UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CARTERAS (RIESGO Y DIVERSIFICACIÓN)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

PRESENTA

JORGE ALBERTO GONZÁLEZ CASTAÑÓN

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. AURORA VÁLDEZ MICHEL

México, D.F.

2000

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "INTRODUCCION A LA TEORIA DE CARTERAS (RIESGO Y DIVERSIFICACION)".

realizado por JORGE ALBERTO GONZALEZ CASTAÑON

con número de cuenta 8822187-0 , pasante de la carrera de ACTUARIA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT.AURORA VALDEZ MICHEL
Propietario	ACT.MARINA CASTILLO GARDUÑO
Propietario	ACT.LETICIA DANIEL ORANA
Suplente	ACT.NOEMI VELAZQUEZ SANCHEZ
Suplente	ACT.LAURA MIRIAM QUEROL GONZALEZ

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Esta tesis esta totalmente dedicada a mis padres: Ma. Magdalena Castañón y José González y a mis hermanos, en agradecimiento de haberme dejado ser libre en todos los aspectos de la vida, así como una muestra del cariño y respeto que les tengo.

Gracias...

Doy gracias a mi directora de tesis Act. Aurora Valdés Michel por su ayuda mostrada para conmigo en la realización de este trabajo, ya que siempre se mostró dispuesta a orientarme y a aconsejarme de la mejor manera posible. Y a todas y cada una de las personas que me ayudaron

Gracias...

A todos los que forman la Facultad de Ciencias.

Gracias...

INTRODUCCIÓN

Dentro de las diversas disciplinas que conforman el campo de la gerencia de empresas, la administración financiera es quizá la que, tanto en cuanto a contenido, como a enfoques e instrumental de análisis, haya evolucionado más profunda y rápidamente en las dos últimas décadas.

Un factor clave en el desarrollo de las cuestiones básicas de la disciplina ha sido la evolución de la llamada Teoría de la Cartera (Portfolio theory). Tan importantes han sido las consecuencias para la teoría financiera que la Academia Sueca, al otorgar los premios Nobel de economía 1990, galardonó a Harry Markowitz y William Sharpe por sus contribuciones en el campo de la selección de inversiones y el comportamiento de los mercados de capitales.

Los temas abordados por estos dos economistas ocupan el lugar central de esta tesis, que es la de exponer los fundamentos de la Teoría de la Cartera que sustentan las decisiones de inversión bajo riesgo.

Primeramente en tema 1.1 se estudia el concepto de medida matemática del riesgo el cual es muy importante para todo inversionista y para el estudio de la Teoría de la Cartera..

En el tema 1.2 se define el otro concepto básico para el desarrollo del tema de esta tesis, este es el de rendimiento esperado o esperanza matemática . En el capítulo 1.3 se da la definición del Criterio de la Media-Varianza aplicándolo a una cartera constituida por dos activos de inversión, desde aquí y a lo largo de toda la tesis se hace un análisis matemático formal de los temas, fórmulas y gráficas expuestos. En el tema 1.4 se definen los conceptos "eficiente" y "dominancia" para discriminar entre inversiones según el Criterio de la Media-Varianza. En el tema 1.5 se generalizan los resultados vistos en los capítulos anteriores a carteras constituidas por tres o más activos de inversión, basando su análisis gráfico en un espacio riesgo- rendimiento esperado.

A partir del capítulo 2 se estudia un tema de suma importancia en la Teoría Carteras, la diversificación. Primeramente en el tema 2.1 se estudia uno de los casos extremos cuando hay una correlación lineal perfecta positiva ($\rho = 1$) llegando a la conclusión de que no es posible construir un portafolio con menor riesgo que el de aquella inversión que lo tiene menor. En el tema 2.2 se estudia el otro caso extremo, es decir, ecuando hay una correlación lineal perfecta negativa ($\rho = -1$) en él cual si es posible el construir un portafolio de inversión con riesgo menor que el de las inversiones que forman la cartera, y aún más, es posible construir un portafolio sin riesgo. En el tema 2.3 se estudia el caso intermedio, en el que las inversiones que forman la cartera son incorrelacionadas, es decir, el coeficiente de correlación lineal es igual a cero ($\rho = 0$), también en este caso se puede construir un portafolio de riesgo menor que el de aquella inversión que tenga el menor riesgo. En el tema 2.4 se estudia el caso general en que el coeficiente de correlación lineal se encuentra entre -1 y 1, es decir ($-1 < \rho < 1$), llegando a la conclusión de que el rendimiento esperado de los portafolios de inversión es independiente de la correlación que existe entre las inversiones que componen el portafolio, resultando en consecuencia que esa correlación influye solamente en el riesgo.

El objetivo del capítulo 4 es explicar las técnicas básicas que permiten construir la frontera eficiente asociada a cualquier conjunto de activos de riesgo, mediante multiplicadores de Lagrange.

La importancia de la administración del riesgo se ha visto incrementada recientemente como resultado de la inestabilidad en la economía mundial, provocando con esto un creciente interés por parte de los agentes económicos por utilizar, crear y perfeccionar mecanismos para lograr una efectiva medición de este riesgo y, de esta forma, estar en posibilidad de contrarrestarlo.

El riesgo es un concepto subjetivo que se define como un cambio adverso en las condiciones esperadas, con la posibilidad de causar una pérdida o un daño mayor.

Dependiendo de la naturaleza del evento referido hay dos ramas del riesgo: riesgo puro y riesgo especulativo.

1.1. -Riesgo Puro: Es cuando existe incertidumbre de pérdida ocasionada por causas fortuitas, accidentales o inesperadas. A su vez se clasifican en tres categorías

a).-Riesgos Fortuitos: Son aquellos ajenos a la voluntad de una persona, no se pueden controlar y por lo tanto invariablemente ocasionan pérdidas, en activos o en el factor humano; algunos ejemplos son incendios, accidentes e invalidez.

b).-Riesgos de Actos Criminales: Estos riesgos son ocasionados por personas que pueden pertenecer o no a la empresa los cuales tienen como consecuencia pérdidas materiales, y pueden incluso provocar la quiebra de la empresa. Algunos ejemplos son asalto, abuso de confianza y vandalismo.

c).-Riesgos Naturales: Todas las empresas están expuestas a la presencia de catástrofes naturales, cuando esto sucede puede provocarse daños materiales en las instalaciones y en ocasiones son tan grandes que toda una industria puede ver perjudicado su mercado y por lo tanto sus ventas. Algunos ejemplos son inundaciones, terremotos, huracanes, etc.

La forma de afrontar el riesgo puro no depende tanto de la actitud que se tenga hacia él, ya que no se busca obtener ganancias sino protegerse contra posibles pérdidas. Por ejemplo, quien adquiere un seguro para proteger su casa o su empresa, lo hace por evitar la posible pérdida que podría derivarse de algún hecho inesperado como podría ser un incendio.

1.2.-Riesgo Especulativo: Este riesgo refleja la existencia de acontecimientos que pueden generar tanto pérdidas como ganancias, este tipo de riesgo generalmente esta asociado a decisiones empresariales, inversiones y juegos de azar.

El riesgo especulativo se divide en seis grupos los cuales a continuación se mencionan

a).- Riesgos Técnicos: Son aquellos que se presentan al adquirir maquinaria o implementar nuevas técnicas con el fin de ser más productivos y, estas técnicas y/o la maquinaria de no ser las adecuadas pueden traer pérdidas.

b).- Riesgos de Producción: La mayoría de las empresas presentan este tipo de riesgo que se deriva de la dependencia que se tiene de los proveedores, de las materias primas y en general todo lo que afecta a la producción.

c).- Riesgos de Mercado: Estos riesgos son ocasionados por las decisiones que se toman en el área de mercadotecnia. Cuando se va a lanzar un producto debe hacerse una investigación de mercado que permita ubicar el segmento de mercado a explotar, la publicidad la promoción, etcétera. Estas medidas deben tomarse , entre otras cosas, con el fin de minimizar el riesgo.

d).- Riesgos Económicos: Nuestro país se encuentra en una etapa de apertura y globalización, las decisiones que se toman en cuanto a la economía de México son con el fin de lograr un mayor desarrollo. Sin embargo las empresas que se encuentran dentro del país están expuestas a los cambios que se dan por causas macroeconómicas como inflación, política fiscal, etc.

e).- Riesgos Laborales: Las decisiones que se toman en una empresa en cuanto a la elección del factor humano son trascendentes debido a que es el hombre el que toma las decisiones y pone la mano de obra para el buen funcionamiento de la empresa. Resulta importante la labor que se efectúe en el área de recursos humanos en cuanto a la elección del personal idóneo para el puesto. Debe tenerse una visión lateral que vigile tanto lo que requiere la empresa del empleado, (de acuerdo al puesto que se vaya a desempeñar), como el compromiso por parte de la empresa de satisfacer las necesidades del empleado para que este pueda desempeñar adecuadamente su trabajo. De lo contrario puede ocasionar entre otras cosas mala producción, rotación o problemas sindicales que afecten a la organización.

f).-**Riesgos Financieros**: En una empresa se toman decisiones de inversion y financiamiento buscando cumplir con los objetivos de la misma; debemos considerar el tipo de economía en que sé este viviendo y los Riesgos financieros que son ocasionados principalmente por fluctuaciones en el tipo de cambio, las tasas de interés y otros factores. Estos cambios pueden afectar a la empresa al provocarle pérdidas.

Para enfrentar el riesgo especulativo es necesario considerar la actitud que frente al mismo se tenga, siendo sus extremos el tomar todos los Riesgos posibles o el buscar todas las medidas necesarias para evitarlo; esta actitud estará determinada por la situación enfrentada, por la magnitud de las consecuencias que esta puede causar y sobre todo por las preferencias particulares de los individuos o administradores de Riesgos de la empresa.

DIFERENTES TIPOS DE RIESGOS FINANCIEROS

El riesgo financiero se divide en riesgo financiero por apalancamiento y riesgo financiero estratégico.

El primero se refiere al riesgo que pueden enfrentar las empresas por sus costos fijos de operación (teniendo efectos sobre las utilidades de la empresa) y por sus costos financieros en sí, es decir, por el costo de su deuda.

El segundo tipo de riesgo financiero (estratégico) es aquél ocasionado por fluctuaciones en los precios de los tipos de cambio, tasas de interés, etc.; que repercuten en el valor global de la empresa.

Las instituciones financieras, especialmente los bancos, no enfrentan únicamente el riesgo por fluctuaciones en tasas de interés, sino que dada la naturaleza de sus operaciones y la volatilidad de la economía internacional están expuestas a los siguientes tipos de riesgo:

1) **Riesgo Crediticio**: Se define como la probabilidad de que disminuya el valor de los activos de una institución financiera (especialmente los prestamos) debido a la falta de cumplimiento de las obligaciones contraidas por parte de los agentes relacionados con la institución. Este tipo de riesgo puede determinarse a través de la relación existente entre las carteras vencida e irrecuperable del banco y la total de prestamos otorgados.

2) **Riesgo de Líquidez**: Esta categoría se refiere a la posibilidad de que en un momento dado, el banco no tenga la cantidad suficiente de dinero en efectivo,

para cubrir los retiros sobre sus pasivos así como para destinar recursos adicionales para prestamos. Esta situación puede ocasionar que las instituciones tengan que demandar fondos a costos extra normales, provocando con ello un deterioro en ganancias. El riesgo de liquidez se cuantifica a través de la relación existente entre el total de los prestamos otorgados por el banco y el total de sus activos; es decir, entre mayor sea el porcentaje de prestamos respecto al activo total, mayor será la probabilidad de incurrir en el riesgo de liquidez.

3) **Riesgo sobre Ganancias**: Resulta de los movimientos inesperados que pudieran surgir en las utilidades del banco debido a factores intrínsecos los cuales son controlables, tal como su eficiencia –como a extrínsecos- sobre los cuales el banco no tiene injerencia directa; aqui se pueden incluir los cambios inesperados en la economia y en las regulaciones. Este riesgo se mide por medio del calculo de la varianza de los diferentes indicadores de desempeño de los bancos tales como ingresos netos, rendimiento sobre capital y rendimiento sobre activos.
4) **Riesgo de Solvencia**: Las instituciones bancarias deben mantener un estricto control sobre la calidad de sus prestamos ya que un excesivo porcentaje de cuentas incobrables pueden poner en peligro su permanencia dentro del mercado a largo plazo, constituyendo este riesgo de solvencia o abandono.

5) **Riesgo de Mercado**: A este tipo de riesgo también se le conoce como riesgo sistemático, y es al cual se enfrentan los agentes económicos por el solo hecho de participar en el mercado, no pudiéndolo eliminar mediante la diversificación. En el caso de las instituciones financieras, éste tipo de riesgo está representado por fluctuaciones inesperadas en los precios de los activos financieros (entendiéndose por estos las tasas de interés, tipos de cambio e índices bursátiles por mencionar los más importantes) y en casos específicos cuestiones tales como modificaciones en la legislación. El coeficiente beta es la medida típica de este tipo de riesgo.

6) **Riesgo por Fluctuaciones en las tasas de interés**: Este riesgo refleja el impacto que tienen los movimientos inesperados en las tasas de interés sobre las ganancias de las instituciones, principalmente las financieras. El entorno financiero internacional ha motivado que se desarrollen nuevas técnicas para medir este tipo de riesgo financiero; entre los principales se encuentran el manejo del Gap o brecha de madurez, y el análisis de Duración o vida promedio de activos. En la operación diaria de las instituciones financieras, este riesgo representa un caso especifico del riesgo de mercado.

Aunque no se expresa formalmente en esta clasificación, el más importante de estos riesgos es el ocasionado por fluctuaciones en las tasas de interés, ya que un movimiento brusco en éstas puede propiciar, en mayor o menor medida, que se incremente la probabilidad de que una institución financiera incurra en cualquiera de los riesgos mencionados anteriormente.

En el capítulo 1 se analizarán algunos criterios para la medida cuantificable del riesgo, estos criterios tienen sus bases en la estadística básica sin embargo son tan poderosos como para encontrar entre varias opciones de inversión aquella que tenga el riesgo menor.

Es así como ésta tesis establece una introducción a la Teoria de Carteras.

INDICE

CAPITULO 1
EL RIESGO

CAPÍTULO 2
DIVERSIFICACIÓN

CAPÍTULO 4
LA FRONTERA EFICIENTE

CAPITULO 1
EL RIESGO

ALGUNOS PARÁMETROS PARA LA MEDIDA DEL RIESGO.

EL DESVIO MEDIO ABSOLUTO (DMA)

Uno de los parámetros propuestos por los estadísticos para medir el riesgo es el conocido como desvío medio absoluto (DMA), que consiste en tomar el valor absoluto de la diferencia de los rendimientos de la inversión y la esperanza matemática de los rendimientos, matemáticamente la fórmula es la siguiente:

$$\mathbf{DMA(I_i) = \sum_{t=1}^{N} |I_{it} - I^*_i|\, p_{it}} \qquad \textbf{(El valor más pequeño)} \qquad (1)$$

Donde:

I_{it} es el rendimiento i de la inversión I cuando el estado de la economía es t con i=1,2,,,n y t=1,2,,,N

I^*_i es la esperanza matemática o valor promedio ponderado de los rendimientos de la inversión Ii con i= 1,2,,,n y

p_{it} es la probabilidad del rendimiento de la inversión Ii cuando el estado de la economía es t con t=1,2,,,N

Supongamos que un inversionista tiene que invertir en algunas de las tres inversiones presentadas en la siguiente tabla, tomando como base para su elección la inversión de menor riesgo.

Estado de la Economía (t)	Probabilidad (p_{it})	Rendimiento % de la Inv. 1 (i=1)	Rendimiento % de la Inv. 2 (i=2)	Rendimiento % de la Inv. 3 (i=3)
Excelente	0.20	90	90	70
Bueno	0.25	45	80	65
Regular	0.50	30	10	50
Malo	0.05	10	0	5

Tabla 1

Aplicando el DMA a cada una de las inversiones para encontrar cada uno de los riesgos, se tiene:

Las respectivas esperanzas matemáticas son:

$I^*_1 = (0.20)(90) + (0.25)(45) + (0.50)(30) + (0.05)(10) = \mathbf{44.75}$

$I^*_2 = (0.20)(90) + (0.25)(80) + (0.50)(10) + (0.05)(0) = \mathbf{43}$

$I^*_3 = (0.20)(70) + (0.25)(65) + (0.50)(50) + (0.05)(5) = \mathbf{55.5}$

para la primera inversión

$$\mathbf{DMA(I_1)} = \sum_{t=1}^{4} |I_{1t} - I^*_1|\, p_{1t} =$$

$$|90 - 44.75|\,(0.20) + |45 - 44.75|\,(0.25) + |30 - 44.75|\,(0.50) + |10 - 44.75|\,(0.05)$$

$$= 9.05 + 0.0625 + 7.375 + 1.7375 = \mathbf{18.225}$$

para la inversión 2

$$\mathbf{DMA(I_2)} = \sum_{t=1}^{4} |I_{2t} - I^*_2|\, p_{2t} =$$

$$|90 - 43|\,(0.20) + |80 - 43|\,(0.25) + |10 - 43|\,(0.50) + |0 - 43|\,(0.05)$$

$$=9.4 + 9.25 + 16.5 + 2.15 = \mathbf{37.30}$$

para la tercera inversión

$$\mathbf{DMA(I_3)} = \sum_{t=1}^{4} |I_{3t} - I^*_3|\, p_{3t} =$$

$$|70 - 55.5|\,(0.20) + |65 - 55.5|\,(0.25) + |50 - 55.5|\,(0.50)\ |5 - 55.5|\,(0.05)$$

$$= 2.9 + 2.375 + 2.75 + 2.775 = \mathbf{10.8}$$

Estos valores muestran que el riesgo por unidad de rendimiento esperado es inferior para la inversión 3, por lo tanto, el inversionista que basa su decisión únicamente en el riesgo de cada inversión decidirá la inversión 3 por tener menor **DESVIO MEDIO ABSOLUTO (riesgo).**

LA VARIANZA COMO MEDIDA DEL RIESGO

Otro parámetro estadístico utilizado para medir el riesgo de una inversión es la **varianza**, ésta medida es preferida por los estadísticos a la anterior, ya que es más manejable desde el punto de vista del cálculo algebraico cuando se aplica a diversas combinaciones de variables aleatorias y, junto con la **esperanza matemática**, permite caracterizar varias distribuciones de probabilidades que aparecen con frecuencia en las aplicaciones prácticas.

Su expresión matemática es la siguiente:

$$\sigma^2(I_i) = \sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{N} (I_{it} - I^*_i)^2\, p_{it} \qquad \textbf{(2)}$$

La notación es exactamente la misma que la utilizada en el tema anterior y de hecho a lo largo de todo este trabajo. Para ejemplificar el uso de la fórmula de la varianza como medida del riesgo de una inversión, supongamos el mismo caso mostrado en la tabla 1.

El riesgo para la inversión 1 es:

$$\sigma^2(I_1) = \sigma_1^2 = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - I^*_1)^2\, p_{1t} = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - 44.75)^2\, p_{1t}$$

$$= (90 - 44.75)^2 (0.20) + (45 - 44.75)^2 (0.25) + (30 - 44.75)^2 (0.50) + (10 - 44.75)^2 (0.05)$$

$$= (2047.5625)(0.20) + (0.0625)(0.25) + (217.5625)(0.50) + (1207.5625)(0.05)$$

$$= 409.5125 + 0.015625 + 108.78125 + 60.378125 = \mathbf{578.6875}$$

El riesgo para la inversión 2 es:

$$\sigma^2(I_2) = \sigma_1^2 = \sum_{t=1}^{4} (I_{2t} - I^*_2)^2\, p_{2t} = \sum_{t=1}^{4} (I_{2t} - 43)^2\, p_{2t}$$

$$= (90 - 43)^2 (0.20) + (80 - 43)^2 (0.25) + (10 - 43)^2 (0.50) + (0 - 43)^2 (0.05)$$

$$= 441.8 + 342.25 + 544.5 + 92.45 = \mathbf{1421}$$

El riesgo para la inversión 3 es:

$$\sigma^2(I_3) = \sigma_3^2 = \sum_{t=1}^{4} (I_{3t} - I^*_3)^2\, p_{3t} = \sum_{t=1}^{4} (I_{3t} - 55.5)^2\, p_{3t}$$

$$= (70 - 55.5)^2 (0.20) + (65 - 55.5)^2 (0.25) + (50 - 55.5)^2 (0.50) + (5 - 55.5)^2 (0.05)$$

$$= 42.05 + 22.5625 + 120.125 + 127.5125 = \mathbf{312.25}$$

Observando los valores de las varianzas para cada una de las tres inversiones, la inversión de menor varianza y por lo tanto la de menor riesgo es la inversión 3, como ya se había demostrado utilizando el criterio de los DESVIOS MEDIOS ABSOLUTOS (DMA).

EL COEFICIENTE DE VARIACIÓN

El **coeficiente de variación** es un parámetro para medir el riesgo de una inversión, que esta basado en la **desviación estándar** (la raíz cuadrada de la varianza) y la **esperanza *matemática*** *de los rendimientos* que puede tomar la inversión (variable aleatoria)

La expresión matemática del coeficiente de variación es la siguiente:

$$\mathbf{V(I_i) = V_i = \frac{\sigma_i}{E(I_i)}} \qquad (3)$$

Donde:

$V(I_i)$ o V_i	denota al coeficiente de variación para la inversión I_i con i = 1,2,,,n
σ_i	es la desviación estándar de los rendimientos de la inversión I_i
$E(I_i)$	es la esperanza matemática o valor esperado de los rendimientos de la inversión I_i

El *coeficiente* de variación lo que hace es medir la dispersión de una variable aleatoria (que en este caso son los rendimientos de la inversión) a su esperanza matemática.

La desviación estándar de cada una de las inversiones es la raíz cuadrada de su varianza y la esperanza matemática esta definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{E(I_i) = \sum_{t=1}^{N} I_{it}\, p_{it} \qquad con\ i = 1,2,,,n.}$$

Es decir, la suma de los productos de los rendimientos de la inversión por su respectiva probabilidad.

Ahora analicemos el funcionamiento del coeficiente de variación mediante el ejemplo que se muestra en la tabla 1.

Las respectivas esperanzas matemáticas para cada una de las tres inversiones ya anteriormente se han calculado, en el caso de las desviaciones estándar basta con extraer raíz cuadrada a las varianzas las cuales se muestran a continuación:

$$\sigma(\mathbf{I_1}) = \sigma_1 = 24.055$$

$$\sigma(\mathbf{I_2}) = \sigma_2 = 37.696$$

$$\sigma(\mathbf{I_3}) = \sigma_3 = 17.663$$

$$\mathbf{E(I_1)} = 44.75$$

$$\mathbf{E(I_2)} = 43$$

$$\mathbf{E(I_3)} = 55.5$$

Los coeficientes de variación para cada una de las inversiones de la tabla 1 son los siguientes:

$$\mathbf{V(I_1) = V_1} = \frac{\sigma_1}{\mathbf{E(I_1)}} = \frac{24.055}{44.75} = \mathbf{0.537}$$

$$\mathbf{V(I_2) = V_2} = \frac{\sigma_2}{\mathbf{E(I_2)}} = \frac{37.696}{43} = \mathbf{0.876}$$

$$\mathbf{V(I_3) = V_3} = \frac{\sigma_3}{\mathbf{E(I_3)}} = \frac{17.663}{55.5} = \mathbf{0.318}$$

Analizando los coeficientes de variación para las tres inversiones, el que resulta menor es otra vez el de la inversión 3, por lo tanto, es la inversión de menor riesgo, la cual no es tan fácil de determinar a simple vista sino solamente utilizando algunos de los criterios para la medida del riesgo.

EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL

Existe un indicador del grado de correlación entre los rendimientos aleatorios de dos inversiones, es el denominado **coeficiente de correlación lineal** el cuál relaciona la covarianza y las desviaciones estándar de las inversiones, el cual esta definido como sigue:

$$\rho\,(I_i,I_j) = \frac{cov\,(I_i,I_j)}{\sigma(I_i)\,\sigma(I_j)}$$

que es simbolizado con la *notación abreviada:*

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j}$$

Esta medida de correlación es para una cartera de activos constituida por dos inversiones; los valores que toma están comprendidos entre –1 y 1exclusivamente. Si el coeficiente de correlación lineal toma el valor $\rho_{12} = -1$ se dice que los rendimientos de las dos inversiones tienen una ***correlación perfecta negativa*** y significa que entre los mismos existe una dependencia funcional lineal tal que cuando uno de ellos crece, el otro decrece en una específica proporción. En el caso de ser $\rho_{12} = 1$ se tiene **una correlación perfecta positiva** y su dependencia lineal es tal que al crecer uno de ellos también lo hace el otro en determinada proporción. Si $\rho_{12} = 0$ los rendimientos se dicen ***incorrelacionados linealmente*** *y no existe entre los mismos ningún* tipo de relación funcional lineal. Cuanto más próximo a 1 sea el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal, mayor será la tendencia de los rendimientos a obedecer a una variación sistemática conjunta de tipo lineal. Así en el ejemplo que se está desarrollando se obtendrá el coeficiente de correlación lineal entre cada par de inversiones para determinar cual par de ellas forman la cartera con menor riesgo.

La notación y la fórmula general para el cálculo de la covarianza entre los rendimientos aleatorios de dos activos "i" y "j" cualesquiera, se indica a continuación.

$$cov\,(I_i,I_j) = \sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{n} (I_{it} - I^*_i)(I_{jt} - I^*_j)\,p_t$$

Anteriormente ya se han calculado las desviaciones estándar para cada una de las tres inversiones de la tabla 1. La covarianza entre la inversión 1 y la inversión 2 es:

$$\text{cov}(I_1,I_2) = \sigma_{12} = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - I^*_1)(I_{2t} - I^*_2)\, p_t =$$

$$\text{cov}(I_1,I_2) = \sigma_{12} = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - 44.75)(I_{2t} - 43)\, p_t =$$

$= (90 - 44.75)(90 - 43)(0.20) + (45 - 44.75)(80 - 43)(0.25) +$

$(30 - 44.75)(10 - 43)(0.50) + (10 - 44.75)(0 - 43)(0.05)$

$= (45.25)(47)(0.20) + (0.25)(37)(0.25) + (14.75)(-33)(0.50) + (-34.75)(-43)(0.05)$

$= 425.35 + 2.3125 - 243.375 + 74.7125 =$ **259**

La covarianza para las *inversiones* 1 y 3 es:

$$\text{cov}(I_1,I_3) = \sigma_{13} = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - I^*_1)(I_{3t} - I^*_3)\, p_t =$$

$$\text{cov}(I_1,I_3) = \sigma_{13} = \sum_{t=1}^{4} (I_{1t} - 44.75)(I_{2t} - 55.50)\, p_t =$$

$= (90 - 44.75)(70 - 55.50)(0.20) + (45 - 44.75)(65 - 55.50)(0.25) +$

$(30 - 44.75)(50 - 55.50)(0.50) + (10 - 44.75)(5 - 55.50)(0.05)$

$= (45.25)(14.50)(0.20) + (0.25)(9.50)(0.25) +$

$(14.75)(-5.50)(0.50) + (-34.75)(-50.5)(0.05)$

$= 131.225 + 0.59375 - 40.5625 + 87.74375 =$ **179**

La covarianza para las inversiones 2 y 3 es:

$$\text{cov}(I_2,I_3) = \sigma_{23} = \sum_{t=1}^{4} (I_{2t} - I^*_2)(I_{3t} - I^*_3)\, p_t =$$

$$\text{cov}(I_2,I_3) = \sigma_{23} = \sum_{t=1}^{4} (I_{2t} - 43)(I_{3t} - 55.50)\, p_t =$$

$= (90 - 43)(70 - 55.50)(0.20) + (80 - 43)(65 - 55.50)(0.25) +$

$(10 - 43)(50 - 55.50)(0.50) + (0 - 43)(5 - 55.50)(0.05)$

$= (47)(14.50)(0.20) + (37)(9.50)(0.25) +$

$(-33)(-5.50)(0.50) + (-43)(-50.50)(0.05)$

$= 136.30 + 87.875 + 90.75 + 108.575 = \mathbf{423.50}$

El coeficiente de correlación lineal para la inversión 1 y 2 es:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{259}{(24.055)(37.696)} = \mathbf{0.285}$$

El coeficiente de correlación lineal para la inversión 1 y 3 es:

$$\rho_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1 \sigma_3} = \frac{179}{(24.055)(37.696)} = \mathbf{0.197}$$

El coeficiente de correlación lineal para la inversión 2 y 3 es:

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_2 \sigma_3} = \frac{423.50}{(37.696)(17.663)} = \mathbf{0.636}$$

Analizando los coeficientes de correlación lineal, el menor es el de la *inversión 1 y 3* por lo que estas dos inversiones forman la cartera de dos activos de inversión de mínimo riesgo. En capítulos posteriores se mostrará como se pueden determinar carteras aún con riesgo nulo (bajo algunas condiciones).

CRITERIO DEL RENDIMIENTO ESPERADO

El **Criterio del Rendimiento Esperado**, esta basado en el parámetro que los estadísticos llaman "esperanza matemática", "valor esperado" o simplemente "media" y esta definido de la siguiente manera:

$$E(I_i) = \sum_{t=1}^{N} I_{it}\, p_{it} \quad \text{con } i = 1,2,,,n. \qquad (1).$$

En donde:

I_i es la inversión I con i = 1.2,,,,,n.

p_{it} es la probabilidad que tiene la inversión i dado el evento t en que se encuentre la economía con t = 1,2,,,,,,N

$E(I_i)$ es el rendimiento esperado.

Ejemplo:

Suponga que un inversionista tiene que decidir entre alguna de las siguientes alternativas de inversión que se le presentan, dados los respectivos estados de la economía y sus respectivas probabilidades de que sucedan.

Estado de la Economía (t)	Probabilidad (Pit)	Inversión 1 (i=1) Rendimiento %	Inversión 2 (i=2) Rendimiento %	Inversión 3 (i=3) Rendimiento %	
Excelente	0.25	90	80	80	
Bueno	0.50	75	80	60	
Regular	0.20	40	45	50	
Malo	0.05	0	-20	10	

TABLA 1

Analizando la situación presentada en la tabla 1 no resulta fácil por simple inspección, determinar cual es la *inversión de mayor conveniencia para el inversionista* ya que, en la inversión 1 se puede obtener un rendimiento del 90% pero solo en el caso en el que es estado de la economía sea excelente, el cual, tiene una probabilidad del 25%. Mientras que en la inversión 2 existe la posibilidad de tener una pérdida del 20% si el estado de la economía es malo, el cual tiene una probabilidad del 5%. En tanto que en la inversión 3, no hay probabilidad alguna de tener un rendimiento negativo y por lo tanto en cualquier estado de la economía se puede obtener un rendimiento positivo.

Aplicando el **Criterio del Rendimiento Esperado** para cada una de las tres alternativas presentadas en la tabla 1, se tiene lo siguiente aplicando la fórmula (1):

Rendimiento esperado para la **inversión 1**

$$\mathbf{E(I_1)} = \sum_{t=1}^{4} I_{1t} P_{1t} = I_{11} P_{11} + I_{12} P_{12} + I_{13} P_{13} + I_{14} P_{14}$$

$$= (90)\,(0.25) + (75)\,(0.50) + (40)\,(0.20) + (0)\,(0.05)$$

$$\mathbf{= 68}$$

Rendimiento esperado para **la inversión 2**

$$\mathbf{E(I_2)} = \sum_{t=1}^{4} I_{2t} P_{2t} = I_{21} P_{21} + I_{22} P_{22} + I_{23} P_{23} + I_{24} P_{24}$$

$$= (80)\,(0.25) + (80)\,(0.50)\,(45)\,(0.20) + (-20)\,(0.05)$$

$$\mathbf{= 68}$$

Rendimiento esperado para la **inversión 3**

$$\mathbf{E(I_3)} = \sum_{t=1}^{4} I_{3t} P_{3t} = I_{31} P_{31} + I_{32} P_{32} + I_{33} P_{33} + I_{34} P_{34}$$

$$= (80)\,(0.25) + (60)\,(0.50) + (50)\,(0.20) + (10)\,(0.05)$$

$$\mathbf{= 60.50}$$

De ésta manera se observa que la inversión 1 y 2 son las que tienen mayor rendimiento esperado, aunque hay que observar que en la inversión 2 se tiene la probabilidad del 5% de tener una pérdida del 20% pero, hay un 75% de tener un rendimiento positivo del 80%. Por lo tanto queda a la preferencia subjetiva de cada inversionista el invertir en la opción 1 o en la 2.

Dos propiedades de la esperanza matemática serán de mucha utilidad. Ellas son:

1) La esperanza matemática de dos variables aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de esas variables aleatorias.

Formalmente:

$$\mathbf{E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)} \qquad (2)$$

2) La esperanza matemática del producto de una constante por una variable aleatoria, es igual al producto de esa constante por la esperanza matemática de la variable aleatoria.

Formalmente:

$$\mathbf{E(kX) = kE(X)} \qquad (3)$$

Las dos propiedades anteriores se pueden unir en una sola de la siguiente manera:

$$\mathbf{E(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1E(X_1) + k_2E(X_2)} \qquad (4)$$

Para ilustrar las dos propiedades de la esperanza matemática resumidas en (4), supongamos que el inversionista decide no correr riesgo de tener una pérdida en caso de elegir la inversión 2 e invertir el 60% de sus fondos en I_1 y el 40% restante en la I_3. Denotando con I_p a la combinación de la I_1 y la I_3 (al hecho de hacer una nueva inversión con combinaciones de otras inversiones, se le llama portafolio o cartera de inversiones) el rendimiento porcentual del portafolio es:

$$\mathbf{E(I_p)} = 60\%E(I_1) + 40\%E(I_3) = (0.60)\,(68) + (0.40)\,(60.50)$$

$$= 40.80 + 24.20 = \mathbf{65}$$

El rendimiento esperado del portafolio I_p es de 65%, que es menor que el rendimiento esperado de I_1 y I_2 (68% para las dos) pero, con I_p no hay riesgo alguno de tener una pérdida, aún más, con ésta combinación cualquiera que sea el estado de la economía siempre habrá un rendimiento.

Generalizando si $k_1, k_2,,,,,, k_n$ son las proporciones invertidas respectivamente en las inversiones $I_1, I_2,,,, I_n$ entonces, el rendimiento esperado de una combinación I constituida por esas n alternativas de inversión será:

$$E(I_p) = k_1E(I_1) + k_2E(I_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + k_nE(I_n) = \sum_{i=1}^{n} k_iE(I_i)$$
(5)

con la condición

$$k_1 + k_2 + k_3 + ,,,,,, ,, + k_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = 1$$

es decir la suma de todas las proporciones debe ser igual al 100% de la inversión. Más adelante se dedicará un estudio a fondo, sobre como determinar un portafolio de inversión de mínimo riesgo o un portafolio de inversión con el máximo rendimiento esperado, ya que no es posible tener en la mayoría de los casos un portafolio que cumpla con ambos parámetros al mismo tiempo. Quedando a la subjetividad de cada inversionista la manera de integrar su portafolio de inversión.

ANÁLISIS DE PORTAFOLIOS CONSTITUIDOS POR DOS INVERSIONES SEGÚN EL CRITERIO DE LA MEDIA-VARIANZA.

Definición del criterio CMV: Una alternativa A domina a otra B sí y solo sí

$$E(R_A) \geq E(R_B) \qquad y \qquad \sigma^2(R_A) < \sigma^2(R_B)$$

o bien,

$$E(R_A) > E(R_B) \qquad y \qquad \sigma^2(R_A) \leq \sigma^2(R_B)$$

Se deduce de esta definición que una condición necesaria para que una alternativa sea preferida a otra es que su rendimiento esperado sea mayor o igual que el de ésta.

Como primera aproximación al caso general de portafolios constituidos por "n" inversiones, se empezará a analizar portafolios que contienen dos inversiones solamente.

Sean las inversiones 1 y 2 (I_1 y I_2) que tienen las tasas de rendimiento R_1 y R_2 y las proporciones invertidas k_1 y k_2 respectivamente. Entonces el rendimiento del portafolio es:

$$R_P = k_1I_1 + k_2I_2$$

donde:

$$k_1 + k_2 = 1$$

Dado que R_P (riesgo del portafolio) es una variable aleatoria producto de la combinación de las variables aleatorias I_1 y I_2, resulta que su esperanza matemática, es decir, el rendimiento esperado del portafolio de inversión es:

$$E(R_P) = k_1E(I_1) + k_2E(I_2) \qquad (1)$$

Mientras que su varianza, o sea, su riesgo es:

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\sigma_{12} \qquad (2)$$

donde:

$\sigma_1 = \sigma(I_1)$ es la desviación estándar de la inversión 1

$\sigma_2 = \sigma(I_2)$ es la desviación estándar de la inversión 2 y

σ_{12} es la covarianza de las inversiones 1 y 2.

Para facilitar el desarrollo matemático siguiente, supondremos que las inversiones son incorrelacionadas, es decir, que su covarianza es cero ($\sigma_{12} = 0$). Bajo este supuesto la fórmula 2 es la siguiente:

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 \qquad (3)$$

También supondremos que los inversionistas toman sus decisiones en base al **Criterio de la Media-Varianza (CMV)**, es decir, a igualdad de rendimientos esperados ($E(I_1) = E(I_2)$) prefieren el portafolio que tenga menor riesgo, y a igualdad de riesgo ($\sigma_1=\sigma_2$) se prefiere el portafolio con mayor rendimiento esperado.

Supongamos que las alternativas ante las que se enfrenta el inversionista son las que se encuentran en la siguiente tabla:

Inversión	**Rendimiento Esperado**	**Riesgo medido por la desviación estándar**
i	$E(I_i)$	σ_i
1	11	8
2	7	3

TABLA 1

En este caso concreto las fórmulas 1 y 3 toman la forma:

$$E(R_P) = 11k_1 + 7k_2 \qquad (4)$$

$$\sigma^2(R_P) = 64k_1^2 + 9k_2^2 \qquad (5)$$

Variando las proporciones k_i invertidas en cada una de las inversiones, se determina el rendimiento esperado y la varianza de las múltiples combinaciones posibles. Así por ejemplo si $k_1=1$ y $k_2 = 0$, quiere decir que el inversionista ha invertido todo su capital en la inversión 1, obteniendo el rendimiento esperado y el riesgo *que enseguida se calculan:*

$$E(R_P) = (11)(1) + (7)(0) = 11 + 0 = 11$$

$$\sigma^2(R_P) = (64)(1)^2 + (9)(0)^2 = 64 + 0 = 64$$

de donde $\sigma(R_P) = 8$

Como era lógico esperar, el rendimiento esperado y riesgo de este portafolio coinciden con los de la inversión 1. De la misma manera si se invierten todos los fondos en la inversión 2 ($k_1 = 0$, $k_2 = 1$) se obtendrían el rendimiento y el riesgo de la inversión 2 como riesgo y rendimiento del portafolio.

Hay que observar que si el inversionista basa su decisión exclusivamente en el rendimiento esperado, optará por invertir todo su capital en *la inversión 1, obteniendo un rendimiento* esperado de 11, superior a cualquier otra combinación como a continuación se mostrará:

Despejando a k_1 de la ecuación (4) se obtiene

$$k_1 = \frac{E(R_P)}{11} - \frac{7}{11}k_2 \qquad (6)$$

En general se tiene:

$$\mathbf{k_1 = \frac{E(R_P)}{E(I_1)} - \frac{E(I_2)}{E(I_1)}k_2} \qquad \mathbf{(7)}$$

La ecuación 7 es la ecuación de una recta de la forma pendiente-ordenada al origen $y = b + mx$ donde:

$m = -\dfrac{E(I_2)}{E(I_1)}$ es la pendiente

$b = \dfrac{E(R_P)}{E(I_1)}$ es la ordenada al origen

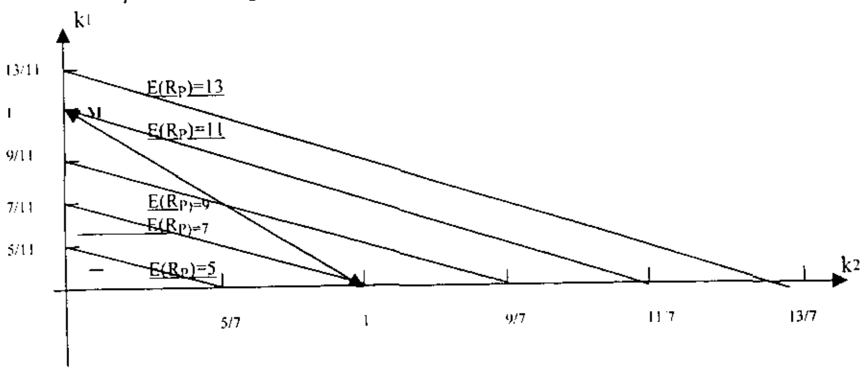
$y = k_1$

$x = k_2$

Observando que $E(I_1)$ y $E(I_2)$ son valores que se dan, entonces hay tres variables: k_1, k_2 y $E(R_P)$, cuya relación se desea determinar. Para hacerlo se asignarán distintos valores a $E(R_P)$, obteniéndose para cada uno de estos valores una recta. Sus puntos representan todas las combinaciones posibles de k_1 y k_2 que originan un portafolio *cuyo rendimiento* esperado es precisamente el valor asignado a $E(R_P)$

Si	$E(R_P) = 13$	resulta	$k_1 = \frac{13}{11} - \frac{7}{11} k_2$
Si	$E(R_P) = 11$	resulta	$k_1 = 1 - \frac{7}{11} k_2$
Si	$E(R_P) = 9$	resulta	$k_1 = \frac{9}{11} - \frac{7}{11} k_2$
Si	$E(R_P) = 7$	resulta	$k_1 = \frac{7}{11} - \frac{7}{11} k_2$
Si	$E(R_P) = 5$	resulta	$k_1 = \frac{5}{11} - \frac{7}{11} k_2$

La representación gráfica de estas cinco rectas se muestra en la figura 1.



Rectas de rendimiento esperado para diferentes valores.
Inversión óptima si solo se considera el rendimiento.(punto M)
Figura 1

El punto M representa la alternativa óptima de inversión con un rendimiento de 11, es la mejor ya que es la de mayor rendimiento esperado que es superior a todas las demás y cumple con la restricción presupuestaria del inversionista($k_1 + k_2 = 1$). En este caso particular $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$

Los puntos k_1 y k_2 pertenecientes a estas rectas representan combinaciones cuyos rendimientos esperados son respectivamente 13,11,9,7 y 5. Resulta evidente que las rectas más alejadas del origen de coordenadas corresponden a rendimientos más elevados.

Otra observación con respecto a las rectas de la figura 1, es que son paralelas y esto es porque todas tienen la misma pendiente:

$$m = \frac{E(I_2)}{E(I_1)} = -\frac{7}{11}$$

Todo inversionista quisiera constituir un portafolio representado por un punto perteneciente a una recta de rendimiento lo más alejada posible del origen de coordenadas, pero se debe de atener a su restricción presupuestaria.

Los inversionistas que decidan tomando en consideración solamente el rendimiento esperado, invertirán todos sus fondos en la inversión que lo tenga mayor.

Consideremos ahora el caso en que los inversionistas para obtener un determinado rendimiento , están dispuestos a asumir un cierto riesgo y además deben restringirse a un presupuesto, es decir , $k_1 + k_2 = 1$.

El riesgo del portafolio constituido por dos inversiones, bajo la hipótesis que la covarianza es cero es la formula (3):

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación por $\sigma(R_P)$ se obtiene:

$$1 = \frac{k_1^2\,\sigma_1^2}{\sigma^2(R_P)} + \frac{k_2^2\,\sigma_2^2}{\sigma^2(R_P)} \qquad (8)$$

La ecuación (8) es del tipo:

$$1 = \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} \qquad \textbf{(9)}$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas, y eje mayor y menor sobre el eje X e Y respectivamente.

Donde: $b = \dfrac{\sigma(R_P)}{\sigma_1}$ y $a = \dfrac{\sigma(R_P)}{\sigma_2}$

La ecuación 2 tiene la siguiente representación gráfica:

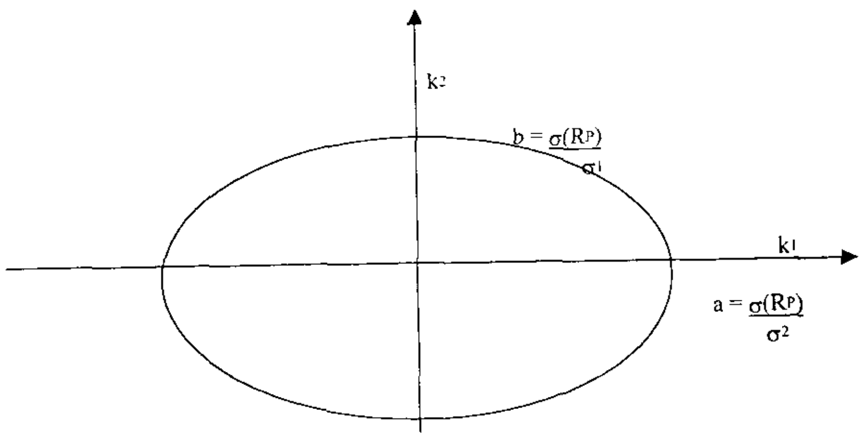


FIGURA 2

Similarmente al caso anterior, dado que σ_1 y σ_2 son valores especificados, en la ecuación 1 y 2 hay tres parámetros: k_1,k_2 y $\sigma(R_P)$. Como se desea analizar la influencia de este último, es decir, el riesgo se asignaran al mismo diferentes valores, estudiándose los resultados obtenidos por la ecuación 2.

Si $\sigma(R_P) = 9$ resulta $a = \frac{9}{3} = 3$ $b = \frac{9}{8} = 1.125$ y $1 = \frac{k_1^2}{1.27} + \frac{k_2^2}{9}$

Si $\sigma(R_P) = 6$ resulta $a = \frac{6}{3} = 2$ $b = \frac{6}{8} = 0.75$ y $1 = \frac{k_1^2}{0.56} + \frac{k_2^2}{4}$

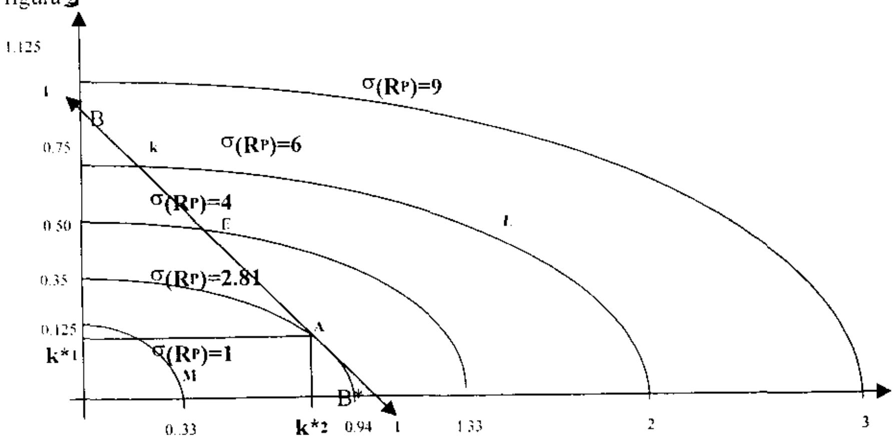
Si $\sigma(R_P) = 4$ resulta $a = \frac{4}{3} = 1.33$ $b = \frac{4}{8} = 0.5$ y $1 = \frac{k_1^2}{0.5} + \frac{k_2^2}{1.77}$

Si $\sigma(R_P) = 2.81$ resulta $a = \frac{2.81}{3} = 0.94$ $b = \frac{2.81}{8} = 0.35$

y $1 = \frac{k_1^2}{0.12} + \frac{k_2^2}{0.88}$

Si $\sigma(R_P) = 1$ resulta $a = \frac{1}{3} = 0.333$ $b = \frac{1}{8} = 0.125$ y $1 = \frac{k_1^2}{0.02} + \frac{k_2^2}{0.11}$

La representación gráfica en el primer cuadrante, de las cinco elipses se muestra la siguiente figura 3



Curvas de iso-varianza. Portafolio de mínimo riesgo (punto A) sin tener en consideración el rendimiento esperado.

FIGURA 3

Los puntos pertenecientes a una determinada elipse representan distintas combinaciones (k_1, k_2) todas con igual riesgo . Así los puntos K y L representan grandes portafolios constituidos por las inversiones 1 y 2 en proporciones distintas pero idéntico riesgo ($\sigma(R_P) = 6$). Es por ello que cada una de estas elipses recibe el nombre de **iso-varianza.** Puede observarse que cuanto más alejadas se encuentren del origen de coordenadas mayor es el riesgo de los portafolios que representan . Así mismo curvas de iso-varianza distintas no se cortan en ningún punto, pues si así fuera ese punto representaría un único portafolio con dos niveles de riesgo distintos.

Es evidente que en principio los inversionistas preferirán portafolios ubicados sobre la curva más cercana al origen a la que puedan acceder , ya que hemos supuesto que el inversionista solo procure minimizar su riesgo.El caso extremo se representaría si el inversionista eligiera el portafolio representado por el cero, con riesgo nulo dado que las proporciones a invertir en las inversiones 1 y 2 en este caso son $k_1 = k_2 = 0$, resulta que la forma más segura de no tener riesgo es no invertir

El planteamiento matemático del problema, en el caso general es el siguiente:

Minimizar $\sigma^2(R_P)$ (Riesgo)

Sujeto a $k_1 + k_2 = 1$ (Restricción presupuestaria)

De la fórmula 2 se tiene:

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\sigma_{12}$$

De la ecuación de restricción se deduce $k_2 = 1 - k_1$

Sustituyendo esta expresión en la anterior

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\sigma_1^2 + (1 - k_1)^2\sigma_2^2 + 2k_1(1 - k_1)\sigma_{12}$$

que representa la varianza del portafolio como una función de la única variable k_1. La condición necesaria y suficiente para la existencia de un mínimo es la anulación de la primera derivada y que resulte positiva la segunda derivada.

$$\frac{d\sigma^2(R_P)}{dk_1} = 2k_1\sigma_1^2 - 2(1 - k_1)\sigma_2^2 + 2(1 - 2k_1)\sigma_{12} = 0$$

Despejando k_1 se obtiene:

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \qquad (10)$$

de donde:

$$k^*_2 = 1 - k^*_1 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \qquad (11)$$

Estos valores corresponden a un mínimo por hacer positiva a la segunda derivada. Las fórmulas (10) y (11) permiten calcular las proporciones óptimas a invertir en cada una de las dos inversiones para obtener un portafolio con el mínimo riesgo, independientemente del rendimiento.

En el caso particular que estamos considerando (que la covarianza entre las inversiones es cero $\sigma_{12}=0$), *las fórmulas* (10) *y* (11) se reducen a:

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad\qquad k^*_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad (12)$$

Reemplazando por los correspondientes valores (*ver tabla 1*) *se obtiene:*

$$k^*_1 = \frac{3^2}{8^2 + 3^2} = \mathbf{0.12} \qquad\qquad k^*_2 = \frac{8^2}{8^2 + 3^2} = \mathbf{0.88}$$

Que son precisamente las coordenadas del punto A en que la recta de presupuesto es tangente a la curva de iso-varianza para la cual $\sigma(R_P) = 2.81$ (ver figura 3). Así, la varianza de un portafolio en el que se han invertido el 12% del capital en la inversión 1 y el 88% en la inversión 2 es, según la fórmula (5) es:

$$\sigma^2(R_P) = 64\,(0.12)^2 + 9\,(0.88)^2 = \mathbf{7.89}$$

la raíz cuadrada de la varianza resulta ser:

$\boldsymbol{\sigma(R_P) = 2.81}$

que es el portafolio con menor riesgo posible y con un rendimiento esperado según la fórmula 4 de:

$$\mathbf{E(R_P)} = 11\ (0.12) + 7\ (0.88) = \mathbf{7.48}$$

Que es menor que cuando únicamente lo que se busca es maximizar el rendimiento esperado, en cuyo análisis anterior encontramos que era de 11; otro detalle que hay que observar. Es que el portafolio de menor riesgo posible cumple con la restricción presupuestaria, ya que, 0.12 + 0.88 =1.

Por razones de simplicidad se han estudiado hasta aquí las actitudes de un inversionista en dos casos extremos:

a) el maximizador de rendimientos, que optará en todos los casos por la inversión que ofrezca el mayor rendimiento esperado, independientemente de su riesgo, y
b) el minimizador de riesgo, que generalmente diversificará su portafolio de inversión constituyendo uno en que intervengan ambas inversiones, opuestamente a la actitud del maximizar de rendimientos.

Es importante notar que la diversificación del portafolio está asociada solamente al riesgo, y por lo tanto al parámetro que lo representa (varianza y desviación estándar), y es *independiente del rendimiento*.

En realidad, los inversionistas basan sus decisiones tanto en el riesgo como en el rendimiento. Por lo tanto más adelante se estudiará la influencia simultánea de ambos factores.

PORTAFOLIOS EFICIENTES SEGÚN EL CRITERIO DE LA MEDIA-VARIANZA

Para efectos de visualizar la influencia del riesgo y del rendimiento en una toma de decisión financiera, se ha dibujado en una misma gráfica ambos elementos para su análisis.

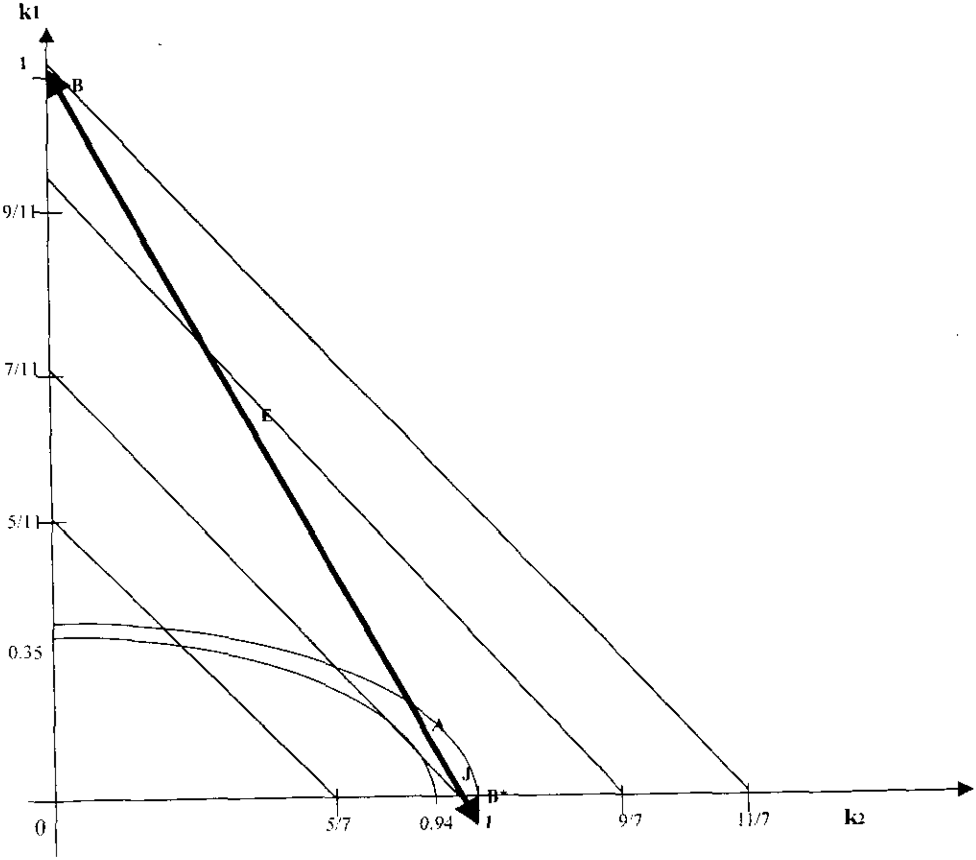


Figura 1
Consideración simultánea del riesgo y el rendimiento en un portafolio constituido por dos títulos

Al mismo tiempo consideraremos la siguiente tabla donde se muestran las cantidades del capital k_1 y k_2, el rendimiento esperado y el riesgo de algunos portafolios representativos; para un mejor entendimiento tanto del análisis del tema como de la figura1.

Portafolio	**k_1**	**k_2**	**Rendimiento esperado**	**Riesgo**
A	0.12	0.88	7.48	7.89
E	0.46	0.54	8.84	16
B	1	0	11	64
J	0.04	0.96	7.16	8.41
B*	0	1	7	9

Tabla 1

Observando la figura 1, todo portafolio representado por un punto del segmento AB*, excluyendo el punto A, es ineficiente. Por ejemplo el punto J, el cual tiene menor rendimiento y mayor riesgo que A. De acuerdo al criterio de la media-varianza, A domina a J por lo tanto J es ineficiente. El mismo razonamiento es válido para justificar la ineficiencia de cualquiera de los portafolios ubicados en el segmento AB*, excluido A.

Mientras tanto, todo punto perteneciente al segmento AB es **eficiente** porque no es dominado ni domina a otro punto de éste segmento. Por ejemplo, comparando E y A, puede observarse que E tiene mayor rendimiento, pero también mayor riesgo que A.

También se puede notar que de entre todos los portafolios eficientes, el representado por el punto A tiene el mínimo riesgo (varianza) y el representado por el punto B el máximo rendimiento esperado (esperanza).

Hasta aquí se ha caracterizado cada portafolio mediante las proporciones k_1 y k_2 invertidas en cada una de las inversiones que la componen. Cuando intervienen solamente dos inversiones es sencillo representar el portafolio por ellas constituido, mediante k_1 y k_2 en el plano. Pero lo más habitual, es que un portafolio este constituido por "n" inversiones, entonces el número de variables que habría que manejar para caracterizar al portafolio es grande, por lo tanto se dificulta su tratamiento matemático y representación gráfica.

Dado que según el CMV los parámetros relevantes de los portafolios son su riesgo y rendimiento, es conveniente representar cada portafolio en función de los mismos, independientemente del número de inversiones que lo constituyen.

Para representar gráficamente, en un espacio **riesgo-rendimiento**, el conjunto de portafolios eficientes formado por el segmento AB mostrado en la figura 1, se necesita expresar los distintos portafolios en función de sus respectivos riesgos (varianza) y rendimientos esperados (esperanza matemática). En la figura 2 se ha representado el conjunto factible BB*, el portafolio A de mínima varianza, que divide al segmento en el conjunto eficiente AB y el ineficiente AB* (excluido A), un portafolio eficiente E y uno ineficiente J. De todos los portafolios mencionados se cuentan como datos las proporciones k_1 y k_2 invertidas en cada una de las inversiones, y mediante las fórmulas:

$$E(R_P) = 11k_1 + 7k_2$$

y

$$\sigma^2(R_P) = 64k_1^2 + 9k_2^2$$

que son la forma de calcular el rendimiento esperado y el riesgo de un portafolio respectivamente, y que hemos estado utilizando como ejemplo desde el capítulo anterior. Ver figura 4.

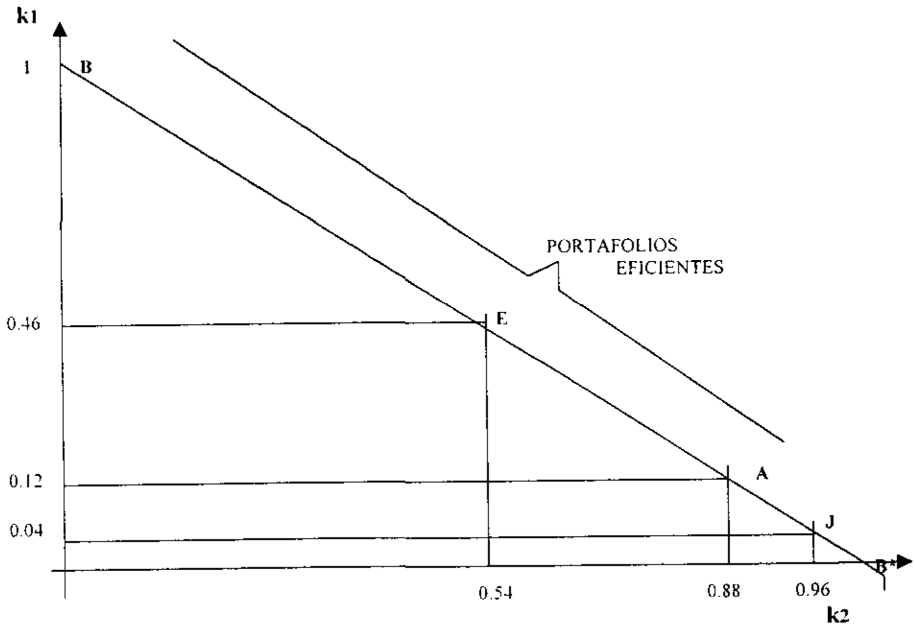


figura 2

conjunto factible del portafolio constituido por dos inversiones de la tabla 1 del capítulo anterior

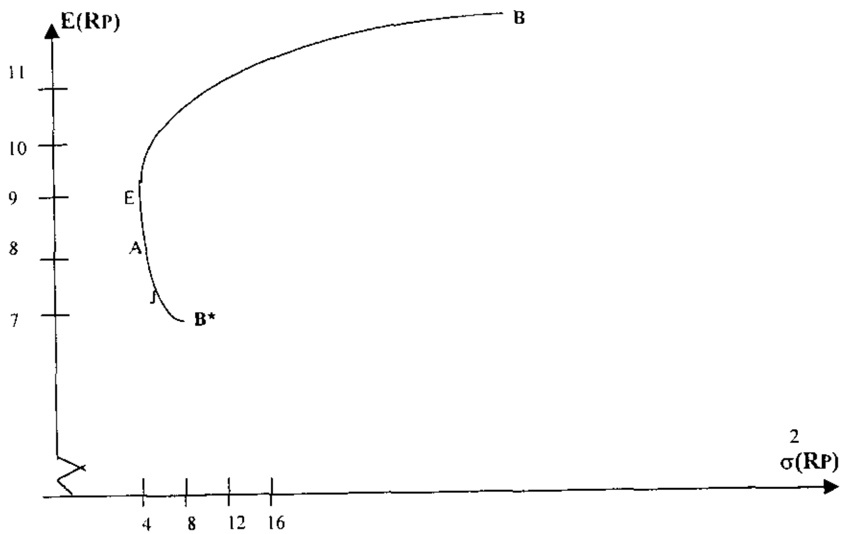


figura 3
frontera eficiente para el portafolio constituido por dos inversiones de la tabla 1 del capítulo anterior

En la figura 3 la curva BB* representa el mismo conjunto factible de la figura 2, pero referido a un sistema de coordenadas riesgo-rendimiento. El segmento de curva B*A *representa el conjunto ineficiente* del conjunto factible, ya que cada uno de sus puntos es dominado por alguno del segmento de la curva AB que tiene el mismo riesgo pero mayor rendimiento. Precisamente el segmento de curva AB representa el conjunto de portafolios eficientes, porque ninguno de ellos domina ni es dominado por otro, de acuerdo al **CMV**.

Esta curva AB, limitada por el punto A representativo del portafolio de mínimo riesgo (varianza) y el B correspondiente al portafolio de mayor rendimiento esperado (esperanza matemática), recibe el nombre de **frontera eficiente**.

En síntesis las *conclusiones* de portafolios constituidos por dos inversiones son las siguientes:

Los inversionistas que solamente desean maximizar el rendimiento optarán por una sola inversión, aquella que posea el máximo rendimiento esperado (punto B).

Los inversionistas que procuren minimizar el riesgo independientemente del rendimiento esperado, necesariamente diversificaran su portafolio en ambas inversiones, con la finalidad de construir el portafolio de mínimo riesgo (punto A).

Si en la toma de su decisión, el inversionista considera simultáneamente el riesgo y el rendimiento según el CMV, entonces no queda caracterizado un portafolio óptimo entre todos los eficientes, a menos que el inversionista especifique sus preferencias subjetivas.

PORTAFOLIOS EFICIENTES CONSTITUIDOS POR TRES TÍTULOS

Se procurará mostrar a continuación que el análisis realizados para portafolios constituidos por dos inversiones puede extenderse a aquellos formados por tres inversiones , y que los resultados que se obtienen son similares.

El rendimiento esperado y la varianza de estos portafolios son:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{3} k_i E(I_i) = k_1 E(I_1) + k_2 E(I_2) + k_3 E(I_3) \qquad (1)$$

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j>1}^{3} k_i\, k_j\, \sigma_{ij} =$$

$$= k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + k_3^2 \sigma_3^2 + 2\, k_1\, k_2\, \sigma_{12} + 2\, k_1\, k_3\, \sigma_{13} + 2\, k_2\, k_3\, \sigma_{23} \qquad (2)$$

Supondremos como antes, a efectos de simplificar, que los tres títulos están incorrelacionados entre sí y por lo tanto las tres covarianzas son nulas ($\sigma 12=\sigma 13=\sigma 23=0$). Entonces la fórmula anterior se reduce a:

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \sigma_i^2 = k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + k_3^2 \sigma_3^2 \qquad (3)$$

Dado que las ki representan las proporciones invertidas en la inversión "i", se tiene la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

Para continuar con el ejemplo que hemos venido trabajando agregaremos una inversión más, como se muestra en la tabla siguiente:

Inversión	**Rendimiento esperado**	**Riesgo**
i	E(Ii)	σ(Ii)
1	11	8
2	7	3
3	8	4

Tabla 1

El análisis gráfico de portafolios constituidos por tres inversiones en función de las proporciones k_i invertidas en cada uno de ellos, no es tan simple como en el caso de dos títulos, pues se requiere un sistema de coordenadas de tres dimensiones. Por lo tanto se grafica en función del riesgo y del rendimiento esperado.

Trataremos entonces de calcular el riesgo, medido a *través de la varianza*, y el rendimiento esperado de algunos portafolios constituidos por distintas proporciones de las inversiones de la tabla 1. Tal como en el caso de los portafolios constituidos por dos inversiones, para tres inversiones el portafolio de rendimiento esperado máximo se obtiene invirtiendo la totalidad de los fondos disponibles en uno solo: el de máximo rendimiento esperado.

Utilizando las fórmulas 1 y 3 es posible calcular este rendimiento esperado máximo y su correspondiente riesgo, (recordando que el portafolio de mayor rendimiento se denota con la letra B)

$$E(R_B) = 1*11 + 0*7 + 0*8 = 11$$

$$\sigma^2(R_B) = 1^2 * 8^2 + 0^2 * 3^2 + 0^2 * 4^2 = 64$$

Resulta que, en un espacio riesgo-rendimiento, el punto B de coordenadas (64,11) pertenece al conjunto factible. Además B es eficiente porque al tener el rendimiento esperado máximo no es dominado por otro, de acuerdo al CMV. Por lo tanto este punto pertenece al conjunto que ya denominamos frontera eficiente. Otro punto que con certeza pertenece al conjunto eficiente es el que representa al portafolio de mínimo riesgo, ya que este *hecho implica, de acuerdo al CMV, que no es dominado por otro.*

Se procurará determinar las proporciones (k_1,k_2,k_3) requeridas para que un portafolio constituido por tres títulos tenga el mínimo riesgo. La metodología que se utilizará para resolver este problema será similar a la utilizada para determinar las cantidades k_1 y k_2 que minimizaron el riesgo de un portafolio constituido por dos inversiones o títulos.

El planteamiento formal es el siguiente:

Minimizar $\sigma^2(R_P)$ (Riesgo)

Sujeto a $k1+k2+k3 = 1$ (Restricción presupuestaria)

Según (3) se tiene

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \sigma_i^2 = k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + k_3^2 \sigma_3^2$$

De la ecuación de restricción presupuestaria se deduce $k_3 = 1 - k_1 - k_2$, y reemplazando en la ecuación anterior queda:

$$\sigma^2(R_P) = k_1^2\,\sigma_1^2 + k_2^2\,\sigma_2^2 + (1 - k_1 - k_2)^2\,\sigma_3^2$$

Esta es una función de dos variables: k_1 y k_2, que deseamos minimizar. La condición necesaria para la existencia de un mínimo es que las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables sean simultáneamente nulas.

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\sigma^2(R_P)}{d\,k_1} = 2\,k_1\,\sigma_1^2 + 2\,(1 - k_1 - k_2)(-1)\,\sigma_3^2 = 0 \\[2em] \dfrac{d\,\sigma^2(R_P)}{d\,k_2} = 2\,k_2\,\sigma_2^2 + 2\,(1 - k_1 - k_2)(-1)\,\sigma_3^2 = 0 \end{cases}$$

Realizando las operaciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales, equivalente al original.

$$\begin{cases} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)\,k_1 + \sigma_3^2\,k_2 = \sigma_3^2 \\[1.5em] \sigma_3^2\,k_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)\,k_2 = \sigma_3^2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por medio de determinantes se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2) & \sigma_3^2 \\ \sigma_3^2 & (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{vmatrix} = (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)\,(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \sigma_3^2$$

$$= \sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \sigma_1^2\,\sigma_3^2 + \sigma_2^2\,\sigma_3^2$$

$$\Delta k_1 = \begin{vmatrix} \sigma_3^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_3^2 & (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{vmatrix} = \sigma_3^2\,(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \sigma_3^4 = \sigma_2^2\,\sigma_3^2$$

$$\Delta k_2 = \begin{vmatrix} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2) & \sigma_3^2 \\ \sigma_3^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \sigma_3^2\,(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - \sigma_3^4 = \sigma_1^2\,\sigma_3^2$$

$$\left.\begin{aligned}
k_1 = \frac{\Delta k_1}{\Delta} &= \frac{\sigma_2^2\,\sigma_3^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \sigma_1^2\,\sigma_3^2 + \sigma_2^2\,\sigma_3^2} \\[2ex]
k_2 = \frac{\Delta k_1}{\Delta} &= \frac{\sigma_1^2\,\sigma_3^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \sigma_1^2\,\sigma_3^2 + \sigma_2^2\,\sigma_3^2} \\[2ex]
k_1 = 1 - k_1 - k_2 &= \frac{\sigma_2^2\,\sigma_3^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \sigma_1^2\,\sigma_3^2 + \sigma_2^2\,\sigma_3^2}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Recordemos que la condición suficiente para la existencia de un extremo local o relativo es que el correspondiente determinante sea positivo, este extremo será un mínimo si además las derivadas segundas

$\dfrac{d^2\,\sigma^2(R_P)}{d\,k_1^2}$ son positivas y un máximo si son negativas.

Calculamos entonces las segundas derivadas de la varianza del portafolio con respecto a *las proporciones* k_1 *y* k_2.

$$\frac{d^2\,\sigma^2(R_P)}{d\,k_1^2} = 2\,\sigma_1^2 + 2\,\sigma_3^2$$

$$\frac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_2^2} = 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2$$

$$\frac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_1\, d k_2} = 2\sigma_3^2$$

$$\frac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_2\, d k_1} = 2\sigma_3^2$$

Estas segundas derivadas son constantes e independientes de las proporciones k_1 y k_2. El valor del determinante es entonces:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_1^2} & \dfrac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_1\, d k_2} \\[2ex] \dfrac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_2\, d k_1} & \dfrac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) & 2\sigma_3^2 \\[2ex] 2\sigma_3^2 & 2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 4(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 4\sigma_3^4$$

$$= 4(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2) > 0$$

Esta última condición permite asegurar la existencia de un extremo local o relativo, el que por lo tanto será un mínimo.

$$\frac{d^2\sigma^2(R_P)}{d k_1^2} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) > 0$$

$$\frac{d^2 \sigma^2(R_P)}{d\, k_2^2} = 2\,(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) > 0$$

El desarrollo formal anterior ha permitido demostrar que las fórmulas (4) determinan las cantidades (k_1,k_2,k_3) que deben invertirse en cada uno de los tres títulos que componen un portafolio, para lograr que éste tenga el mínimo riesgo, sin considerar su rendimiento esperado.

Si se analizan simultáneamente las fórmulas para determinar el portafolio de mínimo riesgo tanto para dos como para tres títulos, las proporciones que minimizan el riesgo (varianza) del portafolio son **todas** distintas de cero. Ello es así por cuánto los numeradores de todas las fórmulas son números positivos. Estos numeradores son las varianzas o producto de varianzas de los distintos títulos, y estas varianzas serán siempre distintas de cero bajo la hipótesis que los rendimientos son aleatorios (con riesgo). Este resultado implica que para minimizar el riesgo debe invertirse **alguna** cantidad en **todos** los títulos disponibles, lo que nos muestra que la cuestión de la minimización del riesgo está íntimamente asociada a la diversificación de las inversiones.

Puede demostrarse que, bajo las hipótesis restrictivas realizadas, las conclusiones precedentes son aplicables a portafolios constituidos por cualquier cantidad de títulos.

Utilizando las fórmulas (4) se está en condiciones de calcular las proporciones que deben invertirse en cada una de las tres inversiones que estamos analizando, a efectos de constituir un portafolio de mínimo riesgo. Ver tabla 1

Recordemos que:

$\sigma_1 = 64$ $\qquad \sigma_2 = 9$ $\qquad \sigma_3 = 16$

Con estos valores pueden calcularse:

$\sigma_1^2\, \sigma_2^2 = 576$ $\qquad \sigma_1^2\, \sigma_3^2 = 1024$ $\qquad \sigma_2^2\, \sigma_3^2 = 144$

$\sigma_1^2\, \sigma_2^2 + \sigma_1^2\, \sigma_3^2 + \sigma_2^2\, \sigma_3^2 = 1744$

Reemplazando en las fórmulas (4) se obtienen las proporciones a invertir en cada inversión, para constituir el portafolio de mínimo riesgo.

$\mathbf{k_1 = \frac{144}{1744} = 0.08}$ $\qquad \mathbf{k_2 = \frac{1024}{1744} = 0.59}$ $\qquad \mathbf{k_3 = \frac{576}{1744} = 0.33}$

Recordando que al portafolio de mínimo riesgo lo hemos denotado con la letra **A**. El rendimiento esperado del portafolio constituido invirtiendo en los tres títulos de nuestro ejemplo las proporciones precedentes es:

$$\mathbf{E(R_A)} = 0.08\ E(I_1) + 0.59\ E(I_2) + 0.33\ E(I_3)$$

$$= (0.08)(11) + (0.59)(7) + (0.33)(8)$$

$$= \mathbf{7.65}$$

El riesgo del portafolio de mínimo riesgo es:

$$\sigma^2\mathbf{(R_A)} = (0.08)^2\sigma_1^2 + (0.59)^2\sigma_2^2 + (0.33)^2\sigma_3^2$$

$$= (0.0064)(64) + (0.3488)(9) + (0.1089)(16)$$

$$= \mathbf{5.28}$$

Se intentara esbozar gráficamente, en un espacio riesgo-rendimiento, el conjunto factible y la frontera eficiente de los posibles portafolios integrados por estas tres inversiones. Dos puntos de este conjunto, que pertenecen a la frontera eficiente, son los representativos de los portafolios de máximo rendimiento y mínimo riesgo que ya fueron determinados. Estos puntos corresponden respectivamente a los portafolios B y A de la tabla 2, en la que aparece también el riesgo y rendimiento de otros portafolios constituidos invirtiendo proporciones variables en los tres títulos.

Portafolios P	**Proporción invertida en k_1**	**Proporción invertida en k_2**	**Proporción invertida en k_3**	**Riesgo $\sigma^2(R_P)$**	**Rendimiento esperado $E(R_P)$**
A	0.08	0.59	0.33	5.28	7.65
B	1	0	0	64	11
B*	0	1	0	9	7
C	0	0	1	16	8
D	0.12	0.88	0	7.89	7.48
E	0.46	0.54	0	16.17	8.84
F	0.04	0.96	0	8.41	7.16
G	0.80	0.10	0.10	41.21	10.30
H	0.35	0.21	0.44	11.33	8.84

TABLA 2

Por ejemplo, el portafolio G constituido invirtiendo el 80% de los fondos en la inversión 1 y un 10% en cada una de las inversiones 2 y 3, tiene un riesgo igual a 41.21 y un rendimiento esperado igual a 10.30, calculados utilizando las fórmulas (1) y (3) de este capítulo. Por ejemplo para el portafolio G.

$$E(R_G) = \sum_{i=1}^{3} k_i \, E(I_i) = (0.80)\,(11) + (0.10)\,(7) + (0.10)\,(8) = \mathbf{10.30}$$

$$\sigma^2(R_G) = \sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \, \sigma_i^2 = (0.80)^2\,(64) + (0.10)^2\,(9) + (0.10)^2\,(16) = \mathbf{41.21}$$

Dibujando en un espacio-rendimiento los puntos representativos de los portafolios de la tabla 2, puede tenerse una idea del conjunto factible de portafolios constituidos por las tres inversiones en cuestión. Se obtiene la siguiente gráfica, la cual recibe el nombre de frontera eficiente; en el capítulo siguiente se desarrollará la teoría para la obtención de la frontera eficiente.

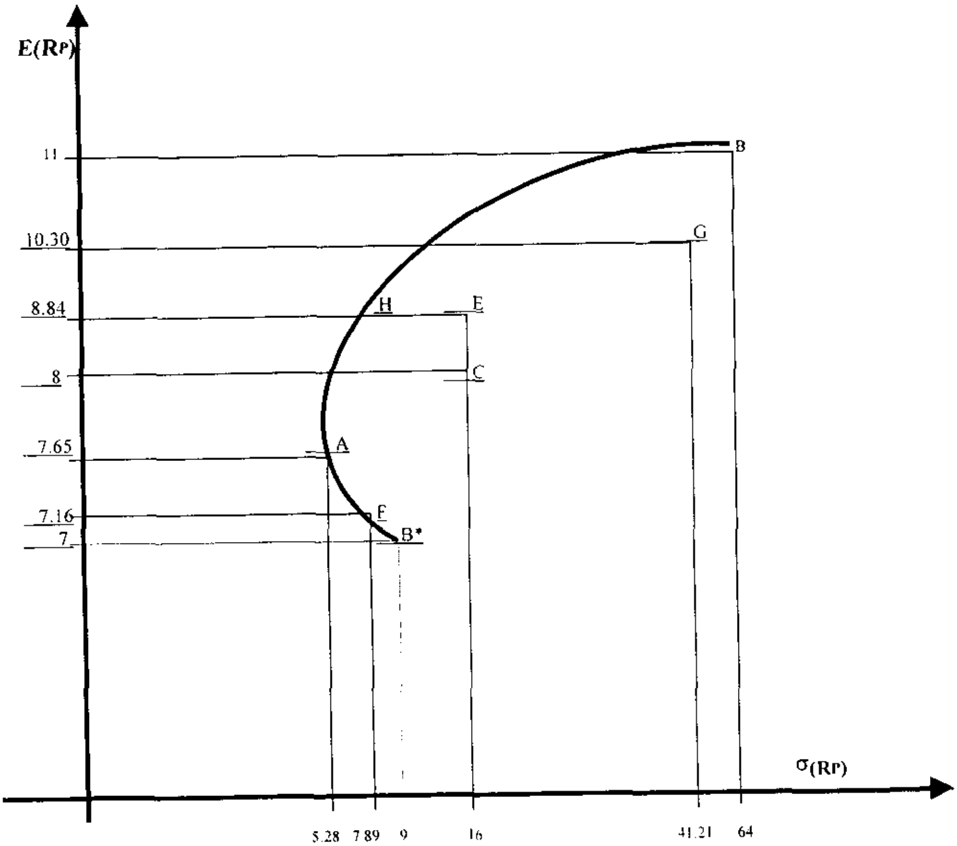


figura 1

Esbozo del conjunto de mínimo riesgo y de la frontera eficiente que corresponden a los portafolios constituidos por los tres títulos incorrelacionados de la tabla 2

Interesa determinar, entre los portafolios de la tabla 2, los que son eficientes, para poder esbozar el trazado de la frontera eficiente. Dos de ellos, (A y B) como ya se ha dicho lo son.

Analicemos ahora, por ejemplo, si el portafolio E es eficiente. Si así lo fuera, no deberá ser dominado según el CMV por ningún otro portafolio. Esto equivale a decir que no deberá existir ningún portafolio con rendimiento esperado de 8.84 y riesgo menor que 16.17. En la tabla 2 vemos que el portafolio H domina a E, por lo que no es eficiente. El problema es ahora saber si H es eficiente.

El planteamiento general de esta cuestión es el siguiente: determinar un portafolio que tenga el mínimo riesgo para un rendimiento esperado prefijado, en este caso 8.84.

La correspondiente formulación matemática es la siguiente:

Minimizar

$$\sigma_P^2 = 64\, k_1^2 + 9\, k_2^2 + 16\, k_3^2$$ **(5)** (Riesgo del portafolio)

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$E(R_P) = 8.84$$ **(6)** (Rendimiento esperado prefijado)

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$ **(7)** (Todos los fondos disponibles se invierten en el portafolio)

De (6) se deduce:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{3} k_i\, E(R_P) = 11\, k_1 + 7\, k_2 + 8\, k_3 = 8.84$$

De donde:

$$k_3 = \frac{8.84 - 11\, k_1 - 7\, k_2}{8}$$ **(8)**

Sustituyendo k_3 en (7) por su valor según (8), realizando las operaciones y despejando k_2, resulta:

$k_2 = 3\,k_1 - 0.84$ **(9)**

Sustituyendo k_2 en (8) según su valor de (9), y realizando las operaciones necesarias , resulta:

$k_3 = -4\,k_1 + 1.84$ **(10)**

Reemplazando k2 y k3 en (5) según sus respectivos valores de (9) y (10), queda:

$$\sigma_P^2 = 64\,k_1^2 + 9\,(3\,k_1 - 0.84)^2 + 16\,(-4\,k_1 + 1.84)^2$$

Operando adecuadamente se tiene:

$$\sigma_P^2 = 401\,k_1^2 - 280.88\,k_1 + 60.52 \qquad \textbf{(11)}$$

Este desarrollo ha permitido, mediante la incorporación de las restricciones a la función objetivo, pasar de una función de tres variables a otra de una sola variable. La condición necesaria para que ésta tenga un valor mínimo es que la primera derivada valga cero. La condición suficiente es que la segunda derivada en ese valor (donde la primera derivada es cero) sea positiva:

$$\frac{d\,\sigma_P^2}{d\,k_1} = 802\,k_1 - 280.88 = 0$$

Resolviendo esta ecuación lineal resulta:

$$k_1 = \frac{280.88}{802} = \qquad \textbf{(12)}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2\,\sigma_P^2}{d\,k_1^2} = 802 > 0$$

cumpliéndose así la condición suficiente.

Utilizando (12),(9) y (10) se calculan las proporciones a invertir en k_2 y k_3

$$k_2 = (3)\,(0.35) - (0.84) = \mathbf{0.21} \qquad \mathbf{(13)}$$

$$k_3 = (-4)\,(0.35) + 1.84 = \mathbf{0.44} \qquad \mathbf{(14)}$$

Nótese que los valores de k_1,k_2 y k_3 cumplen la restricción (7).

Reemplazando (12) en (11) se obtiene la mínima varianza (riesgo).

$$\boldsymbol{\sigma_P^2(MIN) = 11.33}$$

Obviamente si se sustituye (12), (13) y (14) en (5) se obtiene el mismo resultado

La conclusión final es que el portafolio H es eficiente por cuanto su rendimiento esperado es mayor que el del portafolio A de mínima varianza y, además, entre todos los portafolios de rendimiento esperado igual a 8.84, es aquel que tiene el mínimo riesgo

Este procedimiento puede repetirse fijando otros niveles de rendimiento esperado determinándose, en cada caso, el correspondiente portafolio de mínimo riesgo para ese rendimiento prefijado. De esta manera es posible obtener diversos puntos que, como H, representan portafolios eficientes por no ser dominados por otros de acuerdo al CMV. El conjunto de todos esos puntos constituye lo que se ha denominado frontera eficiente. En la figura 2 se ha hecho una representación gráfica aproximada de la misma, es la curva AHB.

Todos los puntos que no pertenezcan a la frontera eficiente son dominados según el CMV por algún punto perteneciente a ella. Ningún punto con un rendimiento esperado inferior al del portafolio de mínimo riesgo A es eficiente por cuanto siempre será dominado por A, que tiene mayor rendimiento y menor riesgo, ejenplo de esta situación son los puntos B*,D Y F.

Portafolios como el C, son ineficientes por cuanto existen otros ubicados en la frontera eficiente que son preferidos al mismo. *El conjunto de portafolios factibles pero* ineficientes es infinito, pues cada portafolio se obtiene determinando una tema (k_1,k_2,k_3) cuyas componentes son las proporciones invertidas en cada uno de los tres títulos o inversiones que forman el portafolio. Pero existen infinitas combinaciones posibles que satisfacen la condición que su suma sea igual a 1. Inclusive en ciertos casos, algunas de las proporciones pueden ser iguales a cero, lo que indica que existe una cantidad de portafolios constituidos sólo por alguno o algunos de estos tres activos. En la tabla 2 de este capítulo se han representado un número muy pequeño de estos portafolios.

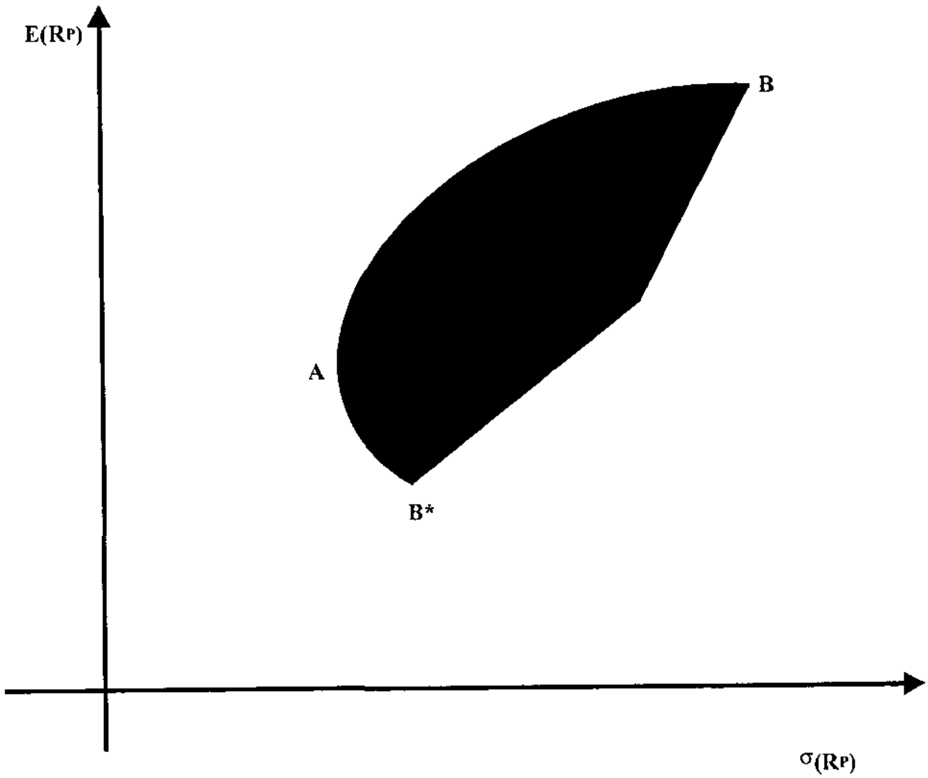


Figura 2.
Conjunto factible (zona sombreada), conjunto de mínimo riesgo (curva B*AB) y frontera eficiente (curva AB)

Un hecho a la vez interesante e importante es que aún en los casos en que los portafolios estuvieran constituidos por una cantidad grande de títulos, el diagrama del conjunto factible y la frontera eficiente siguen siendo similares al de la figura 2. Entonces el conjunto factible de portafolios constituidos por "n" títulos quedará limitado a un espacio riesgo-rendimiento por una frontera representada por la curva B*AB. La característica de portafolios que corresponden a puntos de esta frontera es que para cada nivel de rendimiento esperado tienen el mínimo riesgo, de allí que el conjunto de portafolios representados por puntos de la curva B*AB recibe el nombre de **conjunto de**

mínima varianza o conjunto de mínimo riesgo. Un subconjunto de él, representado por la curva AB, está constituido por portafolios eficientes i de allí el nombre de **conjunto eficiente**. La representación gráfica de este conjunto en el caso general de portafolios constituidos por "n" títulos, es decir la determinación y trazado de la frontera eficiente, será el objetivo del último capítulo de esta tesis.

CAPÍTULO 2
DIVERSIFICACIÓN

PORTAFOLIOS CONSTITUIDOS POR DOS INVERSIONES CON UNA CORRELACIÓN PERFECTA POSITIVA ($\rho = 1$)

Es importante analizar los efectos de la eliminación del supuesto restrictivo de incorrelación entre los rendimientos, con el objeto de determinar los efectos de la diversificación en el caso en que los rendimientos están correlacionados en algún grado. Recordando que el coeficiente de correlación lineal es un número comprendido entre -1 y 1 ($-1<\rho<1$) y que hasta ahora se han analizado portafolios sólo en el caso $\rho = 0$.

Se comenzará el análisis considerando una de las posibilidades extremas: $\rho = 1$, con el objeto de determinar si existe algún portafolio constituido por dos inversiones cuyo riesgo sea menor al de las inversiones que lo componen.

Teniendo en cuenta que $\sigma_{12} = \rho\, \sigma_1\sigma_2$ y considerando la fórmula para calcular el riesgo de un portafolio constituido por dos inversiones:

$$\sigma_P^2 = k_1^2\, \sigma_1^2 + k_2^2\, \sigma_2^2 + 2\, k_1\, k_2\, \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 \qquad (1)$$

Al incorporar a (1) el supuesto $\rho = 1$ se obtiene:

$$\sigma_P^2 = k_1^2\, \sigma_1^2 + k_2^2\, \sigma_2^2 + 2\, k_1\, k_2\, \sigma_1\, \sigma_2$$

El segundo miembro de la expresión anterior es el desarrollo del cuadrado de un binomio, y en consecuencia puede escribirse como:

$$\sigma_P^2 = (k_1\, \sigma_1 + k_2\, \sigma_2)^2$$

Dado que σ^P, k^1, σ^2, k^1, k^2 son todos números positivos, al extraer raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene:

$$\sigma^P = k^1 \sigma^1 + k^2 \sigma^2$$

Teniendo en cuenta que $k_1 + k_2 = 1$, puede eliminarse k_2 de la fórmula anterior:

$$\sigma^P = k^1 \sigma^1 + (1 - k^1) \sigma^2$$

y realizando operaciones adecuadamente, resulta:

$$\sigma_P = (\sigma_1 - \sigma_2)\, k_1 + \sigma_2 \qquad (2)$$

Que representa el riesgo del portafolio medido mediante la desviación estándar de los rendimientos de las inversiones.

Si fuera $\sigma^1 = \sigma^2$, de (2) se deduce que $\sigma^P = \sigma^1$. En este caso los efectos de la diversificación son nulos porque el riesgo del portafolio es igual al de cada uno de las inversiones que la componen.

La otra alternativa posible es σ^1 diferente de σ^2. Supóngase, pues no se pierde generalidad, que $\sigma^1 < \sigma^2$ y $E(I_1) < E(I_2)$. Entonces (2) es la ecuación de una recta con pendiente negativa $(\sigma^1 - \sigma^2)$ y ordenada al origen σ^2, como se muestra en la figura 1.

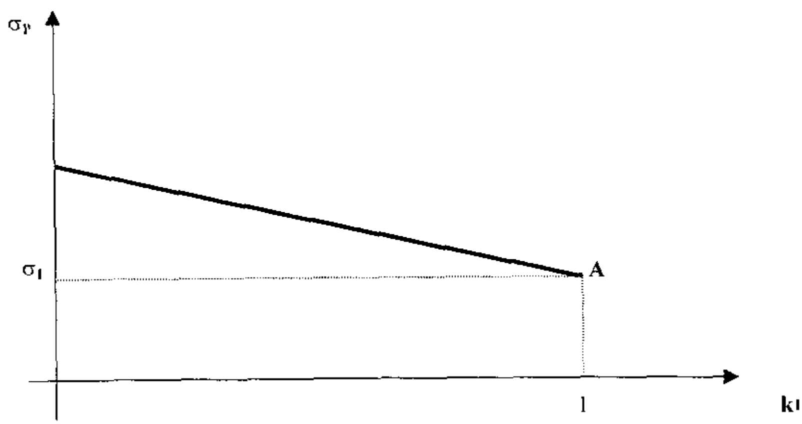


Figura 1.
Riesgo de un portafolio de dos activos en función de la proporción invertida en uno de ellos cuando $\rho = 1$.

Puede observarse que el riesgo del portafolío toma su valor máximo, σ^2, cuando no se invierten fondos en la inversión 1, es decir $k_1 = 0$. A medida que se invierte una mayor proporción en los fondos de la inversión 1 , esto es k_1 toma valores mayores, disminuye el riesgo del correspondiente portafolio. Este riesgo se hace mínimo, y es igual a σ_1, cuando se invierten todos los fondos en la inversión 1, siendo $k_1 = 1$ (punto A de la figura 1).

En conclusión, cuando existe correlación perfecta ($\rho = 1$) entre dos inversiones, no es *posible construir un portafolio con riesgo menor* al de las dos inversiones que lo componen.

La curva de transformación que representa, en un espacio riesgo-rendimiento, todos los portafolios que pueden construirse con dos inversiones cuyos rendimientos están perfectamente correlacionados, puede determinarse en base a las fórmulas (ya antes utilizadas)

$$E(R_P) = k_1\, E(I_1) + k_2\, E(I_2) \qquad y \qquad \sigma_P = (\sigma_1 - \sigma^2)\, k_1 + \sigma_2$$

Que expresan el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio, medido por la desviación estándar de los rendimientos.

Recordando que $k_1 + k_2 = 1$ y sustituyendo en la primera ecuación anterior resulta:

$$E(R_P) = k_1\, E(I_1) + (1 - k_1)\, E(I_2) \qquad \textbf{(3)}$$

Despejando k_1 de (2) del presente capítulo, resulta:

$$k_1 = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{1 - \sigma_2}$$

Sustituyendo este último valor de k_1 en (3) se obtiene:

$$E(R_P) = \frac{(\sigma_P - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} E(I_1) + \frac{(1 - \sigma_P - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} E(I_2)$$

Operando convenientemente representa la fórmula (4) que representa la ecuación de una recta en el espacio riesgo-rendimiento, dibujada en la figura 2.

$$\mathbf{E(R_P) = \frac{(E(I_1) - E(I_2))}{\sigma_1 - \sigma_2} \sigma_P + \frac{\sigma_1 E(I_2) - \sigma_2 E(I_1)}{\sigma_1 - \sigma_2}} \qquad \textbf{(4)}$$

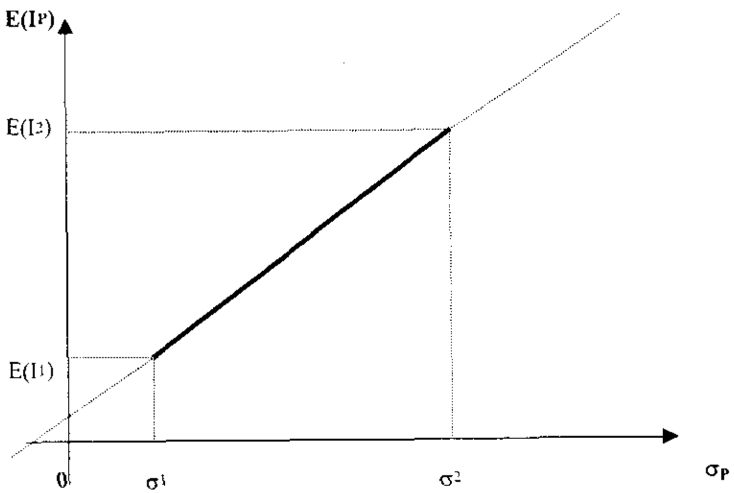


Figura 2.
Curva de transformación (frontera eficiente entre el riesgo y rendimiento esperado de un portafolio constituido por dos inversiones perfectamente correlacionadas $\rho = 1$)

Hay que notar que si en la ecuación (4) se sustituye la variable σ^P por σ^1 y σ^2 sucesivamente, se obtienen respectivamente $E(I_1)$ y $E(I_2)$, lo que muestra que pertenecen a la recta mencionada el punto A representativo del portafolio de mínimo riesgo y el punto B representativo del portafolio constituido exclusivamente por la inversión de mayor riesgo. La parte punteada de la recta AB de la figura 2 corresponde a combinaciones no factibles de las inversiones dadas, ya que las mismas resultarían de asignar valores negativos a algunas de las proporciones k_1 o k_2.

En consecuencia, la curva de transformación de riesgo-rendimiento esperado de portafolios constituidos por dos inversiones correlacionadas perfectamente ($\rho = 1$), es un segmento similar al AB de al figura 2. Queda comprobado el hecho de que en este caso ningún portafolio tiene riesgo menor al de las inversiones que lo componen.

En el ejemplo siguiente se tiene como finalidad el comprobar numéricamente todas las conclusiones anteriores. La tabla 1 muestra el rendimiento esperado y riesgo, medido mediante la desviación estándar, de dos inversiones.

Inversión "i"	**E(Ii)**	σ_i
1	7	3
2	11	8

Tabla 1

Mediante la fórmula (2) se puede calcular el riesgo de portafolios que incluyen distintas proporciones de la inversión 1 como se muestra en las dos primeras columnas de la tabla 2. Puede observarse que con ningún portafolio se consigue un riesgo menor al del título 1.

k_1	σ_P	$E(I_P)$
0.00	8	11
0.20	7	0.00
0.40	6	9.4
0.60	5	8.6
0.80	4	7.8
1.00	3	7.0

Tabla 2

En la figuras 3, se ilustra el caso particular de la figura 1. En la tercera columna de la tabla 2 se han calculado los rendimientos esperados de los distintos portafolios en función del riesgo de los mismos que figura en la columna anterior. Para tal efecto se utilizó la fórmula (4) y los resultados se presentan gráficamente en la figura 4, que es un caso particular de la figura 2.

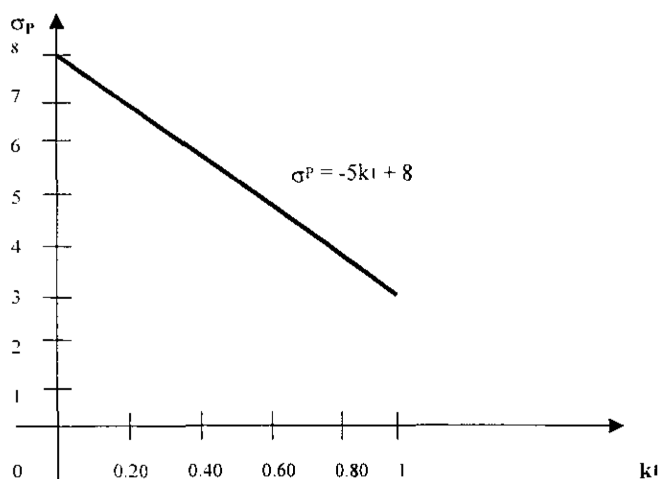


Figura 3.

PORTAFOLIOS CONSTITUIDOS POR DOS INVERSIONES CON UNA CORRELACIÓN PERFECTA NEGATIVA (ρ = -1)

Verificando que no es posible disminuir el riesgo mediante diversificación de la inversión, en el caso en que el coeficiente de correlación lineal es $\rho = 1$, entonces se analizará a continuación la otra posibilidad extrema: correlación lineal perfecta negativa, es decir $\rho = -1$. La varianza de los rendimientos de un portafolio constituido por dos títulos o inversiones, es en este caso de acuerdo a (1) del capitulo anterior:

$$\sigma_P^2 = k_1^2\, \sigma_1^2 + k_2^2\, \sigma_2^2 - 2\, k_1\, k_2\, \sigma_1\, \sigma_2$$

Que puede escribirse como:

$$\sigma_P^2 = (k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2)^2$$

Para poder determinar la desviación estándar σ_P, se debe extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad anterior. Para ello hay que recordar que

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Dado que $\sigma_P \geq 0$, se tiene:

$$\sigma_P = |k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2|$$

Si se aplica esta igualdad al concepto de valor absoluto, se tienen las siguientes dos posibilidades, según que $k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2$ sea positivo, negativo o cero.

Si $\quad k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2 \geq 0 \quad$ entonces $\quad \sigma_P = k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2$

Si $\quad k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2 < 0 \quad$ entonces $\quad \sigma_P = -(k_1\, \sigma_1 - k_2\, \sigma_2)$

Teniendo en cuenta que $k_2 = 1 - k_1$, resulta:

Si $k_1 \sigma_1 - (1 - k_1)\sigma_2 \geq 0$ entonces $\sigma_P = k_1 \sigma_1 - (1 - k_1)\sigma_2$

Si $k_1 \sigma_1 - (1 - k_1)\sigma_2 < 0$ entonces $\sigma_P = -(k_1 \sigma_1 - (1 - k_1)\sigma_2)$

Realizando las operaciones adecuadas se llega a las siguientes desigualdades:

Si $k_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ entonces $\sigma_P = (\sigma_1 + \sigma_2)\, k_1 - \sigma_2$ **(1)**

Si $0 \leq k_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ entonces $\sigma_P = -(\sigma_1 + \sigma_2)\, k_1 - \sigma_2$ **(2)**

En la figura 1 se han dibujado las rectas BA y AB* que representan respectivamente las ecuaciones (2) y (1). Se nota en la figura que sólo se han trazado con línea entera los segmentos BA y AB*, dado que deben tenerse en cuenta las condiciones bajo las que se cumplen (1) y (2) y además que la proporción k_1 es menor o igual que 1. Si $k_1 = 0$ entonces:

$$k_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

y en consecuencia debe utilizarse (2), de donde resulta $\sigma_P = \sigma_2$, que corresponde al punto B de la figura 1. Todo otro valor positivo k_1, que sea menor a

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

originará un portafolio cuya desviación estándar σ_P deberá calcularse también mediante (2) y estará representado por un punto perteneciente al segmento BA. Si la proporción invertida en el la inversión 1 es

$$k_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

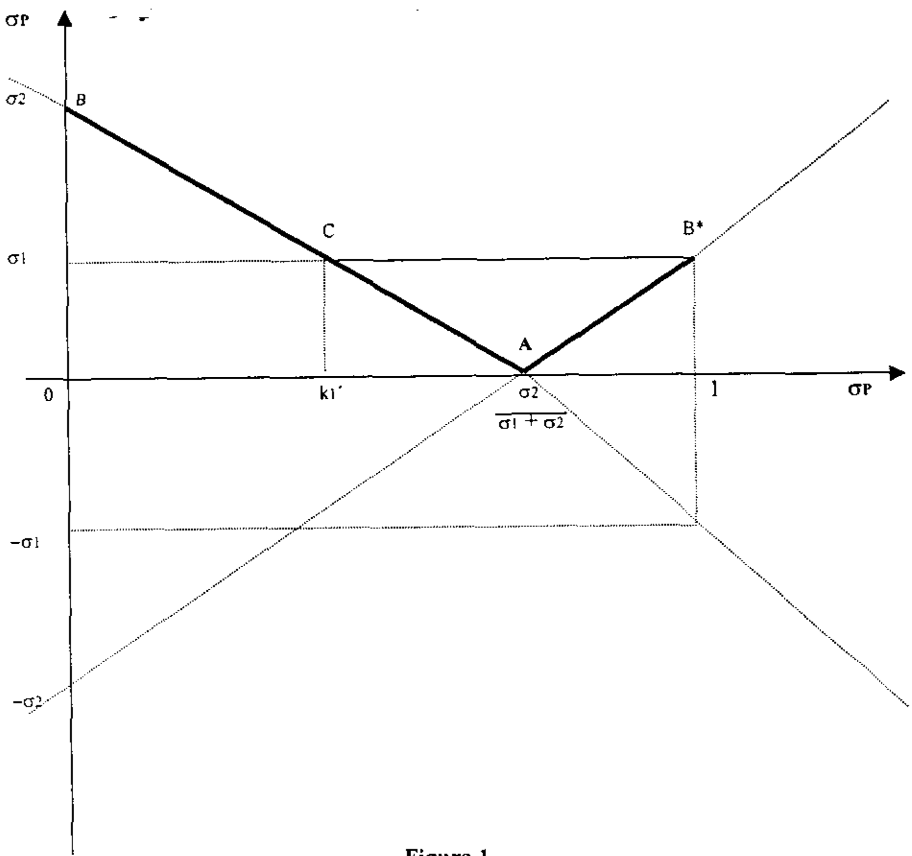


Figura 1.
Riesgo σ_P de un portafolio de dos títulos en función de la proporción k1 invertida en uno de ellos cuando $\rho = -1$

puede verificarse que $\sigma_P = 0$ tanto en (1) como en (2) (punto A de la figura 1). Si la *proporción* k_1 *es mayor que*

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

entonces debe utilizarse (1), obteniéndose el riesgo de portafolios representados por puntos del segmento AB*. Finalmente si $k_1 = 1$, de (1) resulta $\sigma_P + \sigma_1$ que corresponde al punto B*.

La carencia de significado económico de la zona punteada en las dos rectas de la figura 1, es evidente si se tiene en cuenta que mientras $0 \leq k_1 \leq 1$ los puntos de esas rectas representarían portafolios con riesgo σ_P negativo, lo que es imposible.

De todo lo anterior puede inferirse que, cuando se consideran portafolios constituidos por dos inversiones con correlación perfecta negativa ($\rho = -1$), existen algunas de ellas con riesgo inferior al del título que lo tiene menor. Todos los portafolios que contengan una porción de la inversión 1 comprendida entre k'_1 y 1 ($k'_1 < k_1 < 1$) tendrán un riesgo σ_P menor que σ_1 (ver figura 1). Es más, en este caso particular las ventajas de la diversificación de las inversiones son tales que existe una combinación que origina un **portafolio sin riesgo** (punto A de la figura 1).

Se completará el análisis del caso $\rho = -1$ considerando al mismo la consideración del rendimiento esperado, a fin de obtener la correspondiente curva de transformación en un espacio de riesgo-rendimiento esperado.

Si la proporción invertida en la inversión 1 cumple la condición

$$k_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

entonces de (1) se obtiene:

$$k_1 = \frac{\sigma_P + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

y reemplazando este valor en (3) del capítulo anterior puede calcularse el rendimiento esperado de cada portafolio en función de su riesgo:

$$E(I_P) = \left(\frac{\sigma_P + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) E(I_1) + \left(1 - \frac{\sigma_P + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) E(I_2)$$

Finalmente, luego de realizar las apropiadas operaciones, resulta que:

Si $\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq k_1 \leq 1$ entonces

$$E(I_P) = \frac{(E(I_1) + E(I_2))}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_P + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2)) \qquad (3)$$

De (2) puede obtenerse *el valor* k_1 *en el caso que*

$$k_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad \text{resulta}$$

$$k_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_P}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

reemplazando este valor de k_1 en la fórmula (3) del capítulo anterior y realizando adecuadas operaciones se deduce que:

$$\text{Si} \qquad 0 \leq k_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad \text{entonces}$$

$$E(I_P) = \frac{(E(I_2) - E(I_1))}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_P + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2)) \qquad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) tienen por representación gráfica rectas como pueden apreciarse en la figura 2. Sin embargo, sólo los puntos pertenecientes a los segmentos BA y AB* representan portafolios factibles bajo la restricción $k_1 + k_2 = 1$. Si $k_1 = 0$ de (2) surge $\sigma_P = \sigma_2$ (punto B de la figura 1) y de (4) que $E(I_P) = E(I_2)$. Este portafolio está representado, en el espacio riesgo-rendimiento esperado de la figura 2, por el punto B. Si k_1 es mayor que cero pero menor que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

para obtener el riesgo del correspondiente portafolio se debe seguir utilizando (2), pudiendo verificarse en la figura 1 que a medida que se incrementa k_1 decrece el riesgo σ_P. De (4)se desprende que si decrece σ_P decrecerá también $E(I_P)$ hasta que

$$k_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

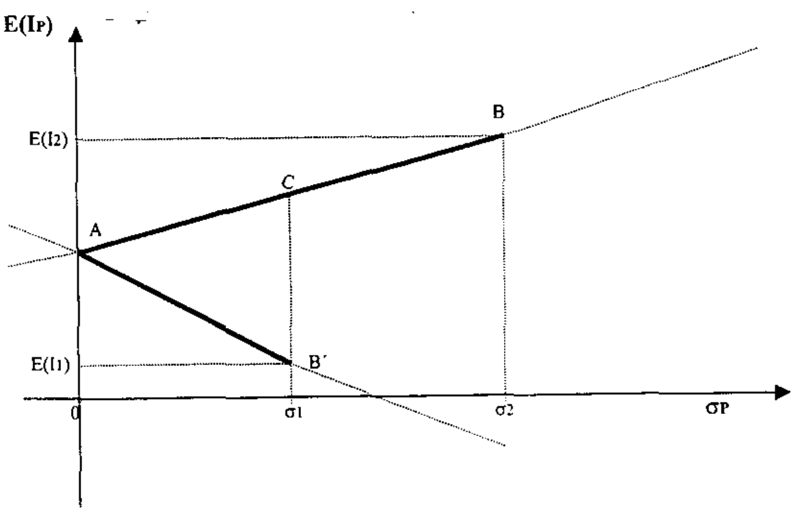


Figura 2.
Curva de transformación (conjunto de mínimo riesgo) entre riesgo y rendimiento esperado de un portafolio formado por dos inversiones perfectamente correlacionados en forma negativa ($\rho = - 1$).

en cuyo caso $\sigma_P = 0$

$$E(I_P) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2))$$

Este portafolio está representado por el punto A de la figura 2. En resumen si

$$0 \leq k_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

entonces la representación gráfica de (4) es el segmento BA. Luego, si

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq k_1 < 1$$

la fórmula (1) permite calcular el riesgo del correspondiente portafolio que, como puede apreciarse en la figura 1, es creciente con k_1. Llevando los valores de σ_P así calculados a la ecuación (3) se obtienen los correspondientes rendimientos esperados $E(I_P)$ que serán decrecientes con σ_P, ya que (3) es la ecuación de una recta con pendiente negativa. Finalmente, si $k_1 = 1$ resulta $\sigma_P = \sigma_1$ y, de (3), $E(I_P) = E(I_1)$, portafolio representado por el punto B´.

Como conclusión de todo lo expuesto parece conveniente remarcar que si se consideran portafolios constituidos por dos inversiones correlacionadas negativamente en forma negativa perfecta ($\rho = -1$), se observa que:

i) diversificando convenientemente pueden obtenerse portafolios con riesgo menor al de las inversiones que lo componen (representados por los puntos de la curva CAB* de la figura 2);

ii) existe un portafolio sin riesgo ($\sigma_P = 0$) y con un rendimiento esperado positivo (ver fórmulas (3) y (4))

$$E(I_P) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2))$$

que es un promedio de los rendimientos esperados de ambas inversiones, ponderado por el riesgo (punto A de la figura 2);

iii) para cada nivel del riesgo menor a σ_1 existen dos portafolios factibles con distinto rendimiento esperado. Obviamente el que lo tenga menor es ineficiente de acuerdo al CMV (ver segmento AB´ en la figura 2).

Ejemplo: Un inversionista se encuentra ante las siguientes alternativas de inversión, representadas en la siguiente tabla 1, bajo el supuesto de que las inversiones 1 y 2 son correlacionadas en forma perfecta negativa ($\rho_{12} = -1$)

Título "i"	**$E(I_i)$**	σ_i
1	7	3
2	11	8

Tabla 1

Por medio de las fórmulas (1) y (2) es posible calcular el riesgo de portafolios constituidos por distintas proporciones de la inversión 1. Dado que la fórmula a utilizar depende de que la proporción invertida en el mismo sea mayor o menor que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

previamente se calcula este valor, resultando:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{8}{3 + 8} = 0.7273$$

En las dos primeras columnas de la tabla 2 figuran los niveles del riesgo σ_P correspondiente a algunos valores de k_1, calculados mediante:

$\sigma_P = 11\, k_1 - 8$ si $k_1 = 0.7273$ y

$\sigma_P = - 11\, k_1 + 8$ si $0 \leq k_1 = 0.7273$

k_1	σ_P	$E(I_i)$
0.0000	8.00	11.00
0.2000	5.80	10.20
0.4000	3.60	9.40
0.7273	0.00	8.09
0.8000	0.80	7.80
0.9000	1.90	7.40
1.0000	3.00	7.00

Tabla 2

En la figura 3 se representan los datos contenidos en las dos primeras columnas de la tabla 2 que es un caso particular de la figura 1.

Puede observarse que el punto A representa un portafolio con riesgo $\sigma_P = 0$, obtenido invirtiendo el 73 % en la inversión 1 y el 27 % en la inversión 2. Todos los portafolios que contengan más del 45 % de la inversión 1 tienen un riesgo inferior a 3, es decir menos que el de cualquiera de las inversiones que la componen (puntos de la curva CAB*, excluidos los extremos).

Con el objeto de pasar a un espacio riesgo-rendimienro esperado, en la tercera columna de la tabla 2 se han calculado los distintos rendimientos esperados en función del riesgo, utilizando para ello las fórmulas (3) o (4) según sea el caso. De acuerdo a los datos de la tabla 1, se obtiene:

Si $0.7273 \leq k_1 \leq 1$ entonces $E(I_P) = - 0.36\ \sigma_P + 8.09$

Si $0 \leq k_1 < 0.7273$ entonces $E(I_P) = 0.36\ \sigma_P - 8.09$

En la figura 4 se realizó la correspondiente representación gráfica que es un caso particular de la figura 2. Puede observarse que los portafolios representados por puntos de la curva CAB* tienen riesgo menor que 3. El punto A representa un portafolio sin riesgo con un rendimiento esperado igual a 8.09, mayor que el de la inversión 1.

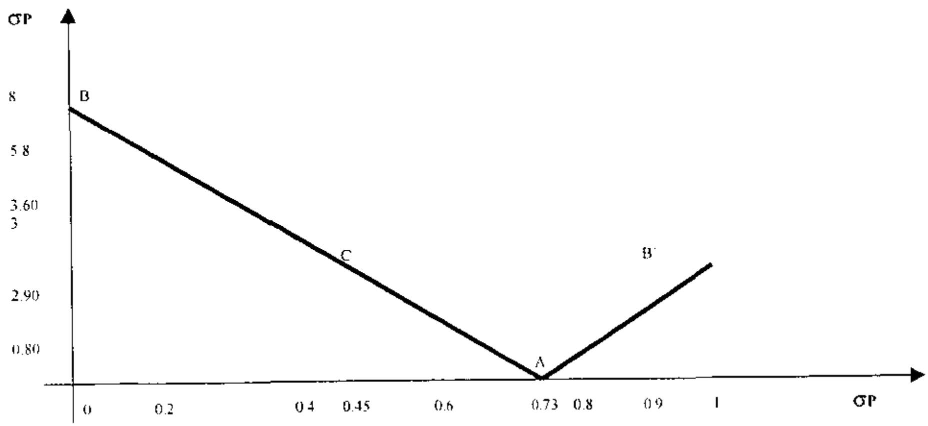


Figura 3

PORTAFOLIOS CONSTITUIDOS POR DOS INVERSIONES INCORRELACIONADAS ($\rho = 0$)

Analizados los efectos de la diversificación al construir portafolios de dos inversiones correlacionadas perfectamente tanto en forma positiva como negativa ($\rho = 1$ y $\rho = -1$), como un paso previo al análisis general, se profundizará el estudio del caso intermedio de dos títulos incorrelacionados ($\rho = 0$). En esta hipótesis, la varianza de un portafolio constituido por dos inversiones es:

$$\sigma_P^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2$$

Teniendo en cuenta que la suma de las proporciones invertidas es 1, puede sustituirse k_2 por $(1 - k_1)$:

$$\sigma_P^2 = k_1^2\sigma_1^2 + (1 - k_1)^2\sigma_2^2$$

Desarrollando el cuadrado y agrupando términos:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, k_1^2 - 2\, \sigma_2^2 k_1 + \sigma_2^2 \qquad (1)$$

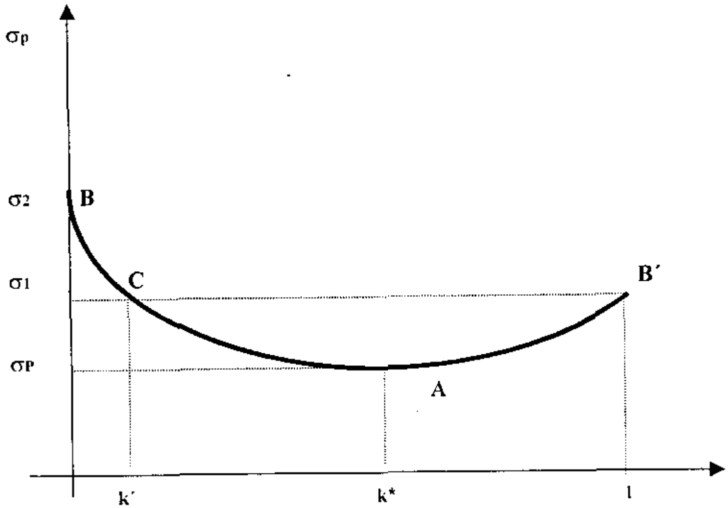
que expresa la varianza del portafolio en función de la proporción invertida en la inversión 1. La desviación estándar es:

$$\sigma_P = \left((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, k_1^2 - 2\, \sigma_2^2 k_1 + \sigma_2^2\right)^{1/2} \qquad (2)$$

Tanto (1) como (2) expresan, de distinta manera, la relación entre el riesgo del portafolio y la proporción invertida k_1, la que está representada gráficamente en la figura 1.

La curva representativa de la relación entre k_1 y σ_P, expresada por cualquiera de las fórmulas (1) o (2), es una hipérbola y consta de dos ramas. La rama inferior si bien satisface las dos fórmulas matemáticas, carece de sentido en este contexto pues corresponde a valores negativos de la desviación estándar σ_P. La rama superior es la única que satisface la condición $\theta \leq k_1 \leq 1$. Los puntos BB´ se determinan haciendo respectivamente $k_1 = 0$ y $k_1 = 1$ en cualquiera de las fórmulas (1) o (2).

Ya se ha demostrado que en el caso de inversiones incorrelacionadas, la proporción óptima k^*_1 que origina el portafolio con riesgo mínimo es:



Riesgo σ_p de una cartera de dos activos en función de la proporción k_1 invertida en uno de ellos cuando $\rho = 0$

FIGURA 1

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

La expresión que permite el cálculo del riesgo mínimo se obtiene sustituyendo el citado valor de k^*_1 en (2):

$$\sigma^*_p = \left((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 - 2 \, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \, \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \right)^{1/2}$$

Realizando las operaciones indicadas se llega a:

$$\sigma^*_P = \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^{1/2} \qquad (3)$$

Estos valores k^*_1 y σ^*_P son las coordenadas del punto A en la figura 1. El riesgo mínimo σ^*_P es menor que σ_1; ya que el cuadrado del riesgo mínimo es:

$$\sigma^{*2}_P = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_1^2 \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$$

si se tiene en cuenta que:

$$0 < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < 1$$

(pues es un cociente en el que el dividendo es menor que el divisor y las varianzas son todas positivas) resulta inmediatamente que:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_1^2$$

pues, al multiplicar cualquier número por otro positivo y menor que la unidad, se obtiene un resultado menor que el número original. Resumiendo, se tiene:

$$\sigma^{*2}_1 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_1^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la expresión anterior resulta, tal como se había anticipado, $\sigma^*_P < \sigma_1$. De este resultado se deduce que, en el caso de un portafolio constituido por dos inversiones con una correlación lineal igual a cero, es posible formar portafolios con riesgo menor al de ambas inversiones. (Recuérdese que se ha supuesto que $\sigma_1 < \sigma_2$). Todos los portafolios representados en la figura 1 por puntos pertenecientes al arco CB´, excluidos los extremos, tienen riesgo menor al de cada una de las inversiones que los componen. Para determinar analíticamente las proporciones que permiten formar tales portafolios es necesario, primeramente, notar que los puntos C y B´ corresponden a portafolios cuyo riesgo es igual a σ_1. Entonces , de (1):

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, k_1^2 - 2\,\sigma_2^2 k_1 + \sigma_2^2 < \sigma_1^2$$

Pasando σ_1^2 al primer miembro se obtiene una ecuación de segundo grado del tipo
$ax^2 + bx + c = 0$

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, k_1^2 - 2\,\sigma_2^2 k_1 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = 0$$

que aplicada a este caso particular da:

$$k_1 = \frac{2\,\sigma_2^2 \,(+/-) \sqrt{4\,\sigma_2^4 - 4\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\,(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}}{2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Haciendo los cálculos correspondientes se obtienen las dos raíces o soluciones:

$$\mathbf{k_1 = 1} \qquad \mathbf{y} \qquad k'_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad \mathbf{(4)}$$

En consecuencia, bajo la hipótesis de incorrelación entre ambas inversiones, es posible obtener ganancias de riesgo por diversificación siempre que la proporción invertida en la inversión de menor riesgo cumpla con la condición:

$$\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < k_1 < 1$$

Con el fin de aplicar el CMV a la selección de portafolios, es necesario hacer el análisis correspondiente en un espacio riesgo-rendimiento esperado. Para ello se partirá de la ecuación mediante la cual se calcula el rendimiento de un portafolio:como enseguida se muestra:

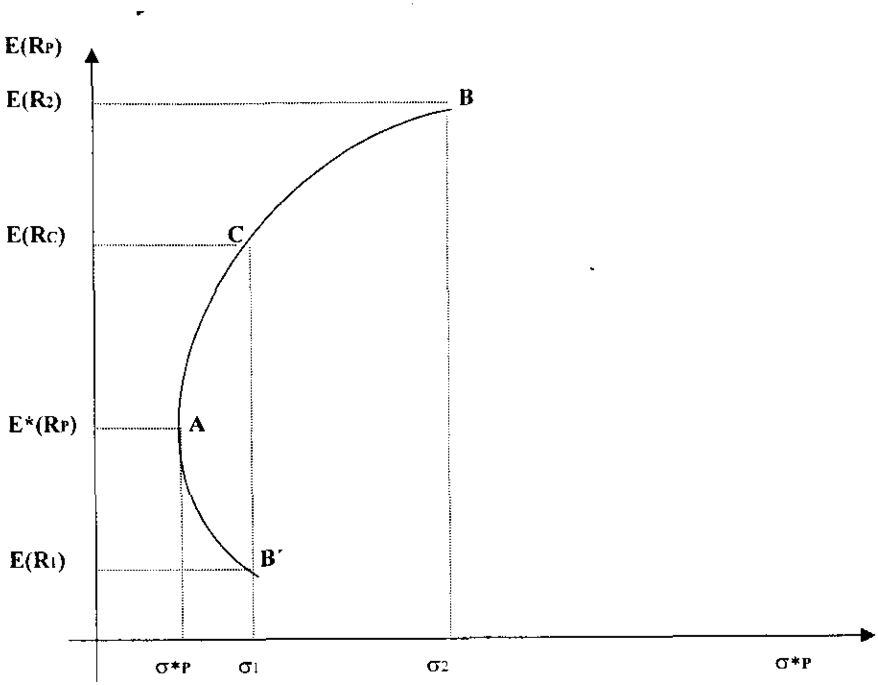
$$E(I_P) = k_1\, E(I_1) + (1-k_1)\, E(I_2)$$

$$\mathbf{k_1 = \frac{E(I_P) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}} \qquad \mathbf{(5)}$$

Sustituyendo este valor en (1) se obtiene:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 - 2\,\sigma_2^2\left(\frac{E(I_P) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + 2\,\sigma_2^2 \qquad (6)$$

La fórmula (6) determina la relación entre el riesgo σ_P y el rendimiento esperado $E(I_P)$ de portafolios constituidos por dos inversiones incorrelacionadas. En los casos anteriores se consiguió expresar el rendimiento esperado en función del riesgo en forma explícita, lo que no se hará en este caso pues realmente dificultuoso despejar $E(I_P)$ en la fórmula (6). Sin embargo, en base a dicha fórmula, que relaciona implícitamente el riesgo σ_P con el rendimiento esperado $E(I_P)$, se podrá esbozar la forma de la curva de transformación correspondiente. Los resultados de este análisis pueden visualizarse en la figura 2.



Curva de transformación para dos activos incorrelacionados (ρ=0)
FIGURA 2

El punto B se ha determinado reemplazando en la fórmula (6) $E(I_P)$ por $E(I_2)$. En forma análoga se determinó el punto B´. Se sabe que invirtiendo la proporción

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

se obtiene un portafolio de mínimo riesgo; el rendimiento esperado de tal portafolio se puede calcular reemplazando el mencionado valor de k^*_1 en la siguiente fórmula que como anteriormente se mostró permite calcular el rendimiento de un portafolio formado por dos inversiones, como se muestra:

$$E^*(I_P) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} E(I_1) + \left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) E(I_2)$$

Realizando algunas operaciones queda:

$$E^*(I_P) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left[E(I_1) - E(I_2) \right] + E(I_2)$$

Si en la fórmula (6) se reemplaza el valor de $E^*(I_P)$ se obtiene el riesgo mínimo σ^*_P correspondiente, y en consecuencia un nuevo punto de la curva de transformación, el que se ha denominado A en la figura 2, como se muestra:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left\{ \frac{\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2) \right) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)} \right\}^2 - 2\sigma_2^2 \frac{\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2) \right) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)} + \sigma_2^2$$

Realizando las operaciones anteriores se obtiene:

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma^{*2}_P$$

que es el cuadrado del mínimo riesgo que ya se ha obtenido en (3).

En forma similar puede mostrarse que el punto C, que separa los portafolios que originan ganancias de riesgo de aquellos que no las originan, pertenece a la curva de transformación. Como enseguida se muestra:

Ya se obtuvo en (4) la proporción

$$k'_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

que corresponde invertir para obtener el portafolio representado por C; luego, reemplazando este valor en la ecuación que permite calcular el rendimiento de un portafolio formado por dos títulos, se obtiene el rendimiento esperado de este portafolio, según se muestra a continuación:

$$E(I_P) = k_1\, E(I_1) + (1-k_1)\, E(I_2)$$

Sustituyendo k_1 por k'_1 y efectuando el producto del segundo sumando:

$$E(I_P) = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}\, E(I_1) + E(I_2) - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}\, E(I_2)$$

Extrayendo un factor común, se tiene:

$$E(I_P) = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \left(E(I_1) + E(I_2) \right) + E(I_2) = E(I_C)$$

Sustituyendo este valor de $E(I_P)$ en la fórmula (6) se puede obtener el riesgo de este portafolio C.

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left\{ \frac{\left(\left[\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2) \right] - E(I_2) \right)}{E(I_1) - E(I_2)} \right\}^2 - 2\sigma_1^2 \frac{\left(\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2) \right) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)} + \sigma_2^2$$

Realizando las operaciones se obtiene $\sigma_P^2 = \sigma_1^2$, lo que completa la demostración de que las coordenadas del punto C, ($E(I_P)$, σ_1), verifican la fórmula (6). La representación gráfica en un espacio riesgo-rendimiento esperado de la fórmula (6) es una hipérbola (ver figura 2). De esta curva se ha marcado con trazo continuo sólo el arco B´B perteneciente a una de sus ramas. Ello es así por cuanto esos puntos son los únicos que cumplen la restricción $k_1 + k_2 = 1$, siendo tanto k_1 como k_2 positivos o nulos. Enseguida se aplicaran los resultados obtenidos al análisis concreto de los dos títulos de la tabla 1, bajo la hipótesis $\rho = 0$.

Inversión i	**$E(I_i)$**	σ_i
1	7	**3**
2	**11**	**8**

Tabla 1

En este caso particular la fórmula (2) toma los siguientes valores:

$$\sigma_P = \left(73\, k_1^2 - 128\, k_1 + 64 \right)^{1/2} \qquad (7)$$

que permite calcular el riesgo de portafolios constituidos por distintas proporciones k_1 de la inversión 1. Los resultados obtenidos se muestran en las dos primeras columnas de la tabla 2 y su representación gráfica es la figura 3.

k_1	σ_P	$E(I_P)$
0	**8.00**	**11.00**
0.10	7.20	**10.60**
0.20	**6.43**	**10.20**
0.40	**4.95**	**9.40**
0.60	**3.67**	**8.60**
0.75	**3.00**	**7.99**
0.80	**2.88**	**7.80**
0.88	**2.81**	**7.49**
1.00	**3.00**	**7.00**

Tabla 2

El punto A de la figura 3 representa el portafolio de riesgo mínimo. La proporción k'_1 es

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{64}{64 + 9} = 0.88$$

y el riesgo del correspondiente portafolio es, de acuerdo a la fórmula (3):

$$\sigma^*_P = \left(\frac{(9)\ (64)}{9 + 64}\right)^{1/2} = \left(\frac{576}{73}\right)^{1/2} = (7.89)^{1/2} = 2.81$$

Debe notarse que este riesgo mínimo es menor que el de la inversión 1($\sigma_1 = 3$) y en consecuencia se obtiene una ganancia de riesgo por diversificación. Surge entonces naturalmente el problema de determinar dentro de que rango debe variar k_1 para obtener portafolios con riesgo inferior a σ_1. Aplicando (4) se tiene:

$$k'_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{64 - 9}{64 + 9} = \frac{55}{73} = 0.75$$

valor que si se sustituye en (7) origina como resultado $\sigma_P = 3 = \sigma_1$, y se completa el cálculo de las coordenadas del punto C de la figura 3. Entonces, cada vez que, $0.75 < k_1 < 1$ se obtendrá portafolios que originan ganancia de riesgo por diversificación.

Los puntos B y B´ de la figura 3 corresponden a las inversiones 2 y 1 respectivamente, cuyos riesgos se obtienen sustituyendo k_1 en la fórmula (7) por 0 y 1 respectivamente.

En la figura 4 se representa, en un sistema de coordenadas riesgo-rendimiento esperado, la curva de transformación obtenida de acuerdo a la expresión general (6):

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{E(I_P) - 11}{-4}\right)^2 - 128\left(\frac{E(I_P) - 11}{-4}\right) + 64$$

Realizando operaciones resulta la ecuación de la mencionada curva:

$$\mathbf{\sigma_2^2 = 4.5625\ E(I_P)^2 - 68.3750\ E(I_P) + 264.0625} \qquad \mathbf{(8)}$$

Se puede verificar que los valores correspondientes de las dos últimas columnas de la tabla 2 satisfacen la fórmula (8); por ejemplo, si en dicha fórmula se hace $E(I_P) = 11$ se obtiene $_2$ = 64, de donde $\sigma_P = 8$. Los valores de la tercera columna se calcularon madiante
σ_P
la fórmula: $E(I_P) = 7\ k_1 + 11\ (1 - k_1)$, la cual fue obtenida en el presente capítulo.

Puede observarse en la figura 4 que cuando se desarrolla el análisis en el espacio riesgo-rendimiento esperado, el punto A representa el portafolio de mínimo riesgo y el punto C separa los portafolios que originan ganancias de riesgo por diversificación, (representados por los puntos del arco CAB′), de los que no las originan. Una ventaja del análisis del espacio riesgo-rendimiento esperado es que permite visualizar con facilidad los portafolios eficientes según el CMV: por ejemplo, no todos los del mencionado arco CAB′ tienen dicha característica, pues sólo son eficientes los representados por los puntos del arco CA.

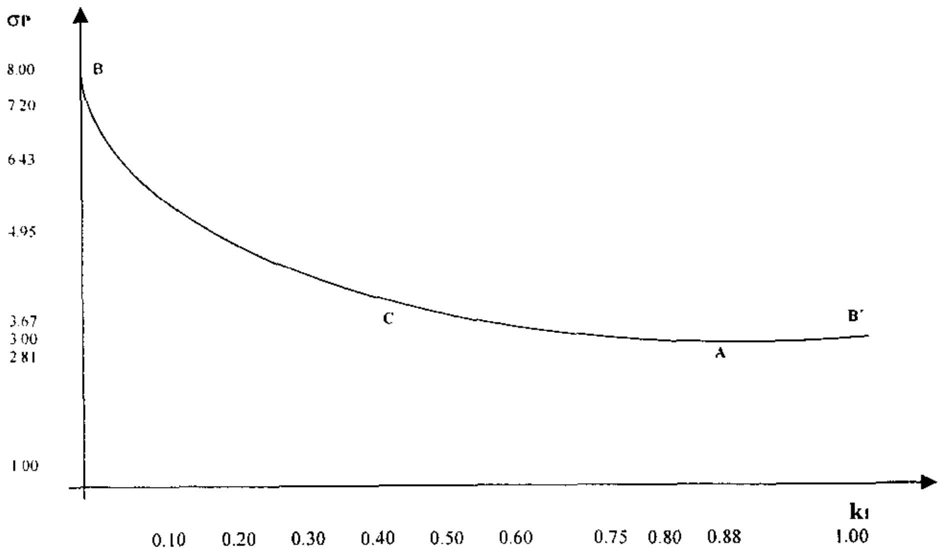


FIGURA 3

PORTAFOLIOS CONSTITUIDOS POR DOS INVERSIONES CON UNA CORRELACIÓN ($-1 < \rho < 1$)

En este capítulo se analizarán los efectos de la diversificación cuando el coeficiente de correlación lineal, entre las dos inversiones del portafolio considerado, toma cualquier valor dentro del rango completo de sus posibilidades, excluidos los casos extremos cuando $\rho = -1$ y $\rho = 1$, cuyo estudio fue anticipado solamente por razones de claridad expositiva ya que es muy difícil que dos títulos concretos estén perfectamente correlacionados, sea en forma negativa o positiva.

En el estudio siguiente se verá que es factible obtener ganancia de riesgo por diversificación (esto es lograr que el riesgo del portafolio óptimo sea inferior al de la inversión que lo tiene menor) siempre que el coeficiente de correlación lineal entre ambas inversiones sea menor que el cociente entre la desviación estándar de la inversión de menor riesgo y el de la otra inversión.

Formalmente se demostrará que:

Si $\quad -1 < \rho < \sigma_1 \quad$ **entonces** $\quad \sigma_{P^*} < \sigma_1,$

supuesto que $\quad \sigma_1 < \sigma_2; \quad k_1 > 0; \quad k_2 > 0 \qquad$ **(1)**

Este resultado permite establecer, desde un punto de vista práctico, una regla de decisión referente al siguiente problema: ¿es conveniente a fin de obtener ganancia de riesgo (independientemente de los rendimientos) la construcción de un portafolio con las inversiones 1 y 2?. En efecto, será conveniente tanto el coeficiente de correlación lineal entre esas dos inversiones o títulos cumpla con la condición antes expresada.

Para justificar (1) se seguirá un camino similar al recorrido en las demostraciones anteriores. Ya vimos que para expresar el riesgo de un portafolio construido con dos inversiones, en función de las proporciones k_1 y k_2, medido a través de la varianza de sus rendimientos, se utiliza la siguiente fórmula (ver (1) del capítulo de correlación perfecta positiva)

$$\sigma_P^2 = k_1^2\,\sigma_1^2 + k_2^2\,\sigma_2^2 + 2\,k_1\,k_2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2$$

Recordando que $\quad k_1 + k_2 = 1$, resulta que:

$$\sigma_P^2 = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2 + 2 k_1 (1 - k_1) \rho \sigma_1 \sigma_2$$

Realizando las operaciones convenientemente, la fórmula anterior puede ser escrita como:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) k_1^2 + 2 (\rho \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2^2) k_1 + \sigma_2^2 \qquad (2)$$

que expresa la relación existente entre la varianza σ_P^2 y la proporción k_1 invertida en una de las inversiones, en función del coeficiente de correlación lineal ρ, suponiendo conocidas las desviaciones estándar σ_1 y σ_2. Esta relación entre riesgo del portafolio y proporción invertida en una de las inversiones es general, es decir aplicable cualquiera que sea el valor del coeficiente de correlación lineal. Sustituyendo ρ por -1,0 y 1 en (1), se deducen las fórmulas que expresan el riesgo-proporción invertida del portafolio con una correlación perfecta negativa, cero y correlación perfecta positiva respectivamente, que fueron estudiados en los capítulos anteriores.

A efectos de determinar las proporciones k_1^* y k_2^* óptimas que permiten construir el portafolio de mínimo riesgo es conveniente medir este mediante la desviación estándar de los rendimientos. De (2) se obtiene

$$\sigma_P^2 = [(\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) k_1^2 + 2 (\rho \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2^2) k_1 + \sigma_2^2]^{1/2} \qquad (3)$$

La condición necesaria para la existencia de un mínimo es que la primera derivada del riesgo con respecto a la proporción invertida sea igual a cero:

$$\frac{d \sigma_P}{d k_1} = 0$$

Derivando en (3) e igualando a cero, se obtiene:

$$\frac{d \sigma_P}{d k_1} = \frac{2(\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) k_1 + 2 (\rho \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2^2)}{2[(\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) k_1^2 + 2 (\rho \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2^2) k_1 + \sigma_2^2]^{1/2}} = 0 \qquad (4)$$

Para que un cociente sea igual a cero es necesario que el numerador sea igual a cero y el denominador distinto de cero. Se determinará entonces el valor k_1 que anula el numerador, resolviendo la ecuación:

$$2(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\,k_1 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2) = 0$$

De donde surge:

$$\mathbf{k_1^* = \frac{\sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}} \qquad \mathbf{(5)}$$

Teniendo en cuenta que $k_2^* = 1 - k_1^*$

$$\mathbf{k_2^* = \frac{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}} \qquad \mathbf{(6)}$$

Debe analizarse ahora si el valor k_1^*, que se ha encontrado, anula el denominador en (4). A tal efecto se sustituye k_1 por k_1^* en la expresión encerrada entre corchetes.

$$(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\,k_1^{*2} + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\,k_1^{*2} + \sigma_2$$

sustituyendo k_1^* por su valor en (5) se obtiene:

$$(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left[\frac{\sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}\right]^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\left[\frac{\sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}\right]^2 + \sigma_2^2$$

Simplificando mediante adecuadas operaciones e igualando a cero se obtiene una ecuación que permitirá averiguar qué valores del coeficiente de correlación anulan el denominador de (4)

$$\sigma_2^2 - \frac{(\sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2)^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} = 0 \qquad (7)$$

De (7)

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_2^2\,(\sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1)^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Por pasaje de términos y simplificación de σ_2^2

$$\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2 = (\sigma_2 - \rho\,\sigma_1)^2$$

Completando el cuadrado en el primer miembro

$$(\sigma_2 - 2\,\rho\,\sigma_1)^2 + \sigma_1^2 - \rho\,\sigma_1^2 = (\sigma_2 - \rho\,\sigma_1)^2$$

que es equivalente a

$$\sigma_1^2 - \rho^2\,\sigma_1^2 = 0$$

de donde se deduce

$$\boldsymbol{\sigma_1^2\,(1 - \rho^2) = 0} \qquad \textbf{(8)}$$

Las raíces o soluciones son $\rho = 1$ y $\rho = -1$, valores que en consecuencia anulan el denominador de (4), y por lo tanto las fórmulas (5) y (6) son válidas para todo valor del coeficiente de correlación lineal ρ, excepto para los dos valores mencionados. Para todos los valores de ρ puede probarse que la segunda derivada del riesgo σ_P con respecto a la proporción k_1, calculada en k_1^* es positiva

$$\left[\frac{d\,\sigma_P^2}{d\,k_1^2}\right]_{k_1 = k_1^*} > 0$$

Nótese que a pesar de que las fórmulas (5) y (6) no son válidas en los casos $\rho = 1$ y $\rho = -1$, los mismos han sido analizados y resueltos completamente en sus respectivos capítulos.

Determinadas las proporciones óptimas que permiten construir el portafolio con mínimo riesgo, corresponde ahora calcular el valor σ_P^* de ese riesgo mínimo. A tal efecto, se sustituye en (2) k_1 por el valor óptimo k_1^* de acuerdo a (5).

$$\sigma_P^{*2} = (\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left[\frac{\sigma_2^2 - \rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}\right]^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\left[\frac{\sigma_2^2 - \rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2}\right] + \sigma_2^2$$

Realizando las operaciones indicadas en la fórmula anterior se obtiene la expresión buscada

$$\sigma_P^{*2} = \frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad (9)$$

La fórmula (9) se verifica para todo valor de ρ excepto para $\rho = -1$ y $\rho = 1$. Si se sustituye $\rho = 0$ se encuentra la fórmula que determina el riesgo de un portafolio integrado por dos inversiones no correlacionadas, que por simplicidad expositiva fue como empezamos a elaborar ésta tesis, para posteriormente ver caso por caso.

Se está ahora en condiciones de probar la validez de (1). Para ello debe verificarse que el riesgo del portafolio óptimo expresado en (9) es menor que σ_1, recuérdese que según (1), la inversión 1 es la de menor riesgo, sólo en el caso en el que el coeficiente de correlación lineal cumpla la condición:

$$-1 \leq \rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_1}$$

Por razones de simplicidad se dividirá la demostración en tres partes, según que ρ sea menor, mayor o igual a cero.

i) supuesto $-1 \leq \rho < 0$

Es obvio que $1 - \rho^2 < 1$, de donde se deduce

$$\sigma_2^2 (1 - \rho^2) < \sigma_2^2 \qquad (*)$$

Considérese ahora el denominador de (9); se probará que es menor que la expresión

$$\sigma_2^2 (1 - \rho^2) < \sigma_2^2.$$

En efecto,

$$\sigma_2^2 < \sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \qquad (**)$$

pues el primer miembro resulta de suprimir en el segundo dos términos positivos (nótese que se ha supuesto que ρ es negativo).

De (*) y (**) se tiene, por propiedad transitiva de la relación menor:

$$\sigma_2^2 (1 - \rho^2) < \sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2$$

De donde:

$$\frac{\sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} < 1$$

Multiplicando miembro a miembro por σ_1^2, se obtiene:

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} < \sigma_1^2$$

Finalmente, teniendo en cuenta (9) resulta que

$$\sigma_{P^*}^2 < \sigma_1^2$$

Lo que prueba que, si dos inversiones tienen rendimientos correlacionados negativamente, entonces es posible construir un portafolio cuyo riesgo sea menor al de ambos (hay ganancias de riesgo por diversificación).

ii) supuesto $\rho = 0$

Bajo esta condición. (9) se transforma en

$$\sigma_{2^*}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad (***)$$

Además es

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < 1$$

Multiplicando miembro a miembro por σ_1^2, se tiene

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_1^2$$

Finalmente, por (***) resulta:

$$\sigma_{2*}^{2} < \sigma_{1}^{2}$$

Entonces son válidas, en el caso de inversiones incorrelacionadas, las conclusiones de la parte i) y, por ser ambos casos $\rho \leq 0$, de (5) y de (6) se deduce que las proporciones que permiten construir al portafolio óptimo, k_1* y k_2*, son positivas.

iii) supuesto $0 < \rho < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Se demostrará que también en este caso es posible obtener ganancias de riesgo por diversificación. Partiendo del supuesto dado resulta:

$$\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0$$

Como el cuadrado de un número negativo es positivo, se tiene:

$$\left[\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right]^2 > 0$$

de donde, multiplicando miembro a miembro por σ_2^2,

$$\sigma_2^2 \left[\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right]^2 > 0$$

Desarrollando el cuadrado y efectuando la multiplicación indicada

$$\sigma_2^2 \rho^2 - 2\,\sigma_1 \sigma_2\, \rho + \sigma_1^2 > 0$$

Sumando miembro a miembro la expresión $\sigma_2^2 - \sigma_2^2 \rho^2$

$$\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2 > \sigma_2^2 - \sigma_2^2 \rho^2$$

lo que es equivalente a

$$\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2 > \sigma_2^2\,(1 - \rho^2)$$

De esta expresión se deduce que

$$\frac{\sigma_2^2\,(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} < 1$$

Multiplicando miembro a miembro por σ_1^2

$$\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} < \sigma_1^2$$

Finalmente, teniendo en cuenta (9),

$$\sigma_{2*}^2 < \sigma_1^2$$

lo que completa la prueba de la validez de (1).

En (1) se ha expresado la condición que debe cumplir el coeficiente de correlación entre los rendimientos de dos inversiones para que sea posible obtener un portafolio óptimo que origine ganancia de riesgo por diversificación. Es posible que, aparte del óptimo, existan otros portafolios que, si bien tienen mayor riesgo que éste, igualmente originan ganancia de riesgo por diversificación. Dado que en los hechos, por eventuales restricciones fácticas es común que no sea posible alcanzar exactamente la proporción óptima k_1^*, es conveniente determinar una proporción k_1' a partir de la cual se consiguen portafolios que aún sin ser óptimos originan ganancia de riesgo por diversificación. Este hecho permite aplicar la teoría desarrollada aún en los casos en que restricciones de cualquier tipo impidan acceder al portafolio óptimo, pues se verá que a pesar de ello se puede mejorar el riesgo del portafolio.

Es posible probar que cuando se cumplen las condiciones establecidas en (1), todo portafolio en que la proporción k_1 invertida en la inversión de menor riesgo sea superior al valor

$$k_1' = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad \textbf{(10)}$$

tiene un riesgo σ_P^2 inferior al de la inversión 1, originando entonces una ganancia de riesgo por diversificación.

La proporción k_1' deberá cumplir la condición de originar un portafolio cuyo riesgo

σ_P^2 sea igual a σ_1^2 . Teniendo en cuenta la fórmula (2) de este capítulo y lo expresado precedentemente resulta:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\,k_1^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\,k_1 + \sigma_2^2 = \sigma_1^2$$

Mediante un acomodo de términos se obtiene la ecuación cuadrática

$$(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\,k_1^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\,k_1 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = 0$$

Utilizando la fórmula que permite resolver una ecuación de segundo grado, se tiene

$$k = \frac{-2(\rho\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) \pm \sqrt{4(\rho\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)^2 - 4(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}}{2\,(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} = 0$$

$$= \frac{-(\rho\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) \pm (\rho\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

De donde surgen las dos raíces o soluciones

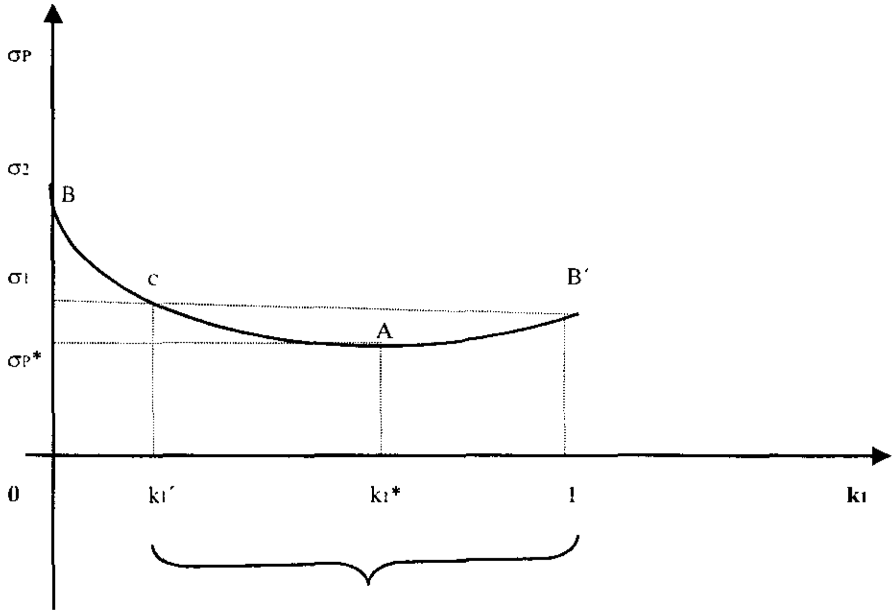
$$k_1{'} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad\qquad k_1 = 1$$

que, según se mostrará a continuación, permiten acotar el conjunto de los portafolios que originan ganancias de riesgo por diversificación.

La función que representa, en un espacio riesgo(σ_P) - proporción invertida(k_1), el riesgo, medido a través de la desviación estándar, de los distintos portafolios en función de la proporción k_1, ya fue analizada y es la fórmula (3) del presente capítulo.

$$\sigma_P = \sqrt{(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\,k_1^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\,k_1 + \sigma_2^2\,)}$$

Su representación gráfica se ha dibujado en la figura 1



Ganancia de riesgo por diversificación

Figura 1
Riesgo de un portafolio de dos inversiones en función de la proporción invertida en uno de ellos cuando $-1 < \rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ y los beneficios de la diversificación.

Puede observarse que todo portafolio en que la proporción invertida en la inversión 1 cunpla la condición de ser mayor que k_1' y menor que 1 origina una ganancia de riesgo por diversificación. Formalmente:

$$\text{Si} \quad \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} < k_1 < 1 \quad \text{entonces} \quad \sigma_P < \sigma_1 \qquad \textbf{(11)}$$

Nótese, que entre todos estos portafolios se encuentra el óptimo, constituido invirtiendo en la primera inversión la proporción k_1'. Desde el punto de vista de la aplicación a la toma de decisiones de inversión, es importante examinar las conclusiones que pueden extraerse cuando se analizan conjuntamente las derivaciones de (1) y (11). De la primera se deduce que el portafolio óptimo tiene riesgo inferior al de las inversiones que lo componen sólo si la correlación entre los mismos cumple la condición

$$- 1 < \rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Cumplida esta condición, (11) muestra que si la proporción invertida en la inversión 1 satisface $k_1' < k_1 < 1$, entonces, aparte del óptimo, existe un conjunto de portafolios que permiten mejorar el riesgo de la posición en una sola de las inversiones. Puede llamar la atención el hecho que la fórmula (10), que expresa la proporción k_1' que separa los portafolios que originan ganancias de riesgo (ver figura 1), esta definida también para valores de ρ que no cumplan la condición establecida en (1), lo que induciría a pensar que no es necesaria. Sin embargo es posible demostrar que todo valor de ρ superior a $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ origina, mediante (10), un valor k_1' mayor que 1. Esto no es factible bajo los supuestos que se han realizado, ya que si $k_1' > 1$ entonces necesariamente la proporción k_2 resulta negativa.

En efecto, supuesto $\rho > \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ se sigue, $\rho\, \sigma_2 > \sigma_1$; multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $2\sigma_1$

$$2\, \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 > 2\, \sigma_1^2$$

que es equivalente a

$$- \sigma_1^2 > \sigma_1^2 - 2\, \rho\, \sigma_1\, \sigma_2$$

sumando miembro a miembro σ_2^2, se tiene

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 > \sigma_1^2 - 2\, \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + \sigma_2^2$$

de donde

$$\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2} > 1$$

finalmente teniendo en cuenta (10)

$$k_1' > 1$$

El criterio CMV para la elección requiere que los mismos sean caracterizados mediante desviación estándar y la esperanza matemática de sus rendimientos, que son los parámetros utilizados como indicadores del riesgo y rendimiento esperado de las inversiones realizadas en estas carteras. Es por eso que, en lo que sigue, se hará el análisis en un espacio riesgo-rendimiento esperado. Para tal efecto debe encontrarse la relación matemática que relacionan las mencionadas variables.

Sustituyendo k_1 en la fórmula (2) por su valor en función de los rendimientos esperados del portafolio y las inversiones componentes (véase la fórmula (3) del capítulo de correlación lineal perfecta y despejando a k_1), se obtiene:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2\,(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + \sigma_2^2$$

(12)

Esta última igualdad expresa la vinculación entre el riesgo y el rendimiento esperado de cualquier portafolio constituido por dos inversiones, suponiendo que son conocidos los riesgos y los rendimientos esperado de los mismos, así como el coeficiente de correlación lineal entre sus rendimientos.

Dado que la curva de transformación entre riesgo y rendimiento esperado varía según el valor del coeficiente de correlación lineal ρ, se estudiará sistemáticamente la mencionada variación y su influencia en la toma de decisiones de la construcción de carteras, es importante la determinación general de ciertos puntos críticos pertenecientes a las curvas de transformación. Ellos son los que en la figura 1 han sido designados B´,B,A y C, que corresponden respectivamente a portafolios en que se han invertido todos los fondos en la inversión 1 o la 2 (B o B´), cartera de mínimo riesgo (A) y, por último, portafolio límite entre los que originan ganancias de riesgo por diversificación y los que no lo originan (C).

Es posible probar que las coordenadas de estos puntos son:

$B' = (\sigma_1; E(I_1))$ $\qquad\qquad$ $B = (\sigma_2; E(I_2)$

$A = (\sigma_P^*; E(I_P^*))$ $\qquad\qquad$ $C = (\sigma_1; E(I_P^*))$

Donde

$$\sigma_1^{*2} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad (\rho \neq 1)$$

$$\mathbf{E(I_P^*) = \left(\frac{\sigma_1^2 - \rho\,\sigma_1\sigma_1}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \right) (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2)} \qquad \mathbf{(13)}$$

$$\mathbf{E(I_P') = \left(\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \right) (E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2)} \qquad \mathbf{(14)}$$

Para verificar las coordenadas asignadas a los puntos B´ y B, es suficiente con sustituir en la fórmula (12) la variable $E(I_P)$ por $E(I_1)$ y luego por $E(I_2)$ y constatar que se obtiene, después de realizadas las operaciones indicadas, respectivamente σ_1^2 σ_2^2. Esto demuestra que las coordenadas B´ y B satisfacen la relación (12) y en consecuencia pertenecen a la correspondiente curva de transformación entre riesgo y rendimiento esperado.

El punto A representa el portafolio de mínimo riesgo. Su abscisa es precisamente ese mínimo y ya fue determinada en la fórmula (9). La ordenada correspondiente $E(I_P^*)$ puede obtenerse sustituyendo en (12) σ_P^2 por el valor de $\sigma_{P^*}^2$ (9) y luego despejando $E(I_P)$ según se muestra a continuación.

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2$$

que es equivalente a

$$(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + \sigma_2^2 - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

efectuando la diferencia entre los dos últimos términos del primer miembro, queda:

$$(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = 0$$

multiplicando ambos miembros por $(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$, se obtiene

$$(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^2\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)$$

$$+ (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)^2 = 0$$

el primer miembro de la igualdad es el cuadrado de un binomio, que puede escribirse de la siguiente manera

$$\left((\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\right)^2 = 0$$

de donde surge

$$(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P^*) - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + (\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2) = 0$$

finalmente, despejando de la fórmula anterior $E(I_P^*)$ se obtiene (13).

El punto C, que separa los portafolios que originan ganancia de riesgo, tienen por abscisa a σ_1. En consecuencia para determinar su ordenada $E(I_P')$ debe reemplazarse en (12) σ_P por σ_1. Si, posteriormente de realizada tal sustitución, se pasa σ_1^2 al otro miembro y luego se multiplica miembro a miembro por $(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)$, se obtiene

$$(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)^2\left(\frac{E(I_P') - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right)^2 + 2\,(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P') - E(I_2)}{E(I_1^*) - E(I_2)}\right)(\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)$$

$$+\,(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\,(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2) = 0$$

dado que los primeros sumandos son un cuadrado y un doble producto, realizando el proceso de completar el cuadrado queda:

extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros (dado que $\sqrt{x^2} = |x|$ se obtiene

$$\left|(\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2^2)\left(\frac{E(I_P') - E(I_2)}{E(I_1) - E(I_2)}\right) + (\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2)\right| = \left|\sigma_1\,(\rho\,\sigma_2 - \sigma_1)\right|$$

esta ecuación tiene dos soluciones según que ambos miembros tengan el mismo signo o sean opuestos. En el primer caso al despejar $E(I_P')$ resulta (14), mientras que, en el segundo caso resulta $E(I_P') = E(I_1)$

A continuación se aplicarán los resultados previos al desarrollo al desarrollo práctico del caso concreto presentado en la siguiente tabla 1.

Inversion i	**$E(I_i)$**	σ_i
1	7	3
2	11	8

Tabla 1

Dado que se tiene $\sigma_1/\sigma_2 = 3/8 = 0.375$, de la fórmula (1) del presente capítulo, se infiere que sólo será posible obtener portafolios con ganancias de riesgo si el coeficiente de correlación lineal entre los rendimientos de las dos inversiones es inferior a 0.375. A fin de mostrar esto numéricamente se examinarán dos alternativas: $\rho = 0.10$ y $\rho = 0.80$.

Si $\rho = 0.10$ entonces, por lo expresado precedentemente, existirá un conjunto de portafolios que originan ganancias de riesgo. Mediante la fórmula (10) se calcula

$$k_1' = \frac{64 - 9}{9 - 2\,(0.10)\,(3)\,(8) + 64} = 0.806 \qquad \text{(Punto C de las figuras 3)}$$

En consecuencia todo portafolio integrado por la inversión 1 en una proporción superior al 80.6 % tendrá un riesgo inferior al de cualquiera de las inversiones o títulos componentes. Entre todos estos portafolios existe uno que tiene el mínimo riesgo. Para construirlo se usa la fórmula (5).

$$k_1^* = \frac{64 - 0.10\,(3)\,(8)}{9 - 2\,(0.10)\,(3)\,(8) + 64} = 0.903 \text{ (Punto A de las figuras 3)}$$

Entonces el portafolio óptimo, en lo que a riesgo se refiere, se construye invirtiendo el 90.3 % de los fondos en la inversión 1 y el 9.7 % restante en la inversión 2, siendo el riesgo, de acuerdo a (9), $\sigma_P^* = 2.892$. Este valor podría también encontrarse en base a (2) que expresa el riesgo de cualquier portafolio constituido por dos inversiones en función de la proporción invertida en uno de ellos.

En el caso que se está considerando se tiene

$$\sigma_P^2 = 68,200\, k_1^2 - 123,200\, k_1 + 64 \qquad (0 \leq k_1 \leq 1)$$

En las dos primeras columnas de la tabla 2 se muestran los valores de σ_P que corresponden a distintas proporciones k_1.

k_1	σ_P	$E(I_P)$
0.000	8.000	11.000
0.200	6.488	10.200
0.400	5.063	9.400
0.600	3.825	8.600
0.806	3.000	7.776
0.903	2.892	7.388
0.950	2.917	7.200
1.000	3.000	7.000

Tabla 2

La curva representativa de la relación riesgo-proporción invertida en la inversión 1 está dibujada en la figura (3). Nótese que el conjunto de portafolios que originan ganancia de riesgo por diversificación está representado por el arco CB´.

A fin de completar el análisis con la consideración del rendimiento esperado se ha utilizado la fórmula (3) del capítulo de correlación perfecta positiva. Para calcular el rendimiento esperado del portafolio en función de la proporción k_1.

$$E(I_P) = 7\,k_1 + 11\,(1 - k_1)$$

En la tercera columna de la tabla 2 se detallan los resultados obtenidos. La fórmula que representa la relación entre rendimiento esperado y riesgo de los distintos portafolios factibles es:

$$\sigma_P^2 = 4{,}263\,E(I_P)^2 - 62{,}975\,E(I_P) + 240{,}963$$

y se ha obtenido reemplazando en (12) los parámetros σ_1, σ_2 y ρ por los valores que corresponden al presente caso.

La representación gráfica de la precedente relación riesgo y rendimiento esperado se muestra en la figura 3 (curva de transformación $\rho = 0.10$). El arco CB´ representa el conjunto de portafolios que permiten obtener una ganancia de riesgo. Hay que observar que si el inversionista, aparte de procurar una ganancia de riesgo, adopta el criterio de decisión CMV (ver la definición del Criterio de la Media-Varianza en el capítulo del mismo nombre) entonces considerará aceptables sólo aquellos portafolios por puntos del arco AB´ es dominado por uno de aquellos. En conclusión, si el inversionista procura construir un portafolio constituido exclusivamente por las inversiones de riesgo 1 y 2 de este ejemplo, de modo tal de disminuir el riesgo de las inversiones individuales y además su criterio de decisión es el CMV, entonces construirá algún portafolio en que la proporción invertida en la inversión 1 sea superior al 80.6 % de sus fondos y no sobrepase al 90.3 % de los mismos. En cambio, si el inversionista prescinde del objetivo de disminuir el riesgo de las inversiones individuales, y toma en consideración solamente la relación riesgo-rendimiento esperado de su portafolio, de acuerdo al CMV, según sean sus preferencias subjetivas optará por algún portafolio representado por un punto del arco AB, o lo que es igual invertirá en la inversión 1 no más del 90.3 % de sus fondos, pues los portafolios representados por los puntos del arco B´A son ineficientes según el CMV.

Si ahora se considera que el coeficiente de correlación lineal entre los dos títulos es ρ = 0.80, entonces resulta $\rho > \sigma_1 / \sigma_2 = 0.375$.

En consecue

ρ, de acuerdo a (2)

$$\sigma_P^2 = 68{,}200\, k_1^2 - 123{,}200\, k_1 + 64$$

Utilizando la misma se han calculado en la tabla 3, para distintas proporciones k_1, los correspondientes riesgos σ_P. Finalmente a esos datos se ha dibujado la figura 3.

k_1	σ_P	$E(I_P)$
0.000	8.000	11.000
0.200	6.889	10.200
0.400	5.805	9.400
0.600	4.764	8.600
0.800	3.803	7.800
0.900	3.374	7.400
1.000	3.000	7.000
1.295 (no factible)	2.448	5.820
1.590 (no factible)	3.000	4.640

Tabla 3

La expresión que vincula el rendimiento esperado del portafolio con la proporción invertida con la inversión 1 es la misma que en el caso anterior (ρ = 0.10), lo que muestra que **el rendimiento esperado de los portafolios es independiente de la correlación que existe entre las inversiones que lo componen, resultando en consecuencia que esa correlación influye solamente en el riesgo.** Es por ello que, a idénticas proporciones, en la tercera columna de la tabla 2. La relación implícita entre riesgo y rendimiento esperado es, de acuerdo a (12)

$$\sigma_P^2 = 2{,}163\ E(I_P)^2 - 25{,}186\ E(I_P) + 79{,}323$$

El crucial valor de ρ que permite separar los casos en que es posible obtener ganancias de riesgo, está previsto teóricamente en la fórmula (1). Dado que en los ejemplos que se han considerado es $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 8$, este valor es $\rho = \sigma_1 / \sigma_2 = 0.375$. Toda curva de transformación que corresponde a un valor de ρ menor a 0.375 será lo suficientemente convexa hacia la izquierda como para que existan portafolios factibles que permitan una ganancia de riesgo.

De todo lo anterior se infiere que el problema básico a resolver para construir portafolios de inversión eficientes es determinar, para cada nivel de riesgo, cuales son las proporciones a invertir para obtener un portafolio que tenga el mayor rendimiento esperado posible o, simétricamente, para cada rendimiento esperado prefijado, encontrar las proporciones que originen el portafolio de minimo riesgo. La solución de este problema conduce a la construcción de la frontera eficiente con técnicas que se expondrán en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 3
LA FRONTERA EFICIENTE

CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA DE LA FRONTERA EFICIENTE.

El objetivo de este capítulo es explicar las técnicas básicas que permiten construir la frontera eficiente asociada a cualquier conjunto de activos de riesgo.

El término "eficiente" se usa en el sentido de "eficiente según el CMV". Recordando una cartera de activos es eficiente según el CMV cuando de todas las que tienen su rendimiento esperado es la de mínimo riesgo, o bien entre las de su clase de riesgo es la de mayor rendimiento esperado.

Construir un portafolio eficiente implica determinar concretamente qué proporción del capital del inversionista debe asignarse a cada uno de los activos que componen ese portafolio para lograr precisamente esa eficiencia.

Al estudiar el riesgo de los portafolios, se determinó la frontera eficiente como el subconjunto del conjunto de mínimo riesgo, para portafolios de dos y tres inversiones.

El plantemiento general de este problema es el siguiente ¿cómo obtener para cada nivel de rendimiento esperado prefijado el portafolio de que tenga el mínimo riesgo, o bien para cualquier riesgo dado, cómo hallar el portafolio de máximo riesgo esperado?. Por razones técnicas es conveniente utilizar la primera variante del planteamiento anterior.

Dado $E(I_P)$, calcular las proporciones k_i que hacen σ_P^2 mínimo

La expresión matemática del enunciado anterior es:

Minimizar $$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i k_j \sigma_{ij}$$ **(Riesgo)** **(1)** sujeto a $E(I_P) = \sum_{i=1}^{n} k_i E(I_i)$ **(Rendimiento esperado prefijado) (2)**

y

$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$ **(Restricción presupuestaria)** **(3)**

donde las incógnitas son las proporciones k_i a invertir en cada uno de las inversiones individuales. Los datos que deben disponerse para poder calcular el valor de las incógnitas son $E(I_i)$,σ_i y σ_{ij}, es decir el rendimiento esperado y la varianza de los rendimientos de cada una de las inversiones, así como las covarianzas de los rendimientos entre todos los pares de inversiones que componen el portafolio.

El problema, desde el punto de vista matemático, es un problema de mínimos condicionados que puede resolverse por el método de los Multiplicadores de Lagrange. La expresión más concisa y eficiente para su cálculo práctico requiere las técnicas del cálculo matricial, para la solución de sistemas lineales.

Debe tenerse presente que la solución involucra una gran cantidad de cálculo numérico, aún para portafolios de pocas inversiones como se verá más adelante.

El problema a resolver implica minimizar (1), sujeta a las dos restricciones (2) y (3).

La función de Lagrange es:

$$F = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i k_j \sigma_{ij} + \lambda_1 (\sum_{i=1}^{n} k_i Ei - E_P) + \lambda_2 (\sum_{i=1}^{n} k_i - 1) \qquad \textbf{(4)}$$

donde para abreviar, se ha reemplazado $E(I_i)$ por E_i . A efectos de facilitar la derivación de F, es conveniente desarrollar todas las sumatorias que aparecen en (4).

$$F = k_1^2 \sigma_1^2 + ...+ k_n^2 \sigma_n^2 + 2 (k_1 k_2 \sigma_{12} +...+ k_1 k_n \sigma_{1n} + k_2 k_3 \sigma_{23} + ... + k_2 k_n \sigma_{2n} + ...$$

$$... + k_{n-1} k_n \sigma_{n-1n}) + \lambda_1 (k_1 E_1 +...+ k_n E_n - E_P) + \lambda_2 (k_1 +...+ k_n -1) \qquad \textbf{(5)}$$

Condición necesaria para la existencia de un extremo local o relativo es que se anulen todas las derivadas parciales.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{dF}{dk_1} = 2\,k_1\,\sigma_1^2 + 2\,(k_2\,\sigma_{12} + \ldots + k_n\,\sigma_{1n}) + \lambda_1\,E_1 + \lambda_2 = 0 \\[2ex]
\dfrac{dF}{dk_2} = 2\,k_2\,\sigma_2^2 + 2\,(k_1\,\sigma_{12} + \ldots + k_n\,\sigma_{2n}) + \lambda_1\,E_2 + \lambda_2 = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{dF}{dk_n} = 2\,k_n\,\sigma_n^2 + 2\,(k_1\,\sigma_{1n} + \ldots + k_{n-1}\,\sigma_{n-1,n}) + \lambda_1\,E_n + \lambda_2 = 0 \\[2ex]
\dfrac{dF}{d\lambda_1} = k_1\,E_1 + k_2\,E_2 + \ldots + k_n\,E_n - E_P = 0 \\[2ex]
\dfrac{dF}{d\lambda_2} = k_1 + k_2 + \ldots + E_n - 1 = 0
\end{array}
\right.
$$

Dividiendo miembro a miembro por 2 todas las ecuaciones excepto las dos últimas y ordenando sus términos, resulta el siguiente sistema de n + 2 ecuaciones lineales con n + 2 incógnitas:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 k_1 + \sigma_{12} k_2 + \dots + \sigma_{1n} k_n + E_1 \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex] \sigma_{12} k_1 + \sigma_2^2 k_2 + \dots + \sigma_{2n} k_n + E_2 \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex] \sigma_{1n} k_1 + \sigma_{2n} k_2 + \dots + \sigma_n^2 k_n + E_n \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex] E_1 k_1 + E_2 k_2 + \dots + E_n k_n = E_P \\[2ex] k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1 \end{cases} \qquad (6)$$

Este sistema puede escribirse matricialmente así:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1n} & E_1 & 1 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \dots & \sigma_{2n} & E_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} \dots & \sigma_n^2 & E_n & 1 \\ E_1 & E_2 \dots & E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \\ \dfrac{\lambda_1}{2} \\ \dfrac{\lambda_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

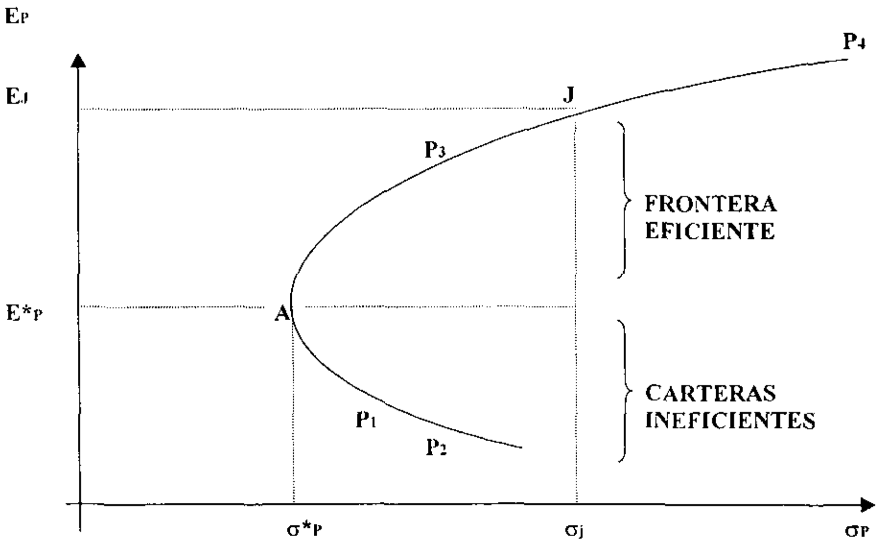
y aún más brevemente:

$$C.K = B$$

Si el determinante de la matriz del coeficiente del sistema lineal es distinto de cero ($|C| \neq 0$). entonces este sistema tiene una única solución que puede calcularse mediante la fórmula

$$X = C^{-1} B \qquad \textbf{(8)}$$

El vector solución K, cuyas primeras n componentes son las proporciones k_i que debe invertirse en cada una de las inversiones para conformar un portafolio cuyo rendimiento esperado prefijado es E_P y cuyo riesgo es mínimo, se calcula realizando el producto de la inversa de la matriz de los coeficientes por el vector columna de los términos independientes. Variando E_P pueden obtenerse distintos puntos (E_P,σ_P) pertenecientes al conjunto de mínimo riesgo, algunos de los cuales representan portafolios ineficientes. Es necesario entonces determinar el punto que representa el portafolio de mínimo riesgo (independientemente del rendimiento esperado), pues el mismo separa el subconjunto ineficiente de la frontera eficiente que se desea construir (ver figura 1).



Conjunto de mínimo riesgo: subconjunto ineficiente y frontera eficiente

FIGURA 1

Entonces el problema adicional a resolver es:

Calcular las proporciones k_i que hacen σ_P^2 mínimo independientemente de $E(I_P)$

Matemáticamente la solución involucra minimizar (1) sujeta a (3) (nótese que no se tiene en cuenta (2)). La correspondiente función de Lagrange es:

$$F = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} k_i k_j \sigma_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} k_i - 1\right) \qquad \textbf{(9)}$$

Como se sabe, la condición necesaria de extremos, es la anulación de todas las derivadas parciales.

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dk_1} = 2 k_1 \sigma_1^2 + 2 (k_2 \sigma_{12} + \ldots + k_n \sigma_{1n}) + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{dF}{dk_2} = 2 k_2 \sigma_2^2 + 2 (k_1 \sigma_{12} + \ldots + k_n \sigma_{2n}) + \lambda = 0 \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex] \dfrac{dF}{dk_n} = 2 k_n \sigma_n^2 + 2 (k_1 \sigma_{1n} + \ldots + k_{n-1} \sigma_{n-1,n}) + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{dF}{d\lambda} = k_1 + k_2 + \ldots + E_n - 1 = 0 \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro todas las ecuaciones, excepto la última, y ordenándolas convenientemente queda:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_1^2 k_1 + \sigma_{12} k_2 + \ldots + \sigma_{1n} k_n + E_1 \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\[2ex]
\sigma_{12} k_1 + \sigma_2^2 k_2 + \ldots + \sigma_{2n} k_n + E_2 \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\sigma_{1n} k_1 + \sigma_{2n} k_2 + \ldots + \sigma_n^2 k_n + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\[2ex]
k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1
\end{array}\right. \qquad \textbf{(10)}$$

La representación matricial de este sistema de n + 1 ecuaciones lineales con n + 1 incógnitas es:

$$\begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{12} \ldots\ldots & \sigma_{1n} & 1 \\
\sigma_{12} & \sigma_2^2 \ldots\ldots & \sigma_{2n} & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sigma_{1n} & \sigma_{2n} \ldots\ldots & \sigma_n^2 & 1 \\
1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots\ldots \\ k_n \\ \dfrac{\lambda}{2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

que puede expresarse sintéticamente como

$$C^*.K = B^*$$

supuesto que ($|C^*| \neq 0$), el sistema anterior tiene solución única que puede calcularse en función de la inversa de la matriz C* y el vector columna de los términos independientes B*, según la siguiente fórmula:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{C}^{*-1}\,\mathbf{B}^* \qquad \textbf{(12)}$$

A fin de ilustrar acerca de un método para la construcción de la frontera eficiente, se considerará al siguiente caso de tres inversiones de riesgo cuyas características se muestran en la tabla 1.

Inversión		**Rendimiento Esperado**	**Desviación estándar**	**Covarianza**
Denominación	**Número**	**Ei**	σ_i	σ_{ij}
A	1	11	8	$\sigma_{12} = 22$
B	2	7	3	$\sigma_{13} = 16$
C	3	8	4	$\sigma_{23} = 2$

Tabla 1

Nótese que los datos requeridos para el cálculo de la frontera eficiente son los rendimientos esperados y desviaciones estándar de todas las inversiones que componen el portafolio, más las covarianzas entre todos los pares de inversiones. En total se requieren

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

datos para construir la frontera eficiente correspondiente a portafolios que contengan n inversiones. Es conveniente disponer los datos en forma similar a la que se muestra en la tabla 2, en la que el cuadrado central contiene todas las varianzas y covarianzas.

N°	**1**	**2**	**3**	**E_i**
1	64	22	16	11
2	22	9	2	7
3	16	2	16	8
σ_i	8	3	4	

Tabla 2

Se comienza por determinar las proporciones que deben invertirse en cada una de las inversiones para obtener el portafolio de mínimo riesgo (punto A de la figura 1). A tal efecto debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones lineales (véase la fórmula 10):

$$\begin{cases} 64\,k_1 + 22\,k_2 + 16\,k_3 + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\ 22\,k_1 + 9\,k_2 + 2\,k_3 + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\ 16\,k_1 + 2\,k_2 + 16\,k_3 + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$$

En este sencillo caso particular el sistema podrá resolverse con la teoría de matrices. Sin embargo, lo habitual es que los portafolios estén constituidos por una cantidad considerable de inversiones, lo que llevaría a sistemas lineales de magnitud tal que aquellos métodos son difíciles de aplicar.

La expresión matricial de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 64 & 22 & 16 & 1 \\ 22 & 9 & 2 & 1 \\ 16 & 2 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dfrac{\lambda}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4606 \\ 1.1053 \\ 0.3553 \\ -0.5263 \end{pmatrix}$$

Las tres primeras componentes de este vector son las proporciones que permiten construir el portafolio de riesgo mínimo. El rendimiento esperado y la varianza de este portafolio se calculan con las fórmulas (1) y (2) del capítulo de portafolios eficientes constituidos por dos títulos según el CMV.

$$E^*_P = (-0.4606)(11) + (1.1053)(7) + (0.3553)(8) = 5.51$$

$$\sigma^{2}_{P^*} = (-0.4606)^2 (64) + (1.1053)^2 (9) + (0.3553)^2 (16) + 2(-0.4606)(1.1053)(22) +$$

$$+ 2(-0.4606)(0.3553)(16) + 2(1.1053)(0.3553)(2) = 053$$

$$\sigma_{P^*} = \sqrt{0.53} = 0.73$$

Se tiene entonces que el punto (0.73,5.51) pertenece a la frontera eficiente y representa el portafolio de minimo riesgo (ver figura 2). A efecto de calcular otros puntos de la frontera eficiente debe determinarse, para distintos valores del rendimiento esperado **superiores a 5.51**, las proporciones de la inversión que originan el portafolio de menor riesgo posible para cada uno de esos rendimientos dados (puntos como por ejemplo P_3 y P_4 de la figura 1). El cálculo de estas proporciones se realiza planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones del tipo de la fórmula (6) de este capitulo, que en este caso es:

$$
\begin{cases}
64\,k_1 + 22\,k_2 + 16\,k_3 + 11\,\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex]
22\,k_1 + 9\,k_2 + 2\,k_3 + 7\,\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex]
16\,k_1 + 2\,k_2 + 16\,k_3 + 8\,\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = 0 \\[2ex]
11\,k_1 + 7\,k_2 + 8\,k_3 = E_P \\[2ex]
k_1 + k_2 + k_3 = 1
\end{cases}
$$

La expresión matricial de este sistema es:

$$
\begin{pmatrix}
64 & 22 & 16 & 11 & 1 \\
22 & 9 & 2 & 7 & 1 \\
16 & 2 & 16 & 8 & 1 \\
11 & 7 & 8 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ E_P \\ 1
\end{bmatrix}
\qquad \textbf{(13)}
$$

Para cada valor E_j mayor a 5.51 que se asigne a E_P se obtendrá un sistema lineal del tipo de la fórmula (13). La solución del mismo indicará las proporciones que deben invertirse para que el rendimiento esperado sea E_j. Con la fórmula (2) del capítulo de portafolios eficientes constituidos por dos títulos según el CMV, se podrá calcular la varianza y la desviación estándar $_2$ y σ_j, con lo que se completan las coordenadas del punto

σ_j

(σ_j, E_j) de la frontera eficiente (ver figura 1). Repitiendo este procedimiento pueden obtenerse tantos puntos como se desee.

Dado que (13) puede expresarse abreviadamente C K = B y que la solución, si existe, puede calcularse con la fórmula

$$K = C^{-1} B$$

Entonces es posible encontrar fórmulas generales que permitan expresar las proporciones k_i que minimizan el riesgo en función del rendimiento esperado prefijado E_j. En estas consideraciones se basa un método más eficiente que el descrito anteriormente, que será expuesto a continuación. El primer paso es el cálculo de la inversa de la matriz C. En este caso se tiene:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2} \end{pmatrix}}_{\textbf{K}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0028 & 0.0084 & -0.0112 & 0.2325 & -1.7423 \\ 0.0084 & 0.0252 & -0.0336 & -0.3025 & 2.7731 \\ -0.0112 & -0.0336 & 0.0448 & 0.0700 & -0.0308 \\ 0.2325 & -0.3025 & 0.0700 & -1.7031 & 9.3894 \\ -1.7423 & 2.7731 & -0.0308 & 9.3894 & -52.2913 \end{pmatrix}}_{\textbf{C}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_P \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textbf{B}}$$

Efectuando el producto de las matrices $C^{-1}B$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2325\ E_P & - & 1.7423 \\ -0.3025\ E_P & + & 2.7731 \\ 0.0700\ E_P & - & 0.0308 \\ -1.7031\ E_P & + & 9.3894 \\ 9.3894\ E_P & - & 52.2913 \end{pmatrix}$$

de donde se deducen las fórmulas que permiten el cálculo de las proporciones a invertir en cada una de las inversiones:

$$k_1 = (0.2325)\ E_P - 1.7423$$

$$k_2 = (-0.3025)\ E_P + 2.7731 \qquad \textbf{(14)}$$

$$k_3 = (0.0700)\ E_P - 0.0308$$

Luego, dando distintos valores a E_P (superiores a 5.51 que es el rendimiento esperado del *portafolio de mínimo* riesgo) pueden determinarse las proporciones k_i de diversos portafolios. En base a la fórmula (2) del capítulo del CMV, se calculan las varianzas y desviaciones estándar de cada uno de estos portafolios, con lo que se obtienen las coordenadas de tantos puntos de la frontera eficiente como sea necesario. Por ejemplo, si E_P = 6, de (14) resulta:

$$k_1 = (0.2325)\ (6) - 1.7423 \quad = -0.3473$$

$$k_2 = (-0.3025)\ (6) + 2.7731 \quad = 0.9581$$

$$k_3 = (0.0700)\ (6) - 0.0308 \quad = 0.3892$$

valores que permiten calcular la varianza

$$\sigma_P^2 = (-0.3473)^2(64) + (0.9581)^2(9) + (0.3892)^2(16) + 2\,(-0.3473)\,(0.9581)\,(22) +$$

$$+ (2)\,(-0.3473)\,(0.3892)\,(16) + 2\,(0.9581)\,(0.3892)\,(2) = \mathbf{0.93}$$

extrayendo la raíz cuadrada para obtener la desviación estándar, se tiene:

$$\sigma_P = \mathbf{0.96}$$

con lo que se completa la determinación del par ordenado (0.96,6) cuyas componentes son las coordenadas del punto 2 de la figura 2, representativo del portafolio N° 2 de la tabla 3, construida siguiendo el método explicado.

Portafolio N°	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
N°. Prop \ E_P	**5.51**	**6**	**6.50**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1 k_1	-0.4606	-0.3473	-0.2311	-0.1148	0.1177	0.3502	0.5827	0.8152
2 k_2	1.1053	0.9581	0.8069	0.6556	0.3531	0.0506	-0.2519	-0.5544
3 k_3	0.3553	0.3892	0.4242	0.4592	0.5292	0.5992	0.6692	0.7392
Suma de las proporciones	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Varianza del Portafolio	0.53	0.93	2.18	4.29	11.06	21.23	34.81	51.80
Desviación estándar del portafolio	0.73	0.96	1.48	2.07	3.33	4.61	5.90	7.20

Tabla 3

Hay que notar que en la tabla 3 hay proporciones negativas y hasta el momento se han considerado como factibles sólo aquellos portafolios en que las proporciones a invertir en las inversiones componentes del portafolio son todas positivas o nulas. Sin embargo, estas proporciones negativas tienen una interpretación basada en el concepto de "venta corta" o también llamada "venta descubierta" en inglés "short sale". Este concepto puede definirse: como la venta de un título del cual no se es propietario.

Lo habitual es que un inversionista compre un título cuando estima que su cotización se incrementará en el futuro, con la esperanza de venderlo en ese momento y obtener una ganancia. En síntesis trata "de comprar barato y de vender caro".

Sin embargo existe a veces la expectativa que baje la cotización de un determinado título en el futuro. En ese caso el inversionista, si posee el título, querrá venderlo ahora y probablemente recobrarlo después. La estrategia sería "vender caro y comprar barato". Si el inversionista no posee el título, igualmente puede intentar obtener un beneficio de la información que lo induce a prever una baja futura. Puede "vender descubierto" el título que no posee, es decir:

a) tomar prestado esa acción,

b) venderla en el mercado al precio actual,

c) recomprarla en el futuro a precio más bajo,

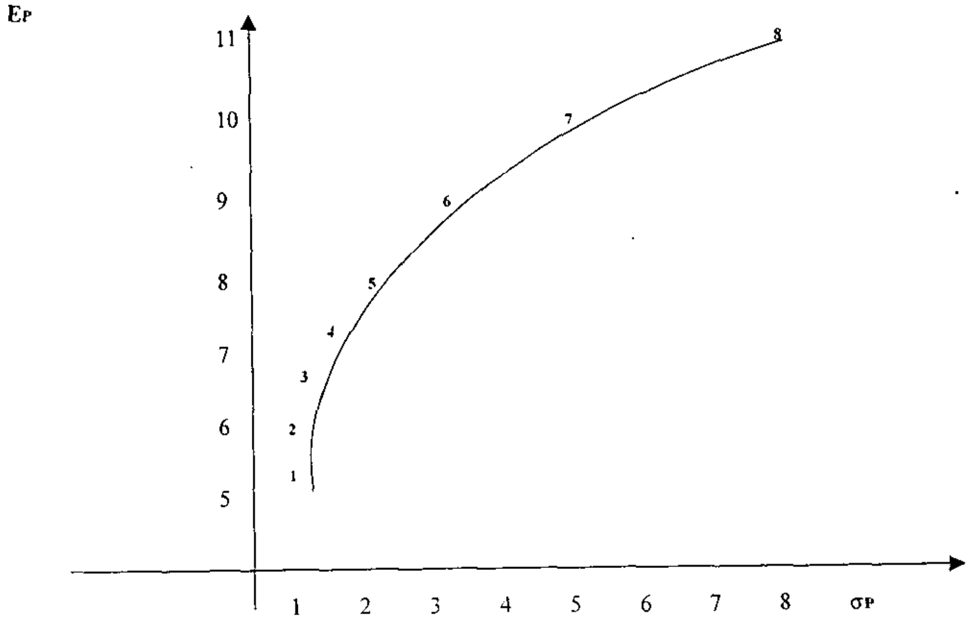
d) devolver la acción al prestamista y ganar la diferencia.

Para realizar la "venta descubierta" de un título habitualmente es necesaria la intervención de un Agente de Bolsa que percibirá una comisión por su tarea.

Volviendo a nuestro ejemplo, si se toma el portafolio N° 2 de la tabla 3, la proporción negativa $k_1 = - 0.3473$ significa que de cada 100 de capital inicial se ha vendido en descubierto la inversión 1 por el valor de 34.73, *y se han invertido los fondos provenientes* de esa venta corta en las inversiones 1 y 2 (nótese que $k_2 + k_3 = 1.3473$), de modo tal que el *saldo neto es siempre 100. En consecuencia,* la *proporción negativa mencionada refleja* la deuda de las acciones de la inversión 1.

En la hipótesis de factibilidad de ventas descubiertas se tendrá, en todos los casos, una frontera eficiente con una representación gráfica similar a la figura 2.

En la primera parte de este capítulo se explican los fundamentos teóricos que permiten la determinación de la frontera eficiente correspondiente a un conjunto de "n" inversiones o activos financieros y los pasos prácticos a seguir para calcularla en el caso simple de portafolios formados por tres inversiones. Pero hay que recordar que la teoría es para cualquier número de activos financieros, que al ir aumentando se complica su cálculo por la cantidad tan enorme de operaciones que involucra, por lo cual hay que recurrir a paquetes de cómputo para facilitar la construcción de la frontera eficiente.



Frontera eficiente correspondiente a portafolios constituidos por las inversiones 1,2 y 3 de la tabla 1.

FIGURA 2

DOS PROPIEDADES DE LA FRONTERA EFICIENTE.

El conocimiento de las dos características de la frontera eficiente que se exponen a continuación, contribuye a su más fácil cálculo y mejor comprensión.

a) **Variación monótona de las proporciones:**

La observación de la tabla 3 permite advertir que las proporciones invertidas en cada una de las inversiones que integran los portafolios eficientes allí detallados, varían en forma monótona, esto es crecen o decrecen constantemente a medida que se incrementa el rendimiento esperado de estos portafolios. La razón de este hecho se deriva de las fórmulas (14), que expresan las proporciones en función del rendimiento esperado, cuya representación gráfica es la figura 3.

Se nota que la·proporción en que invierten el activo 2 en los distintos portafolios es siempre decreciente a medida que se incrementa el rendimiento esperado del portafolio, sucediendo lo contrario con 1 y 2. Asimismo en la figura se muestra una manera de determinar gráficamente las proporciones a invertir en cada una de las tres inversiones para conformar un portafolio con $E_P = 6$.

La justificación teórica de la propiedad de monotonía es que puede probarse que las componentes k_i del vector solución del sistema lineal (7) pueden expresarse como una función lineal del rendimiento esperado del portafolio E_P, del tipo:

$$k_i = m\, E_P + a$$

(Nótese que las fórmulas (14) son un caso particular para n = 3)

Una propiedad conocida de la función lineal es que, $m \neq 0$, entonces cuando $m > 0$ la función es monótona creciente, y cuando $m < 0$ es monótona decreciente.

b) Todo portafolio eficiente puede expresarse como combinación lineal de dos portafolios eficientes arbitrarios.

Se muestra a continuación, a modo de ejemplo, que cualquier portafolio eficiente constituido con las inversiones 1,2 y 3 de la tabla 3 puede expresarse como una combinación lineal de los portafolios N° 3 y N° 6. Esto quiere decir que las proporciones k_1,k_2 y k_3 a invertir en cualquier portafolio eficiente, pueden ser expresadas como combinación lineal de las correspondientes proporciones de los portafolios N° 3 y N° 6:

$$k_1 = \alpha\,(-0.2311) + (1 - \alpha)\,(0.3502)$$

$$k_2 = \alpha\,(0.8069) + (1 - \alpha)\,(0.0506)$$

$$k_3 = \alpha\,(0.4242) + (1 - \alpha)\,(0.5992)$$

Así, en el caso particular en que $\alpha = 0.40$, se obtienen las proporciones que configuran el portafolio N° 5

$$0.40 \begin{pmatrix} -0.2311 \\ 0.8069 \\ 0.4242 \end{pmatrix} + 0.60 \begin{pmatrix} 0.3502 \\ 0.0506 \\ 0.5992 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1177 \\ 0.3531 \\ 0.5292 \end{pmatrix}$$

Portafolio N° 3 Portafolio N° 6 Portafolio N°5

0.40 (Port. N° 3) + 0.60 (Port. N° 6) = Port.N° 5

A efectos de corroborar que los portafolios eficientes pueden ser expresados como combinación lineal de los Portafolios N° 3 y N°6, puede verificarse que si $\alpha = 1.20$ entonces se tiene el Portafolio N° 2 y que si $\alpha = -0.80$ resulta el Portafolio N° 8

1.20 (Port. N° 3) + (-0.20) (Port. N° 6) = Port.N° 2

(-0.80) (Port. N° 3) + 1.80 (Port. N° 6) = Port.N° 8

Esta propiedad es general y válida para portafolios constituidos por cualquier número de inversiones. Proporciona las bases para un método práctico de construcción de la frontera eficiente a partir de dos portafolios eficientes cualesquiera.

CONCLUSIONES

En tiempos recientes, los mercados financieros se han caracterizado por el importante desarrollo de técnicas adecuadas de medición y control del riesgo. Además, los avances tecnológicos en telecomunicaciones y sistemas de información automatizados han hecho posible una mayor globalización de los mercados financieros que han favorecido la difusión y perfeccionamiento de los instrumentos y métodos para la administración del riesgo.

Se introdujo la toma de decisiones financieras en un contexto de cartera, el aspecto fundamental consiste en la manera en que un inversionista seleccione la mejor combinación de riesgo y rendimiento para maximixar su riqueza.

Un supuesto fundamental en ésta tesis, fue el de la actitud de aversión al riesgo por parte del inversionista, ya que es básico para los modelos de decisión que se estudiaron. En teoría, identificamos tres actitudes hacia el riesgo: deseo, aversión e indiferencia. Un buscador de riesgo es qien prefiere el riesgo. Dada una elección entre inversiones de mayor y menor riesgo con idénticos rendimientos monetarios esperados, ésta persona prefiere la *inversión más riesgosa. La persona indiferente no se preocupa por la inversión que realiza.* Indudablemente hay individuos que prefieren el riesgo y otros que son indiferentes hacia él, pero la lógica y la observación indican que entre inversionistas predominan quienes lo evitan.

En 1.1 se introdujeron la media y la varianza como medidas del riesgo y del rendimiento esperado. Bajo el supuesto, de que quienes toman decesiones tienen aversión al riesgo y basan su decisión de elección en el Criterio de la Media-Varianza, es decir, a igualdad de rendimientos la inversión con menor riesgo o, a igualdad de riesgos la inversión con mayor rendimiento esperado.

Una cartera se definió como una combinación de activos. La teoría de carteras trata de la selección de cartera eficiente, es decir, carteras que proporcionan el rendimiento más alto posible en cualquier grado específico de riesgo o el riesgo más bajo posible en cualquier tasa de rendimiento. La teoría de carteras se ha formulado principalmente para activos financieros (acciones y bonos). Sin embargo, pueden hacerse fácilmente ampliaciones de ésta teoría de activos financieros a activos físicos, en ésta tesis se trató al activo en forma teórica y general, sin hacer referencia a algún activo en particular.

Un aspecto fundamental de la teoría de carteras es que el riesgo inherente a cualquier activo mantenido en cartera es diferenre al riesgo de ese activo en forma aislada. Como estudiamos en 1.2 un activo puede tener riesgo cuando se mantiene en forma aislada, pero no tanto si se mantiene en una cartera. Po lo tanto, la varianza de una cartera de dos activos riesgosos no es meramente la suma de sus varianzas respectivas. También influye la covarianza entre ellos, lo que da base a la correlación y a la ganancia de riesgo por diversificación.

Si en la toma de su decisión, el inversionista considera simultáneamente el riesgo y el rendimiento según el Criterio de Media-Varianza, entonces no queda caracterizado un portafolio óptimo entre todos los eficientes, a menos que se especifiquen las preferencias subjetivas del inversionista a través de su mapa de indiferencia.

Es interesante observar que tanto para portafolios constituidos por dos títulos como por tres títulos, las proporciones que minimizan el riesgo (varianza) del portafolio son todas distintas de cero. Ello es así por cuanto los numeradores de todas las fórmulas son números positivos. Esto es porque los numeradores son las varianzas o producto de varianzas de los distintos títulos, y estas varianzas serán siempre distintas de cero bajo la hipótesis que los rendimientos son aleatorios (con riesgo). Este resultado implica que para minimizar el riesgo de invertir alguna cantidad en todos los títulos disponibles, lo que nos muestra que la cuestión de la minimización del riesgo está íntimamente asociada a la diversificación de las inversiones.

En cuanto a la diversificación, cuando hay una correlación lineal perfecta positiva ($\rho = 1$), quedó comprobado el hecho que en este caso ningún portafolio tiene riesgo menor al de los títulos que lo componen.

Si se consideran portafolios constituidos por dos títulos incorrelacionados negativa en forma perfecta ($\rho = -1$), se observa que:

i) diversificando convenientemente puede obtenerse portafolios con riesgo menor al de los títulos que lo componen.

ii) existe un portafolio sin riesgo ($\sigma_P = 0$) y con un rendimiento esperado positivo.

$$E(I_P) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(E(I_1) - E(I_2)) + E(I_2)$$

que es un promedio de los rendimientos esperados de ambos títulos, ponderado por el riesgo.

iii) para cada nivel de riesgo menor a σ_1 existen dos portafolios factibles con distinto rendimiento esperado. Obviamente el que lo tenga menor es ineficiente de acuerdo al CMV.

En el caso de incorrelación de los dos títulos ($\rho = 0$), diversificando mediante las proporciones

$$k^*_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad \text{y} \qquad k^*_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_2^2}$$

se obtendrán las proporciones óptimas a invertir en cada una de las dos inversiones para obtener un portafolio con el mínimo riesgo. Mientras que se invierta la proporción

$$k'_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

calcula el portafolio que separa al portafolio de mínimo riesgo y a los portafolios que originan ganancia de riesgo por diversificación (esto es lograr que el riesgo del portafdolio óptimo sea inferior al de la inversión que lo tenga menor).

Cuando el coeficiente de correlación lineal esta entre $-1<\rho<1$, es factible obtener ganancia de riesgo por diversificación siempre que el coeficiente de correlación lineal entre ambas inversiones sea menor que el cociente entre la desviación estándar de la inversión de menor riesgo y la otra inversión, es decir,

Si $-1<\rho<\sigma_1$ entonces $\sigma^*_p < \sigma_1$

Supuesto que $\sigma_1<\sigma_2$ y $k_1>0$, $k_2>0$

Entanto que, todo portafolio en que la proporción invertida k_1 invertida en la inversión de menor riesgo sea superior al valor

$$k'_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

tiene un riesgo menor al de la inversión 1, originando ganancia de riesgo por diversificación de inversiones.

Finalmente en el capítulo 4.1 se muestra un método para la construcción de la frontera eficiente, mediante multiplicadores de Lagrange.

Además de haber sido el propósito principal de ésta tesis él haber desarrollado una introducción a la teoría de la cartera teniendo como temas centrales la influencia del riesgo y la diversificación; un segundo propósito ha sido el sustentar toda la teoría presentada en la matemática de la forma más formal posible, ya que es de ésta manera como se nos son enseñadas las matemáticas en la Facultad de Ciencias y que todo aquel alumno que consulte ésta tesis vea una aplicación de la estadística, la probabilidad, el cálculo, la geometría y el álgebra lineal a un tema de las finanzas. Observando como las matemáticas son la columna vertebral de otras muchas ciencias y como son imprescindibles para el hombre en la actualidad y con toda seguridad durante todo el tiempo futuro que éste tenga por delante.

BIBLIOGRAFÍA

Administración de Inversiones. Eduardo Villegas H. Mc Graw Hill.

Administración Financiera / Lawrence D. Schall, Charles W. Haley; traducción Carlos Hugo Giraldo.

Administración Financiera Básica / traducción Bernardo de Allende.

Administración Financiera de Empresas / J. Fred Weston, Eugene F. Brigham traducción al español por Vicente Agut Armer.

Administración Financiera de Inventarios / Abraham Perdomo Moreno

Administración Financiera de Inversiones / Abraham Perdomo Moreno

Administración Financiera de los Negocios / Clifton H. Krepes, Richard F. Wacht traducción de Alejandro Prieto

Anàlisis Financiero y Gestión de Cartera / Rosenfeld Felix

Cálculo Diferencial e Integral / Hugo Arizmendi Peimbert, Angel Humberto Carrillo Hoyo y Miguel Lara Aparicio.

Cálculo Diferencial e Integral Aplicado a las Ciencias Administrativas y Económicas / Cálculo Financiero / Ferrer Luis

Cálculo Infitesimal / Michael Spivak ; versión española Bartolomé Frontera Márquez

Cálculo para Ciencias Administrativas y Sociales / Louis Leithold

Cálculo Vectorial / Marsden, Tromba.

Carteras de-Inversión. Javier Márquez Diez-Canedo. Limusa.

El Riesgo de las Tasas de Interés en los Mercados Financieros. Tesis de titulación de Raúl de Jesús Gutiérrez. UNAM Facultad de Ciencias.

Estadística y Probabilidad / Gerorge Canavos

Finanzas Coorporativas. Stephen A. Ross./ Randoph W. Westerfield./ Jefrey F. Jaffe. Editorial Irwin.

Inversiones y Riesgos Financieros/ Ignacio Mauleón

Inversiones. Martín Marmolejo González. IMEF.

Invertir para innovar / traducción Victor Sánchez de Zabala

Invest Like the Best / James P. O´shaughnessy

Investigación Científica: Clave del Progreso / Introducción de Wassily W. Leóntigf versión de José Mendoza Nieto

Investments / Frak K. Reilly

Investments an Introduction to Analysis and Manamegent / Frederick Amling

Investments. William Sharpe / Gordon Alexander. Prentice Hall.

Investments: Introduction to Analysis and Planning / Bernard Winger, Ralph R. Frasca

Investments: Principles, Practices and A nalysis
José Jaime Enriquez Felix, Michel Fiol Galián