



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRUEBA DE LA FORMULA EIKONAL
PARA FUERZAS TENSORIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C A

P R E S E N T A :

TANIA ERENDIRA RIVERA TORRES



DIRECTOR DE TESIS: DR. JAIME BESPROSVANY

MEXICO, D. F.

28 4975
DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
2000
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Prueba de la fórmula eikonal para fuerzas tensoriales"

realizado por **TANIA ERENDIRA RIVERA TORRES**
con número de cuenta **9034004-4**, pasante de la carrera de Física
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- | | | |
|-------------------|--|------------------------|
| Director de tesis | Dr. Jaime Besprosvany Fridzon | <i>Jaime BF</i> |
| Propietario | Instituto de Física, UNAM | |
| Propietario | Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros | <i>A. Mondragón B.</i> |
| | Instituto de Física, UNAM | |
| Propietario | Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos | <i>L. Urrutia</i> |
| | Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM | |
| Suplente | Dr. Ramiro García García | <i>R. García</i> |
| | Instituto de Física, UNAM | |
| Suplente | Dr. Ernesto José Ma. de la Saleta Belmont-Moreno | <i>Er. Belmont</i> |
| | Instituto de Física, UNAM | |

Patricia Goldstein
Consejo Departamental de Física
Dra. Patricia Goldstein **INSTITUTO DE CIENCIAS**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Índice

Resumen	2
Introducción	3
1 Dispersión de partículas sin espín	6
1.1 Introducción	6
1.2 Amplitud de dispersión a partir de la solución exacta	6
1.2.1 Desarrollo de la función de onda	7
1.2.2 Comportamiento asintótico de la función de onda	8
1.3 Amplitud eikonal de dispersión	11
1.3.1 Ecuación integral para la función de onda	11
1.3.2 Condiciones de validez para la amplitud eikonal	14
1.4 Resultados para algunos potenciales	16
1.4.1 Pozo cuadrado	16
1.4.2 Barrera centrífuga	17
1.5 Comparación entre ambos métodos	18
1.5.1 Sección eficaz de dispersión	18
1.5.2 Cálculo de las secciones eficaces exacta y eikonal	19
2 Dispersión de partículas con espín $1/2$	22
2.1 Introducción	22
2.2 Desarrollo de la función de onda	23
2.2.1 Función de onda radial	25
2.2.2 Estado singulete	26
2.2.3 Estados triplete	26
2.3 Comportamiento asintótico de la función de onda	28
2.3.1 Corrimientos de fase	28
2.4 Amplitudes de dispersión	29
3 Aproximación eikonal para partículas con espín $1/2$	34
3.1 Introducción	34
3.2 Expansión para la fórmula eikonal	35
3.3 Correcciones a segundo orden	39
3.4 Amplitudes de dispersión	40

4 Potenciales con componente tensorial centrífuga	45
4.1 Introducción	45
4.2 Potencial central de pozo cuadrado	46
4.2.1 Corrimientos de fase	46
4.2.2 Funciones χ para el cálculo de la aproximación eikonal tensorial	51
4.3 Potencial central de barrera centrífuga	52
4.3.1 Corrimientos de fase	52
4.3.2 Funciones χ para el cálculo de la aproximación eikonal tensorial	53
4.4 Resultados	53
Conclusiones	55
Apéndices	59
A Cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión para un potencial escalar	60
B Cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión para un potencial tensorial	68
Bibliografía	78

A mis padres.

Resumen

En este trabajo estudiamos los pasos para lograr una comparación entre las secciones eficaces de dispersión correspondientes a la solución analítica de la ecuación de Schrödinger para un potencial que contiene una componente tensorial centrífuga y las secciones obtenidas a partir de la aproximación eikonal tensorial, con el propósito de corroborar la efectividad y rango de validez de esta aproximación.

En el capítulo 1 hacemos una revisión de la teoría de dispersión y de la aproximación eikonal para el caso escalar. Asimismo, comparamos numéricamente la sección eficaz diferencial escalar exacta con la eikonal, empleando dos potenciales particulares: el pozo cuadrado y la barrera centrífuga.

En el capítulo 2 hallamos formalmente las amplitudes de dispersión a partir del desarrollo en ondas parciales de la solución a la ecuación de Schrödinger para el potencial más general rotacionalmente invariante y local en un sistema de dos partículas de espín $1/2$.

En el capítulo 3 desarrollamos una aproximación eikonal para el propagador de un sistema de dos partículas de espín $1/2$ que interactúan con una fuerza tensorial, y a partir de este hallamos una fórmula explícita para cada una de las amplitudes de dispersión.

En el capítulo 4 se muestran algunos resultados preliminares de cálculos basados en los capítulos anteriores. Empleando potenciales cuyas componentes tensoriales poseen un coeficiente proporcional a $\frac{1}{r^2}$ y cuyas componentes de espín son nulas determinamos la solución analítica de la ecuación Schrödinger. Posteriormente determinamos y comparamos las secciones eficaces diferenciales exactas y eikonales en función del ángulo de dispersión, con diferentes energías de incidencia, para dos potenciales de este tipo uno con un pozo cuadrado como componente central y el otro con una barrera centrífuga.

Por último, discutimos los resultados obtenidos y presentamos las conclusiones del trabajo.

Introducción

El estudio y comprensión de la estructura e interacciones nucleares se basa sobre todo, por el carácter microscópico de los elementos involucrados, en el análisis del proceso dispersivo de una amplia variedad de partículas. Dispersando partículas bajo circunstancias controladas, midiendo el ángulo, la energía con que se dispersan y variables adicionales, y subsecuentemente analizando los resultados de la interacción, podemos determinar la naturaleza y particularidades de la interacción, así como la estructura de los elementos involucrados en la dispersión.

En este trabajo analizaremos la colisión elástica de dos partículas ¹ de espín 1/2 que interactúan a través de una superposición de fuerzas centrales, de espín y tensoriales empleando la teoría de Schrödinger en el caso dispersivo. Obtendremos la información del proceso a partir de la solución formal a la ecuación de Schrödinger y también a partir del método aproximado eikonal generalizado al caso tensorial.

La aproximación eikonal es un método muy antiguo que se emplea para sistemas involucrados en una dispersión caracterizada por energías grandes y ángulos de dispersión pequeños (en relación a los parámetros típicos del sistema). Este método ha sido ampliamente usado para partículas sin espín. Mediante la aproximación eikonal se obtiene la óptica geométrica como límite de la óptica física.

El interés principal de este trabajo consiste en juzgar la validez de una aproximación eikonal tensorial propuesta[2] comparando información obtenida a partir de ella con información extraída a partir de la un caso de la ecuación de Schrödinger con interacciones tensoriales en un proceso dispersivo que puede resolverse exactamente[3]. Esta comparación nos ayudará a entender los resultados de la aproximación eikonal tensorial y el comportamiento del potencial involucrado, cuando se trate el proceso dispersivo con potenciales tensoriales que no sean exactamente solubles.

El trabajo se inicia con el análisis de una colisión elástica de dos partículas sin espín (o de espín nulo) en el **capítulo 1**, donde se recuerda cómo obtener información del proceso a partir de la solución a la ecuación de Schrödinger en ondas parciales y de la aproximación eikonal escalar. Asimismo, emplearemos este capítulo como una base (en cuanto a notación, procedimientos, etc.) para continuar con la generalización

¹En una colisión elástica se conserva la energía y la identidad de cada una de las partículas involucradas.

de la dispersión escalar elástica al caso de una colisión elástica de partículas con espín $1/2$ interactuando a través del potencial más general rotacionalmente invariante y local. En el **capítulo 2** obtendremos la información de esta dispersión a partir de la solución exacta y en el **capítulo 3** a partir de la aproximación eikonal. Luego, en el **capítulo 4**, aplicaremos los cálculos de los capítulos 2 y 3 usando dos potenciales particulares exactamente solubles, haremos algunas comparaciones entre ambos, corroboraremos que estos cálculos se reduzcan a los del capítulo 1 cuando el potencial tensorial sea nulo y discutiremos los resultados obtenidos.

Durante el desarrollo del presente trabajo tomaremos $\hbar = 1$ y $c = 1$ (el valor de la constante de Planck entre 2π y el valor de la velocidad de la luz como unidades) ya que esta convención simplifica la notación y los cálculos. De esta manera, la distancia y el tiempo estarán dados en MeV^{-1} , la energía y la masa en MeV y los ángulos en rad .²

² $\hbar = 6.58 \times 10^{-22} MeVs$, $c = 3 \times 10^8 m/s$, $1s = \frac{1}{6.58} \times 10^{22} MeV^{-1} = 3 \times 10^8 m$,
 $1fm = \frac{1}{197.4} MeV^{-1}$, etc.

Capítulo 1

Dispersión de partículas sin espín

1.1 Introducción

Un haz fino de partículas sin espín se lanza contra una placa fija y muy delgada constituida también de partículas sin espín. La densidad del haz es tan baja y la placa tan delgada que se puede considerar que cada una de las partículas del haz incide por separado sobre alguna de las partículas de la placa. En este capítulo describiremos uno de los múltiples procesos que es posible obtener como resultado de este experimento, la dispersión elástica de dos partículas sin espín.

En el centro de masa (CM) del sistema, dos partículas se aproximan entre sí con vectores de propagación $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{z}}\sqrt{2\mu E}$ y $-\mathbf{k}$ respectivamente, donde E es la energía total del sistema, μ es la masa reducida del sistema y por comodidad hemos elegido $\hat{\mathbf{z}}$ como la dirección de incidencia. Continúan aproximándose hasta ser dispersadas elásticamente por un campo de fuerza estático de corto alcance y con simetría esférica $V(\mathbf{r}) = V(r)$, donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la distancia relativa entre las partículas del sistema. Se desvían un ángulo θ respecto a la dirección de incidencia $\hat{\mathbf{z}}$, denominarlo ángulo de dispersión, y finalmente emergen con momentos \mathbf{k}' y $-\mathbf{k}'$ respectivamente, donde $k = k'$ por ser la dispersión elástica.

Tomando en cuenta que el proyectil se describe mediante el paquete de ondas $\Psi(\mathbf{r})$, una función univaluada, finita, suave y de cuadrado integrable, que satisface la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V(r)\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

hallaremos una función de θ , denominada amplitud de dispersión, mediante la cual es posible dar una descripción completa del proceso mencionado. Determinaremos esta función de manera exacta, empleando el desarrollo de la función de onda en eigenestados del momento angular. También hallaremos una forma aproximada de esta función empleando la aproximación eikonal. Por último, considerando dos potenciales particulares, compararemos los resultados de ambos métodos mediante cálculos numéricos.

1.2 Amplitud de dispersión a partir de la solución exacta

El objetivo de esta sección es describir la dispersión elástica de partículas sin espín, empleando la solución más general posible a la ecuación de Schrödinger para cada potencial particular.

1.2.1 Desarrollo de la función de onda

Tomando en cuenta que tratamos un proceso dispersivo donde el potencial considerado únicamente depende de la distancia relativa entre las partículas, podemos obtener la solución a la ecuación (1.1) empleando el método de separación de variables en coordenadas esféricas (r, θ, φ) .

Reescribamos la ecuación (1.1), considerando que $E = \frac{k^2}{2\mu}$, como

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(r) = 2\mu V(r)\Psi(r). \quad (1.2)$$

Supongamos que la función de onda es un producto de funciones independientes de cada una de las coordenadas esféricas

$$\Psi(r) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (1.3)$$

Sustituyamos esta expresión en la ecuación (1.2) ¹

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 2\mu V(r)R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (1.4)$$

Entonces, acomodando términos, obtenemos la igualdad de dos ecuaciones diferenciales de variables diferentes

$$\frac{1}{R(r)\Theta(\theta)} \left\{ \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r^2 \sin^2 \theta [k^2 - 2\mu V(r)] \right\} R(r)\Theta(\theta) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi), \quad (1.5)$$

que es válida sólo si

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi) \quad (1.6)$$

y

$$\left\{ \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r^2 \sin^2 \theta [k^2 - 2\mu V(r)] \right\} R(r)\Theta(\theta) = m^2 R(r)\Theta(\theta), \quad (1.7)$$

¹El laplaciano en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

donde m es una constante, que resulta ser un número entero a consecuencia de exigir que la función sea univaluada[4]. Procediendo de manera análoga, reacomodamos términos en esta última ecuación para llegar a que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \left\{ \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + [k^2 - 2\mu V(r)] r^2 \right\} R(r) \\ &= \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta), \end{aligned} \quad (1.8)$$

lo cual es válido sólo cuando

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = -l(l+1) \Theta(\theta) \quad (1.9)$$

y

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2\mu V(r) \right] R(r) = -k^2 R(r), \quad (1.10)$$

donde l es otra constante que resulta ser un número entero mayor o igual a cero (por su relación con m).

La solución normalizada ² de la ecuación (1.6) es

$$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \quad (1.11)$$

La ecuación (1.9) se conoce como la ecuación diferencial de los polinomios asociados de Legendre [1], cuya solución normalizada está dada por

$$\Theta(\theta) = \Theta_l^m(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta). \quad (1.12)$$

Entonces, la solución normalizada de la parte angular de la función de onda se puede reescribir en términos las eigenfunciones normalizadas del conjunto de operadores de momento angular $\{L^2, L_z\}$, los armónicos esféricos[1], pues

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \text{para } m \geq 0 \\ Y_l^m(\theta, \varphi) &= (-1)^m Y_l^{m*}(\theta, \varphi), \quad \text{para } m < 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $l(l+1)$ y m son los eigenvalores correspondientes a este conjunto de operadores.

La parte radial de la función de onda $R(r) = R_l(r)$ satisface la ecuación (1.10) y depende de cada potencial particular considerado.

² i.e. $\int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi) d\varphi = 1$

La función de onda total resulta ser una suma infinita de términos asociados a un valor definido del momento angular

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{lm} C_{lm} R_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (1.14)$$

donde C_{lm} es una constante que se determina empleando las condiciones de frontera y de normalización.

1.2.2 Comportamiento asintótico de la función de onda

Para determinar el comportamiento asintótico de la función de onda haremos uso de la conservación de partículas, empleando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.15)$$

en su forma integral ³

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho dV, \quad (1.16)$$

donde V es el volumen acotado por la superficie S ,

$$\rho = |\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (1.17)$$

es la densidad de probabilidad (de hallar a la partícula en \mathbf{r}) y

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2i\mu} \{ \Psi^*(\mathbf{r}) [\nabla \Psi(\mathbf{r})] - [\nabla \Psi^*(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) \} \quad (1.18)$$

el flujo de probabilidad.

El proyectil está descrito por un paquete incidente $\Psi_{inc}(\mathbf{r})$ de ondas que es solución de la ecuación (1.2) con $V = 0$ y cuya velocidad de propagación corresponde a la velocidad de incidencia del proyectil $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{\mu}$. Nosotros elegiremos al paquete incidente como una onda plana,

$$\Psi_{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.19)$$

porque de esta forma el flujo incidente,

$$\mathbf{j}_{inc} = \frac{1}{2i\mu} [e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) - (-i\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \frac{\mathbf{k}}{\mu}, \quad (1.20)$$

corresponde a una partícula incidiendo con velocidad $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{\mu}$ por unidad de volumen (ya que en general $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$) y $\rho = 1$.

³ $\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$

Ahora desarrollemos la onda incidente en ondas parciales tomando en cuenta que cuando $V = 0$, la ecuación (1.10) puede reescribirse como la ecuación de las funciones esféricas de Bessel[1]

$$\left[\frac{1}{(kr)^2} \frac{d}{d(kr)} (kr)^2 \frac{d}{d(kr)} + 1 - \frac{l(l+1)}{(kr)^2} \right] R_l^0(kr) = 0, \quad (1.21)$$

cuya solución general está dada por

$$R_l^0(kr) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr), \quad (1.22)$$

donde A_l , B_l son constantes y $j_l(kr)$, $n_l(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel y de Neumann, respectivamente.

Entonces, como la onda incidente que elegimos (1.19), es tal que

$$\Psi_{inc}(0) = 1, \quad (1.23)$$

tendremos que $B_{inc_l} = 0$ y

$$R_{inc_l}(r) = A_{inc_l} j_l(kr), \quad (1.24)$$

pues

$$n_l(kr)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow -\infty. \quad (1.25)$$

Además, como

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta \quad (1.26)$$

(ya que elegimos a $\hat{\mathbf{z}}$ como la dirección de incidencia), la onda incidente es independiente del ángulo azimutal φ .

De acuerdo con esto y según (1.14),

$$\Psi_{inc}(\mathbf{r}) = \sum_l c_{inc_l} j_l(kr) Y_l^0(\theta, \varphi) = \sum_l c_{inc_l} j_l(kr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (1.27)$$

Entonces, empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel y de los polinomios de Legendre[1, 4] se obtiene que

$$c_{inc_l} = \int dV j_l(kr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i^l (2l+1) \quad (1.28)$$

Por lo tanto

$$\Psi_{inc}(\mathbf{r}) = \sum_l j_l(kr) (2l+1) i^l P_l(\cos \theta). \quad (1.29)$$

Luego, como

$$j_l(kr)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\text{sen}(kr - \frac{\pi}{2}l)}{kr}. \quad (1.30)$$

en el límite asintótico (reescribiendo el seno en términos de la exponencial) la función de onda radial resulta ser la superposición de una onda esférica entrante más una onda esférica saliente,

$$R_{inc_l}(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{2ikr} [e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}l)} - e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)}], \quad (1.31)$$

de ahí que

$$\Psi_{inc}(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{2ikr} \sum_l [e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})} - e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})}] (2l+1) i^l P_l(\cos \theta). \quad (1.32)$$

Entonces, la integral del flujo incidente asintótico que atraviesa una superficie esférica de radio r es nulo

$$\int \mathbf{j}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 d\Omega|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (1.33)$$

pues para la onda esférica entrante (oee) el flujo radial

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{oee} \cdot \hat{\mathbf{r}}|_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{1}{2i\mu} \frac{1}{4(kr)^2} [e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)} (-ik) e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}l)} - \\ &(ik) e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)} e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}l)}] = -\frac{1}{4\mu kr^2}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

es igual en magnitud y de sentido contrario al flujo radial de la onda esférica saliente (oes)

$$\mathbf{j}_{oes} \cdot \hat{\mathbf{r}}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{4\mu kr^2}. \quad (1.35)$$

Luego, como en el caso general $V \neq 0$ tampoco hay fuentes ni sumideros de partículas, la función de onda radial en la región asintótica tiene la forma

$$R_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{2ikr} [e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})} - S_l(k) e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})}], \quad (1.36)$$

donde $S_l(k)$ es la componente l de la matriz S y $|S_l(k)| = 1$. La unitariedad de la matriz S es resultado de la conservación de partículas, ya que si $|S_l(k)| \neq 1$ el flujo radial entrante diferiría del flujo radial saliente dando lugar a que la integral (1.33) fuese no nula, así que el número de partículas que entrasen en la superficie esférica no sería igual al que saliesen. Asimismo, para $V \neq 0$,

$$\Psi(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{2ikr} \sum_l [e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})} - S_l(k) e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})}] (2l+1) i^l P_l(\cos \theta). \quad (1.37)$$

Esto se puede reescribir, tomando en cuenta (1.32), como la superposición de la onda plana incidente (1.19) y una onda esférica dispersada (ver figura 1.1)

$$\Psi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \Psi_{inc}(\mathbf{r}) + \Psi_{dis}(\mathbf{r}), \quad (1.38)$$

donde $\Psi_{dis}(\mathbf{r}) = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$, y

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) i^l T_l(k) P_l(\cos \theta), \quad (1.39)$$

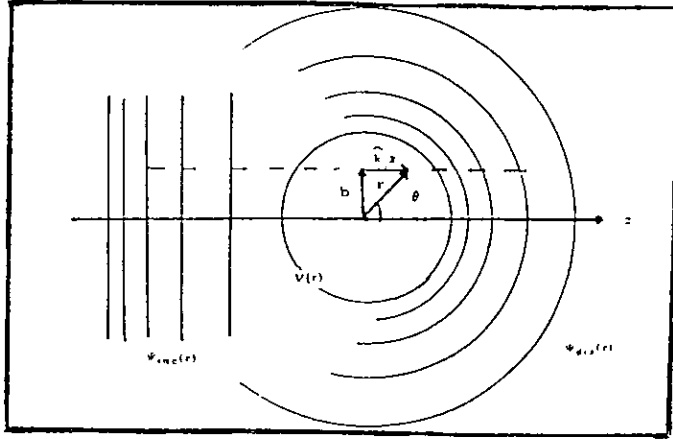


Figura 1.1: Dispersión de un paquete de ondas. Donde $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z$ es la distancia al centro dispersor, $\Psi_{inc}(r)$ denota al paquete de ondas incidente, $\Psi_{dis}(r)$ al paquete de ondas dispersado y $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector de propagación de la onda incidente.

es la denominada amplitud de dispersión, donde $T_l(k) = \frac{S_l(k) - 1}{2ik}$ es la componente l de la matriz T . Esta matriz transforma el estado inicial de las partículas involucradas en una dispersión en su correspondiente estado final. La amplitud de dispersión es proporcional a la matriz T y de acuerdo con (1.38) contiene toda la información del proceso dispersivo, por lo que una vez determinada se ha resuelto el problema.

Además, como $|S_l(k)| = 1$, escribiendo $S_l(k) = e^{i2\delta_l(k)}$, con $\delta_l(k)$ un parámetro real, la función de onda radial asintótica (1.36) se reduce a la función de onda radial incidente en la región asintótica defasada en un $\delta_l(k)$ (por ende denominado cambio o corrimiento de fase de la onda l)

$$R_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right). \quad (1.40)$$

Entonces, el problema se reduce a encontrar estos corrimientos de fase para cada potencial particular.

1.3 Amplitud eikonal de dispersión

En esta sección hallaremos una aproximación para la amplitud de dispersión, válida para energías grandes y ángulos de dispersión pequeños, la amplitud eikonal.

1.3.1 Ecuación integral para la función de onda

Reescribiremos la amplitud de dispersión en una forma más conveniente para hallar la aproximación eikonal. Con este objetivo, expresaremos la ecuación diferencial (1.2) y las condiciones de frontera (1.38) en una sola ecuación integral para la función de onda.

La función de Green[1] es un operador definido como

$$G = \frac{1}{E - H} = \frac{1}{\frac{k^2 + \nabla^2}{2\mu} - V}. \quad (1.41)$$

En el caso libre, este operador se reduce a

$$G_0 = \frac{2\mu}{k^2 + \nabla^2}, \quad (1.42)$$

mismo que, expresado en el espacio de configuraciones ⁴

$$\langle \mathbf{r} | G_0 | \mathbf{r}' \rangle = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{4\pi^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k'^2 - k^2 - i\epsilon} d\mathbf{k}', \quad (1.43)$$

satisface la ecuación diferencial

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.44)$$

donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función delta de Dirac.

En particular, considerando negativa la contribución imaginaria en (1.43) $\epsilon > 0$, e integrando, obtenemos una onda esférica saliente como solución de la ecuación (1.44)

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.45)$$

Entonces, sustituyendo G_0 en (1.44), multiplicando por $V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')$, integrando sobre \mathbf{r}' y empleando las propiedades de la delta, tenemos que

$$(\nabla^2 + k^2)\left[-\frac{\mu}{2\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\right] = 2\mu \int V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}' = V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}). \quad (1.46)$$

⁴En esta ecuación, la contribución imaginaria se elige positiva o negativa de acuerdo a las condiciones de frontera deseadas.

de manera que

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{2\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (1.47)$$

es una solución particular para (1.2). Añadiéndole a esta solución particular la solución de la ecuación homogénea que elegimos en la sección (1.2.2), es decir la onda plana (1.19), obtenemos otra solución a (1.2)

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{k}'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (1.48)$$

cuya forma asintótica es

$$\Psi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \left\{ \frac{\mu}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \right\} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.49)$$

donde $\mathbf{k}'' = k\hat{\mathbf{r}}$, pues

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}. \quad (1.50)$$

Esta solución corresponde a la superposición de una onda plana entrante más una onda esférica saliente. Por tanto, cumple con las condiciones de frontera (1.38), de modo que esta es la ecuación integral deseada.

Tomando en cuenta esto, la amplitud de dispersión (para una onda que incide con dirección $\hat{\mathbf{k}}$ y sale con dirección $\hat{\mathbf{k}}'$) está dada por

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (1.51)$$

1.3.2 Condiciones de validez para la amplitud eikonal

La aproximación eikonal se obtiene considerando partículas con energías de incidencia grandes en relación a los parámetros que caracterizan al potencial, es decir, $E \gg |V|$ y $ka \gg 1$, donde a es el ancho (alcance) del potencial V y $|V|$ un valor representativo de la magnitud del potencial. Para este tipo de partículas la mayor parte del flujo se concentra en ángulos de dispersión pequeños y las contribuciones relevantes a la función de onda en la región asintótica (1.49) proceden principalmente de valores de \mathbf{r}' cercanos a \mathbf{k} .

Reescribiendo a la función de onda como

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}), \quad (1.52)$$

a partir de (1.48), tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\ &= 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int e^{i\mathbf{k}r''(1-u'')} V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|) \phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') r'' dr'' du'' d\varphi'', \end{aligned} \quad (1.53)$$

donde $(r'', \theta'', \varphi'')$ son las coordenadas esféricas correspondientes a $r'' = r - r'$ y $u'' = \cos \theta''$. Integrando por partes respecto a u'' y suponiendo que el producto $V(r)\phi(r)$ varía apreciablemente con la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ sólo hasta una distancia $d \gg \lambda$, podemos despreciar los términos de orden mayor o igual a $\frac{1}{kd}$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(r) &\approx 1 + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int \frac{e^{ikr''(1-u)}}{ik} V(|r - r''|) \phi(r - r'') \Big|_{u=-1}^{u=1} dr'' d\varphi'' \\ &= 1 + \mu \int \left[\frac{e^{ikr''(1-u)}}{ik} V(|r - r''|) \phi(r - r'') \right] \Big|_{u=-1}^{u=1} dr''.\end{aligned}\quad (1.54)$$

La contribución del límite $u = -1$ (que corresponde a r'' antiparalelo a k) es también despreciable, de modo que

$$\phi(r) \approx \phi_{eik}(r) = 1 - \frac{i}{v} \left[\int_0^\infty V(|r - r''|) \phi_{eik}(r - r'') \right]_{(r'' \parallel k)} dr'' \quad (1.55)$$

donde $v = \frac{k}{\mu}$, o en coordenadas cartesianas

$$\phi_{eik}(r) = 1 - \frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}) \phi_{eik}(x, y, z') dz'. \quad (1.56)$$

Esta ecuación integral equivale, diferenciándola respecto a z , a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \phi_{eik}(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{i}{v} V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \phi_{eik}(x, y, z), \quad (1.57)$$

más las condición de frontera

$$\phi_{eik}(x, y, z)|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 1. \quad (1.58)$$

Entonces

$$\phi_{eik}(r) = e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}) dz'}. \quad (1.59)$$

De acuerdo con esto, $\phi_{eik}(r)$ varía apreciablemente sólo hasta $\frac{v}{|V|}$. Además, el potencial varía hasta a y ya que d debe ser la distancia más pequeña (en magnitud) entre estas dos, entonces $d \sim a$, cuando $\frac{Va}{v} < 1$ y $d \sim \frac{v}{V}$, cuando $\frac{Va}{v} > 1$.

Sustituyendo (1.59) en (1.52) tenemos

$$\Psi(r) \approx \Psi_{eik}(r) = e^{i[k \cdot r - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz']}, \quad (1.60)$$

donde b es tal que $r = b + \hat{k}z$. Luego, sustituyendo (1.60) en (1.51) resulta que

$$f_{eik}(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi} \int e^{i[(k-k') \cdot (b + \hat{k}z) - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz']} V(\sqrt{b^2 + z^2}) dz db. \quad (1.61)$$

La diferencia $k - k'$ es aproximadamente ortogonal a k (pues $k = k'$ y $\theta \ll 1$). Entonces podemos considerar que $e^{i(k-k') \cdot \hat{k}z} \approx 1$, de modo que

$$f_{eik}(\theta) \approx \frac{\mu}{2\pi} \int e^{i(k-k') \cdot b} e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz'} V(\sqrt{b^2 + z^2}) dz db. \quad (1.62)$$

Luego, integrando respecto a z ,

$$f_{eik}(\theta) \approx \frac{k}{2\pi i} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{b}} [e^{i\chi(b)} - 1] b db d\varphi, \quad (1.63)$$

donde

$$\chi(b) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz'. \quad (1.64)$$

Entonces, como

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} \approx k\theta b \cos \varphi \quad (1.65)$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \cos \varphi} d\varphi = J_0(\lambda). \quad (1.66)$$

donde $J_0(\lambda)$ es conocida como la función cilíndrica de Bessel de orden cero[1], tenemos que

$$f_{eik}(\theta) \approx \frac{k}{i} \int_0^{\infty} J_0(kb\theta) [e^{i\chi(b)} - 1] b db. \quad (1.67)$$

La magnitud de los ángulos para los cuales es válida la aproximación eikonal se puede estimar a grosso modo tomando en cuenta que el error al considerar $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}z} \approx 1$ es del orden $(1 - \cos \theta)kd \sim \theta^2 kd$. Entonces, para poder despreciar los términos que no consideramos al integrar es necesario que

$$\theta^2 kd \ll 1, \quad (1.68)$$

donde

$$d = \begin{cases} a & \text{si } \frac{|V|a}{v} < 1 \\ \frac{v}{|V|} & \text{si } \frac{|V|a}{v} > 1 \end{cases}. \quad (1.69)$$

Por último, para mejorar la aproximación (1.67) tomaremos la dirección de incidencia como $\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}+\mathbf{k}'|}$ a lo largo del eje z , de modo que

$$f_{eik}(\theta) \approx \frac{k}{i} \int_0^{\infty} J_0(qb \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) [e^{i\chi(b)} - 1] b db. \quad (1.70)$$

1.4 Resultados para algunos potenciales

Veamos ejemplos de cómo se llevan a cabo los cálculos de los corrimientos de fase para hallar la amplitud de dispersión de manera exacta y de la función $\chi(b)$ en (1.64) para hallar la aproximación eikonal a la amplitud de dispersión, considerando dos casos analíticos particulares: el potencial de pozo cuadrado y el potencial de barrera centrífuga.

1.4.1 Pozo cuadrado

Sustituyendo el potencial de pozo cuadrado

$$V(r) = -V_0 \theta(a - r), \quad (1.71)$$

donde V_0 es una constante real positiva y

$$\theta(a - r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}, \quad (1.72)$$

en la ecuación (1.10), para $r < a$,

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2\mu(-V_0) \right] R(r) = -k^2 R(r) = -2\mu E R(r) \quad (1.73)$$

y reacomodando términos, obtenemos otra forma de la ecuación para las funciones esféricas de Bessel,

$$\left\{ \frac{1}{(k_0 r)^2} \frac{d}{d(k_0 r)} (k_0 r)^2 \frac{d}{d(k_0 r)} + 1 - \frac{l(l+1)}{(k_0 r)^2} \right\} R(r) = 0. \quad (1.74)$$

La solución regular en el origen para esta ecuación está dada por

$$R_l(r) = D_l j_l(k_0 r), \quad (1.75)$$

donde $k_0 = \sqrt{2\mu(E + V_0)}$. Para $r > a$ obtenemos nuevamente la ecuación (1.21), de modo que

$$R_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr). \quad (1.76)$$

Luego, tomando en cuenta la continuidad de la función de onda, tenemos

$$D_l j_l(k_0 a) = [A_l j_l(ka) + B_l n_l(ka)] \quad (1.77)$$

y

$$k_0 D_l j_l'(k_0 a) = k [A_l j_l'(ka) + B_l n_l'(ka)]. \quad (1.78)$$

Entonces, dividiendo (1.77) entre (1.78).

$$k_0 \frac{j_l'(k_0 a)}{j_l(k_0 a)} = k \frac{A_l j_l'(ka) + B_l n_l'(ka)}{A_l j_l(ka) + B_l n_l(ka)} \quad (1.79)$$

y rearreglando términos obtenemos

$$\frac{B_l}{A_l} = - \frac{k_0 j_l(ka) j_l'(k_0 a) - k j_l(k_0 a) j_l'(ka)}{k_0 n_l(ka) j_l'(k_0 a) - k j_l(k_0 a) n_l'(ka)}. \quad (1.80)$$

Por otro lado

$$n_l|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow - \frac{\cos(kr - \frac{\pi}{2}l)}{kr} \quad (1.81)$$

y de acuerdo con (1.30).

$$R_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{A_l}{kr} \left[\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) - \frac{B_l}{A_l} \cos(kr - \frac{l\pi}{2}) \right]. \quad (1.82)$$

Entonces, reescribiendo a (1.40) como

$$R_l(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{e^{i\delta_l}}{kr \cos \delta_l(k)} \left[\text{sen} \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \tan \delta_l(k) \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \quad (1.83)$$

y comparando estas últimas dos ecuaciones resulta que

$$\tan \delta_l = -\frac{B_l}{A_l}. \quad (1.84)$$

Por lo tanto

$$\delta_l = \text{atan} \frac{k_o j_l(ka) j_l'(k_o a) - k j_l(k_o a) j_l'(ka)}{k_o n_l(ka) j_l'(k_o a) - k j_l(k_o a) n_l'(ka)}. \quad (1.85)$$

Finalmente, para la aproximación eikonal, reescribiendo (1.71) en términos de z

$$V(\sqrt{b^2 + z^2}) = -V_o \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|), \quad (1.86)$$

calculamos la función (1.64)

$$\begin{aligned} \chi(b) &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} (-V_o) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz = -\frac{1}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} (-V_o) dz' \\ &= \frac{1}{v} 2 V_o \sqrt{a^2 - b^2} \theta(a - b). \end{aligned} \quad (1.87)$$

1.4.2 Barrera centrífuga

Ahora sustituyendo el potencial de barrera centrífuga

$$V(r) = \frac{c}{r^2} \theta(a - r), \quad \text{con } c > 0, \quad (1.88)$$

en la ecuación (1.10), para $r < a$, tenemos

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2\mu \frac{c}{r^2} \right] R(r) = -k^2 R(r) \quad (1.89)$$

(este potencial nos interesa particularmente, porque nos facilitará los cálculos en el caso tensorial). Reescribiendo esta ecuación, obtenemos otra forma para la ecuación para las funciones esféricas de Bessel

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + 1 - \frac{l(l+1) + 2\mu c}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (1.90)$$

cuya solución regular en el origen está dada por

$$R(r) = D_{lj\lambda}(kr), \quad (1.91)$$

donde $\lambda = \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 + 2\mu c}$ y para $r > a$ la solución está dada nuevamente por (1.22).

Entonces, a partir de la continuidad de la función de onda,

$$\frac{j'_\lambda(ka)}{j_\lambda(ka)} = \frac{A_l j'_l(ka) + B_l n'_l(ka)}{A_l j_l(ka) + B_l n_l(ka)}, \quad (1.92)$$

de donde

$$\frac{B_l}{A_l} = \frac{j'_l(ka)j_\lambda(ka) - j'_\lambda(ka)j_l(ka)}{j'_\lambda(ka)n_l(ka) - n'_l(ka)j_\lambda(ka)}, \quad (1.93)$$

por lo que ahora

$$\delta_l = \text{atan} \frac{j'_\lambda(ka)j_l(ka) - j_l'(ka)j_\lambda(ka)}{j'_\lambda(ka)n_l(ka) - n'_l(ka)j_\lambda(ka)}. \quad (1.94)$$

Por último, para la aproximación eikonal, sustituyendo (1.88) en (1.64), tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(b) &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{c}{b^2 + z^2}\right) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz = -\frac{1}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{r}{b^2 + z'^2} dz' \\ &= -\frac{1}{v} 2 \frac{c}{b} \text{atan} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \theta(a - b). \end{aligned} \quad (1.95)$$

1.5 Comparación entre ambos métodos

En esta sección mostramos el resultado de algunos cálculos que se obtienen a partir de las amplitudes de dispersión exacta (1.39) y eikonal (1.70), usando los resultados de la sección anterior.

1.5.1 Sección eficaz de dispersión

El flujo en la región asintótica se deriva de (1.38)[4] y está dado por

$$\mathbf{j}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{k}{\mu} + \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.96)$$

El primer término de esta expresión corresponde al flujo de la onda plana que representa al rayo de partículas incidentes y que contribuye al flujo radial únicamente en una región infinitesimal perpendicular al eje z , y por lo tanto no contribuye al flujo radial asintótico. Entonces

$$\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{r}}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}. \quad (1.97)$$

De acuerdo con esto, el número de partículas que atraviesan el área que subtende un ángulo sólido $d\Omega$ con el blanco resulta ser

$$\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA|_{\rightarrow \infty} \rightarrow \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} r^2 d\Omega. \quad (1.98)$$

Este número dividido entre la magnitud del flujo radial incidente $\frac{k}{\mu}$, de acuerdo con (1.20), nos conduce a la sección eficaz transversal diferencial de dispersión

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (1.99)$$

función que constituye el vínculo entre los cálculos teóricos y experimentales.

1.5.2 Cálculo de las secciones eficaces exacta y eikonal

Tomando en cuenta lo anterior, calculamos numéricamente el valor de las secciones eficaces de dispersión,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (1.100)$$

exacta y eikonal en función del ángulo de dispersión, para diferentes energías de incidencia, empleando los dos potenciales particulares de la sección (1.4). Mediante programas de cómputo (ver apéndice A) calculamos las amplitudes de dispersión exacta (1.39) y eikonal (1.70) empleando los corrimientos de fase (1.85) y (1.87) para el potencial pozo cuadrado (1.71) y los corrimientos de fase (1.94) y (1.95) para la barrera centrífuga (1.88). Los cálculos numéricos se hicieron necesarios porque de otra forma se requiere el tedioso cálculo de varios términos para (1.39) ⁵. Además, la integral en (1.64) tiene primitiva sólo para algunos cuantos potenciales y el cálculo numérico nos permite incluir una gama más amplia de potenciales.

A continuación se muestra la comparación gráfica entre las secciones eficaces diferenciales de dispersión en (MeV^{-2}) para una partícula con masa reducida $\mu = 469 MeV$, dispersada por potenciales de alcance $a = 0.01 MeV^{-1}$ ($\approx 2 fm$), con ángulos de dispersión entre 0 y 1 radianes. En las gráficas de la figura (1.2) empleamos el potencial de pozo cuadrado con $V_0 = 1 MeV$ y en las de la figura (1.3) empleamos el potencial barrera centrífuga con $c = 10^{-5} MeV^{-1}$.

En estas gráficas podemos observar el hecho de que para el potencial de pozo cuadrado la aproximación eikonal realmente describe a la sección eficaz diferencial calculada de manera exacta, tal como esperábamos; además, es interesante notar que para el potencial centrífugo, a pesar de ser un potencial singular, la aproximación eikonal también funciona bastante bien.

⁵ Las sumas numéricas en (1.39) se calcularon hasta $l = ka + 10$, porque cuando l es mayor que a , las partículas son débilmente dispersadas por el blanco y $l \approx \sqrt{l(l+1)} \approx kr$, ya que la energía de incidencia es grande y los ángulos de dispersión son pequeños, de modo que los valores relevantes para la suma son los $l \lesssim ka$.

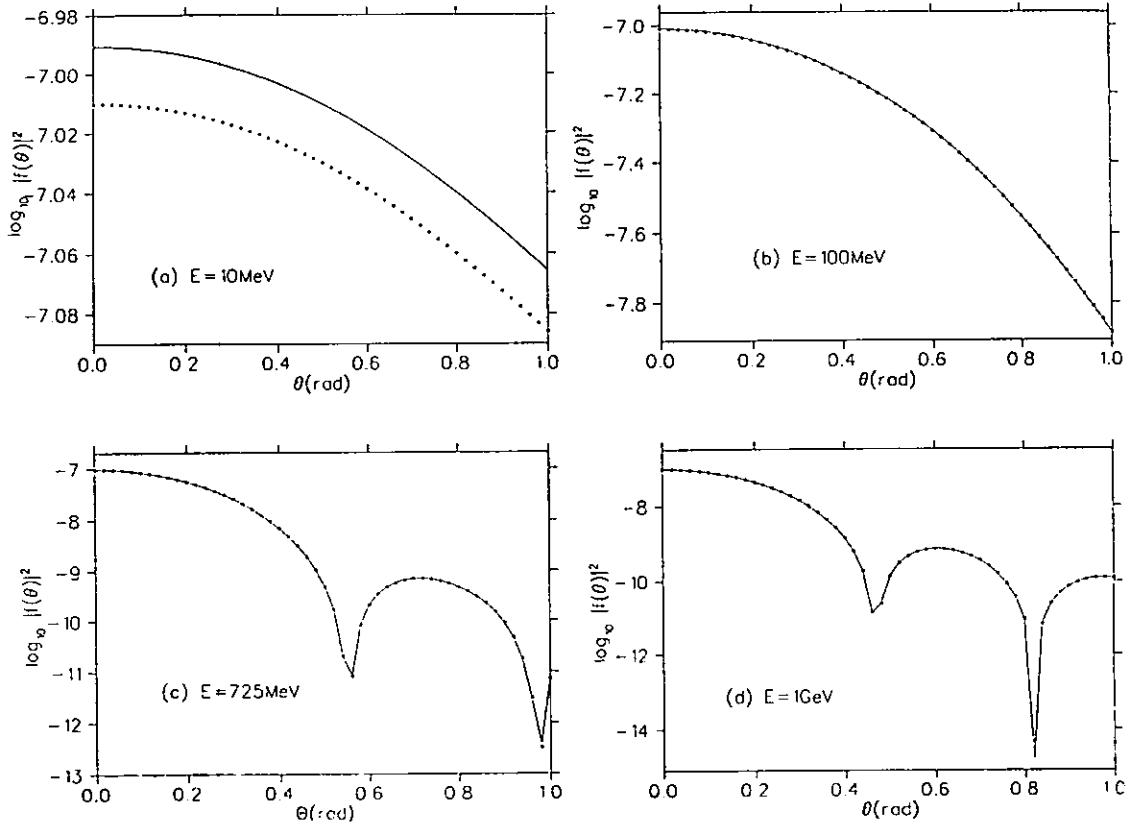


Figura 1.2: Sección eficaz diferencial de dispersión (en MeV^{-2}), calculada de manera exacta (línea continua) y mediante la aproximación eikonal (línea punteada), como función del ángulo de dispersión (en rad). Este cálculo se realizó para una partícula de masa reducida $\mu = 469 \text{ MeV}$, dispersada por un pozo de potencial (ver 1.72) con $V_0 = 1 \text{ MeV}$ y $a = 0.01 \text{ MeV}^{-1}$ ($\approx 2 \text{ fm}$). En la gráfica (a) empleamos una energía de incidencia de $E = 10 \text{ MeV}$, en (b) de $E = 100 \text{ MeV}$, en (c) de $E = 700 \text{ MeV}$ y en (d) de $E = 1 \text{ GeV}$.

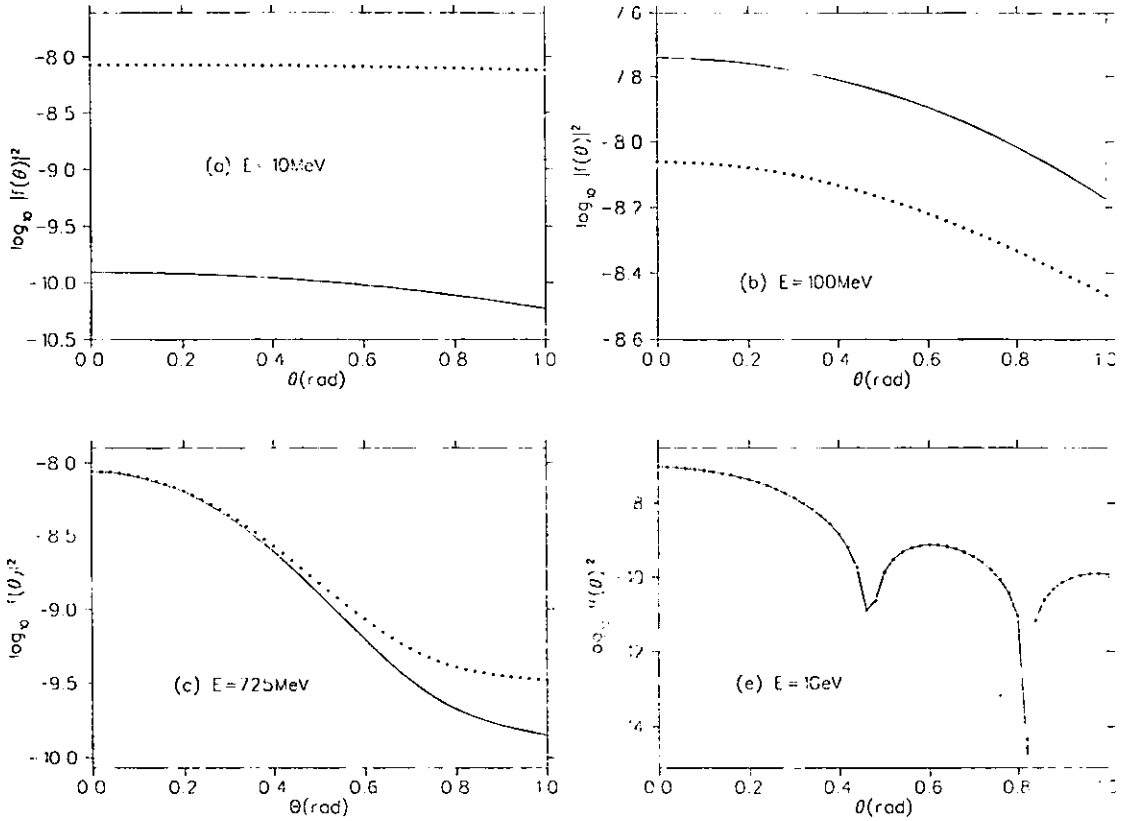


Figura 1.3: Sección eficaz diferencial de dispersión (en MeV^{-2}), calculada de manera exacta (línea continua) y mediante la aproximación eikonal (línea punteada), como función del ángulo de dispersión (en rad). Este cálculo se realizó para una partícula de masa reducida $\mu = 469 \text{ MeV}$, interactuando mediante un potencial de barrera centrífuga (ver 1.89) con $c = 10^{-5} \text{ MeV}^{-1}$. En la gráfica (a) empleamos un energía de incidencia de $E = 10 \text{ MeV}$, en (b) de $E = 100 \text{ MeV}$, en (c) de $E = 700 \text{ MeV}$ y en (d) de $E = 1 \text{ GeV}$.

Capítulo 2

Dispersión de partículas con espín 1/2

2.1 Introducción

En este capítulo generalizaremos la sección (1.2), donde hallamos la amplitud de dispersión a partir de la expansión de la función de onda que describe la dispersión elástica de dos partículas sin espín bajo interacciones centrales, al caso de la dispersión elástica de dos partículas con espín 1/2 bajo interacciones tensoriales[6, 7, 8].

En el CM del sistema, dos partículas con momentos iniciales \mathbf{k} , $-\mathbf{k}$ ¹, números cuánticos asociados a las magnitudes de sus espines $s_1, s_2 = 1/2$ y proyecciones de sus espines $m_{s_1}, m_{s_2} = \pm 1/2$, son dispersadas elásticamente por el campo de fuerza no central que ellas producen $V(\mathbf{r})$, invariante ante rotaciones y reflexiones, hacia un estado final con momentos \mathbf{k}' , $-\mathbf{k}'$ ($k = k'$) y proyecciones de sus espines m'_{s_1}, m'_{s_2} (i.e. la magnitud de los espines no varía con la dispersión, pero las orientaciones finales de los espines sí pueden ser diferentes).

Para facilitar la descripción del problema en lugar de considerar por separado cada uno de los espines de las partículas interactuantes consideraremos únicamente al espín total $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ y lo acoplaremos con el momento angular orbital \mathbf{L} , para obtener el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Asimismo, en vista del tipo de potencial que consideramos, emplearemos al operador de paridad P (operador que genera las reflexiones espaciales del sistema). En total, para describir la dispersión haremos uso de los operadores $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, L_z, \mathbf{S}^2$, y P , asociándoles los eigenvalores $j(j+1), m_j, l(l+1), m_l, s(s+1)$ y m_s , respectivamente.

Los números cuánticos asociados a la magnitud del espín total son $s = 0, 1$. Entonces, existen cuatro posibles estados asociados a este operador, uno de los cuales tiene $s = 0$, $m_s = 0$ y se denomina estado singulete; los otros tres estados tienen $s = 1$,

¹ $k = \sqrt{2\mu E}$ donde μ es la masa reducida y E es la energía total del sistema.

$m_s = -1, 0, 1$ y se denominan triplete. Los eigenvalores de este operador son 0 en el estado singulete y 2 en los estados triplete; de acuerdo con esto, el operador de proyección sobre el estado singulete es

$$\Lambda^0 = 1 - \frac{1}{2} S^2 \quad (2.1)$$

y el proyector sobre los estados triplete es

$$\Lambda^1 = \frac{1}{2} S^2. \quad (2.2)$$

En términos de estos proyectores, el potencial de interacción más general de la coordenada r y los operadores de espín S_1, S_2 , invariante bajo rotaciones y reflexiones, está dado por

$$V(r) = V_0(r) \Lambda^0 + V_1(r) \Lambda^1 + V_{12}(r) S_{12}, \quad (2.3)$$

donde V_0, V_1 y V_{12} son funciones que sólo dependen de r y

$$S_{12} = 2[3(S \cdot \hat{r})^2 - S^2]. \quad (2.4)$$

es el operador tensorial[7].

La función de onda del proyectil ahora tendrá varias componentes, es decir, será un vector $\Psi(r)$ univaluado, finito, etc., que satisface la ecuación de Schrödinger generalizada para este tipo de potenciales

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(r) = 2\mu V(r)\Psi(r), \quad (2.5)$$

con condición asintótica

$$\Psi(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \Psi_{inc}(r) + \Psi_{dis}(r). \quad (2.6)$$

generalización de la condición (1.38).

2.2 Desarrollo de la función de onda

En el caso escalar separamos la parte radial de la parte angular de la función de onda y la expandimos en eigenestados del conjunto de operadores $\{L^2, L_z\}$. Esta vez también separamos la parte radial de la parte angular de la función de onda, pero ahora emplearemos los eigenestados del conjunto $\{P, J^2, J_z, S^2\}$ para expandir al vector de onda, porque ahora ninguno de los miembros del conjunto $\{L^2, L_z\}$, ni S , se conservan necesariamente.

Consideremos una generalización de los armónicos esféricos² que son eigenestados del conjunto $\{J^2, J_z, L^2, S^2\}$, dada por

$$y_{jls}^{m_l}(\hat{r}) = \sum_{m_l m_s} \langle l s m_l m_s | j m_j \rangle Y_l^{m_l}(\hat{r}) \chi_{m_s}^s, \quad (2.7)$$

² Los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$, como vimos en el capítulo 1, son los eigenestados del conjunto $\{L^2, L_z\}$.

donde $(l s m_l m_s | j m_j)$ son los denominados coeficientes de Clebsch-Gordan o de Wigner (números reales que tienen la propiedad de anularse cuando $m_l + m_s \neq m_j$) y $\chi_{m_s}^s$ es la eigenfunción del espín total

$$\chi_{m_s}^s = \sum_{m_1, m_2} \langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s m_s \rangle \chi_{m_1}^{s_1} \chi_{m_2}^{s_2}, \quad (2.8)$$

siendo $\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s m_s \rangle$ el correspondiente coeficiente de Wigner y $\chi_{m_1}^{s_1}, \chi_{m_2}^{s_2}$ los respectivos eigenvectores de espín normalizados para las partículas 1 y 2. Explícitamente, elegimos estas eigenfunciones del espín total y la proyección del espín total como

$$\chi_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{para el estado singulete y} \quad (2.9)$$

$$\chi_{-1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para los estados triplete.} \quad (2.10)$$

Empleando estos armónicos generalizados desarrollaremos la solución de la ecuación de Schrödinger cuando $\mathbf{V} = 0$ y usando este desarrollo hallaremos la forma explícita de los eigenestados del conjunto $\{P, \mathbf{J}^2, J_z, S^2\}$, mediante los cuales podremos desarrollar la solución a la ecuación de Schrödinger en el caso general $\mathbf{V} \neq 0$.

Nuevamente elegiremos la onda incidente, solución de (2.5) con $\mathbf{V} = 0$, de tal forma que la densidad del flujo incidente sea unitaria, es decir, como una onda plana con espín ³

$$\Psi_{k s m_s}^{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \chi_{m_s}^s. \quad (2.11)$$

Ahora, de acuerdo con (1.29), la expansión en armónicos esféricos para una onda plana (que es solución a la ecuación de Schrödinger para $V = 0$) con dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$, está dada por

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{lm} j_l(kr) (2l+1) i^l P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}). \quad (2.12)$$

Entonces, como

$$P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^0(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \quad (2.13)$$

y ya que según el teorema de la adición para los armónicos esféricos[6].

$$P_l^0(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.14)$$

³ Por el tipo de potenciales que estamos considerando es necesario indicar la dependencia del vector de onda con el vector de propagación \mathbf{k} y el espín s, m , explícitamente escribiendo $\Psi_{\mathbf{k} s m}(\mathbf{r})$ en lugar de $\Psi(\mathbf{r})$, para hacer más claros los cálculos.

podemos reescribir a (2.12) como

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{lm_l} j_l(kr) i^l Y_l^{m_l*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^{m_l}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.15)$$

De acuerdo con esto (2.11) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \Psi_{ksm_s}^{inc}(\mathbf{r}) &= 4\pi \sum_{lm_l} j_l(kr) i^l Y_l^{m_l*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^{m_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s}^s \\ &= 4\pi \sum_{jm_s, l} j_l(kr) [i^l \chi_{m_s}^{s, l} \cdot y_{jls}^{m_j*}(\hat{\mathbf{k}}) y_{jls}^{m_j}(\hat{\mathbf{r}})] \end{aligned} \quad (2.16)$$

(en esta expresión $\chi_{m_s}^{s, l}$ denota el transpuesto del vector $\chi_{m_s}^s$).

En el caso general $\mathbf{V} \neq 0$ el momento angular orbital (al igual que la proyección del espín total) puede variar con la interacción. Entonces, la expansión de la función de onda en términos de la base $\{P, \mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{S}^2\}$ es

$$\Psi_{ksm_s}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{jm_s, l, l'} \psi_{l's}^{j'}(r) i^l \chi_{m_s}^{s, l} \cdot y_{jls}^{m_j*}(\hat{\mathbf{k}}) y_{jls}^{m_j}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.17)$$

donde $\psi_{l's}^{j'}(r)$ es la parte radial de la función de onda y l' denota al número cuántico asociado con la magnitud del momento angular orbital para la onda saliente (l y s continúan denotando los números cuánticos asociados con la magnitud del momento angular orbital y el espín para la onda entrante, respectivamente, como en el caso anterior).

2.2.1 Función de onda radial

El desarrollo de la función libre de Green (expresada en el espacio de configuraciones) en términos de los eigenestados (2.7), está dado por[8]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu \sum_{jm_s, l, s} y_{jls}^{m_j}(\hat{\mathbf{r}}) y_{jls}^{m_j*}(\hat{\mathbf{r}}') G_{0l}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.18)$$

donde, para la onda esférica saliente

$$G_{0l}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -i k r'^{-1} r_{<} j_l(kr_{<}) r^{-1} r_{>} h_1^l(kr_{>}), \quad (2.19)$$

con $r_{<}$ ($r_{>}$) la menor magnitud (mayor) entre r y r' , y

$$h_1^l(kr) = j_l(kr) + i n_l(kr). \quad (2.20)$$

Insertando esta expansión y las expansiones (2.16), (2.17) en la generalización de la ecuación (1.48)

$$\Psi_{ksm_s}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_{m_s}^s + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{V}(\mathbf{r}') \Psi_{ksm_s}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.21)$$

empleando la ortogonalidad de los armónicos esféricos y comparando término por término de la igualdad, se obtienen las ecuaciones integrales para la función de onda radial[5. 8]

$$\psi_{l's}^j(r) = j_l(kr) \delta_{ll'} + \sum_{l''} \int_0^\infty G_{ll''}(r, r') V_{l'l''s}^j(r') \psi_{l''s}^j(k, r') dr'. \quad (2.22)$$

donde

$$V_{l'l''s}^j(r) = \int d\Omega y_{j'l''s}^{m_j*}(\hat{r}) V(r) y_{j'l''s}^{m_j}(\hat{r}) \quad (2.23)$$

es una matriz hermitiana ($V_{l'l''s}^j = V_{l''l's}^{j*}$) y simétrica ($V_{l'l''s}^j = V_{l''l's}^j$), y por tanto real.

La solución de este conjunto de ecuaciones integrales corresponde al conjunto de ecuaciones de Schrödinger acopladas

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right] \psi_{l's}^j(r) - 2\mu \sum_{l''} V_{l'l''s}^j(r) \psi_{l''s}^j(r) = -k^2 \psi_{l's}^j(r). \quad (2.24)$$

2.2.2 Estado singulete

Para el estado singulete ($s = 0, j = l$), de acuerdo con (2.3), (2.23) y empleando la ortogonalidad de los armónicos esféricos

$$V_{l'l''0}^j = V_0 \int d\Omega y_{j'l''0}^{m_j*}(\hat{r}) \Lambda^0 y_{j'l''0}^{m_j}(\hat{r}) = V_0 \sum_{m_l m_{l''}} \langle l'' 0 m_{l''} 0 | j m_j \rangle \langle l' 0 m_l 0 | j m_j \rangle \int d\Omega Y_{l''}^{m_{l''}}(\hat{r}) Y_{l'}^{m_l}(\hat{r}) = V_0 \delta_{l'l''}. \quad (2.25)$$

pues

$$\Lambda^0 \chi_0^0 = \chi_0^0, \quad \Lambda^0 \chi_{m_s}^1 = 0, \quad \Lambda^1 \chi_0^0 = 0 \quad \text{y} \quad S_{12} \chi_0^0 = 0. \quad (2.26)$$

Entonces $V_{l'l''0}^j \neq 0$ sólo para $l' = l'' = j$, en cuyo caso $V_{j'j'0}^j = V_0(r)$.

De acuerdo con esto, a partir de (2.24), obtenemos la ecuación (1.10), reescrita como

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{j(j+1)}{r^2} - 2\mu V_0(r) \right] \psi_{j'j'0}^j(r) = -k^2 \psi_{j'j'0}^j(r). \quad (2.27)$$

Por lo tanto, la dispersión en el estado singulete es enteramente equivalente a la dispersión por fuerzas centrales $V(r) = V_0(r)$.

El desarrollo en ondas parciales para ese estado, según (2.17), está dado por

$$\begin{aligned} \Psi_{k00}(r) &= 4\pi \sum_j \sum_{m_l=-j}^j \psi_{j'j'0}^j(r) i^j Y_{j'}^{m_j*}(\hat{k}) Y_j^{m_l}(\hat{r}) \chi_0^0 \\ &= \sum_j \psi_{j'j'0}^j (2j+1) i^j P_j(\hat{r} \cdot \hat{k}) \chi_0^0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.2.3 Estados triplete

Para los estados triplete ($s = 1$, m_s , $m'_s = -1, 0, 1$, y $j = |l - 1|, l, l + 1$), según (2.23), a partir de (2.26) y tomando en cuenta que

$$\Lambda^1 \chi_{m_s}^1 = \chi_{m_s}^1, \quad (2.29)$$

tenemos que

$$V_{l'l''}^j = V_1(r) \int d\Omega y_{j'l'}^{m_j}(\hat{r}) \Lambda^1 y_{j'l''}^{m_j}(\hat{r}) + V_{12}(r) \int d\Omega y_{j'l'}^{m_j}(\hat{r}) S_{12} y_{j'l''}^{m_j}(\hat{r}). \quad (2.30)$$

El potencial que consideramos conserva la paridad; entonces $V_{l'l''}^j(k) = 0$ para las transiciones $l = j$, $l' = j \pm 1$ y $l = j \pm 1$, $l' = j$. Además, como

$$\begin{aligned} \int d\Omega y_{j'l'}^{m_j}(\hat{r}) \Lambda^1 y_{j'l''}^{m_j}(\hat{r}) &= \sum_{m_l, m_{l''}} \langle l'' 1 m_{l''} 0 | j m_j \rangle \langle l' 1 m_{l'} 0 | j m_j \rangle \int d\Omega Y_{l''}^{m_{l''}}(\hat{r}) Y_{l'}^{m_{l'}}(\hat{r}) \\ &= \delta_{l'l''} \end{aligned} \quad (2.31)$$

y[7]

$$S_{12} y_{jj}^{m_j}(\hat{r}) = 2 y_{jj}^{m_j}, \quad (2.32)$$

$$S_{12} y_{jj-1}^{m_j}(\hat{r}) = \frac{2}{2j+1} [3\sqrt{j(j+1)} y_{jj-1}^{m_j} - (j+2) y_{jj+1}^{m_j}], \quad (2.33)$$

$$S_{12} y_{jj+1}^{m_j}(\hat{r}) = \frac{2}{2j+1} [-(j-1) y_{jj-1}^{m_j} + 3\sqrt{j(j+1)} y_{jj+1}^{m_j}], \quad (2.34)$$

los elementos no nulos de esta matriz son

$$V_{jj}^j = V_1 + 2V_{12}, \quad (2.35)$$

$$V_{j-1j-1}^j = V_1 - 2 \frac{j-1}{2j+1} V_{12}, \quad (2.36)$$

$$V_{j-1j+1}^j = V_{j+1j-1}^j = -6 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_{12} \quad (2.37)$$

y

$$V_{j+1j+1}^j = V_1 - 2 \frac{j+2}{2j+1} V_{12}. \quad (2.38)$$

De acuerdo con la ecuación (2.35), el estado triplete con $l' = l'' = j$ (al igual que el estado singlete) no tiene su momento angular orbital acoplado con ninguno de los otros estados y la dispersión en éste es independiente de los otros estados.

Luego, sustituyendo (2.35)-(2.38) en (2.24), para $l, l' = j$, obtenemos nuevamente la ecuación (1.10), reescrita como

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} - 2\mu(V_1 + 2V_{12}) \right] \psi_{jj}^j = -k^2 \psi_{jj}^j, \quad (2.39)$$

de modo que la dispersión en este estado, es también equivalente a la dispersión por fuerzas centrales, con $V(r) = V_1(r) + 2V_{12}(r)$. En cambio, para los estados triplete con $l, l' = j \pm 1$, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas, que ya no son equivalentes a la dispersión por fuerzas centrales

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \psi_{j-1, j-1}^j - 2\mu \left\{ \left[V_1 - 2 \frac{j-1}{2j+1} V_{12} \right] \psi_{j-1, j-1}^j - 6 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_{12} \psi_{j+1, j-1}^j \right\} = -k^2 \psi_{j-1, j-1}^j \quad (2.40)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{(j-1)j}{r^2} \right] \psi_{j-1, j+1}^j - 2\mu \left\{ \left[V_1 - 2 \frac{j-1}{2j+1} V_{12} \right] \psi_{j-1, j+1}^j - 6 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_{12} \psi_{j+1, j+1}^j \right\} = -k^2 \psi_{j-1, j+1}^j \quad (2.41)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \psi_{j+1, j-1}^j - 2\mu \left\{ -6 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_{12} \psi_{j-1, j-1}^j + \left[V_1 - 2 \frac{j+2}{2j+1} V_{12} \right] \psi_{j+1, j-1}^j \right\} = -k^2 \psi_{j+1, j-1}^j \quad (2.42)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \psi_{j+1, j+1}^j - 2\mu \left\{ -6 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_{12} \psi_{j-1, j+1}^j + \left[V_1 - 2 \frac{j+2}{2j+1} V_{12} \right] \psi_{j+1, j+1}^j \right\} = -k^2 \psi_{j+1, j+1}^j \quad (2.43)$$

O, en términos de matrices

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} (j-1)j & 0 \\ 0 & (j+1)(j+2) \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 1}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 1}^j \end{pmatrix} - 2\mu \left\{ V_1 + \frac{2V_{12}}{(2j+1)} \begin{bmatrix} -(j-1) & 3\sqrt{j(j+1)} \\ 3\sqrt{j(j+1)} & -(j+2) \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 1}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 1}^j \end{pmatrix} = -k^2 \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 1}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 1}^j \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

El desarrollo en ondas parciales para la función de onda en el estado triplete está dado por

$$\Psi_{klm.}(r) = 4\pi \sum_{j m_j l'} \psi_{l' l}^j(r) i^{l'} \chi_{m.}^{l l'} \cdot y_{l' l}^{m.}(\hat{\mathbf{k}}) y_{l l}^{m.}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.45)$$

2.3 Comportamiento asintótico de la función de onda

Sustituyendo en (2.22) el límite asintótico de (2.19)⁴

$$G_{0l}(r, r')|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -h_l(kr') r^{-1} e^{i(kr - \frac{1}{2}\pi l)} \quad (2.46)$$

⁴ Este límite se obtiene tomando en cuenta que

$$h_l^+(kr)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{i}{kr} e^{i(kr - \frac{1}{2}\pi l)}$$

obtenemos la expresión explícita de las condiciones de frontera para la función de onda radial[8]

$$\psi_{l's}^j(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2ikr} [e^{-i(kr - t\frac{\pi}{2})} \delta_{l'l} - S_{l's}^j(k) e^{i(kr - t\frac{\pi}{2})}], \quad (2.47)$$

donde $S_{l's}^j(k)$, la componente generalizada de la matriz S , es tal que $|S_{l's}^j(k)|^2 = \delta_{l'l}$ y análogamente al caso escalar

$$S_{l's}^j(k) = \delta_{l'l} - 2ik T_{l's}^j(k), \quad (2.48)$$

con

$$T_{l's}^j(k) = \sum_{l''} \int_0^{\infty} j_{l''}(kr) V_{l''s}^j(r) \psi_{l's}^j(r) r^2 dr, \quad (2.49)$$

la componente generalizada de la matriz T .

Entonces como la matriz $V_{l''s}^j$ es hermitiana y simétrica, las matrices $T_{l's}^j(k)$ y $S_{l's}^j(k)$ son simétricas.

Asimismo, como $V_{l's}^j(k) = 0$ para $l = j$, $l' = j \pm 1$ y $l = j \pm 1$, $l' = j$, también $S_{l's}^j(k)$ y $S_{l'l}^j(k)$ se anulan para estas transiciones (por conservación de paridad).

2.3.1 Corrimientos de fase

En vista de que la matriz $S_{l's}^j$ es unitaria y simétrica podemos diagonalizarla mediante una matriz real y ortogonal $U_{l's}^j$, de tal forma que

$$S_{l's}^j = \sum_{\eta} U_{l's\eta}^j e^{2i\delta_{\eta}^j} U_{\eta l's}^j, \quad (2.50)$$

donde los δ_{η}^j son parámetros reales que corresponden a la generalización del corrimiento de fase δ_l , pues sustituyendo (2.50) en (2.47) obtenemos el análogo de (1.40)

$$\psi_{l's}^j(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{kr} \sum_{\eta} e^{i\delta_{\eta}^j} U_{l's\eta}^j(k) U_{\eta l's}^j(k) \sin(kr - \frac{\pi l'}{2} + \delta_{\eta}^j). \quad (2.51)$$

Denotaremos con $\eta = 0$ el corrimiento de fase del estado singulete, con $\eta = 3$ el del estado triplete $l' = j$ y con $\eta = 1, \eta = 2$ los de los estados triplete $l' = j - 1, l' = j + 1$, respectivamente.

La matriz $U_{l's}^j$ se puede reescribir en términos de un parámetro real ϵ , denominado parámetro de mezcla, que se anule cuando $k \rightarrow 0$. Por ejemplo, la submatriz U para los subestados triplete $l, l' = j \pm 1$, puede escribirse como[4]

$$\begin{pmatrix} U_{j-1, j-1}^j & U_{j-1, j+1}^j \\ U_{j-1, j+1}^j & U_{j+1, j+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

donde ϵ es el mencionado parámetro de mezcla. A partir de esta expresión la submatriz S en (2.50) está dada por

$$\begin{pmatrix} S_{j-1j-1}^j & S_{j-1j+1}^j \\ S_{j-1j+1}^j & S_{j+1j+1}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2i\delta_1^j} \cos^2 \epsilon + e^{2i\delta_2^j} \sin^2 \epsilon & \frac{1}{2}(e^{2i\delta_1^j} - e^{2i\delta_2^j}) \sin 2\epsilon \\ \frac{1}{2}(e^{2i\delta_1^j} - e^{2i\delta_2^j}) \sin 2\epsilon & e^{2i\delta_1^j} \sin^2 \epsilon + e^{2i\delta_2^j} \cos^2 \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

2.4 Amplitudes de dispersión

Para describir la dispersión generada por el potencial tensorial (2.3) sobre partículas con espín $1/2$, requeriremos de más de una amplitud de dispersión porque los espines aumentan los grados de libertad. El momento angular orbital del estado singulete para la onda entrante $l = j$ no cambia al dispersarse, es decir $l' = l$, de modo que para describir este estado necesitamos solamente una amplitud de dispersión. De igual forma, para el estado triplete con $l = j$ necesitamos sólo una amplitud. En cambio, para los estados triplete con $l = j \pm 1$ necesitamos cuatro amplitudes, pero como la matriz de dispersión es una matriz simétrica dos de estas amplitudes son iguales, así que realmente son necesarias sólo tres amplitudes para describir estos estados. Entonces, serán necesarias cinco amplitudes diferentes en total (caracterizadas por los distintos valores de l , l' , y s).

En esta sección, hallaremos las amplitudes de dispersión a partir de la expansión de la matriz de dispersión [6, 8]

$$\langle \hat{k}' s m_s | T(k) | \hat{k} s m_s \rangle = 4\pi \sum_{j m_s l' l} i^{l-l'} \chi_{m_s}^{s, l} \cdot y_{j l' s}^{m_s}(\hat{k}') T_{l' l s}^j(k) \chi_{m_s}^{s, l} \cdot y_{j l s}^{m_s}(\hat{k}), \quad (2.54)$$

reescrita como

$$\begin{aligned} \langle \hat{k}' 0 0 | T(k) | \hat{k} 0 0 \rangle &= T_{ss}(\cos \theta) && \text{para el singulete y} \\ \langle \hat{k}' 1 m_s | T(k) | \hat{k} 1 m_s \rangle &= T_{m_s m_s}(\cos \theta) e^{i(m_s - m_s')\phi} && \text{para el triplete,} \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde $T_{m_s m_s}$ y T_{ss} funciones de $\cos \theta$ y k (porque elegimos la dirección de incidencia de tal modo que $\cos \theta = \hat{k}' \cdot \hat{k}$ y ϕ es el ángulo azimutal del vector \hat{k}').

La matriz T es un operador que actúa sobre el espín y puede por lo tanto, para el tipo de problemas que estamos considerando, escribirse en términos de los operadores de espín de las partículas interactuantes $S_1 = \frac{1}{2} \sigma_1$ y $S_2 = \frac{1}{2} \sigma_2$, donde σ_1 y σ_2 son las matrices de Pauli asociadas a las partículas interactuantes, como $T(k', k, \sigma_1, \sigma_2)$. La forma de $T(k', k, \sigma_1, \sigma_2)$ para la dispersión que estamos considerando, se obtiene a partir de las simetrías de la matriz T , considerando que

$$\langle \hat{k}' s m_s | T(k) | \hat{k} s m_s \rangle = [\chi_{m_s}^{s, l}, T(k', k, \sigma_1, \sigma_2) \chi_{m_s}^{s, l}]. \quad (2.56)$$

La invariancia de la matriz T ante reflexiones espaciales nos lleva a que

$$T(-k', -k, \sigma_1, \sigma_2) = T(k', k, \sigma_1, \sigma_2) \quad (2.57)$$

y empleando la simetría de la matriz $T_{\mu\nu}^j(k)$, a partir de (2.54) y (2.56), resulta que

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2) = T(-\mathbf{k}', -\mathbf{k}, -\sigma_1, -\sigma_2). \quad (2.58)$$

Entonces, podemos considerar más específicamente que

$$T = A + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (2.59)$$

donde A y \mathbf{B} son funciones lineales de σ_2 y de los tres vectores mutuamente ortonormales

$$\hat{\Delta} = \frac{\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}}{2\text{sen } \frac{\theta}{2}}, \quad \hat{\mathbf{q}} = \frac{\hat{\mathbf{k}}' + \hat{\mathbf{k}}}{2\text{cos } \frac{\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\Delta} \times \hat{\mathbf{q}}}{\text{sen } \frac{\theta}{2}}, \quad (2.60)$$

con θ el ángulo de dispersión. Por la invariancia ante rotaciones de la matriz T la forma de \mathbf{B} debe ser

$$\mathbf{B} = b\hat{\mathbf{q}} + c\hat{\Delta} + d\hat{\mathbf{n}}. \quad (2.61)$$

La invariancia ante reflexiones espaciales de la matriz T da lugar a que A y d sean escalares y a que b y c sean pseudoescalares; entonces

$$A = \alpha + a\sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.62)$$

$$b = \epsilon\sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{q}}, \quad (2.63)$$

$$c = \delta\sigma_2 \cdot \hat{\Delta} \quad (2.64)$$

y

$$d = e + \beta\sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.65)$$

donde $\alpha, a, \epsilon, \delta, \beta, e$ dependen de k y $\cos\theta$.

De acuerdo con esto, la forma más general de $T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)$ está dada por

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2) = \alpha + \beta(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + i\hat{\mathbf{n}} \cdot [\gamma(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \gamma'(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)] + \delta(\hat{\Delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\Delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \epsilon(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (2.66)$$

donde $\gamma = d + a$ y $\gamma' = d - a$. Finalmente, para partículas con la misma carga, por la simetría de carga, $\gamma' = 0$ [6]. Entonces

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2) = \alpha + \beta(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + i\gamma\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \delta(\hat{\Delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\Delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \epsilon(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (2.67)$$

Esta expresión depende de cinco funciones diferentes, que corresponden a las cinco amplitudes independientes para cada subproceso posible.

Luego, multiplicando la matriz $T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)$ con los diferentes operadores de espín que hemos considerado y tomando la traza, de acuerdo con (2.67), resulta que

$$\alpha = \frac{1}{4} \text{Tr} [T(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)] \quad (2.68)$$

$$\beta = \frac{1}{4} \text{Tr} [T(k', k, \sigma_1, \sigma_2) \sigma_1 \cdot \hat{n} \sigma_2 \cdot \hat{n}], \quad (2.69)$$

$$\gamma = \frac{1}{8i} \text{Tr} [T(k', k, \sigma_1, \sigma_2) (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \hat{n}], \quad (2.70)$$

$$\delta = \frac{1}{4} \text{Tr} [T(k', k, \sigma_1, \sigma_2) \sigma_1 \cdot \hat{\Delta} \sigma_2 \cdot \hat{\Delta}] \quad (2.71)$$

y

$$\epsilon = \frac{1}{4} \text{Tr} [T(\sigma_1 \cdot \hat{q})(\sigma_2 \cdot \hat{q})]. \quad (2.72)$$

Entonces, como en coordenadas cartesianas

$$\hat{n} = (-\text{sen } \theta, \text{cos } \theta, 0), \quad (2.73)$$

$$\hat{\Delta} = \left(\text{sen } \frac{\theta}{2} \text{cos } \phi, \text{sen } \frac{\theta}{2} \text{sen } \phi, \text{cos } \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.74)$$

y

$$\hat{q} = \left(-\text{cos } \frac{\theta}{2} \text{cos } \phi, -\text{cos } \frac{\theta}{2} \text{sen } \phi, \text{sen } \frac{\theta}{2} \right), \quad (2.75)$$

mediante el cálculo directo tenemos que

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \cdot \hat{u})(\sigma_2 \cdot \hat{u}) &= (\sigma_{1x}u_x + \sigma_{1y}u_y + \sigma_{1z}u_z)(\sigma_{2x}u_x + \sigma_{2y}u_y + \sigma_{2z}u_z) = \\ &= \sigma_{1x}\sigma_{2x}u_x^2 + \sigma_{1y}\sigma_{2y}u_y^2 + \sigma_{1z}\sigma_{2z}u_z^2 + (\sigma_{1x}\sigma_{2y} + \sigma_{1y}\sigma_{2x})u_xu_y + \\ &+ (\sigma_{1x}\sigma_{2z} + \sigma_{1z}\sigma_{2x})u_xu_z + (\sigma_{1y}\sigma_{2z} + \sigma_{1z}\sigma_{2y})u_yu_z, \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde $\hat{u} = \hat{n}, \hat{\Delta}, \hat{q}$ y

$$\sigma_{x_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{y_i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{z_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

con $i = 1, 2$. Explícitamente

$$[\chi_{m_s}^s, (\sigma_1 \cdot \hat{n})(\sigma_2 \cdot \hat{n}) \chi_{m_s}^s] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-2i\phi} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{2i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

$$[\chi_{m_s}^s, (\sigma_1 \cdot \hat{\Delta})(\sigma_2 \cdot \hat{\Delta}) \chi_{m_s}^s] = \begin{pmatrix} \text{sen } \frac{2\theta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \text{sen } \theta & e^{-2i\phi} \text{cos } \frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \text{sen } \theta & \text{cos } \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \text{sen } \theta & 0 \\ e^{2i\phi} \text{cos } \frac{\theta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \text{sen } \theta & \text{sen } \frac{2\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

$$[\chi_{m_s}^s, (\sigma_1 \cdot \hat{q})(\sigma_2 \cdot \hat{q}) \chi_{m_s}^s] = \begin{pmatrix} \text{cos } \frac{\theta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \text{sen } \theta & e^{-2i\phi} \text{sen } \frac{2\theta}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \text{sen } \theta & -\text{cos } \theta & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \text{sen } \theta & 0 \\ e^{2i\phi} \text{sen } \frac{2\theta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \text{sen } \theta \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{cos } \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

y

$$[\chi_{m,\nu}^s, (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \hat{n} \chi_{m,\nu}^s] = i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & -e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Además[6]

$$\begin{aligned} T_{0-1} &= -T_{01}, & T_{-11} &= T_{1-1}, \\ T_{-10} &= -T_{10}, & T_{1-1} &= T_{11} \end{aligned} \quad (2.82)$$

y

$$T_{11} - T_{1-1} - T_{0-0} = \sqrt{2} \cot \theta (T_{10} + T_{01}). \quad (2.83)$$

De acuerdo con esto, las amplitudes de dispersión para los diferentes subprocesos en términos de las matrices reducidas están dadas por

$$\alpha = \frac{1}{4} (2T_{11} + T_{00} + T_{ss}), \quad (2.84)$$

$$\beta = \frac{1}{4} (-2T_{1-1} + T_{00} - T_{ss}), \quad (2.85)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{10} - T_{01}), \quad (2.86)$$

$$\delta = \frac{1}{4} [T_{11} + T_{1-1} - T_{ss} + (T_{11} - T_{1-1} - T_{00}) \sec \theta] \quad (2.87)$$

y

$$\epsilon = \frac{1}{4} [T_{11} + T_{1-1} - T_{ss} - (T_{11} - T_{1-1} - T_{00}) \sec \theta]. \quad (2.88)$$

Por último, las matrices reducidas se obtienen realizando los cálculos indicados en (2.56) y están dadas por[6]

$$T_{11} = \frac{1}{2k} \sum_{l=0} [(l+2)A_l^{l+1} + (2l+1)A_l^l + (l-1)A_l^{l-1}] P_l(\theta). \quad (2.89)$$

$$T_{00} = \frac{1}{k} \sum_{l=0} [(l+1)B_l^{l+1} + lB_l^{l-1}] P_l(\theta). \quad (2.90)$$

$$T_{1-1} = \frac{1}{2k} \sum_{l=2} \left[\frac{A_l^{l+1}}{l+1} - \frac{(2l+1)A_l^l}{l(l-1)} + \frac{A_l^{l-1}}{l} \right] P_l^2(\theta). \quad (2.91)$$

$$T_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}k} \sum_{l=1} (B_l^{l+1} - B_l^{l-1}) P_l^1(\theta). \quad (2.92)$$

$$T_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}k} \sum_{l=1} \left[-\frac{(l+2)A_l^{l+1}}{(l+1)} + \frac{(2l+1)A_l^l}{l(l+1)} + \frac{(l-1)A_l^{l-1}}{l} \right] P_l^1(\theta). \quad (2.93)$$

$$T_{ss} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\theta), \quad (2.94)$$

con

$$A_l^l = \text{sen } \delta_3^l e^{i\delta_3^l}, \quad (2.95)$$

$$A_l^{l+1} = a^{l+1} \cos^2 \epsilon_{l+1} + b^l \text{sen}^2 \epsilon_{l+1} - \sqrt{\frac{l+1}{l+2}} (a^{l+1} - b^{l+1}) \frac{1}{2} \text{sen}^2 \epsilon_{l+1}, \quad (2.96)$$

$$B_l^{l+1} = a^{l+1} \cos^2 \epsilon_{l+1} + b^{l+1} \text{sen}^2 \epsilon_{l+1} - \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} (a^{l+1} - b^{l+1}) \frac{1}{2} \text{sen}^2 \epsilon_{l+1}, \quad (2.97)$$

$$A_l^{l-1} = a^{l-1} \text{sen}^2 \epsilon_{l-1} + b^{l-1} \cos^2 \epsilon_{l-1} - \sqrt{\frac{l}{l-1}} (a^{l-1} - b^{l-1}) \frac{1}{2} \text{sen}^2 \epsilon_{l-1}, \quad (2.98)$$

$$B_l^{l-1} = a^{l-1} \text{sen}^2 \epsilon_{l-1} + b^{l-1} \cos^2 \epsilon_{l-1} - \sqrt{\frac{l}{l-1}} (a^{l-1} - b^{l-1}) \frac{1}{2} \text{sen}^2 \epsilon_{l-1}, \quad (2.99)$$

$$a^l = \text{sen} \delta_1^l e^{i\delta_1^l}, \quad b^l = \text{sen} \delta_2^l e^{i\delta_2^l} \quad \text{y} \quad c_l = \text{sen} \delta_0^l e^{i\delta_0^l}. \quad (2.100)$$

Capítulo 3

Aproximación eikonal para partículas con espín 1/2

3.1 Introducción

En este capítulo generalizaremos la aproximación eikonal para la amplitud de dispersión de partículas sin espín de la sección (1.3) al caso de la interacción de partículas con espín 1/2[2].

El proceso y el marco de desarrollo son los mismos que los señalados en la introducción del capítulo 2, es decir, la dispersión elástica de partículas con espín 1/2 desde el CM del sistema. La función de onda del proyectil satisface la ecuación de Schrödinger (2.5)

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = 2\mu V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

donde $V(\mathbf{r})$ es el potencial más general rotacionalmente invariante, local y dependiente de espín (2.3), al cual reescribiremos ahora en una versión más sencilla para los cálculos aproximados

El operador de espín total en términos de las matrices de Pauli de las partículas interactuantes está dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (3.2)$$

Entonces, tomando el cuadrado escalar de los dos miembros de esta ecuación y utilizando la identidad $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3$, podemos reescribir a la magnitud del operador de espín como

$$S^2 = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2). \quad (3.3)$$

Empleando esto, los operadores de proyección (2.1), (2.2) y el operador tensorial (2.4) pueden reescribirse como

$$\Lambda^0 = \frac{1}{4}(1 - \sigma_1 \cdot \sigma_2), \quad (3.4)$$

$$\Lambda^1 = \frac{1}{4}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \quad (3.5)$$

y

$$S_{12} = 3 \sigma_1 \cdot \hat{r} \sigma_2 \cdot \hat{r} - \sigma_1 \cdot \sigma_2. \quad (3.6)$$

Por lo que

$$V(\mathbf{r}) = V_c + V_{sa}(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + V_{ta}(r) \sigma_1 \cdot \hat{r} \sigma_2 \cdot \hat{r}, \quad (3.7)$$

donde $V_c = \frac{1}{4}(V_0 + 3V_1)$, $V_{sa} = \frac{1}{4}(V_1 - V_0) - V_{12}$ y $V_{ta} = 3V_{12}$. O,

$$V(\mathbf{r}) = V_c + V_{sa}(r) + V_{ta}(r), \quad (3.8)$$

donde $V_s = V_{sa}(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2$ y $V_t = V_{ta}(r) \sigma_1 \cdot \hat{r} \sigma_2 \cdot \hat{r}$.

3.2 Expansión para la fórmula eikonal

La función de Green generalizada para el tipo de potenciales que estamos considerando, reescrita en términos de $\mathbf{q} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}$, ver (2.60), está dada por

$$G = \frac{1}{\frac{1}{2\mu}(\mathbf{q}^2 + \nabla^2) - V}. \quad (3.9)$$

Como discutimos en el capítulo 2, para este tipo de potenciales tendremos cinco amplitudes de dispersión para cada j , en lugar de una como en el caso de un potencial central. Ahora, para encontrar la forma aproximada de estas amplitudes, tomaremos en cuenta que la matriz T es un operador que puede reescribirse a partir de la ecuación integral para la función de onda (2.21) en términos de la función de Green (3.9) como[6]

$$T = V + VGV. \quad (3.10)$$

Para obtener la aproximación eikonal, como en el caso escalar, consideraremos que las contribuciones relevantes a esta función proceden principalmente de valores del momento cercanos a \mathbf{q} , cuando $|V| \ll E$, donde hemos elegido a $\hat{\mathbf{q}}$ a lo largo del eje z como la dirección de incidencia.

Cuando estas condiciones se cumplen

$$\mathbf{q}^2 - \mathbf{p}^2 = 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) - (\mathbf{q} - \mathbf{p})^2 \approx 2q(q - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}), \quad (3.11)$$

donde \mathbf{p} (en el espacio de momentos) es un momento típico que participa en la dispersión. Entonces

$$G \approx G_{eik} = \frac{1}{v q + i\mathbf{q} \cdot \nabla - \frac{v}{n} + i\epsilon}. \quad (3.12)$$

donde $v = \frac{\mu}{m}$. Aplicaremos estas condiciones al considerar una expansión del propagador eikonal en una serie de Born[9].

$$G_{eik} = G_{eik}^0 + G_{eik}^0 V G_{eik}^0 + G_{eik}^0 V G_{eik}^0 V G_{eik}^0 + \dots \quad (3.13)$$

donde G_{rik}^0 corresponde al caso eikonal libre ($V = 0$).

Para un potencial central, la fórmula eikonal se halla empleando el hecho de que el potencial conmuta consigo mismo en puntos diferentes y está dada por [2]

$$\langle \mathbf{r}' | G_{eik} | \mathbf{r} \rangle = -\frac{i}{v} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{iq(z' - z) - \frac{i}{v} \int_z^{z'} V(\mathbf{b}, z'') dz''} \quad (3.14)$$

donde $\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z)$. El potencial tensorial (3.8) no necesariamente conmuta consigo mismo en puntos diferentes porque

$$[\mathbf{V}(\mathbf{r}_a), \mathbf{V}(\mathbf{r}_b)] = [\mathbf{V}_t(\mathbf{r}_a), \mathbf{V}_t(\mathbf{r}_b)] \quad (3.15)$$

y

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}_t(\mathbf{r}_a), \mathbf{V}_t(\mathbf{r}_b)] &= \frac{1}{9} V_{ta}(\mathbf{r}_a) V_{tb}(\mathbf{r}_b) [\mathbf{S}_{12}(\hat{\mathbf{r}}_a) \cdot \mathbf{S}_{12}(\hat{\mathbf{r}}_b)] = \\ &= V_{ta}(\mathbf{r}_a) V_{tb}(\mathbf{r}_b) [\sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_a \sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_b + \sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_b \sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_a + \\ &+ 2i V_{ta}(\mathbf{r}_a) V_{tb}(\mathbf{r}_b) \hat{\mathbf{r}}_a \cdot \hat{\mathbf{r}}_b \hat{\mathbf{r}}_a \times \hat{\mathbf{r}}_b \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

ya que

$$\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_a \sigma_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_b = \hat{\mathbf{r}}_a \cdot \hat{\mathbf{r}}_b + i (\hat{\mathbf{r}}_a \times \hat{\mathbf{r}}_b) \cdot \sigma_i, \quad (3.17)$$

con $i = 1, 2$.

Reescribamos entonces la expansión del propagador como

$$G_{eik} = G_0' + G_0' V_t G_0' + G_0' V_t G_0' V_t G_0' + \dots \quad (3.18)$$

donde

$$G_0' = \frac{1}{v} \frac{1}{q - i\hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla - \frac{(V_c + V_s)}{v} + i\epsilon} \quad (3.19)$$

contiene las partes del potencial que conmutan entre sí.

La condición en el espacio de momentos $\Delta \ll q$, ver (2.60), o $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \ll q$, se traduce al espacio de configuraciones en que los valores relevantes de \mathbf{r} , \mathbf{r}' , para un determinado elemento de matriz de la serie (3.18), sean aquellos para los que $b \gg |z|$ y $b \gg |z'|$. Luego, en una primera aproximación a G_{eik} , es decir G_{eik}^0 , los conmutadores del tipo (3.16) pueden despreciarse. Se obtiene entonces

$$\langle \mathbf{r}' | G_{eik}^0 | \mathbf{r} \rangle = -\frac{i}{v} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{iq(z' - z)} e^{i(\chi_r + \chi_s \sigma_1 \cdot \sigma_2) e^{i\pi n}}, \quad (3.20)$$

donde

$$\chi_k(\mathbf{b}, z', z) = -\frac{1}{v} \int_z^{z'} V_k(\mathbf{b}, z'') dz'', \quad \text{con } k = c, s, \quad (3.21)$$

y

$$\tau_i = -\frac{1}{v} \int_z^{z'} V_i(\mathbf{b}, z'') dz'' \quad (3.22)$$

Esta última ecuación puede reescribirse como

$$\tau_i = \tau_{xx}\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \tau_{yy}\sigma_{1y}\sigma_{2y} + \tau_{zz}\sigma_{1z}\sigma_{2z} + \tau_{xy}(\sigma_{1x}\sigma_{2y} + \sigma_{1y}\sigma_{2x}) + \tau_{xz}(\sigma_{1x}\sigma_{2z} + \sigma_{1z}\sigma_{2x}) + \tau_{yz}(\sigma_{1y}\sigma_{2z} + \sigma_{1z}\sigma_{2y}), \quad (3.23)$$

donde

$$\tau_{xx} = \cos^2(\phi) \chi_{i0}(\mathbf{b}, z', z), \quad (3.24)$$

$$\tau_{yy} = \sin^2(\phi) \chi_{i0}(\mathbf{b}, z', z), \quad (3.25)$$

$$\tau_{zz} = \chi_{i2}(\mathbf{b}, z', z), \quad (3.26)$$

$$\tau_{xy} = \cos(\phi) \sin(\phi) \chi_{i0}(\mathbf{b}, z', z), \quad (3.27)$$

$$\tau_{yz} = \cos(\phi) \chi_{i1}(\mathbf{b}, z', z) \quad (3.28)$$

y

$$\tau_{xz} = \sin(\phi) \chi_{i1}(\mathbf{b}, z', z), \quad (3.29)$$

con

$$\mathbf{b} = b(\cos \phi, \sin \phi), \quad (3.30)$$

$$\chi_{i0}(\mathbf{b}, z', z) = -\frac{b^2}{v} \int_z^{z'} \frac{1}{b^2 + z''^2} V_{i0}(\mathbf{b}, z'') dz'',$$

$$\chi_{i1}(\mathbf{b}, z', z) = -\frac{b}{v} \int_z^{z'} \frac{b}{b^2 + z''^2} V_{i0}(\mathbf{b}, z'') dz''$$

y

$$\chi_{i2}(\mathbf{b}, z', z) = -\frac{1}{v} \int_z^{z'} \frac{b^2}{b^2 + z''^2} V_{i0}(\mathbf{b}, z'') dz''. \quad (3.31)$$

La expresión de τ_i en (3.23) puede simplificarse rotando el sistema de coordenadas, de modo que

$$\tau'_i = (\mathbf{m} \cdot \sigma_1)(\mathbf{m} \cdot \sigma_2) + (\mathbf{p} \cdot \sigma_1)(\mathbf{p} \cdot \sigma_2) + (\mathbf{w} \cdot \sigma_1)(\mathbf{w} \cdot \sigma_2), \quad (3.32)$$

donde \mathbf{m} , \mathbf{p} , y \mathbf{w} son vectores ortogonales arbitrarios, tales que los operadores $(\mathbf{d} \cdot \sigma_1)(\mathbf{d} \cdot \sigma_2)$, con $\mathbf{d} = \mathbf{m}$, \mathbf{p} , \mathbf{w} , conmuten entre sí.

Las condiciones de ortogonalidad entre las matrices de Pauli se preservan bajo rotaciones aplicadas a cada una de las matrices de Pauli; entonces

$$\mathbf{m} \cdot \sigma = \mathbf{mR}^{-1} \sigma_z \mathbf{R}, \quad \mathbf{p} \cdot \sigma = \mathbf{pR}^{-1} \sigma_y \mathbf{R}, \quad \text{y} \quad \mathbf{w} \cdot \sigma = \mathbf{wR}^{-1} \sigma_x \mathbf{R}. \quad (3.33)$$

Con esto y las componentes cartesianas de \mathbf{m} , \mathbf{p} , y \mathbf{w} , igualamos (3.32) a (3.23) para hallar un sistema de seis ecuaciones con los ángulos de rotación y las magnitudes m, p, w , como incógnitas

$$m^2 \hat{m}_i^2 + n^2 \hat{p}_i^2 + w^2 \hat{w}_i^2 = \tau_{ii}, \quad \text{con } i = x, y, z, \quad (3.34)$$

$$m^2 \hat{m}_x \hat{m}_y^2 + \rho^2 \hat{p}_x \hat{p}_y^2 + w^2 \hat{w}_x \hat{w}_y = \tau_{xy}, \quad (3.35)$$

$$m^2 \hat{m}_x \hat{m}_z^2 + \rho^2 \hat{p}_x \hat{p}_z^2 + w^2 \hat{w}_x \hat{w}_z = \tau_{xz} \quad (3.36)$$

y

$$m^2 \hat{m}_y \hat{m}_z^2 + \rho^2 \hat{p}_y \hat{p}_z^2 + w^2 \hat{w}_y \hat{w}_z = \tau_{yz}, \quad (3.37)$$

misimas que pueden solucionarse analiticamente para al menos cinco de las seis variables desconocidas.

Entonces, usando la idea descrita anteriormente, podemos reescribir a (3.23) como

$$\tau_i = \chi_{i0}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{b}} \cdot \sigma_2) + \chi_{i2}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{z}} \cdot \sigma_2) + \chi_{i1}(\sigma_{1\hat{\mathbf{b}}}\sigma_{2\hat{\mathbf{z}}} + \sigma_{1\hat{\mathbf{z}}}\sigma_{2\hat{\mathbf{b}}}). \quad (3.38)$$

Luego, definiendo una nueva base donde

$$\tau_i'' = s^2(\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_2) + t^2(\hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_2) \quad (3.39)$$

con

$$\mathbf{s} = (\sqrt{\rho}\hat{\mathbf{b}}, \sqrt{\eta}\hat{\mathbf{z}}), \quad \mathbf{t} = \lambda(\sqrt{\rho}\hat{\mathbf{b}}, \sqrt{\eta}\hat{\mathbf{z}}) \quad (3.40)$$

e igualando (3.38) a (3.39) llegamos a que

$$\chi_{i0} = \rho + \lambda^2 \eta, \quad (3.41)$$

$$\chi_{i2} = \eta + \lambda^2 \rho \quad (3.42)$$

y

$$\chi_{i0} = \sqrt{\rho\eta}(1 - \lambda^2). \quad (3.43)$$

Por tanto

$$\rho = \frac{\chi_{i0}\sqrt{\zeta} + \chi_{i0}^2 + 2\chi_{i1}^2 - \chi_{i0}\chi_{i2}}{2\sqrt{\zeta}}, \quad (3.44)$$

$$\eta = \frac{\chi_{i2}\sqrt{\zeta} + \chi_{i2}^2 + 2\chi_{i1}^2 - \chi_{i0}\chi_{i2}}{2\sqrt{\zeta}} \quad (3.45)$$

y

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{i0} + \chi_{i2} - \sqrt{\zeta}}{\chi_{i0} + \chi_{i2} + \sqrt{\zeta}}, \quad (3.46)$$

donde

$$\zeta = \chi_{i0}^2 + 4\chi_{i1}^2 - 2\chi_{i0}\chi_{i2} + \chi_{i2}^2. \quad (3.47)$$

Con estas simplificaciones ya es posible describir una expresión analítica para G_{cik}^0 en el espacio de configuraciones

$$\langle \mathbf{r}' | G_{cik}^0 | \mathbf{r} \rangle = -\frac{1}{r} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{i\eta(z' - z)} e^{i\tau^0}, \quad (3.48)$$

donde

$$\tau^0 = \chi_c + \chi_{s'}(\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_2) + \chi_{t'}(\hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_2) + \chi_{u'}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \sigma_1)(\hat{\mathbf{u}} \cdot \sigma_2) \quad (3.49)$$

con

$$\hat{u} = \hat{b} \times \hat{z}, \quad (3.50)$$

$$\chi_{s'} = \chi_s + \frac{\chi_{t0} + \chi_{t2} + \sqrt{\zeta}}{2} = \chi_{u'} \quad (3.51)$$

y

$$\chi_{t'} = \chi_s + \frac{\chi_{t0} + \chi_{t2} - \sqrt{\zeta}}{2} \quad (3.52)$$

Empleado las relaciones de conmutación para las matrices de Pauli

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 0, \quad y \quad [\sigma_i, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkm}\sigma_{i_m}, \quad \text{con } i = 1, 2 \text{ y } j, k, m = x, y, z, \quad (3.53)$$

y el hecho de que \mathbf{s} , \mathbf{t} , \mathbf{u} son ortogonales, se comprueba que las componentes de τ^0 conmutan entre sí. Entonces, usando que

$$e^{iy}(\hat{h} \cdot \sigma_1)(\hat{h} \cdot \sigma_2) = \cos y + i \operatorname{sen} y (\hat{h} \cdot \sigma_1)(\hat{h} \cdot \sigma_2), \quad (3.54)$$

para un número y y un vector \mathbf{h} arbitrarios, se obtiene que el término exponencial para la función de Green aproximada está dado por

$$e^{\tau^0} = \Gamma_{0c} + \Gamma_{0s}(\hat{s} \cdot \sigma_1)(\hat{s} \cdot \sigma_2) + \Gamma_{0t}(\hat{t} \cdot \sigma_1)(\hat{t} \cdot \sigma_2) + \Gamma_{0u}(\hat{u} \cdot \sigma_1)(\hat{u} \cdot \sigma_2), \quad (3.55)$$

donde

$$\Gamma_{0c} = e^{\chi_c}(\cos^2 \chi_{s'} \cos \chi_{t'} + i \operatorname{sen}^2 \chi_{s'} \operatorname{sen} \chi_{t'}), \quad (3.56)$$

$$\Gamma_{0s} = e^{\chi_c}(\cos \chi_{s'} \operatorname{sen} \chi_{t'} \operatorname{sen} \chi_{s'} + i \operatorname{sen} \chi_{s'} \cos \chi_{t'} \cos \chi_{s'}), \quad (3.57)$$

$$\Gamma_{0t} = e^{\chi_c}(\operatorname{sen}^2 \chi_{s'} \cos \chi_{t'} + i \cos^2 \chi_{s'} \operatorname{sen} \chi_{t'}) \quad (3.58)$$

y

$$\Gamma_{0u} = e^{\chi_c}(\operatorname{sen} \chi_{s'} \operatorname{sen} \chi_{t'} \cos \chi_{s'} + i \cos \chi_{s'} \cos \chi_{t'} \operatorname{sen} \chi_{s'}). \quad (3.59)$$

3.3 Correcciones a segundo orden

La ecuación (3.55) contiene sólo cuatro de los cinco términos necesarios para obtener la amplitud de dispersión de un sistema de dos partículas con espín 1/2. El quinto término se puede hallar mediante una aproximación correcta al menos a segundo orden, considerando los términos debidos a (3.16) que anteriormente despreciamos

$$\langle \mathbf{r}' | (G'_0 \mathbf{V}_t G'_0 \mathbf{V}_t G'_0)_{\text{con}} | \mathbf{r} \rangle = -\frac{i}{v} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{iq(z' - z)} e^{i(\chi_c + \chi_s \sigma_1 \cdot \sigma_2)} \tau_r, \quad (3.60)$$

donde

$$\tau_r = -\frac{1}{2v^2} \int dz'' dz''' \theta(z' - z'') \theta(z'' - z''') \theta(z''' - z) [\mathbf{V}_t(\mathbf{b}, z''), \mathbf{V}_t(\mathbf{b}, z''')], \quad (3.61)$$

lo cual se puede reescribir como

$$\tau_r = i\chi_r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (3.62)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector definido en (2.60) y

$$\chi_r = -\frac{b}{v^2} \int dz'' dz''' \theta(z' - z'') \theta(z'' - z''') \theta(z''' - z) \frac{(z''' - z'')(b^2 + z'' z''') V_{ta}(\mathbf{b}, z'') V_{ta}(\mathbf{b}, z''')}{(b^2 + z''^2)(b^2 + z'''^2)}. \quad (3.63)$$

En general, la fórmula tensorial cikonal general se puede expresar, a nivel local, como

$$\langle r' | G_{\text{cik}}^t | r \rangle = -\frac{i}{v} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{iq(z' - z)} e^{i\tau^t}, \quad (3.64)$$

donde

$$\tau^t = \chi_{r''} + \chi_{r'''} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2) + \chi_{s''} (\hat{\mathbf{s}}' \cdot \sigma_1) (\hat{\mathbf{s}}' \cdot \sigma_2) + \chi_{t''} (\hat{\mathbf{t}}' \cdot \sigma_1) (\hat{\mathbf{t}}' \cdot \sigma_2) + \chi_{r''} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.65)$$

con $\hat{\mathbf{s}}'$, $\hat{\mathbf{t}}'$ vectores ortogonales y $\chi_{r''}$, $\chi_{s''}$, $\chi_{t''}$, $\chi_{r''}$ funciones del potencial.

Entonces proponemos la siguiente aproximación, que tiene la forma (3.64) y que es correcta a segundo orden

$$\langle r' | G_{\text{cik}}^1 | r \rangle = -\frac{i}{v} \theta(z' - z) \delta(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) e^{iq(z' - z)} e^{i\tau^1}, \quad (3.66)$$

donde

$$\tau^1 = \tau^0 + \chi_r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (3.67)$$

Luego, para obtener una expresión explícita de (3.66) separaremos las componentes de τ^1 de tal forma que podamos dividir a la exponencial en una parte que contenga los términos que conmutan con τ^1 , i.e. los de coeficientes de χ_c , $\chi_{r'}$, y otra parte que contenga al resto.

La última parte de la exponencial se puede expandir empleando la anticonmutatividad entre el término con coeficiente χ_r y los términos de coeficientes $\chi_{s'}$, $\chi_{t'}$, tomando en cuenta las relaciones de anticonmutatividad de las matrices de Pauli

$$\{\sigma_{i_j}, \sigma_{i_m}\} = 2\delta_{jm}, \quad \text{con } i = 1, 2 \text{ y } j, m = x, y, z. \quad (3.68)$$

Posteriormente, sumando los términos mediante los operadores de proyección

$$\mathbf{P}_{n\pm} = \frac{1}{2} [1 \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2)], \quad (3.69)$$

se puede llegar[2] a que

$$e^{\tau^1} = \Gamma_c + \Gamma_n \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2 + \Gamma_s \hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_1 \hat{\mathbf{s}} \cdot \sigma_2 + \Gamma_t \hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_1 \hat{\mathbf{t}} \cdot \sigma_2 + \Gamma_r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (3.70)$$

donde

$$\Gamma_c = \frac{e^{ix_c}}{2} (e^{ix_{s'}} \cos d + e^{-ix_{s'}} \cos f), \quad (3.71)$$

$$\Gamma_n = \frac{e^{ix_c}}{2} (e^{ix_{s'}} \cos d - e^{-ix_{s'}} \cos f), \quad (3.72)$$

$$\Gamma_r = ie^{i(x_c+x_{s'})} \chi_r \frac{\text{sen } d}{d}, \quad (3.73)$$

$$\Gamma_s = \frac{ie^{ix_c}}{2} [e^{ix_{s'}} (\chi_{s'} - \chi_{t'}) \frac{\text{sen } d}{d} + e^{-ix_{s'}} (\chi_s + \chi_{t'}) \frac{\text{sen } f}{f}] \quad (3.74)$$

y

$$\Gamma_t = \frac{ie^{ix_c}}{2} [e^{-ix_{s'}} (\chi_{s'} + \chi_{t'}) \frac{\text{sen } f}{f} - e^{ix_{s'}} (\chi_{s'} - \chi_{t'}) \frac{\text{sen } d}{d}], \quad (3.75)$$

con

$$d = \sqrt{4\chi_r^2 + \chi_s^2 + \chi_{t'}^2 - 2\chi_s\chi_{t'}} \quad (3.76)$$

y

$$f = \sqrt{\chi_s^2 + \chi_{t'}^2 + 2\chi_{s'}\chi_{t'}}. \quad (3.77)$$

3.4 Amplitudes de dispersión

Empleando (3.9) y (3.10) obtenemos la matriz T_{eik} en términos de G_{eik} . En el espacio de momentos

$$\langle k' | T_{eik} | k \rangle = \int d^2b e^{-i(\Delta \cdot b)} \int dz V(b, z) [1 + \int dz' G_{eik}(z, z') V(b, z')]. \quad (3.78)$$

Sustituyendo (3.13) en esta ecuación llegamos a la expansión en una serie de Born, de la forma

$$\langle k' | T_{eik} | k \rangle = \langle k' | V + VG_0V + VG_0VG_0V + \dots | k \rangle. \quad (3.79)$$

Tomando $z' \rightarrow \infty$ y $z'' \rightarrow \infty$ en la función de Green G_{eik} en el espacio de configuraciones (3.13), sustrayéndole el término de orden cero en V , multiplicando por $(iv)^2$ y aplicando una transformada de Fourier (donde se integra sobre b con el momento transversal Δ como argumento), obtenemos T_{eik} en el espacio de momentos empleando su expresión en el espacio de configuraciones

$$\langle k' | T_{eik} | k \rangle = iv \int d^2b e^{-i\Delta \cdot b} (e^{i\tau^t} - 1). \quad (3.80)$$

Mediante esta serie de operaciones se obtiene nuevamente (3.79). Para T_{eik}^0 y T_{eik}^1 obtenemos expresiones similares con τ^0 y τ^1 respectivamente en lugar de τ^t .

En el cálculo que lleva a (3.80) $\hat{s} = \hat{b}$ y $\hat{t} = \hat{z}$. Además, por la simetría del potencial, de las diferentes componentes de τ^1 , el coeficiente χ_{t1} se anula. Esto da lugar a que la expresión final para las amplitud de dispersión total sea

$$f_{eik}^1(\theta, q) = \alpha + \beta (\hat{n} \cdot \sigma_1)(\hat{n} \cdot \sigma_2) + \gamma \hat{n} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) + \delta (\hat{\Delta} \cdot \sigma_1)(\hat{\Delta} \cdot \sigma_2) + \epsilon (\hat{q} \cdot \sigma_1)(\hat{q} \cdot \sigma_2), \quad (3.81)$$

donde ¹

$$\alpha = -iq \int b db J_0(2kbsen \frac{\theta}{2}) [\Gamma_r(\mathbf{b}) - 1], \quad (3.82)$$

$$\beta = -\frac{iq}{2} \int b db \{ [J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] \Gamma_s(\mathbf{b}) + [J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] \Gamma_u(\mathbf{b}) \}, \quad (3.83)$$

$$\delta = -\frac{iq}{2} \int b db \{ [J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] \Gamma_s(\mathbf{b}) + [J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] \Gamma_u(\mathbf{b}) \}, \quad (3.84)$$

$$\gamma = -q \int b db J_1(\Delta b) \Gamma_r(\mathbf{b}) \quad (3.85)$$

y

$$\epsilon = -iq \int b db J_0(2kbsen \frac{\theta}{2}) \Gamma_t(\mathbf{b}), \quad (3.86)$$

con

$$d = \sqrt{4\chi_r^2 + (\chi_{t2} - \chi_{t0})^2}, \quad (3.87)$$

$$f = \sqrt{(\chi_{t2} + \chi_{t0})^2 + 4\chi_s^2(\chi_{t0} + \chi_{t2} - \chi_s)} \quad (3.88)$$

y donde hemos tomado $\chi_{t0} = \chi_{t0}(\mathbf{b}, z' \rightarrow \infty, z \rightarrow -\infty)$ y $\chi_t = \chi_t(\mathbf{b}, z' \rightarrow \infty, z \rightarrow -\infty)$, con $i = s, c, r$.

¹Considerando que

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{i z \cos \theta} \cos(n\theta)$$

Capítulo 4

Potenciales con componente tensorial centrífuga

4.1 Introducción

En este capítulo aplicamos los resultados de los capítulos 2 y 3 a la colisión elástica de dos partículas de espín 1/2 interactuando bajo la acción de dos potenciales con componente tensorial centrífuga. Empleando los resultados de la sección (2.3.1), calculamos analíticamente los corrimientos de fase de las amplitudes de dispersión exactas. Luego, empleando los resultados de las secciones (3.3) y (3.4), calculamos analíticamente las funciones (3.21), (3.31) y (3.63) correspondientes a la aproximación eikonal tensorial a la amplitud de dispersión. Finalmente, presentamos algunos cálculos numéricos preliminares que obtuvimos a partir de los cálculos analíticos antes mencionados y una breve discusión.

Reescribiremos una vez más el potencial (2.3), como

$$V(\mathbf{r}) = V_c(r) + V_{se}(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + V_{te}(r) S_{12}, \quad (4.1)$$

para separarlo en sus partes escalar $V_c = \frac{1}{4}(V_0 + 3V_1)$, de espín $V_{se} = \frac{1}{4}(V_1 - V_0) = V_{sa} + V_{te}$ y tensorial $V_{te} = V_{12} = \frac{1}{3}V_{ta}$. De esta forma, simplificaremos los cálculos de la solución exacta considerando potenciales cuya componente de espín sea nula $V_{se} = 0$ (i.e. $V_0 = V_1 = V_c$) y cuya componente tensorial sea la barrera centrífuga (1.88),

$$V_{te} = \frac{c}{r^2} \theta(a - r), \quad (4.2)$$

donde c es una constante positiva (dada en MeV^{-1}). Para este tipo de potenciales

$$V(\mathbf{r}) = V_c(r) + \frac{c}{r^2} \theta(a - r) S_{12}, \quad (4.3)$$

las ecuaciones (2.23) de la solución exacta pueden desacoplarse[3].

4.2 Potencial central de pozo cuadrado

Veamos cómo se lleva a cabo del desarrollo de los cálculos mencionados en los capítulos anteriores usando el potencial

$$V(r) = (-V_0 + \frac{c}{r^2} S_{12}) \theta(a - r). \quad (4.4)$$

donde V_0 y c son constantes positivas. Este potencial contiene al pozo cuadrado (1.71) como su parte central.

4.2.1 Corrimientos de fase

Estado singulete

Según vimos en el capítulo 2, el estado singulete es independiente de los otros estados y la dispersión en este estado es equivalente a la dispersión por la fuerza $V(r) = V_0 \theta(a - r)$. Entonces, de acuerdo con (1.85) y la notación definida capítulo 2, el corrimiento de fase para el estado singulete es

$$\delta_0^j = \text{atan} \left[\frac{k_0 j_1(k_0 a) j_1'(k_0 a) - k j_1(k_0 a) j_1'(k a)}{k_0 n_1(k_0 a) j_1'(k_0 a) - k j_1(k_0 a) n_1'(k a)} \right]. \quad (4.5)$$

donde $k_0 = \sqrt{2\mu(E + V_0)}$.

Estados triplete

El estado triplete con $s = 1$, $l = l' = j$, como vimos en el capítulo 2, también es independiente de los otros estados y equivalente a la dispersión por la fuerza $V(r) = -(V_0 + 2 \frac{c}{r^2}) \theta(a - r)$. Entonces, este cálculo difiere del anterior sólo para $r < a$, en cuyo caso, podemos reescribir a (2.27) como

$$\left[\frac{1}{(k_0 r)^2} \frac{d}{d(k_0 r)} (k_0 r)^2 \frac{d}{d(k_0 r)} + 1 - \frac{j(j+1) - 4\mu c}{(k_0 r)^2} \right] \psi_{j,1}^j = 0. \quad (4.6)$$

La solución de esta ecuación corresponde a la función esférica de Bessel

$$\psi_{j,1}^j = A_0 j_\Lambda(k_0 r), \quad (4.7)$$

donde $\Lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + 4\mu c}$ y A_0 es una constante. Entonces, el corrimiento de fase para el estado triplete con $l = l' = j$, es

$$\delta_1^j = \text{atan} \left[\frac{k_0 j_1(k_0 a) j_\Lambda'(k_0 a) - k j_\Lambda(k_0 a) j_1'(k a)}{k_0 n_1(k_0 a) j_\Lambda'(k_0 a) - k j_\Lambda(k_0 a) n_1'(k a)} \right]. \quad (4.8)$$

Función de onda para los estados triplete con $l, l' = j \pm 1$

Para los estados con $l, l' = j \pm 1$, cuando $r < a$, sustituyendo (4.4) en (2.44), y simplificando se obtiene que

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & c_j \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 1}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 1}^j \end{pmatrix} = -k_0^2 \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 1}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 1}^j \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde

$$a_j = (j-1) \left(j - \frac{4\mu c}{2j+1} \right),$$

$$b_j = 12\mu c \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}$$

y

$$c_j = (j+2) \left[(j+1) - \frac{4\mu c}{2j+1} \right]. \quad (4.10)$$

Entonces, ya que la matriz en esta expresión es simétrica y real, podemos diagonalizarla mediante una transformación ortogonal X^j ¹, i.e.

$$X^j \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & c_j \end{pmatrix} (X^j)^t = \begin{pmatrix} v_j^1 & 0 \\ 0 & v_j^2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Los eigenvalores v_j^i para esta transformación, que se obtienen a partir de demandar que

$$\left\| \begin{pmatrix} a_j - v_j^1 & b_j \\ b_j & c_j - v_j^2 \end{pmatrix} \right\| = 0. \quad (4.12)$$

están dados por

$$v_j^1 = (j^2 + j + 1 - 2\mu c) + \sqrt{(2j+1)^2 - 12\mu c + (6\mu c)^2},$$

$$v_j^2 = (j^2 + j + 1 - 2\mu c) - \sqrt{(2j+1)^2 - 12\mu c + (6\mu c)^2}. \quad (4.13)$$

Luego, de acuerdo con (4.11), se pueden determinar las siguientes componentes normalizadas de X^j ,

$$X_{11}^j = \frac{b_j}{\sqrt{(v_j^1 - a_j)^2 + b_j^2}},$$

$$X_{12}^j = \frac{b_j}{\sqrt{(v_j^2 - a_j)^2 + b_j^2}},$$

$$X_{21}^j = \frac{v_j^1 - a_j}{\sqrt{(v_j^1 - a_j)^2 + b_j^2}},$$

y

$$X_{22}^j = \frac{v_j^2 - a_j}{\sqrt{(v_j^2 - a_j)^2 + b_j^2}}. \quad (4.14)$$

¹Una transformación X es ortogonal si $XX' = 1 = X'X$

Estas componentes pueden reescribirse (en una forma más cómoda para el cálculo numérico) en términos de X_{11}^j , como

$$X_{21}^j = \sqrt{1 - (X_{11}^j)^2}, \quad (4.15)$$

$$X_{12}^j = \frac{b_j}{|b_j|} \sqrt{1 - (X_{11}^j)^2} \quad (4.16)$$

y

$$X_{22}^j = -|X_{11}^j|. \quad (4.17)$$

Finalmente, multiplicamos la ecuación (4.9) a la izquierda por \mathbf{X}^j , introducimos $\mathbf{1} = \mathbf{X}^{j^t} \mathbf{X}^j$ convenientemente y sustituimos (4.11) para llegar a que

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \mathbf{X}^j - \frac{1}{r^2} \left[\mathbf{X}^j \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & c_j \end{pmatrix} \mathbf{X}^{j^t} \right] \mathbf{X}^j \right\} \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 11}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 11}^j \end{pmatrix} = -k_o^j \mathbf{X}^j \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 11}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 11}^j \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

i.e.

$$\left[\frac{1}{(k_o r)^2} \frac{d}{d(k_o r)} (k_o r)^2 \frac{d}{d(k_o r)} + 1 - \frac{1}{(k_o r)^2} \begin{pmatrix} v_j^1 & 0 \\ 0 & v_j^2 \end{pmatrix} \right] \mathbf{X}^j \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 11}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 11}^j \end{pmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

En esta ecuación podemos observar claramente que con el tipo de potenciales que elegimos la matriz de transformación no depende de r , lo cual permite que el problema pueda ser resuelto analíticamente.

En efecto, cada una de las ecuaciones de la última expresión tiene nuevamente la forma de la ecuación para las funciones esféricas de Bessel, de modo que

$$\mathbf{X}^j \begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 11}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 11}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_j^2 j_{\lambda_j^i}(k_o r) \\ A_j^1 j_{\lambda_j^i}(k_o r) \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

donde $\lambda_j^i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \nu_j^i}$ y A_j^i son constantes con $i = 1, 2$. Entonces, multiplicando esta ecuación a la derecha por \mathbf{X}^{j^t} hallamos que, para $r < a$,

$$\begin{pmatrix} \psi_{j-1, j \mp 11}^j \\ \psi_{j+1, j \mp 11}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^j & X_{21}^j \\ X_{12}^j & X_{22}^j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_j^1 j_{\lambda_j^i}(k_o r) \\ A_j^2 j_{\lambda_j^i}(k_o r) \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Por otro lado, con el objeto de facilitar la notación, reescribiremos (2.47) como

$$\psi_{j \pm 1, l}^j |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow h_2^j(kr) \delta_{j \pm 1, l} + S_{j \pm 1, l}^j h_1^j(kr). \quad (1.22)$$

tomando en cuenta que la denominada función de Hankel de segunda especie [1]

$$h_2^l(kr) = [j_l(kr) - m_l(kr)] \quad (1.23)$$

es tal que

$$h_2^l(kr) |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{i}{kr} \rho^l(kr - \frac{\pi}{2}l). \quad (1.24)$$

Entonces, para $r > a$, cuando la función de onda entrante tiene $l = j - 1$

$$\begin{pmatrix} \psi_{j-1j-1}^j \\ \psi_{j+1j-1}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_2^{j-1}(kr) + S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(kr) \\ S_{j-1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(kr) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

y cuando tiene $l = j + 1$

$$\begin{pmatrix} \psi_{j-1j+1}^j \\ \psi_{j+1j+1}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{j+1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(kr) \\ h_2^{j+1}(kr) + S_{j+1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(kr) \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Matriz S para los estados triplete con $l, l' = j \pm 1$

Aplicando las condiciones de continuidad en $r = a$, para los estados triplete con $l = j - 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} X_{11}^j & X_{12}^j \\ X_{21}^j & X_{22}^j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{1j\lambda_1}^j(k_0a) \\ A_{2j\lambda_2}^j(k_0a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2^{j-1}(ka) + S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(ka) \\ S_{j-1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

y

$$k_0 \begin{pmatrix} X_{11}^j & X_{12}^j \\ X_{21}^j & X_{22}^j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{1j\lambda_1}'(k_0a) \\ A_{2j\lambda_2}'(k_0a) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} h_2^{j-1}(ka) + S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(ka) \\ S_{j-1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Entonces, mediante un procedimiento análogo al que empleamos en el caso escalar (pero ahora con matrices en lugar de números), obtenemos que

$$kR^j(k_0) \begin{bmatrix} h_2^{j-1}(ka) + S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(ka) \\ S_{j-1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2^{j-1}(ka) + S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(ka) \\ S_{j-1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

donde hemos definido

$$R^j(k_0) = D^j(k_0)[k_0D^j(k_0)]^{-1}, \quad (4.30)$$

y

$$D^j(k_0) = \begin{pmatrix} X_{11}^j j_{\lambda_1}(k_0a) & X_{12}^j j_{\lambda_2}(k_0a) \\ X_{21}^j j_{\lambda_1}(k_0a) & X_{22}^j j_{\lambda_2}(k_0a) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Análogamente, para el estado con $l = j + 1$, obtenemos que

$$= k_0 R^j(k_0) \begin{bmatrix} S_{j-1j-1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \\ h_2^{j-1}(ka) + S_{j+1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix} = k_0 R^j(k_0) \begin{bmatrix} S_{j+1j-1}^j(k)h_1^{j-1}(ka) \\ h_2^{j-1}(ka) + S_{j+1j+1}^j(k)h_1^{j+1}(ka) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

Esto se puede reescribir de manera más sencilla empleando la notación matricial, como

$$H_1^j(k_0) + H_2^j(k_0)S^j(k) = kR^j(k_0)[H_1^j(k_0) + H_2^j(k_0)S^j(k)] \quad (4.33)$$

donde

$$\mathbf{H}_i^j = \begin{pmatrix} h_i^{j-1}(k_0 a) & 0 \\ 0 & h_i^{j+1}(k_0 a) \end{pmatrix}, \quad \text{con } i = 1 \text{ y } 2. \quad (4.34)$$

Entonces

$$\mathbf{S}^j = -[\mathbf{H}_2^j + k\mathbf{R}^j(k_0)\mathbf{H}_2^j]^{-1}[\mathbf{H}_1^j + k\mathbf{R}^j\mathbf{H}_1^j]. \quad (4.35)$$

Además, a partir de las ecuaciones (2.52) y (2.53) tenemos que

$$\text{sen } 2\epsilon = \frac{2S_{j-1j+1}^j}{e^{2i\delta_1} - e^{2i\delta_2}} \quad (4.36)$$

y

$$\text{cos } 2\epsilon = \frac{S_{j-1j-1}^j - S_{j+1j+1}^j}{e^{2i\delta_1} - e^{2i\delta_2}}; \quad (4.37)$$

entonces

$$\epsilon(j) = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2S_{j-1j+1}^j}{S_{j-1j-1}^j - S_{j+1j+1}^j}\right). \quad (4.38)$$

Ahora, los eigenvalores $\zeta_j^\eta = e^{2i\delta^\eta}$ con $\eta = 1, 2$ de (2.50), se obtienen de la relación

$$\left\| \begin{array}{cc} S_{j-1j-1}^j - \zeta_1^j & S_{j-1j+1}^j \\ S_{j-1j+1}^j & S_{j+1j+1}^j - \zeta_2^j \end{array} \right\| = 0, \quad (4.39)$$

y están dados por

$$\begin{aligned} \zeta_j^1 &= \frac{1}{2}[(S_{j+1j+1}^j + S_{j-1j-1}^j) - \sqrt{4S_{j-1j+1}^j + (S_{j+1j+1}^j - S_{j-1j-1}^j)^2}] \\ \zeta_j^2 &= \frac{1}{2}[(S_{j+1j+1}^j + S_{j-1j-1}^j) + \sqrt{4S_{j-1j+1}^j + (S_{j+1j+1}^j - S_{j-1j-1}^j)^2}]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Corrimientos de fase para los estados triplete con $l, l' = j \pm 1$

Entonces, los corrimientos de fase para los estados triplete con $l, l' = j \pm 1$ resultan ser

$$\delta_i^j = \frac{1}{2i} \ln(\zeta_j^i), \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (4.41)$$

El estado con $j = 0$ no tiene dos valores para l y l' asociados como todos los demás (para los que $j \neq 0$ y $l, l' = j \pm 1$), sino únicamente $l = l' = 1$. El corrimiento de fase para $j = 0$, $S = 1$, $l' = 1$, es un caso especial que se calcula por separado empleando las condiciones de frontera de manera análoga al caso escalar. En este estado

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} - 2\mu(V_0 + \frac{4c}{r^2}) \theta(a-r) \right] \psi_{l01}^0 = k^2 \psi_{l01}^0. \quad (4.12)$$

Entonces, para $r < a$,

$$\psi_{l01}^0 = A_{01j\lambda}(k_0 a). \quad (4.43)$$

donde

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8(1 + 2\mu c)}}{2}. \quad (4.44)$$

Asimismo, para $r > a$

$$\psi_{101}^0 = B_{01}j_0(ka) + C_{01}n_0(ka), \quad (4.45)$$

donde A_{01} , B_{01} , C_{01} son constantes. Por lo tanto, empleando la continuidad en $r = a$,

$$\delta_2^0 = \text{antan} \frac{k_o j'_\lambda(k_o r) j_0(ka) - k j_\lambda(k_o r) j'_0(ka)}{k_o j'_\lambda(k_o r) n_0(ka) - k j_\lambda(k_o r) n'_0(ka)}. \quad (4.46)$$

4.2.2 Funciones χ para el cálculo de la aproximación eikonal tensorial

Para el potencial (4.4)

$$V_c = -V_o \theta(r - a), \quad V_{3a} = -\frac{c}{r^2} \theta(r - a), \quad V_{1a} = 3\frac{c}{r^2} \theta(r - a), \quad (4.47)$$

pero $r = \sqrt{b^2 + z^2}$, así que $\theta(r - a)$ en términos de z se traduce como $\theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|)$.

Entonces, las funciones χ , definidas en (3.21), (3.31) y (3.63), para este caso son

$$\begin{aligned} \chi_c &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} (-V_o) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz = \frac{1}{v} V_o \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} dz \\ &= \frac{2V_o}{v} \sqrt{a^2 - b^2} \theta(a - b), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \chi_s &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{c}{b^2 + z^2}\right) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz = \frac{1}{v} \theta(a - b) c \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{1}{b^2 + z^2} dz \\ &= \frac{2c}{vb} \text{antan} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \theta(a - b), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \chi_{t0} &= -\frac{b^2}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^2 + z^2} \frac{3c}{b^2 + z^2} \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz \\ &= -\frac{3cb^2}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{1}{(b^2 + z^2)^2} dz \\ &= -\frac{3c}{vb} \left[\text{antan} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right] \theta(a - b), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \chi_{t1} &= -\frac{b}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{b^2 + z^2} \frac{3c}{b^2 + z^2} \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z|) dz \\ &= -\frac{3cb}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{z}{(b^2 + z^2)^2} dz = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{r2} &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{b^2 + z^2} \frac{3c}{b^2 + z^2} \theta(\sqrt{b^2 - a^2} - |z|) dz = -\frac{3c}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{z^2}{b^2 + z^2} dz \\
 &= -\frac{3c}{v} \left[\frac{1}{b} \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right] \theta(a - b) \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \chi_r &= -\frac{b}{v^2} \int \theta(z' - z'') \theta(z'' - z''') \theta(z''' - z) (z''' - z'') (b^2 + z'' z''') \\
 &\quad \frac{(-3c) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z''|) (-3c) \theta(\sqrt{a^2 - b^2} - |z'''|)}{(b^2 + z''^2)^2 (b^2 + z'''^2)^2} dz'' dz''' \Big|_{z' \rightarrow -\infty}^{z' \rightarrow \infty} \\
 &= -b \left(\frac{3c}{v} \right)^2 \theta(a - b) \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_{-\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{z''' (b^2 - z''^2) + z'' (z'''^2 - b^2)}{(b^2 + z''^2)^2 (b^2 + z'''^2)^2} dz'' dz''' \\
 &= -\frac{1}{2} \left(3 \frac{c}{v b a^2} \right)^2 [b(2b^2 - a^2) \sqrt{a^2 - b^2} - a^4 \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)] \theta(a - b) \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

4.3 Potencial central de barrera centrífuga

Veamos un segundo ejemplo considerando al potencial (1.88) también como la parte central del potencial (4.3)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} (c' + c S_{12}) \theta(a - r). \quad (4.54)$$

donde c' y c son constantes positivas. El desarrollo es análogo al del potencial anterior (4.4). Las diferencias se hallan, como en el caso escalar, al reescribir la forma de las funciones de Bessel, así que únicamente reproduciremos los resultados.

4.3.1 Corrimientos de fase

Para el estado singulete, de acuerdo con (1.94),

$$\delta_0^j = \operatorname{atan} \left[\frac{j_\lambda'(ka) j_j(ka) - j_j'(ka) j_\lambda(ka)}{j_\lambda'(ka) n_j(ka) - n_j'(ka) j_\lambda(ka)} \right]. \quad (4.55)$$

donde $\lambda = \sqrt{(j - \frac{1}{2})^2 + 2\mu c'}$.

Análogamente, para el estado triplete con $l = l' = j$,

$$\delta_3^j = \operatorname{atan} \left[\frac{j_\Lambda'(ka) j_j(ka) - j_\Lambda(ka) j_j'(ka)}{j_\Lambda'(ka) n_j(ka) - j_\Lambda(ka) n_j'(ka)} \right]. \quad (4.56)$$

donde ahora $\Lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + 2\mu(c' + 2c)}$.

Para los estados triplete con $l = j \pm 1, l' = j \pm 1$, cuando $r < a$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} a_j' & b_j \\ b_j & c_j' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_{j-1, l 1}^j \\ \psi_{j+1, l 1}^j \end{pmatrix} = -k^2 \begin{pmatrix} \psi_{j-1, l 1}^j \\ \psi_{j+1, l 1}^j \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

donde $a'_j = a_j + 2\mu c'$, y $c'_j = c_j + 2\mu c'$, con a_j , b_j y c_j dadas en (4.10). Entonces

$$\begin{aligned} v_1^j &= \frac{1}{2} [a'_j + c'_j + \sqrt{(a'_j + c'_j)^2 - 4(a'_j c'_j - b_j^2)}], \\ v_2^j &= \frac{1}{2} [a'_j + c'_j - \sqrt{(a'_j + c'_j)^2 - 4(a'_j c'_j - b_j^2)}] \end{aligned} \quad (4.58)$$

y

$$X_{11}^j = \frac{b_j}{\sqrt{(v_1^j - a'_j)^2 + b_j^2}}; \quad (4.59)$$

de allí que

$$X^j \begin{pmatrix} \psi_{j-1j\mp 11}^j \\ \psi_{j+1j\mp 11}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_2^j j \lambda_1^i(kr) \\ A_1^j j \lambda_2^i(kr) \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

donde $\lambda_j^i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \nu_j^i}$ y A_i^j son constantes con $i = 1, 2$. Los cálculos que restan para hallar a la matriz S , son enteramente análogos a los del caso anterior.

El corrimiento de fase para $s = 1$, $l' = 1$, cuando $j = 0$, es

$$\delta_2^0 = \text{atan} \frac{j'_\lambda(kr) j_0(ka) - j_\lambda(kr) j'_0(ka)}{j'_\lambda(kr) n_0(ka) - j_\lambda(kr) n'_0(ka)}. \quad (4.61)$$

donde

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8[1 + 2\mu(c' + c)]}}{2}. \quad (4.62)$$

4.3.2 Funciones χ para el cálculo de la aproximación eikonal tensorial

Para el potencial (4.54) sólo cambia $V_r = \frac{c'}{r^2} \theta(r - a)$ con respecto al caso anterior (4.4), de modo que sólo falta calcular

$$\begin{aligned} \chi_c &= -\frac{1}{v} \int_z^{z'} \left(-\frac{c}{\sqrt{b^2 - z'^2}} \right) \theta(\sqrt{b^2 - a^2} - |z''|) dz'' = \frac{c}{v} \theta(a - b) \int_{-\sqrt{b^2 - a^2}}^{\sqrt{b^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{b^2 - z'^2}} dz'' \\ &= \frac{1}{v} \frac{c}{b} 2 \text{atan} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \theta(a - b). \end{aligned} \quad (4.63)$$

4.4 Resultados

En esta última sección presentamos gráficas de las secciones eficaces exactas e eikonales que obtuvimos a partir de los cambios de fase e integrales calculados en las secciones precedentes.

Análiticamente, cuando la componente tensorial de (2.3) es nula, de acuerdo con (2.95)-(2.99), tenemos que

$$A_l^{l+1} = A_l^l = A_l^{l-1} \quad \text{y} \quad B_l^{l+1} = B_l^l = B_l^{l-1}. \quad (4.64)$$

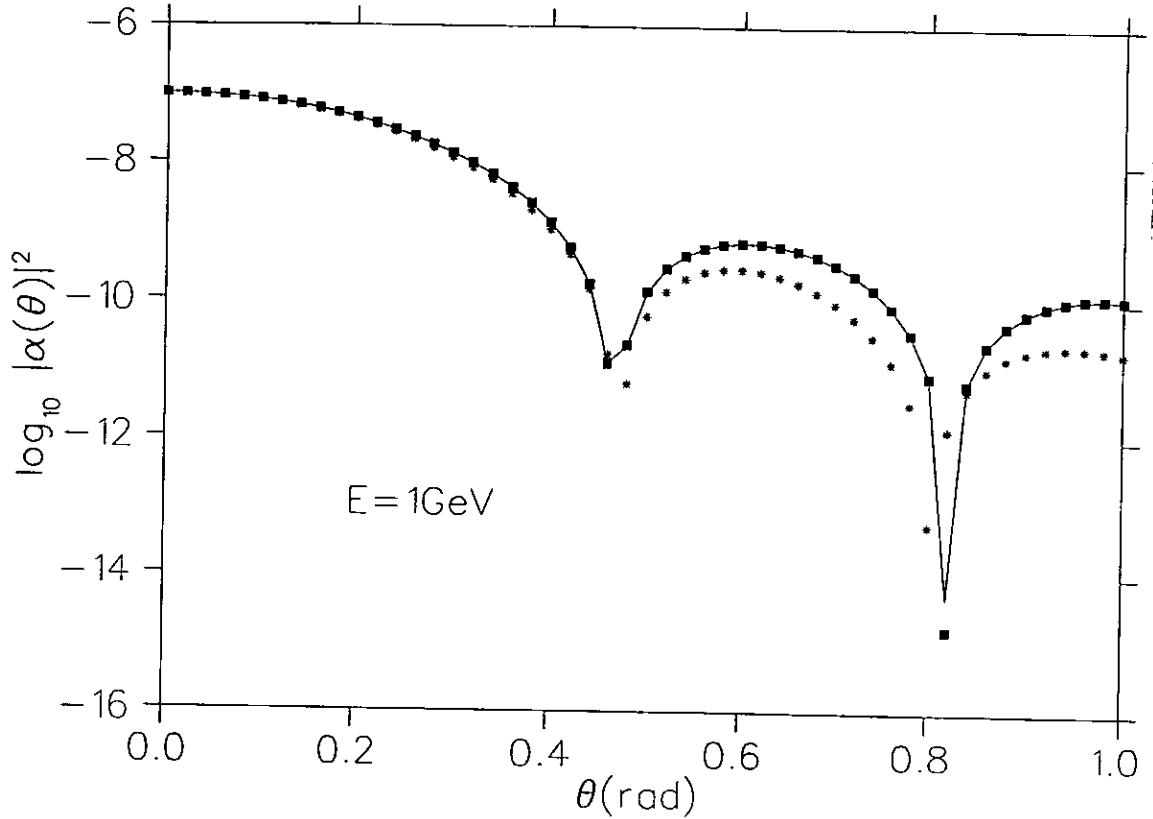


Figura 4.1: Sección eficaz diferencial de dispersión α (en MeV^{-2}), calculada de manera exacta (línea continua) y mediante la aproximación eikonal tensorial (línea de asteriscos), como función del ángulo de dispersión (en rad). Este cálculo se realizó para una partícula de masa reducida $\mu = 469 MeV$ y energía de incidencia de $E = 1 GeV$ dispersada por un potencial tensorial del tipo (4.4) cuya componente central es un pozo con $V_0 = 1 MeV$ y $a = 0.01 MeV^{-1}$ ($\approx 2 fm$), y cuya componente tensorial es una barrera centrífuga con $c = 10^{-5} MeV^{-1}$. La línea de cuadros corresponde a las secciones escalares exacta y eikonal (ver figura 1.2).

Esto da lugar, según (2.85)-(2.94), a que las amplitudes de dispersión β , γ , δ , ϵ , también sean nulas y a que la amplitud α sea equivalente a la amplitud escalar. Entonces, como forma de corroborar numéricamente que la teoría del caso tensorial se reduce correctamente a la del caso escalar ya calculado (cuando $V_{te} = 0$) tomamos a la componente central $V_c(r)$ del potencial (4.3) primero como un pozo cuadrado (4.4) y luego como una barrera centrífuga (4.54). Numéricamente, empleando los parámetros que usamos para los potenciales (1.71) y (1.88) recuperamos la información antes obtenida para el caso escalar. Algunos resultados del cálculo de la sección eficaz tomando $V_{te} = 0$ en (4.4) se muestran en la figura (4.1). En esta figura podemos ver que empleando los programas que calculan las amplitudes eikoniales tensoriales exacta y aproximada, los resultados para la sección eficaz obtenidos a partir de la amplitud α con $V_{te}(r) = 0$ son muy similares a los que obtuvimos a partir de las amplitudes escalares exacta y aproximada (ver figura 1.2). Además, las magnitudes de las amplitudes β , γ , δ y ϵ resultaron despreciables en comparación con la magnitud de α .

En la figura (4.2) se muestra la comparación de los resultados preliminares tomando $V_{te} \neq 0$. Empleamos el potencial (4.3) con un potencial central de pozo cuadrado con $V_o = 1 \text{ MeV}$ y con un potencial tensorial de barrera centrífuga con $c = 10^{-5} \text{ MeV}^{-1}$. Las gráficas de esta figura no muestran tanta similitud como esperamos.

Entonces, analizando los programas que realizan el cálculo tensorial, numérica y analíticamente hallamos que el programa que hace el cálculo exacto intercambia algunos de los valores de los corrimientos de fase δ_1^j y δ_2^j . Cuando $V_{te}(r) = 0$, a partir de (4.64), analíticamente se obtiene que

$$\delta_0^j = \delta_1^{j-1} = \delta_2^{j+1} = \delta_3^j. \quad (4.65)$$

Los resultados numéricos del programa coinciden para algunas j y están al revés para otras. Esto puede deberse a que para calcular estos corrimientos de fase usamos funciones complejas multivaluadas, como el logaritmo (4.41) y la raíz cuadrada (4.13) y (4.40). Por lo tanto, es necesario establecer un criterio para asignar correctamente los diferentes valores de δ_1^j y δ_2^j , en este programa.

Resumiendo, aún nos resta mejorar los cálculos numéricos y optimizar los programas.

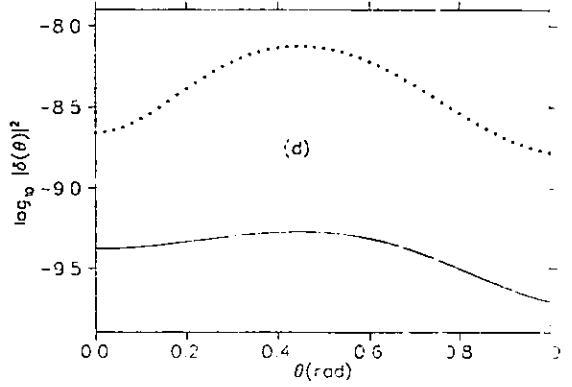
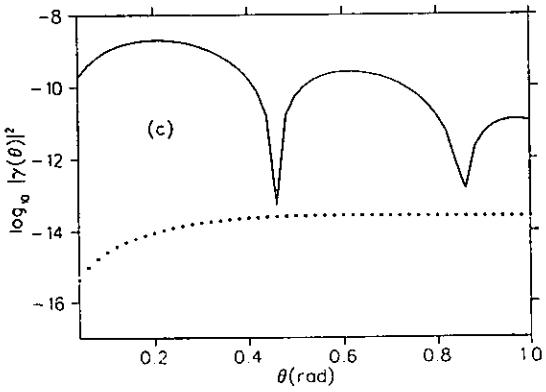
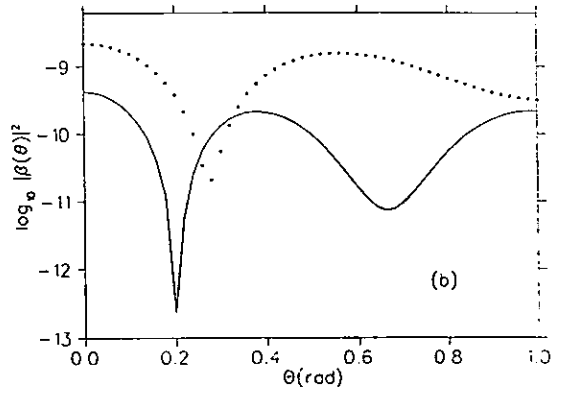
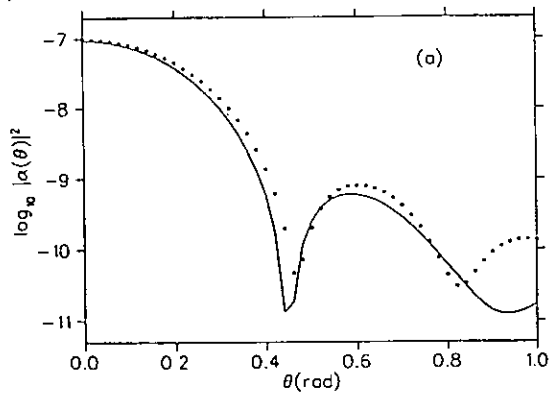


Figura 4.2

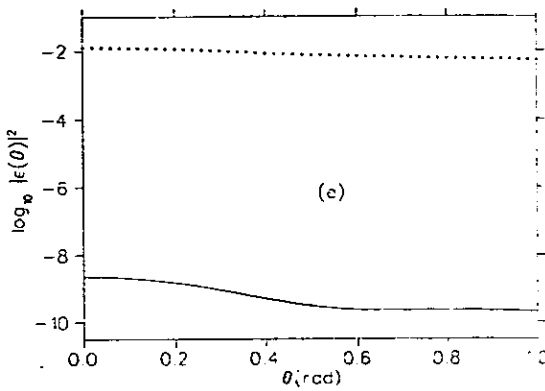


Figura 4.2: Diferentes secciones eficaces diferenciales de dispersión (en MeV^{-2}), calculadas de manera exacta (línea continua) y mediante la aproximación eikonal (línea punteada), como función del ángulo de dispersión (en rad). Este cálculo se realizó para una partícula de masa reducida $\mu = 469 MeV$, dispersada por un potencial tensorial del tipo (4.4) cuya componente central es un pozo cuadrado con $V_0 = 1 MeV$ y cuya componente tensorial es una barrera centrífuga con $c = 10^{-5} MeV^{-1}$. Empleamos una energía de incidencia de $E = 1 GeV$. En la gráfica (a) se muestran las secciones correspondientes a α , en (b) a β , en (g) a γ , en (d) a δ y en (e) a ϵ .

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado los pasos para investigar el rango de validez de una fórmula eikonal para fuerzas tensoriales. Hallamos analíticamente las funciones necesarias para el cálculo numérico de las secciones eficaces de dispersión correspondientes a la solución analítica de la ecuación de Schrödinger de manera exacta y empleando una aproximación eikonal para un potencial que contiene una componente tensorial, mostrando algunos resultados del valor numérico de estas secciones.

Hemos hecho una revisión de la teoría de dispersión para el caso escalar y hemos comparado numéricamente la sección eficaz diferencial escalar exacta con la eikonal, para los potenciales pozo cuadrado y barrera centrífuga.

Como primer cálculo corroboramos la concordancia entre los valores numéricos de las secciones eficaces escalares de dispersión exacta y eikonal. por ejemplo: con $E = 7\text{GeV}$, θ entre 0 y 0.1 rad, obtuvimos una diferencia entre ambas secciones. menor al 0.17% . con $E = 5\text{GeV}$, θ entre 0 y 0.1 rad, obtuvimos una diferencia menor al 0.2% . con $E = 700\text{MeV}$, θ entre 0 y 0.1 rad, obtuvimos una diferencia menor al 0.6% . con $E = 600\text{MeV}$, θ entre 0 y 0.1 rad, obtuvimos una diferencia menor al 0.7% . etc.

Para obtener las secciones eficaces exactas e eikonales de dispersión tensoriales, hallamos las amplitudes de dispersión de manera exacta a partir del desarrollo en ondas parciales de la solución a la ecuación de Schrödinger para el potencial más general rotacionalmente invariante y local en un sistema de dos partículas de espín 1/2. obtuvimos la aproximación eikonal tensorial en un sistema de dos partículas de espín 1/2 a partir de la expansión de Born del propagador eikonal y hallamos una fórmula explícita para cada una de las amplitudes de dispersión.

Asimismo, determinamos los corrimientos de fase y las funciones necesarias para el cálculo de la aproximación eikonal tensorial, para dos potenciales cuyas componentes tensoriales poseen un coeficiente centrífugo, sus componentes de espín son nulas, uno de los cuales posee un pozo cuadrado como componente central y el otro una barrera centrífuga. Sin embargo, aún nos resta optimizar los programas para el cálculo de la parte tensorial (ya que el programa intercambia los corrimientos de fase de diferentes estados).

Es importante notar que mediante la fórmula eikonal podemos representar la amplitud

de dispersión exacta correspondiente a un potencial centrífugo, por lo menos en el caso escalar. Este hecho no es del todo evidente ya que el potencial $\frac{1}{r^2}$ no siempre cumple con las condiciones necesarias para aplicar la aproximación eikonal.

No es posible emplear cualquier valor para la constante c de los potenciales centrífugos, ya que para valores de $c < 0$ el potencial es más fuerte que $\frac{1}{r}$ en el origen y el valor promedio del potencial no posee un límite inferior de energía. En cambio para valores de $c > 0$ no existen estos problemas. Además si c es demasiado grande en magnitud, para $c < 0$ es posible obtener dos funciones de onda que diverjan en el origen, que la función de onda no sea finita en el origen y/o que no sea de cuadrado integrable. En cambio para $c > 0$ la función de onda siempre será cuadrado integrable[8].

En el caso del potencial tensorial centrífugo resulta que para toda c , por pequeña que esta sea, siempre existe un valor de j con el cual alguna de las componentes de la ecuación desacoplada con $l = j \pm 1$, ver (4.13) y (4.19), posee un coeficiente menor que cero, lo cual da lugar a que la función de onda sea multivaluada y el comportamiento del potencial sea atractivo para alguna de las componentes de $s = 1$. Es posible corregir este hecho considerando un potencial central con una c' tal que $(c' + c) > 0$, como hicimos en (4.54).

Por último, mostramos algunos de los resultados obtenidos y discutimos al respecto.

Apéndice A

Cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión para un potencial escalar

En este apéndice reproducimos los archivos fuente de los programas en Fortran mediante los cuales calculamos la secciones eficaces diferenciales de dispersión escalar, mencionados en el capítulo 1.

Con el primer programa se calcula la sección eficaz diferencial para un potencial de pozo cuadrado, en función de la energía para distintos ángulos de dispersión, y con el segundo para una barrera centrífuga.

Para el cálculo de la sección eikonal empleamos 3 métodos de integración numérica distintos.

```
* CALCULA LA SECCION ESCALAR DIFERENCIAL APROXIMADA PARA UN POZO CUADRADO
PROGRAM POCU
c...DECLARACION DE TIPO
  IMPLICIT NONE
  INTEGER NO,N1,N2,N3,N4,N5,M1,L,L1,L2,I,II,NOU,IRULE,NPTS
  REAL E,X,C0,X0,XNU,BS(112),A,CO1,THETA,T,P,
  & BSY(112),BS1(112),j(0:112),
  & n(0:112),dj(0:111),dn(0:111),jlam(0:112),djlam(0:111),
  & DELTA(0:111),Fcu1,M,F11,F22,A1,B1,ERRABS,ERREST1,ERREST2,
  & ERRREL,EXACT1,RESULT1,ERRRES,EXACT2,RESULT2,C1,
  & K,Facu,V0,K0,POINTS(1),RESULT3,RESULT4,RESULT5,RESULT6,
  & Fcuad1,Fcuad2,Fcuad3,AM,A2
  COMPLEX A1,C01,SUMA,Fexa,Fapr,Faprox2,
  & Faprox3
  EXTERNAL BSJS,BSYS,UMACH,F11,F22,QDAGS,QDAG,QDAGP
  INTRINSIC ABS,SQRT
  COMMON V0,THETA,K,C1,A2,M
c...DECLARACION DE VARIABLES
```



```

c ENERGIA (MeV)
  WRITE(*,*) ' DAME E'
  READ(*,*)E
c ALCANCE DEL POTENCIAL (MeV^-1)
  A=0.01
c MASA (MeV)
  M=469.0
c MAGNITUD DEL POTENCIAL (MeV)
  Vo=1.0
c VECTORES DE PROPAGACION (MeV)
  K=SQRT(E*M*2.0)
  Ko=SQRT(M*2.0*(E+Vo))
c ARGUMENTOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL
  X=K*A
  Xo=Ko*A
  IF(Xo.GT.100.0)THEN
    WRITE(*,*) ' LA ENERGIA ES MUY GRANDE'
    STOP
  ENDIF
c CONSTANTES COMUNES
  A2=A*A
  L=IPIX(X)+10
  NO=50
  C0=SQRT(1.57079632675/X)
  CO1=SQRT(1.57079632675/Xo)
  A1=(0.0,1.0)
  CC1=0.5/(A1*K)
  N3=L+1
  N4=L+2
  N5=L-1
c CONSTANTES PARA LAS SUBRUTINAS
  XNU=0.5
  A1=0.0
  B1=A
  ERRABS=0.0001
  ERRREL=0.01
  ERRREL=0.0
  IRULE=1
  NPTS=1
  POINTS(1)=0.0
c...CREA ARCHIVO DE DATOS
  OPEN(UNIT=77,FILE='p.dat',STATUS='UNKNOWN')

c...CALCULA EL CAMBIO DE FASE
c LLAMA SUBRUTINAS QUE CALCULAN LAS FUNCIONES CILINDRICAS DE BESSEL
  CALL BSJS(XNU,X,N4,BS)
  CALL BSYS(XNU,X,N4,BSY)
  CALL BSJS(XNU,Xo,N4,BS1)
  CALL UMACH(2,NOUT)
c FUNCIONES ESFERICAS DE BESSEL
  DO 4 I=0,N3
    j(I)=C0*BS(I+1)
    n(I)=C0*BSY(I+1)
    jlam(I)=CO1*BS1(I+1)
  4 CONTINUE
c DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL (USANDO FORMULAS DE RECURRENCIA)
  dj(0)=-j(1)-(0.5*j(0)/X)
  dn(0)=-n(1)-(0.5*n(0)/X)
  djlam(0)=-jlam(1)-(0.5*jlam(0)/Xo)
  dj(L)=0.5*((j(N5)-j(N3))-(j(L)/X))
  dn(L)=0.5*((n(N5)-n(N3))-(n(L)/X))
  djlam(L)=0.5*((jlam(N5)-jlam(N3))-(jlam(L)/Xo))

```

```

DO 5 I=1,N5
  L1=I-1
  L2=I+1
  dj(I)=0.5*(j(L1)-j(L2))-(j(I)/X)
  dn(I)=0.5*(n(L1)-n(L2))-(n(I)/X)
  djam(I)=0.5*(jlam(L1)-jlam(L2))-(jlam(I)/Xo)
5  CONTINUE

c CAMBIO DE FASE
DO 6 I=0,L
  DELTA(I)=ATAN(((K*jlam(I)*dj(I))-(Ko*j(I)*djam(I)))
& /((K*jlam(I)*dn(I))-(Ko*n(I)*djam(I))))
6  CONTINUE

c...CALCULO DE LA SECCION EFICAZ
DO 7 I=0,NO
  THETA=0.0+(0.02)*FLOAT(I)
  T=COS(THETA)
  SUMA=(0.0,0.0)
  DO 8 H=0,L
    SUMA=SUMA+(FLOAT(2*I+1)*(CEXP(2.0*A1*DELTA(I))
& -1.0)*P(I,T))
8  CONTINUE
c AMPLITUD DE DISPERSION EXACTA
  Fexa=CC1*(SUMA)
c SECCION EFICAZ EXACTA
  Fcua=Fexa*CONJG(Fexa)

c LLAMA SUBRUTINAS QUE CALCULAN LAS INTEGRALES EMPLEANDO
c TRES DISTINTOS METODOS DE INTEGRACION NUMERICA
  C1=(2.0)*K*SIN(THETA/2.0)
  EXACT1=REAL(Fexa)
  CALL QDAGS(F11,A1,B1,ERRABS,ERRREL,RESULT1,ERREST1)
  CALL QDAG(F11,A1,B1,ERRABS,ERRREL,IRULE,RESULT3,ERREST1)
  CALL QDAGP(F11,A1,B1,NPTS,POINTS,ERRABS,ERRREL,RESULT5
& ,ERREST1)
  EXACT2=AIMAG(Fexa)
  CALL QDAGS(F22,A1,B1,ERRABS,ERRREL,RESULT2,ERREST2)
  CALL QDAG(F22,A1,B1,ERRABS,ERRREL,IRULE,RESULT4,ERREST2)
  CALL QDAGP(F22,A1,B1,NPTS,POINTS,ERRABS,ERRREL,RESULT6
& ,ERREST2)

c AMPLITUD DE DISPERSION APROXIMADA
  Fapr=(K/A1)*(RESULT1+A1*RESULT2)
c SECCION EFICAZ APROXIMADA
  Facu=Fapr*CONJG(Fapr)
c AMPLITUD Y SECCION CON LOS OTROS METODOS DE INTEGRACION
  Faprox2=-A1*K*(RESULT3+A1*RESULT4)
  Fcuad2=Faprox2*CONJG(Faprox2)
  Faprox3=-A1*K*(RESULT5+A1*RESULT6)
  Fcuad3=Faprox3*CONJG(Faprox3)

c REGISTRO DE LOS RESULTADOS
  WRITE(77,(' (4.2,4(2X,E14.8)'))THETA,Fcua,Facu
& ,Fcuad2,Fcuad3)
7  CONTINUE
c CIERRA ARCHIVO DE DATOS
  CLOSE(77)
  END

```

c...SUBROUTINA QUE CALCULA LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE (USANDO FORMULAS DE

```

c RECORRENCIA)
  REAL FUNCTION P(L,T)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER I,L
  REAL P0,P1,T,PL
  P0=1.0
  IF(L.eq.0)THEN
    P=P0
  ELSE
    P1=T*P0
    IF(L.eq.1)THEN
      P=P1
    ELSE
      DO 9 I=2,L
        PL=((T*FLOAT(2*I-1)*P1)-(FLOAT(I-1)*P0))/FLOAT(I)
        P0=P1
        P1=PL
9      CONTINUE
      P=PL
    ENDIF
  ENDIF
  ENDIF
  RETURN
  END

```

c...FUNCIONES PARA LAS SUBROUTINAS DE INTEGRACION

c LA PARTE REAL DE LA FUNCION A INTEGRAR

```

  REAL FUNCTION F11(X)
  IMPLICIT NONE
  COMMON Vo,THETA,K,C1,A2,M
  INTEGER NOUT
  REAL COS,SQRT,ATAN,SIN,ALFA,E,K,X,THETA,C1,X1
  & BSJ0,VALUE,A2,M,V0
  INTRINSIC SQRT,ABS
  EXTERNAL BSJ0,UMACH
  X1=X*C1
  VALUE=BSJ0(X1)
  CALL UMACH(2,NOUT)

  F11=(VALUE)*(COS(-(V0*M*2.0/K)*
  & (SQRT((A2)-(X*X))))-1)*X
  RETURN
  END

```

c LA PARTE IMAGINARIA DE LA FUNCION A INTEGRAR

```

  REAL FUNCTION F22(X)
  IMPLICIT NONE
  COMMON Vo,THETA,K,C1,A2,M
  INTEGER NOUT
  REAL COS,SQRT,ATAN,SIN,ALFA,E,K,X,THETA,C1,X1
  & ,BSJ0,VALUE,A2,M,V0
  INTRINSIC SQRT,ABS
  EXTERNAL BSJ0,UMACH
  X1=X*C1
  VALUE=BSJ0(X1)
  CALL UMACH(2,NOUT)
  F22=(VALUE)*(SIN(-(2.0*Vo*M/K)*
  & (SQRT((A2)-(X*X)))))*X
  RETURN
  END

```

c CALCULA LA SECCION EFICAZ DIFERENCIAL DE DISPERSION ESCALAR EXACTA Y
 c APROXIMADA PARA UN POZO CENTRIFUGO

PROGRAM POCE

c...DECLARACION DE TIPO

```

IMPLICIT NONE
INTEGER NO,N1,N2,N3,N4,N5,M1,L,L1,L2,I,II,NOUT,IRULE,NPTS,
& MAXSUB,NEVAL,NSUBIN,NEVAL4,NEVAL5,NEVAL6,NEVAL2,NEVAL3,
& NSUBIN2,NSUBIN3,NSUBIN4,NSUBIN5,NSUBIN6
PARAMETER(MAXSUB=1000)
COMMON C,E,THETA,K,C1,A,M
REAL C0,E,X,C,X1,X2,X3,XNU,XNU1,BS(111),A,
& BSY(112),BS1(112),j(0:112),n(0:112),M,
& dj(0:111),dn(0:111),jlam(0:111),djlam(0:111),DELTA(0:111),
& THETA,T,P,Fca,F11,F22,A1,B1,ERRABS,ERREST1,
& ERRREL,EXACT1,RESULT1,ERREST2,EXACT2,RESULT2,C1,
& RESULT4,RESULT5,RESULT6,Fce,C3,
& K,RESULT3,ALIST(MAXSUB),BLIST(MAXSUB),RLIST(MAXSUB)
& ,ELIST(MAXSUB),IORD(MAXSUB),LEVEL(MAXSUB),
& ERREST3,ERREST4,ERREST5,ERREST6,
& ALIST2(MAXSUB),BLIST2(MAXSUB),RLIST2(MAXSUB),ELIST2(MAXSUB),
& IORD2(MAXSUB),ALIST3(MAXSUB),BLIST3(MAXSUB),RLIST3(MAXSUB)
& ,ELIST3(MAXSUB),IORD3(MAXSUB)
COMPLEX SUMA,Fexa,Fapr,C2
EXTERNAL BS,BSYS,UMACH,F11,F22,Q2AGS,Q2AG,Q2AGP
INTRINSIC ABS,SQRT
  
```

c...DECLARACION DE VARIABLES

```

c ENERGIA (MeV)
WRITE(*,*)' DAME E'
READ(*,*)E
c ALCANCE DEL POTENCIAL (MeV-1)
A=0.01
c MASA (MeV)
M=469.0
c VECTOR DE PROPAGACION (MeV)
K=SQRT(E*M*2.0)
c ARGUMENTO DE LAS FUNCIONES DE BESSEL
X=K*A
IF(X.GT.100.0)THEN
WRITE(*,*)' LA ENERGIA ES MUY GRANDE'
STOP
ENDIF
c CONSTANTE DEL POTENCIAL (MeV)
C=1E-5
c CONSTANTES COMUNES
L=X+10
NO=100
C0=SQRT(1.57079632675/X)
C2=K/CMPLX(0.0,1.0)
C3=0.5/X
N3=L+1
N4=L+2
N5=L-1
c CONSTANTES PARA LAS SUBROUTINAS
XNU=0.5
A1=0.0
B1=A
ERRABS=.0.00000001
ERRREL=.0.01
  
```

```

c...CREA ARCHIVO DE DATOS
  OPEN(UNIT=77,FILE='t.dat',STATUS='UNKNOWN')

c...CALCULA EL CAMBIO DE FASE
c LLAMA SUBROUTINAS QUE CALCULAN LAS FUNCIONES CILINDRICAS DE BESSEL
  CALL BSJS(XNU,X,N4,BS)
  CALL BSYS(XNU,X,N4,BSY)
  CALL UMACH(2,NOUT)
c FUNCIONES ESFERICAS DE BESSEL
  DO 4 I=0,N3
    X3=SQRT((FLOAT(I)+0.5)*(FLOAT(I)+0.5)-2.0*M*C)
    M1=IFIX(X3)
    N2=M1+1
    XNU1=X3-FLOAT(M1)
    CALL BSJS(XNU1,X,N2,BS1)
    j(I)=C0*BS(I+1)
    n(I)=C0*BSY(I+1)
    jlam(I)=C0*BS1(N2)
  4 CONTINUE
c DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL (USANDO FORMULAS DE RECURRENCIA)
  dj(0)=-j(1)-(C3*j(0))
  dn(0)=-n(1)-(C3*n(0))
  djlam(0)=-jlam(1)-(C3*jlam(0))
  dj(L)=0.5*(j(N5)-j(N3))-C3*j(L)
  dn(L)=0.5*(n(N5)-n(N3))-C3*n(L)
  djlam(L)=0.5*(jlam(N5)-jlam(N3))-C3*jlam(L)
  DO 5 I=1,N5
    L1=I-1
    L2=I+1
    dj(I)=0.5*(j(L1)-j(L2))-C3*j(I)
    dn(I)=0.5*(n(L1)-n(L2))-C3*n(I)
    djlam(I)=0.5*(jlam(L1)-jlam(L2))-C3*jlam(I)
  5 CONTINUE
c CAMBIO DE FASE
  DO 6 I=0,L
    DELTA(I)=ATAN((djlam(I)*j(I)-dj(I)*jlam(I))
    & / (djlam(I)*n(I)-dn(I)*jlam(I)))
  6 CONTINUE

c...CALCULO DE LA SECCION EFICAZ
  DO 7 I=0,NO
    THETA=0.0+(0.02)*FLOAT(I)
    T=COS(THETA)
    SUMA=(0.0,0.0)
    DO 8 II=0,L
      SUMA=SUMA+(FLOAT(2*II+1)*(CEXP(2.0*CMPLX(0.0,DELTA(II)))
      & -1.0)*P(II,T))
    8 CONTINUE
c AMPLITUD DE DISPERSION EXACTA
  Fexa=(0.5/(CMPLX(0.0,0.1)*K))*SUMA
c SECCION EFICAZ EXACTA
  Fce=CONJG(Fexa)*Fexa
c LLAMA SUBROUTINA QUE CALCULA LAS INTEGRALES
  C1=2.0*K*SIN(THETA/2.0)
  EXACT1=REAL(Fexa)
  CALL Q2AGS (F11,A1,B1,ERRABS,ERRREL,RESULT1,ERREST1,
  & MAXSUB,NEVAL,NSUBIN, ALIST,BLIST,RLIST,ELIST,IORD)
  EXACT2=AIMAG(Fexa)
  CALL Q2AGS (F22, A1, B1, ERRABS, ERRREL, RESULT2, ERREST2,
  & MAXSUB, NEVAL2, NSUBIN2, ALIST2, BLIST2,RLIST2, ELIST2, IORD2)
c AMPLITUD DE DISPERSION APROXIMADA
  Fapr=C2*CMPLX(RESULT1,RESULT2)

```

```

c SECCION EFICAZ APROXIMADA
  Fca=Fabr*CONJG(Fapr)
c REGISTRO DE LOS RESULTADOS
  WRITE(77,(5(2X,E13.7))' )THETA,Fce,Fca
7   CONTINUE
c CIERRA ARCHIVO DE DATOS
  CLOSE(77)
  END

```

c...SUBROUTINA QUE CALCULA LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE (USANDO FORMULAS DE

```

c RECURRENCIA)
  REAL FUNCTION P(L,T)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER I,L
  REAL P0,P1,T,PL
  P0=1.0
  IF(L.EQ.0)THEN
    P=P0
  ELSE
    P1=T*P0
    IF(L.EQ.1)THEN
      P=P1
    ELSE
      DO 9 I=2,L
        PL=((T*FLOAT(2*I-1)*P1)-(FLOAT(I-1)*P0))/FLOAT(I)
        P0=P1
        P1=PL
      CONTINUE
9     P=PL
    ENDIF
  ENDIF
  RETURN
  END

```

c...FUNCIONES PARA LAS SUBROUTINAS DE INTEGRACION

```

c LA PARTE REAL DE LA FUNCION A INTEGRAR
  REAL FUNCTION F11(X)
  IMPLICIT NONE
  COMMON C,E,THETA,K,C1,A,M
  INTEGER NOUT
  REAL COS,SQRT,ATAN,SIN,C,E,K,X,THETA,C1,X1
  & ,BSJ0,VALUE,A,M
  INTRINSIC SQRT,ABS
  EXTERNAL BSJ0,UMACH
  IF(X.EQ.0.0)THEN
    F11=0.0
  ELSE
    X1=X*C1
    VALUE=BSJ0(X1)
    F11=(VALUE)*(COS(-(C*M*2.0/(K*X)))*
  & (ATAN(SQRT((A*A)-(X*X))/X))-1)*X
  ENDIF
  RETURN
  END

```

c LA PARTE IMAGINARIA DE LA FUNCION A INTEGRAR

```
REAL FUNCTION F22(X)
IMPLICIT NONE
COMMON C,E,THETA,K,C1,A,M
REAL SQRT,ATAN,SIN,C,E,K,X,THETA,C1,X1
& ,BSJ0,VALUE,A,M,NOUT
INTRINSIC SQRT
IF(X.EQ.0.0)THEN
F22=0.0
ELSE
X1=X*C1
VALUE=BSJ0(X1)
F22=(VALUE)*(SIN(-(2.0*C*M)/(K*X))*
& ATAN(SQRT((A*A)-(X*X))/X))*X
ENDIF
RETURN
END
```

Apéndice B

Cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión para un potencial tensorial

En este apéndice reproducimos los archivos fuente de los programas en Fortran mediante los cuales calculamos la secciones eficaces diferenciales de dispersión tensorial, mencionados en el capítulo 4.

Las partes real e imaginaria de cada una de amplitudes eikonaes (3.82) - (3.86), se integran numéricamente y por separado, partiendo de las siguientes expresiones

$$\alpha = \frac{q}{2} \int b \, db \, J_0(2kb \, \text{sen} \frac{\theta}{2}) \{ \cos d \, \text{sen}(\chi_c + \chi_s) + \cos f \, \text{sen}(\chi_c - \chi_s) + \\ + i[2 - \cos d \, \cos(\chi_c + \chi_s) - \cos f \, \cos(\chi_c - \chi_s)] \}, \quad (\text{B.1})$$

$$\beta = \frac{q}{4} \int b \, db \, ([J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] [\frac{\text{sen} d}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \cos(\chi_c + \chi_s) - \frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + \\ 2\chi_s) \cos(\chi_c - \chi_s)] + [J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] [\cos d \, \text{sen}(\chi_c + \chi_s) - \cos f \, \text{sen}(\chi_c - \chi_s)] + \\ i \{ [J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] [\frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + 2\chi_s) \, \text{sen}(\chi_c - \chi_s) + \frac{\text{sen} d}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \, \text{sen}(\chi_c + \chi_s)] \\ + [J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] [\cos f \, \cos(\chi_c + \chi_s) - \cos d \, \cos(\chi_c - \chi_s)] \}, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma = q \int b \, db \, J_1(\Delta b) \, \chi_r \frac{\text{sen} d}{d} \{ \text{sen}(\chi_c + \chi_s) - i \cos(\chi_c + \chi_s) \}, \quad (\text{B.3})$$

$$\delta = \frac{q}{4} \int b \, db \, ([J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] [\frac{\text{sen} d}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \cos(\chi_c + \chi_s) - \frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + \\ 2\chi_s) \cos(\chi_c - \chi_s)] + [J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] [\cos d \, \text{sen}(\chi_c + \chi_s) - \cos f \, \text{sen}(\chi_c - \chi_s)] + \\ i \{ [J_0(\Delta b) - J_2(\Delta b)] [\frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + 2\chi_s) \, \text{sen}(\chi_c - \chi_s) + \frac{\text{sen} d}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \, \text{sen}(\chi_c + \chi_s)] \\ + [J_0(\Delta b) + J_2(\Delta b)] [\cos f \, \cos(\chi_c + \chi_s) - \cos d \, \cos(\chi_c - \chi_s)] \} \quad (\text{B.4})$$

y

$$\epsilon = \frac{q}{2} \int b \, db \, J_0(2kb \sin \frac{\theta}{2}) \left\{ \frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + 2\chi_s) \cos(\chi_c - \chi_s) - \frac{\text{send}}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \cos(\chi_c + \chi_s) + i \left[\frac{\text{sen} f}{f} (\chi_{t0} + \chi_{t2} + 2\chi_s) \text{sen} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) - \frac{\text{send}}{d} (\chi_{t0} - \chi_{t2}) \text{sen} (\chi_c + \chi_s) \right] \right\}. \quad (\text{B.5})$$

C CALCULA LAS AMPLITUDES DE DISPERSION EXACTAMENTE

```

PROGRAM exacta
IMPLICIT NONE
INTEGER N1,N2,N3,N4,N5,L2,I,NOUT,M11,M3,
& M12,N21,N22,M1,J,Niv,L,L1,N6,N33
PARAMETER(Niv=50)
REAL E,X,K,A,XNU2,XNU3,XNU,
& XNU1,M,aa(110),bb(110),v1(113),De1,De2,
& x11(109),x12(109),x21(109),x22(109),De(2,2),
& BS(113),BSY(113),BS1(113),PI,
& aj(0:113),n(0:113),jlam1(0:113),jlam2(0:113),d0(0:111),ep(109),
& dj(0:111),dn(0:111),jlam(0:111),djlam(0:111),
& BS2(113),BS3(113),jlm(0:111),jlm1(0:111),jlm2(0:111),
& IdDe(2,2),TH(Niv+1),T,lam(0:111),lam1(0:111),lam2(0:111),
& djlam1(0:111),djlam2(0:111),R(2,2),
& P,R0(0:111),Vc,Vte,K1,X1,j1(0:113),djl(0:111),
& BS4(113),Gcuex(0:Niv),Ecuex(0:Niv),Bcuex(0:Niv),Acuex(0:Niv),
& Dcuex(0:Niv),
& XN2,XN3,XN1,XNU4,
& jlam3(0:113),djlam3(0:113),
& C99,C98,CO,C3,CO1,CO3,C08,C07,C6,lam3,BS5(113),
& C7,C8,C9,C41,C42,C43,C44,C45,C37,C04,C06,
& C14,C18,C19,C16,C32,C33,C13,C12,C11,C27
COMPLEX dh1(0:111),h1(0:111),dh2(0:111),h2(0:111),
& Di2(2,2),ID1(2,2),d1(0:109),d2(0:109),d3(0:111),
& DELEX,GAMEX,EPSEX,D11,dDe1,ALFEX,BETEX,al(109),
& be(109),C(0:111),B2(111),A1(0:111),B3(0:111),A3(0:111),
& A2(0:111),CATAN,S0(111),S(2,2),Su,Ra,
& C34,C10,C97,C24,C21,C01,C36,C4,C5,
& Tss,T10,T01,T11,T1m1,T00
EXTERNAL BSJS,BSYS,UMACH,P
WRITE(*,*) DAME E'
READ(*,*)E
A=0.01
M=469.0
K=SQRT(E*M*2.0)
Vte=1.0E-5
Vc=1.0
K1=SQRT(M*2.0*(E+Vc))
X=K*A
X1=K1*A
IF(X.GT.100.0)THEN
WRITE(*,*) DEBE SER 0;X1=100'
STOP
ENDIF
J=X+10
PI=2.0*3.141592653589793238
CO=SQRT(1.0/PI*X)
CO1=SQRT(1.0/PI*X1)
C3=0.5/X
CO3=0.5/X1

```

```

N3=J+1
N4=J+2
N5=J-1
N6=J-2
C21=-0.5*CMLPX(0.0,1.0)
C04=M*Vtc
C08=SQRT(2.0)
OPEN(UNIT=77,FILE='m.dat',STATUS='UNKNOWN')
CALL UMACH(2,NOUT)
DO 1 I=0,N3
  C32=FLOAT(I)+1.0-2.0*C04+FLOAT(I)*FLOAT(I)
  C33=SQRT((2.0*FLOAT(I)+1.0)*(2.0*FLOAT(I)+1.0)-12.0*C04
  * +36.0*C04*C04)
  v1(I)=C32+C33
  lam(I)=-0.5+SQRT((FLOAT(I)+0.5)*(FLOAT(I)+0.5)+4.0*C04)
  lam1(I)=-0.5+SQRT(0.25+v1(I))
  lam2(I)=-0.5+SQRT(0.25+(C32-C33))
  M1=IFIX(lam(I)+0.5)
  M11=IFIX(lam1(I)+0.5)
  M12=IFIX(lam2(I)+0.5)
  N2=M1+2
  N21=M11+2
  N22=M12+2
  XNU'1=lam(I)-FLOAT(M1)+0.5
  XNU'2=lam1(I)-FLOAT(M11)+0.5
  XNU'3=lam2(I)-FLOAT(M12)+0.5
  CALL BSJS(XNU'1,X1,N2,BS1)
  CALL BSJS(XNU'2,X1,N21,BS2)
  CALL BSJS(XNU'3,X1,N22,BS3)
  jlam(I)=C01*BS1(N2-1)
  jlam1(I)=C01*BS2(N21-1)
  jlam2(I)=C01*BS3(N22-1)
  jlm(I)=C01*BS1(N2)
  jlm1(I)=C01*BS2(N21)
  jlm2(I)=C01*BS3(N22)
1  CONTINUE
  XNU=0.5
  CALL BSJS(XNU,X,N4,BS)
  CALL BSJS(XNU,X1,N4,BS4)
  CALL BSY'(XNU,X,N4,BSY)
DO 2 I=1,N1
  L1=I-1
  aj(L1)=C0*BS(I)
  n(L1)=C0*BSY(I)
  j1(L1)=C01*BS1(I)
2  CONTINUE
DO 5 I=0,I
  L2=I+1
  dj(I)=(FLOAT(I)*aj(I)/X)-aj(L2)
  dn(I)=(FLOAT(I)*n(I)/X)-n(L2)
  dj1(I)=(FLOAT(I)*j1(I)/X1)-j1(L2)
  djlam(I)=(lam(I)*jlam(I)/X1)-jlm(I)
  djlam1(I)=(lam1(I)*jlam1(I)/X1)-jlm1(I)
  djlam2(I)=(lam2(I)*jlam2(I)/X1)-jlm2(I)
5  CONTINUE
  lam3=-0.5+SQRT(0.25+2.0*(1.0-2.0*C04))
  M3=IFIX(lam3+0.5)
  N33=M3+2
  XNU'1=lam3-FLOAT(M3)+0.5

```

```

CALL BSJS(XNU4,X1,N33,BS5)
jlam3(N33)=CO1*BS5(N33)
jlam3(N33-1)=CO1*BS5(N33-1)
djlam3(N33-1)=(lam3*jlam3(N33-1)/X1)-jlam3(N33)
d2(0)=ATAN(-(K*jlam3(N33-1)*dj(1))-
& (K1*djlam3(N33-1)*aj(1)))
& /(((K1*djlam3(N33-1)*n(1))-(K*jlam3(N33-1)*dn(1))))
DO 7 I=0,J
  h1(I)=CMPLX(aj(I),n(I))
  h2(I)=CMPLX(aj(I),-n(I))
  dh1(I)=CMPLX(dj(I),dn(I))
  dh2(I)=CMPLX(dj(I),-dn(I))
  d0(I)=ATAN(((K1*dj1(I)*aj(I))-(K*dj(I)*j1(I)))
& /(((K1*dj1(I)*n(1))-(K*j1(I)*dn(1))))))
  d3(I)=ATAN(((K1*djlam(I)*aj(I))-(K*dj(I)*jlam(I)))
& /(((K1*djlam(I)*n(1))-(K*jlam(I)*dn(1))))))
  C(I)=SIN(d0(I))*EXP(d0(I))
  A1(I)=CSIN(d3(I))*CEXP(d3(I))
7 CONTINUE
DO 8 I=1,N5
  L1=I-1
  L2=I+1
  C14=2.0*C04/(2.0*FLOAT(I)+1.0)
  C8=SQRT(FLOAT(I)*(FLOAT(I)+1))
  C9=1/C8
  aa(I)=(FLOAT(I)-1.0)*(FLOAT(I)-C14)
  bb(I)=3.0*C14*C8
  C18=bb(I)*bb(I)
  C19=v1(I)-aa(I)
  C16=SQRT(C18+C19*C19)
  x12(I)=bb(I)/C16
  x11(I)=C19/C16
  IF(bb(I).EQ.0.0)THEN
    x22(I)=1.0
  ELSE
    x22(I)=x11(I)*bb(I)/ABS(bb(I))
  ENDIF
  x21(I)=-ABS(x12(I))
  De(1,1)=x11(I)*jlam2(I)
  De(1,2)=x12(I)*jlam1(I)
  De(2,1)=x21(I)*jlam2(I)
  De(2,2)=x22(I)*jlam1(I)
  dDe1=(x22(I)*djlam1(I))*(x11(I)*djlam2(I))-
& (x12(I)*djlam1(I))*(x21(I)*djlam2(I))
  IdDe(1,1)=(x22(I)*djlam1(I))/dDe1
  IdDe(1,2)=-((x12(I)*djlam1(I))/dDe1)
  IdDe(2,1)=-((x21(I)*djlam2(I))/dDe1)
  IdDe(2,2)=(x11(I)*djlam2(I))/dDe1
  R(1,1)=(De(1,1)*IdDe(1,1)+De(1,2)*IdDe(2,1))/K1
  R(1,2)=(De(1,1)*IdDe(1,2)+De(1,2)*IdDe(2,2))/K1
  R(2,1)=(De(2,1)*IdDe(1,1)+De(2,2)*IdDe(2,1))/K1
  R(2,2)=(De(2,1)*IdDe(1,2)+De(2,2)*IdDe(2,2))/K1
  D11=(h1(L2)-K*R(2,2)*dh1(L2))*(h1(L1)-K*R(1,1)*dh1(L1))-
& (-K*R(1,2)*dh1(L2))*(-K*R(2,1)*dh1(L1))
  ID1(1,1)=(h1(L2)-K*R(2,2)*dh1(L2))/D11
  ID1(1,2)=-((K*R(1,2)*dh1(L2))/D11)
  ID1(2,1)=-((K*R(2,1)*dh1(L1))/D11)
  ID1(2,2)=(h1(L1)-K*R(1,1)*dh1(L1))/D11

```

```

Di2(1,1)=K*R(1,1)*dh2(L1)-h2(L1)
Di2(1,2)=K*R(1,2)*dh2(L2)
Di2(2,1)=K*R(2,1)*dh2(L1)
Di2(2,2)=K*R(2,2)*dh2(L2)-h2(L2)
S(1,1)=ID1(1,1)*Di2(1,1)+ID1(1,2)*Di2(2,1)
S(1,2)=ID1(1,1)*Di2(1,2)+ID1(1,2)*Di2(2,2)
S(2,1)=ID1(2,1)*Di2(1,1)+ID1(2,2)*Di2(2,1)
S(2,2)=ID1(2,1)*Di2(1,2)+ID1(2,2)*Di2(2,2)
Su=S(1,1)+S(2,2)
Ra=CSQRT(4.0*S(2,1)*S(1,2)+(S(1,1)-S(2,2))*(S(1,1)-S(2,2)))
d2(I)=C21*CLOG((Su-Ra)*0.5)
d1(I)=C21*CLOG((Su+Ra)*0.5)
ep(I)=0.5*CATAN((S(1,2)+S(2,1))/(S(1,1)-S(2,2)))
al(I)=SIN(d1(I))*CEXP(d1(I))
be(I)=SIN(d2(I))*CEXP(d2(I))
8  CONTINUE
DO 12 I=0,N6
  L2=1+I
  C6=COS(ep(L2))*COS(ep(L2))
  C7=SIN(ep(L2))*SIN(ep(L2))
  C10=(al(L2)-be(L2))*0.5*C7
  C34=al(L2)*C6+be(L2)*C7
  C42=SQRT(FLOAT(L2)/FLOAT(I+2))
  C43=1/C42
  A2(I)=C34-(C42*C10)
  B2(I)=C34+(C43*C10)
12  CONTINUE
  A3(0)=(0.0,0.0)
  B3(0)=(0.0,0.0)
  A3(1)=SIN(d2(0))*CEXP(d2(0))
  B3(1)=A3(1)
DO 13 I=2,N6
  L1=I-1
  C44=SQRT(FLOAT(I)/FLOAT(L1))
  C45=1/C44
  C06=COS(ep(L1))*COS(ep(L1))
  C07=SIN(ep(L1))*SIN(ep(L1))
  C01=(al(L1)-be(L1))*0.5*C07
  C36=al(L1)*C07+be(L1)*C06
  A3(I)=C36-(C44*C01)
  B3(I)=C36+(C45*C01)
13  CONTINUE
DO 14 L=0,Niv
  TH(L)=0.0+(0.02)*FLOAT(L)
  T=COS(TH(L))
  T11=(0.0,0.0)
  T00=(0.0,0.0)
  T1m1=(0.0,0.0)
  T10=(0.0,0.0)
  T01=(0.0,0.0)
  Tss=(0.0,0.0)
DO 9 I=0,N6
  L1=FLOAT(I-1)
  L2=FLOAT(I+1)
  C13=FLOAT(2*I+1)
  C27=FLOAT(I+2)
  C12=FLOAT(I)*L2
  T11=T11+(C27*A2(I)+C13*A1(I)+L1*A3(I))*P(I,0,T)
  T00=T00+(L2*B2(I)+FLOAT(I)*B3(I))*P(I,0,T)
  Tss=Tss+C13*C(I)*P(I,0,T)

```

```

IF(1.GE.2)THEN
  T1m1=T1m1+((A2(I)/L2)-(C13*A1(I)/C12)+
& (A3(I)/FLOAT(I)))*P(I,2,T)
ELSE
  T1m1=(0.0,0.0)
ENDIF
IF(1.GE.1)THEN
  T10=T10+(B2(I)-B3(I))*P(I,1,T)
  T01=T01+(-(C27/L2)*A2(I)+(C13*A1(I)/C12)+
& (L1*A3(I)/FLOAT(I)))*P(I,1,T)
ELSE
  T10=(0.0,0.0)
  T01=(0.0,0.0)
ENDIF
9  CONTINUE
  T11=0.5*T11/K
  T1m1=0.5*T1m1/K
  T10=T10/(C08*K)
  T01=T01/(C08*K)
  T00=T00/K
  Tss=Tss/K
  C4=T11+T1m1-Tss
  C5=(T11-T1m1-T00)/T
  ALFEX=0.25*(2.0*T11+T00+Tss)
  Acuex(L)=REAL(ALFEX*CONJG(ALFEX))
  BETEX=0.25*(-2.0*T1m1+T00-Tss)
  Bcuex(L)=REAL(BETEX*CONJG(BETEX))
  GAMEX=0.25*(T10-T01)*C08
  Gcuex(L)=REAL(GAMEX*CONJG(GAMEX))
  DELEX=0.25*(C4-C5)
  Dcuex(L)=REAL(DELEX*CONJG(DELEX))
  EPSEX=0.25*(C4+C5)
  Ecuex(L)=REAL(EPSEX*CONJG(EPSEX))
  WRITE(77,'(1X,f4.2,5(2X,E12.6))' )TH(L),Acuex(L)
& ,Bcuex(L),Gcuex(L),Dcuex(L),Ecuex(L)
14 CONTINUE
  CLOSE(77)
  END
  REAL FUNCTION p(l,m,x)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER l,m,i,ll
  REAL x,fact,pll,pmm,prmp1,somx2
  if(m.lt.0.or.m.gt.1.or.abs(x).gt.1.)pause
  * 'bad arguments in plnldr'
  pmm=1.0
  if(m.gt.0) then
    somx2=sqrt((1.0-x)*(1.0+x))
    fact=1.0
    do 11 i=1,m
      pmm=-pmm*fact*somx2
      fact=fact+2.0
11  continue
  endif
  if(1.eq.m) then
    p=pmm
  else
    prmp1=x*(2*m+1)*pmm
    if(1.eq.m+1) then
      p=prmp1
    else

```

```

do 12 ll=m+2,1
  pll=(x*(2*ll-1)*pmmpl-(ll+m-1)*pmm)/(ll-m)
  pmm=pmmpl
  pmmpl=pll
12 continue
  p=pll
endif
endif
return
END

```

C' CALCULA LAS AMPLITUDES DE DISPERSION APROXIMADAMENTE

```

PROGRAM aproximada
IMPLICIT NONE
INTEGER MS,Niv
PARAMETER(MS=1000,Niv=50)
INTEGER NOUT,J,I,NP,
& NV1,NV2,NV3,NV4,NV5,NV6,NV7,NV8,NV9,NV10,
& NS1,NS2,NS3,NS4,NS5,NS6,NS7,NS8,NS9,NS10,
& IO1(MS),IO2(MS),IO3(MS),IO4(MS),IO5(MS),IO6(MS),IO7(MS),IO8(MS),
& IO9(MS),IO10(MS),LV(MS),IR
REAL Vc,A,A2,E,K,M,A1,B1,TH(0:Niv),Vte,
& Aunap(0:Niv),Bcuap(0:Niv),Ecuap(0:Niv),Dcuap(0:Niv),
& EA,ER,Sn,Cn,WK(3),IWK(3),PTS(1),Vta,
& ERS1,ERS2,ERS3,ERS4,ERS5,ERS6,ERS7,ERS8,ERS9,ERS10,
& EX1,EX2,EX3,EX4,EX5,EX6,EX7,EX8,EX9,EX10,
& RS1,RS2,RS3,RS4,RS5,RS6,RS7,RS8,RS9,RS10,
& AL1(MS),AL2(MS),AL3(MS),AL4(MS),AL5(MS),AL6(MS),AL7(MS),AL8(MS),
& AL9(MS),AL10(MS),BL1(MS),BL2(MS),BL3(MS),BL4(MS),BL5(MS),BL6(MS),
& BL7(MS),BL8(MS),BL9(MS),BL10(MS),EL1(MS),EL2(MS),
& EL3(MS),EL4(MS),EL5(MS),EL6(MS),EL7(MS),EL8(MS),EL9(MS),
& EL10(MS),RL1(MS),RL2(MS),RL3(MS),RL4(MS),
& RL5(MS),RL6(MS),RL7(MS),RL8(MS),RL9(MS),RL10(MS)
COMPLEX ALFAP,BETAP,GAM,DELTA,EPSP
EXTERNAL UMACH,Q2AGS,
& F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
COMMON M,A2,Vc,K,Sn,Vta,Vte
CALL UMACH(2,NOUT)
WRITE(*,*) 'DAME E'
READ(*,*)E
A=0.01
A2=A*A
M=169.0
K=SQRT(E*M*2.0)
Vt=1.0
Vte=0.0E-5
Vta=3.0*Vte
OPEN(UNIT=77,FILE='a.dat',STATUS='UNKNOWN')

A1=0.0
B1=A
EA=0.0001
ER=0.01
DO 7 I=0,Niv
  TH(I)=0.0+(0.02)*FLOAT(I)
  Sn=2.0*K*SIN(TH(I)/2.0)
  CALL Q2AGS(F1,A1,B1,EA,ER,RS1,ERS1,
& MS,NV1,NS1,AL1,BL1,RL1,EL1,IO1)

```

```

CALL Q2AGS (F2,A1,B1,EA,ER,RS2,ERS2,
& MS,NV2,NS2,AL2,BL2,RL2,EL2,IO2)
CALL Q2AGS(F3,A1,B1,EA,ER,RS3,ERS3,
& MS,NV3,NS3,AL3,BL3,RL3,EL3,IO3)
CALL Q2AGS(F4,A1,B1,EA,ER,RS4,ERS4,
& MS,NV4,NS4,AL4,BL4,RL4,EL4,IO4)
CALL Q2AGS(F5,A1,B1,EA,ER,RS5,ERS5,
& MS,NV5,NS5,AL5,BL5,RL5,EL5,IO5)
CALL Q2AGS(F6,A1,B1,EA,ER,RS6,ERS6,
& MS,NV6,NS6,AL6,BL6,RL6,EL6,IO6)
CALL Q2AGS(F7,A1,B1,EA,ER,RS7,ERS7,
& MS,NV7,NS7,AL7,BL7,RL7,EL7,IO7)
CALL Q2AGS(F8,A1,B1,EA,ER,RS8,ERS8,
& MS,NV8,NS8,AL8,BL8,RL8,EL8,IO8)
CALL Q2AGS(F9,A1,B1,EA,ER,RS9,ERS9,
& MS,NV9,NS9,AL9,BL9,RL9,EL9,IO9)
CALL Q2AGS(F10,A1,B1,EA,ER,RS10,ERS10,
& MS,NV10,NS10,AL10,BL10,RL10,EL10,IO10)
ALFAP=K*CMLPX(RS1,RS2)
Acuap(I)=ALFAP*CONJG(ALFAP)
BETAP=K*CMLPX(RS3,RS4)
Bcuap(I)=BETAP*CONJG(BETAP)
GAM=K*CMLPX(RS5,RS6)
Gcuap(I)=GAM*CONJG(GAM)
DELAP=K*CMLPX(RS7,RS8)
Dcuap(I)=DELAP*CONJG(DELAP)
EPSAP=K*CMLPX(RS9,RS10)
Ecuap(I)=EPSAP*CONJG(EPSAP)
WRITE(77,'(1X,4.2,5(2X,E12.6))')TH(I),Acuap(I)
& ,Bcuap(I),Gcuap(I),Dcuap(I),Ecuap(I)
7 CONTINUE
CLOSE(77)
END
REAL FUNCTION F1(b)
IMPLICIT NONE
INTEGER NF
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F1=0.0
ELSE
F1=F0(b,1)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F2(b)
IMPLICIT NONE
INTEGER NF
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F2=0.0
ELSE
F2=F0(b,2)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F3(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F3=0.0

```

```

ELSE
F3=F0(b,3)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F4(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F4=0.0
ELSE
F4=F0(b,4)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F5(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F5=0.0
ELSE
F5=F0(b,5)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F6(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F6=0.0
ELSE
F6=F0(b,6)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F7(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F7=0.0
ELSE
F7=F0(b,7)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F8(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F8=0.0
ELSE
F8=F0(b,8)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F9(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F9=0.0

```



```

ELSE
F9=F0(b,9)
ENDIF
RETURN
END
REAL FUNCTION F10(b)
IMPLICIT NONE
REAL F0,b
IF(b.EQ.0.0)THEN
F10=0.0
ELSE
F10=F0(b,10)
ENDIF
RETURN
END

REAL FUNCTION F0(b,NF)
IMPLICIT NONE
INTEGER NOUT,NF
REAL Vc,A,E,K,M,XS0,XS2,Xc,scs,scms,ccs,ccms,cd,
& A2,b,d,f,X,Xr,p8,b2,atb,inv,Vta,C1,C4,C5,mb,bj,p5,
& XNU,at,BS(1),sb,rb,Sn,Rz,vev,sc,rc,Xs,sd,sf,cf,Vte
EXTERNAL BSJNS,UMACH
COMMON M,A2,Vc,K,Sn,Vta,Vte
CALL UMACH(2,NOUT)
b2=b*b
Rz=SQRT(A2-b2)
inv=M/K
vev=inv*Vta
at=ATAN(Rz/b)
atb=at/b
C1=Rz/A2
Xc=-2.0*inv*Vc*Rz
Xs=-2.0*inv*Vte*atb
Xs0=-vev*(atb+C1)
Xs2=-vev*(atb-C1)
Xr=-vev*vev*(b*(-A2+2.0*b2)*Rz-A2*A2*at)/((A2*A2*b2*2.0)
d=SQRT(4.0*Xr*Xr+(Xs0-Xs2)*(Xs0-Xs2))
f=SQRT(((Xs0+Xs2)*((Xs0+Xs2)+4.0*Xs)+4.0*Xs*Xs)
scs=SIN(Xc+Xs)
scms=SIN(Xc-Xs)
ccs=COS(Xc+Xs)
ccms=COS(Xc-Xs)
cd=COS(d)
cf=COS(f)
IF((d.EQ.0.0).OR.(f.EQ.0.0))THEN
C4=0.0
C5=0.0
ELSE
C4=SIN(d)*(Xs0-Xs2)/d
C5=SIN(f)*(Xs0+Xs2+2.0*Xs)/f
ENDIF
X=b*Sn
CALL BSJNS(X,3,B5)
sb=BS(1)+BS(3)
rb=BS(1)-BS(3)
mb=0.5*BS(1)
bj=mb*b
IF(d.EQ.0.0)THEN
p5=0.0
ELSE
p5=b*BS(2)*Xr*SIN(d)/d
ENDIF

```

```

IF(NF.EQ.1)THEN
F0=bj*(cd*scs+cf*scms)
ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
F0=bj*(2.0-cd*ccs-cf*ccms)
ENDIF
IF(NF.EQ.3)THEN
F0=0.25*b*(sb*(-C5*ccms+C4*ccs)+rb*(cd*scs-cf*scms))
ENDIF
IF(NF.EQ.4)THEN
F0=0.25*b*(sb*(C5*scms+C4*scs)+rb*(-cd*ccs+cf*ccms))
ENDIF
IF(NF.EQ.5)THEN
F0=p5*scs
ENDIF
IF(NF.EQ.6)THEN
F0=-p5*ccs
ENDIF
IF(NF.EQ.7)THEN
F0=0.25*b*(rb*(-C5*ccms+C4*ccs)+sb*(cd*scs-cf*scms))
ENDIF
IF(NF.EQ.8)THEN
F0=0.25*b*(rb*(C5*scms+C4*scs)+rb*(-cd*ccs+cf*ccms))
ENDIF
IF(NF.EQ.9)THEN
F0=mb*(C5*ccms-C4*ccs)
ENDIF
IF(NF.EQ.10)THEN
F0=mb*(C5*scms-C4*scs)
ENDIF
RETURN
END

```

Bibliografía

- [1] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (Oxford, 1970).
- [2] J. Besprosvany, *Phys. Rev. A* **55**, 3539 (1996).
- [3] J. Besprosvany y M. Moshinsky, *Phys. Rev. A* **57**, 4401 (1998).
- [4] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley and Sons (New York, 1974).
- [5] R. J. Glauber, en *Lectures in Theoretical Physics*, W. E. Brittin et al., Interscience (New York, 1959), Vol. 1.
- [6] M. L. Goldberger, *Collision Theory*, John Wiley (New York, 1964).
- [7] A. Messiah, Tomo II, *Mecánica Cuántica*, Editorial Tecnos (Madrid, 1965).
- [8] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Macgraw-Hill (New York, 1966).
- [9] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Ediciones Científicas Universitarias (México, 1985).