



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

HOYOS NEGROS EN LA
TEORÍA DE CUERDAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO EN
F I S I C A
P R E S E N T A :
MARÍA CATALINA ESPINOZA HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARTÍ RUIZ ALTABA

JULIO

2000

284338



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Hoyos negros en la teoría de cuerdas"

realizado por ESPINOZA HERNANDEZ MA. CATALINA

con número de cuenta 9029659-4 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. MARTI RUIZ ALTABA

Propietario

DR. JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

Propietario

DR. ALEJANDRO CORICHI RODRIGUEZ GIL

Suplente

DRA. MYRIAM MONDRAGON BALLESTEROS

Suplente

DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSON

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura

ESTADO DE QUERÉTARO
UNIVERSIDAD NACIONAL

*A Mariano Espinoza y
Herminia Hernández,
mis padres
Entrega y nobleza ejemplar.*

*Encaminado hacia la muerte,
habiendo conocido solo una
pequeña parte de la vida.
el hombre se levanta y se
desvanece como el humo,
persuadido únicamente por
aquello que cada uno experimentó...
¿Quién entonces puede asegurar
haber encontrado el todo?*

Empedocles

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Martí Ruiz Altaba por la excelente dirección de este trabajo, en especial por su paciencia, confianza y su vasto conocimiento compartido, al Dr. Fernando Quevedo y al Dr. Alfonso Mondragón por brindarme sus sabios consejos y por corregir mis desaciertos, al Dr. Manuel Torres por sus oportunas palabras de aliento.

A los sinodales: Dr. Alejandro Ayala, Dr. Alejandro Corichi, Dra. Myriam Mondragón y Dr. Axel de la Macorra por sus valiosas observaciones y comentarios a este trabajo.

A mis padres por su constante apoyo y por brindarme su cariño y confianza, lo cual ha sido parte definitiva en mi desarrollo académico. A mis hermanos: Mario, Juan, Raúl, Víctor, Alex, Lupe, Silvia y Bety a quienes suelo *exasperar* con mi peculiar personalidad... *mil* gracias por su comprensión y cariño. A mis cuñadas(os) agradezco su benevolencia y a mis sobrinos sus hermosas e inocentes sonrisas que me impregnan de tranquilidad.

A mis amigos: Aida, Ana, Benjamin, Daniel, Erica Ivonne, Ezequiel, Javier, Liliana, Nayeli y Tania por su grata compañía, por brindarme su valiosa ayuda y sobre todo por tolerar mis usuales *traumas*.

Agradezco a mis profesores de la carrera de quienes aprendí mucho y a mis compañeros del Instituto de Física y de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en especial a Braulio, Carmen, Erika y Luis. También agradezco al proyecto de investigación IN0103997 por el apoyo económico brindado.

Por último quiero expresar mi agradecimiento a un *ser* muy especial que en todo momento me dio fuerza y valor para sobreponerme y seguir adelante.

Hoyos Negros
en la
Teoría de Cuerdas

Índice General

Introducción	3
1 Física clásica de hoyos negros	7
1.1 Introducción	7
1.1.1 Relatividad general	7
1.1.2 Colapso gravitacional clásico	8
1.2 Solución de Schwarzschild	8
1.2.1 Extensión de Kruskal	9
1.3 Hoyos negros estacionarios	14
1.3.1 Solución de Kerr-Neumann y hoyos negros extremales	14
1.3.2 Diagramas de Penrose	17
1.3.3 Proceso de Penrose	19
2 Termodinámica de hoyos negros	21
2.1 Introducción	21
2.2 La dinámica de los hoyos negros clásicos	22
2.3 Radiación de Hawking	24
2.4 Termodinámica de los hoyos negros cuánticos	28
2.5 Paradoja de la pérdida de información	28
2.6 Complementariedad del hoyo negro	29
3 Estados cuánticos en hoyos negros	31
3.1 Introducción	31
3.2 Correspondencia entre hoyos negros y cuerdas	33
3.2.1 Hoyo negro de Schwarzschild	34
3.2.2 Hoyos negros con carga	36

3.2.3	Principio de correspondencia	38
3.3	Relación precisa entre hoyos negros y cuerdas	38
3.3.1	Hoyos negros supersimétricos y <i>BPS</i>	38
3.3.2	<i>D</i> -branas	39
3.3.3	Hoyos negros supersimétricos: resultados exactos	41
3.3.4	Hoyo negro casi extremo	43
3.4	Dualidad	45
3.4.1	Unitariedad e información	46
3.4.2	Cuerda negra	47
4	Horizontes extendidos	49
4.1	Introducción	49
4.2	Horizonte extendido para hoyos negros supersimétricos	51
4.2.1	Definición de horizonte extendido	51
4.2.2	Area del horizonte extendido	51
4.2.3	Modificación a la entropía de Bekenstein-Hawking	57
4.3	Horizonte extendido para hoyos negros no supersimétricos	58
	Conclusiones	67
	A Curvatura escalar para la métrica de Schwarzschild	69
	B Reducción dimensional de la teoría diez-dimensional	71
	C Horizonte extendido y termodinámica	75
	Bibliografía	77

Introducción

De las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, únicamente la gravedad presenta problemas serios en una descripción cuántica. En relatividad general, algunas condiciones iniciales de estados físicos evolucionan hacia configuraciones de campo singulares [1], como por ejemplo los hoyos negros, en donde la propia teoría clásica deja de tener validez. Pero si se "ocultan" las singularidades detrás de horizontes de eventos, esto no constituye un problema serio puesto que no hay nada que pueda escapar de la región que contiene a la singularidad. Sin embargo, al incorporar las ideas cuánticas surgen nuevos fenómenos. Es bien conocida, por ejemplo, la radiación de Hawking de los hoyos negros, cuyas características son las de una radiación térmica y por lo tanto no contiene información acerca del estado del hoyo negro que la emite. Esta última afirmación es básicamente lo que se conoce como la "paradoja de la pérdida de información" puesto que se pierde todo conocimiento de las características de los objetos que son arrastrados hacia la singularidad. La afirmación de Hawking es que esto implica una evolución no unitaria, violando uno de los principios básicos de la mecánica cuántica.

Los hoyos negros son sistemas térmicos, y como tales, se apegan a las leyes de la termodinámica. De hecho, los hoyos negros tienen una entropía que es proporcional al área del horizonte de eventos. En mecánica cuántica la entropía termodinámica se interpreta en términos del número de estados microscópicos que tienen las mismas propiedades macroscópicas, lo que requiere del conocimiento de los grados de libertad cuánticos del sistema. Para hoyos negros la incógnita son los grados de libertad que corresponden a la entropía de Bekenstein-Hawking.

Los hoyos negros más generales se caracterizan por su masa M , su carga eléctrica e y su momento angular J . Para los hoyos negros cargados, la condición de que la singularidad esté oculta detrás del horizonte implica $M \geq e$. El caso $M = e$ se denomina extremo.

Actualmente la teoría de cuerdas es el mejor candidato para una teoría cuántica de la gravedad, y como tal es capaz de describir, en particular, la dinámica de los hoyos

negros. Una característica común entre hoyos negros y estados elementales de la cuerda es que la degeneración de estados con masa dada se incrementa con ésta. Sin embargo, para los estados elementales de la cuerda el logaritmo de la degeneración de estados se incrementa linealmente con la masa, mientras que la entropía de Bekenstein-Hawking de un hoyo negro se incrementa como el cuadrado de la masa. Hay algunos casos en los que se puede anular la discrepancia entre las dos entropías apelando a la renormalización de la masa de un hoyo negro. Existen sin embargo, algunos estados particulares en teoría de cuerdas, denominados estados *BPS*, los cuales no reciben ninguna renormalización de la masa.

La física de hoyos negros involucra acoplamientos intrínsecamente grandes. Por este motivo no es posible aplicar la teoría de cuerdas perturbativa. Afortunadamente existe una descripción no perturbativa en términos de *D*-branas ó solitones de la teoría de cuerdas [2]. Las *D*-branas son membranas extendidas de diferentes dimensiones espaciales. Cuando estas membranas se enrollan en las direcciones compactas aparecen como objetos localizados (partículas cargadas) en cuatro dimensiones. Superponiendo muchos de estos objetos de diferentes dimensiones se obtiene un solitón de cuerdas que tiene muchas de las propiedades de un hoyo negro. Por ejemplo, tiene una degeneración alta, con lo cual se obtiene una interpretación estadística de la entropía termodinámica. Una ventaja de este punto de vista es que los hoyos negros extremos son ahora configuraciones supersimétricas de modo que hay cantidades que se pueden calcular en acoplamiento débil y que son válidas para todos los valores de éste. Esto da lugar a cálculos precisos de la entropía de un hoyo negro extremo que concuerdan exactamente con la entropía de Bekenstein-Hawking.

En este trabajo se presenta una revisión breve del estudio de los hoyos negros en la teoría de cuerdas. Paralelamente se esboza una idea alternativa para calcular la entropía de un hoyo negro extremo [3, 4], la cual se retoma en un cálculo explícito para hoyos negros no supersimétricos.

El primer capítulo está enfocado a la física clásica de los hoyos negros. Se introducen los conceptos físicos que son la base para los temas posteriores.

En el segundo capítulo, se estudia la analogía entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la dinámica de los hoyos negros. Estas leyes juegan un papel muy importante en la incompatibilidad entre la relatividad general y la mecánica cuántica. También se estudia la radiación de Hawking, así como la pérdida de unitariedad y de información en el proceso de evaporación de los hoyos negros.

En el tercer capítulo se introduce el estudio de los hoyos negros en el contexto de la

teoría de cuerdas. Se estudia cómo es posible identificar y contar los estados cuánticos asociados con los hoyos negros. Se discute la radiación de Hawking en un límite de baja energía. También se introducen las transformaciones de dualidad como una aplicación a la descripción de los hoyos negros.

Finalmente en el cuarto capítulo se presenta la idea [3, 4] de que la entropía de un hoyo negro extremo no es exactamente igual al área de su horizonte de eventos, sino que es igual al área de una superficie cercana al horizonte de eventos denominada "horizonte extendido".

En este capítulo se presenta también una pequeña contribución a dichos resultados. Se realizó el cálculo del horizonte extendido para hoyos negros no supersimétricos y se dedujo bajo que circunstancias éste es un concepto útil y significativo.

Capítulo 1

Física clásica de hoyos negros

1.1 Introducción

1.1.1 Relatividad general

La relatividad general es una teoría efectiva a bajas energías de la “elasticidad” del espacio-tiempo, es decir, de su resistencia a ser curvado. En relatividad general una solución es una expresión que resuelve las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la materia y están dadas (en unidades geometrizadas $c = G = 1$) por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu\beta}g^{\alpha\beta}$) y R es el escalar de Ricci ($R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$). De este modo, una solución significa tener una expresión para el tensor de la métrica $g_{\mu\nu}$ y para el tensor de energía-momento, las variables R dependen únicamente de la métrica.

El tensor $R_{\alpha\nu\beta}^{\mu}$ contiene toda la información de la curvatura del espacio-tiempo y se denomina tensor de Riemann. La curvatura escalar se define de la siguiente manera:

$$C = R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (1.2)$$

La relatividad general se puede generalizar a d dimensiones en el espacio-tiempo proponiendo una métrica $d \times d$.

1.1.2 Colapso gravitacional clásico

Una estrella que ha agotado su combustible nuclear se mantiene por presión de degeneración (principio de exclusión de Pauli). Si es lo suficientemente pesada, las partículas degeneradas llegan a ser relativistas (electrones para enanas blancas, neutrones para estrellas de neutrones, etc), y entonces ya no es posible que la estrella siga estable; el colapso es inevitable.

Eventualmente, la estrella colapsante puede terminar dentro de una esfera de radio $R = 2M$ (radio de Schwarzschild) desde la cual la velocidad de escape es la velocidad de la luz. Una vez dentro de esta esfera la estrella queda desconectada causalmente del exterior y es efectivamente "negra". Este hecho fue descubierto en la teoría Newtoniana por Michell (1784) y Laplace (1796) y continúa siendo válido en la teoría de Einstein.

Se define un hoyo negro como una región sin escapatoria, en la que, como su nombre lo indica ni la materia ni la luz pueden escapar. Para un tratamiento más sofisticado ésta no es una buena definición, puesto que cualquier cono de luz futuro en un espacio plano de Minkowski, o el universo mismo, son una región de este tipo. Sin embargo, una definición como ésta nos permite identificar hoyos negros cuando estos emergen en una teoría, ya que la frontera (espacial) de una región sin escapatoria es el horizonte de eventos, donde aún la luz es acelerada hacia el interior lo suficiente como para mantenerla estática y por lo tanto el horizonte de eventos resulta ser una singularidad en las coordenadas de la métrica del espacio-tiempo (que se puede evitar transformando a un nuevo sistema de coordenadas).

Se conocen muchas evidencias teóricas de que si un objeto se colapsa para formar un hoyo negro, la singularidad que se genera con este colapso debe estar contenida en el hoyo negro, en otras palabras, nunca podría ser detectada por observadores en el exterior de éste. Esta es la llamada *conjetura de censura cósmica*.

1.2 Solución de Schwarzschild

La solución más sencilla de las ecuaciones de Einstein en el vacío que representa un hoyo negro es el espacio-tiempo de Schwarzschild. Está descrita por el elemento de línea [5, 6]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.3)$$

Representa el estado final del colapso gravitacional de un cuerpo con simetría esférica (y por lo tanto sin rotación) en un universo que incluye regiones alejadas de la zona de colapso (regiones con $r \gg 2M$) en las que la métrica es prácticamente la de Minkowski. Esta solución se caracteriza por el parámetro M , que podemos identificar como la masa gravitacional del objeto, gracias a que podemos estudiar la *aceleración* de objetos a grandes distancias.

Tiene simetría esférica, lo cual se manifiesta en que las coordenadas θ y φ no aparecen en el elemento de línea, salvo en la parte que corresponde a la métrica de la esfera homogénea $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

También posee simetría de traslación temporal: ante el cambio $t \rightarrow t + t_0$, la métrica queda invariante. Decimos entonces que el espacio-tiempo es estacionario. Finalmente, la métrica es invariante ante la inversión temporal, es decir, $t \rightarrow -t$, lo que se manifiesta por la ausencia de términos de tipo $drdt$ en el elemento de línea. Decimos entonces que el espacio-tiempo no sólo es estacionario, sino también estático.

Una característica importante de la solución de Schwarzschild es que las componentes de la métrica son singulares en $r = 2M$ y en $r = 0$. Dicha singularidad de las componentes puede ser debida a i) las coordenadas usadas para obtener la forma general de la métrica dejan de ser apropiadas, ó ii) una verdadera singularidad de la estructura del espacio-tiempo.

Veremos más adelante que la singularidad en $r = 0$ sí es auténtica: la curvatura diverge en $r = 0$. Sin embargo, la singularidad en $r = 2M$ es solo aparente, ya que las coordenadas r y t dejan de ser apropiadas en $r = 2M$ (de igual manera a lo que ocurre con las coordenadas θ y φ en el polo norte de una esfera). Por otro lado, en el contexto global, $r = 2M$ sí tiene un significado físico como límite de la región de escape, es decir del hoyo negro. La singularidad verdadera en $r = 0$ queda por lo tanto causalmente desconectada del exterior del hoyo negro, atrapada dentro del horizonte. Esto se puede ver mejor pasando a las coordenadas de Kruskal.

1.2.1 Extensión de Kruskal

Para analizar las singularidades (en $r = 2M$ y $r = 0$) del espacio-tiempo de Schwarzschild (1.3) notamos primero que, debido a la simetría esférica, basta estudiar la métrica bidimensional:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (1.4)$$

Las geodésicas radiales nulas del espacio-tiempo de Schwarzschild, satisfacen:

$$0 = g_{ab}K^aK^b = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2, \quad (1.5)$$

lo cual implica

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2. \quad (1.6)$$

De este modo, las geodésicas de Schwarzschild nulas y radiales satisfacen que

$$t = \pm r_* + \text{constante}, \quad (1.7)$$

donde r_* está definida por

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (1.8)$$

Las coordenadas nulas de Finkelstein u, v se definen por:

$$u = t - r_*, \quad (1.9)$$

$$v = t + r_*. \quad (1.10)$$

En estas coordenadas, la métrica (1.4) toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv, \quad (1.11)$$

donde ahora r es vista como una función de u y v , definida implícitamente por

$$r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) = r_* = \frac{v - u}{2}. \quad (1.12)$$

Usando la ecuación (1.12), reescribiremos la ecuación (1.11) como:

$$ds^2 = -\frac{2M \exp\left(\frac{-r}{2M}\right)}{r} \exp\left(\frac{v-u}{4M}\right) du dv. \quad (1.13)$$

definiendo las nuevas coordenadas U y V como

$$U = -\exp\left(\frac{-u}{4M}\right), \quad (1.14)$$

$$V = \exp\left(\frac{v}{2M}\right), \quad (1.15)$$

podemos escribir la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dU dV. \quad (1.16)$$

De este modo ya no existe una singularidad en $r = 2M$ (es decir, en $U = 0$ ó $V = 0$). Ahora es posible extender la solución de Schwarzschild, permitiendo que U y V tomen todos los valores compatibles con $r > 0$.

Por otro lado, en $r = 0$, a diferencia de lo que ocurre en $r = 2M$, sí se tiene una singularidad auténtica, lo cual se puede ver al evaluar la curvatura escalar ${}^1 R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}$, que diverge en $r = 0$, y no se puede hacer finita con una transformación de coordenadas.

Haciendo una última transformación $T = \frac{U+V}{2}$, $X = \frac{V-U}{2}$, la métrica de Schwarzschild toma la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.17)$$

La relación entre las viejas coordenadas (t, r) y las nuevas (T, X) está dada por

$$\ln \frac{T+X}{X-T} = \frac{t}{2M}, \quad (1.18)$$

$$X^2 - T^2 = \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (1.19)$$

En la ecuación (1.17), r debe entenderse como una función de X y T definida por la ecuación (1.19). Las coordenadas (T, X, Θ, Φ) se llaman de Kruskal. El rango permitido

¹El cálculo explícito de este resultado se muestra en el apéndice A.

versión temporal. La segunda es muy interesante, pues no cambiar con el tiempo indica que se trata del estado final de la evolución de un sistema.

En relatividad general la invariancia se expresa en términos de vectores de Killing, que indican el desplazamiento infinitesimal ante el cual la métrica queda invariante.

Un espacio-tiempo estacionario es la solución de Kerr-Neumann, que se interpreta como un hoyo negro rotante sin simetría esférica y cargado eléctricamente. Está caracterizado por tres parámetros (en unidades geometrizadas): la masa M , la carga eléctrica e y el momento angular J ($a \equiv \frac{J}{M}$). Existen otras soluciones para hoyos negros, pero todas son casos particulares de esta solución: ($e = 0$, $a \neq 0$), es el hoyo negro de Kerr, ($e \neq 0$, $a = 0$) es el de Reissner-Nordström y ($e = a = 0$) es el de Schwarzschild. La métrica es:

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.21)$$

y el campo de Maxwell está dado por:

$$A_\mu = -\frac{er}{\Sigma} [(dt)_\mu - a \sin^2 \theta (d\phi)_\mu], \quad (1.22)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr, \quad (1.23)$$

Este espacio-tiempo es una solución de las ecuaciones de Einstein y de Maxwell, y describe un hoyo negro cuando:

$$a^2 + e^2 \leq M^2. \quad (1.24)$$

De lo contrario no satisface la condición que la región exterior al horizonte sea globalmente hiperbólica.

La solución de Kerr-Neumann posee un vector de Killing $\xi^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$, pero éste no es de carácter temporal, ni siquiera en toda la región externa del hoyo negro.

La región externa al hoyo negro donde el campo de Killing es de carácter espacial, se conoce como la ergosfera, y comprende la región:

$$r_+ < r < M + \sqrt{M^2 - e^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.25)$$

donde r_+ determina la posición del horizonte de eventos por:

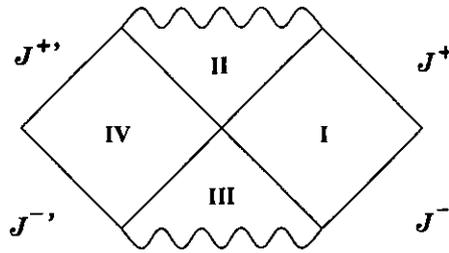


Figura 1.4 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo extendido de Schwarzschild, J^+ y J^- representan el futuro nulo infinito y el pasado nulo infinito respectivamente.

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - e^2}. \quad (1.26)$$

Este horizonte sólo existe si la condición (1.24) se satisface. Cuando se cumple la igualdad $a^2 + e^2 = M^2$ se tiene lo que se denomina **hoyo negro extremo** [14].

La ergosfera es la región donde ningún objeto puede permanecer estacionario, es decir, ningún objeto físico puede moverse a lo largo de las curvas integrales del campo de Killing estacionario ξ^μ , puesto que esto implicaría que la tangente a la curva del universo de dicho objeto sería de carácter espacial.

1.3.2 Diagramas de Penrose

Las singularidades en las componentes de la métrica en $r = r_+$ y en $r = r_-$ son singularidades de las coordenadas de la misma naturaleza que la singularidad en $r = 2M$ en el espacio-tiempo de Schwarzschild ($r_{\pm} \rightarrow 2M$ si $a \rightarrow 0$ y $e \rightarrow 0$). Como en el caso de Schwarzschild, se puede extender el espacio-tiempo a través de estas singularidades. Cuando estas extensiones se conjuntan de una manera consistente se obtiene una notable estructura global del espacio-tiempo extendido de Kerr-Neumann. El diagrama de Penrose [5, 7] para el espacio-tiempo extendido de Schwarzschild se muestra en la figura 1.4 y el correspondiente para el espacio-tiempo extendido de Kerr-Neumann se muestra en la figura 1.5 en el caso no extremo, $a^2 + e^2 < M^2$.

En la figura 1.5 la región I es la región asintóticamente plana cubierta de una manera no singular por las coordenadas originales (1.21) con $r > r_+$. Al extenderse a través de la singularidad de la coordenada en $r = r_+$, se obtiene la región II que representa al hoyo negro, la región III que representa al hoyo blanco y la región IV que representa otra región

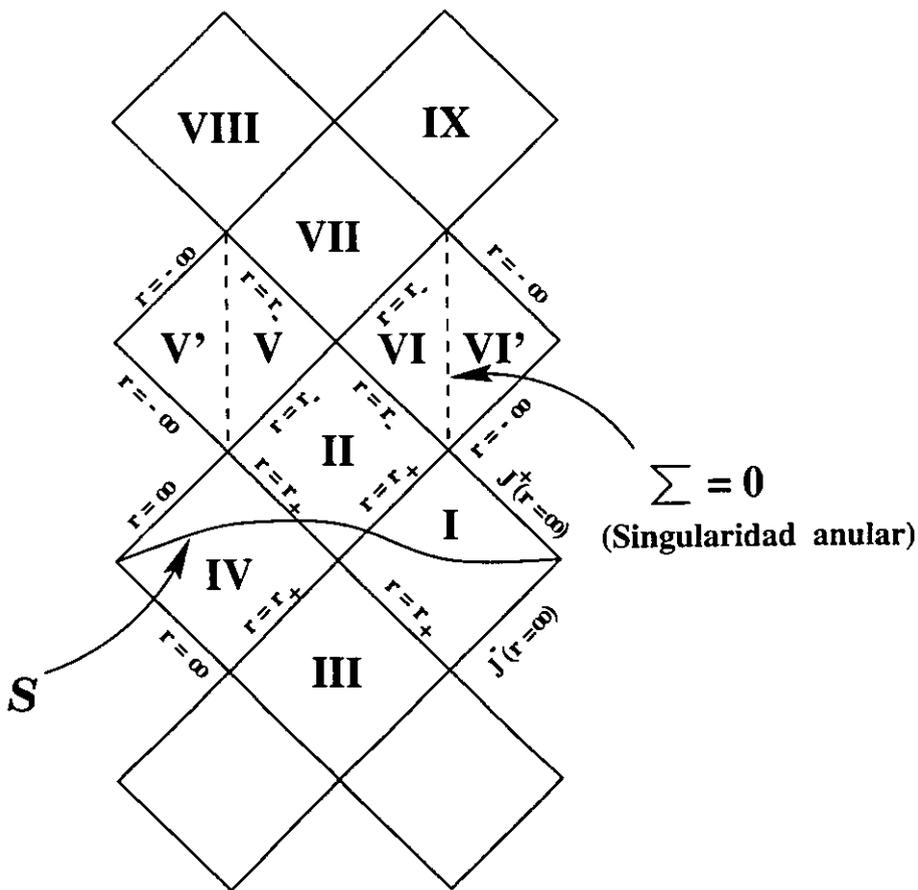


Figura 1.5 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo extendido de Kerr-Neumann para el caso $a^2 + e^2 < M^2$.

asintóticamente plana justo como en el caso de Schwarzschild (figura 1.4). Sin embargo, a diferencia del caso de Schwarzschild, en lugar de encontrar una verdadera singularidad en la “frontera alta” de la región II y en la “frontera baja” de la región III, se encuentra solamente otra singularidad de coordenadas en $r = r_-$. Entonces se puede extender la región II a través de $r = r_-$ para obtener las regiones V y VI. Estas regiones contienen la singularidad anular en $\Sigma = 0$ y uno puede pasar a través de la singularidad anular para obtener otra región asintóticamente plana con $r \rightarrow \infty$. De esta manera se puede continuar extendiendo el espacio-tiempo de Kerr-Neumann “hacia arriba” para obtener la región VII, en estructura idéntica a la región III, y también obtener las regiones VIII y IX, idénticas en estructura a las regiones IV y I, etc. Análogamente, se pueden extender las soluciones de Kerr-Neumann “hacia abajo”.

La estructura global del caso extremo ($e^2 + a^2 = M^2$, con $r_+ = r_- = M$) difiere de la figura 1.5 pero tiene una estructura similar, en “bloques” con $r > M$ y $r < M$ arreglados en una cadena infinita.

La estructura del espacio-tiempo extendido de Reissner-Nordström ($a = 0, e \neq 0$) es muy similar, excepto que la singularidad verdadera en $\Sigma = 0$ ya no tiene una estructura anular, y entonces no se puede extender a valores negativos de r .

Así pues, un observador inicialmente en la región I del espacio-tiempo extendido de Kerr-Neumann de la figura 1.5 puede cruzar el horizonte de eventos en $r = r_+$ y entrar en la región II del hoyo negro. Sin embargo, en vez de caer a la singularidad en un tiempo finito, como ocurre en el espacio-tiempo de Schwarzschild, el observador puede pasar a través del “horizonte interno” $r = r_-$ (que es un horizonte de Cauchy para la hipersuperficie S mostrada en la misma figura), y por lo tanto entra a la región V ó VI. Desde ahí, el observador puede terminar su existencia en la singularidad anular, aunque también puede pasar a través de ella a una nueva región asintóticamente plana, o puede entrar a la región VII de hoyo blanco y desde ahí entrar a una nueva región asintóticamente plana VIII o IX. Desde ahí puede entrar a un nuevo hoyo negro asociado con esas regiones asintóticas, y continuar su viaje.

1.3.3 Proceso de Penrose

Otro aspecto curioso de la ergosfera es que puede utilizarse para extraer energía de un hoyo negro rotante.

Si una partícula de masa m se mueve a lo largo de una geodésica en un espacio-tiempo

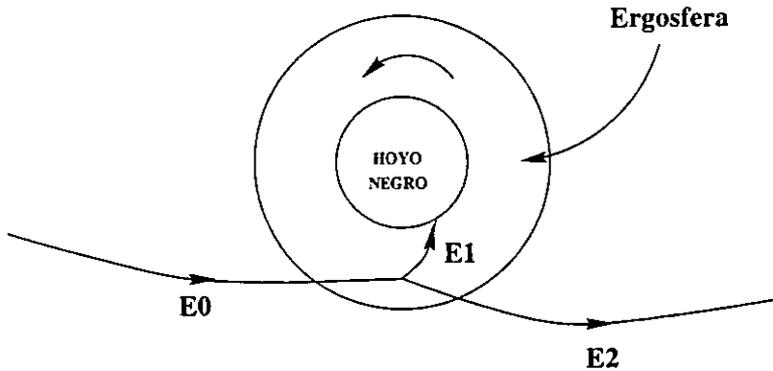


Figura 1.6 Proceso de Penrose para extraer energía de un hoyo negro de Kerr-Neumann.

con un vector de Killing, y la tangente a la trayectoria es u^μ , entonces $\xi^\mu u_\mu$ se conserva. La cantidad $-mu^\mu v_\mu$ es la energía de la partícula vista por un observador que se mueve con una velocidad v^μ . En general, la constante de movimiento $E = -m_0 u^\mu \xi_\mu$ se puede interpretar como la energía de la partícula medida por un observador estacionario en la región asintótica.

Imaginemos que en un punto q dentro de la ergosfera nuestra partícula decae en dos partículas con masas m_1 y m_2 . En ese evento $mu^\mu = m_1 u_1^\mu + m_2 u_2^\mu$. Pero en este sistema inercial, el vector ξ^μ es simplemente un vector espacial, por lo que se puede orientar la desintegración de modo que, por ejemplo, $E_2 = -m_2 u_2^\mu \xi_\mu > 0$.

Por lo tanto $E_1 = E - E_2 > E$, es decir, la partícula 1 que puede salir de la ergosfera tiene más energía que la partícula inicial. La partícula 2 no puede salir de la ergosfera, figura 1.6.

Mediante este proceso se logra extraer una energía $\Delta E = E - E_1 = -E_2$, que se compensa por la energía negativa absorbida por el hoyo negro.

Este proceso no puede continuarse indefinidamente puesto que el momento angular del hoyo negro se va reduciendo por lo que la ergosfera se va reduciendo a medida que este proceso se repite.

Capítulo 2

Termodinámica de hoyos negros

2.1 Introducción

En relatividad general los hoyos negros se pueden visualizar como "atractores" (objetos presentes en los espacios de configuración de algunos sistemas dinámicos no lineales). Es decir, que independientemente de las condiciones iniciales antes del colapso, existe una solución estática caracterizada por sólo unos pocos parámetros conforme el tiempo tiende a infinito después del colapso. En otras palabras, las soluciones estáticas de hoyo negro no "recuerdan" las condiciones iniciales. Esto se manifiesta en el llamado teorema de no pelo ¹ [15], que dice que las soluciones estacionarias de hoyo negro se pueden caracterizar completamente por su masa, momento angular y cargas correspondientes a simetrías locales abelianas.

Cualitativamente el teorema de no pelo se manifiesta por medio de los siguientes hechos: a) un observador externo no puede ver más adentro del horizonte de eventos del hoyo negro; b) la gravedad sólo "siente" al tensor de energía-momento; c) la frecuencia de los fotones emitidos, por un objeto cayéndose al hoyo negro, tiende a cero cuando es medida por un observador lejano [16]. Por lo tanto, después del colapso, se pueden percibir cargas internas correspondientes a simetrías locales a través de campos estáticos, afuera del hoyo negro. Lo anterior significa que los hoyos negros estáticos tienen una degeneración sobre los valores iniciales de cualesquiera parámetros (como momentos multipolares, números cuánticos globales, etc) en una teoría que contenga a la relatividad general. Una

¹Entendiéndose por "pelo" cualquier parámetro necesario para describir a un hoyo negro que no sea la masa, la carga o el momento angular.

manifestación de esta degeneración es la aparición de la entropía S atribuida a los hoyos negros [8], la cual es proporcional al área A del horizonte de eventos del hoyo negro.

Uno de los desarrollos más sobresalientes en física teórica en los últimos veinticinco años fue el descubrimiento de la relación entre ciertas propiedades de los hoyos negros y la termodinámica, dado que juegan un papel muy importante en la incompatibilidad entre la relatividad general y la mecánica cuántica. En este capítulo se estudiará la analogía entre las leyes de la dinámica de los hoyos negros y las leyes de la termodinámica.

2.2 La dinámica de los hoyos negros clásicos

El teorema del área en relatividad general, establece que el área del horizonte de eventos de cualquier hoyo negro, A , sólo puede aumentar o permanecer constante [17]:

$$\Delta A \geq 0. \quad (2.1)$$

El teorema del área es sorprendente porque introduce una flecha de tiempo en la teoría de la relatividad general (aunque la relatividad general es simétrica en el tiempo y el hoyo negro tiene como compañero simétrico temporal a un hoyo blanco). La flecha de tiempo de la entropía tiene la misma dirección. Por lo tanto, se puede establecer una analogía entre el teorema del área y la segunda ley de la termodinámica, que nos dice que en cualquier proceso la entropía total, S , de un sistema cerrado nunca decrece:

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.2)$$

Bekenstein [8] propuso que el área del hoyo negro debería ser interpretada como la entropía física del hoyo negro. Esto no plantea ningún problema desde el punto de vista macroscópico, donde la relatividad general y la termodinámica son dos teorías fundamentales. Sin embargo, desde el punto de vista microscópico la termodinámica es una consecuencia rigurosa de la mecánica estadística.

Una hipersuperficie nula K , tal que en todo punto el campo de Killing ξ^μ es normal a K , se denomina un horizonte de Killing del campo ξ^μ .

Una característica importante de los horizontes de Killing es su gravedad superficial κ , definida de la siguiente manera: Sea ξ^μ un campo de Killing y K un horizonte de Killing de dicho campo. Como $\xi^\mu \xi_\mu$ es constante en K entonces $\nabla^\mu(\xi^\mu \xi_\nu)$ debe ser un vector normal a K , pero el vector normal a una hipersuperficie nula es un vector nulo tangente a ésta, es decir, es proporcional a ξ^μ . Por lo tanto se tiene que:

$$\nabla^\mu(\xi^\nu \xi_\nu) = -2\kappa \xi^\mu. \quad (2.3)$$

Se puede mostrar [5] que:

$$\kappa = \lim(Va), \quad (2.4)$$

donde \lim significa el límite cuando la distancia al horizonte tiende a cero y $V = \sqrt{-\xi^\nu \xi_\nu}$, $a = \sqrt{-a^\nu a_\nu}$ y $a^\mu = \xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu$.

La cantidad κ es la gravedad superficial en el horizonte de eventos (la fuerza que se debe ejercer para mantener una masa de prueba en el horizonte de eventos). Para un hoyo negro de Kerr-Neumann, está dada por:

$$\kappa = \frac{\sqrt{(M^2 - a^2 - e^2)}}{2M \left[M + \sqrt{(M^2 - a^2 - e^2)} \right] - e^2}. \quad (2.5)$$

La gravedad superficial κ resulta ser constante en todo el horizonte de eventos de un hoyo negro estacionario, en analogía con el hecho de que la temperatura, T , es uniforme en un cuerpo en equilibrio térmico (ley cero de la termodinámica).

Al utilizar el teorema de Stokes [9] se obtiene que las diferencias en masa, área, y momento angular, de dos hoyos negros estacionarios están relacionadas por:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J, \quad (2.6)$$

donde Ω es la velocidad angular del horizonte de eventos. Puesto que la gravedad superficial κ es similar a una temperatura T , y el área del horizonte de eventos A es similar a la entropía S , se puede decir que esta ecuación es análoga a la primera ley de la termodinámica si establecemos que el análogo de la energía interna E es la masa M del hoyo negro. Las diferencias en energía, entropía, y otros parámetros entre dos estados en equilibrio térmico de un mismo sistema están dadas por

$$\delta E = T \delta S + \delta W, \quad (2.7)$$

donde δW son los términos de trabajo, por ejemplo $\delta W = p \delta V$ para gases.

Finalmente de la ecuación (2.5) se observa que la gravedad superficial κ sólo se anula para el caso extremal $M^2 = a^2 + e^2$. La tercera ley (que establece que no se puede alcanzar

de manera cuasi-estática el cero de la temperatura) se refleja en el hecho de que no se puede alcanzar de manera cuasi-estática una gravedad superficial (κ) igual a cero.

En la siguiente tabla se resume la analogía entre las "leyes" de la termodinámica y las correspondientes "leyes" de los hoyos negros.

Ley	Termodinámica	Hoyos negros
Cero	Temperatura T constante para cuerpos en equilibrio térmico	Gravedad superficial κ constante sobre el horizonte de un hoyo negro estacionario
Primera	$\delta E = T\delta S + \delta W$	$\delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A + \Omega\delta J$
Segunda	$\Delta S \geq 0$ en cualquier proceso	$\Delta A \geq 0$ en cualquier proceso
Tercera	Es imposible alcanzar $T = 0$	Es imposible alcanzar $\kappa = 0$

Si se comparan las leyes en ambos casos, se observa que las cantidades análogas son:

$$\begin{aligned}
 E &\leftrightarrow M & (2.8) \\
 T &\leftrightarrow \alpha\kappa \\
 S &\leftrightarrow \frac{A}{8\pi\alpha}
 \end{aligned}$$

donde α es una constante a determinar.

Una indicación de que la relación anterior tiene significado físico (más allá de una analogía) surge del hecho de que E y M representan la misma cantidad física: la energía total del sistema. Sin embargo, en relatividad general, la temperatura termodinámica de un hoyo negro es el cero absoluto ya que un hoyo negro absorbe todo y no emite nada. Entonces, parecería que κ no puede representar una temperatura física. No obstante, debido a efectos cuánticos, los hoyos negros radian como un cuerpo negro.

2.3 Radiación de Hawking

En 1974 Hawking [10] demostró en alguna aproximación que los hoyos negros no son tan *negros* sino que radian energía continuamente. Hasta entonces se había hablado de los fotones como partículas que se mueven en una trayectoria geodésica en el espacio-tiempo; pero de acuerdo al principio de incertidumbre estas *partículas* no se pueden localizar con una precisión arbitraria. El comportamiento de los fotones reales cerca del horizonte cambia mucho con respecto a lo que ya se ha dicho al describir partículas ideales puntuales.

Una forma del principio de incertidumbre es $\Delta E \Delta t > \hbar$, donde ΔE es la incertidumbre mínima en la energía de la partícula que se encuentra en un estado cuántico por un período de tiempo Δt . De acuerdo con la teoría cuántica de campo el espacio está lleno de fluctuaciones del vacío dentro de campos electromagnéticos, que consisten de pares de partículas producidos en un evento y recombinados en otro. Tales pares violan la conservación de la energía, pero si la duración del proceso es menor que $\Delta t = \hbar/\Delta E$ siendo ΔE la cantidad de energía no conservada, entonces no se viola ley física alguna. De esta manera, la conservación global de la energía se cumple rigurosamente mientras que a pequeñas escalas siempre está siendo violada. Como el espacio-tiempo cerca del horizonte de un hoyo negro es perfectamente ordinario, y en particular, localmente plano, estas fluctuaciones también se darán ahí. Considérese una fluctuación que produce dos partículas, una de energía E y otra de energía $-E$. En un espacio-tiempo plano, la partícula de energía negativa no podría propagarse libremente, de modo que necesariamente se recombinaría con el de energía positiva en un tiempo menor a \hbar/E . Pero si el par de partículas se produce justo en la parte exterior del horizonte hay una probabilidad de que una de ellas cruce el horizonte antes de que transcurra el intervalo de tiempo \hbar/E . Veremos a continuación que la partícula de energía negativa una vez dentro del horizonte se puede propagar libremente. Por simplicidad consideremos la métrica de Schwarzschild (1.3) y recuérdese que la energía negativa corresponde a una antipartícula o, más poéticamente a una partícula que se propaga hacia atrás en el tiempo. Dentro del horizonte de eventos un observador que va hacia adelante en el tiempo observa un decremento en r . Por simplicidad, escojamos un observador U cuya trayectoria tiene $p_\theta = U^\theta = 0$. Luego U^r es la única componente distinta de cero de \tilde{U} y, de la condición de normalización $\tilde{U} \cdot \tilde{U} = -1$ se encuentra :

$$U^r = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r < 2M, \quad (2.9)$$

y es negativa porque el observador se está adentrando (dentro del horizonte de eventos). Cualquier órbita de la partícula está permitida cuando $-\vec{p} \cdot \vec{U} > 0$. Considérese una partícula con momento angular cero moviéndose radialmente dentro del horizonte. De la ecuación (2.9) con $L = 0$ vemos que $E = \pm p^r$. Luego la energía relativa al observador es

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = -p^r U^r g_{rr} = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} p^r. \quad (2.10)$$

Esta relación es positiva si y solo si la partícula dentro del horizonte de eventos también está adentrándose ($p^r < 0$). Nótese que esto no impone restricción alguna sobre E . En tanto $p^r < 0$ las partículas pueden moverse sobre geodésicas nulas dentro del horizonte, las cuales tienen el signo de E . (Recuérdese que t es una coordenada espacial dentro del horizonte, de modo que ahí E es una componente del momento espacial).

Como una fluctuación cerca del horizonte *puede* llevar a la partícula de energía negativa a una trayectoria realizable, se permite que la partícula de energía positiva escape al infinito. Veamos qué se puede decir acerca de su energía. Primero considérese las fluctuaciones en un sistema de referencia inercial en caída libre, que es el sistema de referencia en donde el espacio-tiempo es localmente plano y en el cual las fluctuaciones son normales. Un sistema de referencia que está momentáneamente en reposo localizado en la coordenada $2M + \epsilon$, inmediatamente empezará a caer hacia adentro, siguiendo la trayectoria de una partícula con $\tilde{L} = 0$ y $\tilde{E} = [1 - 2M/(2M + \epsilon)]^{1/2} \approx (\epsilon/2M)^{1/2}$ (donde se ha utilizado la ecuación básica:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (2.11)$$

para órbitas de una partícula).

Dicho sistema de referencia alcanzará el horizonte transcurrido un lapso de tiempo propio $\Delta\tau$ dado por:

$$\Delta\tau = - \int_{2M+\epsilon}^{2M} \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\epsilon}\right)^{1/2}}. \quad (2.12)$$

A primer orden en ϵ esto es:

$$\Delta\tau = 2(2M\epsilon)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Se puede calcular la energía \mathcal{E} de la partícula en este sistema de referencia igualándola a la fluctuación en el tiempo \hbar/\mathcal{E} . El resultado es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\hbar(2M\epsilon)^{-1/2}. \quad (2.14)$$

Esta es la energía de la partícula saliente (aquella que escapa al infinito) calculada desde el sistema de referencia inercial local. Para encontrar su energía cuando alcanza el infinito recordemos que:

$$\mathcal{E} = -\bar{p} \cdot \bar{U}, \quad (2.15)$$

con $-U_0 = \tilde{E} \approx (\epsilon/2M)^{\frac{1}{2}}$. Entonces:

$$\mathcal{E} = -g^{00} p_0 U_0 = U_0 g^{00} E, \quad (2.16)$$

siendo E la energía conservada sobre la trayectoria de la partícula, la cual también es la energía que tiene cuando alcanza el infinito. Evaluando g^{00} en la coordenada $2M + \epsilon$ se encuentra finalmente:

$$E = \mathcal{E} (\epsilon/2M)^{\frac{1}{2}} = \hbar/4M = \hbar/(8\pi M). \quad (2.17)$$

La partícula siempre sale con esta energía característica, sin importar en dónde se originó.

El cálculo semiclásico de Hawking muestra que los fotones irradiados tienen el espectro característico de un cuerpo negro con una temperatura

$$T = \hbar/8\pi M. \quad (2.18)$$

Nótese que la temperatura del hoyo es proporcional a M^{-1} . La potencia emitida por un cuerpo negro es proporcional a AT^4 , donde A es el área del cuerpo. Así, la luminosidad del hoyo es proporcional a M^{-2} . Esta energía proviene de la masa del hoyo (cada partícula de energía negativa que cae dentro de él disminuye la masa M), de modo que

$$\frac{dM}{dt} \sim M^{-2}. \quad (2.19)$$

El tiempo de vida del hoyo negro es, por lo tanto

$$\tau \sim M^3. \quad (2.20)$$

Vemos que mientras más grande es el hoyo negro, más tiempo vive y más baja es su temperatura. Por ejemplo, un hoyo de masa 10^{15} g tiene un tiempo de vida de 10^{10} años, alrededor de la edad del universo. Luego

$$\left(\frac{\tau}{10^{10} \text{ años}} \right) = \left(\frac{M}{10^{15} \text{ g}} \right)^3. \quad (2.21)$$

Como una masa solar es de alrededor de 10^{33} g, los hoyos negros formados por colapsos estelares tienen una temperatura de alrededor de 10^{-7} K.

Debe mencionarse que todas las derivaciones de la radiación de Hawking utilizan aproximaciones semiclásicas que son más o menos válidas si se puede tratar al espacio-tiempo del hoyo negro como un fondo fijo en el cual se propagan los campos cuánticos de materia. Esta aproximación deja de ser válida para hoyos negros con una masa de

$$M_p = \hbar^{1/2} \sim 10^{-33} \text{cm} \sim 10^{-43} \text{s} \sim 10^{-5} \text{g} \sim 10^{18} \text{GeV}. \quad (2.22)$$

donde M_p es la masa de Planck. También deja ser válida, para cualquier masa, al final del proceso de evaporación. Para tratar con los efectos cuánticos de tales hoyos, se necesita una teoría consistente de la gravitación cuántica, un candidato es la teoría de cuerdas.

2.4 Termodinámica de los hoyos negros cuánticos

Vimos que si la masa es grande y la temperatura ($\sim \frac{1}{M}$) pequeña, un hoyo negro absorbe y emite partículas exactamente como un cuerpo negro a la temperatura $T = \frac{\kappa \hbar}{2\pi}$ ($k=1$). De este modo, T y $\frac{\kappa \hbar}{2\pi}$ no sólo son cantidades análogas sino que representan la misma cantidad física. Poniendo $\alpha = \frac{\hbar}{2\pi}$ en las relaciones (2.8), vemos que la relación entre la entropía y el área es [5, 9]:

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{\hbar}, \quad (2.23)$$

por tanto $4S$ es el área medida en unidades de \hbar . Una interpretación física de esta entropía es que la información parece estar distribuida sobre el área bidimensional del horizonte de eventos de tal manera que un bit de información ocupa una determinada área [11].

2.5 Paradoja de la pérdida de información

El espectro térmico de una estrella es el resultado de un promedio sobre sus microestados. Dada una estrella en un estado puro, la radiación depende de sus microestados. En principio, con un estudio detallado de su radiación sería posible determinar su estado

inicial. Considérese el colapso de una estrella en un estado puro que termina en un hoyo negro de Schwarzschild. Este hoyo negro siempre permanecerá en un estado puro. Por otro lado, la radiación de Hawking asegura una completa evaporación del hoyo negro y el resultado de este proceso es radiación térmica que no puede depender del estado inicial, puesto que la radiación sólo depende de la geometría externa del hoyo negro. Pero la información que lleva la materia está dentro del hoyo negro en el marco de la relatividad general. Esto significa que el estado final ya no es puro sino mezclado. Esta clase de violación de la unitariedad en la evolución temporal se denomina *paradoja de la pérdida de información* porque dicha información se pierde una vez que la materia cae dentro del horizonte de eventos [10, 12].

Otro aspecto de la paradoja es la violación de las leyes de conservación globales. Esto último viene de que el hoyo negro perdió toda la información acerca de la cantidad de bariones y leptones que cayeron adentro del hoyo negro.

El problema de la información se considera importante porque el hecho de "suponer" la conservación de la información cuántica puede llevar a nuevos e interesantes puntos de vista acerca de las fuerzas de la naturaleza. Presumiblemente, la conservación de la información cuántica exigiría un nuevo enfoque, y la resolución de la paradoja llevaría a desarrollos importantes [11].

Los recientes avances en la teoría de supercuerdas tienen implicaciones directas en la paradoja de la pérdida de información (ver capítulo 3).

2.6 Complementariedad del hoyo negro

La paradoja de la pérdida de información en la evaporación de un hoyo negro tiene que ver esencialmente con la localización de la información y cómo es percibida por diferentes observadores.

El problema de la *complementariedad* surge al no poder mezclar lo que ve un observador lejano y lo que ve un observador que cae a través del horizonte de eventos. La física se describe ya sea desde el exterior de un hoyo negro o desde el interior, y puesto que no se puede intercambiar información entre estos dos puntos de observación no tiene sentido requerir de una descripción válida para ambos (tal descripción no tendría un significado operacional). Este punto de vista no excluye, pero tampoco requiere, una descripción válida simultáneamente para todos los observadores posibles.

De acuerdo con el *principio de complementariedad del hoyo negro* [13, 19] no se sigue

ninguna inconsistencia de las dos suposiciones siguientes:

1) Para un observador en caída libre, un trozo de materia cayendo hacia un hoyo negro no encuentra nada fuera de lo ordinario al cruzar el horizonte. Toda la información cuántica contenida en la materia inicial cruza libremente al interior del hoyo negro.

2) Para un observador externo, la materia, al alcanzar el "horizonte extendido"², es desbaratada y emitida como radiación termalizada antes de cruzar el horizonte. Toda la información cuántica contenida en la materia inicial se encuentra en la radiación emitida.

²Ver capítulo 4.

Capítulo 3

Estados cuánticos en hoyos negros

3.1 Introducción

En el capítulo anterior vimos que los hoyos negros tienen propiedades termodinámicas. En particular que su entropía es igual a un cuarto del área de su horizonte de eventos. en unidades de Planck ($G = c = \hbar = k = 1$). Esta es una cantidad muy grande de entropía. Para ver esto consideremos por ejemplo radiación térmica (la cual tiene la entropía más grande entre la materia ordinaria) y veamos qué entropía tendría si formara un hoyo negro [18]. En unidades de Planck un volumen esférico de radiación térmica a temperatura T y radio R tiene una masa $M \sim T^4 R^3$ y una entropía $S \sim T^3 R^3$. Cuando $M \sim R$ esta radiación formará un hoyo negro, lo cual implica que $T \sim M^{-1/2}$ y por tanto $S \sim M^{3/2}$. Sin embargo, la entropía del hoyo negro resultante es $S_{bh} \sim M^2$. Así cualquier hoyo con masa mayor que la masa de Planck, tiene una entropía mayor que la entropía de la radiación térmica que lo habría formado, y por lo tanto mayor que la entropía de cualquier otra forma de materia que hubiera colapsado.

En términos de una descripción más fundamental, la entropía es una medida del número de estados cuánticos ($S = \log n$). Un problema que ha impulsado a los físicos por más de veinte años es encontrar una teoría que contenga los estados cuánticos predichos por la termodinámica de los hoyos negros.

Recientemente se ha dado una respuesta en el contexto de teoría de cuerdas. La teoría de cuerdas es una teoría cuántica de la gravedad y de todas las fuerzas y partículas fundamentales.

En el contexto de teoría de cuerdas, es posible identificar y contar los estados cuánticos

asociados con los hoyos negros. Así también, se puede calcular la radiación de Hawking, a la energía donde la radiación es aproximadamente térmica.

Para entender esta nueva idea de la entropía de un hoyo negro, sólo se necesitan algunos resultados básicos de la teoría de cuerdas [2, 45, 46]:

1. La teoría de cuerdas es una generalización de la teoría cuántica de campos. Según la teoría de cuerdas, las partículas son entes extendidos, cuerdas, de tamaño tan pequeño que para todo experimento realizable parecen ser puntos.

2. Las cuerdas al propagarse en el tiempo generan un espacio de dos dimensiones, denominada *superficie de evolución*. Utilizando esta superficie de evolución como fundamental, se formula una teoría de campos en este espacio con campos escalares y fermiones. Los campos escalares forman el espacio-tiempo de los eventos físicos donde se propagan las cuerdas. De esta forma estos campos escalares son las coordenadas del espacio-tiempo y su número es entonces la dimensión del espacio-tiempo.

3. Una cuerda en un espacio-tiempo plano, contiene un número infinito de estados masivos correspondientes a los modos de oscilación de la cuerda después de cuantizar. las masas están cuantizadas en términos de una escala que es identificada con la escala de Planck. Para cada entero N hay estados con $M^2 \sim \frac{N}{l_s^2}$ donde l_s es la única escala (de longitud) en la teoría fijada por la tensión de la cuerda. Estos estados son muy degenerados; el número de estados de la cuerda en el nivel de excitación $N \gg 1$ es

$$\exp(S_S), \quad (3.1)$$

donde

$$S_S \sim \sqrt{N}, \quad (3.2)$$

es decir, la entropía de la cuerda es proporcional a la masa en unidades de la cuerda ¹.

4. Existen solamente cinco teorías de cuerdas consistentes en diez dimensiones: tipo I (quiral) con $N = 1$ supersimetría y grupo de norma $SO(32)$, tipo IIA (no quiral) con $N = 2$, tipo IIB (quiral) con $N = 2$, heterótica (quiral) con $N = 1$ y grupo de norma $E_8 \times E_8$ y heterótica (quiral) con $N = 1$ y grupo de norma $SO(32)$.

5. Todas las teorías de cuerdas incluyen en su espectro de partículas a una partícula sin masa y de espín 2 que es el gravitón. De esta forma las cuerdas implican la existencia de

¹Esto, se puede entender en términos del modelo del caminante aleatorio con pasos de longitud l_s . Debido a la tensión de la cuerda, la energía después de n pasos es inversamente proporcional a su longitud: $E \sim \frac{n}{l_s}$.

la gravitación. Puesto que las cuerdas son objetos extendidos, los infinitos que aparecían al intentar cuantizar la relatividad general de Einstein, desaparecen en teoría de cuerdas.

6. La teoría de cuerdas predice la existencia de dos partículas que en cuatro dimensiones tienen espín y masa iguales a cero: *el dilatón y el campo de Kalb-Ramond* que están presentes en las cinco teorías de cuerdas. En cuatro dimensiones, el campo de Kalb-Ramond es esencialmente un axiÓN.

7. Las interacciones de la cuerda están gobernadas por una constante de acoplamiento g (determinada por el valor esperado en el vacío del dilatón). La constante de Newton, G , está dada en términos de g y la longitud de la cuerda l_s por

$$G \sim g^2 l_s^2 \quad (3.3)$$

en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

8. La métrica está bien definida sólo cuando la curvatura es menor que la escala de la cuerda $\frac{1}{l_s^2}$. Esto se sigue de que la métrica está unificada con todos los otros modos de la cuerda siendo ésta un modo cero, y a mayor curvatura ya no se pueden despreciar los modos masivos. Cuando la curvatura es pequeña comparada con $\frac{1}{l_s^2}$, se pueden integrar los modos masivos y se obtiene una ecuación de movimiento a bajas energías que tiene la forma de la ecuaciones de Einstein, con correcciones que consisten de potencias de la curvatura multiplicadas por potencias de l_s , que son despreciables si la curvatura es pequeña.

3.2 Correspondencia entre hoyos negros y cuerdas

Hace muchos años 't Hooft [19] sugirió que debería existir una correspondencia uno a uno entre hoyos negros y cuerdas. La idea, refinada más tarde por Susskind [4], es la siguiente: supongamos cuerdas cayendose hacia el horizonte de eventos de un hoyo negro. Un observador externo las verá esparcirse y eventualmente abarcar el horizonte extendido (este concepto se estudiará más a fondo en el próximo capítulo). Se puede considerar a este fenómeno como una mezcla de cuerdas conforme se encuentran con ciertas condiciones de temperatura a una distancia del horizonte de eventos del orden de l_s . La entropía de los estados de una cuerda es tan grande que las cuerdas en el horizonte tenderan a formar una sola cuerda (el horizonte parece una sola cuerda). Esto implica que los estados de un hoyo negro están en correspondencia uno a uno con los estados del horizonte, y por lo tanto con los estados de una cuerda.

3.2.1 Hoyo negro de Schwarzschild

Una manera alternativa de presentar la idea anterior es la siguiente [4]: considérese un estado de la cuerda altamente excitado ($N \gg 1$) y sea la constante de acoplamiento cero ($g = 0$). Ahora, supongamos que la constante de acoplamiento aumenta. Recordando que $G \sim g^2 l_s^2$, aparecen dos efectos. Primero, la atracción gravitacional de la cuerda sobre sí misma hace que el tamaño de la cuerda disminuya. Segundo, debido a que G aumenta, el radio de Schwarzschild ($r_0 = 2GM$) aumenta, en unidades de la cuerda. Evidentemente, para un valor suficientemente grande del acoplamiento, la cuerda será más chica que el radio de su horizonte y **la cuerda formará un hoyo negro**.

De manera inversa, consideremos ahora un hoyo negro (con $G \neq 0$) y supongamos que la constante de acoplamiento disminuye. Entonces, en unidades de la cuerda, el radio de Schwarzschild se reduciría y finalmente llegaría a ser tan pequeño como la escala de la cuerda. 'tHooft [19] sugirió que el hoyo negro sería un estado excitado de la cuerda.

Esta identificación parece contradictoria, ya que la entropía de la cuerda es proporcional a su masa, mientras que la entropía del hoyo negro es proporcional al cuadrado de su masa. Esto se resuelve tomando en cuenta el siguiente argumento:

La idea [18] es igualar la masa del hoyo negro ($M_{bh} = \frac{r_0}{2G}$) con la masa de un estado de excitación N de la cuerda, la cual es $M_s^2 \sim \frac{N}{l_s^2}$ cuando el acoplamiento es cero. Ahora, supongamos que aumenta el acoplamiento de la cuerda, conservando fijo el estado N . M_s es constante en unidades de la cuerda donde l_s es fija y la constante de Newton varía. El análogo a conservar fijo el estado N para un hoyo negro es mantener fija a la entropía. De este modo, M_{bh} es constante en unidades de Planck donde G es fija y l_s varía.

Observemos que la razón $\frac{M_s}{M_{bh}}$ depende de g y las masas no pueden ser iguales para todos los valores del acoplamiento. Por tanto, para un valor dado de g se pueden igualar las masas, la elección apropiada de g es el valor para el cual la cuerda forma un hoyo negro o viceversa.

Igualando las masas cuando $r_0 \sim l_s$, resulta:

$$M_{bh}^2 \sim \frac{l_s^2}{G^2} \sim \frac{N}{l_s^2}. \quad (3.4)$$

Y la entropía del hoyo negro es entonces

$$S_{bh} \sim \frac{r_0^2}{G} \sim \frac{l_s^2}{G} \sim \sqrt{N} \sim S_s. \quad (3.5)$$

De este modo podemos ver que la entropía de Bekenstein-Hawking es proporcional a la entropía de la cuerda; ambas tienen la misma dependencia en la masa y difieren solamente por un factor del orden de la unidad el cual depende de cuando exactamente el estado de la cuerda forma un hoyo negro.

El éxito de la relación (3.5) significa que la masa cambia solo por un factor del orden de la unidad durante la transición de la descripción de hoyo negro a la descripción de la cuerda. Hay varios números adimensionales, grandes y pequeños, involucrados en el problema. Uno es el nivel de excitación N . Otro es el acoplamiento de la cuerda g en la transición. De la condición (3.4) y de que $G \sim g^2 l_s^2$, se obtiene que $g \sim N^{-\frac{1}{4}}$, es decir, que la transición de un estado de la cuerda a un hoyo negro ocurre para un valor del acoplamiento pequeño: $g \sim \frac{1}{N^{\frac{1}{4}}} \ll 1$, se decir, que dicha transición ocurre en el rango perturbativo de la teoría de cuerdas, donde podemos calcular fácilmente.

Es importante enfatizar que el hecho de que $r_0 \sim l_s$, no significa que el hoyo negro deba ser pequeño. De hecho, como la entropía es $S_{bh} \sim \sqrt{N}$, el radio de Schwarzschild en unidades de Planck es $r_0 \sim N^{\frac{1}{4}}$. (Es decir, la cuerda tiene el tamaño de r_0 y por tanto cubre todo el "hoyo").

Por otro lado, hemos visto que cuando g aumenta, una cuerda evoluciona a un hoyo negro. Para un estado de nivel N dado, la transición entre un hoyo negro y una cuerda ocurre cuando $gN^{\frac{1}{4}} \sim 1$. Para $gN^{\frac{1}{4}} > 1$, el radio de Schwarzschild es mayor que la escala de la cuerda y la descripción de hoyo negro es entonces válida. Si $gN^{\frac{1}{4}} < 1$, el radio de Schwarzschild es menor que la escala de cuerda y entonces la descripción de la cuerda es válida. En cualquier caso, el límite clásico es $g \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ con $gN^{\frac{1}{4}}$ fijo. En este límite, la longitud de Planck $l_p \sim gl_s$ tiende a cero y la entropía $S \sim \sqrt{N}$ diverge: un hoyo negro clásico tiene entropía infinita.

Puesto que la cuerda se vuelve un hoyo negro a la escala de la cuerda, que no es grande comparada con la escala de compactificación, es importante verificar si este razonamiento se extiende a hoyos negros en dimensiones mayores que cuatro. La métrica de Schwarzschild en d dimensiones espaciales es similar a (1.3) excepto que $\frac{r_0}{r}$ se reemplaza por $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-2}$ y $G = gl_s$. La masa es ahora $M_{bh} \sim \frac{r_0^{d-2}}{G}$. Nuevamente igualamos ésta con la masa de la cuerda cuando el hoyo negro es del orden del tamaño de la misma y se obtiene:

$$M_{bh}^2 \sim \frac{(l_s^2)^{d-2}}{G^2} \sim \frac{N}{l_s^2} \quad (3.6)$$

la entropía del hoyo negro es entonces:

$$S_{bh} \sim \frac{r_0^{d-1}}{G} \sim \frac{(l_p^2)^{\frac{d-1}{2}}}{G} \sim \sqrt{N}. \quad (3.7)$$

de modo que otra vez la entropía del hoyo negro es proporcional a la entropía de la cuerda.

3.2.2 Hoyos negros con carga

La igualdad entre la entropía de un hoyo negro y la entropía de la cuerda también se extiende a hoyos negros con carga [18]. El caso más simple es el hoyo negro de Kaluza-Klein, donde la carga proviene del momento en una quinta dirección compacta. Dada una métrica en cinco dimensiones independiente de x_5 , se define una métrica $g_{\mu\nu}$ en cuatro dimensiones, un campo de norma A_μ y un campo escalar χ , por reducción dimensional:

$$ds^2 = \exp\left(\frac{-4\chi}{\sqrt{3}}\right)(dx_5 + 2A_\mu dx^\mu)^2 + \exp\left(\frac{2\chi}{\sqrt{3}}\right)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (3.8)$$

La acción de Einstein en cinco dimensiones después de una reducción dimensional es:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2(\Delta\chi)^2 - \exp(-2\sqrt{3}\chi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right]. \quad (3.9)$$

Las soluciones para el hoyo negro cargado se pueden obtener comenzando con el producto de la métrica de Schwarzschild en cuatro dimensiones (1.3) y una línea, haciendo un “boost” a lo largo de ésta. identificando periódicamente a x_5 y reduciendo a cuatro dimensiones usando (3.8). La solución de Reissner-Nordström resulta ser:

$$ds^2 = -\Delta^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \Delta^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \right], \quad (3.10)$$

$$A_t = -\frac{r_0 \sinh 2\gamma}{4r\delta}, \quad (3.11)$$

donde

$$\gamma = \frac{Q}{M}, \quad (3.12)$$

$$\delta = \exp \frac{-4\gamma}{\sqrt{3}}, \quad (3.13)$$

$$\Delta = 1 + \frac{r_0 \sinh^2 \gamma}{r}, \quad (3.14)$$

La masa ADM y la carga eléctrica son:

$$M_{bh} = \frac{r_0}{8G} (3 + \cosh 2\gamma), \quad (3.15)$$

$$Q = \frac{r_0}{4G} \sinh 2\gamma. \quad (3.16)$$

La entropía del hoyo negro es

$$S_{bh} = \frac{\pi r_0^2}{G} \cosh \gamma. \quad (3.17)$$

Esta entropía se reproduce contando los estados de la cuerda. La carga eléctrica del hoyo negro es dos veces el momento total en la dirección compacta. Una cuerda en cinco dimensiones con momento P en la quinta dirección tiene una entropía $S_s \sim \sqrt{N}$ donde ahora

$$M_s^2 - P^2 \sim \frac{N}{l_s^2}, \quad (3.18)$$

y M_s es la masa en cuatro dimensiones de la cuerda. Para que la solución del hoyo negro y la solución de la cuerda sean iguales, se pone $P = \frac{Q}{2}$ y también $M_{bh} = M_s$ cuando la curvatura es del orden de la escala de la cuerda. La igualdad ocurre cuando $r_0 \sim l_s$. El resultado es:

$$\frac{N}{l_s^2} \sim M_{bh}^2 - \frac{Q^2}{4} \sim \frac{l_s^2}{G^2} [5 + 3 \cosh 2\gamma]. \quad (3.19)$$

Comparando con (3.17) se ve que, módulo un factor (dependiente de γ) del orden de la unidad,

$$S_{bh} \sim \sqrt{N} \sim S_s. \quad (3.20)$$

Las dos entropías son iguales para todos los valores de γ , es decir para todos los valores de $\frac{Q}{M}$.

3.2.3 Principio de correspondencia

En el hoyo negro de Kaluza-Klein, se supuso que había una dirección compacta en el espacio-tiempo. De hecho la teoría de cuerdas predice muchas direcciones compactas. Esto da lugar a un gran número de diferentes tipos de cargas en la teoría efectiva en cuatro dimensiones. Además del momento compacto, se tienen cargas asociadas con cuerdas enrolladas alrededor de cada dirección compacta. También hay objetos extendidos en muchas dimensiones llamados D -branas, que aparecen como partículas cargadas localizadas cuando están enrolladas en el espacio compacto. Los hoyos negros pueden tener cualquiera de estas cargas. En la mayoría de los casos, el tamaño del hoyo negro en unidades de la cuerda llega a ser pequeño cuando g decrece. Además para muchos hoyos negros cargados, el dilatón ϕ no es constante.

La relación general entre hoyos negros y cuerdas puede enunciarse en términos del siguiente **principio de correspondencia**:

(i) Cuando la curvatura en el horizonte del hoyo negro (en la métrica de la cuerda) se vuelve más grande que la escala de la cuerda, el estado del hoyo negro llega a ser un estado de las cuerdas y D -branas con la misma carga y momento angular.

(ii) La masa varía a lo más por un factor del orden de la unidad durante la transición.

Se ha demostrado [20] que para muchos hoyos negros cargados, este principio de correspondencia reproduce exactamente la entropía de Bekenstein-Hawking hasta factores del orden de la unidad. De hecho, los dos ejemplos discutidos anteriormente son casos especiales de este principio.

3.3 Relación precisa entre hoyos negros y cuerdas

3.3.1 Hoyos negros supersimétricos y BPS

El principio de correspondencia se puede aplicar a cualquier hoyo negro, pero aún no es posible comparar los coeficientes exactos en la fórmulas para la entropía. Sin embargo, existe una clase especial de hoyos negros para los cuales conforme se disminuye el acoplamiento de la cuerda se tiene un mayor control sobre la transición a un estado de la cuerda. incluso pueden ser comparados los coeficientes en las fórmulas de la entropía. Estos cálculos más precisos usan el hecho de que la teoría de cuerdas es supersimétrica. Su límite a bajas energías es una teoría de supergravedad que admite soluciones de hoyos

negros que son invariantes bajo algunas transformaciones supersimétricas. Estas soluciones supersimétricas son hoyos negros cargados extremos con masa y carga relacionadas por $M = cQ$ para alguna constante c . En el límite de acoplamiento débil, la masa y la carga de todos los estados de la cuerda satisfacen desigualdades de la forma $M \geq cQ$. Los estados con $M = cQ$ son llamados estados *BPS* (Bogomol'nyi, Prasad y Sommerfeld) y tienen la propiedad de que sus masas no reciben correcciones cuánticas; es decir, no reciben ninguna renormalización de la masa.

Se puede entonces considerar un hoyo negro supersimétrico y disminuir el acoplamiento de la cuerda y entonces es posible contar el número de estados *BPS* en acoplamiento débil con la misma carga que el hoyo negro. Notemos que, en este caso, la masa está fijada completamente por la carga en ambos regímenes, y por tanto no es necesario igualar la masa del hoyo negro con la masa del estado de la cuerda perturbativa. El número de estados *BPS* en acoplamiento débil resulta ser exactamente la exponencial de la entropía de Bekenstein-Hawking del hoyo negro en acoplamiento fuerte [21].

Lo importante de los estados *BPS* es que son topológicamente estables al saturar la condición $M \geq cQ$. Los hoyos negros extremos también saturan una condición así.

3.3.2 *D*-branas

Hay dos razones por las que este resultado tan bonito no fue desarrollado años atrás. La primera es que la mayoría de los hoyos negros supersimétricos no son precisamente hoyos negros, ya que el área de su horizonte es cero (son hoyos negros nulos). El problema es que las teorías de supergravedad tienen escalares que se acoplan a los campos de norma. Cuando un hoyo negro cargado no extremo se aproxima al límite extremo los escalares crecen mucho cerca del horizonte, provocando que éste se reduzca a cero. Para obtener hoyos negros supersimétricos con área del horizonte diferente de cero, se necesitan cargas que estabilicen esos escalares. Pero esto origina un segundo problema, ya que algunas de las cargas necesarias no las pueden tener las cuerdas fundamentales. Afortunadamente los solitones no perturbativos de la teoría de cuerdas sí tienen estas cargas. Entonces, en vez de simplemente contar los estados de una cuerda en acoplamiento débil, se tienen que contar los estados ligados de los solitones y las cuerdas, lo cual es mucho más complicado.

Estos problemas fueron resueltos cuando Polchinski introdujo una nueva representación de estos solitones llamados "*D*-branas" [22, 23, 24, 25].

La masa de una *D*-brana es proporcional a $\frac{1}{g}$ (y por lo tanto no perturbativa), por lo

que en acoplamiento débil es muy masiva. Pero como la constante de Newton $G \sim g^2$, el campo gravitacional producido por la D -Branas, proporcional a GM , tiende a cero cuando $g \rightarrow 0$. De este modo, existe una descripción en el espacio-plano de estos estados no perturbativos. Esto se obtiene incluyendo en la teoría de cuerdas cerradas un conjunto de cuerdas abiertas cuyos extremos están restringidos a vivir en una superficie particular. Estas superficies pueden tener cualquier dimensión, y pueden ser vistas como generalizaciones de membranas. Como los puntos finales de una cuerda abierta satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet en las direcciones normales a la superficie, la superficie se denomina D -brana.

Los estados excitados de una D -brana se describen al cuantizar las cuerdas abiertas. A bajas energías, solo los modos cero contribuyen. Los estados no masivos de una cuerda abierta incluyen escalares que describen las fluctuaciones de la brana en los alrededores del espacio-tiempo, y un campo de norma $U(1)$ sobre la brana.

Cuando dos D -branas paralelas se interponen se obtiene un campo de norma $U(2)$. Para cambiar del $U(1)^2$ (un $U(1)$ de cada brana) a $U(2)$ se necesitan estados no masivos adicionales que surgen de las cuerdas abiertas que se extienden entre las dos D -branas. Estos estados tienen, como cualquier cuerda, una masa proporcional a la separación entre las branas. Cuando esta separación tiende a cero se vuelven no masivos y se combinan con los campos de norma $U(1)$ sobre cada brana para producir un campo de norma $U(2)$. De la misma manera, cuando m D -branas se superponen se obtiene una teoría de norma $U(m)$. En términos de la teoría de norma a bajas energías sobre la brana, el hecho de que $U(m)$ se reduzca a $U(1)^m$ cuando las branas están ligeramente separadas no es otra cosa que el mecanismo de Higgs, en la versión máxima abeliana de 't Hooft.

Por otro lado, una D -brana con p dimensiones espaciales o una $D - p$ -brana (por lo tanto, tiene $p + 1$ índices espacio-temporales y entonces se acopla a un campo de norma A con $p - 1$ índices o sea una $p + 1$ forma) lleva una carga con respecto al campo de fuerza F que es una $p + 2$ forma. En otras palabras, la carga queda definida al integrar el campo de fuerza dual $*F$ sobre un esfera abarcando el volumen de evolución en $p + 1$ dimensiones de la brana. Una D -brana tiene la masa mínima posible para este tipo de carga y es un estado BPS . Ahora supongamos que se compactifican p dimensiones del espacio-tiempo, y enrollemos la D -brana en este espacio. Como una D -brana solo puede llevar un tipo de carga, su límite de acoplamiento fuerte no tiene área de horizonte diferente de cero. Sin embargo, los estados ligados de diferentes tipos de D -branas nos dan hoyos negros con horizontes regulares.

3.3.3 Hoyos negros supersimétricos: resultados exactos

Resulta que los hoyos negros supersimétricos con área de horizonte distinta de cero sólo pueden existir en cuatro y cinco dimensiones. En cinco dimensiones se necesitan tres tipos de cargas diferentes mientras que en cuatro dimensiones, se necesitan cuatro. (El primer cálculo preciso para la entropía de un hoyo negro fue desarrollado por Strominger y Vafa [21] para un hoyo negro extremo sin rotación en cinco dimensiones. Posteriormente esto fue generalizado para incluir rotación [26] y hoyos negros extremos en cuatro dimensiones [27, 28]). Un ejemplo interesante es la solución extrema de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.21)$$

Para contar los estados de este hoyo hay que considerar cuatro cargas distintas. En otras palabras, se puede ver a (3.21) como una composición de cuatro objetos fundamentales distintos.

Para obtener la solución de Reissner-Nordström se inicia con el espacio-tiempo plano de diez dimensiones en acoplamiento débil y se compactifican seis dimensiones sobre un toro, que se puede pensar como el producto de un 4-toro con volumen $(2\pi)^4 V$ y dos círculos de radios R y \tilde{R} . Entonces se toman Q_6 D -seisbranas enrolladas en el 6-toro y Q_2 D -dosbranas enrolladas alrededor de los dos círculos. Se añaden Q_5 cinco-branas enrolladas alrededor del 4-toro y R . Todas estas branas viven sobre el mismo punto en las tres direcciones espaciales no compactas, de modo que esta configuración describe un objeto localizado en cuatro dimensiones espacio-temporales.

Nótese que la intersección de estas 6, 5 y 2 - branas es el círculo de radio R . Cuando R es grande las excitaciones a bajas energías de estas branas se describen por cuerdas abiertas moviéndose a lo largo de este círculo. Resulta que estas cuerdas tienen $4Q_2Q_5Q_6$ grados de libertad bosónicos de masa nula y un número igual de grados de libertad fermiónicos (esto se obtiene analizando la teoría de norma inducida sobre las branas). El momento a lo largo del círculo está cuantizado en unidades de $\frac{1}{R}$. El número de estados con momento derecho $\frac{n}{R}$ es $\exp(S)$ donde S está dada por la fórmula general para un gas unidimensional $S = 2\pi\sqrt{\frac{en}{6}}$. La constante c recibe una contribución de uno por cada campo bosónico y de un medio por cada campo fermiónico. En este caso se tiene que $c = 6Q_2Q_5Q_6$ y por tanto:

$$S = 2\pi\sqrt{Q_2Q_5Q_6n}. \quad (3.22)$$

Es importante enfatizar que estos cálculos se hacen en un espacio-tiempo plano, y con acoplamiento débil y sin horizonte de eventos. Simplemente, se cuentan los estados de cuerdas sobre las D -branas. Nótese que la entropía solo depende de las cargas, que son parámetros cuantizados, y no de los parámetros continuos V , R y \tilde{R} .

La descripción del acoplamiento fuerte de este sistema se encuentra resolviendo las ecuaciones de supergravedad en diez dimensiones con estas cargas. Después de compactificar a lo largo del 6-toro, la métrica de Einstein en cuatro dimensiones resulta ser [29]:

$$ds^2 = -f^{-\frac{1}{2}}(r) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + f^{\frac{1}{2}}(r) \left[\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.23)$$

donde

$$f(r) = \left(1 + \frac{r_0 \sinh^2 \alpha_2}{r}\right) \left(1 + \frac{r_0 \sinh^2 \alpha_5}{r}\right) \left(1 + \frac{r_0 \sinh^2 \alpha_6}{r}\right) \left(1 + \frac{r_0 \sinh^2 \alpha_p}{r}\right). \quad (3.24)$$

Esta métrica está parametrizada por las cinco cantidades independientes α_2 , α_5 , α_6 , α_p y r_0 . Estas cantidades están relacionadas a las cargas (con cuantización entera) de la siguiente manera:

$$Q_2 = \frac{r_0 V}{g} \sinh 2\alpha_2, \quad (3.25)$$

$$Q_5 = r_0 \tilde{R} \sinh 2\alpha_5, \quad (3.26)$$

$$Q_6 = \frac{r_0}{g} \sinh 2\alpha_6, \quad (3.27)$$

$$n = \frac{r_0}{g^2} V R^2 \tilde{R} \sinh 2\alpha_p, \quad (3.28)$$

donde hemos usado $l_s = 1$. El horizonte de eventos se encuentra en $r = r_0$. El caso especial $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_p$ corresponde a la métrica de Reissner-Nordström. Si igualamos todas las cargas a cero excepto el momento n , la métrica (3.23) se reduce a la de Kaluza-Klein (3.10).

La relación entre la constante de Newton en cuatro dimensiones y el acoplamiento de la cuerda es $G = \frac{g^2}{8\pi V R \tilde{R}}$ en unidades de la cuerda ($l_s = 1$). La masa ADM de la solución es

$$M = \frac{r_0 V R \tilde{R}}{g^2} (\cosh 2\alpha_2 + \cosh 2\alpha_5 + \cosh 2\alpha_6 + \cosh 2\alpha_p) \quad (3.29)$$

y la entropía Bekenstein-Hawking es

$$S_{bh} = \frac{A}{4G} = \frac{8\pi r_0^2 V R \tilde{R}}{g^2} \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_5 \cosh \alpha_6 \cosh \alpha_7. \quad (3.30)$$

En el límite extremo $r_0 \rightarrow 0$, $\alpha_i \rightarrow \pm\infty$ con Q_i fija, la entropía se reduce a:

$$S_{bh} = 2\pi \sqrt{Q_2 Q_5 Q_6 n}, \quad (3.31)$$

lo cual coincide con el resultado de la cuerda (3.22). La solución de Reissner-Nordström es un caso especial.

Dado que se ha calculado de manera exacta, no ha sido necesario utilizar el principio de correspondencia para reproducir la entropía del hoyo negro. Sin embargo, se puede usar para estimar cuando la descripción de hoyo negro se vuelve inconsistente, y debe reemplazarse por la descripción de D -branas. En unidades de la cuerda, el área del horizonte de eventos es $\frac{g^2 \pi}{\sqrt{R \tilde{R}}} \sqrt{Q_2 Q_5 Q_6 n}$, de donde, $r_0 = \frac{g}{2\sqrt{V R \tilde{R}}} (Q_2 Q_5 Q_6 n)^{\frac{1}{2}}$. Si se supone que todas las cargas son parecidas ($Q_2 \sim Q_5 \sim Q_6 \sim n \sim Q$), la transición ocurre cuando $gQ \sim 1$.

En el límite extremo, la masa ADM (3.29) es:

$$M = \frac{R \tilde{R}}{g} Q_2 + \frac{R V}{g^2} Q_5 + \frac{R \tilde{R} V}{g} Q_6 + \frac{n}{R}. \quad (3.32)$$

Se puede suponer que las dimensiones compactas son del tamaño de la cuerda, ($V \sim R \sim \tilde{R} \sim 1$) por lo que el valor crítico de $r_0 = 1$ corresponde a $g\sqrt{Q_2 Q_5 Q_6 n} = 2$, que es igual a la suma de las energías de cada uno de los cuatro constituyentes que forman el hoyo negro: 2-branas, 5-branas, 6-branas y cuerdas fundamentales.

3.3.4 Hoyo negro casi extremo

También es posible calcular de manera exacta la entropía de ciertos hoyos negros ligeramente no extremos usando el formalismo de las branas, aunque sólo en el caso en el que uno de los constituyentes es mucho más ligero que los demás [30]. Para el caso de

Reissner-Nordstrom, por ejemplo, donde todas las branas contribuyen a la masa igual, si se aumenta un poco la energía, la excitación de todas las branas contribuirá a la entropía de manera equitativa y el conteo resulta ser difícil. De (3.32) es posible ver que cuando R es grande, los modos de momento son mucho más ligeros que las branas, de manera que todo exceso de energía se absorbe por los modos izquierdos y derechos, por ser los grados de libertad más ligeros. Puesto que en acoplamiento débil estos modos prácticamente no interaccionan, la entropía es aditiva y se obtiene:

$$S = 2\pi \sqrt{Q_2 Q_5 Q_6} (\sqrt{n_L} + \sqrt{n_R}), \quad (3.33)$$

donde $\frac{n_L}{R}$ y $\frac{n_R}{R}$ son los momentos izquierdo y derecho respectivamente. Este resultado concuerda exactamente con la entropía de Bekenstein-Hawking calculada a partir de la solución (3.31) para el hoyo negro extremo.

Aunque en acoplamiento débil las interacciones entre los modos derecho e izquierdo son pequeños, no son exactamente cero. Un modo izquierdo puede combinarse con un modo derecho para formar una cuerda cerrada que entonces puede desalojar la brana. Esto representa el decaimiento de una configuración excitada de D -branas y es análogo, en acoplamiento débil, a la radiación de Hawking. Dada esta relación entre la entropía del hoyo negro y el conteo de los estados de las D -branas, el siguiente paso es comparar la radiación emitida por una configuración de D -branas con la radiación de Hawking. Resulta ser que en ambos casos la radiación es aproximadamente térmica con la misma temperatura y que la razón total de radiación es la misma; además de que las desviaciones del espectro de cuerpo negro en ambos casos son iguales. En un hoyo negro, estas desviaciones resultan porque la radiación tiene que propagarse a través del espacio-tiempo curvo en la parte exterior del hoyo negro. Esto produce barreras de potencial que dan lugar a factores de "cuerpo gris" que dependen de la frecuencia de radiación. En el caso de las D -branas las desviaciones se dan porque los modos provienen de sectores separados. El cálculo de las desviaciones en ambos casos es totalmente distinto; para el hoyo negro se resuelve una ecuación de onda sobre un fondo curvo de hoyo negro cuyas soluciones involucran funciones hipergeométricas; para las D -branas el cálculo es perturbativo. La respuesta es la misma en ambos casos.

Por otro lado, aún no está claro porqué un cálculo de razón de decaimiento en acoplamiento débil se puede extrapolar sin modificación alguna al régimen de acoplamiento fuerte. Una explicación posible es una conjetura de Maldacena, quien propuso que en

base a un teorema de no-renormalización supersimétrico las interacciones relevantes no reciben correcciones cuánticas a bajas energías.

Estos resultados tienen implicaciones directas sobre la paradoja de la información del hoyo negro (capítulo 2) [18]. Semiclásicamente, la radiación emitida por un hoyo negro sería independiente de la que incidiera en él, de modo que habría pérdida de información y se violaría la unitariedad. Por otro lado, la teoría de cuerdas proporciona una descripción unitaria de un sistema de cuerdas y D -branas con la misma entropía y razón de radiación. Después de un decaimiento de una configuración de este tipo, el estado final es un estado puro, con correlaciones entre el estado de las D -branas y la radiación. Puesto que el sistema de cuerdas y D -branas se convierte en un hoyo negro al aumentar el acoplamiento de la cuerda, se concluye que aún en el régimen de un hoyo negro existen dichas correlaciones y entonces el proceso de evaporación tiene que ser unitario.

Este argumento no evita del todo las dificultades que surgen al tratar de explicar cómo la información puede salir del interior del hoyo negro. Hawking ha recalcado que la estructura causal de un hoyo negro es muy diferente a una descripción de espacio plano, donde no existe el horizonte de eventos. Se ha demostrado que el proceso de evaporación es unitario en acoplamiento débil, pero en principio podría dejar de serlo en acoplamiento fuerte. Toda la evidencia diría que los hoyos negros son cuerdas en acoplamiento fuerte, y por lo tanto todos los procesos en los que participan serán unitarios, por supuesto.

3.4 Dualidad

Anteriormente se consideró la transición, en acoplamiento débil, de un estado de cuerdas y D -branas a un hoyo negro. Esto ocurre cuando $gN^{\frac{1}{4}} \sim 1$ o $gQ \sim 1$, lo cual implica que el acoplamiento de la cuerda g es más bien pequeño. Existen varias conjeturas acerca del comportamiento de la teoría de cuerdas cuando el acoplamiento es mucho más grande que uno.

Como ya se mencionó, existen solamente cinco teorías de cuerdas perturbativas consistentes en diez dimensiones: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica $E8 \times E8$ y heterótica $SO(32)$. El límite a bajas energías de estas teorías da la teoría de supergravedad en diez dimensiones acopladas con materia. Estas teorías de cuerdas, junto con la supergravedad en 11 dimensiones, están relacionadas entre sí por transformaciones de dualidad S o T . Cada una de estas seis teorías es un límite particular de una teoría fundamental denominada Teoría M [32, 33, 34]. La dualidad S intercambia g por $\frac{1}{g}$, es decir, relaciona el

acoplamiento fuerte con acoplamiento débil. La dualidad T intercambia R por $\frac{l_s^2}{R}$ y nos dice que, en teoría de cuerdas, las distancias pequeñas son equivalentes a las distancias grandes o, más físicamente, que no podemos tener distancias más pequeñas que la cuerda. $l_s \sim 1$.

3.4.1 Unitariedad e información

Una aplicación a hoyos negros de estos resultados es la siguiente [18]: Como todas las teorías de cuerdas perturbativas incluyen gravedad, la solución de Schwarzschild, es una solución de cada una de ellas. Tomando diferentes límites, se pueden representar sus estados en diferentes maneras. Consideremos la teoría IIB, que tiene cuerdas fundamentales y D -cuerdas ($D - 1$ -branas). Las D -cuerdas tienen una tensión $\frac{1}{g l_s^2}$ y por tanto son muy pesadas cuando $g \ll 1$. Sin embargo cuando $g \gg 1$, las D -cuerdas se vuelven mucho más ligeras que las cuerdas fundamentales. Este límite se describe por otra teoría de cuerdas IIB pero ahora las D -cuerdas juegan el papel de las cuerdas fundamentales y la constante de acoplamiento es $\hat{g} = \frac{1}{g}$. En otras palabras, la teoría IIB es autodual. Como ya se mencionó, cuando $g \ll 1$, los estados de un hoyo negro de Schwarzschild podría ser representados por estados de una cuerda ordinaria. Ahora es posible ver que en límite $g \gg 1$, el mismo hoyo negro puede describirse en términos de estados de una D -cuerda en acoplamiento débil.

De este modo al incrementar g se tienen los siguientes resultados. Considérese un estado excitado de la cuerda fundamental en el nivel N cuando $g = 0$. Como ya se ha visto, cuando $g \sim \frac{1}{N^4}$ el radio de Schwarzschild se vuelve uno y el estado forma un hoyo negro. Si continuamos incrementando el acoplamiento, hasta que $g \sim N^4$ (lo que ocurre cuando el radio de Schwarzschild es del orden de la escala de longitud dada por la tensión de la D -cuerda). El hoyo negro se vuelve un estado excitado de una D -cuerda en acoplamiento débil en el mismo nivel N que el estado inicial de la cuerda fundamental.

Es interesante considerar la paradoja de la pérdida de información desde este punto de vista. Si se compactifican cinco dimensiones de la teoría de cuerdas IIB y se enrollan varias D -branas alrededor de un 5-toro compacto, es posible obtener hoyos negros extremos y casi extremos en cinco dimensiones. Se ha visto que el espectro de radiación lejano permanece constante cuando se incrementa el acoplamiento y la descripción de los estados cambia de D -branas ligeramente excitadas a hoyos negros casi extremos. La radiación de la D -brana es unitaria. Las conjeturas de dualidad implican que si se continúa

incrementando g , el hoyo se puede describir nuevamente por una teoría de cuerdas dual en acoplamiento débil. El espectro permanecerá igual, y la radiación otra vez es unitaria. De hecho la geometría del espacio-tiempo en ambos límites $g \gg 1$ y $g \ll 1$ es plano. Obviamente, nadie propone un mecanismo de pérdida de unitariedad sólo en un rango finito de g .

3.4.2 Cuerda negra

Una segunda aplicación de las ideas de dualidad a hoyos negros se realiza con la teoría **IIA**. Esta teoría tiene estados *BPS* que son estados ligados de D -cerobranas, cuyas masas son múltiplos enteros de $\frac{1}{g l_s}$. Esto recuerda al espectro de los estados de Kaluza-Klein de radio $R = g l_s$. Nótese que en acoplamiento débil el radio es muy pequeño, pero en acoplamiento fuerte, muy grande. El límite a bajas energías de la teoría de cuerdas **IIA** en diez dimensiones en acoplamiento fuerte es una teoría de supergravedad en once dimensiones compactificada sobre un círculo de radio $R = g l_s$. La longitud de Planck en once dimensiones ahora resulta $l_p = g^{\frac{1}{3}}$.

Veamos el comportamiento de un estado excitado de cuerda **IIA** conforme el acoplamiento aumenta. Empezamos con un estado N y acoplamiento cero de modo que $M = \frac{\sqrt{n}}{l_s}$ y $S \simeq \sqrt{N}$. Entonces aumentamos el acoplamiento de la cuerda conservando el estado fijo (es decir, la entropía fija). Cuando $g \simeq N^{-\frac{1}{4}}$ se forma un hoyo negro (en diez dimensiones) con $r_0 \simeq N^{\frac{1}{16}}$.

Cuando $g \simeq 1$ la longitud de la undécima dimensión se vuelve más grande que la longitud de Planck (en once dimensiones). Como la teoría de supergravedad **IIA** en diez dimensiones es la reducción dimensional de la supergravedad en once dimensiones, el hoyo negro en diez dimensiones se convierte entonces ($g \sim 1$) en una cuerda negra en once dimensiones, es decir, en el producto de Schwarzschild y un círculo. Conforme el acoplamiento sigue aumentando, la longitud de la undécima dimensión también se incrementa. Cuando ésta es del orden de r_0 , la cuerda negra se vuelve inestable [35] y probablemente forme un hoyo negro en once dimensiones. Esto ocurre cuando $r_0 \simeq R$, lo que implica que $R \simeq S^{\frac{1}{8}} l_p$. Como $S \simeq N^{\frac{1}{2}}$, se tiene $R \simeq S^{\frac{1}{8}} l_p$ y por lo tanto $g \simeq N^{\frac{1}{16}}$.

Incrementando g más aún, que corresponde a mayores valores de R , el estado sigue siendo un hoyo negro en once dimensiones.

Inversamente, comenzando con una solución de Schwarzschild en once dimensiones con una dimensión periódica, se puede revertir la descripción anterior conforme se disminuye g :

el hoyo negro en once dimensiones se transforma en una cuerda negra en once dimensiones, la cual entonces se convierte en un hoyo negro en diez dimensiones y finalmente en una cuerda en diez dimensiones en acoplamiento débil.

Sería más satisfactorio tener una explicación directa de la entropía de un hoyo negro en once dimensiones que no requiriera de la compactificación de una dirección. Para esto se necesitaría de la teoría M , cuya formulación completa todavía se desconoce.

Capítulo 4

Horizontes extendidos

En este capítulo se determina la posición del *horizonte extendido* en relación al horizonte de eventos para las soluciones clásicas de hoyos negros (no supersimétricos). La motivación principal es encontrar bajo qué circunstancias el horizonte extendido es un concepto útil y significativo dentro de este contexto. Primero, se hace una breve revisión sobre la idea de horizonte extendido para hoyos negros extremos en teorías de cuerdas supersimétricas propuesta por A. Sen [36]. Posteriormente se presentan los detalles de los cálculos realizados y se discuten los resultados obtenidos.

4.1 Introducción

Hace algunos años se sugirió que los hoyos negros deberían tratarse como partículas elementales [3, 4, 19, 37, 38, 39, 40, 41], puesto que ambos son parametrizados únicamente por su masa, momento angular (o espín) y cargas de norma. La teoría de cuerdas aporta un marco fundamental que coloca a esta afirmación sobre una base firme.

En teoría de cuerdas hay un número infinito de estados masivos que tienen los mismos números cuánticos que las soluciones clásicas de hoyos negros cargados eléctricamente. Es entonces plausible pensar que los hoyos negros y los estados elementales de la cuerda corresponden a diferentes maneras de representar los mismos estados físicos. Para sustentar esta idea se debe mostrar que los hoyos negros tienen las mismas propiedades que los estados de la cuerda, además de que tienen los mismos números cuánticos.

Una característica común entre hoyos negros y estados elementales de la cuerda es que para ambos la degeneración de estados se incrementa con la masa. Para el caso de los

estados de la cuerda este crecimiento se debe al gran número de estados de oscilador que corresponden a un estado con una masa dada. Para hoyos negros, se debe al hecho de que la entropía clásica de Bekenstein-Hawking que es proporcional al área del horizonte de eventos, se incrementa con la masa. Desafortunadamente, al tratar de hacer esta analogía surge un problema: para los estados de la cuerda, el logaritmo de la degeneración de estados se incrementa linealmente con la masa, mientras que la entropía de Bekenstein-Hawking de un hoyo negro se incrementa con el cuadrado de la masa. Esta discrepancia se podría solucionar tomando en cuenta la renormalización de la masa del hoyo negro. En particular, se ha sugerido [4, 19] que los hoyos negros con masa M^2 podrían identificarse con excitaciones elementales de masa M de la cuerda. Sin embargo, como ya se mencionó, existen algunos estados particulares en teoría de cuerdas, llamados estados BPS, los cuales no admiten ninguna renormalización de la masa. Por esta razón los estados BPS son atractivos desde el punto de vista teórico para "sondear" la hipótesis de la correspondencia entre hoyos negros y excitaciones elementales de la cuerda. En este capítulo se analiza el caso específico de hoyos negros supersimétricos conocidos como extremos o BPS.

¿Como están relacionadas las entropías de los hoyos negros extremos con las degeneraciones de los estados BPS de las cuerdas elementales? Resulta que el logaritmo de la degeneración de estados de la cuerda sigue creciendo linealmente con la masa, mientras que el área del horizonte de eventos de un hoyo negro extremo se anula. Es decir, se tiene el problema opuesto: la degeneración asociada con los estados de hoyo negro extremo parece ser menor que la degeneración de estados elementales de la cuerda con los mismos números cuánticos.

Para resolver este problema A. Sen [36] introdujo el concepto de *horizonte extendido*. Se postula que la entropía de un hoyo negro extremo no es exactamente igual al área del horizonte de eventos, sino que es igual al área de una superficie cercana al horizonte de eventos, llamada horizonte extendido.

Al definir de manera consistente la posición del horizonte extendido, la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un hoyo negro recibe correcciones de tal manera que reproduce correctamente el logaritmo de la degeneración de estados elementales de la cuerda, como se hace a continuación.

4.2 Horizonte extendido para hoyos negros supersimétricos

4.2.1 Definición de horizonte extendido

Hay tres maneras alternativas de definir el horizonte extendido:

- Si se supone que la modificación necesaria a la física cerca del horizonte se debe a efectos de la superficie de evolución de la cuerda, entonces el horizonte extendido se puede definir como una configuración donde la teoría conforme bidimensional de la cuerda llega a ser fuertemente acoplada, es decir, es la superficie en donde la curvatura del espacio-tiempo asociada con la métrica de la cuerda es muy grande.

- También es posible definir al horizonte extendido como el lugar en donde la constante de acoplamiento de la cuerda se vuelve muy grande. Sin embargo, para hoyos negros extremos, esto no ocurre. De hecho, el acoplamiento de la cuerda se anula cuando nos aproximamos al horizonte de eventos.

- La tercera posibilidad utiliza la termodinámica de los hoyos negros. De acuerdo a esta definición, el horizonte extendido es la superficie en donde la temperatura local de Unruh para un observador estacionario (r constante), es del orden de la temperatura de Hagedorn de las cuerdas ¹. (La temperatura local de Unruh se vuelve infinita en el horizonte de eventos).

4.2.2 Area del horizonte extendido

El cálculo del área del horizonte extendido se basa en la primera definición. Se considerará una teoría cuatro-dimensional obtenida de una compactificación toroide de la teoría de cuerdas heterótica [42].

La acción efectiva que describe la dinámica de los campos no masivos en cuatro dimensiones es ²:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{32\pi} \int d^4 \sqrt{-G} \exp -\Phi [R_G + G^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{12} G^{\mu\mu'} G^{\nu\nu'} G^{\rho\rho'} H_{\mu\nu\rho} H_{\mu'\nu'\rho'} \\
 & - G^{\mu\mu'} G^{\nu'\nu''} F_{\mu\nu}^{(a)} (LML)_{ab} F_{\mu'\nu'}^{(b)} + \frac{1}{8} G^{\mu\nu} \text{Tr}(\partial_\mu ML \partial_\nu ML)], \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

¹La temperatura de Hagedorn es la temperatura en la cual la descripción teórica de un gas de cuerdas se vuelve inconsistente (surgen taquiones).

²Para mayores detalles ver apéndice B.

donde $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ y $A_\mu^{(a)}$, ($0 \leq \mu, \nu \leq 3$, $1 \leq a \leq 28$) son la métrica en el marco de las cuerdas, los campos antisimétricos de Kalb-Ramond y los campos de norma del máximo grupo abeliano $U(1)^{28}$ respectivamente, Φ es el dilatón, R_G es la curvatura escalar asociada a la métrica $G_{\mu\nu}$, y,

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)},$$

$$H_{\mu\nu\rho} = (\partial_\mu B_{\nu\rho} + 2A_\mu^{(a)} L_{ab} F_{\nu\rho}^{(b)}) + \text{permutaciones cíclicas de } \mu, \nu, \rho$$

son los campos de fuerza asociados a $A_\mu^{(a)}$ y $B_{\mu\nu}$. El campo escalar M toma valores matriciales con las siguientes propiedades:

$$MLM^T = L, \quad M^T = M, \quad (4.2)$$

$$L = \begin{pmatrix} -I_{22} & 0 \\ 0 & I_6 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde I_n denota la matriz identidad $n \times n$. La acción (4.1) es invariante bajo el grupo de transformaciones $O(6, 22)$:

$$M \rightarrow \Omega M \Omega^T, \quad A_\mu^{(a)} \rightarrow \Omega_{ab} A_\mu^{(b)}, \quad G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}, \quad \Phi \rightarrow \Phi, \quad B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

donde Ω es una matriz de 28×28 que satisface

$$\Omega L \Omega^T = L. \quad (4.5)$$

La teoría efectiva en cuatro dimensiones también es invariante bajo otro conjunto de transformaciones de simetría, que corresponden a una simetría de las ecuaciones de movimiento, aunque no de la acción efectiva (4.1). Para exhibir esta simetría, se introduce la métrica canónica de Einstein $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \exp(-\Phi) G_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

En términos de $g_{\mu\nu}$, la acción toma la forma:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R_g - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{12} \exp(-2\Phi) g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\rho\rho'} H_{\mu\nu\rho} H_{\mu'\nu'\rho'} \\ & - \exp(-\Phi) g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu\nu}^{(a)} (LML)_{ab} F_{\mu'\nu'}^{(b)} + \frac{1}{8} g^{\mu\nu} \text{Tr}(\partial_\mu ML \partial_\nu ML)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La acción de la superficie de evolución de la cuerda es [43]:

$$\frac{1}{64\pi} \int d^2\xi G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu + \mathcal{W}, \quad (4.8)$$

donde \mathcal{W} denota los términos que involucran campos fermiónicos en la superficie de evolución, así como los campos $B_{\mu\nu}$, $A_\mu^{(a)}$, Φ y M . El análisis se restringe a fondos caracterizados por las siguientes formas asintóticas:

$$\langle g_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu}, \quad \langle \exp(-\Phi) \rangle = \frac{1}{g^2}, \quad \langle M \rangle = I_{28}, \quad \langle B_{\mu\nu} \rangle = 0, \quad \langle A_\mu^{(a)} \rangle = 0, \quad (4.9)$$

de las cuales se obtiene:

$$\langle G_{\mu\nu} \rangle = g^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

De las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.10) se ve que el fondo corresponde a los siguientes valores de la constante de Newton G_N y de la tensión de la cuerda T :

$$G_N = 2, \quad T = \frac{g^2}{32\pi}. \quad (4.11)$$

La solución más general para hoyos negros no rotantes extremos o BPS está dada por [3]:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -K^{\frac{-1}{2}} \rho dt^2 + K^{\frac{1}{2}} \rho^{-1} d\rho^2 + K^{\frac{1}{2}} \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.12)$$

$$B_{\mu\nu} = 0, \quad (4.13)$$

$$\exp(\Phi) = K^{\frac{-1}{2}} \rho g^2, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} A_t^{(a)} &= -g \frac{n^{(a)} m_0}{\sqrt{2} K} \rho \sinh \alpha, & 1 \leq a \leq 22. \\ &= -g \frac{p^{(a-22)} m_0}{\sqrt{2} K} (\rho \cosh \alpha + m_0), & 23 \leq a \leq 28. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$M = I_{28} + \begin{pmatrix} P_{nn}^T & Q_{np}^T \\ Q_{pn}^T & P_{pp}^T \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

donde m_0 y α son reales, \vec{n} en un vector unitario 22-dimensional, \vec{p} es un vector unitario 6-dimensional, y

$$K = (\rho^2 + 2m_0\rho \cosh \alpha + m_0^2), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} P &= 2 \frac{m_0^2}{K} \sinh^2 \alpha, \\ Q &= -2 \frac{m_0 \sinh \alpha}{K} (\rho + m_0 \cosh \alpha), \end{aligned} \quad (4.18)$$

siendo P y Q las cargas magnética y eléctrica respectivamente.

Nótese que en $\rho = 0$ el horizonte y la singularidad de este hoyo negro coinciden.

La carga eléctrica del hoyo negro, $Q_{el}^{(a)}$, se define por medio de las ecuaciones:

$$F_{\rho t}^{(a)} \simeq \frac{Q_{el}^{(a)}}{\rho^2} \quad (4.19)$$

para ρ grande. Por tanto, de la ecuación (4.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} Q_{el}^{(a)} &= g \frac{n^{(a)}}{\sqrt{2}} m_0 \sinh \alpha, & 1 \leq a \leq 22, \\ &= g \frac{p^{(a-22)}}{\sqrt{2}} m_0 \cosh \alpha, & 23 \leq a \leq 28. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Así también, de las ecuaciones (4.12) y (4.17) se obtiene la masa ADM:

$$m = \frac{1}{G_N} \frac{m_0}{2} \cosh \alpha = \frac{1}{4} m_0 \cosh \alpha. \quad (4.21)$$

Se definen las componentes derecha e izquierda del vector de carga eléctrica como:

$$\begin{aligned}
 Q_R^{(a)} &= 0, & 1 \leq a \leq 22, \\
 &= g \frac{p^{a-22}}{\sqrt{2}} m_0 \cosh \alpha, & 23 \leq a \leq 28, \\
 Q_L^{(a)} &= g \frac{p^{(a)}}{\sqrt{2}} m_0 \sinh \alpha, & 1 \leq a \leq 22, \\
 &= 0, & 23 \leq a \leq 28.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

De las ecuaciones (4.21) y (4.22) se obtiene:

$$m^2 = \frac{1}{8g^2} \vec{Q}_R^2, \tag{4.23}$$

que es la relación estándar BPS entre masa y carga. Se pueden tomar a m , $Q_L \equiv |\vec{Q}_L|$, \vec{n} y \vec{p} como parámetros independientes que caracterizan al hoyo negro. Invertiendo las ecuaciones (4.21) y (4.22) resulta:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 4 \sqrt{m^2 - \frac{\vec{Q}_L^2}{8g^2}}, \\
 \alpha &= \tanh^{-1} \left(\frac{Q_L}{2\sqrt{2}gm} \right).
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para determinar la posición del horizonte extendido es necesario examinar algunos campos cerca del horizonte. Nótese que cerca del horizonte ($\rho \ll m_0$), la métrica de la cuerda toma la forma:

$$\begin{aligned}
 dS^2 &\equiv G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \exp(\Phi) ds^2 \\
 &\simeq -\frac{\rho^2}{m_0^2} g^2 dt^2 + g^2 d\rho^2 + g^2 \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Considérese ahora un nuevo sistema de coordenadas:

$$\bar{\rho} = g\rho, \quad \bar{t} = \frac{t}{m_0}. \tag{4.26}$$

la métrica se transforma en:

$$dS^2 \simeq -\bar{\rho}^2 d\bar{t}^2 + d\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.27)$$

En este sistema de coordenadas, otros campos no triviales cerca del horizonte son:

$$\partial_{\bar{\rho}} \Phi \simeq \frac{1}{\bar{\rho}}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\rho}i}^{(a)} &\simeq -\frac{n^{(a)}}{\sqrt{2}} \sinh \alpha, & 1 \leq a \leq 22, \\ &\simeq \frac{p^{(a-22)}}{\sqrt{2}} \cosh \alpha, & 23 \leq a \leq 28. \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$M = I_{28} + \begin{pmatrix} 2 \sinh^2(\alpha) nn^T & -2 \sinh(\alpha) \cosh(\alpha) np^T \\ -2 \sinh(\alpha) \cosh(\alpha) pn^T & 2 \sinh^2(\alpha) pp^T \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Haciendo otra transformación (4.4) usando la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) nn^T & \sinh(\alpha) np^T \\ \sinh(\alpha) pn^T & \cosh(\alpha) pp^T \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

resulta:

$$\begin{aligned} M' &\simeq I_{28}, \\ F_{\bar{\rho}i}^{(a)} &\simeq 0, & 1 \leq a \leq 22, \\ &\simeq \frac{p^{(a-22)}}{\sqrt{2}}, & 23 \leq a \leq 28. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La expresión (4.4) representa una simetría de la acción efectiva a nivel árbol. por tanto los efectos de las correcciones cuánticas de la superficie de evolución. que surgen en la acción efectiva como términos en derivadas superiores, se pueden estudiar también sobre el fondo representado por los campos primados.

Puesto que los campos de fondo primados ya no dependen de ningún parámetro (α , m_0 , g), se sigue que el lugar en donde el espacio de intensidades de campo se vuelve muy fuerte está situado en $\bar{\rho} \sim 1$. Esto determina la localización del horizonte extendido en

$$\bar{\rho} = C, \quad (4.33)$$

donde C es una constante. De esto resulta que,

$$\rho = \frac{C}{g} \equiv \eta \quad (4.34)$$

En el apéndice C se muestra que para este valor de ρ , la temperatura local de Unruh es del orden de la temperatura de Hagedorn en la teoría de cuerdas. Por tanto, las dos definiciones del horizonte extendido coinciden.

Usando la métrica canónica (4.12) se obtiene el área del horizonte extendido:

$$A \simeq 4\pi\eta m_0 = 4\pi m_0 \frac{C}{g}. \quad (4.35)$$

4.2.3 Modificación a la entropía de Bekenstein-Hawking

En analogía al resultado de Bekenstein-Hawking y utilizando (4.24) y (4.35), se define la entropía del hoyo negro como ³:

$$S_{BH} \equiv \frac{A}{4G_N} = \frac{\pi m_0 C}{2g} = \frac{2\pi C}{g} \sqrt{m^2 - \frac{\tilde{Q}_L^2}{8g^2}}. \quad (4.36)$$

Ahora se procede a comparar la expresión para la entropía (4.36) con la densidad de los estados elementales de la cuerda con los mismos números cuánticos de masa y carga.

La fórmula para la masa de los estados *BPS* de la cuerda está dada por

$$m^2 = \frac{\tilde{Q}_R^2}{8g^2} = \frac{g^2}{8} \left(\frac{\tilde{Q}_L^2}{g^4} + 2N_L - 2 \right), \quad (4.37)$$

siendo N_L la contribución total de osciladores al cuadrado de la masa proveniente de los osciladores izquierdos. No hay contribución a la masa por parte de los osciladores derechos, puesto que para saturar la cota BPS, el estado de la cuerda debe de estar en el nivel más bajo en el sector derecho de la superficie de evolución. La degeneración de tales estados surge debido a las muchas maneras diferentes en que los osciladores izquierdos se combinan para dar un total de N_L . Esta degeneración está dada por [37]:

³Este mismo resultado se obtiene repitiendo el cálculo que lleva a (4.35) en un escenario más completo, de modo que la corrección (4.36) es muy general [3].

$$d_{E,S} \simeq \exp(4\pi\sqrt{N_L}). \quad (4.38)$$

Entonces la entropía, calculada a partir del espectro elemental de la cuerda es:

$$S_{E,S} \equiv \ln d_{E,S} \simeq 4\pi\sqrt{N_L} \approx \frac{8\pi}{g} \sqrt{m^2 - \frac{\tilde{Q}_L^2}{8g^2}}. \quad (4.39)$$

Ésta tiene la misma dependencia en g , m y \tilde{Q}_L que $S_{B,H}$ dada en la ecuación (4.36). La constante de proporcionalidad en las dos expresiones coinciden si se toma

$$C = 4. \quad (4.40)$$

Esto muestra que la entropía modificada de Bekenstein-Hawking del hoyo negro sí reproduce correctamente la densidad de estados elementales de la cuerda.

4.3 Horizonte extendido para hoyos negros no supersimétricos

Es necesario adaptar el concepto de horizonte extendido al caso de hoyos negros clásicos, para esto nos basamos en la primera definición mencionada en el apartado anterior. Específicamente definimos el horizonte extendido como la superficie en donde la curvatura escalar ($C = R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}$) es igual a uno en unidades de Planck.

En adelante visualizaremos a los hoyos negros como la descripción clásica de un objeto cuántico. La naturaleza de este objeto está descrita en una buena aproximación por la relatividad general “clásica” en la lejanía del horizonte de eventos. De ninguna manera debemos esperar que la métrica que resuelve las ecuaciones de Einstein tenga sentido a distancias del origen más pequeñas que la longitud de onda de de Broglie $\lambda_B = M^{-1}$ de un hoyo negro de masa M . En el contexto de la teoría de cuerdas es quizás más apropiado utilizar el principio de incertidumbre generalizado de Veneziano [44] $\Delta x \geq \frac{\ell_s^2}{\hbar} \Delta p + \frac{\hbar}{\Delta p}$, donde ℓ_s es la escala de la cuerda, g es la constante de acoplamiento de la cuerda y $\ell_p = g\ell_s$ es la longitud de Planck. De este modo, en unidades de Planck, ciertamente no se espera que la métrica tenga sentido para radios más pequeños que

$$\lambda_V = \frac{1}{2}M + \frac{1}{M}. \quad (4.41)$$

¿En dónde está el horizonte extendido? Si el lugar en donde la curvatura es muy grande (en unidades de Planck) está dentro del horizonte de eventos, es claro entonces que no hay necesidad de definir un horizonte extendido. De manera similar, si este lugar se encuentra a un radio más pequeño que λ_V , no tiene sentido hablar del horizonte extendido. Nosotros estamos interesados en encontrar bajo que circunstancias el horizonte extendido es un concepto útil y significativo para hoyos negros no supersimétricos en cuatro dimensiones. En otras palabras, debemos encontrar en dónde el horizonte extendido es mayor que el horizonte de eventos y al mismo tiempo mayor que λ_V (o λ_B).

Considérese la solución general para las ecuaciones de Einstein-Maxwell (1.21):

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (4.42)$$

$$A_\mu = - \frac{er}{\Sigma} \left[(dt)_\mu - a \sin^2 \theta (d\phi)_\mu \right], \quad (4.43)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad y \quad \Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr. \quad (4.44)$$

Usando *Mathematica* se calculó el cuadrado del tensor de Riemann C para esta solución, y se evaluó en donde es igual a uno.

Para el hoyo negro de Schwarzschild ($e = a = 0$) la curvatura escalar es simplemente:

$$C = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (4.45)$$

de donde el radio del horizonte extendido es:

$$r_s = 48^{\frac{1}{6}} M^{\frac{1}{3}}. \quad (4.46)$$

En la figura 4.1 se muestra la gráfica de la curvatura escalar para Schwarzschild (4.45) junto con la gráfica del horizonte extendido (4.46) y del horizonte de eventos comparadas con la curva de Veneziano (4.41) y la curva de de Broglie ($\lambda_B = M^{-1}$). Notamos que el horizonte extendido siempre está adentro del horizonte de eventos, excepto para aquellas masas tan pequeñas que la longitud de onda de de Broglie es de hecho mayor que ambos.

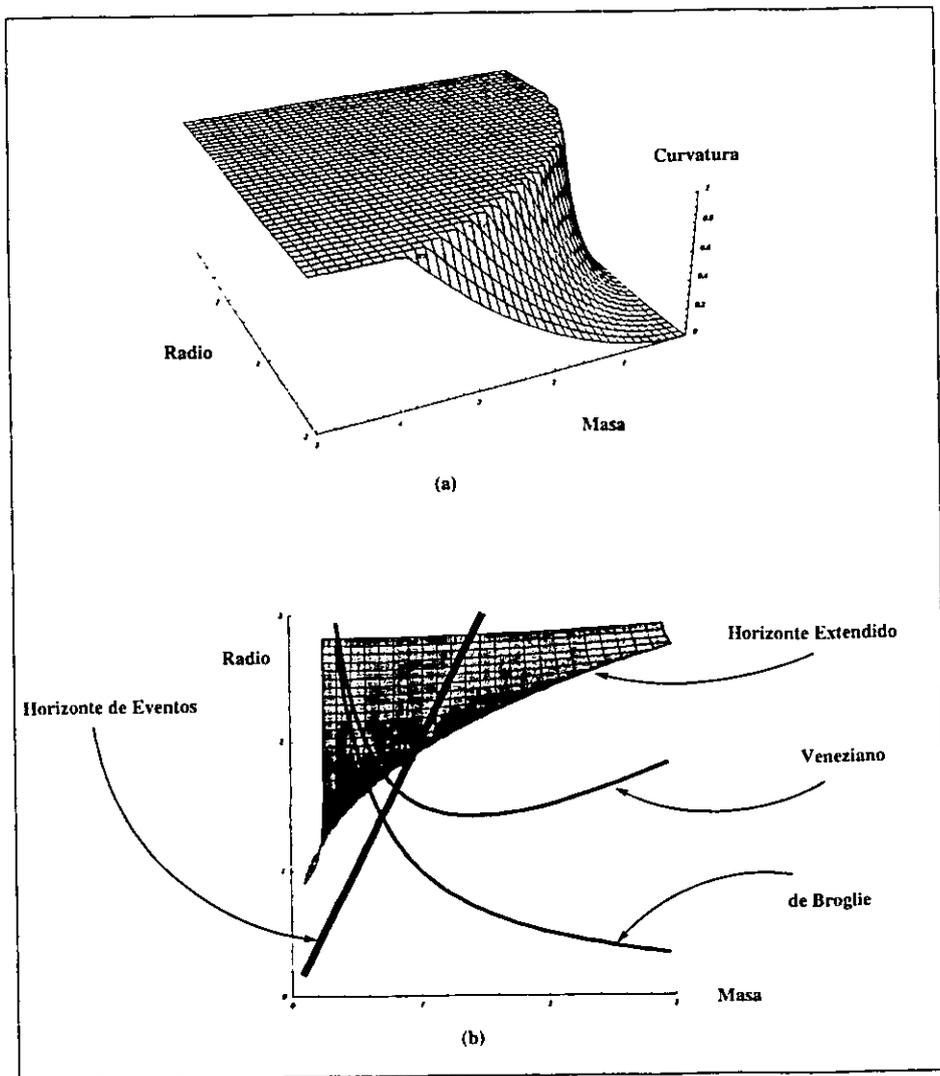


Figura 4.1 (a) Gráfica de la curvatura C como función de la masa y el radio de un hoyo negro en la métrica de Schwarzschild. El corte horizontal es para $C=1$ y nos da el horizonte extendido. (b) Se comparan las posiciones del horizonte extendido y del horizonte de eventos como función de la masa.

Lo mismo sucede para cualquier hoyo negro cargado estático: en la figura 4.2 se muestra la curvatura escalar de Reissner-Nordström ($a = 0$) y la comparación de los horizontes extendido y de eventos con las curvas de Veneziano y de de Broglie cuando $e = 0.99$. Una visión más clara de lo que sucede con este tipo de hoyos se muestra en la figura 4.3 en donde se grafica la masa crítica M_c (en unidades de Planck) en la cual el horizonte extendido cruza el horizonte de eventos en función de la carga e . Sólo para masas por debajo de la línea el horizonte extendido es mayor que el horizonte de eventos. La curva es esencialmente plana justo por debajo de $M_c \sim 0.95$ y comienza a crecer en $e \approx 0.3$. Cuando e alcanza su valor extremo $e = 1$, M_c alcanza 1.088.

De modo que para ambos, el hoyo negro de Schwarzschild y el hoyo negro de Reissner-Nordström, el horizonte extendido no es un concepto útil.

La situación cambia ligeramente para el caso de un hoyo rotante. En la figura 4.4 se muestra la curvatura escalar para el caso de Kerr ($e = 0$) cuando $a = 0.1$ y $\theta = \pi$ (dirección en la que el radio del horizonte extendido resulta ser máximo). De nuevo, el horizonte extendido es más grande que el horizonte de eventos sólo para masas pequeñas, pero la masa crítica por debajo de la cual el horizonte extendido es relevante (mayor que el horizonte de eventos) es ahora moderadamente mayor y crece con a . Los puntos en donde la curvatura escalar varía bruscamente (que son más notorios en la gráfica (b)) no tienen interpretación física. El hecho de que estos "picos" se sitúan sobre la curva del horizonte de eventos sugiere que provienen de la singularidad aparente en la métrica, puesto que utilizamos las coordenadas originales (t, r, θ, ϕ) . En estas coordenadas la métrica general es singular en los puntos: $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}$, es decir, justo en los puntos que definen el horizonte de eventos. (En los casos de Schwarzschild y de Reissner-Nordström la singularidad en las coordenadas no se manifiesta en la curvatura escalar porque la expresión para ésta es muy simple para ambos. En cambio, la expresión para la curvatura escalar en el caso general es muy complicada y tiene dependencia angular, de modo que la singularidad aparente no puede ser removida en estas coordenadas). Para obtener el punto en donde se intersectan el horizonte de eventos y el horizonte extendido se excluyen de la gráfica de este último los puntos cercanos a la singularidad aparente ($r = r_+$) y con los puntos restantes se hace una interpolación con un polinomio de sexto grado que posteriormente se utiliza para extrapolar el punto de intersección.

Los resultados se resumen en la figura 4.5 en donde se muestra la gráfica de la masa crítica M_c en función del parámetro a . Para este caso M_c alcanza el valor 5.53 en el límite extremo $a \rightarrow 1$, lo cual corresponde a $r_+ = 10.97$ que corresponde a 3.72 veces la longitud

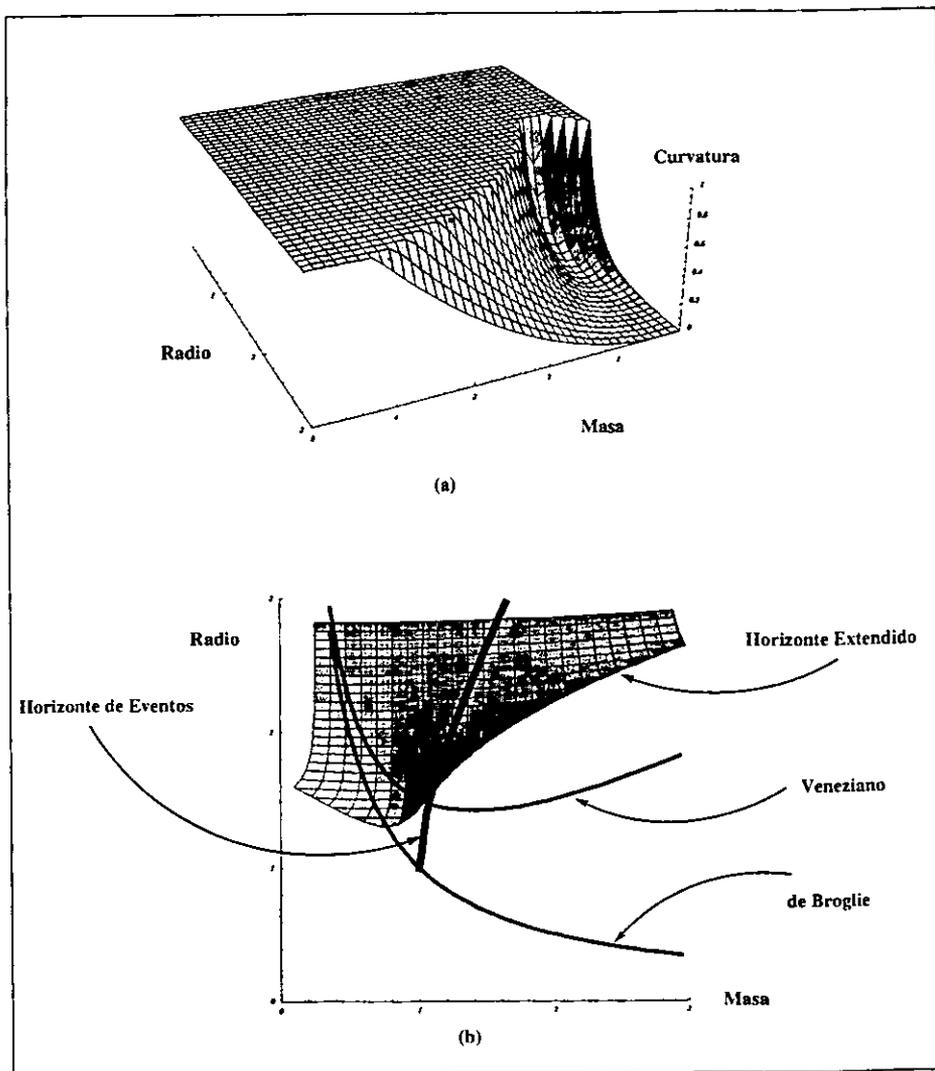


Figura 4.2 (a) Gráfica de la curvatura C como función de la masa y el radio de un hoyo negro en la métrica de Reissner-Nordström. El corte horizontal es para $C=1$ y nos da el horizonte extendido. (b) Se comparan las posiciones del horizonte extendido y del horizonte de eventos como función de la masa.

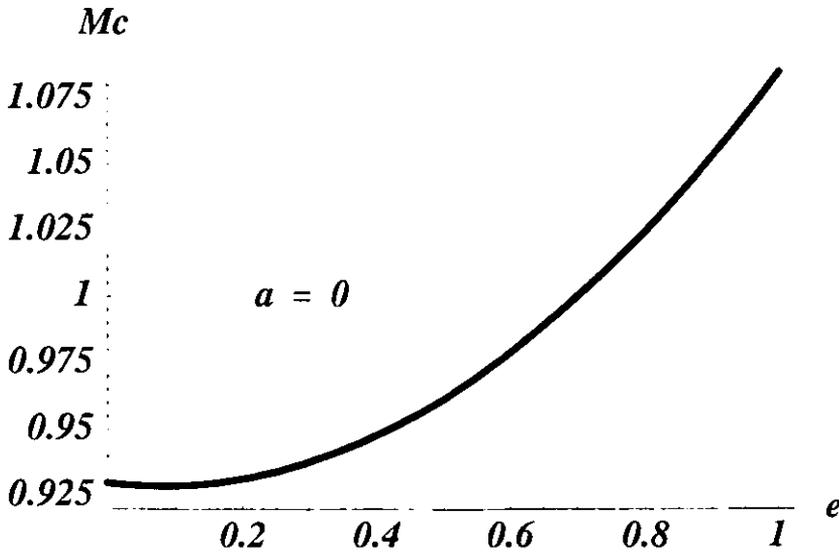


Figura 4.3 Masa crítica M_c para un hoyo negro cargado estático.

de Veneziano y 60.7 veces la longitud de de Broglie.

Por tanto, el efecto del momento angular es el de incrementar ligeramente el valor de la masa crítica en el límite extremo ($a = 1$).

Finalmente, la figura 4.6 muestra la curvatura escalar para el caso general de Kerr-Neumann cuando $a = 0.99$, $e = 0.99$ y $\theta = \pi$. Nuevamente los "picos" en las gráficas están asociados a la singularidad en las coordenadas y no tienen significado físico. En este caso, el valor de la masa crítica es $M_c = 5.69$, lo cual corresponde a $r_s = 11.22$ que corresponde a 3.70 veces la longitud de Veneziano y 63.9 veces la longitud de de Broglie. Por tanto, en el caso general la carga no juega un papel relevante.

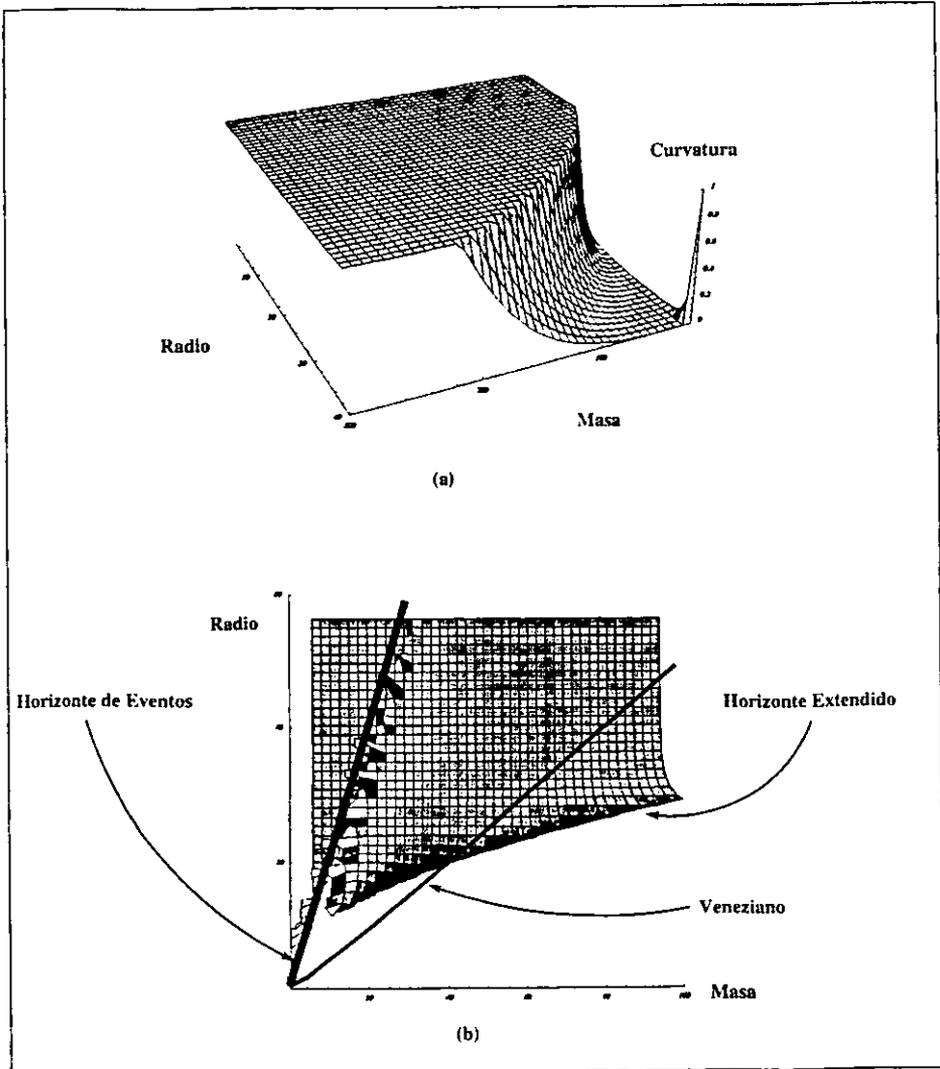


Figura 4.4 (a) Gráfica de la curvatura C como función de la masa y el radio de un hoyo negro en la métrica de Kerr. El corte horizontal es para $C=1$ y nos da el horizonte extendido. (b) Se comparan las posiciones del horizonte extendido y del horizonte de eventos como función de la masa.

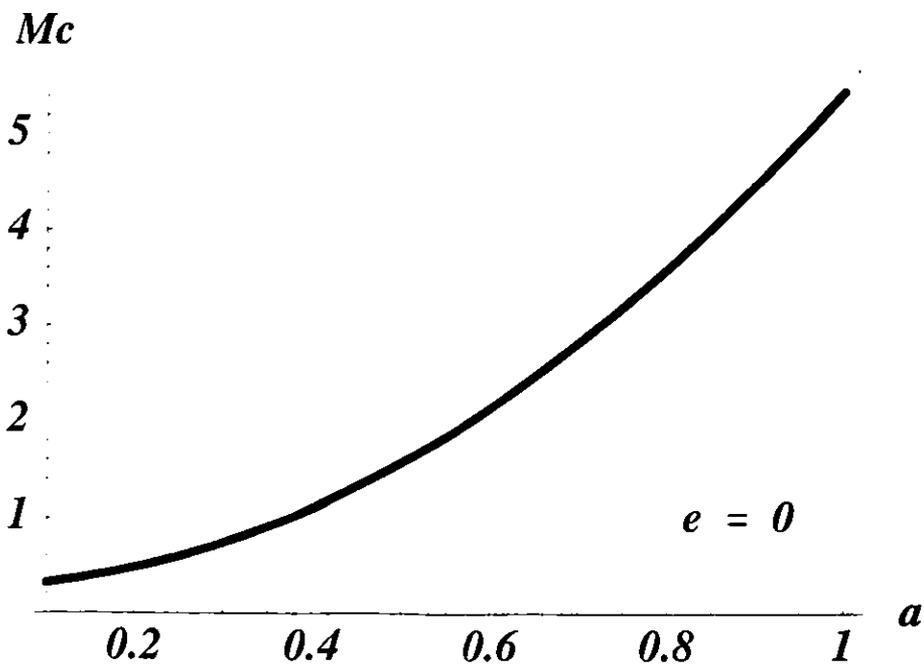


Figura 4.5 Masa crítica M_c para un hoyo negro rotante.

Conclusiones

En este trabajo se presenta una revisión de algunas de las ideas más cruciales sobre hoyos negros, desde la perspectiva de la teoría de cuerdas. Por falta de tiempo y espacio no se intentó hacer una revisión de toda la teoría de cuerdas, que está en libros de texto [2, 45, 46].

Se ha visto que la teoría de cuerdas proporciona una identificación de los grados de libertad que dan origen a la entropía de Bekenstein-Hawking, al menos para algunas soluciones de hoyos negros, las cuales son regulares en su horizonte de eventos.

Del principio de correspondencia entre hoyos negros y estados elementales de la cuerda resulta que la entropía de Bekenstein-Hawking (S_{bh}) es proporcional a la entropía de la cuerda (S_s). En principio este razonamiento cualitativo se puede aplicar a cualquier hoyo negro. Sin embargo, este principio nos da una interpretación de la entropía del hoyo negro, pero no nos da una interpretación del coeficiente numérico.

Existe una clase especial de hoyos negros, los cuales son soluciones de la teoría de supercuerdas. El límite a bajas energías de la teoría de supercuerdas es una teoría de supergravidad que admite soluciones de hoyos negros cargados extremos con masa y carga relacionados por $M = cQ$, que son los llamados estados *BPS*. Estos hoyos negros supersimétricos tienen área de horizonte cero, puesto que hay escalares que divergen en el horizonte. Para contruir soluciones con geometría bien definida en el horizonte, como las que aparecen en relatividad general, se necesita balancear los escalares en el horizonte. Algunos solitones no perturbativos de la teoría de cuerdas tienen cargas escalares que se pueden interpretar como presiones o tensiones en las direcciones compactas. Una representación de estos solitones son las *D-branas*.

Las *D-branas* aparecen como partículas cargadas en cuatro dimensiones. Esto nos permite contar los estados *BPS* y es posible explicar perfectamente la entropía del hoyo negro incluyendo al factor numérico ($\sim \frac{1}{4}$). Sin embargo, estos hoyos negros son ficticios desde el punto de vista de la termodinámica, puesto que no se evaporan. También es

posible calcular la entropía para hoyos negros cerca de extremos.

En la historia de la física de partículas se han dado muchos ejemplos de objetos los cuales se pensaba que eran elementales y más tarde se encontraba que estaban formadas por entidades más fundamentales. El hecho de que la entropía de los hoyos negros sea reproducida por el conteo de estados cuánticos sugiere que se han identificado los grados de libertad fundamentales, y no hay otro nivel de estructura "esperando" ser descubierto. Sin embargo, estos grados de libertad pueden tomar diferentes formas en diferentes límites de acoplamiento de la teoría.

También es posible calcular el análogo a la radiación de Hawking en un régimen a bajas energías. La radiación de Hawking se ve como una colisión de dos cuerdas abiertas moviéndose en direcciones opuestas sujetas a las branas que decaen en una cuerda cerrada y entonces se puede desalojar la brana. Estos resultados tienen implicaciones en la paradoja de la pérdida de información, puesto que la teoría de cuerdas nos proporciona una descripción unitaria de un sistema de cuerdas y D-branas.

Como pequeña generalización, se extrapola el concepto de horizonte extendido, muy útil cuando se habla de hoyos negros supersimétricos extremos (*BPS*) a los hoyos negros "normales" en cuatro dimensiones.

Se obtuvieron dos resultados. Primero, que en el exterior del horizonte de eventos de un hoyo negro estático la curvatura siempre es pequeña. Segundo, que el horizonte extendido no es un concepto muy útil para hoyos negros no supersimétricos en cuatro dimensiones, puesto que la masa crítica es del orden de la unidad en todos los casos. Esto significa físicamente que para un observador exterior sólo los modos cero de la cuerda pueden ser visibles.

Estos resultados en general son consistentes, dado que la temperatura cerca del horizonte de eventos de un hoyo negro clásico siempre es mucho más pequeña que la temperatura correspondiente de un hoyo negro supersimétrico extremo.

Como comentario final se puede agregar que los hoyos negros se han convertido en un excelente laboratorio teórico para entender algunas características de la gravedad cuántica. Se podría decir que estos son el *átomo de Hidrógeno* de la gravedad cuántica.

Apéndice A

Curvatura escalar para la métrica de Schwarzschild

De la métrica de Schwarzschild (1.3) vemos que los coeficientes contravariantes y covariantes están dados por:

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), & g^{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 g_{rr} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & g^{rr} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
 g_{\theta\theta} &= r^2, & g^{\theta\theta} &= r^{-2}, \\
 g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\theta, & g^{\varphi\varphi} &= r^{-2} \sin^{-2}\theta.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

De estas expresiones se pueden calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}). \tag{A.2}$$

Sustituyendo (A.1) en (A.2) los símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rt}^t &= -\Gamma_{rr}^r = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 \Gamma_{tt}^r &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{\Gamma_{\phi\phi}^r}{\sin^2\theta} = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{\theta}_{\theta r} &= \Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \cot \theta, \\
 \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ahora, el tensor de Riemann está dado por

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}. \tag{A.4}$$

Utilizando (A.3) vemos que las componentes del tensor de Riemann que no se anulan son:

$$\begin{aligned}
 R^t_{rtr} &= -2\frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 R^t_{\theta t\theta} &= \frac{R^t_{\phi t\phi}}{\sin^2\theta} = -\frac{m}{r}, \\
 R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= 2M\frac{\sin^2\theta}{r}, \\
 R^r_{\theta r\theta} &= \frac{R^r_{\phi r\phi}}{\sin^2\theta} = -\frac{M}{r}, \\
 R^r_{trt} &= -R^r_{trt} = -2\frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
 R^{\theta}_{t\theta t} &= R^{\phi}_{t\phi t} = \frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
 R^{\theta}_{r\theta r} &= R^{\phi}_{r\phi r} = -\frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= \frac{2M}{r}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Por tanto la curvatura escalar ($C = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$) es:

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} &= 4[(R_{trtr})^2(g^{tt})^2(g^{rr})^2 + (R_{\theta t\theta t})^2(g^{tt})^2(g^{\theta\theta})^2 + (R_{\phi t\phi t})^2(g^{tt})^2(g^{\phi\phi})^2] \\
 &+ (R_{\theta\phi\theta\phi})^2(g^{\phi\phi})^2(g^{\theta\theta})^2 + (R_{r\theta r\theta})^2(g^{rr})^2(g^{\theta\theta})^2 + (R_{r\phi r\phi})^2(g^{rr})^2(g^{\phi\phi})^2 \\
 &= 4\left[\frac{4M^2}{r^6}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 + \frac{M^2}{r^6}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\right. \\
 &+ \frac{M^2}{r^2}(\sin^4\theta\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2)(r^2\sin^2\theta)^{-2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} + 4M^2r^2\sin^4\theta r^{-4}(r^2\sin^2\theta)^{-2} \\
 &+ \left.\frac{M^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2r^{-4} + \frac{M^2}{r^2}\sin^4\theta\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2r^{-4}\sin^{-4}\theta\right] \\
 &= 48\frac{M^2}{r^6}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Apéndice B

Reducción dimensional de la teoría diez-dimensional

Considérese la teoría de cuerdas heterótica compactificada sobre un toro seis-dimensional [43]. La manera más simple de derivar la acción efectiva a bajas energías correspondiente a esta teoría es iniciar con la teoría de supergravedad $N = 1$ acoplada a la teoría de super Yang-Mills $N = 1$ en diez dimensiones, y reducir dimensionalmente la teoría de diez a cuatro dimensiones. Puesto que en un punto genérico sobre el espacio de módulos (campos especiales que representan esencialmente el tamaño y la forma del espacio compactificado) únicamente los campos de norma abelianos dan lugar a campos no masivos en cuatro dimensiones, es suficiente restringirse a la parte $U(1)^{16}$ del grupo de norma en diez dimensiones. La acción en diez dimensiones está dada por.

$$\frac{1}{32\pi} \int d^{10}z \sqrt{-G^{(10)}} \exp(-\Phi^{(10)}) (R^{(10)} + G^{(10)MN} \partial_M \Phi^{(10)} \partial_N \Phi^{(10)} - \frac{1}{12} H_{MNP}^{(10)} H^{(10)MNP} - \frac{1}{4} F_{MN}^{(10)I} F^{(10)IMN}), \quad (\text{B.1})$$

donde $G_{MN}^{(10)}$, $B_{MN}^{(10)}$, $A_M^{(10)I}$, y $\Phi^{(10)}$ son la métrica en diez dimensiones, el tensor de campo antisimétrico, los campos de norma $U(1)$ y el campo escalar dilatón respectivamente ($0 \leq M, N \leq 9$, $1 \leq I \leq 16$), y,

$$\begin{aligned} F_{MN}^{(10)I} &= \partial_M A_N^{(10)I} - \partial_N A_M^{(10)I} \\ H_{MNP}^{(10)} &= (\partial_M B_{NP}^{(10)} - \frac{1}{2} A_M^{(10)I} F_{NP}^{(10)I}) + \text{permutaciones cíclicas en M, N, P.} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Para la reducción dimensional es conveniente introducir los campos en cuatro dimensiones \hat{G}_{mn} , \hat{B}_{mn} , \hat{A}_m^I , Φ , $A_\mu^{(A)}$, $G_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$, ($1 \leq m \leq 6$, $0 \leq \mu \leq 3$, $1 \leq a \leq 28$), a través de las relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{mn} &= G_{m+3,n+3}^{(10)}, \quad \hat{B}_{mn} = B_{m+3,n+3}^{(10)}, \quad \hat{A}_m^I = A_{m+3}^{(10)I}, \\ A_\mu^{(m)} &= \frac{1}{2} \hat{G}^{mn} G_{n+3,\mu}^{(10)}, \quad A_\mu^{(I+12)} = -\left(\frac{1}{2} A_\mu^{(10)I} - \hat{A}_n^I A_\mu^{(n)}\right), \\ A_\mu^{(m+6)} &= \frac{1}{2} B_{(m+3)\mu}^{(10)} - \hat{B}_{mn} A_\mu^{(n)} + \frac{1}{2} \hat{A}_m^I A_\mu^{(I+12)}, \\ G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}^{(10)} - G_{(m+3)\mu}^{(10)} G_{(n+3)\nu}^{(10)} \hat{G}^{mn}, \\ B_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu}^{(10)} - 4 \hat{B}_{mn} A_\mu^{(m)} A_\nu^{(n)} - 2(A_\mu^{(m)} A_\nu^{(m+6)} - A_\nu^{(m)} A_\mu^{(m+6)}), \\ \Phi &= \Phi^{(10)} - \frac{1}{2} \ln \det \hat{G}, \quad 1 \leq m, n \leq 6, \quad 0 \leq \mu, \nu \leq 3, \quad 1 \leq I \leq 16. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde \hat{G}^{mn} denota la inversa de la matriz \hat{G}_{mn} . Ahora se combinan los campos escalares \hat{G}_{mn} , \hat{B}_{mn} y \hat{A}_m^I en un campo escalar M contenido en $O(6, 22)$, que toma valores matriciales. Para esto se consideran a \hat{G}_{mn} , \hat{B}_{mn} y \hat{A}_m^I como matrices de 6×6 , 6×6 , y 6×16 respectivamente, y $\hat{C}_{mn} = \frac{1}{2} \hat{A}_m^I \hat{A}_n^I$ como una matriz de 6×6 y se define a M como una matriz de 28×28 dada por la siguiente expresión:

$$M = \begin{pmatrix} \hat{G}^{-1} & \hat{G}^{-1}(\hat{B} + \hat{C}) & \hat{G}^{-1} \hat{A} \\ (-\hat{B} + \hat{C}) \hat{G}^{-1} & (\hat{G} - \hat{B} + \hat{C}) \hat{G}^{-1} (\hat{G} + \hat{B} + \hat{C}) & (\hat{G} - \hat{B} + \hat{C}) \hat{G}^{-1} \hat{A} \\ \hat{A}^T \hat{G}^{-1} & \hat{A} \hat{G}^{-1} (\hat{G} + \hat{B} + \hat{C}) & I_{16} + \hat{A}^T \hat{G}^{-1} \hat{A} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

que satisface

$$MLM^T = L, \quad M^T = M, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & I_6 & 0 \\ I_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{16} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

donde I_n denota la matriz identidad de $n \times n$.

La acción efectiva que gobierna la dinámica de los campos no masivos en la teoría en cuatro dimensiones se obtiene al sustituir las expresiones para los campos en diez dimensiones en términos de los campos en cuatro dimensiones en la ecuación (B.1), y tomando a todas las configuraciones de campo independientes de las coordenadas compactas. El resultado es:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-G} \exp \{-\Phi\} [R_G + G^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{12} G^{\mu\mu'} G^{\nu\nu'} G^{\rho\rho'} H_{\mu\nu\rho} H_{\mu'\nu'\rho'} \\
 & - G^{\mu\mu} G^{\nu'\nu'} F_{\mu\nu}^{(a)} (LML)_{ab} F_{\mu'\nu'}^{(b)} + \frac{1}{8} G^{\mu\nu} \text{Tr}(\partial_\mu ML \partial_\nu ML)] \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

donde

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)},$$

$$H_{\mu\nu\rho} = (\partial_\mu B_{\nu\rho} + 2A_\mu^{(a)} L_{ab} F_{\nu\rho}^{(b)}) + \text{permutaciones cíclicas de } \mu, \nu, \rho.$$

y R_G es la curvatura escalar asociada con la métrica en cuatro dimensiones $G_{\mu\nu}$. Para encontrar este resultado se toma $\int d^6y = 1$, donde y^m ($1 \leq m \leq 6$) denotan las coordenadas propias del toro en seis dimensiones.

Apéndice C

Horizonte extendido y termodinámica

El propósito de este apéndice es mostrar que en el punto en donde se localiza el horizonte extendido, definido en la ecuación (4.34), la temperatura local de Unruh es del orden de la temperatura de Hagedorn de la teoría de cuerdas. Para esto necesitamos obtener la versión euclídea de la métrica canónica (4.12), y también elegir un sistema de coordenadas apropiado, en el cual la parte ρ, t de la métrica sea no singular. Esto es:

$$t = i\tau, \quad \rho = r^2. \quad (\text{C.1})$$

La métrica canónica cerca de $\rho = 0$, entonces toma la forma:

$$ds_E^2 \simeq 4m_0(dr^2 + \frac{r^2}{4m_0^2}d\tau^2) + m_0r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.2})$$

La parte r, τ de la métrica describe un espacio no singular, a condición de que τ describa una coordenada periódica con período $4\pi m_0$:

$$\tau \equiv \tau + 4\pi m_0. \quad (\text{C.3})$$

El inverso de la temperatura local de Unruh ($\beta_{U_{nrüh}}$) es el período propio en la dirección de τ a un valor fijo de ρ (o r). Usando la métrica (C.2), se ve que en $\rho = \eta$, $\beta_{U_{nrüh}}$ está dada por:

$$\beta_{U_{nrüh}}(\eta) \simeq 4\pi\sqrt{m_0\eta} = 4\pi\sqrt{\frac{m_0 C}{g}}, \quad (\text{C.4})$$

donde se ha utilizado el valor de η dado en (4.34).

Para calcular la temperatura local de Hagedorn, es necesario tomar en cuenta el hecho de que el acoplamiento de la cuerda, $\exp(\Phi)$, no es una constante en el fondo del hoyo negro, sino que de hecho varía con ρ . En $\rho = \eta$ está dado por:

$$\exp(\Phi(\eta)) \simeq g^2 \frac{\eta}{m_0} = \frac{Cg}{m_0}. \quad (\text{C.5})$$

De esto resulta que

$$\beta_{\text{Hagedorn}}(\eta) = 4\pi(2 + \sqrt{2}) \exp\left(-\frac{\Phi(\eta)}{2}\right) = 4\pi(2 + \sqrt{2}) \sqrt{\frac{m_0}{Cg}}. \quad (\text{C.6})$$

Dado que $C \sim 1$, en el horizonte extendido la temperatura local de Unruh es del orden de la temperatura local de Hagedorn.

Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, [hep-th/9607235].
- [2] M. Green, J. Schwarz, y E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [3] A. Sen, 'Black hole solutions in heterotic string theory on a torus', Nucl. Phys. B440 (1995) 42 [hep-th/9411187].
- [4] L. Susskind, [hep-th/9309145].
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press (Chicago 1984).
- [6] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1990.
- [7] Hawking S. W. and Ellis G.F.R., *The Large Scale Structure of the Universe*. Cambridge University Press, 1973.
- [8] J.D. Bekenstein, Nuov. Cim. Lett. 4 (1972) 737; Phys. Rev., D7 (1973) 2333; Phys. Rev., D9 (1974) 3292.
- [9] Robert M. Wald, [gr-qc/9702022].
- [10] Hawking S. W., 1975, Commun. Math. Phys. 43, 199.
- [11] G. 't Hooft, [gr-qc/9711053].
- [12] Hawking S. W., 1976, Phys. Rev. D14, 2460.
- [13] Susskind L., 1993, Phys. Rev. Lett. 71, 2367 [hep-th/9307168].
- [14] Sascha Vongehr, [hep-th/9709172].

- [15] B. Carter in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. S. Hawking and W. Israel (Cambridge University 1979).
- [16] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Vol. II, Moscow, "Nauka", 1988 seventh edition.
- [17] Penrose, Hawking, "Relarge Scale State of Space Time". Cambridge Univ. Press.
- [18] G. T. Horowitz. [gr-qc/9704072].
- [19] 't Hooft G., 1990/91, Nucl. Phys. B335, 138/ Phys. Ser. T36, 247.
- [20] G. Horowitz and J. Polchinski, Phys. Rev. D55 (1997) 6189 [hep-th/9612146].
- [21] A. Strominger y C. Vafa, Phys. Lett. B379 (1996) 99 [hep-th/9601029].
- [22] Polchinski J., 1994, Phys. Rev. D50, 6041.
- [23] Polchinski J., 1995, Phys. Rev. Lett. 75, 4724 [hep-th/9510017].
- [24] Polchinski J., et. al., 1995 [hep-th/9602052].
- [25] Polchinski J., [hep-th/9611050].
- [26] J. Breckenridge, RR. Myers, A. Peet and C. Vafa, Phys. Lett. B391 (1997) 93 [hep-th/9602065].
- [27] J. Maldacena y A. Strominger, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 428 [hep-th/9603060].
- [28] C. Johnson, R. Khuri, y R. Myers, Phys. Lett. B378 (1996) 78 [hep-th/9603061].
- [29] M. Cvetic and D. Youm, Nucl. Phys. B472 (1996) 249 [hep-th/9512127].
- [30] C. Callan y J. Maldacena, Nucl. Phys. B472 (1996) 591 [hep-th/9602043].
- [31] J. Maldacena, Phys. Rev. D55 (1997) 7645 [hep-th/9611125].
- [32] Polchinski J., [hep-th/9607050].
- [33] Schwarz J. H., [hep-th/9509148].
- [34] Schwarz J. H., [hep-th/9601077].
- [35] R. Gregory y R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 2837; Nucl. Phys. B428 (1994) 399.

- [36] A. Sen, *Mod. Phys. Lett. A* **10** (1995) 2081-2084 [hep-th/9504147].
- [37] J. Russo, L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **437** (1995) 611 [hep-th/9405117].
- [38] C. Hull, P. Townsend, *Nucl. Phys. B* **438** (1995) 109 [hep-th/9410167].
- [39] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **443** (1995) 85 [hep-th/9503124].
- [40] A. Strominger, *Nucl. Phys. B* **451** (1995) 96 [hep-th/9504090].
- [41] A. Burinskii, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 5826 [hep-th/9504139].
- [42] K. Narain, H. Sarmadi and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 369.
- [43] A. Sen, *Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994) 3707 [hep-th/9402002].
- [44] G. Veneziano, *Strings '89: Proceedings*, R. Arnowitt, et. al. World Sci., Singapore. 1990 (86-103) [CERN-TH. 5366/89].
- [45] Bailin D. and Love A. *Supersymmetric Gauge Theory and String Theory*, Grad. Student Series in Physics, IOP Publishing, Bristol 1994.
- [46] Kaku M. *Introduction to Superstring*, Grad. texts in Contemporary Phys.. Springer Verlag. New York 1988.
- [47] G. Horowitz y D. Marolf, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 835 [hep-th/9605244]; *Phys. Rev. D* **55** (1997) 846 [hep-th/9606113].
- [48] G. Horowitz, D. Lowe, y J. Maldacena. *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 430 [hep-th/9603195].