1$ Por tanto,

$$\frac{\epsilon}{\|x_0^*\| \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|} \leq a_n \leq 1$$

para todo $n \geq 1$. Así,

$$\frac{x_0^*}{\epsilon}(a_n x_n) = 1$$

para todo $n \geq 1$.

Inversamente supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales tal que $0 < \inf_{n\geq 1} a_n \leq \sup_{n\geq 1} a_n \leq 1$ y $(a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X de tipo P^*. Existe $y^* \in X^*$ tal que $y^*(a_n x_n) = 1$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, $y^*(x_n)$ es un real positivo y

$$\left(\sup_{n\geq 1} a_n\right) y^*(x_n) \geq a_n y^*(x_n) = 1$$

para todo $n \geq 1$. Como $x_0^* = \left(\sup_{n\geq 1} |a_n|\right) y^* \in X^*$, se satisface $i)$. ||

2.6 Espacios simétricos de sucesiones

Un tratamiento más general, que abarca los resultados aquí mencionados, puede consultarse en [5].

En lo que sigue Σ denota al grupo de las permutaciones de $\mathbb{N}$. Recordamos que s y c_0 son los espacios de todas las sucesiones escalares y de las que convergen a 0. Con c_{00} y ℓ^∞ denotamos, como es usual, al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con un número finito de términos no nulos y al subespacio de s de todas las sucesiones acotadas respectivamente.

Definición 2.6.1 *Un conjunto $A \subset s$ es llamado sólido si $x \in A$, $y \in s$ y $|y| \leq |x|$, implica $y \in A$, donde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $|y| \leq |x|$ significa: $|y_i| \leq |x_i|$ para todo $i \geq 1$.*

Definición 2.6.2 *Si $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in s$, y $\tau : N \to N$ es una función, entonces x_τ denota a la sucesión $(x_\tau)_i = \left(x_{\tau(i)}\right)_{i=1}^{\infty}$. Un subespacio $M \subset s$ es llamado simétrico si $x_\sigma \in M$ siempre que $x \in M$ y $\sigma \in \sum$.*

El claro que los espacios s, l^∞, c_0 y c_{00} son sólidos y simétricos. En general tenemos el siguiente

Lema 2.6.3 *Sea $M \subset s$ un subespacio sólido y simétrico. Si $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectivo, entonces $x_\pi \in M$.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Sea $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma(2i-1) = \pi(2i-1)$ para $i \geq 1$. Como M es simétrico se tiene

$$x_\sigma = \left(x_{\pi(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\pi(3)}, x_{\sigma(4)}, \ldots\right) \in M$$

y como M es sólido concluimos que

$$\left(x_{\pi(1)}, 0, x_{\pi(3)}, 0, \ldots\right) \in M$$

Al cambiar en la discusión anterior a los impares por los pares obtenemos que

$$\left(0, x_{\pi(2)}, 0, x_{\pi(4)}, \ldots\right) \in M$$

y por tanto, $x_\pi \in M$. ||

Teorema 2.6.4 *Si $M \subset s$ es un subespacio sólido y simétrico, entonces $M \subset c_0$, $M = \ell^\infty$ o bien $M = s$.*

Demostración. Supongamos que M no es un subespacio de c_0. Así, existen $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in M$, $\epsilon > 0$ y un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tales que

$$|x_i| \geq \epsilon \text{ para todo } i \in J.$$

Sea $\pi : \mathbb{N} \to J$ una función biyectiva. Entonces $x_\pi \in M$ y $|x_{\pi(i)}| \geq \epsilon$ para todo $i \geq 1$. Por ser M subespacio sólido se sigue que $\ell^\infty \subset M$. Por último si M no coincide con ℓ^∞, entonces existe $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in M - \ell^\infty$. Dado $y = (y_i)_{i=1}^\infty \in s$ existe una subsucesión $\left(x_{i_j}\right)_{j=1}^\infty$ tal que

$$\left|x_{i_j}\right| \geq |y_j| \text{ para todo } j \geq 1$$

La función $\pi(j) = i_j$ es inyectiva y por tanto $\left(x_{i_j}\right)_{j=1}^\infty \in M$. Como M es sólido tenemos $y \in M$. $\|$

Definición 2.6.5 *Sea $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in s$, definimos:*

i) la sucesión $P_n(x) = \left((P_n(x))_i\right)_{i=1}^\infty$ donde

$$(P_n(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

ii) la sucesión $x' = (x_i')_{i=1}^\infty$ como

$$x_i' = \begin{cases} \text{el } i\text{−ésimo término de } x \text{ distinto de cero, si tal término existe} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}.$$

Observación 2.6.6 *$x \in c_{00} \iff x' \in c_{00}$ y si $x \in c_{00}$ o $x' \in c_{00}$ entonces $x' = x_\sigma$ para alguna $\sigma \in \Sigma$.*

Definición 2.6.7 *Si $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in c_0$, entonces para la sucesión $x' = (x_i')_{i=1}^\infty$ existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\left|x'_{\sigma(i)}\right| \geq \left|x'_{\sigma(i+1)}\right|$ para todo $i \geq 1$. La sucesión $\left(\left|x'_{\sigma(i)}\right|\right)_{i=1}^\infty$ es denotada por $\widetilde{x}$ y sus términos por $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots$.*
Si M es un subespacio de c_0 definimos $M^{++} = \{x \in M : x = \widetilde{x}\}$.

Proposición 2.6.8 *Sea M un subespacio sólido y simétrico de c_0 entonces:*

i) $x \in M \iff x' \in M$

ii) $x \in M \iff \widetilde{x} \in M$.

Demostración. i) Debido a la observación que sigue a la Definición 2.6.5 el resultado es claro cuando x o x' están c_{00}. Supongamos pues que $x \in M$ y $x \notin c_{00}$. Existe una función $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva tal que $x'_i = x_\pi$. Por el Lema 2.6.3 se tiene que $x'_i \in M$.
Inversamente, si $x' \in M$ y $x' \notin c_{00}$ (de donde $x \notin c_{00}$), entonces

$$x' = \left(x'_1, x'_2, x'_3, ...\right)$$

con $x'_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$.
Debido a que M es sólido tenemos

$$\left(x'_1, 0, x'_3, 0, x'_5, ...\right), \left(0, x'_2, 0, x'_4, 0, ...\right) \in M. \tag{2.15}$$

Hay dos casos a analizar:

a) $x_i = 0$ sólo para un número finito de índices i.

b) $x_i = 0$ para una infinidad de índices i.

En el caso *a*), $x = x'_\sigma$ para alguna $\sigma \in \Sigma$, si $x_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$, en cuyo caso $x \in M$ O bien,

$$x_\sigma = \left(\overbrace{0, ..., 0}^{k}, x'_1, x'_2, x'_3, ..\right)$$

para alguna $\sigma \in \Sigma$ y $k \geq 1$ Por la simetría de M y (2 15) se tiene

$$\left(\overbrace{0, ..., 0}^{k}, x'_1, 0, x'_3, 0, x'_5, ...\right), \left(\overbrace{0, .., 0}^{k}, 0, x'_2, 0, x'_4, 0, .\right) \in M.$$

De donde, $x_\sigma \in M$ y, de aquí, $x \in M$.
En el caso *b*) existe $\sigma \in \Sigma$ tal que

$$x_\sigma = \left(x'_1, 0, x'_2, 0, x'_3, \ .\right).$$

Por la simetría de M y (2 15) se tiene

$$\left(x'_1, 0, 0, 0, x'_3, 0, 0, 0, x'_5, ...\right) \left(0, 0, x'_2, 0, 0, 0, x'_4, 0, 0, 0, x'_6..\right) \in M.$$

Por consiguiente, x_σ y x pertenecen a M.
ii) Se sigue inmediatamente de i). ||

Definición 2.6.9 *Sea $a_o = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Definimos los siguientes espacios que también son sólidos y simétricos:*

$$\mu_{a_o} = \left\{ x \in s : \|x\|_{a_o} = \sup_{\sigma \subset \Sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{\sigma(i)}|}{i} < \infty \right\}$$

que es además un espacio de Banach con la norma $\|x\|_{a_o}$ y

$$\mu_{a_o}^{\times} = \left\{ y \in s : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < \infty \text{ para toda } x \in \mu_{a_o} \right\}.$$

llamado el α–dual de μ_{a_o}.

Proposición 2.6.10 $\|x\|_{a_o} = \|x'\|_{a_o} = \|\widetilde{x}\|_{a_o} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{x}_i}{i}$ *para todo $x \in \mu_{a_o}$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existen un natural n, y dos permutaciones σ_1 y σ_2 de $\mathbb{N}$ tales que

$$\|x'\|_{a_o} - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x'_{\sigma_1(i)}|}{i}$$

y

$$\|x\|_{a_o} - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_{\sigma_2(i)}|}{i}.$$

Podemos encontrar $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma$ tales que

$$x_{\rho_1(i)} = x'_{\sigma_1(i)} \text{ y } x'_{\rho_2(i)} \geq x_{\sigma_2(i)} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

De donde

$$\|x'\|_{a_o} - \epsilon \leq \|x\|_{a_o} \text{ y } \|x\|_{a_o} - \epsilon \leq \|x'\|_{a_o}.$$

De aquí y del hecho de que $\widetilde{x} = |x'|_{\sigma}$, se sigue $\|x\|_{a_o} = \|x'\|_{a_o} = \|\widetilde{x}\|_{a_o}$.
La igualdad $\|\widetilde{x}\|_{a_o} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{x}_i}{i}$ es obvia. ||

Observación 2.6.11 *Es claro que ℓ^{∞} no está contenido en μ_{a_o}, por lo que el Teorema 2.6.4 garantiza que $u_{a_o} \subset c_o$ y como $a_o \in \mu_{a_o}$, entonces*

$$\mu_{a_o}^{\times} \subset \mu_{a_o} \subset c_0. \tag{2.16}$$

Por todo esto podemos escribir

$$\mu_{a_o} = \left\{ x \in c_o : \|x\|_{a_o} = \sup_{\sigma \in \Sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{\sigma(i)}|}{i} < \infty \right\}$$

y

$$\mu_{a_o}^{\times} = \left\{ y \in c_o : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < \infty \text{ para todo } x \in \mu_{a_o} \right\}. \tag{2.17}$$

Por (2.16) y (2.17) se tiene, $\mu_{a_o}^{\times} \subset \ell^2$.

Proposición 2.6.12 *Sea $x \in \mu_{a_o}$. Entonces $P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$ en μ_{a_o} si, y sólo si, $P_n(\widetilde{x}) \to \widetilde{x}$ cuando $n \to \infty$, en μ_{a_o}.*

Demostración. La prueba de esta última proposición es inmediata si primero se prueba:
$P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$ si, y sólo si, $P_n(x_\sigma) \to x_\sigma$ cuando $n \to \infty$ para todo $\sigma \in \Sigma$ y
$P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$ si, y sólo si, $P_n(x') \to x'$ cuando $n \to \infty$. ||

Teorema 2.6.13 *Sea $x \in \mu_{a_o}$, entonces $P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$, en μ_{a_o}. O sea,*

$$\|(x_i)_{i=n}^{\infty}\|_{a_o} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

y la sucesión $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ formada por los elementos $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ es una base de μ_a,

Demostración. Por la proposición anterior podemos suponer que $x = \widetilde{x}$. De esta manera

$$\|x - P_n(x)\|_{a_o} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{n+i}}{i}.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i}{i} < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n \geq n_0.$$

También existe $n_1 > n_0$ tal que

$$x_i < \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{j}} \text{ si } i \geq n_1$$

Así, $n \geq n_1$ implica

$$\begin{aligned} \|x - P_n(x)\|_{a_o} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{n+i}}{i} = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{x_{n+i}}{i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{x_{n+i}}{i} \\ &< \frac{\epsilon \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{i}}{2\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{i}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{x_i}{i} < \epsilon \end{aligned}$$

y por tanto, $\|x - P_n(x)\|_{a_o} \to 0$ si $n \to \infty$, es decir, $P_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$. ||

Teorema 2.6.14 *Sea $b \in c_0$. Entonces $b \in \mu_{a_o}^{\times}$ si y sólo si $\sup_{n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} < \infty$ donde $b = (b_1, b_2, \ldots)$.*

Demostración. Como $\mu_{a_o}^{\times}$ es un subespacio sólido y simétrico de c_0 y además $\widetilde{\widetilde{b}} = \widetilde{b}$, podemos suponer que $b = \widetilde{b}$.
Sean $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ y $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, ambas sucesiones son crecientes y de términos no negativos. Supongamos que $\sup_n \frac{t_n}{s_n} = \infty$; por tanto, $t_n \to \infty$ si $n \to \infty$.
Se probará que $b \notin \mu_{a_o}^{\times}$.
Sea N un natural fijo. Afirmamos que

$$\sup_n \frac{t_n - t_N}{s_n - s_N} = \infty.$$

En efecto, existe una subsucesión $\left(\frac{t_{n_j}}{s_{n_j}}\right)_{n=1}^{\infty}$ de $\left(\frac{t_n}{s_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\frac{t_{n_j}}{s_{n_j}} \to \infty$ y además $s_{n_j} - s_N > 0$ y $t_{n_j} - t_N > 0$, para todo j suficientemente grande, por tanto,

$$\frac{t_{n_j} - t_N}{s_{n_j} - s_N} > \frac{t_{n_j} - t_N}{s_{n_j}} = \frac{t_{n_j}}{s_{n_j}} - \frac{t_N}{s_{n_j}},$$

y como $s_{n_j} \to \infty$ y N es fijo se sigue que $\sup_n \frac{t_n - t_N}{s_n - s_N} = \infty$.
Construiremos inductivamente una *sucesión* estrictamente creciente $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ de enteros no negativos tal que

$$s_{n_{j+1}} - s_{n_j} \geq s_{n_j} - s_{n_{j-1}} \tag{2.18}$$

y

$$t_{n_{j+1}} - t_{n_j} \geq (j+1)\, s_{n_{j+1}} - s_{n_j} \tag{2.19}$$

si $j \geq 1$.
Sean $n_0 = 0$, $s_{n_0} = 0$ y $n_1 = 1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $s_{n_2} \geq 2s_{n_1}$ y $\frac{t_{n_2} - t_{n_1}}{s_{n_2} - s_{n_1}} \geq 2$, ya que $s_n \to \infty$ y $\sup_n \frac{t_n - t_N}{s_n - s_N} = \infty$. De igual manera existe $n_3 > n_2$ tal que $s_{n_3} \geq 2s_{n_2} - s_{n_1}$ y $\frac{t_{n_3} - t_{n_2}}{s_{n_3} - s_{n_2}} \geq 3$ y así sucesivamente.
Para $n_{j-1} < i \leq n_j$ definimos

$$y_i = \frac{1}{j^2 \left(s_{n_j} - s_{n_{j-1}}\right)}$$

así, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} = \widetilde{y}$, ya que todos los términos de la sucesión son positivos y por la desigualdad (2.6) $y_1 \geq y_2 \geq \ldots$ Además $y \in c_0$. Sea

$$S_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{y_i}{i} = \frac{1}{j^2 \left(s_{n_j} - s_{n_{j-1}}\right)} \left(s_{n_j} - s_{n_{j-1}}\right) = \frac{1}{j^2}$$

así,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} S_i < \infty$$

y por tanto, $y \in \mu_{a_o}$.
Por otra parte, a partir de la desigualdad (2 6) tenemos

$$T_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} y_i b_i = \frac{1}{j^2\left(s_{n_j} - s_{n_{j-1}}\right)}\left(t_{n_j} - t_{n_{j-1}}\right) \geq \frac{1}{j^2} j = \frac{1}{j},$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} T_i = \infty$$

y por consiguiente, $b \notin \mu_{a_o}^{\times}$.
Inversamente, supongamos que $\sup\limits_{n} \frac{t_n}{s_n} = \lambda < \infty$. Sea $y \in \mu_{a_o}^{++}$. Por la fórmula de sumas parciales de Abel tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i b_i &= \sum_{i=1}^{n-1} t_i\left(y_i - y_{i+1}\right) + t_n y_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{s_i} s_i\left(y_i - y_{i+1}\right) + \frac{t_n}{s_n} s_n y_n \\
&\leq \lambda\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\left(y_i - y_{i+1}\right) + s_n y_n\right) \\
&= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i b_i \leq \lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{i}\right)$. Como esto es cierto para toda $y \in \mu_{a_o}^{++}$ se sigue que $b \in \mu_{a_o}^{\times}$. ||

A partir de las pruebas de este teorema y de la Proposición 2.6.10 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.6.15 *Definimos* $\|b\|_{\mu_{a_o}^{\times}} = \sup\limits_{\sigma\in\Sigma,\ n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_{\sigma(i)}|}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$. *Entonces*

$$\|b\|_{\mu_{a_o}^{\times}} = \|b'\|_{\mu_{a_o}^{\times}} = \left\|\widetilde{b}\right\|_{\mu_{a_o}^{\times}} = \sup_{n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$$

para todo $b \in \mu_{a_o}^{\times}$ *y por tanto,*

$$\mu_{a_o}^{\times} = \left\{ b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0 : \|b\|_{\mu_{a_o}^{\times}} < \infty \right\}. \tag{2.20}$$

Demostración. La primeras igualdades se obtienen al proceder de manera similar a como se hizo en la prueba de la Proposición 2.6.10 , y la última es entonces consecuencia del teorema anterior. ||

Teorema 2.6.16 $\left(\mu_{a_o}^{\times}, \| \|_{\mu_{a_o}^{\times}}\right)$ *se identifica con el dual topológico* $\mu_{a_o}^{*}$ *de* μ_{a_o} *mediante la asociación*

$$b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \to f_b$$

donde $f_b(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ *para cada* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}$.

Demostración. Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}$ y $b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}^{\times}$.
Entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i x_i| < \infty$.

$$|f_b(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_i x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|b_{\pi(i)}\right| |x_i'|$$

para alguna función inyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, y existe una permutación tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|b_{\sigma(\pi(i))}\right| \left|x'_{\sigma(\pi(i))}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|b_{\sigma(\pi(i))}\right| \widetilde{x}_i.$$

Por la última parte de la prueba del teorema anterior, tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|b_{\sigma(\pi(i))}\right| \widetilde{x}_i \leq \left\| \left(b_{\pi(i)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\mu_{a_o}^{\times}} \|x\|_{\mu_{a_o}}.$$

De donde, f_b es continua y $\|f_b\| \leq \|b\|_{\mu_{a_o}^{\times}}$.
Inversamente, sea $f \in \mu_{a_o}^{*}$. Para cada $i \geq 1$ sea $b_i = f(e_i)$, donde $(e_i)_{n=1}^{\infty}$es la base canónica de μ_{a_o}. Por consiguiente,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left|b_{\sigma(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left|f\left(e_{\sigma(i)}\right)\right|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \leq \|f_b\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} = \|f_b\|.$$

Por (2.20) $b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}^{\times}$ y $f = f_b$ y así, $\|f_b\| = \|b\|_{\mu_{a_o}^{\times}}$ y $b \to f_b$ es un isomorfismo entre espacios de Banach. ||

Teorema 2.6.17 *Supongamos que* $b \in \mu_{a_o}^{\times}$. $P_n(b) \to b$ *cuando* $n \to \infty$ *en la norma* $\| \|_{\mu_{a_o}^{\times}}$ *si, y sólo si,* $\frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Nuevamente podemos suponer que $b = \widetilde{b}$, y seguimos la notación usada en el Teorema 2.6.14. Supongamos que $\frac{t_n}{s_n} \nrightarrow 0$. Sea $\lambda = \overline{\lim}\frac{t_n}{s_n}$, como estamos suponiendo que $\frac{t_n}{s_n} \nrightarrow 0$ y $\frac{t_n}{s_n} \geq 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $\lambda > 0$. Como $s_n \to \infty$ entonces $t_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, y así dado n, existe $m > n$ tal que

$$t_n \leq \frac{1}{3}t_m$$

y tal que

$$\frac{t_m}{s_m} > \frac{1}{2}\lambda.$$

Entonces si m es como antes

$$\|b - P_n(b)\|_{\mu_{a_o}^\times} = \sup_p \frac{t_{n+p} - t_n}{s_p} \geq \frac{t_m - t_n}{s_{m-n}} \geq \frac{\frac{2}{3}t_m}{s_m} \geq \frac{\lambda}{3}.$$

Como esto es cierto para toda n, entonces $P_n(b) \nrightarrow b$

Inversamente, supongamos que $P_n(b) \nrightarrow b$. La sucesión $\left(\|b - P_n(b)\|_{\mu_{a_o}^\times}\right)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|b - P_n(b)\|_{\mu_{a_o}^\times} = k > 0.$$

Así, $\|b - P_n(b)\|_{\mu_{a_o}^\times} \geq k$ para todo $n \geq 1$ y también es claro que $\|b\|_{\mu_{a_o}^\times} \geq k$ (recuérdese que $b = \widetilde{b}$) y por tanto, existe n_1 tal que $\frac{t_{n_1}}{s_{n_1}} \geq \frac{k}{2}$ Afirmamos que existe una sucesión creciente de naturales $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $\frac{t_{n_j}}{s_{n_j}} \geq \frac{k}{2}$ para cada $j \geq 1$.

Ya construimos n_1 con esta propiedad, ahora supongamos construidos a hasta n_j. Como $\left\|b - P_{n_j}(b)\right\|_{\mu_{a_o}^\times} \geq k$ existe $p > 0$ tal que

$$\frac{t_{n_j+p} - t_{n_j}}{s_p} \geq \frac{k}{2}.$$

Como $s_p \geq s_{n_j+p} - s_{n_j}$ se sigue que

$$\frac{t_{n_j+p} - t_{n_j}}{s_{n_j+p} - s_{n_j}} \geq \frac{k}{2},$$

y $\frac{t_{n_j}}{s_{n_j}} \geq \frac{k}{2}$ por construcción, así al tomar $n_{j+1} = n_j + p$ obtenemos

$$\frac{t_{n_{j+1}}}{s_{n_{j+1}}} \geq \frac{k}{2}$$

que es lo que deseábamos, y con esto se demuestra que $\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \nrightarrow 0$. $\|$

Corolario 2.6.18 *El subespacio X de $\mu_{a_o}^{\times}$ definido como*

$$X = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \left| \frac{\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} + \dots + \widetilde{x_n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \to 0 \right. \right\}$$

tiene como base a la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ cuando en X se considera la norma $\| \ \|_X = \| \ \|_{\mu_{a_o}^{\times}} |X$.

Teorema 2.6.19 *Si*

$$X = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \left| \frac{\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} + \dots + \widetilde{x_n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \to 0 \right. \right\},$$

con $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_X = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\mu_{a_o}^{\times}}$, entonces

$$X^* = \left(\mu_{a_0}, \| \ \|_{\mu_{a_0}}\right) = \left\{ (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_o : \|y\|_{a_o} = \sup_{\sigma \in \Sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_{\sigma(i)}|}{i} < \infty \right\}$$

y

$$X^{**} = \left(\mu_{a_o}^{\times}, \| \ \|_{\mu_{a_o}^{\times}}\right) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \|x\|_{\mu_{a_o}^{\times}} = \sup_{\sigma \in \Sigma,\ n \geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_{\sigma(i)}|}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} < \infty \right\}.$$

Demostración. La última igualdad es el Teorema 2.6.16. Para probar la primera procedemos del mismo modo que se hizo en dicho teorema.
La asociación

$$y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \to g_y,$$

donde $g_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$ para cada $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$, es un isomorfismo de $\left(\mu_{a_0}, \| \ \|_{\mu_{a_0}}\right)$ en $(X, \| \ \|_X)^*$. En efecto, sea $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i| < \infty$$

para cada $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ ya que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mu_{a_o}^{\times}$ por el Teorema 2.6.14.
Además,

$$|g_y(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_{\pi(i)}\right| |y_i'|$$

para alguna función inyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, y existe una permutación tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_{\sigma(\pi(i))}\right| \left|y'_{\sigma(i)}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_{\sigma(\pi(i))}\right| \widetilde{y_i} \leq \|y\|_{\mu_{a_o}} \left\| \left(x_{\pi(i)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_X$$

De donde, g_y es continua y $\|g_y\| \leq \|y\|_{\mu_{a_o}}$.
Inversamente, sea $g \in X^*$. Para cada $i \geq 1$ sea $y_i = g(e_i)$, donde $(e_i)_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de X. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_{\sigma(i)}|}{i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|g(e_{\sigma(i)})|}{i} \leq \|g\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{\sigma(i)}}{i} \right\|_X = \|g\|$$

para cada $n \geq 1$ y $\sigma \in \Sigma$. Esto implica que $y \in \mu_{a_o}$ y $g = g_y$. Por lo anterior, $\|g_y\| = \|y\|_{\mu_{a_o}}$ y así $(X, \|\ \|_X)^*$ se identifica con $\left(\mu_{a_0}, \|\ \|_{\mu_{a_0}}\right)$. ||

Teorema 2.6.20 *La sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $(X, \|\ \|_X)$ que encoge, pero no es acotadamente completa, dnde X es el espacio del teorema anterior.*

Demostración. Es claro que X no es un espacio reflexivo ya que, por ejemplo, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \notin X$ y $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in X^{**}$, por tanto si demostramos que la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge, entonces no puede ser acotadamente completa (Proposición 2.4.5). Sea $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $x^* \in X^*$. Supongamos, con la notación del teorema anterior, que $x^* = g_y$, donde $y = (y_n = g(e_n))_{n=1}^{\infty}$. En vista de la Proposición 2.4.1, basta hacer ver que $\left\| x^* \,|_{[e_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = \left\| (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_X \to 0$, lo que es cierto por el Teorema 2.6.13. ||

Con esto, concluimos el estudio de estos espacios y usaremos el último resultado en el capítulo 4.

Capítulo 3

Origen de los operadores Tauberianos

3.1 Matrices conservadoras

En lo que sigue las matrices y sucesiones consideradas tienen sus entradas en el campo $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Por c denotaremos como es costumbre, al espacio de las sucesiones escalares convergentes con la norma usual.

Definición 3.1.1 *Se dice que una matriz $A = (a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ suma a una sucesión $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ si $\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}x_j$ converge para cada $p \geq 1$ y $Ax \in c$, donde*

$$Ax = A\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}x_j\right)_{p=1}^{\infty}.$$

El conjunto $c_A = \left\{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} : A \text{ suma a } x\right\}$ es llamado el dominio de convergencia de A.

Definición 3.1.2 *Una matriz A es llamada conservadora si suma a toda sucesión convergente, es decir si*

$$c \subset c_A.$$

Lema 3.1.3 (Dini) *[14] Sea $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos. Para cada $j \geq 1$ sea $s_j = a_1 + \ldots + a_j$*

i) Si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{s_j} = \infty$.

ii) Si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ y $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{\sqrt{r_j}} < \infty$.

Lema 3.1.4 *Sea $A = (a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ una matriz conservadora. Para cada renglón $(a_{pj})_{j=1}^{\infty}$, $p \geq 1$, de la matriz A definimos la función*

$$\begin{aligned} r_p \quad &: \quad c \to K \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\to \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} x_j \end{aligned}$$

Esta función es lineal y continua, más aún

$$\|r_p\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \quad < \infty$$

y existe $M > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \leq M, \text{ para todo } p \geq 1.$$

Demostración. Claramente r_p es lineal para cada $p \geq 1$. Supongamos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| = \infty$ para algún entero $p \geq 1$. Podemos suponer que $|a_{pj}| > 0$ para todo $j \geq 1$. Definimos la sucesión $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{signo(a_{pj})}{s_j}\right)_{j=1}^{\infty}$, donde $s_j = \sum\limits_{k=1}^{j} |a_{pk}|$ para cada $j \geq 1$; es inmediato que esta sucesión converge a cero. La $p-$ésima entrada de la sucesión $A\left((\sigma_j)_{j=1}^{\infty}\right)$ es $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{|a_{pj}|}{s_j}$, y por tanto, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{|a_{pj}|}{s_j} < \infty$, lo que contradice el inciso $i)$ del lema anterior. Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| < \infty,$$

para todo $p \geq 1$. De donde, r_p es continua y $\|r_p\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{pj}|$.

Por otra parte, si $x_j = signo(a_{pj})$ para cada $j \geq 1$, entonces

$$|r_p(z)| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{pj} z_j\right| = \sum_{j=1}^{k} |a_{pj}| \leq \|r_p\| \, \|z\| \leq \|r_p\|,$$

donde $z = (x_1, ..., x_k, 0, 0, 0, ...)$. De donde, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \leq \|r_p\|$ y por tanto,

$$\|r_p\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}|.$$

Sea $\mathfrak{F} = \{r_p : p \geq 1\}$. Para cada $x \in c$, la familia de escalares $\{r_p(x) : r_p \in \mathfrak{F}\}$ es acotada ya que $Ax \in c$. Por el teorema del acotamiento uniforme existe $M > 0$ tal que $\|r_p\| \leq M$ para toda p. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \leq M \text{ para todo } p \geq 1. \;\|$$

Teorema 3.1.5 (Kojima-Schur) *Una matriz $A = (a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ es conservadora si, y sólo si, satisface las siguientes tres propiedades:*

i) Existe $M > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \leq M$, para todo $p \geq 1$;

ii) $\lim_{p\to\infty} a_{pj} = \alpha_j$ para cada $j \geq 1$, donde $\alpha_j \in K$ para todo $j \geq 1$;

iii) $\lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} = \alpha$ para una $\alpha \in K$.

Más aún, si i), ii) y iii) se satisfacen, entonces

iv) $|\alpha| \leq M$

v) $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \leq M$

vi) $\lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (x_j - l) + l\alpha$ para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c$, donde $l = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Demostración. Supongamos que A es una matriz conservadora. La afirmación $i)$ es parte del lema anterior.
Como $e_j = (\delta_{jm})_{m=1}^{\infty} \in c$ para todo $j \geq 1$, se tiene que $Ae_j \in c$ para todo $j \geq 1$. Es decir,

$$(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ...) \in c \text{ para todo } j \geq 1$$

y por tanto, $\lim_{p\to\infty} a_{pj}$ converge para todo $j \geq 1$, por lo que se satisface $ii)$.
De manera similar, al tomar $e = (1, 1, 1, ...)$ se sigue que $Ae \in c$ y por tanto, se satisface $iii)$.
Inversamente, supongamos que se satisfacen $i)$, $ii)$ y $iii)$. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c$, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, $\lim_{p\to\infty} a_{pj} = \alpha_j$ para cada $j \geq 1$ y $\lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} = \alpha$. Por $i)$ se tiene $|\alpha| \leq M$, con lo que se cumple $iv)$, y $\sum_{j=1}^{k} |a_{pj}| \leq M$ para cada $p \geq 1$ y $k \geq 1$; de donde, $\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \leq M$ para cada $k \geq 1$ Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \leq M \ , \tag{3.1}$$

y se cumple v).
Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} (x_j - l) + l \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} \tag{3.2}$$

para cada $p \geq 1$.
Como iii) es válida $l \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{pj} \to l\alpha$ cuando $p \to \infty$. Además, para cualquier $N > 0$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_{pj} - \alpha_j)(x_j - l) \leq \sup_{j \geq 1} |x_j - l| \sum_{j=1}^{N} (a_{pj} - \alpha_j) + 2M \sup_{j \geq N} |x_j - l|$$

y como $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ y $\lim\limits_{p \to \infty} a_{pj} = \alpha_j$ para cada $p \geq 1$, concluimos

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{pj} - \alpha_j)(x_j - l) = 0;$$

de esta igualdad y de i) y v)

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} (x_j - l) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (x_j - l) .$$

Por lo que de (3.2) obtenemos vi)

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (x_j - l) + l\alpha$$

y en particular, la matriz A es conservadora. $\|$

Observación 3.1.6 *En virtud de i) del teorema anterior al aplicar una matriz conservadora* $(a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ *a una sucesión acotada cualquiera* $(d_j)_{j=1}^{\infty}$ *obtenemos una sucesión escalar, ya que* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{pj} d_j$ *es absolutamente convergente.*

Proposición 3.1.7 *Si A es una matriz conservadora, entonces define un operador lineal y continuo de c en c, que también denotamos por A, que asocia a cada sucesión convergente x la sucesión $A(x)$, y tenemos*

$$\|A\| = \sup_{p \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| .$$

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$, la linealidad del operador es inmediata y la continuidad se sigue de la propiedad i) del teorema anterior, pues de ahí se obtiene

$$\sup_{p\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}x_j\right| \leq M\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty},$$

donde recordamos que $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} = \sup_{j\geq 1}|x_j|$ es la norma usual en ℓ^{∞}, c y c_0

De la desigualdad anterior tenemos

$$\|A\| \leq \sup_{p\geq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{pj}|;$$

y al considerar las sucesiones $= (signo(a_{p1}), signo(a_{p2}), ...signo(a_{pk}), 0, 0, ...)$ para $p, k \geq 1$, se llega a

$$\sup_{p\geq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{pj}| \leq \|A\|,$$

por tanto,

$$\|A\| = \sup_{p\geq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{pj}|. \,\|$$

3.2 Matrices conulas

Definición 3.2.1 *Una matriz conservadora $A = (a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ es llamada conula si, con la notación del teorema 3.1.5, se cumple*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j = \alpha,$$

o sea, si sucede que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty} a_{pj} = \lim_{p\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}$$

En caso contrario, se dice que A es regular.
El número $\chi(A) = \lim_{p\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} - \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty} a_{pj}$ es llamado la característica de la matriz conservadora A.

Las matrices conulas tienen la propiedad de sumar a sucesiones acotadas divergentes. Ese es el contenido del teorema que cierra esta sección; para probarlo usamos los siguientes resultados auxiliares:

Lema 3.2.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(x_{nj})_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Existe $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, decreciente, con $x_j > 0$ para todo $j \geq 1$, tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{x_{nj}}{x_j} = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Demostración. Construiremos una sucesión estrictamente creciente $(j_i)_{i=1}^{\infty}$ de naturales. Sea $j_0 = 1$ y supuestos definidos $j_0 < j_1 < \ldots < j_{i-1}$, con $i \geq 1$, escogemos $j_i > j_{i-1}$ tal que

$$\max_{1\leq n\leq i} |x_{nj}| < \frac{1}{4^i}, \text{ si } j \geq j_i; \tag{3.3}$$

tal índice existe ya que $\max\limits_{1\leq n\leq i} |x_{nj}| \to 0$, cuando $j \to \infty$, para cada $i \geq 1$.
Definimos $x_j = \frac{1}{2^i}$ si $j_i \leq j < j_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$
Es claro que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ y es decreciente.
Fijada $n \geq 1$, escogemos $i \geq n$; entonces, por (3.3)

$$\left|\frac{x_{nj}}{x_j}\right| < \frac{1}{2^i}$$

si $j_i \leq j$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ se cumple

$$\left|\frac{x_{nj}}{x_j}\right| < \epsilon \text{ si } j \geq j_i$$

donde i es tal que $\frac{1}{2^i} < \epsilon$. Es decir, $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{x_{nj}}{x_j} = 0$ para todo $i \geq 1$. ||

Corolario 3.2.3 *Supongamos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{pj}$ es absolutamente convergente para cada $p \in \mathbb{N}$.*

i) *Existe una sucesión $(d_j)_{j=1}^{\infty}$ creciente de reales positivos que diverge a ∞ y tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j < \infty, \text{ para } p = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.4}$$

ii) *Existen dos sucesiones estrictamente crecientes de naturales $(q_p)_{p=1}^{\infty}$ y $(r_p)_{p=1}^{\infty}$ tales que $q_p < r_p$ para todo $p \geq 1$ y*

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} |(a_{pj} - \alpha_j)|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty$$

y

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty,$$

donde $\alpha_j = \lim\limits_{p\to\infty} a_{pj}$ para cada $j \geq 1$.

Demostración. i) Supondremos, sin pérdida de generalidad, que para cada $p \geq 1$ se cumple que $a_{pj} \neq 0$ para una infinidad de índices $j \geq 1$.

Para cada $p \geq 1$, la sucesión $(x_{pk})_{k=1}^{\infty} = \left(\sqrt{\sum_{j=k}^{\infty} |a_{pj}|}\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de términos positivos que converge a 0. Por el lema anterior existe $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$, decreciente, con $x_k > 0$ para todo $k \geq 1$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{pk}}{x_k} = 0, \text{ para } p = 1, 2, 3, \ldots.$$

En particular, para cada $p \geq 1$ existe $M_p > 0$ tal que

$$\frac{x_{pk}}{x_k} \leq M_p \text{ para todo } k \geq 1,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{x_k} \leq \frac{M_p}{x_{pk}} \text{ para todo } k \geq 1.$$

La sucesión $(d_j)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{x_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ es un sucesión creciente de reales positivos que diverge a ∞ y además,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \, d_j \leq M_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{pj}|}{x_{pj}} \text{ para } p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por el teorema de Dini (inciso ii) del Lema 3.1.3

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_{pj}|}{x_{pj}} < \infty \text{ para } p = 1, 2, 3, \ldots$$

por lo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| \, d_j < \infty \text{ para } p = 1, 2, 3, .$$

ii) Sea $p_0 = 1$. Escogemos p_1 como el primer natural mayor que p_0 tal que

$$|a_{p1} - \alpha_1| \, d_1 < 1 \text{ si } p \geq p_1$$

y definimos, $q_1 = q_2 = .. = q_{p_1-1} = 2$.
Sea p_2 el primer natural mayor que p_1 tal que

$$|a_{p1} - \alpha_1| \, d_1 + |a_{p2} - \alpha_2| \, d_2 < \frac{1}{2} \text{ si } p \geq p_2$$

y definimos $q_{p_1} = q_{p_1+1} = \ldots = q_{p_2-1} = 3$.

Al seguir con este proceso obtenemos la sucesión deseada, ya que

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} |(a_{pj} - \alpha_j)|\, d_j < \frac{1}{k} \text{ si } p \geq p_{k-1}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

De donde,

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} |(a_{pj} - \alpha_j)|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty.$$

Construyamos ahora la sucesión $(r_p)_{p=1}^{\infty}$. Por (3.4) tenemos

$$\sum_{j=r}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j \to 0 \text{ cuando } r \to \infty, \text{ para cada } p \geq 1.$$

Sea r_1 un natural mayor que q_1 y tal que

$$\sum_{j=r_1+1}^{\infty} |a_{1j}|\, d_j < 1,$$

y para $p \geq 2$, sea r_p un natural tal que $r_p > \max(r_{p-1}, q_p)$ y

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j < \frac{1}{p}.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty \text{ y } r_p > q_p \text{ si } p \geq 1. \;\|$$

Lema 3.2.4 *Si A es una matriz conula, entonces existen dos sucesiones estrictamente crecientes de naturales $(q_p)_{p=1}^{\infty}$ y $(r_p)_{p=1}^{\infty}$, con $q_p < r_p$ para todo $p \geq 1$, y una sucesión creciente de reales positivos $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ divergente a ∞ tales que para toda sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, las condiciones*

i) $\max\limits_{q_p \leq i,j \leq r_p} |x_i - x_j| \to 0$ *cuando* $p \to \infty$,

ii) $\frac{x_j}{e_j} \to 0$ *cuando* $j \to \infty$

implican $x \in c_A$.

Demostración. Sea $A = (a_{pj})_{p,j=1}^{\infty}$ una matriz conula. Por *i)* y *v)* del Teorema 3.1.5 y el inciso *i)* del corolario anterior, existe una sucesión creciente $(d_j)_{j=1}^{\infty}$ de reales positivos que diverge a ∞ y tal que cumple las siguientes dos condiciones, para todo $p \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j < \infty \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} \left| \overbrace{\lim_{p\to\infty} a_{pj}}^{\alpha_j} \right| d_j < \infty.$$

Por $ii)$ del corolario anterior existen dos sucesiones estrictamente crecientes de naturales $(q_p)_{p=1}^{\infty}$ y $(r_p)_{p=1}^{\infty}$ tales que $q_p < r_p$ para todo $p \geq 1$ y

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} |(a_{pj} - \alpha_j)|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty$$

y

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} |a_{pj}|\, d_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty.$$

Sea $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\left(\frac{x_j}{d_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ es acotada. Entonces, por lo anterior.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj} x_j| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_j x_j| < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} |(a_{pj} - \alpha_j)\, x_j| \to 0 \text{ cuando } p \to \infty$$

y

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} |a_{pj} x_j| \to 0 \text{ cuando } p \to \infty.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} x_j \text{ converge,} \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=r_p+1}^{\infty} a_{pj} x_j \to 0 \text{ cuando } p \to \infty \tag{3.6}$$

y como

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} (\alpha_j - a_{pj})\, x_j + \sum_{j=1}^{q_p-1} a_{pj} x_j + \sum_{k=q_p}^{\infty} \alpha_j x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j x_j$$

tenemos

$$\sum_{j=1}^{q_p-1} a_{pj} x_j \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j x_j \text{ cuando } p \to \infty. \tag{3.7}$$

Tomemos $x_j = 1$ para todo $j \geq 1$. Entonces $\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}$ converge por 3.5 y $\sum_{j=r_p+1}^{\infty} a_{pj} \to 0$ cuando $p \to \infty$ por 3.6.
Como A es conula se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} \to \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \text{ cuando } p \to \infty,$$

de esto, de 3.7 y del hecho que $\sum_{j=q_p}^{r_p} a_{pj} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} - \sum_{j=1}^{q_p-1} a_{pj} - \sum_{j=r_p+1}^{\infty} a_{pj}$ obtenemos

$$\sum_{j=q_p}^{r_p} a_{pj} \to 0 \text{ cuando } p \to \infty.$$

Sea $\epsilon_p = \sum_{j=q_p}^{r_p} a_{pj}$ para cada $p \geq 1$. Así, $(\epsilon_p)_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a cero.
Construimos la sucesión $(e_q)_{q=1}^{\infty}$ de la siguiente manera:

a) Si $\epsilon_p = 0$, excepto para una colección finita de índices p, entonces escogemos $e_q = d_q$ para todo $q \geq 1$.

b) Si por el contrario $\epsilon_p \neq 0$, para una infinidad de índices p, entonces escogemos p_1 como el primer natural tal que $|\epsilon_{p_1}| = \max_{p \geq 1} |\epsilon_p|$. Supuestos definidos $p_1 < ... < p_j$ con $j \geq 1$, definimos p_{j+1} como el primer natural mayor que p_j tal que $\left|\epsilon_{p_{j+1}}\right| = \max_{p > p_j} |\epsilon_p|$. Tenemos entonces, una sucesión de naturales $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ estrictamente creciente tal que $\left|\epsilon_{p_j}\right| \geq \left|\epsilon_{p_{j+1}}\right|$ > 0 y $\left|\epsilon_{p_j}\right| \geq |\epsilon_p|$ para todo $p > p_{j-1}$, y $j \geq 1$, donde definimos $p_0 = 0$.

   Para $q \geq 1$ y $q_{p_{j-1}} < q \leq q_{p_j}$, definimos $e_q = \min\left(d_{q_{p_{j-1}}+1}, \frac{1}{\left|\epsilon_{p_j}\right|}\right)$.

En cualquier de los 2 casos, $(e_p)_{p=1}^{\infty}$es una sucesión creciente de reales positivos, divergente a ∞ y que satisface

$$e_q \leq d_q \text{ para todo } q \geq 1 \text{ y } \left(e_{q_p}\epsilon_p\right)_{p=1}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada.} \tag{3.8}$$

Sea $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria. Por la fórmula de sumas parciales de Abel obtenemos

$$\sum_{j=q_p}^{r_p} |a_{pj}x_j| \leq \left|x_{q_p}\epsilon_p\right| + \max_{q_p \leq k \leq r_p} \left|x_k - x_{q_p}\right| \sum_{j=q_p}^{r_p} |a_{pj}|. \tag{3.9}$$

Supongamos que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que

$$\max_{q_p \leq i,j \leq r_p} |x_i - x_j| \to 0 \text{ cuando } p \to \infty \tag{3.10}$$

y

$$\frac{x_j}{e_j} \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{3.11}$$

Por esta última condición y (3.8), se tiene que $\left(\frac{x_j}{d_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ es acotada y por tanto, para cada $p \geq 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj} x_j| < \infty$ y se satisfacen 3.6 y 3.7. Además

$$x_{q_p} \epsilon_p = \frac{x_{q_p}}{e_{q_p}} \left(e_{q_p} \epsilon_p\right) \to 0 \text{ cuando } p \to \infty \tag{3.12}$$

Por (3.9), (3.10) y (3.12) concluimos

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=q_p}^{r_p} a_{pj} x_j = 0$$

y por tanto,

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} x_j = \lim_{p \to \infty} \left[\sum_{j=1}^{q_p - 1} a_{pj} x_j + \sum_{j=q_p}^{r_p} a_{pj} x_j + \sum_{j=r_p+1}^{\infty} a_{pj} x_j\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j,$$

es decir, la matriz A suma a $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. ‖

Teorema 3.2.5 *Sea A una matriz conula. Existe una sucesión de naturales estrictamente creciente $s = (s_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que*

$$\Omega(s) = \left\{ m_i = \max_{s_i \leq k,l \leq s_i+1} |x_k - x_l| \to 0 \text{ cuando } i \to \infty \right\} \subset c_A.$$

$\Omega(s)$ es llamado un espacio de oscilación.
De aquí se sigue que toda matriz conula suma a una sucesión acotada divergente.

Demostración. Sean $(q_p)_{p=1}^{\infty}$, $(r_p)_{p=1}^{\infty}$ y $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ como en el lema anterior. Tomamos una sucesión estrictamente creciente $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ de naturales tal que a lo mucho haya una s_j en cada intervalo (q_p, r_p), para todo $p \geq 1$, y que se satisfaga

$$w_k \leq e_k \text{ para todo } k \geq 1, \text{ donde } w_k = \# \{i \in \mathbb{N} : s_i \leq k\}. \tag{3.13}$$

Sea $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \Omega(s)$. Es inmediato ver que entonces $\max_{q_p \leq k,l \leq r_p} |x_k - x_l| \to 0$ cuando $p \to \infty$, o sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ satisface i) del lema anterior.

Veamos que también satisface *ii)* del mismo lema, es decir que se cumple $\frac{x_k}{e_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Sea $k \geq 1$ fijo, por $i(k)$ denotamos al mayor natural que satisface que

$$s_{i(k)} \leq k \leq s_{i(k)+1}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|x_k|}{e_k} &\leq \frac{\left|x_k - x_{s_{i(k)}}\right| + \left|x_{s_{i(k)}} - x_{s_{i(k)-1}}\right| + \dots + |x_{s_2} - x_{s_1}|}{w_k} + \frac{|x_{s_1}|}{e_k} \\
&= \frac{\left|x_k - x_{s_{i(k)}}\right| + \left|x_{s_{i(k)}} - x_{s_{i(k)-1}}\right| + \dots + |x_{s_2} - x_{s_1}|}{i(k)} + \frac{|x_{s_1}|}{e_k} \\
&\leq \frac{m_{i(k)} + m_{i(k)-1} + \dots + m_1}{i(k)} + \frac{|x_{s_1}|}{e_k}.
\end{aligned}$$

Es claro que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|x_{s_1}|}{e_k} = 0$ y además la sucesión $\left(\frac{m_{i(k)}+m_{i(k)-1}+\dots+m_1}{i(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ es el resultado de repetir por bloques los valores de una cierta subsucesión de la sucesión de promedios de $(m_i)_{i=1}^{\infty}$. Por tanto,

$$\left(\frac{m_{i(k)} + m_{i(k)-1} + \dots + m_1}{i(k)}\right)_{k=1}^{\infty} \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

y $\frac{x_k}{e_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$.
Por el lema anterior concluimos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_A$.
Para terminar la demostración construyamos una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ acotada y divergente que pertenezca a $\Omega(s)$.
Sean $x_{s_1} = 1, x_{s_2} = 1, x_{s_3} = \frac{1}{2}, x_{s_4} = 1, x_{s_5} = \frac{2}{3}, x_{s_6} = \frac{1}{3}, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = \frac{1}{4}, \dots$; y para $k \geq 2$ y $s_{k-1} \leq j \leq s_k - 1$ tomamos $x_j = x_{s_{k-1}}$ y si $s_1 > 1$, definimos $x_1 = x_2 \dots = x_{s_1 - 1} = 0$.
La sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ así construida esta acotada por 1, es divergente y es sumada por A porque pertenece a $\Omega(s)$. ||

3.3 Dimensión lineal

Definición 3.3.1 *Sean X y Y dos espacios de Banach. Se dice que la dimensión lineal* $\dim_l X$ *de X es menor o igual que la dimensión lineal* $\dim_l Y$ *de Y si X es isomorfo a un subespacio lineal cerrado de Y; en este caso escribimos* $\dim_l X \leq \dim_l Y$. *Si* $\dim_l X \leq \dim_l Y$ *y* $\dim_l Y \leq \dim_l X$ *entonces sus dimensiones son iguales y escribimos* $\dim_l X = \dim_l Y$. *En tanto que si* $\dim_l X \leq \dim_l Y$, *pero* $\dim_l X \neq \dim_l Y$, *entonces se dice que la dimensión lineal de X es menor que la dimensión lineal de Y , y esto se denota como* $\dim_l X < \dim_l Y$.

Observación 3.3.2 *Los espacios isomorfos tienen la misma dimensión lineal. Así,* $\dim_l c = \dim_l c_0$ *de acuerdo al siguiente resultado.*

Proposición 3.3.3 *Los espacios c_0 y c son isomorfos.*

Demostración. Sea $T : c_0 \to c$ dada de la siguiente manera

$$U(e_1) = e \text{ y } U(e_i) = e_{i-1} \text{ si } i > 1.$$

Es decir, dada $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots) \in c_0$,

$$T(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_1 + x_n, \ldots).$$

Es claro que T es lineal y continua ya que $\|T(x)\| \leq 2\|x\|$. También es claro que T es inyectiva, ya que si $T(x) = 0$ entonces

$$(x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_1 + x_n, \ldots) = 0$$

y $x_1 = -x_2$, $x_1 = -x_3, \ldots$, $x_1 = -x_n, \ldots$ y por tanto, $x = 0$ ya que $x \in c_0$. Dado $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots) \in c$, observamos que la sucesión

$$x = \left(\lim_{i\to\infty} y_i, y_1 - \lim_{i\to\infty} y_i, y_2 - \lim_{i\to\infty} y_i, \ldots, y_n - \lim_{i\to\infty} y_i, \ldots \right) \in c_0$$

es tal que $T(x) = y$. Así, T es un isomorfismo entre c_0 y c. ||

El isomorfismo T de la proposición anterior es llamado el *isomorfismo canónico entre c_0 y c.*

El concepto de dimensión lineal no es en general equivalente al de dimensión algebraica que manejamos con más frecuencia. Sin embargo, resaltamos que si los espacios son de dimensión finita, entonces los conceptos de dimensión algebraica y de dimensión lineal son equivalentes. También es cierto en general que si

$$\dim_l X \leq \dim_l Y \text{ entonces } \dim X \leq \dim Y,$$

pero la implicación contraria no es siempre válida. La definición y teorema que ahora se presentan sirven para hacer ver esto.

Definición 3.3.4 *Una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es llamada incondicional si para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es una serie que converge para toda permutación de los índices.*

Teorema 3.3.5 *[15] Sea X un espacio de Banach con base incondicional. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, X no contiene subespacios cerrados isomorfos a l^1 o a c_0.*

l^2 es un espacio de Banach con base incondicional $\left((e_{ij})_{j=1}^{\infty}\right)$, y claramente l^2 es reflexivo; así, no tiene ningún subespacio cerrado isomorfo a l^1 por tanto, $\dim_l X \neq \dim_l Y$. Por otro lado, esos dos espacios tienen la misma dimensión algebraica $(card(\mathbb{R}))$.

Así, vemos que aunque dos espacios tengan la misma dimensión algebraica es posible que no tengan iguales dimensiones lineales.

Lema 3.3.6 *Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en c_0, donde $y_n = (y_{ni})_{i=1}^{\infty}$ para cada $n \geq 1$. Supongamos que $N_0 = 0$ y N_n, para $n \geq 1$, es el primer natural tal que*

$$|y_{ni}| < \frac{1}{3^n} \text{ si } i \geq N_n.$$

Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface las siguientes propiedades:

i) $\|y_n\| = 1$ *para todo* $n \geq 1$;

ii) $y_{ni} = 0$ *si* $i = 1, 2, ..., N_{n-1}$ *y* $n \geq 2$.

Entonces, la serie $u_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_{nj}$ converge, de hecho se reduce a una suma finita, para cada sucesión escalar acotada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y cada $j \in \mathbb{N}$. Además,

$$\frac{1}{6}\|x\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j| \tag{3.14}$$

y

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j| \leq \frac{3}{2}\|x\|. \tag{3.15}$$

Demostración. Dado $n \geq 1$, existe i_n tal que $|y_{n i_n}| = 1$, ya que $\|y_n\| = 1$ y y_n es una sucesión que converge a cero. Sea $n \geq 2$. Como $y_{ni} = 0$ si $i = 1, 2, ..., N_{n-1}$ y $|y_{ni}| < \frac{1}{3^n}$ para todo $i \geq N_n$, se sigue que

$$N_{n-1} < i_n < N_n, \tag{3.16}$$

de donde $(N_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} N_n = \infty$.
Sea $j \geq 1$, existe un entero $k \geq 0$ tal que $N_{k-1} \leq j < N_k$.
Sea $n > k$, entonces $N_k \leq N_{n-1}$. De donde $j < N_k \leq N_{n-1}$.
Como $\|y_n\| = 1$ y $y_{ni} = 0$ si $i = 1, 2, ..., N_{n-1}$, entonces $y_{nj} = 0$ para todo $n > k$. Por tanto, $u_j = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n y_{nj}$. Si $n < k$, entonces $N_n \leq N_{k-1}$ y $N_n \leq j$; por consiguiente, $|y_{nj}| < \frac{1}{3^n}$; como $|y_{nk}| \leq 1$ y $|x_n| \leq \|x\|$ se tiene:

$$|u_j| \leq \|x\| \left(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) + \|x\| \leq \frac{3}{2}\|x\|$$

y por tanto, se cumple 4.4.
Por otro lado, para todo k que satisfaga $N_{k-1} \leq j < N_k$ se tiene:

$$|u_j| \geq |x_k|\,|y_{kj}| - \|x\| \left(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) \geq |x_k|\,|y_{kj}| - \frac{1}{2}\|x\|.$$

Existe k tal que $|x_k| \geq \frac{2}{3}\|x\|$, y también existe i_k tal que $|y_{k i_k}| = 1$.

Lo anterior es válido para cualquier natural j, al tomar $j = i_k$ y recordando 4.5, obtenemos

$$|u_j| \geq \frac{2}{3}\|x\| - \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{6}\|x\|$$

y por tanto, se cumple 3.14.‖

Corolario 3.3.7 *Sea G un subespacio cerrado de c_o de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en G de elementos linealmente independientes que satisfacen las hipótesis del lema anterior y por tanto, se puede construir la sucesión $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ en G con la propiedades (3.14) y (4.4).*

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, existen $N+1$ elementos en $G : z_1, ..., z_{N+1}$, que son linealmente independientes.
Supongamos que $z_n = (b_{ni})_{i=1}^{\infty}$ para $1 \leq n \leq N+1$. Como los vectores $\overline{z_n} = (b_{ni})_{i=1}^{N}$, $n = 1, ..., N+1$, son linealmente dependientes en K^N, existen escalares $a_1, .., a_{N+1}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n b_{ni} = 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., N.$$

Sea $z = \sum_{n=1}^{N+1} a_n z_n = (b_i)_{i=1}^{\infty}$. Es claro que $z \in G$ y que $\|z\| > 0$. Como $\sum_{i=1}^{N+1} a_i b_{ni} = 0$ para $i = 1, 2, ..., N$, se sigue que $b_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., N$. Así, z es de la forma $(0, 0, ..., 0, b_{N+1}, b_{N+2}, ..)$. O sea, G tiene la siguiente propiedad:

P) Dado $N \in \mathbb{N}$, existe $z \in G$ tal que $\|z\| > 0$ y z es de la forma $(0, 0, ..., 0, b_{N+1}, b_{N+2}, ...)$.

A partir de esta propiedad definimos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en G, en donde cada $y_n = (y_{ni})_{i=1}^{\infty}$, de la siguiente manera:
Sea y_1 un elemento arbitrario de G, tal que

$$\|y_1\| = 1.$$

Por la propiedad $P)$ existe un elemento y_2 de G, tal que

$$\|y_2\| = 1 \text{ y } y_{2i} = 0 \text{ si } i = 1, 2, .., N_1$$

donde N_1 es el primer natural que satisface que $|y_{1i}| < \frac{1}{3}$ para todo $i \geq N_1$.
En general, al haber construido y_n, con $n \geq 2$, se elige $y_{n+1} \in G$ de modo tal que

$$\|y_{n+1}\| = 1 \text{ y } y_{n+1i} = 0 \text{ si } i = 1, 2, ..., N_n$$

donde N_n es el primer natural que satisface que $|y_{ni}| < \frac{1}{3^n}$ si $i \geq N_n$. ‖

Teorema 3.3.8 *Sea E un espacio de Banach tal que* $\dim_l(E) < \dim_l(c)$, *entonces E es de dimensión algebraica finita.*

Demostración. Por la Proposición 3.3.3 c y c_0 son espacios isomorfos, y por hipótesis existe un subespacio cerrado $G \subset c_0$ isomorfo a E. Supongamos que E, y por tanto G, son de dimensión algebraica infinita.
Por el corolario y lema anteriores existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en G, en donde cada $y_n = (y_{ni})_{i=1}^{\infty}$ es tal que $\|y_n\| = 1$ para todo $n \geq 1$ y $y_{ni} = 0$ si $i = 1, 2, ..., N_{n-1}$ y $n \geq 2$, donde $(N_n)_{n-1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales. Además, para cada sucesión acotada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y cada $j \in \mathbb{N}$, la serie $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{nj}$ converge, de hecho se reduce a una suma finita, y

$$\frac{1}{6} \|x\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j| \leq \frac{3}{2} \|x\| . \tag{3.17}$$

Definimos el operador $T : \ell^{\infty} \to \ell^{\infty}$ como $T(x) = (u_j)_{j=1}^{\infty}$, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{nj}$. Es claro que T es lineal y por (3.17) es continuo y acotado por abajo, en particular inyectivo.
Consideramos T restringida a c_0. Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de c_0. Es claro que $y_n = T(e_n)$ para cada $n \geq 1$. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, se tiene que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, así

$$u = T(x) = T(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

por la continuidad de T.
Es decir, $S(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset T(c_0) \subset [y_n]_{n=1}^{\infty}$. Como T es acotado por abajo, $T(c_0)$ es cerrado y por consiguiente $T(c_0) = [y_n]_{n=1}^{\infty}$. Sea $G_0 = [y_n]_{n=1}^{\infty} \subset G$. Por el teorema de la función abierta $T : c_0 \to G_0$ es un isomorfismo. Esto nos lleva a una contradicción ya que entonces

$$\dim_l c = \dim_l c_0 \leq \dim_l G = \dim_l E$$

y por tanto, concluimos que la dimensión de E es finita. $\|$

3.4 Un teorema de sumabilidad de Berg, Crawford y Whitley

En [6] se da una nueva prueba del teorema que da nombre a esta sección mediante el uso de propiedades de operadores en espacios de Banach, de entre éstas destaca aquella que se refiere a la siguiente igualdad

$$T^{**-1}(\widehat{Y}) = \widehat{X}, \tag{3.18}$$

donde $T : X \to Y$ es un operador entre espacios de Banach, T^{**} es su doble adjunto y $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$ son las inmersiones canónicas de X y Y en X^{**} y Y^{**}, respectivamente. Los operadores con tal propiedad son llamados *operadores tauberianos*. Es obvio que la condición (3.18) equivale a

$$T^{**-1}(\widehat{Y}) \subset \widehat{X}, \tag{3.19}$$

pues la contención inversa siempre se cumple.

En las secciones anteriores se han dado todos los elementos necesarios para presentar ahora la prueba de D. J. H Garling y A. Wilansky del siguiente teorema debido a Berg, Crawford y Whitley.

Teorema 3.4.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz conservadora. A no suma a ninguna sucesión acotada y divergente si y sólo si al considerarse como un operador de c en c, tiene rango cerrado y su núcleo es de dimensión finita.*

Lema 3.4.2 *Sea X un espacio de Banach y sea Z un subespacio cerrado de X. Z es reflexivo si y sólo si $\widehat{Z}$ es un subespacio $\sigma(X^{**}, X^*)$ −cerrado en X^{**}.*

Demostración. Sean B y B^{**} las bolas unitarias cerradas en X y X^{**}, respectivamente. Por el Teorema 1.3.16 y la Proposición 1.3.8 tenemos:
Z es reflexivo $\Longleftrightarrow$ $Z \cap B$ es $\sigma(Z, Z^*)$-compacto $\Longleftrightarrow$ $Z \cap B$ es $\sigma(X, X^*)$-compacto $\Longleftrightarrow$ $\widehat{(Z \cap B)}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto.
Es claro que $\widehat{(Z \cap B)} = \widehat{Z} \cap B^{**}$ y sabemos que B^{**} es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto.
Por tanto, Z es reflexivo $\Longleftrightarrow$ $\widehat{Z} \cap B^{**}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto $\Longleftrightarrow$ $\widehat{Z} \cap B^{**}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerrado.
Por el corolario del Teorema de Krein-Šmulian, visto en el Capítulo 1, se sigue el resultado. ‖

Lema 3.4.3 *Sea X un espacio de Banach tal que X^* contiene un subespacio total y reflexivo Z. Entonces $Z = X^*$ y así, X es reflexivo.*

Demostración. Sea B^* las bola unitaria cerrada en Z. Por el Teorema 1.3.16 tenemos que $B^* \cap Z$ es $\sigma(X^*, X^{**})$-compacto y como la topología $\sigma(X^*, X)$ es más débil que $\sigma(X^*, X^{**})$), entonces $B^* \cap Z$ es $\sigma(X^*, X)$ - compacto y por tanto, $\sigma(X^*, X)$-cerrado. Por el corolario del Teorema de Krein−Šmulian, Z es $\sigma(X^*, X)$-cerrado en X^*.
Supongamos $Z \not\subseteq X^*$. Por ser Z un conjunto $\sigma(X^*, X)$ −cerrado, existen $x_0^* \in X^* - Z$ y $x_0 \in X$ tales que $\widehat{x_0}(x_0^*) = x_0^*(x_0) \neq 0$ y $\widehat{x_0}(z^*) = z^*(x_0) = 0$ para todo $z^* \in Z$. Al ser Z total, se tiene $x_0 = 0$, lo que contradice que $x_0^*(x_0) \neq 0$; por tanto, $Z = X^*$ y X es reflexivo. ‖
En lo que sigue $N(T)$ y $R(T)$, denotan como es costumbre, al núcleo y rango de un operdor T, respectivamente.

Lema 3.4.4 *Sean X y Y espacios de Banach y sea $T \in B(X, Y)$. Si $R(T)$ es cerrado en Y, entonces $N(T^{**}) = (N(T))^{\perp\perp}$.*

Demostración. Por el inciso *ii*) del Teorema 1.6.13, la Proposición 1.6.6 y el Teorema 1.6.14

$$N(T)^{\perp} = \left({}^{\perp}R(T^*)\right)^{\perp} = \overline{R(T^*)}^{w^*} = R(T^*),$$

y por el inciso *i*) del mismo Teorema 1.6.13,

$$N(T)^{\perp\perp} = R(T^*)^{\perp} = N(T^{**}). \; \| \tag{3.20}$$

Observación 3.4.5 *Con el siguiente ejemplo mostramos que no es posible eliminar en el lema anterior la condición de que $R(T)$ sea cerrado en Y.*

Sea $A : c_0 \to c_0$ el operador dado como

$$\left(A\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = (x_n - x_{n+1})_{n=1}^{\infty}.$$

Si $A(x) = 0$ para alguna $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in c_0$, entonces $x_1 = x_2 = x_3, ...,$ y como $(x_1, x_2, x_3, ...) \in c_0$, entonces $x_1 = x_2 = ... = 0$. O sea, A es inyectiva. Claramente, $A \in B(c_0, c_0)$. Si $R(A)$ es cerrado en c_0, entonces es completo y por el teorema de la función abierta, existe $M > 0$ tal que para cada $y \in R(A)$ existe un elemento (único) $x \in c_0$ que satisface $A(x) = y$ y $\|x\| \leq M \|y\|$, pero esto es imposible, ya que si $n \in \mathbb{N}$ y

$$x = (n, n-1, n-2, ..., 1, 0, 0, ...) \in c_0,$$

entonces $A(x) = (1, 1, ..., \overset{n}{1}, 0, 0...) \in c_0$, $\|x\| = n$ y $\|y\| = 1$. Por tanto, $R(A)$ no es cerrado en c_0.
Para probar que $N(A^{**}) \neq (N(A))^{\perp\perp}$ basta que mostremos que A^{**} no es inyectiva, ya que A si lo es y, entonces $N(A)^{\perp\perp} = 0$ y $N(A^{**}) \neq 0$. Sea $x^* = (a_1, a_2, ...) \in c_0^* = \ell^1$; x^* es una sucesión absolutamente convergente que satisface:

$$A^*(x^*)(x) = x^*(A(x)) = x^*(x_1 - x_2, x_2 - x_3, ...) =$$

$$= a_1(x_1 - x_2) + a_2(x_2 - x_3) + ... = a_1 x_1 + (a_2 - a_1) x_2 + (a_3 - a_2) x_3 + ...$$

para todo $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in c_0$.
Así,

$$A^*(x^*) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, ...)$$

Sea $x^{**} = (b_1, b_2, ..., b_n, ..) \in c_0^{**} = \ell^{\infty}$; entonces x^{**} es una sucesión acotada tal que

$$\begin{aligned} A^{**}(x^{**})(x^*) &= x^{**} A^*(x^*) \\ &= x^{**}(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, ...) \\ &= b_1 a_1 + b_2 (a_2 - a_1) + b_3 (a_3 - a_2) ... \end{aligned}$$

para cada $x^* \in \ell^1$.

Al tomar $(b_1, b_2, ..., b_n, ..) = (1, 1, 1, 1, . .)$ comprobamos que A^{**} no es inyectiva.
En el siguiente teorema se dan las condiciones que define a los operadores tauberianos y a los operadores con la llamada propiedad N. Tales nombres no aparecen aún en [6].

Teorema 3.4.6 *Sea $T \in B(X,Y)$ y consideremos las siguientes condiciones:*

i) $T^{**^{-1}}\left(\widehat{Y}\right) \subset \widehat{X}$ (T es tauberiano);

ii) $N(T^{**}) \subset \widehat{X}$; (T tiene la propiedad N)

iii) $N(T)$ es reflexivo.

Entonces i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) y ninguna de las implicaciones inversas es válida en general.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) $T^{**}(N(T^{**})) = \{0\} \subset \widehat{Y}$.
Por tanto, $N(T^{**}) \subset \widehat{X}$.
ii) $\Rightarrow$ iii) Afirmamos que si

$$N(T^{**}) = \widehat{N(T)}, \tag{3.21}$$

entonces se cumple iii), ya que por el Teorema1.6.13 $N(T^{**}) = R(T^*)^{\perp}$, y como $N(T)$ es cerrado y $R(T^*)^{\perp}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)-$ cerrado, el Lema 3.4.2 garantiza que $N(T)$ es reflexivo.
Probaremos (3.21), suponiendo ii).
Sea $x^{**} \in N(T^{**})$, por hipótesis $x^{**} \in \widehat{X}$, es decir, existe $x \in X$ tal que $\widehat{x} = x^{**}$. Así.

$$T^{**}(\widehat{x})(y^*) = \widehat{x}(T^*(y^*)) = T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) = 0$$

para todo $y^* \in Y^*$y por tanto, $Tx = 0$ y se cumple $N(T^{**}) \subset \widehat{N(T)}$.
La otra contención siempre es válida ya que T^{**} es un extensión de T.
El operador A introducido en la Observación 3.4.5 nos servirá para hacer ver que iii) no implica ii): como A es inyectiva, $N(A) = \{0\}$ es reflexivo. Sabemos que $(1, 1, 1, ...) \in N(A^{**})$ y es claro que $(1, 1, 1, . .) \notin \widehat{c_0}$.
Para ver que ii) no implica i) utilizaremos la matriz T de Cesàro. La matriz está dada de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Esta matriz define un operador $T : c_0 \to c_0$, ya que

$$T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots\right)$$

es la sucesión de promedios de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, la cual converge a 0 si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. De hecho, siguiendo este mismo procedimiento podríamos haber visto que la matriz *suma a toda sucesión convergente; por tanto define un operador* lineal y continuo de c en c, aquí sólo consideraremos la restricción a c_0. Afirmamos que $N(T^{**}) \subset \widehat{c_0}$ y que $T^{**^{-1}}(\widehat{c_0})$ no esta contenido en $\widehat{c_0}$. Primero se demostrará que $N(T^{**}) = \{0\}$, con lo que $N(T^{**}) \subset \widehat{c_0}$.

$$T^* : c_0^* \to c_0^*$$

Sean $x^* \in c_0^*$ y $x \in c_0$,

$$(T^* x^*)(x) = x^*(Tx) = x^*\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots\right).$$

Existe una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 = c_0^*$ tal que

$$x^*\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

En particular

$$(T^* x^*)(e_i) = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

para cada vector e_i, $i \geq 1$, de la base canónica de c_0. Por tanto,

$$(T^* x^*)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{a_n}{n} x_i.$$

Es decir, la sucesión en ℓ^1 asociada a $T^* x^*$ es $(b_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\sum\limits_{n=i}^{\infty} \frac{a_n}{n}\right)_{i=1}^{\infty}$.
Al proceder de modo análogo con T^{**} se tiene que para cada sucesión $(c_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} (= c_0^{**})$ existe una sucesión $(d_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, tal que

$$T^{**}(x^{**})(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i a_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i \text{ donde } b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad i \geq 1$$

para toda sucesión absolutamente convergente $(a_i)_{i=1}^{\infty}$. De hecho si $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión asociada a $x^{**} \in c_0^{**}$, entonces $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ es la que corresponde a $T^{**}(x^{**})$.
Al tomar $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 0, 0, \dots)$ se tiene: $(b_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 0, 0 \dots)$ y por tanto

$$d_1 = c_1.$$

Con $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (-1, 2, 0, ...)$ se tiene. $(b_i)_{i=1}^{\infty} = (0, 1, 0, 0 ..)$ y por tanto

$$\begin{aligned} -d_1 + 2d_2 &= c_2 \\ d_2 &= \frac{c_1 + c_2}{2} \end{aligned}$$

Al continuar tomando las sucesiones $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (0, ..., -i+1, i, 0, ...)$, obtenemos

$$d_n = \frac{c_1 + c_2 + .. + c_n}{n} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Así. $d_i = 0$ para todo $i \geq 1$ implica $c_i = 0$ para todo $i \geq 1$, o lo que es lo mismo $x^{**} = 0$ si $T^{**}x^{**} = 0$, por tanto T^{**} es inyectiva y $N(T^{**}) \subset \widehat{c_0}$. En tanto que ${T^{**}}^{-1}(\widehat{c_0}) \not\subseteq \widehat{c_0}$, pues $T^{**}(-1, 1, -1, 1, ...) \in \widehat{c_0}$. $\|$

Teorema 3.4.7 *Si $T \in B(X, Y)$ es tal que $R(T)$ es cerrado en Y, entonces las condiciones i), ii) y iii) del teorema anterior son equivalentes.*

Demostración. Por el lema 3.4.4 tenemos que $N(T^{**}) = (N(T))^{\perp\perp}$. Y por el teorema de la bipolar

$$(N(T))^{\perp\perp} = \overline{\widehat{N(T)}}^{\sigma(X^{**},X^{*})}.$$

iii) $\Rightarrow$ *ii)*. Como $N(T)$ es reflexivo $\widehat{N(T)} = \overline{\widehat{N(T)}}^{\sigma(X^{**},X^{*})}$ (Lema 3.4.2) y por tanto, $(N(T))^{\perp\perp} \subset \widehat{X}$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. $\left({}^{\perp}R(T^{**})\right)^{\perp} = N(T^{*})^{\perp}$. Como $R(T)$ es cerrado se sigue que $R(T^{**})$ es $\sigma(Y^{**}, Y^{*})$ –cerrado (Teorema 1.6.14) y por tanto,

$$R(T^{**}) = N(T^{*})^{\perp}$$

Sea $y \notin R(T)$, entonces existe $y^{*} \in Y^{*}$ tal que $T^{*}(y^{*}) = 0$ y $\widehat{y}(y^{*}) \neq 0$. Así,

$$\widehat{y} \notin \widehat{R(T)} \Rightarrow \widehat{y} \notin N(T^{*})^{\perp} \cap \widehat{Y} = R(T^{**}) \cap \widehat{Y}.$$

De donde $\widehat{R(T)} = R(T^{**}) \cap \widehat{Y}$. Así, si $x^{**} \in {T^{**}}^{-1}\left(\widehat{Y}\right)$existe $x \in X$ tal que

$$\widehat{Tx} = T^{**}\widehat{x} = T^{**}x^{**}$$

es decir.

$$T^{**}(x^{**} - \widehat{x}) = 0$$

y como suponemos que *ii)* es válido, $x^{**} - \widehat{x} \in \widehat{X}$, y por tanto, $x^{**} \in \widehat{X}$. $\|$

Lema 3.4.8 *Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matriz conservadora, y llamemos también A al operador en $B(c, c)$ que ella define. Entonces A no suma a ninguna sucesión acotada y divergente si y sólo si ${A^{**}}^{-1}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$ (o sea el operador A es tauberiano).*

Demostración. Sea U el isomorfismo canónico entre c_0 y c (Proposición 3.3.3) y sea $T = U^{-1}AU : c_0 \to c_0$. Es fácil comprobar que este operador está dado por la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ s_1 - \alpha & a_{11} - \alpha_1 & a_{12} - \alpha_2 & \ldots \\ s_2 - \alpha & a_{21} - \alpha_1 & a_{22} - \alpha_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_j = \lim\limits_{i\to\infty} a_{ij}$, $s_p = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{pj}$ y $\alpha = \lim\limits_{p\to\infty} s_p$, en el sentido que da lo mismo aplicar T a una sucesión de c_0 que multiplicar por P a dicha sucesión.
$T^{**} : c^{**}(= \ell^\infty) \to c^{**}$ está también dada por la misma matriz.
Afirmamos que

$$A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c} \Longleftrightarrow T^{**^{-1}}(\widehat{c_0}) \subset \widehat{c_0}.$$

En efecto, supongamos que $A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$ y sea $x^{**} \in T^{**^{-1}}(\widehat{c_0})$, entonces

$$T^{**}x^{**} \in \widehat{c_0} \Rightarrow U^{**^{-1}}A^{**}U^{**}x^{**} \in \widehat{c_0} \Rightarrow$$
$$U^{**}U^{**^{-1}}A^{**}U^{**}x^{**} \in \widehat{c} \Rightarrow A^{**}U^{**}x^{**} \in \widehat{c}$$

y entonces por hipótesis tenemos que $U^{**}x^{**} \in \widehat{c}$ y por tanto,

$$x^{**} = U^{**^{-1}}U^{**}x^{**} \in \widehat{c_0}.$$

La implicación contraria se demuestra de manera análoga partiendo de que $A^{**} = U^{**}T^{**}U^{**^{-1}}$.
Supongamos que A no suma a ninguna sucesión acotada divergente y que $T^{**}(x) \in \widehat{c_0}$, o sea $P(x) \in c_0$, con $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in m$. Sea $x' = (x_2, x_3, ..., x_n, ..)$.

$$Px = (\alpha x_1 + \alpha_1 x_2 + ..., (s_1 - \alpha)x_1 + (a_{11} - \alpha_1)x_2 + (a_{12} - \alpha_2)x_3 ..., ...)$$

es decir, la $i+1$ coordenada $(Px)_{i+1}$ de Px está dada como

$$(Px)_{i+1} = (s_i - \alpha)x_1 + (Ax')_i - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_{j+1}$$

para cada $i \geq 1$, donde por supuesto $(Ax')_i$ es la $i-$ coordenada de Ax'.
Como $\lim\limits_{i\to\infty}(s_i - \alpha) = 0$, por ser A una matriz conservadora, concluimos que $Ax' \in c$. Por hipótesis, $x' \in c$ y entonces $x \in c$, por tanto x es de la forma

$$x = y + \lambda e$$

donde $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ..) \in c_0$ y $e = (1, 1, 1. . , ,)$. Así

$$(Py)_{i+1} = (s_i - \alpha) y_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} - \alpha_j) y_{j+1}.$$

Observamos que $\lim\limits_{i\to\infty} (s_i - \alpha) y_1 = 0$ y $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (a_{ij} - \alpha_j) y_{j+1} = 0$ por ser A una matriz conservadora (ver Teorema 3.1.5); por consiguiente $Py \in c_0$, y como $Px \in c_0$, entonces $P(\lambda e) \in c_0$. Pero

$$\lim_{i\to\infty} P(e)_{i+1} = \lim_{i\to\infty} \left(s_i - \alpha + s_i - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \right) = \lim_{i\to\infty} \left(s_i - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \right) = \chi \neq 0$$

ya que de ser cero este límite, la matriz sería conula y por tanto sumaría a una sucesión acotada divergente (teorema 3.2.5) lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $\lambda = 0$ y $x \in c_0$ y así $T^{**^{-1}}(\widehat{c_0}) \subset \widehat{c_0}$ lo que vimos que equivale a $A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$.

Supongamos ahora que $T^{**^{-1}}(\widehat{c_0}) \subset \widehat{c_0}$ y que existe $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, .)$ en m tal que $Ax \in c$. Sea $x'' = (0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..)$.

$$(Px'')_{i+1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j = (Ax)_i - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$$

y entonces $Px'' \in c$. Sean $\lambda = \lim\limits_{i\to\infty} (Px'')_i$ y $\lim\limits_{i\to\infty} (Pe)_i = \chi$; como $e \notin c_0$, entonces $\chi \neq 0$.

Sea $z = x'' - \frac{\lambda}{\chi} e$, entonces

$$P(z) = P\left(x'' - \frac{\lambda}{\chi} e\right) = P(x'') - P\left(\frac{\lambda}{\chi} e\right) \in c_0,$$

y por tanto $z \in c_0$. Así, $x'' = z + \frac{\lambda}{\chi} e \in c$ y $x \in c$. Es decir, A no suma a ninguna sucesión acotada divergente. ||

Definición 3.4.9 *Para cada $n \geq 1$ y cada sucesión $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ definimos $T_n y = (0, 0. ..., 0, y_n, y_{n+1}, ...)$*

Es obvio que $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n y)_p = 0$ para toda sucesión y y todo índice $p \geq 1$, donde $(T_n y)_p$ denota al $p-$ésimo término de la sucesión $T_n y$.

Lema 3.4.10 *Para cada $p \in \mathbb{N}$, sea*

$$M_p = \{x \in c_0 : x = (0, 0, ..., 0, x_{p+1}, x_{p+2}, ...)\}.$$

M_p es un subespacio lineal cerrado de c.

Proposición 3.4.11 *Si A es una matriz conservadora que no suma ninguna sucesión acotada divergente, entonces $R(A)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $p \geq 1$, observamos que $c = M_p \oplus F$ donde F es el espacio de dimensión finita

$$\{x \in c : x = (x_1, x_2, ..., x_p, \lambda, \lambda, ...), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, $A(c) = A(M_p) + A(F)$. Es claro que $R(A) = A(c)$ es cerrado si $A(M_p)$ es cerrado, ya que $A(F)$ es de dimensión finita.
Supongamos que $A(c)$ no es cerrado; por consiguiente, $A(M_p)$ no es cerrado para ningún entero $p \geq 1$.
Sea $p \geq 1$,como $A(M_p)$ no es cerrado, entonces $A \mid M_p$ no está acotado por abajo, es decir, no existe $m > 0$ tal que $\|Ax\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in M_p$.
De donde, para cada $r > 0$ existe $x \in M_p$ tal que

$$\|Ax\| < \frac{r}{2}\|x\|$$

o lo que es lo mismo,

$$\left\|A\left(\frac{2x}{\|x\|}\right)\right\| < r.$$

Así, dado $\epsilon > 0$ existe $x = (\overset{0}{x_1}, .., \overset{0}{x_p}, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+n}, ...) \in M_p$ tal que $\|x\| = 2$ y $\|Ax\| < \epsilon$. Como $x \in c_0$ entonces

$$x = \lim_{i \to \infty} (x_1, x_2, ..., x_i, 0, 0, ...)$$

y por tanto,

$$\lim_{i \to \infty} \|(x_1, x_2, ..., x_i, 0, 0...)\| = 2,$$

como A es continua

$$\lim_{i \to \infty} \|A(x_1, x_2, ..., x_i, 0, 0...)\| = \|Ax\| < \epsilon.$$

Si n es suficientemente grande, entonces

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...)\| \geq 1 \text{ y } \|A(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...)\| < \epsilon.$$

Para alguna n suficientemente grande se tiene que

$$z_p = \frac{(\overset{0}{x_1}, .., \overset{0}{x_p}, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n, 0, 0...)}{\left\|(\overset{0}{x_1}, .., \overset{0}{x_p}, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n, 0, 0...)\right\|},$$

es tal que $z_p \in M_p$, $\|z_p\| = 1$ y $\|Az_p\| < \epsilon$.
Sea

$$z_1 = (0, x_{12}, ..., x_{1n_1}, 0, 0, ...) \in M_1$$

tal que $\|z_1\| = 1$ y $\|Az_1\| < \frac{1}{2}$.
Sea

$$z_2 = (0, ..., 0, 0, x_{2n_1+2}, ..., x_{2n_2}, 0, 0, ...) \in M_{n_1+1}$$

tal que $\|z_2\| = 1$ y $\|Az_2\| < \frac{1}{4}$.
En general construidos $z_1, ..., z_{i-1}$ tomamos

$$z_i = \left(0, ..., 0, 0, x_{in_{i-1}+2}, ..., x_{in_i}, 0, 0, ...\right) \in M_{n_{i-1}+1}$$

tal que $\|z_i\| = 1$ y $\|Az_i\| < \frac{1}{2^i}$.
Como cada z_i sólo tiene un número finito de entradas distintas de cero y su norma es 1, entonces alguna de estas entradas es igual a 1.
Sea

$$y = (y_i)_{i=1}^{\infty} = \left(0, x_{12}, ..., x_{1n_1}, 0, x_{2n_1+2}, ..., x_{2n_2}, ..., 0, x_{in_{i-1}+2}, ..., x_{in_i}, ...\right).$$

y es acotada y de hecho $\|y\| = 1$. También es claro que y es divergente ya que tiene ceros y unos intercalados infinitamente.
Afirmamos que A suma a y. Sea $p \geq 1$.

$$\left|A\left(T_{n_i+1}y\right)_p\right| = \left|\sum_{j=n_i+i+1}^{\infty} a_{pj}y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}y_j - \sum_{j=1}^{n_i+i} a_{pj}y_j\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{pj}y_j - A\left(y_1 + \cdots + z_i\right)_p\right| = \left|A\left(y\right)_p - \left(\sum_{j=1}^{i} Ay_j\right)_p\right|$$

pero sabemos que $\left|A\left(T_{n_i+1}y\right)_p\right| \to 0$ cuando $i \to \infty$. Es decir,

$$\left|A\left(y\right)_p - \left(\sum_{j=1}^{i} A\left(y_j\right)\right)_p\right| \to 0 \text{ cuando } i \to \infty.$$

Como $\left(\sum_{j=1}^{i} A\left(z_j\right)\right)_p = \sum_{j=1}^{i} A\left(z_j\right)_p$, tenemos

$$A\left(y\right)_p = \sum_{j=1}^{\infty} A\left(z_j\right)_p.$$

Para cada $j \geq 1$, $\|Az_j\| < \frac{1}{2^j}$ y por tanto, $\sum_{j=1}^{\infty} \|Az_j\|$ converge. Al ser c un espacio de Banach,

$$\sum_{j=1}^{\infty} Az_j \in c.$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\left|\left(\sum_{j=1}^{\infty} A(z_j)\right)_p - \sum_{j=1}^{n} A(z_j)_p\right| < \epsilon \text{ si } n \geq N \text{ y todo } p \geq 1.$$

Concluimos así que $\left(\sum_{j=1}^{\infty} Az_j\right) = A(y)$ y entonces, Ay es una sucesión convergente, lo que contradice nuestra hipótesis. Así, $R(A)$ es cerrado. ||

Teorema 3.4.12 *Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matriz conservadora. A no suma a ninguna sucesión acotada divergente si y sólo si el operador $A : c \to c$ que ella determina, tiene rango cerrado y su núcleo es de dimensión finita.*

Demostración. Si $R(A)$ es cerrado y $\dim N(A)$ es finita, entonces $N(A)$ es reflexivo y por tanto, por el teorema 3.4.7, $A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$. Por el lema 3.4.8 A no suma a ninguna sucesión acotada divergente.
Si A no suma a ninguna sucesión acotada divergente, entonces $A^{**^{-1}}(\widehat{c}) \subset \widehat{c}$ por el Lema 3.4.8, y por el Teorema 3.4.6 tenemos que $N(A)$ es reflexivo, y por tanto, de dimensión finita según el teorema 3.3.8, ya que c no puede ser isomorfo un subespacio cerrado de $N(A)$. Finalmente, la cerradura de $R(A)$ se estableció en la proposición anterior. ||

Capítulo 4

Operadores Tauberianos

4.1 Algunos ejemplos y propiedades.

En lo que sigue X y Y son espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$.

Definición 4.1.1 *T es un operador tauberiano si dado $x^{**} \in X^{**}$ tal que $T^{**}x^{**} \in \widehat{Y}$ entonces se tiene que $x^{**} \in \widehat{X}$, o lo que es lo mismo*

$$T^{**-1}\left(\widehat{Y}\right) = \widehat{X} \tag{4.1}$$

Como ya se dijo en el capítulo anterior esta condición equivale a

$$T^{**-1}\left(\widehat{Y}\right) \subset \widehat{X}.$$

Observación 4.1.2 *Si T está definido entre espacios reflexivos entonces es obvio que T es tauberiano. Es también evidente que la identidad $I : X \to X$ es un operador tauberiano. Sea $a \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $a \neq 0$, si T es tauberiano, entonces aT es tauberiano. También es claro que 0 no es un operador tauberiano y por tanto, la suma de operadores tauberianos no es necesariamente un operador tauberiano. Lo que sí podemos afirmar en cuanto a la suma de operadores es lo siguiente:*

Proposición 4.1.3 *Sea T tauberiano y $W : X \to Y$ un operador débilmente compacto, entonces $T + W$ es un operador tauberiano.*

Demostración. Es inmediata al usarse el Teorema 1.7.8. ||

Corolario 4.1.4 *Si T es tauberiano, entonces $T + U$ es tauberiano para todo operador compacto $U : X \to X$.*

Proposición 4.1.5 *Sea Z un espacio de Banach y $S \in B(Y, Z)$. Para las siguientes afirmaciones*

i) T y S son operadores tauberianos;

ii) ST es un operador tauberiano;

iii) T es un operador tauberiano,

se cumple que i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii).

Corolario 4.1.6 *T es tauberiano si es invertible por la izquierda.*

Definición 4.1.7 *T es superiormente semi-Fredholm si $R(T)$ es cerrado en Y y $\dim N(T) < \infty$. Por $\phi_+(X,Y)$ denotamos a la clase de todos los operadores superiormente semi-Fredholm de X en Y.*

Ejemplos 4.1.8

1. Si $T \in \phi_+(X,Y)$, entonces T es tauberiano.

2. El operador $T : \ell^2(X) \to \ell^2(X)$ definido como

$$T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

es tauberiano.

Para probar la afirmación recordammos que $l^2(X)^*$ se identifica con $l^2(X^*)$. Así, el adjunto

$$T^* : l^2(X^*) \to l^2(X^*)$$

de T está dado por la fórmula $T^*\left((x_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\frac{x_n^*}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. En tanto que el doble adjunto

$$T^{**} : l^2(X^{**}) \to l^2(X^{**})$$

está definido como $T^{**}\left((x_n^{**})_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\frac{x_n^{**}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Si $T^{**}\left((x_n^{**})_{n=1}^{\infty}\right) \in \widehat{l^2(X)} = l^2\left(\widehat{X}\right)$, entonces $\left(\frac{x_n^{**}}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l^2\left(\widehat{X}\right)$ y por tanto,

$$\frac{x_n^{**}}{n} \in \widehat{X} \text{ y por tanto, } x_n^{**} \in \widehat{X}$$

para cada $n \geq 1$, es decir, $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty} \in l^2\left(\widehat{X}\right)$ y por consiguiente T es tauberiano.

3. Sea X un espacio de Banach no reflexivo. Los siguientes operadores T_k son ejemplos de operadores no tauberianos:

$$T_k : \ell^2(X) \to \ell^2(X)$$

$$T_k\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \begin{cases} \frac{x_n}{n} \text{ si } n \leq k \\ 0 \text{ si } n > k \end{cases}.$$

Observación 4.1.8 *Si consideramos los operadores T_k que acabamos de definir y el operador T definido en el ejemplo 1, vemos que $\|T - T_k\| \to 0$, cuando $k \to \infty$, lo que implica que complemento del conjunto de los operadores tauberianos no es cerrado, o lo que es lo mismo el conjunto de los operadores tauberianos no es abierto.*

El Teorema de Factorización de Operadores Débilmente Compactos [3] nos da una clase de operadores tauberianos. A continuación presentamos la prueba de dicho teorema:

Lema 4.1.9 *Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach, $W \subset X$ un conjunto convexo balanceado y acotado, B la bola unitaria cerrada en $(X, \|\ \|)$. Si para cada $n \geq 1$, $\|\ \|_n$ es la funcional de Minkowski del conjunto $U_n = 2^n W + \frac{1}{2^n} B$ y definimos*

$$Y = \left\{ x \in X : |||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

y

$$C = \{x \in X : |||x||| \leq 1\}$$

entonces

i) $\|\ \|_n$ es una norma equivalente a $\|\ \|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por X_n a $(X, \|\ \|_n)$;

ii) $(Y, |||\ |||)$ es un espacio de Banach;

iii) $W \subset C$.

iv) la inclusión j de $(Y, |||\ |||)$ en $(X, \|\ \|)$ es continua y j^{**} es inyectivo.

v) $\varphi^{**}(y^{**}) = (j^{**}(y^{**}), j^{**}(y^{**}), \ldots)$, donde $\varphi : (Y, |||\ |||) \to \ell^2((X_n)_{n=1}^{\infty})$ es el operador definido como $\varphi(y) = (j(y))_{n=1}^{\infty}$. Además, φ^{**} es inyectivo.

vi) j es tauberiano.

vii) Y es reflexivo si, y sólo si, W es débilmente relativamente compacto.

Demostración. Las demostraciones de *i)* y *ii)* son inmediatas.
iii) Sea $w \in W$, entonces $w = \frac{1}{2^n} 2^n w \in \frac{1}{2^n}\left(2^n W + \frac{1}{2^n} B\right)$ para todo $n \geq 1$ y por tanto, $|||w||| \leq 1$ y $w \in C$.
iv) Como $\|y\|$ y $\|y\|_1$ son equivalentes, existe m tal que

$$\|y\| \leq m \|y\|_1 \leq m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = m\, |||y||| \text{ para todo } y \in Y$$

de donde se sigue la continuidad de j.
Se tiene que $j^*(x^*) = x^*|Y$ para todo $x^* \in X^*$ y

$$j^{**}(y^{**})(x^*) = y^{**}(j^*(x^*)) = y^{**}(x^*|Y)$$

para todo $x^* \in (X, \|\ \|)^*$ y $y^{**} \in (Y, |||\ |||)^{**}$.
Así, $j^{**}y^{**} = 0$ implica

$$j^{**}(y^{**})(x^*) = 0 = y^{**}(x^*|Y)$$

para todo $x^* \in (X, \|\ \|)^*$ y por tanto, $y^{**} = 0$, ya que $x^*|Y$ recorre Y^* cuando x^* recorre X^*. Es decir, j^{**} es inyectiva.
v) Es claro que φ es una isometría y por tanto, su rango $R(\varphi)$ es cerrado. Como $\|\ \|$ y $\|\ \|_n$ son equivalentes para toda $n \geq 1$, entonces

$$j : (Y, |||\ |||) \to X_n = (X, \|\ \|_n)$$

es continua y $X_n^* = (X, \|\ \|)^*$ para todo $n \geq 1$.

$$\varphi^* : \ell^2\left((X_n)_{n=1}^{\infty}\right)^* = \ell^2\left((X_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) \to (Y, |||\ |||)^*$$

y $\varphi^*\left((x_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \circ j$ donde $x_n^* \in X^*$ para todo $n \geq 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_n^2 < \infty$.
Para el operador

$$\varphi^{**} : (Y, |||\ |||)^{**} \to \ell^2\left((X_n)_{n=1}^{\infty}\right)^{**} = \ell^2\left((X_n^{**})_{n=1}^{\infty}\right)$$

tenemos que dado $y^{**} \in (Y, |||\ |||)^{**}$ existe $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty} \in \ell^2\left((X_n^{**})_{n=1}^{\infty}\right)$ tal que $\varphi^{**}(y^{**}) = (x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$. Así,

$$\varphi^{**}(y^{**})\left((x_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(x_n^*) \text{ para cada } (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2\left((X_n^*)_{n=1}^{\infty}\right).$$

En particular,

$$\begin{aligned} x_n^{**}(x^*) &= \varphi^{**}(y^{**})\left(0, 0, ..., 0, \underbrace{x^*}_{\text{lugar } n}, 0, ...\right) \\ &= y^{**}\left(\varphi^*\left(0, 0, ..., 0, \underbrace{x^*}_{\text{lugar } n}, 0, ...\right)\right) \\ &= y^{**}(x^* \circ j) = y^{**}(j^*)(x^*) = j^{**}(y^{**})(x^*) \end{aligned}$$

si $n \geq 1$, $x^* \in X_n^*$ y $y^{**} \in (Y, |||\ |||)^{**}$. Por tanto, $x_n^{**} = j^{**}(y^{**})$ para todo $n \geq 1$, es decir,

$$\varphi^{**}(y^{**}) = \left(j^{**}(y^{**}), j^{**}(y^{**}), ...\right).$$

Como j^{**} es inyectivo se tiene que φ^{**} es también inyectivo.

vi) Supongamos que $j^{**}(y^{**}) = \widehat{x}$ para algún $x \in X$; por *v)*,

$$\varphi^{**}(y^{**}) = (\widehat{x}, \widehat{x}, ...) \text{ y } (x, x, ...) \in \ell^2\left((X_n)_{n=1}^{\infty}\right).$$

Por el Teorema de Goldstine existe una red $(\widehat{y}_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $\widehat{Y}$, donde

$$|||\widehat{y}_\alpha||| \leq |||y^{**}||| \text{ para todo } \alpha \in A.$$

tal que converge a y^{**} en la topología $\sigma(Y^{**}, Y^*)$. Por tanto, por la Proposición 1.6.11 tenemos que $(\varphi^{**}(\widehat{y}_\alpha))_{\alpha\in A} = \left(\widehat{\varphi(y_\alpha)}\right)_{\alpha\in A}$ converge a

$$\varphi^{**}(y^{**}) = (\widehat{x}, \widehat{x}, ...) = \widehat{\varphi(x)}$$

en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$. Por el Teorema 1.3.8 $(x, x, ...) \in \overline{R(\varphi)}^w$ y como $R(\varphi)$ es cerrado en la norma y convexo, concluimos que $(x, x, ...) \in R(\varphi)$, es decir $x \in Y$. Como $\varphi^{**}(y^{**} - \widehat{y}) = 0$ y φ^{**} es inyectivo concluimos que $y^{**} \in \widehat{Y}$ y T es tauberiano.

vii) La bola unitaria $B_{Y^{**}}$ en Y^{**} es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ −compacta por el teorema de Alaoglu, y $\widehat{C}$ es un subconjunto denso en ella, en dicha topología (Teorema de Goldstine) . Como j^{**} es w^*−continuo (Proposición 1.6.11), se sigue que $j^{**}(B_{Y^{**}})$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ −cerrado y $j^{**}\left(\widehat{C}\right) = \widehat{C}$ es denso en él. Así,

$$\overline{\widehat{C}}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset j^{**}(B_{Y^{**}}) \subset \overline{\widehat{C}}^{\sigma(X^{**},X^*)}$$

es decir,

$$j^{**}(B_{Y^{**}}) = \overline{\widehat{C}}^{\sigma(X^{**},X^*)}. \tag{4.2}$$

Supongamos que W es débilmente relativamente compacto, es decir $\overline{W}^{\sigma(X,X^*)}$ es $\sigma(X, X^*)$ − compacto. Como que W es convexo, entonces $\overline{W}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{W}$. Sea $\widehat{x} \in \widehat{C}$, entonces $|||x||| \leq 1$, es decir, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Como $\|\ \|_n$ es una norma equivalente a $\|\ \|$ para cada n, entonces sólo existe una posibilidad: $\|x\|_n < 1$ para todo $n \geq 1$. Como $\|\ \|_n$ es la funcional de Minkowski de $2^nW + \frac{1}{2^n}B$, y éste es balanceado, se sigue que

$$\{x : \|x\|_n < 1\} \subset 2^nW + \frac{1}{2^n}B,$$

por tanto,

$$\widehat{C} \subset 2^n\overline{W} + \frac{1}{2^n}B_{X^{**}}.$$

Al ser $\sigma(X^{**}, X^*)$ −cerrado el conjunto $2^n\overline{W} + \frac{1}{2^n}B_{X^{**}}$, la igualdad (4.2) implica

$$j^{**}B_{Y^{**}} \subset 2^n\overline{W} + \frac{1}{2^n}B_{X^{**}}$$

Además, como

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(2^n\overline{W}+\frac{1}{2^n}B_{X^{**}}\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\widehat{X}+\frac{1}{2^n}B_{X^{**}}\right)=\widehat{X}$$

tenemos que $j^{**}B_{Y^{**}}\subset\widehat{X}$ y por el inciso anterior, $B_{Y^{**}}\subset\widehat{Y}$, es decir, $Y^{**}=\widehat{Y}$ y Y es reflexivo.
Si suponemos que Y es reflexivo, entonces C es débilmente compacto (Teorema 1.3.16). Por $i)$ tenemos que $W\subset C$, de donde, W es débilmente relativamente compacto. $\|$

Teorema 4.1.10 (TFODC) *Los operadores débilmente compactos se pueden factorizar por medio de un espacio reflexivo de tal manera que el segundo factor es un operador tauberiano.*

Demostración. Sea $T:Z\to X$ un operador débilmente compacto entre espacios de Banach y con la notación del lema anterior sea $W=T(B_Z)$. Por $i)$ de ese mismo lema tenemos que $T(Z)\subset Y$. Los operadores $j^{-1}\circ T:Z\to Y$ y $j:Y\to X$ proporcionan la factorización deseada. $\|$

Este teorema nos permite demostrar de forma elegante que si $T\in B(X,Y)$ es débilmente compacto, entonces $T^{**}(X^{**})\subset\widehat{Y}$. En efecto, por el teorema anterior existen un espacio reflexivo Z, y operadores $R\in B(Z,Y)$ y $S\in B(X,Z)$ tales que $T=RS$. Entonces $T^{**}=R^{**}S^{**}$ y como $\widehat{Z}=Z^{**}$, se sigue que $\widehat{R}=R^{**}$ donde $\widehat{R}(\widehat{z})=\widehat{R(z)}$ para cada $z\in Z$; es decir, $T^{**}=\widehat{R}S^{**}$ y por tanto, $T^{**}(X^{**})\subset\widehat{R}(X^{**})\subset\widehat{Y}$.

4.2 Los tauberianos y la propiedad N

Definición 4.2.1 *Se dice que $T:X\to Y$ tiene la propiedad N si $x^{**}\in\widehat{X}$ siempre que $T^{**}x^{**}=0$.*

En el capítulo anterior se introdujo este concepto y se demostró (Teorema 3.4.6) que si T es tauberiano entonces T tiene la propiedad N y que ésta a su vez implica que $N(T)$ es reflexivo. También se hizo ver que si el rango de T es cerrado en Y entonces las tres propiedades son equivalentes (Teorema 3.4.7).

Teorema 4.2.2 *Sea B la bola unitaria cerrada en X. Las siguientes tres propiedades son equivalentes:*

i) *T es tauberiano.*

ii) *T tiene la propiedad N y $T(B)$ es cerrado.*

iii) *T tiene la propiedad N y $\overline{T(B)}\subset R(T)$.*

Demostración $i) \Rightarrow ii)$ Sólo resta probar que $T(B)$ es cerrado. Supongamos que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en B tal que $T(b_n) \to y$ cuando $n \to \infty$, donde $y \in Y$. De aquí se sigue:

$$T(b_n) \xrightarrow{w} y \text{ cuando } n \to \infty$$

y (Proposición 1.3.7)

$$T^{**}\left(\widehat{b_n}\right) = \widehat{Tb_n} \xrightarrow{w^*} \widehat{y} \text{ cuando } n \to \infty. \tag{4.3}$$

Por otra parte, existe un punto b^{**} en B^{**}, la bola unitaria cerrada en X^{**}, tal que dados $x^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$ se satisface que

$$\left|\widehat{b_n}(x^*) - b^{**}(x^*)\right| < \epsilon \tag{4.4}$$

para una infinidad de índices n, de hecho, si el rango de $\left(\widehat{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es finito podemos seleccionar como b^{**} a cualquier elemento $\widehat{b_n}$ que se repita indefinidamente en la sucesión; si, por otra parte, el rango de $\left(\widehat{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es infinito, entonces b^{**} puede tomarse como un punto de acumulación, en la topología w^* de X^{**}, de $\left\{\widehat{b_n} \,|n \geq 1\right\}$; tal punto existe en vista de que $\left(\widehat{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en la bola unitaria cerrada B^{**} de X^{**}, y ésta es compacta en la topología w^* de X^{**}.
Sean $\epsilon > 0$ y $y^* \in Y^*$. Debido a que

$$T^{**}\left(\widehat{b_n}\right)(y^*) = \widehat{b_n}\left(T^*(y^*)\right) \text{ y } T^{**}(b^{**})(y^*) = b^{**}\left(T^*(y^*)\right)$$

y por 4.4 se tiene que

$$\left|T^{**}\left(\widehat{b_n}\right)(y^*) - T^{**}(b^{**})(y^*)\right| < \epsilon$$

para una infinidad de índices n.
De 4.3 se sigue que

$$\left|T^{**}\left(\widehat{b_n}\right)(y^*) - \widehat{y}(y^*)\right| < \epsilon$$

excepto para una número finito de índices n
De las dos últimas desigualdades se concluye que

$$T^{**}(b^{**})(y^*) = \widehat{y}(y^*)$$

y como y^* es un elemento arbitrario de Y^* tenemos $T^{**}(b^{**}) = \widehat{y}$
Por hipótesis T es tauberiano, por lo que $b^{**} = \widehat{b}$ para alguna $b \in X$, y como $b^{**} \in B^{**}$ se tiene que $b \in B$. Así, $\widehat{y} = T^{**}(b^{**}) = T^{**}\left(\widehat{b}\right) = \widehat{Tb}$, de donde $y = Tb$ y por tanto $T(B)$ es cerrado

$ii) \Rightarrow iii)$ Es inmediata.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que $T(x^{**}) = \widehat{y}$ para alguna $y \in Y$. Debemos probar que $x^{**} \in \widehat{X}$, lo que es inmediato si $x^{**} = 0$; supongamos entonces que $x^{**} \neq 0$.
Al sustituir, si es necesario, a x^{**} por $\frac{x^{**}}{\|x^{**}\|}$, podemos suponer que $\|x^{**}\| = 1$.
Sabemos que $\widehat{B}$ es $\sigma(X^{**}, X^{*})$ −denso en la bola unitaria cerrada B^{**} de X^{**} (Teorema de Goldstine). Por tanto, dados $\epsilon > 0$ y $x^* \in X^*$, existe $b \in B$ tal que

$$\left|\left(x^{**} - \widehat{b}\right)(x^*)\right| < \epsilon. \tag{4.5}$$

En particular, dados $\epsilon > 0$ y $y^* \in Y^*$, escogemos $b \in B$ que satisfaga 4.5 para $x^* = T^*y^*$. Con lo que tenemos

$$|y^*(y - T(b))| = \left|\left(\widehat{y} - \widehat{T(b)}\right)(y^*)\right| = \left|T^{**}\left(x^{**} - \widehat{b}\right)(y^*)\right|$$

y

$$\left|T^{**}\left(x^{**} - \widehat{b}\right)(y^*)\right| = \left|\left(x^{**} - \widehat{b}\right)(T^*y^*)\right| = \left|\left(x^{**} - \widehat{b}\right)(x^*)\right| < \epsilon.$$

De donde, $y \in \overline{T(B)}^{w}$, y como $\overline{T(B)}^{w} = \overline{T(B)}$, ya que $T(B)$ es convexo, entonces

$$\overline{T(B)}^{w} = \overline{T(B)} \subset R(T).$$

Por tanto, $y = T(x_0)$ para alguna $x_0 \in X$. Es decir,

$$T^{**}(x^{**} - \widehat{x_0}) = 0$$

lo que implica que $x^{**} - \widehat{x_0} \in \widehat{X}$, ya que T tiene la propiedad N; así $x^{**} \in \widehat{X}$ y T es un operador tauberiano. $\|$

Teorema 4.2.3 *T tiene la propiedad N si, y sólo si, el núcleo de T, $N(T)$, es reflexivo y las cerraduras $\overline{R(T^*)}$ y $\overline{R(T^*)}^{w^*}$ del rango de T en la norma y en la topología débil* coinciden.*

Demostración. Supongamos que T tiene la propiedad N. En el Teorema 3.4.6 se probó que entonces $N(T)$ es reflexivo.
Además, es claro que $\overline{T^*(Y^*)} \subset \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}$.
Sea $x^* \in \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}$. Si $x^* \notin \overline{T^*(Y^*)}$, entonces existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}(x^*) \neq 0$ y $x^{**}(T^*(y^*)) = 0$ para todo $y^* \in Y^*$; o sea, $T^{**}(x^{**}) = 0$, de donde $x^{**} = \widehat{x}$ para algún $x \in X$. Tenemos entonces

$$x^*(x) \neq 0 \text{ y } T^*(y^*)(x) = 0 \text{ si } y^* \in Y^*. \tag{4.6}$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $y^* \in Y^*$ tal que

$$|x^*(x) - T^*(y^*)(x)| < \epsilon$$

debido a que $x^* \in \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}$. Así, $x^*(x) = 0$ lo que contradice (4.6). Por tanto $\overline{R(T^*)} = \overline{R(T^*)}^{w^*}$.
Inversamente. Si $N(T)$ es reflexivo, entonces

$$\widehat{N(T)} = \overline{\widehat{N(T)}}^{\sigma(X^{**},X^*)} = N(T)^{\perp\perp}.$$

(Lema 3.4.2 y Teorema de la bipolar).
Por las proposiciones 1.6.13 y 1.6.6

$$N(T)^{\perp} = \left({}^{\perp}R(T^*)\right)^{\perp} = \overline{R(T^*)}^{w^*};$$

de donde, $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}$ por tanto,

$$(N(T))^{\perp\perp} = \left(\overline{R(T^*)}\right)^{\perp} = R(T^*)^{\perp} = N(T^{**}).$$

O sea, $N(T^{**}) = \widehat{N(T)}$ y por tanto, T tiene la propiedad N. ||

4.3 La propiedad N y las sucesiones

Teorema 4.3.1 *T tiene la propiedad N si y sólo si toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, tiene una subsucesión que es w-convergente.*

Demostración. Supongamos que T tiene la propiedad N y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. El conjunto acotado $\overline{\{\widehat{x_n} : n \geq 1\}}^{w^*}$ es w^*- compacto. Sea $z^{**} \in X^{**}$ un punto de w^*-acumulación del conjunto acotado $\{\widehat{x_n} : n \geq 1\}$.
Como $\left(T^{**}(\widehat{x_n}) = \widehat{T(x_n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero con respecto a la norma, entonces $T^{**}z^{**} = 0$. Por hipótesis $z \in \widehat{X}$. Así, $\overline{\{\widehat{x_n} : n \geq 1\}}^{w^*} \subset \widehat{X}$ y por la Proposición 1.3.8 $\{x_n : n \geq 1\}$ es w-relativamente compacto y por tanto, w-relativamente compacto por sucesiones, por el Teorema de Eberlein-Šmulian, de donde existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es w-convergente. Inversamente, sea $z^{**} \in X^{**}$ tal que $T^{**}(z^{**}) = 0$; podemos suponer que $\|z^{**}\| = 1$. Existe una red $x = \{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en B, donde, como de costumbre, B es la bola unitaria cerrada de X, tal que $\widehat{x_\alpha} \to z^{**}$ en la topología w^* de X^{**} (Teorema de Goldstine). Entonces

$$\left(T^{**}(\widehat{x_\alpha}) = \widehat{T(x_\alpha)}\right)_{\alpha \in A} \xrightarrow{w^*} T^{**}(z) = 0$$

y por tanto, $(T(x_\alpha))_{\alpha \in A} \xrightarrow{w} 0$.
Así, si C es cualquier conjunto convexo de X tal que x esté eventualmente en C, entonces $0 \in \overline{T(C)}^{w}$ y por la convexidad de C se sigue que 0 pertenece a

$\overline{T}(\overline{C})$, es decir existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ en C tal que $(T(c_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en la norma.
Para cada $\alpha \in A$ sea C_α la envolvente convexa de $\{x_\gamma : \gamma \geq \alpha\}$. Cada C_α está acotada por 1 y contiene una sucesión $(c_{\alpha n})_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0. Por hipótesis $(c_{\alpha n})_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(c_{\alpha n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge débilmente, digamos a c_α. Como

$$\|T(c_{\alpha n})\| \to 0 \text{ se tiene que } \|T(c_{\alpha n_k})\| \to 0$$

y como $(c_{\alpha n_k}) \xrightarrow{w} c_\alpha$ también se sigue que $(T(c_{\alpha n_k})) \xrightarrow{w} T(c_\alpha)$ ya que T es w-continua. Por tanto, $T(c_\alpha) = 0$.
El conjunto $\{c_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es w--relativamente compacto por sucesiones ya que por hipótesis toda sucesión en él $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $w-$convergente debido a que $\{c_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es acotado (2 es, por ejemplo, una cota) y $T(y_n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Por el teorema de Eberlein–Šmulian $\{c_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tiene un punto c de w-acumulación.
Afirmamos que $z^{**} = \widehat{c}$. Para probarlo vemos que $(\widehat{c_\alpha}) \xrightarrow{w^*} z^{**}$. Sea U una w^*- vecindad básica de z^{**}, existe α_u tal que $x_\alpha \in U$ si $\alpha \geq \alpha_u$. Sea C_{α_u} la envolvente convexa de $\{x_\alpha \mid \alpha \geq \alpha_u\}$, la vecindad U es convexa y por tanto, $\widehat{c_\alpha} \in \widehat{C_\alpha} \subset U$ si $\alpha \geq \alpha_u$, es decir se tiene la convergencia deseada.
El elemento $c \in X$ es un punto de w-acumulación de $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ y por tanto, es también un punto de w^*-acumulación de ese conjunto; de donde $z^{**} = \widehat{c}$. $\|$

Proposición 4.3.2 *Sea T un operador con la propiedad N y X_0 un subespacio cerrado de X, entonces $T|_{X_0}$ también tiene la propiedad N.*

Demostración. Es inmediata al utilizar la caracterización presentada en el teorema anterior y se recuerda que $\sigma(X, X^*)$ induce en X_0 la topología $\sigma(X_0, X_0^*)$. $\|$

Corolario 4.3.3 *Si T es tauberiano y X_0 es un subespacio cerrado de X, entonces $T|X_0$ es tauberiano.*

Demostración. Por la proposición y teorema anteriores tenemos: $T|X_0$ tiene la propiedad N y si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en la bola unitaria B_0 de X_0 tal que $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge en la topología w de X.
Por el Teorema 4.2.2, $T(z_n - x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, con $\|x\| = 1$. Cualquier sucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja en la topología w lo hará a x; de donde, si $x^* \in X^*$ es tal que $x^*(z) = 0$ para todo $z \in B_0$, entonces $x^*(x) = 0$, es decir $x \in B_0$. Por el propio Teorema 4.2.2 se tiene que $T|X_0$ es tauberiano. $\|$

Teorema 4.3.4 *Supongamos que T tiene la propiedad N y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada y $w-$convergente a 0. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es $w-$convergente a 0.*

Demostración Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente a 0, entonces existen $\epsilon > 0$. $x_o^* \in X^*$ y una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$|x_o^*(x_{n_i})| \geq \epsilon \text{ para todo } i \geq 1. \tag{4.7}$$

Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{x_{n_i}}{x_o^*(x_{n_i})}\right)_{i=1}^{\infty}$, así

$$x_o^*(y_i) = 1 \text{ para todo } i \geq 1 \tag{4.8}$$

y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica ya que $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de una sucesión básica.
Como $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es sucesión básica acotada y se satisface (4.7) se sigue claramente que $(T(y_i))_{i=1}^{\infty}$ es también una sucesión básica acotada.
$(T(x_{n_i}))_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero y como

$$\left|y^*\left(\frac{T(x_{n_i})}{x_o^*(x_{n_i})}\right)\right| \leq \frac{1}{\epsilon}|y^*(T(x_{n_i}))|$$

para todo $y^* \in Y^*$ e $i \geq 1$, se sigue que $(T(y_i))_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0. Por la proposición 4.3.2, podemos suponer $[y_i]_{i=1}^{\infty} = X$ donde $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de tipo l^+ de X (ver (4.8)) y que $(z_i)_{i=1}^{\infty} = (T(y_i))_{i=1}^{\infty}$ es una base acotada de $[T(y_i)]_{i=1}^{\infty} = Y$ que converge débilmente a 0.
Sean $(y_i^*)_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales de $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(z_i^*)_{i=1}^{\infty}$ la sucesión coeficientes funcionales de $(T(y_i))_{i=1}^{\infty}$, así

$$T^* z_i^* = y_i^* \text{ para todo } i \geq 1. \tag{4.9}$$

Como $(y_i^*)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X^* en la topología w^* y

$$\widehat{y_i}(x_o^*) = x_o^*(y_i) = 1, \tag{4.10}$$

entonces $x_o^* = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*$ donde la convergencia de esta serie es en la topología w^*. Por esto y (4.9), x_o^* es el w^*–límite de $\left(T^*\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^*\right)\right)_{n=1}^{\infty}$; de manera que x_o^* está en $\overline{R(T^*)}^{w^*}$ y por tanto, está en $\overline{R(T^*)}$ (Teorema 4.2.3).
Así. existe $z_o^* \in Y^*$ tal que $\|T^* z_o^* - x_o^*\| < \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto:

$$\sup_{i \geq 1}\left|T^* z_o^*\left(\frac{y_i}{\|y_i\|}\right) - x_o^*\left(\frac{y_i}{\|y_i\|}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$T(y_i) = z_i$ por definición y se cumple (4.10), por tanto

$$\sup_{i \geq 1}\left|\frac{1}{\|y_i\|}(z_o^*(z_i) - 1)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\|y_i\| \leq \frac{1}{\epsilon}$ para todo $i \geq 1$, se sigue

$$|z_o^*(z_i) - 1| < \frac{1}{2} \text{ y por consiguiente, } |z_o^*(z_i)| > \frac{1}{2}$$

para todo $i \geq 1$; lo que contradice que $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ sea débilmente convergente a cero. Por tanto, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es débilmente convergente a 0. $\|$

Corolario 4.3.5 *T tiene la propiedad N si, y sólo si, toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero, tiene una subsucesión que es $w-$convergente.*

Demostración. Supongamos que T tiene la propiedad N y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la topología débil.
El resultado se sigue inmediatamente si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada por abajo, ya que en ese caso hay una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0 en norma.
Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada por abajo. Más aún podemos suponer que está normalizada.
Si $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la norma, entonces por el teorema 4.3.1 existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge en la topología débil.
Supongamos que ninguna subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente. Entonces por el Teorema Eberlein–Šmulian y el Teorema 2.5.9, existe una subsucesión básica de tipo l^+ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, digamos $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Por lo anterior $(T(x_{n_i}))_{i=1}^{\infty}$ no converge a cero en la norma, deben entonces de existir una subsucesión de $(T(x_{n_i}))_{i=1}^{\infty}$ y $\epsilon > 0$ tal que la norma de cada uno de sus elementos es por lo menos ϵ. Por hipótesis esa nueva subsucesión también es $w-$convergente a cero y por tanto, tiene una subsucesión básica $w-$convergente a cero (inciso *ii*) del Teorema 2.5.9). Estos hechos contradicen el Teorema 4.3.4. Supongamos ahora que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la norma, entonces $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la topología débil, por hipótesis hay una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es débilmente convergente. Por el Teorema 4.3.1 T tiene la propiedad N. $\|$

Teorema 4.3.6 *Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

i) *T tiene la propiedad N.*

ii) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge débilmente a cero.*

iii) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que T tiene la propiedad N y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente a cero, entonces existen $x^* \in X^*$, $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$|x^*(x_{n_i})| \geq \epsilon \text{ para todo } i. \tag{4.11}$$

Como $(T(x_{n_i}))_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero, existe por el corolario anterior una subsucesión de $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ que es débilmente convergente y por tanto, al ser una sucesión básica, es débilmente convergente a 0 (Proposición 2.2.5), lo que contradice (4.11).

$ii) \Rightarrow iii)$ El resultado es claro ya que si $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, entonces también converge a cero en la topología débil.

$iii) \Rightarrow i)$ Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X tal que $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en Y, demostremos que existe una subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que es débilmente convergente, con lo que T tendrá la propiedad N en virtud del Teorema 4.3.1.

Podemos suponer que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada por abajo, pues en caso contrario el resultado se sigue inmediatamente. Si ninguna subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente, entonces existe una subsucesión $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que es una sucesión básica de tipo l^+ (Teorema 2.5.9). Así, $(x_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{z_{n_i}}{\|z_{n_i}\|}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada de tipo l^+. Como $(Tx_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a cero, entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ debe converger débilmente a cero por hipótesis lo que contradice el hecho que sea de tipo l^+. Por tanto, alguna subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ debe converger en la topología débil. $\|$

4.4 Los tauberianos y las sucesiones básicas

Teorema 4.4.1 *Las siguientes son propiedades equivalentes.*

$i)$ *T es tauberiano;*

$ii)$ *$A \subset X$ es $w-$relativamente compacto siempre que A es acotado y $T(A)$ es $w-$relativamente compacto;*

$iii)$ *$A \subset X$ es $w-$relativamente compacto siempre que A es acotado y $T(A)$ es relativamente compacto.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sean T tauberiano, $A \subset X$ acotado y supongamos que $T(A)$ es $w-$relativamente compacto. Si ϕ es una red en A, entonces tiene una subred, que podemos suponer que es ϕ misma , tal que

$$T\phi \xrightarrow{w} y \in Y$$

para alguna $y \in Y$, ya que $T(A)$ es $w-$relativamente compacto.

La red $\widehat{\phi}$ es acotada en X^{**} y por tanto, pertenece a un w^*−compacto y tiene una subred que converge según la topología w^*, nuevamente podemos suponer que es $\widehat{\phi}$ misma, digamos que

$$\widehat{\phi} \xrightarrow{w^*} z^{**}$$

para alguna $z^{**} \in X^{**}$. Ahora, por las proposiciones 1.6.11 y 1.3.8 tenemos

$$T^{**}z^{**} = w^* - \lim T^{**}\widehat{\phi} = w^* - \lim \widehat{T\phi} = \widehat{y}$$

y como T es tauberiano se tiene que $z^{**} = x \in \widehat{X}$ y $\phi \xrightarrow{w} x$ en X y por tanto, A es w−relativamente compacto.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea $A \subset X$ acotado tal que $T(A)$ es relativamente compacto, entonces $\overline{T(A)}$ es compacto y por tanto débilmente compacto.
Así, $\overline{T(A)}^{w} = \overline{T(A)}$ por ser $T(A)$ convexo, por consiguiente $T(A)$ es w−relativamente compacto y por hipótesis A es entonces w−relativamente compacto.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Sea B la bola unitaria cerrada en X. Se probará que $T(B)$ es cerrado en Y. Sea $y \in \overline{T(B)}$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en B tal que

$$T(x_n) \to y,$$

en particular $\{T(x_n) : n \geq 1\}$ es relativamente compacto. Por hipótesis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene un w−punto de acumulación, digamos x, claramente este punto está en B y se cumple que $Tx = y$. Entonces $y \in T(B)$, es decir $T(B)$ es cerrado. Por el teorema 4.2.2 basta ahora ver que T tiene la propiedad N, pero esto es claro a partir de los teoremas 4.3.1 y de Eberlein−Šmulian. ‖

Corolario 4.4.2 *Las siguientes son afirmaciones equivalentes:*

i) *T es tauberiano;*

ii) *cualquier sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente tiene una subsucesión que converge débilmente;*

iii) *cualquier sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge tiene una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. Para probar *iii)* $\Rightarrow$ *i)* se sigue la demostración hecha para el caso correspondiente en el teorema anterior.

Teorema 4.4.3 *Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

i) *T es tauberiano.*

ii) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero.*

iii) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que T es tauberiano y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n-1}^{\infty}$ converge en Y según, la topología débil. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente a 0, entonces existen $x^* \in X^*$, $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$|x^*(x_{n_i})| \geq \epsilon \text{ para toda } i. \tag{4.12}$$

pero como $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente, por el corolario 4.4.2 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $w-$convergente, que por ser básica es $w-$convergente a 0 (Proposición 2.2.5), lo que contradice 4.12, y por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0

$ii) \Rightarrow iii)$ Es inmediata.

$iii) \Rightarrow i)$ Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X tal que $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converge. demostremos que existe una subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que es débilmente convergente (que por el Corolario 4.4.1 será suficiente para hacer ver que T es tauberiano).

Podemos suponer que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ esta acotada por abajo, pues en caso contrario el resultado se sigue inmediatamente. Si ninguna subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente, entonces existe una subsucesión básica $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de tipo l^+ (Teorema 2 5.9). Así, $(x_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{z_{n_i}}{\|z_{n_i}\|}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada de tipo l^+. Como $(T(x_i))_{i=1}^{\infty}$ converge, entonces por hipótesis $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ debe converger débilmente a 0, lo que es una contradicción ya que la sucesión es de tipo l^+. Por tanto, alguna subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ debe converger débilmente. ||

Teorema 4.4.4 *T tiene la propiedad N si, y sólo si, cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge.*

Demostración. Supongamos que T tiene la propiedad N y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$. Sea $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros, con $p_1 = 0$, y

$$(b_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n x_n\right)$$

una sucesión básica de bloques en X asociada a $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ y a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y tal que $\sup\limits_{i\geq 1} \|b_i\| = \beta < \infty$. Así,

$$\|T(b_i)\| = \left\|T\left(\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n x_n\right)\right\| = \left\|\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n T(x_n)\right\| \leq \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} |a_n| \, \|T(x_n)\|$$

y

$$\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} |a_n| \|T(x_n)\| \leq \left(\sup_{p_i+1 \leq n \leq p_{i+1}} |a_n| \right) \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} \|T(x_n)\| .$$

Si $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son los coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces para cada $n \geq 1$ existe $i \geq 1$ tal que $p_i + 1 \leq n \leq p_{i+1}$, y $x_n^*(b_i) = a_n$; por tanto,

$$|a_n| = |x_n^*(b_i)| \leq \|x_n^*\| \|b_i\| = \|x_n^*\| \leq K\beta$$

donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Concluimos que $\|Tb_i\| \to 0$ cuando $i \to \infty$. Por el Teorema 4.3.6, $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero, y es claro que este resultado es independiente de la sucesión $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ que se elija. Así, del Teorema 2.5.12, se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge.

Supongamos ahora que cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica normalizada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente a cero, entonces existen $x^* \in X^*$, $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $|x^*(x_{n_i})| \geq \epsilon$ para toda i. Como $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, podemos seleccionar una subsucesión $\left(x_{n_{i_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ de $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{n_{i_k}}\right)\right\| < \infty$.

Así, $\left(x_{n_{i_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ encoge y por el Teorema 2.5.13, es débilmente convergente a 0, lo que es una contradicción. De donde, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero débilmente y T tiene la propiedad N por el Teorema 4.3.6. ‖

En el siguiente teorema y sus 3 corolarios se supone que el espacio X es real.

Teorema 4.4.5 *T es tauberiano si, y sólo si, cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.*

Demostración. Sea T tauberiano y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$.

Sea $X_0 = [x_n]_{n=1}^{\infty}$. Si $T(x_n) \neq 0$ sólo para un número finito de índices n, entonces $T(X_0)$ es de dimensión finita y por tanto $T|X_0$ es compacto.

Supongamos que $T(x_n) \neq 0$ para una infinidad de índices n, veremos que $T|X_0$ es también compacto en este caso. Por el Corolario 2.3.4 tenemos que la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ de los coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada. Por el Teorema de Dini (Lema 3.1.3) hay una sucesión convergente de números positivos $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, tal que $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|T(x_n)\|}{s_n} < \infty$.

Si $x \in X_0$, entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n x_n^*)(x) \frac{T(x_n)}{s_n}$$

y por tanto.

$$\|T(x)\| \leq \sup_{n \geq 1} |z_n^*(x)| \text{ para todo } x \in X_0;$$

donde $z_n^* = ss_n x_n^*$. Así, $z_n^* \in X_0^*$ y $\|z_n^*\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por el Teorema 1.7.6 $T|X_0$ es compacto.

Por lo anterior, la imagen $T(B_0)$ de la bola unitaria cerrada de X_0 es un subconjunto relativamente compacto de Y. Como T es tauberiano, se sigue del teorema 4.4.1 que B_0 es un conjunto débilmente compacto . Por el Teorema 1.3.16 X_0 es un espacio reflexivo y como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de él, entonces ella es acotadamente completa (Teorema 2.4.5).

Supongamos ahora que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa. Para ver que T es tauberiano usaremos la caracterización dada en *iii*) del Teorema 4.4.2. Sea pues $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X tal que $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converge en Y; se probará que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión débilmente convergente.

Como en la demostración del Teorema 4.4.3 podemos suponer que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada por abajo, pues en caso contrario el resultado se sigue inmediatamente. Si ninguna subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente, entonces existe una subsucesión básica $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de tipo l^+ (Teorema 2.5.9) y por la Proposición 2.5.17 hay una sucesión de la forma $(a_i z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de tipo P^* donde $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números positivos alejados del cero. Podemos suponer que la sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ converge, ya que en caso contrario basta tomar una subsucesión apropiada de $(a_i z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, la cual conservará la propiedad de ser una sucesión básica de tipo P^*.

Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} = (a_i z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, existe $x^* \in ([y_i]_{i=1}^{\infty})^*$ tal que

$$x^*(y_i) = 1 \text{ para todo } i \geq 1. \tag{4.13}$$

Por otra parte, como por hipótesis $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converge; $(T(y_i))_{i=1}^{\infty}$ converge. Así, existe una subsucesión, digamos $(T(y_{i_k}))_{k=1}^{\infty}$, tal que

$$\left\|T(y_{i_k}) - T\left(y_{i_{k+1}}\right)\right\| < \frac{1}{2^k}$$

para cada $k \geq 1$, y por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|T(y_{i_k}) - T\left(y_{i_{k+1}}\right)\right\| < \infty.$$

La sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} = \left(y_{i_k} - y_{i_{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty}$ es también una sucesión básica en X por la Proposición 2.5.16 y satisface que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|T(x_k)\| < \infty$; por hipótesis, es entonces acotadamente completa, por lo que la condición

$$\sup_{1\leq k<\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|=\sup_{1\leq k<\infty}\|y_{i_k}-y_1\|<\infty$$

implica que la serie telescópica $\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}y_{i_k}-y_{i_{k+1}}$ converge. De donde $\lim_{k\to\infty}y_{i_k}$ existe.
Al ser $(y_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ una sucesión básica tenemos $\lim_{k\to\infty}y_{i_k}=0$ (Proposición 2.2.5) y esto contradice (4.13). ‖

Corolario 4.4.6 *T es tauberiano si y sólo si cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|T(x_n)\|<\infty$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge y es acotadamente completa.*

La demostración es inmediata a partir de los últimos dos teoremas.

Corolario 4.4.7 *T es tauberiano si y sólo si cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de tipo P, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\|T(x_n)\|=\infty$.*

Demostración. Supongamos que T es tauberiano y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de tipo P, es decir acotada, en particular alejada del 0 y tal que

$$\sup_{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|<\infty.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty}\|T(x_n)\|<\infty$, entonces por el teorema anterior $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa. Como $\sup_{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|<\infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ es una serie convergente y por tanto, $\|x_n\|\to 0$ lo que contradice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está alejada del cero. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\|T(x_n)\|=\infty$.
Si T no es tauberiano entonces, por el teorema anterior se sigue la existencia de una sucesión básica acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que no es acotadamente completa y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T(x_n)\|<\infty. \tag{4.14}$$

Existe entonces una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que

$$M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\right\|<\infty$$

y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ no converge. Sean $\epsilon > 0$ y $0 = p_0 < p_1 < \ldots$ una sucesión de enteros, tales que

$$\left\| \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j x_j \right\| > \epsilon;$$

$(y_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j x_j \right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques acotada y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} a_j x_j \right\| \leq M.$$

O sea, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de tipo P

La sucesión escalar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, ya que $m = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$, por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada, y $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| < \infty$, por lo que

$$\|a_1 x_1\| \leq M \text{ y por tanto, } |a_1| \leq \frac{M}{m}$$

además

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq 2M \text{ y por tanto, } |a_n| \leq \frac{2M}{m}.$$

Por (4 14)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T(y_i)\| \leq \frac{2M}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \|T(x_j)\| \right) < \infty. \ \|$$

Corolario 4.4.8 *T es tauberiano si, y sólo si, cuando la restricción de T a un subespacio cerrado X_0 es compacta, entonces X_0 es reflexivo.*

Demostración. Sea T un operador tauberiano y X_0 un subespacio de X tal que $T|X_0$ es compacto. Sea B_0 la bola unitaria de X_0, así $T(B_0)$ es un conjunto relativamente compacto en Y. Como $T|X_0$ es tauberiano, B_0 es débilmente compacto (Teorema 4.4.1) y por tanto, X_0 es reflexivo (Teorema 1.3.16).

Supongamos que cuando la restricción de T a un subespacio cerrado $X_0 \subset X$ es compacto, entonces X_0 es reflexivo. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| < \infty$ y sea $X_0 = [x_n]_{n=1}^{\infty}$. En la prueba del Teorema 4.4.5 se hizo ver que estas hipótesis implican que la restricción de T a X_0 es un operador compacto y por tanto, X_0 es reflexivo.

La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es entonces acotadamente completa, por ser base de una espacio reflexivo (Teorema 2.4.5) y por tanto, T es tauberiano por el Teorema 4.4.5. $\|$

Teorema 4.4.9 *Si T tiene la propiedad N y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica que encoge, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge.*

Demostración. Supongamos que T tiene la propiedad N y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica que encoge en Y.
Sean $W = [x_n]_{n=1}^{\infty} \subset X$, $V = [y_n]_{n=1}^{\infty} \subset Y$ y $S = T|W$. Por hipótesis, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge, entonces la sucesión $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ de coeficientes funcionales asociados a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, es una base de V^* y se tiene que $S^* : V^* \to W^*$ es tal que $S^*(y_n^*) = x_n^*$, donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no encoge, o sea, $[x_n^*]_{n=1}^{\infty} \neq W^*$, entonces existe $w^{**} \neq 0$ en W^{**} tal que $w^{**}(x_n^*) = 0$ para todo $n \geq 1$, de donde,

$$w^{**}(S^*(y_n^*)) = (S^{**}(w^{**}))(y_n^*) = 0 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Al ser $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ una base de V^*, lo anterior no lleva a que $S^{**}w^{**} = 0$ y como S tiene la propiedad N por ser la restricción de un operador con la propiedad N, se sigue que $w^{**} = \widehat{w}$ para algún $w \in W$; lo que es una contradicción ya que $x_n^*(w) = w^{**}(x_n^*) = 0$ para todo $n \geq 1$ y esto implica $\widehat{w} = w^{**} \neq 0$. $\|$

Teorema 4.4.10 *Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:*

i) *T es un operador tauberiano;*

ii) *Si $K \subset X$ es un subconjunto acotado y $w-$cerrado, entonces $T(K)$ es $w-$cerrado en Y;*

iii) *Si $K \subset X$ es un subconjunto acotado, cerrado y convexo , entonces $T(K)$ es cerrado en Y;*

iv) *Si $X_0 \subset X$ es un subespacio cerrado y B_0 es la bola unitaria en X_0, entonces $T(B_0)$ es cerrado en Y.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Supongamos que T es tauberiano y que K es un subconjunto acotado y $w-$cerrado de X. Sea $y \in \overline{T(K)}^{w}$. Por el teorema de Alaoglu se tiene que $\widehat{K}$ es relativamente compacto en la topología w^* de X^{**} y por consiguiente $T^{**}\left(\overline{\widehat{K}}^{w^*}\right)$ es w^*-cerrado en Y^{**} y

$$\overline{\widehat{T(K)}}^{w^*} \subset T^{**}\left(\overline{\widehat{K}}^{w^*}\right).$$

Por la Proposición 1.3.7 $\widehat{y} = T^{**}(k^{**})$ para algún $k^{**} \in \overline{\widehat{K}}^{w^*}$ y como T es tauberiano, se sigue que $k^{**} = \widehat{x}$ para algún $x \in X$. Como K es $w-$cerrado, se sigue de la misma Proposición 1.3.7 que $x \in K$ y por tanto, $y \in T(K)$, es decir, $T(K)$ es $w-$cerrado en Y.

Las implicaciones $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ son inmediatas. $\|$

Teorema 4.4.11 *Si T es tauberiano y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotadamente completa en Y, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es acotadamente completa.*

Demostración. Sean T un operador tauberiano y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada en X tal que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica acotadamente completa en Y. Sea B_U la bola unitaria de $U = [x_n]_{n=1}^{\infty}$, por el resultado anterior, $T(B_U)$ es cerrado en Y.

Supongamos que $\sup\limits_n \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = M < \infty$ donde $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares, entonces la sucesión $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M} x_i \right)_{n=1}^{\infty}$ está contenida en B_U. Así, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M} y_i \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M} T(x_i) \right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $T(B)$ y por tanto, $\sup\limits_n \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M} y_i \right\| < \infty$.

$$y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{M} y_i \in Y$$

por que la sucesión $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

Entonces, $y_0 \in \overline{T(B_U)} = T(B_U)$, es decir, existe $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i \in B_U$ tal que $y_0 = T(x_0)$, pero entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i = T(x_0) = y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{M} y_i$$

y por tanto,

$$b_i = \frac{a_i}{M} \text{ para toda } i \geq 1.$$

Así, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{M} x_i$ converge en U y por tanto, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ también converge y se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa $\|$

Para la validez general de este resultado es esencial que T sea tauberiano y no sólo que tenga la propiedad N, como lo mostrará el siguiente:

Ejemplo 4.4.12 *Consideremos el espacio de sucesiones*

$$X = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \,\middle|\, \frac{\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} + \ldots + \widetilde{x_n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} \to 0 \right\}$$

con la norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_X = \sup\limits_{n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$.

Con este espacio trabajamos en el capítulo 2. En el último teorema de dicho capítulo, se demostró que la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de c_0 es una base de $(X, \|\ \|_X)$ que encoge, pero no es acotadamente completa. Además ahí se vio que

$$X^* = \left\{ (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_o : \|y\| = \sup_{\sigma\in\Sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left|y_{\sigma(i)}\right|}{i} < \infty \right\},$$

$$X^{**} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \|x\| = \sup_{\sigma\in\Sigma,\ n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|x_{\sigma(i)}\right|}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} < \infty \right\}$$

y $X^{**} \subset \ell^2$ (Observación 2.6.11).
Consideremos la inyección $i : X \to \ell^2$. esta inyección está bien definida ya que $\widehat{X} \subset X^{**} \subset \ell^2$. De manera directa se puede comprobar que i^{**} es inyectiva y por tanto, i tiene la propiedad N. Como $(i\,(e_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa de ℓ^2 (Ejemplo 2.4.4) y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no lo es en X, concluimos que la condición de que T sea tauberiano en el teorema anterior no puede debilitarse a pedir que tenga la propiedad N.

Bibliografía

[1] Banach, S *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsawa, 1932.

[2] Bennett, G. A new class of sequence spaces with applications in summability theory. *J. Reine Angew Math* 266 (1974), 49-75.

[3] Davis. W.J., Figiel, T., Johnson, W. B. y Pelczynski, A. Factoring weakly compact operators. *J. of Funcional Analysis* 17 (1974), 311-327.

[4] Dunford, N. y Schwartz, J. *Linear operators, Vol. I.* Interscience Publishers Inc.. New York. 1958

[5] Garling, D.J.H. On symmetric Sequence Spaces. *Proc. London Mathematical Society* 3, 16 (1966). 85-106.

[6] Garling, D.J.H. y Wilansky. A. On a summability theorem of Berg, Crawford and Whitley. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 71 (1972), 495-497.

[7] González, M. Properties and applications of Tauberian operators. *Extracta Mathematicae* 5, 3 (1990), 91-107.

[8] Hocking, J.G. y Young G.S., *Topology*, Dover, New York, 1988.

[9] Holub, J.R. Characterizations of Tauberian and Related Operators on Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* 178 (1993), 280-288.

[10] Horváth, J. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison-Wesley, Reading, 1966.

[11] Hu. S.T., *Elements of Real Analysis*, Holden-Day Inc , san Fransisco, 1967.

[12] Kalton, N. y Wilansky, A. Tauberian operators on Banach Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 57 (1976), 251-255.

[13] Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V., *Introductory Real Analysis*, Dover, New York, 1975.

[14] Knopp, K. *Infinite Sequences and Series.* Dover Publications Inc., New York, 1956.

[15] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces.* Springer Verlag, Berlin, 1977.

[16] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer Verlag, New York, 1998.

[17] Neidinger, R. y Rosenthal, H.P. Norm-attainment of linear functionals on subspaces and characterizations of tauberian operators. *Pacific J. of Mathematics* 118, 1 (1985), 215-228.

[18] Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984.

[19] Rudin, W. *Functional Analysis.* Mac-Graw Hill, New York, 1973.

[20] Singer, I. *Bases in Banach Spaces I.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[21] Singer, I. *Bases in Banach Spaces II.* Springer-Verlag, Berlin.

[22] Taylor, A.E. y Lay, D.C., *Introduction to Funtional Analysis,* Krieger Publishing Company, Florida, 1986.

[23] Whitley, R. Conull and other matrices which sum a bounded divergent sequence. *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 798-801.

[24] Wong, Y. *Introductory Theory of Topological Vector Spaces,* Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[25] Zeller, K. Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. *Mathematische Zeitschrift,* 56, 2 (1952), 134-151.