

01174



Universidad Nacional Autónoma de México

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

NUEVOS PROCEDIMIENTOS PARA LA CARACTERIZACIÓN
DINÁMICA DE YACIMIENTOS
A PARTIR DE PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES.

T E S I S

que para obtener el grado de:
MAESTRO EN INGENIERÍA
PETROLERA
Presenta

NÉSTOR MARTÍNEZ ROMERO



Asesor: Dr. Fernando Samaniego Verduzco

283249

Cd. Universitaria, D. F. Agosto del 2000.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA
OF. 338/2000/SE-60.2

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

BIOL. FRANCISCO J. INCERA UGALDE
Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado
Dirección General de Administración
Escolar, UNAM
Presente.

Esta facultad informa a usted que el alumno NESTOR MARTINEZ ROMERO, ha solicitado autorización para presentar examen con tesis, con el fin de obtener el grado de Maestro en Ingeniería Petrolera.

El mencionado alumno ha elaborado el trabajo titulado: "NUEVOS PROCEDIMIENTOS PARA LA CARACTERIZACION DINAMICA DE YACIMIENTOS A PARTIR DE PRUEBAS DE POZOS MULTIPLES" al que le asignaron 12 (doce) créditos académicos.

Tomando en cuenta que el interesado ha cumplido con todos los requisitos que se exigen para sustentar dicho examen, no hay ningún inconveniente en que se lleve a cabo dicho acto ante el jurado integrado por los profesores:

Presidente:	DR. HEBER CINCO LEY
Vocal:	DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO
Secretario:	DR. FERNANDO RODRIGUEZ DE LA GARZA
Suplente:	DR. JESUS RIVERA RODRIGUEZ
Suplente:	DR. RODOLFO CAMACHO VELAZQUEZ

Atentamente
Cd. Universitaria, D.F., a 18 de agosto del 2000
EL DIRECTOR DE LA FACULTAD


M EN C. GERARDO FERRANDO BRAVO

Anexos: cinco votos originales

~~BJJ~~ geg.

NUEVOS PROCEDIMIENTOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE YACIMIENTOS A PARTIR DE PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES

CONTENIDO

	Página
Resumen	i
Relación de Tablas	iii
Relación de Figuras	iv
Capítulo I INTRODUCCIÓN	1
I.1 Generalidades	1
I.2 Trabajos Previos	2
I.3 Objetivos	4
I.4 Desarrollo	5
Capítulo II TEORÍA DEL ANÁLISIS DE PRESIONES	7
II.1 Introducción	7
II.2 Pruebas de interferencia y pulsos	10
II.3 Yacimiento homogéneo infinito, flujo esférico	12
II.4 Yacimiento homogéneo infinito, flujo lineal	15
II.5 Yacimiento homogéneo infinito, flujo radial	18
II.6 Yacimiento homogéneo infinito, flujo radial con efectos de almacenamiento y daño	23
II.7 Yacimiento homogéneo naturalmente fracturado, flujo radial	29
II.8 Yacimiento idealmente anisotrópico, flujo radial	34
II.9 Superposición en espacio y tiempo	38
II.10 Ajuste con curvas tipo	43
II.11 Técnicas semilogarítmicas	47
II.12 Técnica de El-Khatib	49
II.13 Técnicas de análisis con tendencia de presión	51
Capítulo III TEORÍA PARA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	57
III.1 Introducción	57
III.2 Técnica de Gauss-Marquardt	61
III.3 Aspectos prácticos	70
III.4 Funciones de restricción	76
III.5 Bondad de ajuste	80
III.6 Jacobianos	86

Capítulo IV	METODOLOGÍA GENERAL DE ANÁLISIS PROPUESTA	88
	IV.1 Introducción	88
	IV.2 Desarrollo de nuevos grupos de presión	89
	IV.2.1 Flujo esférico	91
	IV.2.2 Flujo lineal	93
	IV.2.3 Flujo radial	96
	IV.3 Estimación de la presión inicial	98
	IV.4 Yacimiento idealmente anisotrópico	102
	IV.5 Extensión de la técnica de El-Khatib para flujo esférico y lineal	105
	IV.6 Procedimiento general de análisis	109
Capítulo V	SISTEMA DE ANÁLISIS PARA PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES, SAINT	115
	V.1 Descripción	115
	V.2 Requerimientos	116
	V.3 Características principales	116
	V.4 Descripción de los módulos principales	118
Capítulo VI	APLICACIONES DE CAMPO	158
	VI.1 Introducción	158
	VI.2 Campo Abkatún	159
	VI.3 Análisis en un yacimiento anisotrópico	169
	VI.4 Análisis de pruebas de pulsos	173
	VI.5 Prueba de interferencia con flujo lineal	175
	VI.6 Prueba de interferencia con efectos de almacenamiento y daño	177
	VI.7 Prueba de interferencia en un yacimiento naturalmente fracturado	183
Capítulo VII	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	186
	NOMENCLATURA	189
	REFERENCIAS	193
APÉNDICES:	A DERIVADAS PARCIALES	197
	B INTEGRALES USADAS EN LAS FUNCIONES DE PRESIÓN	215
	C OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES	223

NUEVOS PROCEDIMIENTOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE YACIMIENTOS A PARTIR DE PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES.

Resumen

El objetivo de este trabajo está enfocado al análisis de pruebas de interferencia y pulsos, denominadas en la literatura técnica especializada como pruebas de pozos múltiples. Se presentan los resultados de una investigación teórica-práctica que permitieron:

- a) el desarrollo de nuevas funciones de presión, para la interpretación de pruebas bajo la influencia de tendencias lineales de presión ocasionadas por la historia de producción de los pozos del yacimiento, con base en las cuales se presenta un procedimiento de análisis por curva tipo que elimina eficientemente estos efectos;
- b) la visualización de una técnica para la estimación de la presión al inicio de la prueba de pozos múltiples, que permite estimar los parámetros del yacimiento y pozo con mayor precisión;
- c) el establecimiento de un procedimiento de regresión no lineal eficiente, que reduce el número de iteraciones necesarias para alcanzar convergencia y evita problemas numéricos que resultan en divergencias de los métodos convencionales; también se plantea la utilidad de la aplicación de técnicas estadísticas que permiten definir la calidad del ajuste del registro tiempo contra presión medido en campo y el modelo teórico elegido por el analista;

- d) la extensión de la técnica de El-Khatib para los casos de flujo esférico y lineal, esto es, el desarrollo de las ecuaciones de interpretación y la metodología de aplicación;
- e) el desarrollo de un procedimiento para estimar las direcciones preferentes de permeabilidad en yacimientos idealmente anisotrópicos, con base en el análisis del registro de presión simultáneo de 3 o más pozos observadores;
- f) el establecimiento de un procedimiento general de análisis que coadyuva en la obtención de resultados confiables y ahorra tiempo; adicionalmente se hacen sugerencias útiles para la obtención de la información y
- g) la conformación de un sistema de cómputo denominado **SAINT**, que incluye soluciones para el caso de flujo en una fase ligeramente compresible en yacimientos homogéneos, con flujo radial, esférico y lineal; yacimientos naturalmente fracturados con flujo radial y yacimientos homogéneos con flujo radial y efectos de almacenamiento y daño en los pozos activo y/o observador. **SAINT** contiene las técnicas convencionales de análisis presentadas en la literatura, las desarrolladas en este trabajo así como las de más reciente publicación. **SAINT** permite diseñar, conducir e interpretar las pruebas de campo de una forma más práctica y real.

Se concluye que las técnicas y procedimientos desarrollados, constituyen una opción de análisis que supera lo establecido. Su uso aumenta la confiabilidad en los resultados que se obtienen con los simuladores numéricos de yacimiento, y por tanto, asegura las decisiones gerenciales para la selección de políticas de explotación, con los consecuentes beneficios económicos; adicionalmente con su aplicación, se consiguen ahorros en los costos de toma de información de los registros de presión de fondo, ya que el tiempo mínimo de medición puede reducirse.

RELACIÓN DE TABLAS

		Página
2-1	ECUACIONES DE INTERPRETACIÓN PARA FLUJO LINEAL, ESFÉRICO Y RADIAL.	46
3-1	RESULTADOS COMPARATIVOS DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN NO-LINEAL PROPUESTA POR EL-KHATIB Y LA PROGRAMADA EN EL SISTEMA SAINT .	73
4-1	ERRORES DE ESTIMACIÓN EN LA PERMEABILIDAD POR EL EFECTO DE LA PRESIÓN INICIAL.	101
6-1	INFORMACIÓN DE LOS REGISTROS DE PRESIÓN E INFORMACIÓN ADICIONAL REQUERIDA PARA EL ANÁLISIS.	170
6-2	RESUMEN DE RESULTADOS PARA LOS CUATRO CASOS ESTUDIADOS.	174
6-3	INFORMACIÓN DE PRESIONES Y DATOS ADICIONALES.	175
6-4	REGISTROS DE TIEMPO CONTRA PRESIÓN PARA LOS POZOS EN LA PRUEBA DE INTERFERENCIA.	180

RELACIÓN DE FIGURAS

	Página
2-1 REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA ANTE UNA SECUENCIA DE IMPULSOS.	8
2-2 TERMINOLOGÍA UTILIZADA EN LAS PRUEBAS DE PULSOS.	11
2-3 REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO ESFÉRICA.	13
2-4 REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO LINEAL.	15
2-5 REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO RADIAL.	18
2-6 COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL CONTRA EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO Y FLUJO RADIAL.	20
2-7 COMPARACIÓN DE SOLUCIONES CONSIDERANDO POZO FINITO Y SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.	21
2-8 CAÍDA DE PRESIÓN CONTRA EL TIEMPO PARA LOS CASOS DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO, FRONTERA CERRADA Y FRONTERA A PRESIÓN CONSTANTE.	22
2-9 CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO.	26
2-10 CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO.	28
2-11 CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO Y EL OBSERVADOR.	29
2-12 CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA EN UN YACIMIENTO DE DOBLE POROSIDAD, MODELO PSEUDOESTACIONARIO.	33
2-13 NOMENCLATURA USADA PARA UN YACIMIENTO IDEALMENTE ANISOTRÓPICO.	36
2-14 POZO ACTIVO PRODUCIENDO A DOS GASTOS DIFERENTES.	39
2-15 DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE TRES POZOS PRODUCIENDO EN UN YACIMIENTO.	40
2-16 CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO ESFÉRICO.	42
2-17 CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO LINEAL.	42
2-18 CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO RADIAL.	43
2-19 AJUSTE DE LOS DATOS DE CAMPO CON LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.	45

2-20	GRÁFICA DE LA FUNCIÓN F_1 VERSUS F_2 PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO.	46
2-21	ANÁLISIS DE LA PRUEBA DE INTERFERENCIA PRESENTADA POR LESCAURBORA.	48
2-22	CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DERIVADA DE LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.	49
2-23	CURVA TIPO PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA CON TENDENCIA LINEAL DE REPRESIONAMIENTO.	53
2-24	COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL CONTRA EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO.	55
3-1	ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE SOBRELAJACIÓN UTILIZADO EN LA TÉCNICA DE GAUSS-MARQUARDT.	69
3-2	CONFIGURACIÓN TRIDIMENSIONAL DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO DEL EJEMPLO NO. 1 DE EL-KATHIB	71
3-3	CONFIGURACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO ABKATÚN 4 PRESENTADO POR CINCO-LEY.	73
3-4	CONFIGURACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO 1-E PRESENTADO POR RAMEY.	75
3-5	AMPLIACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN DE LA FIGURA 3-4.	75
3-6	DISTRIBUCIÓN "t" DE STUDENT CON 4 Y 1 GRADOS DE LIBERTAD.	84
4-1	CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO ESFÉRICO.	93
4-2	CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO LINEAL.	95
4-3	CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO RADIAL.	97
4-4	ESTIMACIÓN DE LA PRESIÓN INICIAL PARA EL CASO DE LA PRUEBA REPORTADA POR EARLOUGHER.	99
4-5	ANÁLISIS DE LA PRUEBA POR CURVA TIPO Y TÉCNICAS SEMILOGARÍTMICAS.	100
4-6	AJUSTE DEL MODELO TEÓRICO, LÍNEA CONTINUA, CON LOS DATOS DE CAMPO.	101
5-1	PANTALLA PRINCIPAL DEL PROGRAMA SAINT , SISTEMA DE ANÁLISIS PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA.	119
5-2	SUBMENÚ ARCHIVO, ÚTIL PARA ALMACENAR Y RECUPERAR INFORMACIÓN, IMPRIMIR DATOS Y RESULTADOS Y SALIR DEL SISTEMA.	120

5-3	PANTALLA PARA RECUPERAR INFORMACIÓN ALMACENADA EN ARCHIVOS.	121
5-4	PANTALLA PARA SELECCIONAR EL ARCHIVO DONDE SE GUARDA LA INFORMACIÓN DE LA PRUEBA Y SUS RESULTADOS.	122
5-5	CUADRO DE DIÁLOGO PARA LA SALIDA DEL SISTEMA.	122
5-6	CUADRO DE MENSAJE PARA LECTURA ERRÓNEA DE ARCHIVO.	123
5-7	SUBMENÚ <u>D</u> ATOS, ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.	124
5-8	SUBMENÚ "DESCRIPCIÓN GENERAL", ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.	124
5-9	SUBMENÚ "PROPIEDADES ROCA-FLUIDOS", ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.	125
5-10	SUBMENÚ "REGISTRO TIEMPO VS PRESIÓN", ÚTIL PARA INTRODUCIR Y REVISAR INFORMACIÓN.	126
5-11	SUBMENÚ "DATOS ADICIONALES", ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.	127
5-12	SUBMENÚ <u>A</u> NÁLISIS, ÚTIL PARA DISEÑAR, ANALIZAR Y SUPERVISAR PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES.	128
5-13	PANTALLA DE CAPTURA DE INFORMACIÓN PARA LA SIMULACIÓN DE PRUEBAS.	129
5-14	SUBMENÚ REGRESIÓN NO-LINEAL, ÚTIL PARA INTRODUCIR INFORMACIÓN NECESARIA PARA LOS CÁLCULOS INVOLUCRADOS EN LA TÉCNICA DE GAUSS-MARQUARDT ASÍ COMO LOS RANGOS DE RESTRICCIÓN.	130
5-15	PANTALLA PARA SELECCIÓN DE RANGOS DE VARIACIÓN PERMITIDOS DURANTE LA REGRESIÓN NO-LINEAL.	131
5-16	OPCIÓN DE VISUALIZACIÓN DEL AJUSTE INICIAL COMPARADO CON LOS DATOS DE CAMPO	131
5-17	RESULTADOS TABULARES DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN NO LINEAL	132
5-18	RESULTADOS DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL AJUSTE	133
5-19	GRÁFICA COMPARATIVA DE LOS DATOS MEDIDOS Y CALCULADOS CON EL SIMULADOR	133
5-20	SUBMENÚ PARA REALIZAR AJUSTE MANUAL CON LA TÉCNICA DE CURVAS TIPO	134
5-21	AJUSTE CON CURVAS TIPO PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO Y FLUJO RADIAL.	134
5-22	ANÁLISIS DE CONSISTENCIA DE RESULTADOS CON LA TÉCNICA DE CURVAS TIPO Y LA SEMILOGARÍTMICA.	135
5-23	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO LINEAL	137
5-24	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO ESFÉRICO.	137
5-25	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO RADIAL CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO	138

5-26	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO NATURALMENTE FRACTURADO, FLUJO RADIAL	138
5-27	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO ESFÉRICO.	139
5-28	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO LINEAL.	139
5-29	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO RADIAL.	140
5-30	SUBMENÚ PARA EJECUTAR LAS TÉCNICAS DE ANÁLISIS POR LINEA RECTA	140
5-31	TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA PARA EL CÁLCULO DE PARÁMETROS DEL YACIMIENTO	141
5-32	TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA TIPO EL-KHATIB, PARA FLUJO ESFÉRICO.	142
5-33	TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA TIPO EL-KHATIB, PARA FLUJO LINEAL.	142
5-34	APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE EL-KHATIB PARA FLUJO RADIAL.	143
5-35	MENÚ PARA EJECUTAR TÉCNICA DE MÍNIMOS CUADRADOS E INCORPORAR ANOTACIONES.	143
5-36	VISUALIZACIÓN GRÁFICA, EN COORDENADAS CARTESIANAS, DEL REGISTRO DE PRESIÓN.	145
5-37	CUADRO DE DIÁLOGO PARA CAMBIAR LETREROS.	146
5-38	CUADRO DE DIÁLOGO PARA SELECCIONAR EL COLOR DE LOS LETREROS.	146
5-39	MENÚ PARA ABRIR, GUARDAR E IMPRIMIR ARCHIVOS DE GRAFICACIÓN.	147
5-40	MENÚ PARA SELECCIONAR LAS DIFERENTES OPCIONES DE GRAFICACIÓN.	147
5-41	VISUALIZACIÓN GRÁFICA DEL REGISTRO TIEMPO CONTRA PRESIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS COORDENADOS.	147
5-42	SELECCIÓN DE GRÁFICAS ESPECIALIZADAS DE DIAGNÓSTICO.	148
5-43	SUBMENÚ PARA MODIFICAR EL ASPECTO DE LA GRÁFICA.	148
5-44	CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LAS ESCALAS DE GRAFICACIÓN.	149
5-45	CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LA APARIENCIA DE LOS DATOS.	149
5-46	MENÚ PARA REVISIÓN DE RESULTADOS.	149
5-47	COMPARACIÓN TABULAR DE DATOS MEDIDOS Y CALCULADOS.	150
5-48	COMPORTAMIENTO DEL ERROR VERSUS TIEMPO.	151

5-49	INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARÁMETROS CALCULADOS.	151
5-50	PANTALLA PRINCIPAL DEL MÓDULO DE ANÁLISIS DE YACIMIENTOS IDEALMENTE ANISOTRÓPICOS.	152
5-51	PANTALLA PARA INTRODUCCIÓN Y EDICIÓN DE DATOS.	153
5-52	VALORES INICIALES Y APROXIMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE REGRESIÓN.	154
5-53	REPORTE DE RESULTADOS OBTENIDOS CON LA REGRESIÓN.	154
5-54	PANTALLA PRINCIPAL DEL MÓDULO CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS.	155
5-55	SUBMENÚ HERRAMIENTAS.	155
5-56	SUBMENÚ UNIDADES.	156
5-57	PANTALLA PARA SELECCIONAR UNIDADES DE MEDICIÓN.	156
5-58	PANTALLA PARA SELECCIONAR PREFERENCIAS.	156
5-59	SUBMENÚ AYUDA.	157
5-60	PANTALLA "ACERCA DE ..."	157
6-1	PLANO DE LOCALIZACIÓN DEL YACIMIENTO ABKATÚN.	160
6-2	HISTORIA DE PRODUCCIÓN DEL POZO ACTIVO, ABKATÚN NO. 20.	161
6-3	REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DE LOS POZOS OBSERVADORES, ABKATÚN 4 Y 12.	162
6-4	REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 DURANTE LA PRIMERA APERTURA DEL POZO ABKATÚN 20.	163
6-5	AJUSTE DEL REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 CON LA CURVA TIPO SIN TENDENCIA LINEAL DE PRESIÓN.	164
6-6	AJUSTE DEL REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 CON LA CURVA TIPO DEL GRUPO N PARA FLUJO RADIAL.	165
6-7	APLICACIÓN DEL PROCESO DE REGRESIÓN NO-LINEAL.	165
6-8	AJUSTE FINAL DEL PROCESO DE REGRESIÓN NO-LINEAL.	166
6-9	COMPORTAMIENTO DEL GRADO DE AJUSTE RESPECTO A LA PRESIÓN INICIAL.	167
6-10	AJUSTE GLOBAL, DE PRESIÓN INICIAL Y REGISTRO DE PRESIÓN, PARA EL POZO ABKATÚN NO. 4.	168
6-11	AJUSTE GLOBAL DEL REGISTRO DE PRESIÓN PARA EL POZO ABKATÚN NO. 12.	168

6-12	MAPA DE ISOPACAS Y COORDENADAS DE LOCALIZACIÓN DE POZOS.	169
6-13	AJUSTE CON LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE PARA LOS POZOS 5-C, 5-D Y 5-E	171
6-14	ANÁLISIS POR REGRESIÓN NO-LINEAL CON EL SISTEMA SAINT .	174
6-15	ANÁLISIS POR CURVAS TIPO Y GRUPO DERIVADA CON EL SISTEMA SAINT .	176
6-16	ANÁLISIS POR REGRESIÓN NO LINEAL CON EL SISTEMA SAINT .	177
6-17	COMPORTAMIENTO DE LA CAÍDA DE PRESIÓN EN EL POZO ACTIVO.	178
6-18	CÁLCULO DEL TIEMPO AL CUAL LOS EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO SON DESPRECIABLES EN EL POZO DE OBSERVACIÓN.	179
6-19	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA EL POZO "A". NOTE LA CONCORDANCIA CON EL VALOR DE LA CURVA ESTIMADA EN EL RECUADRO SUPERIOR IZQUIERDO.	180
6-20	AJUSTE CON CURVA TIPO PARA EL POZO "B".	181
6-21	AJUSTE DE REGRESIÓN NO LINEAL PARA EL POZO "A".	182
6-22	ESTADÍSTICAS DEL AJUSTE PARA EL POZO "A".	182
6-23	ANÁLISIS POR CURVAS TIPO A LOS DATOS DEL POZO PARKS.	184
6-24	ANÁLISIS POR TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA A LOS DATOS DE INTERFERENCIA DE PRESIÓN REGISTRADOS EN EL CAMPO KLAMATH FALLS, POZO PARKS.	185

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1 Generalidades

En las diferentes áreas de ingeniería, incluyendo la petrolera, se tiene como premisa principal lograr el máximo beneficio económico de los proyectos. Por tanto, el ingeniero petrolero tiene como objetivo principal maximizar las ganancias derivadas de la explotación de hidrocarburos, bajo la restricción de las normas sobre los aspectos de seguridad industrial y protección ambiental.

Actualmente, mediante el uso de simuladores numéricos, existe la posibilidad de predecir el comportamiento de los yacimientos bajo diferentes políticas de explotación, permitiendo así la elección del escenario óptimo de extracción.

Los simuladores numéricos requieren de gran cantidad de información de calidad, entre la cual se encuentra la referente a las características de la formación productora y su distribución de fluidos. Aunque existen varios medios para estimar y medir directamente estos parámetros, las pruebas de variación de presión han demostrado su superioridad al permitir una caracterización dinámica, representativa de volúmenes grandes de roca comparados con los obtenidos con registros geofísicos de pozo y pruebas de laboratorio.

A principios de siglo el objetivo de medir la presión de fondo de un pozo era la determinación de la llamada "presión estática" del yacimiento; posteriormente se observó que la rapidez de recuperación de la presión que presentaba un pozo al cerrarse, estaba íntimamente relacionada con las propiedades del yacimiento, de la

geometría del pozo, así como del tipo de fluidos producidos. Se estableció como premisa, que a mayor capacidad de flujo de la formación se presentaba una mayor rapidez de recuperación de la presión. Con base en este postulado se desarrollaron técnicas, que basadas en soluciones matemáticas que representan el flujo de fluidos en medios porosos, permiten estimar algunas características del sistema yacimiento-pozo.

En una prueba de variación de presión se conoce la señal de entrada aplicada al yacimiento, por ejemplo el gasto, y se mide una señal de respuesta del sistema, la cual puede ser la presión. El propósito del análisis de las pruebas es identificar o caracterizar al sistema yacimiento pozo, utilizando la información de entrada y salida del sistema.

Un tipo especial de pruebas transitorias de presión, son las pruebas de pozos múltiples que incluyen las pruebas de interferencia y pulsos. Las pruebas de pozos múltiples se llevan a cabo monitoreando la respuesta de presión en uno o varios pozos de **OBSERVACIÓN** mientras que los impulsos son generados en uno o más pozos **ACTIVOS**. En las pruebas de pulsos el pozo activo se cierra y abre bajo un programa cíclico, mientras que en una prueba de interferencia se mantiene estable la señal de entrada, esto es el pozo activo se mantiene abierto a gasto constante o cerrado según sea el caso.

El comportamiento de la variación de la presión respecto al tiempo, en este tipo de pruebas, depende de varios parámetros, tales como la permeabilidad, viscosidad, compresibilidad, porosidad, distancia entre pozos, producción en el pozo activo, heterogeneidades, tipos de empuje, etcétera.

1.2 Trabajos previos

Durante las últimas décadas se han publicado cientos de artículos técnicos que enfocan sus objetivos en las pruebas de variación de presión en pozos de aceite y gas;

ser medido con cierta facilidad y precisión, además que los resultados obtenidos caracterizan con gran certidumbre el comportamiento dinámico de los yacimientos.

Las pruebas de interferencia¹ han sido reportadas en la literatura desde 1935, mientras que las pruebas de pulsos² surgen en 1966 y presentan la ventaja de que no requieren para su análisis del conocimiento de las tendencias de presión presentes en el yacimiento. A este tipo de pruebas de pozos múltiples también se les denomina como pruebas horizontales o areales.

Existe otra clase de prueba clasificada por Kamal³ como de pozos múltiples, aunque ésta se efectúa en un pozo entre varias perforaciones y tiene como objetivo determinar propiedades en la dirección vertical entre capas. A esta prueba especial de interferencia se le conoce como prueba de permeabilidad vertical y, aunque los principios básicos son los mismos que para pruebas areales, no se incluyen en este trabajo.

Existen varias decenas de artículos referentes a pruebas de pozos múltiples, los cuales presentan técnicas para el análisis de diferentes casos, clasificados en los siguientes rubros:

- Yacimientos homogéneos isotrópicos
- Yacimientos homogéneos anisotrópicos
- Pozo con fractura vertical en yacimientos homogéneos
- Yacimientos naturalmente fracturados
- Yacimientos heterogéneos
- Pruebas de permeabilidad vertical

Los análisis en general son laboriosos debido a la gran cantidad de información generada durante las pruebas, y la necesidad de manipular matemáticamente los efectos de apertura y cierre de los pozos activos y/o observadores. En algunos casos se requiere de un tratamiento previo que elimine tendencias de presión presentes en el

yacimiento durante las pruebas, el cálculo de algunas de las propiedades de los fluidos por correlaciones así como la determinación precisa de la presión al inicio de la prueba en los pozos de observación. Aunado a lo anterior, se presenta la necesidad de analizar la prueba mediante diversas técnicas que permitan verificar la congruencia entre los resultados.

Con base en lo planteado en el párrafo anterior, se explican los numerosos esfuerzos^{4,5,6,7} de los especialistas en el área, para desarrollar herramientas computacionales que permitan ahorrar tiempo y asegurar la calidad de los resultados.

Las pruebas de pozos múltiples han demostrado a través del tiempo, su utilidad para establecer algunas características de las formaciones. Algunos autores, plantearon que las pruebas de pulsos eran superiores a las de interferencia, debido a que el tiempo de registro requerido para caracterizar al yacimiento era menor y a que el método de tangentes usado en su análisis filtraba las tendencias de presión del yacimiento. Actualmente se ha demostrado que se requiere el mismo tiempo de registro para ambas pruebas cuando se usa el mismo tipo de manómetro. Por otro lado, con los desarrollos presentados en el presente trabajo, se demuestra que el uso del grupo de presión, denominado **N**, elimina automáticamente las tendencias lineales de presión presentes en el yacimiento, por lo cual ambas pruebas se establecen en igual circunstancia de potencialidad.

1.3 Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo consiste en difundir los resultados de investigación teóricos así como el desarrollo de un sistema de cómputo que permite la automatización del análisis, diseño y control en campo de pruebas de interferencia de presión y pulsos.

Se presentan nuevas funciones de presión de gran utilidad para el análisis de pruebas de interferencia que contienen superpuesta una señal debida a una tendencia lineal de presión en el yacimiento; además se incluye una técnica para estimar la presión inicial en el pozo de observación, una mejora al método de Ramey para estimar las direcciones preferentes al flujo en yacimientos anisotrópicos y finalmente, una metodología general de análisis, resultado de la experiencia práctica en el análisis de pruebas transitorias de presión.

El alcance del desarrollo computacional incluye los últimos avances en el ámbito internacional, así como técnicas de aplicación específica desarrollados para el análisis de pruebas en yacimientos de México, tales como la estimación de la presión inicial de la prueba y la eliminación de tendencias lineales de presión del yacimiento; el sistema es útil para el análisis, diseño y control en campo de pruebas de pozos múltiples.

1.4 Desarrollo

En el Capítulo II, "Teoría del análisis de presiones", se muestran las ecuaciones básicas de interpretación publicadas en la literatura, incluyendo los modelos y técnicas más utilizadas en pruebas de campo. La teoría básica incluida en este capítulo permite sustentar los desarrollos de los capítulos subsecuentes.

El Capítulo III, denominado "Teoría para estimación de parámetros", contiene la teoría básica para el análisis de regresión no lineal y la estimación de la bondad de ajuste. Se incluyen algunas consideraciones prácticas, resultado de la experiencia del autor, que implican una utilidad comprobada en el análisis de datos de campo.

En el Capítulo IV, "Metodología general de análisis propuesta", se presentan los avances teóricos obtenidos por el autor en el análisis de pruebas de pozos múltiples. Estos logros están relacionados con el análisis de pruebas afectadas por tendencias lineales de presión, estimación de presión al inicio de la prueba, estimación de

de la técnica de El-Khatib para flujo esférico y lineal, y finalmente la presentación de una metodología general de análisis que asegura la calidad en los resultados y optimiza recursos económicos y humanos.

En el Capítulo V, "Sistema de análisis para pruebas de pozos múltiples, SAINT", se presenta un programa de cómputo, al cual denominamos **SAINT**, que permite analizar pruebas de interferencia en yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados y pruebas de interferencia para flujo lineal, radial y esférico en yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados. El sistema de cómputo se desarrolló usando Visual Basic, que asegura la facilidad de entrada y salida de la información, además de que permite la transferencia a cualquier computadora personal compatible con IBM.

El Capítulo VI, "Aplicaciones de campo", muestra la utilidad práctica de la teoría y técnicas presentadas en los capítulos II, III, IV y V. En esta parte se incluyen pruebas del campo Abkatún, así como ejemplos presentados en la literatura especializada que permiten exhibir la potencialidad de los desarrollos obtenidos.

En el Capítulo VII, "Conclusiones y recomendaciones", se enlistan los logros obtenidos y consideraciones de índole práctica para su aplicación, así como recomendaciones generales para efectuar análisis eficientes a los datos de campo.

Finalmente, se incluyen dos apéndices con desarrollos teóricos. El Apéndice A, presenta las derivadas parciales que se usan para generar numéricamente los sistemas de ecuaciones relacionados con el análisis de regresión no lineal, planteados en el Capítulo III. El Apéndice B, muestra el desarrollo matemático de las integrales definidas de la presión respecto al tiempo, utilizadas en los nuevos grupos de presión mostrados en el Capítulo IV.

CAPÍTULO II

TEORÍA DEL ANÁLISIS DE PRESIONES

II.1 Introducción

El objetivo central de las pruebas transitorias de presión, es la caracterización del sistema yacimiento-pozo. Entre los parámetros estimados más comunes se tienen la permeabilidad y porosidad, la presión promedio en el área de drene, la detección de heterogeneidades, el grado de comunicación entre zonas del yacimiento, la determinación del estado de flujo del pozo, el volumen poroso del yacimiento, las características de una fractura que intersecta el pozo, las características de doble porosidad de una formación, la estimación de características (condiciones) de entrada de agua, la confirmación de la presencia de casquete de gas, el establecimiento del grado de comunicación de varios yacimientos a través de un acuífero común, el cálculo del coeficiente de alta velocidad en pozos de gas, la estimación del avance del frente de desplazamiento en procesos de inyección y la determinación de daño por penetración parcial, perforaciones, etcétera.

Las pruebas de pozos múltiples, un subconjunto de las pruebas transitorias de presión, consisten en la medición de una respuesta de presión en pozos denominados de observación, correspondiente a las perturbaciones causadas por la modificación del gasto en el pozo denominado activo.

La Figura 2-1 presenta en forma gráfica, la respuesta de presión del yacimiento, denominado el sistema, ante una secuencia de perturbaciones, indicadas como impulsos correspondientes a los cambios de gasto en el pozo activo.

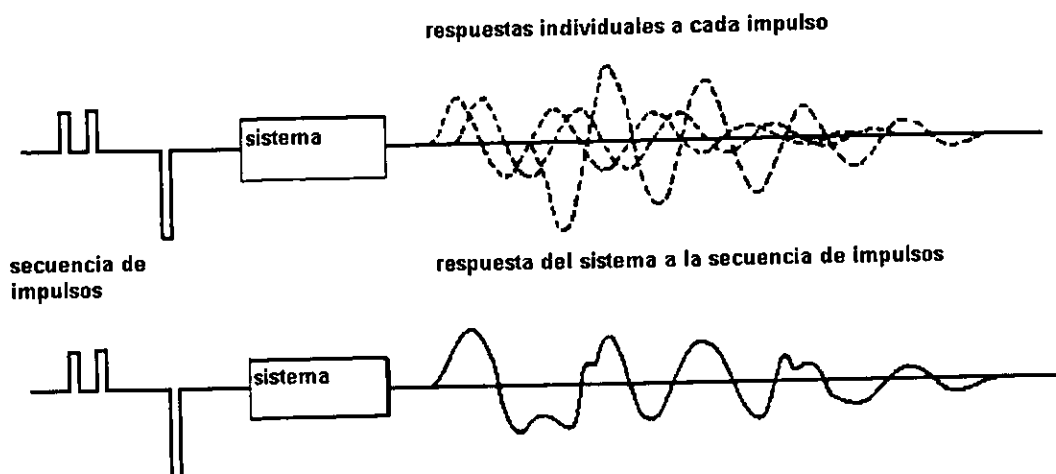


FIG. 2-1. REPRESENTACION ESQUEMÁTICA DEL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA ANTE UNA SECUENCIA DE IMPULSOS.

Puede observarse que la respuesta de presión corresponde a la suma o superposición de respuestas individuales, por tratarse de un sistema lineal; matemáticamente, la función respuesta es igual a la convolución de la función que caracteriza a la secuencia de impulsos y la función que representa al sistema.

Las pruebas de interferencia fueron descritas primeramente por Jacob³ para pozos productores de agua, proponiendo un método de análisis al que refirió como el "método gráfico". Actualmente este método recibe el nombre de "ajuste con curvas tipo" y ha sido descrito exhaustivamente por Ramey⁸ y Earlougher⁹.

Tradicionalmente se ha utilizado el modelo de flujo radial para analizar las pruebas de interferencia y pulsos, suponiendo que el régimen de flujo que ocurre en el yacimiento presenta esta geometría; sin embargo, existen situaciones en las que es necesario considerar otras geometrías de flujo tales como la lineal y esférica.

En las pruebas de pozos múltiples las variaciones de presión son registradas por un registrador (sensor) de alta sensibilidad colocado en el fondo del pozo de observación; la teoría considera que las ondas de presión viajan a través de todo el yacimiento, utilizando solamente a los fluidos saturantes como un medio transmisor.

El desarrollo de los métodos de análisis de pruebas transitorias de presión se basa en los modelos matemáticos de flujo, que involucran varias simplificaciones válidas bajo las condiciones en que se efectúan las pruebas en el campo.

Las suposiciones tradicionales consideran el flujo transitorio en un yacimiento homogéneo, isotrópico, de porosidad y permeabilidad constante, que contiene un fluido ligeramente compresible de viscosidad constante; los efectos gravitacionales son despreciables y los gradientes de presión en el yacimiento son pequeños y también se supone flujo isotérmico.

La derivación de las ecuaciones, que describen el comportamiento de la presión como una función del tiempo y la distancia, para un fluido que fluye a través de un medio poroso, se basa en tres principios fundamentales: a) una ecuación de conservación de masa, b) una ecuación de transporte o velocidad y c) una ecuación de estado.

El principio de conservación de masa aplicado al sistema resulta en una ecuación de continuidad, que combinada con la ecuación de transporte (ecuación de Darcy) y una ecuación de estado (fluido ligeramente compresible), permiten obtener la siguiente expresión, denominada en la literatura como ecuación de difusividad:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{II.1}$$

La ecuación anterior puede expresarse para diferentes sistemas geométricos, tales como coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad ; \quad \text{II.2}$$

coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad \text{II.3}$$

coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad \text{II.4}$$

al término $k / \phi \mu c_t = \eta$, se le conoce como coeficiente de difusión hidráulica.

De acuerdo con la teoría para la solución de ecuaciones diferenciales, la estimación de una solución particular de la ecuación (II.1) en cualquier sistema de ejes coordenados, requiere de ecuaciones adicionales denominadas condiciones iniciales y de frontera. Para el caso planteado, se necesitan dos condiciones de frontera, la condición interna (pozo) y la externa así como una condición inicial. Generalmente, las condiciones de frontera interna que se emplean son de producción a gasto constante o a presión constante, y las de frontera externa son comportamiento infinito, cerrado o cerrado a presión constante.

II.2 Pruebas de interferencia y pulsos

En ciertos casos la respuesta que se obtiene en los pozos de observación para una prueba de interferencia no corresponde íntegramente al efecto causado por el cambio del gasto en el pozo activo; esto se debe principalmente a la existencia de tendencias de depresionamiento o represionamiento, presentes en el yacimiento por la producción histórica o cierre de los pozos; para evitar esta situación se sugirieron las pruebas de pulsos de presión.

Las pruebas de pulsos consisten en variar cíclicamente el gasto, abriendo y cerrando el pozo activo tantas veces como sea necesario y registrando la respuesta de presión en un pozo observador. Bajo estas condiciones se obtiene una respuesta de presión representada por pulsos de presión, tal como se observa en la siguiente Figura.

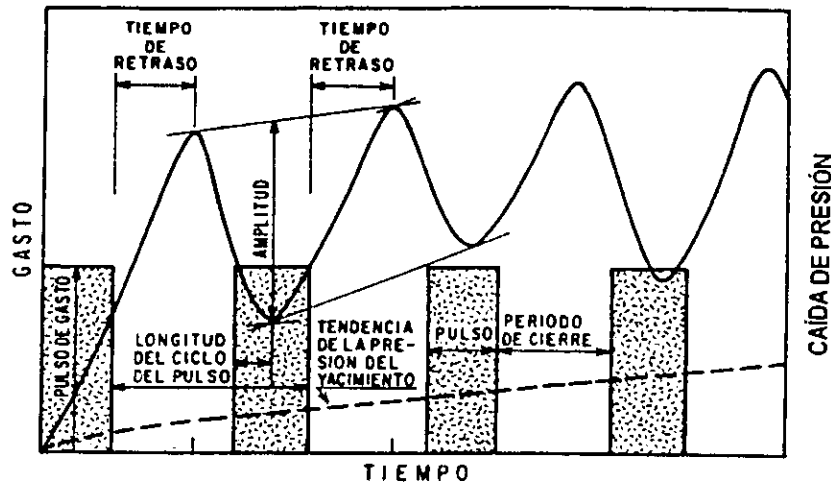


FIG. 2-2. TERMINOLOGÍA UTILIZADA EN LAS PRUEBAS DE PULSOS¹¹.

Generalmente las pruebas de pozos múltiples se efectúan antes de alcanzar una condición de presión estabilizada en el yacimiento y esto origina que la respuesta de presión observada sea producto del efecto superpuesto de la caída de presión originada por el gasto de producción en el pozo activo y la tendencia de caída de presión causada por gastos de producción previos en los pozos del yacimiento. Johnson² presentó un método llamado de tangentes, el cual puede ser utilizado como filtro para discriminar la tendencia de presión.

La Figura 2-2, presenta un caso típico de una prueba de pulsos. Las variables que caracterizan este tipo de pruebas son el tiempo de retraso y la amplitud del pulso. El tiempo de atraso se define como, el tiempo que le toma a la onda de presión viajar desde el pozo activo hasta el pozo de observación y la amplitud del pulso, es la caída de presión causada en el pozo de observación, debida a la perturbación creada en el pozo activo.

A partir de la ecuación teórica que representa el comportamiento de la presión en el medio poroso, conocidos los gastos de producción y tiempos de apertura y cierre, así

como el tiempo de retraso y la amplitud del pulso, es posible obtener parámetros tales como la permeabilidad y la porosidad del yacimiento.

Con relación a las pruebas de pulsos¹⁰⁻¹⁶, se han presentado decenas de artículos dedicados al análisis y presentación de casos de campo. Esto se explica debido a su gran utilidad práctica y a la necesidad de presentar soluciones para diferentes casos, tales como: pruebas con pulsos iguales y diferentes, tipos de yacimiento y presencia de heterogeneidades. Para el análisis de las pruebas se utilizan las tablas y gráficas planteadas en los diferentes artículos, dependiendo del caso específico y del pulso en estudio.

En algunos casos de campo se utiliza sólo un pulso y el análisis de datos se simplifica utilizando el método de ajuste de curvas tipo.

Una recomendación práctica es que el pozo de observación se mantenga cerrado durante la prueba, con la finalidad de facilitar y evitar errores en la interpretación. En algún caso de campo, en el cual se determine que el pozo de observación es lo suficientemente estable puede efectuarse la prueba con el pozo fluyendo, evitando así diferir la producción.

II.3 Yacimiento homogéneo infinito, flujo esférico

Chatas¹⁷ en 1966, describe las aplicaciones de campo para este tipo de flujo y desarrolla las soluciones analíticas para los casos de gasto y presión constante en yacimientos con comportamiento infinito y limitado.

El flujo esférico, ver Figura 2-3, se presenta en yacimientos de gran espesor con pozos parcialmente penetrantes o en los casos de pozos que atraviesan totalmente la formación productora pero solamente se disparan en un intervalo. También, tiene presencia en yacimientos con empuje hidráulico de fondo donde la zona productora se invade de agua con un levantamiento gradual y uniforme.

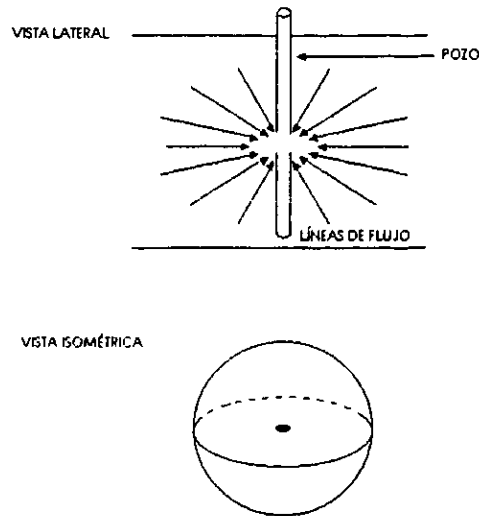


FIG. 2-3. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO ESFÉRICA.

La ecuación diferencial que representa el comportamiento de un fluido en un medio poroso con flujo esférico es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad , \quad \text{II.5}$$

donde la porosidad, compresibilidad y permeabilidad se interpretan como valores promedios del yacimiento.

Las evidencias de campo indican que la permeabilidad en el medio poroso es generalmente anisotrópica y que la permeabilidad vertical es normalmente menor que la horizontal, y en algunas ocasiones presenta una diferencia bastante grande. Chatas, demostró que la permeabilidad estimada, durante este tipo de flujo, puede relacionarse con la permeabilidad horizontal y vertical de la siguiente forma:

$$k = \frac{3k_H k_V}{k_H + 2k_V} \quad . \quad \text{II.6}$$

Las definiciones de las variables adimensionales usadas tradicionalmente para este tipo de flujo son las siguientes:

$$t_D = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_f r_w^2} ; \quad p_D = \frac{2k r_w \Delta p}{\alpha q B \mu} ; \quad r_D = \frac{r}{r_w} . \quad \text{II.7}$$

El uso de variables adimensionales permite generalizar la solución, ya que reduce significativamente el número de variables independientes. Utilizando las definiciones anteriores, la ecuación II.5, se transforma en:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} ; \quad \text{II.8}$$

definiendo la variable $b = r_D p_D$, la ecuación anterior se simplifica como:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial r_D^2} = \frac{\partial b}{\partial t_D} . \quad \text{II.9}$$

Esta ecuación diferencial fue resuelta por Chatas utilizando la transformada de Laplace. Posteriormente con el uso de las condiciones iniciales y de frontera para diferentes casos, presentó ecuaciones particulares de análisis. Para el caso de gasto constante, consideró las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} t_D = 0 \quad p_D = 0 & \quad \forall r_D \geq 1 \\ t_D \geq 0 \quad -\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right) = 1 & \quad r_D = 1 \\ t_D \geq 0 \quad \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 & . \end{aligned} \quad \text{II.10}$$

Para el caso de un yacimiento homogéneo y flujo de un fluido ligeramente compresible, la expresión resultante que permite estimar la caída de presión en función del tiempo y la posición, en variables adimensionales es:

$$P_D = \frac{1}{r_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{t_D}{r_D^2}}} \right) , \quad \text{II.11}$$

la cual es conocida en la literatura como la solución de punto fuente. En términos de variables reales, la ecuación II.11 se expresa como:

$$\Delta p = \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta kt}{\phi \mu c_1 r^2}}} \right) \quad \text{II.12}$$

II.4 Yacimiento homogéneo infinito, flujo lineal

El flujo lineal en yacimientos se presenta en formaciones con estructura lineal, tales como los depósitos en canales de ríos, brechas tectónicas, lagos alargados, etcétera. En la Figura 2-4, se muestra esquemáticamente el modelo físico bajo estudio, el pozo activo se localiza en el centro de un paralelepípedo rectangular de longitud infinita, que se aproxima por una superficie planar de altura h y ancho b . Miller¹⁸ en 1960, presentó las ecuaciones para calcular la distribución de presión en acuíferos con flujo lineal considerando la solución de cuatro casos, gasto constante y presión constante para yacimientos infinitos y finitos. En este trabajo se considera sólo la solución de yacimiento infinito y gasto constante.

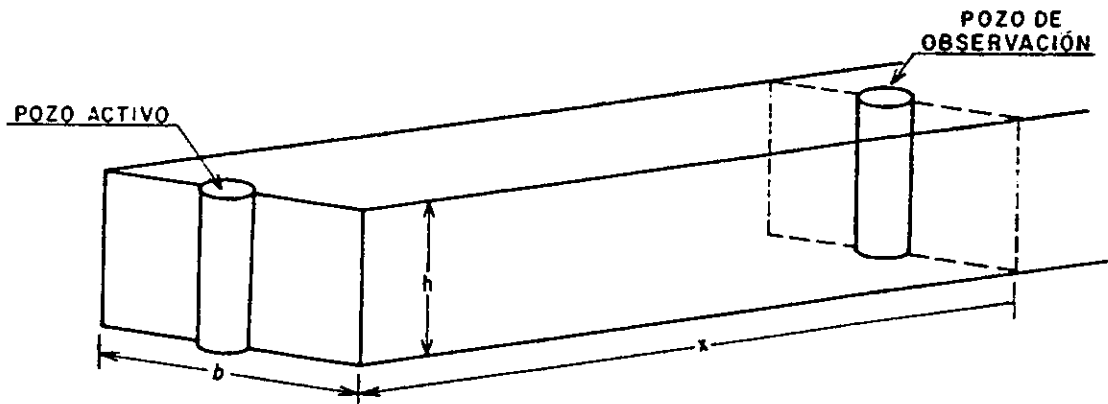


FIG. 2-4. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO LINEAL.

Es importante mencionar que la solución de Miller puede utilizarse para pruebas de interferencia de presión bajo la suposición que la mitad del fluido producido en el pozo activo proviene de la dirección del pozo de observación.

El problema de flujo lineal, para el caso de gasto constante y yacimiento infinito puede establecerse matemáticamente con las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad , \quad \text{II.13}$$

$$\begin{aligned} t = 0 \quad p &= p_i & \forall \quad x &\geq 0 \\ t \geq 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{q\mu}{kbh} & x &= 0 \\ t \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x,t) &= p_i \end{aligned} \quad \text{II.14}$$

La primera ecuación describe el flujo en cualquier punto en el yacimiento y las tres expresiones siguientes representan la condición inicial del sistema y las condiciones de frontera interna y externa respectivamente. La ecuación diferencial y condiciones de frontera de este tipo fueron estudiadas primeramente en el área de conducción de calor y la solución se obtuvo por el método de Transformada de Laplace, la aplicación para el área de yacimientos de petróleo, considera solamente un cambio apropiado de variables para estimar la ecuación que representa el comportamiento de la presión a cualquier posición y tiempo dentro del yacimiento.

La solución considera que al tiempo cero, esto es, antes que se inicien las operaciones de producción, el yacimiento contiene aceite bajosaturado y agua intersticial inmóvil, bajo condiciones de presión uniforme y a una temperatura constante. Se supone que el flujo laminar toma lugar en planos horizontales, el espesor es constante y el yacimiento es homogéneo e isotrópico. La caída de presión en variables reales se expresa como:

$$\Delta p = 2\pi\alpha \frac{qB\mu}{kbh} \left[\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} - x \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{x^2}}}\right) \right] \quad \text{II.15}$$

La caída de presión estimada por la ecuación anterior no considera la compresión del medio poroso que se presenta como resultado de un incremento del esfuerzo que se ejerce sobre la matriz rocosa causado por la disminución de la presión de los fluidos saturantes, lo cual ocasiona que la permeabilidad y porosidad sean función de la presión; esta observación es válida para todos los modelos presentados en el capítulo.

Al tiempo $t = 0$ se inicia la producción en el yacimiento en la cara de la arena en $x=0$ a un gasto constante, ver Figura 2-4.

Para estimar la caída de presión es necesario conocer las propiedades del yacimiento consideradas en la ecuación (II.15), así como la presión inicial. Para propósitos reales sería poco práctico graficar la presión en cualquier punto del yacimiento en función de todas las variables del yacimiento; sin embargo para resolver este problema se ha propuesto el uso de variables adimensionales que permiten reagrupar las diferentes variables y de esta forma se estiman soluciones simplificadas en función de unos cuantos grupos de variables adimensionales.

En términos de variables adimensionales, la ecuación (II.15) se transforma en:

$$\frac{P_{DL}}{2x_D} = \pi \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} e^{-\left(\frac{1}{4\frac{t_{DL}}{x_D^2}}\right)} - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}}\right) \right]; \quad \text{II.16}$$

las variables adimensionales involucradas son, la presión, el tiempo y la distancia, que para este caso se definen como:

$$t_{DL} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t L^2}; \quad P_{DL} = \frac{kbh\Delta P}{\alpha q B \mu L}; \quad x_D = \frac{x}{L}. \quad \text{II.17}$$

II.5 Yacimiento homogéneo infinito, flujo radial

El modelo de flujo radial, es el más utilizado para el análisis de pruebas de interferencia de presión y pulsos, y considera una geometría representada esquemáticamente en la Figura 2-5. En general un pozo con un radio r_w , que se termina cubriendo todo el espesor de un yacimiento, crea líneas de flujo radial hacia el pozo, desde el inicio y durante todo el tiempo que se mantiene en producción.

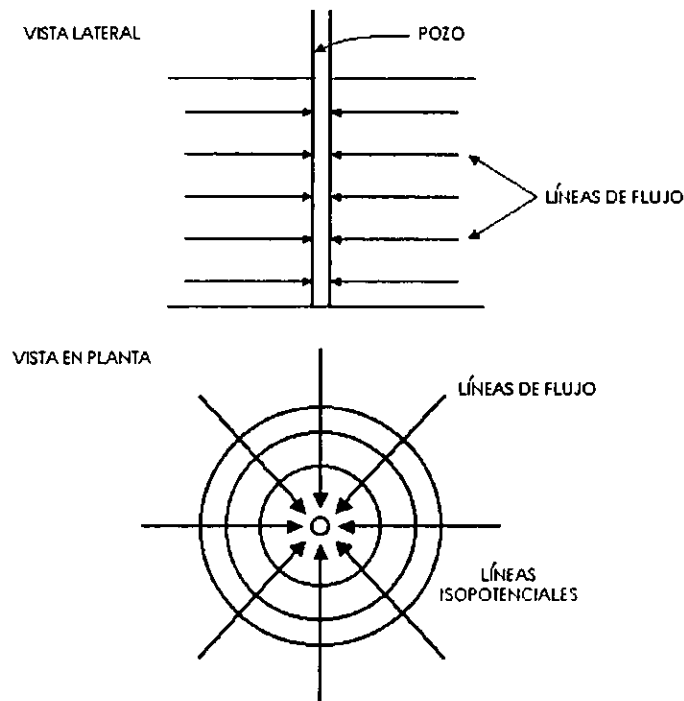


FIG. 2-5. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO TIPO RADIAL.

Considerando que la permeabilidad y la porosidad son independientes de la presión y que los gradientes de presión en el yacimiento son pequeños, el problema a resolverse se representa matemáticamente con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad \text{II.18}$$

con las condiciones inicial y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned}
 p &= p_i \quad \text{en } t=0 \quad \forall r \\
 \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} &= \frac{q\mu}{2\pi kh} \quad \forall t \geq 0 \\
 p &= p_i \quad \text{si } r \rightarrow \infty \quad \forall t
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

Históricamente, este tipo de ecuaciones fue estudiado en los problemas de conducción de calor y se presentan también en los estudios de distribución de potencial eléctrico. En la literatura se han presentado varias técnicas de solución; Polubarinova-Kochina¹⁹, propone para desarrollar la solución reemplazar la segunda condición de frontera por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \quad \forall t \geq 0 \tag{II.20}$$

Esta condición se denomina como la aproximación de línea fuente a la condición original y supone que el radio del pozo es despreciable. Utilizando la transformada de Boltzmann, $y = \frac{\phi\mu c_i r^2}{4kt}$, la ecuación diferencial parcial original, se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución puede estimarse más fácilmente. El lector interesado puede revisar el Apéndice A de la referencia 19.

$$p(r, t) = p_i - \frac{\alpha q B \mu}{kh} \left[-\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\phi\mu c_i r^2}{4\beta kt} \right) \right] \tag{II.21}$$

Esta ecuación representa la solución de la ecuación diferencial planteada y es conocida en la literatura como la solución de línea fuente. La expresión está planteada en unidades generales de campo.

Utilizando las definiciones de variables adimensionales siguientes:

$$t_D = \frac{\beta kt}{\phi\mu c_i r_w^2} \quad ; \quad p_D = \frac{kh\Delta p}{\alpha q B \mu} \quad ; \quad r_D = \frac{r}{r_w} \tag{II.22}$$

la ecuación (II.21) se transforma en:

$$p_D(t_D, r_D) = -\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-r_D^2}{4t_D} \right) . \quad \text{II.23}$$

En la siguiente Figura se presenta el comportamiento de la presión adimensional contra el grupo $\frac{t_D}{r_D^2}$, estimada a partir de la ecuación (II.23) :

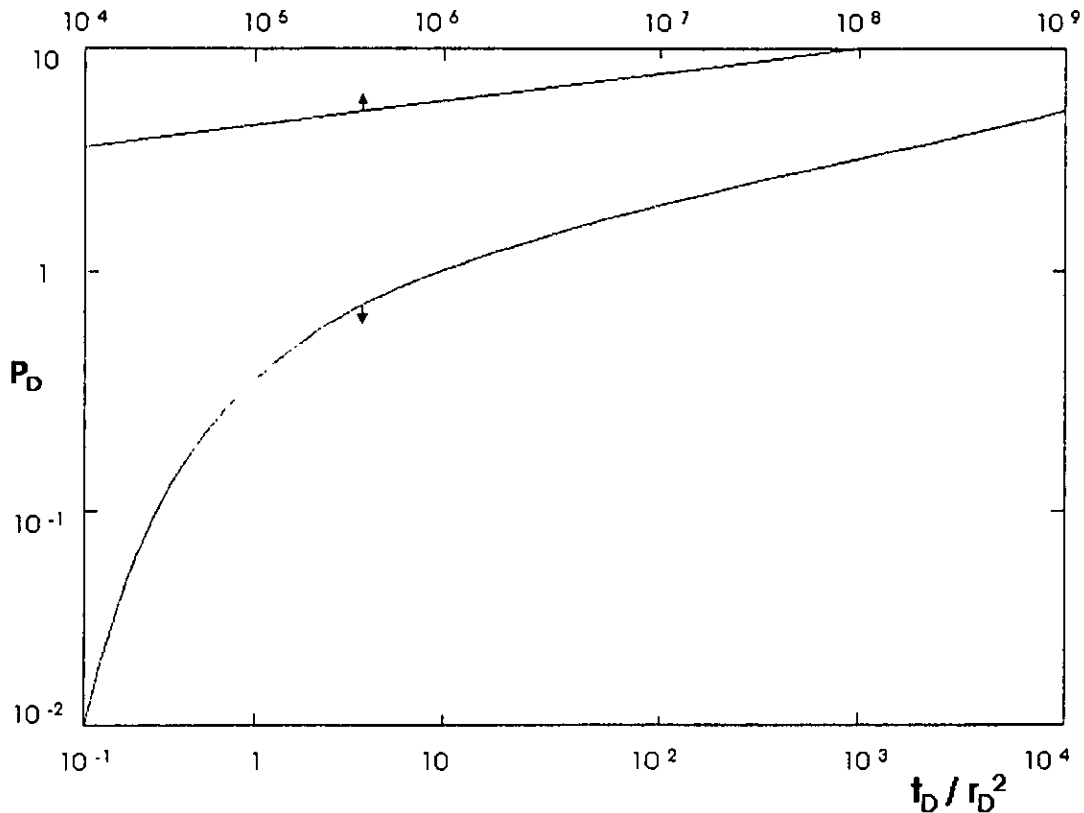


FIG. 2-6. COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL CONTRA EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO Y FLUJO RADIAL¹⁹.

La gráfica anterior se conoce como la curva tipo, "solución de línea fuente", y es aplicable al análisis de pruebas de interferencia en yacimientos homogéneos infinitos con flujo radial.

Aunque la solución presentada es una aproximación al caso real de un yacimiento infinito con un pozo finito, proporciona resultados casi idénticos a los obtenidos con la solución exacta cuando se evalúa para valores prácticos de radio y tiempo⁵⁴. En la Figura siguiente se presenta el comportamiento de la presión adimensional a varias

distancias adimensionales para un pozo finito en un sistema infinito. Es posible observar que para valores de r_D mayores que 20 la solución se traslapa con la integral exponencial, esto es, con la solución de línea fuente para todos los tiempos. Asimismo para valores de $t_D / r_D^2 > 5$ se presentan diferencias del 2% de error para cualquier valor de r_D . Es importante mencionar que para la mayoría de los casos de campo se cumplen cualesquiera de las dos condiciones.

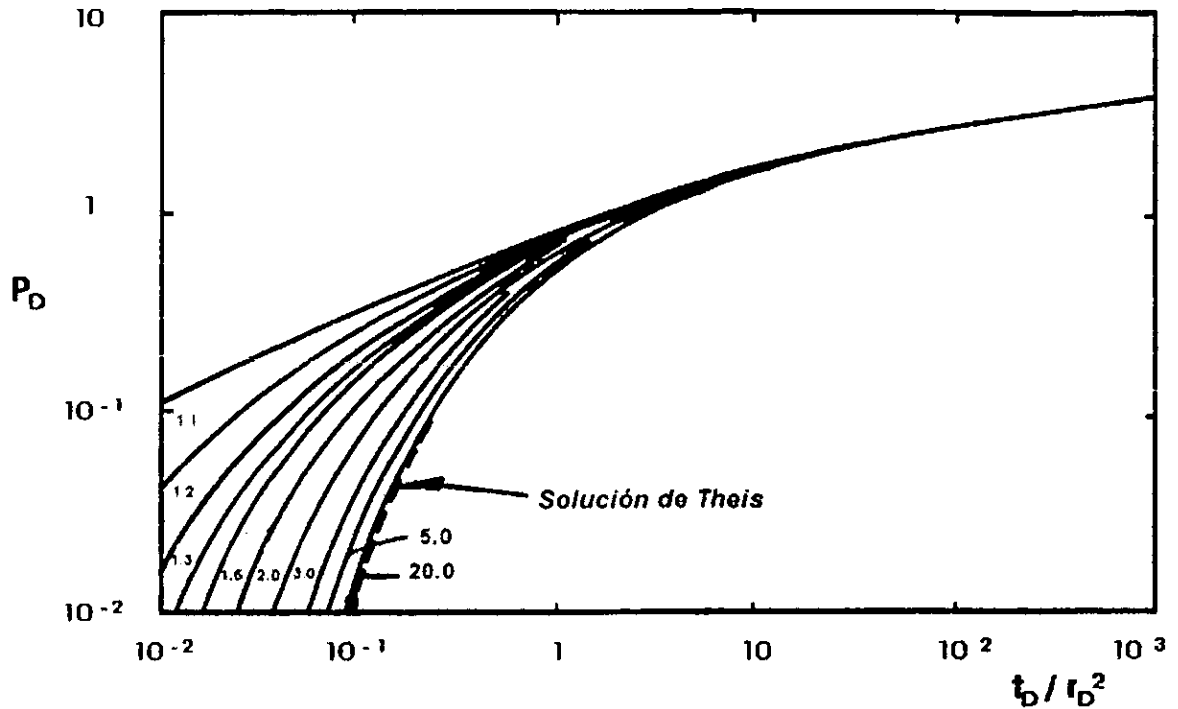


FIG. 2-7. COMPARACIÓN DE SOLUCIONES CONSIDERANDO POZO FINITO Y LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE⁵⁴.

Con la expresión (II.21), se puede calcular el comportamiento de la presión a cualquier radio y tiempo si se conocen los demás parámetros involucrados, pero si el argumento de la integral exponencial es suficientemente pequeño, se puede usar la siguiente aproximación:

$$x \leq 0.0025 \quad -E_1(-x) = -\ln(\gamma x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 0.5772, \quad \text{II.24}$$

donde γ es la constante de Euler, igual a 1.78. Por tanto, la ecuación (II.21) puede representarse como:

$$p(r, t) = p_i - \frac{\alpha q B \mu}{kh} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r^2} \right) + 0.80907 \right] ,$$

II.25

$$\text{para } \frac{\phi \mu c_t r^2}{4 \beta kt} \leq 0.0025 \quad \text{ó} \quad \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r^2} \geq 100 .$$

En la Figura 2-8, se presenta el comportamiento de la caída de presión que se obtiene de los casos de yacimiento homogéneo, isotrópico, con diferentes condiciones de frontera externa: infinito, cerrado y a presión constante.

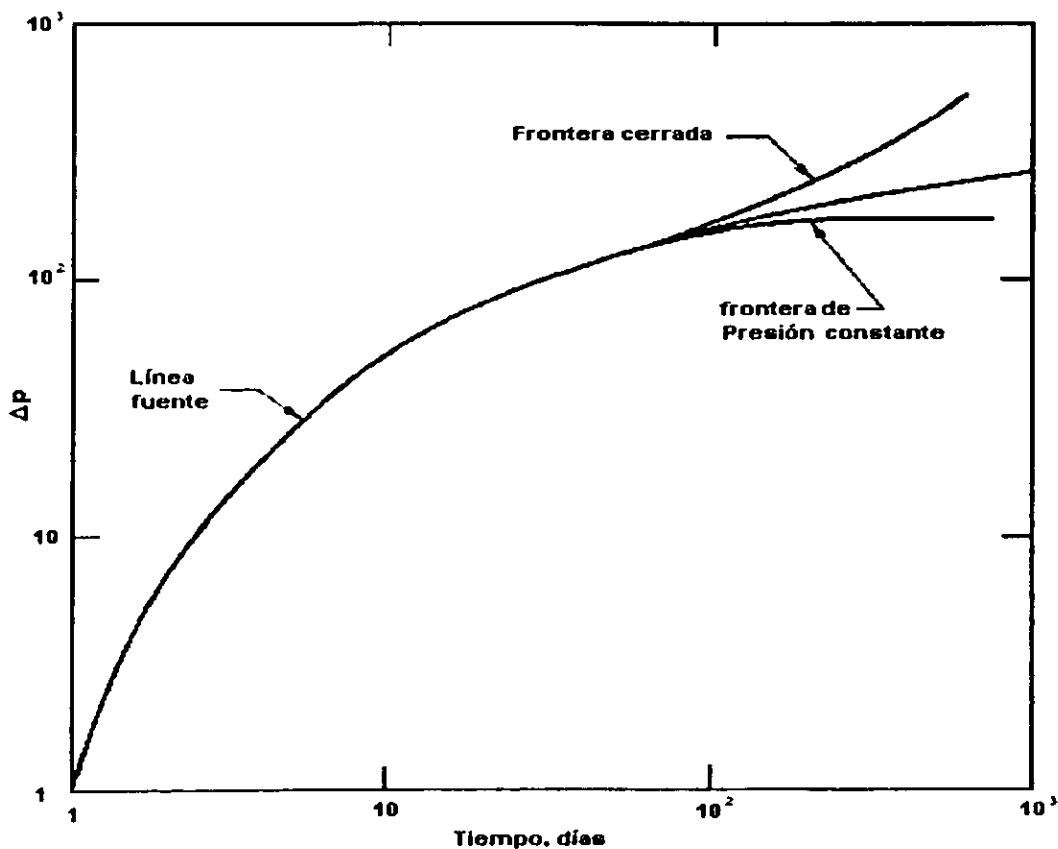


FIG. 2-8. CAÍDA DE PRESIÓN CONTRA TIEMPO PARA LOS CASOS DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO, FRONTERA CERRADA Y FRONTERA A PRESIÓN CONSTANTE⁹.

Aunque en el presente trabajo sólo se considera el caso de un yacimiento infinito, es importante discutir brevemente los diferentes comportamientos. En el caso de yacimiento cerrado, se observa que el comportamiento a tiempos cortos es idéntico al del yacimiento infinito, pero a medida que el radio de drene alcanza la frontera cerrada se presenta una divergencia hacia valores más altos. Para sistemas a presión constante, como puede ser el caso de un acuífero potente, se tiene también un comportamiento idéntico a tiempos cortos y posteriormente se observa una divergencia hacia valores menores de caída de presión que los reportados por la solución para un yacimiento infinito.

Los comentarios expuestos en el párrafo anterior son válidos para los tres tipos de flujo abordados en el trabajo, así como para los diferentes tipos de yacimientos existentes.

II.6 Yacimiento homogéneo infinito, flujo radial con efectos de almacenamiento y daño

La solución de línea fuente supone que la capacidad de almacenamiento del pozo activo y la presencia de daño, tienen un efecto despreciable en la respuesta de presión en el pozo de observación. Esta suposición es válida si la distancia entre los pozos es grande, sin embargo, para distancias pequeñas la respuesta a estos efectos puede ser significativa. Generalmente el efecto principal que se presenta es un retraso en la obtención de la respuesta de presión, el cual es función de las propiedades del yacimiento, la naturaleza del fenómeno de almacenamiento y el factor de daño.

Prats y Scott²⁰, fueron los primeros en considerar los efectos de almacenamiento en una prueba de pulsos, y concluyeron que el producto ϕc_t se sobreestima y $k/\phi c_t \mu$ se subestima si los efectos de almacenamiento son grandes y no se consideran en el análisis. Además enfatizan en la necesidad de considerar la resolución en el sensor de presión, ya que si los efectos de almacenamiento son grandes la respuesta real de presión en el pozo observador puede ser más baja de lo esperado.

En la literatura^{21,22,23,24}, se tienen varios trabajos que abordan el problema de análisis de pruebas de interferencia afectadas por almacenamiento y daño, primeramente considerando solamente que los efectos están presentes en el pozo activo y después haciéndolos extensivos a los pozos observadores. Se presentan curvas tipo de análisis para diferentes valores de C_D / r_D^2 .

Para fines del presente trabajo, se utiliza la solución presentada por Ogbe²⁵, la cual considera los efectos de almacenamiento y daño en el pozo activo y en el observador.

Las suposiciones consideradas para resolver el problema propuesto son, como en los casos anteriores, yacimiento homogéneo e isotrópico con comportamiento infinito, flujo radial en una sola fase, fluido ligeramente compresible, gradientes de presión pequeños, porosidad, permeabilidad y viscosidad independientes de la presión y coeficiente de almacenamiento y factor de daño constantes.

La ecuación de difusividad en función de variables adimensionales que representa el comportamiento de presión para el caso planteado es:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad , \quad \text{II.26}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

Inicial: $p_D(r_D, 0) = 0$

Externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0$ para todo t_D

Interna pozo observador:

$$C_{D1} \left(\frac{\partial p_{wD1}}{\partial t_D} \right) - \left(r_{D1} \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_{D1}} \right)_{r_{D1} \rightarrow 0} = 0 \quad \text{y} \quad p_{wD1} = p_D(1, t_D) - s_1 \left(r_{D1} \frac{\partial p_D}{\partial r_{D1}} \right)_{r_{D1} \rightarrow 0} .$$

Interna pozo activo:

$$C_{D2} \left(\frac{\partial p_{wD2}}{\partial t_D} \right) - \left(r_{D2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_{D2}} \right)_{r_{D2} \rightarrow 0} = 0 \quad \text{y} \quad p_{wD2} = p_D(1, t_D) - s_2 \left(r_{D2} \frac{\partial p_D}{\partial r_{D2}} \right)_{r_{D2} \rightarrow 0} . \quad \text{II.27}$$

p_{wD} es la presión dentro del pozo y p_D es la presión en la formación; nótese que las condiciones de frontera interna suponen que el radio del pozo tiende a cero, lo cual se justifica²⁵ por las siguientes razones: El considerar despreciable el radio, permite superponer las caídas de presión de los 2 pozos sin tomar en cuenta las distorsiones en los gradientes de presión que están presentes en la periferia del pozo cuando se considera un radio finito, además Agarwal⁵⁶ demostró que los cálculos de los dos casos, radio despreciable y finito, no son significativamente diferentes debido a que el almacenamiento domina el período durante el cual el radio del pozo afecta los resultados. El coeficiente de almacenamiento del pozo y el daño se definen como:

$$C_D = \frac{5.615C}{2\pi\phi h c_t r_w^2} \quad ; \quad s = \frac{kh\Delta p_{\text{daño}}}{\alpha q B \mu} \quad \text{II.28}$$

La solución derivada en la literatura se presentó en el plano de Laplace:

$$\bar{\Delta p}_{wD} = \frac{K_0(r_D \sqrt{p_L})}{p_L \left[\left\{ 1 + C_{D1} p_L (s_1 + K_0 \sqrt{p_L}) \right\} \left\{ 1 + C_{D2} p_L (s_2 + K_0 (\sqrt{p_L})) \right\} - C_{D1} C_{D2} (p_L K_0 (r_D \sqrt{p_L}))^2 \right]} \quad ; \quad \text{II.29}$$

la solución en el plano real se presenta en forma de curvas tipo, calculadas con el algoritmo Stehfest²⁶, que permite la inversión numérica del plano de Laplace al plano real.

Los parámetros de correlación usados en las primeras curvas tipo publicadas, esto es, las que consideran sólo efectos de almacenamiento y daño en el pozo activo, fueron t_D / r_D^2 , $C_D e^{2s}$ y C_D / r_D^2 . La Figura 2-9, reproduce el comportamiento de la presión en el pozo de observación para el caso de almacenamiento y daño despreciables en el pozo observador y un valor de $C_D / r_D^2 = 1$. Puede observarse que para valores pequeños de C_D las curvas tienden a la solución de línea fuente. En la literatura, se presentan varias curvas en el rango de $0.025 \leq C_D / r_D^2 \leq 10$ y valores de $C_D e^{2s} = 1, 5, 20, 10^2, 5 \times 10^2, 2 \times 10^3, 10^4, 10^6, 10^{10}, 10^{15}$ y 10^{20} .

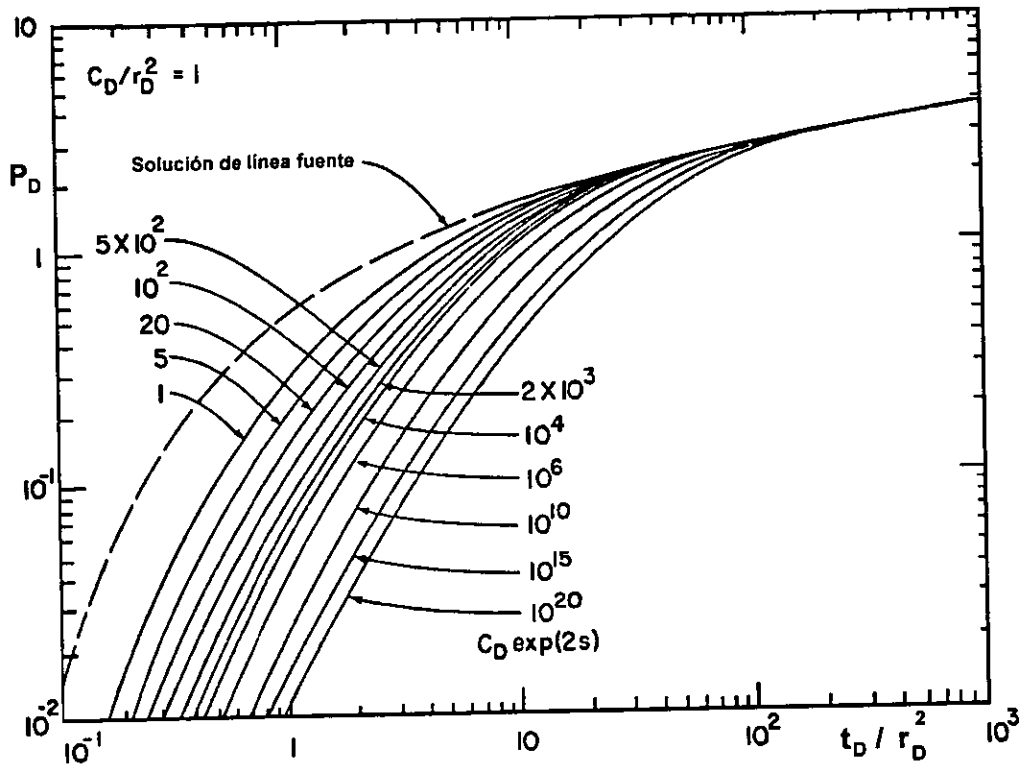


FIG. 2-9. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO²³.

En la Figura anterior, puede observarse que las formas de las curvas son muy semejantes, por lo cual se concluye que no es posible determinar con certeza, a partir de la forma de los datos del pozo de observación, si están actuando los efectos de almacenamiento y daño del pozo activo. Asimismo, es muy difícil determinar si los efectos de almacenamiento y daño en el pozo observador están distorsionando los datos de presión.

Tongpenyai²⁴, demostró analíticamente la intercambiabilidad de las constantes de almacenamiento y daño. Esto es, la respuesta de presión en el pozo de observación, es idéntica si se intercambian los valores de almacenamiento y daño del pozo activo por los del pozo de observación, lo cual es equivalente al principio de reciprocidad.

Por los hechos mencionados en los párrafos anteriores, es importante considerar en el análisis información adicional. Las mediciones de presión de fondo en el pozo activo permiten obtener valores de C_D y s , con los cuales puede apoyarse fuertemente en la

interpretación de la prueba de interferencia; por otro lado los datos de terminación del pozo observador y los datos de la compresibilidad de los fluidos que lo llenan, permiten obtener valores aproximados del coeficiente de almacenamiento y mediante la información de pruebas pasadas obtener algún valor probable del factor de daño.

A partir de un análisis teórico Jargon²⁷, propone la siguiente expresión para estimar el tiempo a partir del cual los efectos del almacenamiento y daño en el pozo observador son despreciables:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = (230 + 15s_2) \left(\frac{C_{D2}}{r_D^2} \right)^{0.86} \quad \text{II.30}$$

Puede observarse que la ecuación anterior concuerda con los valores estimados a partir de las curvas tipo presentadas en la Figura 2-9.

Cuando están presentes los efectos de almacenamiento en ambos pozos, se requieren al menos 5 variables para construir las curvas tipo: C_{D1}/r_D^2 , C_{D2}/r_D^2 , $C_{D1}e^{2s_1}$, $C_{D2}e^{2s_2}$ y t_D/r_D^2 . Ogbe²⁸ en 1989, presentó un nuevo parámetro de correlación $(C_D e^{2s})C_D/r_D^2$, que permite presentar en una gráfica única la mayoría de las curvas tipo requeridas en la práctica para el análisis de pruebas de interferencia. Este parámetro de correlación no tiene una base teórica y aunque no ajusta exactamente a las curvas tipo presentadas por otros autores, el error es menor al 3%, lo cual desde el punto de visto práctico puede considerarse satisfactorio.

En la Figura 2-10, se muestra la curva tipo desarrollada con el parámetro de correlación de Ogbe. Se puede observar que para cualquier rango de tiempo que se extienda por al menos dos ciclos, las curvas son distintas unas de otras. Esto es, si el almacenamiento en uno de los pozos, ya sea el activo o el observador, está afectando la respuesta de presión, éste será fácilmente diagnosticado.

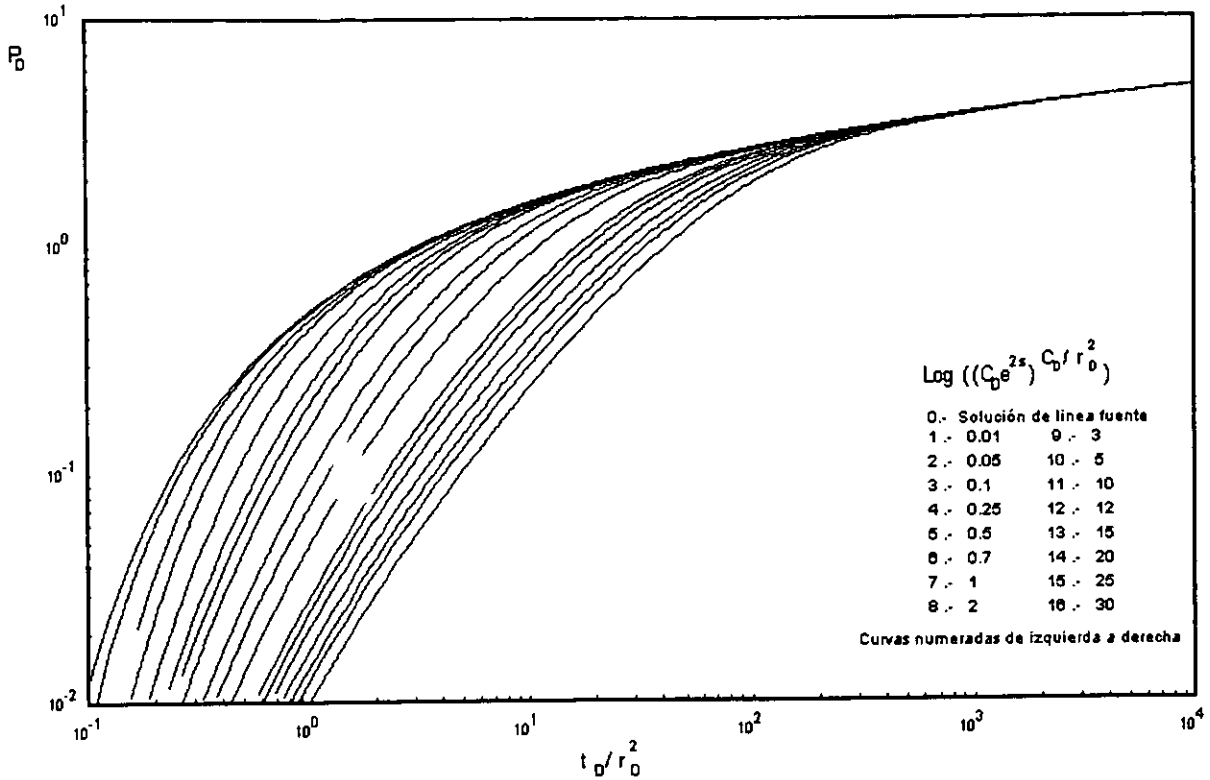


FIG. 2-10. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO²⁸.

Para el caso, de efectos simultáneos en ambos pozos, Ogbe presentó una curva tipo, (ver Figura 2-11) que considera que los coeficientes de almacenamiento del pozo activo y observador son iguales; esta consideración la hizo para simplificar la explicación, aunque es claro que en la práctica esta situación difícilmente se presentaría. A partir de esta Figura se concluye que las formas de las curvas tienen pendientes mayores que las observadas en la Figura 2-10. Con base en lo anterior, el autor propone el uso de esta curva tipo como herramienta de diagnóstico para definir si los efectos están presentes en ambos pozos. También, comenta que la curva tipo puede ser utilizada aún cuando los valores del almacenamiento en ambos pozos cambien en varios órdenes de magnitud, ya que el error que se presenta es mínimo. Sin embargo, plantea que la aplicación práctica debe ser estudiada en trabajos posteriores.

En la Figura 2-11, se observa que a tiempos cortos las pendientes son bastante grandes y que a tiempos largos las curvas se aproximan a la solución de línea fuente.

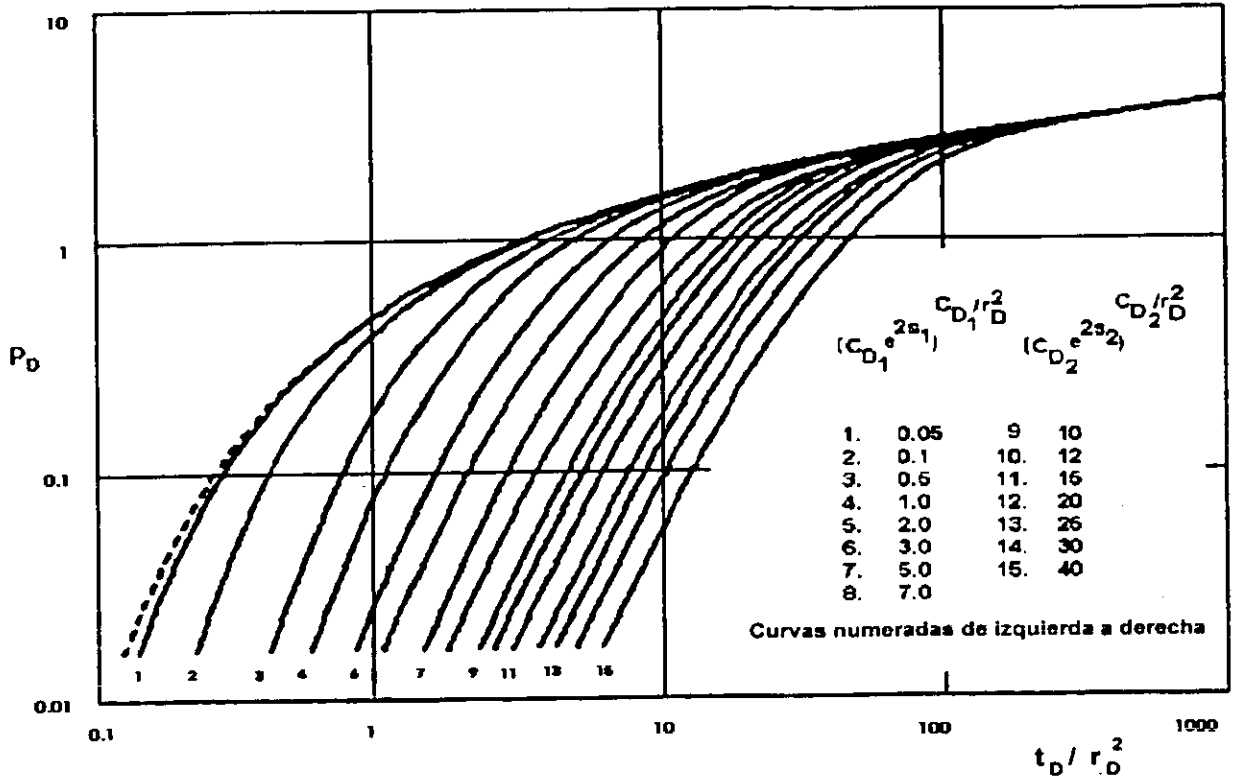


FIG. 2-11. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN EL POZO ACTIVO Y EL OBSERVADOR.²⁸

II.7 Yacimiento homogéneo naturalmente fracturado, flujo radial

El comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados se ha representado por el modelo de doble porosidad, que considera la existencia de dos medios porosos con diferentes porosidades y permeabilidades. Uno de los medios, constituido por el sistema de fracturas, tiene alta permeabilidad y conduce el fluido del yacimiento al pozo. El otro medio, el sistema de bloques de matriz, tiene baja permeabilidad y actúa como una fuente que aporta fluido solamente a las fracturas.

El concepto original de un modelo matemático de doble porosidad, presentado por Warren y Root²⁹, considera que el material con porosidad primaria es homogéneo e isotrópico constituido por un arreglo de paralelepípedos rectangulares idénticos y que la porosidad secundaria existe en un sistema ortogonal de fracturas uniformes, continuas y paralelas.

$$p_{fD} = 0 \quad \text{en} \quad t_D = 0 \quad \forall \quad r_D$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD} = 0 \quad \forall \quad t_D \quad . \quad \text{II.37}$$

$$\left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1$$

Puede observarse que los efectos de almacenamiento y daño no se consideran en el planteamiento del problema. La solución en el plano de Laplace, para el caso planteado, es:

$$\bar{\Delta P}_{WD} = \frac{K_o(r_D \sqrt{\rho_L f(\rho_L)})}{\rho_L \sqrt{\rho_L f(\rho_L)} K_1(\sqrt{\rho_L f(\rho_L)})} \quad , \quad \text{II.38}$$

la cual puede aproximarse para propósitos prácticos como:

$$\bar{\Delta P}_{WD} = \frac{K_o(r_D \sqrt{\rho_L f(\rho_L)})}{\rho_L} \quad . \quad \text{II.39}$$

Las variables adimensionales para este caso se definen como:

$$t_D = \frac{\beta k_f t}{(\phi V c_t)_f \mu r_w^2} ; \quad p_D = \frac{k_f h \Delta p}{\alpha q B \mu} ; \quad r_D = \frac{r}{r_w} ; \quad C_D = \frac{0.8936c}{(\phi V c_t)_{f+m} h r_w^2} \quad . \quad \text{II.40}$$

Deruyck³¹ y coautores en 1982, estudiaron las diferentes soluciones de la ecuación (II.39) para tiempos cortos, intermedios y grandes, a partir de ellas presentan la curva tipo elaborada por la superposición de las soluciones, Figura 2-12. Las curvas de ω describen el comportamiento del yacimiento para tiempos iniciales y finales, mientras que las curvas λr_D^2 representan el comportamiento del yacimiento durante el periodo de transición o intermedio.

A tiempos cortos el flujo se origina sólo en las fracturas y no hay prácticamente contribución de fluidos de la matriz. El comportamiento de presión en este periodo corresponde al de un yacimiento homogéneo, representado por la solución de línea

fuelle (curva etiquetada con $\omega = 1$) sobre el lado izquierdo de la Figura 2-12. Para tiempos intermedios, la matriz progresivamente alimenta a las fracturas hasta que la presión en ambos medios se iguala; este fenómeno está representado por la parte aplanada de las curvas etiquetadas como λr_D^2 . La duración de la transición depende de ω , mientras que el tiempo de inicio del periodo de transición y del nivel de perfil de presión estabilizado depende de λ . Para tiempos largos ambos medios aportan fluidos simultáneamente y el comportamiento de presión es representativo de un nuevo yacimiento pseudo-homogéneo, caracterizado por una permeabilidad igual a la de las fracturas y el almacenamiento igual al del sistema total.

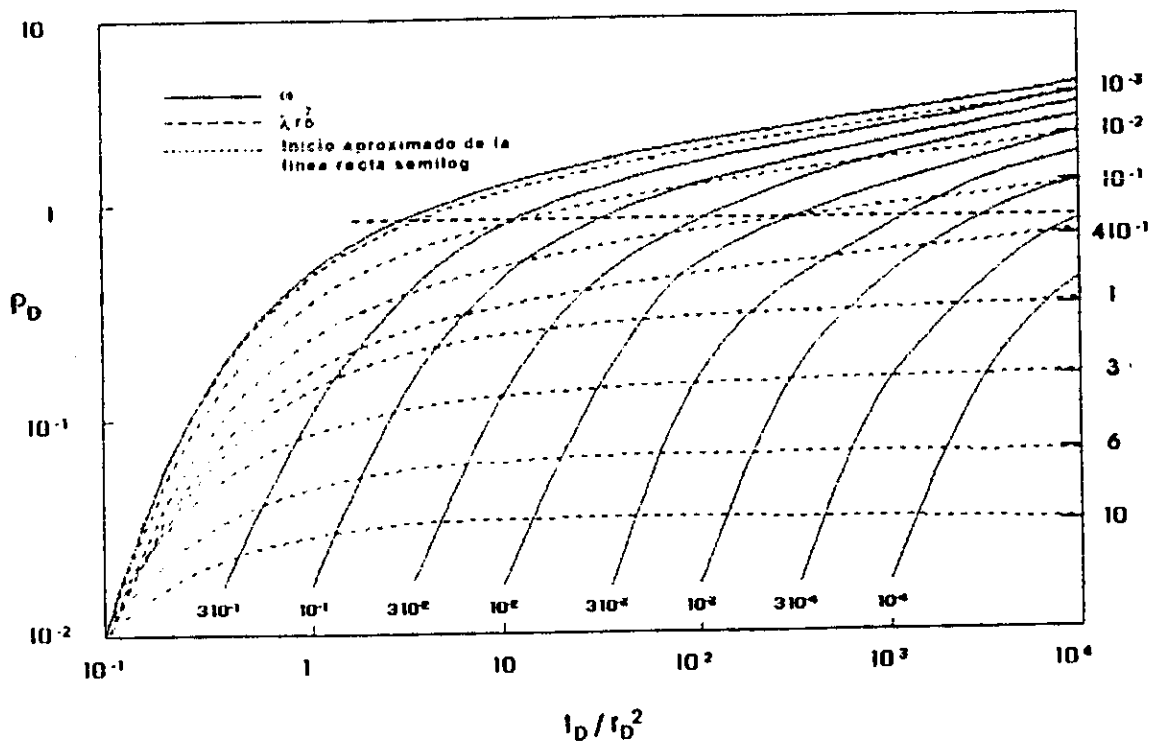


FIG. 2-12. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE UNA PRUEBA DE INTERFERENCIA EN UN YACIMIENTO DE DOBLE POROSIDAD, MODELO PSEUDOESTACIONARIO.³¹

Los yacimientos naturalmente fracturados y los yacimientos multicapa, con contrastes altos de permeabilidad entre capas, exhiben el mismo comportamiento establecido en la Figura 2-12, esto es, el modelo matemático representado por la ecuación (II.39) es idéntico; en este caso, la capa de más alta permeabilidad aporta fluidos al pozo y la de menor permeabilidad suministra fluidos a la capa de alta conductividad.

Warren y Root²⁹ en 1963, presentaron la solución para la distribución de presión en un yacimiento fracturado, y demuestran que se necesitan, adicionalmente a las variables usadas comúnmente para yacimientos homogéneos, dos parámetros para caracterizar el modelo de doble porosidad: ω , la relación de almacenamiento del sistema fisurado al del sistema matriz más fracturas y el coeficiente de flujo interporoso λ :

$$\omega = \frac{(\phi V c_t)_f}{(\phi V c_t)_f + (\phi V c_t)_m}; \quad \lambda = \bar{\alpha} r_w^2 \frac{k_m}{k_f}; \quad \text{II.31}$$

el término $\bar{\alpha}$ es un parámetro característico de la geometría de la formación fracturada que depende de la forma y tamaño de bloques, definido como:

$$\bar{\alpha} = \frac{4n(n+2)}{\ell^2}; \quad \text{II.32}$$

para bloques horizontales $n=1$, y :

$$\lambda = \frac{12}{\ell^2} r_w^2 \frac{k_m}{k_f}. \quad \text{II.33}$$

Mavor y Cinco³⁰ en 1979, presentaron una solución más completa que incluye los efectos de daño y almacenamiento del pozo.

Bajo las suposiciones de un yacimiento lateralmente infinito, con flujo isotérmico radial de un sólo fluido de compresibilidad pequeña, que las fuerzas gravitacionales son despreciables y que la porosidad de ambos medios es independiente de las variaciones de presión, así como que el flujo al pozo ocurre solamente a través de las fracturas, las ecuaciones de difusividad para los medios fractura y matriz, se expresan como:

$$\begin{aligned} \frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f &= (\phi V c_t)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - q^* ; \\ \frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m &= (\phi V c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + q^* , \end{aligned} \quad \text{II.34}$$

donde ϕ es la porosidad global del medio, esto es, la relación de volumen poroso en el medio al volumen total del medio; V es la relación del volumen del medio al volumen total del sistema; y q^* es el volumen de fluido fluyendo de la matriz a las fracturas por unidad de volumen total y por unidad de tiempo.

El comportamiento del flujo de fluidos de la matriz hacia las fracturas puede darse en régimen transitorio o pseudoestacionario. Considerando régimen pseudoestacionario:

$$q^* = \alpha \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) . \quad \text{II.35}$$

Considerando la expresión (II.35) y desarrollando algebraicamente bajo la suposición de que k_m es pequeña (lo cual permite desprestigiar el término izquierdo de la segunda ecuación en la expresión (II.34)), la ecuación para el medio fisurado puede escribirse en el plano de Laplace de la siguiente manera³¹:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{rD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{rD}}{\partial r_D} - p_L f(p_L) \bar{p}_{rD} = 0 \quad \text{II.36}$$

donde:

$$f(p_L) = \frac{\omega(1-\omega)p_L + \lambda}{(1-\omega)p_L + \lambda} . \quad \text{II.37}$$

La ecuación (II.36) con las siguientes condiciones iniciales y de frontera representa matemáticamente el comportamiento de flujo de fluidos en un medio poroso homogéneamente fracturado.

Es importante comentar que la línea punteada en la Figura 2-12, establece el límite inferior al cual se obtiene una recta semilogarítmica. Se ha establecido en la literatura que la presencia de esta recta está supeditada a que el producto λr_D^2 sea menor que 0.05, lo cual no es muy común en la práctica.

II.8 Yacimiento idealmente anisotrópico, flujo radial

La teoría para describir el flujo de fluidos en yacimientos heterogéneos, considerada en este subtema, es para yacimientos idealmente anisotrópicos, esto es yacimientos con características semejantes a los homogéneos excepto de la existencia de una dirección preferente al flujo. El flujo, sin embargo, es posible en todas direcciones incluyendo al sentido perpendicular a la dirección preferente, donde el movimiento de fluidos es más difícil. Aunque pareciera que la teoría bajo estas premisas no tuviera aplicación extensiva en la práctica, es importante mencionar que existen muchas formaciones productoras, tales como canales arenosos, que presentan este modelo simple de anisotropía.

Desde el punto de vista matemático la permeabilidad en este modelo se caracteriza por el siguiente tensor:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{vmatrix}; \quad \text{II.41}$$

o si los ejes se eligen con una alineación coincidente con las direcciones preferentes:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{\text{máx}} & 0 \\ 0 & k_{\text{mín}} \end{vmatrix}, \quad \text{II.42}$$

donde $k_{\text{máx}}$ y $k_{\text{mín}}$ son las permeabilidades de los ejes preferentes máximo y mínimo, respectivamente.

La ecuación que representa el comportamiento de la presión en el medio poroso fue presentada por Papadopoulos, y replanteada por Ramey³³ para su aplicación al área de petróleo:

$$\frac{\sqrt{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} h(p_i - p(r, t))}{\alpha q B \mu} = -\frac{1}{2} E_i \left[-\frac{\phi \mu c_t}{\beta t} \left(\frac{k_{xx}y^2 + k_{yy}x^2 - 2k_{xy}xy}{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} \right) \right], \quad 11.43$$

donde 'x' y 'y', medidas en pies, son las coordenadas del pozo de observación, considerando al pozo activo localizado en el origen de los ejes coordenados.

Es importante mencionar que la solución planteada supone que el sistema pozo activo-pozos observadores está actuando en un yacimiento infinito y homogéneo.

Las permeabilidades máxima y mínima, se estiman con las siguientes expresiones:

$$k_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ (k_{xx} + k_{yy}) + \left[(k_{xx} - k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 \right]^{1/2} \right\} \quad 11.44$$

$$k_{\min} = \frac{1}{2} \left\{ (k_{xx} + k_{yy}) - \left[(k_{xx} - k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 \right]^{1/2} \right\}$$

El ángulo de desfaseamiento, entre los ejes considerados por el analista y los ejes de permeabilidad preferenciales, se calcula a partir de:

$$\theta = \arctan \left(\frac{k_{\max} - k_{yy}}{k_{xy}} \right). \quad 11.45$$

En la Figura 2-13, se muestra como el eje de máxima permeabilidad está girado un ángulo θ respecto a los ejes utilizados para ubicar las coordenadas de los pozos, además se aprecia que el eje de menor permeabilidad es perpendicular.

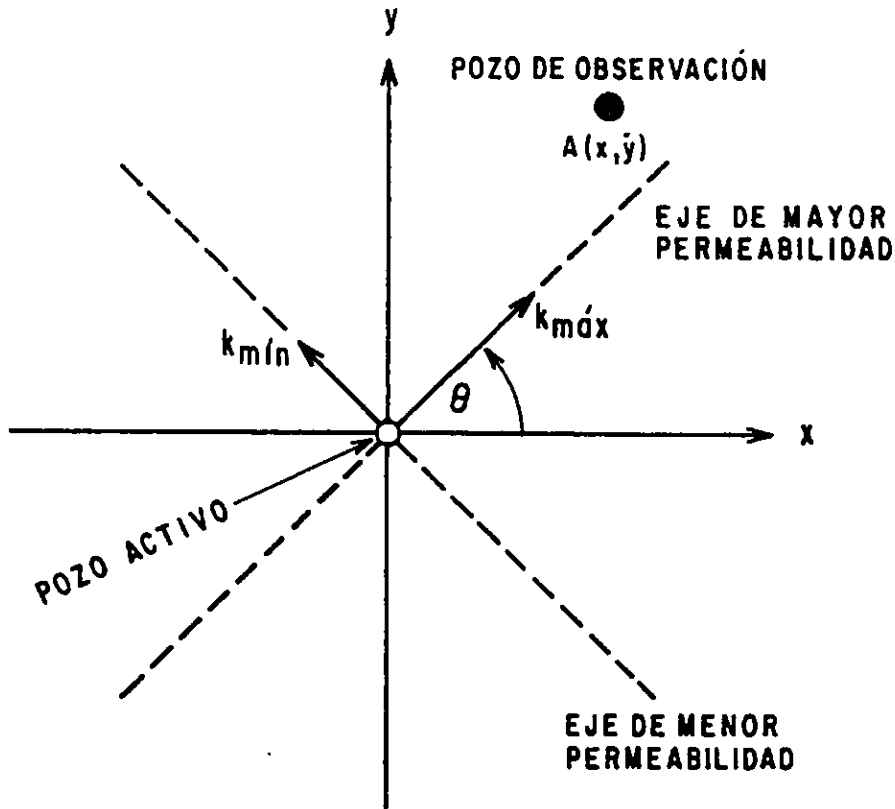


FIG. 2-13. NOMENCLATURA USADA PARA UN YACIMIENTO IDEALMENTE ANISOTRÓPICO³³.

Como se observa de la ecuación (II.43), para yacimientos idealmente anisotrópicos, las variables adimensionales se definen como:

$$p_D = \frac{\sqrt{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} h(p_i - p(r, t))}{\alpha q B \mu} ; \quad t_D = \frac{\beta t}{r_D^2 \phi \mu c_t} \left(\frac{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2}{k_{xx}y^2 + k_{yy}x^2 - 2k_{xy}xy} \right) \quad \text{II.46}$$

De la definición de p_D se puede concluir que si analizamos una prueba de interferencia en un yacimiento idealmente anisotrópico considerando la teoría de yacimiento homogéneo, se obtiene una permeabilidad que representa un promedio geométrico,

$$k = \sqrt{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} \quad \text{II.47}$$

El procedimiento de análisis consiste en dos pasos generales. Primeramente, aplicar la metodología de curvas tipo a los datos de campo de todos los pozos de observación, de tal forma que el ajuste en presión sea el mismo para todos. Esta parte se explica

analizando la ecuación (II.43), se concluye que el término dentro del radical es el mismo para todos los pozos de observación. Por tanto se deben alinear los ajustes de presión y mover los datos horizontalmente hasta que se ajusten adecuadamente con la curva tipo.

Del ajuste de la presión, igual para todos los pozos, se establece una primera ecuación:

$$k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2 = \left[\frac{\alpha q B \mu p_D}{h \Delta p} \right]^2 \quad \text{II.48}$$

A partir del ajuste de tiempo, para al menos tres pozos de observación, se obtienen tres ecuaciones adicionales, del siguiente tipo:

$$\left(\frac{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2}{k_{xx}y^2 + k_{yy}x^2 - 2k_{xy}xy} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{\beta} \left\{ \frac{t_D}{t} / r_D^2 \right\}_j ; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad \text{II.49}$$

Las ecuaciones (II.48) y (II.49) conforman un sistema de ecuaciones no lineal, con incógnitas k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} y $\phi \mu c_t$. La segunda parte del procedimiento planteado, consiste en la obtención de la solución.

Finalmente con la aplicación de las ecuaciones (II.44) y (II.45), se estiman las permeabilidades máxima y mínima y el ángulo de desfaseamiento de los ejes de permeabilidad.

Ramey³³, indica que se requiere la participación simultánea de cuatro pozos, un activo y tres de observación para generar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Si existen más pozos considerados en la prueba, recomienda realizar el análisis por grupos de tres para verificar la hipótesis de yacimiento idealmente anisotrópico.

Respecto a la extensión de la teoría presentada a yacimientos reales, es importante mencionar que se ha observado que pozos en yacimientos heterogéneos, presentan

respuestas de presión del tipo integral exponencial durante las pruebas de interferencia; este hecho permite plantear en una base lógica que la teoría presentada puede ser aplicada, pero no garantizada para todos los casos.

II.9 Superposición en espacio y tiempo⁹

Los problemas de cálculo de caídas de presión en pozos múltiples y gastos variables pueden ser resueltos mediante la aplicación del principio de superposición. Este principio establece que una combinación lineal de soluciones de una ecuación diferencial lineal, también es una solución. El flujo transitorio de fluidos ligeramente compresibles se describe por medio de la ecuación de difusión, y debido a que esta expresión es lineal, se puede aplicar el principio de superposición para obtener soluciones a problemas de flujo complicados. Cuando las condiciones de frontera son independientes del tiempo, por ejemplo gasto constante, el principio muestra que la presencia de una condición de frontera no afecta la respuesta causada por otra condición de frontera o inicial; es decir no hay interacción entre las respuestas. Por lo tanto, el efecto total es la suma de cada uno de los efectos individuales.

La superposición en tiempo se aplica para analizar cambios de gasto de producción a partir de la solución para un caso de gasto constante. Considere el caso de un pozo el cual produce a dos gastos, como se muestra en la Figura 2.14. El pozo ha producido con un gasto q_1 desde $t=0$ hasta t_1 y a un gasto q_2 de t_1 en adelante; la caída de presión en el pozo a un tiempo t menor que t_1 es:

$$\Delta p(t, r_w) = \frac{\alpha q_1 B \mu}{kh} [p_D(t_D, 1) + s] \quad \text{II.50}$$

donde t_D es el tiempo adimensional calculado al tiempo $t < t_1$.

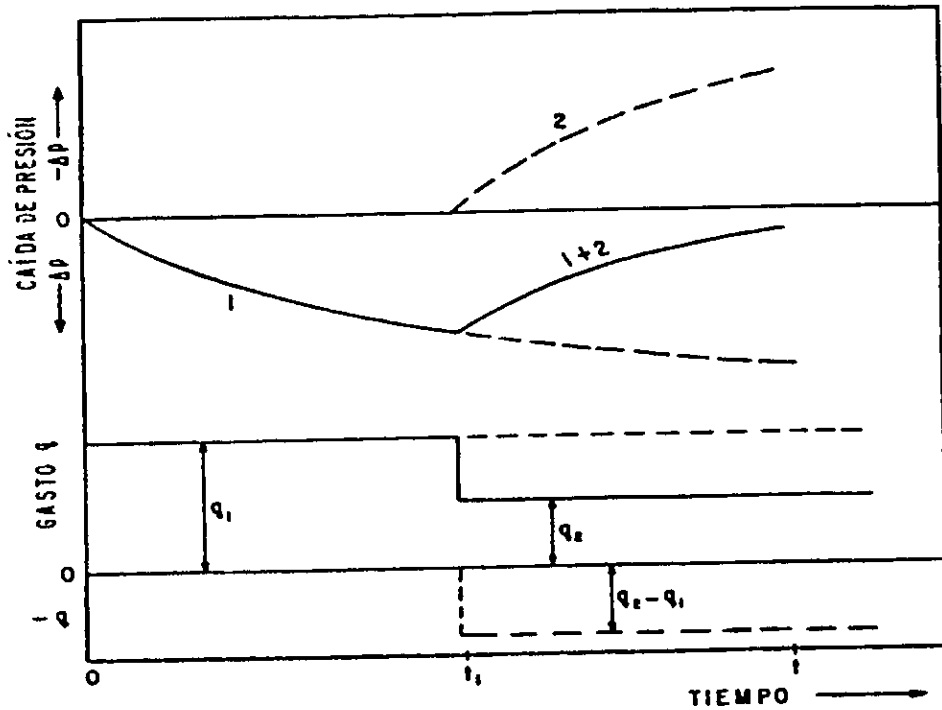


FIG. 2-14. POZO ACTIVO PRODUCIENDO A DOS GASTOS DIFERENTES.

Asimismo, para calcular la caída de presión a un tiempo \$t\$ mayor que \$t_1\$, el pozo puede ser visualizado matemáticamente como dos pozos colocados exactamente en el mismo lugar, uno produciendo a un gasto \$q_1\$ desde \$t=0\$ hasta \$t\$ y el otro produciendo a un gasto \$(q_2-q_1)\$ empezando en \$t_1\$ y continuando por un periodo \$(t-t_1)\$. Por consiguiente el gasto neto después de \$t_1\$ es \$q_1+(q_2-q_1)=q_2\$. Aplicando el principio de superposición, para los pozos, se obtiene que la caída de presión en el pozo para un tiempo mayor que \$t_1\$, está dada por:

$$\Delta p(t, r_w) = \frac{\alpha q_1 B \mu}{kh} [p_D(t_D, l) + s] + \frac{\alpha (q_2 - q_1) B \mu}{kh} [p_D((t - t_1)_D, l) + s]. \quad \text{II.51}$$

El primer término es la caída de presión en el pozo debida al gasto \$q_1\$, mientras que el segundo es la caída de presión en el pozo causada por variar el gasto en una cantidad \$(q_2-q_1)\$.

El mismo razonamiento puede aplicarse para cualquier número de variaciones de gasto, por lo cual la expresión general de superposición en tiempo es:

$$\Delta p(t, r_w) = \frac{\alpha B \mu}{kh} \sum_{j=1}^{N_c} (q_j - q_{j-1}) [p_D((t - t_{j-1})_D, l) + s]. \quad 11.52$$

Esta expresión es válida independientemente de que si q_j es mayor o menor que q_{j-1} , o si uno o más gastos son cero. Por otro lado, esta ecuación es general para cualquier modelo de yacimiento y tipo de flujo, considerando adecuadamente la definición de p_D .

La superposición en espacio se utiliza para estimar la caída de presión en cualquier punto afectado por la producción o inyección de más de un pozo, en un yacimiento. Esta extensión es la base principal del análisis de las pruebas de interferencia. Considere un sistema infinito con 3 pozos, como el mostrado en la Figura:

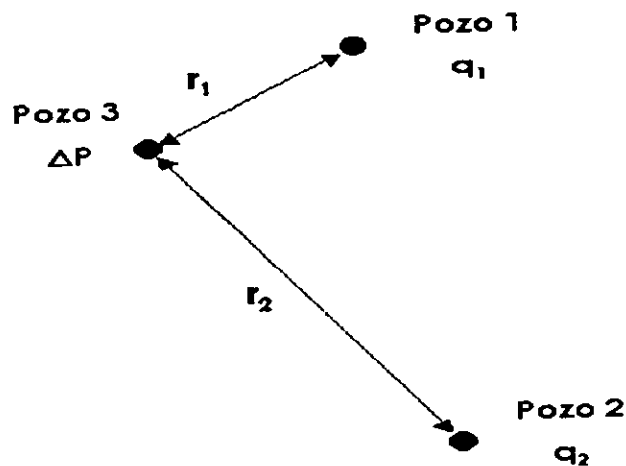


FIG. 2-15. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE TRES POZOS PRODUCIENDO EN UN YACIMIENTO.

En $t=0$ el pozo 1 comienza a producir a un gasto q_1 , y el pozo 2 a un gasto q_2 . Para calcular la caída de presión en el pozo 3, se suma la caída de presión en el pozo 3 causada por el pozo 1 y la del pozo 2, esto es:

$$\Delta p_3(t, r_w) = \frac{\alpha q_1 B \mu}{kh} [p_D(t_D, r_{D1})] + \frac{\alpha q_2 B \mu}{kh} [p_D(t_D, r_{D2})], \quad 11.53$$

donde r_{D1} y r_{D2} representan la distancia adimensional del pozo 3 al 1 y 2 respectivamente.

Siguiendo un razonamiento similar para el caso de un número arbitrario de pozos intercomunicados, la caída total de presión en un punto en el yacimiento estará dada por:

$$\Delta p_i(t, r_w) = \frac{\alpha B \mu}{kh} \sum_{j=1}^{\ell} q_j [p_D(t_D, r_{Dj})]. \quad \text{II.54}$$

La aplicación simultánea de superposición en tiempo y espacio se presenta cuando se requiere estimar la caída de presión en un pozo cualquiera, de un sistema afectado por la variación de gastos existentes en los diversos pozos. Para resolver este problema de combinación de gastos variables y pozos múltiples, se debe aplicar primeramente la ecuación (II.52) para cada pozo en el sistema y posteriormente la ecuación (II.54), obteniéndose finalmente la caída de presión total en el pozo deseado, causada por todos los pozos y todos los gastos. Uniendo las ecuaciones mencionadas, se obtiene:

$$\Delta p(t, r) = \frac{\alpha B \mu}{kh} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{N_c} (q_j - q_{j-1}) [p_D((t - t_{j-1})_D, r_{Di}) + s_i], \quad \text{II.55}$$

donde el subíndice "i" se refiere a la localización de los pozos activos, y r_{Dj} es la distancia adimensional respectiva de los pozos productores o inyectores al pozo observador; "j" controla los tiempos cuando los gastos q_j cambian.

A continuación se presentan curvas tipo para yacimientos homogéneos e isotrópicos, con flujo esférico, lineal y radial que consideran un sólo pulso, esto es, la apertura y cierre del pozo activo³⁴. Estas curvas se estimaron con las ecuaciones (II.11), (II.16) y (II.23) y la aplicación del principio de superposición en tiempo.

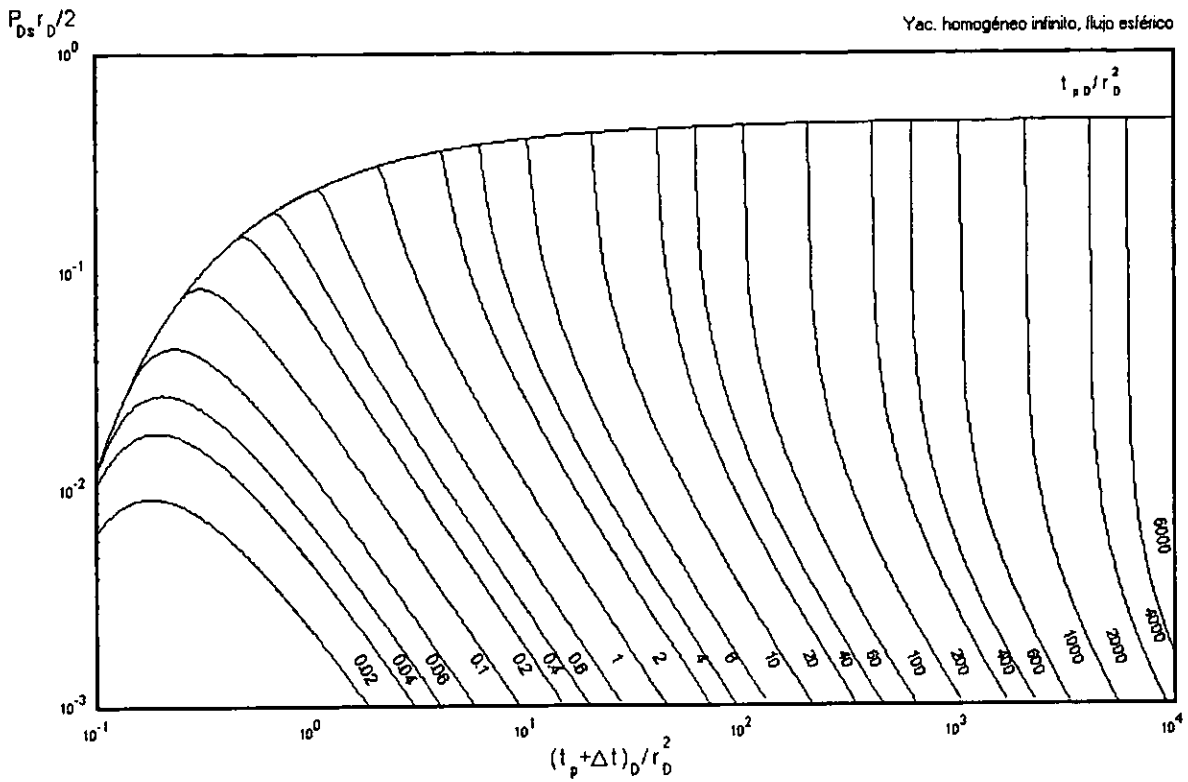


FIG. 2-16. CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO ESFÉRICO³⁴.

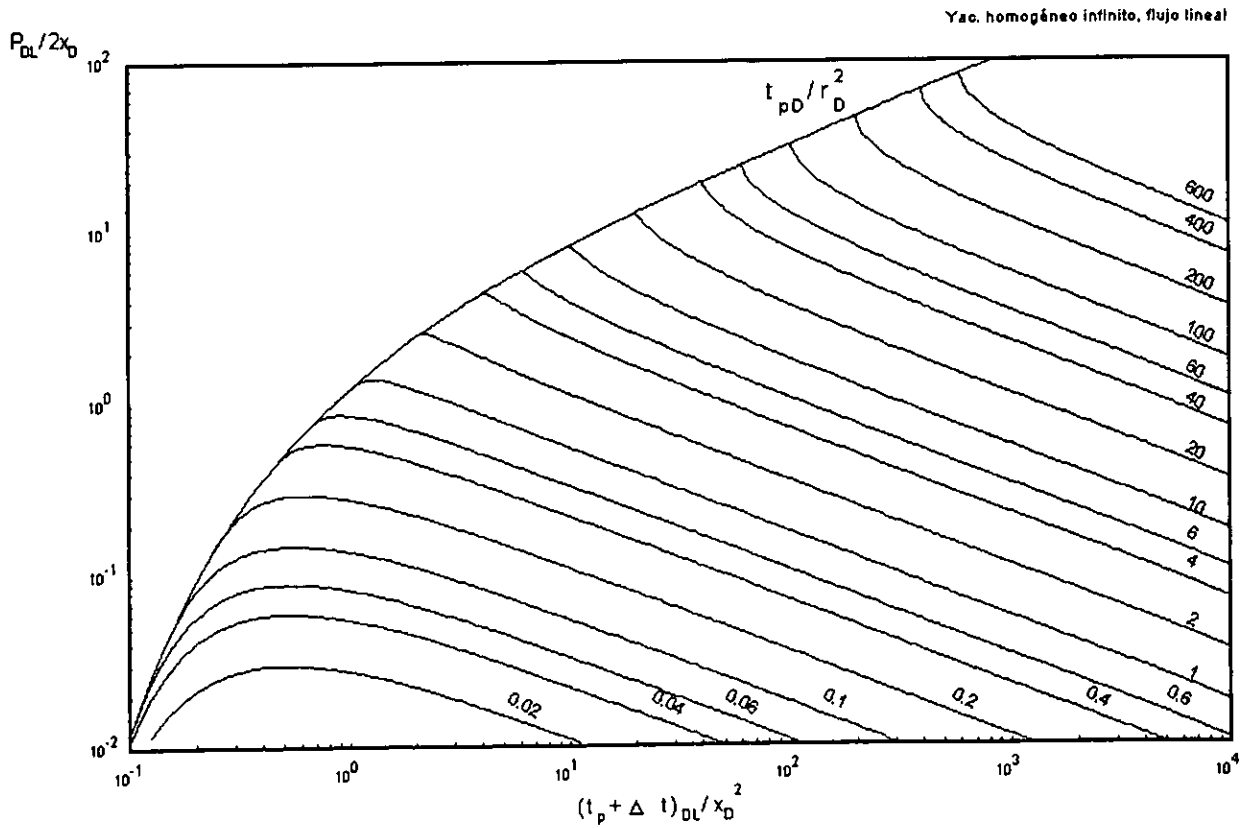


FIG. 2-17. CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO LINEAL³⁴.

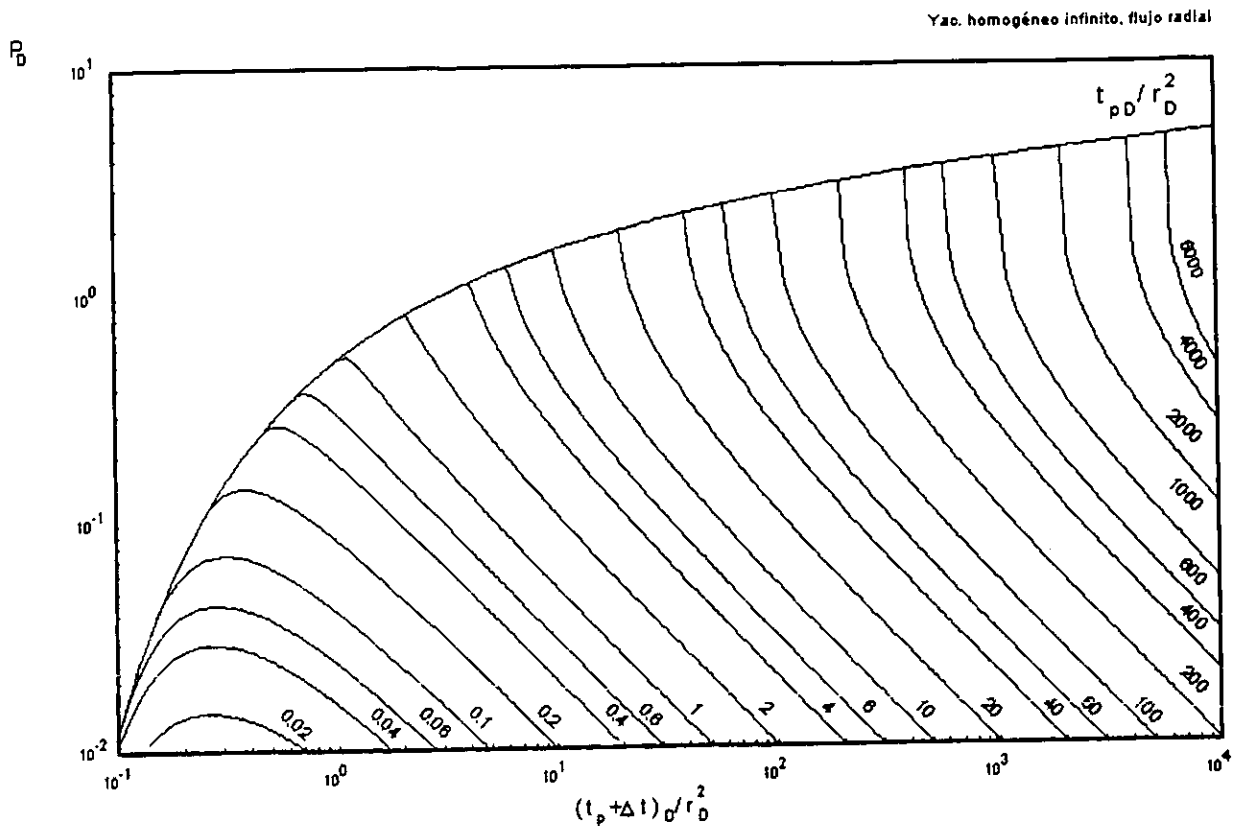


FIG. 2-18. CURVA TIPO PARA UN PULSO, FLUJO RADIAL³⁴.

II.10 Ajuste con curvas tipo³⁴

La aplicación del método de ajuste por medio de curvas tipo hace uso de la propiedad de los logaritmos, que indica que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. La base del método de ajuste con curvas tipo puede entenderse fácilmente, cuando se toman logaritmos de las ecuaciones que definen las variables adimensionales; por ejemplo considerando flujo radial, se tiene:

$$\log(p_D) = \log\left(\frac{kh}{\alpha q B \mu}\right) + \log(p_i - p(r, t))$$

$$\log(t_D) = \log\left(\frac{\beta k}{\phi \mu c_r r_w^2}\right) + \log(t)$$

II.56

Si los datos de interferencia de campo se grafican como el logaritmo de la diferencia entre la presión al inicio de la prueba y las mediciones de presión de fondo, contra el logaritmo del tiempo de registro, se obtiene una curva similar a la curva doble logarítmica que representa la solución del problema. La diferencia entre las dos gráficas es una traslación lineal de ambas coordenadas, representadas por los primeros términos de las ecuaciones (II.56). Si se logra un buen ajuste entonces se puede determinar kh/μ a partir del desplazamiento vertical y $k/\phi\mu c_i$ por medio del desplazamiento horizontal. Es importante resaltar que aunque la discusión anterior se ha presentado para el caso de flujo radial y yacimiento homogéneo infinito, es válida para cualquier tipo de flujo.

El procedimiento de análisis puede exponerse en los pasos básicos siguientes⁸:

- Seleccionar una curva tipo que represente el comportamiento de presión del yacimiento.
- Superponer un papel semitransparente en el cual serán graficados los datos de campo, trazando los ejes principales de la curva tipo sobre este papel y etiquetando los ejes en los cuales serán graficados los datos utilizando las escalas de la curva tipo
- Ajustar los datos de presión a la curva tipo, moviendo el papel semitransparente de tal manera que los ejes de la curva de datos y los ejes de la curva tipo se mantengan paralelos
- Finalmente se selecciona un punto de ajuste, leyendo los valores correspondientes a este punto en la curva tipo y se estiman, con las ecuaciones correspondientes, las propiedades del yacimiento.

En la Figura 2.19 se presenta un ejemplo de ajuste con curvas tipo para datos correspondientes a flujo radial. El punto de ajuste seleccionado corresponde a la intersección de $\Delta p = 10$ psi y $t = 10$ hrs.; la línea continua corresponde al modelo teórico y los círculos a los datos de campo.

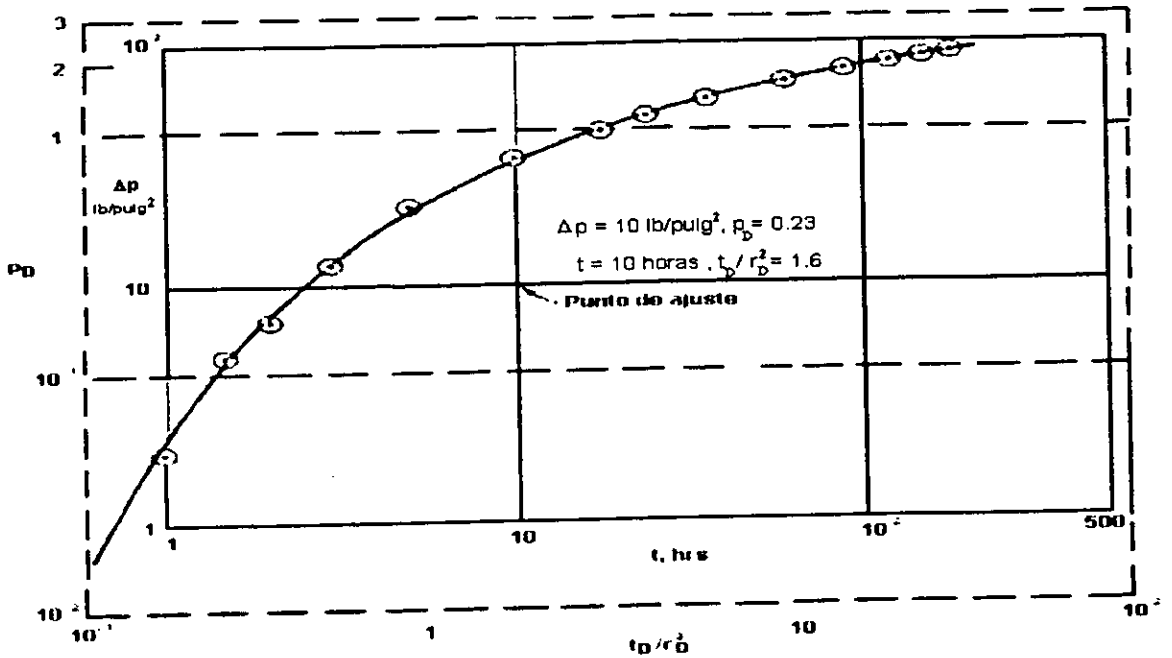


FIG. 2-19. AJUSTE DE LOS DATOS DE CAMPO CON LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.

Se ha encontrado que los resultados obtenidos por el método de ajuste de curva tipo presentan un error de aproximadamente el 5%, debido a la subjetividad del analista en el ajuste llevado a cabo en forma manual; aunque esto no siempre se cumple ya que depende de varios aspectos tales como la experiencia, tipo de prueba, registrador de presión, etcétera. El sistema **SAINT** contiene la opción para realizar ajustes manuales con diferentes curvas tipo, con la ventaja adicional de permitir en la misma pantalla de presentación al usuario un análisis de consistencia cuando se compara el ajuste con otras técnicas de análisis.

Existen otros métodos para analizar pruebas de interferencia tales como la gráfica semilogarítmica y el uso de la derivada; sin embargo la técnica de análisis por curvas tipo, es considerada superior, por algunos autores⁸, a estos métodos debido a que no requiere para su aplicación de una relación simple entre la variación de presión del pozo de observación y el tiempo de la prueba.

En la referencia 34, Gutiérrez y Cinco, presentan las curvas tipo del comportamiento para flujo lineal, esférico y radial, para el caso de yacimiento homogéneo e isotrópico con comportamiento infinito, ver Figura 2-20, observe que la gráfica considera una

función F_1 para la presión adimensional y una F_2 para el tiempo adimensional que dependen del tipo de flujo.

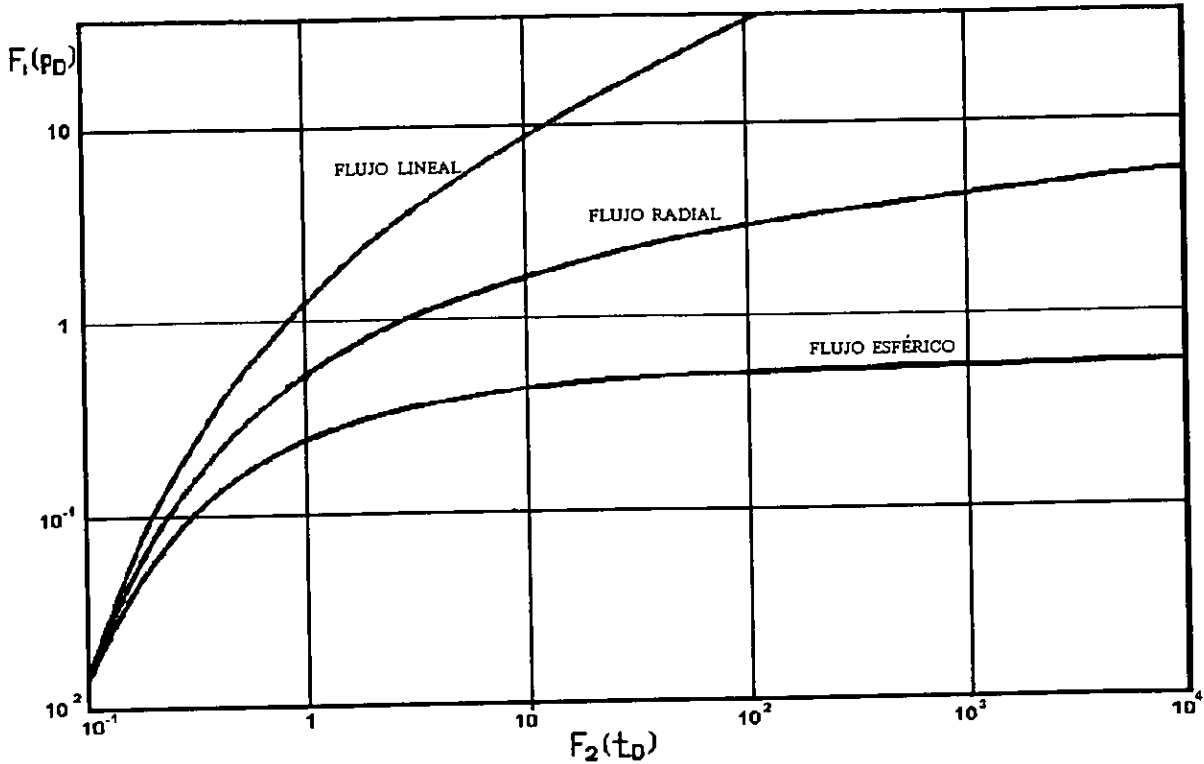


Fig. 2-20. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN F_1 VERSUS F_2 PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO³⁴.

En la Tabla 2-1, se presentan las ecuaciones de interpretación de la técnica de curvas tipo, para los tres tipos de flujo; la segunda y tercer columna definen las funciones F_1 y F_2 y la cuarta y quinta las ecuaciones de interpretación para el cálculo de los parámetros del yacimiento.

Tabla. 2-1. ECUACIONES DE INTERPRETACIÓN PARA FLUJO LINEAL, ESFÉRICO Y RADIAL³⁴.

Lineal	$F_1(p_D) = \frac{kbh\Delta p}{2\alpha q B \mu x}$	$F_2(t_D) = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_i x^2}$	$kbh = 2\alpha q B \mu x \frac{F_1(p_D)_m}{\Delta p_m}$	$\phi b h c_i = \frac{\beta k b h}{\mu x^2} \frac{t_m}{F_2(t_D)}$
Esférico	$F_1(p_D) = \frac{k r \Delta p}{\alpha q B \mu}$	$F_2(t_D) = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_i r^2}$	$k = \frac{\alpha q B \mu}{r} \frac{F_1(p_D)_m}{\Delta p_m}$	$\phi c_i = \frac{\beta k}{\mu r^2} \frac{t_m}{F_2(t_D)}$
Radial	$F_1(p_D) = \frac{k h \Delta p}{\alpha q B \mu}$	$F_2(t_D) = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_i r^2}$	$kh = \alpha q B \mu \frac{F_1(p_D)_m}{\Delta p_m}$	$\phi h c_i = \frac{\beta k}{\mu r^2} \frac{t_m}{F_2(t_D)}$

II.11 Técnicas semilogarítmicas⁹

Adicionalmente al ajuste por curvas tipo, es posible utilizar otras técnicas para analizar pruebas de interferencia con flujo radial. La integral exponencial, presente en la ecuación (II.23), tiene una aproximación logarítmica para valores de $t_D/r_D^2 \geq 100$, lo cual presenta poca utilidad en pruebas de interferencia, debido a que es impráctico correr una prueba suficientemente larga para que los datos en el pozo observador presenten una línea recta semilogarítmica. Sin embargo, si esto se llegara a presentar en la práctica, para tiempos largos al graficar en papel semilogarítmico el tiempo contra Δp , se tendría una línea recta a partir de la cual se puede estimar T y S, con las expresiones siguientes:

$$T = kh = \frac{162.6qB\mu}{m}; \quad S = \phi c_t h = \frac{kh}{\mu r^2} 10^{\left(\frac{\Delta p_{ihr} - 3.2275}{m}\right)} \quad \text{II.57}$$

Otra técnica de interpretación³⁵, consiste en graficar el tiempo contra la caída de presión en papel cartesiano, así la máxima pendiente, $m_{\text{máx}}$, y el tiempo de intersección, t_x , pueden usarse para calcular valores aproximados de T y S, usando las ecuaciones siguientes:

$$T = kh = \frac{10.5qB\mu}{m_{\text{máx}} t_x}; \quad S = \phi c_t h = 0.000262 \frac{kh t_x}{\mu r^2} \quad \text{II.58}$$

Para aplicar este método deben cumplirse las restricciones siguientes: a) La prueba de interferencia deberá alcanzar el punto de inflexión, esto es $t_D = 0.25$; b) No existen efectos de almacenamiento y daño; c) el gasto en el pozo activo se mantiene constante; d) no se presentan efectos de frontera antes del punto de inflexión y e) no existen tendencias de presión en el yacimiento.

En la Figura 2-21, se presenta un ejemplo de aplicación³⁵ a una prueba de campo; observe que los resultados obtenidos dependen en cierto grado de la habilidad del

analista para el trazo de la recta; en caso de utilizar un programa de cómputo para la estimación, debe tenerse cuidado especial en relación con ruidos aleatorios presentes en la señal de presión, puesto que pueden distorsionar los valores reales de la pendiente y ordenada al origen.

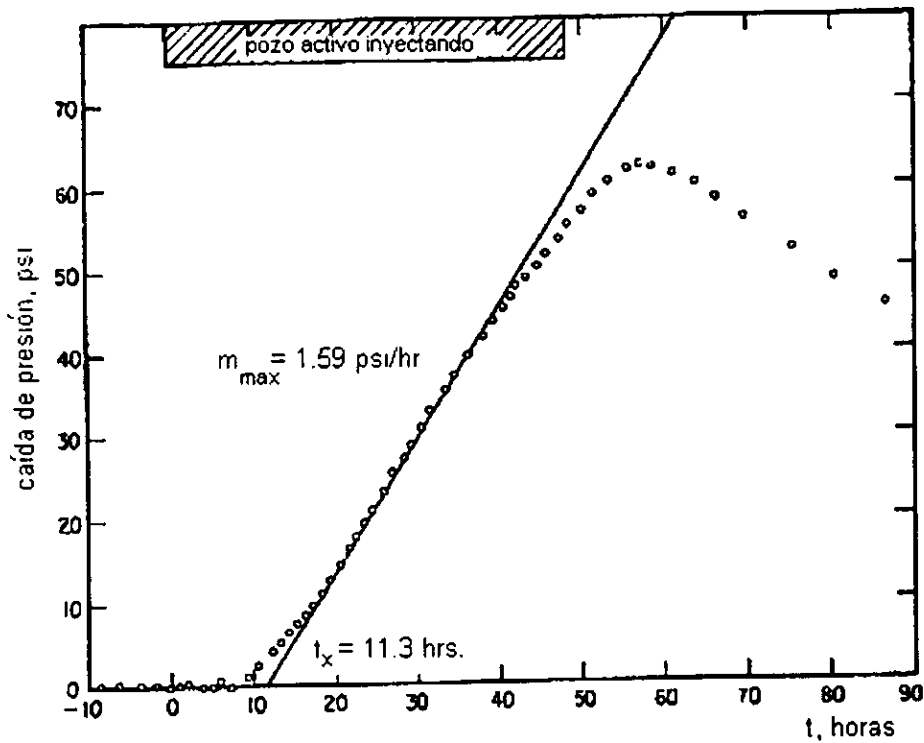


Fig. 2-21. ANÁLISIS DE PRUEBA DE INTERFERENCIA PRESENTADA POR LESCAURBORA³⁵.

Tiab y Kumar³⁶, proponen usar la derivada de presión respecto al tiempo, para la interpretación en yacimientos homogéneos de comportamiento infinito. Los parámetros de análisis son $t_{m\acute{a}x}$ y $p_{m\acute{a}x}$ que corresponden a los valores máximos del perfil de campo, así T y S se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$T = kh = 948 \frac{\phi \mu c_i h r^2}{t_{m\acute{a}x}}; \quad S = \phi c_i h = 0.0274 \frac{qB}{p_{m\acute{a}x} r^2}. \quad 11.59$$

En la Figura 2-22, se observa el comportamiento de la función derivada. Note que el valor máximo que alcanza es de 0.73576 y que ocurre a un valor de $t_D / r_D^2 = 0.25$, esto

es, el punto de inflexión mencionado en la técnica anterior. Este resumen constituye la base teórica de la técnica propuesta por Tiab y Kumar.

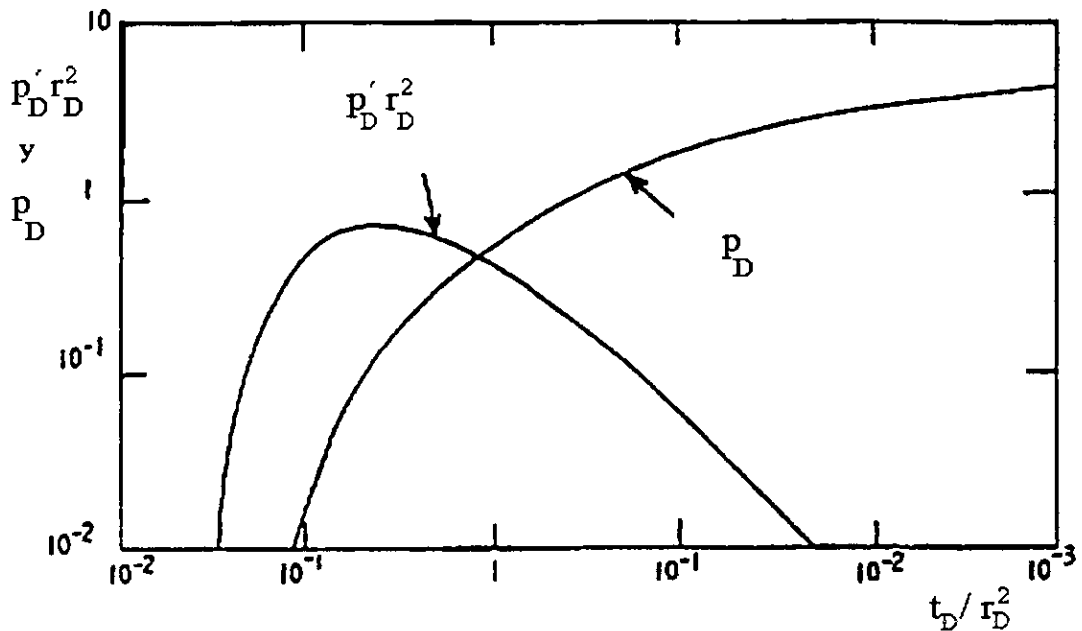


FIG. 2-22. CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DERIVADA DE LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE³⁶.

II.12 Técnica de El-Khatib³⁷

En años recientes el uso de la derivada de presión ha llegado a ser muy popular para la interpretación de datos presión-tiempo. Se ha mostrado en la literatura que el ajuste convencional mediante curvas tipo puede ser ampliamente mejorado mediante un ajuste doble simultáneo. La principal desventaja, en el uso de la derivada, es que ésta se calcula mediante la diferenciación numérica de los datos de presión, por lo cual, cuando existe dispersión en los datos de presión, los resultados son "ruidosos" y en ocasiones difíciles de interpretar.

El-Khatib³⁷, deriva la solución de línea fuente manipulando algebraicamente el resultado de tal forma que obtiene una relación lineal entre las variables. De los

resultados obtenidos concluye que una gráfica de $\log \left(t \frac{\partial p}{\partial t} \right)$ contra $1/t$ conduce a una recta cuya pendiente m y ordenada A , se utilizan para calcular T y S , de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$T = Kh = \frac{\alpha/2qB}{A}; \quad S = \phi\mu c_t = \frac{Tm}{948r^2} \quad . \quad \text{II.60}$$

A continuación se presenta el desarrollo teórico de la técnica propuesta por Khatib. La derivada de la presión respecto al tiempo a una distancia r del pozo activo, obtenida a partir de la ecuación (II.21) se expresa en unidades de campo como:

$$p'(r,t) = -\frac{\alpha/2qB\mu}{kh} \frac{e^{-948\phi\mu c_t r^2/kt}}{t}; \quad \text{II.61}$$

multiplicando la expresión anterior por $-t$ y tomando logaritmos, se tiene:

$$\text{Ln}(-tp'(r,t)) = \text{Ln}\left(\frac{\alpha/2qB\mu}{kh}\right) - \frac{948\phi\mu c_t r^2}{kt} \quad . \quad \text{II.62}$$

A partir de un análisis de la ecuación anterior, se concluye que una gráfica de $\text{Ln}|tp'|$ contra $1/t$ en papel semilogarítmico presenta una recta cuya pendiente y ordenada al origen pueden usarse para estimar la transmisibilidad, T , y la capacidad de almacenamiento del yacimiento, S .

Siguiendo el mismo razonamiento expuesto, la teoría puede extenderse para analizar pruebas de interferencia con dos gastos. Si el gasto en el pozo activo cambia de q_1 a q_2 en el tiempo t , se puede demostrar que:

$$\ln \left| \Delta t (p' + C) \frac{q_1}{(q_1 - q_2)} \right| = \ln A - \frac{b}{\Delta t} \quad , \quad \text{II.63}$$

donde, $C = A \frac{e^{-b/(t + \Delta t)}}{(t + \Delta t)}$.

La expresión anterior permite deducir que al graficar $\left| -\Delta t (p' + C) \frac{q_1}{(q_1 - q_2)} \right|$ contra $1/t$ en papel semilogarítmico, se obtiene una recta cuya pendiente y ordenada al origen permiten estimar la transmisibilidad y el coeficiente de almacenamiento del yacimiento, como en el caso de un sólo gasto.

Debido a que C se desconoce, se aplica un procedimiento iterativo iniciando con $C=0$, a partir de lo cual, mediante técnicas de regresión o gráficamente, se obtiene una aproximación para A y b . Posteriormente estos valores se utilizan para estimar un valor de C , iterando sucesivamente, hasta llegar a una tolerancia establecida.

En el Capítulo IV, se presenta la extensión de la técnica de El-Khatib, propuesta en esta tesis, para flujo esférico y flujo lineal.

II.13 Técnicas de análisis con tendencia de presión

La teoría de análisis convencional, considera que los cambios de presión medidos en el pozo observador son debidos únicamente al efecto de los pozos activos. La existencia de una tendencia de represionamiento o depresionamiento en el yacimiento causará errores en los valores estimados de las propiedades de la formación productora, a menos que se considere este efecto en el análisis.

Una de las claves para analizar exitosamente una prueba de interferencia es la predicción de la tendencia de presión en los pozos observadores durante la prueba. La tendencia de presión significa el cambio de presión que ocurriría en los pozos si el gasto del pozo activo no fuera cambiado. Esta tendencia de presión debe ser sustraída

de las mediciones de presión para obtener la respuesta de interferencia debida al pozo activo. Teóricamente, la tendencia de presión es la suma, en el pozo de observación, de todos los efectos transitorios de presión generados por los pozos activos durante toda la vida productiva del yacimiento. Matemáticamente esta tendencia es muy difícil de estimar, pero puede medirse antes de empezar la prueba y extrapolarla.

Kamal y Brigham³⁸, determinaron cualitativamente los errores que se cometen en el análisis de una prueba cuando no se consideran los efectos de tendencia lineal de presión, reportando los resultados siguientes para valores diferentes de pendientes de la tendencia, tales que reportaran cambios de presión en $t_D / r_D^2 = 3$ en el rango del 10 al 30%.

Cambio en presión a $t_D / r_D^2 = 3$	<u>10%</u>	<u>20%</u>	<u>30%</u>
Error en kh	-3%	-9%	-16%
Error en $\phi c_t h$	-7.6%	-16.8%	-23.6%

El valor de t_D / r_D^2 igual a tres, lo seleccionaron debido a que corresponde al tiempo en horas, requerido para correr satisfactoriamente una prueba en un yacimiento con propiedades promedio. Como puede observarse, los errores son de consideración e indican que no es posible despreciar los efectos de la tendencia de presión.

Un paradigma generalmente reconocido es que la integral definida de la presión respecto al tiempo, suaviza la dispersión y elimina el filtrado de datos requerido para el cálculo de la derivada. En lo mejor de nuestro conocimiento, Rodríguez de la Garza y Antúnez Uribe³⁹ en 1986, propusieron por vez primera, realizar un ajuste a los datos de pruebas de interferencia, mediante curvas tipo con el uso de la integral, y aplicaron su técnica al campo Abkatún, obteniendo buenos resultados. La curva tipo consideró el efecto superpuesto de una tendencia lineal de presión, ver Figura 2-23.

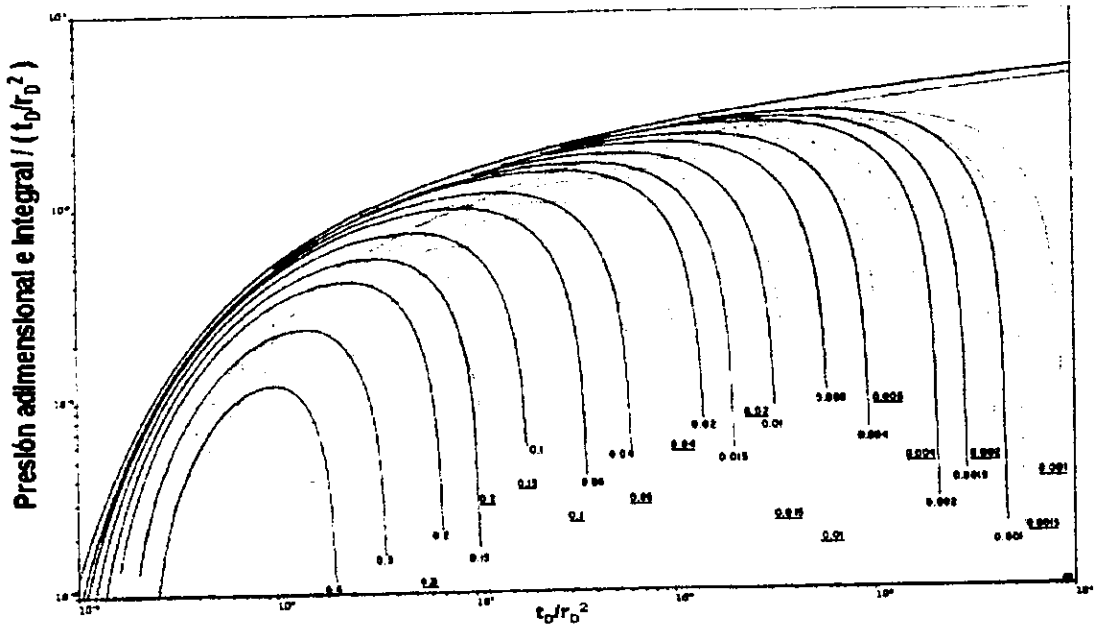


FIG. 2-23. CURVA TIPO PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA CON TENDENCIA LINEAL DE REPRESIONAMIENTO³⁹.

Estas curvas tipo se desarrollaron considerando la solución de línea fuente y una tendencia lineal de represionamiento en el yacimiento. Todas las curvas tienden a ir hacia arriba y posteriormente hacia abajo y están etiquetadas con el valor de la tendencia de represionamiento; las etiquetas sin subrayar indican las soluciones generadas de p_D (negro), mientras que las curvas subrayadas (rojo) corresponden al término $\frac{r_D^2}{t_D} \int_0^{t_D/r_D^2} p_D(\tau) d\tau$ definido en la página 222, del Apéndice B.

Cinco Ley⁴⁰ y coautores en 1990, presentan una metodología de análisis con curvas tipo que elimina el efecto de una tendencia de presión lineal presente durante la prueba. Para el caso de pruebas de pozos múltiples la curva tipo está basada en una función de presión definida como:

$$pmdp(t) = \left| (p_i - p(t)) - t \frac{dp(t)}{dt} \right|; \tag{II.64}$$

el ajuste se hace en una gráfica doble logarítmica de $p_{mdp}(t)$ contra t . Para el caso de incremento de presión, la función de presión la definen como:

$$p_{mdp}(\Delta t) = t(p_i - p_{ws} - t \frac{dp_{ws}}{dt}) / 24Q, \quad \text{II.65}$$

donde Q es la producción acumulada antes de la prueba.

A continuación se presenta el desarrollo teórico de Cinco Ley⁴⁰ y coautores para llegar a la metodología de análisis expuesta.

El comportamiento de la caída de presión en un pozo de observación, afectado por la influencia de una tendencia lineal de presión, puede expresarse como:

$$\Delta p_w(t) = q\Delta p_1(t) + \eta_1 t, \quad \text{II.66}$$

donde $\Delta p_1(t)$ es la respuesta de presión que el pozo tendría para un gasto unitario a un tiempo t sin el efecto de la tendencia de presión. Note que la ecuación es válida para cualquier clase de prueba transitoria de presión, y para cualquier geometría de flujo; η_1 puede ser positiva o negativa dependiendo de que la tendencia sea hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

La función derivada de presión, $t\Delta p'$, representa la pendiente de la curva de presión en una gráfica semilogarítmica, para una prueba con tendencia de presión la función derivada es:

$$t\Delta p'_w(t) = qt\Delta p'_1(t) + \eta_1 t. \quad \text{II.67}$$

Puede observarse que en la expresión anterior se tiene el efecto de la tendencia de presión; por tanto si se substraen la ecuación II.67 de II.66,

$$p_{mdp}(t) = \left| \Delta p_w(t) - t \Delta p'_w(t) \right| = \left| q \Delta p_1(t) - qt \Delta p'_1(t) \right| , \quad 11.68$$

se genera una nueva función que elimina automáticamente la tendencia lineal de presión.

La generación de curvas tipo independientes de la tendencia de presión se basa en la definición de p_{mdp} y $F(t_D)$ para diferentes geometrías de flujo, de acuerdo a las ecuaciones (11.69):

Flujo lineal	$p_{mdp} = \left p_{DL} - t_{DL} p'_{DL} \right / x_D,$	$F(t_D) = t_{DL} / x_D^2$	
Flujo esférico	$p_{mdp} = r_D \left p_{DS} - t_D p'_{DS} \right ,$	$F(t_D) = t_D / r_D^2$	11.69
Flujo radial	$p_{mdp} = \left p_D - t_D p'_D \right ,$	$F(t_D) = t_D / r_D^2$	

Las curvas tipo se presentan en la Figura 2-24, donde se observa que tienen características diferentes para los distintos tipos de geometría de flujo, lo cual permite identificar fácil y fehacientemente el tipo de flujo predominante en el yacimiento.

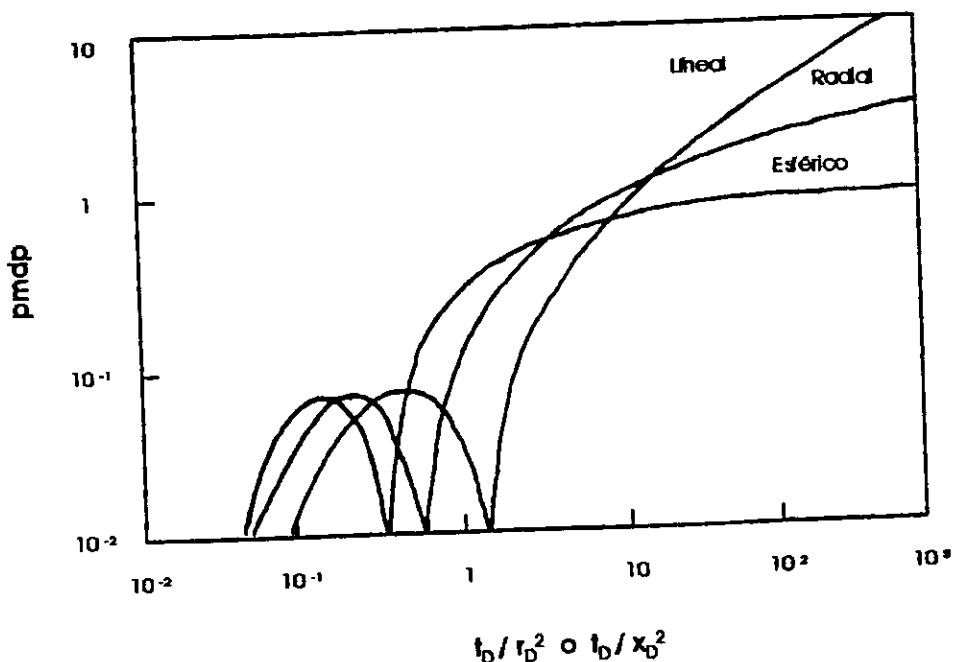


Fig. 2-24. COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL VERSUS EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO⁴⁰.

El procedimiento⁴⁰ para estimar la magnitud de la tendencia de presión, consiste en graficar la diferencia entre la caída de presión medida y la calculada por el modelo matemático contra el tiempo. La pendiente de la recta resultante corresponde con la tendencia lineal de presión presente durante la prueba.

A partir del procedimiento comentado en el párrafo anterior, es posible corroborar la calidad de los resultados de caracterización obtenidos de la prueba de interferencia.

En primer lugar si existen mediciones de presión antes del inicio de la prueba se pueden comparar los valores medidos en campo de la tendencia y los proporcionados por el análisis; si la concordancia no es buena dentro de los límites prácticos, se concluye que el modelo de flujo seleccionado no es el adecuado.

En segunda instancia, si la gráfica obtenida a través de este procedimiento no presenta un ajuste de tipo lineal, se diagnostica que la tendencia de presión en el yacimiento no es de tipo lineal, y/o que los datos de campo contienen efectos no contemplados en el modelo de flujo o que el modelo seleccionado no es el adecuado.

CAPÍTULO III

TEORÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

III.1 Introducción

La regresión no lineal es una de las técnicas más eficaces para el análisis de pruebas transitorias de presión, incluyendo a las pruebas de interferencia y pulsos conocidas, también como pruebas de pozos múltiples, objeto central de estudio del presente trabajo. Mediante esta herramienta los valores que caracterizan al yacimiento y pozo, se estiman con la condición de minimizar, la suma de las diferencias al cuadrado de los datos medidos en campo y los calculados por el modelo teórico, que representa las condiciones de flujo en el medio poroso. A la sumatoria mencionada se le conoce como error de ajuste y se expresa como:

$$\text{Error}(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^N [\Delta p_{\text{medida}} - \Delta p_{\text{calculada}}]^2 \quad \text{III.1}$$

A esta ecuación se le conoce como función objetivo y al trabajo de estimar los valores del vector $\bar{\theta}$, que contiene los parámetros a determinar, proceso de optimización.

El principio básico en las técnicas de regresión es el mismo aplicado en el ajuste manual de curvas tipo, en que los datos de presión se ajustan a un modelo de yacimiento buscando la mayor semejanza, desde el punto de vista gráfico.

La solución de los problemas no lineales inicia con la elección de algún punto de partida, en el cual se evalúa la función, posteriormente se da un paso tentativo en alguna dirección y se evalúa nuevamente la función; si el valor es menor que el anterior se descarta el primer punto a favor del segundo, y si no es así se permanece en el

primero y se continúa el proceso hasta encontrar un punto donde el valor calculado sea el menor dentro de ciertos límites tolerables prescritos.

El proceso descrito puede compararse al de un alpinista ciego que busca la parte más baja de un valle, lo que equivale a encontrar el mínimo de una función, cuando todo lo que sabe es que un paso en una dirección particular lo lleva hacia arriba o hacia abajo. Si baja, sigue adelante y continúa su búsqueda hacia una nueva posición; si sube, regresa a su posición inicial y ensaya un paso en alguna otra dirección.

Llegar a la solución óptima por este proceso es laborioso y lleno de trampas, pero gracias al uso de procedimientos programados en las computadoras, el problema de operación puede resolverse satisfactoriamente en la mayoría de los casos. El trabajo de los matemáticos ha sido ver que pueden hacer acerca de dichas "trampas", y si pueden sugerir algunos métodos para dar pasos que lleven a la parte más baja o más alta, tan rápidamente como sea posible. El análisis matemático que implica determinar un máximo, es el mismo que para un mínimo; de hecho en un punto donde $f(x)$ es mínima, $-f(x)$ es máxima; es decir, un problema de minimización puede convertirse fácilmente en uno de maximización y viceversa.

Durante las últimas décadas se han sugerido docenas de procedimientos, métodos y algoritmos con el único objeto de hacer que los pasos sucesivos converjan al objetivo tan rápidamente como sea posible; lógicamente puede concluirse que matemáticamente, el problema puede complicarse cuando la función tiene muchos mínimos o máximos locales.

Todos los métodos tienen ventajas y desventajas y no puede decidirse fácilmente cuál es el mejor en una situación particular. Algunos autores, inclusive recomiendan usar diferentes métodos en diferentes etapas en el curso de la solución del mismo problema.

Debido a que la derivada de una función representa la pendiente, esta herramienta se convierte en la base fundamental de algunos procedimientos propuestos. Para el caso de problemas de "n" dimensiones, como el caso que nos ocupa, se demuestra que el

vector gradiente representa la relación máxima de cambio de una función, esto es, la función crece lo más rápidamente posible en la dirección de ∇f y decrece también lo más rápido posible en la dirección $-\nabla f$. Las técnicas que implican únicamente el uso de las primeras derivadas se les denomina "métodos de gradiente" y los que además requieren el uso de las segundas derivadas, "métodos de **Newton-Raphson**".

El proceso de estimar computacionalmente los parámetros que caracterizan a los yacimientos fue realizado primeramente, en los años 70's, utilizando la teoría de mínimos cuadrados, por Earlougher y Kersch⁴¹; también Padmanabhan y Woo⁴², Tsang⁴³ y colaboradores; Padmanabhan⁴⁴ trabajaron sobre esta línea, habiendo desarrollado y comprobado la gran potencialidad de los procedimientos de regresión no lineal en el análisis de las pruebas transitorias de presión.

El modelo de yacimiento supone una configuración geométrica particular y su respuesta de presión es función de uno o más parámetros desconocidos, tales como la permeabilidad, porosidad, etcétera. En muchas de las técnicas tradicionales de análisis, el ajuste del modelo depende del reconocimiento de ciertas características gráficas, tales como la presencia de rectas en el período de flujo radial, o el caso de la recta con pendiente unitaria en papel doble logarítmico, típica del período de almacenamiento del pozo al principio de la prueba.

Una ventaja del análisis por computadora, esto es técnicas de regresión no lineal, respecto a los métodos tradicionales, es que los primeros ajustan el conjunto total del registro de presión, sin estar restringidos a la detección de ciertas características gráficas que apoyen los cálculos; en este sentido los resultados obtenidos pueden calificarse de más confiables. Sin embargo, las dificultades prácticas al aplicar esta técnica son que las suposiciones sobre las cuales se desarrollaron los modelos no se cumplen completamente con los datos de campo; por ejemplo, los ritmos de producción son variables o aún desconocidos durante ciertas fases de la prueba. Cuando existe fuerte distorsión de la información, debido a mal funcionamiento del registrador de presión, efectos de yacimiento y/o pozo no considerados en el modelo teórico, así

como cambios de gasto no medidos, es importante considerar cuidadosamente los resultados. En estos casos particulares se recomienda un proceso de filtrado que desuperponga o elimine información antes de la aplicación de la técnica de regresión no lineal, que no se considere confiable o representativa del comportamiento de flujo del yacimiento.

Debido a que las expresiones analíticas que representan el comportamiento de flujo en medios porosos son no lineales, el proceso de cálculo es iterativo. El método de **Newton-Raphson** debido a su convergencia de tipo cuadrático, lo cual quiere decir que aproximadamente se duplica el número de cifras correctas en cada iteración, es matemáticamente el más recomendable de las técnicas iterativas utilizadas para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Sin embargo, al igual que todas las técnicas iterativas de solución, tiene limitaciones importantes en los requerimientos de que la primera estimación esté lo suficientemente cercana a la solución real, de tal forma que se alcance convergencia, además de requerir el cálculo de la estimación de la matriz Hessiana en cada iteración. Las inestabilidades numéricas son comunes, y las simulaciones pueden requerir gran cantidad de tiempo de cómputo, y puede ocurrir que en algunos casos no se alcance convergencia. Como se mencionó anteriormente, aunque existen varios métodos documentados en la literatura para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, no existe una técnica que sea superior en todos los casos. En este trabajo, se utiliza la técnica de **Gauss-Marquardt** para la estimación de parámetros ya que ha demostrado ser superior para resolver el tipo de problemas planteados en flujo de fluidos en medios porosos, lo cual fue comprobado por Rosa⁴⁶ en 1983, y se desechan las técnicas de **Newton-Raphson** por requerir el cálculo de las segundas derivadas de la función objetivo, lo cual es complicado para problemas en el plano real y más para soluciones en el plano de Laplace.

Es importante mencionar que esta metodología debe aplicarse con cuidado, ya que existen casos documentados en la literatura de no-unicidad en las soluciones calculadas a partir del análisis de pruebas de presión⁴⁶.

Las técnicas de análisis de datos de presión de fondo se basan en soluciones exactas o aproximadas de las ecuaciones diferenciales, que describen el flujo de fluidos a través de la roca que constituye el yacimiento, tal como se expuso en el Capítulo II. Las soluciones a las ecuaciones, junto con las propiedades conocidas de los fluidos y del yacimiento, permiten calcular las respuestas de presión en cualquier punto (x,y,z,t) debidas a cambios en gastos de producción o inyección de los pozos del yacimiento.

Las técnicas de regresión no-lineal permiten considerar muy fácilmente las tendencias de presión en el yacimiento debidas a la producción o cierre de los pozos productores o inyección o cierre de los pozos inyectoros (ver Capítulo IV).

III.2 Técnica de Gauss Marquardt

Para aplicar la teoría de estimación, es necesario linealizar el modelo; esto se efectúa utilizando la expansión en serie de Taylor de la función objetivo, despreciando todos los términos de grado alto iniciando con los de segundo grado, lo cual aproxima el problema como una secuencia de soluciones de regresión lineal.

El comportamiento de la caída de presión, función del tiempo y la posición en un yacimiento, se encuentra sujeta a varios parámetros $(d+\ell)$, como se muestra en la expresión siguiente:

$$\Delta p_i = \Delta p_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d, y_1, y_2, \dots, y_\ell), \quad \forall i=1, N. \quad \text{III.2}$$

Las θ_i representan las características desconocidas del yacimiento, tales como la permeabilidad, porosidad, etcétera y las y_i los parámetros conocidos como la viscosidad, gasto, radio del pozo, etcétera. La representación matricial de la ecuación (III.2) es:

$$\overline{\Delta p} = A\overline{\theta}, \quad \text{III.3}$$

donde $\overline{\theta}$ es el vector incógnita que contiene los parámetros por estimar. Para un caso general, este puede ser:

$$\bar{\theta}^t = [\theta_1 = kh, \theta_2 = \phi c_t h, \theta_3 = \eta_1, \theta_4 = \eta_2, \dots, \theta_d = \omega] \quad \text{III.4}$$

Se observa que se tienen d incógnitas representadas por θ_1 hasta θ_d . Por facilidad de notación se utiliza en esta ecuación III.4 la definición del vector θ transpuesto. Las y_i de la ecuación (III.2) quedan involucradas en la ecuación (III.3) dentro de la matriz A y en el vector Δp .

Para lograr el ajuste de las caídas de presión calculadas con el modelo teórico y las medidas en campo, es necesario modificar el vector θ , al cual se le asigna al inicio del proceso iterativo un valor de acuerdo al conocimiento del área en estudio y el criterio del analista, de tal forma que se cumpla la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p}_{\text{medida}} &= \bar{\Delta p}_{\text{calculada}}(\bar{\theta} + \Delta\theta) \\ F_i &= (\Delta p_{\text{medida}} - \Delta p_{\text{calculada}})_i = 0, \quad \forall i = 1, N \end{aligned} \quad \text{III.5}$$

El vector $\Delta\theta$ se estima a partir de desarrollar la ecuación (III.5) en términos de la expansión en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} F_i(\bar{\theta} + \Delta\theta)_i &\cong F_i(\bar{\theta}) + \Delta\theta_1 \frac{\partial F_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_1} + \Delta\theta_2 \frac{\partial F_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_2} + \dots + \Delta\theta_d \frac{\partial F_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_d} \quad \forall i = 1, N \\ &\cong F_i(\bar{\theta}) + \Delta\theta_1 \frac{\partial \Delta p_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_1} + \Delta\theta_2 \frac{\partial \Delta p_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_2} + \dots + \Delta\theta_d \frac{\partial \Delta p_i(\bar{\theta})}{\partial \theta_d} = 0 \end{aligned} \quad \text{III.6}$$

donde las caídas de presión se evalúan con un modelo representativo del flujo de fluidos en el medio poroso. En esta expresión se han despreciado los términos no lineales y en forma matricial puede escribirse como:

$$J \Delta\bar{\theta} = -F_i(\bar{\theta}) \quad \text{III.7}$$

Este sistema contiene N ecuaciones, con d columnas igual al número de incógnitas. Con la finalidad de obtener un sistema cuadrado se procede a premultiplicar ambos miembros por la transpuesta del Jacobiano.

$$J^t J \bar{\Delta\theta} = -J^t F_1(\bar{\theta}). \quad \text{III.8}$$

Una deducción alterna de la ecuación anterior, considera la teoría de mínimos cuadrados, la cual establece que el vector dado por la ecuación (III.1), para el mejor ajuste de regresión debe tender a ser mínimo. Para cumplir con esta condición, se estima la derivada del error dado por la ecuación (III.1) respecto al vector θ y se iguala a cero:

$$\frac{\partial \overline{\text{Error}}}{\partial \bar{\theta}} = 2J^t [\bar{\Delta p}_{\text{medida}} - \bar{\Delta p}_{\text{calculada}}(\bar{\theta}) - J\bar{\Delta\theta}] = \bar{0}. \quad \text{III.9}$$

De esta expresión, puede despejarse el vector $\Delta\theta$:

$$\bar{\Delta\theta} = (J^t J)^{-1} J^t (\bar{\Delta p}_{\text{medida}} - \bar{\Delta p}_{\text{calculada}}(\bar{\theta})), \quad \text{III.10}$$

la ecuación (III.10) puede representarse, en forma matricial, como:

$$E \bar{\Delta\theta} = \bar{U}. \quad \text{III.11}$$

donde: $E = J^t J$; $\bar{U} = J^t (\bar{\Delta p}_{\text{medida}} - \bar{\Delta p}_{\text{calculada}}(\bar{\theta}))$

Observe que esta ecuación es equivalente a la (III.8). La solución de la ecuación (III.11) puede efectuarse utilizando la técnica de eliminación Gaussiana para sistemas de ecuaciones lineales; el sistema desarrollado en esta tesis **SAINT**, comentado ampliamente en el Capítulo V, considera un algoritmo que incluye pivoteo parcial, lo cual minimiza los errores de precisión inherentes a los sistemas de cómputo.

El procedimiento de cálculo para la estimación de parámetros puede detallarse en los cuatro puntos siguientes:

1. Asignar valores aproximados a los elementos del vector θ , ecuación (III.4), de acuerdo al conocimiento del área bajo estudio y/o a un análisis preliminar con curvas tipo y/o de tipo semilogarítmico.

2. Estimar el vector modificador $\Delta\theta$ a partir de la solución del sistema de ecuaciones representado por (III.11).
3. Comparar el vector error, ecuación (III.1), con una tolerancia seleccionada previamente por el analista. En caso de no cumplir con la tolerancia, modificar el vector θ de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\bar{\theta}^{n+1} = \bar{\theta}^n + \overline{\Delta\theta}^{n+1} \quad \text{III.12}$$

y regresar al punto 2. Los superíndices en la expresión (III.12) expresan la iteración actual, $n+1$ y la iteración anterior n .

4. El proceso termina cuando se satisface la tolerancia. El contenido del último vector θ corresponde a las características físicas para el yacimiento en estudio. Existen otros criterios para finalizar el proceso iterativo; uno posible es el considerar un número máximo de iteraciones permitidas; por ejemplo, este puede limitarse a 25 o 30; otro criterio es verificar el porcentaje de cambio de los parámetros por estimar entre iteraciones.

De acuerdo al análisis de una gran cantidad de pruebas de campo, en este trabajo se ha determinado que la recomendación manejada por Stoner⁴⁵, para el caso de la optimización de redes de tuberías que transportan gas, es aplicable a nuestro problema, resultando en una reducción en el número de iteraciones para alcanzar convergencia. Stoner propone utilizar la siguiente expresión para las dos o tres primeras iteraciones en el proceso de optimización:

$$\bar{\theta}^{n+1} = \bar{\theta}^n + \overline{\Delta\theta}^{n+1} / 2 \quad \text{III.13}$$

El proceso de convergencia del proceso iterativo está gobernado por el número de condición de la matriz E; si los valores son muy grandes se dice que la matriz está mal condicionada, lo cual es sinónimo de inestabilidad en el proceso de solución. En muchos de los casos relacionados con el análisis de datos transitorios de presión se presenta el problema, lo cual ocasiona que la técnica de minimización falle o se tenga una estimación pobre de los parámetros.

Con la finalidad de mejorar los aspectos numéricos en la solución de ecuaciones, es común escalar la matriz de coeficientes E y el vector U, en la siguiente forma:

$$E_s = \{e_{s_{i,j}}\} = \left[\frac{e_{i,j}}{\sqrt{e_{i,i}} \sqrt{e_{j,j}}} \right]; \quad \bar{U}_s = \{u_{s_i}\} = \left[\frac{u_i}{\sqrt{e_{i,i}}} \right], \quad \text{III.14}$$

de tal forma que la solución de la ecuación (III.11) es equivalente a resolver:

$$E_s \bar{\Delta\theta}_s = \bar{U}_s \quad \text{donde} \quad \bar{\Delta\theta} = \bar{\Delta\theta}_s / \sqrt{e_{i,j}} \quad \text{III.15}$$

Por otro lado, Marquardt demostró que la solución del sistema de ecuaciones normales (III.11) es equivalente a resolver el sistema:

$$(E + \psi I) \bar{\Delta\theta} = \bar{U} \quad \text{III.16}$$

donde I es la matriz identidad y ψ es una constante con valor pequeño. Observe que este manejo numérico mejora la condición de la matriz evitando por tanto la singularidad en el proceso de solución. El proceso de optimación planteado, considera ahora la solución en el paso 2 de la ecuación (III.16) en lugar de la (III.11). Marquardt propone el procedimiento siguiente para la asignación de ψ .

Iniciar con $\Psi = 0.01$

Si el valor de la ecuación (III.1) se reduce en la última iteración, esto es: $\text{Error}(\theta^{n+1}) < \text{Error}(\theta^n)$, cambie $\Psi = 0.1 * \Psi$

En caso contrario, estimar un factor de sobrerrelajación τ , tal que: $\theta^{n+1} = \theta^n + \tau \Delta\theta$ permita $\text{Error}(\theta^{n+1}) < \text{Error}(\theta^n)$ y cambie $\psi = 10\psi$

Para estimar el factor de sobrerrelajación, es necesario calcular el valor mínimo y máximo que pueda asignarse durante el proceso iterativo, desde un punto de vista lógico. Considerando que el criterio para finalizar el proceso iterativo utiliza el cambio de los parámetros calculados entre iteraciones sucesivas, se tiene que cumplir la expresión siguiente:

$$|\theta_i^{n+1} - \theta_i^n| < \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, d, \quad \text{III.17}$$

donde ε_i es un valor pequeño, por ejemplo si se requiere una tolerancia de una diezmilésima:

$$\varepsilon_i = 0.0001(\theta_i^n + .00001). \quad \text{III.18}$$

El término 0.00001 en la suma, se incluye para evitar problemas de cálculo en el programa de cómputo cuando θ_i tienda a ser cero.

Analizando el proceso en la iteración $n+1$ donde se estima un vector $\Delta\theta^{n+1}$, se concluye que se ha encontrado la solución siempre y cuando se cumpla, para todos los valores de las incógnitas, la condición planteada por la ecuación (III.17):

$$\tau |\Delta\theta_i^{n+1}| < \varepsilon_i \Rightarrow \tau < \frac{\varepsilon_i}{\Delta\theta_i^{n+1}}, \quad \text{III.19}$$

de donde se desprende que el valor mínimo admisible en la iteración $n+1$ es:

$$\tau_{\min}^{n+1} = \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{|\Delta\theta_i^{n+1}|} \right\}, \quad \forall \quad i=1,d \quad . \quad \text{III.20}$$

El límite máximo del factor de sobrerrelajación τ_{\max} , puede estimarse si se considera que en la iteración $n+1$ el valor de la incógnita θ_i^{n+1} debe tener un valor positivo; entonces:

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \tau^{n+1} \Delta\theta_i^{n+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^{n+1} \geq -\frac{\theta_i^n}{\Delta\theta_i^{n+1}}; \quad \text{III.21}$$

si $\Delta\theta_i^{n+1} > 0$, entonces $\tau^{n+1} >$ valor negativo, y si $\Delta\theta_i^{n+1} < 0$, entonces $\tau^{n+1} <$ valor positivo, esto es:

$$\tau_{\max} = \min \left\{ \frac{\theta_i^n}{|\Delta\theta_i^{n+1}|} \right\}, \quad \text{sólo para } \Delta\theta_i^{n+1} < 0, \quad \forall \quad i=1,d. \quad \text{III.22}$$

Las expresiones (III.20) y (III.22) determinan el rango de variación posible del factor de sobrerrelajación. En la Figura 3-1 se presenta el diagrama de flujo para asignar el valor del coeficiente, observe que las salidas que especifican, "termina proceso", se refieren a la estimación del factor de sobrerrelajación y no al proceso general de optimización; en el caso de la salida que especifica que no existe convergencia, ésta se puede presentar en caso de no existir la posibilidad de reducir el error determinado por la ecuación (III.1) hasta llegar a la tolerancia fijada.

La técnica de Gauss-Marquardt converge cuadráticamente, sin embargo es posible que en algunas ocasiones, las iteraciones oscilen alrededor de la solución exacta, por lo

cual para evitar esta problemática se ha considerado la técnica **Regula-Falsi** que se activa cuando los valores de $f(b)$ cambian de signo en iteraciones sucesivas.

Rosa⁴⁶, presenta por primera vez la aplicación de técnicas de regresión no lineal usando para el cálculo de las caídas de presión y los gradientes del Jacobiano, soluciones en el plano de Laplace. Esta opción, facilita la posibilidad de realizar ajustes con cualquier clase de modelo, muchos de los cuales no tienen una solución fácilmente calculable en el plano real, con la ventaja de que la diferenciación en el plano de Laplace se simplifica enormemente.

Aunque existen varios métodos de inversión para pasar del plano de Laplace al plano real, la técnica de inversión numérica propuesta por **Stehfest**²⁶ ha demostrado su eficiencia en los problemas relacionados con análisis de pruebas transitorias de presión, y por tanto, es el usado en la programación del sistema **SAINT**.

El procedimiento de análisis, inicia también con la asignación de un vector inicial a partir del cual se estiman las caídas de presión en el plano de Laplace y el Jacobiano respectivo.

Posteriormente se procede a realizar la inversión numérica con Stehfest, obteniendo el vector presión y el Jacobiano en el plano real, finalmente se procede con el mismo algoritmo descrito cuando se tienen soluciones en el plano real.

La técnica de **Stehfest** utiliza un parámetro de exactitud o precisión al cual comúnmente se le asigna un valor de 8, esto es debido a que los resultados para la evaluación de la presión en el fondo del pozo comparan con una buena exactitud con los calculados analíticamente por Agarwal y colaboradores, para el problema de yacimiento homogéneo, flujo radial con efectos de almacenamiento y daño. De acuerdo con la experiencia en el desarrollo de los procedimientos de análisis presentados en este trabajo, se ha determinado que el valor es válido para todos los modelos considerados con una aproximación a la cuarta cifra decimal.

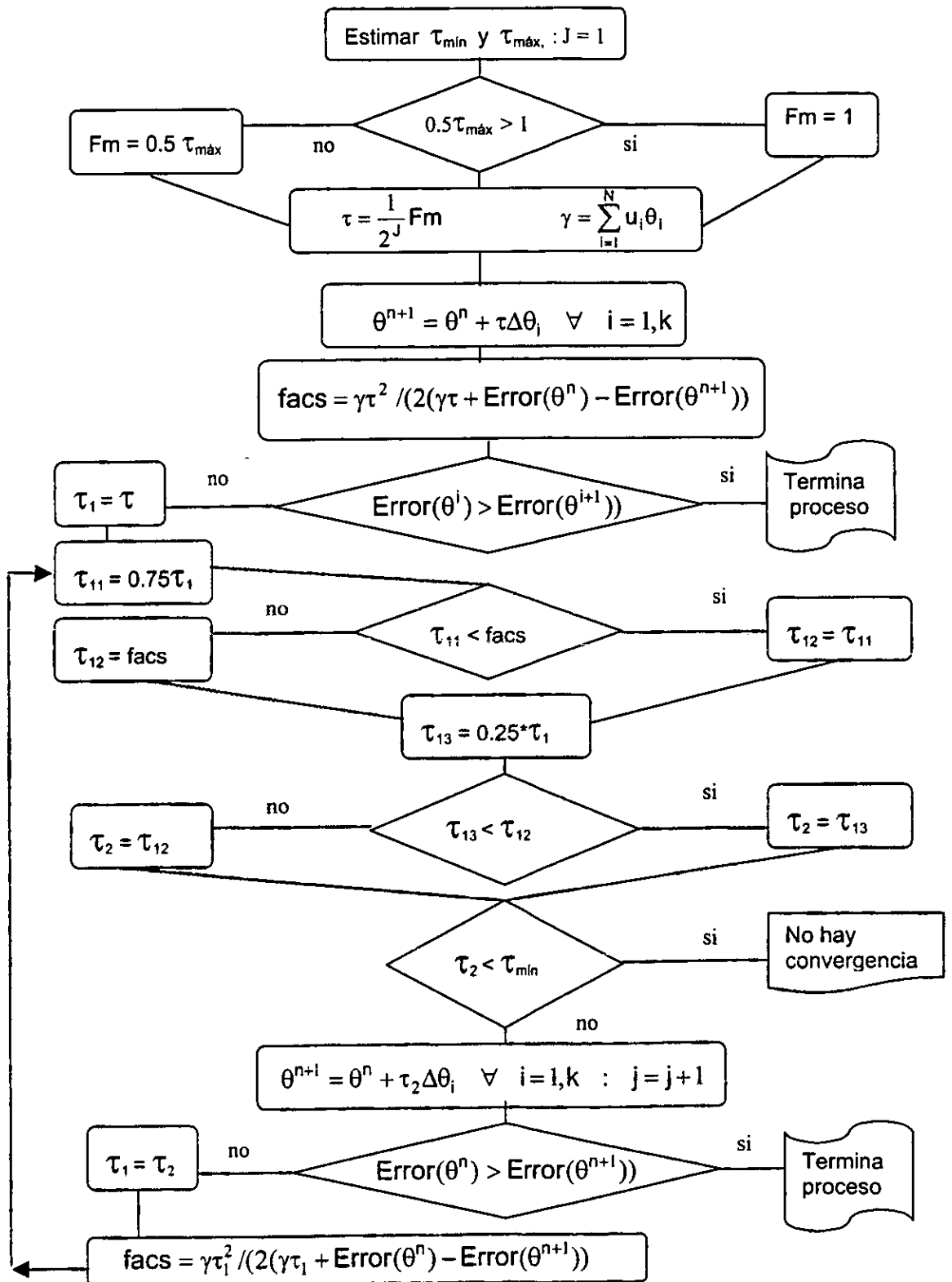


Fig. 3-1. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE SOBRRERELAJACIÓN UTILIZADO EN LA TÉCNICA DE GAUSS MARQUARDT.

III.3 Aspectos prácticos

Aunque la convergencia a un valor óptimo no garantiza la unicidad, tampoco la convergencia a más de una solución óptima nos permite deducir la no unicidad del problema. Por otro lado, es importante enfatizar que el número de parámetros que se pueden determinar por técnicas de regresión no lineal dependen del problema específico y que las incógnitas deben seleccionarse de tal forma que no sean linealmente dependientes, ya que esta situación originaría sistemas de ecuaciones inestables.

Los métodos de búsqueda para localizar el mínimo de una función de valor real de varias variables, suponen que sólo existe un mínimo en el dominio de búsqueda; a esta propiedad de la función se le denomina como unimodalidad. En la práctica, es importante cerciorarse que la región de búsqueda sea lo suficientemente pequeña para no incluir algún otro mínimo relativo de la función del que se está buscando.

Es posible concebir geoméricamente el problema en dos dimensiones, aunque la analogía ayuda también a comprender problemas de más dimensiones. Se ha demostrado que, en el punto donde la función es mínima, se cumple que $\nabla f = 0$ y que en esta área se observan curvas cerradas que se aproximan a elipses o circunferencias rodeando al mínimo, y desde el punto de vista matemático el Hessiano $H(x)$ es positivo definido. Para estos casos las técnicas de optimización funcionan correctamente.

A continuación se discuten tres casos relacionados con el análisis de pruebas de interferencia de presión; el primer caso considera un caso sintético reportado en la literatura y el segundo y tercero corresponden a casos reales de campo.

La Figura 3-2 se construyó utilizando como base los datos de las propiedades del yacimiento y fluidos presentados para una prueba de pulsos por El-Khatib⁴⁸, en su ejemplo 1. Es importante resaltar que en este primer caso de análisis, los datos del registro tiempo contra presión reportados en el artículo fueron generados sintéticamente.

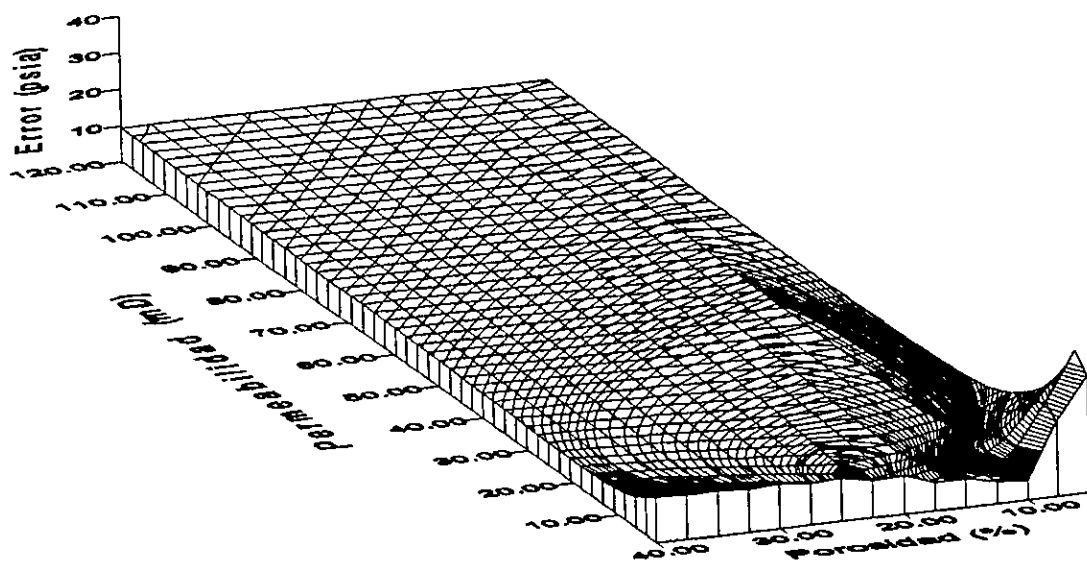


Fig. 3-2. CONFIGURACIÓN TRIDIMENSIONAL DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO DEL EJEMPLO NO. 1 DE EL-KHATIB⁴⁸

La información para construir la Figura 3-2, se generó usando un simulador analítico incluido en el sistema **SAINT**, variando la permeabilidad en intervalos de 0.5 mD y la porosidad en 0.05 en el rango presentado en la gráfica. El error promedio en las gráficas presentadas en este capítulo, corresponde a la sumatoria en valor absoluto de las diferencias entre los valores medidos en campo y los calculados por el modelo matemático de ajuste, divididos entre el número de datos. El eje z corresponde a los valores de error calculados.

Puede observarse que la función es unimodal, esto es que existe un mínimo único en el punto correspondiente a un error de 0.3445 lb/pg^2 , lo cual es congruente con los resultados de regresión no lineal presentados por El-Khatib, esto es, valores de 12.016 y 0.1982 de permeabilidad y porosidad, respectivamente.

En esta Figura puede observarse una variación en permeabilidad del 500% del valor real y un rango de porosidad desde 0.05 a 0.4 que representa una variación de más del

200%, del valor de ajuste óptimo. Para generar la superficie de contorno se usó la técnica de Kriging para interpolación.

Como se mencionó anteriormente, se conoce por teoría del álgebra que si el Hessiano es positivo definido, las curvas que rodean al punto mínimo se pueden aproximar a elipses o circunferencias; es obvio que el ajuste es más rápido si las curvas tienden a ser circunferencias. Para este caso se tiene que el Hessiano es positivo definido, y puede observarse que las curvas tienden a ser circulares alrededor del valor mínimo.

Puede concluirse que se presenta sólo un mínimo porque los datos bajo análisis fueron calculados mediante un simulador analítico que no considera ruidos aleatorios y además el modelo utilizado para generar las curvas de contorno se ajusta perfectamente a la información. Esta situación ideal, difícilmente puede repetirse con datos de campo, como se observa en los casos 2 y 3, presentados más adelante.

En el artículo de El-Khatib se inicia el proceso de regresión no lineal con valores de $k = 35.8$ mD y $\phi = 0.106$ lo cual representa en porcentaje un 297 y 186% de lejanía del valor mínimo de la función; su proceso de optimización requirió de 7 iteraciones, con el procedimiento propuesto en éste trabajo sólo se necesitaron 4 iteraciones, lo cual corrobora la robustez del método de solución utilizado.

En la Tabla 3.1 se presentan los resultados del proceso de regresión no-lineal efectuados con **SAINT** y los reportados por El-Khatib.

Como segundo ejemplo, se considera un caso de campo reportado por Cinco-Ley⁴⁰ y colaboradores. La prueba se efectuó en el campo Abkatún localizado en la sonda de Campeche y consistió de una serie de pulsos generados en el pozo 20 y medidos en los pozos 4 y 12. En este caso el análisis considera la primera sección de decremento del primer pulso medido en el pozo 4. Los detalles se presentan posteriormente en el capítulo VI. Los resultados reportados son: $kh = 1.48 \times 10^6$ mD-ft , $\phi_{ci}h = 9.8 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia lineal de represionamiento igual a -0.052 (lb/pg²)/hr.

Tabla 3-1. RESULTADOS COMPARATIVOS DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN NO LINEAL PROPUESTA POR EL-KHATIB Y LA PROGRAMADA EN EL SISTEMA SAINT.

El-Khatib		SAINT	
k	ϕ	k	ϕ
35.82	0.106	35.82	0.106
21.28	0.158	10.012	0.208
15.30	0.184	11.982	0.201
12.81	0.195	12.016	0.198
12.08	0.197		
12.016	0.19822279		
12.015	0.19822472		

La Figura 3-3, presenta la configuración del comportamiento del error promedio respecto a la permeabilidad y porosidad. Para fines de presentación se consideraron valores de $h = 1000$ pies y $c_t = 6 \times 10^{-6} \text{ (lb/pg}^2\text{)}^{-1}$.

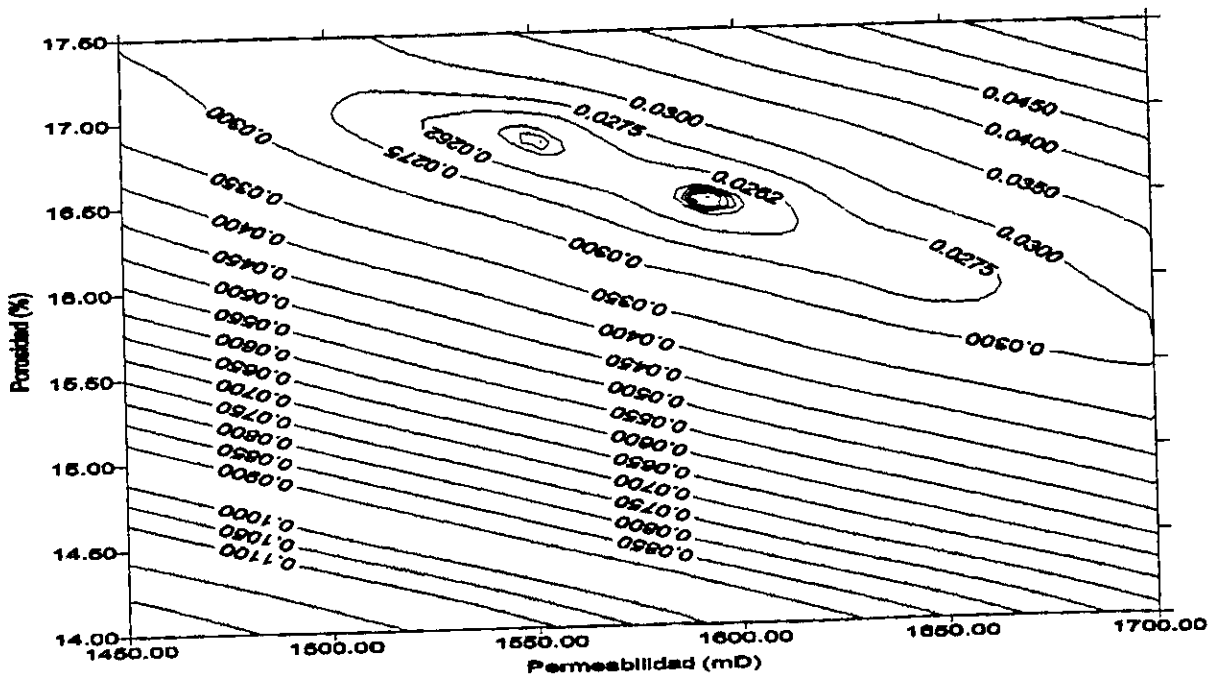


Fig. 3-3. CONFIGURACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO ABKATÚN 4 PRESENTADO POR CINCO-LEY Y COLABORADORES⁴⁰.

La información se generó variando la permeabilidad en intervalos de 0.25 y la porosidad con 0.005 en el rango presentado en la gráfica, lo cual representa 8008 datos. La interpolación se desarrolló usando Kriging y se obtuvo un mínimo para el error de 0.02539.

Puede observarse que en este caso se tienen dos valles, esto es, la función no es unimodal, lo cual complica la estimación de las variables a calcular. Esta situación puede explicarse considerando que los datos de campo no tienen un ajuste perfecto con el modelo teórico de yacimiento homogéneo infinito, con flujo radial. El registro tiempo contra presión contiene ruidos aleatorios y efectos no considerados en las ecuaciones matemáticas que representan el comportamiento de flujo en el medio poroso.

El proceso de regresión no lineal, para este caso, puede tener fallas al obtener un mínimo local, lo cual ocasionaría un error en la estimación de los parámetros. Para evitar este tipo de problemas se debe hacer uso de técnicas alternas, datos de campo y laboratorio, para obtener la solución óptima.

La representación gráfica que se seleccionó, para este caso, difiere del primer ejemplo debido a que la Figura tridimensional no permite percibir el detalle requerido.

Por último, el tercer ejemplo corresponde a una prueba de interferencia en el pozo 1-E en un campo en Estados Unidos, en el que se planeaba un proyecto de inyección de agua. Esta prueba fue presentada por Ramey³³ en 1975, y tenía como objetivo la determinación de las direcciones preferentes de flujo. Los valores de presión de fondo fueron registrados con un medidor de baja resolución comparado con los actualmente disponibles en el mercado.

La Figura 3-4 presenta el comportamiento del error promedio para este pozo, mientras la Figura 3-5 muestra una ampliación del intervalo de permeabilidad entre 19.1 - 19.24 y 0.164 - 0.1644 en porosidad.

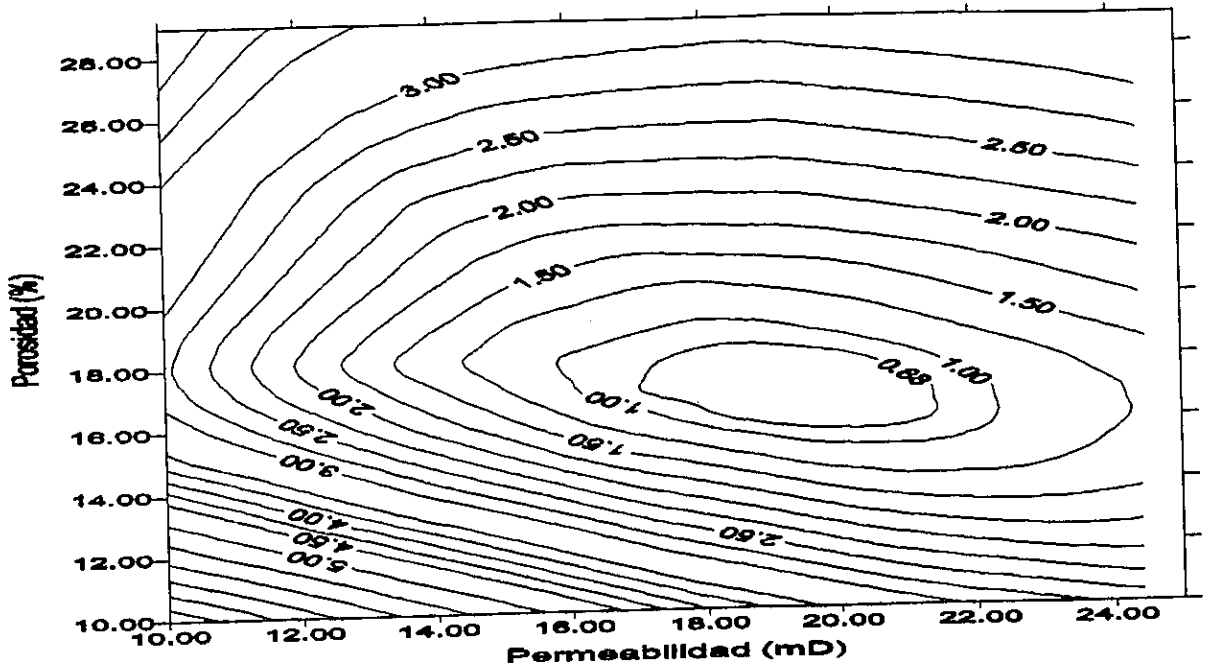


Fig. 3-4. CONFIGURACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR PROMEDIO RESPECTO A LA PERMEABILIDAD Y POROSIDAD, PARA EL POZO 1-E PRESENTADO POR RAMEY³³.

A partir de la observación de la Figura anterior se puede concluir que se trata de una función unimodal con un mínimo bien definido, sin embargo al investigar con mayor detalle (Figura 3.5), se concluye que la función tiene al menos 4 valles bien definidos.

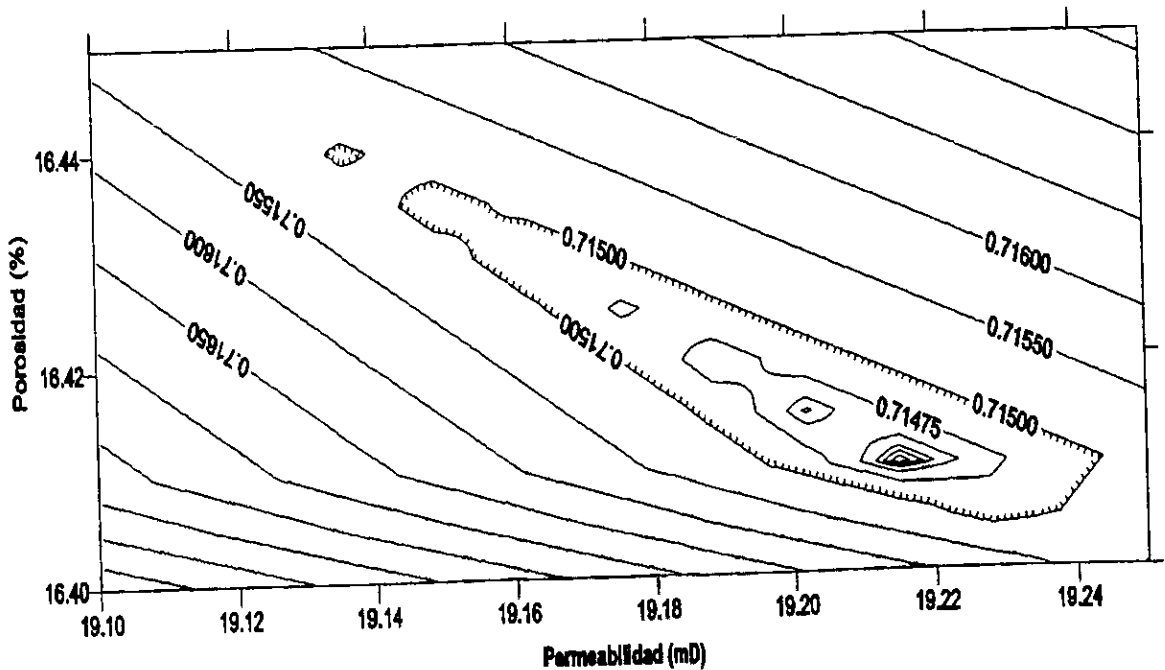


Fig. 3-5. AMPLIACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN DE LA FIGURA 3-4.

Al igual que en el segundo caso, esta situación se explica debido a las señales o efectos no considerados en el modelo matemático que se encuentran presentes en las mediciones de presión del campo.

Con base en el análisis de resultados obtenidos con estos tres ejemplos, se observa que a medida que las mediciones contienen mayor ruido pueden presentarse más mínimos locales dentro de la función objetivo; asimismo, es posible predecir que esta situación se presente también cuando el modelo de flujo en medios porosos se seleccione en forma inadecuada. La explicación al hecho mencionado, tiene la siguiente justificación teórica: si el modelo analítico utilizado, no considera ruidos aleatorios y/o no es el apropiado para el caso de campo, éste será incapaz de explicar la variación total de los datos medidos y la superficie de error resultante tenderá a ser irregular con varios mínimos locales.

III.4 Funciones de restricción⁴⁶

Con el objetivo de acelerar la convergencia de la técnica de regresión no lineal y evitar que los parámetros a determinar adquieran valores ilógicos en iteraciones sucesivas durante el proceso, se hace uso de la técnica denominada funciones de restricción. En el Apéndice C se incluyen algunos conceptos importantes que clarifican el desarrollo que se planteará a continuación.

Por ejemplo, si se desea evitar que el valor de permeabilidad sea negativo, se define la restricción:

$$h_j(\bar{\theta}) \geq 0, \quad \text{III.23}$$

a la cual se le asigna la siguiente función de restricción:

$$\xi_j(\bar{\theta}) \equiv \delta_j / h_j(\bar{\theta}), \quad \text{III.24}$$

donde δ_j es una constante positiva pequeña. Esta situación modifica la función objetivo, ecuación (III.1), de la forma siguiente (revise demostración en el Apéndice C):

$$\text{Error}^+(\bar{\theta}) \equiv \text{Error}^*(\bar{\theta}) + \sum_j \delta_j / h_j(\bar{\theta}). \quad \text{III.25}$$

Si θ^+ y θ^* son dos vectores en los cuales el Error^+ y Error^* tienen un mínimo, puede demostrarse que bajo circunstancias adecuadas, esto es, cuando no existen ruidos aleatorios excesivos y el modelo de flujo es el correcto:

$$\lim_{\delta_j \rightarrow 0} \bar{\theta}^+ = \bar{\theta}^* \quad \text{III.26}$$

Considerando la ecuación (III.1) con la siguiente nomenclatura:

$$\Phi(\bar{\theta}) = \text{Error}(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^N [\Delta p_{\text{medida}} - \Delta p_{\text{calculada}}]^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - f(\bar{\theta})]^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad \text{III.27}$$

La matriz Hessiana H, para la función objetivo anterior, tiene como elementos:

$$H_{ab} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_a \partial \theta_b} = -2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta_a \partial \theta_b} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_b}, \quad \text{III.28}$$

donde θ_a y θ_b son dos elementos del vector $\bar{\theta}$. Suponiendo que nos encontramos cerca de la solución, entonces es posible despreciar el primer término en el lado derecho del elemento tipo de la matriz Hessiana, ecuación (III.28), debido a que $\frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta_a \partial \theta_b}$ tiende a

cero y usamos N en lugar de H:

$$N_{ab} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_b}. \quad \text{III.29}$$

Incluyendo las funciones de restricción, se tiene:

$$N_{ab} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_b} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \left\{ \sum_j \frac{\delta_j}{h_j(\bar{\theta})} \right\} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_b} + \sum_j \frac{\partial^2 \xi_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a \partial \theta_b}; \quad \text{III.30}$$

debido a que el segundo término del lado derecho es cero si $a \neq b$, ya que las funciones de restricción h_j sólo dependen de una incógnita,

$$N_{ab} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_b}, \quad \forall a \neq b; \quad \text{III.31}$$

$$N_{aa} = 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \right)^2 + \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2}{\partial \theta_a^2} (\delta_j / h_j(\bar{\theta})) = 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{2d} \delta_j / h_j^3(\bar{\theta}) \left(\frac{\partial h_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a} \right)^2.$$

Observe que la sumatoria que corresponde a las funciones de restricción es hasta $2d$, ya que en forma general se escoge un rango a partir de un valor mínimo y un máximo donde puede tenerse una solución factible, para cada parámetro a estimar; d es el número de parámetros incógnita.

Definiendo el vector gradiente q , cuyos componentes tienen la siguiente forma:

$$q_a = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_a} = 2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial e_i}{\partial \theta_a} = -2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a}. \quad \text{III.32}$$

El lado derecho de la ecuación (III.32), incluyendo las funciones de restricción se convierte en:

$$q_a = -2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} + \frac{\partial \xi_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a} = -2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_a} - \sum_{j=1}^{2d} \frac{\delta_j}{h_j^2(\bar{\theta})} \frac{\partial h_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a}. \quad \text{III.33}$$

De acuerdo con el método de N-R generalizado, ver *Ápndice C*, el vector v en la expresión (III.34) representa la dirección de máximo descenso:

$$N\bar{v} = -\bar{q}. \quad \text{III.34}$$

El rango de variación posible de los parámetros a estimar debe especificarse para cada problema particular. Suponga que se decide que la permeabilidad puede variar entre cero y 1000 mD y que la porosidad entre cero y 0.3. Entonces las restricciones pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} h_1(\bar{\theta}) &\equiv k > 0 & h_2(\bar{\theta}) &\equiv (1000 - k) > 0; \\ h_3(\bar{\theta}) &\equiv \phi > 0 & h_4(\bar{\theta}) &\equiv (0.3 - \phi) > 0; \end{aligned} \quad \text{III.35}$$

y la función de restricción respectiva como:

$$\xi(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^4 \xi_j(\bar{\theta}) = \frac{\delta_1}{k} + \frac{\delta_2}{(1000 - k)} + \frac{\delta_3}{\phi} + \frac{\delta_4}{(0.3 - \phi)}; \quad \text{III.36}$$

los valores de las δ se asignan de tal forma que todos los sumandos tengan el mismo orden de magnitud, generalmente aproximadamente de diezmilésimas.

$$\delta_1 = \delta_2 = 10^{-7} \times (1000 - 0) \Phi(\bar{\theta}^n); \quad \delta_3 = \delta_4 = 10^{-3} \times (0.3 - 0) \Phi(\bar{\theta}^n),$$

donde $\Phi(\bar{\theta}^n)$ es la solución del vector en la iteración previa.

Entonces, de acuerdo con la expresión (III.25) se deduce que para incluir restricciones en la variación de las incógnitas se requiere la modificación de la ecuación (III.11) en:

$$\mathbf{E}^+ \Delta \bar{\theta} = \bar{\mathbf{U}}^+, \quad \text{III.37}$$

donde:

$$\mathbf{E}_{aa}^+ = \mathbf{E}_{aa} + 2 \sum_{j=1}^{2d} \delta_j / h_j^3(\bar{\theta}) \left(\frac{\partial h_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a} \right)^2;$$

$$\mathbf{E}_{ab}^+ = \mathbf{E}_{ab} \quad ; \quad \text{III.38}$$

$$\mathbf{U}_a^+ = \mathbf{U}_a + \sum_{j=1}^{2d} \frac{\delta_j}{h_j^2(\bar{\theta})} \frac{\partial h_j(\bar{\theta})}{\partial \theta_a}.$$

Observe que la matriz original se modifica solamente en los valores de la diagonal principal, y que esta perturbación cambia dinámicamente entre iteraciones. El proceso de solución, después de incluir las restricciones para un caso particular, continua siendo el mismo que se expuso anteriormente.

Es importante hacer notar, que aunque se hace uso del Hessiano para determinar la dirección de búsqueda con la función de restricción, el procedimiento de optimización en general no requiere su estimación y que se mantiene la suposición de que en la

expansión en serie de Taylor de la función objetivo, los términos de segundo orden son despreciables en magnitud.

Otra alternativa práctica, para evitar el uso de la función de restricción y lograr el objetivo de evitar que los valores de las incógnitas tomen valores ilógicos, es mediante preguntas lógicas en el programa de cómputo que ejecuta la regresión. En caso de fallar en las restricciones, se reduce el valor de τ , factor de sobrerrelajación, hasta cumplir adecuadamente las limitaciones impuestas.

III.5 Bondad de ajuste

En esta parte, se definen los parámetros usados para definir la calidad del ajuste logrado entre los datos de campo y el modelo analítico seleccionado, lo cual se conoce en estadística como la estimación de la bondad de ajuste.

Los modelos teóricos, en muchos casos, representan con buena aproximación el comportamiento de flujo en el yacimiento, pero no son exactos. Esta situación puede deberse, como se mencionó previamente, a errores de medición en campo y laboratorio y/o a factores de flujo no considerados en los desarrollos analíticos.

Estadísticas básicas del error: Para visualizar más fácilmente el comportamiento del error a través del registro de tiempo contra presión, se define por convención el error en porcentaje para cada punto:

$$\text{Error}_i (\%) = (p_{\text{calculada}} - p_{\text{medida}}) / p_{\text{medida}} \times 100, \quad \forall i = 1, N \quad \text{III.39}$$

y se hace uso de los bien conocidos, parámetros estadísticos, media (E), varianza (Var) y desviación estándar (Desv), los cuales proporcionan información de la desviación de los errores y su magnitud:

$$\begin{aligned}
 E(\text{Error}) &= \frac{\sum_{i=1}^N \text{Error}_i}{N} ; \\
 \text{Var}(\text{Error}) &= E\left[(\text{Error} - E(\text{Error}))^2\right] ; \\
 \text{Desv}(\text{Error}) &= \sqrt{\text{Var}(\text{Error})} .
 \end{aligned}
 \tag{III.40}$$

La varianza es una medida de la dispersión o variación de los valores de la variable aleatoria, en nuestro caso el error, alrededor de la media. Si los valores tienden a concentrarse alrededor de la media, la varianza es pequeña, resultando grande si los valores tienden a distribuirse lejos. Si la variable aleatoria tiene ciertas unidades, la varianza tiene estas unidades elevadas al cuadrado, mientras la desviación estándar o típica tiene las mismas unidades, razón por la cual ésta se utiliza con mayor frecuencia.

Otra medida de la "bondad del ajuste" con el modelo teórico, lo constituye la sumatoria de las diferencias entre los datos medidos y calculados elevados al cuadrado, ecuación (III.1); si la suma es pequeña el ajuste es bueno y es malo en caso contrario. Sin embargo, la sumatoria depende del número de datos y de la magnitud de los valores manejados, es por esta razón que es más útil emplear la definición del coeficiente de correlación lineal y el generalizado.

Coeficiente de correlación lineal: es un estadístico de utilidad para verificar la calidad del ajuste, bajo la suposición de un ajuste lineal, y se define como:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Desv}(x)\text{Desv}(y)} ; \quad \text{Cov}(x, y) = E\left[\left((x - E(x))(y - E(y))\right)\right], \quad -1 \leq \rho \leq 1; \tag{III.41}$$

si el coeficiente es igual a la unidad en valor absoluto se concluye que existe una correlación lineal perfecta, y si es cero que la variación total de los datos no se explica con el modelo utilizado.

Coeficiente de correlación generalizado: Se utiliza para obtener coeficientes de correlación no lineales, esto es, mide que tan bien se ajusta una curva de regresión no lineal a los datos. También se le conoce como coeficiente de correlación múltiple y se define como:

$$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta p_{\text{calculada}} - \Delta \bar{p}_{\text{medida}})^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta p_{\text{medida}} - \Delta \bar{p}_{\text{medida}})^2} \quad \text{III.42}$$

La expresión anterior, se prefiere a la de correlación lineal, puesto que los modelos teóricos usados en pruebas de pozos múltiples son no lineales. A medida que el valor de r tiende a la unidad el ajuste es mejor, esto es la variación explicada tiende a ser igual a la variación total observada.

Para mostrar la utilidad del concepto, suponga que para un caso específico se determinó un valor de $r = 0.9911$, esto es un valor de $r^2 = 0.9822$. La variación total es igual a la variación explicada más la no explicada, por lo tanto:

$$\text{variación no explicada} / \text{variación total} = 1 - r^2 = 1 - 0.9822 = 0.0178$$

Esto es 1.78% de la variación total permanece sin explicar, esto puede deberse a fluctuaciones aleatorias en la medición de los datos y/o a efectos presentes durante la prueba que no se consideraron en el modelo teórico utilizado. Para este caso, puede concluirse que el ajuste fue satisfactorio.

Uno de los objetivos de las pruebas de presión es obtener información útil para alimentar a los simuladores de yacimientos, y es importante tomar en cuenta que algunos de estos datos se manejan en el proceso de simulación de yacimientos, como parámetros de variación para lograr el ajuste con la historia del yacimiento. Debido a lo anterior se considera de gran utilidad estimar intervalos por cada parámetro calculado y relacionarlos con una probabilidad de que el valor real de campo, esté incluido en el rango.

Es conocido que las distribuciones muestrales de muchos parámetros estadísticos son aproximadamente normales, esto es, siguen el comportamiento de la curva Gaussiana; además se observa que a medida que se incrementa el número de datos o tamaño de la muestra esta aseveración es cada vez más exacta. Cuando se tienen muestras de menos de 30 datos la aproximación no es buena y es cada vez peor a medida que el número de datos disminuye. De acuerdo con la teoría exacta de muestreo conocida más comúnmente como teoría de muestras pequeñas ($N < 30$), es posible analizar los datos con las distribuciones "t" de student y chi-cuadrado. Es importante mencionar que existen técnicas complejas que permiten definir la bondad del ajuste en una forma muy exacta, pero para fines prácticos las aproximaciones presentadas aquí son suficientes, esto es debido a la presencia de errores de medición y de la aproximación inexacta de los modelos teóricos.

Distribución t de Student: La distribución t de student fue presentada por Gosset bajo el seudónimo de student⁴⁸, y considera que las muestras se extraen de una población normal o aproximadamente normal, con media μ^1 dada por la ecuación:

$$f(t) = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{(\nu+1)}{2}}}, \quad t = \frac{\bar{X} - \mu^1}{s^1} \sqrt{N-1}. \quad \text{III.43}$$

y_0 depende del valor del número de datos N y se estima de modo que el área total bajo la curva sea unitaria; ν se denomina como el número de grados de libertad y se define como el número N de observaciones independientes en la muestra, es decir el tamaño muestral, menos el número d de parámetros que deben estimarse a partir de las observaciones de la muestra. \bar{X} y s^1 son la media y desviación estándar muestrales, respectivamente.

En la Figura 3-6, se muestra el comportamiento de la distribución t de student. Observe que a medida que los grados de libertad se incrementan, lo cual es directamente proporcional al número de observaciones, la gráfica de $f(t)$ tiende a la distribución

normal o Gaussiana. De lo anterior, se concluye que una ventaja de utilizar la teoría de muestras pequeñas es que es válida también para muestras grandes.

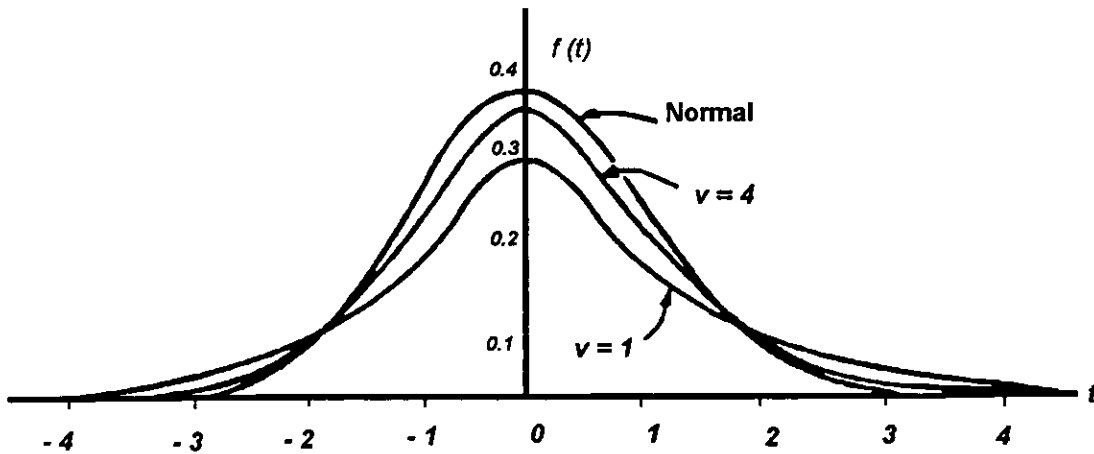


Fig. 3-6. DISTRIBUCIÓN "T" DE STUDENT CON 4 Y 1 GRADOS DE LIBERTAD.

Intervalos de confianza: Debido a que el área total limitada por la curva de la ecuación (III.27) y el eje de las abscisas es uno, se infiere que el área bajo la curva entre dos valores $x=a$ y $x=b$, donde $a < b$, representa la probabilidad de que x se encuentre entre a y b y se denota como $p(a < x < b)$. Si definimos $\bar{\alpha}$ como el nivel de confianza, se dice que, el valor real del parámetro θ_i se encuentra dentro del intervalo $\{L, U\}$ con una probabilidad de $(1 - \bar{\alpha})$. El rango $\{L, U\}$, se denota como intervalo de confianza de $100(1 - \bar{\alpha})\%$.

Por ejemplo, si $-t_{0.975}$ y $t_{0.975}$ son los valores de t para los que el 2.5% del área se encuentra en cada "cola" de la distribución t , entonces un intervalo de confianza del 95% para t es:

$$-t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu^1}{s^1} \sqrt{N-1} < t_{0.975}. \quad \text{III.44}$$

De lo que se deduce que μ^1 se encuentra en el intervalo:

$$\bar{X} - t_{0.975} \frac{s^1}{\sqrt{N-1}} < \mu^1 < \bar{X} + t_{0.975} \frac{s^1}{\sqrt{N-1}}, \quad \text{III.45}$$

con el 95% de confianza, o sea con el 95 de probabilidad. Para el caso de las estimaciones de parámetros, para pruebas de interferencia y pulsos, el valor de la media poblacional representa el valor que minimiza a la ecuación (III.1).

De acuerdo con Hartley⁴⁶, la estimación aproximada de los intervalos de confianza para parámetros no lineales puede efectuarse con el procedimiento presentado a continuación. El efectuar cálculos rigurosos para la estimación de los intervalos, además de los esfuerzos de procesamiento de cómputo, no se considera conveniente ya que los datos de campo contienen errores de medición.

El error medio cuadrático, en esta técnica, se define como:

$$\text{EMS} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta p_{\text{calculada}} - \Delta p_{\text{medida}})^2}{N - d}. \quad \text{III.46}$$

Entonces, el intervalo de confianza para el parámetro θ_i está dado por:

$$\left\{ \theta_i^* - t_{\bar{\alpha}/2, v} [V^*(\theta_i^*)]^{1/2} \quad \text{a} \quad \theta_i^* + t_{\bar{\alpha}/2, v} [V^*(\theta_i^*)]^{1/2} \right\}. \quad \text{III.47}$$

θ_i^* , es el valor óptimo estimado en el proceso de regresión; $t_{\bar{\alpha}/2, v}$, se obtiene de la distribución t, tal que $p(t > t_{\bar{\alpha}/2, v}) = \bar{\alpha}/2$ y :

$$[V^*(\theta_i^*)]^{1/2} = \sqrt{\text{EMS} * e_{i,i}}, \quad \text{III.48}$$

donde $e_{i,i}$ son los valores de la diagonal matriz inversa de E, en la última iteración.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA GENERAL DE ANÁLISIS PROPUESTA

IV.1 Introducción

En este capítulo se muestran los avances teóricos logrados por el autor, en el análisis de pruebas de pozos múltiples, los cuales constituyen una parte importante de las aportaciones de la presente tesis. En resumen, estos logros están relacionados con el análisis de pruebas afectadas por tendencias lineales de presión, estimación de presión al inicio de la prueba en los pozos de observación, estimación de direcciones preferentes de flujo en yacimientos idealmente anisotrópicos, la extensión para flujo esférico y lineal de la técnica de El-Khatib y la presentación de una metodología general de análisis, que asegura la calidad en los resultados y que permite optimizar recursos económicos y humanos.

Primeramente, se muestra detalladamente el desarrollo de unas nuevas definiciones de grupos de presión, muy útiles para el análisis de pruebas transitorias afectadas por tendencias lineales de presión en el yacimiento. Estas definiciones optimizan notablemente el manejo de la información y los recursos económicos usados en la toma del registro de campo.

En segundo lugar, se presenta una técnica para estimar la presión al inicio de la prueba de interferencia, lo cual tiene implicaciones que mejoran la exactitud de los resultados obtenidos.

Se demuestra la utilidad de un procedimiento, extensión del método de Ramey para el análisis de yacimientos anisotrópicos, que permite en forma más versátil la estimación de las permeabilidades preferentes al flujo, así como su dirección.

Se presenta una extensión de la técnica de El-Khatib para flujo esférico y lineal, de gran utilidad práctica para análisis de las pruebas de interferencia que permite realizar un procedimiento de aseguramiento de consistencia de los resultados, cuando se aplican las técnicas de curvas tipo y de regresión no-lineal.

Finalmente, se exhibe una metodología general de análisis de gran utilidad para el analista en su trabajo de campo, planteada sobre la base de la experiencia teórica y de campo del autor.

IV.2 Desarrollo de nuevos grupos de presión

Las nuevas funciones de presión incluyen la integral de la presión con respecto al tiempo divididas por el tiempo, lo cual representa un promedio móvil acumulativo de la presión con respecto al tiempo.

En años recientes el uso de la derivada de presión ha llegado a ser muy popular para la interpretación de pruebas transitorias de presión. La principal desventaja de esta herramienta es la necesidad de estimar los datos de derivada mediante la diferenciación numérica de los datos de presión; los resultados de esta técnica son "ruidosos" y en algunas ocasiones difíciles de interpretar.

El promedio ponderado de presión involucrado en las funciones presentadas tiene ventajas en la práctica, debido a que frecuentemente es mucho más suave que la derivada de presión.

En este trabajo se proponen nuevas funciones de presión, para flujo esférico, lineal y radial, que eliminan la tendencia de presión automáticamente, ahorrando recursos económicos al permitir disminuir el tiempo de registro en el fondo de los pozos, y adicionalmente, mejorando la interpretación.

El comportamiento de la caída de presión en un pozo de observación afectado por la influencia de una tendencia lineal de presión puede expresarse como:

$$\Delta p_D(t_D) = p_D(t_D) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2}, \quad \text{IV.1}$$

donde $\Delta p_D(t_D)$ es la respuesta total de presión que representa la suma de $p_D(t_D)$, que es la caída de presión que el pozo tendría a un tiempo t_D sin el efecto de la tendencia de presión, más la tendencia lineal de presión expresada por el segundo término del lado derecho. La ecuación (IV.1), es válida para cualquier clase de prueba transitoria de presión, y para cualquier geometría de flujo; η_1 puede ser positiva o negativa dependiendo de que la tendencia sea ascendente o descendente, respectivamente.

La integral de presión adimensional respecto a t_D , para la ecuación (IV.1) se expresa como:

$$\int_0^{t_D} \Delta p_D(\tau) d\tau = \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau + \frac{\eta_1}{r_D^2} \int_0^{t_D} \tau d\tau = \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau + \frac{\eta_1}{r_D^2} \frac{t_D^2}{2}. \quad \text{IV.2}$$

Dividiendo ambos miembros de la expresión anterior entre t_D , se estima un valor de caída de presión promedio ponderada:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} \Delta p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau + \frac{\eta_1}{r_D^2} \frac{t_D}{2}. \quad \text{IV.3}$$

Del análisis de las ecuaciones (IV.1) y (IV.3) se observa que ambas contienen el término de la tendencia lineal de presión en forma semejante, de aquí que al manipular algebraicamente ambas expresiones puede eliminarse este efecto:

$$N = \Delta p_D(t_D) - \frac{2}{t_D} \int_0^{t_D} \Delta p_D(\tau) d\tau = p_D(t_D) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2} - \frac{2}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau - \frac{\eta_1}{r_D^2} t_D; \quad \text{IV.4}$$

simplificando:

$$N = p_D(t_D) - \frac{2}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau \quad \text{IV.5}$$

Es importante recalcar que el grupo N definido por la expresión (IV.5) es válido para cualquier tipo de prueba transitoria de presión, cualquier tipo de yacimiento y cualquier tipo de flujo presente en el medio poroso, considerando por supuesto las definiciones adecuadas de p_D . En este trabajo se presenta la aplicación solamente a las pruebas de interferencia de presión en un yacimiento homogéneo infinito con flujo esférico, lineal y radial.

A partir del grupo N pueden construirse curvas tipo para análisis de datos de campo, y también usarse ventajosamente, en los procedimientos de regresión no lineal ya que elimina automáticamente una variable a estimar, con la consecuente mejora en la estabilidad de la solución y el tiempo de cómputo.

A continuación se presentan las funciones de presión para yacimiento homogéneo infinito con flujo lineal, esférico y radial. Con la finalidad de lograr una presentación didáctica, la estimación de las integrales usadas en las nuevas funciones de presión, se desarrollan en el Apéndice B.

IV.2.1 FLUJO ESFÉRICO

La expresión que permite calcular la caída de presión, para el caso de flujo esférico en un yacimiento homogéneo, isotrópico con comportamiento infinito y efectos de presión lineal, es:

$$p_D = \frac{1}{r_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{t_D/r_D^2}} \right) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2}. \quad \text{IV.6}$$

La integral de la presión adimensional dividida entre t_D , correspondiente a un valor de caída de presión adimensional promedio ponderada, corresponde a la expresión 15 del Apéndice B:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = -\frac{r_D}{4t_D} \left\{ -\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(2 + \frac{1}{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) + \frac{2e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \right\} + \frac{\eta_1 t_D}{2 r_D^2}; \quad \text{IV.7}$$

multiplicando la expresión anterior por r_D , con la finalidad de preparar la aplicación de la ecuación (IV.5), se obtiene:

$$\frac{r_D}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{r_D^2}{4t_D} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(2 + \frac{1}{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) - \sqrt{\frac{r_D^2}{t_D}} \frac{e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\eta_1 t_D}{2 r_D}. \quad \text{IV.8}$$

Lo anterior se explica debido a que, en flujo esférico, se maneja la graficación en doblelogaritmo de $p_D r_D / 2$ contra t_D / r_D^2 . Ahora, se aplica la ecuación (IV.5), modificada para el caso de flujo esférico, para obtener la definición del grupo de presión:

$$\begin{aligned} N_s = p_D r_D / 2 - \frac{r_D}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau &= \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{r_D^2}{4t_D} \left(2 + \frac{4t_D}{r_D^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{r_D^2}{\pi t_D}} e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(1 + \frac{r_D^2}{t_D} \right) + \sqrt{\frac{r_D^2}{\pi t_D}} e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}. \end{aligned} \quad \text{IV.9}$$

La curva tipo desarrollada en base al grupo N_s , se presenta en la Figura 4-1. De un análisis cuidadoso de la ecuación (IV.9), se concluye que para valores pequeños de tiempo los valores del grupo N_s son positivos, pero a medida que este crece se convierten en negativos; con la finalidad de construir la curva tipo, todos los valores se consideran en valor absoluto, lo cual explica la joroba que se presenta al inicio de la curva. Es importante enfatizar que este comentario es válido para los diferentes tipos de flujo estudiados.

Las ecuaciones de interpretación corresponden a las utilizadas en la curva tipo de flujo esférico que no considera tendencia lineal de presión, ver Tabla 2.1, página 46. Los datos de campo deben graficarse en una escala doble logarítmica, con el tiempo en el eje de las abscisas y el grupo $(\Delta p - I_c / t)$ en el de las ordenadas, donde la definición para I_c , válida para flujo esférico, lineal y radial, se presenta en la Ec. IV.10.

$$I_c = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Delta p \, d\tau. \quad \text{IV.10}$$

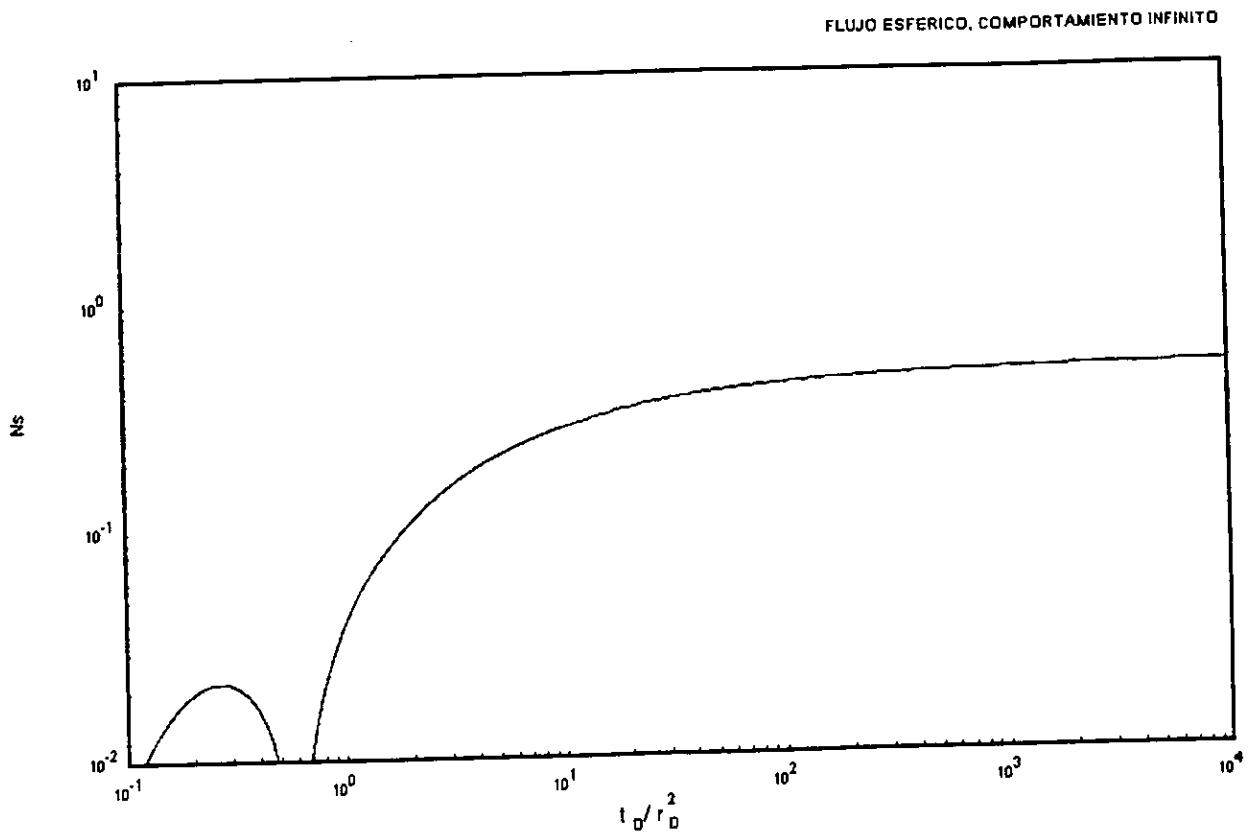


Fig. 4-1. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO ESFÉRICO.

IV.2.2 FLUJO LINEAL

La ecuación para calcular la caída de presión en términos de variables adimensionales, para el caso de flujo lineal con efectos de presión lineal es:

$$p_{DL} = 2x_D \pi \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4t_{DL}}\right)} - \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) \right] + \eta_1 \frac{t_{DL}}{x_D^2} \quad \text{IV.11}$$

La integral de la presión adimensional dividida entre t_{DL} , corresponde a la expresión 28 del Apéndice B:

$$\frac{1}{t_{DL}} \int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = 4\sqrt{\pi} x_D \left\{ \frac{1}{3} e^{-\chi^2} \left(\frac{1}{\chi} + \chi \right) - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\chi) \left(\frac{\chi^2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\eta_1}{2} \frac{t_{DL}}{x_D^2}; \quad \text{IV.12}$$

donde $\chi = x_D / 2\sqrt{t_{DL}}$.

Dividiendo la expresión anterior entre x_D , con la finalidad de preparar la aplicación de la ecuación (IV.5), se tiene:

$$\frac{1}{x_D t_{DL}} \int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = 4\sqrt{\pi} \left\{ \frac{1}{3} e^{-\chi^2} \left(\frac{1}{\chi} + \chi \right) - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\chi) \left(\frac{\chi^2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\eta_1}{2} \frac{t_{DL}}{x_D^3}; \quad \text{IV.13}$$

el paso anterior, de forma semejante al desarrollo de flujo esférico, se explica debido a que la curva tipo para flujo lineal, considera la graficación en el eje de las ordenadas del término $p_{DL} / 2x_D$.

Aplicando la definición de la expresión (IV.5), modificada para el caso de flujo lineal, se tiene:

$$N_L = \frac{p_{DL}}{2x_D} - \frac{1}{t_{DL} x_D} \int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = \pi \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4t_{DL}}\right)} - \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) \right] + \eta_1 \frac{t_{DL}}{2x_D^3} \\ - 4\sqrt{\pi} \left\{ \frac{1}{3} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4t_{DL}}\right)} \left(2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) \left(\frac{1}{12\frac{t_{DL}}{x_D^2}} + \frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{\eta_1}{2} \frac{t_{DL}}{x_D^3};$$

IV.14

simplificando:

$$N_L = \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) \left(\frac{1}{3\frac{t_{DL}}{x_D^2}} + 1 \right) - \frac{2}{3} \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4t_{DL}}\right)} \left[\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right], \quad \text{IV.15}$$

se obtiene la definición del grupo N_L para yacimiento homogéneo, infinito y flujo lineal. En la Figura 4-2 se presenta la curva tipo desarrollada para este modelo de flujo. Las ecuaciones de interpretación corresponden a las listadas en el Capítulo II, en la curva tipo de flujo lineal, página 46.

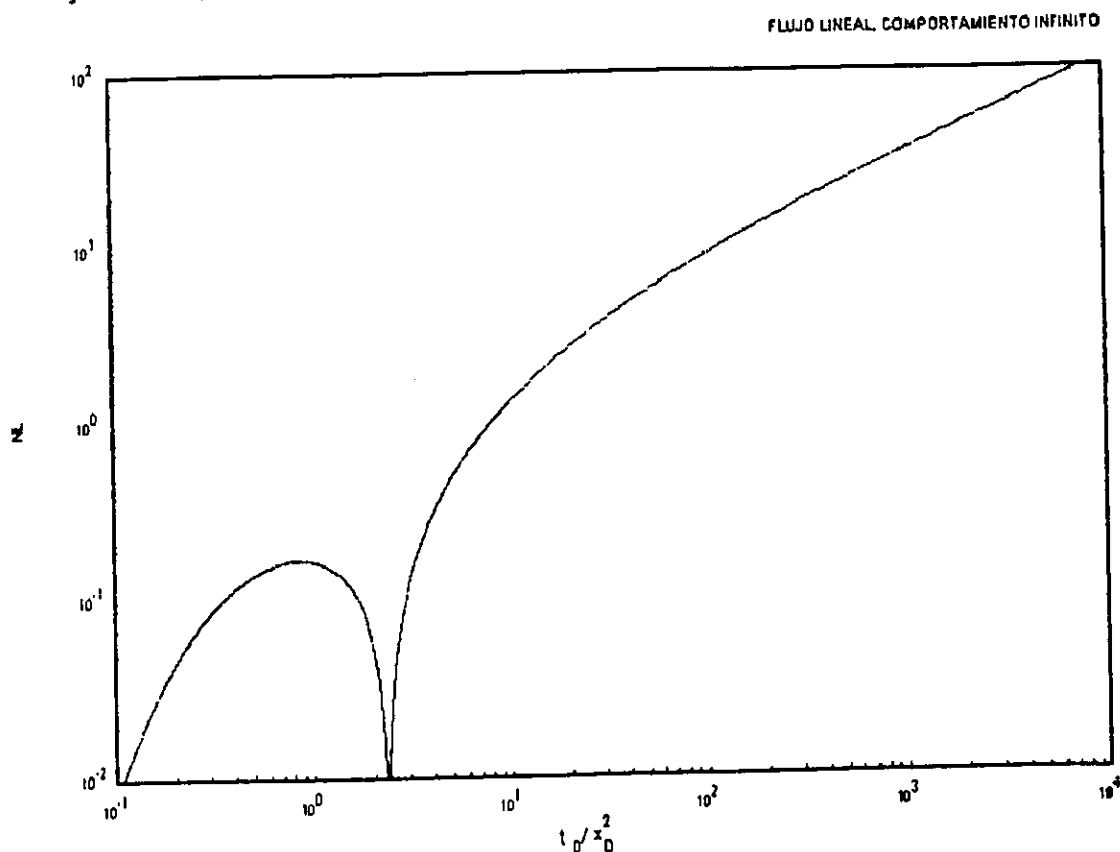


Fig. 4-2. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO LINEAL.

Los datos de campo deben graficarse en una escala doble logarítmica, con el tiempo en el eje de las abscisas y el grupo $(\Delta p - I_c / t)$ en el de las ordenadas. (ver la ecuación IV.10 para la definición de I_c).

IV.2.3 FLUJO RADIAL

En términos de variables adimensionales, la expresión que permite calcular la caída de presión, para el caso de flujo radial monofásico, isotérmico en un yacimiento homogéneo, isotrópico con comportamiento infinito y efectos de presión lineal es:

$$p_D = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2} \quad \text{IV.16}$$

El valor de la caída de presión adimensional promedio ponderada respecto a t_D , puede calcularse con la siguiente expresión que corresponde a la ecuación 44 del Apéndice B:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{t_D} I = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \left[1 + \frac{r_D^2}{4t_D} \right] - \frac{1}{2} e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}} + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D}{r_D^2} \right) \quad \text{IV.17}$$

Comparando las ecuaciones (IV.16) y (IV.17) puede observarse que contienen el término de la tendencia lineal de presión, tal y como se comentó en el desarrollo general, entonces si se manipulan estas expresiones adecuadamente, se llega a la definición de un nuevo grupo de presión para flujo radial:

$$N_R = p_D - \frac{2}{t_D} I = e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}} - E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{r_D^2}{4t_D} \right\} \quad \text{IV.18}$$

Este grupo se utilizó para construir una nueva curva tipo que tiene la ventaja de permitir automáticamente desuperponer el efecto de tendencia lineal de presión, ver Figura 4-3. El procedimiento de cálculo utiliza las expresiones, mostradas en la Tabla 2-1. Los datos de campo deben graficarse en una escala doble logarítmica, con el tiempo en el eje de las abscisas y el grupo $(\Delta p - 2 \cdot I_c / t)$ en el de las ordenadas.

Con relación al cálculo de la integral de los datos de campo, para los tres casos desarrollados, esto es flujo esférico, lineal y radial, se probaron varias cuadraturas,

tales como la del Rectángulo, Spline, Simpson, etcétera, concluyéndose que la cuadratura del trapecio ofrece buenos resultados en el análisis.

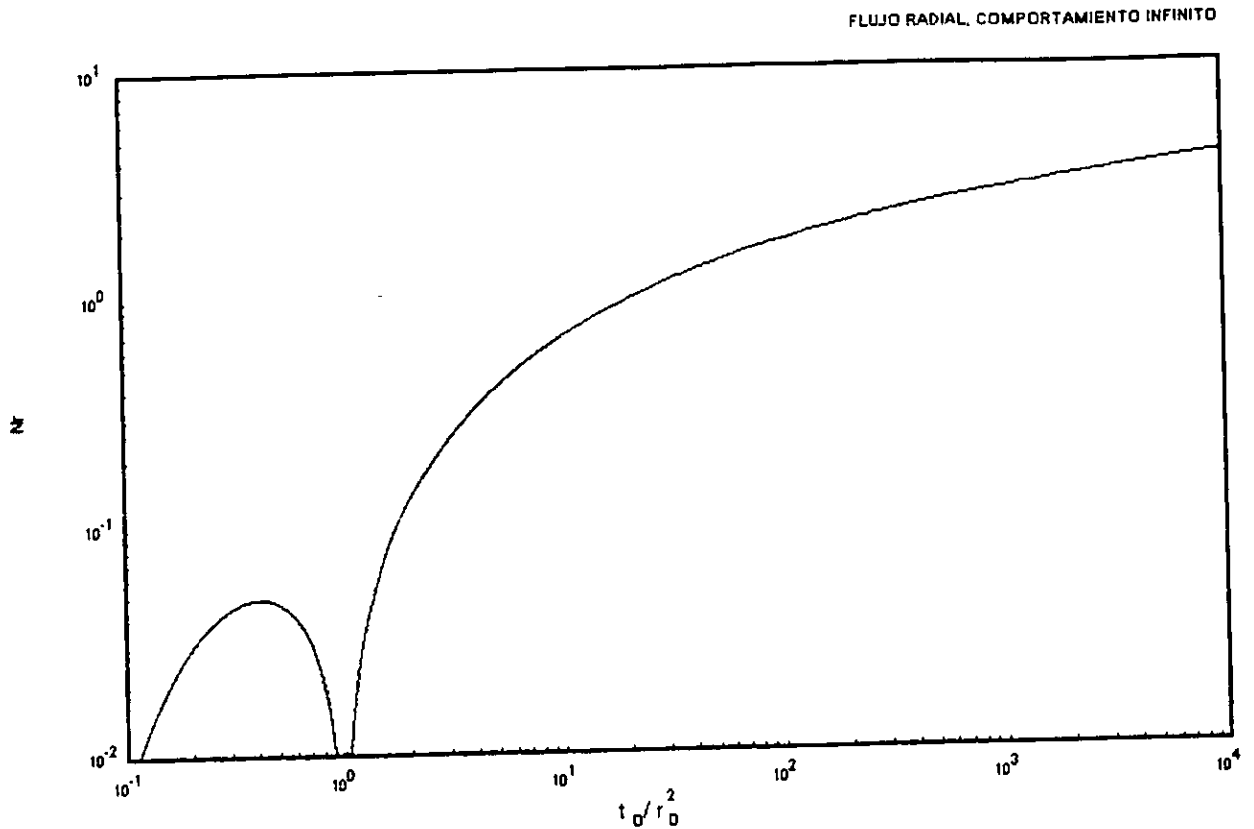


Fig. 4-3. CURVA TIPO PARA ANÁLISIS DE PRUEBAS DE INTERFERENCIA AFECTADAS POR UNA TENDENCIA DE PRESIÓN LINEAL. YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO CON FLUJO RADIAL.

Con la finalidad de comprobar la eficacia de la técnica propuesta, se realizaron numerosos análisis con datos de campo reportados en la literatura, información del campo Abkatún y con datos sintéticos, obteniendo resultados satisfactorios.

Se determinó que a medida que las mediciones de presión son más continuas desde tiempos cortos, la definición del ajuste mejora notablemente; esta última conclusión se explica por la necesidad de cálculo numérico de la integral de los datos de campo.

IV.3 PRESIÓN INICIAL

En la aplicación de las técnicas de análisis de pruebas de interferencia y pulsos, se requiere la presión de fondo del pozo observador al inicio de la prueba, $p_w(t=0)$, con el objeto de calcular las caídas de presión a los diferentes tiempos registrados. Debido a la naturaleza de las mediciones de presión, en el campo Abkatún, no fue posible determinar con precisión este valor; la presión en el registro varía formando una banda de valores, y adicionalmente en algunas ocasiones se presentan mediciones caóticas antes y al inicio de la prueba.

Al usar la técnica de regresión, se observó que la presión inicial afecta fuertemente los resultados, lo cual originó la investigación para su estimación.

Si suponemos que el modelo analítico para un caso específico es el adecuado y los datos de presión son representativos, la lógica indica que la presión inicial debe estimarse de tal magnitud que el coeficiente de correlación, ecuación (III.42), tienda a la unidad.

El coeficiente de correlación, indica el grado de ajuste logrado en una regresión entre los datos reales y calculados. Para el caso, donde el modelo analítico utilizado represente a la perfección al yacimiento y no se tengan efectos extraños en las mediciones, se obtendría un coeficiente igual a 1. Sobre la base de lo anterior se visualiza que la presión inicial debe estimarse de tal forma que el coeficiente de correlación generalizado tienda a ser uno.

El procedimiento propuesto, consiste en efectuar varias corridas de regresión variando la presión inicial, desde un valor de inicio hasta uno final con un paso Δp ; posteriormente se procede a graficar los resultados del error de cada corrida versus la

presión correspondiente y finalmente a partir del análisis de esta gráfica, determinar el valor de la presión inicial más adecuada para la prueba.

En la Figura 4.4, se ejemplifica el procedimiento propuesto, para el caso de una prueba reportada por Earlougher⁹. El valor reportado de campo para la presión inicial fue de 2500 lb/pg². Todas las Figuras incluidas en este subcapítulo, se tomaron directamente de la salida en pantalla del sistema SAINT.

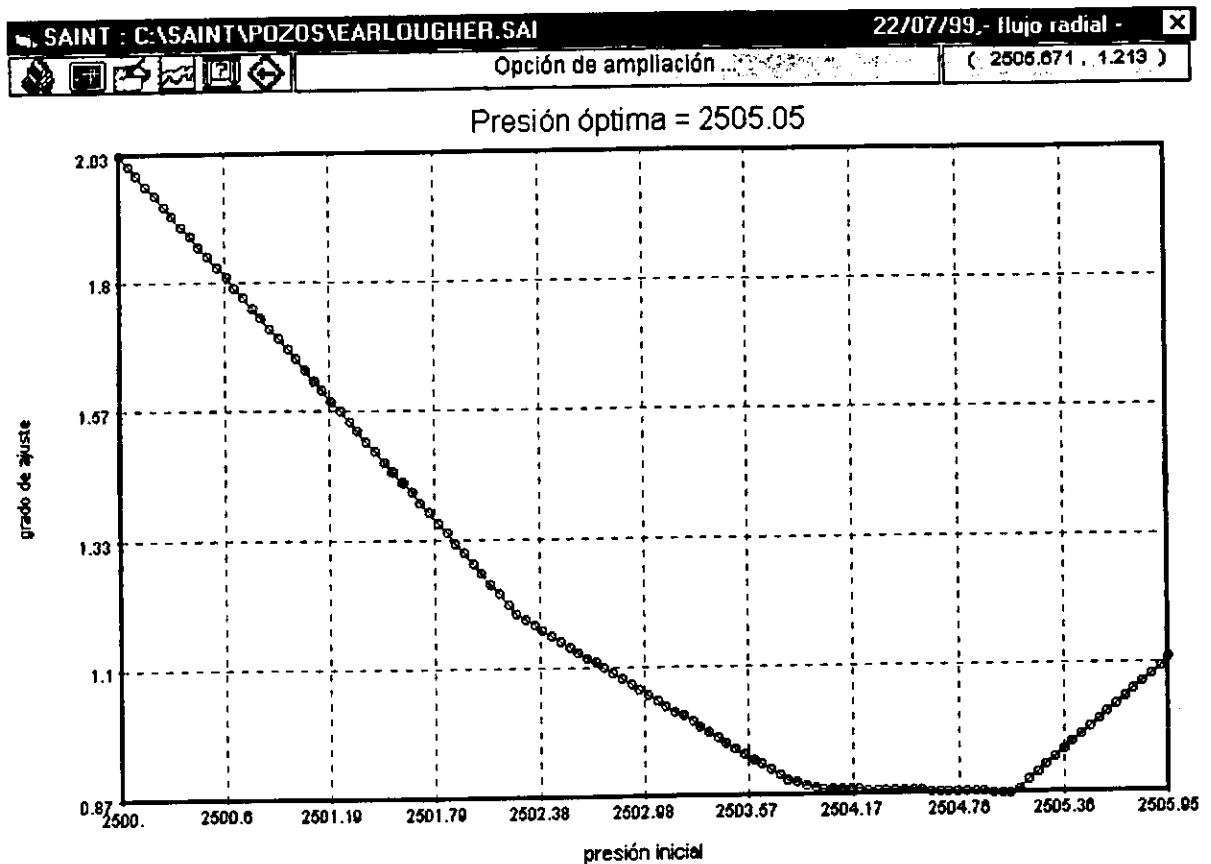


Fig. 4-4. ESTIMACIÓN DE LA PRESIÓN INICIAL PARA EL CASO DE LA PRUEBA REPORTADA POR EARLOUGHER⁹, PAG. 106.

El intervalo seleccionado, para este caso, fue de 2500 hasta 2506 psia, con la ejecución de la regresión no lineal cada 0.05 lb/pg². Es importante comentar que en esta gráfica la etiqueta de grado de ajuste, en el eje de las ordenadas no corresponde directamente al coeficiente de regresión generalizado, como se mencionó

anteriormente en la descripción de la técnica. La situación anterior se explica debido a que el grado de ajuste definido como

$$\sum_{i=1}^N \text{abs}(\Delta p_{\text{calculada}} - \Delta p_{\text{medida}}) / N, \tag{IV.19}$$

requiere un esfuerzo de cómputo menor y de acuerdo con nuestra experiencia, resulta en una estimación de presión inicial igual, desde el punto de vista práctico, a la obtenida con el coeficiente de correlación generalizado.

Con base en esta gráfica se determina que el valor más adecuado es 2505.05 (lb/pg²)_{abs}, lo cual representa una diferencia de 5.05 (lb/pg²)_{abs} con el valor reportado de campo. En la Figura 4-5, se presenta el análisis con las técnicas de curvas tipo y semilogarítmicas, observe en la parte superior los valores estimados de permeabilidad y porosidad.

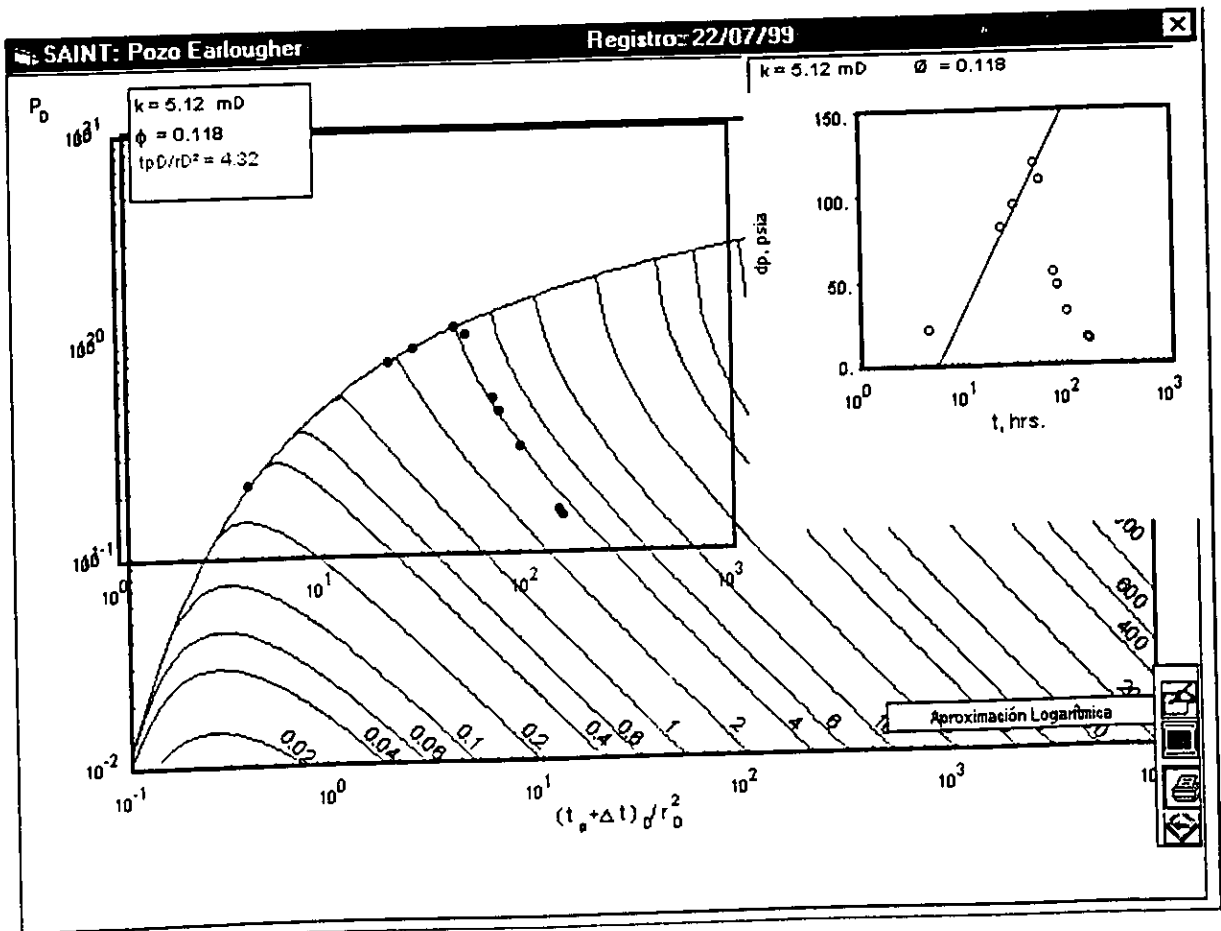


Fig. 4-5. ANÁLISIS DE LA PRUEBA POR CURVA TIPO Y TÉCNICAS SEMILOGARÍTMICAS.

En la siguiente tabla se presentan algunos de los resultados de detalle en el análisis efectuado para la estimación de la presión inicial. Se concluye, para este caso, que una diferencia en 5 psi afecta en un 8% la estimación de la permeabilidad.

TABLA. 4-1. ERRORES DE ESTIMACIÓN EN LA PERMEABILIDAD POR EL EFECTO DE LA PRESIÓN INICIAL.

PRESIÓN INICIAL lb/pg ²	ERROR PROM. EN REGRESIÓN (lb/pg ²)	VARIACIÓN NO EXPLICADA (%)	PERMEABILIDAD (MD)	ERROR EN PERMEABILIDAD (%)
2500	2.029	8.7	5.504	7.8
2503	1.053	2.2442	5.263	3.05
2505	0.873	2.2319	5.111	0.0008
2505.05	0.872	2.18	5.107	0.0
2505.1	0.88	2.4591	5.104	0.0006

La Figura 4.6 muestra el ajuste logrado con los datos de campo, considerando $p_i = 2505.05$ lb/pg².

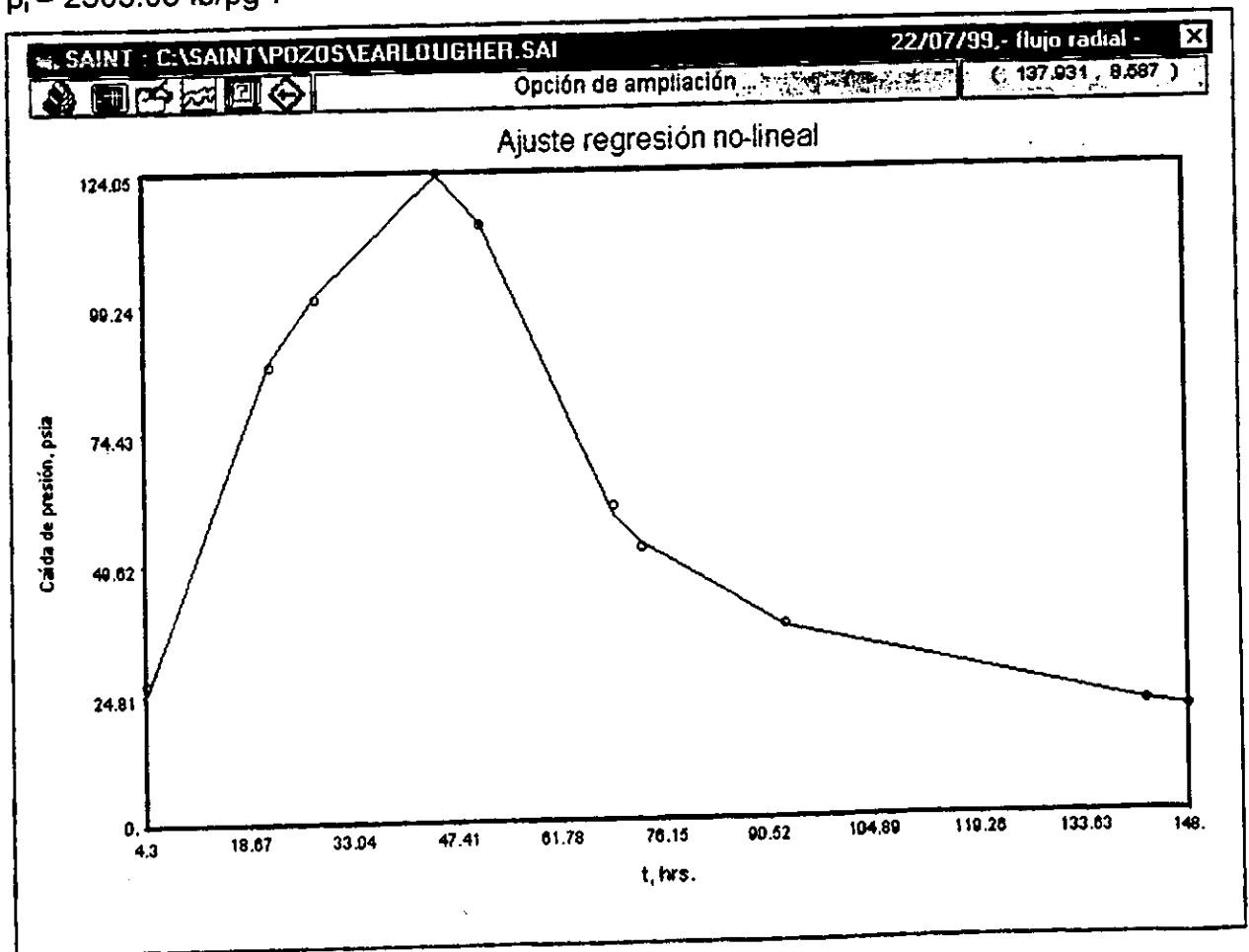


Fig. 4-6. AJUSTE DEL MODELO TEÓRICO, LÍNEA CONTINUA, CON LOS DATOS DE CAMPO.

IV.4 Yacimiento idealmente anisotrópico

De acuerdo a la teoría presentada en el Capítulo II, se comentó la necesidad de tener la participación de cuatro pozos, tres observadores y un activo para generar el sistema de ecuaciones que permite caracterizar el modelo de yacimiento idealmente anisotrópico. Ramey³³ propone realizar, para el caso de tener más de tres pozos de observación, ajustes con tres pozos a la vez, y concluye que esto permite corroborar la validez del ajuste del modelo teórico al yacimiento en estudio.

La restricción, de tener al menos cuatro pozos interactuando simultáneamente, se mantiene para el planteamiento que se desarrolla a continuación, pero es importante enfatizar que tiene la ventaja, sobre la metodología planteada por Ramey, de tener la posibilidad de incluir más de tres pozos de observación simultáneamente en el análisis.

Del análisis con curvas tipo y/o por regresión no lineal y/o técnicas semilogarítmicas, con el modelo de yacimiento homogéneo isotrópico, es posible obtener un valor de permeabilidad que representa, como se comentó en el Capítulo II, un promedio geométrico:

$$k_I = \sqrt{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} ; \quad \text{IV.20}$$

el subíndice I, indica que es un valor de permeabilidad basada en el modelo isotrópico.

Es necesario recordar al lector, que para el caso de un yacimiento idealmente anisotrópico, todos los análisis de los pozos en observación deberán reportar valores muy cercanos de permeabilidad.

Asimismo, es posible obtener bajo este mismo criterio, un valor de $(\phi\mu c)_I$ para cada una de las pruebas analizadas. Estos valores, permiten generar el mismo número de ecuaciones que pozos de observación, por medio de la expresión siguiente³³:

$$k_{xx}y^2 + k_{yy}x^2 - 2k_{xy}xy = \frac{k_1}{\phi\mu c_t} (\phi\mu c_t)_1 \tag{IV.21}$$

Manipulando algebraicamente las expresiones (IV.20) y (IV.21), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F_1 = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2 - k_1^2 = 0$$

$$F_{\ell+1} = \phi\mu c_t (k_{xx}y_\ell^2 + k_{yy}x_\ell^2 - 2k_{xy}x_\ell y_\ell) - k_1 (\phi\mu c_t)_\ell = 0, \quad \forall \ell = 1, m, \tag{IV.22}$$

donde m es el número de pozos de observación, y las incógnitas son $\phi\mu c_t$, k_{xx} , k_{yy} y k_{xy} .

El sistema de ecuaciones es no lineal y puede resolverse utilizando la técnica de Gauss presentada en el Capítulo II. Se inicia con valores supuestos de las incógnitas, iterando sucesivamente hasta obtener la solución con una tolerancia definida por el analista.

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n + \Delta x \tag{IV.23}$$

El vector $x^t = (k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, \phi\mu c_t)$ y el vector Δx , es la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{array}{cccc|c}
 \frac{\partial F_1}{\partial k_{xx}} & \frac{\partial F_1}{\partial k_{yy}} & \frac{\partial F_1}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial F_1}{\partial(\phi\mu c_t)} & F_1 \\
 \frac{\partial F_2}{\partial k_{xx}} & \frac{\partial F_2}{\partial k_{yy}} & \frac{\partial F_2}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial F_2}{\partial(\phi\mu c_t)} & F_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \frac{\partial F_{m+1}}{\partial k_{xx}} & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial k_{yy}} & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial k_{xy}} & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial(\phi\mu c_t)} & F_{m+1}
 \end{array}
 \Delta \begin{array}{c} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \\ (\phi\mu c_t) \end{array} = - \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{m+1} \end{array} \tag{IV.24}$$

La expresión matricial de la ecuación anterior es:

$$\bar{J} \Delta \bar{x} = -\bar{F}. \quad \text{IV.25}$$

Se observa que sólo en el caso cuando $m = 3$, se tiene un sistema cuadrado de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Con la finalidad de obtener sistemas cuadrados, cuando $m > 3$, se procede a premultiplicar la ecuación (IV.25) por \bar{J}^t .

$$\bar{J}^t \bar{J} \Delta \bar{x} = -\bar{J}^t \bar{F} \quad \text{IV.26}$$

De esta forma la solución de la ecuación anterior, puede efectuarse eficientemente utilizando eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

El procedimiento anterior se programó en el sistema **SAINT** y se comprobó su funcionamiento con datos sintéticos y los publicados por Ramey³³. A continuación se enlistan los pasos que debe seguir el analista para determinar las características de un yacimiento idealmente anisotrópico, empleando el sistema **SAINT**.

- 1) Efectuar el análisis convencional para cada pozo observador, utilizando el modelo de yacimiento homogéneo isotrópico.
- 2) Si los valores de permeabilidad calculados son muy parecidos para la mayoría de los pozos, se puede concluir que la aplicación del modelo teórico de yacimiento idealmente anisotrópico es válida para el yacimiento en estudio.
- 3) Alimentar, con los resultados de k y $\phi\mu c_t$ estimados en el punto 1, así como las coordenadas de posición de los pozos, en la tabla de datos del módulo de anisotropía de **SAINT**. Seleccionar los pozos que se

usarán para caracterizar al yacimiento, los cuales deben ser al menos tres. Esta flexibilidad es útil ya que en algunas ocasiones los datos de presión de algunas pruebas no son representativos del comportamiento del yacimiento.

- 4) Seleccionar valores para el vector inicial de incógnitas y ejecutar la regresión.
- 5) Revisar la tabla de resultados poniendo especial interés en el error de ajuste. En caso de no ser satisfactorio volver al paso 4 o 3 según sea el caso.

En la medida que los resultados de caracterización de un yacimiento consideren más pozos de observación, es posible concluir que se obtiene un mayor grado de confianza en la interpretación. Debido a la premisa anterior es posible concluir que la metodología propuesta en este trabajo, mejora la técnica publicada por Ramey. Sin embargo, el papel del analista es decisivo para lograr mejores interpretaciones con base en la calidad de la información registrada en campo, esto es, el incluir más pozos en el análisis no necesariamente reflejará una mejor interpretación si los datos son erróneos.

IV.5 Extensión de la técnica de El-Khatib para flujo esférico y lineal

Flujo esférico: Siguiendo un procedimiento similar al planteado por El-Khatib, y revisado en el Capítulo II, primeramente se estima la derivada de la caída de presión respecto al tiempo considerando la solución de punto fuente, expresión (II.12):

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta kt}{\phi \mu c_i r^2}}} \right) \right\} = \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\phi \mu c_i r^2}{\sqrt{4\beta kt}} e^{-u^2} du \right\}. \quad \text{IV.27}$$

a continuación se aplica la regla de Leibnitz, ecuación (A.4), para derivar bajo el signo de integral, obteniendo:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\alpha q B \mu}{2\sqrt{\pi k r}} \sqrt{\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t^3}} e^{-\left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t}\right)} \quad \text{IV.28}$$

Con la finalidad de obtener una línea recta al graficar el grupo derivada contra el recíproco del tiempo, multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $\sqrt{t^3}$:

$$\sqrt{t^3} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\alpha q B \mu}{2\sqrt{\pi k r}} \sqrt{\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k}} e^{-\left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t}\right)} \quad \text{IV.29}$$

Multiplicando ambos miembros por -1 y tomando logaritmos se obtiene:

$$\text{Ln} \left| \sqrt{t^3} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \right| = \text{Ln} \left(\frac{\alpha q B \mu}{2\sqrt{\pi k}} \sqrt{\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k}} \right) - \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t} \quad \text{IV.30}$$

A partir del análisis de ésta expresión, se deduce que al graficar el $\text{Ln} \left| \sqrt{t^3} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \right|$ contra $1/t$, para una prueba con flujo esférico, se obtiene una línea recta con pendiente "m", igual a $\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k}$ y ordenada al origen "b", igual al primer término del lado derecho de la expresión (IV.30), esto es, se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas. Considerando la graficación en papel semilogarítmico base 10:

$$m = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4 \text{Ln}(10) \beta k} ; \quad \text{IV.31}$$

$$10^b = \left(\frac{\alpha q B \mu}{2\sqrt{\pi k}} \sqrt{\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k}} \right) ; \quad \text{IV.32}$$

despejando la permeabilidad de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, tenemos:

$$10^b = \frac{\alpha q B \mu}{2} \sqrt{\frac{\phi \mu c_t}{4\pi\beta \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta \text{Ln}(10)m}\right)^3}} = \frac{\alpha q B \mu}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{\phi \mu c_t}{4\beta}\right)^2 \left(\frac{r^2}{\text{Ln}(10)m}\right)^3}} = \frac{2\beta\alpha q B \mu}{\phi \mu c_t} \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{r^2}{\text{Ln}(10)m}\right)^3}}; \quad \text{IV.33}$$

despejando el término $\phi \mu c_t$:

$$\phi \mu c_t = \frac{2\alpha\beta q B \mu}{10^b} \sqrt{\frac{(\text{Ln}(10)m)^3}{\pi r^6}}. \quad \text{IV.34}$$

Finalmente sustituyendo en (IV.31), se obtiene la permeabilidad:

$$k = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta \text{Ln}(10)m} \quad \text{IV.35}$$

Flujo lineal: La derivada de la presión respecto al tiempo de la ecuación (II.15), que representa el comportamiento del flujo de fluidos en un medio poroso bajo una geometría de flujo lineal, se expresa como:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 2\pi\alpha \frac{q B \mu}{k b h} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} - x \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{x^2}}} \right) \right] \quad \text{IV.36}$$

si $Q^* = 2\pi\alpha \frac{q B \mu}{k b h}$, entonces:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = Q^* \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \right) - x \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{x^2}}} \right) \right] \quad \text{IV.37}$$

considerando, el resultado obtenido para flujo esférico, en el segundo miembro del lado derecho de la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = Q^* \left[-\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \frac{x^2}{4\beta\eta t^2} + \sqrt{\frac{\beta\eta}{\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} + x\sqrt{\frac{x^2}{4\pi\beta\eta t^3}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \right]; \quad \text{IV.38}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= Q^* e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \left[-x\sqrt{\frac{x^2}{4\pi\beta\eta t^3}} + \sqrt{\frac{\beta\eta}{\pi t}} + x\sqrt{\frac{x^2}{4\pi\beta\eta t^3}} \right] \\ &= Q^* e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \left[\sqrt{\frac{\beta\eta}{\pi t}} \right]; \end{aligned} \quad \text{IV.39}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por \sqrt{t} , se tiene:

$$\sqrt{t} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 2\pi\alpha \frac{qB\mu}{kbh} \sqrt{\frac{\beta\eta}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} \quad \text{IV.40}$$

Tomando logaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\text{Ln} \left| \sqrt{t} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \right| = \text{Ln} \left(2\pi\alpha \frac{qB\mu}{kbh} \sqrt{\frac{\beta\eta}{\pi}} \right) - \frac{x^2}{4\beta\eta t}. \quad \text{IV.41}$$

De la expresión (IV.41), se observa que al graficar $\text{Ln} \left| \sqrt{t} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \right|$ contra $1/t$, se obtiene una recta cuya pendiente y ordenada al origen pueden ser usadas para calcular la permeabilidad y porosidad de la formación productora.

En este caso tenemos:

$$m = \frac{\phi\mu c_t x^2}{4\text{Ln}(10)\beta k}; \quad \text{IV.42}$$

$$10^b = \left(\frac{\alpha q B \mu}{kbh} \sqrt{\frac{4\pi\beta k}{\phi\mu c_t}} \right); \quad \text{IV.43}$$

despejando la permeabilidad de (IV.42) y sustituyendo en (IV.43), tenemos:

$$10^b = \frac{\alpha q B \mu}{bh} \sqrt{\frac{4\pi\beta}{\phi \mu c_t \left(\frac{\phi \mu c_t x^2}{4\beta \text{Ln}(10)m} \right)}} = \frac{\alpha q B \mu}{bh} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\phi \mu c_t x}{4\beta} \right)^2 \left(\frac{1}{\text{Ln}(10)m} \right)}} = \frac{4\beta \alpha q B \mu}{\phi \mu c_t x bh} \sqrt{\pi \text{Ln}(10)m} \quad \text{IV.44}$$

despejando el término $\phi \mu c_t$:

$$\phi \mu c_t = \frac{4\alpha\beta q B \mu}{x b h 10^b} \sqrt{\pi \text{Ln}(10)m} \quad \text{IV.45}$$

finalmente sustituyendo en (IV.42), se obtiene la permeabilidad:

$$k = \frac{\phi \mu c_t x^2}{4\beta \text{Ln}(10)m} \quad \text{IV.46}$$

Es importante mencionar que las ecuaciones desarrolladas para flujo esférico y lineal fueron probadas satisfactoriamente mediante casos sintéticos, generados numéricamente y con datos reportados en la literatura técnica. **SAINT**, considera en su programación estas nuevas ecuaciones de interpretación, que permiten realizar eficientemente el análisis de consistencia que se explica en el inciso siguiente.

IV.6 Procedimiento General de Análisis

En esta parte del trabajo, se presentan algunas reglas cuya aplicación coadyuva a una interpretación adecuada de las pruebas de pozos múltiples. También se plantea un procedimiento general de análisis que facilita el trabajo y asegura la calidad de los resultados de la interpretación.

El análisis de pruebas de interferencia no incluye solamente a la prueba, también es importante considerar la revisión de las historias de perforación, terminación y reparación de los pozos, los registros geofísicos disponibles, los resultados petrofísicos y PVT, así como el sistema integral e historia de producción. También, merece especial

atención por su influencia crucial en el diagnóstico, el análisis de los estudios de geología de exploración y explotación, especialmente la definición del tipo de depósito, diagénesis y los minerales que constituyen la formación. Un apoyo adicional de gran valor lo constituye el estudio de pruebas de interferencia realizadas en el campo y en general, todas las pruebas transitorias disponibles.

En la medida en que se consideren todos los factores expresados en el párrafo anterior se asegura que la interpretación sea consistente; en caso contrario, se elevan fuertemente las posibilidades de obtener resultados erróneos en el análisis.

Un buen ajuste del modelo teórico a los datos de campo no necesariamente significa que exista una interpretación única. Es importante validar los resultados con los conocimientos de los ingenieros en las áreas de yacimientos, geología, registros geofísicos, producción, terminación y reparación de pozos; En muchos casos los ingenieros puede realizar comentarios útiles con relación a eventos y observaciones, que no fueron documentados en los reportes diarios.

Es importante enfatizar que el analista debe usar la mayor cantidad de técnicas disponibles para realizar un estudio a datos de campo, ya que el examen simultáneo de la información en diferentes sistemas coordinados y métodos de análisis, permite incrementar extraordinariamente la confiabilidad en los resultados obtenidos.

Es muy importante que el análisis de las pruebas de presión sea realizado por un profesionalista con conocimientos teórico-prácticos suficientes, además de criterios bien establecidos en el área donde se localiza el pozo. No existen programas de cómputo infalibles que analicen automáticamente los registros de presión.

Generalmente se piensa que si se utiliza una sonda de presión de alta resolución los resultados de la prueba son muy confiables; este mito es falso. Existen varios parámetros involucrados en el análisis, tales como el gasto, compresibilidad del sistema roca-fluidos, viscosidad, espesor, radio del pozo, etcétera, que afectan

substantialmente los resultados. Por tanto, el tener una sonda de alta resolución no es condición suficiente para obtener buenos resultados si no se realizan con la misma precisión las mediciones del gasto y de todos los demás datos. En conclusión, todos los datos en el análisis deben ser considerados con la misma importancia.

Las sondas de presión no miden este parámetro directamente; éstas registran frecuencias de oscilación expresadas en Hz. En la fábrica se realizan pruebas de calibración de respuesta en bancos de prueba, obteniendo tablas de frecuencia contra presión para diferentes temperaturas. Con estas tablas se obtienen polinomios de ajuste representativos de la herramienta. La respuesta de presión medida en campo se calcula interpolando entre los polinomios de ajuste, lo cual introduce un error aleatorio a la señal. En la mayoría de las pruebas este hecho no significa ningún problema, pero para las pruebas de pozos múltiples en donde se tienen variaciones máximas de solamente algunas unidades de lb/pg^2 durante toda la prueba, esto puede resultar de gran importancia para el análisis.

Los modelos teóricos de flujo de fluidos en medios porosos, representan con buena aproximación a la realidad física, pero no son exactos. Uno de los objetivos de las pruebas de presión es obtener información útil para alimentar a los simuladores de yacimientos, y es importante tomar en cuenta que algunos de estos datos se manejan como parámetros de variación para el ajuste de la historia del yacimiento. Por tal razón, es muy recomendable asignar a cada prueba un factor que represente el grado de confiabilidad del análisis, con base en la calidad de la información utilizada y la bondad de ajuste lograda con el modelo teórico.

El empleo del mejor modelo teórico disponible para un caso particular, debe ser una preocupación fundamental del analista. Si el programa de cómputo que usa no lo tiene, deberá realizarse un análisis manual del registro.

A continuación se presenta un procedimiento general de análisis que puede ser de gran utilidad, pero que de ninguna forma tiene el objetivo de reemplazar el criterio del analista.

- Mediciones de campo: Con relación al registro de tiempo contra presión, debe permitirse la estabilización de la señal antes de iniciar la prueba y realizar las correcciones necesarias debidas a la posición de la sonda dentro del pozo, con la mayor exactitud posible. Asimismo, verificar que el gasto del pozo activo se mantenga lo más constante posible y registrar sus variaciones con el objeto de considerar estos cambios en el análisis.
- Filtrado de información: Eliminar, en la medida de lo posible, efectos no considerados en el modelo teórico. Esto puede realizarse utilizando filtros de suavizamiento a la señal para desuperponer efectos aleatorios, y o técnicas especializadas para eliminar efectos de marea, tendencias de presión, etcétera.
- Recopilación y validación: Recopilar y validar la información adicional que se requiere para el análisis, porosidad, radio del pozo, factores de volumen, compresibilidades, etcétera. Sólo en caso necesario se recomienda utilizar correlaciones. En caso de desconocer el espesor y la compresibilidad total, se acostumbra reportar los resultados como kh y $\phi c_t h$; por lo tanto, para fines de análisis estos datos se consideran como unitarios.
- Identificación de la geometría de flujo: En pruebas de un sólo pozo, existen reglas prácticas para identificar geometrías de flujo. Si al graficar en papel doblelogarítmico la función derivada contra tiempo, $t\Delta p'$ vs. Δt , se obtiene un ajuste a una recta en un período específico, es posible diagnosticar la geometría de flujo predominante: si la recta tiene pendiente igual a 0.5 se concluye que el período está dominado por flujo lineal, si es -0.5 por flujo esférico, y si es horizontal, por flujo radial.

En las mediciones de pozos de observación, no es posible estimar la geometría tan fácilmente, como se considera en el párrafo anterior; en estos casos se hace necesario realizar ajustes con las curvas tipo correspondientes. Esta situación se presenta debido a que sólo en las pruebas en un pozo es posible simplificar las ecuaciones de interpretación. Sin embargo las reglas mencionadas pueden aplicarse al pozo activo y, a partir de la interpretación respectiva, obtener una generalización a la geometría de flujo dentro del yacimiento que sirva de apoyo al análisis en los pozos de observación. Para los casos de pruebas afectadas con tendencias lineales de presión, se deberán utilizar las curvas tipo que contienen al grupo N, propuestas en este trabajo.

- Análisis de consistencia: Una vez realizado el ajuste con la curva tipo idónea y apoyados en la información geológica, se define el tipo de geometría de flujo. Posteriormente se procede a realizar un análisis de consistencia con técnicas de tipo semilogarítmicas. Para flujo radial, se tiene que para tiempos largos la solución de línea fuente se aproxima a una recta en papel semilogarítmico, hecho que no sucede para flujo esférico y lineal. Sin embargo, es importante recalcar que la técnica de El-khatib para flujo radial, y la extensión presentada en este trabajo para, flujo esférico y lineal permiten realizar el análisis de consistencia.
- Regresión no-lineal: Los resultados obtenidos durante el proceso mencionado en el párrafo anterior sirven de vector inicial al proceso de regresión no-lineal, que continúa el procedimiento de análisis propuesto.
- Bondad de ajuste: Revisar la bondad de ajuste y aceptar los resultados sólo en el caso en que la variación no explicada, no exceda más de 20%. En caso contrario revisar la información de entrada y/o cambiar el modelo teórico.
- Presión Inicial: Estimar la presión inicial para la prueba con base en el procedimiento descrito anteriormente en el presente capítulo.

- Intervalos de confianza: Estimar los intervalos de confianza para cada uno de los parámetros estimados, seleccionando previamente el nivel de confianza.

- Consistencia del Análisis: Finalmente se procede a revisar la consistencia de los resultados con base en los estudios de geología de exploración y producción así como con los datos e historia de producción del campo y los pozos. Como se mencionó con anterioridad es importante considerar en este proceso la historia de perforación, terminación y reparación de los pozos involucrados.

Cuando se realiza el análisis de pruebas en un yacimiento idealmente anisotrópico, es importante considerar que los valores de permeabilidad obtenidos con cada registro deben reportar valores muy semejantes. Sólo en este caso será posible continuar el análisis que se describió en la página 104.

CAPITULO V

SISTEMA DE ANÁLISIS PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA, SAINT

V.1 Descripción

La motivación para el desarrollo del sistema "**SAINT**" (**S**istema de **A**nálisis de pruebas de **I**nterferencia), surgió de la necesidad de proporcionar al analista una herramienta de fácil uso y de aplicación inmediata para el diseño y análisis de pruebas de interferencia y pulsos; generalmente los cálculos son complejos y numerosos, por lo cual el uso de la computadora es indispensable.

SAINT, utiliza las técnicas de superposición en espacio y tiempo que permiten la interpretación con cualquier número de pozos activos y sus historias de producción y/o inyección respectivas, considerando diferentes modelos de flujo en el yacimiento, tales como los del tipo lineal, radial y esférico. Se incluyen las técnicas convencionales de análisis presentadas en la literatura, así como las de más reciente publicación.

SAINT se desarrolló en Visual Basic®, por lo cual sus interfases de entrada y salida, en ambiente Windows®, son bastante amigables. La filosofía de diseño consideró la posibilidad de observar en una sola pantalla de presentación, la interpretación de varias técnicas al mismo tiempo. También se han incluido varios simuladores analíticos de yacimiento que permiten aplicar una regresión sobre los datos de campo.

Con **SAINT** es posible considerar los efectos, de almacenamiento y daño en el pozo activo, sobre los datos del registro de interferencia, para el caso de yacimientos homogéneos.

Los ajustes con curvas tipo pueden realizarse en forma manual y la información puede manipularse fácilmente para el análisis, así como para su presentación e impresión en forma tabular y gráfica.

V.2 Requerimientos

SAINT está diseñado para usarse en computadoras personales compatibles con IBM y requiere para su funcionamiento óptimo de un coprocesador matemático tipo Pentium, disco duro con capacidad disponible mínima de 5 mB, monitor de color VGA, memoria RAM de 8 mB mínimo y un "mouse"; con relación al software se necesita la instalación del sistema Windows 95 o posterior. La disponibilidad de una impresora tipo Laser es opcional, pero de gran utilidad para conformar los reportes de análisis.

V.3 Características principales

SAINT, es una herramienta que permite el análisis, diseño y supervisión de pruebas de pozos múltiples, esto es pruebas de interferencia y pulsos. Contiene los métodos convencionales de análisis incluyendo los más recientemente publicados, así como las técnicas desarrolladas por el autor y presentadas en este trabajo.

Con el sistema **SAINT** es posible analizar pruebas de interferencia y pulsos en pozos pertenecientes a yacimientos de aceite; se consideran cinco simuladores analíticos: Yacimiento homogéneo infinito, con flujo esférico, lineal y radial, yacimiento homogéneo infinito, con flujo radial y efectos de almacenamiento y daño en el pozo activo y/o observador y yacimiento infinito naturalmente fracturado con flujo radial.

Permite la aplicación manual de la técnica de curvas tipo para los modelos mencionados en el párrafo anterior y tiene opciones para analizar los datos con las técnicas semilogarítmicas convencionales, la técnica propuesta por Khatib, el caso de yacimientos idealmente anisotrópicos infinitos con flujo radial, así como el uso del

yacimientos idealmente anisotrópicos infinitos con flujo radial, así como el uso del grupo N para pruebas afectadas por tendencias lineales de presión, y la estimación de la presión al inicio de la prueba.

Contiene la programación de la técnica de regresión no lineal de Gauss Marquard con la posibilidad de agregar restricciones en la sección de búsqueda para los diferentes parámetros incógnita por parte del usuario. Estas restricciones incluyen la selección de variables a estimar así como los rangos de variación permitidos durante el proceso iterativo de solución.

El módulo de graficación de **SAINT**, permite una revisión eficiente del registro de presión de fondo, ya que es posible tener en pantalla gráficas de tipo cartesianas, semilogarítmicas en el eje de las ordenadas o abscisas así como las doble logarítmicas, con la posibilidad de seleccionar exponentes para el vector de tiempo y trazo de pendientes con sus cálculos automáticos correspondientes. La visualización puede hacerse con una gráfica a la vez o todas al mismo tiempo, lo cual permite identificar rasgos característicos del tipo de flujo o condiciones de frontera presentes en la prueba.

SAINT, contiene un módulo de gran utilidad para la estimación de algunas características petrofísicas y PVT de los fluidos, por medio de las correlaciones empíricas más comunes que han sido publicadas en la literatura técnica.

Las ventanas de introducción de información se diseñaron con el objetivo principal de facilitar el trabajo del analista, por lo cual se programó la opción para permitir la entrada de datos en diferentes unidades de medida. En el caso del registro tiempo contra presión existe la interfase para importarlo de paquetes tales como Excel de Microsoft Office, o archivos del tipo ASCII, muy comunes en las unidades de medición en campo.

Una característica importante de resaltar en **SAINT** es la posibilidad de visualizar en una misma pantalla los resultados de varias técnicas de análisis, a lo cual

representa una ventaja importante para el analista; al final del proceso de análisis existe la posibilidad de estimar las caídas de presión obtenidas con simuladores analíticos, que alimentados con las características estimadas permiten visualizar la calidad del ajuste con los datos medidos en campo. Se incluye la presentación de los estadísticos mencionados en el Capítulo III, que dan la posibilidad de revisar matemáticamente la bondad del ajuste.

La metodología de análisis para yacimientos idealmente anisotrópicos, constituye un módulo en **SAINT**, así como, el referente al análisis propuesto como una extensión de la técnica de El-Khatib para flujo esférico y lineal.

V.4 Descripción de los módulos principales

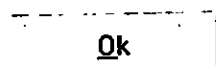
A continuación se explicarán brevemente algunas de las pantallas de captura y presentación de resultados más importantes. Se enfatiza que el objetivo planteado para esta sección es presentar al lector una idea general de la potencialidad del sistema **SAINT** así como su funcionamiento y no intenta ser un manual de usuario exhaustivo.

SAINT fue programado en Visual Basic versión 6.0, por lo cual hereda todas las características del ambiente Windows, tales como el manejo de ventanas, acceso a menús, barras de herramientas, tipo de letras, colores, manejadores de impresión, etcétera.

A través del sistema **SAINT** se presentan unos botones denominados de confirmación, los cuales tienen la misma función en todas las pantallas; a continuación se explica su funcionamiento:



Permite regresar el control a la pantalla anterior sin procesar los cambios



Permite continuar con la captura y/o procesar



Permite consultar el texto de ayuda referente a la pantalla activa.

La siguiente pantalla es la principal del sistema y está dividida en 4 partes fundamentales: La barra de menús, debajo de la barra de identificación del sistema la barra de herramientas por debajo de la barra de menús, el área de trabajo en la parte central y la barra de estado al fondo.



Fig. 5-1. PANTALLA PRINCIPAL DEL PROGRAMA SAINT, SISTEMA DE ANÁLISIS PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA.

La barra de menús contiene las opciones: Archivo, Datos, Análisis, Resultados, Anisotropía, Herramientas y Ayuda, las cuales serán revisadas posteriormente y cuya función principal es permitir al usuario el acceso a los diferentes módulos de información, análisis y diseño. La selección a estas funciones se puede lograr con el uso del mouse o con las teclas Alt y la letra subrayada; por ejemplo el menú Archivo se accesa con **Alt+A**; esta convención es válida para todos los submenús presentes en SAINT y es equivalente al usado en los programas comerciales que trabajan en ambiente Windows.

presentes en **SAINT** y es equivalente al usado en los programas comerciales que trabajan en ambiente Windows.

Las barras de herramientas contienen botones que corresponden a elementos del menú, proporcionando una interfaz gráfica que permite tener acceso a las funciones y comandos empleados con más frecuencia en esa aplicación. Observe que la barra de herramientas contiene un cuadro de diálogo; por ejemplo en la figura 5-1 contiene el letrero "SAINT vrs 5,1999", que tiene como función presentar las ayudas que muestran las características de uso de los botones, los cuales son sensitivos al movimiento del mouse.

La barra de estado, al fondo de figura 5-1, indica la fecha y hora actual, así como el nombre del archivo que se encuentra abierto.


A continuación se revisan las opciones de la barra de menús indicando los botones de la barra de herramientas que tengan correspondencia.

Menú Archivo:

Nuevo	
Abrir	Ctrl+A
Guardar	Ctrl+G
Guardar Como	
Imprimir	
Salir	Ctrl+S
1 D:\SAINT\POZOS\NOAMAN1.SAI	
2 D:\SAINT\POZOS\ABK4GN.SAI	
3 D:\SAINT\POZOS\RAMEY1-E.SAI	

Fig. 5-2. SUBMENÚ ARGHIVO, ÚTIL PARA ALMACENAR Y RECUPERAR INFORMACIÓN, IMPRIMIR DATOS Y RESULTADOS Y SALIR DEL SISTEMA.

Nuevo: Esta opción inicializa el sistema. En caso de que exista un archivo abierto se cuestionará al usuario para seleccionar la opción de guardar información y/o continuar.

El botón de acceso rápido, en la barra de herramientas es 

Abrir: Al seleccionar esta opción aparece la siguiente pantalla, donde se selecciona el archivo que se desea revisar, especificando la ruta donde se encuentra, esto es, unidad

de lectura, subdirectorio y archivo por abrir. Observe que en esta ventana, se tienen cajas de texto para la "Descripción de la prueba" así como la "fecha de la última modificación", esta información se despliega automáticamente a medida que selecciona los archivos; mediante esta opción es posible revisar en una forma rápida y eficiente el contenido de los archivos.

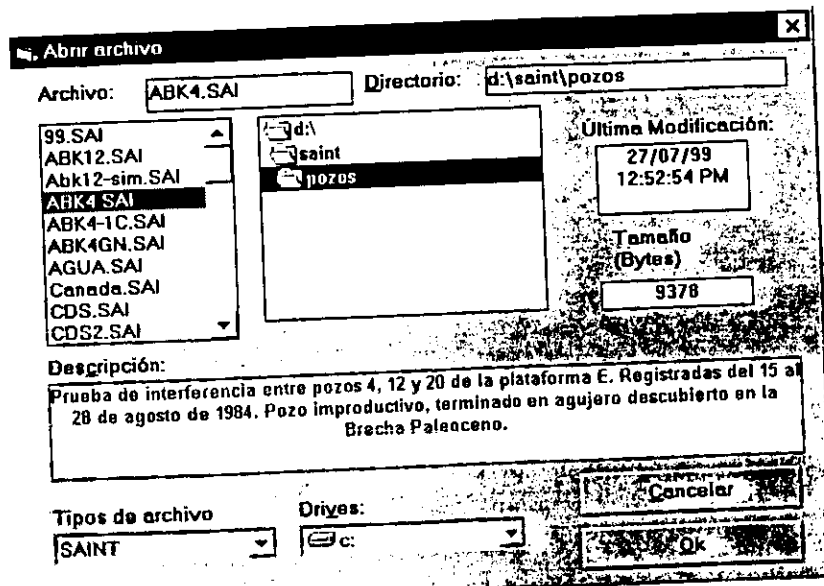




Fig. 5-3. PANTALLA PARA RECUPERAR INFORMACIÓN ALMACENADA EN ARCHIVOS.

El botón de acceso rápido, en la barra de herramientas es ; también se puede acceder esta opción sin abrir el menú Archivo, con las teclas **Ctrl+A**.

Guardar: Al seleccionar esta opción, en el caso de haber creado uno nuevo, se desplegará la misma pantalla que la opción Guardar Como; en caso contrario se procede a almacenar la información de la prueba así como los resultados obtenidos con las diferentes técnicas de análisis. El botón de acceso rápido es  y también se puede ejecutar, con las teclas **Ctrl+G**.

Guardar Como: Esta opción se utiliza cuando se desea guardar un archivo con otro nombre o para darle un nombre a un archivo nuevo. Al ejecutar esta opción se presenta la pantalla de la Fig. 5-4, donde es posible seleccionar la unidad, subdirectorio y el nombre del archivo que contendrá la información, si así lo decide el usuario puede

también elegir uno existente el cual se sobrescribirá . En este caso no existe un botón de acceso rápido.

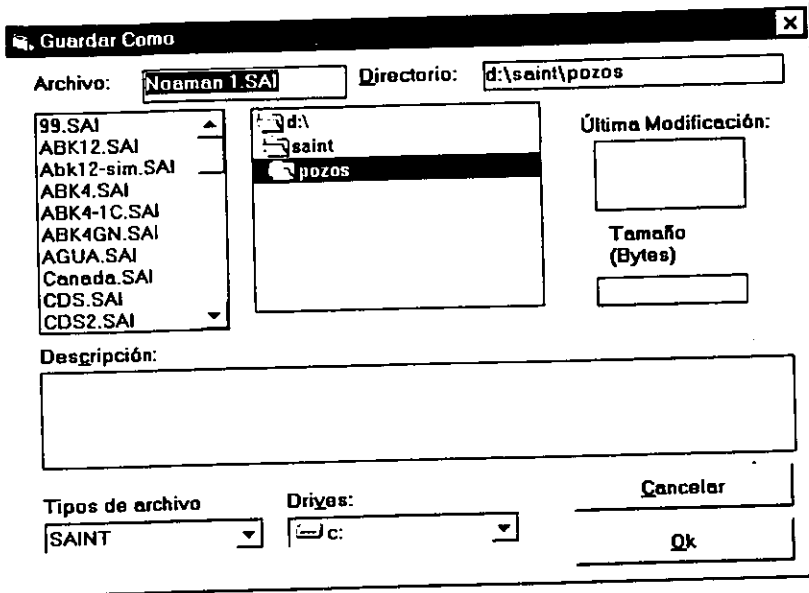



Fig. 5-4. PANTALLA PARA SELECCIONAR EL ARCHIVO DONDE SE GUARDA LA INFORMACIÓN DE LA PRUEBA Y SUS RESULTADOS.

Imprimir: Esta opción permite imprimir un reporte de la información del estudio en papel. El botón de acceso rápido es .

Salir: Permite cerrar el sistema SAINT. Si no ha modificado el archivo desde la última vez que fue guardado, la salida será directa. En caso contrario y no haber guardado el archivo con anterioridad, al ejecutar la opción se presentará la siguiente pantalla:

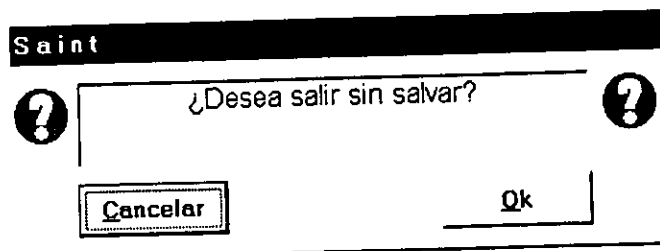



Fig. 5-5. CUADRO DE DIÁLOGO PARA LA SALIDA DEL SISTEMA.

Si elige Ok se cerrará el sistema sin almacenar la información y si presiona Cancelar regresará al sistema para guardar su información si lo desea. El botón de acceso rápido es , y la combinación de teclas para acceso directo **Ctrl+S**.

En la parte inferior del menú Archivo, se enlistan en forma dinámica los últimos archivos revisados; se tiene capacidad para almacenar los nombres de hasta diez archivos. El acceso a la información puede realizarse mediante dos procedimientos: acceder con el mouse el nombre correspondiente y pulsar el botón derecho, o utilizar las teclas de acceso directo que se constituyen con las teclas **Alt** + el número del archivo al que se quiere acceder.

Al iniciar **SAINT**, se abre automáticamente el archivo que se había accedido durante la última sesión.

La convención para seleccionar el nombre de archivos está limitada a la versión de Windows instalada en su computadora; sin embargo, se recomienda escoger nombres cortos y especificar en una forma clara, concisa y precisa las características de la prueba analizada, para facilitar el acceso en un futuro; en el menú Datos, presentado a continuación, se revisa la pantalla que permite incluir la información mencionada.

Los archivos del tipo **SAINT** tienen asignada la extensión **SAI**. Es importante evitar cambiar esta convención ya que cada vez que se abre un archivo con el sistema, éste identifica la extensión y el primer registro de información, el cual contiene un conjunto de caracteres clave; en caso de no confirmar estas dos características, se cancela la apertura y se envía un mensaje al usuario, del siguiente tipo:

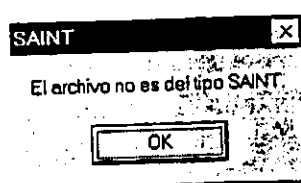


Fig. 5-6. CUADRO DE MENSAJE PARA LECTURA ERRÓNEA DE ARCHIVO

Con **SAINT**, también es posible guardar gráficas, que el analista considere de interés y que hayan sido modificadas con base a las presentadas por default por el sistema. A este tipo de archivos se les asigna la extensión **GRF**, y se accesan dentro del módulo de graficación que se explica más adelante.

Menú Datos:

Descripción general	Ctrl+F1
Propiedades roca-fluidos	Ctrl+F2
Registro tiempo vs presión	Ctrl+F3
Datos Adicionales	Ctrl+F5
Selección de Intervalo	Ctrl+F6

Fig. 5-7. SUBMENÚ DATOS, ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.

Descripción general: Al seleccionar esta opción se despliega la pantalla siguiente que permite revisar o introducir información general de la prueba. La información tecleada en la sección de comentarios se utiliza en el menú "abrir archivo", desplegada en el rubro descripción.

Fig. 5-8. SUBMENÚ "DESCRIPCIÓN GENERAL", ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.

El procedimiento para ejecutar esta opción con las teclas, es **Ctrl+F1** y el acceso en la barra de herramientas es con el ícono:

Propiedades roca-fluidos: Esta opción permite revisar e introducir información de las características del medio poroso, de los fluidos producidos así como la historia de producción del pozo activo. Observe que los datos se pueden introducir en diferentes sistemas de unidades y que se tiene la posibilidad de graficar la historia de producción o modificarla, con los botones que se encuentran al lado derecho de la ventana. En general, todos los íconos presentes en las pantallas de **SAINT**

son sensitivos al movimiento del mouse; esto es, al pasar a través de ellos se despliega ayuda referente a la función que desempeñan.

Información roca-fluidos y de historia de producción

Ct	15076.6	(lb/pg ³) ⁻¹
R	887.0	m
Bo	1.5	m ³ /m ³
h	1000.0	pie
μ	0.6	cp
ϕ	0.02	frac
p_i	3962.3	lb/pg ² abs
k	10.0	mD
b	1.0	pie
ω		
λ		

	Tiempo	Gasto
1	16.1667	0.0
2	38.0	23583.0
3	62.5	0.0
4	84.5	23583.0
5	126.1667	0.0
6	153.53	23583.0
7	176.0	0.0
8	200.0	23583.0
9		
10		

horas | bl/día

Información adicional

? Ayuda | Cancelar | OK


Fig. 5-9. SUBMENÚ "PROPIEDADES ROCA-FLUIDOS", ÚTIL PARA ALMACENAR Y REVISAR INFORMACIÓN.

Los valores de k , ϕ , ω y λ en esta pantalla, se utilizan en el diseño de pruebas; en caso de análisis, estos datos no son requeridos. Es importante mencionar que los combos que contienen las diferentes unidades pueden activarse pulsando los botones a la izquierda, y que al cambiar la selección automáticamente se modifica el valor del parámetro a la derecha. **SAINT** no requiere que los datos se transformen a un cierto tipo de unidad, ya que esto se hace internamente de acuerdo a las restricciones de las ecuaciones utilizadas.

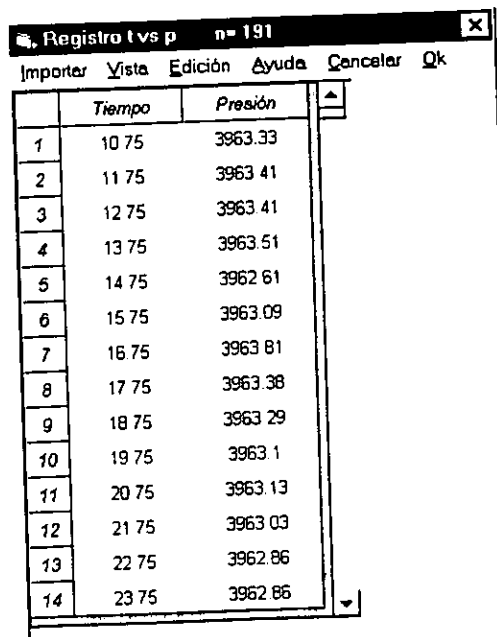
La convención utilizada para introducir la historia de producción, consiste en discretizarla bajo la consideración de que cada gasto corresponda con el tiempo al cual finalizó. Por ejemplo, suponga que un pozo fluyó por 30 horas con 500 brl y posteriormente se cerró por 40 horas y por último se abrió por 100 horas, con un gasto de 1000 brl.; la historia de producción tecleada en **SAINT** será:

t (hrs)	Q (bri)
30	500
70	0
170	1000

El botón de información adicional despliega la misma pantalla que el submenú "Datos Adicionales".

El acceso en la barra de herramientas se proporciona con el icono , y el acceso rápido con el teclado es **Ctrl+F2**.

Registro tiempo contra presión: Al pulsar esta opción se despliega la siguiente pantalla en la cual es posible introducir, revisar o modificar el registro tiempo vs. presión. Observe que se tiene una barra de menús que permite realizar las acciones comentadas.




	Tiempo	Presión
1	10.75	3963.33
2	11.75	3963.41
3	12.75	3963.41
4	13.75	3963.51
5	14.75	3962.61
6	15.75	3963.09
7	16.75	3963.81
8	17.75	3963.38
9	18.75	3963.29
10	19.75	3963.1
11	20.75	3963.13
12	21.75	3963.03
13	22.75	3962.86
14	23.75	3962.86

Fig. 5-10. SUBMENÚ "REGISTRO TIEMPO VS PRESIÓN", ÚTIL PARA INTRODUCIR Y REVISAR INFORMACIÓN.

El menú Importar, permite leer la información de un archivo de datos generado fuera de **SAINT**, como por ejemplo Excel o por un software de adquisición de datos en campo, esto es, archivos del tipo ASCII.

El menú Vista, permite visualizar en forma tabular la información de la caída de presión y/o la derivada de presión respecto al tiempo.

El menú Edición, es útil para cambiar las unidades de medida, tanto del vector tiempo como el de presión, realizar correcciones por posición de la sonda de medición de presión en el fondo del pozo y de tiempo de inicio, así como insertar y borrar datos.

El acceso a este submenú puede efectuarse también con el ícono  y con la combinación de teclas **Ctrl+F4**.

Datos Adicionales: En este caso la pantalla que se despliega es la siguiente:

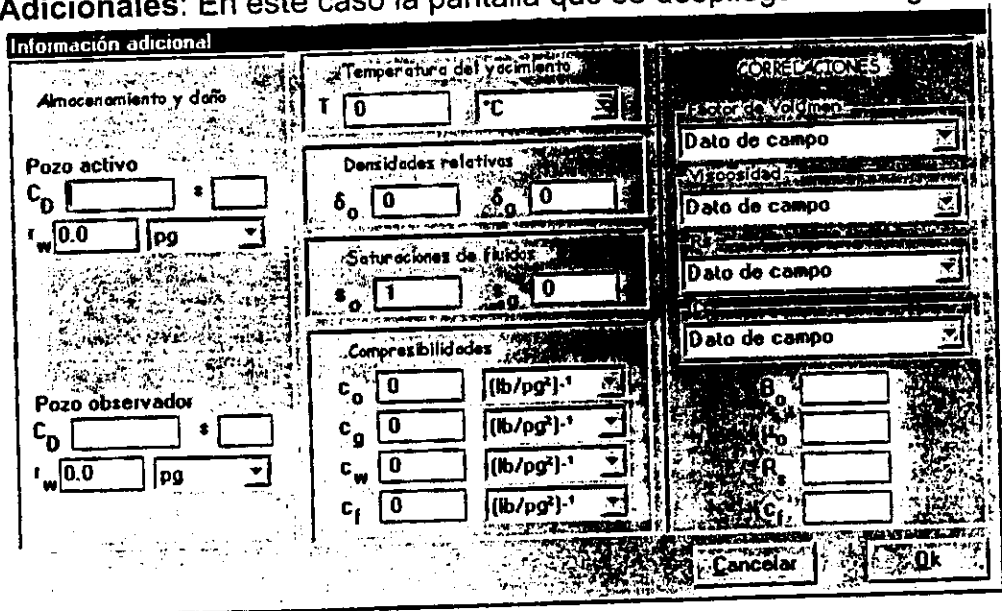




Fig. 5.11.- Submenú "Datos Adicionales", útil para almacenar y revisar información.

Aquí es posible introducir información de almacenamiento y daño en el pozo activo y/o observador para el caso en que se esté diseñando una prueba con estas características de frontera interna; en caso de análisis esta información no se requiere. Todos los demás datos se utilizan en las correlaciones PVT y petrofísicas, programadas en **SAINT**, que permiten la estimación de c_f , μ_o , B_o , C_o , C_g y C_w .

También es posible acceder a esta opción con el ícono , presente en la barra de herramientas y con la combinación de teclas **Ctrl+F5**.

Selección de Intervalo: En esta opción se despliega una pantalla con la gráfica cartesiana del registro completo, en la cual es posible seleccionar gráficamente un intervalo para el análisis. Esta situación es muy útil para analizar parcialmente información en el proceso de regresión no lineal, sin la necesidad de tener que borrar información del registro en forma permanente. La selección de intervalos puede realizarse, tantas veces como sea necesaria para un análisis específico.

El acceso a esta opción se puede realizar pulsando el ícono , presente en la barra de herramientas y con la combinación de teclas **Ctrl+F6**.

Menú Análisis:

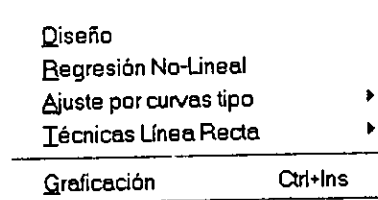


Fig. 5-12. SUBMENÚ ANÁLISIS, ÚTIL PARA DISEÑAR, ANALIZAR Y SUPERVISAR PRUEBAS DE POZOS MÚLTIPLES.

Diseño: Al seleccionar esta opción se presenta la siguiente pantalla en la cual se puede definir, el tipo de yacimiento, geometría de flujo, tendencia de presión, así como la introducción de datos para yacimientos naturalmente fracturados y efectos de frontera interna en el pozo activo y/o observador. El registro de presión se genera usando la información de la roca y fluidos introducida en el menú correspondiente, y se restringe a valores mayores a los dados por δp que es la precisión que se espera del registrador de fondo; los datos de tiempo se generan automáticamente de acuerdo a la opción seleccionada de datos por ciclo o por hora y el valor de δt .

Fig. 5-13. PANTALLA DE CAPTURA DE INFORMACIÓN PARA LA SIMULACIÓN DE PRUEBAS.

Es importante mencionar que la información de la tendencia de presión, así como la del coeficiente de almacenamiento y daño, en el pozo activo y observador, es opcional, y que los valores del coeficiente de almacenamiento fractura-matriz y el coeficiente de flujo interporoso son necesarios sólo para el caso de yacimientos naturalmente fracturados. Después de introducir la información y oprimir el botón **Ok**, se presenta una gráfica del comportamiento de la presión contra el tiempo estimada con el modelo analítico correspondiente; el registro tabulado puede visualizarse utilizando el menú **Datos**.

A partir de estas simulaciones es posible definir un programa adecuado de registro en campo que permita asegurar la obtención de resultados que cumplan los objetivos planteados, así como ahorrar recursos económicos y humanos. El diseño de la prueba usando **SAINT** considera la posibilidad de modificación del gasto de producción del pozo activo.

El acceso a esta opción en la barra de herramientas se obtiene pulsando el icono




Regresión No-Lineal: Esta opción permite ejecutar la técnica de Gauss-Marquardt con rangos de restricción para los diferentes modelos analíticos

programados y mencionados al inicio del presente capítulo. La pantalla siguiente se despliega antes de iniciar el proceso iterativo.

Fig. 5-14. SUBMENÚ REGRESIÓN NO-LINEAL, ÚTIL PARA INTRODUCIR INFORMACIÓN NECESARIA PARA LOS CÁLCULOS INVOLUCRADOS EN LA TÉCNICA DE GAUSS-MARQUARDT, ASÍ COMO LOS RANGOS DE RESTRICCIÓN.



En esta pantalla se introduce información referente al tipo de yacimiento, la geometría de flujo, el número máximo de iteraciones permitidas en el proceso, el vector de inicio ($k, \phi, \omega, \lambda, \eta_1, \eta_2, CD_{\text{activo}}, S_{\text{activo}}, CD_{\text{observador}}, S_{\text{observador}}$), el intervalo de tiempo a analizar y la selección de parámetros que deberán mantenerse fijos durante el proceso de optimización. El botón restricciones accesa a la pantalla siguiente que presenta rangos válidos de variación durante el proceso iterativo de solución; estos valores pueden cambiarse libremente por el analista. En caso de que el procedimiento estime algún parámetro fuera de rango, este se deja con el valor estimado en la última iteración antes de la violación de la restricción.

Para iniciar el proceso iterativo se debe pulsar el ícono , localizado arriba del botón restricciones.

Restricciones en datos

	mínimo	máximo
k	.01	10000
ϕ	.001	.4
ω	.0001	.5
λ	.0000000001	.1
η_1	-1	1
η_2	-.5	.5
CD _{est}	.01	10000000000
s _{est}	.5	100
CD _{obs}	.01	10000000000
s _{obs}	.01	100

Fig. 5-15. PANTALLA PARA SELECCIÓN DE RANGOS DE VARIACIÓN PERMITIDOS DURANTE LA REGRESIÓN NO-LINEAL.

Generalmente antes de iniciar, es muy útil usar el botón  que permite visualizar el ajuste de la predicción del comportamiento de la presión durante la prueba, obtenido empleando el vector inicial, comparado con los datos de campo; el botón  permite cambiar las escalas de los ejes para tener una mejor visualización de los datos de campo y los estimados por el modelo analítico. En la Fig. 5-16 se presenta el uso de esta opción útil.

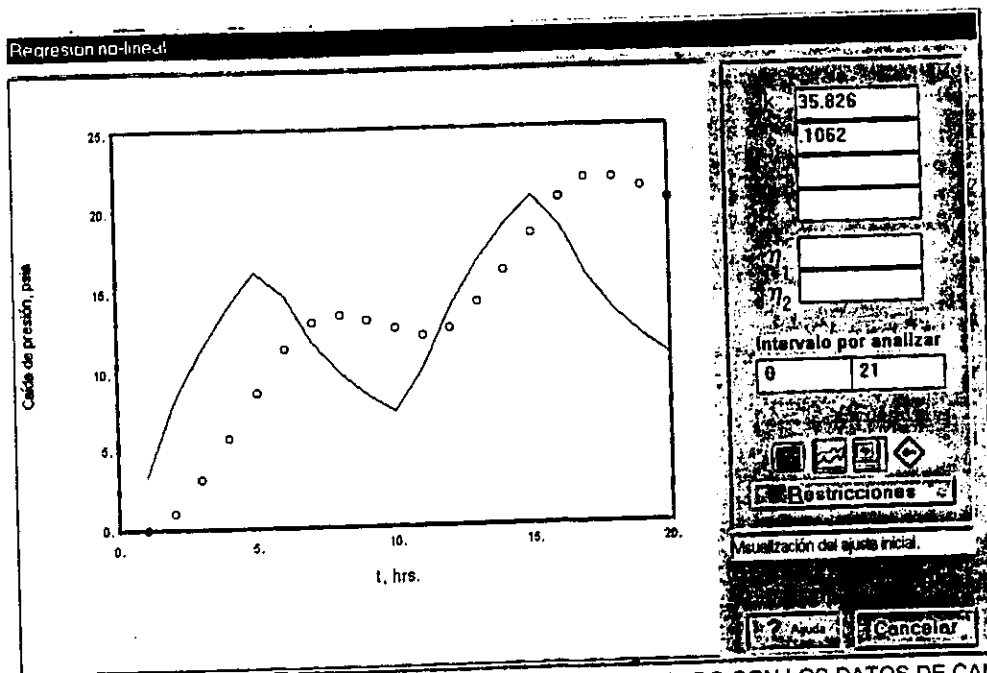


Fig. 5-16. OPCIÓN DE VISUALIZACIÓN DEL AJUSTE INICIAL COMPARADO CON LOS DATOS DE CAMPO.

Después de ejecutar el procedimiento de regresión se presenta una pantalla similar a la siguiente, donde se muestra en forma tabular el comportamiento del proceso iterativo. Dependiendo del caso a estudiar las columnas cambian ajustándose a las necesidades del cálculo de parámetros.

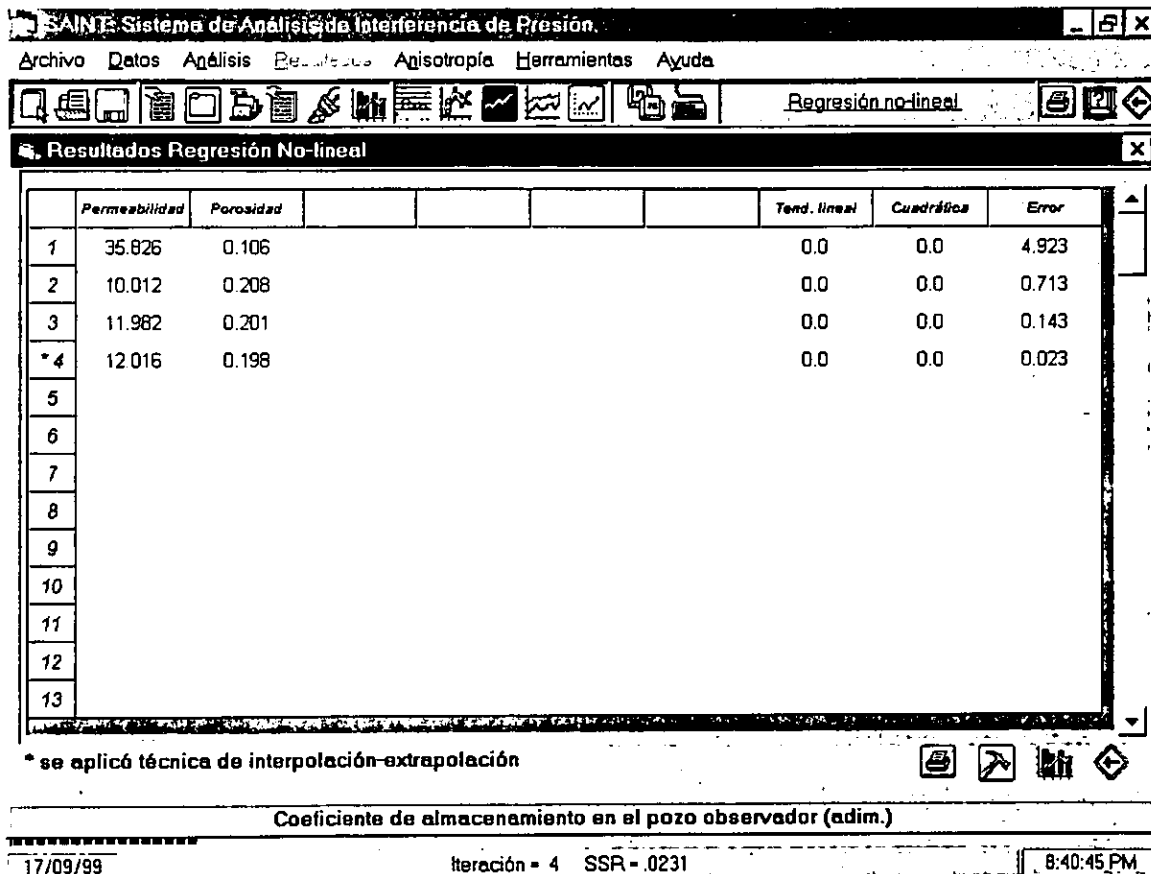


Fig. 5-17. RESULTADOS TABULARES DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN NO LINEAL.

Observe que al fondo de la tabla se presentan unos iconos que permiten, de izquierda a derecha, imprimir en papel los resultados, revisar las estadísticas del ajuste, visualizar el ajuste en forma gráfica y regresar a la pantalla principal de SAINT. La siguiente pantalla se visualiza al presionar el segundo ícono:

Estadísticas del ajuste	
Estadísticas del Error	
Error promedio (psia)	4.31124885159977E-03
Varianza (psia) ²	1.08058438872829E-04
Desviación estándar (psia)	1.04335247578577E-02
Estadísticas de la bondad de ajuste	
Coef. de correlación lineal	.9999907101176
Coef. de correlación general	1.00000776989492
Variación explicada (%)	99.9984460149793
Variación no explicada (%)	1.55398502070803E-03

Fig. 5-18. RESULTADOS DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL AJUSTE.

A continuación se presenta la comparación de las respuestas de presión calculada por medio del modelo empleado para representar las condiciones físicas existentes en la prueba que está siendo analizada, usando los valores de ajuste para los parámetros del yacimiento y la respuesta real obtenida en el campo; esto es, una revisión gráfica de la bondad del ajuste. Esta pantalla se visualiza al presionar el tercer ícono de la Figura 5-17.

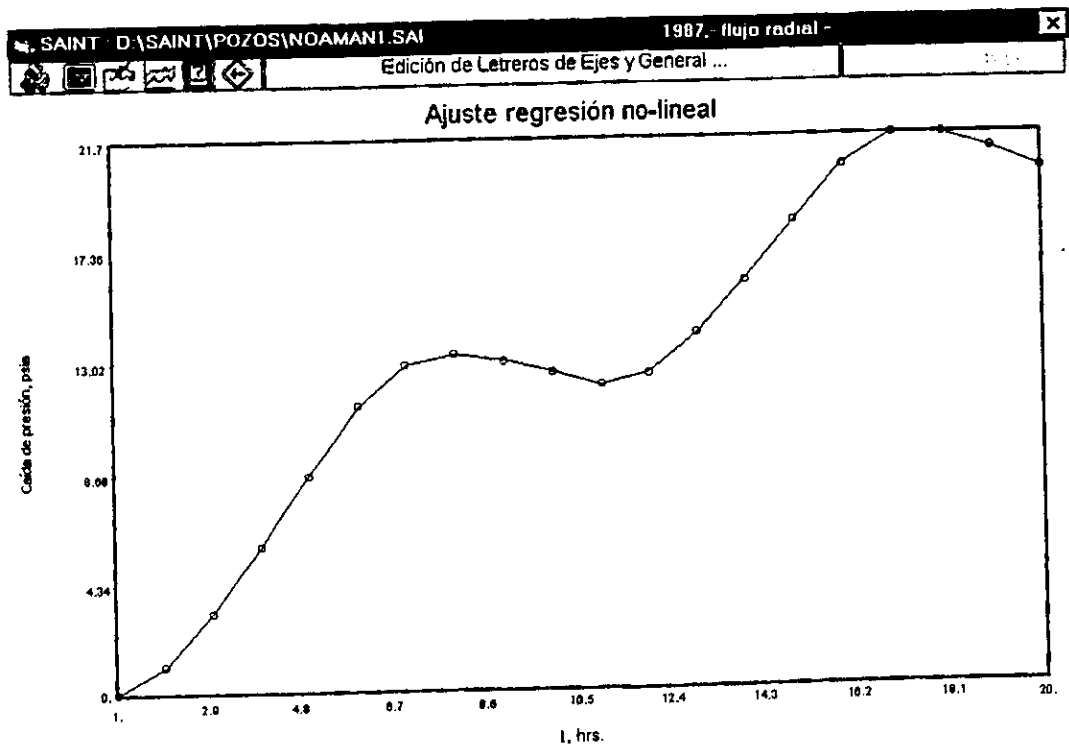



Fig. 5-19. GRÁFICA COMPARATIVA DE LOS DATOS MEDIDOS Y CALCULADOS POR EL SIMULADOR.

El acceso a la opción Regresión puede lograrse directamente pulsando el ícono , presente en la barra de herramientas.

Ajuste por curvas tipo:

Yac. Homog., flujo esférico, infinito	Ctrl+E
Yac. Homog., flujo lineal, infinito	Ctrl+L
Yac. Homog., flujo radial, infinito	Ctrl+R
Grupo N, Yac. Homog., esférico, infinito	
Grupo N, Yac. Homog., lineal, infinito	
Grupo N, Yac. Homog., radial infinito	Ctrl+N
Yac. Homog., flujo radial, infinito Cd _s	Ctrl+C
Yac. Fracturado, radial transitorio	Ctrl+F

Fig. 5-20. SUBMENÚ PARA REALIZAR AJUSTE MANUAL CON LA TÉCNICA DE CURVAS TIPO.

A partir de este submenú es posible efectuar un ajuste manual de curvas tipo con los diferentes modelos presentados. El Grupo N incluido en el listado, considera la nueva definición que involucra el promedio ponderado de la presión, que elimina en forma automática los efectos de tendencias de presión lineales en el yacimiento. En la figura siguiente, se presenta la pantalla que se presenta en el ajuste de los datos de campo para el caso de yacimiento homogéneo y flujo radial, sin efectos de frontera externa y/o internas.

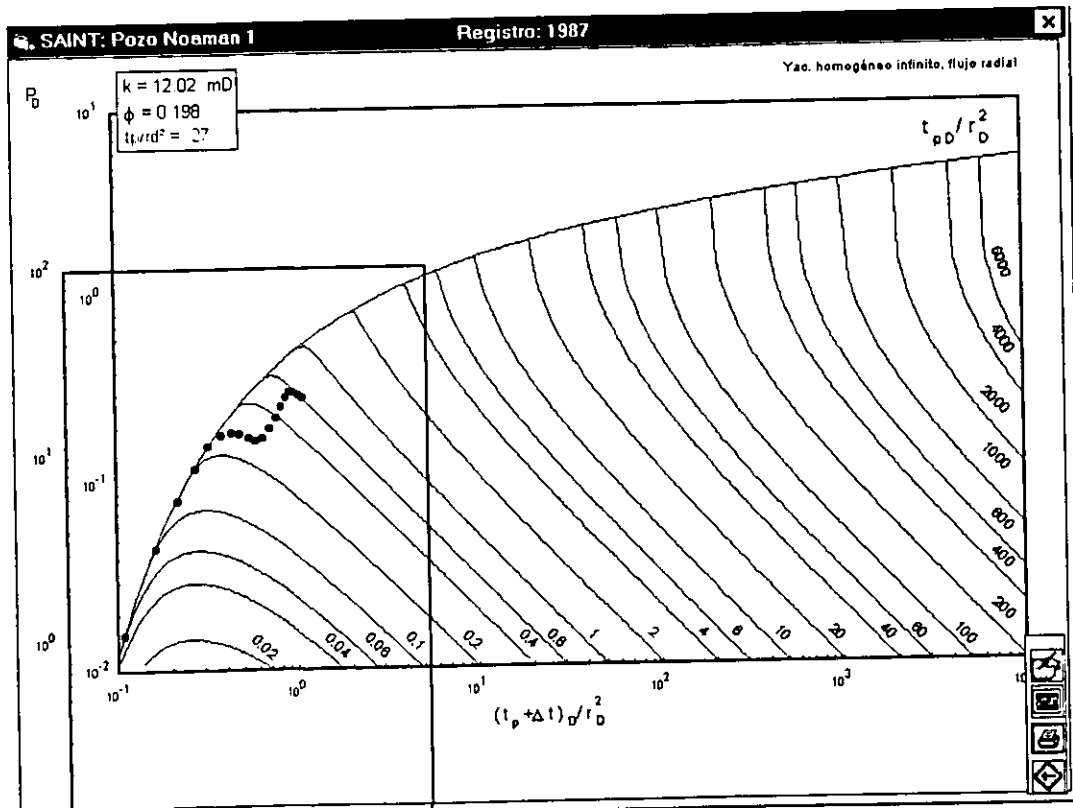




Fig. 5-21. AJUSTE CON CURVAS TIPO PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO Y FLUJO RADIAL.

Esta curva tipo se desarrolló para el caso de un pulso de presión, esto es una apertura y cierre del pozo activo. Se puede observar que los resultados del ajuste se presentan en el recuadro que aparece en la esquina superior izquierda. El ajuste manual se efectúa moviendo la curva de datos con el apoyo del "mouse" y/o las teclas de dirección hasta llegar a la mejor posición de semejanza, de acuerdo con el criterio del analista.

Con el uso de los íconos  y , presentes en esta pantalla, es posible activar la posibilidad de realizar un análisis alternativo que permite revisar la consistencia del análisis. El primer ícono permite el análisis semilogarítmico para el caso de flujo radial que presenta una recta a tiempos grandes; el segundo ícono presenta la técnica de Khatib que hace el uso de la derivada de presión. En la siguiente pantalla se presenta esta opción de consistencia o aseguramiento de resultados congruentes.

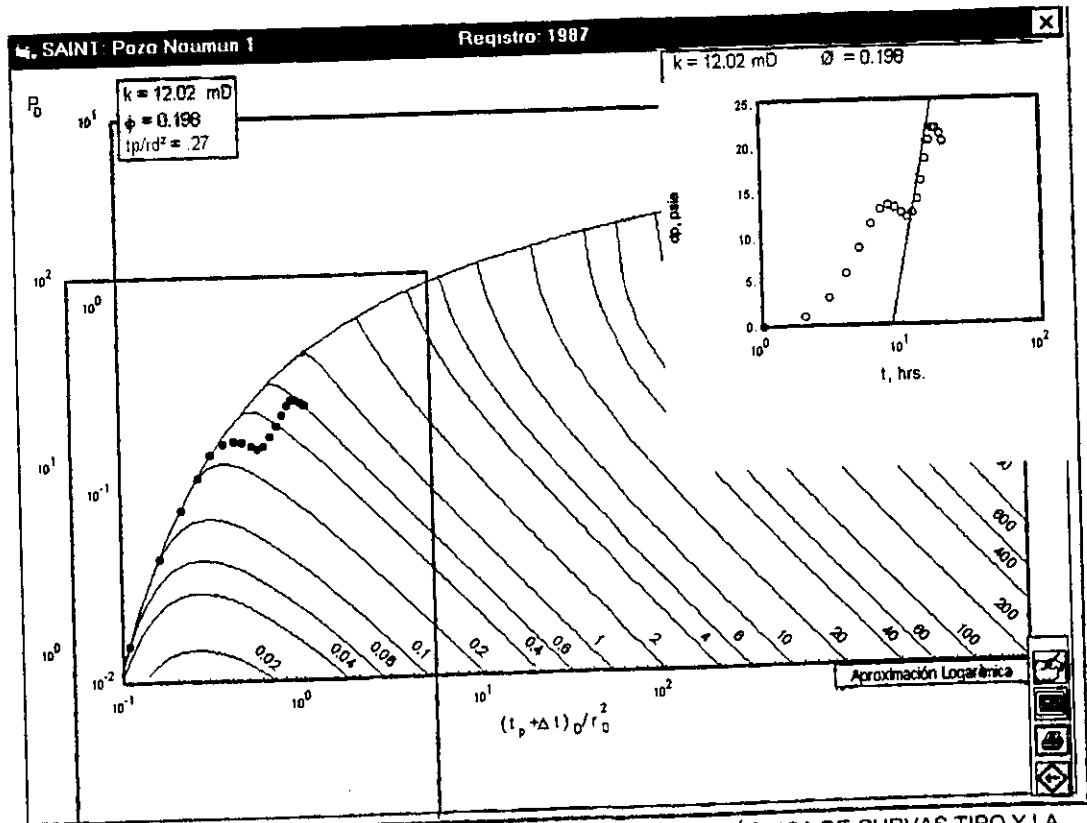


Fig. 5-22. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA DE RESULTADOS CON LA TÉCNICA DE CURVAS TIPO Y LA SEMILOGARÍTMICA.

Es importante mencionar que la recta en la gráfica semilogarítmica corresponde a los valores de ajuste de la curva tipo; esto es, cualquier movimiento de la curva de datos modifica automáticamente la pendiente y la ordenada al origen. Por otro lado si se utiliza la opción de trazo de recta en la gráfica semilogarítmica, también se presenta un movimiento automático en la posición de la curva de datos sobre la curva tipo, que representa el cambio necesario para obtener los mismos resultados en ambas técnicas. La consistencia puede realizarse con la técnica semilogarítmica y/o con la técnica de El-Khatib, a criterio del analista.

A continuación se presentan ejemplos de ajuste por curvas tipo, para los diferentes modelos programados en **SAINT**, a excepción de la curva de flujo radial, yacimiento homogéneo infinito, presentada en la figura 5-22.

- I. Yacimiento homogéneo infinito, flujo lineal
- II. Yacimiento homogéneo infinito, flujo esférico
- III. Yacimiento homogéneo infinito, flujo radial
con efectos de almacenamiento y daño
- IV. Yacimiento naturalmente fracturado
- V. Grupo N, flujo esférico
- VI. Grupo N, flujo lineal
- VII. Grupo N, flujo radial

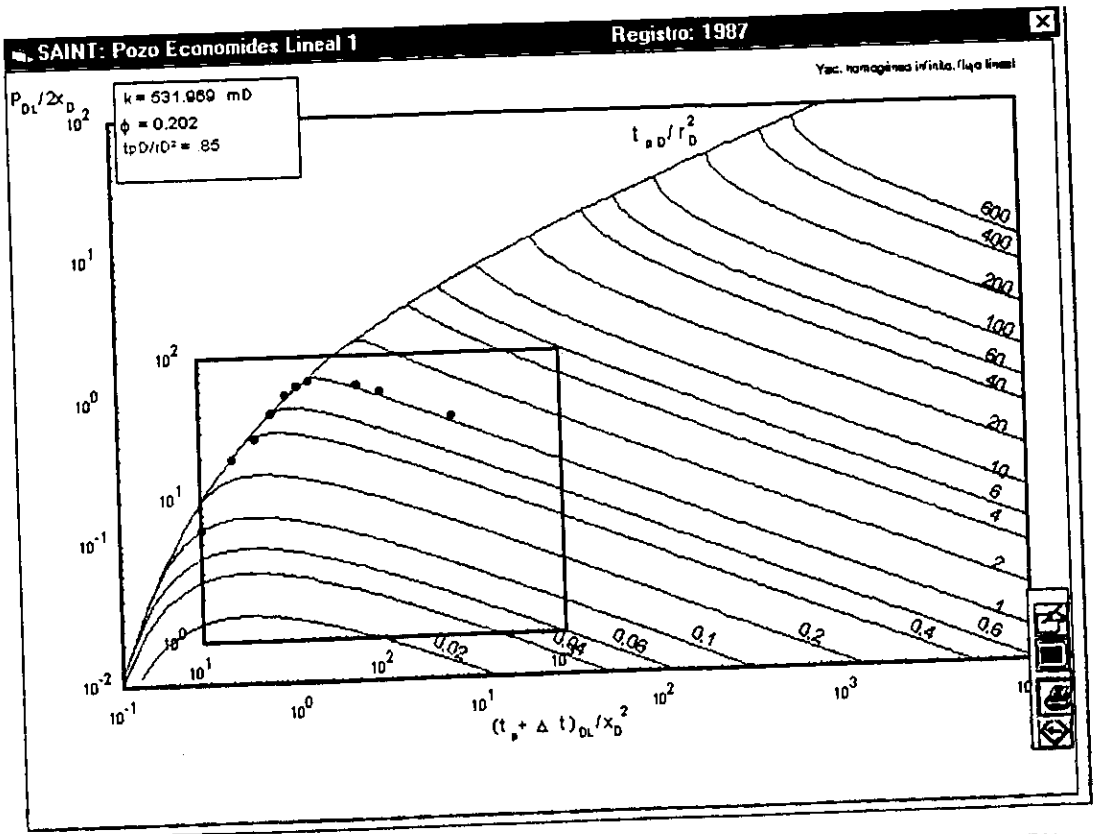


Fig. 5-23. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO LINEAL.

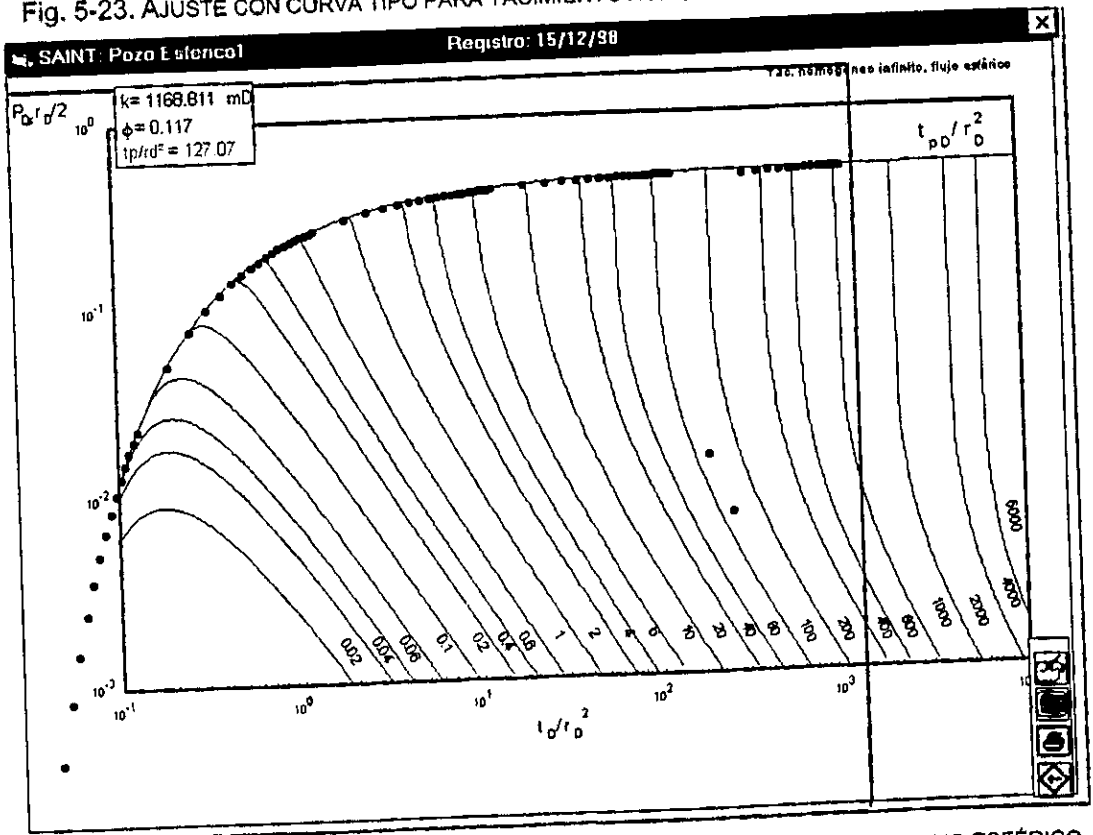


Fig. 5-24. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO ESFÉRICO.

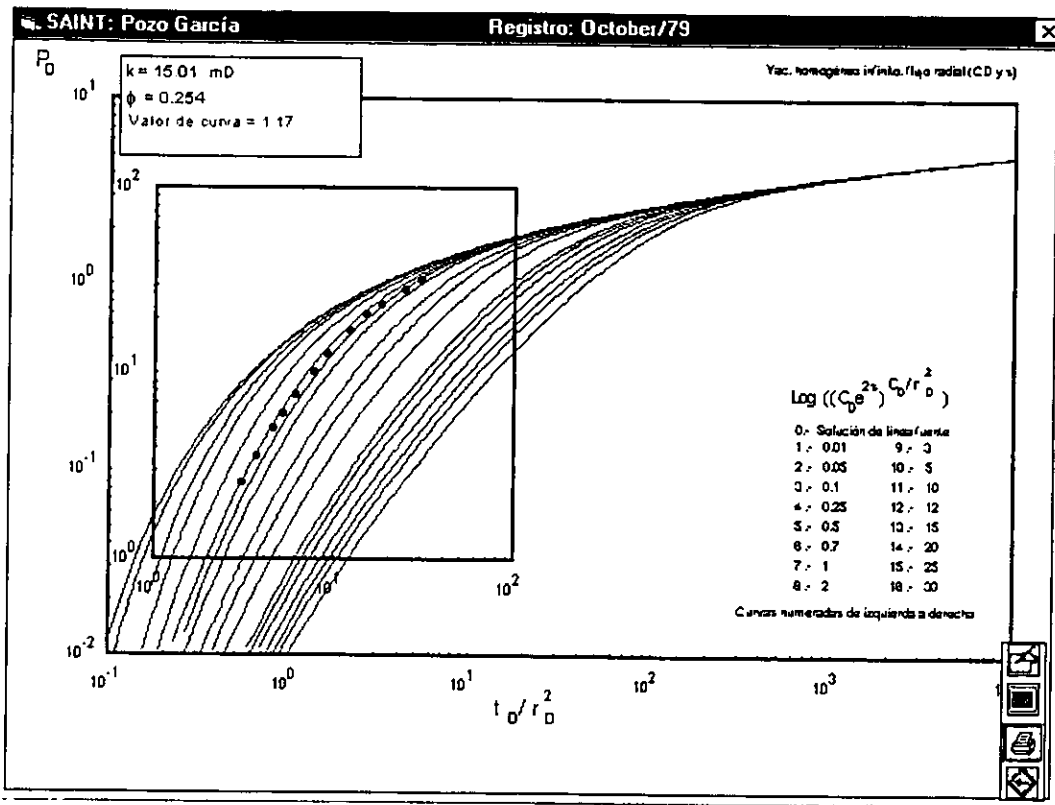


Fig. 5-25. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, FLUJO RADIAL CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO.

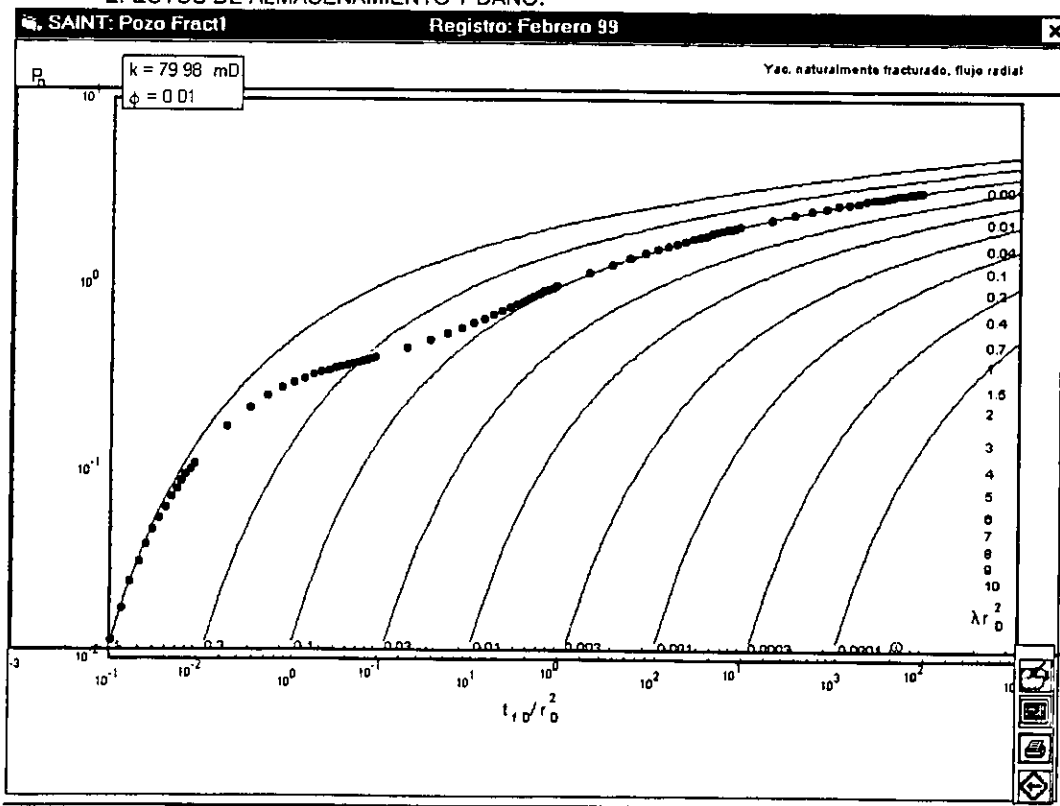


Fig. 5-26. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO NATURALMENTE FRACTURADO, FLUJO RADIAL.

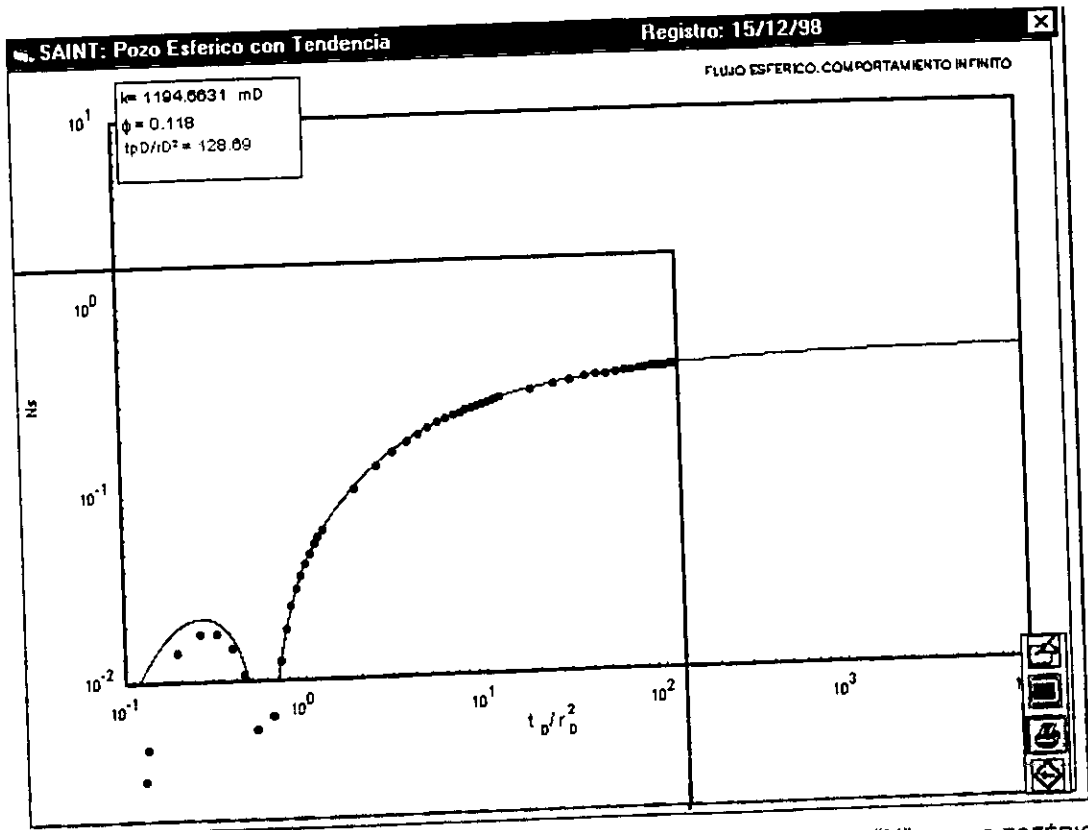


Fig. 5-27. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YAC. HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO ESFÉRICO.

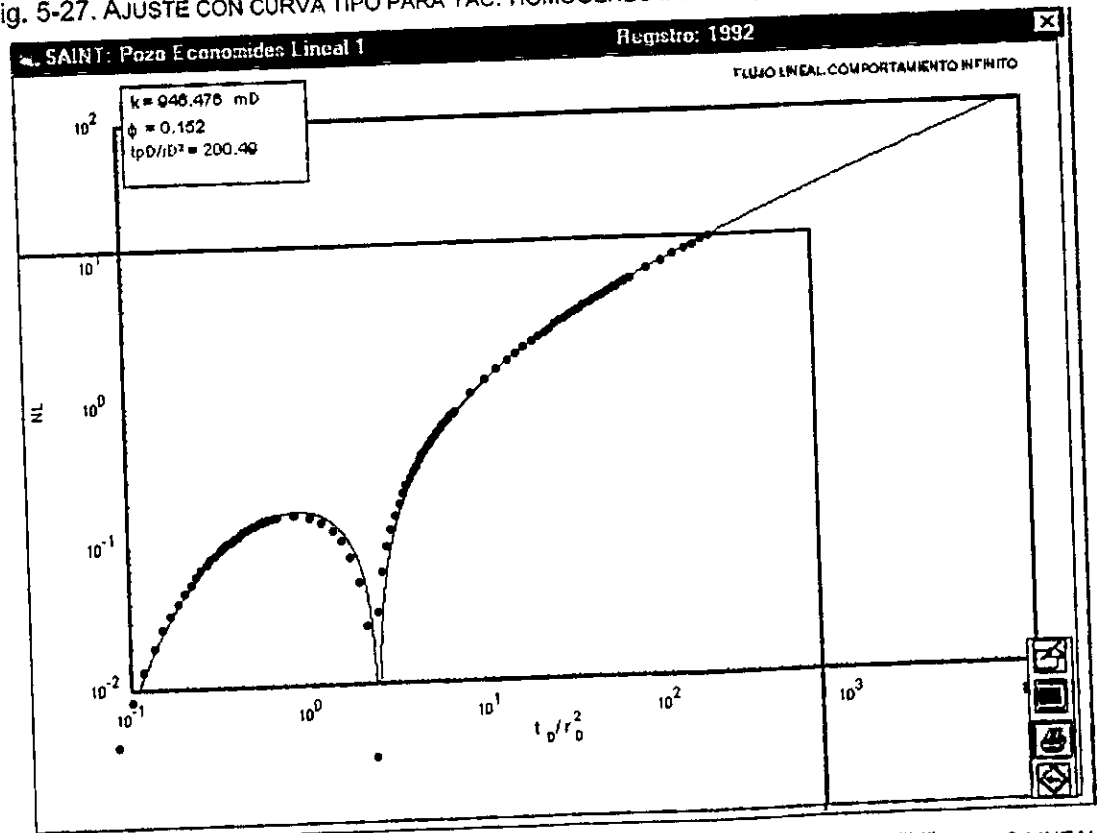


Fig. 5-28. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YAC. HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO LINEAL.

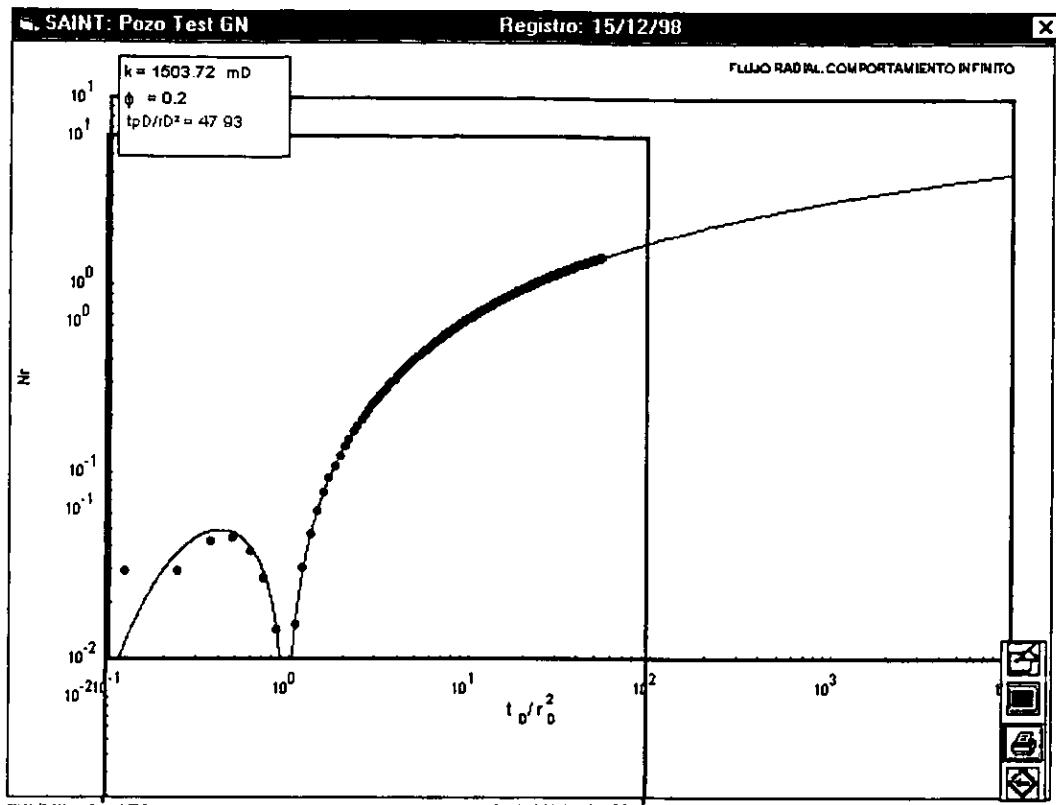


Fig. 5-29. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA YAC. HOMOGÉNEO INFINITO, GRUPO "N", FLUJO RADIAL.

Técnicas Línea Recta:

Semilog
Grupo Derivada

Fig. 5-30. SUBMENÚ PARA EJECUTAR LAS TÉCNICAS DE ANÁLISIS POR LINEA RECTA.

A partir del menú anterior es posible ajustar una recta a un conjunto de datos, bajo el criterio de mínimos cuadrados.

La opción "Semilog", es válida solamente para flujo radial a tiempos grandes y presenta una gráfica como la de la Figura 5-31. La opción "Grupo Derivada", ejecuta la técnica de El-Khatib para flujo radial y la extensión mostrada en el presente trabajo para flujo esférico y radial; las gráficas representativas corresponden a las figuras 5-32, 5-33 y 5-34, para flujo esférico, lineal y radial respectivamente.

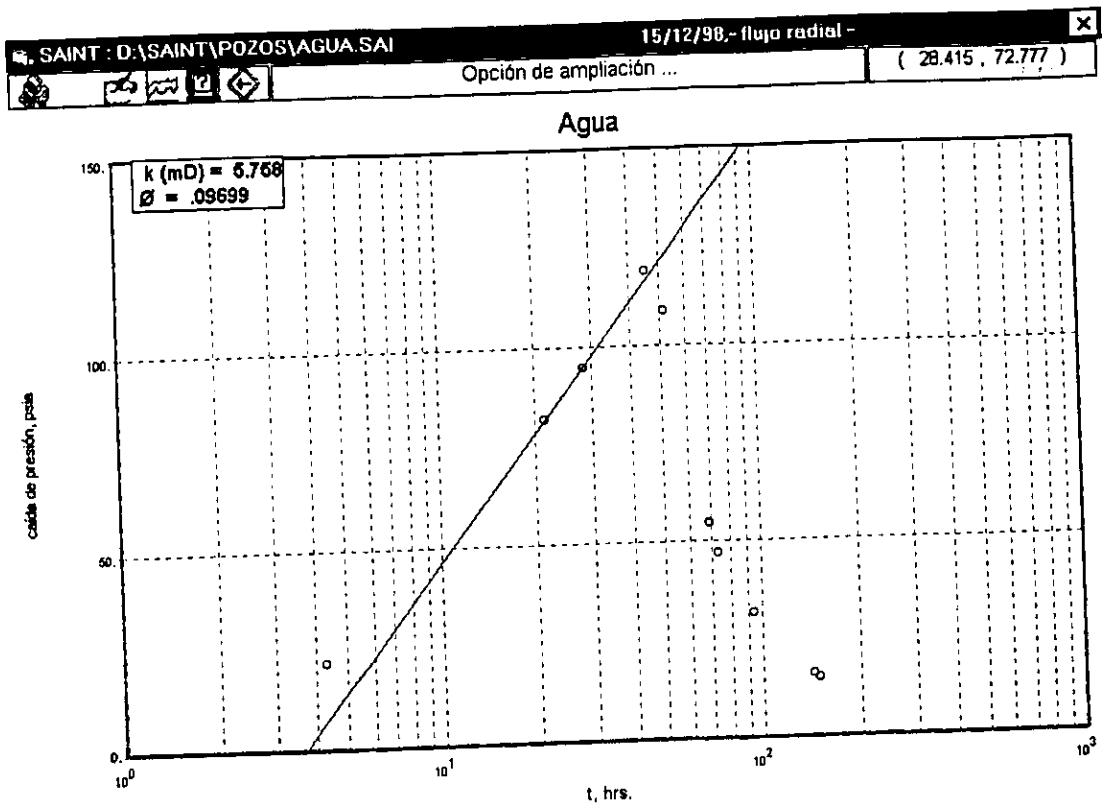


Fig. 5-31. TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA PARA EL CÁLCULO DE PARÁMETROS DEL YACIMIENTO.

Observe en la parte superior izquierda los íconos que permiten seleccionar los datos para ajuste de la recta, ampliaciones, cambio de escalas y apariencia general de la gráfica.

En la parte superior, Figuras 5-31 a 5-34, se muestra un área dedicada a la barra de menús, la cual está dividida en tres partes. A la izquierda se tienen íconos de ejecución, al centro un cuadro de diálogo para presentar la ayuda de las características de uso de los botones o íconos y a la derecha, una ventana que muestra las coordenadas de la posición del "mouse" dentro de la gráfica.

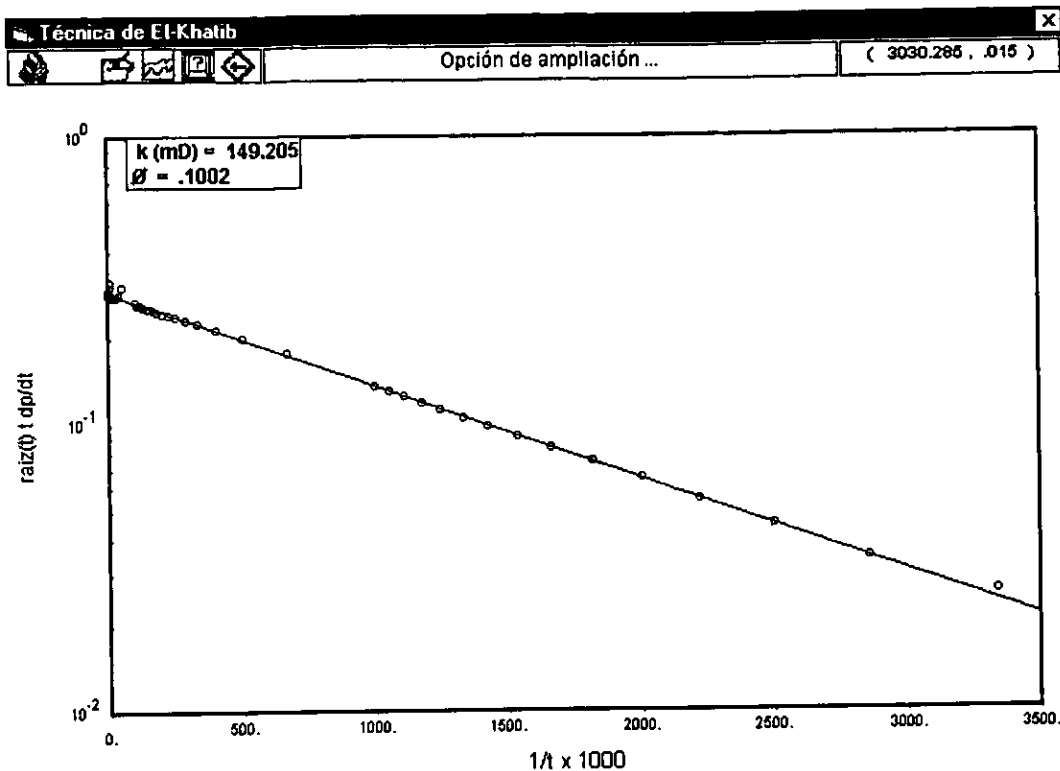


Fig. 5-32. TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA TIPO EL-KHATIB, PARA FLUJO ESFÉRICO.

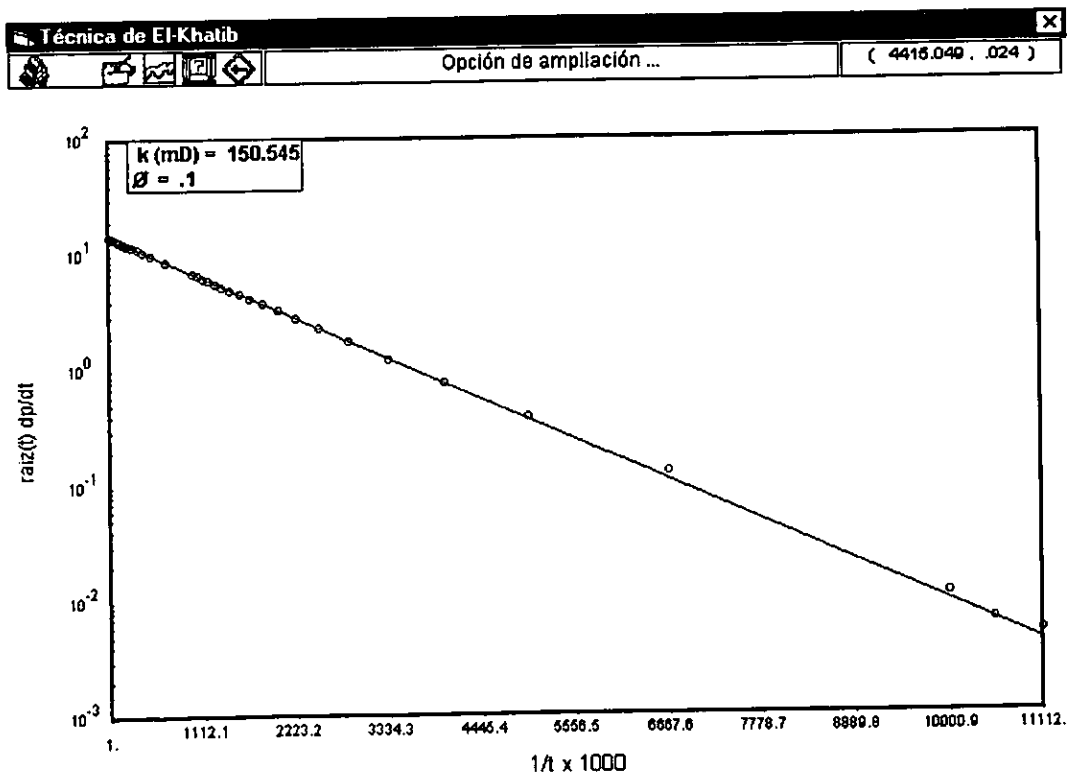


Fig. 5-33. TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA TIPO EL-KHATIB, PARA FLUJO LINEAL.

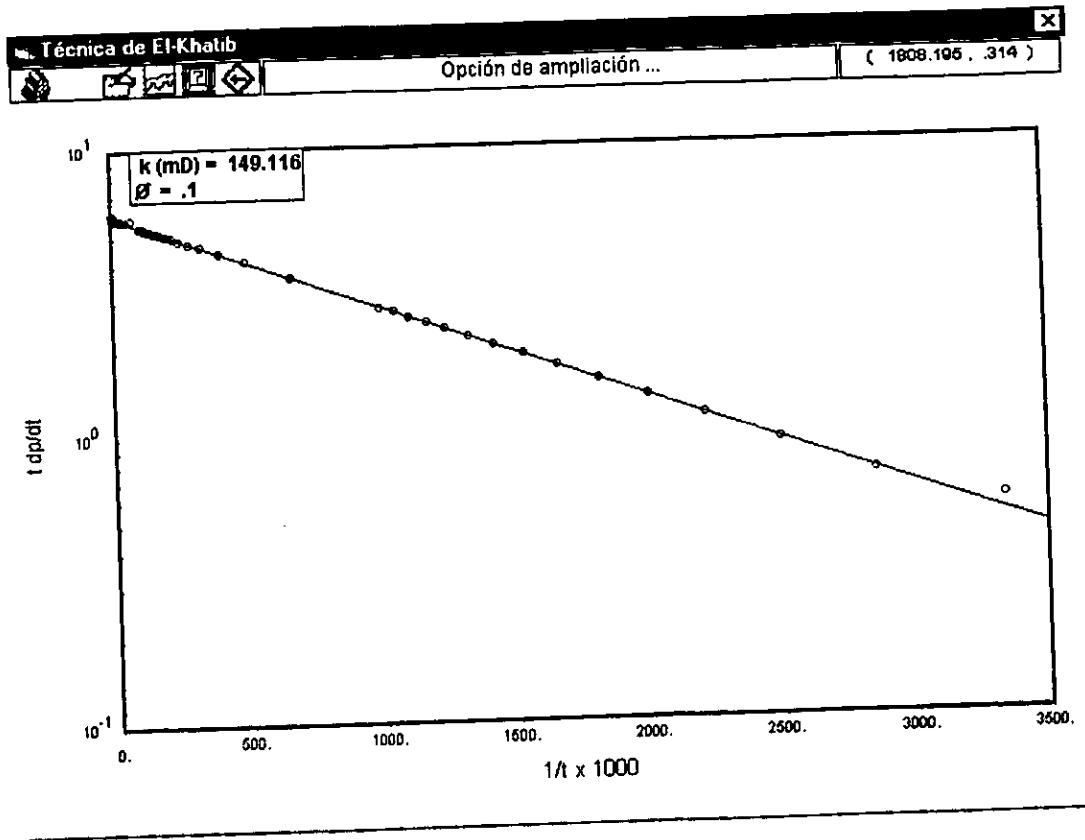





Fig. 5-34. APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE EL-KHATIB PARA FLUJO RADIAL.

Los iconos  y  se explican en la sección siguiente, correspondiente a graficación. Al presionar el icono , se presenta el menú siguiente:

- Trazo rectas
- Trazo con Área
- Anotaciones

Fig. 5-35. MENÚ PARA EJECUTAR TÉCNICA DE MÍNIMOS CUADRADOS E INCORPORAR ANOTACIONES.

“El trazo con rectas”, se refiere a la opción de seleccionar un valor mínimo y máximo en el eje del tiempo para definir un rango, el cual permite seleccionar las parejas de datos que serán utilizadas en el proceso de regresión. Los datos fuera del rango se ignoran en el ajuste de la recta semilogarítmica. Inmediatamente después de seleccionar el valor máximo, se realiza el ajuste automáticamente, se

traza la recta estimada y se presentan los resultados en un recuadro que aparece en la parte superior izquierda de la gráfica.

“El trazo con Área”, es útil para los casos en que la información contiene mucho ruido. En esta opción, el usuario define un área que delimita los datos que se usan en el proceso de ajuste de la recta semilogarítmica, seleccionando 4 puntos en la gráfica. La estimación, por regresión lineal, de la pendiente y ordenada al origen solamente considera los datos dentro de la región circunscrita en los cuatro puntos.

En algunos casos, es adecuado realizar una ampliación de alguna área de la gráfica antes de iniciar el trazo con las opciones rectas ó área, esto con la finalidad de mejorar la visión del analista y por ende la confiabilidad del análisis.

En caso de requerir realizar otro ajuste al mismo conjunto de datos, se procede con lo mencionado anteriormente, ya que el nuevo proceso borra al anterior.

La opción anotaciones, permite incluir etiquetas en la gráfica de gran utilidad para especificar comentarios de interés de la prueba y del análisis. La posición de la anotación es controlada por el usuario con el uso del “mouse”. El tipo de letra así como su tamaño y color, también pueden seleccionarse libremente.

Graficación: Esta opción permite visualizar en diferentes sistemas coordenados la información del registro tiempo contra presión. Es posible realizar acercamientos (“zoom”) de alguna área específica de la prueba, así como el trazo de rectas en cualquier escala coordenada seleccionada por el usuario; los valores de la pendiente y la ordenada al origen aparecerán en un recuadro después de ejecutar la opción; también se pueden observar varias gráficas en una sola pantalla y se permite modificar la apariencia, esto es, agregar etiquetas, cambiar los títulos de los ejes, cambiar el tipo de letra utilizado, modificar las escalas en los ejes, modificar el tipo de curva y eliminar o agregar una malla antes de su envío a

impresión. Al ejecutar este submenú se visualiza una pantalla similar a la siguiente:

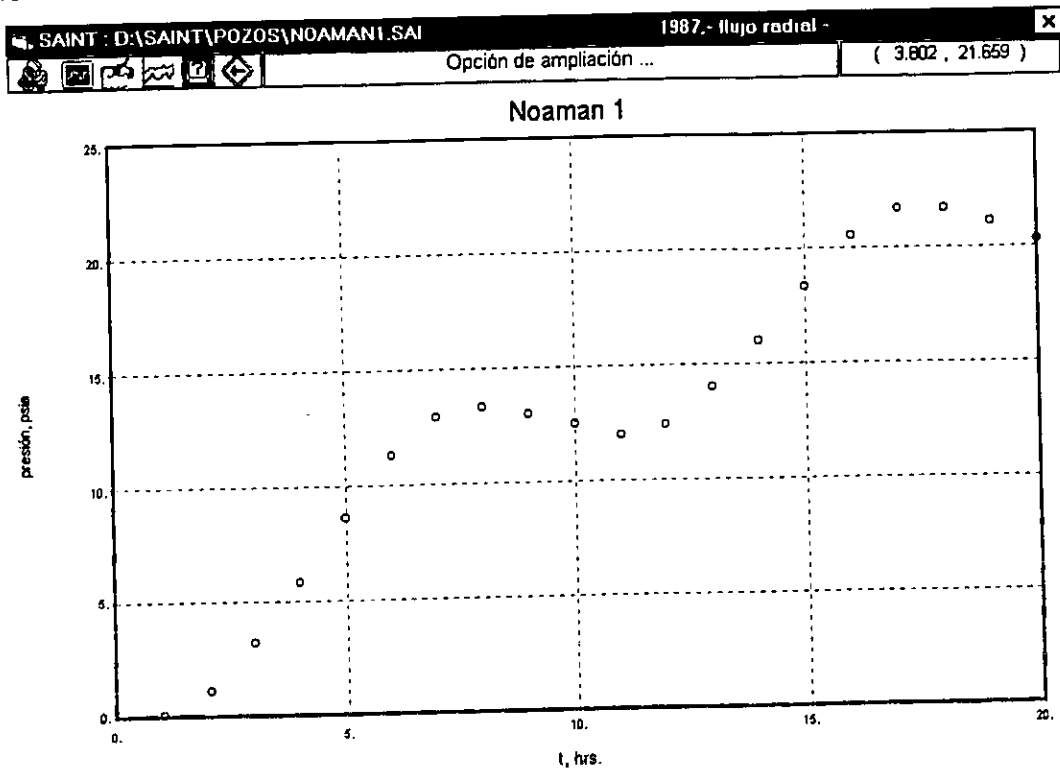



Fig. 5-36. VISUALIZACIÓN GRÁFICA, EN COORDENADAS CARTESIANAS, DEL REGISTRO DE PRESIÓN.

Este módulo contiene una barra de herramientas, que en el lado derecho incluye íconos que permiten manipular la información y seleccionar el tipo de graficación, así como para su impresión en papel; al centro se presenta un cuadro de texto cuya función es proporcionar ayuda al usuario de las opciones disponibles y al lado izquierdo se presentan las coordenadas en las cuales está posicionado el cursor dentro de la gráfica. En la parte superior de la ventana se presenta el nombre del archivo en el cual se encuentra guardada la información.

Para efectuar un acercamiento de alguna área del registro se procede a seleccionar un recuadro con el "mouse" y automáticamente al terminar el procedimiento, se rehace la gráfica con la información contenida dentro de él; siempre está presente la opción para volver a las escalas originales con pulsar el ícono , el cual aparece después de ejecutar la opción de acercamiento.

Para cambiar el aspecto del letrero general, arriba de la gráfica, así como de los ejes de las abscisas y ordenadas, basta con pulsar el botón derecho del "mouse" en el área del letrero. La pantalla que se despliega en este caso es:

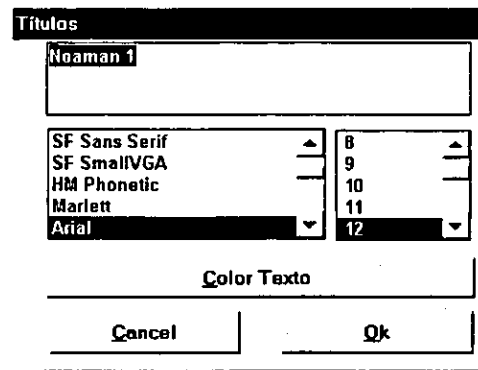


Fig. 5-37. CUADRO DE DIÁLOGO PARA CAMBIAR LETREROS.

Aquí es posible cambiar el letrero, el tipo de letra, tamaño así como el color. Al pulsar el botón cuadro de texto, se despliega la pantalla siguiente:

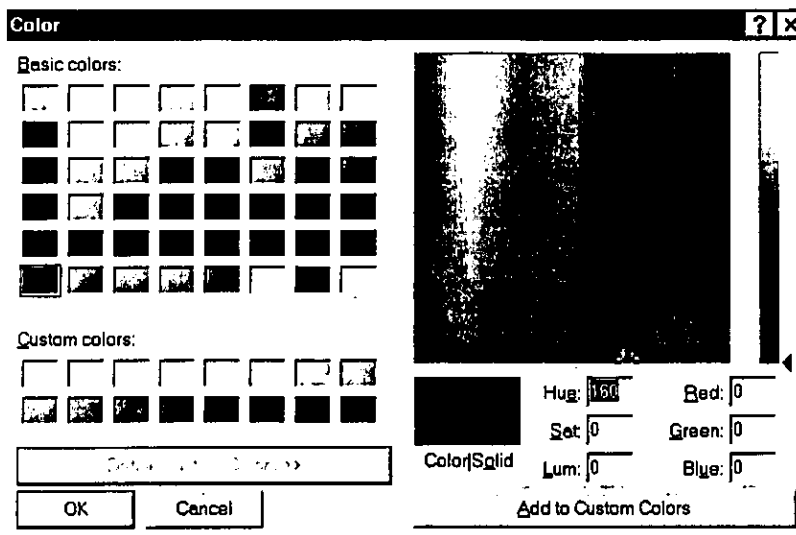



Fig. 5-38. CUADRO DE DIÁLOGO PARA SELECCIONAR EL COLOR DE LOS LETREROS.

Ahora se procede a revisar el funcionamiento de los íconos de la barra de herramientas. Al pulsar el ícono  aparece el siguiente menú, que permite abrir y guardar la gráfica, así como imprimirla en papel; con la opción "Copiar Clipboard" copiar a memoria RAM (Portapapeles o Clipboard) la gráfica visualizada para mostrarla en otras aplicaciones, tales como Word, Excel, etcétera.

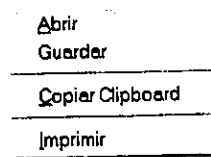



Fig. 5-39. MENÚ PARA ABRIR, GUARDAR E IMPRIMIR ARCHIVOS DE GRAFICACIÓN.

Al pulsar el ícono  se presenta el menú siguiente, que permite la selección de diferentes modalidades de graficación.

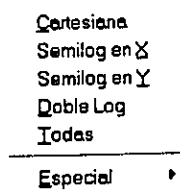


Fig. 5-40. MENÚ PARA SELECCIONAR LAS DIFERENTES OPCIONES DE GRAFICACIÓN.

A continuación se ejemplifica la opción "Todas", que permite la presentación de varias gráficas a la vez en una sólo pantalla (la cuarta gráfica no tiene una aplicación práctica en el análisis de la prueba, pero se incluye para considerar todas las posibles combinaciones):

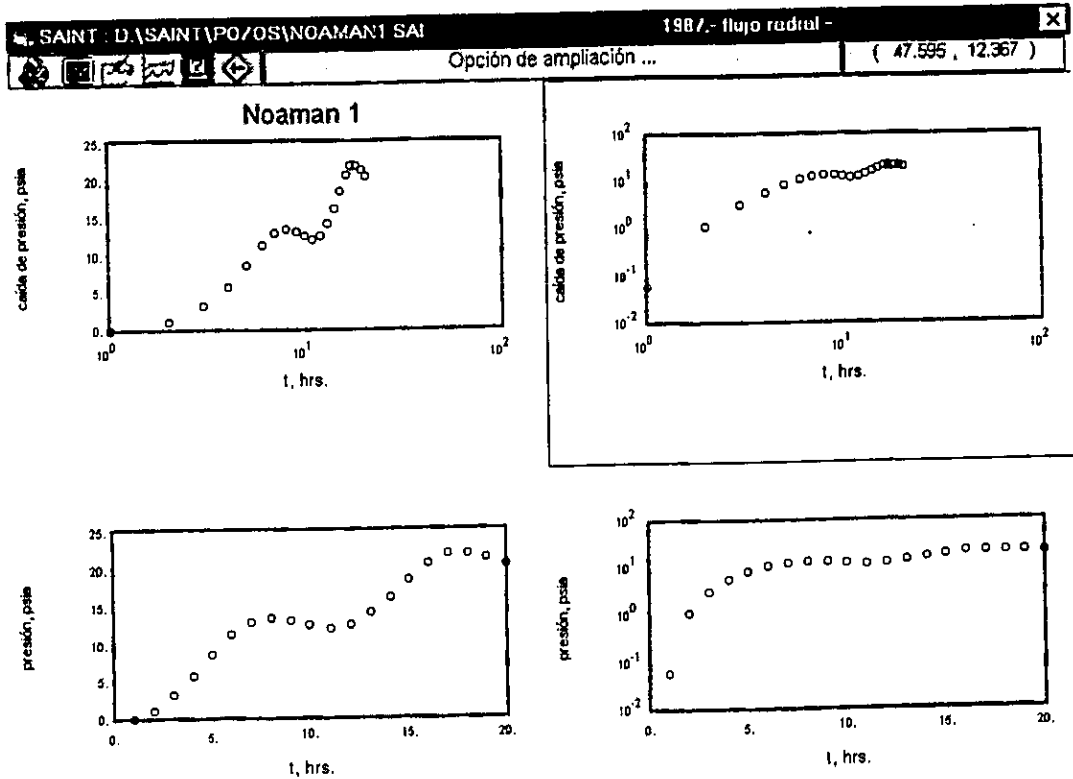




Fig. 5-41. VISUALIZACIÓN GRÁFICA DEL REGISTRO TIEMPO CONTRA PRESIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS COORDENADOS.

La opción "Especial" despliega los submenús siguientes, de gran utilidad para efectuar gráficas de diagnóstico especializado a los datos bajo análisis con la finalidad de identificar períodos de flujo así como la geometría predominante. El analista puede definir el exponente en el vector tiempo que desee con la opción "Usuario" en el submenú a la derecha.



Fig. 5-42. SELECCIÓN DE GRÁFICAS ESPECIALIZADAS DE DIAGNÓSTICO.

La función del ícono  es permitir el trazo de rectas sobre los datos de campo, con la visualización de la pendiente y ordenada al origen. Existen dos opciones para el trazado: la primera considera la definición de un rango, esto es un valor de presión mínimo y máximo, a partir del cual se seleccionan los puntos a los cuales se les aplica un procedimiento de regresión lineal para estimar la recta, y la segunda alternativa involucra la definición de un rango con cuatro puntos que definen un polígono, que define un área de selección de los datos a utilizarse en la regresión.

Al pulsar el ícono  aparece el menú siguiente a partir del cual es posible cambiar el aspecto de los datos graficados.

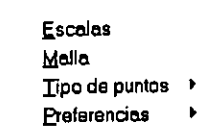


Fig. 5-43. SUBMENÚ PARA MODIFICAR EL ASPECTO DE LA GRÁFICA.

A continuación se presentan las pantallas desplegadas con cada una de la opciones, las cuales permiten modificar las escalas de los ejes, eliminar o incluir una malla para facilitar la lectura, modificar la presentación de los datos y del fondo del monitor.

Menú Escalas:

Escalas de Ejes

X mínimo: 0

X máximo: 20

Y mínimo: 0

Y máximo: 25

Cancel Ok

Fig. 5-44. CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LAS ESCALAS DE GRAFICACIÓN.

Menú Tipo de Puntos:

Sin marcas

Círculos

Círculos llenos

Triángulo abajo

Triángulo arriba

Cuadrado

Cuadrado lleno

Hexágono

Rombo


Estrella

Moño

Unidos con línea

✓ Sin línea

Fig. 5-45. CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LA APARIENCIA DE LOS DATOS.

Con la combinación de teclas **Ctrl+Ins**, es posible ejecutar directamente la opción "graficación". El acceso directo en la barra de herramientas para esta opción se maneja con el ícono .

Menú Resultados: Esta elección está disponible solamente después de haber realizado un ajuste de los datos de campo con un modelo de flujo, mediante la técnica de regresión no lineal.

Tabla tiempo contra presión

Gráfica de ajuste

Intervalos de confianza

Archivo de regresión

Fig. 5-46. MENÚ PARA REVISIÓN DE RESULTADOS.

Menú Escalas:

Escalas de Ejes

X mínimo: 0

X máximo: 20

Y mínimo: 0

Y máximo: 25

Cancel Ok

Fig. 5-44. CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LAS ESCALAS DE GRAFICACIÓN.

Menú Tipo de Puntos:

Sin marcas

Círculos

Círculos llenos

Triángulo abajo

Triángulo arriba

Cuadrado

Cuadrado lleno

Hexágono

Rombo

Estrella


Moño

Unidos con línea

✓ Sin línea

Fig. 5-45. CUADRO DE DIÁLOGO PARA MODIFICAR LA APARIENCIA DE LOS DATOS.

Con la combinación de teclas **Ctrl+Ins**, es posible ejecutar directamente la opción "graficación". El acceso directo en la barra de herramientas para esta opción se

maneja con el ícono .

Menú Resultados: Esta elección está disponible solamente después de haber realizado un ajuste de los datos de campo con un modelo de flujo, mediante la técnica de regresión no lineal.

Tabla tiempo contra presión

Gráfica de ajuste

Intervalos de confianza

Archivo de regresión

Fig. 5-46. MENÚ PARA REVISIÓN DE RESULTADOS.

Al seleccionar "Tabla tiempo contra presión" se despliega la información, tal como se muestra en la figura siguiente:

Comparación tabulada.				
	Tiempo (hrs.)	Dp medida (psia)	Dp calculada (psia)	% Error
1	0.5	0.02	-0.018	-187.8472
2	1.0	-0.14	-0.005	-96.7269
3	1.5	-0.02	0.037	-285.4773
4	2.0	0.12	0.089	-25.7435
5	2.5	0.16	0.143	-10.8882
6	3.0	0.19	0.194	2.0953
7	3.5	0.26	0.242	-6.917
8	4.0	0.25	0.286	14.5349
9	4.5	0.32	0.327	2.1845
10	5.0	0.33	0.364	10.3573
11	5.5	0.36	0.398	13.7609
12	6.0	0.4	0.429	7.3025
13				

Coeficiente de correlación = 1.0560179263038 Variación no explicada = -11.5174 %

Fig. 5-47. COMPARACIÓN TABULAR DE DATOS MEDIDOS Y CALCULADOS.

Observe que se presenta el coeficiente de correlación generalizado y la variación explicada al fondo de la tabla. Los íconos presentes en esta figura fueron explicados anteriormente cuando se revisó la opción de Regresión No-Lineal, a excepción del de la extrema izquierda que ejecuta una gráfica del error contra tiempo, como se aprecia en la figura 5-48. Se tiene la posibilidad de cambiar de tipo de gráfica y escalas, así como realizar acercamientos de algunas áreas de interés para el analista.

La segunda opción disponible en la revisión de resultados es "Gráfica de ajuste", la cual ejecuta una gráfica como la de la figura 5-19, donde es posible observar una comparación de los datos reales y los calculados.

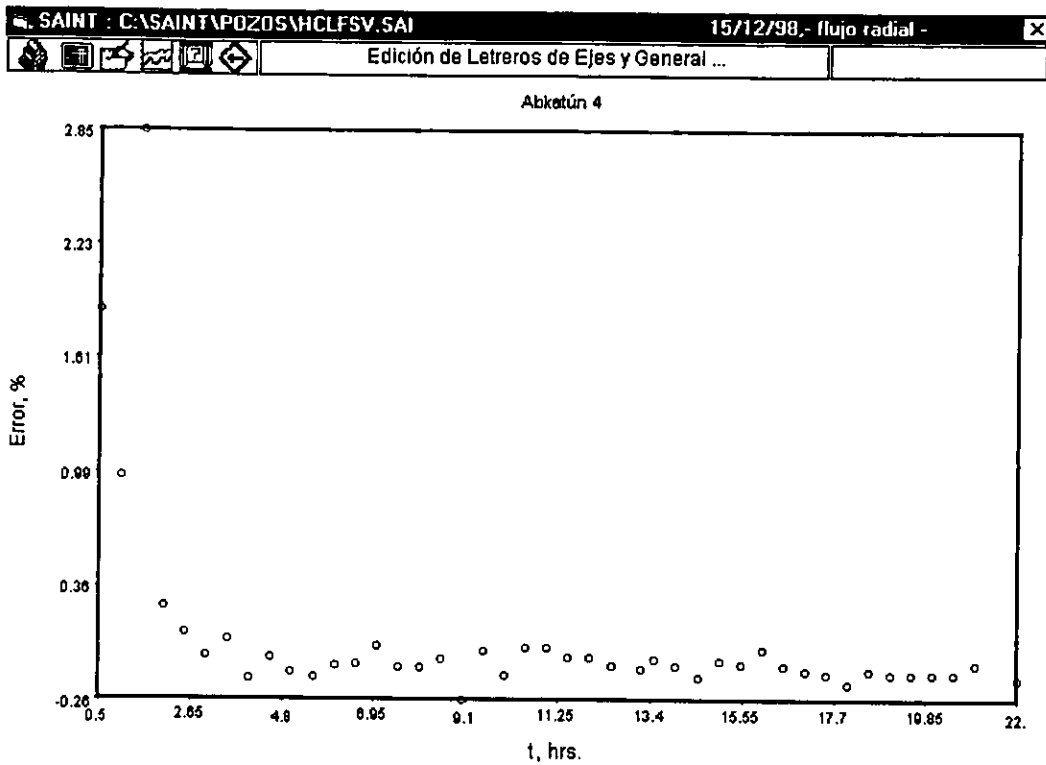


Fig. 5-48. COMPORTAMIENTO DEL ERROR VERSUS TIEMPO.

La tercer opción del menú corresponde con "Intervalos de confianza", que presenta la pantalla siguiente.

Intervalos de confianza

Nivel de Confianza: Combo1

k
 ϕ
 ω
 λ
 η_1
 η_2
 CD_{2d}
 S_{2d}
 CD_{obs}
 S_{obs}

Ok

Fig. 5-49. INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARÁMETROS CALCULADOS.

En esta pantalla es posible cambiar el nivel de confianza para analizar los cambios en los intervalos respectivos. **SAINT** contiene un procedimiento para estimar los valores "t" de student necesarios para los cálculos requeridos por el usuario, por lo cual se evita leer de tablas e introducir los datos al sistema.

Menú Anisotropía: El análisis de pruebas de interferencia en yacimientos idealmente anisotrópicos puede efectuarse a partir de esta opción. Al seleccionarla se despliega automáticamente la figura siguiente, la cual presenta el último caso analizado.

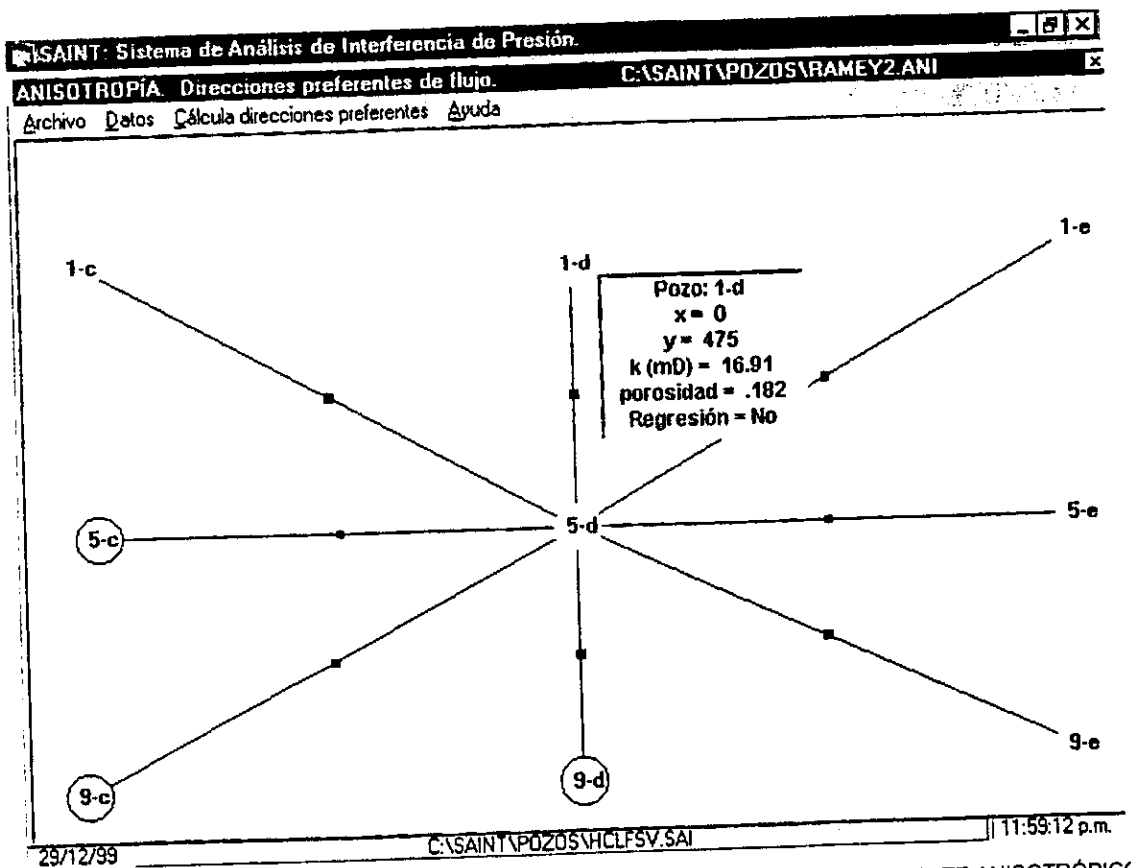


Fig. 5-50. PANTALLA PRINCIPAL DEL MÓDULO DE ANÁLISIS DE YACIMIENTOS IDEALMENTE ANISOTRÓPICOS.

La pantalla es sensible al evento "click" cuando se realiza sobre los círculos de los pozos, desplegando información de la posición, valores de permeabilidad y porosidad calculados previamente mediante un análisis convencional y también

presenta la decisión del analista para incluirlo en los cálculos de regresión. En la figura 5-50, se dió "click" sobre el pozo 1-D.

La graficación de los pozos sobre la pantalla se realiza a escala en función de las coordenadas alimentadas al sistema.

El menú "Archivo" en la parte superior, permite acceder y guardar información del análisis de anisotropía y está constituido por las mismas opciones mencionadas en la explicación de la pantalla principal de SAINT. A los archivos en esta opción se les asigna la extensión ANI.

El menú "Datos", despliega la pantalla siguiente, en la cual se puede introducir y editar la información de los pozos.

Anisotropía. Campo: Abkatun

	Pozo	x (pies)	y (pies)	k (mD)	porosidad	Regresión
1	5-d					
2	1-e	475	514	18.91	0.178	No
3	1-d	0	475	18.91	0.182	No
4	5-e	475	0	18.91	0.228	No
5	9-e	470	-415	18.91		No
6	9-d	0	-465	18.91	0.154	Si
7	9-c	-470	-480	18.91	0.159	Si
8	5-c	-465	0	18.91	0.209	Si
9	1-c	-470	490	18.91		No

Cancelar Ok

Fig. 5-51. PANTALLA PARA INTRODUCCIÓN Y EDICIÓN DE DATOS.

El número máximo de datos es de 10 pozos y el mínimo necesario, para estimar las permeabilidades máxima y mínima así como su dirección, de 4 pozos.

El menú "Calcula direcciones preferentes", muestra la pantalla siguiente en la cual es posible introducir el vector inicial de incógnitas. El programa asigna unos valores tentativos con base en la información alimentada, los cuales en la mayoría de los casos funcionan correctamente como vector inicial.

Valores iniciales de Regresión no-lineal

Kxx (mD) tolerancia

Kyy (mD) Número de iteraciones

Kxy (mD)

∅ μ ct (cp/psi)

Aproximación inicial

F(1) = 285.95

F(2) = 11.57

F(3) = 5.45

F(4) = 6.83

Error = 309.8

Fig. 5-52. VALORES INICIALES Y APROXIMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE REGRESIÓN.

A la derecha, se presenta un recuadro que muestra los valores calculados a las 4 funciones que intervienen en el proceso de regresión; estas funciones deberán ser cero en el vector solución. El analista puede cambiar los valores de la izquierda y observar los efectos en las funciones; al final del proceso, el usuario deberá oprimir el botón Ok y aparecerá la pantalla siguiente:

Resultados de la Regresión no-lineal

	Kxx (mD)	Kyy (mD)	Kxy (mD)	∅ μ ct	KXX (mD)	KYY (mD)	Angulo	Error
1	16.91	16.91	5.637	9.47E-2	22.547	11.273	45.0	19.9E+12
2	13.926	16.836	0.346	1.801E-1	16.877	13.885	83.322	15.9E+12
3	14.18	17.003	0.561	2.104E-1	17.11	14.073	70.166	14.0E+12
4	15.002	17.652	1.09	3.134E-1	18.042	14.611	70.282	70.9E+11
5	15.64	18.397	1.143	4.033E-1	18.809	15.228	70.176	27.3E+10
6	15.626	18.383	1.14	4.E-1	18.793	15.216	70.199	19.2E+07
7	15.626	18.383	1.14	4.E-1	18.793	15.216	70.199	13.7E+05
8	15.626	18.383	1.14	4.E-1	18.793	15.216	70.199	13.7E+05
9								
10								
11								
12								
13								

Angulo (grados)

Fig. 5-53. REPORTE DE RESULTADOS OBTENIDOS CON LA REGRESIÓN.

Finalizado el proceso de análisis y al regresar a la pantalla principal del módulo, se presenta automáticamente en un recuadro el reporte de resultados, tal como se aprecia en la Figura siguiente.

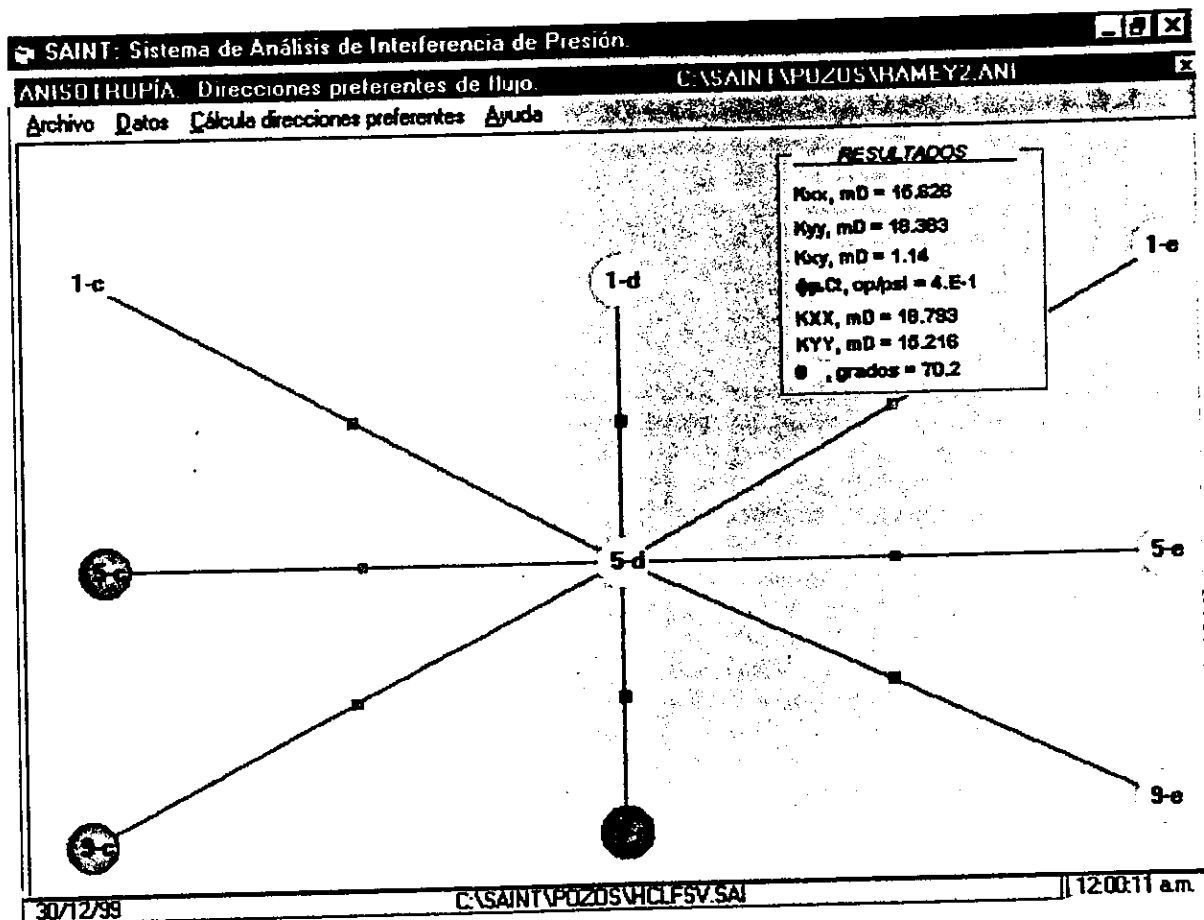


Fig. 5-54. PANTALLA PRINCIPAL DEL MÓDULO CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Menú Herramientas: Al acceder esta opción es posible cambiar las unidades de medida usadas en el sistema y seleccionar algunos parámetros, como se explica a continuación. El submenú correspondiente es:

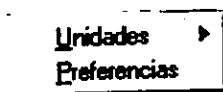


Fig. 5-55. SUBMENÚ HERRAMIENTAS.

Al seleccionar “Unidades” se despliegan las posibilidades siguientes:

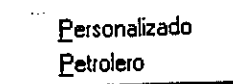


Fig. 5-56. SUBMENÚ UNIDADES.

La opción "Personalizado", muestra la pantalla siguiente, donde es posible elegir las unidades, por variable, que manejará el sistema:

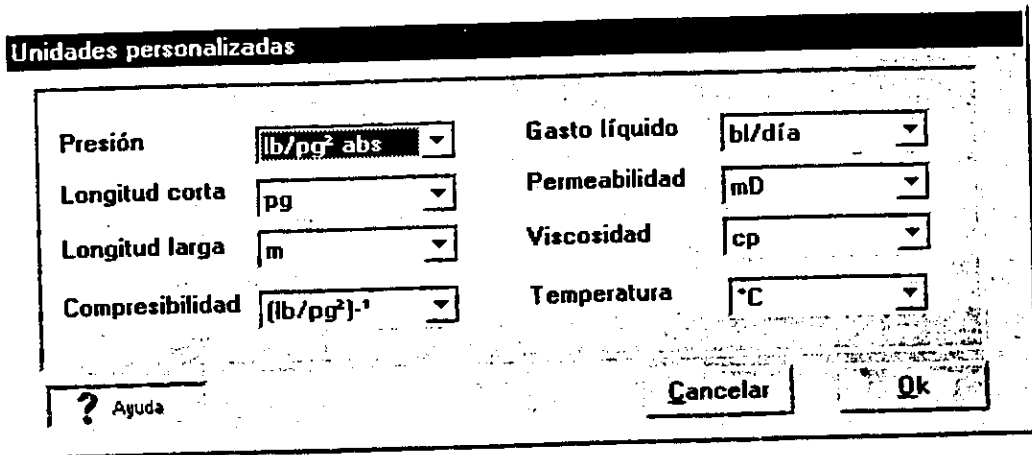


Fig. 5-57. PANTALLA PARA SELECCIONAR UNIDADES DE MEDICIÓN.

La opción "Petrolero" asigna las unidades de acuerdo a las utilizadas convencionalmente en la industria.

El submenú "Preferencias", permite designar al analista y compañía que se mantienen por default para los análisis subsecuentes. También, es posible definir la trayectoria dentro del disco duro para los datos de los pozos y la posición del sistema SAINT:

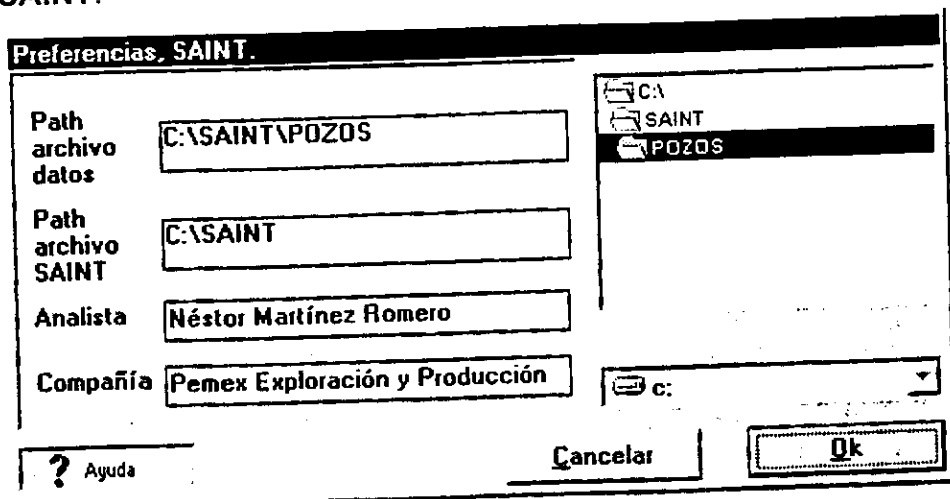


Fig. 5-58. PANTALLA PARA SELECCIONAR PREFERENCIAS.

Menú Ayuda: En esta parte es posible obtener explicaciones del funcionamiento del sistema y de algunos conceptos teóricos. Contiene dos elecciones:

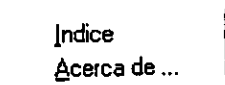


Fig. 5-59. SUBMENÚ AYUDA.

En "Índice" se presenta un listado de los tópicos que se consideraron de mayor utilidad en el manejo de **SAINT** y en la aplicación de las técnicas de análisis. No se incluye un desglose de los temas por obvio de espacio, pero se invita al lector interesado a usar esta opción útil.

"Acerca de ...", presenta información de la versión del sistema, así como el nombre del autor y las instituciones en las cuales presta sus servicios profesionales.

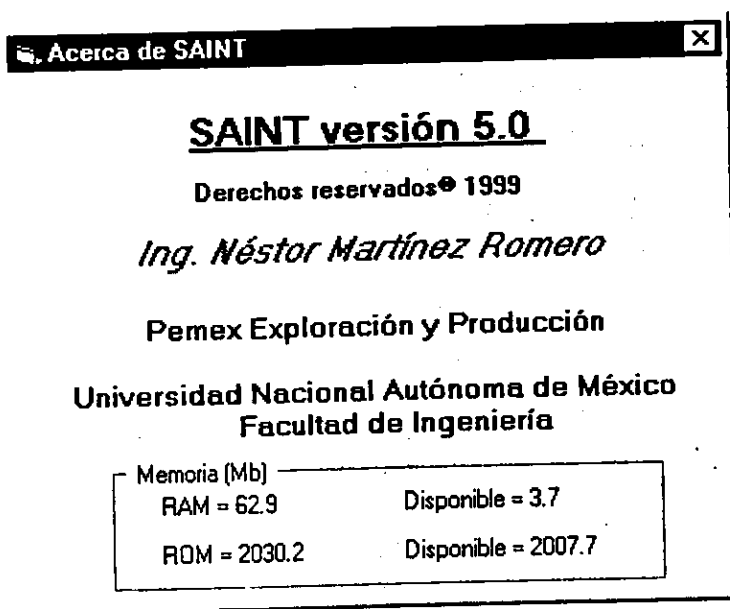


Fig. 5-60. PANTALLA "ACERCA DE ..."

CAPITULO VI

APLICACIONES DE CAMPO

VI.1 Introducción

En este capítulo se incluyen algunos ejemplos que permiten visualizar la utilidad práctica de la metodología general de análisis propuesta, la aplicación de los nuevos grupos de presión, la estimación de la presión al inicio de la prueba en los pozos de observación y la aplicación de la técnica mejorada de Ramey en el análisis de yacimientos idealmente anisotrópicos. Asimismo, se enfatiza la facilidad de uso y potencialidad del sistema **SAINT**, presentando en cada caso analizado, las pantallas de resultados y los comentarios respectivos que demuestran la versatilidad y mejoras logradas.

Es importante mencionar, que el sistema **SAINT** ha sido exhaustivamente probado, con resultados satisfactorios, tanto en casos de campo de pruebas efectuadas en yacimientos de México, así como en pruebas en otras partes del mundo publicadas en la literatura; adicionalmente, para algunas pruebas de verificación de las técnicas programadas, se usaron también datos generados sintéticamente mediante programas de cómputo.

Plantear ejemplos para cada una de las técnicas programadas en **SAINT**, así como todas las variantes posibles de información en cada caso requeriría de una gran cantidad de espacio y tiempo; esta es la razón fundamental por la cual sólo se incluyen seis ejemplos para las opciones más usadas en campo.

Como primer ejemplo se seleccionó una prueba de interferencia en el campo Abkatún, donde se utiliza la definición del grupo **N** para flujo radial y la técnica para estimación

de la presión al inicio de la prueba. El segundo caso corresponde al análisis de pruebas de interferencia en un yacimiento idealmente anisotrópico, que permite la aplicación de las mejoras a la técnica presentada por Ramey³³. El tercer ejemplo enfatiza las ventajas de la técnica de regresión no-lineal programada en **SAINT** y corresponde a un conjunto de pruebas de pulsos publicadas y analizadas por El-Khatib⁴⁸ a datos de presión generados sintéticamente. El cuarto ejemplo considera una prueba de interferencia en un yacimiento con flujo lineal, publicada por Economides⁵¹. El quinto caso corresponde a una prueba de interferencia con efectos notables de almacenamiento y daño en el pozo activo, publicada por Wei Chun²³. El último ejemplo es de una prueba de interferencia en un yacimiento naturalmente fracturado, publicada por Deruyck³¹.

VI.2 Campo Abkatún

Este primer caso, considera las pruebas de pulsos realizadas en el campo Abkatún del 15 al 28 de agosto de 1984. El objetivo planteado fue caracterizar el yacimiento como un antecedente para el inicio de un proyecto de recuperación secundaria por inyección de agua; esto es, estimar el grado de comunicación entre la brecha del Paleoceno y el Cretácico, investigar si existen características propias de un sistema fracturado y calcular valores de k_h y $\phi_{ci}h$.

En estas pruebas, se emplearon los pozos 4, 12 y 20 perforados desde la plataforma "E"; el pozo 20 fue el "activo" y los pozos 4 y 12 "observadores". El pozo 4 es improductivo, terminado en agujero descubierto a 3704 m, ligeramente desviado en la brecha del Paleoceno. El pozo 12 es productor, terminado en agujero descubierto a 3858 m, desviado en el Cretácico. El pozo activo 20 está terminado en agujero descubierto a 3685 m, desviado en la Brecha del Paleoceno.

Durante el período de registro de las pruebas, se observó un represionamiento general en el yacimiento, causado por una reducción de la producción del campo desde 433167 brl/día, el día 12, a 272552 brl/día, para el 18 agosto. Aunque se intentó medir la

tendencia de represionamiento antes del inicio de la prueba, no se obtuvo un valor exacto debido al comportamiento errático de la presión. En la figura 6-1 se presenta la localización de los pozos involucrados en la prueba de interferencia.

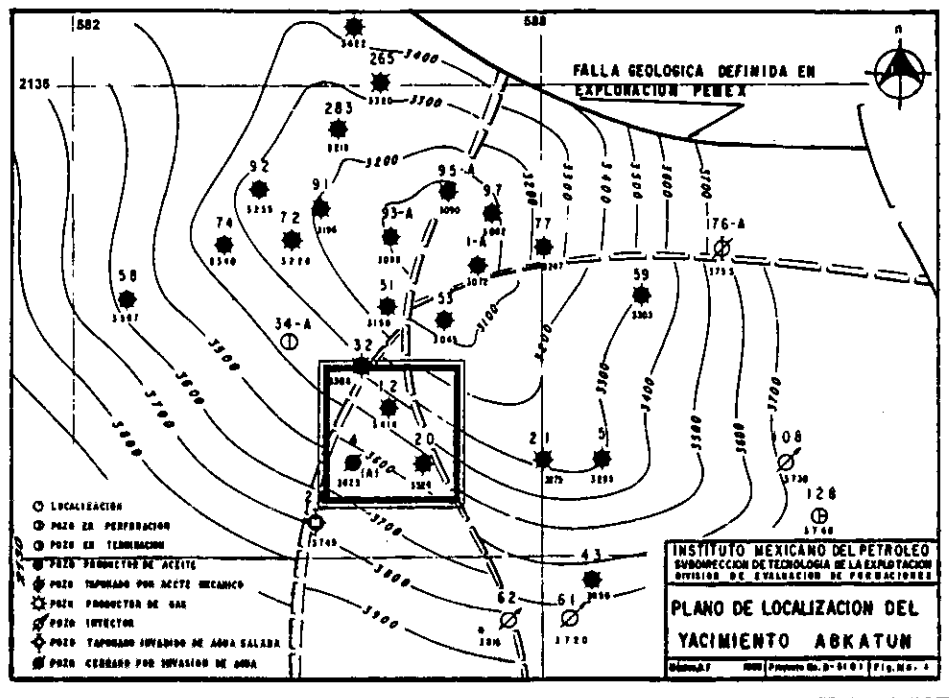


FIG. 6-1. PLANO DE LOCALIZACIÓN DEL YACIMIENTO ABKATÚN.

El efecto ocasionado por el cambio en la producción del yacimiento, tendencia de represionamiento no lineal, y las características de alta permeabilidad, complicaron el análisis de las pruebas. Al tratar de analizar las pruebas de pulsos, mediante la técnica de Brigham¹⁰, se observó que no era satisfactoria por contener los parámetros, tiempo de atraso y amplitud de respuesta, imposibles de determinar en forma precisa, debido a la influencia combinada del espaciamiento entre pozos y a la alta permeabilidad, además de no considerar la tendencia de represionamiento no-lineal.

En aquel tiempo, las características del problema propiciaron la búsqueda de soluciones alternas⁴¹; el autor del presente trabajo se avocó hacia el estudio de procedimientos de análisis basados en regresión no-lineal y factibles de ser automatizados eficazmente, publicando el artículo⁵, "Desarrollo de una técnica de regresión, para el análisis automático de pruebas de presión. Aplicación al campo

Abkatún"; los Drs. Rodríguez de la Garza y Antunez Uribe³⁹, diseñaron una nueva curva tipo, Figura 2-23, que usa simultáneamente la integral de la presión respecto al tiempo y la caída de presión para el análisis de los datos de campo y un tercer grupo, coordinado por los Drs. Cinco Ley y Samaniego Verduzco analizaron las pruebas desuperponiendo manualmente la tendencia de represionamiento, estimada a partir del comportamiento de la presión medida en campo. Como era de esperarse, los resultados obtenidos con las tres metodologías reportaron resultados concordantes.

En la Figura 6-2, se observa la historia parcial de producción en el pozo activo durante el período de prueba, en el recuadro de la derecha se presentan todos los cambios efectuados. Note que los tres últimos pulsos no fueron registrados en el pozo activo, pero sí en los observadores.

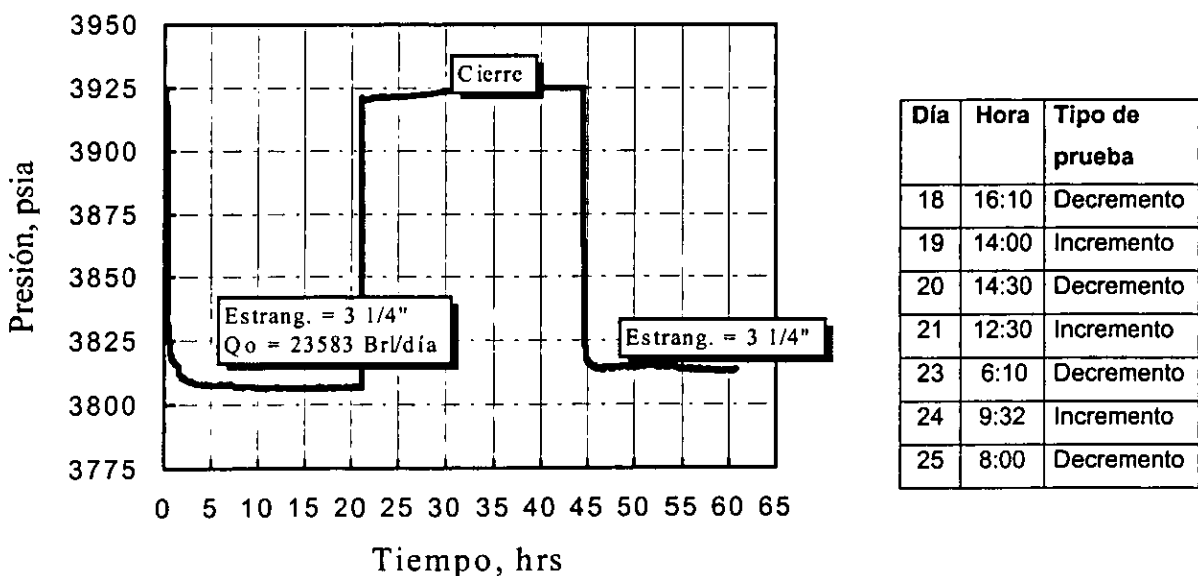


FIG. 6-2. HISTORIA DE PRODUCCIÓN DEL POZO ACTIVO, ABKATÚN NO. 20.

La Figura 6-3, presenta el registro de presión de fondo en los pozos observadores 4 y 12, respectivamente. Las diferencias observadas en la magnitud y forma de las caídas de presión en estos pozos, se explican por dos factores principales: los pozos están a diferentes distancias del pozo activo, 887 m para el pozo 4 y 850 m para el pozo 12, y

las características petrofísicas del yacimiento entre los pozos 4-20 y 12-20 son diferentes. La caída total de presión aproximada, para el pozo 12 fue de 8.5 lb/pg^2 , mientras que para el pozo 4 solamente de 6 lb/pg^2 . Es importante comentar que en este caso las caídas de presión, realmente son incrementos a partir de la presión de inicio y esto se explica debido a la fuerte tendencia de represionamiento del yacimiento durante la ejecución de la prueba de pulsos.

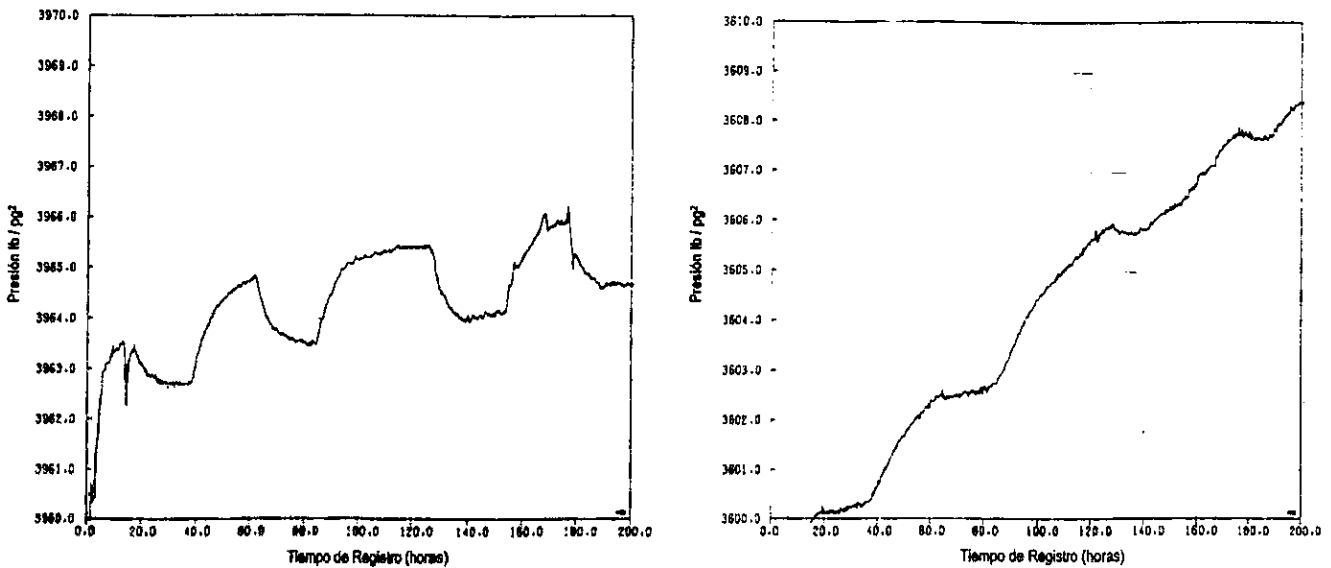


FIG. 6-3. REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DE LOS POZOS OBSERVADORES, ABKATÚN 4 Y 12.

Los datos adicionales considerados, para realizar el análisis son, $B_o = 1.5 \text{ vol. @ c.y./ vol. @ c.s.}$ y $\mu_o = .532 \text{ cp}$; los valores de h y c_t son desconocidos, pero para fines de alimentación al programa **SAINT** se consideraron unitarios.

Para ejemplificar la aplicación de la técnica propuesta para la eliminación automática de las tendencias de presión usando el grupo N y la estimación de la presión al tiempo de inicio, se consideró incluir en la primera parte del análisis, la sección de decremento del primer pulso del pozo 4 que corresponde a la primera apertura del pozo 20. En la segunda parte del ejemplo se muestra el ajuste global a todos los pulsos medidos en los pozos 4 y 12.

En la Figura 6-4, se presenta el comportamiento de presión para el decremento, tomada directamente de SAINT, y un anexo donde se muestra tabulado el registro tiempo (minutos) contra presión (lb/pg²). Se puede observar la dispersión alrededor de una banda, la cual se explica por el ruido aleatorio y de truncamiento debido a la sonda de medición y efectos físicos no considerados en el desarrollo de la teoría de análisis.

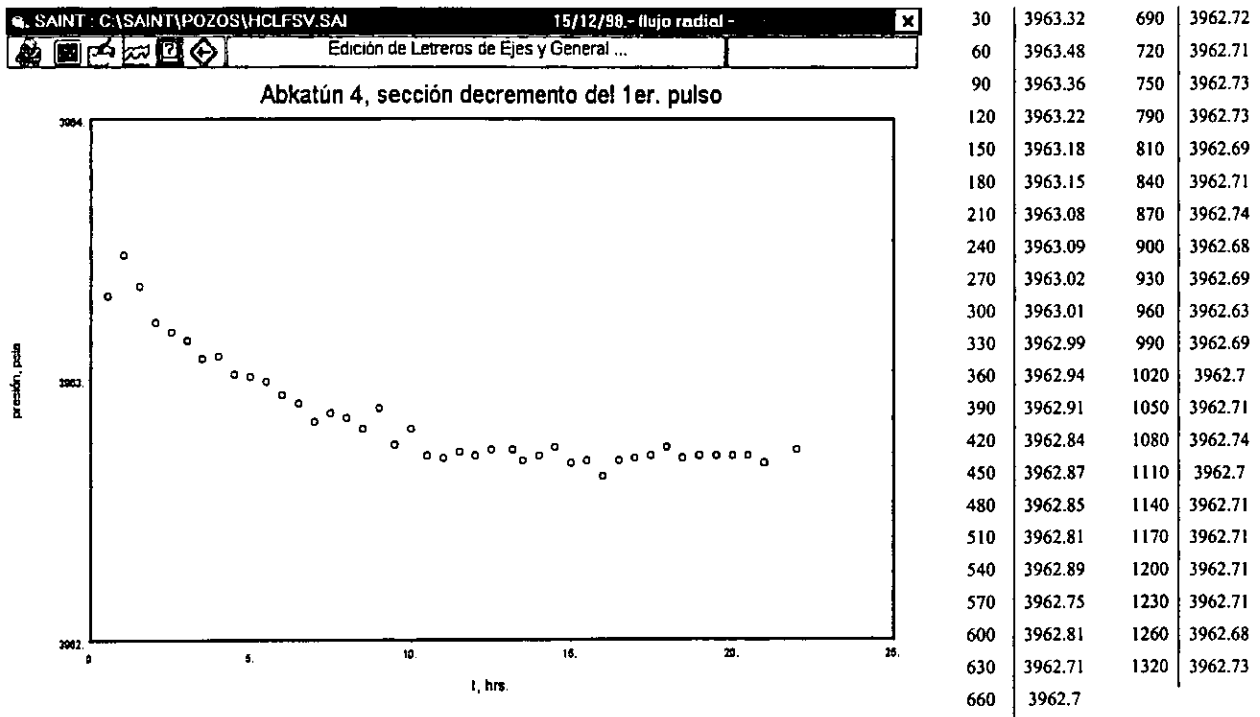


FIG. 6-4.- REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 DURANTE LA PRIMERA APERTURA DEL POZO ABKATÚN 20.

Esta sección, también fue analizada por Cinco Ley⁴⁰ y coautores, con la técnica que usa el grupo de presión presentado en el Capítulo II, reportando como resultados valores de $kh = 1.48 \times 10^6$ md-pie, $\phi c_h = 9.8 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia de represionamiento lineal igual a 0.052 (lb/pg²)/hr. La presión inicial considerada fue de 3963.34 lb/pg².

En la Figura 6-5, se presenta el ajuste con la curva tipo de Ramey, para los datos de incremento del primer pulso. Puede apreciarse que el ajuste no es adecuado por la presencia de la tendencia de represionamiento durante la prueba. Los datos a tiempos largos se sitúan por abajo de la curva tipo, tal como sucede cuando se tiene una

frontera a presión constante. Se puede observar que el análisis de consistencia con la técnica semilogarítmica puede calificarse como bueno, sin embargo de acuerdo con lo comentado en los capítulos anteriores, esta interpretación no es adecuada y llevaría a cometer errores del orden de más del 60% en los resultados finales.

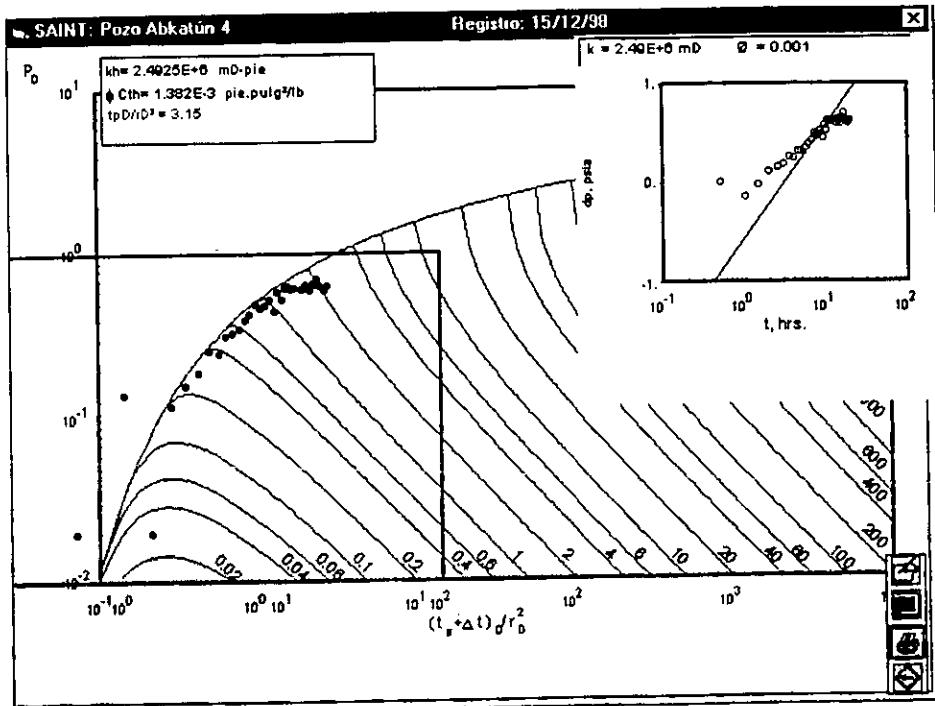


FIG. 6-5. AJUSTE DEL REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 CON LA CURVA TIPO SIN TENDENCIA LINEAL DE PRESIÓN.

Por otro lado, en la Figura 6-6 se observa el ajuste con la nueva curva tipo que considera la definición del grupo N para flujo radial. Los resultados obtenidos son $kh = 1.4326 \times 10^6$ md-pie y $\phi c_t h = 9.7993 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²), concordantes con los presentados por Cinco-Ley y coautores. Es importante mencionar que los datos fueron suavizados con una ponderación de tipo rectangular. Adicionalmente, se hace notar, con base en la experiencia obtenida, que el ajuste debe efectuarse otorgando mayor peso a los últimos datos; esto se explica por errores inherentes en el cálculo de la integral numérica a tiempos cortos con la cuadratura del Trapecio.

Posteriormente, se procedió a la ejecución de la técnica de regresión no lineal. En la Figura 6-7, se presenta el ajuste inicial con los resultados obtenidos del análisis de curvas tipo; notándose que a tiempos grandes el ajuste es deficiente.

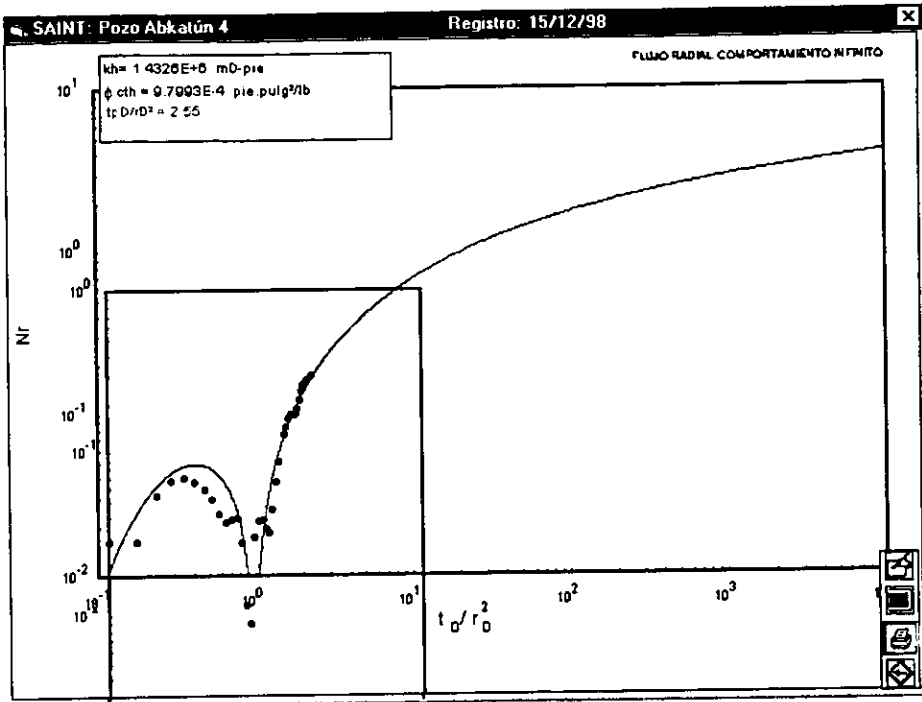


FIG. 6-6. AJUSTE DEL REGISTRO DE PRESIÓN DE FONDO DEL POZO ABKATÚN 4 CON LA CURVA TIPO DEL GRUPO N PARA FLUJO RADIAL.

El error al inicio fue de 0.078 y después de 20 iteraciones se logró un ajuste con un error de 0.012 el cual se muestra en la fig. 6.8; los valores resultantes son $kh = 1.44 \times 10^6$ md-pie, $\phi c_h = 9.74 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia de represionamiento lineal de -0.044 (lb/pg²)/hr.

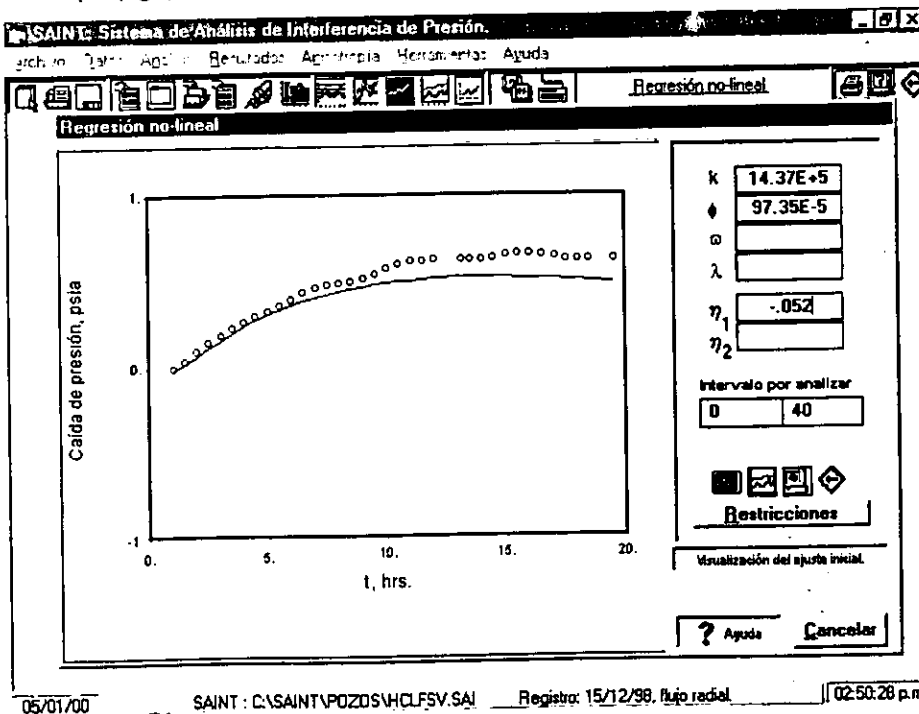


FIG. 6-7. APLICACIÓN DEL PROCESO DE REGRESIÓN NO-LINEAL.

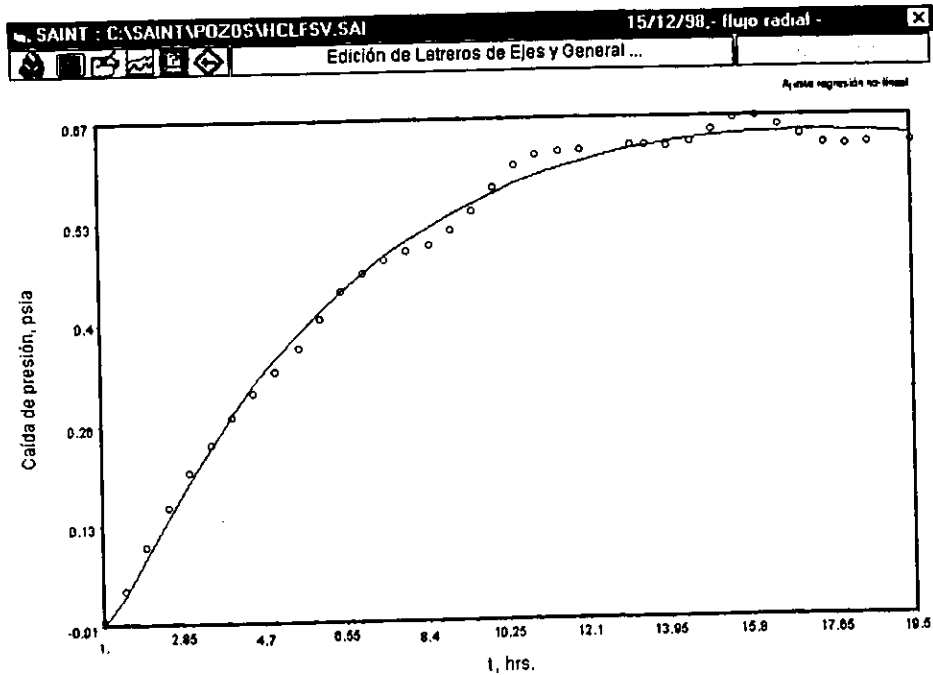


FIG. 6-8. AJUSTE FINAL DEL PROCESO DE REGRESIÓN NO-LINEAL.

En la Figura 6-3, lado izquierdo, es posible observar la dispersión a tiempos cortos en el registro tiempo contra presión, lo cual dificulta la estimación precisa de la presión inicial. A continuación se presentan los resultados obtenidos en su determinación, con base en lo planteado en el Capítulo IV.

Se procedió a efectuar una corrida con **SAINT**, variando la presión inicial desde 3963.1 a 3963.4 lb/pg², a intervalos de 0.005; en la Figura 6-9 se muestra el comportamiento respecto al grado de ajuste. La presión óptima estimada fue de 3963.3 lb/pg², que corresponde al valor más pequeño del grado de ajuste.

Utilizando este valor de presión inicial se obtiene un ajuste de regresión no lineal con resultados de $kh = 1.24 \times 10^6$ md-pie, $\phi c_t h = 9.79 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia de represionamiento lineal de -0.052 (lb/pg²)/hr; la variación no explicada resultó de 0.53%. Aunque el cambio en la presión inicial fue de apenas 0.04 lb/pg², los nuevos resultados representan una variación en kh de 14%, de .51% en $\phi c_t h$ y de 18.2% para la tendencia lineal de represionamiento.

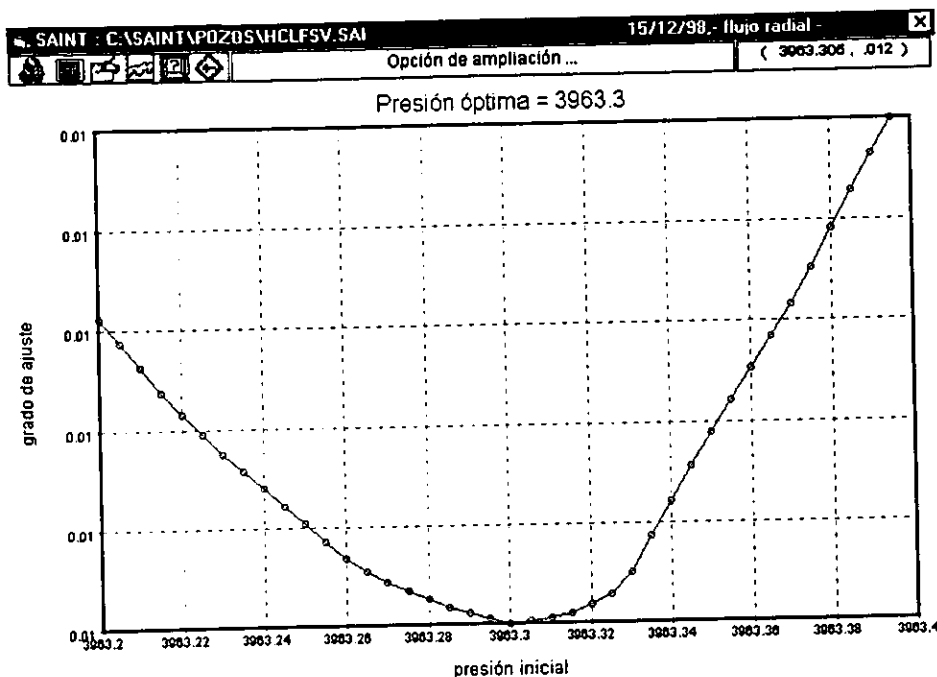


FIG. 6-9. COMPORTAMIENTO DEL GRADO DE AJUSTE RESPECTO A LA PRESIÓN INICIAL.

La segunda parte del ejemplo, considera el ajuste global de las pruebas de pulsos. Es interesante comentar que teóricamente los resultados de aplicar la técnica de regresión, debían ser los mismos con ajustes globales y locales; sin embargo, se observaron diferencias debido a que el modelo teórico utilizado no considera todos los efectos presentes durante la prueba, tales como cambios de gasto no medidos, fallas de los sensores, efectos de doble porosidad, etc.

En la Figura 6-10, se presenta el ajuste de presión para el pozo Abkatún no. 4, lado derecho, así como la gráfica de estimación de la presión inicial, lado izquierdo. Los resultados obtenidos son $kh = 2.49 \times 10^6$ md-pie, $\phi_c h = 3.2 \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia de represionamiento de $(-0.0248 t + 0.000044 t^2)$ (lb/pg²)/hr; la variación no explicada resultó de 9%

En la Figura 6-11 se presenta el ajuste para el pozo 12. Los resultados reportados son $kh = 2.94 \times 10^6$ md-pie, $\phi_c h = 20. \times 10^{-4}$ cp/(lb/pg²) y tendencia de represionamiento de $(-0.0671 t + 0.000078 t^2)$ (lb/pg²)/hr; la variación no explicada resultó de .325%

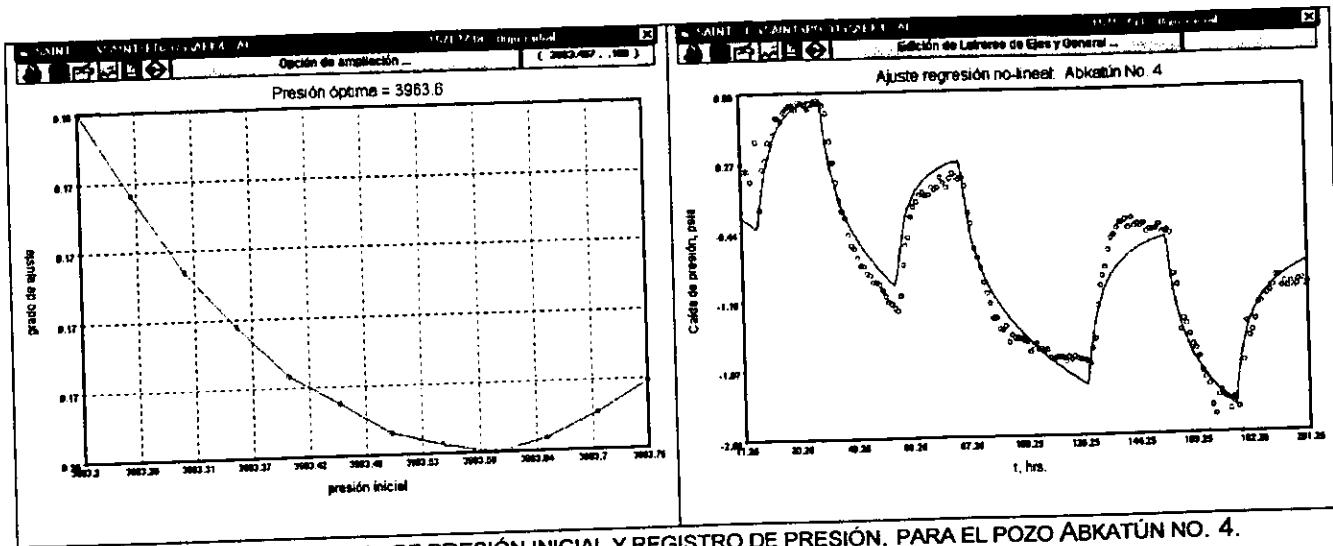


FIG. 6-10. AJUSTE GLOBAL, DE PRESIÓN INICIAL Y REGISTRO DE PRESIÓN, PARA EL POZO ABKATÚN NO. 4.

El ajuste logrado con el pozo 12 es superior matemáticamente al del pozo 4; esto se explica por la mejor calidad del registrador de presión empleado en el primer pozo con respecto al segundo. Observe las variaciones aleatorias y de cuantización de mayor magnitud en el pozo 4. Por otro lado, también es importante considerar que en el pozo 12 se obtuvo la mayor caída de presión, debida a la producción del pozo 20 y a la tendencia de represionamiento del campo.

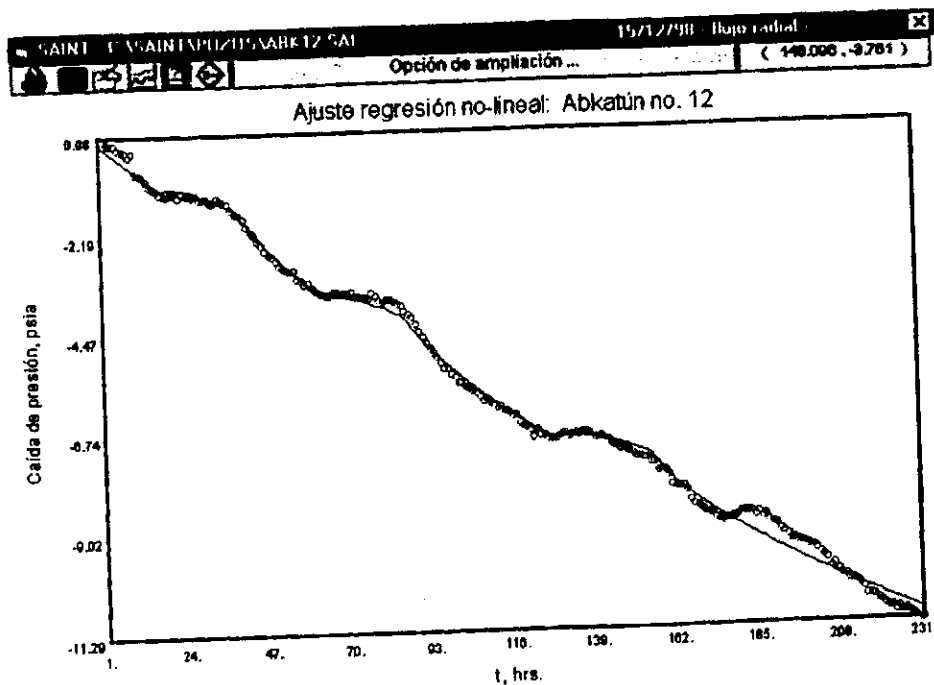


FIG. 6-11. AJUSTE GLOBAL DEL REGISTRO DE PRESIÓN PARA EL POZO ABKATÚN NO. 12.

VI.3 Análisis en un Yacimiento Anisotrópico

El caso a revisar, corresponde a un conjunto de pruebas de interferencia, que antecedieron la implementación de un proyecto de inyección de agua, efectuadas en un yacimiento localizado en Estados Unidos de América; los datos y resultados fueron presentados en la literatura técnica por Ramey³³.

El estudio incluyó ocho pozos de observación y un activo; el objetivo principal fue determinar las direcciones preferentes de flujo para seleccionar adecuadamente la posición de los pozos de inyección, optimizando así la recuperación de hidrocarburos.

Se decidió realizar una prueba de inyección debido a que los gastos de producción de los pozos eran muy bajos, resultando consecuentemente en pequeñas caídas de presión en los pozos de observación, difíciles de detectar.

En la Figura 6-12, se presenta un mapa de isopacas que muestra la posición de los pozos dentro del yacimiento y su localización de acuerdo con sus coordenadas geográficas; puede observarse que se trata, como se conoce en la literatura técnica, de un patrón de nueve pozos.

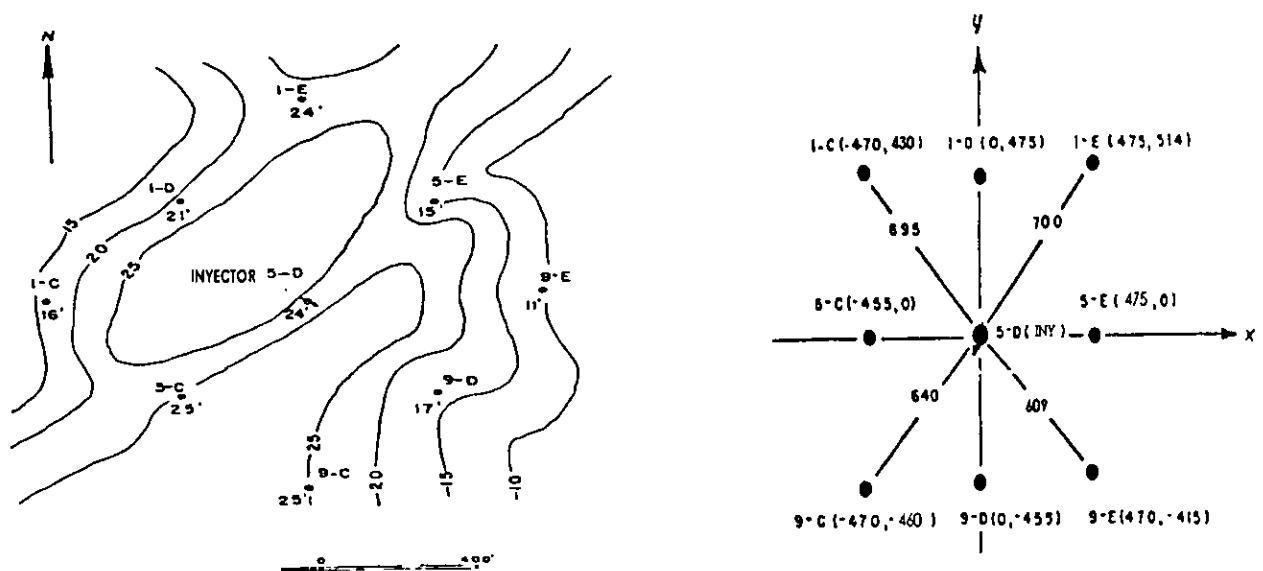


FIG. 6-12. MAPA DE ISOPACAS Y COORDENADAS DE LOCALIZACIÓN DE POZOS.

La prueba consistió en inyectar primeramente, en el pozo central 5-D, 115 Brl/día de agua, y observar el comportamiento de la presión en los pozos 5-E, 1-E, 1-D, 1-C, 5-C, 9-C, 9-D y 9-E. Después de 101 horas de inyección ésta se suspendió para efectuar una prueba "fall-off".

La Tabla 6.1 contiene la información de presiones de fondo registradas en campo, así como los datos adicionales necesarios para efectuar el análisis.

TABLA 6-1 INFORMACIÓN DE LOS REGISTROS DE PRESIÓN Y ADICIONAL REQUERIDA PARA EL ANÁLISIS.

Pozo 1-C		Pozo 1-D		Pozo 1-E		Pozo 5-C	
t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²
		23.5	6.7	27.5	3	47	10
		28.5	7.2	47	5	71	17.2
		51	15	72	11	94	24
		77	20	95	13	113	25.1
		95	25	115	16	124	26
		119	24	125	16	146	24
113	22	125	23.2	142	13	192	17
125	22	141	19	192	10	210	15
146	19	163	18	215	10	240	15.2
195	16	188	14	240	6	260	14
215	14	215	12	295	5.8	285	13
249	14	265	10				
295	11	290	10				

Pozo 5-E		Pozo 9-C		Pozo 9-D		Pozo 9-E	
t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²	t, hr.	Δp lb/pg ²
21	4	24	4	23.5	8.2	21	3
47	11	47	8	28.5	9.3	47	3
72	16.3	72	13	51	17	71	3
94	21.2	94	17.7	75	23.2	94	10
115	22	115	18	95	27.2	115	12.5
122	25	126	18	120	27	125	13
140	22.3	145	17	143	21	143	12.8
188	19.2	194	11	190	16	195	13
210	18	215	13	215	14	215	13
285	15	245	11	270	13	240	10
		295	10	285	12	295	10

$q_w = 115 \text{ brl/d}$ $h = 25 \text{ pies}$ $B_w = 1.0$ $c_o = 7.5 \times 10^{-6} \text{ pg}^2/\text{lb}$ $c_w = 3.3 \times 10^{-6} \text{ pg}^2/\text{lb}$
 $\phi = 20 \%$ $\mu_w = 1 \text{ cp}$ $S_g = 0$ $c_r = 3.7 \times 10^{-6} \text{ pg}^2/\text{lb}$ $c = 8 \times 10^{-6} \text{ pg}^2/\text{lb}$
 $T = 72 \text{ }^\circ\text{F}$ $p_o = 36 \text{ }^\circ\text{API}$ $r_w = 0.563 \text{ pies}$ $p_i = 240 \text{ lb/pg}^2$

Ramey, reporta que utilizó para el análisis, sólo los pozos 5-E, 1-E y 1-D y comenta que el análisis con los pozos opuestos conduce a resultados semejantes, lo cual permite concluir que la suposición del modelo de anisotropía ideal es razonablemente correcta para este caso. A continuación se enlistan los resultados presentados en ese artículo:

$k_{xx} = 15.2 \text{ mD}$ $k_{yy} = 19.4 \text{ mD}$ $k_{xy} = 3.12 \text{ mD}$ $\phi \mu c_t = 1.57 \times 10^{-6} \text{ cp}/(\text{lb/pg}^2)$
 $k_{m\acute{a}x} = 21.1 \text{ mD}$ $k_{m\acute{i}n} = 13.5 \text{ mD}$ $\theta = 62.1$

Como se muestra en la Figura 6-12, el eje "x" coincide con una línea que pasa a través de los pozos 5-C, 5-D y 5-E. El norte verdadero corresponde a una línea a través de los pozos 5-D y 5-E, por lo cual el eje de permeabilidad preferente o mayor tiene una dirección norte 14.8° oeste.

La Figura siguiente, muestra los ajustes con la solución de línea fuente, observándose que los pozos 1-E, 1-D y 5-E, presentan un comportamiento de presión similar desfasado en las escalas de tiempo. Este comportamiento, es típico de pruebas de interferencia de presión en yacimientos idealmente anisotrópicos, y es precisamente la clave para identificarlos.

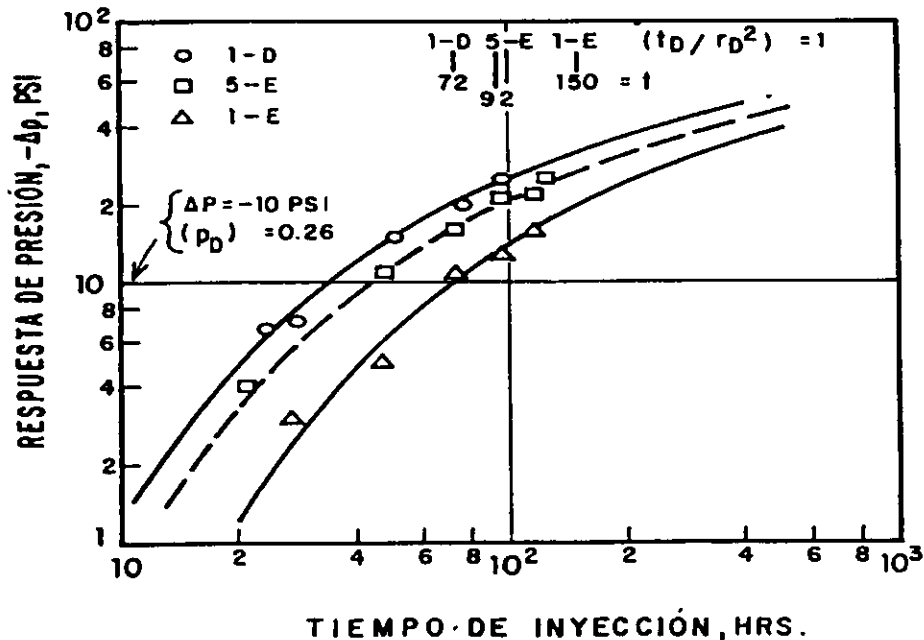


Fig. 6-13.- AJUSTE CON LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE PARA LOS POZOS 5-C, 5-D Y 5-E³³.

El análisis con **SAINT**, inicia con el ajuste para cada una de las pruebas con el modelo de yacimiento homogéneo e isotrópico, primeramente con curvas tipo, continuando con técnicas semilogarítmicas y finalmente con regresión no-lineal. Con la finalidad de cumplir con la premisa indicada en el párrafo anterior para la regresión no-lineal, en referencia a que el ajuste en presión debe ser semejante para todas las pruebas, esto es, el mismo valor de permeabilidad, se hace uso de la flexibilidad del menú que permite mantener fijo este parámetro durante el proceso de optimización.

La Figura 5-50 presenta la pantalla de entrada de datos de **SAINT** con la distribución de pozos, notándose que las pruebas de pozos que serán consideradas en el análisis se presentan indicados por un círculo. La Figura 5-51 muestra la información numérica,

a partir de la cual se genera la pantalla de la Figura 5-50, y que incluye los valores de permeabilidad y porosidad calculados para todas las pruebas. Se observa que los valores de permeabilidad son iguales para todos los pozos, con una magnitud de 16.91 mD.

Concluida la alimentación de datos al sistema, es posible ejecutar la regresión, tal como se explicó en el Capítulo V. A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo varios escenarios que consideran diferentes grupos de pozos a la vez. Adviértase que los resultados difieren entre si y son función del número de pozos usados. Es importante hacer notar que Ramey obtuvo sus resultados con la técnica de curvas tipo, que adolece de errores inherentes a la subjetividad del analista, y los presentados aquí se estiman con regresión no-lineal; no obstante las diferencias que se aprecian son pequeñas.

Pozo	k, mD	ϕ	Resultados		
1-E	16.91	0.178	$k_{xx} = 15.226 \text{ mD}$ $k_{yy} = 19.074 \text{ mD}$ $k_{xy} = 2.114 \text{ mD}$ $\phi\mu c_t = 1.59 \times 10^{-6} \text{ cp/lb/pg}^2$ $k_{m\acute{a}x} = 20.008 \text{ mD}$ $k_{m\acute{i}n} = 14.291 \text{ mD}$ $\theta = 66.16$		
5-E	16.91	0.228			
1-D	16.91	0.182			

Considerando los pozos opuestos, se tiene:

Pozo	k mD	ϕ	Resultados		
9-C	16.91	0.159	$k_{xx} = 14.637 \text{ mD}$ $k_{yy} = 19.805 \text{ mD}$ $k_{xy} = 2.195 \text{ mD}$ $\phi\mu c_t = 1.397 \times 10^{-6} \text{ cp/(lb/pg}^2)$ $k_{m\acute{a}x} = 20.664 \text{ mD}$ $k_{m\acute{i}n} = 13.838 \text{ mD}$ $\theta = 69.98$		
9-D	16.91	0.154			
5-C	16.91	0.209			

Debido a que las pruebas de los pozos 9-E y 1-C no tienen un ajuste satisfactorio, en el siguiente escenario se toman solamente seis pozos en conjunto:

Pozo	k mD	ϕ	Resultados		
1-E	16.91	0.178	$k_{xx} = 15.062 \text{ mD}$ $k_{yy} = 19.279 \text{ mD}$ $k_{xy} = 2.107 \text{ mD}$ $\phi\mu c_t = 1.502 \times 10^{-6} \text{ cp/(lb/pg}^2)$ $k_{m\acute{a}x} = 20.152 \text{ mD}$ $k_{m\acute{i}n} = 14.19 \text{ mD}$ $\theta = 67.98$		
5-E	16.91	0.228			
1-D	16.91	0.182			
9-C	16.91	0.159			
9-D	16.91	0.154			
5-C	16.91	0.209			

VI.4 Análisis de pruebas de pulsos

El-Khatib⁴⁸ en 1987, presentó una técnica de regresión no-lineal, útil para el análisis de pruebas de interferencia a gastos múltiples y pruebas de pulsos. La metodología desarrollada fue comprobada con el análisis de cuatro casos generados sintéticamente:

- a) Periodo de cierre y apertura iguales.
- b) Periodos de cierre desiguales a los de apertura.
- c) Periodos de cierre y apertura desiguales.
- d) Periodos de cierre y apertura iguales con gastos diferentes.

Los valores usados en el simulador, para generar los datos de presión son: $R = 500$ ft, $k = 12$ mD, $\phi = 0.2$, $\mu = 1.2$ cp, $h = 10$ pies, $c_t = 1 \times 10^{-6}$ pg²/lb y $B = 1.0$. Es importante hacer notar que el registro que se utilizó para verificar el comportamiento de la técnica de regresión no lineal consideró la presión redondeada a la primera cifra decimal.

En la Figura 6-14 se muestra el ajuste logrado para los cuatro casos. En el artículo de El-Khatib, para el ejemplo 1, se inicia el proceso de regresión no lineal con valores de $k = 35.8$ mD y $\phi = 0.106$, lo cual representa una lejanía en porcentaje del 297 y 187% de los valores reales respectivamente; el proceso de optimización requirió de 7 iteraciones y con el procedimiento programado en **SAINT**, sólo se necesitaron 4 iteraciones, lo cual corrobora la robustez del método de solución.

En la Tabla 6.2, se presenta un resumen para los cuatro casos estudiados. Se hace notar que, para todos los casos, se obtienen buenos resultados y que el procedimiento que usa **SAINT** requiere menos iteraciones para llegar a la solución.

Debido a que los datos usados en presión consideran solamente una aproximación a la primera cifra decimal, en la regresión no se llega a obtener la solución de $k = 12$ mD y $\phi = 0.2$ usada en el simulador para generar el registro.

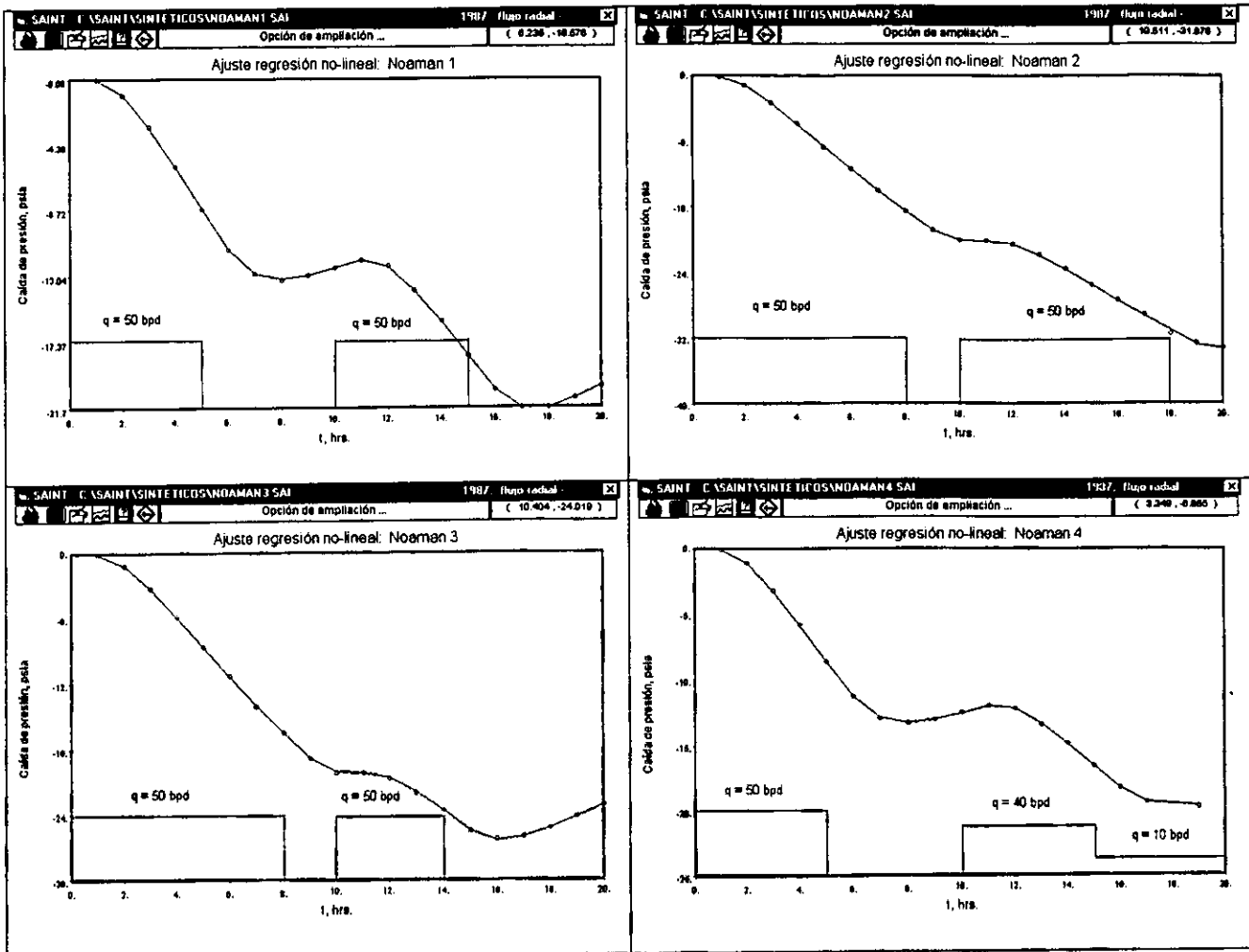


Fig. 6-14. ANÁLISIS POR REGRESIÓN NO-LINEAL CON EL SISTEMA SAINT.

La Tabla 3-1 (pag. 73), presenta para el primer caso los resultados comparativos entre la técnica de regresión no lineal propuesta por El-Khatib y la programada en el sistema SAINT; la Figura 3-2 (pag. 71), presenta la configuración tridimensional del comportamiento del error promedio respecto a la porosidad y permeabilidad.

TABLA 6-2 RESUMEN DE RESULTADOS PARA LOS CUATRO CASOS ESTUDIADOS.

Caso	k de inicio	ϕ de inicio	k estimada	ϕ estimada	Iteraciones El-Khatib	Iteraciones SAINT
1	35.827	0.1062	12.0158	0.1982	7	4
2	34.830	0.1048	11.953	0.198	7	4
3	31.519	0.1086	12.009	0.198	5	5
4	36.061	0.1038	12.007	0.198	7	5

VI.5 Prueba de Interferencia con flujo lineal

Este caso fue presentado por Economides⁵¹ en 1987, y considera dos pozos perforados en el lecho de un paleocanal con un ancho aproximado de 400 pies. El pozo A produjo 30 horas mientras que el B, a 1800 pies de distancia, se mantuvo cerrado con un registrador de fondo durante 250 horas.

Las presiones registradas y los datos adicionales necesarios para el análisis se muestran en la Tabla 6.3, la Figura 6-15 presenta el ajuste obtenido con **SAINT** utilizando la técnica de curvas tipo.

TABLA 6-3 INFORMACIÓN DE PRESIONES Y DATOS ADICIONALES.

Tiempo, hr.	Presión, lb/pg ²	
0	2442	
10	2435.8	
15	2422.6	
20	2414.7	
25	2400.7	
30	2387.6	
35	2378.9	
40	2373.7	
75	2378.9	
100	2385.8	
250	2405	

q = 500 bpd
 μ = 0.95 cp
 $c_t = 8 \times 10^{-6}$ pg²/lb
 b = 400 ft
 h = 25 ft

Observe el ajuste excelente logrado para la parte de decremento e incremento. Al mover manualmente la curva de datos sobre la curva tipo, **SAINT** efectúa una estimación de t_{pD} / x_D^2 , que ayuda a encontrar el mejor ajuste posible. Observe que la curva de ajuste para el incremento concuerda satisfactoriamente con el valor estimado y presentado en la parte superior izquierda.

El análisis de consistencia, ver parte superior derecha, utilizando la extensión de la técnica de El-Khatib para flujo lineal propuesta en este trabajo, también corrobora la calidad del análisis. Recuerde que esta técnica es válida solamente para el decremento

y que los datos a tiempos cortos se encuentran a la derecha de la gráfica debido a que se utiliza el recíproco del tiempo en el eje de las abscisas. Además con base en la experiencia, se recomienda utilizar los datos a tiempos largos para ajustar la recta; los datos a tiempos largos se ubican a la izquierda de la gráfica y contienen un ruido menor que los de la derecha por motivos de cálculo de la derivada y debido a una mejor estabilización de la sonda de presión. Para este caso la recta considera convenientemente los tres últimos puntos, de los cinco registrados en el decremento.

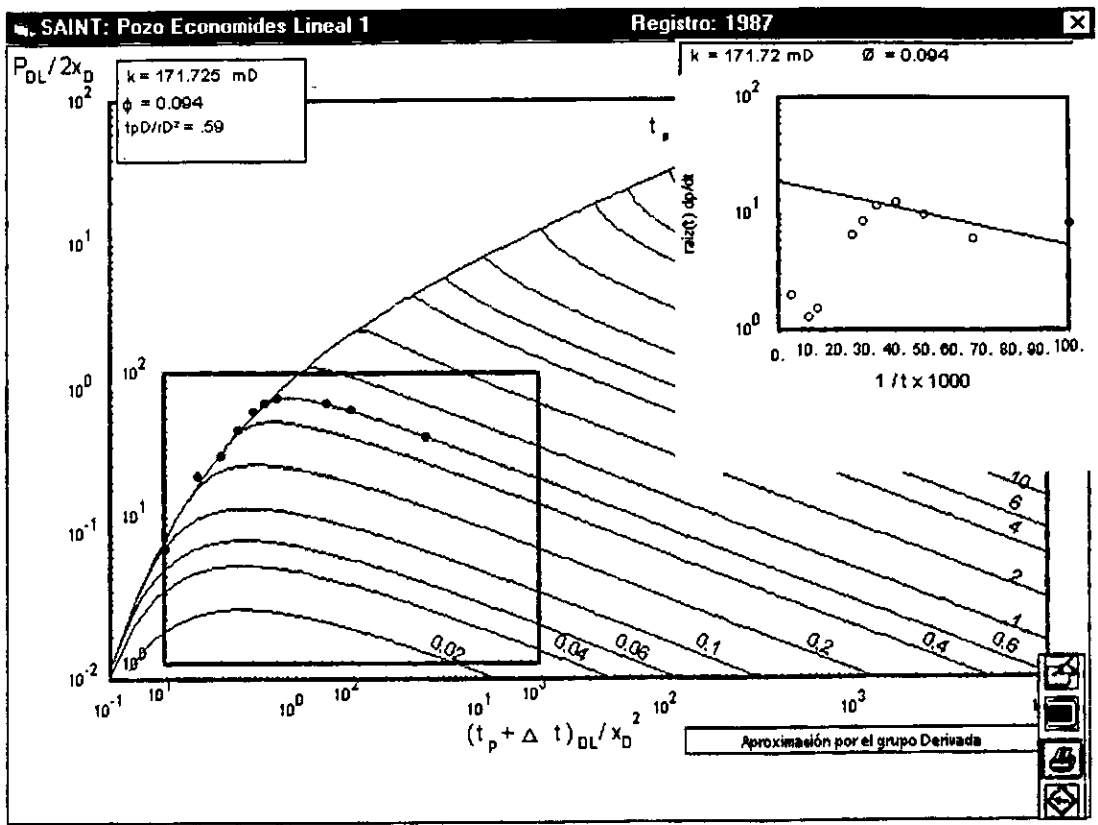


Fig. 6-15. ANÁLISIS POR CURVAS TIPO Y GRUPO DERIVADA CON EL SISTEMA SAINT.

Los valores reportados por Economides en su análisis manual de curvas tipo son $k = 171 \text{ mD}$ y $\phi = 0.092$, que concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos con SAINT.

El gasto de producción del pozo A fue de 500 brl/día, sin embargo a SAINT se le alimentó con un valor de 250 que corresponde a la mitad. Esta situación se explica

debido a que la solución propuesta por el Dr. Miller¹⁸, supone que la mitad del fluido producido proviene de la dirección del pozo de observación.

Con los resultados obtenidos $k = 171.725$ mD y $\phi = 0.094$, se ejecutó la técnica de regresión no lineal. En la Figura 6-16, se presenta la comparación gráfica de los datos medidos y las estimaciones del modelo de flujo lineal.

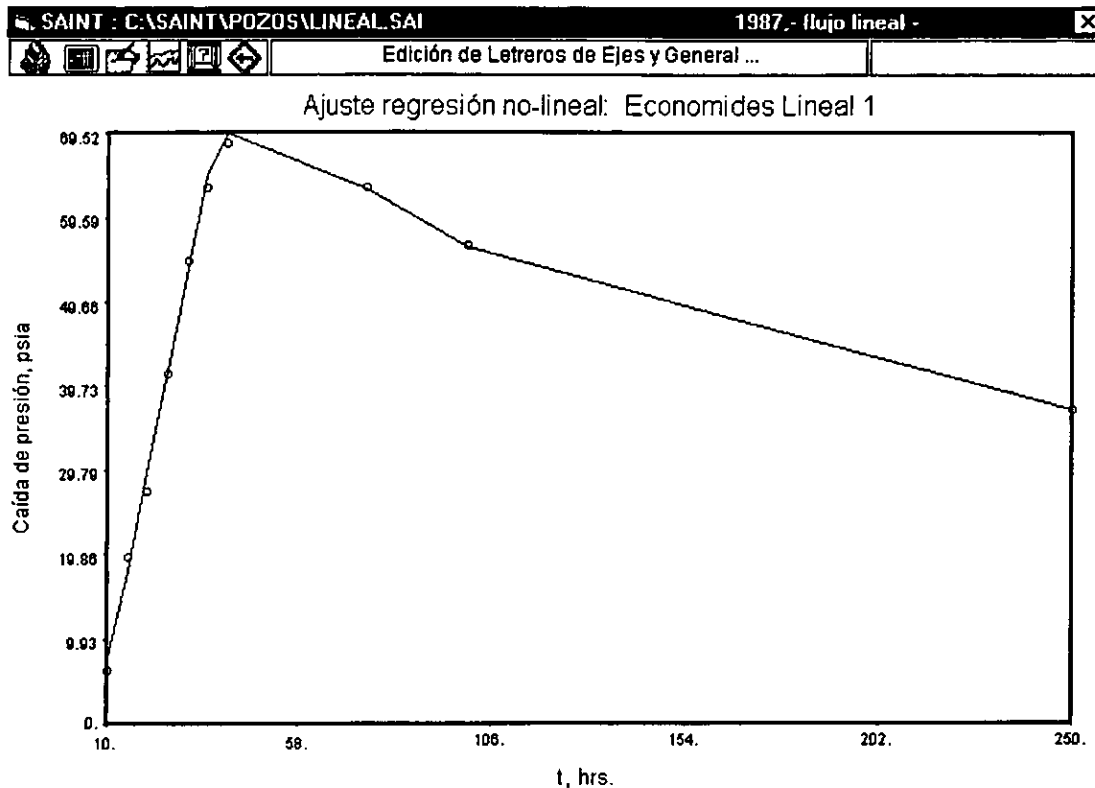


Fig. 6-16. ANÁLISIS POR REGRESIÓN NO LINEAL CON EL SISTEMA SAINT.

Los valores reportados después de 3 iteraciones son: $k = 166.407$ mD y $\phi = 0.089$, lo que representa un error de ajuste igual 0.921 lb/pg², mucho más favorable que el error inicial de 1.347 lb/pg². Recuerde que el error reportado por SAINT es igual a la sumatoria de las caídas de presión en valor absoluto dividida entre el número de datos.

VI.6 Prueba de interferencia con efectos de almacenamiento y daño

Wei Chun Chu²³ y coautores presentan como ejemplo de aplicación, generado sintéticamente, una prueba de interferencia de presión con dos pozos de observación,

A y B, localizados a 100 y 87 pies del pozo activo. En la Figura 6-17, se presenta la grafica doblelogarítmica del tiempo contra la caída de presión en el pozo activo, observándose la pendiente unitaria al inicio de la prueba, indicativa de efectos de almacenamiento de pozo, y la parte final representativa de flujo radial. A partir del análisis semilogarítmico convencional se obtienen valores de $k = 20$ mD y $s = 20.2$; por otro lado a partir de los datos en la zona de pendiente unitaria se estima $C_D = 9.91 \times 10^3$. En la Tabla 6-4, se presentan los registros de presión contra tiempo para los pozos considerados en la prueba de interferencia.

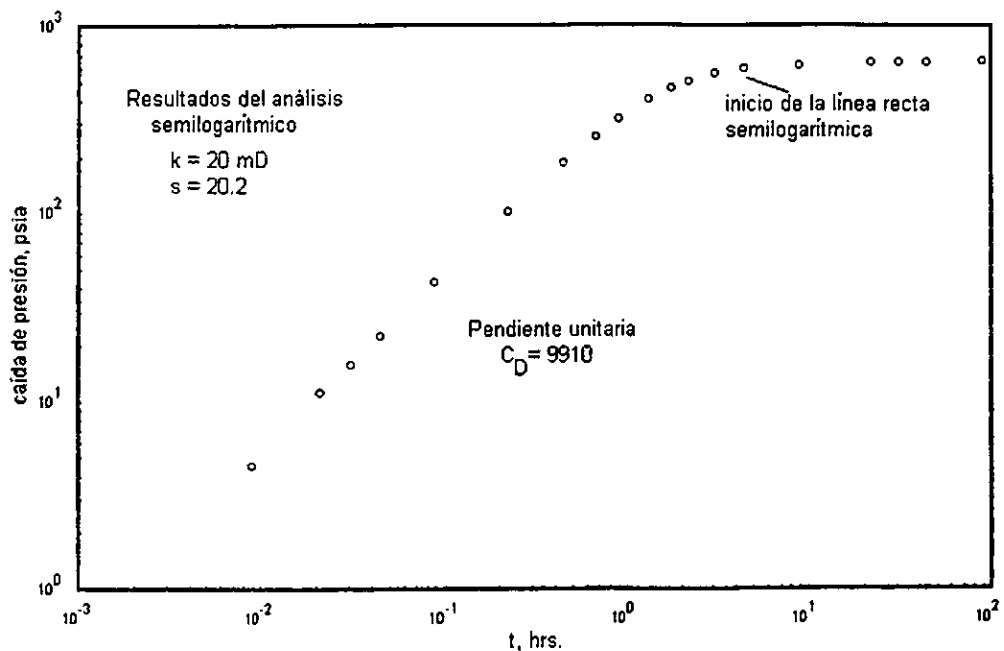


FIG. 6-17. COMPORTAMIENTO DE LA CAÍDA DE PRESIÓN EN EL POZO ACTIVO.

Los datos utilizados en el análisis son: $h = 48$ pies, $c_t = 1.1 \times 10^{-5}$ pg²/lb, $\mu = 0.8$ cp, $B_o = 1.0$ vol. @c.y/vol. @ c.s, $r_w = 0.276$ pies, $\phi = 0.18$, $q = 193$ brl/día y $p_i = 2405$ lb/pg².

Aplicando la ecuación (II.30), es posible estimar el tiempo a partir del cual los efectos del almacenamiento y daño en el pozo observador son despreciables; para este caso se obtienen valores de 173.67 y 166.85 horas para los pozos A y B, respectivamente. En la Figura 6-18 se muestra el cálculo realizado por **SAINT**, para el pozo A.

Almacenamiento y daño	
Pozo activo	
C_D <input type="text" value="9910"/>	s <input type="text" value="20."/>
r_w <input type="text" value="0.276"/>	<input type="text" value="pie"/>
Pozo observador	
C_D <input type="text"/>	s <input type="text"/>
r_w <input type="text" value="0.0"/>	<input type="text" value="pg"/>
<p>Tiempo estimado para que los efectos de almacenamiento y daño sean despreciables en el pozo observador: 173.67 hrs.</p> <p>Grupo ajuste = 1.616</p>	

FIG. 6-18. CÁLCULO DEL TIEMPO AL CUAL LOS EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO SON DESPRECIABLES EN EL POZO DE OBSERVACIÓN.

Esta situación obliga a realizar el análisis con la curva tipo de Ogbe, Figura 2-10 (pag. 28), que considera efectos de almacenamiento y daño en el pozo activo.

Utilizando los valores para C_D , s y las distancias entre pozos, se estima el grupo $(C_D e^{2s})^{C_D/r_0^2}$, para los pozos A y B, los cuales resultaron de 1.616 y 2.151, respectivamente; obsérvese el cálculo de **SAINT**, en la Figura 6-19, para el pozo A. Los ajustes con la curva tipo, para ambos pozos, se muestran en las Figuras 6-19 y 6-20.

Nótese que los valores calculados de k y ϕ concuerdan satisfactoriamente con los resultados obtenidos en el pozo activo y los datos del análisis; esta situación se presenta debido a que los datos fueron generados sintéticamente con un modelo de yacimiento homogéneo e isotrópico.

Para casos reales de campo, no necesariamente deben obtenerse parámetros idénticos, pero si del mismo orden de magnitud. Esto se explica debido a que los volúmenes y propiedades de roca que intervienen en los pruebas son diferentes para cada pozo y tipo de prueba.

TABLA 6-4 REGISTROS DE TIEMPO CONTRA PRESIÓN PARA LOS POZOS EN LA PRUEBA DE INTERFERENCIA.

Pozo fluuyente		Pozo A		Pozo B	
tiempo hr	presión lb/pg ²	tiempo hr	presión lb/pg ²	tiempo hr	presión lb/pg ²
0.0088	2389.2	1.21	2404.62	0.91	2404.71
0.021	2382.6	1.5	2404.35	1.13	2404.5
0.031	2361.1	1.8	2404.03	1.36	2404.25
0.044	2301.3	2.42	2403.26	1.81	2403.65
0.088	2215.9	3.02	2402.37	2.26	2402.94
0.22	2145.2	3.62	2401.4	2.72	2402.15
0.44	2086.6	4.53	2399.85	3.4	2400.88
0.66	1997.4	5.13	2398.8	3.85	2400
0.88	1935.5	6.04	2397.2	4.53	2398.64
1.31	1892.1	7.54	2394.6	5.66	2396.64
1.75	1839.8	9.1	2392.12	6.79	2394.15
2.19	1804.6	12.1	2387.72	9.06	2390
3.06	1778	15	2384.03	11.32	2386.36
4.38	1764.5	18	2380.92	13.59	2383.2
8.75	1760.2	24.2	2376.2	18.1	2378.1
21.88	1755.9	30.2	2372.7	22.65	2374.23
30.63	1747.7				
43.76	2405				
87.53	2405				

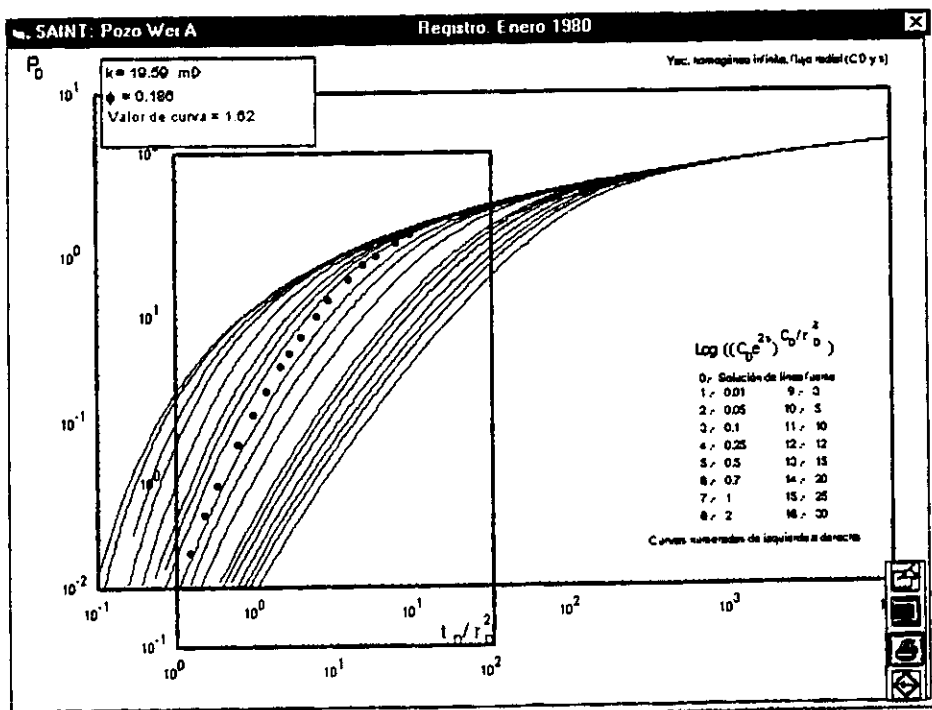


FIG. 6-19. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA EL POZO "A". NOTE LA CONCORDANCIA CON EL VALOR DE LA CURVA ESTIMADA EN EL RECUADRO SUPERIOR IZQUIERDO.

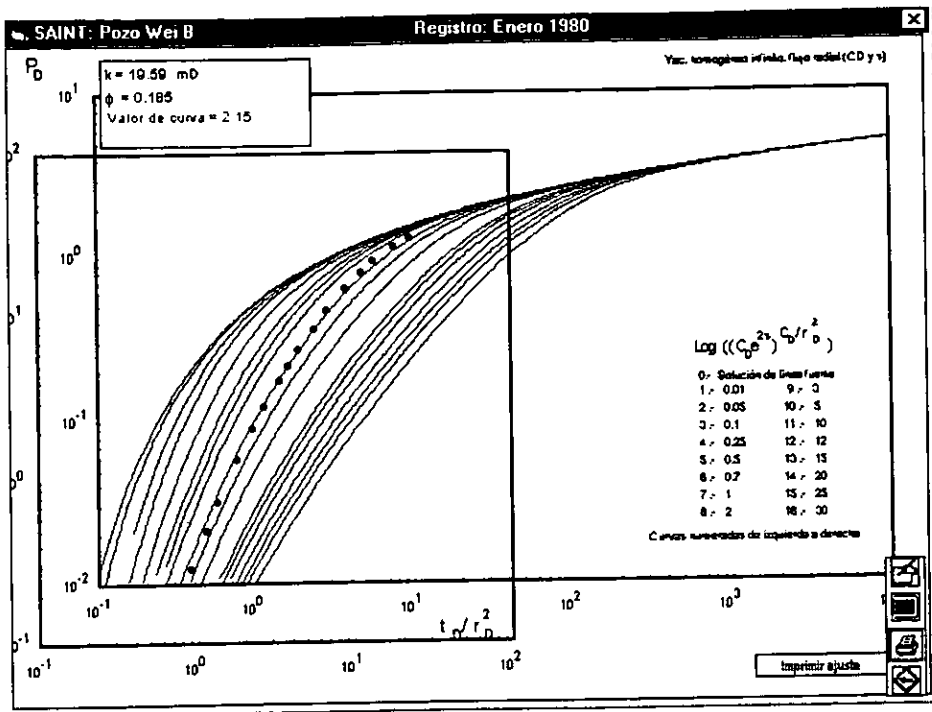


FIG. 6-20. AJUSTE CON CURVA TIPO PARA EL POZO "B".

El procedimiento de regresión no-lineal se efectuó para ambos pozos, resultando en buenos ajustes. El pozo A inició con valores de $k = 19.598$, $\phi = 0.185$, $C_D = 9910$ y $s = 20.2$, lo cual generaba un error = 0.208; después de 20 iteraciones los valores estimados son $k = 19.605$, $\phi = 0.185$, $C_D = 10770$ y $s = 17.02$, con un error de 0.051. En la Figura 6.21 se presenta la grafica de ajuste y en la Figura 6.22 la estadística de resultados. Puede notarse que la variación no explicada es menor al 1%.

El ajuste con el pozo B se consiguió con valores de $k = 19.598$, $\phi = 0.185$, $C_D = 10839$ y $s = 16.89$, reportando un error igual a 0.052 y una variación no explicada de 0.52 %. No se incluyen para el pozo B las gráficas de ajuste ni la salida de la estadística del error, por no considerarse relevantes para el cumplimiento del objetivo del ejemplo.

El modelo de almacenamiento y daño contiene como posibles incógnitas a k , ϕ , η_1 , η_2 , C_{D1} , s_1 , C_{D2} y s_2 , esto es, 8 parámetros. Aunque, SAINT permite elegir el conjunto completo de parámetros, es responsabilidad del usuario seleccionar sólo algunos de ellos, puesto que si se eligen incógnitas linealmente dependientes resultará en sistemas de ecuaciones mal condicionados. En la estimación de parámetros se genera

un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas; para que exista solución única, es indispensable que las ecuaciones sean linealmente independientes, esto es, que no exista posibilidad de representar alguna de ellas en función de las otras. Debido a los errores de precisión de las computadoras, se utiliza el número de condición que sustituye el concepto de determinante; cuando el número de condición es alto la solución del sistema es inestable y se dice que el sistema esta mal condicionado.

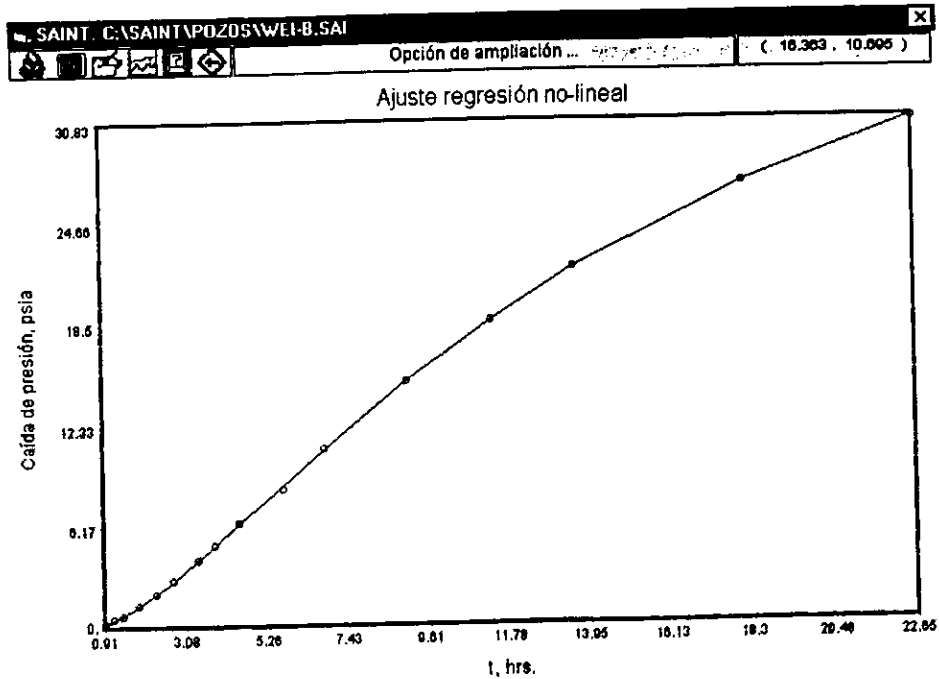


FIG. 6-21. AJUSTE DE REGRESIÓN NO LINEAL PARA EL POZO "A".

Estadísticas del ajuste	
Estadísticas del Error	
Error promedio	-1.43694134957813
Varianza	3.74146395428179
Desviación estándar	1.93428641991867
Estadísticas de la bondad de ajuste	
Coef. de correlación lineal	999979882507372
Coef. de correlación general	1.0026084280937
Variación explicada (%)	99.4776339915484
Variación no explicada (%)	1.522366008451636

FIG. 6-22.- ESTADÍSTICAS DEL AJUSTE PARA EL POZO "A".

VI.7 Prueba de interferencia en un yacimiento naturalmente fracturado

La prueba de interferencia se efectuó en 1980, en el campo geotérmico Klamath Falls en Oregon, Estados Unidos de América. El propósito de las pruebas era estimar el grado de comunicación entre pozos y determinar el impacto de producción en los pozos privados vecinos.

El pozo activo, City no. 1, bombeo agua con un gasto de 23300 brl/día, y en los pozos Parks, Glen Head y Adamcheck, a una distancia de 180, 1420 y 1000 pies, respectivamente, se monitoreó la respuesta de presión.

El análisis que se presenta en esta tesis corresponde al pozo Parks, en el cual se utilizó un registrador de cristal de cuarzo, con una resolución aproximada de 0.01 lb/pg². El incremento máximo de presión observado fue aproximadamente de 0.25 psi. El tiempo de atraso observado en este pozo fue de 10 segundos, lo cual indica un alto grado de comunicación.

Con relación a la información adicional para este análisis se utilizó $B = 1.0$, $\mu = 0.3$ cp, $r_w = 0.73$ pies en el pozo City no. 1.

Los valores reportados por Deruyck, utilizando la técnica de curvas tipo, son: $kh = 4.3 \times 10^6$, $(\phi V c_t)_f = 1.3 \times 10^{-3}$, $(\phi V c_t)_{f+m} = 15 \times 10^{-3}$, $\omega = 0.09$ y $\lambda = 1.3 \times 10^{-6}$.

La Figura 6-23, presenta el ajuste logrado con el modelo de yacimientos naturalmente fracturados, que considera el flujo interporoso en estado pseudoestacionario. Obsérvese que la cercanía del pozo activo y la precisión de las mediciones, permitieron definir con muy buena calidad el comportamiento típico de un yacimiento naturalmente fracturado. Por otro lado, se puede notar que los datos a tiempos largos alcanzan la aproximación logarítmica de la solución.

Los resultados obtenidos concuerdan satisfactoriamente con los de Deruyck, $kh = 4.351 \times 10^6$, $(\phi V_{Ct})_f = 1.521 \times 10^{-3}$, $(\phi V_{Ct})_{f+m} = 15.21 \times 10^{-3}$, $\omega = 0.1$ y $\lambda = 1.3 \times 10^{-6}$.

La Figura 6-24, muestra el análisis semilogarítmico, pudiendo notarse el ajuste excelente y la definición de las dos rectas paralelas características de las pruebas en yacimientos fracturados, tan enfatizada en la literatura técnica.

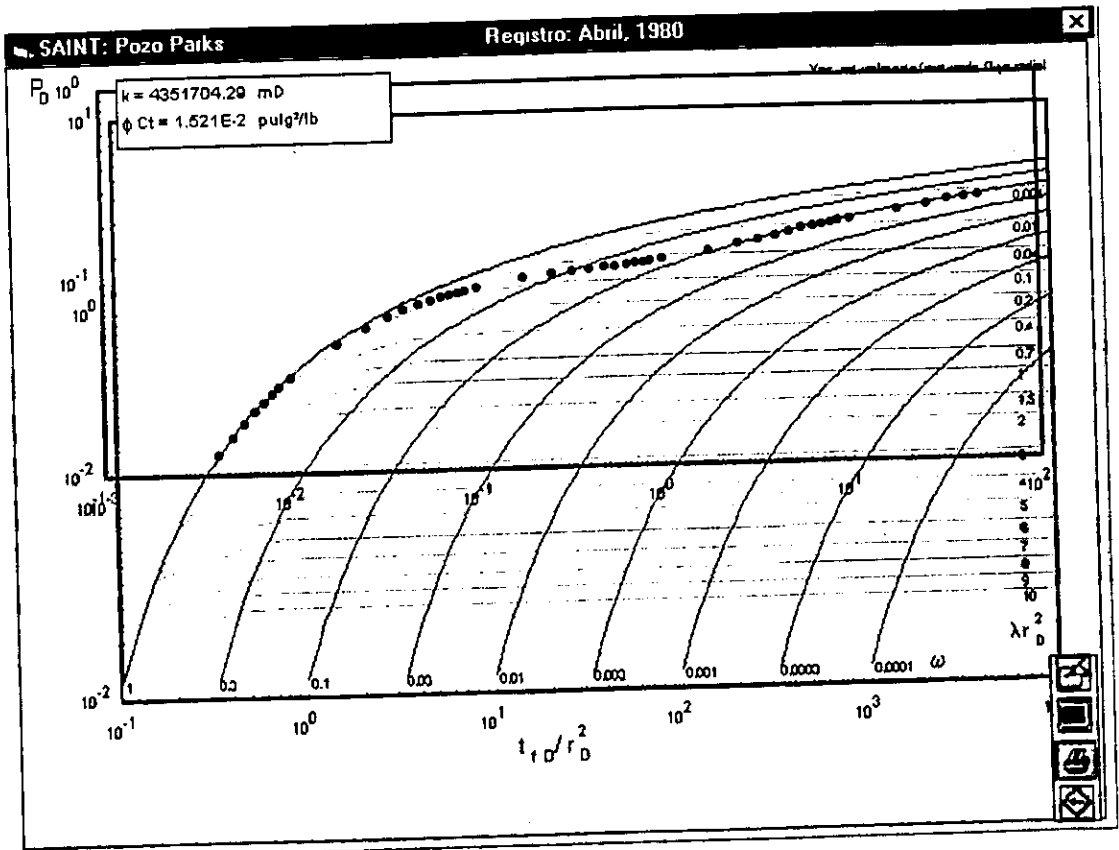


FIG. 6-23.- ANÁLISIS POR CURVAS TIPO A LOS DATOS DEL POZO PARKS.

Con los resultados de las técnicas anteriores se alimentó el vector inicial necesario para ejecutar la regresión no lineal programada en **SAINT**, obteniéndose en 3 iteraciones los resultados siguientes: $kh = 4.3 \times 10^6$, $(\phi V_{Ct})_f = 1.32 \times 10^{-3}$, $(\phi V_{Ct})_{f+m} = 15. \times 10^{-3}$, $\omega = 0.088$ y $\lambda = 1.281 \times 10^{-6}$, con un error de 32.7×10^{-5} lb/pg².

Es posible concluir que los resultados alcanzados por medio de las diferentes técnicas, corroboran la calidad del análisis. Deruyck presenta el análisis a los pozos Glen Head y

Adamcheck, resaltando los resultados semejantes obtenidos, lo cual corrobora la naturaleza del comportamiento del yacimiento.

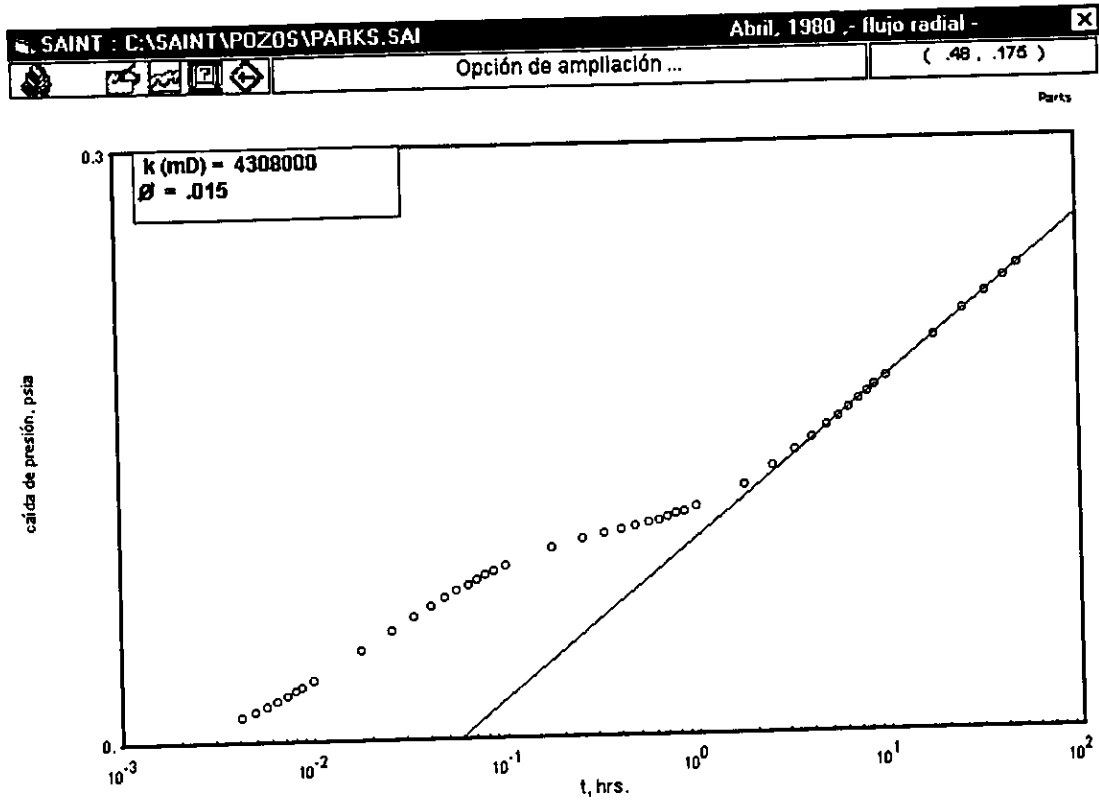


FIG. 6-24.- ANÁLISIS POR TÉCNICA SEMILOGARÍTMICA A LOS DATOS DE INTERFERENCIA DE PRESIÓN REGISTRADOS EN EL CAMPO KLAMATH FALLS, POZO PARKS.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

En forma general se concluye que las técnicas y procedimientos desarrollados en este trabajo, constituyen una opción de análisis que permite mejorar la calidad de la caracterización del sistema yacimiento-pozo, así como una reducción en el esfuerzo necesario para el estudio de los registros tiempo contra presión.

La nueva función de presión N , para flujo lineal, esférico y radial, permite analizar pruebas de interferencia de presión eliminando automáticamente la tendencia lineal de presión del yacimiento, lo cual mejora la calidad de los resultados, con repercusiones económicas importantes, ya que evita la necesidad de registrar la presión en los pozos observadores durante varias horas antes del inicio de la prueba, para definir adecuadamente la tendencia de presión. Se determinó que a medida que la continuidad de las mediciones de presión se incrementa desde tiempos cortos, la definición de la interpretación mejora notablemente; esta conclusión se explica por la necesidad del cálculo numérico de la integral de los datos de campo.

Se ha mencionado consistentemente en la literatura que la ventaja de las pruebas de pulsos sobre las de interferencia es la eliminación automática de las tendencias lineales de presión debido al método de análisis. Con el uso de los nuevos grupos de presión esta ventaja desaparece, dejando en igualdad de circunstancias a ambos tipos de pruebas.

El método propuesto para el cálculo de la presión al inicio de las pruebas de pozos múltiples, resultó de gran utilidad para la estimación adecuada de las propiedades

físicas del yacimiento. Con su aplicación se eliminan errores de estimación que en algunos casos pueden ser de importancia.

El método de regresión no lineal utilizado en este trabajo, con funciones de restricción y la implementación de un procedimiento de interpolación-extrapolación para la definición del factor de sobrerelajación, reportó gran estabilidad y reducción en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución respecto a otros publicados en la literatura.

Las técnicas de análisis propuestas para pruebas de interferencia con geometrías de flujo lineal y esférico, permiten con el uso de la derivada de presión, realizar estimaciones de las características del yacimiento en una forma sencilla y confiable. Esta nueva alternativa presenta la posibilidad de incrementar la comparación de técnicas de análisis con fines de estudio de consistencia a los resultados obtenidos.

El procedimiento, para estimar direcciones preferentes de flujo para yacimientos idealmente anisotrópicos, planteado en esta tesis, mejora la calidad en los resultados, ya que permite considerar al mismo tiempo las pruebas de 3 o más pozos observadores.

Se considera relevante la aplicación rutinaria futura del procedimiento general de análisis propuesto, para la obtención de resultados confiables y ahorro de tiempo. Asimismo, tomar en cuenta las recomendaciones para la adquisición de la información y su manipulación.

La conformación del sistema **SAINT** así como su validación constituyen un valioso logro, con implicaciones relevantes para los ingenieros de campo, ya que coadyuva en la aplicación fácil y rápida de procedimientos de análisis, situados en la vanguardia de la tecnología. **SAINT** es una herramienta de gran utilidad para el análisis de pruebas de interferencia y pulsos, ya que reduce al mínimo los errores posibles involucrados en el manejo de la información, ahorrando un tiempo considerable; además debido a su

estructura, es amigable en su uso y permite la validación de los resultados debido a que contiene simuladores analíticos, y características gráficas que permiten visualizar al mismo tiempo interpretaciones con diferentes técnicas.

Recomendaciones

Como primer punto, se enfatiza en la necesidad de considerar todas las recomendaciones descritas en el procedimiento general de análisis, para la consecución de resultados confiables. Se omite el duplicar en esta parte la información; el lector interesado deberá revisar las páginas 109 a 114 del Capítulo IV.

Para la aplicación de los grupos de presión "N", se recomienda utilizar la mayor cantidad de datos posibles en el cálculo de la integral de la presión respecto al tiempo, principalmente los registrados a tiempos cortos, con la finalidad de lograr buenos ajustes con las curvas tipo correspondientes.

En la estimación de la derivada de presión respecto al tiempo, necesaria para el uso de las técnicas de El-Khatib y las desarrolladas en este trabajo para flujo esférico y lineal, se recomienda suavizar la señal antes de aplicar el procedimiento numérico de cálculo y/o probar diferentes parámetros de diferenciación, que consideren mayor o menor número de datos aledaños en la evaluación de la derivada en un punto dado.

NOMENCLATURA

A	Intersección en la técnica de El-Khatib
B	Factor de volumen, Vol. @ c.y./ Vol. @ c.e.
c.e.	Condiciones estándar: $p = 14.7 \text{ lb/pg}^2$ y $t = 60^\circ$ Farenheit
c.y.	Condiciones de yacimiento
c_t	Compresibilidad total, $(\text{lb/pg}^2)^{-1}$
C_D	Coefficiente de almacenamiento adimensional
C_{D1}	Coefficiente de almacenamiento adimensional del pozo observador
C_{D2}	Coefficiente de almacenamiento adimensional del pozo activo
C	Constante de almacenamiento del pozo (brl/lb/pg^2)
d	Número de parámetros incógnitas
Desv()	Desviación estandar
e	2.7182
E()	Valor medio, esperanza matemática
E_1	Integral exponencial, $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -E_i(-x)$
erf	Función error, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$
erfc	Función error complementaria, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$
$F_1(P_D)$	Función de presión adimensional considerada en el ajuste por curvas tipo
$F_1(P_D)_m$	Punto de ajuste para la presión adimensional en técnica de curvas tipo
$F_2(t_D)$	Función de tiempo adimensional considerada en el ajuste por curvas tipo
$F_2(t_D)_m$	Punto de ajuste para el tiempo adimensional en técnica de curvas tipo
g	Grado de la tendencia de presión
h	Espesor neto de la formación, pies
H	Matriz Hessiana
Ic	Integral de los datos de campo, $I_c = \int_0^t \Delta p d\tau$
J	Matriz Jacobiana
k	Permeabilidad, mD
k_H	Permeabilidad horizontal
k_V	Permeabilidad vertical
k_f	Permeabilidad del sistema fracturado
k_m	Permeabilidad del sistema matriz
k_x, k_{xx}	Permeabilidad en la dirección 'x'
k_y, k_{yy}	Permeabilidad en la dirección 'y'
k_{xy}, k_{yx}	Elementos del tensor de permeabilidad
$k_{\text{máx}}$	Permeabilidad en la dirección preferente de flujo
$k_{\text{mín}}$	Permeabilidad en la dirección perpendicular a la preferente
K_0	Función modificada de Bessel de segunda clase y orden cero
K_1	Función modificada de Bessel de segunda clase y orden uno

Subíndices y Superíndices

D	Adimensional
f	Sistema de fracturas
i	Condiciones iniciales
m	Sistema matriz
w	Medido en el pozo
1	Pozo observador
2	Pozo activo
n+1	Vector solución en la nueva iteración
n	Vector solución en la iteración actual

SISTEMAS DE UNIDADES

Parámetro	Sistema Darcy	Sistema Inglés (Práctico de campo)
α	$1/2\pi$	141.2
β	1	0.0002637
k	Darcy	mD
h,r	cm	pie
q	cm ³ /seg @ c.y.	Brl/día @ c.e.
B	-	Vol. @ c.y./Vol. @ c.e.
μ	cp	cp
t	seg	hr
ϕ	fracción	fracción
c_t	atm ⁻¹	(lb/pg ²) ⁻¹

REFERENCIAS

1. Theis, C.V.: "The Relation Between the Lowering of The Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of Well Using Groundwater Storage", Trans. Amer. Geophys. Union (1935) 16,519.
2. Johnson, C. R., Greenkorn, R. A., Woods, E. G.: "Pulse-Testing: A New Method for Describing Reservoir Flow Properties Between Wells", artículo SPE 1519, JPT (Diciembre 1966) 1599-1604; Trans. AIME, 237.
3. Kamal, M. M.: "Interference and Pulse Testing - A Review", artículo SPE 10042, JPT (Diciembre 1983) 2257-2270.
4. Padmanabhan, L., "Welltest – A Program for Computer-Aided Analysis of Pressure Transients Data from Well Tests", artículo SPE 8391, 54th Annual Fall Meeting, Las Vegas, (Septiembre 23-26,1979).
5. Martínez-Romero, Néstor: "Desarrollo de una Técnica de Regresión, para el Análisis Automático de Pruebas de Presión: Aplicación al Campo Abkatún", XXIV Congreso Anual de la Asociación de Ingenieros Petroleros de México, 1986.
6. El-Khatib, N. A. F.: "Pulse Test Analysis By Nonlinear Regression", artículo SPE 17129, (Julio 23, 1987) Unsolicited.
7. Roland N. Horne: "Modern Well Test Analysis. A Computer-aided Approach". PETROWAY, INC., Palo Alto, Ca. (1990).
8. Ramey, H. J., Jr.: "Short Time Well Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage", JPT(Enero 1970) 97-104; Trans. AIME, 249.
9. Earlougher, Robert C., Jr.: "Advances in Well Test Analysis", Monograph Volume 5, Society of Petroleum Engineers, (1977).
10. Brigham, W. E.: "Planning and Analysis of Pulse-Tests", JPT (Mayo 1970) 618-624; Trans. AIME, 249.
11. Kamal, M. M., Brigham, W. E.: "Design and Analysis of Pulse Tests With Unequal Pulse and Shut-In Periods", JPT (Mayo 1976) 205-212; Trans. AIME, 261.
12. Vela, S. : "Effect of a Linear Boundary on Interference And Pulse Tests - The Elliptical Influence Area", artículo 5886, JPT (Agosto 1977) 947; Trans., AIME, 263.
13. Vela, Saul, McKinley, R. M.: "How Areal Heterogeneities Affect Pulse-Test Results", SPEJ (Junio 1970) 181; Trans., AIME, 249.

14. Roest, J. A., Rodríguez, R. A.: "Pulse Testing Reveals Poor Lateral and Vertical Continuity in a Reservoir Consisting of Distributy-Channel Sands", artículo 15613, presentado en la 63ava. Annual Technical Conference and Exhibition in New Orleans, LA. (Octubre 5-8, 1986).
15. Culham, W.E.: "Amplification of Pulse-testing Theory", JPT (Octubre 1969), artículo SPE 2509, 1245-1247.
16. El-Khatib, N.A.F.: "New Correlations for Time Lags and Pressure Response Amplitude in Pulse-test Analysis", artículo SPE 21404, presentado en el SPE Middle East Oil Show en Bahrain, (Noviembre 16-19, 1991).
17. A.T.Chatas: "Unsteady Spherical Flow in Petroleum Reservoirs", artículo SPE 1365, (1966).
18. Miller Frank G.: "Theory of Unsteady-state Influx of Water in Linear Reservoirs", artículo 1498-G, Stanford California (Marzo 1960) 1-45.
19. C.S. Matthews y D.G. Russell: "Pressure Buildup and Flow Tests in Wells", Monograph Volume 1, SPE Henry L. Doherty Series, 1967.
20. Prats, M. y Scott, J.B.: "Effect of Wellbore Storage on Pulse-Test Pressure Response", JPT (Junio 1975), 707-709.
21. Garcia-Rivera J., Raghavan R.: "Analysis of Short Time Pressure Transient Data Dominated by Wellbore Storage and Skin at Unfractured Active and Observation Wells", artículo SPE 6546, (Abril 1977).
22. Sandal, Hugo, Horne R. y Ramey H.: "Interference Testing with Wellbore Storage and Skin Effect at the Produced Well", artículo SPE 7454, (Octubre 1-4, 1978) presentado en el 53avo. Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Houston.
23. Chun, Chu Wei, Garcia-Rivera J, Raghavan Rajagopal: "Analysis of Interference Test Data Influenced by Wellbore Storage and Skin at the Flowing Well", JPT (Enero 1980) 171-178.
24. Tongpenyai, Y. , Raghavan, Rajagopal: "The Effect of Wellbore Storage and Skin on Interference Test Data", JPT (Enero 1981), 151-160.
25. Ogbe David, Brigham W.: "Pulse Testing with Wellbore Storage and Skin Effects", SPE Formation Evaluation 12780, (Marzo 1987), 29-42.
26. Stehfest, H.: "Algorithm 368 Numerical Inversion of Laplace Transform", D-5, Communications of the ACM (Enero 1970), 13, No. 1, 47-49.
27. Jargon, J.R.: "Effect of Wellbore Storage and Wellbore Damage at the Active Well on Interference Test Analysis", JPT (Agosto, 1976), 851-858.

28. Ogbe David, Brigham W.: "A Correlation for Interference Testing with Wellbore Storage and Skin Effects", SPE Formation Evaluation (Septiembre 1989), 391-396.
29. Warren J.E. y Root P.J. : "Behavior of Naturally Fractured Reservoirs". JPT (Septiembre, 1963).
30. Mavor M.J. y Cinco Ley H. : "Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs". Artículo SPE 7977, presentado en el California Regional Meeting (Abril 18-20, 1979).
31. Deruyck, G. Bruno, Bourdet, P. Dominique: "Interpretation of Interference Tests in Reservoirs with Double Porosity Behavior-Theory and Field Examples", artículo SPE 11025, presentado en la reunión anual de New Orleans de 1982.
32. Q, Ma, D. Tiab: "Interference Test Analysis in Naturally Fractured Reservoirs", artículo 29514, presentado en el Production Operations Symposium en Oklahoma City, Ok., (Abril 1995).
33. Ramey, H. J.: "Interference Analysis for Anisotropic Formations - A Case History". JPT (Octubre 1975) 1290-1298;Trans., AIME, 259.
34. Gutiérrez Ruiz, M. E. : "Uso de Curvas Tipo en el Análisis de Pruebas de Interferencia y de un solo Pulso", Tesis Profesional de Ingeniero Petrolero, Facultad de Ingeniería, UNAM (1984).
35. Lescarboua, A. Jaime, Walter, C. Herbert: "Design and Analysis of Interference Tests", artículo 5314, Presentado en la reunión regional de la SPE en California, Ventura (Abril 1975).
36. Djebbar Tiab y Kumar Anil: "Application of The P'_d Function to Interference Analysis", artículo SPE 6053, JPT (Agosto 1980),1465-1470.
37. El-Khatib, Noaman, A. F.: "A New Approach to Interference Test Analysis", SPE Formation Evaluation (Diciembre 1987) 609-610.
38. Kamal, M. M. y Brigham, W. E.: "The Effect of Linear Pressure Trends on Interference Tests", JPT (Noviembre 1975) 1383-1384.
39. Martínez Romero, N., Salgado Castro, H., León Ventura, R., Rodríguez de la Garza, F., Antúnez Uribe, E., Flores Cortes, S.: "Análisis de las Pruebas de Presión Registradas en el Campo Abkatún del 15 Al 28 de Agosto de 1984", Reporte interno Instituto Mexicano del Petróleo", 1984.
40. Cinco Ley, H., Macias Chapa, L., Samaniego Verduzco, F. y Morales Gil, C.: "Analysis of Well Tests Affected by a Pressure Trend", Artículo SPE 20554, (Sept. 23-26, 1990) presentado en la Annual Technical Conference and Exhibition New Orleans, LA.

41. Earlougher, Robert C, Kersch, Keith M.: "Field Examples of Automatic Transient Test Analysis", JPT (Octubre, 1972) 1271-1277.
42. Padmanabhan, L., Y P.T. Woo, "A New Approach to Parameter Estimation in Well Testing", artículo SPE 5741, Proceeding of the Fourth SPE Symposium on Reservoir Simulation, Los Angeles, (Febrero 19-20, 1976).
43. Tsang, C.F., Mc Edwards, D.G., Narasimhan, T.N. y Witherspoon, P.A., "Variable Flow Well Test Analysis by a Computer Assisted Matching Procedure", artículo SPE 6547, 47th Annual California Regional Meeting, California, (Abril 13-15, 1977).
44. Padmanabhan, L.: "Welltest – A program for Computer-Aided Analysis of Pressure Transient Data from Well Tests", artículo SPE 8391, presentado en el 54avo Annual Fall Meeting en las Vegas Nevada, (Septiembre 23-26, 1979).
45. Stoner M. A.: "New Way to Design Natural Gas Systems", Pipe Line Industry, (Febrero 1970), 38-42.
46. Rosa, A. y Horne, R.: "Automated Type Curve Matching in Well Test Analysis Using Laplace Space Determination of Parameter Gradients", artículo SPE 12131, presentado en la 58ava Annual Technical Conference and Exhibition en San Francisco, Ca. (Octubre 5-8, 1983).
47. Hanson Jonathan M., "Nonlinear Inversion of Pressure-Transient Data", SPE Formation Evaluation, (Agosto 1986).
48. El-Khatib, Noaman: "Pulse Test Analysis by Nonlinear Regression", Artículo SPE 17129, (Julio 1987) Unsolicited.
49. Murray R. Spiegel Ph.D.: "Probabilidad y Estadística", McGraw-Hill, (1976).
50. Martínez Romero, Néstor: "Nuevos Procedimientos para la Caracterización Dinámica de Yacimientos Petroleros, a Partir del Análisis de Pruebas de Interferencia", presentado en el XXXVI Congreso de la AIPM, Mérida 1999.
51. Economides, J. Michael, Ogbe, O. David: "How to Analyze Interference Well Tests", World Oil (Julio-Septiembre-Octubre 1987) 38-42, 54-57, 71-76.
52. Murray R., Spiegel: "Manual de Fórmulas Matemáticas". Schaum, Mc Graw-Hill (1959).
53. Gradshteyn I.S. y Ryzhik I.M.: "Table of Integrals, Series and Products". VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Germany, (1957).
54. Mueller, Thomas D. y Witherspoon, Paul A.: "Pressure Interference Effects Within Reservoirs and Aquifers", J. Pet. Tech. (Abril, 1965) 471-474
55. Dr. Fernando Rodríguez de la Garza. Comunicación Personal.

APÉNDICE A

DERIVADAS PARCIALES

En este apéndice se presenta el desarrollo de las derivadas parciales que constituyen el Jacobiano de los diferentes modelos matemáticos planteados en el Capítulo II.

- Flujo esférico, yacimiento homogéneo infinito
- Flujo lineal, yacimiento homogéneo infinito
- Flujo radial, yacimiento homogéneo infinito
- Flujo radial yacimiento homogéneo e infinito con efectos de almacenamiento y daño en el pozo activo y/o observador
- Flujo radial, yacimiento naturalmente fracturado infinito

Se estiman las derivadas respecto a la permeabilidad, porosidad y todos los posibles parámetros incógnitas, tales como el coeficiente de flujo interporoso y la relación de almacenamiento fractura-matriz para el caso de yacimiento naturalmente fracturado.

FLUJO ESFÉRICO, YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO

La siguiente ecuación expresada por medio de variables reales y unidades de campo, permite estimar la caída de presión en función de la posición y tiempo, considerando una tendencia de presión en el yacimiento de tipo cuadrática.

$$\Delta p = \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta kt}{\phi \mu c_1 r^2}}} \right) + \eta_2 t^2 + \eta_1 t. \quad \text{A.1}$$

La función error complementaria se define como⁵²:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du. \quad \text{A.2}$$

A continuación se presenta la estimación de la derivada parcial de la caída de presión, ecuación (A.1), respecto a la permeabilidad. Considerando la definición planteada en la ecuación (A.2), se tiene:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = -\frac{\alpha q B \mu}{2k^2 r} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta k t}{\phi \mu c_t r^2}}} \right) + \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right); \quad \text{A.3}$$

para derivar bajo el signo de integral se hace uso de la regla de Leibnitz⁵³, que expresa:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + F(\phi_1, \alpha) \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} - F(\phi_2, \alpha) \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha}. \quad \text{A.4}$$

Aplicando la regla anterior, y dado que:

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}}, \phi_2 = \infty \text{ y } F = e^{-u^2}, \quad \text{A.5}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial k} = \sqrt{\frac{r^2}{4\beta t}} \frac{\partial \eta^{-\frac{1}{2}}}{\partial k} = -\sqrt{\frac{r^2}{4\beta t}} \frac{1}{2} \eta^{-\frac{3}{2}} \frac{\eta}{k} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}}; \quad \text{A.6}$$

entonces:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = -\frac{\alpha q B \mu}{2k^2 r} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta k t}{\phi \mu c_t r^2}}} \right) + \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(0 - e^{-\frac{r^2}{4\beta \eta t}} \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}} + 0 \right). \quad \text{A.7}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{\alpha q B \mu}{\sqrt{\pi} k r} \left(-\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}} e^{-\frac{r^2}{4\beta \eta t}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta k t}{\phi \mu c_t r^2}}} \right) \right) \quad \text{A.8}$$

Derivando parcialmente la ecuación (A.1) respecto a la porosidad:

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{\alpha q B \mu}{2kr} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right) ; \quad \text{A.9}$$

aplicando la regla de Leibnitz, como en el caso anterior de la permeabilidad, tenemos:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} = \sqrt{\frac{r^2}{4\beta t}} \frac{\partial \eta^{-\frac{1}{2}}}{\partial \phi} = \sqrt{\frac{r^2}{4\beta t}} \frac{1}{2} \eta^{-\frac{3}{2}} \frac{\eta}{\phi} = \sqrt{\frac{r^2}{4\beta t}} \frac{1}{2\phi \sqrt{\eta}} \quad \text{A.10}$$

Sustituyendo términos, se obtiene:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{\alpha q B \mu}{2kr\phi} \sqrt{\frac{r^2}{4\pi\beta \eta t}} e^{-\frac{r^2}{4\beta \eta t}} = \frac{\alpha q B \mu}{2\phi k r} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{r^2}{4\beta \eta t}} e^{-\frac{r^2}{4\beta \eta t}} \quad \text{A.11}$$

Finalmente derivando respecto a las tendencias cuadrática y lineal de tendencia de presión:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_1} = t ; \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_2} = t^2 \quad \text{A.12}$$

Las ecuaciones (A.8), (A.11) y (A.12) constituyen las expresiones básicas para estimar el Jacobiano que interviene en el proceso iterativo de regresión no-lineal.

FLUJO LINEAL, YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO

La ecuación que permite estimar la caída de presión respecto al tiempo y la posición con una tendencia de presión en el yacimiento de tipo cuadrática, en variables reales y unidades de campo, puede expresarse como:

$$\Delta p = 2\pi\alpha \frac{qB\mu}{kbh} \left[\sqrt{\frac{4\beta\eta t}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\beta\eta t}\right)} - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\beta\eta t}}\right) \right] + \eta_2 t^2 + \eta_1 t. \quad \text{A.13}$$

Definiendo $z = 4\beta\eta t$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\Delta p = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh} \left[\sqrt{\frac{z}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{z}\right)} - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) \right] + \eta_2 t^2 + \eta_1 t = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh} A + \eta_2 t^2 + \eta_1 t. \quad \text{A.14}$$

Derivando parcialmente respecto a la permeabilidad y considerando que:

$$\frac{\partial z}{\partial k} = \frac{z}{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \eta}{\partial k} = \frac{\eta}{k}, \quad \text{A.15}$$

tenemos:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{k^2 bh} [-A] + \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh} \left[\sqrt{\frac{z}{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{z}\right)} \left(-x^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{z}\right)}{\partial k} \right) + e^{-\left(\frac{x^2}{z}\right)} \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{z}{\pi}}\right)}{\partial k} - x \frac{\partial \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) \right\}}{\partial k} \right]; \quad \text{A.16}$$

estimando las derivadas sin desarrollar:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{z}\right)}{\partial k} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial k} = -\frac{1}{z^2} \frac{z}{k} = -\frac{1}{zk}; \quad \text{A.17}$$

$$\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial k} = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}} \frac{\partial z}{\partial k} = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}} \frac{z}{k} = -\frac{1}{2k\sqrt{z}}; \quad \text{A.18}$$

aplicando la regla de Leibnitz (ecuación A.4):

$$\frac{\partial}{\partial k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{x^2}{z}}; \quad \text{A.19}$$

ya que:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) = x \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = x \frac{-\frac{\partial(\sqrt{z})}{\partial k}}{z} = \frac{x}{2} \frac{1}{k\sqrt{z}^3}; \quad \text{A.20}$$

entonces, sustituyendo esta ecuación (A.20) en la ecuación (A.19):

$$\frac{\partial}{\partial k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{2k\sqrt{z}^3} e^{-\frac{x^2}{z}} = \frac{x}{k\sqrt{\pi z^3}} e^{-\frac{x^2}{z}}. \quad \text{A.21}$$

Sustituyendo las expresiones (A.17), (A.18) y (A.21) en (A.16):

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{k bh} \left[-\frac{A}{k} + \left[\sqrt{\frac{z}{\pi}} \left(\frac{x^2}{zk}\right) + \left(-\frac{1}{2k\sqrt{\pi z}}\right) - \frac{x^2}{k\sqrt{\pi z^3}} \right] e^{-\frac{x^2}{z}} \right]; \quad \text{A.22}$$

considerando el valor de A, definido en la ecuación (A.14):

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{k bh} \left[\left(-\frac{1}{k} \sqrt{\frac{z}{\pi}} + \frac{x^2}{k\sqrt{z\pi}} - \frac{1}{2k\sqrt{z\pi}} - \frac{x^2}{k\sqrt{z^3\pi}} \right) e^{-\frac{x^2}{z}} + \frac{x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) \right]; \quad \text{A.23}$$

reagrupando:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{k^2 bh} \left[\left(-\sqrt{\frac{z}{\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{z\pi}} + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{z\pi}} - \frac{1}{\sqrt{z^3\pi}} \right) \right) e^{-\frac{x^2}{z}} + x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) \right]; \quad \text{A.24}$$

finalmente:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{k^2 bh} \left(x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) - e^{-\frac{x^2}{z}} \left(\sqrt{\frac{z}{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{z\pi}} - x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{z\pi}} - \frac{1}{\sqrt{z^3\pi}} \right) \right) \right). \quad \text{A.25}$$

Ahora, derivando parcialmente la ecuación (A.14) respecto a la porosidad:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh} \left[\sqrt{\frac{z}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{z}} \left(-x^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{z} \right)}{\partial \phi} \right) + e^{-\frac{x^2}{z}} \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{z}{\pi}} \right)}{\partial \phi} - x \frac{\partial}{\partial \phi} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{z}} \right) \right]; \quad \text{A.26}$$

estimando las derivadas involucradas en la ecuación (A.26):

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{z} \right)}{\partial \phi} = -\frac{1}{z^2} \left(-\frac{4\beta kt}{\phi^2 \mu ct} \right) = \left(-\frac{1}{z^2} \right) \left(-\frac{4\beta \eta t}{\phi} \right) = \left(-\frac{1}{z^2} \right) \left(-\frac{z}{\phi} \right) = \frac{1}{z\phi}; \quad \text{A.27}$$

$$\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial z}{\partial \phi} = \left(-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \right) \left(-\frac{z}{\phi} \right) = \frac{1}{2\phi\sqrt{z}}; \quad \text{A.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right) = -\frac{\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial \phi}}{z} = \frac{-1}{2\phi z\sqrt{z}} = -\frac{1}{2\phi z\sqrt{z}}; \quad \text{A.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{z}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{x}{\sqrt{z}} \right) e^{-\left(\frac{x^2}{z} \right)} = -\frac{x}{\sqrt{\pi\phi z\sqrt{z}}} e^{-\left(\frac{x^2}{z} \right)}; \quad \text{A.30}$$

sustituyendo las ecuaciones (A.27), (A.28) y (A.30) en la ecuación (A.26), tenemos:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh\phi} \left(-\sqrt{\frac{1}{\pi z}} x^2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} + \frac{x^2}{z\sqrt{\pi z}} \right) e^{-\frac{x^2}{z}}; \quad \text{A.31}$$

reagrupando:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{2\pi\alpha qB\mu}{kbh\phi} \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \left(x^2 \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x^2}{z}}. \quad \text{A.32}$$

Finalmente, derivando respecto a las tendencias cuadrática y lineal de la ecuación de tendencia de presión:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_1} = t, \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_2} = t^2 \quad \text{A.33}$$

Las ecuaciones (A.25), (A.32) y (A.33) constituyen las expresiones utilizadas para generar el Jacobiano utilizado durante el proceso de regresión no-lineal.

FLUJO RADIAL, YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO

La siguiente expresión, en variables reales y unidades de campo, permite estimar la caída de presión en función de la posición y el tiempo y toma en cuenta una tendencia de presión en el yacimiento de tipo cuadrática:

$$\Delta p = \frac{\alpha B \mu}{2kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) E_1 \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t - t_{j-1})} \right) + \eta_2 t^2 + \eta_1 t. \quad A.34$$

A diferencia de las ecuaciones (A.1) y (A.13), para flujo lineal y esférico respectivamente, esta expresión considera superposición en tiempo para tomar en cuenta los posibles cambios en el gasto del pozo activo; la generalización de las expresiones para flujo esférico y lineal puede efectuarse fácilmente con base en la forma de las ecuaciones derivadas para flujo radial.

Derivando parcialmente la ecuación (A.34) respecto a la permeabilidad:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = - \frac{\alpha B \mu}{2k^2 h} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) E_1 \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t - t_{j-1})} \right) + \frac{\alpha B \mu}{2kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) \frac{\partial}{\partial k} E_1 \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t - t_{j-1})} \right); \quad A.35$$

usando la regla de Leibnitz, ecuación (A.4), para derivar bajo el signo de integral, sea:

$$\phi_1 = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t - t_{j-1})}; \quad A.36$$

entonces:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial k} = - \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k^2(t - t_{j-1})}; \quad A.37$$

$$\frac{\partial}{\partial k} E_1 \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})} \right) = - \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k^2(t-t_{j-1})} \frac{e^{-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}}}{\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}} = - \frac{e^{-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}}}{k}; \quad \text{A.38}$$

sustituyendo (A.38) en (A.35), tenemos:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial k} = - \frac{\alpha B \mu}{2k^2 h} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) \left\{ E_1 \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})} \right) - e^{-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}} \right\}. \quad \text{A.39}$$

Ahora derivando parcialmente respecto a la porosidad la expresión (A.34), aplicando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} = \frac{\mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}; \quad \text{A.40}$$

sustituyendo términos:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{\alpha B \mu}{2kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) \left\{ \frac{\mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})} e^{-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}} / \frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})} \right\}. \quad \text{A.41}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \phi} = \frac{\alpha B \mu}{2\phi kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) \left\{ e^{-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k(t-t_{j-1})}} \right\}. \quad \text{A.42}$$

Derivando respecto a las tendencias cuadrática y lineal de la ecuación de tendencia de presión:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_1} = t \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial \eta_2} = t^2. \quad \text{A.43}$$

Las ecuaciones (A.39), (A.42) y (A.43) son las expresiones utilizadas para generar el Jacobiano utilizado durante el proceso de regresión no-lineal, para el caso de flujo radial, yacimiento homogéneo con comportamiento infinito.

FLUJO RADIAL, YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO, CON EFECTOS DE ALMACENAMIENTO Y DAÑO EN POZO ACTIVO Y/O OBSERVADOR

La solución para estimar la caída de presión adimensional en el plano de Laplace se presenta en la siguiente expresión:

$$\bar{\Delta p}_{WD} = \frac{K_0(r_D \sqrt{p_L})}{p_L \left[\left\{ 1 + C_{D1} p_L (s_1 + K_0(\sqrt{p_L})) \right\} \left\{ 1 + C_{D2} p_L (s_2 + K_0(\sqrt{p_L})) \right\} - C_{D1} C_{D2} (p_L K_0(r_D \sqrt{p_L}))^2 \right]} \tag{A.44}$$

Definiendo: $A_1 = 1 + C_{D1} p_L (s_1 + K_0(\sqrt{p_L}))$, $A_2 = 1 + C_{D2} p_L (s_2 + K_0(\sqrt{p_L}))$,
 $A_3 = C_{D1} C_{D2} (p_L K_0(r_D \sqrt{p_L}))^2$, $\Delta = A_1 * A_2 - A_3$, A.45

la expresión (A.44) puede presentarse como:

$$\bar{\Delta p}_{WD} = \frac{K_0(r_D \sqrt{p_L})}{p_L \Delta} \tag{A.46}$$

La ecuación (A.46) considera como variable real de tiempo a t_D . Para estimar las derivadas se procede a ponerla en función de t , utilizando la propiedad de la

transformada de Laplace, $\zeta(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p_L}{a}\right)$; para nuestro caso la constante, se

define como $a = \frac{\beta k}{\phi \mu c_t r_w^2}$, entonces (A.46) se transforma en:

$$\bar{\Delta p}_{WD} = \frac{K_0\left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}}\right)}{p_L \Delta} \tag{A.47}$$

donde: $A_1 = 1 + C_{D1} \frac{p_L}{a} \left(s_1 + K_0\left(\sqrt{\frac{p_L}{a}}\right) \right)$ $A_2 = 1 + C_{D2} \frac{p_L}{a} \left(s_2 + K_0\left(\sqrt{\frac{p_L}{a}}\right) \right)$

$$A_3 = C_{D1} C_{D2} \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2 \quad A.48$$

Derivando parcialmente la expresión (A.47) respecto a la permeabilidad:

$$\frac{\partial \bar{\Delta} p_{WD}}{\partial k} = \frac{p_L \Delta \frac{\partial K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)}{\partial k} - K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \frac{\partial (p_L \Delta)}{\partial k}}{p_L^2 \Delta^2}; \quad A.49$$

desarrollando las derivadas en la ecuación (A.49), conociendo que $K_0'(x) = -K_1(x)$:

$$\frac{\partial K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)}{\partial k} = \frac{r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2k} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right); \quad A.50$$

$$\frac{\partial (p_L \Delta)}{\partial k} = p_L \frac{\partial \Delta}{\partial k} + \Delta \frac{\partial p_L}{\partial k} = p_L \frac{\partial \Delta}{\partial k}; \quad A.51$$

sustituyendo (A.50) y (A.51) en (A.49), se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\Delta} p_{WD}}{\partial k} = \frac{p_L \Delta \frac{r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2k} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) - K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \left\{ p_L \frac{\partial \Delta}{\partial k} \right\}}{p_L^2 \Delta^2}; \quad A.52$$

desarrollando la derivada parcial de Δ respecto a k , presente en (A.52):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial k} = & A_1 \left\{ C_{D2} \left[\frac{-p_L}{ka} \left(s_2 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) + \frac{p_L}{a} \left(-K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - \frac{\sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2k} \right] \right\} \\ & + A_2 \left\{ C_{D1} \left[\frac{-p_L}{ka} \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) + \frac{p_L}{a} \left(-K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - \frac{\sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2k} \right] \right\} \quad A.53 \\ & - C_{D1} C_{D2} \left[2 \frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \left\{ \frac{-p_L}{ka} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) + \frac{p_L}{a} \left(-K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) r_D - \frac{\sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2k} \right\} \right] \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial k} = & -A_1 \left\{ C_{D2} \frac{p_L}{ka} \left(s_2 + K_o \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - C_{D2} \frac{p_L}{2ka} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right\} \\ & - A_2 \left\{ C_{D1} \frac{p_L}{ka} \left(s_1 + K_o \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - C_{D1} \frac{p_L}{2ka} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right\} \\ & + 2C_{D1}C_{D2} \frac{p_L}{a} K_o \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \left\{ \frac{p_L}{ka} K_o \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) - \frac{r_D p_L}{2ka} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \quad A.54$$

considerando las definiciones siguientes:

$$\begin{aligned} A_4 = & A_1 \left\{ C_{D2} \frac{p_L}{ka} (s_2 + K_o(A_7)) - C_{D2} \frac{p_L}{2ka} A_7 K_1(A_7) \right\} \\ A_5 = & A_2 \left\{ C_{D1} \frac{p_L}{ka} (s_1 + K_o(A_7)) - C_{D1} \frac{p_L}{2ka} A_7 K_1(A_7) \right\} \\ A_6 = & 2C_{D1}C_{D2} \frac{p_L}{a} K_o(r_D A_7) \left\{ \frac{p_L}{ka} K_o(r_D A_7) - \frac{r_D p_L}{2ka} A_7 K_1(r_D A_7) \right\}, \end{aligned} \quad A.55$$

donde $A_7 = \sqrt{\frac{p_L}{a}}$, la ecuación (A.52) se expresa como:

$$\frac{\partial \bar{\Delta} p_{WD}}{\partial k} = \frac{1}{p_L \Delta^2} \left\{ \Delta \frac{r_D A_7}{2k} K_1(r_D A_7) - K_o(r_D A_7) (-A_4 - A_5 + A_6) \right\} \quad A.56$$

Derivando parcialmente (A.47) respecto a la porosidad:

$$\frac{\partial \bar{\Delta} p_{WD}}{\partial \phi} = \frac{p_L \Delta \frac{\partial K_o \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)}{\partial \phi} - K_o \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \frac{\partial (p_L \Delta)}{\partial \phi}}{p_L^2 \Delta^2} \quad A.57$$

desarrollando las derivadas de la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{\partial K_o \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)}{\partial \phi} = -K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \frac{\partial \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)}{\partial \phi} = -\frac{r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2\phi} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right); \quad A.58$$

$$\frac{\partial(p_L \Delta)}{\partial \phi} = \Delta \frac{\partial p_L}{\partial \phi} + p_L \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} = p_L \frac{\partial \Delta}{\partial \phi}, \quad \text{A.59}$$

donde:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \phi} = A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \phi} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \phi} - \frac{\partial A_3}{\partial \phi}; \quad \text{A.60}$$

desarrollando:

$$\frac{\partial A_2}{\partial \phi} = \frac{\partial \left(C_{D2} \frac{p_L}{a} \right)}{\partial \phi} \left(s_2 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) + C_{D2} \frac{p_L}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(s_2 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right); \quad \text{A.61}$$

estimando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial A_2}{\partial \phi} = \left\{ \frac{p_L}{a} \frac{\partial C_{D2}}{\partial \phi} + C_{D2} \frac{\partial \left(\frac{p_L}{a} \right)}{\partial \phi} \right\} \left(s_2 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - C_{D2} \frac{p_L}{2\phi a} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \quad \text{A.62}$$

considerando que:

$$\frac{\partial C_{D2}}{\partial \phi} = \frac{0.8936 C_2}{\phi \mu c_1 h r_w^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\phi} \right) = -\frac{1}{\phi} C_{D2}. \quad \text{A.63}$$

Sustituyendo (A.63) en (A.62) y simplificando:

$$\frac{\partial A_2}{\partial \phi} = -C_{D2} \frac{p_L}{2\phi a} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \quad \text{A.64}$$

Tomando en cuenta la ecuación para A_1 incluida en la ecuación (A.60):

$$\frac{\partial A_1}{\partial \phi} = \frac{\partial \left(C_{D1} \frac{p_L}{a} \right)}{\partial \phi} \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) + C_{D1} \frac{p_L}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right); \quad \text{A.65}$$

desarrollando términos:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \phi} = \left\{ \frac{p_L}{a} \frac{\partial C_{D1}}{\partial \phi} + C_{D1} \frac{\partial \left(\frac{p_L}{a} \right)}{\partial \phi} \right\} \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) + C_{D1} \frac{p_L}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right); \quad \text{A.66}$$

estimando las derivadas parciales pendientes:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \phi} = \left(-\frac{p_L}{a} \frac{C_{D1}}{\phi} + C_{D1} \frac{p_L}{\phi a} \right) \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) - C_{D1} \frac{p_L}{2a\phi} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right); \quad \text{A.67}$$

simplificando:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \phi} = -C_{D1} \frac{p_L}{2a\phi} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right); \quad A.68$$

continuando con el tercer término de la ecuación (A.60):

$$\frac{\partial A_3}{\partial \phi} = \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2 \frac{\partial}{\partial \phi} (C_{D1} C_{D2}) + C_{D1} C_{D2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2; \quad A.69$$

desarrollando las derivadas parciales, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial \phi} = & \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2 \left(C_{D1} \frac{\partial C_{D2}}{\partial \phi} + C_{D2} \frac{\partial C_{D1}}{\partial \phi} \right) \\ & + C_{D1} C_{D2} 2 \frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right) \end{aligned} \quad A.70$$

estimando las derivadas pendientes de evaluar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial \phi} = & \left(\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2 \left(-C_{D1} \frac{C_{D2}}{\phi} - C_{D2} \frac{C_{D1}}{\phi} \right) \\ & + C_{D1} C_{D2} 2 \frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \left\{ \frac{p_L}{a\phi} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) - \frac{p_L}{a\phi} \frac{r_D}{2} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \quad A.71$$

desarrollando la expresión anterior:

$$\frac{\partial A_3}{\partial \phi} = \frac{2C_{D1}C_{D2}}{\phi} \left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{p_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \right)^2 + \left(\frac{p_L}{a} \right)^2 K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right)^2 \\ & - \left(\frac{p_L}{a} \right)^2 \frac{r_D}{2} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \end{aligned} \right\}; \quad A.72$$

agrupando términos y simplificando:

$$\frac{\partial A_3}{\partial \phi} = -\frac{C_{D1}C_{D2}}{\phi} r_D \left(\frac{p_L}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \quad A.73$$

Sustituyendo las derivadas de A₁, A₂, A₃ con respecto a la porosidad, ecuaciones (A.68), (A.64) y A(73), en la expresión (A.60) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} = & -A_1 C_{D2} \frac{p_L}{2\phi a} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) - A_2 C_{D1} \frac{p_L}{2\phi a} \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \\ & + \frac{C_{D1}C_{D2}}{\phi} r_D \left(\frac{p_L}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{p_L}{a}} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \right) \end{aligned} \quad A.74$$

Sustituyendo la expresión anterior, y las ecuaciones (A.58) y (A.59) en (A.57), se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho_L \Delta^2} \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \Delta \frac{r_D}{2\phi} K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) - \frac{1}{\rho_L \Delta^2} \frac{\rho_L}{2a\phi} \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \left(-A_1 C_{D2} K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) - A_2 C_{D1} K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) + 2C_{D1} C_{D2} r_D \left(\frac{\rho_L}{a\phi} \right) K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) K_1 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \right) \quad A.75$$

Derivando parcialmente (A.47) respecto al coeficiente de almacenamiento adimensional del pozo activo:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial C_{D1}} = \frac{K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \frac{\rho_L}{a} \left(s_1 + K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \right) A_2 + C_{D2} \left(\frac{\rho_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \right)^2}{\rho_L \Delta^2} \quad A.76$$

Derivando parcialmente (A.47) respecto al coeficiente de almacenamiento adimensional del pozo observador:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial C_{D2}} = \frac{K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \frac{\rho_L}{a} \left(s_2 + K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \right) A_1 + C_{D1} \left(\frac{\rho_L}{a} K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right) \right)^2}{\rho_L \Delta^2} \quad A.77$$

Derivando parcialmente (A.47) respecto al factor de daño en el pozo activo:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial s_1} = \frac{K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right)}{\rho_L} \frac{C_{D1} \frac{\rho_L}{a} A_2}{\Delta^2} \quad A.78$$

Derivando parcialmente (A.47) respecto al factor de daño en el pozo observador:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial s_2} = \frac{K_0 \left(r_D \sqrt{\frac{\rho_L}{a}} \right)}{\rho_L} \frac{C_{D2} \frac{\rho_L}{a} A_1}{\Delta^2} \quad A.79$$

Las ecuaciones (A.56), (A.75), (A.76), (A.77), (A.78) y (A.79) se utilizan para la estimación del Jacobiano para el caso de yacimiento homogéneo infinito, con flujo radial con efectos de frontera internos de almacenamiento y daño.

FLUJO RADIAL, YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO INFINITO

La ecuación que permite estimar la caída de presión adimensional a cualquier tiempo y posición, en el plano de Laplace es la siguiente:

$$\bar{\Delta p}_{WD} = \frac{K_o(r_D \sqrt{p_L f(p_L)})}{p_L} \quad \text{donde} \quad f(p_L) = \frac{\omega(1-\omega)p_L + \lambda}{(1-\omega)p_L + \lambda} \tag{A.80}$$

Definiendo los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{p_L f(p_L)}; & A_2 &= \omega(1-\omega)p_L + \lambda; \\ A_3 &= (1-\omega)p_L + \lambda; & A_4 &= A_1 r_D, \end{aligned} \tag{A.81}$$

la ecuación (A.80) puede expresarse como:

$$\bar{\Delta p}_{WD} = \frac{K_o(A_4)}{p_L} \quad \text{donde} \quad f(p_L) = \frac{A_2}{A_3} \tag{A.82}$$

La ecuación (A.82) considera como variable real de tiempo a t_D . Procediendo en forma similar como con la ecuación (A.46), para obtener la solución en función de tiempo dimensional, se tienen nuevas definiciones de A_1, A_2 y A_3 :

$$A_1 = \sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)}; \quad A_2 = \omega(1-\omega) \frac{p_L}{a} + \lambda; \quad A_3 = (1-\omega) \frac{p_L}{a} + \lambda, \tag{A.83}$$

donde:
$$f\left(\frac{p_L}{a}\right) = \frac{A_2}{A_3} \tag{A.84}$$

Derivando parcialmente la expresión (A.82) respecto a la permeabilidad:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial k} = \frac{p_L \frac{\partial(K_o(A_4))}{\partial k} - K_o(A_4) \frac{\partial p_L}{\partial k}}{p_L^2}; \tag{A.85}$$

simplificando:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial k} = \frac{-p_L K_1(A_4) \frac{\partial A_4}{\partial k}}{p_L^2}; \tag{A.86}$$

desarrollando la derivada del lado derecho de la ecuación (A.86):

$$\frac{\partial A_4}{\partial k} = r_D \left\{ \frac{1}{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \frac{\partial \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{\partial k} + \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{\partial f\left(\frac{p_L}{a}\right)}{\partial k} \right\}; \tag{A.87}$$

desarrollando las derivadas de (A.87):

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{\partial k} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{p_L}{a}}, \quad \text{A.88}$$

$$\frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial k} = \frac{1}{2\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \frac{\partial f\left(\frac{p_L}{a}\right)}{\partial k} = \frac{1}{2\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \frac{A_3 \frac{\partial A_2}{\partial k} - A_2 \frac{\partial A_3}{\partial k}}{A_3^2}; \quad \text{A.89}$$

simplificando:

$$\frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial k} = -\frac{(1-\omega)p_L}{2ka\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \left(\frac{A_3\omega - A_2}{A_3^2} \right); \quad \text{A.90}$$

definiendo:
$$A_5 = \frac{\omega A_3 - A_2}{A_3^2}, \quad \text{A.91}$$

entonces, la ecuación (A.90) puede expresarse:

$$\frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial k} = -\frac{(1-\omega)p_L}{2ka\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} A_5; \quad \text{A.92}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.88) y (A.92) en la ecuación (A.87):

$$\frac{\partial A_4}{\partial k} = -\frac{r_D}{2k} \sqrt{\frac{p_L}{a}} \left\{ \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} + \frac{(1-\omega)p_L}{a\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} A_5 \right\}. \quad \text{A.93}$$

Sustituyendo la ecuación (A.93) en la ecuación (A.86), finalmente se tiene:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial k} = K_1(A_4) \frac{r_D}{2kp_L} \sqrt{\frac{p_L}{a}} \left\{ \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} + \frac{(1-\omega)p_L}{a\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} A_5 \right\}. \quad \text{A.94}$$

Derivando la ecuación (A.82) respecto a la porosidad:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \phi} = \frac{p_L \frac{\partial (K_0(A_4))}{\partial \phi} - K_0(A_4) \frac{\partial p_L}{\partial \phi}}{p_L^2} \quad A.95$$

desarrollando:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \phi} = \frac{-p_L K_1(A_4) \frac{\partial A_4}{\partial \phi}}{p_L^2} \quad A.96$$

desarrollando las derivadas de la ecuación (A.96):

$$\frac{\partial A_4}{\partial \phi} = r_D \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right); \quad A.97$$

desarrollando la derivada de la ecuación (A.97):

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial \phi} = \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \frac{\partial \sqrt{\frac{p_L}{a}}}{\partial \phi} + \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial \phi} = \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \frac{1}{2\phi} + \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial \phi}; \quad A.98$$

desarrollando la derivada parcial pendiente:

$$\frac{\partial \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}}{\partial \phi} = \frac{\frac{\partial f(p_L/a)}{\partial \phi}}{2 \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} = \frac{(1-\omega)p_L}{2a\phi \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \left\{ \frac{\omega A_3 - A_2}{A_3^2} \right\} = \frac{(1-\omega)p_L}{2a\phi \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} A_5. \quad A.99$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.99) y (A.98) en la ecuación (A.97):

$$\frac{\partial A_4}{\partial \phi} = \frac{r_D \cdot p_L / a}{2\phi} \left\{ \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} + \frac{(1-\omega)p_L}{a \sqrt{f(p_L/a)}} A_5 \right\}. \quad A.100$$

Sustituyendo la ecuación (A.100) en la ecuación (A.96), finalmente se tiene:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \phi} = \frac{-K_1(A_4) r_D \sqrt{\frac{p_L}{a}} \left\{ \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} + \frac{(1-\omega)p_L}{a \sqrt{f(p_L/a)}} A_5 \right\}}{2\phi p_L}. \quad A.101$$

Derivando parcialmente la ecuación (A.82) respecto a la relación de almacenamiento fracturas-matriz:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \omega} = \frac{-p_L K_1(A_4) \frac{\partial A_4}{\partial \omega}}{p_L^2} = \frac{-p_L K_1(A_4) r_D}{p_L^2} \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \omega}; \quad \text{A.102}$$

desarrollando la derivada pendiente en la expresión anterior:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \omega} = \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{1}{\sqrt{f(p_L/a)}} \frac{\partial f\left(\frac{p_L}{a}\right)}{\partial \omega}, \quad \text{A.103}$$

donde:

$$\frac{\partial f(p_L/a)}{\partial \omega} = \frac{1}{A_3^2} \left(A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \omega} - A_2 \frac{\partial A_3}{\partial \omega} \right) = \frac{p_L}{a A_3^2} (A_3(1-2\omega) + A_2); \quad \text{A.104}$$

sustituyendo (A.104) en (A.103) y posteriormente en (A.102), finalmente se tiene:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \omega} = \frac{-K_1(A_4) r_D}{2 \sqrt{f(p_L/a)}} \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{(A_3(1-2\omega) + A_2)}{a A_3^2}. \quad \text{A.105}$$

Derivando la ecuación (A.82) respecto al coeficiente de flujo interporoso:

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \lambda} = \frac{-K_1(A_4) \frac{\partial A_4}{\partial \lambda}}{p_L} = \frac{-K_1(A_4) r_D}{p_L} \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \lambda}; \quad \text{A.106}$$

desarrollando la derivada pendiente en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{p_L}{a} f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \lambda} = \sqrt{\frac{p_L}{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)} \right)}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2 \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \frac{\partial f\left(\frac{p_L}{a}\right)}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{\frac{p_L}{a}}}{2 \sqrt{f\left(\frac{p_L}{a}\right)}} \frac{A_3 - A_2}{A_3^2}, \quad \text{A.107}$$

finalmente, sustituyendo la ecuación (A.107) en la ecuación (A.106):

$$\frac{\partial \bar{\Delta p}_{WD}}{\partial \lambda} = \frac{-K_1(A_4) r_D}{p_L} \frac{\sqrt{p_L/a}}{2 \sqrt{f(p_L/a)}} \frac{A_3 - A_2}{A_3^2}. \quad \text{A.108}$$

Las expresiones (A.94), (A.101), (A.105) y (A.108) se utilizan en la generación del Jacobiano en el proceso de regresión no lineal, para el caso de yacimiento naturalmente fracturado, con flujo radial y fluido ligeramente compresible con flujo permanente entre matriz y fracturas.

APÉNDICE B

INTEGRALES USADAS EN LAS NUEVAS FUNCIONES DE PRESIÓN

FLUJO ESFÉRICO

La expresión que permite calcular la caída de presión a cualquier tiempo y posición, para el caso de flujo esférico, monofásico, isotérmico, en un yacimiento homogéneo, isotrópico con comportamiento infinito y efectos de presión lineal, es:

$$p_D = \frac{1}{r_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{t_D}{r_D^2} \right) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2} \quad \text{B.1}$$

Obteniendo la integral de la presión adimensional respecto a t_D :

$$\int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{r_D} \int_0^{t_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau}{r_D^2} \right) d\tau + \eta_1 \int_0^{t_D} \tau d\tau = \frac{1}{r_D} \left\{ \int_0^{t_D} d\tau - \int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau}{r_D^2} \right) d\tau \right\} + \frac{\eta_1}{2} t_D^2; \quad \text{B.2}$$

desarrollando:

$$\int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = -\frac{1}{r_D} \int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau}{r_D^2} \right) d\tau + \frac{t_D}{r_D} + \frac{\eta_1}{2} t_D^2. \quad \text{B.3}$$

Se observa que no se tiene la diferencial completa en la integral del miembro derecho, por tanto se procede a un cambio de variable con objeto de iniciar el proceso de

integración analítica. Considerando $z = \frac{r_D^2}{4\tau}$, la integral definida se transforma en:

$$\int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{r_D^2}}} \right) d\tau = -\frac{r_D^2}{2} \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \operatorname{erf}(z) \frac{dz}{z^3} \quad \text{B.4}$$

integrando por partes, seleccionando:

$$u = \frac{1}{z^3}, \quad du = -\frac{3}{z^4} dz, \quad dv = \operatorname{erf}(z) dz, \quad v = z \operatorname{erf}(z) + \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}; \quad \text{B.5}$$

$$\int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{r_D^2}}} \right) d\tau = -\frac{r_D^2}{2} \left\{ \frac{\operatorname{erf}(z)}{z^2} + \frac{e^{-z^2}}{z^3\sqrt{\pi}} + 3 \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{\operatorname{erf}(z)}{z^3} dz + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz \right\}; \quad \text{B.6}$$

simplificando:

$$\int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{r_D^2}}} \right) d\tau = \frac{r_D^2}{4} \left\{ \frac{\operatorname{erf}(z)}{z^2} + \frac{e^{-z^2}}{z^3\sqrt{\pi}} + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz \right\}; \quad \text{B.7}$$

obteniendo por partes la integral definida del lado derecho, sea:

$$u = e^{-z^2} \quad du = -2ze^{-z^2} dz \quad dv = \frac{dz}{z^4} \quad v = -\frac{1}{3z^3}; \quad \text{B.8}$$

$$\int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz = -\frac{e^{-z^2}}{3z^3} - \frac{2}{3} \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz; \quad \text{B.9}$$

nuevamente integrando por partes:

$$u = e^{-z^2}, \quad du = -2ze^{-z^2} dz, \quad dv = \frac{dz}{z^2}, \quad v = -\frac{1}{z}; \quad \text{B.10}$$

$$\int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz = -\frac{e^{-z^2}}{z} - 2 \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} e^{-z^2} dz = -\frac{e^{-z^2}}{z} + \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right); \quad \text{B.11}$$

sustituyendo esta Ec. (B.11) en la ecuación (B.9):

$$\int_{\infty}^{\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz = -\frac{e^{-z^2}}{3z^3} - \frac{2}{3} \left[-\frac{e^{-z^2}}{z} + \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \right] = -\frac{e^{-z^2}}{3z^3} + \frac{2}{3} \frac{e^{-z^2}}{z} - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right); \quad \text{B.12}$$

sustituyendo la Ec. (B.12) en la ecuación (B.7):

$$\int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{r_D^2}}} \right) d\tau = \frac{r_D^2}{4} \left\{ \frac{\operatorname{erf}(z)}{z^2} + \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z^3} + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{e^{-z^2}}{3z^3} + \frac{2}{3} \frac{e^{-z^2}}{z} - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erfc}(z) \right] \right\}; \quad \text{B.13}$$

simplificando:

$$\int_0^{t_D} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{r_D^2}}} \right) d\tau = \frac{r_D^2}{4} \left\{ \frac{\operatorname{erf}(z)}{z^2} - 2 \operatorname{erfc}(z) + \frac{2e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} \right\} = \frac{r_D^2}{4} \left\{ \frac{2e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} + \frac{1}{z^2} - \operatorname{erfc}(z) \left(2 + \frac{1}{z^2} \right) \right\}. \quad \text{B.14}$$

Finalmente sustituyendo esta Ec. B.14, en (B.3) y dividiendo ambos miembros entre t_D , se estima un valor de caída de presión adimensional promedio ponderada:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = -\frac{r_D}{4t_D} \left\{ \frac{1}{\frac{r_D^2}{4t_D}} - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{2e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \right\} + \frac{1}{r_D} + \frac{\eta_1}{2r_D^2} t_D =$$

$$-\frac{r_D}{4t_D} \left\{ -\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}} \right) \left(2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{2e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{r_D^2}{4t_D}}} \right\} + \frac{\eta_1}{2} \frac{t_D}{r_D^2}. \quad \text{B.15}$$

FLUJO LINEAL

La ecuación para calcular la caída de presión en términos de variables adimensionales, para el caso de flujo lineal monofásico, isotérmico en un yacimiento homogéneo, isotrópico con comportamiento infinito y con efectos de presión lineal es:

$$p_{DL} = 2x_D \pi \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4t_{DL}}\right)} - \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_{DL}}{x_D^2}}} \right) \right] + \eta_1 \frac{t_{DL}}{x_D^2} \quad \text{B.16}$$

Estimando la integral de la presión adimensional respecto a t_{DL} :

$$\int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = 4\sqrt{\pi} \int_0^{t_{DL}} \sqrt{\tau} e^{-\left(\frac{x_D^2}{4\tau}\right)} d\tau - 2\pi x_D \int_0^{t_{DL}} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{x_D^2}}} \right) d\tau + \frac{\eta_1}{x_D^2} \int_0^{t_{DL}} \tau d\tau \quad \text{B.17}$$

desarrollando y asignando las variables A y B para los dos primeros; de esta Ec. B.17:

$$\int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = A + B + \frac{\eta_1}{x_D^2} \frac{t_{DL}^2}{2}; \quad \text{B.18}$$

considerando el primer término del lado denominado A, puede observarse que no tiene la diferencial completa, por tanto se procede a un cambio de variable en la forma siguiente:

$$z = \frac{x_D}{2\sqrt{\tau}}; \quad \text{B.19}$$

por tanto, se tiene que:

$$dz = -\frac{x_D}{4} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{d\tau}{2\tau}; \quad d\tau = -\frac{x_D^2}{2z^2} \frac{dz}{z}; \quad \text{B.20}$$

entonces:

$$A = -x_D^3 \sqrt{\pi} \int_{\infty}^{\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}} \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz. \quad \text{B.21}$$

Considerando los resultados de la ecuación (B.12):

$$A = x_D^3 \sqrt{\pi} \left[e^{-\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right)^2} \left(\frac{1}{3\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right)^3} - \frac{2}{3\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right) \right]. \quad B.22$$

Desarrollando el segundo término del lado derecho de la ecuación (B.18), denominado B:

$$B = -2\pi x_D \left\{ \int_0^{t_{DL}} d\tau - \int_0^{t_{DL}} \operatorname{erf}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4\tau}}\right) d\tau \right\} = -2\pi x_D \left\{ t_{DL} - \int_0^{t_{DL}} \operatorname{erf}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4\tau}}\right) d\tau \right\}; \quad B.23$$

considerando los resultados obtenidos en la ecuación (B.14):

$$\int_0^{t_{DL}} \operatorname{erf}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4\tau}}\right) d\tau = \frac{x_D^2}{4} \left\{ \frac{2e^{-\frac{x_D^2}{4t_{DL}}}}{\sqrt{\pi} \frac{x_D^2}{4t_{DL}}} + \frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4t_{DL}}}\right) \left(2 + \frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} \right) \right\}. \quad B.24$$

Sustituyendo esta Ec. (B.24) en la Ec. (B.23):

$$B = -2\pi x_D \left\{ t_{DL} - \frac{x_D^2}{4} \left\{ \frac{2e^{-\frac{x_D^2}{4t_{DL}}}}{\sqrt{\pi} \frac{x_D^2}{4t_{DL}}} + \frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4t_{DL}}}\right) \left(2 + \frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} \right) \right\} \right\}. \quad B.25$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (B.25) y (B.22) en la Ec. (B.18), se obtiene:

$$\int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = x_D^3 \sqrt{\pi} \left[e^{-\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right)^2} \left(\frac{1}{3 \left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right)^3} - \frac{2}{3 \frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right) \right] \quad \text{B.26}$$

$$- 2\pi x_D \left\{ t_{DL} - \frac{x_D^2}{4} \left[\frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}\right) \left(2 + \frac{1}{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}} \right) + \frac{2e^{-\frac{x_D^2}{4t_{DL}}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{x_D^2}{4t_{DL}}}} \right] \right\} + \frac{\eta_1}{x_D^2} \frac{t_{DL}^2}{2}$$

simplificando, y considerando el cambio de variable $\chi = \frac{x_D}{2\sqrt{t_{DL}}}$:

$$\int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = x_D^3 \sqrt{\pi} \left[e^{-\chi^2} \left(\frac{1}{3\chi^3} - \frac{2}{3\chi} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erfc}(\chi) \right] + \quad \text{B.27}$$

$$- 2\pi x_D \left\{ t_{DL} - \frac{x_D^2}{4} \left[\frac{1}{\chi^2} - \operatorname{erfc}(\chi) \left(2 + \frac{1}{\chi^2} \right) + \frac{2e^{-\chi^2}}{\sqrt{\pi}\chi} \right] \right\} + \frac{\eta_1}{x_D^2} \frac{t_{DL}^2}{2};$$

reagrupando y dividiendo ambos miembros entre t_{DL} , para estimar un valor de caída de presión adimensional promedio ponderada:

$$\frac{1}{t_{DL}} \int_0^{t_{DL}} p_{DL}(\tau) d\tau = \frac{\sqrt{\pi} x_D^3}{t_{DL}} \left\{ \frac{1}{3} e^{-\chi^2} \left(\frac{1}{\chi^3} + \frac{1}{\chi} \right) - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\chi) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\chi^2} \right) \right\} + \frac{\eta_1}{2} \frac{t_{DL}}{x_D^2} \quad \text{B.28}$$

$$= 4\sqrt{\pi} x_D \left\{ \frac{1}{3} e^{-\chi^2} \left(\frac{1}{\chi} + \chi \right) - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\chi) \left(\frac{\chi^2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\eta_1}{2} \frac{t_{DL}}{x_D^2}.$$

FLUJO RADIAL

En términos de variables adimensionales, la expresión que permite calcular la caída de presión a cualquier tiempo y posición espacial, para el caso de flujo radial monofásico, isotérmico, en un yacimiento homogéneo e isotrópico, con comportamiento infinito y efectos de tendencia de presión lineal es³⁹:

$$p_D = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) + \eta_1 \frac{t_D}{r_D^2} \quad \text{B.29}$$

Al estimar la integral de la presión adimensional respecto a t_D ,

$$\int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{t_D} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4\tau} \right) d\tau + \frac{\eta_1}{r_D^2} \int_0^{t_D} \tau d\tau; \quad \text{B.30}$$

se observa en la Ec. (B.30) que no se tiene la diferencial completa en la primera integral del miembro derecho para iniciar el proceso de integración analítica, luego entonces se procede⁵⁵ a un cambio de variable, definiendo:

$$z = \frac{r_D^2}{4\tau}; \quad \text{B.31}$$

se tiene que:

$$dz = -\frac{r_D^2}{4} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{d\tau}{\tau} \quad d\tau = -\frac{r_D^2}{4z} \frac{dz}{z} \quad \text{B.32}$$

Analizando los límites de la integral definida, si τ tiende a cero entonces z tiende a infinito y si τ tiende a t_D entonces z tiende $\frac{r_D^2}{4t_D}$. Por tanto, el problema de la ecuación

(B.30) se transforma en:

$$\int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \frac{r_D^2}{4} \int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} E_1(z) \frac{dz}{z^2} + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D^2}{r_D^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{4} \int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} E_1(z) \frac{dz}{z^2} + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D^2}{r_D^2} \right) \quad \text{B.33}$$

Integrando por partes, $\int u dv = uv - \int v du$, considerando:

$$u = E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad du = -\frac{e^{-z}}{z} dz \quad \forall z \geq 0, \\ dv = \frac{dz}{z^2} \quad v = -\frac{1}{z} \quad \text{B.34}$$

$$\int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} E_1(z) \frac{dz}{z^2} = \left[\frac{4t_D}{r_D^2} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) - \int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right]. \quad \text{B.35}$$

Integrando una vez más por partes:

$$u = e^{-z}, \quad du = -e^{-z} dz, \\ dv = \frac{dz}{z^2}, \quad v = -\frac{1}{z}; \quad \text{B.36}$$

$$\int_{\frac{r_b^2}{4t_b}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz = \left[-\frac{e^{-z}}{z} \right]_{\frac{r_b^2}{4t_b}}^{\infty} - \int_{\frac{r_b^2}{4t_b}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = \frac{e^{-\frac{r_b^2}{4t_b}}}{\frac{r_D^2}{4t_D}} - E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right); \quad \text{B.37}$$

sustituyendo (B.37) en (B.35) y esta última en (B.33), se obtiene:

$$\int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{4} \left[\frac{4t_D}{r_D^2} E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right) - \frac{e^{-\frac{r_b^2}{4t_b}}}{\frac{r_D^2}{4t_D}} + E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \right] + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D^2}{r_D^2}\right); \quad \text{B.38}$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación (B.38) entre t_D , para estimar un valor de caída de presión adimensional promedio ponderada:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{4} \left[\frac{4}{r_D^2} E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right) - \frac{4}{r_D^2} e^{-\frac{r_b^2}{4t_b}} + \frac{1}{t_D} E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \right] + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D}{r_D^2}\right); \quad \text{B.39}$$

agrupando términos, finalmente se tiene:

$$\frac{1}{t_D} \int_0^{t_D} p_D(\tau) d\tau = \frac{1}{2} E_1\left(\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \left[1 + \frac{r_D^2}{4t_D} \right] - \frac{1}{2} e^{-\frac{r_b^2}{4t_b}} + \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{t_D}{r_D^2}\right). \quad \text{B.40}$$

Esta expresión fue presentada anteriormente por los Drs. Rodríguez de la Garza y Emilio Antúnez Uribe³⁹.

APÉNDICE C

OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES

El objetivo de este apéndice es presentar algunos conceptos básicos que permitan un mejor entendimiento de los desarrollos presentados en el Capítulo III, denominado "Teoría para estimación de parámetros".

CONCEPTOS GENERALES

La minimización de una función de "n" variables es un tópico tan importante que el desarrollo de este tipo de algoritmos con este objetivo tiene una historia de más de 160 años; una de las técnicas más viejas es la debida a Cauchy que en 1845 propuso un método denominado de "paso descendente". La mayor parte del material que se encuentra en la literatura tiende a formular criterios en los que se emplea fundamentalmente, al operador gradiente como instrumento en la determinación de los óptimos de una función. Todos estos métodos recurren al uso de la pendiente de una función a modo de indicador de la dirección sobre la cual se encuentra el óptimo.

Siempre, en estos métodos, se recurre a la determinación arbitraria de un primer punto de prueba, lo cual depende en mucho, de la sensibilidad del investigador que esté formulando el modelo, o bien de las indicaciones que pueda haber obtenido indirectamente. Resulta obvio, que para evitar demasiado tiempo de computación, mientras más se aproxime su tentativa al óptimo, más rápido encontrará la solución.

Para un sistema en el que la función $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ tenga derivadas continuas y sea irrestricta, esto es sin restricciones, el mínimo ocurre en el punto en que las derivadas parciales de la función, con respecto a las variables independientes se

anulan, y la matriz de segundas derivadas es positiva definida. A la matriz de segundas derivadas se le denomina Hessiano, y se representa como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 x_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

mientras el vector gradiente de F en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$, se denota con $\nabla F(x)$ y se define como:

$$\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial F(x)}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \right)^t. \tag{C.2}$$

El gradiente de una función de varias variables es análogo a la derivada de una función de una sola variable, en el sentido de que una función de varias variables diferenciable puede tener un mínimo relativo en x sólo cuando el gradiente sea cero. El gradiente tiene otra propiedad muy importante relacionada con la minimización de las funciones de varias variables, la derivada direccional de F en x en la dirección de un vector unitario v está definida por $v \cdot \nabla F(x)$. La derivada direccional de F en x en la dirección de v mide el cambio del valor de la función F respecto al cambio de variable en la dirección v ; la dirección que produce el máximo valor para la derivada direccional se presenta cuando decidimos que v sea paralela a $\nabla F(x)$, siempre y cuando $\nabla F(x) \neq 0$. En consecuencia, la dirección de la máxima disminución del valor de F en x es la dirección dada por $-\nabla F(x)$.

SISTEMAS RESTRICITOS E IRRESTRICITOS.

La optimización de funciones sujetas a restricciones se puede plantear como evaluar el máximo o mínimo de la función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeto al conjunto de restricciones ecuacionales.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m < n . \tag{C.3}$$

Un vector que satisfaga las restricciones $g_i(x)=0$ recibirá el nombre de **solución factible**. Considérese por ejemplo, el siguiente caso representado gráficamente, donde **A** es un punto común entre la función **F** y las restricciones **g**, esto es, una solución factible.

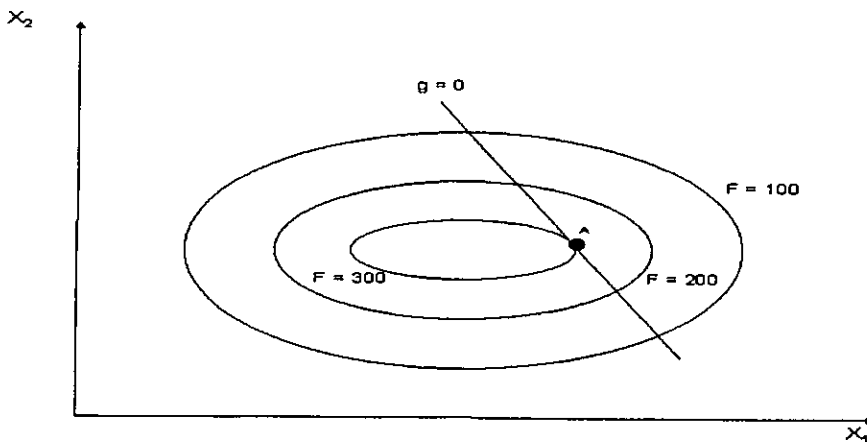


FIG. C1.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES.

Entonces, se cumple que:

$$-\frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} = -\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} . \tag{C.4}$$

Por lo tanto, el punto común $A(x_1, x_2)$ estará determinado por el sistema:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 , \tag{C.5}$$

$$g(x_1, x_2) = 0$$

rearrreglando se puede observar que:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} = -\lambda, \quad \text{C.6}$$

donde λ recibe el nombre de multiplicador de Lagrange. Lo anterior implica que el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0, \\ g(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad \text{C.7}$$

También permite obtener la solución del problema planteado. Así se puede concluir que la función aumentada:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2), \quad \text{C.8}$$

resulta ser tal, que las condiciones necesarias para obtener su solución, coinciden con las del problema propuesto en el sistema original. Sin embargo ahora, el sistema original restringido, se ha convertido en un sistema irrestricto equivalente, formulado en términos de la función aumentada.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO (segundo orden)

Sea x_j una componente vectorial, \bar{x} un vector y \bar{x}^n el valor de \bar{x} en la n -ésima iteración. Supóngase que el valor mínimo de $F(x)$ está en la posición \bar{x} , entonces utilizando la expansión de la función en serie de Taylor en el punto x^0 , se tiene:

$$F(x) \cong F(x^0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial F(x^0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0) \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \text{C.9}$$

y la condición del mínimo se plantea como:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{para } k=1, \dots, n. \quad \text{C.10}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F(x^0)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_i \partial x_k} = 0 ; (1 \leq k \leq n). \quad \text{C.11}$$

O sea, en notación vectorial

$$\text{Grad}(F(x^0)) + \text{Hess}(F(x^0))(x - x^0) = 0. \quad \text{C.12}$$

Donde $\text{Grad}(F(x^0))$ representa al gradiente de la función $F(x^0)$ y $\text{Hess}(F(x^0))$ a la matriz Hessiana de $F(x^0)$, por lo tanto, la solución del sistema:

$$\text{Hess}(F(x^0))(x - x^0) = -\text{Grad}(F(x^0)) \quad \text{C.13}$$

representa la dirección de búsqueda que corresponde al descenso más rápido en el punto mínimo.

Antes de finalizar el apéndice, es importante comentar que existe una gran cantidad de bibliografía relacionada con el tema de optimización de sistemas no-lineales. Se recomienda al lector interesado revisar la siguiente:

- Optimización de Funciones No-lineales, Lian Karp, UNAM Centro de Estudios Interdisciplinarios 1977.
- Design of Thermal Systems, W.F. Stoecker, Third Edition Mc Graw Hill, 1989.
- Análisis Numérico, Richard L. Burden y J. Douglas Faires, 6a. Edición International Thomson Editores, 1998.