



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIONES GEOMETRICAS DE LAS
TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EDGAR RAUL ACOSTA VILLASEÑOR

DIRECTOR DE TESIS: JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA



283613

2000



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"CARACTERIZACIONES GEOMETRICAS DE LAS TRANSFORMACIONES
DE MÖBIUS"

realizado por EDGAR RAUL ACOSTA VILLASEÑOR

con número de cuenta 9661624-2 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario M. EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

Propietario DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

Propietario DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

Suplente M. EN C. ANA IRENE RAMIREZ GALARZA

Suplente MAT. LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

Dedico esta tesis

*A mi mamá
por su amor
porque me enseñó a luchar
y ha hecho suya mi lucha*

*A mis hermanos Paty y Víctor,
a mi abuelita
que me acompañan aún en la distancia*

*A Toño, Pilar y Efraín
por su amistad y apoyo incondicionales*

*A Tere
por su amor y paciencia*

*A Víctor, Eli, Yuri e Itzel
por su apoyo y cariño*

Agradezco

*A Toño
su acertada dirección y confianza en mi*

*A Temístocles Rassias y a Piyapong Niamsup
sus sugerencias para realizar este trabajo*

*A Paz, Ana Irene, Javier y Luis
su comprensión y sugerencias*

*A mis amigos de todos los tiempos
Rodro, Pelayo, Eduardo (Nerd), Martha,
Luis Miguel, Julio, Sara, Juanjo, Omar,
César y Eli, Isa, Wario, Maru y Julio,
Vero, Lili, Felipe, Félix, etc...*

por su amistad

A la Olimpiada de Matemáticas

A la UAP

Índice General

Introducción	3
Capítulo 1. Preliminares	5
1.1. Esfera de Riemann	5
1.2. Funciones en \mathbb{C}_∞	7
1.3. Funciones racionales	10
1.4. Transformación racional lineal entera	12
1.5. Funciones conformes	14
1.6. Rectas y círculos en \mathbb{C}_∞	16
1.7. Transformación de inversión	18
1.8. Teoremas de geometría plana	25
Capítulo 2. Transformaciones de Möbius	31
2.1. Automorfismos de \mathbb{C}_∞	31
2.2. Generadores de $PGL(2, \mathbb{C})$	33
2.3. Razón cruzada y círculos	34
2.4. Inversión en círculos	37
2.5. Conjugación y clasificación de transformaciones de Möbius	39
Capítulo 3. Derivada de Schwarz	45
3.1. Derivada de Schwarz	45
3.2. Propiedades de la derivada de Schwarz	47
3.3. Relación entre la derivada de Schwarz y la razón cruzada	50
3.4. Derivada pre-Schwarziana	53
3.5. Derivada de Newton	54
Capítulo 4. Caracterizaciones Geométricas de las Transformaciones de Möbius	57

4.1. Transformaciones conformes	57
4.2. Transformaciones circulares	58
4.3. Razón cruzada	62
4.4. Suma de ángulos opuestos en cuadriláteros	63
4.5. Cuadriláteros de Apolonio	66
4.6. Puntos de Apolonio de un triángulo	70
4.7. Hexágonos de Apolonio	76
4.8. Otras caracterizaciones	82
Bibliografía	87

Introducción

Las transformaciones de Möbius, llamadas así en honor a August Ferdinand Möbius, tienen una gran cantidad de propiedades y aplicaciones tanto en el análisis real como en el complejo y en la geometría proyectiva. Estas transformaciones han permitido resolver una gran variedad de problemas y su estudio resulta, por demás, fascinante.

En nuestro trabajo estudiaremos las transformaciones de Möbius desde el punto de vista del análisis complejo, interesados principalmente en sus caracterizaciones geométricas, no obstante nos detendremos a estudiar muchas de sus propiedades y algunas de sus caracterizaciones analíticas.

En el capítulo 1 reunimos los resultados básicos de variable compleja y geometría plana y compleja que nos servirán de herramienta a lo largo del trabajo. Comenzamos introduciendo la esfera de Riemann como la compactación de un punto del plano complejo y a partir de ahí comenzamos a extender algunos de los conceptos y resultados clásicos del análisis complejo a la esfera de Riemann.

En el capítulo 2 nos concentramos en las transformaciones de Möbius, su estructura de grupo y sus propiedades geométricas. Se introduce la razón cruzada que nos permitirá entre otras cosas mostrar una versión del Principio de Reflexión de Schwarz más general que la mostrada en el capítulo 1. Concluimos el capítulo con la clasificación geométrica de las transformaciones de Möbius.

Las caracterizaciones analíticas de las transformaciones de Möbius son estudiadas en el capítulo 3. Introducimos tres operadores diferenciales, el más importante de estos es la derivada Schwarz. La caracterización de las transformaciones de Möbius mediante la derivada de Schwarz nos permitirá establecer, junto con un teorema de Ahlfors que relaciona la derivada de Schwarz con la razón cruzada, la caracterización analítica con la que demostraremos la mayoría de las caracterizaciones geométricas del capítulo 4.

Es precisamente en el capítulo 4 donde mostramos las caracterizaciones geométricas de las transformaciones de Möbius. Desde luego incluimos las caracterizaciones más conocidas de las transformaciones de Möbius: *son las únicas transformaciones meromorfas de la esfera de Riemann en sí misma que preservan ángulos dirigidos, preservan razón cruzada y envían círculos en círculos*. De una versión más débil de esta última caracterización incluimos también una demostración muy ilustrativa de János Aczél.

Presentamos una serie de caracterizaciones que tienen que ver con la preservación de propiedades de triángulos, cuadriláteros, y hexágonos, publicadas por Hiroshi Haruki y Temístocles Rassias en los últimos 10 años. Las demostraciones que presentamos difieren de las originales en que, en lugar de usar la caracterización analítica con la derivada de Schwarz, usamos otra caracterización analítica.

También, en la última sección, enunciamos otras caracterizaciones aún no publicadas que se deben a Piyapong Niamsup.

1 Preliminares

1.1. Esfera de Riemann

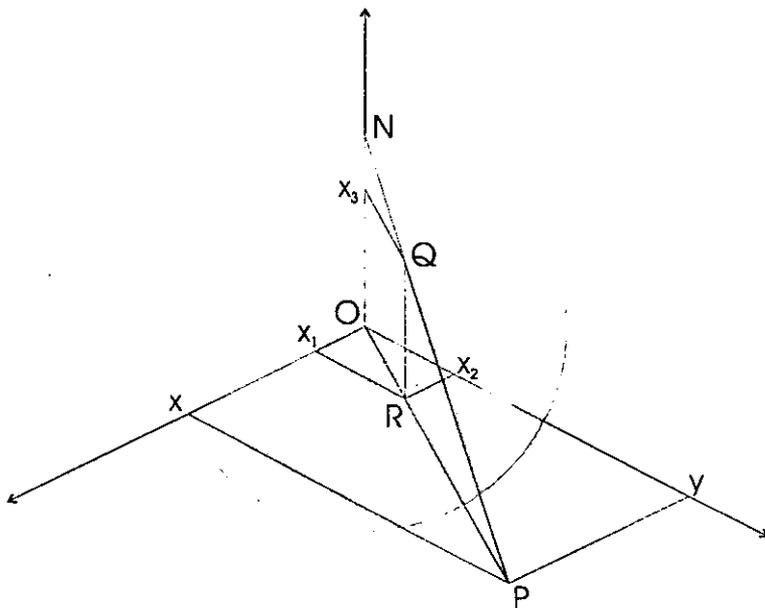
Consideremos la esfera unitaria en \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Para todo z en \mathbb{C} identifiquemos $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) con $(x, y, 0)$ en el plano $x_3 = 0$.

El centro de S^2 coincide con el origen de \mathbb{C} . Llamemos *polo norte* de S^2 al punto $N = (0, 0, 1)$.

Para cada punto $Q \in S^2$ con $Q \neq N$ tomemos la recta que une a N con Q y sea P la intersección de esta recta con el plano \mathbb{C} .



DEFINICIÓN 1.1. Llamamos *proyección estereográfica* desde N a la función $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ que manda al punto Q en el punto P .

Probemos que la función π es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y \mathbb{C} .

Sea $P = (x, y, 0)$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y sea $Q = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Como N , Q y P son colineales, proyectando en cada uno de los ejes tenemos

$$\frac{NP}{NQ} = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3},$$

donde R es la proyección de Q en el plano $x_3 = 0$.

Despejando x y y tenemos que

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3} \text{ y } y = \frac{x_2}{1 - x_3},$$

entonces $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$(1.1) \quad z = x + iy = \pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Ahora, como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$,

$$1 - x_3 = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1},$$

de donde $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ está dada por

$$(1.2) \quad x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \text{ y } x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Estas expresiones muestran que π y π^{-1} son continuas y por tanto π es un homeomorfismo.

Introducimos el símbolo ∞ (llamado *punto al infinito*) y definamos $\pi(N) = \infty$. De esta manera podemos extender π a una biyección $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es conocido como el *plano complejo extendido* o *esfera de Riemann* y lo denotamos por \mathbb{C}_∞ .

La principal ventaja de introducir el símbolo ∞ es que por medio de la biyección π podemos transferir propiedades algebraicas y topológicas de \mathbb{S}^2 a \mathbb{C}_∞ y viceversa.

Por ejemplo, podemos inducir una topología en \mathbb{C}_∞ definiendo los conjuntos abiertos de \mathbb{C}_∞ como las imágenes bajo π de los conjuntos abiertos de \mathbb{S}^2 (con la topología heredada de \mathbb{R}^3). En esta topología los conjuntos abiertos que no contienen a ∞ son los abiertos usuales de \mathbb{C} mientras que los que contienen a ∞ son de la forma

$(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ donde K es un conjunto compacto de \mathbb{C} . Con esta topología \mathbb{C}_∞ es un espacio topológico compacto y π un homeomorfismo.

Introduzcamos la *métrica cordal* en \mathbb{C}_∞ definida para cualesquiera dos puntos z_1 y z_2 por :

$$d_c(z_1, z_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|,$$

donde $\bar{x}_i = \pi^{-1}(z_i)$ y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 .

Una propiedad de los espacios métricos compactos es que cualquier sucesión de puntos contiene una subsucesión convergente. Por tanto, como la topología inducida por la métrica cordal coincide con la topología inducida por π , toda sucesión en \mathbb{C}_∞ contiene una subsucesión convergente.

1.2. Funciones en \mathbb{C}_∞

Deseamos hacer análisis y cálculo en \mathbb{C}_∞ . Si un subconjunto D de \mathbb{C}_∞ no contiene a ∞ , como $D \subseteq \mathbb{C}$, podemos hablar de funciones analíticas, meromorfas, polos de funciones, expansiones de Taylor, etc. en D . Nos gustaría poder hablar de las mismas propiedades para funciones definidas en ∞ . Para ello nos auxiliaremos de la función $J : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida como $J(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $J(0) = \infty$ y $J(\infty) = 0$. J es una biyección y J^2 es la identidad. En \mathbb{S}^2 , vía la proyección estereográfica π , J induce la transformación $\bar{J} = \pi^{-1} \circ J \circ \pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\bar{J}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$, que es una rotación de la esfera de 180 grados alrededor del eje x_1 .

Una función $f : D \subset \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida en una vecindad de ∞ es continua, analítica, meromorfa, etcétera, en ∞ , si la función $f \circ J$ tiene la propiedad correspondiente en cero.

Las funciones analíticas y meromorfas jugarán un papel primordial en el desarrollo de este trabajo, por lo cual detallaremos las definiciones correspondientes y analizaremos algunas de sus propiedades en \mathbb{C}_∞ .

DEFINICIÓN 1.2. Sea $A \subset \mathbb{C}_\infty$ un conjunto abierto que contiene a ∞ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, se dice que la función f es *analítica* en ∞ si

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z^{-1}) - f(\infty)}{z}$$

existe cuando $f(\infty) \in \mathbb{C}$, o bien si

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{J \circ f(z^{-1}) - J \circ f(\infty)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{zf(z^{-1})}$$

existe cuando $f(\infty) = \infty$.

Definimos una *región* R de \mathbb{C}_∞ como un subconjunto abierto, conexo, no vacío de \mathbb{C}_∞ .

TEOREMA 1.1. (Teorema de Identidad) Sean f y g dos funciones analíticas en una región R de \mathbb{C} . Sea $z_0 \in R$ tal que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para toda $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, donde $f^{(n)}$ representa la derivada n -ésima de f . Entonces $f = g$ en R .

DEMOSTRACIÓN. Sea $h(z) = f(z) - g(z)$, h es analítica en R , si $h^{(n)}(z_0) = 0$ para $n = 0, 1, \dots$, entonces alrededor de z_0 , $h(z)$ es idénticamente cero, ya que en alguna vecindad de z_0 ,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0.$$

Esto muestra que el conjunto $B = \{z \in R \mid h^{(n)}(z) = 0 \text{ para toda } n \in \{0, 1, \dots\}\}$ es abierto. Cada conjunto $S_n = \{z \in R \mid h^{(n)}(z) = 0\}$ es cerrado pues es la imagen inversa de $\{0\}$. Como $B = \bigcap S_n$, B es cerrado y no vacío. Por tanto B es un conjunto abierto, cerrado y no vacío de R , y como R es conexo, concluimos que $B = R$. De manera que $h(z) = 0$ en R y finalmente $g(z) = f(z)$ en R . \square

TEOREMA 1.2. (Principio de Continuación Analítica) Sea f una función analítica en una región R de \mathbb{C}_∞ . Si f tiene una sucesión de ceros $\{z_n\}$ en R , cuyo límite $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ está en R , entonces f es idénticamente cero en R .

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero este resultado para una región R de \mathbb{C} . Como f es continua, $f(z^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. Si f no es idénticamente cero podemos desarrollar f como una serie de potencias alrededor de z^* ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z^*)^n,$$

donde no todos los coeficientes a_n valen 0. Sea a_m el primer coeficiente distinto de 0, entonces podemos ver f como

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z^*)^n = (z - z^*)^m g(z),$$

donde $g(z)$ es analítica en R y $g(z^*) = a_m \neq 0$.

Supongamos que $|g(z^*)| = 2\epsilon$. Como g es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z^*| < \delta$ entonces $|g(z) - g(z^*)| < \epsilon$. Entonces en el disco $|z - z^*| < \delta$,

$$\|g(z) - 2\epsilon\| = \|g(z) - g(z^*)\| \leq |g(z) - g(z^*)| < \epsilon,$$

de donde resulta que $|g(z)| > \epsilon$ para todo z en este disco. Es decir $f(z) \neq 0$ en todo un disco abierto alrededor de z^* , pero esto contradice la hipótesis de que z^* es el límite de una sucesión de ceros de f . Por tanto f es idénticamente cero en

una vecindad de z^* , significando que $f^{(n)}(z^*) = 0$ para toda $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, y por el Teorema de Identidad (1.1) f es idénticamente 0 en R .

Si $R \subseteq \mathbb{C}_\infty$, hemos probado el caso en que $\infty \notin R$ y $z^* \neq \infty$. Sólo nos queda probar el resultado cuando $\infty \in R$ o $z^* = \infty$. Si $\infty \in R$ y $z^* \neq \infty$, por la parte anterior f es idénticamente 0 en $\tilde{R} = R \setminus \{\infty\}$, una vecindad de ∞ , y como f es analítica en ∞ , por continuidad, $f(\infty) = 0$. Por tanto f es idénticamente 0 en R .

Ahora supongamos que $z^* = \infty$. Omitiendo quizás un número finito de términos, podemos suponer que cada $z_n \neq 0$. Como f es analítica en la región $\tilde{R} = R \setminus \{0\}$, $f \circ J$ es analítica en la región $R^* = \{z^{-1} \mid z \in \tilde{R}\}$ y sus ceros son los puntos $\frac{1}{z_n}$ cuyo límite es el punto $\frac{1}{z^*} = 0$. Por tanto $f \circ J$ se anula en R^* , pero eso ocurre si y sólo si $f(z)$ se anula para todo z en \tilde{R} . Si $R = \tilde{R}$ hemos terminado, y si $0 \in R$, entonces como f es idénticamente 0 en una vecindad de 0, por continuidad, f es idénticamente 0 en R . \square

COROLARIO 1. *Los ceros de una función analítica no constante son aislados.*

DEMOSTRACIÓN. Sea c un cero de la función f analítica no constante en una región R . Si c no estuviera aislado, en cualquier vecindad de c existe un cero distinto de c . Esta propiedad garantiza la existencia de una sucesión de ceros de f que converge a c , pero la existencia de tal sucesión implica que f es idénticamente 0 en R , contradiciendo que f es no constante. \square

Sea $a \in \mathbb{C}_\infty$ y f una función analítica en una vecindad agujerada V de a , si $(z - a)^k f(z)$ es analítica en $V \cup \{a\}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, pero f no es analítica en a , decimos que a es un *polo* de f y definimos $f(a) = \infty$. De esta manera los polos de f corresponden a los ceros de $J \circ f$. La mínima k que satisface que $(z - a)^k f(z)$ sea analítica en $V \cup \{a\}$ se conoce como el *orden del polo* a .

DEFINICIÓN 1.3. Una función $f : R \subseteq \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ analítica, excepto para sus polos en la región R , es llamada *meromorfa* en R .

Supongamos que f es no constante y que es analítica en $a \in \mathbb{C}$, con $f(a) = c \in \mathbb{C}$, entonces $f^{(k)}(a) \neq 0$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Llamamos *multiplicidad* de la solución de la ecuación $f(z) = c$ en el punto a a la mínima k tal que $f^{(k)}(a) \neq 0$, debido a que alrededor de a , para esta k , tenemos

$$f(z) - c = (z - a)^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z - a)^{j-k}, \quad \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0.$$

Si f es meromorfa con un polo de orden k en a , decimos que a es solución de $f(z) = \infty$ con multiplicidad k . Finalmente si $a = \infty$, decimos que ∞ es solución de $f(z) = c \in \mathbb{C}_\infty$ de multiplicidad k si 0 es solución de $f \circ J(z) = c$ con multiplicidad k .

De aquí que si $f'(a) \neq 0$ para alguna $a \in \mathbb{C}_\infty$, entonces $f(z)$ es inyectiva en una vecindad de a .

Del Corolario anterior y la definición multiplicidad obtenemos un segundo Corolario.

COROLARIO 2. Una función meromorfa no constante $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ toma cada valor $c \in \mathbb{C}_\infty$ sólo un número finito de veces, contando multiplicidades.

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in \mathbb{C}_\infty$ tal que $f(w) = c$, entonces existe una vecindad N_w de w tal que $f(z) \neq c$ para todo $z \in N_w \setminus \{w\}$ ya que: si $c = \infty$, w es un polo de f y, por definición, los polos de una función son aislados; si $c \neq \infty$, w es cero de la función $f(z) - c$, que es analítica en w y por tanto analítica en una vecindad de w , entonces, por el Corolario 1, w es un cero aislado de $f(z) - c$. Como \mathbb{C}_∞ es compacto lo podemos cubrir con una cantidad finita de vecindades N_{w_1}, \dots, N_{w_k} , así que $f^{-1}(c) \subseteq \{w_1, \dots, w_k\}$ es un conjunto finito y, como cada solución tiene multiplicidad finita, $f(z)$ toma el valor c solamente un número finito de veces. \square

1.3. Funciones racionales

DEFINICIÓN 1.4. Una *función racional* es una función de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y $q(z)$ no es el polinomio 0. Cuando $z \in \mathbb{C}$ y $q(z) \neq 0$, $f(z)$ es un número complejo; cuando $q(z) = 0$ o $z = \infty$ definimos $f(z) = \lim_{z' \rightarrow z} f(z')$. Así $f(z)$ es una función de \mathbb{C}_∞ en \mathbb{C}_∞ .

Dos polinomios $p(z)$ y $q(z)$ son *primos relativos* si no existe un polinomio no constante $r(z)$ que divida tanto a $p(z)$ como a $q(z)$. Siempre que hablemos de una transformación racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ supondremos que $p(z)$ y $q(z)$ son primos relativos pues cualquier transformación racional se puede reducir a una con $p(z)$ y $q(z)$ primos relativos cancelando factores comunes.

TEOREMA 1.3. Una función $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es racional si y sólo si f es meromorfa en \mathbb{C}_∞ .

DEMOSTRACIÓN. Si f es racional entonces es analítica excepto en ∞ y en los ceros de $q(z)$ que, por ser un polinomio, son un número finito de puntos. En ∞ , f es analítica si $\text{grad}(p) \leq \text{grad}(q)$, mientras que si $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$, f tiene un polo de orden $\text{grad}(p) - \text{grad}(q)$. En un cero de $q(z)$, f tiene un polo de orden la multiplicidad del cero. De manera que los puntos donde f no es analítica son polos, por tanto f es meromorfa.

Recíprocamente, si f es meromorfa, por el Corolario 2, tiene un número finito de polos en \mathbb{C} . Sean β_1, \dots, β_n los polos de ordenes k_1, \dots, k_n respectivamente, entonces la función

$$g(z) = (z - \beta_1)^{k_1} (z - \beta_2)^{k_2} \dots (z - \beta_n)^{k_n} f(z)$$

es analítica en \mathbb{C} y su desarrollo de Taylor alrededor de 0

$$g(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

es válido para toda $z \in \mathbb{C}$. Como f es meromorfa en ∞ , g también lo es. Entonces

$$(g \circ J)(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots$$

es meromorfa en 0, lo que implica que $a_j = 0$ para j suficientemente grande ya que los polos son de orden finito. Es decir, $g(z)$ es un polinomio, y con esto concluimos que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \beta_1)^{k_1} (z - \beta_2)^{k_2} \dots (z - \beta_n)^{k_n}}$$

es una función racional. □

DEFINICIÓN 1.5. Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional con $p(z)$ y $q(z)$ primos relativos, definimos el *grado* de f como el máximo de los grados de $p(z)$ y $q(z)$, y lo denotamos por $\text{grad}(f)$.

TEOREMA 1.4. Si $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función racional de grado $d > 0$, entonces f toma cada valor $c \in \mathbb{C}_\infty$ exactamente d veces, contando multiplicidades.

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función racional con $p(z)$ y $q(z)$ primos relativos. Si $c = \infty$, $f(z) = \infty$ para $z \in \mathbb{C}$ sólo si $q(z) = 0$, y por el Teorema fundamental del álgebra esta ecuación tiene sólo $\text{grad}(q)$ soluciones contando multiplicidades. Si $\text{grad}(p) \leq \text{grad}(q)$ estos son los únicos polos de f , mientras que, si $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$, f tiene un polo adicional en ∞ de multiplicidad $\text{grad}(p) - \text{grad}(q)$. En ambos casos el número de soluciones de $f(z) = \infty$, contando multiplicidades, es $\text{grad}(f) = \text{máx}\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\}$.

Si $c \neq \infty$, como $\text{grad}(f) > 0$, f no es la función constante c , entonces la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - cq(z)},$$

es una función racional. Además $q(z)$ y $p(z) - cq(z)$ son primos relativos, ya que si existe algún factor común $r(z)$ de estos dos polinomios, como $r(z)$ divide a $q(z)$ y a $p(z) - cq(z)$, entonces $r(z)$ divide a $p(z)$, pero $p(z)$ y $q(z)$ son primos relativos, una contradicción. Además $\text{grad}(g) = \text{máx}\{\text{grad}(q), \text{grad}(p - cq)\}$, pero $\text{grad}(p - cq) = \text{máx}\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\}$, por tanto $\text{grad}(g) = \text{grad}(f)$. Como los polos de $g(z)$ son precisamente las soluciones de $f(z) = c$, por el caso anterior, hay $\text{grad}(g) = \text{grad}(f)$ soluciones, contando multiplicidades. □

1.4. Transformación racional lineal entera

DEFINICIÓN 1.6. Una *transformación racional lineal entera* es una función racional de la forma $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Observemos que en \mathbb{R}^2 las transformaciones afines $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son de la forma $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ con cada $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

Si asociamos el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la transformación $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se vería como

$$g(z) = (a_{11} + ia_{21})x + (a_{12} + ia_{22})y + (b_1 + ib_2)$$

Recordemos que el vector $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ es la imagen bajo g de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que $\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ es la imagen de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. También recordemos que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y que $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Así podemos escribir a g , haciendo $b = b_1 + ib_2$, como

$$\begin{aligned} g(z) &= (a_{11} + ia_{21}) \frac{z+\bar{z}}{2} + (a_{12} + ia_{22}) \frac{z-\bar{z}}{2i} + b \\ &= g(1) \frac{z+\bar{z}}{2} + g(i) \frac{z-\bar{z}}{2i} + b \\ &= \frac{g(1) - ig(i)}{2} z + \frac{g(1) + ig(i)}{2} \bar{z} + b \end{aligned}$$

Para que g sea una transformación racional lineal entera requerimos:

$$g(1) - \frac{g(i)}{i} = 0$$

Pero $g(1) + ig(i) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{11} = a_{22}$ y $a_{12} = -a_{21}$.

Por tanto, una transformación afín $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación racional lineal entera si y sólo si es de la forma $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

De manera similar, cualquier transformación lineal $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma $h(z) = az + b\bar{z}$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

TEOREMA 1.5. (a) En \mathbb{C} la transformación $f(z) = z + b$, con $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$, es una traslación de longitud $|b|$ en la dirección $\arg b$.

(b) En \mathbb{C} la transformación $f(z) = az$, con $a \neq 0$, es la composición de una rotación de ángulo $\arg a$ alrededor de 0 con una homotecia de razón $|a|$ con centro en 0.

(c) En \mathbb{C} la transformación racional lineal entera $f(z) = az + b$, con $a, b \neq 0$, es la composición de una rotación de ángulo $\arg a$ alrededor de 0 con una homotecia de razón $|a|$ con centro en 0, seguidas por una traslación de longitud $|b|$ en la dirección $\arg b$.

DEMOSTRACIÓN. La parte (a) es una consecuencia natural de que la suma de dos puntos en \mathbb{C} es equivalente a la suma vectorial en el plano complejo.

Para la parte (b) tomemos $a = Ae^{i\alpha}$ y $z = re^{i\theta}$, es claro que $f(z) = Ae^{i\alpha}re^{i\theta} = A re^{i(\theta+\alpha)}$ representa una rotación de ángulo $\alpha = \arg a$ alrededor de 0 compuesta con una homotecia de razón $A = |a|$ con centro en 0. \square

DEFINICIÓN 1.7. Definimos una *transformación de semejanza directa* como una transformación que envía cualquier triángulo ABC en uno semejante $A'B'C'$, de manera que el recorrido de los vértices correspondientes se hace en el mismo sentido (esto es, si preserva orientación). Una transformación de semejanza es indirecta si no es de semejanza directa.

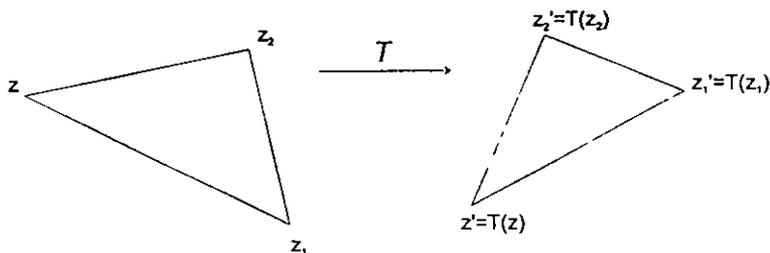
Ejemplos de transformaciones de semejanza directa son las traslaciones, rotaciones, homotecias y en general las transformaciones racionales lineales enteras.

LEMA 1.1. Una transformación racional lineal entera está determinada en forma única por dos parejas de puntos correspondientes.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que dos parejas distintas de puntos correspondientes determinan de forma única los coeficientes a y b de $z' = az + b$. \square

TEOREMA 1.6. Una transformación de semejanza directa está determinada en forma única por dos parejas distintas de puntos correspondientes.

DEMOSTRACIÓN. Sea T una transformación de semejanza directa y sean z_1, z'_1 y z_2, z'_2 dos parejas distintas de puntos correspondientes, dado cualquier otro punto z , existe un único punto z' tal que el triángulo $z'z'_1z'_2$ es directamente semejante con el triángulo zz_1z_2 . Dado que T es de semejanza directa $T(z) = z'$, pues de otra manera z' no sería único. \square



TEOREMA 1.7. *Toda transformación de semejanza directa es una transformación racional lineal entera.*

DEMOSTRACIÓN. Sea T una transformación de semejanza directa y sean $z_1, T(z_1)$ y $z_2, T(z_2)$ dos parejas distintas de puntos correspondientes. Estas dos parejas de puntos correspondientes determinan de forma única una transformación racional lineal entera $f(z) = az + b$, de manera que $f(z_1) = T(z_1)$ y $f(z_2) = T(z_2)$. Como f es de semejanza directa tenemos que dado cualquier otro punto z , el triángulo zz_1z_2 es directamente semejante con el triángulo $f(z)T(z_1)T(z_2)$ y con el triángulo $T(z)T(z_1)T(z_2)$, lo cual significa que $T(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ \square

DEFINICIÓN 1.8. Un punto que es dejado invariante bajo una transformación es llamado *punto fijo* de la transformación.

Por ejemplo, la transformación racional lineal entera $f(z) = az + b$ tiene a $z_0 = \frac{b}{1-a}$ como único punto fijo si $a \neq 1$.

TEOREMA 1.8. *La transformación racional lineal entera $f(z) = az + b$, con $a \neq 0, 1$, es la composición de una rotación de ángulo $\arg a$ con una homotecia de razón $|a|$, ambas con respecto al punto fijo de f .*

DEMOSTRACIÓN. Sea z_0 el punto fijo de f , entonces $f(z) - z_0 = f(z) - f(z_0) = az + b - (az_0 + b) = a(z - z_0)$. El resultado se sigue del Teorema 1.5. \square

1.5. Funciones conformes

En la sección 1.4 vimos que una función lineal, en el sentido real, de \mathbb{C} en sí mismo es de la forma $g(h) = ah + b\bar{h}$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Diremos que una transformación lineal inyectiva $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es *conforme* (o conserva ángulos) si y sólo si $|z||w|\langle g(z), g(w) \rangle = |g(z)||g(w)|\langle z, w \rangle$ para toda $z, w \in \mathbb{C}$, donde $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w})$ es el producto interno en \mathbb{C} .

LEMA 1.2. *Una transformación lineal inyectiva $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es conforme si y sólo si $g(z)$ es de la forma $g(z) = az$ o $g(z) = a\bar{z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero sea $g(z)$ conforme, sea $a = g(1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $c = a^{-1}g(i) \in \mathbb{C}$, de esta manera

$$0 = \langle i, 1 \rangle = \langle g(i), g(1) \rangle = \langle ac, a \rangle = |a|^2 \operatorname{Re} c,$$

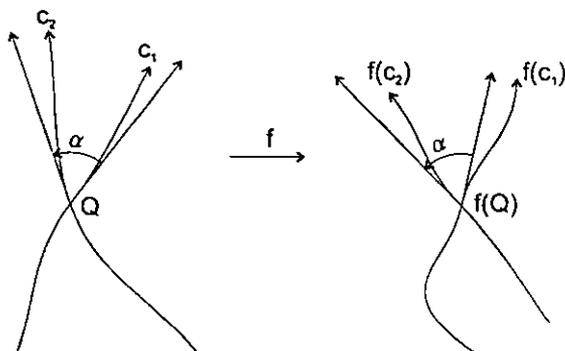
Es decir que $c = ir, r \in \mathbb{R}$. Entonces $g(z) = g(1)x + g(i)y = a(x + iry)$ y así $\langle g(1), g(z) \rangle = \langle a, a(x + iry) \rangle = |a|^2 x$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Como

$$|1||z| \langle g(1), g(z) \rangle = |x + iy| |a|^2 x = |g(1)| |g(z)| \langle 1, z \rangle = |a| |a(x + iry)| x,$$

obtenemos que $|x + iy| = |x + iry|$, entonces $r = \pm 1$. Por tanto $g(z) = az$ o $g(z) = a\bar{z}$.

Recíprocamente, si $g(z) = az$, entonces $|z| |w| \langle g(z), g(w) \rangle = |z| |w| |a|^2 \langle z, w \rangle = |g(z)| |g(w)| \langle z, w \rangle$; análogamente si $g(z) = a\bar{z}$. \square

Supongamos que dos curvas diferenciables c_1 y c_2 se intersectan en un punto P , definimos el *ángulo* entre c_1 y c_2 en P como el ángulo formado por los vectores tangentes a c_1 y a c_2 en P .



Una función diferenciable en el sentido real $f : R \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *conforme*, o que conserva ángulos, en un punto $P \in R$ si la derivada real $df_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una transformación lineal inyectiva que conserva ángulos.

Desde luego sucederá que si c_1 y c_2 son dos curvas diferenciables que pasan por P formando (sus vectores tangentes) un ángulo α , entonces las curvas imagen $f(c_1)$ y $f(c_2)$ pasarán por $f(P)$ y (sus vectores tangentes) formarán un ángulo α .

Se dirá que f es conforme en una región R si lo es en cada punto de R .

No es difícil probar que si $f : R \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido real en $P \in R$, entonces $df_P(h) = f_z(P)h + f_{\bar{z}}(P)\bar{h}$, donde $f_z(P) = \frac{1}{2}(df_P(1) - idf_P(i))$ y $f_{\bar{z}}(P) = \frac{1}{2}(df_P(1) + idf_P(i))$. Además $f_{\bar{z}}(P) = 0$ si y sólo si f es diferenciable en el sentido complejo en P y $f_z(P) = 0$ si y sólo si \bar{f} es diferenciable en el sentido complejo.

Por lo que f es conforme en P si y sólo si $f_{\bar{z}}(P) = 0$ o $f_z(P) = 0$ si y sólo si f es diferenciable en P o \bar{f} es diferenciable en P .

Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ es una función diferenciable (en el sentido de \mathbb{R}^2) diremos que f es *directamente conforme* en P si es conforme y preserva orientación, es decir,

si $\det \begin{pmatrix} u_x(P) & u_y(P) \\ v_x(P) & v_y(P) \end{pmatrix} = |f_z(P)|^2 - |f_{\bar{z}}(P)|^2 > 0$. Esto equivale a decir que si α es el ángulo formado por (los vectores tangentes a) dos curvas c_1 y c_2 en un punto común P , medido de c_1 a c_2 , entonces el ángulo formado por (los vectores tangentes a) $f(c_1)$ y $f(c_2)$ en $f(P)$ es α , medido de $f(c_1)$ a $f(c_2)$.

Tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.9. (Teorema del Mapeo Conforme) *Si R es una región, entonces una función $f : R \subset \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es directamente conforme en R si y sólo si f es analítica y $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función directamente conforme en R , entonces $|f_z(P)|^2 - |f_{\bar{z}}(P)|^2 > 0$ para cada $P \in R$, pero como f es conforme en R tenemos que $f_{\bar{z}}(P) = 0$ o $f_z(P) = 0$ para cada $P \in R$, de donde $f_{\bar{z}}(P) = 0$ y $f_z(P) \neq 0$ para cada $P \in R$, y esto pasa si y sólo si f es analítica en R . Entonces $f'(P) = df_P = f_z(P)$ para cada $P \in R$, con lo que resulta claro que $f'(P) \neq 0$ para toda $P \in R$.

Recíprocamente, si f es analítica en R y $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$. Como f es analítica en R tenemos que $f_{\bar{z}}(P) = 0$, es decir que $f_z(P) = f'(P) \neq 0$, para toda $P \in R$, por lo que $|f_z(P)|^2 - |f_{\bar{z}}(P)|^2 = |f_z(P)|^2 > 0$. \square

Para finalizar esta sección observemos que, en vista del último teorema y del teorema de la función inversa, si f es conforme en z_0 , existe una vecindad de z_0 en la que f es una biyección.

1.6. Rectas y círculos en \mathbb{C}_∞

Un *círculo* en \mathbb{S}^2 es la intersección en \mathbb{R}^3 de un plano $\mathcal{P} : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ con \mathbb{S}^2 . Para que un plano \mathcal{P} determine un círculo es necesario que $|\mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2| > 1$.

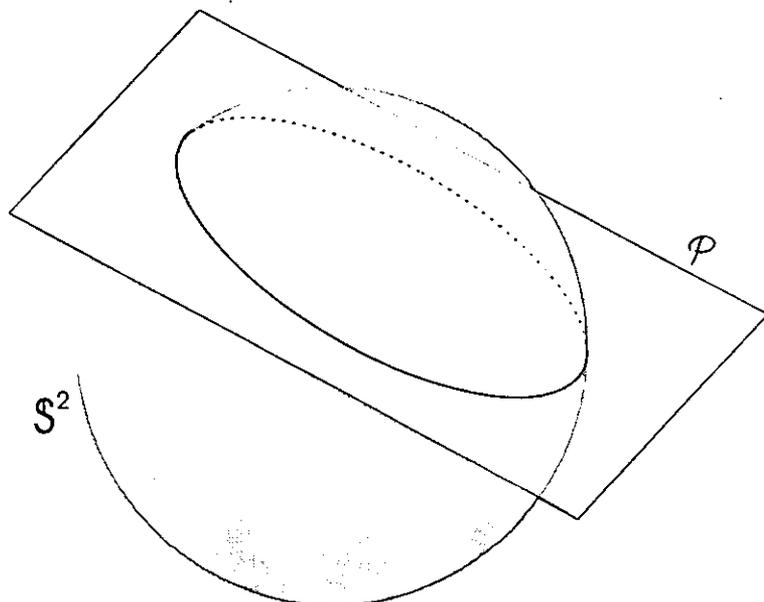
DEFINICIÓN 1.9. Definimos un *círculo* en \mathbb{C}_∞ como la imagen bajo la proyección estereográfica de un círculo en \mathbb{S}^2 .

Sean $C = \pi(\mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2)$ un círculo en \mathbb{C}_∞ y $Q = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2$. Si $P = \pi(Q) = (x, y, 0) = z$, por las ecuaciones (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} z \in C &\Leftrightarrow 2Ax + 2By + C(|z|^2 - 1) + D(|z|^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow A(z + \bar{z}) - iB(z - \bar{z}) + z\bar{z}(C + D) + (D - C) = 0. \end{aligned}$$

Si hacemos $a = C + D$, $b = A - iB$ y $c = D - C$ obtenemos la expresión

$$(1.3) \quad az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0.$$



La condición $|\mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2| > 1$ se satisface si y sólo si $A^2 + B^2 + C^2 > D^2$ o equivalentemente si $|\bar{b}|^2 > ac$.

Una *línea recta* en \mathbb{C} queda completamente determinada por un punto z_0 sobre la recta y la dirección $i\bar{b}$ de la recta (\bar{b} es la dirección perpendicular a la recta) como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$(1.4) \quad bz + \bar{b}\bar{z} = bz_0 + \bar{b}\bar{z}_0,$$

y si hacemos $c = -(bz_0 + \bar{b}\bar{z}_0)$ obtenemos la expresión

$$(1.5) \quad bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,$$

que es la ecuación de un círculo en \mathbb{C}_∞ con $a = 0$, es decir que $C = -D$, y por tanto N , el polo norte de \mathbb{S}^2 , pertenece a \mathcal{P} . De esta manera las rectas en \mathbb{C} son círculos en \mathbb{C}_∞ que pasan por ∞ .

Ahora pensemos en un círculo \mathcal{D} en \mathbb{C} de radio r y centro z_0

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow |z - z_0| = r \\ &\Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + (|z_0|^2 - r^2) = 0. \end{aligned}$$

Donde la última expresión es precisamente la de un círculo en \mathbb{C}_∞ , con la particularidad de que $a = 1$. Inversamente, podemos encontrar el centro y el radio de un círculo dado en la forma (1.3) pues si $a \neq 0$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} z \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left| z + \frac{\bar{b}}{a} \right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}. \end{aligned}$$

$|b|^2 - ac > 0$, por tanto el círculo $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ tiene centro $-\frac{\bar{b}}{a}$ y radio $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$.

En resumen, expresiones de la forma $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ con $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ y $|b|^2 > ac$ representan círculos. Si $a \neq 0$, resultan círculos euclidianos con centro $-\frac{\bar{b}}{a}$ y radio $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$; y si $a = 0$, son líneas euclidianas con vector normal \bar{b} .

1.7. Transformación de inversión

Notemos primero que la transformación $f(z) = \bar{z}$ representa la reflexión en el eje real. En efecto, para $z = a + ib$, tenemos que el segmento entre $f(z) = \bar{z} = a - ib$ y z es perpendicular al eje real y que sus distancias al eje real son iguales a $|b|$.

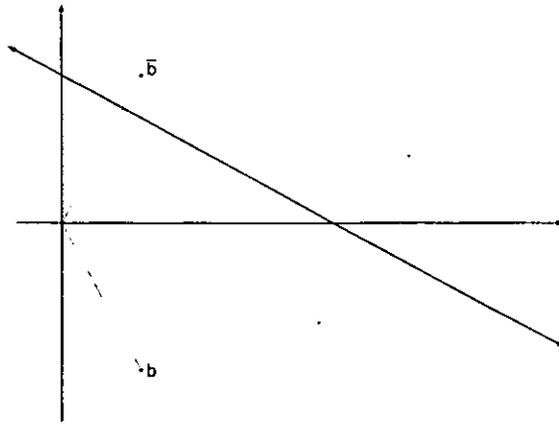
Ahora veamos cómo es la reflexión respecto a cualquier línea recta.

TEOREMA 1.10. *La transformación $f(z) = -\frac{\bar{b}z+c}{b}$ representa la reflexión en la recta $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea l la recta respecto de la cual vamos a reflejar y z_0 el punto que deseamos reflejar. Notemos que $c \in \mathbb{R}$ y que la distancia de la recta $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ a un punto w está dada por $\frac{|bw + \bar{b}\bar{w} + c|}{2|b|}$. El punto de l más cercano al origen es $-\frac{\bar{b}c}{2|b|^2}$, el punto sobre la dirección \bar{b} que dista $\frac{|c|}{2|b|}$ del origen. Traslademos todo \mathbb{C}_∞ mediante la transformación $T(z) = z + \frac{\bar{b}c}{2|b|^2}$ que manda a l en la recta l' dada por la ecuación $bT(z) + \bar{b}\overline{T(z)} = 0$. Ahora, para llevar la recta l' en el eje real necesitamos girar todo \mathbb{C}_∞ de manera que \bar{b} quede sobre i , y esto se logra mediante la transformación $R(z) = \frac{ib}{|\bar{b}|}z$. Ahora podemos reflejar $(R \circ T)(z_0) = \frac{i}{|\bar{b}|}(2bz_0 + c)$ en el eje real y aplicar las transformaciones inversas para enviar al eje real en l y obtener el reflejo de z_0 en l . Esto es, aplicar

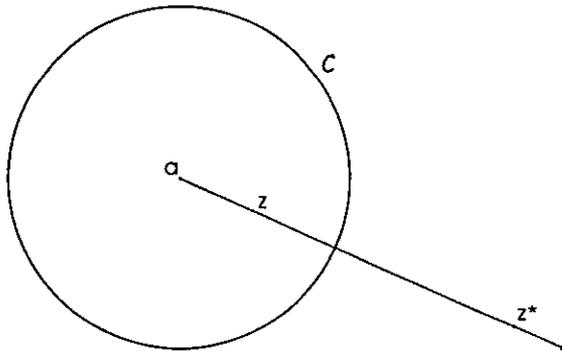
$$(T^{-1} \circ R^{-1})(z) = \frac{|b|z}{ib} - \frac{\bar{b}c}{2|b|^2} = \frac{2|b|z - ic}{2ib}$$

a $\overline{(R \circ T)(z_0)} = -\frac{i}{2|b|}(2\bar{b}z_0 + c)$ para obtener $-\frac{\bar{b}z_0 + c}{b}$. \square



Observemos que, como ∞ pertenece a todas las rectas de \mathbb{C} , la reflexión de ∞ en cualquier recta es él mismo.

DEFINICIÓN 1.10. Dado un círculo C en \mathbb{C} de radio r y centro $a \in \mathbb{C}$, la transformación de *inversión* en C es la biyección $I_C : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que envía a cada punto $z \neq a \in \mathbb{C}$ en el punto z^* sobre el rayo que parte de a y pasa por z , de manera que $|z - a||z^* - a| = r^2$, $I_C(a) = \infty$ y $I_C(\infty) = a$. Al punto z^* lo llamamos el *inverso* de z .



Notemos que z es el punto inverso de z^* y que una transformación de inversión, vista como función, es su propia función inversa.

LEMA 1.3. La transformación $f(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$ representa la inversión en el círculo C de radio r y centro en 0.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z = ke^{i\theta}$, entonces

$$f(z) = \frac{r^2}{k} e^{i\theta}$$

claramente z y $f(z)$ están sobre el mismo rayo que parte de 0 y $|zf(z)| = r^2$. Además $f(0) = \infty$ y $f(\infty) = 0$. \square

TEOREMA 1.11. *La transformación $f(z) = a + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}$ representa la inversión en el círculo C de radio r y centro a .*

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $f = T^{-1} \circ I \circ T$, donde T es la transformación $T(z) = z - a$ que lleva el centro de C al origen; e $I(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$ es la inversión en el círculo de radio r centrado en el origen. \square

Notemos que dado un círculo C con $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, la inversión en C está dada por la transformación

$$f(z) = -\frac{\bar{b}}{a} + \frac{|b|^2 - ac}{a(a\bar{z} + b)} = -\frac{\bar{b}\bar{z} + c}{a\bar{z} + b}.$$

Cuando $a = 0$, ésta es precisamente la transformación de reflexión en la recta $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$. Como las rectas de \mathbb{C} son círculos en \mathbb{C}_∞ , consideraremos las reflexiones como inversiones y diremos indistintamente que un punto es el inverso, simétrico o reflejo de otro.

LEMA 1.4. *Las inversiones envían círculos en círculos.*

DEMOSTRACIÓN. Como podemos llevar cualquier círculo en el círculo unitario, y viceversa, mediante una transformación racional lineal entera $T(z) = az + b$, no perdemos generalidad si consideramos la inversión en el círculo unitario. Sea \mathcal{K} el círculo dado por la ecuación $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$. Al aplicar la inversión $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, la imagen de \mathcal{K} satisface la ecuación

$$\frac{a}{z\bar{z}} + \frac{b}{\bar{z}} + \frac{\bar{b}}{z} + c = 0$$

pero esto ocurre si y sólo si

$$(1.7) \quad cz\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + a = 0.$$

Es decir que la imagen del círculo \mathcal{K} es el círculo dado por la última ecuación. \square

NOTA. De la demostración del Lema anterior podemos deducir algunas propiedades curiosas:

- Una recta va a un círculo si y sólo si la recta no pasa por el centro de inversión, además el círculo obtenido pasa por el centro de inversión.
- Una recta va en sí misma, si y sólo si la recta pasa por el centro de inversión.

LEMA 1.5. *Las reflexiones envían círculos (rectas) en círculos (rectas).*

DEMOSTRACIÓN. Como en el Lema anterior, no perdemos generalidad si consideramos la reflexión en el eje real, $f(z) = \bar{z}$. Sea \mathcal{K} el círculo dado por la ecuación $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ (recta con $a = 0$). Al reflejar en el eje real, la imagen de \mathcal{K} satisface

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0.$$

□

LEMA 1.6. La traslación $T_b(z) = z + b$ es la composición de dos reflexiones en líneas rectas.

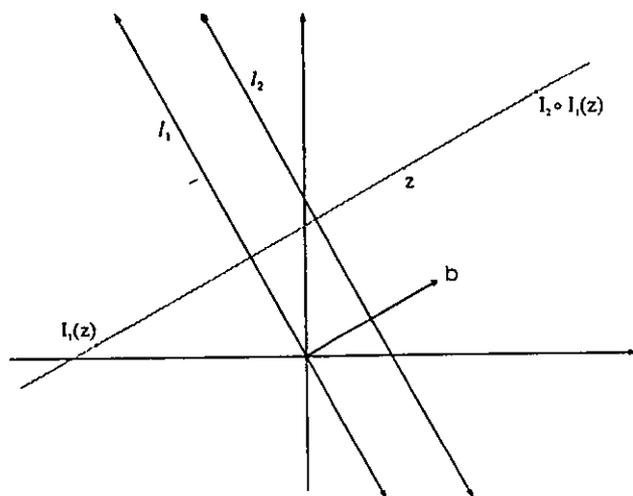
DEMOSTRACIÓN. Consideremos las rectas $l_1 : b\bar{z} + \bar{b}z = 0$ y $l_2 : b\bar{z} + \bar{b}z = |b|^2$. Sean

$$I_1(z) = -\frac{b\bar{z}}{b} \text{ e } I_2(z) = -\frac{b\bar{z} - |b|^2}{b} = b - \frac{b\bar{z}}{b}$$

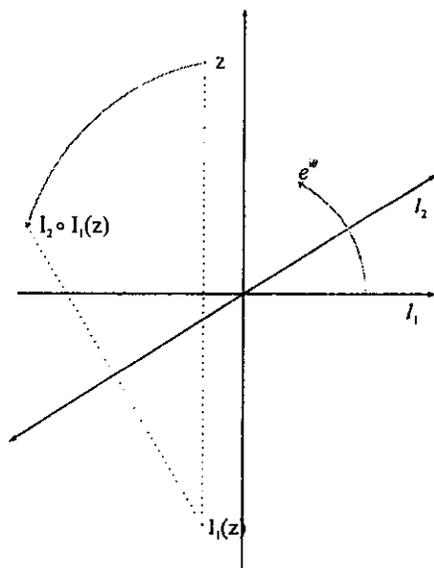
las reflexiones en estas dos rectas respectivamente. Observemos que

$$(I_2 \circ I_1)(z) = I_2\left(-\frac{b\bar{z}}{b}\right) = b - \frac{b}{b}\overline{\left(-\frac{b\bar{z}}{b}\right)} = b + z = T(z).$$

□



LEMA 1.7. La rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ es la composición de dos reflexiones en líneas rectas.



DEMOSTRACIÓN. Consideremos las rectas $l_1 : z - \bar{z} = 0$ (el eje real) y

$$l_2 : e^{-i\frac{\theta}{2}}z + e^{i\frac{\theta}{2}}\bar{z} = 0.$$

$I_1(z) = \bar{z}$ e $I_2(z) = e^{i\theta}\bar{z}$ son, respectivamente, las reflexiones en l_1 y l_2 . Claramente $(I_2 \circ I_1)(z) = e^{i\theta}z$. \square

LEMA 1.8. La homotecia $S_k(z) = kz$ con $k > 0$, es la composición de dos inversiones en círculos.

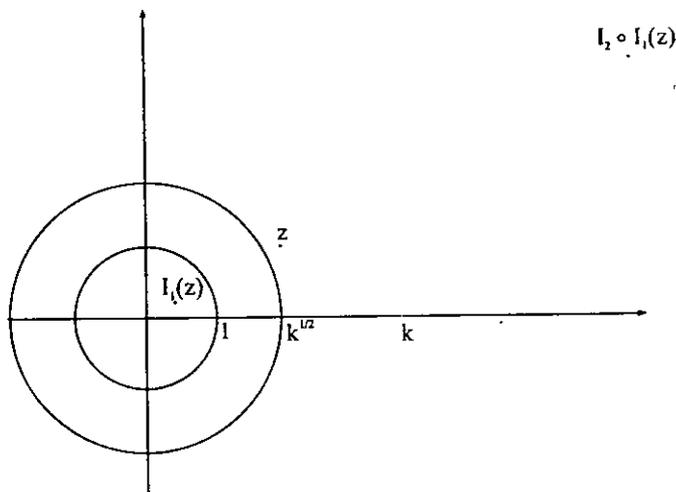
DEMOSTRACIÓN. Consideremos el círculo unitario $C_1 : z\bar{z} = 1$ y el círculo $C_2 : z\bar{z} = k$.

$$I_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} \text{ e } I_2(z) = \frac{k}{\bar{z}}$$

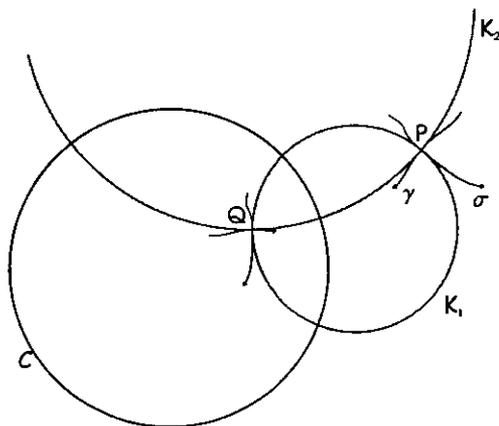
son respectivamente las inversiones en C_1 y C_2 . Notemos que

$$(I_2 \circ I_1)(z) = I_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = kz = T(z)$$

es la homotecia requerida. \square



LEMA 1.9. *Las inversiones (reflexiones) son transformaciones conformes que invierten orientación.*



DEMOSTRACIÓN. Sea C el círculo respecto del cual vamos a invertir (línea recta en caso de reflexión). Sean σ y γ dos curvas que se intersectan en un punto P que no está sobre C . Sea Q el punto inverso de P y K_1 y K_2 dos círculos que pasan por P y Q de manera que K_1 es tangente a σ en P y K_2 es tangente a γ en P . De esta manera el ángulo formado por las curvas σ y γ en P es igual al ángulo formado por K_1 y K_2 . Apliquemos la transformación de inversión y notemos que P va a Q , que las imágenes de σ y γ se intersectan en Q y que de hecho la imagen de K_1 es tangente a la imagen σ en Q y que la imagen de K_2 es tangente a la imagen de γ en Q , de manera que el ángulo formado por las imágenes de σ y de γ es el ángulo

formado por las imágenes de \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 . Pero por el Lema 1.12 (secc. 1.8), la imagen de \mathcal{K}_1 es el mismo \mathcal{K}_1 y la imagen de \mathcal{K}_2 es \mathcal{K}_2 . Finalmente notemos que si α es el ángulo formado por \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 en P , el ángulo que forman en Q es $-\alpha$. \square

LEMA 1.10. *La función $J(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ es la composición de una reflexión en el eje real con una inversión en el círculo unitario.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $J(z) = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$. \square

LEMA 1.11. *La función $J(z)$ es una transformación conforme que preserva orientación (sin inversión de ángulos).*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los dos Lemas previos. \square

TEOREMA 1.12. *Una transformación entera $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es de semejanza inversa si y sólo si $f(z) = a\bar{z} + b$, con $a \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que $f(z)$ siempre se puede escribir como la reflexión en el eje real seguida de una transformación de semejanza directa $g(z) = az + b$; el resultado se sigue de los Lemas 1.10 y 1.9 con las mismas demostraciones utilizadas en la sección 1.4 para el caso de las transformaciones de semejanza directa. \square

TEOREMA 1.13. (Principio de Reflexión de Schwarz) *Sea $f(z)$ una función analítica en una región $D \subset \mathbb{C}$ simétrica respecto al eje real. Entonces $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ para toda $z \in D$ si y sólo si $f(z) \in \mathbb{R}$ para toda $z \in \mathbb{R} \cap D$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero consideremos $f(z)$ real en el eje real y sea $z_0 \in \mathbb{R} \cap D$. Entonces para una vecindad V suficientemente pequeña de z_0

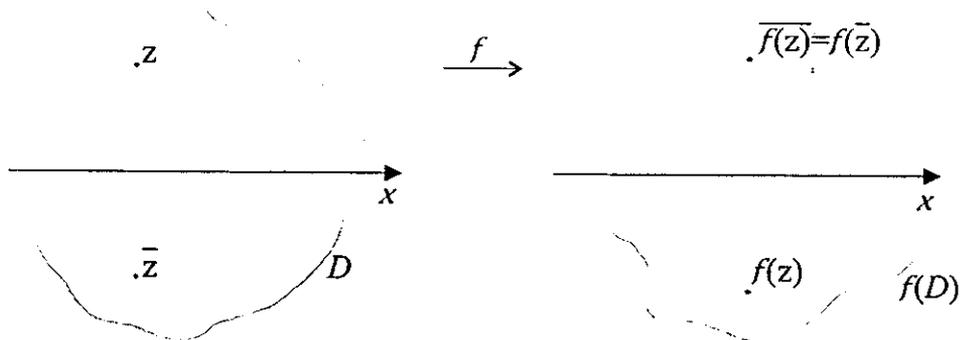
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Todos los coeficientes de esta expansión en serie de potencias son reales ya que $a_0 = f(z_0)$ es real;

$$a_1 = f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se puede calcular aproximándonos a z_0 por puntos en el eje real y por tanto es real; y así sucesivamente todos los $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ son reales. De manera que en V tenemos $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, es decir que $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$, pero es fácil ver $\overline{f(\bar{z})}$ es analítica donde $f(z)$ es analítica y por el Principio de Identidad (Teorema 1.1) podemos extender el resultado a toda la región D .

Para el regreso basta ver que si $z_0 \in \mathbb{R} \cap D$, entonces $f(z_0) = f(\bar{z}_0) = \overline{f(z_0)}$, por tanto $f(z_0) \in \mathbb{R}$. \square



1.8. Teoremas de geometría plana

En esta sección probaremos algunos resultados de geometría plana que utilizaremos en este trabajo.

LEMA 1.12. Sean C un círculo e $I_C(z)$ la inversión con respecto de C . Para otro círculo \mathcal{K} y un punto $P \in \mathbb{C} \setminus C$. Las siguientes propiedades son equivalentes.

1. $I_C(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$
2. Si \mathcal{K} pasa por P , entonces \mathcal{K} pasa por $I_C(P)$
3. \mathcal{K} es ortogonal a C .

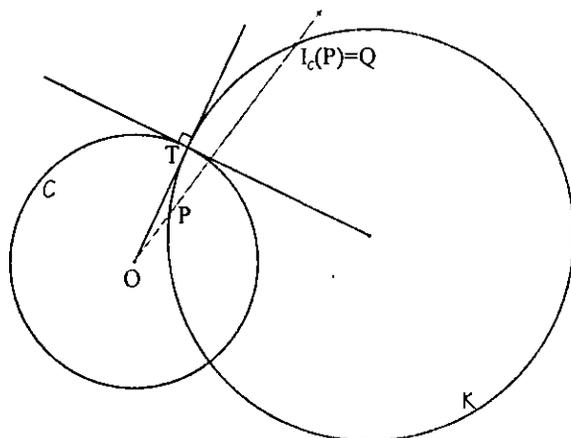
DEMOSTRACIÓN. Sea O el centro de inversión, r el radio de C y T el punto de tangencia de una tangente a \mathcal{K} por O (Figura 1.8).

(1 \Rightarrow 2) Sea $P \in \mathcal{K}$, como $I_C(P) \in I_C(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, \mathcal{K} pasa por $I_C(P)$.

(2 \Rightarrow 3) Como $OP \cdot OI_C(P) = r^2$, por la potencia de un punto aplicada al punto O con el círculo \mathcal{K} , tenemos que $|O - T| = r$, es decir que T también está en C . Por tanto \mathcal{K} y C son ortogonales.

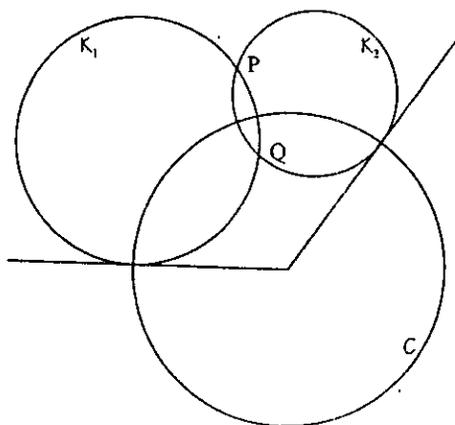
(3 \Rightarrow 2 y 1) Como \mathcal{K} es ortogonal a C , $OT = r$, y por la potencia del punto O con \mathcal{K} , dados dos puntos P y Q sobre \mathcal{K} colineales con O , $OP \cdot OQ = r^2$, es decir que P y Q son puntos inversos uno del otro. Ahora $I_C(\mathcal{K})$ es un círculo que pasa por $I_C(P) = Q$ y por $I_C(Q) = P$, o sea, $I_C(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. \square

El resultado equivalente para una reflexión es evidente.



LEMA 1.13. Sea C un círculo y sean K_1 y K_2 dos círculos ortogonales a C que se intersectan en dos puntos P y Q . Entonces P y Q son inversos.

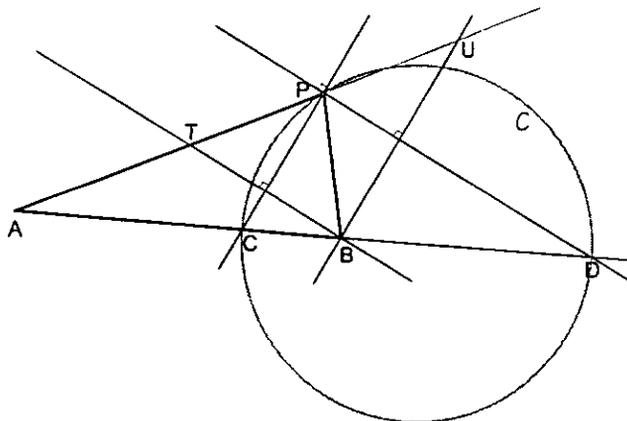
DEMOSTRACIÓN. Estamos suponiendo que K_1 y K_2 son dos círculos distintos y que P y Q son dos puntos distintos. Como $P \in K_1 \cap K_2$, por el Lema 1.12, $I_C(P) \in K_1 \cap K_2$. Si $P = I_C(P)$ tendríamos que también $Q = I_C(Q)$ y entonces ambos puntos están sobre C , entonces K_1 y K_2 son tangentes en P y en Q ya que ambos son ortogonales a C en estos puntos. Pero esto implica que tanto K_1 como K_2 son rectas por P y Q , sin embargo suponíamos que eran círculos distintos. Por tanto $P \neq I_C(P)$ y como K_1 y K_2 se intersectan sólo en dos puntos concluimos que $Q = I_C(P)$. \square



TEOREMA 1.14. (Teorema de Apolonio) El lugar geométrico de los puntos P cuyas distancias a dos puntos fijos A y B satisfacen $\frac{AP}{PB} = k$ constante es un

círculo C respecto al cual B es el inverso de A . El círculo C es llamado círculo de Apolonio de los puntos A y B en razón k .

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que si las distancias satisfacen la relación para una k dada, entonces P está en un círculo C respecto del cual A y B son inversos. Tracemos el triángulo ABP . Sean C y D las intersecciones de las bisectrices interior y exterior por P con la recta AB respectivamente. Sean T y U las intersecciones de la paralela a PD por B y de la paralela a PC por B con AP respectivamente. Como $PC \perp PD$ también $BU \perp PD$, entonces el triángulo BPU es isósceles con $PU = PB$. Análogamente $PT = PB$.



Ahora notemos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PU} = \frac{AP}{PB} = k$$

y análogamente $\frac{AD}{DB} = k$. De manera que C y D también satisfacen la relación de las distancias a A y B . Pero C y D no dependen de la elección del punto P , de manera que para todo P que satisface la relación de las distancias a A y B , y no está sobre AB , el $\angle CPD$ es recto. Es decir que todos los puntos P que satisfacen la relación de las distancias están sobre un círculo C cuyo diámetro es el segmento CD .

Sea O el centro de C y r su radio. Como

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} &= \frac{AD}{DB} \\ \Rightarrow \frac{AO - r}{r - BO} &= \frac{AO + r}{BO + r} \\ \Rightarrow AO \cdot BO &= r^2. \end{aligned}$$

Por tanto A y B son inversos respecto de C .

Ahora probemos que si P está en un círculo C respecto del cual A y B son inversos, entonces P satisface la relación de las distancias. Sean O y r el centro y el radio de C . Sean C y D los puntos donde C corta a AB interior y exteriormente. Como A y B son inversos tenemos que $OA \cdot OB = r^2$, es decir

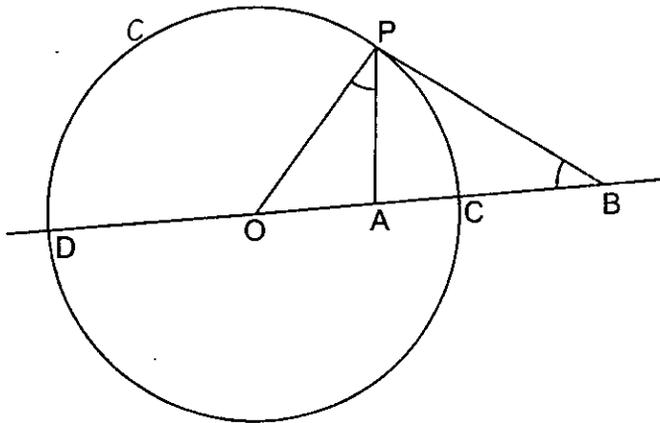
$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OB} = k.$$

Si P no está sobre la recta AB , como $OP = r$ y

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB} = k,$$

$\triangle POA \sim \triangle BOP$, entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{OP}{OB} = k.$$



Si $P = C$,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA - r}{r - OB} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{k^2 - k}{k - 1} = k.$$

Si $P = D$,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA + r}{OB + r} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{k^2 + k}{1 + k} = k.$$

TENEMOS TAMBIÉN UNA PRUEBA ANALÍTICA. Si A y B están representados por los complejos a y b , entonces buscamos las z tales que $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k$, pero

$$\begin{aligned} \frac{|z-a|}{|z-b|} = k &\Leftrightarrow |z-a|^2 = k^2 |z-b|^2 \\ &\Leftrightarrow (1-k^2)z\bar{z} - (a-bk^2)\bar{z} - (\bar{a}-\bar{b}k^2)z + |a|^2 - k^2|b|^2 = 0. \end{aligned}$$

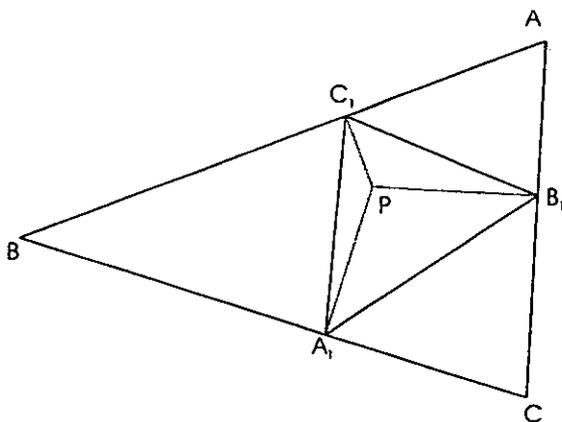
Claramente esta última es la ecuación de una circunferencia si y sólo si $|a-bk|^2 > (1-k^2)(|a|^2 - k^2|b|^2)$, $\Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 > a\bar{b} + b\bar{a}$, $\Leftrightarrow |a-b| > 0$, lo cual es cierto.

La inversión en tal circunferencia es

$$I(z) = \frac{(a-bk^2)\bar{z} + k^2|b|^2 - |a|^2}{(1-k^2)\bar{z} - (\bar{a}-\bar{b}k^2)}$$

y se puede verificar fácilmente que $I(a) = b$. □

DEFINICIÓN 1.11. Sea P cualquier punto en el plano, sean A_1 , B_1 y C_1 los pies de las perpendiculares desde P a los lados BC , CA y AB de un triángulo ABC . Si A_1 , B_1 y C_1 no son colineales, al triángulo $A_1B_1C_1$ lo llamamos *triángulo pedal* del triángulo ABC respecto del punto P .

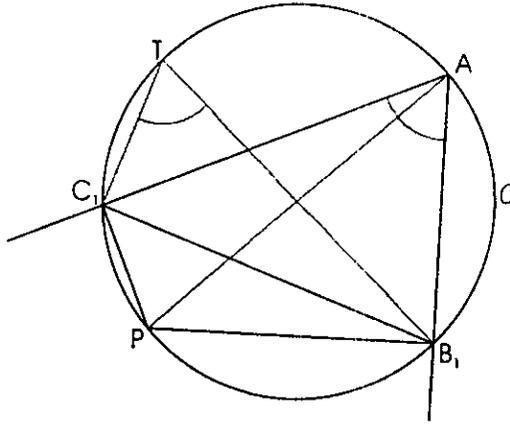


LEMA 1.14. Los lados del triángulo pedal del triángulo ABC respecto de un punto P miden

$$\frac{AP \cdot BC}{2R}, \frac{BP \cdot CA}{2R} \text{ y } \frac{CP \cdot AB}{2R}$$

donde R es el circunradio del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN. Observemos que como $\angle PB_1A = \angle PC_1A = 90^\circ$, el cuadrilátero AC_1PB_1 es cíclico. Sea C el círculo que contiene a estos cuatro puntos y notemos que AP es un diámetro de C . Sea B_1T otro diámetro de C , de manera que $B_1T = AP$, $\angle B_1C_1T = 90^\circ$ y $\angle B_1TC_1 = \angle B_1AC_1 = \angle A$. Entonces el lado B_1C_1 mide $AP \cdot \operatorname{sen} A = \frac{AP \cdot BC}{2R}$. \square



2 Transformaciones de Möbius

2.1. Automorfismos de \mathbb{C}_∞

En este capítulo estudiaremos los automorfismos de la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ y algunas de sus propiedades más interesantes.

DEFINICIÓN 2.1. Un *automorfismo* de la esfera de Riemann es una biyección meromorfa de \mathbb{C}_∞ en sí mismo; denotamos al conjunto de todos los automorfismos de \mathbb{C}_∞ por $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$.

TEOREMA 2.1. $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ consiste de las funciones

$$(2.1) \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, por el Teorema 1.3, T es meromorfa si y sólo si es una función racional $T(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios primos relativos. Mientras que por el Teorema 1.4, T es una biyección si y sólo si es de grado 1. Es decir que $T(z)$ es un automorfismo de \mathbb{C}_∞ si y sólo si es una función racional de grado 1. Por tanto

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

y, como $p(z)$ y $q(z)$ son primos relativos, $ad - bc \neq 0$. □

A los automorfismos de la esfera de Riemann se les conoce también como *Transformaciones Racionales Lineales* o *Transformaciones de Möbius*.

Es importante observar que T no determina de manera única los coeficientes a , b , c y d : si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ las transformaciones

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad S(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

son iguales.

TEOREMA 2.2. $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ forman un grupo bajo composición.

La forma de las transformaciones de Möbius nos sugiere asociar $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$, pero la observación previa al teorema implica que podemos asociar a T con la matriz M o con cualquier otra de la forma λM , con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

TEOREMA 2.3. $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \cong GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda Id \mid \lambda \neq 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Theta : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Con un cálculo directo podemos ver que $\Theta(NM) = \Theta(N)\Theta(M)$, es decir que Θ es un homomorfismo de grupo, de hecho, por el Teorema 2.1, Θ es un epimorfismo. El núcleo $K = \ker(\Theta)$ consiste de aquellas matrices $M \in GL(2, \mathbb{C})$ tales que $T(z) = z$ para toda $z \in \mathbb{C}_\infty$, entonces $a = d \neq 0$ y $b = c = 0$, de donde

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda Id \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Aplicando el primer teorema de isomorfismos a Θ tenemos

$$\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \cong GL(2, \mathbb{C}) / K = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda Id \mid \lambda \neq 0\} =: PGL(2, \mathbb{C}).$$

□

Consideremos el grupo lineal especial, definido por

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } \det A = ad - bc = 1 \right\}.$$

Ahora, si $N \in GL(2, \mathbb{C})$, podemos escribir $N = \lambda M$, con $M \in SL(2, \mathbb{C})$ y $\lambda^2 = \det N$. Como $\Theta(N) = \Theta(M)$, todo automorfismo se puede escribir de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1.$$

Por tanto $\Theta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ es un epimorfismo y resulta también que

$$\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id\} =: PSL(2, \mathbb{C}).$$

A menos que otra cosa se establezca, en lo sucesivo siempre que hablemos de una transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, supondremos que $ad - bc = 1$, es decir, tomaremos su representante en $PSL(2, \mathbb{C})$.

2.2. Generadores de $PGL(2, \mathbb{C})$

En el capítulo anterior hemos estudiado algunos tipos especiales de transformaciones de Möbius:

1. La rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$,
2. la traslación $T_b(z) = z + b$,
3. la homotecia $S_r = rz$, con $r \in \mathbb{R}^+$ y
4. $J(z) = z^{-1}$.

Ahora estas funciones resultarán útiles para analizar los automorfismos:

TEOREMA 2.4. *Toda transformación de Möbius es la composición de un número finito de transformaciones de los tipos (1), (2), (3) y (4).*

DEMOSTRACIÓN. Si $c \neq 0$, entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} = T_{\frac{a}{c}} \circ S_r \circ R_\theta \circ J \circ T_{\frac{d}{c}}(z),$$

donde r y θ son tales que $re^{i\theta} = \frac{bc - ad}{c^2}$.

Si $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{az + b}{d}$ y este es el Corolario 1.5 del capítulo anterior. \square

COROLARIO 3. *Una transformación es de Möbius si y sólo si se puede descomponer en un número par de inversiones en círculos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T(z)$ una transformación de Möbius, en el capítulo 1 vimos que cada una de las transformaciones de los tipos (1) al (4) es la composición de dos inversiones en círculos.

Recíprocamente, consideremos dos inversiones en círculos

$$I_C(z) = -\frac{\bar{b}\bar{z} + c}{a\bar{z} + b} = (T \circ I_{\mathbb{R}})(z) \quad \text{e} \quad I_{C'}(z) = -\frac{\bar{b}'\bar{z} + c'}{a'\bar{z} + b'} = (I_{\mathbb{R}} \circ U)(z),$$

donde $I_{\mathbb{R}}(z) = \bar{z}$ es la reflexión en el eje real; $T(z) = -\frac{\bar{b}z + c}{az + b}$ y $U(z) = -\frac{b'z + c'}{a'z + b'}$ son dos automorfismos de la esfera de Riemann. Entonces $(I_C \circ I_{C'})(z) = (T \circ U)(z)$, es una transformación de Möbius. \square

Como las inversiones en círculos son conformes e invierten orientación (Lema 1.9), tenemos el siguiente

COROLARIO 4. *Toda transformación de Möbius es conforme y preserva orientación.*

DEFINICIÓN 2.2. Una transformación $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que lleva círculos en círculos es una *transformación circular*.

TEOREMA 2.5. *Toda transformación de Möbius es una transformación circular.*

DEFINICIÓN 2.3. Si z_0, z_1, z_2 y z_3 son 4 puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , la *razón cruzada*

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

se define como $T(z_0)$, donde $T(z)$ es la única transformación de Möbius que satisface $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$.

Como $z_0 \neq z_1, z_2, z_3$, tenemos que $\lambda \neq 0, 1, \infty$ y al ver la demostración del Teorema 2.6 $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$, entonces tenemos que

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)},$$

con la convención usual de tomar límites si alguna $z_j = \infty$.

TEOREMA 2.8. Sean (z_0, z_1, z_2, z_3) y (w_0, w_1, w_2, w_3) dos cuartetos de puntos distintos en \mathbb{C}_∞ . Entonces existe alguna $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = w_j$, $j = 0, 1, 2, 3$ si y sólo si

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, con $T(z_j) = w_j$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Sea U la única transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$ que envía respectivamente a w_1, w_2 y w_3 en $0, 1$ y ∞ . Entonces UT es la única transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$ que envía respectivamente a z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ y ∞ . Es decir

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = UT(z_0) = U(w_0) = (w_0, w_1; w_2, w_3).$$

Recíprocamente, supongamos que $(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3) = \lambda$. Sean U y V las únicas transformaciones en $PGL(2, \mathbb{C})$ tales que $V(z_j) = U(w_j) = \lambda, 0, 1, \infty$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Entonces $T = U^{-1}V$ es la transformación que buscamos. \square

Este último resultado implica en particular que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius, es decir que si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)).$$

En el capítulo 4 veremos que cualquier función de la esfera de Riemann en sí misma que preserve la razón cruzada de cualesquiera 4 puntos es una transformación de Möbius.

Si z_1, z_2 y z_3 son tres puntos distintos, la razón cruzada $\lambda = (z, z_1; z_2, z_3)$ está definida para toda $z \neq z_j$, $j = 1, 2, 3$. Podemos extender la definición de razón cruzada para los casos $z = z_j$ como

DEFINICIÓN 2.3. Si z_0, z_1, z_2 y z_3 son 4 puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , la *razón cruzada*

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

se define como $T(z_0)$, donde $T(z)$ es la única transformación de Möbius que satisfice $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$.

Como $z_0 \neq z_1, z_2, z_3$, tenemos que $\lambda \neq 0, 1, \infty$ y al ver la demostración del Teorema 2.6 $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$, entonces tenemos que

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)},$$

con la convención usual de tomar límites si alguna $z_j = \infty$.

TEOREMA 2.8. Sean (z_0, z_1, z_2, z_3) y (w_0, w_1, w_2, w_3) dos cuartetos de puntos distintos en \mathbb{C}_∞ . Entonces existe alguna $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = w_j$, $j = 0, 1, 2, 3$ si y sólo si

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, con $T(z_j) = w_j$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Sea U la única transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$ que envía respectivamente a w_1, w_2 y w_3 en $0, 1$ y ∞ . Entonces UT es la única transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$ que envía respectivamente a z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ y ∞ . Es decir

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = UT(z_0) = U(w_0) = (w_0, w_1; w_2, w_3).$$

Recíprocamente, supongamos que $(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3) = \lambda$. Sean U y V las únicas transformaciones en $PGL(2, \mathbb{C})$ tales que $V(z_j) = U(w_j) = \lambda, 0, 1, \infty$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Entonces $T = U^{-1}V$ es la transformación que buscamos. \square

Este último resultado implica en particular que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius, es decir que si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)).$$

En el capítulo 4 veremos que cualquier función de la esfera de Riemann en sí misma que preserva la razón cruzada de cualesquiera 4 puntos es una transformación de Möbius.

Si z_1, z_2 y z_3 son tres puntos distintos, la razón cruzada $\lambda = (z, z_1; z_2, z_3)$ está definida para toda $z \neq z_j$, $j = 1, 2, 3$. Podemos extender la definición de razón cruzada para los casos $z = z_j$ como

2.2. Generadores de $PGL(2, \mathbb{C})$

En el capítulo anterior hemos estudiado algunos tipos especiales de transformaciones de Möbius:

1. La rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$,
2. la traslación $T_b(z) = z + b$,
3. la homotecia $S_r = rz$, con $r \in \mathbb{R}^+$ y
4. $J(z) = z^{-1}$.

Ahora estas funciones resultarán útiles para analizar los automorfismos:

TEOREMA 2.4. *Toda transformación de Möbius es la composición de un número finito de transformaciones de los tipos (1), (2), (3) y (4).*

DEMOSTRACIÓN. Si $c \neq 0$, entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} = T_{\frac{a}{c}} \circ S_r \circ R_\theta \circ J \circ T_{\frac{d}{c}}(z),$$

donde r y θ son tales que $re^{i\theta} = \frac{bc - ad}{c^2}$.

Si $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{az + b}{d}$ y este es el Corolario 1.5 del capítulo anterior. \square

COROLARIO 3. *Una transformación es de Möbius si y sólo si se puede descomponer en un número par de inversiones en círculos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T(z)$ una transformación de Möbius, en el capítulo 1 vimos que cada una de las transformaciones de los tipos (1) al (4) es la composición de dos inversiones en círculos.

Recíprocamente, consideremos dos inversiones en círculos

$$I_C(z) = -\frac{\bar{b}\bar{z} + c}{a\bar{z} + b} = (T \circ I_{\mathbb{R}})(z) \quad \text{e} \quad I_{C'}(z) = -\frac{\bar{b}'\bar{z} + c'}{a'\bar{z} + b'} = (I_{\mathbb{R}} \circ U)(z),$$

donde $I_{\mathbb{R}}(z) = \bar{z}$ es la reflexión en el eje real; $T(z) = -\frac{\bar{b}z + c}{az + b}$ y $U(z) = -\frac{b'z + \bar{c}'}{a'z + b'}$ son dos automorfismos de la esfera de Riemann. Entonces $(I_C \circ I_{C'})(z) = (T \circ U)(z)$, es una transformación de Möbius. \square

Como las inversiones en círculos son conformes e invierten orientación (Lema 1.9), tenemos el siguiente

COROLARIO 4. *Toda transformación de Möbius es conforme y preserva orientación.*

DEFINICIÓN 2.2. Una transformación $T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que lleva círculos en círculos es una *transformación circular*.

TEOREMA 2.5. *Toda transformación de Möbius es una transformación circular.*

2.4. Inversión en círculos

En el capítulo 1 estudiamos la inversión en círculos, ahora probemos que una transformación de Möbius envía puntos simétricos en puntos simétricos y aprovechemos esta propiedad para dar una generalización del Principio de Reflexión de Schwarz (Teorema 1.13).

LEMA 2.2. *Sea C un círculo en \mathbb{C}_∞ y $T \in PGL(2, \mathbb{C})$. Si $C' = T(C)$, entonces $I_{C'} = TI_C T^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si $z \in C'$, entonces $I_{C'}(z) = z$. Además, como $T^{-1}(z) \in C$, $I_C T^{-1}(z) = T^{-1}(z)$. Sea $S = TI_C T^{-1} I_{C'}$, como S es la composición de un número par de inversiones, $S \in PGL(2, \mathbb{C})$ (Corolario 3). Además para $z \in C$, se tiene

$$S(z) = TI_C T^{-1} I_{C'}(z) = TI_C T^{-1}(z) = TT^{-1}(z) = z.$$

Luego S fija todos los puntos de C , por tanto S es la identidad. Y entonces

$$TI_C T^{-1} = I_{C'}^{-1} = I_{C'}.$$

□

Ahora si podemos probar que las transformaciones de Möbius preservan puntos simétricos:

TEOREMA 2.10. *Sean $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, C y $C' = T(C)$ dos círculos en \mathbb{C}_∞ . Entonces $T(I_C(z)) = I_{C'}(T(z))$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema anterior $I_{C'}(T(z)) = TI_C T^{-1} T(z) = T(I_C(z))$. □

Así como la razón cruzada nos permite caracterizar cuatro puntos cíclicos, también nos permite caracterizar puntos simétricos.

DEFINICIÓN 2.4. Cuatro puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , z_0, z_1, z_2 y z_3 son *ortocíclicos* si z_0 y z_2 están sobre un círculo respecto del cual z_1 y z_3 son simétricos.

LEMA 2.3. *Cuatro puntos distintos z_0, z_1, z_2 y z_3 en \mathbb{C}_∞ son ortocíclicos si y sólo si $|(z_0, z_1; z_2, z_3)| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ la única que envía z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ y ∞ respectivamente. Supongamos que $|(z_0, z_1; z_2, z_3)| = |T(z_0)| = 1$, entonces $T(z_0)$ y $T(z_2) = 1$ están sobre el círculo unitario, respecto del cual $T(z_1) = 0$ y $T(z_3) = \infty$ son simétricos. Por tanto $z_0 = T^{-1}T(z_0)$ y $z_2 = T^{-1}(1)$ están sobre un círculo respecto del cual $z_1 = T^{-1}(0)$ y $z_3 = T^{-1}(\infty)$ son simétricos.

Recíprocamente, si z_0 y z_2 están sobre un círculo respecto del cual z_1 y z_3 son simétricos, entonces $T(z_0)$ y 1 están sobre un círculo respecto del cual 0 e ∞ son simétricos. Pero 0 , por ser el inverso de ∞ , es el centro del círculo respecto del cual son simétricos. Es decir que $T(z_0)$ está sobre el círculo unitario. \square

DEFINICIÓN 2.5. Cuatro puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , z_0, z_1, z_2 y z_3 son *armónicos* si son cíclicos y ortocíclicos.

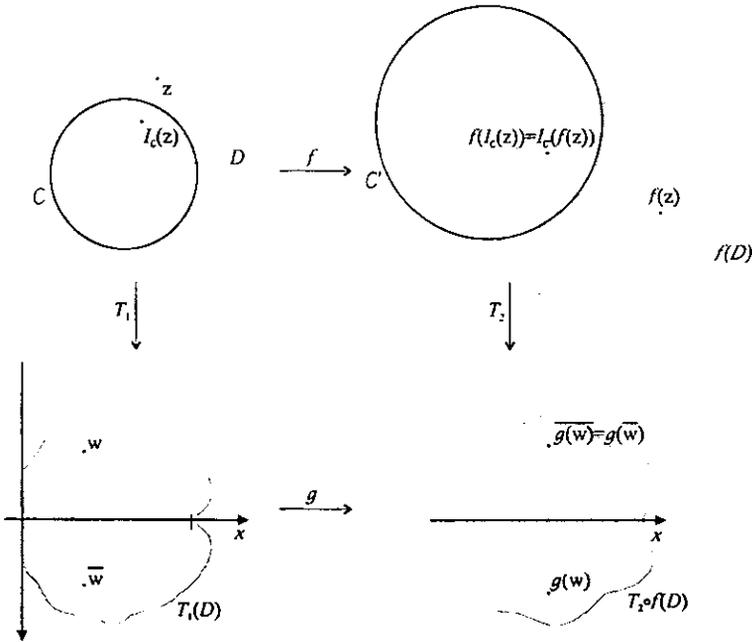
COROLARIO 7. Cuatro puntos distintos z_0, z_1, z_2 y z_3 en \mathbb{C}_∞ son armónicos si y sólo si $(z_0, z_1; z_2, z_3) = -1$.

DEMOSTRACIÓN. Si $(z_0, z_1; z_2, z_3) = -1$, claramente z_0, z_1, z_2 y z_3 son cíclicos y ortocíclicos.

Sean z_0, z_1, z_2 y z_3 cuatro puntos armónicos. Por ser cíclicos y ortocíclicos tenemos $(z_0, z_1; z_2, z_3) = \pm 1$. Pero si \mathcal{C} es el círculo que los contiene y \mathcal{K} el círculo respecto del cual z_1 y z_3 son inversos, como $z_0, z_2 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, z_0 y z_2 están en arcos distintos de \mathcal{C} entre z_1 y z_3 . Entonces, por el Lema 2.1, $(z_0, z_1; z_2, z_3) = -1$. \square

TEOREMA 2.11. (Principio de Reflexión de Schwarz) Sea $f(z)$ una función analítica en una región $D \subset \mathbb{C}_\infty$ simétrica respecto al círculo $\mathcal{C} \in \mathbb{C}_\infty$. Entonces $f(z)$ manda $\mathcal{C} \cap D$ en un arco de un círculo \mathcal{C}' si y sólo si $f(I_{\mathcal{C}}(z)) = I_{\mathcal{C}'}(f(z))$ para toda $z \in D$.

DEMOSTRACIÓN. Sean T_1 y $T_2 \in PGL(2, \mathbb{C})$ tales que $T_1(\mathcal{C} \cap D) = (0, 1)$ sobre el eje real y T_2 manda a \mathcal{C}' en el eje real. Es fácil ver que efectivamente existen T_1 y T_2 . Si hacemos $w = T_1(z)$, tenemos que $g(w) = T_2 \circ f \circ T_1^{-1}(w)$ es una función analítica en la región $T_1(D)$ que intersecta al eje real. Aplicando a $g(w)$ el Principio de Reflexión de Schwarz en la versión del capítulo 1, $g(\bar{w}) = \overline{g(w)}$ para toda $w \in T_1(D)$ si y sólo si $g(w) \in \mathbb{R}$ para toda $w \in \mathbb{R} \cap T_1(D) = (0, 1)$. Pero por el Teorema 2.10, como $w = T_1(z)$, $\bar{w} = T_1 I_{\mathcal{C}}(z)$; y también $\overline{g(w)} = \overline{T_2 \circ f \circ T_1^{-1}(w)} = T_2 I_{\mathcal{C}'} \circ f(z)$. Entonces $f(z)$ manda $\mathcal{C} \cap D$ en un arco del círculo \mathcal{C}' si y sólo si $g(w) \in \mathbb{R}$ para toda $w \in (0, 1)$; si y sólo si $g(\bar{w}) = T_2 \circ f \circ I_{\mathcal{C}}(z) = \overline{g(w)} = T_2 I_{\mathcal{C}'} \circ f(z)$ para toda $w \in T_1(D)$; si y sólo si $f(I_{\mathcal{C}}(z)) = I_{\mathcal{C}'}(f(z))$ para toda $z \in D$. \square



2.5. Conjugación y clasificación de transformaciones de Möbius

En esta sección clasificaremos a las transformaciones de Möbius de acuerdo a propiedades que son invariantes bajo conjugación.

DEFINICIÓN 2.6. Dos transformaciones $T, U \in PGL(2, \mathbb{C})$ son *conjugadas* si existe $S \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $U = STS^{-1}$.

La conjugación es una relación de equivalencia en $PGL(2, \mathbb{C})$. Para determinar las clases de equivalencia nos apoyaremos en los puntos fijos de las transformaciones.

DEFINICIÓN 2.7. Decimos que $z \in \mathbb{C}_\infty$ es un *punto fijo* de $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ si $T(z) = z$.

Observemos que z es punto fijo de T si y sólo si $S(z)$ es punto fijo de la transformación conjugada STS^{-1} , cualquiera que sea $S \in PGL(2, \mathbb{C})$.

Recordemos que $Aut(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL(2, \mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$ y que al final de la sección 2.1 convenimos que para toda $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ consideraremos siempre su representante en $PSL(2, \mathbb{C})$. Esta convención resultará particularmente útil en esta sección.

Como los puntos fijos de $T(z) = az + b$ satisfacen

$$(2.3) \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

tenemos que T tiene a lo más dos puntos fijos en \mathbb{C}_∞ .

Como $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $z = \infty$ es un punto fijo de T si y sólo si $c = 0$.

TEOREMA 2.12. *Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc = 1$. Si $(a+d)^2 \neq 4$, entonces T tiene dos puntos fijos distintos en \mathbb{C}_∞ . Si $(a+d)^2 = 4$, entonces T tiene un único punto fijo en \mathbb{C}_∞ .*

DEMOSTRACIÓN. Si $c \neq 0$, las soluciones de (2.3) son

$$(2.4) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \text{ y} \\ z_2 &= \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}, \end{aligned}$$

tenemos que, si $(a+d)^2 \neq 4$, hay dos soluciones distintas y entonces T tiene dos puntos fijos en \mathbb{C}_∞ ; y si $(a+d)^2 = 4$, T tiene un único punto fijo en \mathbb{C}_∞ .

Si $c = 0$, entonces T fija a ∞ ; $ad = 1$ y $T(z) = a^2z + ab$. De manera que T tiene otro punto fijo $z = \frac{ab}{1-a^2} \neq \infty$ si y sólo si $a^2 \neq 1$ que equivale a $(a+d)^2 \neq 4$. Si $a^2 = 1$ entonces $T(z) = z \pm b$, que solamente fija a ∞ cuando $b \neq 0$; y es la identidad cuando $b = 0$. \square

La función $(a+d)^2$ servirá para determinar las clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{C})$. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

definimos la *traza* de A como $tr(A) = a + d$.

OBSERVACIÓN. Mediante cálculos directos podemos verificar que para $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$

1. $tr(AB) = tr(BA)$
2. $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$
3. $tr(-A) = -tr(A)$

DEFINICIÓN 2.8. La *traza cuadrada* de $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ se define por $tr^2(T) = tr^2(A) = (a+d)^2$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ representa a T .

OBSERVACIÓN. Notemos que, por la propiedad 3 de la observación anterior, la traza cuadrada está bien definida para $T \in PSL(2, \mathbb{C})$; y que, por la propiedad 2, es un invariante de las clases de conjugación.

EJEMPLO. Sea $U(z) = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Los representantes de U con $\det U = 1$ son:

$$\pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix},$$

entonces $\text{tr}^2(U) = \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \lambda + \lambda^{-1} + 2$.

Ahora, para describir las clases de conjugación definamos para toda $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$U_\lambda(z) := \begin{cases} \lambda z, & \text{si } \lambda \neq 1 \\ z + 1, & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}.$$

TEOREMA 2.13. *Sea $T \neq Id$ en $PSL(2, \mathbb{C})$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que T es conjugada a U_λ .*

DEMOSTRACIÓN. Si T sólo tiene un punto fijo z_0 . Como $S(z) = \frac{-1}{z-z_0} \in PSL(2, \mathbb{C})$ es tal que $S(z_0) = \infty$, entonces STS^{-1} sólo fija a ∞ , así que $STS^{-1}(z) = z + b$ para alguna $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $V(z) = \frac{z}{b}$. Entonces $(VS)T(VS)^{-1} = U_1$, es decir que, T es conjugada a U_1 .

Si T tiene dos puntos fijos z_1 y z_2 . Como $W(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ es tal que $W(z_1) = 0$ y $W(z_2) = \infty$, entonces WTW^{-1} fija a 0 y ∞ , lo que significa que $WTW^{-1}(z) = \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, y entonces T es conjugada a U_λ . \square

Para terminar de describir las clases de conjugación veamos que

TEOREMA 2.14. *U_κ es conjugada a U_λ si y sólo si $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \lambda^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero consideremos el caso $\kappa = 1$. Como U_1 sólo fija a ∞ , una transformación conjugada SU_1S^{-1} sólo fija a $S(\infty)$. Entonces U_1 no puede ser conjugada a alguna U_λ , con λ distinta de 1, pues estas transformaciones fijan a 0 y a ∞ .

Ahora supongamos que $U_\kappa = SU_\lambda S^{-1}$, entonces $\text{tr}^2(U_\kappa) = \text{tr}^2(U_\lambda)$, es decir

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2,$$

de donde $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \lambda^{-1}$.

Recíprocamente, U_κ es conjugada a $U_{1/\kappa}$; ya que $JU_\kappa J^{-1} = U_{1/\kappa}$, donde $J(z) = z^{-1}$. \square

COROLARIO 8. $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{C}) \setminus \{Id\}$ son conjugadas si y sólo si $tr^2(T_1) = tr^2(T_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.13, T_1 es conjugada a U_λ y T_2 es conjugada a U_κ . Entonces $tr^2(T_1) = tr^2(T_2) \Leftrightarrow tr^2(U_\lambda) = tr^2(U_\kappa) \Leftrightarrow \kappa = \lambda$ o $\kappa = \lambda^{-1} \Leftrightarrow U_\lambda$ y U_κ son conjugadas $\Leftrightarrow T_1$ y T_2 son conjugadas. \square

Con todo lo anterior podemos concluir que $\{U_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ y } 0 < |\lambda| \leq 1\}$ es el conjunto de representates de todas las clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{C}) \setminus \{Id\}$. Ahora veamos como se clasifican las transformaciones de Möbius en función de su representante en este conjunto y veremos que equivale a una clasificación en función de la traza cuadrada.

DEFINICIÓN 2.9. Hemos visto que T tiene un único punto fijo en \mathbb{C}_∞ si y sólo si $tr^2(T) = 4$, o equivalentemente, $\lambda = 1$. Llamamos a éstas transformaciones *parabólicas*.

Si $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq 1$, entonces $U_\lambda(z) = \lambda z = e^{i\theta} z$ es una rotación. Llamamos a éstas transformaciones *elípticas*.

Si $|\lambda| < 1$. Una transformación T es *hiperbólica* si $\lambda > 0$, y *loxodrómica* en otro caso, esto es, si $\lambda < 0$ ó $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Pero hemos visto que para T conjugada a U_λ , $tr^2(T) = tr^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$. Así que λ y λ^{-1} son las raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2 + (2 - tr^2(T))z + 1 = 0.$$

LEMA 2.4. T es *elíptica* si y sólo si $0 \leq tr^2(T) < 4$,

T es *parabólica* si y sólo si $tr^2(T) = 4$,

T es *hiperbólica* si y sólo si $tr^2(T) > 4$ y

T es *loxodrómica* si y sólo si $tr^2(T) \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. T es *elíptica* si y sólo si es conjugada a U_λ para $\lambda = e^{i\theta}$ con $\theta \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + \lambda^{-1} \in [-2, 2) \Leftrightarrow tr^2(T) \in [0, 4)$.

T es *hiperbólica* si y sólo si es conjugada a U_λ con $\lambda \in (0, 1) \Leftrightarrow \lambda + \lambda^{-1} > 2 \Leftrightarrow tr^2(T) > 4$.

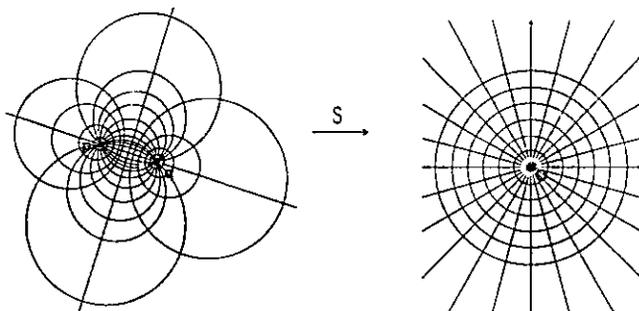
Antes de continuar observemos que $tr^2(T) = \lambda + \lambda^{-1} + 2 \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora T es *loxodrómica* si y sólo si es conjugada a U_λ con $|\lambda| < 1$ y $\lambda < 0$ o $\lambda \notin \mathbb{R}$. Pero $\lambda \notin \mathbb{R}$ si y sólo si $tr^2(T) \notin \mathbb{R}$; mientras que $-1 < \lambda < 0$ si y sólo si $\lambda + \lambda^{-1} < -2$, es decir $tr^2(T) < 0$. \square

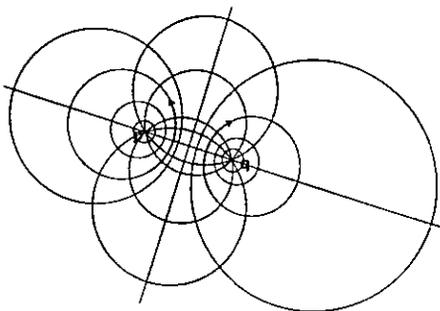
Con todo lo visto, para estudiar la acción geométrica de las transformaciones de Möbius haremos uso de un sistema de coordenadas particular: los *círculos de Steiner*.

Primero consideremos las transformaciones con dos puntos fijos p y q . Los círculos de Steiner del Primer Tipo respecto a p y q es la familia de círculos de \mathbb{C}_∞ que pasan por p y q . Los círculos de Steiner del Segundo Tipo respecto a p y q es la familia de círculos de \mathbb{C}_∞ tales que p y q son inversos. Notemos que cada círculo de una familia es ortogonal a todos los círculos de la otra.

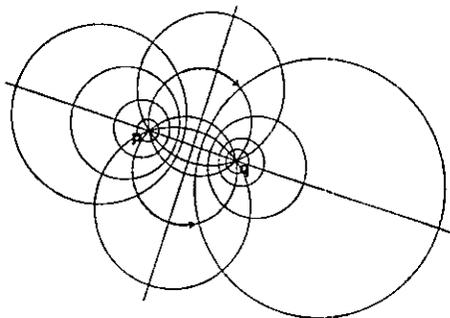
Consideremos la transformación $S(z) = \frac{z-p}{z-q} \in PSL(2, \mathbb{C})$. Bajo S , los círculos del Primer Tipo se transforman en círculos que pasan por $S(p) = 0$ y $S(q) = \infty$, es decir, rectas por el origen; mientras que los del Segundo Tipo se transforman en círculos con centro en el origen, de manera que los círculos de Steiner se transforman en el sistema de coordenadas polares. Veamos ahora la dinámica de estas dos familias bajo $T \in PSL(2, \mathbb{C})$.



Caso 1. T es elíptica. Como T es conjugada a una transformación $U(z) = \lambda z$, con $\lambda = e^{i\theta}$, y como U es una rotación de un ángulo θ y centro en el origen que fija a 0 e ∞ , los círculos de Steiner del Primer Tipo se permutan entre sí; mientras que los del Segundo Tipo se recorren sobre sí mismos manteniéndose fijos:

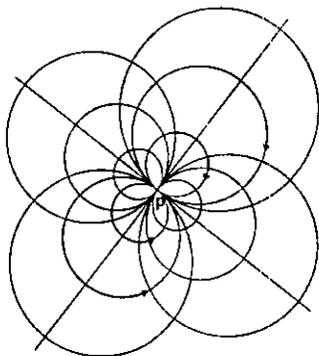


Caso 2. T es hiperbólica. Como T es conjugada a una transformación $R(z) = \lambda z$, con $\lambda > 0$, y como R es una homotecia con centro en el origen que fija a 0 e ∞ , los círculos de Steiner del Primer Tipo se mantienen fijos deformándose sobre sí mismos alejando sus puntos de un punto fijo y acercándolos al otro; mientras que los del Segundo Tipo se permutan entre sí:



Caso 3. T es loxodrómica. Como T es conjugada a una transformación $U(z) = re^{i\theta}z$, con $r \neq 1$ y $\theta \neq 0$. T actúa como una combinación de las dos anteriores, es decir que cada círculo de una familia lo deforma sobre otro círculo de la misma familia.

Caso 4. Sólo nos falta analizar el caso en que T tiene un único punto fijo p , es decir, cuando T es parabólica. Como T es conjugada a una traslación $U(z) = z + b$, cuyo único punto fijo es ∞ , tenemos que U recorre a las rectas paralelas a b sobre sí mismas, mientras que a las rectas ortogonales a b las permuta entre sí. Entonces existen dos familias ortogonales de círculos que pasan por p de manera que T permuta a los círculos de una familia entre sí y mantiene fijos a los de la otra familia deformándolos sobre sí mismos. Estas familias de círculos se conocen como círculos de Steiner degenerados respecto a p .



3 Derivada de Schwarz

En este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades diferenciales de las transformaciones de Möbius y veremos que es posible afirmar que una transformación con ciertas propiedades diferenciales es de Möbius.

3.1. Derivada de Schwarz

La *derivada de Schwarz* (o Schwarziana) está ampliamente relacionada con las transformaciones de Möbius, jugó un papel importante en la determinación de las transformaciones conformes que envían el semiplano superior en un polígono cuyos lados son arcos de circunferencia; y permite caracterizar a las funciones analíticas e inyectivas en un dominio simplemente conexo. Fue introducida por Kummer en 1836 como un operador diferencial y estuvo presente en el trabajo del propio Schwarz. Fué hasta 1880 que Cayley bautizó este operador como se conoce ahora.

DEFINICIÓN 3.1. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función no constante que es analítica en una región R . Para toda $z \in R$ tal que $f'(z) \neq 0$ definimos la derivada de Schwarz de f como

$$(3.1) \quad S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Kummer observó que:

PROPOSICIÓN 1. Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial general de segundo orden

$$y'' + py' + qy = 0$$

el cociente $f = \frac{y_1}{y_2}$ satisface

$$S_f = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'.$$

DEMOSTRACIÓN. Sustituycamos y_1 por fy_2 en la ecuación diferencial, obtenemos

$$f''y_2 + 2f'y_2' + pf'y_2 + f(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

y como $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, obtenemos $f''y_2 + 2f'y_2' + pf'y_2 = 0$. Así

$$\frac{f''}{f'} = -\frac{2y_2'}{y_2} - p,$$

por tanto

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -2\frac{y_2'' + py_2'}{y_2} - \frac{1}{2}p^2 - p' = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'.$$

□

Notemos que, si $g_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$ y $g_2 = \delta y_1 + \gamma y_2$ son otras dos soluciones linealmente independientes ($\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$), entonces $\frac{g_1}{g_2} = \frac{\alpha f + \beta}{\delta f + \gamma} = T \circ f$, donde T es la transformación de Möbius $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \gamma}$, de manera que $S_{T \circ f} = S_f$. Más adelante veremos que esta es de hecho una propiedad de la derivada de Schwarz.

La ecuación diferencial de segundo orden que interesaba a Kummer es la ecuación hipergeométrica [N1, Pág. 206] y Schwarz probó que el cociente de las soluciones de dicha ecuación llevan el semiplano superior en un triángulo cuyos lados son arcos de circunferencia.

Otro resultado que enunciaremos sin prueba (aunque puede encontrarse en [N2]) con el fin de motivar la relación entre la derivada de Schwarz y las propiedades de las Transformaciones de Möbius que aparecerán en la próxima sección es el siguiente:

TEOREMA 3.1. (Teorema de Nehari) *Si f es una función analítica e inyectiva en el disco unitario entonces*

$$|S_f(z)| \leq \frac{6}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Si f es analítica en el disco con

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad |z| < 1,$$

entonces f es inyectiva en el disco.

3.2. Propiedades de la derivada de Schwarz

Primero veamos como es la derivada de Schwarz de la composición de funciones.

LEMA 3.1. $S_{g \circ f} = (S_g \circ f) (f')^2 + S_f$.

DEMOSTRACIÓN. Como $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$ y $(g \circ f)'' = (g'' \circ f) (f')^2 + (g' \circ f) f''$ tenemos

$$\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} = \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right) f' + \frac{f''}{f'},$$

entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} \right)' &= \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right)' f' + \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right) f'' + \left(\frac{f''}{f'} \right)' \quad y \\ \left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} \right)^2 &= \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right)^2 (f')^2 + 2 \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right) f'' + \left(\frac{f''}{f'} \right)^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} S_{g \circ f} &= \left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} \right)^2 \\ &= \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right)' f' - \frac{1}{2} \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right)^2 (f')^2 + \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \\ &= (S_g \circ f) (f')^2 + S_f. \end{aligned}$$

□

Ahora veamos como es la derivada de Schwarz de una transformación de Möbius.

LEMA 3.2. Si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, entonces $S_T = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$. Notemos que para toda transformación racional lineal entera $U(z) = uz + v$, $S_U = 0$ se sigue de que $U'' = 0$: También observemos que si $f(z) = \frac{1}{z}$,

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \text{ y } f''(z) = \frac{2}{z^3},$$

entonces

$$S_f(z) = \left(-\frac{2}{z}\right)' - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{z}\right)^2 = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{4}{z^2} = 0.$$

De donde, como $T = h \circ f \circ g$, con $h(z) = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c}\right)z$ y $g(z) = cz + d$ dos transformaciones racionales lineales enteras,

$$S_T = S_{h \circ f \circ g} = (S_{h \circ f} \circ g)(g')^2 + S_g = \left\{ \left[(S_h \circ f)(f')^2 + S_f \right] \circ g \right\} (g')^2 = 0.$$

□

COROLARIO 9. Si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ y f es una función analítica, entonces $S_{T \circ f} = S_f$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los dos lemas anteriores $S_{T \circ f} = (S_T \circ f)(f')^2 + S_f = S_f$. □

COROLARIO 10. Si $U \in PGL(2, \mathbb{C})$ y g es una función analítica, entonces $S_{g \circ U} = (S_g \circ U)(U')^2$.

DEMOSTRACIÓN. Como en el corolario anterior: $S_{g \circ U} = (S_g \circ U)(U')^2 + S_U = (S_g \circ U)(U')^2$. □

Probemos ahora el resultado principal de este capítulo.

TEOREMA 3.2. Si $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función meromorfa no constante tal que $S_f(z) = 0$ para todo z en una región $D \subset \mathbb{C}_\infty$, donde f es analítica, entonces f es una transformación de Möbius.

DEMOSTRACIÓN. Como $S_f(z) = 0$ en D , tenemos que $f'(z) \neq 0$ en D , pero de hecho, como f no es constante, los ceros de $f'(z)$ son aislados (Corolario 1). De manera que $S_f(z)$ es una función meromorfa, entonces, por el Principio de Continuación Analítica (Teorema 1.2), $S_f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$, excepto por un número finito de puntos, los ceros de $f'(z)$ y los polos de $f(z)$. Así tenemos

$$\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

es decir

$$\frac{2 \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'}{\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2} = \left(-\frac{2f'(z)}{f''(z)}\right)' = 1.$$

Integrando resulta

$$-\frac{2f'(z)}{f''(z)} = z + d,$$

reacomodando términos

$$(z + d)f''(z) + f'(z) = -f'(z),$$

integrando de nuevo

$$(z + d)f'(z) = -f(z) + a.$$

Nuevamente reacomodamos términos

$$(z + d)f'(z) + f(z) = a,$$

e integramos

$$(z + d)f(z) = az + b.$$

De donde se obtiene que

$$f(z) = \frac{az + b}{z + d}$$

es una transformación de Möbius. Que $ad - b \neq 0$ es consecuencia de que $f(z)$ es no constante. \square

Finalmente obtenemos los siguientes corolarios

COROLARIO 11. *Sea f una función no constante y analítica en una región R . Si g es una función meromorfa no constante tal que $S_{g \circ f}(z) = S_f(z)$, entonces g es de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. $S_{g \circ f}(z) = S_f(z)$ implica que $(S_g \circ f)(f'(z))^2 = 0$ (por el Lema 3.1). Pero como f no es constante tenemos que $f'(z)$ es distinta de cero en todo un abierto de R , de manera que $S_g \circ f = 0$ en un abierto. Luego, como f es biyectiva localmente, existe un abierto donde $S_g = 0$ y entonces g es de Möbius. \square

COROLARIO 12. *Si f y g son funciones meromorfas no constantes tales que $S_{g \circ f} = (S_g \circ f)(f')^2$, entonces f es de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es evidente a partir de la fórmula de la derivada de Schwarz para la composición de funciones (Lema 3.1) y del último Teorema. \square

Hemos visto que la derivada de Schwarz nos permite caracterizar a las transformaciones de Möbius. En las siguientes dos secciones estudiaremos otras derivadas que nos servirán para caracterizar transformaciones de Möbius de formas particulares.

3.3. Relación entre la derivada de Schwarz y la razón cruzada

En el capítulo 2 vimos que las transformaciones de Möbius preservan la razón cruzada de 4 puntos y en la sección anterior vimos que la derivada de Schwarz de una función f seguida de una transformación de Möbius es igual a la derivada de Schwarz de la función f , podríamos decir que las transformaciones de Möbius preservan la derivada de Schwarz. De estas dos observaciones resulta natural preguntarnos si existe alguna relación entre la derivada de Schwarz de una función y la razón cruzada, en esta sección mostraremos un resultado de Ahlfors [Ah2] que efectivamente dice que la derivada de Schwarz es un caso límite de la razón cruzada.

PROPOSICIÓN 2. (Ahlfors) Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función no constante que es analítica en una región $R \subset \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in R$, entonces para alguna vecindad V de z_0 , para $a, b, c, d, w \in \mathbb{C}$ tales que $z_0 + aw, z_0 + bw, z_0 + cw, z_0 + dw$ son cuatro puntos distintos en V se tiene que

$$(f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = (a, b; c, d) \left(1 + \frac{1}{6} (a-b)(c-d) S_f(z_0) w^2 + o(w^2) \right),$$

DEMOSTRACIÓN. En una vecindad alrededor de z_0 tenemos que

$$f(z_0 + aw) = f(z_0) + af'(z_0)w + \frac{a^2}{2} f''(z_0)w^2 + \frac{a^3}{6} f'''(z_0)w^3 + \dots,$$

para aw en tal vecindad. Podemos considerar también a bw, cw, dw y tener desarrollos análogos. Entonces

$$f(z_0 + aw) - f(z_0 + bw) = (a-b)wf'(z_0) \left[1 + \frac{a+b}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} w + \frac{a^2 + ab + b^2}{6} \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} w^2 + \dots \right],$$

si además aw es tal que

$$\left| \frac{a+b}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} w + \frac{a^2 + ab + b^2}{6} \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} w^2 + \dots \right| < 1$$

podemos aplicar el desarrollo de $\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$, alrededor de 0, que es válido para u tal que $|u| < 1$. De esta manera

$$\begin{aligned}
& \log (f(z_0 + aw) - f(z_0 + bw)) = \\
& \log ((a-b) w f'(z_0)) + \\
& \quad + \log \left(1 + \frac{a+b}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} w + \frac{a^2 + ab + b^2}{6} \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} w^2 + \dots \right) = \\
& \log ((a-b) w f'(z_0)) + \frac{a+b}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} w + \\
& \quad + \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{6} \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{(a+b)^2}{8} \left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^2 \right] w^2 + \dots
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \log (f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = \\
& \quad = \log (f(z_0 + aw) - f(z_0 + bw)) + \log (f(z_0 + cw) - f(z_0 + dw)) - \\
& \quad \quad - \log (f(z_0 + bw) - f(z_0 + cw)) - \log (f(z_0 + dw) - f(z_0 + aw)) = \\
& \quad = \log (a, b; c, d) + (a-c)(b-d) \left[\frac{f'''(z_0)}{6f'(z_0)} - \frac{1}{4} \left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^2 \right] w^2 + \dots = \\
& \quad = \log (a, b; c, d) + \frac{1}{6} (a-c)(b-d) S_f(z_0) w^2 + \dots
\end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{aligned}
& (f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = \\
& \quad (a, b; c, d) \left[1 + \frac{1}{6} (a-c)(b-d) S_f(z_0) w^2 + o(w^2) \right]
\end{aligned}$$

para aw, bw, cw, dw en una vecindad de z_0 . □

A continuación haremos uso de este resultado para probar un teorema que será sumamente útil en el siguiente capítulo.

TEOREMA 3.3. *Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa no constante que es analítica en una región $R \subset \mathbb{C}$. f es una transformación de Möbius si y sólo si para cada $z_0 \in R$ existen cuatro números distintos a, b, c, d tales que*

$$\begin{aligned}
& (f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = \\
& \quad (a, b; c, d) = (z_0 + aw, z_0 + bw; z_0 + cw, z_0 + dw)
\end{aligned}$$

para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 + aw, z_0 + bw, z_0 + cw, z_0 + dw$ pertenecen a una vecindad de z_0 .

Si f es una transformación de Möbius, por el Teorema 2.8, tenemos que

$$(f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = (z_0 + aw, z_0 + bw; z_0 + cw, z_0 + dw) = (a, b; c, d)$$

para cualquier z_0 en R y cualesquiera a, b, c, d, w tales que $z_0 + aw, z_0 + bw, z_0 + cw, z_0 + dw$ pertenecen a R .

Para probar la suficiencia sea $z_0 \in R$ y supongamos que

$$(f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = (a, b; c, d) = (aw, bw; cw, dw) = (z_0 + aw, z_0 + bw; z_0 + cw, z_0 + dw)$$

para cuatro números fijos distintos a, b, c, d y para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 + aw, z_0 + bw, z_0 + cw, z_0 + dw$ pertenecen a una vecindad $V \subset R$ de z_0 . Podemos suponer que en V se satisface la relación de la Proposición anterior, pues si no fuera así de todos modos podemos encontrar una vecindad de z_0 contenida en V donde se satisface. Así

$$(f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = (aw, bw; cw, dw) \left[1 + \frac{1}{6} (aw - cw) (bw - dw) S_f(z_0) + o(w^2) \right] = (a, b; c, d) \left[1 + \frac{1}{6} (a - c) (b - d) S_f(z_0) w^2 + o(w^2) \right],$$

para w suficientemente pequeña.

Como $(f(z_0 + aw), f(z_0 + bw); f(z_0 + cw), f(z_0 + dw)) = (a, b; c, d)$, tenemos que $\frac{1}{6} (a - c) (b - d) S_f(z_0) w^2 + o(w^2) = 0$. Pero como

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{o(w^2)}{w^2} = 0,$$

necesariamente $\frac{1}{6} (a - c) (b - d) S_f(z_0) = 0$, luego $S_f(z_0) = 0$. De manera que $S_f(z) = 0$ para todo $z \in R$ y por el Teorema 3.2, f es una transformación de Möbius.

3.4. Derivada pre-Schwarziana

DEFINICIÓN 3.2. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función que es analítica en una región R . Para toda $z \in R$ con $f'(z) \neq 0$ definimos la *derivada pre-schwarziana* de f como

$$(3.2) \quad P_f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

LEMA 3.3. $P_{g \circ f} = (P_g \circ f) f' + P_f$.

DEMOSTRACIÓN. Como

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f' \text{ y } (g \circ f)'' = (g'' \circ f) (f')^2 + (g' \circ f) f''$$

obtenemos

$$P_{g \circ f} = \frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} = \left(\frac{g'' \circ f}{g' \circ f} \right) f' + \frac{f''}{f'} = (P_g \circ f) f' + P_f.$$

□

LEMA 3.4. Si $T(z) = \frac{az+b}{z} \in PGL(2, \mathbb{C})$, con $b \neq 0$, entonces $P_T(z) = -\frac{2}{z}$.

Sea $f(z) = \frac{1}{z}$, entonces $P_f(z) = -\frac{2}{z}$. Notemos que $T(z) = a + \frac{b}{z} = g \circ f$, con $g(z) = a + bz$. Como para toda transformación racional lineal entera $U(z) = uz + v$, $P_U = 0$, tenemos

$$P_T(z) = P_{g \circ f}(z) = (P_g \circ f)(z) f'(z) + P_f(z) = P_f(z) = -\frac{2}{z}.$$

TEOREMA 3.4. Si $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función meromorfa no constante tal que $P_f(z) = -\frac{2}{z}$ para toda z en una región $D \subset \mathbb{C}_\infty$, donde f es analítica, entonces $f(z) = \frac{az+b}{z}$, con $b \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $P_f(z) = -\frac{2}{z}$ en D , tenemos que $f'(z) \neq 0$ en D , pero de hecho, como f no es constante, los ceros de $f(z)$ son aislados. De manera que $P_f(z)$ es una función meromorfa, entonces por el Principio de Continuación Analítica, $P_f(z) = -\frac{2}{z}$ para todo \mathbb{C}_∞ , excepto por un número finito de puntos, los ceros de $f'(z)$ y los polos de $f(z)$. Entonces, como $\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z}$, tenemos

$$z f''(z) + f'(z) = -f'(z),$$

que implica

$$zf'(z) + f(z) = a,$$

e integrando nuevamente

$$zf(z) = az + b,$$

para alguna constante compleja b , distinta de 0 pues f es no constante. \square

3.5. Derivada de Newton

DEFINICIÓN 3.3. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función analítica en una región R . Para toda $z \in R$ con $f'(z) \neq 0$ definimos la *derivada de Newton* de f como la primera derivada del método de Newton de $f(z)$, es decir

$$(3.3) \quad N_f(z) = \left(z - \frac{f(z)}{f'(z)} \right)' = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2}.$$

LEMA 3.5. Si $T(z) = \frac{b}{z+d} \in PGL(2, \mathbb{C})$, entonces $N_T(z) = 2$.

DEMOSTRACIÓN. Como $T'(z) = -\frac{b}{(z+d)^2}$, entonces $z - \frac{T(z)}{T'(z)} = z + (z+d)$. Por tanto $N_T(z) = 2$. \square

TEOREMA 3.5. Si $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función meromorfa no constante tal que $N_f(z) = 2$ para toda z en una región $D \subset \mathbb{C}_\infty$, donde f es analítica, entonces $f(z) = \frac{b}{z+d}$, con $b \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos igual que en las secciones anteriores. Como $N_f(z) = 2$ en D , tenemos que $f'(z) \neq 0$ en D , pero, como f no es constante, los ceros de $f(z)$ son aislados. De manera que $N_f(z)$ es una función meromorfa, por lo que, aplicando el Principio de Continuación Analítica, $N_f(z) = 2$ para todo \mathbb{C}_∞ , excepto para un número finito de puntos, los ceros de $f'(z)$ y los polos de $f(z)$. Así tenemos

$$\frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} = 2,$$

entonces

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2f'(z)}{f(z)},$$

que implica

$$\ln f'(z) = \ln f^2(z) - \ln(-b)$$

para alguna constante b distinta de 0. Así

$$f'(z) = -\frac{f^2(z)}{b}, \text{ que reacomodando términos queda}$$

$$\frac{f'(z)}{f^2(z)} = -\frac{1}{b},$$

e integrando nuevamente obtenemos el resultado

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z+d}{b}.$$

□

4 Caracterizaciones Geométricas de las Transformaciones de Möbius

En el capítulo 2 estudiamos las propiedades geométricas de las transformaciones de Möbius. En este capítulo usaremos todo lo que se ha desarrollado en los 3 anteriores para ver que algunas de esas propiedades son suficientes para garantizar que una transformación es de Möbius. Así mismo veremos otras propiedades geométricas necesarias y suficientes de estas transformaciones.

4.1. Transformaciones conformes

En la sección 2.2 probamos que las transformaciones de Möbius son directamente conformes. Ahora probemos que de hecho son las únicas transformaciones directamente conformes de \mathbb{C}_∞ en \mathbb{C}_∞ . Lo que nos llevará a la primera caracterización geométrica: *“las transformaciones de Möbius son las únicas funciones de \mathbb{C}_∞ en sí mismo que conservan ángulos dirigidos”*.

TEOREMA 4.1. *Toda función $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ directamente conforme es una transformación de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ directamente conforme. Sea $h \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $h(f(\infty)) = \infty$. Probemos que $g(z) = (h \circ f)(z)$ es meromorfa en cada punto $a \in \mathbb{C}_\infty$:

1. Si $a \in \mathbb{C}$ y $g(a) \in \mathbb{C}$, como g es directamente conforme en a , entonces, por el Teorema del mapeo conforme (1.9), $g'(a)$ existe y es distinta de 0, así que g es analítica e inyectiva en una vecindad de a .
2. Si $a \in \mathbb{C}$ y $g(a) = \infty$, componiendo con $J(z) = z^{-1}$, como J es directamente conforme, $J \circ g$ es directamente conforme; y como $(J \circ g)(a) = 0$, por el caso anterior $J \circ g$ es analítica con un cero simple en a , es decir que g es meromorfa con un polo simple en a .
3. Como $g(\infty) = \infty$, tenemos que $(g \circ J)(0) = \infty$, entonces, por el caso anterior $g \circ J$ es meromorfa con un polo simple en 0, o bien g es meromorfa con un polo simple en ∞ .

De esta manera g es meromorfa en \mathbb{C}_∞ , entonces g' es meromorfa y racional. En el caso 1, $g'(a) \neq 0$; en el caso 2, a partir de la serie de Laurent de g alrededor de a ,

se obtiene que g' tiene un polo doble en a , entonces $g'(a) = \infty \neq 0$. En el caso 3, como $(g \circ J)$ tiene un polo simple en 0,

$$g(z) = b_1 z + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$$

para z suficientemente grande, con $b_1 \neq 0$, así que

$$g'(z) = b_1 - a_1 z^{-2} - \dots$$

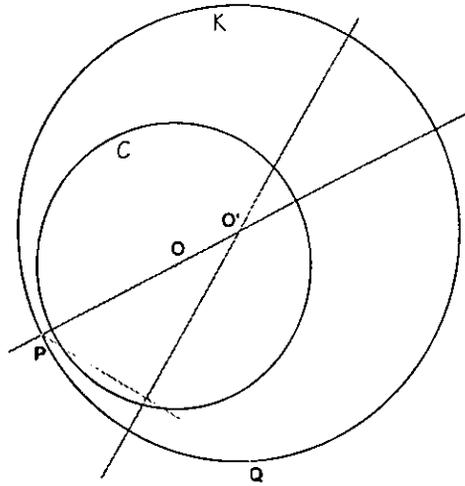
para z suficientemente grande, entonces $g'(\infty) = b_1 \neq 0$.

Entonces $g'(z)$ es una función racional que no toma el valor 0, entonces, por el Teorema 1.4, g' es una función constante distinta de 0. Así que $g(z)$ es un polinomio de grado 1, y entonces $g(z) \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$. Como h es un automorfismo de la esfera de Riemann, concluimos que $f = h^{-1} \circ g$ es también una transformación de Möbius. \square

4.2. Transformaciones circulares

También en la sección 2.2 vimos que las transformaciones de Möbius llevan círculos en círculos, en esta sección probaremos que todas las transformaciones biyectivas y circulares de \mathbb{C}_∞ en \mathbb{C}_∞ son una transformación de Möbius o una transformación de Möbius previamente compuesta con la conjugación compleja.

Primero notemos que si dos puntos distintos P y Q se encuentran en la región exterior (interior) de un círculo \mathcal{C} que no pasa por ∞ , entonces podemos construir un círculo \mathcal{K} que pase por esos dos puntos y no interseque a \mathcal{C} . Para ello sea O el centro de \mathcal{C} y supongamos que P es el punto más cercano (lejano) a O , o de \mathcal{C} , (si ambos puntos estuvieran a la misma distancia de O , \mathcal{K} sería el círculo de radio OP), podemos hacer que P sea el punto de \mathcal{K} más cercano (lejano) a \mathcal{C} poniendo el centro O' de \mathcal{K} en la intersección de la recta OP con la mediatriz del segmento PQ .



También será útil observar que si $g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ es una transformación circular y biyectiva y si \mathcal{K}' es un círculo, entonces existe un único círculo \mathcal{K} tal que $g(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$. Esto se debe a que si damos tres puntos distintos en \mathcal{K}' , sus preimágenes son tres puntos distintos, sea \mathcal{K} el círculo que pasa por dichos tres puntos, es claro que $g(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$.

TEOREMA 4.2. *Toda transformación circular y biyectiva $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una transformación de Möbius o la conjugación compleja seguida de una transformación de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación circular y biyectiva. Por el Teorema 2.6 existe una única transformación de Möbius $T(z)$ que manda a $f(0)$ en el 0, a $f(1)$ en el 1 y a $f(\infty)$ en ∞ , entonces también $T(z)$ manda a $f(0)$, $f(1)$ y $f(\infty)$ en 0, 1 e ∞ respectivamente. Sea $h(z)$, de entre estas dos funciones, la que manda a $f(i)$ en el semiplano superior de \mathbb{C} . Sea $g(z) = (h \circ f)(z)$, entonces $g(z)$ es circular, uno a uno, y cumple que

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ g(1) &= 1, \\ g(\infty) &= \infty \text{ y} \\ \operatorname{Im}(g(i)) &> 0. \end{aligned}$$

Queremos probar que $g(z)$ es la identidad, pues entonces $f(z) = T^{-1}(z)$ o bien $f(z) = T^{-1}(\bar{z})$ y el Teorema estaría demostrado.

Observemos que como $g(\infty) = \infty$, $g(z)$ transforma líneas rectas en líneas rectas, además, como $g(0) = 0$, transforma líneas rectas por el origen en líneas rectas por el origen, y en particular, como $g(1) = 1$, g transforma al eje real en el eje real.

También podemos ver que g transforma círculos tangentes en círculos tangentes ya que si P está es el punto común a los dos círculos, $g(P)$ debe pertenecer a la imagen de ambos círculos, que también son círculos, y estos no se pueden intersectar en dos puntos pues de ser así, el otro punto de intersección debe provenir de un punto de intersección distinto a P , pues g es uno a uno.

Notemos que g preserva paralelismo, pues transforma rectas paralelas (que son círculos de \mathbb{C}_∞ tangentes en ∞) en rectas paralelas. Así que g lleva paralelogramos en paralelogramos, y como un rectángulo es un paralelogramo cíclico, g también lleva rectángulos en rectángulos, por lo que g también preserva ortogonalidad.

Entonces el eje imaginario, siendo una recta por el origen ortogonal al eje real, también es llevado en sí mismo, y entonces $g(i) = \lambda i$, para algún $\lambda > 0$.

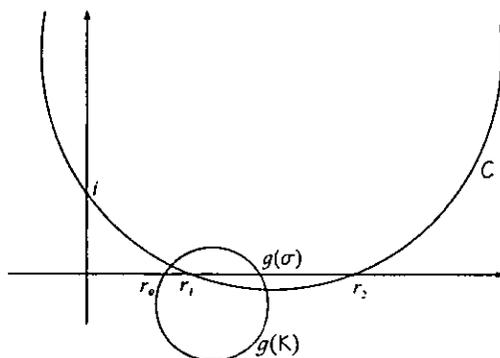
Ahora, si $0, z_1$ y z_2 son tres puntos no colineales, el paralelogramo con vértices $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$ se transforma en el paralelogramo $g(0), g(z_1), g(z_2), g(z_1 + z_2)$, por lo que $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$. Mientras que si $0, z_1$ y z_2 son colineales, entonces $z_1 + z_2$ también está en la misma recta, si w es un punto fuera de esta recta tenemos que, como $0, z_1$ y w no son colineales, $g(w + z_1) = g(w) + g(z_1)$, como $0, w + z_1$ y z_2 no son colineales, $g(w + z_1 + z_2) = g(w + z_1) + g(z_2) = g(w) + g(z_1) + g(z_2)$, y como $0, w$ y $z_1 + z_2$ no son colineales, $g(w + z_1 + z_2) = g(w) + g(z_1 + z_2)$. De donde $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$ para cualesquiera z_1 y z_2 .

Luego $0 = g(0) = g(1 - 1) = g(1) + g(-1) = 1 + g(-1)$, de donde $g(-1) = -1$. Entonces $g(1 + i) = 1 + \lambda i$ y $g(-1 + i) = -1 + \lambda i$. Pero como las rectas por el origen que pasan por $1 + i$ y por $-1 + i$ son ortogonales, también lo son las rectas por el origen que pasan por $1 + \lambda i$ y $-1 + \lambda i$. Es decir que, haciendo el producto punto de $1 + \lambda i$ y $-1 + \lambda i$ como vectores, $\lambda^2 = 1$, y siendo $\lambda > 0$ resulta que $\lambda = 1$. Por tanto $g(i) = i$.

También si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $g\left(\frac{m}{n}\right) = mg\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, es decir $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m}$, y $g\left(\frac{n}{m}\right) = ng\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}$. Análogamente, si $r \in \mathbb{Q}$, $g(ir) = ir$.

Ahora probemos que g es la identidad en todo el eje real. Para ello sea σ un irracional y sean r_0, r_1 y r_2 tres racionales tales que $r_0 < r_1 < \sigma < r_2$. Sea \mathcal{C} el círculo por i, r_1 y r_2 y \mathcal{K} cualquier círculo por r_0 y σ , de esta manera \mathcal{C} y \mathcal{K} se intersectan en dos puntos. Bajo $g(z)$, \mathcal{C} va a dar en sí mismo pues $g(i) = i, g(r_1) = r_1$ y $g(r_2) = r_2$, mientras que \mathcal{K} va a dar en un círculo por r_0 y $g(\sigma)$ que debe intersectar a \mathcal{C} en dos puntos distintos, $g(\sigma) \in \mathbb{R}$, así que por la observación al principio de esta sección $r_1 < g(\sigma) < r_2$, porque si no $g(\sigma)$ caería fuera de \mathcal{C} y entonces podríamos construir un círculo \mathcal{K}' por r_0 y $g(\sigma)$ que no toque a \mathcal{C} , cuya imagen inversa sería un círculo por r_0 y σ que tendría que intersectar a \mathcal{C} en dos puntos, pero entonces \mathcal{K}' también tendría que cortar a \mathcal{C} en dos puntos y lo habíamos construido de manera que no tocara a \mathcal{C} . Finalmente, como $r_1 < g(\sigma) < r_2$ para cualesquiera dos racionales r_1 y r_2 tales que $r_1 < \sigma < r_2$, podemos concluir que si nos aproximamos a σ por racionales a ambos lados resulta que $g(\sigma) = \sigma$.

Analogamente se prueba que $g(i\sigma) = i\sigma$ y por la aditividad tenemos que $g(z) = g(x + iy) = g(x) + g(iy) = x + iy = z$ para toda $z \in \mathbb{C}_\infty$. \square

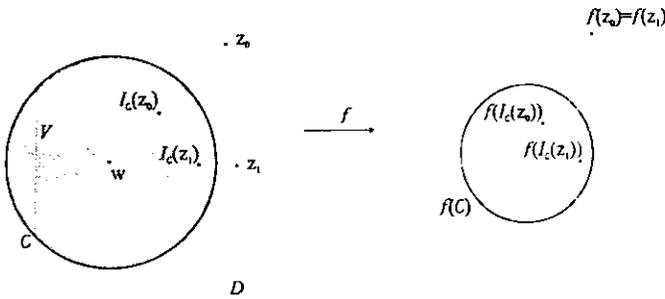


En vista de este Teorema, las únicas transformaciones circulares, biyectivas y meromorfas son las transformaciones de Möbius, pero de hecho probaremos que la biyectividad no es necesaria.

TEOREMA 4.3. *Toda transformación circular y meromorfa de \mathbb{C}_∞ en \mathbb{C}_∞ es una transformación de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función circular y meromorfa. Sea D la región donde f es analítica y supongamos que f no es inyectiva en D . Entonces existen dos puntos distintos z_0 y z_1 en D tales que $f(z_0) = f(z_1)$. Notemos que como f no es constante, existe $w \in D$ distinto de z_0 y z_1 tal que $f'(w) \neq 0$, entonces podemos dar un disco abierto V alrededor de w cuya cerradura esté contenida en D y tal que z_0 y z_1 son puntos exteriores de V y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in V$.

Sea C el círculo frontera de V y sea I_C la inversión en C . Entonces, como z_0 y z_1 son puntos exteriores de V , $I_C(z_0)$ y $I_C(z_1)$ pertenecen a V . Luego notemos que $f(C)$ es un círculo y entonces podemos aplicar el Principio de Reflexión de Schwarz (Teorema 2.11) para concluir que $f(z_0)$ y $f(z_1)$ son simétricos a $f(I_C(z_0))$ y $f(I_C(z_1))$ en $f(C)$ respectivamente. Así que, como $f(z_0) = f(z_1)$, entonces $f(I_C(z_0)) = f(I_C(z_1))$. Pero $I_C(z_0)$ y $I_C(z_1)$ son dos puntos distintos en V , donde f es inyectiva, así que $f(I_C(z_0))$ y $f(I_C(z_1))$ son distintos, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto f es inyectiva en D .



Pero como f es una función racional no constante, por el Teorema 1.4, f toma todos los valores en \mathbb{C}_∞ tantas veces como su grado y hemos visto que es de grado 1 en D , luego f es biyectiva. \square

Esta es una de las caracterizaciones de las transformaciones de Möbius más conocidas, aparece en un artículo de Darboux del siglo XIX. No obstante, la prueba que acabamos de presentar fue publicada por Hiroshi Haruki en 1972 [H1]. En las siguientes 3 secciones mostraremos caracterizaciones que generalizan la que acabamos de presentar.

4.3. Razón cruzada

En la sección 2.3 definimos la razón cruzada de 4 puntos en \mathbb{C}_∞ y probamos que la razón cruzada es un invariante de las transformaciones de Möbius. Ahora mostraremos que las transformaciones de Möbius son las únicas funciones meromorfas de \mathbb{C}_∞ en sí mismo que preservan la razón cruzada.

TEOREMA 4.4. *Toda transformación meromorfa, no constante de \mathbb{C}_∞ en sí mismo que preserve la razón cruzada de cualesquiera 4 puntos distintos en \mathbb{C}_∞ es una transformación de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa que preserve la razón cruzada de cualesquiera 4 puntos distintos, es decir

$$(f(z_0), f(z_1); f(z_2), f(z_3)) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

para cualesquiera z_0, z_1, z_2, z_3 en \mathbb{C}_∞ . En particular, si $R \subset \mathbb{C}_\infty$ es la región donde f es inyectiva y si fijamos a z_1, z_2 y z_3 en R , tendríamos

$$(f(z), f(z_1); f(z_2), f(z_3)) = (z, z_1; z_2, z_3)$$

para toda $z \in \mathbb{C}_\infty$. Entonces

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z_1) - f(z_2)} \cdot \frac{f(z_2) - f(z_3)}{f(z_3) - f(z)} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z}$$

para toda $z \in \mathbb{C}_\infty$, de donde

$$f(z) = \frac{(kf(z_3) - f(z_1))z + z_3f(z_1) - kz_1f(z_3)}{(k-1)z + z_3 - kz_1}$$

con

$$k = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_2) - f(z_3)} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

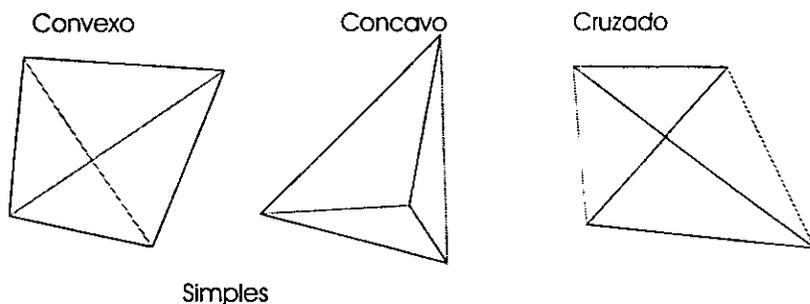
Por tanto $f(z)$ es una transformación de Möbius. En caso de que $z = \infty$ o que para alguna j , $z_j = \infty$ o $z = z_j$ tomando límites se obtiene el resultado. \square

Este teorema generaliza la caracterización de la sección anterior puesto que 4 puntos pertenecen a un círculo si y sólo si su razón cruzada es real, de manera que, si f preserva razón cruzada, cualesquiera 4 puntos en un círculo son enviados en 4 puntos cíclicos, en particular, si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos, fijos sobre un círculo \mathcal{C} y z se mueve sobre \mathcal{C} , $f(z)$ se mueve sobre el círculo determinado por $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$, de manera que f manda círculos en círculos.

En lo que resta de este capítulo mostraremos las caracterizaciones geométricas de las transformaciones de Möbius que se han encontrado en los últimos 10 años, de las cuales las siguientes dos son una generalización de la que acabamos de ver.

4.4. Suma de ángulos opuestos en cuadriláteros

Podemos dar una clasificación de los cuadriláteros de acuerdo a si sus diagonales puedan dentro o fuera del cuadrilátero. Un cuadrilátero es *convexo* si sus diagonales caen en el interior del cuadrilátero; es *concavo* si una diagonal cae dentro y la otra fuera; y es *cruzado* si sus dos diagonales caen en el exterior del cuadrilátero. Además decimos que un cuadrilátero es *simple* si no es cruzado, es decir, si al menos una de sus diagonales cae en el interior del cuadrilátero.



El siguiente Teorema de Haruki y Temístocles Rassias [HR1] prueba que las transformaciones de Möbius son las únicas que envían cuadriláteros simples en cuadriláteros simples conservando la suma de ángulos opuestos del cuadrilátero.

TEOREMA 4.5. *Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa. f es una transformación de Möbius si y sólo si para cualquier cuadrilátero simple $ABCD$ contenido en R se tiene que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$ son los vértices de un cuadrilátero simple y $\angle A + \angle C = \angle A' + \angle C'$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es una transformación de Möbius, es inyectiva y la imagen de un cuadrilátero simple es un cuadrilátero simple. Puesto que f preserva la razón cruzada (Teorema 2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \angle A' + \angle C' &= \arg \frac{B' - A'}{D' - A'} + \arg \frac{D' - C'}{B' - C'} \\ &= \arg(B', A'; D', C') \\ &= \arg(B, A; D, C). \\ &= \angle A + \angle C. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que f conserva la suma de ángulos opuestos. Como f es analítica e inyectiva en R tenemos que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$ y además $f(R) \subset \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in R$, entonces existe un disco abierto B_r de radio r y centro z_0 contenido en R . Más aún, como $f'(z_0) \neq 0$, por el teorema de la función inversa, existe un disco B_s de radio s y centro z_0 con $s \leq r$ tal que f es una biyección en B_s . Sea $ABCD$ un cuadrado con centro en z_0 contenido en B_s , entonces podemos expresar a A, B, C y D como

$$z_0 + w, z_0 + iw, z_0 - w \text{ y } z_0 - iw \quad \text{con } 0 < |w| < s, \text{ respectivamente.}$$

Como f es biyectiva en B_s , los cuatro puntos A', B', C' y D' son distintos y son los vértices de un cuadrilátero simple para todo w tal que $0 < |w| < s$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned}\angle A + \angle C = \pi &= \angle A' + \angle C' \\ \pi &= \arg \frac{(f(z_0 + iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 - iw) - f(z_0 - w))}{(f(z_0 - iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + iw) - f(z_0 - w))}\end{aligned}$$

para toda w con $0 < |w| < s$. Sea

$$h(w) = \frac{(f(z_0 + iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 - iw) - f(z_0 - w))}{(f(z_0 - iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + iw) - f(z_0 - w))},$$

entonces, como f es analítica e inyectiva en B_s , el denominador de $h(w)$ no se anula y así $h(w)$ es analítica para toda w con $0 < |w| < s$. Probemos que $h(w)$ es analítica en 0. Para ello apliquemos la Regla de L'Hopital para calcular

$$\begin{aligned}\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + iw) - f(z_0 + w)}{f(z_0 - iw) - f(z_0 + w)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{if'(z_0 + iw) - f'(z_0 + w)}{-if'(z_0 - iw) - f'(z_0 + w)} \\ &= \frac{f'(z_0) - if'(z_0)}{f'(z_0) + if'(z_0)} \\ &= \frac{1 - i}{1 + i}\end{aligned}$$

ya que $f'(z_0) \neq 0$. Análogamente

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 - iw) - f(z_0 - w)}{f(z_0 + iw) - f(z_0 - w)} = \frac{1 - i}{1 + i},$$

por lo que

$$\lim_{w \rightarrow 0} h(w) = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 = -1.$$

Luego tenemos que h tiene en 0 una singularidad removible, por lo que si definimos $h(0) = -1$, $h(w)$ es analítica en 0 y por tanto analítica para toda w con $|w| < s$. Más aún, $\arg h(w) = \pi$ para toda w con $|w| < s$, es decir que $h(w)$ pertenece al eje real para toda w con $|w| < s$. Afirmamos que $h(w)$ es constante para toda w con $|w| < s$, ya que si no lo es, entonces existe w_0 tal que $h'(w_0) \neq 0$, lo que implica que existe un abierto U , con $|w| < s$ para toda $w \in U$, alrededor de w_0 , en el que h es una biyección, de tal manera que $h(U)$ es un conjunto abierto de \mathbb{C} , pero entonces $h(U) \subset \mathbb{R}^-$, con lo que $h(U)$ no podría ser un abierto de \mathbb{C} . De esta forma resulta que $h(w) = -1$ para toda w con $|w| < s$. Aplicando esto a la definición de $h(w)$ tenemos

$$\begin{aligned} (f(z_0 + iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 - iw) - f(z_0 - w)) &= \\ &= -(f(z_0 - iw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + iw) - f(z_0 - w)), \end{aligned}$$

que implica que la razón cruzada

$$(f(z_0 + w), f(z_0 + iw); f(z_0 - w), f(z_0 - iw)) = -1,$$

para toda w tal que $|w| < s$. Pero $s > 0$ y s depende solamente de z_0 , entonces la última expresión es válida para toda $z_0 \in \mathbb{R}$, y como

$$(1, i; -1, -i) = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{-1+i}{-1-i} = -1,$$

podemos aplicar el Teorema 3.3 para concluir que $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una transformación de Möbius. \square

La técnica usada para demostrar la segunda parte de este teorema será utilizada con ligeros cambios en las siguientes secciones.

4.5. Cuadriláteros de Apolonio

En el teorema de la sección anterior probamos que las únicas transformaciones que conservan el ángulo de la razón cruzada de 4 puntos son las de Möbius. En esta sección probaremos que las únicas transformaciones que conservan la norma de la razón cruzada de 4 puntos son las transformaciones de Möbius, el resultado fué enunciado por Piyapong Niamsup [Nm1] a partir de una versión más débil de Haruki, Rassias [HR2].

DEFINICIÓN 4.1. Un *cuadrilátero de Apolonio* es un cuadrilátero $ABCD$ en el plano tal que $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

EJEMPLO. Cualquier cuadrado o rombo es un cuadrilátero de Apolonio ya que sus 4 lados son iguales.

EJEMPLO. Si $ABCD$ es tal que B y D son dos puntos cualesquiera en un círculo o recta C y A y C son dos puntos simétricos respecto a C , entonces $ABCD$ es un cuadrilátero de Apolonio. En efecto, por el Teorema de Apolonio (1.14) C es el círculo de Apolonio de A y C en la razón $k = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, de donde se sigue que $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. De hecho así son todos los cuadriláteros de Apolonio.

TEOREMA 4.6. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa. Entonces f es una transformación de Möbius si y sólo si para cada λ -cuadrilátero de Apolonio $ABCD$ contenido en R , se tiene que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$ son los vértices de un λ -cuadrilátero de Apolonio.

DEMOSTRACIÓN. Si f es una transformación de Möbius, como f preserva la razón cruzada (Teorema 2.8) tenemos

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = |(A, B; C, D)| \\ &= |(A', B'; C', D')| \\ &= \frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot D'A'}.\end{aligned}$$

Inversamente, si f lleva los vértices de un λ -cuadrilátero de Apolonio en los vértices de un λ -cuadrilátero de Apolonio. Como $f(z)$ es analítica e inyectiva en R , $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$. Sea $z_0 \in R$, entonces existe un disco cerrado D_s de radio s y centro z_0 contenido en R . Sea $ABCD$ un λ -rectángulo de Apolonio y representemos sus vértices por

$$z_0 + kw, z_0 + \bar{k}w, z_0 - kw \text{ y } z_0 - \bar{k}w \quad \text{con } 0 < |w| \leq s \text{ y } k = \frac{1 - i\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda}}.$$

Como f es inyectiva en D_s , entonces A', B', C' y D' son cuatro puntos distintos, y por la hipótesis

$$\begin{aligned}|f(z_0 + \bar{k}w) - f(z_0 + kw)| |f(z_0 - \bar{k}w) - f(z_0 - kw)| &= \\ = \lambda |f(z_0 - kw) - f(z_0 + \bar{k}w)| |f(z_0 + kw) - f(z_0 - \bar{k}w)|\end{aligned}$$

para toda w con $0 < |w| \leq s$; es decir que

$$\frac{|(f(z_0 + \bar{k}w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 - \bar{k}w) - f(z_0 - kw))|}{|(f(z_0 - kw) - f(z_0 + \bar{k}w))(f(z_0 + kw) - f(z_0 - \bar{k}w))|} = \lambda$$

para toda w con $0 < |w| \leq s$. Sea $h(w) = \frac{(f(z_0 + \bar{k}w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 - \bar{k}w) - f(z_0 - kw))}{(f(z_0 - kw) - f(z_0 + \bar{k}w))(f(z_0 + kw) - f(z_0 - \bar{k}w))}$ de manera que, como f es analítica e inyectiva en D_s , el denominador de $h(w)$ no se anula y $h(w)$ es analítica para toda w con $0 < |w| \leq s$. Ahora veamos que 0 es una singularidad removible de $h(w)$, para ello apliquemos la Regla de L'Hopital al calcular

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \bar{k}w) - f(z_0 + kw)}{f(z_0 - kw) - f(z_0 + \bar{k}w)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\bar{k}f'(z_0 + \bar{k}w) - kf'(z_0 + kw)}{-kf'(z_0 - kw) - \bar{k}f'(z_0 + \bar{k}w)} \\ &= \frac{\bar{k}f'(z_0) - kf'(z_0)}{-\bar{k}f'(z_0) - kf'(z_0)} \\ &= -i\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue por ser $f'(z_0) \neq 0$. Análogamente

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 - \bar{k}w) - f(z_0 - kw)}{f(z_0 + kw) - f(z_0 - \bar{k}w)} = -i\sqrt{\lambda},$$

con lo que

$$\lim_{w \rightarrow 0} h(w) = -\lambda.$$

De manera que, 0 es una singularidad removible de $h(w)$, por lo que al definir $h(w)$ en 0 como $h(0) = -\lambda$, $h(w)$ es analítica en 0 y por tanto para toda w con $|w| \leq s$. Además, como $|h(w)| = \lambda$ para toda w con $|w| \leq s$, aplicando el Teorema del Módulo Máximo, $h(w)$ es constante para toda w con $|w| \leq s$. Entonces $h(w) = -\lambda$ para toda w con $|w| \leq s$. Aplicando esto a la definición de $h(w)$ tenemos

$$\begin{aligned} (f(z_0 + \bar{k}w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 - \bar{k}w) - f(z_0 - kw)) &= \\ = -\lambda (f(z_0 - kw) - f(z_0 + \bar{k}w))(f(z_0 + kw) - f(z_0 - \bar{k}w)), \end{aligned}$$

que implica que la razón cruzada

$$(f(z_0 + kw), f(z_0 + \bar{k}w); f(z_0 - kw), f(z_0 - \bar{k}w)) = -\lambda$$

para toda w tal que $|w| \leq s$. Pero $s > 0$ y s depende solamente de z_0 , entonces la última expresión es válida para toda $z_0 \in R$, y como

$$(k, \bar{k}; -k, -\bar{k}) = \frac{k - \bar{k}}{k + k} \cdot \frac{-k + \bar{k}}{-\bar{k} - k} = -\lambda,$$

podemos aplicar el Teorema 3.3 para concluir que $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una transformación de Möbius. \square

4.6. Puntos de Apolonio de un triángulo

En los ejemplos de la sección anterior vimos que dados 3 puntos A, B, C , podemos construir un cuadrilátero de Apolonio $ABCD$ situando al punto D sobre el círculo de Apolonio de A y C que pasa por B . Esto nos lleva a preguntarnos qué pasa con la intersección de los 3 círculos de Apolonio obtenidos de los 3 puntos A, B, C en distintos órdenes, si es que existe.

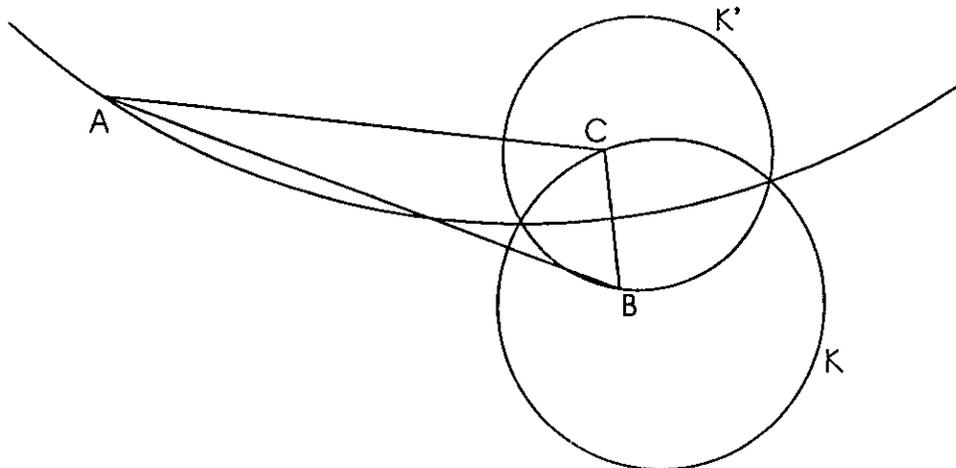
DEFINICIÓN 4.3. Dado un triángulo de vértices A, B y C , decimos que un punto L es un *punto de Apolonio* del triángulo ABC si :

$$AL \cdot BC = BL \cdot CA = CL \cdot AB.$$

EJEMPLO. El gravicentro G de un triángulo equilátero ABC es un punto de Apolonio, pues $AB = BC = CA$ y $AG = BG = CG$.

LEMA 4.1. *Todo triángulo tiene puntos de Apolonio, y tiene a lo más 2.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de punto de Apolonio tenemos que $\frac{BC}{CA} = \frac{BL}{LA}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$, de donde resulta que L se encuentra tanto en el círculo de Apolonio \mathcal{K} de A y B que pasa por el punto C como en el círculo de Apolonio \mathcal{K}' de A y C que pasa por el punto B . Es decir que L está en la intersección de dos círculos cuya intersección no es vacía ya que \mathcal{K} pasa por C y separa a A y a B (uno de los dos queda en el interior de \mathcal{K} y otro en el exterior, supongamos que A está en el interior), mientras que \mathcal{K}' pasa por B , que está en el exterior de \mathcal{K} , cortando al segmento AC , que está en el interior de \mathcal{K} , con lo que \mathcal{K}' debe cortar a \mathcal{K} .



Ahora notemos que basta que L esté en la intersección de estos dos círculos para que también esté sobre el tercer círculo de Apolonio, el de B y C que pasa por A , ya que como $\frac{BC}{CA} = \frac{BL}{LA}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$, entonces $BC \cdot AL = BL \cdot CA = AB \cdot CL$,

de donde $\frac{CA}{AB} = \frac{CL}{LB}$. Por lo tanto estos tres círculos concurren y existen a lo más dos puntos de Apolonio (el número máximo de puntos en la intersección de dos círculos). \square

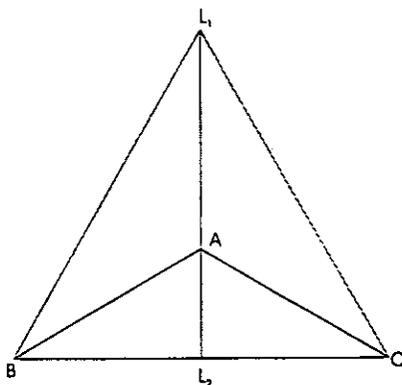
EJEMPLO. Si un triángulo isósceles ABC con los ángulos en B y C iguales a 30° es dibujado dentro del triángulo equilátero L_1BC , y L_2 es el punto medio de BC , entonces L_1 y L_2 son los puntos de Apolonio del triángulo ABC . Esto se puede ver con un cálculo directo: si $a = BC$, entonces

$$AB = AC = AL_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad BC = BL_1 = CL_1 = a$$

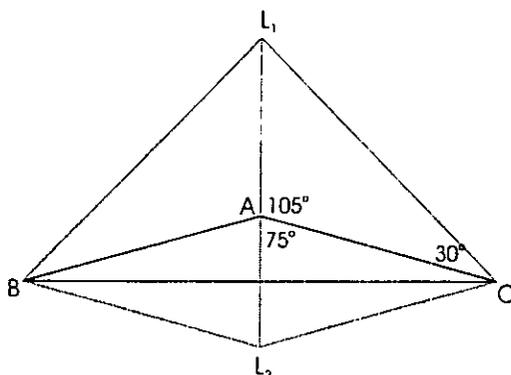
y

$$AL_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad BL_2 = CL_2 = \frac{a}{2}.$$

Por lo tanto $AL_1 \cdot BC = BL_1 \cdot CA = CL_1 \cdot AB = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$ y $AL_2 \cdot BC = BL_2 \cdot CA = CL_2 \cdot AB = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$.



EJEMPLO. Si un triángulo ABC isósceles, con los ángulos en B y C iguales a 15° , es dibujado dentro del triángulo isósceles rectángulo L_1BC , con hipotenusa BC ; y L_2 es el reflejo de A en el segmento BC , entonces L_1 y L_2 son los puntos de Apolonio del triángulo ABC . Esto se prueba usando la Ley de senos, viendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{sen}15^\circ}{\text{sen}150^\circ} = \frac{\cos75^\circ}{2\text{sen}75^\circ \cos75^\circ} = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}75^\circ} = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}105^\circ} = \frac{AL_1}{L_1C} = \frac{AL_2}{L_2C}$ y $\frac{AB}{CA} = \frac{L_1B}{CL_1} = \frac{L_2B}{CL_2}$.



LEMA 4.2. L es punto de Apolonio del triángulo ABC si y sólo si el triángulo pedal de ABC respecto de L es equilátero.

DEMOSTRACIÓN. Sea R el circunradio del triángulo ABC . L es un punto de Apolonio de ABC si y sólo si

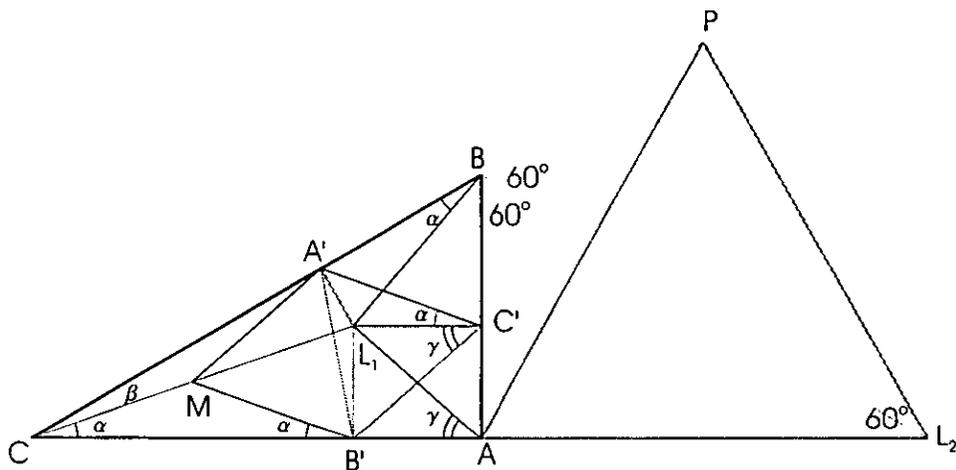
$$AL \cdot BC = BL \cdot CA = CL \cdot AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{AL \cdot BC}{2R} = \frac{BL \cdot CA}{2R} = \frac{CL \cdot AB}{2R},$$

y en vista del Lema 1.14 esto pasa si y sólo si el triángulo pedal del triángulo ABC respecto de L es equilátero. \square

EJEMPLO. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle B = 60^\circ$ y $\angle C = 30^\circ$. Entonces un punto de Apolonio L_1 cae dentro de ABC con $\angle BL_1C = 150^\circ$, $\angle CL_1A = 120^\circ$, $\angle AL_1B = 90^\circ$, y el otro punto L_2 es el reflejo de C en el lado AB . Primero veamos que el triángulo pedal respecto de L_2 es equilátero. Para ello sea P el pie de la altura por L_2 al lado BC , los otros dos pies de alturas son A y L_2 , entonces $\angle ABP = 120^\circ$ y $\triangle ABL_2 \cong \triangle PBL_2$, de donde $AL_2 = PL$ y como $\angle AL_2P = 60^\circ$ resulta lo que queremos. Ahora, para probar que $\angle BL_1C = 150^\circ$, $\angle CL_1A = 120^\circ$, $\angle AL_1B = 90^\circ$, supongamos que el triángulo pedal respecto del punto de Apolonio L_1 es equilátero de lado d , sean A', B', C' los pies de alturas opuestos a A, B, C respectivamente, entonces $AC'L_1B'$ es un rectángulo, de manera que $AL_1 = B'C' = d$. Ahora notemos que $2 \cdot AL_1 = CL_1$, puesto que $2 \cdot AB = BC$ y $\frac{CL_1}{AL_1} = \frac{BC}{AB} = 2$ por la definición de punto de Apolonio, de donde resulta que si M es el punto medio de CL_1 , $\angle MCB' = \angle MB'C = \alpha$, $\angle MCA' = \angle MA'C = \beta$, donde $\alpha + \beta = 30^\circ$, y $CM = ML_1 = MB' = MA' = A'B' = d$, es decir que $MB'C'A'$ es un rombo. Así, como $MB' \parallel A'C'$, $\angle L_1C'A' = \angle MB'C = \alpha$, además $\angle L_1C'A' = \angle L_1BC$, por ser $L_1C'BA'$ cíclico, y $\angle L_1C'B' = \angle L_1AC = 60^\circ -$

$\angle L_1 C' A' = 60^\circ - \alpha$, con lo que $\angle L_1 B C + \angle L_1 C B = 30^\circ$ y $\angle L_1 A C + \angle L_1 C A = 60^\circ$ y podemos concluir lo que queríamos.



Estamos listos para demostrar el siguiente Teorema de Haruki y Rassias [HR3].

TEOREMA 4.7. *Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa. Entonces f es una transformación de Möbius si y sólo si para cada triángulo contenido en R y L un punto de Apolonio del triángulo ABC se tiene que $L' = f(L)$ es un punto de Apolonio del triángulo de vértices $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es una transformación de Möbius, tomando $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$ por medio de un cálculo directo se obtiene que

$$|f(B) - f(A)| = \frac{|B - A|}{|cB + d| |cA + d|}.$$

Usemos esto para probar que L' es un punto de Apolonio del triángulo $A'B'C'$. Dado que L es punto de Apolonio del triángulo ABC , tenemos

$$|L - A| |C - B| = |L - B| |A - C| = |L - C| |B - A|,$$

dividiendo todo entre $|cA + d| |cB + d| |cC + d| |cL + d|$ nos queda

$$|L' - A'| |C' - B'| = |L' - B'| |A' - C'| = |L' - C'| |B' - A'|,$$

es decir que L' es como queríamos probar, un punto de Apolonio de $A'B'C'$.

Ahora supongamos que f manda puntos de Apolonio en puntos de Apolonio. Igual que en los teoremas de las secciones anteriores, sabemos que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in R$ y que $f(R) \subset \mathbb{C}$ debido a que f es analítica e inyectiva en R . Sea $z_0 \in R$, como $f'(z_0) \neq 0$, por el teorema de la función inversa sabemos que existe un abierto B alrededor de z_0 contenido en R y tal que f es una biyección en B . Sea D_s un disco cerrado con centro z_0 y radio s contenido en B y sea ABC un triángulo equilátero con centro en z_0 contenido en D_s , de manera que z_0 es el punto de Apolonio del triángulo ABC . Podemos expresar los vértices A, B, C como

$$z_0 + w, z_0 + kw, z_0 + k^2w \quad \text{con } 0 < |w| \leq s \text{ y } k = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

respectivamente. Como f es biyectiva en D_s , los tres puntos A', B', C' son distintos y no colineales para todo w tal que $0 < |w| \leq s$. Por la hipótesis tenemos que $f(z_0)$ es punto de Apolonio del triángulo $A'B'C'$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(z_0 + w)| |f(z_0 + k^2w) - f(z_0 + kw)| &= \\ &= |f(z_0) - f(z_0 + kw)| |f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2w)| \end{aligned}$$

para toda w tal que $0 < |w| \leq s$, o bien

$$\frac{|(f(z_0) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2w) - f(z_0 + kw))|}{|(f(z_0) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2w))|} = 1.$$

para toda w tal que $0 < |w| \leq s$. Sea

$$h(w) = \frac{(f(z_0) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2w) - f(z_0 + kw))}{(f(z_0) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2w))},$$

como f es analítica e inyectiva en D_s , el denominador de $h(w)$ no se anula y $h(w)$ es analítica para toda w con $0 < |w| \leq s$. Además, como $h(w)$ es analítica y está acotada en el disco agujerado $0 < |w| \leq s$, el 0 es una singularidad removible del $h(w)$ (ver por ejemplo [M, Pág. 249]). Calculemos $h(0) = \lim_{w \rightarrow 0} h(w)$ auxiliándonos de la Regla de L'Hopital en

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0) - f(z_0 + w)}{f(z_0) - f(z_0 + kw)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-f'(z_0 + w)}{-kf'(z_0 + kw)} \\ &= \frac{f'(z_0)}{kf'(z_0)} \\ &= \frac{1}{k}, \quad \text{ya que } f'(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + k^2 w) - f(z_0 + kw)}{f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2 w)} = k^2.$$

Por lo cual $h(0) = k$. Más aún, como $h(w)$ es analítica con $|h(w)| = 1$ para toda w con $|w| \leq s$, el Teorema del Módulo Máximo implica que $h(w)$ es constante en $|w| \leq s$. Aplicando entonces que $h(w) = k$ a la definición de $h(w)$ nos queda que

$$\begin{aligned} (f(z_0) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2 w) - f(z_0 + kw)) &= \\ &= k(f(z_0) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2 w)), \end{aligned}$$

que implica que la razón cruzada

$$(f(z_0), f(z_0 + w); f(z_0 + k^2 w), f(z_0 + kw)) = -k$$

para toda w tal que $|w| \leq s$. Pero $s > 0$ y s depende solamente de z_0 , entonces la última expresión es válida para toda $z_0 \in R$, y como

$$(0, 1; k^2, k) = \frac{-1}{1 - k^2} \cdot \frac{k^2 - k}{k} = -k,$$

podemos aplicar el Teorema 3.3 para concluir que $f : \mathbf{C}_\infty \rightarrow \mathbf{C}_\infty$ es una transformación de Möbius. \square

De lo que se ha visto en las últimas dos secciones es fácil imaginar que el concepto de punto de Apolonio de un triángulo se puede generalizar. El siguiente Teorema se debe a Niamsup [Nm1] y su demostración es muy similar a la que acabamos de presentar.

DEFINICIÓN 4.4. Dado un triángulo de vértices A, B y C , decimos que un punto L es un (κ, λ) -punto de Apolonio del triángulo ABC si

$$AL \cdot BC = \kappa(BL \cdot CA) = \lambda(CL \cdot AB), \text{ con } \kappa, \lambda > 0.$$

OBSERVACIÓN. Si L es un (κ, λ) -punto de Apolonio del triángulo ABC , entonces $ALBC$ es un κ -cuadrilátero de Apolonio y $LABC$ es un λ -cuadrilátero de Apolonio.

OBSERVACIÓN. Para todo punto L del plano distinto de los vértices del triángulo ABC existen κ y λ positivos tales que L es un (κ, λ) -punto de Apolonio del triángulo ABC .

TEOREMA 4.8. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa. Entonces f es una transformación de Möbius si y sólo si para cada triángulo contenido en R y sea L un (κ, λ) -punto de Apolonio del $\triangle ABC$ se tiene que $L' = f(L)$ es un (κ, λ) -punto de Apolonio del triángulo de vértices $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.

4.7. Hexágonos de Apolonio

Siguiendo con la misma idea de las últimas dos secciones presentamos ahora los hexágonos de Apolonio y el último teorema de esta serie publicado por Haruki y Rassias [HR4].

DEFINICIÓN 4.5. Un hexágono $ABCDEF$ es de Apolonio si sus lados satisfacen la ecuación $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

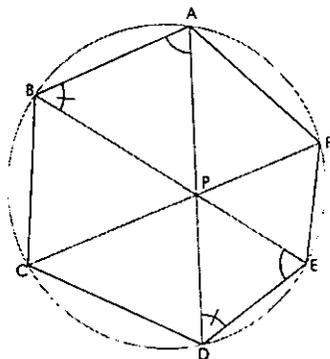
EJEMPLO. Si $ABCDEF$ satisface alguna de las siguientes condiciones es un hexágono de Apolonio:

- el hexágono es regular,
- todos los lados miden lo mismo,
- $AB = DE$, $BC = EF$ y $CD = FA$ (lados opuestos iguales),
- $AB = FA$, $BC = CD$ y $DE = EF$ (i.e. cada lado tiene uno adyacente que mide lo mismo).

EJEMPLO. Si $ABCDEF$ es un hexágono cíclico entonces es un hexágono de Apolonio si y sólo si sus tres diagonales AD , BE , CF concurren.

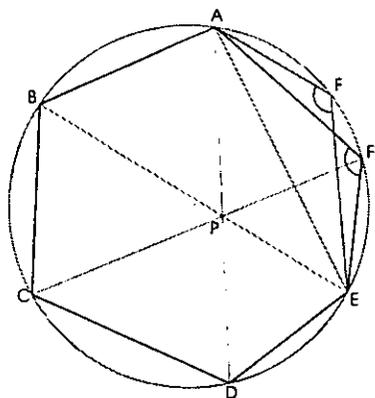
Primero supongamos que las diagonales concurren en un punto P , de esta manera, por ser hexágono cíclico, tenemos que $\angle PAB = \angle PED$ y $\angle PBA = \angle PDE$, así, como también $\angle APB = \angle DPE$, $\triangle APB \sim \triangle DPE$, de donde deducimos que $\frac{AB}{DE} = \frac{PA}{PE} = \frac{PB}{PD}$. Análogamente podemos probar que $\frac{BC}{EF} = \frac{PB}{PF}$ y $\frac{CD}{FA} = \frac{PD}{PF}$ y así concluimos que

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = \frac{PA \cdot PD \cdot PF}{PE \cdot PF \cdot PB} = 1.$$



Ahora, si $ABCDEF$ es un hexágono de Apolonio cíclico, probaremos que sus diagonales concurren. Sea P el punto de intersección de las diagonales AD y BE y sea F' la intersección de CP con el círculo \mathcal{C} . Por la primera parte de este ejemplo $ABCDEF'$ es un hexágono de Apolonio entonces tenemos $AB \cdot CD \cdot EF' = BC \cdot DE \cdot F'A$. Y como $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$, podemos deducir que:

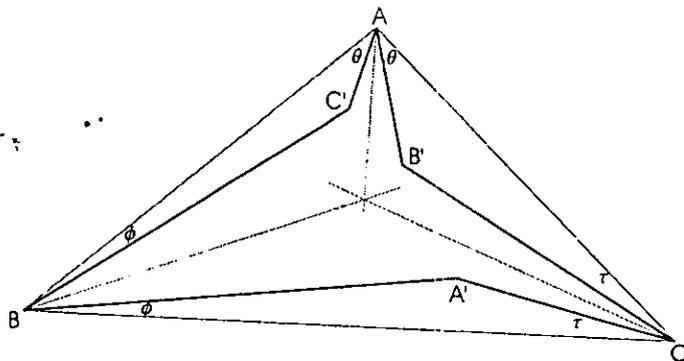
$$\frac{EF}{EF'} = \frac{FA}{F'A'}$$



que junto con el hecho de que $\angle EFA = \angle EF'A$, pues subtenden el mismo arco $ABCE$, implica que $\triangle EFA \sim \triangle EF'A$. Más aún, pues como EF es un lado común de estos triángulos, tenemos que $\triangle EFA \cong \triangle EF'A$. De esta manera concluimos que $F = F'$, por lo que las diagonales de $ABCDEF$ concurren.

EJEMPLO. Sea ABC un triángulo con ángulos $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ en A, B, C respectivamente. Sean $\theta \in (0, \alpha)$, $\phi \in (0, \beta)$ y $\tau \in (0, \gamma)$. Nos basamos en el lado AB para trazar la recta por A que hace un ángulo θ con el segmento AB y la recta por B que hace un ángulo $-\phi$ con el segmento BA , llamemos C' a la intersección de estas

dos rectas. Análogamente construyamos los puntos A' y B' basados en los lados BC y CA respectivamente. Entonces el hexágono $AC'BA'CB'$ es de Apolonio.



Aplicando la Ley de senos a los triángulos $AC'B$, $BA'C$ y $CB'A$ tenemos

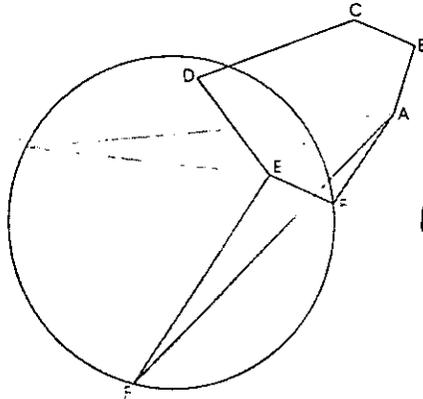
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \theta}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{\text{sen } \tau}{\text{sen } \phi} \text{ y } \frac{CB'}{B'A} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \tau}.$$

Por lo que

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = \frac{\text{sen } \phi \cdot \text{sen } \tau \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen } \theta \cdot \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \tau} = 1,$$

y por tanto $AC'BA'CB'$ es un hexágono de Apolonio. En particular el hexágono es de Apolonio si el triángulo $A'B'C'$ es el triángulo de Morley del triángulo ABC .

EJEMPLO. Dados 5 puntos $ABCDE$ podemos construir un hexágono de Apolonio $ABCDEF$ colocando a F en el círculo de Apolonio de A y E en la razón $k = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DE}$, pues de esta manera $\frac{FA}{EF} = k = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DE}$, y así $ABCDEF$ satisface la definición de hexágono de Apolonio.



ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

TEOREMA 4.9. *Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa. Entonces f es una transformación de Möbius si y sólo si para cada hexágono de Apolonio $ABCDEF$ contenido en R se tiene que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$, $E' = f(E)$ y $F' = f(F)$ son los vértices de un hexágono de Apolonio.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya es usual, supongamos primero que $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius con $ad - bc = 1$, entonces

$$|f(B) - f(A)| = \frac{|B - A|}{|cA + d| |cB + d|}.$$

Como $ABCDEF$ es un hexágono de Apolonio tenemos que

$$|B - A| |D - C| |F - E| = |C - B| |E - D| |A - F|.$$

Si dividimos ambos miembros entre

$$|cA + d| |cB + d| |cC + d| |cD + d| |cE + d| |cF + d|$$

obtenemos

$$|B' - A'| |D' - C'| |F' - E'| = |C' - B'| |E' - D'| |A' - F'|,$$

es decir que $A'B'C'D'E'F'$ es un hexágono de Apolonio.

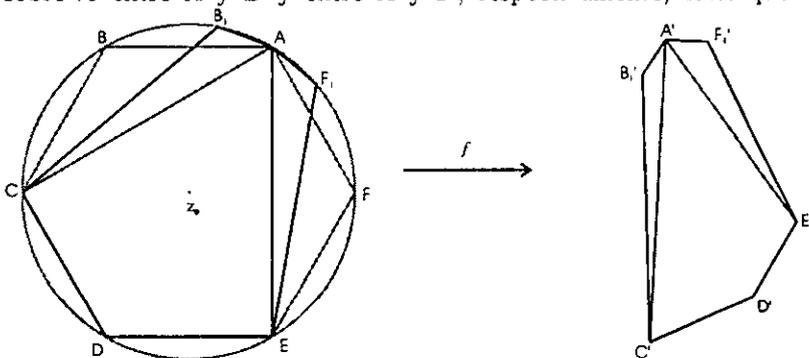
Recíprocamente, sea f tal que las imágenes de vértices de un hexágono de Apolonio son vértices de un hexágono de Apolonio. Como en las secciones previas, sea $z_0 \in R$, entonces existe un disco cerrado D_s de radio s y centro z_0 contenido en R . Sea

$ABCDEF$ un hexágono regular con centro z_0 contenido en D_s , y representemos sus vértices por

$$z_0 + w, z_0 - k^2w, z_0 + kw, z_0 - w, z_0 + k^2w, z_0 - kw$$

$$\text{con } 0 < |w| \leq s \text{ y } k = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

respectivamente. Sea K el círculo que contiene a estos seis puntos. Vamos a probar que $A'C'D'E'$ es un cuadrilátero de Apolonio, para ello sean B_1 y F_1 dos puntos sobre K entre A y B y entre A y F , respectivamente, tales que $AF_1 = AB_1$.



Entonces $B_1C = F_1E$ y

$$AB_1 \cdot CD \cdot EF_1 = B_1C \cdot DE \cdot F_1A,$$

o sea que AB_1CDEF_1 es un hexágono de Apolonio. Podemos representar a B_1 y a F_1 por $z_0 + e^{i\theta}w$ y $z_0 + e^{-i\theta}w$, con $0 < \theta < \pi/3$, respectivamente, y aplicando la hipótesis tenemos

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &|f(z_0 + e^{i\theta}w) - f(z_0 + w)| |f(z_0 - w) - f(z_0 + kw)| \\ & \qquad \qquad \qquad |f(z_0 + e^{-i\theta}w) - f(z_0 + k^2w)| = \\ &|f(z_0 + kw) - f(z_0 + e^{i\theta}w)| |f(z_0 + k^2w) - f(z_0 - w)| \\ & \qquad \qquad \qquad |f(z_0 + w) - f(z_0 + e^{-i\theta}w)| \end{aligned}$$

para toda w con $0 < |w| \leq s$. Ahora, como A, B_1 y F_1 son tres puntos distintos para toda $w \neq 0$ y $\theta \neq 0$, entonces

$$\frac{f(z_0 + e^{i\theta}w) - f(z_0 + w)}{f(z_0 + w) - f(z_0 + e^{-i\theta}w)}$$

está bien definido para toda $w \neq 0$ y $\theta \neq 0$. Apliquemos la Regla de L'Hopital a esta expresión para ver que pasa cuando θ tiende a 0, es decir, cuando B_1 y F_1 tienden simultáneamente a A :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + e^{i\theta}w) - f(z_0 + w)}{f(z_0 + w) - f(z_0 + e^{-i\theta}w)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{ie^{i\theta}wf'(z_0 + e^{i\theta}w)}{ie^{-i\theta}wf'(z_0 + e^{-i\theta}w)} \\ &= \frac{f'(z_0 + w)}{f'(z_0 + w)} = 1 \end{aligned}$$

pues $f'(z_0 + w) \neq 0$. De esta manera, si hacemos que θ tienda a 0 en la ecuación (4.1), nos quedamos con

$$\left| \frac{(f(z_0 - w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2w))}{(f(z_0 + kw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2w) - f(z_0 - w))} \right|,$$

es decir que $A'C'D'E'$ es un cuadrilátero de Apolonio para toda w con $0 < |w| \leq s$. Ahora sea

$$h(w) = \frac{(f(z_0 - w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2w))}{(f(z_0 + kw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2w) - f(z_0 - w))},$$

por la expresión anterior tenemos que $|h(w)| = 1$ para toda w con $0 < |w| \leq s$, más aún, como f es inyectiva en D_s , el denominador de $h(w)$ no se anula en $0 < |w| \leq s$, y como f es analítica en D_s , $h(w)$ es analítica en $0 < |w| \leq s$. Ahora, como $h(w)$ es analítica y acotada en un disco agujerado alrededor de 0, entonces 0 es una singularidad removible de $h(w)$ (ver por ejemplo [M, Pág. 249]) y de esta manera $h(w)$ es analítica también en 0 si definimos $h(0) = \lim_{w \rightarrow 0} h(w)$. Para calcular este límite nos auxiliaremos nuevamente de la Regla de L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 - w) - f(z_0 + kw)}{f(z_0 + kw) - f(z_0 + w)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-f'(z_0 - w) - kf'(z_0 + kw)}{kf'(z_0 + kw) - f'(z_0 + w)} \\ &= \frac{(1+k)f'(z_0)}{(1-k)f'(z_0)} \\ &= \frac{1+k}{1-k} = \frac{-k^2}{1-k} \end{aligned}$$

puesto que $f'(z_0) \neq 0$, también

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2 w)}{f(z_0 + k^2 w) - f(z_0 - w)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f'(z_0 + w) - k^2 f'(z_0 + k^2 w)}{k^2 f'(z_0 + k^2 w) + f'(z_0 + w)} \\ &= \frac{(1 - k^2) f'(z_0)}{(1 + k^2) f'(z_0)} \\ &= \frac{1 - k^2}{-k}. \end{aligned}$$

Así tenemos que $h(0) = \frac{-k^2}{1-k} \frac{1-k^2}{-k} = k + k^2 = -1$. Entonces, como $|h(w)| = 1$ para toda w con $|w| \leq s$, por el Teorema del Módulo Máximo podemos afirmar que $h(w)$ es constante en $|w| \leq s$, es decir que $h(w) = -1$ para toda w con $|w| \leq s$. Usando esto en la definición de $h(w)$ resulta que

$$\begin{aligned} (f(z_0 - w) - f(z_0 + kw))(f(z_0 + w) - f(z_0 + k^2 w)) = \\ - (f(z_0 + kw) - f(z_0 + w))(f(z_0 + k^2 w) - f(z_0 - w)), \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$(f(z_0 + w), f(z_0 + k^2 w); f(z_0 - w), f(z_0 + kw)) = -1$$

para toda w con $|w| \leq s$. Pero $s > 0$ y s depende solamente de z_0 , entonces la última expresión es válida para toda $z_0 \in R$, y como

$$(1, k^2; -1, k) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \cdot \frac{-1 - k}{k - 1} = -1,$$

podemos aplicar el Teorema 3.3 para concluir que $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una transformación de Möbius. \square

El final de las demostraciones que hemos presentado de los teoremas de las últimas 4 secciones es ligeramente distinto que el de las demostraciones publicadas. En dichas demostraciones se prueba directamente que $S_f(z_0) = 0$ y de ahí se concluye que f es de Möbius.

4.8. Otras caracterizaciones

Piyapong Niamsup está por publicar algunas otras caracterizaciones geométricas de las transformaciones de Möbius ([Nm1] y [Nm2]) en cuyas demostraciones utiliza alguna de las tres caracterizaciones analíticas de transformaciones de Möbius mostradas en el capítulo 3, a saber, $f(z)$ es de Möbius si y sólo si $S_f(z) = 0$, $f(z) = \frac{az+b}{z}$ si y sólo si $P_f(z) = -\frac{2}{z}$, y $f(z) = \frac{b}{z+d}$ si y sólo si $N_f(z) = 2$. Todas estas nuevas caracterizaciones son geoméricamente equivalentes, o casos particulares, de

las ya dadas en este capítulo. Estos resaltan los casos en que algún punto o su imagen es 0 o ∞ , en cada caso, las demostraciones siguen las mismas técnicas que hemos usado en las últimas 4 secciones y por eso enunciaremos los teoremas de Niamsup sin demostración, solamente indicaremos algunas interpretaciones geométricas de los mismos.

En todos los teoremas de esta sección $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función meromorfa, no constante; analítica e inyectiva en una región R simplemente conexa; y A, B, C, D son cuatro puntos en el plano complejo y $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$ sus imágenes.

TEOREMA 4.10. *f es una transformación de Möbius si y sólo si f satisface alguna de las siguientes propiedades:*

- Si $\arg((A, B; C, D) + (D, A; B, C)) = 0$ ó π ,
entonces $\arg((A', B'; C', D') + (D', A'; B', C')) = 0$ ó π .
- Si $|(A, B; C, D) + (D, A; B, C)| = k > 0$,
entonces $|(A', B'; C', D') + (D', A'; B', C')| = k$.
- Si $\arg((A, B; C, D) - (D, A; B, C)) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$,
entonces $\arg((A', B'; C', D') - (D', A'; B', C')) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$.
- Si $|(A, B; C, D) - (D, A; B, C)| = k > 0$,
entonces $|(A', B'; C', D') - (D', A'; B', C')| = k$.

Observemos que $(D, A; B, C) = (A, B; C, D)^{-1}$, de esta manera tenemos que en este Teorema se están considerando la razón cruzada de 4 puntos y su recíproco.

La primera de estas propiedades equivale a decir que si la razón cruzada de 4 puntos es real o tiene norma 1 entonces la razón cruzada de sus imágenes también es real o tiene norma 1, lo cual equivale a que los 4 puntos están sobre un círculo o bien $ABCD$ es un cuadrilátero de Apolonio.

La segunda propiedad equivale a que si $ABCD$ es un λ -cuadrilátero de Apolonio, entonces $A'B'C'D'$ o $D'A'B'C'$ es un λ -cuadrilátero de Apolonio.

La tercera es equivalente a decir que la razón cruzada de cuatro puntos tiene norma 1, o bien que $ABCD$ es un cuadrilátero de Apolonio.

La cuarta propiedad es equivalente a la segunda, excepto porque excluye el caso de $\lambda = 1$.

TEOREMA 4.11. *$f(z) = \frac{b}{z+d}$, con $b \neq 0$, si y sólo si f satisface alguna de las siguientes propiedades:*

- Si $\arg \frac{A-B}{C-B} = \alpha \in (0, \pi)$, entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} \right) = \alpha$
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} + \frac{C-B}{A-B} \right) = 0$ ó π , entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right) = 0$
ó π

- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} + \frac{C-B}{A-B} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} - \frac{C-B}{A-B} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$, entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} - \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} - \frac{C-B}{A-B} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} - \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right| = k$

Las primeras dos propiedades son versiones de los teoremas de las secciones 4.4 y 4.5 cuando $D = \infty$ y $f(D) = 0$. En la demostración se usa la caracterización con $N_f(z) = 2$.

TEOREMA 4.12. $f(z) = \frac{az+b}{z}$, con $b \neq 0$, si y sólo si f satisface alguna de las siguientes propiedades:

- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} \right) = \alpha \in (0, \pi)$, entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \right) = \alpha$
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} + \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right) = 0$ ó π , entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \right) = 0$ ó π
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} + \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} - \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$, entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} - \frac{C'-B'}{A'-B'} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} - \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} - \frac{C'-B'}{A'-B'} \right| = k$

Las primeras dos propiedades son versiones de los teoremas de las secciones 4.4 y 4.5 cuando $D = 0$ y $f(D) = \infty$. En la demostración se usa la caracterización con $P_f(z) = -\frac{2}{z}$.

Las siguientes cuatro propiedades son la versión del primer teorema de esta sección considerando las dos propiedades anteriores. En la demostración también se usa la caracterización de las transformaciones de Möbius con $P_f(z) = -\frac{2}{z}$.

TEOREMA 4.13. $f(z) = \frac{az}{z+d}$, con $a, d \neq 0$, si y sólo si f satisface alguna de las siguientes propiedades:

- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} \right) = \alpha \in (0, \pi)$, entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} \right) = \alpha$
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} + \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right) = 0$ ó π ,
entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right) = 0$ ó π
- Si $\left| \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} + \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right| = k > 0$, entonces $\left| \frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} + \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right| = k$
- Si $\arg \left(\frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C}{A} - \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A}{C} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$,
entonces $\arg \left(\frac{A'-B'}{C'-B'} \cdot \frac{C'}{A'} - \frac{C'-B'}{A'-B'} \cdot \frac{A'}{C'} \right) = \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$

Bibliografía

- [Ah1] Ahlfors, Lars V. *Complex Analysis*. McGraw-Hill. 1953.
- [Ah2] Ahlfors, Lars V. *Cross-ratios and Schwarzian Derivatives in \mathbb{R}^n* . Complex Analysis. Birkhäuser Verlag. 1988. pp. 1-15.
- [Ac] Aczél, János; McKiernan, M.A. *On the characterization of plane projective and complex Möbius transformations*. Math. Nachr. 33 (1967) 315-337.
- [H1] Haruki, Hiroshi. *A Proof of the Principle of Circle-transformation by the use of a Theorem on Univalent Functions*. Enseignement Mathématique 18 (1972) 145-146.
- [HR1] Haruki, Hiroshi; Rassias, Themistocles M. *A New Invariant Characteristic Property of Möbius Transformations from the Standpoint of Conformal Mapping*. J. of Mathematical Analysis and App. 181 (1994) 320-327.
- [HR2] Haruki, Hiroshi; Rassias, Themistocles M. *A New Characteristic of Möbius Transformations by use of Apollonius Quadrilaterals*. Proceedings of the American Math. Soc. 126 (10) (1998) 2857-2861.
- [HR3] Haruki, Hiroshi; Rassias, Themistocles M. *A New Characteristic of Möbius Transformations by use of Apollonius Points of Triangles*. J. of Mathematical Analysis and App. 197 (1996) 14-22.
- [HR4] Haruki, Hiroshi; Rassias, Themistocles M. *A New Characterization of Möbius Transformations by use of Apollonius Hexagons*. Proceedings of the American Math. Soc. 128 (7) (2000) 2105-2109.
- [J] Jones, Gareth. *Complex Functions*. Cambridge University Press. 1987.
- [M] Marsden, J.; Hoffman, M. *Análisis básico de variable compleja*. Trillas. 1996.
- [N1] Nehari, Zeev. *Conformal Mapping*. Dover Publications. 1975.
- [N2] Nehari, Zeev. *The Schwarzian derivative and schlicht functions*. Bulletin of the American Math. Soc. 55 (1949) 545-551.
- [Nm1] Niamsup, Piyapong. *A Note on the Characteristic of Möbius Transformations*. por aparecer en J. of Mathematical Analysis and App.
- [Nm2] Niamsup, Piyapong. *A Note on the Characteristic of Certain Class of Möbius Transformations*. Preprint del Autor: Junio de 2000.
- [O] Osgood, Brad. *Old and New on the Schwarzian Derivative*. Quasiconformal mappings and analysis. Springer. 1998. pp. 275-308.
- [R] Remmert, Reinhold. *Theory of Complex Functions*. Springer-Verlag. 1989.
- [S] Schwerdtfeger, Hans. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications. 1979.
- [T] Titchmarsh, E.C. *The Theory of Functions* (2ª Edición). Oxford University Press. 1939.

Esta Tesis fue
elaborada en su
totalidad en los talleres de
IMPRESOS FRANCO
Rep. de Cuba No 99
Desp 23 Bis
Centro México, D F

PRESUPUESTOS DE
8.30 A.M. A 7.00 P.M.
TEL. 512-10-20
DE 9.00 P.M. A 11.00 P.M.
TEL. 657-24-74
SR. SALVADOR MOYA FRANCO