UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

Aspectos ontológicos de la identidad

Tesis que presenta Raúl Quesada García para optar al grado de
Doctor en Filosofía

Ciudad Universitaria, septiembre, 2000

Aspectos ontológicos de la identidad

Summary

Raúl Quesada García

The subject of this dissertation is the relation between the logical notion of identity and the ontological presupositions of its characterization. The first part deals with Russell's definition of identity in *Principia Mathematica*, logical paradoxes and Cantor's notion of transfinitude. Once a relation between Russell's definition and Leibniz's principle of the identity is established, Clarke's objections to Leibniz and Wittgenstein's to Russell are discussed. Leibniz's distintion between logic and moral principles allows the introduction, *via* Wittgenstein, of some non-orthodox considerations in modern logical theory. In the second part, Geach´s relativization of identity is introduced and its relations with some thesis of Frege's *Grundlagen* are examined. Finally Geach's position is evalueted against the orthodox point of view represented by Quine.

Aspectos ontológicos de la identidad

Resumen

Raúl Quesada García

En este trabajo se estudian las relaciones entre la noción lógica de identidad y los presupuestos ontológicos que se asumen en su caracterización. El punto de partida es la definición de identidad que da Russell en *Principia Mathematica*, las paradojas lógicas y la noción de transfinitud introducida por Cantor. Una vez establecida la relación entre la definición de *Principia* y el principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz, se discuten las críticas de Clarke a Leibniz y de Wittgenstein a Russell en relación con el *status* lógico de la definición y con la distinción entre principios morales y principios lógicos. Esta distinción permite la introducción vía Wittgenstein de algunas consideraciones no-ortodoxas en la teoría lógica contemporánea. En la segunda parte de la tesis se estudia la relativización de la identidad propuesta por Peter Geach, sus relaciones con algunas ideas de Frege en los *Grundlagen* y con la ortodoxia contemporánea representada por Quine.

En otras palabras, "*Ne pouvant rien donner, je dédie la dédicace même, en quoi s'absorbe tout ce que j'ai à dire:*

"À la très chere, à la très belle,
Qui remplit mon coeur de clarté,""

Barthes/Baudelaire

Prefacio

El agradecimiento es mucho, las gracias pocas para mostrarlo. Escribir una tesis, por alguna razón y varias sin razones, puede ser un proceso que rebasa la complejidad académica que le es propia; cuando esto sucede la amistad es un apoyo que se convierte en condición de la escritura, no la garantiza pero mantiene viva la posibilidad. En mi caso esta posibilidad sobrevivió tanto tiempo que se convirtió en una especie de mal crónico que resistió toda clase de amistosos remedios; pero si los remedios fallaron en la cura fueron eficaces en el alivio que proporcionaron. Son ese apoyo y ese alivio los que voy a seguir crónicamente agradeciendo, pero en este lugar quisiera mencionar que fueron Martha Massa y Emoé de la Parra las que no sólo confiaron que podía llevar a término la investigación, sino que, al leerla y transcribirla, literalmente hicieron posible su escritura. Hay más nombres pero sus razones son largas y complejas y podrían convertir este prefacio en una biografía. No obstante sí puedo decir que esta biografía sería muy distinta sin las presencias de Daniel y Urma. Gracias.

Índice

Presentación

Así, lo que atañe al individuo es, al igual que el universal, o lógico, en orden a la predicación, o metafísico, en orden a la realidad.

Las esencias de las cosas son (tantas) como sus números.

Leibniz

El núcleo teórico de esta investigación está constituido por las relaciones entre algunos aspectos lógicos de la caracterización de la identidad y las consecuencias ontológicas que se presuponen o se pueden derivar de dicha caracterización. Estas relaciones se formulan en términos contemporáneos pero su ascendencia es aristotélica y leibniziana. En términos un poco más específicos se podría decir que este trabajo es una reflexión sobre temas de filosofía de la lógica y del lenguaje formulados por Frege en *Los fundamentos de la aritmética* pero que se pueden relacionar con el problema aristotélico de la substancia.

Como se sabe, el planteamiento de la cuestión de la substancia en Aristóteles está relacionado con dos problemas: el del cambio y el de la identidad.[1] El primero genera dificultades para caracterizar un objeto de conocimiento y se podría resumir diciendo, un tanto paradójicamente, que cuando afirmamos que algo cambia tenemos que presuponer que algo permanece –el sujeto del cambio– para poder decir que *ese* objeto es el que cambia; de otra manera no podríamos hablar del cambio. En este sentido el problema de las substancias es el problema de la existencia de un *substratum* –persistente e inalterable– que ancle la predicación de propiedades cambiantes. Conocer este *substratum* es conocer aquello que es esencial a una cosa en la medida en que persiste y es condición de posibilidad de la predicación.

---

[1] Véase M. Nussbaum, "Aristotle" en B. Magee *The Great Philosophers*, esp. pp. 40-46

La pregunta acerca de qué es aquello que persiste y que, consecuentemente, nos permite hablar de un cambio, está relacionada con otra pregunta típicamente aristotélica: "¿qué es esto?" Saber qué es algo, identificarlo como hombre, animal o golem, conlleva conocer al menos los lineamientos para determinar cuáles sean las propiedades que tienen que persistir para que eso sea, o siga siendo, lo que es. Esta es una pregunta acerca de la identidad del objeto. Tradicionalmente esta pregunta deriva hacia la cuestión de qué propiedades son esenciales y qué propiedades son accidentales, pero hay que notar que hay dos formas de plantear esta distinción. La primera consiste en decir que dado un sujeto de predicación –un objeto *x*– y un conjunto de predicados que se apliquen con verdad a dicho objeto, podemos distinguir en ese conjunto aquellos predicados relacionados con propiedades que el objeto no podría dejar de tener sin dejar de ser *ese* objeto, propiedades esenciales, y predicados relacionados con propiedades accidentales, propiedades que el objeto podría no tener sin por ello dejar de ser el objeto que es. Esta aproximación conduce directamente al problema del esencialismo. La segunda manera de plantear la distinción, por otro lado, hace hincapié en el hecho de que el sujeto de predicación tiene que ser identificado como algo, como algo perteneciente a una clase de objetos; sólo entonces, se pensaría, podemos predicar adecuadamente. En términos generales esta aproximación presenta varias dificultades que tienden a reaparecer en la discusión de estos problemas. La primera es la que señala que podemos llevar a cabo una identificación y una predicación, susceptible de valor de verdad, sin tener un predicado que especifique de qué cosa se trata, podemos, por ejemplo, decir: "veo algo verde en el microscopio", "algo se mueve en la caja", "hay una cosa babosa en mi bolsa", etc., sin saber específicamente de qué algo o de qué cosa se trata. La segunda es que se puede pensar que al hablar de identificación nos estamos moviendo del aspecto material al aspecto formal del problema, del plano ontológico –¿qué es esto?– al plano lingüístico –¿cómo designo o identifico esto?– y, por lo tanto, evadiendo más que resolviendo el problema del esencialismo. Las formas en que este problema se plantea en las discusiones contemporáneas son muy variadas[2] pero el tono en el que se reavivó la discusión puede notarse en la observación de Quine de que "bípedo implume" identifica al mismo grupo de entidades que "animal racional" y que si bien la racionalidad puede considerarse una propiedad esencial para un matemático, el ser bípedo lo es para un ciclista y

[2] Véase, por ejemplo, S. Kripke, "Naming and Necessity" en D. Davidson y G. Harman, *Semantics of Natural Languages* y M. Slote, *Metaphysics and Essence*.

podemos identificar a la misma persona como matemático o como ciclista.[3] Este tipo de planteamientos conduce a la tercera dificultad que quisiera mencionar: la existencia de predicados privilegiados que determinen mejor que otros la identificación de los sujetos de predicación. La idea de que existen predicados fundamentales para la identificación tiene su origen en Aristóteles,[4] pasa por Locke, que acuña la palabra "*sortal*"[5] y llega a Strawson[6] y a la distinción contemporánea entre términos masa y términos de referencia dividida.[7] Esta misma idea da lugar al problema de la existencia de clases naturalmente establecidas que nos sirvieran de punto de referencia para la identificación.

De esta manera, se puede argumentar, las preguntas mencionadas –¿qué es esto? y ¿qué es aquello que persiste en el cambio?– están íntimamente relacionadas ya que para saber qué es lo que permanece a través del cambio de un objeto de conocimiento tenemos que saber de qué clase de objeto se trata, saber cuál es su identidad. Sin embargo, debemos procurar que la intimidad de estas dos preguntas no le abra la puerta a su fusión, ya que, como señala Martha Nussbaum, los resultados pueden ser bastante confusos. Nussbaum ofrece dos ejemplos que muestran con bastante claridad la saludable distancia que deberían guardar estas dos preguntas. El primero hace referencia a los filósofos presocráticos que, preocupados por el fenómeno del cambio y sorprendidos por la persistencia de la materia, postularon a esta última como "el principio subyacente básico del cambio", pero de allí derivaron la idea de que las cosas son fundamentalmente materia. Esto es, al pasar de la respuesta a una pregunta acerca del cambio a una respuesta acerca de la identidad se convirtieron en materialistas. Por otro lado, el hincapié en la pregunta acerca de la identidad a costas de la pregunta acerca de la persistencia también puede ser complicado, ya que puede tener como resultado una forma de platonismo.

En todo caso aquí básicamente me ocupo de la pregunta "¿qué es esto?" en relación con la identidad. En este sentido hay una inversión contemporánea de los términos clásicos: primero planteo el problema de la

---

[3] Véase W.v.O. Quine, "Two Dogmas of Empiricism" y "Reference and ~~Generality~~ Modality", ambos en *From a Logical Point of View*, esp. pp 22 y 155 respectivamente

[4] Véase Aristóteles, *Categorías*, cap. 1

[5] Véase Locke, *An Essay Concerning Human Understanding*, III, iii, 15

[6] Véase P.F. Strawson, *Individuals*, esp. pp 168-9

[7] Véase, paradigmáticamente, W v O. Quine, *Word and Object*, §19

identidad en su sentido lógico y después examino algunas consecuencias ontológicas de esa caracterización. Para ello parto de la ortodoxia lógica moderna establecida por Frege y Russell y de algunos reparos filosóficos a estos planteamientos. Estos reparos me permiten introducir formulaciones más recientes, algunas de ellas todavía dentro de la ortodoxia lógica (Quine), otras fuera de ella (Geach), y dejar abierta la discusión hacia el problema de la individuación.

Video meliora proboque, deteriora sequor
Ovidio

Capítulo 2

La identidad de los indiscernibles: principios lógicos y principios morales

I have nothing to say and I am saying it

John Cage

En *Principia Mathematica* Russell ofrece la siguiente definición de la identidad:

$$x = y. =: (\phi): \phi!x.\supset.\phi!y \quad Df.$$

En el contexto teórico en el que se formula, esta definición tiene dos dificultades, una ontológica y otra lógica, que se suelen destacar desde una primera lectura. La dificultad ontológica tiene que ver con el *status* de la variable ϕ: ¿servirá para hablar de predicados, de propiedades, de funciones o de atributos?; en todo caso, ¿cómo caracterizaríamos tales entidades? La dificultad lógica, como ya vimos en el capítulo anterior, se relaciona, por un lado, con la posibilidad de que la cuantificación universal propicie la generación de paradojas y, por otro, con los remedios russellianos para tal mal: la noción de función predicativa, la ramificación de la teoría simple de tipos y el axioma de reducibilidad. En este capítulo trataremos de situar estas dificultades dentro de un contexto menos técnico y más tradicional que nos permita vislumbrar otro tipo de presupuestos teóricos y, consecuentemente, otros aspectos filosóficos del problema.

En términos generales podríamos decir que la definición de Russell caracteriza a la identidad a través de dos implicaciones: la primera dice que si x

y *y* son idénticas, entonces no hay ninguna propiedad que no compartan, esto es, son indiscernibles, mientras que la segunda afirma que si *x* y *y* son indiscernibles entonces son idénticas. Así, la definición se podría descomponer en dos partes, la primera afirmaría que:

$$x = y \rightarrow (\phi)\ (\phi!x \supset \phi!y)$$

y la segunda que:

$$(\phi)\ (\phi!x \supset \phi!y) \rightarrow x = y$$

La primera de estas implicaciones se suele aceptar como esencial para cualquier caracterización de la identidad aũn cuando, como ya señalamos, se puede reparar en el carácter irrestricto o restringido de la cuantificación y en los compromisos ontológicos de la cuantificación de segundo orden. La segunda implicación, por otro lado, no sólo ha producido reparos sino que más de una vez ha sido rechazada por considerarla simplemente falsa o por no ser necesaria. Aunque tal vez su falsedad no sea tan simple ya que, también más de una vez, ha logrado colarse en una definición lógica y, falsa, verdadera o necesaria, ha adquirido, gracias a Leibniz, el *status* de principio.[1] Leibniz hizo esta afirmación, conocida como el principio de la identidad de los indiscernibles, de diferentes maneras, pero en todas ellas es clara su afinidad fundamental con la formulación contemporánea:

$$(\phi)\ (\phi\, A \equiv \phi\, B) \rightarrow A = B$$ [2]

Algunas de las formulaciones de Leibniz son las siguientes:

> ... que no es cierto que dos substancias se parezcan enteramente y sean diferentes *solo numero*... (*Discurso de Metafísica*, 9), 1685-86 [3]

---

[1] Afirma Leibniz "Esos dos grandes principios, el de *razón suficiente* y el de *la identidad de los indiscernibles*, cambian el estado de la metafísica Esa ciencia se hace real y demostrativa por medio de estos principios, mientras que antes, en general, consistía en palabras vacías." *Correspondencia con Clarke*, Leibniz, *Escrito IV*, 5, p. 37, de la edición de H.G. Alexander.

[2] Véase Hidé Ishiguro, *Leibniz's Philosophy of Logic and Language* (London, Duckworth, 1972), p. 17

[3] Leibniz, *Discurso de Metafísica*, trad. del francés de Alfonso Castaño Piñan (Buenos Aires, Aguilar, 1962), p. 34

> . . no hay en la Naturaleza dos Seres que sean perfectamente el uno como el otro, y donde no sea posible encontrar una diferencia interna o fundamentada en una denominación intrínseca. (*Monadología*, 9) 1714 [4]

> En las cosas absolutamente indiferentes no hay alternativa y, consecuentemente, no hay elección, ni voluntad, puesto que la alternativa debe estar fundada en alguna razón o principio. (*Correspondencia con Clarke*, Escrito IV, 1) 1716 [5]

> No existe algo como dos individuos indiscernibles uno del otro. (*Ibid*, Escrito IV, 4) 1716 [6]

> Suponer dos cosas indiscernibles es suponer la misma cosa bajo dos nombres. (*Ibid*, Escrito IV, 6) 1716 [7]

Este principio, claro está, lo formula Leibniz dentro del contexto de una compleja posición filosófica en la que las nociones lógicas y metafísicas van de la mano y nos guían hacia una epistemología que debemos poner en relación con sus ascendientes lógico-matemáticos.[8] En el caso del principio de la identidad de los indiscernibles (PII, de aquí en adelante), el mismo Leibniz no sólo señala su carácter paradójico, tanto en su enunciación como en su relación con otras tesis, sino que considera que el principio se deriva o depende de otras tesis o principios también bastante radicales y discutibles, como lo son el de que cada mónada refleja todo el universo y el principio de razón suficiente. Así, por ejemplo, el primer fragmento citado se encuentra dentro del siguiente contexto:

> "QUE CADA SUBSTANCIA SINGULAR EXPRESA TODO EL UNIVERSO A SU MANERA, Y QUE EN SU NOCIÓN TODOS SUS ACONTECIMIENTOS ESTÁN COMPRENDIDOS CON TODAS SUS CIRCUNSTANCIAS Y TODA LA SERIE DE LAS COSAS EXTERIORES." Se siguen de esto varias paradojas considerables; entre otras; que no es cierto que dos substancias se parezcan enteramente y sean diferentes *solo numero* y que lo que Santo Tomás asegura a este respecto de los ángeles o inteligencias (*quod ibi omne individuum sit species infima*), es verdadero de todas las substancias mientras se tome la diferencia específica como la toman los geómetras respecto a sus figuras. (...) Además, toda substancia es como un

---

[4] Leibniz, *Monadología*, trad del francés de Manuel Fuentes Benot (Buenos Aires, Aguilar, 1964) p. 28

[5] Leibniz, *Correspondencia con Clarke*, edición cit. p. 36

[6] *Ibid*, p. 36

[7] *Ibid*, p. 37

[8] Véanse, por ejemplo, B. Russell, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, segunda edición (London, 1937); G H.R. Parkinson, *Logic and Reality in Leibniz's Metaphysics* (Oxford, Oxford University Press, 1965); H. Ishiguro, *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*.

mundo completo y como un espejo de Dios; o bien, de todo el universo que cada una de ellas expresa a su manera, algo así como una misma ciudad es vista de diferente manera según las diversas situaciones del que la contempla. (...) Puede decirse, incluso, que toda substancia lleva en cierta$ manera el carácter de la sabiduría infinita y la omnipotencia de Dios y lo imita en cuanto es capaz. Pues expresa, aunque confusamente, todo lo que sucede en el universo, pasado, presente o futuro, lo cual guarda cierta semejanza con una percepción o conocimiento infinito; y como todas las demás substancias expresan esto a su vez y se acomodan a ello, puede decirse que ella extiende su poder sobre todas las demás a imitación de la omnipotencia del creador. [9]

Obviamente no nos podemos detener aquí a discutir las diferencia o semejanzas entre las substancias terrenas y las angelicales, ni las deslumbrantes peculiaridades de la filosofía leibniziana, ni siquiera el contexto polémico, acerca de la naturaleza del espacio, que sirvió de telón de fondo a algunas de estas afirmaciones[10], pero sí podemos llamar la atención hacia la riqueza teórica de la posición en la que se inscribe la formulación del PII y, para hacerlo, bastará recordar dos de sus características. La primera de ellas tiene que ver con su *status* lógico: se suele señalar que el PII no es un principio que fácilmente podamos considerar estrictamente lógico, sin embargo las razones para otorgarle o negarle este *status* pueden ser de diferente índole. Por ejemplo, se suele pensar que los principios lógicos deben ser *a priori*, esto es, independientes de la experiencia, y el PII, al menos en algunas de sus formulaciones, hace referencia directa a la naturaleza y le pone un límite a la existencia: "... no hay en la Naturaleza dos seres que sean perfectamente el uno como el otro...". Pero, para la mayoría de los filósofos, relacionar la lógica con la existencia es tanto como poner en riesgo la virtud más notoria de la primera: la necesidad; la experiencia, casi por definición y como todo el mundo sabe, se hace esperar y tiene una capacidad notable para sorprendernos y los lógicos, se dice, detestan las sorpresas.[11] Por esto hay que notar que para Leibniz esta limitación en el orden natural –la no existencia de cosas absolutamente idénticas– tiene que ver con una imposibilidad que, para él, no tiene nada de empírico: la imposibilidad de que existan. En una primera instancia esto es así porque, al menos teóricamente, siempre es posible

[9] *Discurso de Metafísica*, 9, edición citada, p. 9

[10] Véase Leibniz, *Correspondencia con Clarke*, Escrito IV, 16, edición cit. p. 39. Recuérdese que el PII era fundamental en el desacuerdo entre Newton y Leibniz acerca de la naturaleza del espacio: para Newton los puntos del espacio y los instantes del tiempo son reales y distintos pero indiscernibles. En el tercer Escrito Leibniz relaciona el PII con el principio de razón suficiente que, en su opinión, los newtonianos no habían entendido adecuadamente.

[11] Véase, por ejemplo, L. Wittgenstein, *Tractatus*, 6.2151

encontrar alguna "diferencia interna o fundamentada en una denominación intrínseca". Claro está que alguien podría objetar que esta última afirmación es simplemente falsa, que no siempre podemos establecer diferencias –internas, externas, o de la clase que se quiera– que nos permitan discernir entre dos substancias y la prueba de esto y, de paso, de la ausencia de *status* lógico, es que podemos concebir, sin que sea un disparate evidente, dos substancias perfectamente indiscernibles o que difieran *solo numero*. Para considerar esta objeción tendremos que mencionar la segunda característica del PII que, dijimos, nos puede permitir entender mejor la perspectiva dentro de la que se formula; esta característica es su íntima relación con el Principio de Razón Suficiente: debe haber una razón suficiente por la cuál todo es como es y no de otra manera.[12]

Es de este principio del que deriva Leibniz la afirmación de que no pueden existir dos seres que sean totalmente indiscernibles, ya que, puesto que Dios los creó, debe haber tenido una razón suficiente para crear al primero de ellos y esta razón quedó satisfecha cuando lo creó, por lo que para crear al *otro* tuvo que tener una razón diferente, por más y que para nosotros esta razón nos pueda eludir dada la semejanza entre substancias que, podemos agregar, es esencial para nuestro conocer. En el Escrito V a Clarke dice Leibniz:

> Entre otras consecuencias, infiero de este principio (el de razón suficiente) que no hay en la naturaleza dos seres absolutos, reales, indiscernibles el uno del otro; porque si los hubiera, Dios y la Naturaleza actuarían sin razón al ordenar el uno en lugar del otro; y que, por lo tanto, Dios no produce dos porciones de materia perfectamente iguales y semejantes.[13]

A propósito de esta relación entre los dos principios, Leibniz le aclara a Clarke tres cosas que podrían suscitar reservas con respecto a su aceptación. La primera tiene que ver con el atomismo: los átomos podrían considerarse no sólo el fundamento último de la materia sino un buen ejemplo de indiscernibilidad. De estas dos suposiciones se podría derivar la muy peregrina idea, de acuerdo con Leibniz, de que Dios no pudo haber creado la materia puesto que ésta está compuesta de átomos que son indiscernibles y que, por

[12] Aunque el PRS se suele asociar con el nombre de Leibniz se puede encontrar en la filosofía medieval y se suele atribuir a Abelardo quien, queremos suponer, lo debe haber formulado antes de que Fulber, tío de Héloïse, encontrara una razón suficiente para mandarlo castrar.

[13] Leibniz, *Escrito V*, 21, *Correspondencia*, p. 61

serlo, resultan inexistentes si se acepta el principio leibniziano. Para expresar esta idea Leibniz cita las palabras de Clarke:

> El argumento, si fuera bueno, probaría que es imposible que Dios crease la materia, ya que las partes perfectamente sólidas de la materia, si las consideramos de la misma figura y dimensión (lo que siempre es posible suponer) serían exactamente semejantes.[14]

Este texto nos conduce directamente a la segunda aclaración leibniziana, ya que es el mismo Clarke quien enfatiza que podemos suponer o concebir dos partes de materia perfectamente iguales: dos átomos, podríamos decir. La aclaración de Leibniz consiste en señalar que es obvio que podemos concebir *in abstracto* dos cosas perfectamente iguales, pero esto no quiere decir que existan. Por otro lado, el que tales pares –o tríos o infinitudes, ya que se está pensando en átomos– no existan no es casual, pues su existencia iría en contra del orden natural de las cosas y de la racionalidad de Dios, que no crea sin tener una razón. Dice Leibniz:

> La suposición de dos indiscernibles tales como dos porciones de materia perfectamente semejantes parece claramente posible en términos abstractos; pero no es consistente con el orden de las cosas ni con la sabiduría divina, por la cual nada se admite sin razón.[15]

De esta manera puede Leibniz establecer no sólo una relación entre el PII y el PRS, sino una relación entre un principio que no es ni empírico ni claramente lógico y la experiencia:

> Cuando yo niego que existan dos gotas de agua perfectamente iguales o cualquier otro par de cuerpos indiscernibles el uno del otro, no estoy diciendo: es absolutamente imposible suponerlos, sino que esto es algo contrario a la sabiduría divina y, consecuentemente, no existe.[16]

---

[14] Leibniz, *op. cit. loc. cit*

[15] Leibniz, *op cit loc. cit.*

[16] Leibniz, *Escrito V*, 25, *op cit.*, p 62

La tercera aclaración de Leibniz se relaciona con una observación de Clarke acerca no tanto de la sabiduría divina como de su voluntad y su poder. La idea de Clarke sugiere preguntas como: ¿puede el PII ponerle un límite a la creación divina?, ¿está fuera del alcance de Dios crear dos cosas absolutamente iguales? y, suponiendo que así fuera, ¿esta imposibilidad es del orden del deseo o del poder?, ¿no lo puede desear o no lo puede hacer? El tono de estos planteamientos refleja el paso de una argumentación en términos de teoría física y átomos a una argumentación en términos de las limitaciones de Dios. La idea de Clarke es que podemos aceptar una versión causal del principio de razón suficiente, pero que debemos enfatizar que es una manifestación de la voluntad de Dios y no una restricción o condición que limitara su deseo o la muy divina capacidad de elección; aceptar la versión leibniziana del PRS es para Clarke tanto como abrirle las puertas a la pagana Fatalidad que, como se sabe, con el apoyo de Hera podía ponerle un "hasta aquí" al mismísimo y caprichoso Zeus.[17] Dice Clarke:

> Ciertamente es verdad que nada es sin una razón suficiente para que así sea y por la cual es así y no de otra manera. Y, por lo tanto, donde no hay causa no puede haber efecto. Pero esta razón suficiente no es, frecuentemente, otra cosa que la mera voluntad de Dios. Por ejemplo: por qué este sistema particular de materia debería ser creado en un lugar particular y aquel en otro lugar particular, cuando (ya que todo lugar es absolutamente indiferente para toda materia) hubiera sido exactamente la misma cosa *vice versa*, suponiendo que los dos sistemas o particulares fueran semejantes; no podría haber otra razón sino la mera voluntad de Dios. La cual si no pudiera en ningún caso actuar sin una causa predeterminada, como una balanza que no se puede mover sin un peso preponderante, esto tendería a quitarle todo el poder de elección y a introducir la fatalidad.[18]

De esta manera condicionada acepta entonces Clarke el PRS, lo cual era de esperarse, dada, como ya dijimos, la relación entre este principio con la posibilidad y plausibilidad de dar explicaciones. Lo curioso, pero no raro en la discusión de las ideas de Leibniz, es que la búsqueda de alternativas puede acercarnos a las ideas que intentábamos rechazar. En el caso de Clarke su misma invocación de las posibilidades divinas lo acerca a aceptar la verdad empírica del PII, ya que, en rigor y en su teoría física, los átomos son postulados teóricos. Dice Clarke:

---

[17] Véase, por ejemplo, *Iliada*, 16, 426-461

[18] Clarke, *II Réplica*, *Correspondencia*, pp. 20-21

> Ciertamente es verdad que ningún par de hojas y quizá ningún par de gotas son exactamente iguales, ya que son cuerpos muy compuestos. Pero el caso es muy diferente en las partes de la materia sólida simple. Y aún en los compuestos no es imposible que Dios haga dos gotas de agua exactamente iguales. Y aún si las hiciera exactamente iguales no por ello llegarían nunca a ser una y la misma gota de agua.[19]

Aquí, obviamente, no podemos sino hacer referencia a estos problemas de la voluntad y omnipotencia divinas, pero aún así tenemos que recordar que se hacen con el telón de fondo de una distinción entre necesidad lógica y necesidad moral que, como la moral misma, ha perdido popularidad, pero que para Leibniz y su lectura es fundamental. Arguye Leibniz:

> Hay necesidades que deben ser admitidas. Porque hay que distinguir entre una necesidad absoluta y una necesidad hipotética. Hay que distinguir también entre una necesidad que tiene lugar porque su opuesto implica una contradicción, (y a la que se llama lógica, metafísica o matemática) y una necesidad que es moral y que hace que el Sabio escoja lo mejor y todo espíritu siga la inclinación más fuerte.[20]

A partir de esta distinción Leibniz intentará mostrar que ni el PRS ni el PII ponen en cuestión la omnipotencia divina. La noción de necesidad moral es fundamental porque, en relación con la Divinidad, encadena su omnipotencia con su racionalidad y su voluntad con su bondad; por otro lado, en relación con sus creaturas, permite conciliar su conocimiento del destino de esas creaturas con la libertad que les es otorgada y que ya estaba contemplada en su concepción.[21] De esta manera, argüirá Leibniz, pensar que la racionalidad que impone el PRS a la Divinidad es una limitación de su libertad es un error, ya que la necesidad moral, que la lleva a actuar de la mejor manera, lejos de limitarla, la perfecciona, pues gracias a ella no puede evitar (*empêcher*) actuar de la mejor manera. Dice Leibniz:

> En cuanto a la necesidad moral, ésta no le quita nada a la libertad, porque cuando el Sabio y, sobre todo, Dios (el Sabio soberano) escoge lo mejor no es por ello

[19] Clarke, *IV Réplica*, 3 y 4, *Correspondencia*, p. 46

[20] Leibniz, *Escrito V*, 4, p. 56

[21] Véase Leibniz, *op.cit.*, 6, p. 56

> menos libre, al contrario, el no haber impedimento para actuar de la mejor manera es la libertad más perfecta.[22]

Esta situación tiene su paralelo en la creaturas, que pueden imitar la sabiduría divina e inclinarse, en su humana medida, por el mayor bien; sin esta posibilidad no habría propiamente elección, ni humana ni divina, y reinaría el azar. De esta manera Leibniz pasa de la divina elección a la humana y la subsume también en la necesidad moral. Nos dice:

> Y cuando cualquier otro elige según el bien más aparente y que con más fuerza le inclina, imita en ello la libertad del Sabio en la proporción de su disposición. Y sin ello la elección sería un azar ciego.[23]

Así la elección, si lo es, no puede ser ciega y menos aún si es divina y concierne a la creación; la clarividencia de Dios con respecto a sus creaturas es total en un sentido lo suficientemente fuerte del término como para dar qué pensar a un "holista" contemporáneo. En todo caso, es claro que para Leibniz la necesidad moral está íntimamente ligada con la existencia de entidades contingentes, ya que éstas podrían no haber existido y su existencia depende de una elección divina y, enfatiza Leibniz, libérrima, puesto que ha sido perfeccionada por la necesidad moral. La existencia es entonces ese punto privilegiado donde se consolida la necesidad moral que resulta en la creación y se inicia el dominio de la posibilidad y la necesidad lógicas; en este sentido la necesidad moral es el horizonte que permite pensar en la razón suficiente de una entidad creada, ya que esta razón suficiente es, literalmente, su razón de ser. Precisamente por esto no debemos olvidar que la existencia tiene que ver con la necesidad moral y que, como enfatiza Leibniz, ésta es de un orden distinto al de la necesidad lógica, que tiene que ver con la esencia o con todo lo que tenga que ver con la caracterización de una entidad después de haber sido creada. Defendiéndose de las críticas de Clarke, dice Leibniz:

> Pero decir que Dios no puede sino escoger lo mejor y de allí inferir que aquello que no escoge es imposible, es confundir los términos, el poder y la voluntad, la necesidad metafísica y la necesidad moral, las esencias y las existencias. Ya que lo que es necesario lo es por su esencia puesto que su opuesto implica una contradicción; pero lo contingente que existe le debe su existencia al principio de lo que es mejor, razón suficiente de las cosas.[24]

[22] Leibniz, *op. cit.*, 7, p 56

[23] Leibniz, *op. cit*, *loc. cit*, pp. 56-57

[24] Leibniz, *op. cit.*, 9, p. 57

De esta manera se hace aparente la naturaleza fundante, y fundamental, del PRS: conformado según la necesidad moral es un "principe des existences" o, más explícitamente en inglés, un "ground of existences": el fundamento de las existencias.[25] Así también se hace claro el punto básico de la divergencia entre Clarke y Leibniz. Clarke, como ya vimos, había argüido que, desde el punto de vista atomista, Dios no podría haber creado la materia puesto que ésta está compuesta de átomos y estos átomos, argüía Clarke, podían concebirse como exactamente iguales.[26] Y era esta posibilidad de concebir, *in abstracto*, la que cuestionaba la naturaleza lógica del principio de la identidad de los indiscernibles y la que obligaba a Leibniz a considerarlo como una consecuencia de un principio más fundamental, el de razón suficiente. Para Leibniz es claro que el carácter más fundamental del PRS no lo convierte en lógico, pero sí le permite, a Leibniz, introducir la ya mencionada distinción entre necesidad absoluta (metafísica o matemática) y necesidad hipotética o moral y mencionar como paradigma de la primera el principio de identidad o contradicción y de la segunda el principio de razón suficiente:

> ... la necesidad absoluta y metafísica depende de otro gran principio de nuestros razonamientos, que es el de las esencias, esto es, el de la identidad o contradicción: ya que lo que es absolutamente necesario es el único camino posible y su contrario implica una contradicción.[27]

De esta manera Leibniz puede aceptar, con Clarke, que el PRS y su derivado, el PII, no están sujetos a la necesidad absoluta o lógica, pero esto no los hace menos básicos y necesarios ya que lo son desde el punto de vista moral que corresponde a la bondad de Dios. Dado este planteamiento alguien podría pensar que la balanza, que tan importante le parecía a Clarke, se podría inclinar hacia él, Clarke, dada la considerable pérdida de peso de la bondad. Sin embargo, no podemos olvidar el peso ontológico y la prioridad epistemológica del PRS; como ya vimos, para Leibniz el PRS es el principio que fundamenta la existencia de los entes contingentes, esto es, no necesarios desde el punto de vista lógico. Lógica y existencia, ya se sabe, son nociones que tienden a suscitar tensiones, pero la lección leibniziana nos invita a prevenir que nuestros afanes lógicos nos lleven a ignorar o desplazar la

---

[25] Véase Leibniz, *op. cit.*, 10, p 57

[26] Véase Clarke, *IV Réplica*, 3 y 4, p. 45

[27] Leibniz, *op. cit*, 10, p. 57

existencia, que nos lleven a pensar que podemos hablar de mundos posibles sin establecer a uno de ellos como punto de referencia previo. Este mundo, se puede argüir, es el que existe y es condición de posibilidad de la postulación de otros mundos –lógicamente posibles– que, se puede argüir también, no pueden ser sino variantes (lógicas) del mundo, existente y no postulado, del que partimos.[28]

Por otro lado, que se suele asociar con la epistemología, tal vez se podría pensar en el PRS como la expresión de la idea de que hay razones y causas y, por tanto, considerarlo como una forma de la hipótesis de racionalidad que, más allá de la existencia de un Dios racional y bondadoso, justifica nuestros afanes de dar una explicación del mundo en que vivimos y de las cosas, cercanas o lejanas, que nos rodean. El principio, leibnizianamente formulado, se suele asociar con otras tesis de Leibniz y frecuentemente se le juzga con los cándidos ojos con los que lo vio Voltaire[29], pero no es ésta la única forma de pensarlo ni de pensar el espíritu de la filosofía leibniziana. Recuérdese, por ejemplo y en relación con el juicio de Voltaire, que si bien podemos pensar que afirmar que éste es el mejor de los mundos posibles, es dar muestra de un optimismo que raya con la imbecilidad, también podemos pensar que es una muestra de un muy lúcido pesimismo. La diferencia puede ser tan simple como distinguir entre creer y saber: el optimista cree que éste es el mejor de los mundos posibles, el pesimista lo sabe.

El optimismo y el pesimismo, podríamos decir, son las dos caras que un ser humano puede poner ante el hecho del mundo, más allá, o más acá, de cualquier predicación, positiva o negativa. Las versiones religiosas, místicas, estéticas y existenciales de esta escena de consciencia del mundo son frecuentes, pero a la que apunta Leibniz, me parece, está en relación con la existencia como presupuesto de la predicación y la posibilidad de diferencia. Es por esto que la existencia no cae dentro del ámbito de la necesidad lógica, ni dentro de la reflexión de las esencias y la predicación propiamente dicha. Es por esto también que la descripción "el mejor de los mundos posibles" puede pensarse frente al horizonte de la posibilidad de concebir variantes distintas, y tal vez mejores, de este mundo, pero también puede pensarse como

[28] Recientemente las investigaciones de Kripke, y de la semántica de la lógica modal en general, han traído a cuento el problema de la naturaleza de los mundos posibles ya que, por ejemplo, hay filósofos que asumen una posición platónica y piensan que su importancia está en relación con la posibilidad de independizarlos del mundo existente, mientras que otros asumen una posición constructivista o formalista Véase, S. Kripke, "Naming and Necessity" en *Semantics of Natural Language*, editado por Davidson y Harman, y D. Lewis, *Conterfactuals*, esp. cap. 4

[29] Véase Voltaire, *Candide*, cap. 1, y la entrada "BIEN (TOUT EST)" de su *Dictionnaire Philosophique*

enfatizando que es el que existe, el único que tenemos aunque no lo pensemos. Es el mejor porque existe y porque, mal que bien e ignorando la sabiduría de Sileno, en él existimos y, gracias a ello, podemos pensarnos distintos y en otro lugar. Claro está que alguien nos podría reprochar no tanto nuestro optimismo o pesimismo, sino nuestro monismo moral, recordándonos que en este valle ni la miseria ni la fortuna nos tocan a todos por igual y que, en este sentido, los mundos del miserable y del afortunado pueden ser dos mundos aparte. Wittgenstein, por ejemplo, quien en su juventud tuvo sus momentos leibnizianos[30], hablaba en el *Tractatus* de estos mundos: el de los felices (Glückliche) y el de los infelices (Unglückliche). En ese libro afirma: "El mundo de los felices es distinto del mundo de los infelices." [31]

Es claro, sin embargo, que esta distinción no afecta la unidad del mundo, sino que apunta a otro problema: el de la relación de los sujetos –creaturas diría Leibniz– con el mundo, aunque parte del problema es determinar qué clase de relación es la que se está considerando. Esta dificultad se hace patente cuando tratamos de explicar la diferencia entre el mundo de los felices y el de los infelices en términos de diferencias físicas, sociales, históricas o, incluso, psicológicas, ya que no parece que Wittgenstein estuviera pensando en alguna de ellas.[32] Pero si no se trata de establecer la diferencia en los términos de estos conocimientos, entonces tal vez tengamos que pensar que la distancia que establece Wittgenstein entre la felicidad y la miseria pertenece a un ámbito distinto, en el sentido en que no es reducible a ningún saber teórico específico y en el sentido de que tiene que ver con la manera en que asumimos la existencia, propia y del mundo, más allá, o antes, de posibles afanes de cambio y transformación. Esta dicotomía, entre analizar o pensar el mundo y asumir su existencia, podría tal vez asimilarse o, al menos relacionarse, con algunas afirmaciones de Wittgenstein acerca del sentido del mundo y con lo que llegó a considerar su principal propuesta y problema cardinal de la filosofía: la distinción entre lo que se puede expresar y, por lo tanto, pensar, y lo que no se puede expresar sino sólo mostrar y, paralelamente, podríamos agregar, sólo asumir.[33] En el *Tractatus* dice Wittgenstein:

---

[30] Piénsese, por ejemplo, en sus ideas del análisis, los simples y el orden lógico.

[31] Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, con una introducción de Bertrand Russell, trad Enrique Tierno Galván (Madrid, Revista de Occidente, 1957); 6 43

[32] Véase G E.M Anscombe, *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, esp. cap. 13, (Londres, Hutchinson, 1967)

[33] En su libro sobre el *Tractatus*, Elizabeth Anscombe cita una carta de Wittgenstein a Russell donde le dice: "Me temo realmente que no has acabado de entender mi propuesta; todo el asunto de las proposiciones lógicas es sólo un corolario de ella. El punto principal es la teoria de lo que puede ser expresado (*gesagt*) por la proposiciones, esto es, por el lenguaje (y, lo que viene a ser lo mismo, lo que puede ser *pensado*) y lo que no puede ser expresado por las

El sentido del mundo debe quedar fuera del mundo. En el mundo todo es como es y sucede como sucede, *en* él no hay ningún valor, y aunque lo hubiese no tendría ningún valor.
Si hay un valor que tenga valor, debe quedar fuera de todo lo que ocurre y de todo ser-así [34]

Por otro lado, nada podría parecer más alejado de la posición de Wittgenstein que una distinción leibniziana entre necesidad lógica y necesidad moral. Cuando Wittgenstein –tratando tal vez de clarificar la sombra de Schopenhauer– trae a cuento la voluntad, enfatiza -aun cuando es claro que no se trata de la voluntad divina, sino humana- que ésta no puede cambiar al mundo. El énfasis no es retórico, está relacionado con la naturaleza del mundo y de la voluntad: mundo y voluntad son de tal manera independientes que aún cuando, por una especie de milagro, se estableciera una perfecta armonía entre nuestro deseo y la realidad, esta coincidencia sería precisamente eso, una coincidencia, un accidente, una merced de la suerte (eine Gnade des Schicksals), "una gracia del destino", como traduce Elizabeth Anscombe.[35] Dice Wittgenstein:

El mundo es independiente de mi voluntad.

Aunque todo lo que deseáramos ocurriese, esto sería solamente, por así decirlo, una merced de la suerte, pues no hay conexión *lógica* entre voluntad y mundo que pueda garantizar tal cosa, ni nosotros podríamos a su vez querer esta supuesta conexión física. [36]

Esta separación radical entre mundo y voluntad, debemos recordar, no hace referencia a una noción psicológica, sino ética, de la voluntad y, consecuentemente, desde el punto de vista wittgensteniano, la pone en el ámbito de lo que no se puede decir:

De la voluntad como sujeto (*Träger*) de la ética (*des Ethischen*) no se puede hablar.

---

proposiciones, sino sólo mostrado (*gezeigt*); esto, creo, es el problema cardinal de la filosofía...". Anscombe, *op. cit.*, p. 161

[34] *Tractatus*, 6 41

[35] Anscombe, *op. cit* , p. 169

[36] *Tractatus*, 6 373 y 6.374

Y la voluntad como fenómeno sólo interesa a la psicología. [37]

De esta manera, aun cuando no podemos establecer un paralelo que relacione cabalmente la distinción de Leibniz, entre necesidad lógica y necesidad moral, con la distinción de Wittgenstein entre mundo y voluntad moral, sí podemos notar que ambos tratan de establecer dos órdenes o ámbitos: el mundano, sujeto a las leyes físicas y lógicas, y el moral, sujeto, según Leibniz, al principio de razón suficiente y situado, para Wittgenstein, fuera del mundo, fuera del ámbito de lo que se puede decir pero que está, sin embargo, relacionado con la posibilidad de darle un sentido al mundo y de caracterizar a la ética como transcendental. Dice Wittgenstein:

> Pues todo lo que ocurre y todo ser-así es casual (*zufällig*).
> Lo que lo hace no casual no puede quedar (*liegen*) *en* el mundo, pues de otro modo sería a su vez casual.
> Debe quedar fuera del mundo.
>
> Por lo tanto, tampoco puede haber proposiciones de ética.
> Las proposiciones no pueden expresar nada más alto.
>
> Es claro que la ética no se puede expresar.
> La ética es transcendental.[38]

La posibilidad de una correspondencia entre las distinciones, leibniziana y wittgensteiniana, del orden lógico y el orden moral, no debe hacernos olvidar que la concepción de Leibniz de la lógica concierne a lo que él llama las esencias, mientras que la de Wittgenstein se estructura alrededor de la noción de tautología.[39] Sin embargo, ambos coinciden en suponer que aunque la lógica pueda concebirse como independiente de la experiencia tiene que partir de algo dado, de algo, pensaría Leibniz, creado. Dice Wittgenstein:

> La 'experiencia' de la que tenemos necesidad para entender la lógica, no es que algo ocurra de tal y tal modo, sino que algo *es*; pero esto *no* es experiencia.
> La lógica *precede* a toda experiencia: que algo es *así*.
> Es antes que el Cómo, no que el Qué.[40]

---

[37] *Ibid* , 6 423

[38] *Tractatus*, 6.41, 6.42, 6 421

[39] Véase *Tractatus*, 6 1-6 13

[40] *Tractatus*, 5.552

Es claro entonces que el lugar de la lógica no está, para Wittgenstein, dentro del ámbito de la experiencia, sino que la precede, pero hay que notar que esta experiencia la caracteriza Wittgenstein como que las cosas o el mundo sean de una determinada manera: "que algo es *así*". O sea que esta experiencia es distinta de aquella "de la que tenemos necesidad para entender la lógica", pues esta "experiencia" –entre comillas– no tiene que ver con el cómo sean las cosas en el mundo, con "que algo es *así*", sino con que algo sea, o mejor dicho, con "que algo *es*", sin subjuntivos que opaquen la pureza del existencial.

Así, si la experiencia de lo que *es*, es necesaria y precede al *cómo*, y si lo místico está relacionado con la existencia no cualificada del mundo, entonces tal vez no sea del todo aventurado sugerir un paralelo de la distinción de Wittgenstein, entre lo que se puede decir y lo místico (de lo que no se puede hablar), con la distinción de Leibniz entre lo lógico y lo moral. Ambos, podríamos decir, coinciden no sólo en la importancia de la reflexión lógica y científica acerca de las esencias y del cómo en general, sino en la importancia de la existencia no cualificada del mundo como punto de referencia para hablar tanto de mundos posibles como del mundo que nos permite calificarlos de posibles. Es en este sentido en el que la lógica precede al Cómo, pero no al Qué; está en los límites de la experiencia, ya que su supuesto fundamental y fundante es, como en Leibniz, que algo es. Este "es" precede a la experiencia, en el sentido de cómo es el mundo, y a la lógica en el sentido de que su "experiencia" es necesaria para entender la lógica, por más que esa experiencia no pueda serlo en el sentido cabal del término; en el sentido cabal entramos en el ámbito de lo místico y de su "experiencia" como condición de comprensión. Enfatiza Wittgenstein:

> No es lo místico *cómo* sea el mundo, sino *que* sea.[41]

(La dificultad de aceptar esta posición se refleja en la traducción castellana que, con un sólo acento sobre el "que", convierte al misticismo en un afán científico.)

Por su propia naturaleza este tipo de planteamientos hacen dudosa casi cualquier comparación que tratara de establecer algún paralelo entre el orden

[41] *Tractatus*, 6.44

moral leibniziano y el orden místico wittgensteiniano. Sin embargo, como ya señalamos, parece claro que ambos apuntan hacia el reconocimiento de una prioridad ontológica y moral de la existencia, en su sentido más lato, sobre la lógica y el análisis de las esencias, como diría Leibniz, o del cómo, como diría Wittgenstein. A qué orden pertenezca esta coincidencia tampoco es fácil de determinar, pero sí es de notarse que no podemos extenderla directamente a una convalidación del PII; no lo podemos hacer porque, en su punto esencial, Wittgenstein usó el mismo argumento que Clarke para rechazar el principio y, con él, la definición de la identidad de *Principia*.

Como ya dijimos al inicio del capítulo, la definición de *Principia* se puede descomponer en dos implicaciones, una de las cuales, la que afirma que si *x* y *y* tienen todas sus propiedades en común, entonces son iguales, se puede identificar con el PII. Más adelante vimos también que, entre otras cosas, Clarke le objetó a Leibniz que bien se podría concebir que dos cosas tuvieran todas sus propiedades en común sin que este acto de pensamiento pudiera considerarse como una contradicción; esta posibilidad, de acuerdo con los propios lineamientos leibnizianos acerca de la naturaleza de la necesidad lógica, indica que el principio no es un principio lógico. Paralelamente, Wittgenstein encuentra inadecuada la definición de Russell porque de acuerdo con ella no podríamos afirmar que dos objetos difirieran *solo numero* y señala, también como Clarke, que lo determinante no es la verdad, o falsedad, de la afirmación sino que tenga sentido, el hecho, de acuerdo con Clarke, de poder pensarla sin contradicción. Por su parte dice Wittgenstein:

> La definición de Russell de '=' no basta (*genügt nicht*); porque, según ella, no se puede decir que dos objetos tengan todas sus propiedades en común. (Incluso si esta proposición no es nunca verdadera (*richtig*), tiene, sin embargo, sentido.)[42]

Esto es, la comunidad de propiedades no puede implicar, necesariamente, la identidad porque la posibilidad de su excepción, que dos objetos tuvieran todas sus propiedades en común, está garantizada por su plausibilidad. Para Clarke, ya vimos, esta plausibilidad se refleja en la posibilidad de concebir su excepción; para Wittgenstein, en la posibilidad de afirmarla con sentido. Y ambas posibilidades, podríamos agregar, descansan en el principio leibniziano de que la contingencia de una proposición se muestra en el hecho de que ni ella ni su negación sean contradictorias. Para

[42] *Tractatus*, 5.5302

Wittgenstein las contradicciones, como las tautologías, aunque estrictamente no se pueden considerar sin sentidos, sí carecen de él. Dice Wittgenstein:

> La proposición muestra aquello que dice; la tautología y la contradicción muestran que no dicen nada.
> La tautología no tiene condiciones de verdad, pues es incondicionalmente verdadera; y la contradicción, bajo ninguna condición es verdadera.
> La tautología y la contradicción carecen de sentido (*sinnloss*)."
>
> Tautología y contradicción no son, sin embargo, sinsentidos (*unsinnig*); pertenecen al simbolismo, del mismo modo que cero ("0") es parte del simbolismo de la aritmética.[43]

Consecuentemente, el PII, que tiene sentido y no es una tautología, no puede ser una afirmación lógica, sino una contingencia; sin embargo, no es una contingencia normal sino anómala, en la medida misma de los señalamientos, tanto de Clarke[44] como de Wittgenstein, con respecto a su verdad o, si se quiere, con respecto a la improbabilidad de su falsedad. Si el PII fuera una tautología no tendría, para Wittgenstein, condiciones de verdad, sino que sería incondicionalmente verdadera, pero entonces, ya vimos, carecería de sentido. Pero Wittgenstein sostiene que su negación, la proposición que afirma que dos objetos tienen todas sus propiedades en común, tiene sentido no obstante que tal vez nunca sea verdadera, con lo cual, podríamos pensar, se acerca a una especie de contradicción, aunque, obviamente, no de raigambre lógica. Confinada entre paréntesis y con la cotidianidad de la palabra "*richtig*", (que Tierno Galván, muy filosóficamente tradujo como "*verdadera*"), se encuentra la acotación wittgensteiniana:

> (Incluso si esta proposición no es nunca verdadera (*richtig*), tiene, sin embargo, sentido (*Sinn*).[45]

¿Cuál es entonces el *status* del PII o de su negación? Decir que se trata de una contingencia invita, ya vimos, precisiones que no se pueden derivar fácilmente de la noción de tautología pero que tampoco son fáciles de

[43] *Tractatus*, 4.461 y 4 4611

[44] Véase, por ejemplo, Clarke, *IV Réplica*, 3 y 4, pp.45-46

[45] *Tractatus*, 5 5302

establecer a partir de la noción wittgensteiniana de proposición. Parte de la dificultad de aclarar la naturaleza del PII tiene que ver, dentro del contexto del *Tractatus*, con que la excepción a este principio se introduce como la posibilidad de decir, o afirmar, la diferencia *solo numero*. Esta diferencia, aunque poco plausible, tiene sentido y, consecuentemente para Wittgenstein y básicamente para Clarke, la podemos concebir. La relación entre la posibilidad, el sentido y la proposición es, para Wittgenstein, que el sentido de la proposición está relacionado con la posibilidad de la situación. Dice Wittgenstein:

> Lo que la figura (*Bild*) representa es su sentido.
>
> 'Un hecho atómico (*Sachverhalt*, estado de cosas) es pensable' significa: Nosotros podemos figurárnoslo.
>
> Nosotros usamos el signo sensiblemente perceptible de la proposición (sonidos o signos escritos, etcétera) como una proyección del estado de cosas posible. (*als Projektion der mögliche Sachlage.*)[46]

Podríamos decir entonces que la posibilidad de que dos cosas tengan todas sus propiedades en común sea un estado de cosas concebible se puede expresar, en términos wittgensteinianos, diciendo que nos podemos "figurar" tal situación y que esta figuración se proyecta en la proposición que afirma la posibilidad de tal estado de cosas. Claro está que la imagen figurada no necesariamente tiene que ser "retrato de una cosa", como diría Fr. Luis de León, y esta posibilidad es esencial para distinguir entre proposiciones verdaderas, retratos fieles, podríamos decir, y proposiciones falsas, más fieles a la fantasía que a la realidad. Así, desde este punto de vista, por un lado podríamos pensar que el PII es una proposición donde se proyecta la posibilidad de un estado de cosas y que, como tal, bien podría ser el caso que ese estado de cosas no se diera, esto es, que existieran dos cosas distinguibles *solo numero*. Lo curioso de esta contingencia, ya señalamos, es que tanto Clarke como Wittgenstein la critican por no ser una verdad lógica, pero sin dejar de mencionar que probablemente es verdadera. Podemos entonces aceptar con Clarke y Wittgenstein que el PII no es un principio lógico, y menos una tautología, pero pensar, sin contradecirlos, que es una verdad. El problema, obviamente sigue siendo qué clase de verdad es el PII, pero un problema que podría pensarse con un trasfondo wittgensteiniano. Un primer

[46] *Tractatus*, 2.221, 3.001, 3.11

intento en esta dirección es tomar en cuenta que el estado de cosas cuya posibilidad se proyecta y se prohibe en el PII es la existencia de objetos completamente iguales o, como hemos venido diciendo, que difieran *solo numero*. En relación con estos aspectos del problema la *posición de* Wittgenstein es bastante explícita: no piensa que se pueda establecer una relación de identidad entre objetos ni que se pueda hablar de una relación de identidad con un objeto determinado:

> Que la identidad no es una relación entre objetos es obvio. Esto se esclarece, por ejemplo, completamente si consideramos la proposición "(x): fx. ⊃ x = a". Lo que esta proposición dice es simplemente que *sólo* a satisface la función f, y no que sólo aquellas cosas que tienen una cierta relación con a satisfagan la función f.
> Se podría naturalmente decir que en efecto *solamente* a tiene esta relación respecto de a, pero para expresar esto necesitaríamos del propio signo de identidad.[47]

Esta línea de pensamiento lo lleva a considerar la negación propiamente leibniziana del PII, esto es, la afirmación de la existencia de dos cosas completamente iguales y a considerarla como un sinsentido; este sinsentido apunta hacia la sorpresa humeniana con respecto a la autoidentidad. (La otra forma de cuestionar el PII, debemos recordar, es la de Clarke, la que afirma que podemos concebir objetos que difieran *solo numero*, y que, como ya vimos, el mismo Wittgenstein usa para criticar la definición de Russell). Con respecto a la existencia de pares idénticos dice Wittgenstein:

> Sea dicho de paso: decir de *dos* cosas que son idénticas es un sinsentido, y decir de *una* que es idéntica consigo misma no es decir nada.[48]

Pero, si afirmar la identidad de dos cosas es un sinsentido, cómo podremos calificar, desde este punto de vista, el PII, que es la afirmación acerca de que no existe en la naturaleza tal par de cosas. Porqué, podríamos insistir, es un sinsentido afirmar que dos cosas son idénticas. Puesto que Wittgenstein enfatiza el "dos" se podría pensar que está siguiendo la intuición básica leibniziana: si son *dos*, deben ser distintas. Claro está que para Leibniz el "deben" se deriva de la naturaleza bondadosa de Dios y es, por lo tanto, un

[47] *Tractatus*, 5.5301

[48] *Tractatus* 5 5303

principio moral, mientras que la razón que pudiera tener Wittgenstein para asumir la misma intuición no es tan transparente. O tal vez, podríamos elucubrar, no se trate precisamente de una razón, en el sentido de una explicación derivada de una reflexión newtoniana acerca de las propiedades de las cosas, sino de una limitación relacionada con la noción misma de "cosa" que podría emparentarse con otros problemas del *Tractaus* como los de la forma lógica, lo inexpresable y, especialmente, el del ámbito que Wittgenstein calificaba de místico. Lo místico, recordemos, puede presentarse de varias maneras; aunque no es expresable tiene que ver con la posibilidad de que las proposiciones –contingentes– tengan, vía la forma lógica, sentido y con que el mundo –contingente y casual que es– pueda tenerlo. Un punto inicial de esta argumentación es la noción de imagen (*Bild*) –en el sentido amplio de representación– que le permite a Wittgenstein introducir una noción bastante radical de forma lógica; la forma lógica se presenta como la condición de posibilidad de la representación y, en la misma línea, se la identifica con la forma de la realidad:

> Lo que cada figura (*Bild*), de cualquier forma, debe tener en común con la realidad para poderla figurar por completo -justa o falsamente- es la forma lógica, esto es, la forma de la realidad.[49]

Hay que notar, sin embargo, que lo que representa una figura es literalmente una posibilidad, una de la formas que podrían tomar los hechos, no su existencia.

> La figura, figura la realidad representado una posibilidad de la existencia y de la no existencia de los hechos atómicos.[50]

La existencia o no existencia de un hecho atómico, acorde con una representación, es el fundamento de nuestro hablar de verdades y falsedades:

> Lo que la figura representa es su sentido.
> En el acuerdo o desacuerdo de su sentido con la realidad, consiste su verdad o falsedad [51]

[49] *Tractatus*, 2.18

[50] *Tractatus*, 2.201

Bajo estos lineamientos, como se sabe, Wittgenstein transformará lo que podría parecer una manifestación más de la teoría de la adecuación, en una teoría de las proposiciones como figuras de la realidad que no sólo pondrá el acento en aquello que hace posible la representación –la forma lógica– sino que, giro notable, pondrá está condición fuera de los límites de la representación. Y, puesto que las proposiciones pueden representar toda la realidad, la forma lógica no podrá ser representada a menos que tuviéramos acceso a un punto de vista externo, fuera de la realidad, de la lógica y del mundo.

> La proposición puede representar toda la realidad, pero no puede representar lo que debe de tener de común con la realidad para poderla representar: la forma lógica.
>
> Para poder representar la forma lógica debemos poder colocarnos con la proposición fuera de la lógica; es decir, fuera del mundo.[52]

Pero, aun si la forma lógica está fuera del alcance del decir, aun si queda fuera del ámbito de lo representable, al ser condición de la representación, se reflejará en la proposición y en el lenguaje en general. Este curioso *status* de la forma lógica, de ser condición de la representación pero ser ella misma irrepresentable, de estar esencialmente presente en el lenguaje sin poder nunca convertirse en tema de conversación, le permite a Wittgenstein introducir la distinción entre el ámbito de lo que podemos hacer objeto de discurso y el de lo que sólo se expresa o se muestra en el lenguaje. Y lo que se muestra en el lenguaje, no debemos olvidar, es la forma lógica que, como ya vimos, Wittgenstein identifica con la de la realidad:

> La proposición no puede representar la forma lógica; (la forma lógica) se refleja en ella (la proposición)
> Lo que en el lenguaje se refleja, el lenguaje no puede representarlo
> Lo que en el lenguaje *se* expresa, *nosotros* no podemos expresarlo en el lenguaje
> La proposición *muestra* la forma lógica de la realidad
> La exhibe.[53]

---

[51] *Tractatus*, 2 221, 2 222

[52] *Tractatus*, 4.12 (trad. modificada, Tierno Galván escribe: "..., pero no puede representar lo que debe tener de comun con la realidad para poder representar la forma lógica." ignorando así la imposibilidad, expresada en el siguiente párrafo, de colocarnos fuera del mundo.

[53] *Tractatus*, 4.121

Así las cosas, tal vez podríamos decir que, en un sentido, el PII está relacionado precisamente con la forma ontológica de la realidad y que Leibniz trató de expresar esta limitación ("no puede haber...") en un principio que, bajo los criterios del *Tractatus*, debería de rayar con lo inexpresable. Leibniz vio también que el PII no se podía expresar como una verdad lógica, pero enfatizó el ámbito de su necesidad al señalar que era un principio que no obstante no alcanzar la necesidad lógica sí participaba de la necesidad moral. Y, de acuerdo con la filosofía leibniziana, esta necesidad moral tiene precedencia sobre la necesidad lógica. Dicho de otra manera: Leibniz afirma, en un principio de carácter ontológico-moral, lo que Wittgenstein cree que no se puede expresar por medio del lenguaje sino sólo mostrar, por más que lo que se muestre se pudiera identificar con el contenido del principio leibniziano. Esta posible identificación está relacionada con lo que Wittgenstein cree necesario mostrar en relación con la identidad y que lo lleva a formular un simbolismo, alternativo al russelliano, bajo los lineamientos del PII leibniziano. Esto es, en lugar de formular en términos lógicos una caracterización de la identidad, Wittgenstein hará que su simbolismo la muestre. Dice Wittgenstein:

> Expreso la identidad del objeto por la identidad del signo y no por medio de un signo de identidad. Y la diversidad de los objetos por la diversidad de los signos.
>
> Yo no escribo, pues, "f(a,b) . a=b", sino "f(a,a)" (o "f(b,b)"). Y no "f(a,b) . ~a=b", sino "f(a,b)".
>
> Y análogamente: no "(∃x,y) . f(x,y) . x=y", sino "(∃ x) . f(x,x)"; y no "(∃ x,y) . f(x,y) . ~x=y", sino "(∃x, y) f(x,y)".
>
> (Y así en lugar del Russelliano "(∃x,y) . f(x,y)"; "(∃x,y) . f(x,y) .v. (∃x) . f(x,x)". [54]

La cercanía de estos planteamientos con el PII es notoria, aun cuando no se establezca desde el punto de vista ontológico leibniziano, ya que para Wittgenstein la identidad no es una relación entre objetos. Esta conclusión, que a Wittgenstein le parece obvia, se menciona, como ya vimos, un poco antes de hacer referencia, *en passant*, al "sin sentido" que sería afirmar un contraejemplo del PII y a la pobreza de contenido de una afirmación de autoidentidad. [55]

---

[54] *Tractatus*, 5 53, 5 531, 5 532

[55] Véase *Tractatus*, 5.5301, 5 5303

Claro está que se podría argüir que, desde un punto de vista estrictamente wittgensteiniano, lo que concierne a lo místico no puede ser afirmado sino sólo mostrado y que, por tanto, cualquier intento de acercar una tesis explícita, como el PII, con ese ámbito, es violentar la posición wittgensteiniana. Sin embargo, y como se sabe, esta violencia la inició el propio Wittgenstein en el *Tractatus* al tirar su famosa escalera y sugerirnos una contemplación silenciosa de un mundo que esa escalera nos había permitido vislumbrar:

> Mis proposiciones son esclarecedoras de este modo; que quien me comprende acaba por reconocer que carecen de sentido, siempre que el que comprenda haya salido a través de ellas fuera de ellas. (Debe, pues, por así decirlo, tirar la escalera después de haber subido.)
> Debe superar estas proposiciones; entonces tiene la justa visión del mundo. [56]

Leibniz, podríamos pensar, también nos permite atisbar ese mundo pero sin invitarnos a un voto de silencio. Muy por el contrario, es en ese umbral, anterior a la reflexión de las esencias, donde se encuentra para él, y tal vez también para Wittgenstein, el fundamento y la fundamentación de una filosofía que no se confunda con la reflexión científica. El mundo es y es distinto a todo otro mundo concebible en la precisa medida, arguye Leibniz, de que existe. Se pueden concebir otros mundos, muy distintos, muy parecidos e incluso iguales a éste, pero sólo éste existe. Y ésta es para Leibniz una verdad, una verdad importante y expresable. Wittgenstein, por otro lado, acepta que el mundo es y afirma que es todo, "lo que acaece" (*was der Fall ist*), y lo identifica con "la totalidad de los hechos"[57] aunque esta totalidad, o el hecho de esta totalidad, no sea propiamente un hecho. Las resonancias russellianas de este hablar de totalidades cambian de tono cuando notamos que, para Wittgenstein, la totalidad limitada del mundo más que generar paradojas propicia la experiencia de lo místico. Esta experiencia se relaciona tanto con el mundo como con la vida, ya que en este nivel mundo y vida se identifican:

> Sentir el mundo como un todo limitado es lo místico
> El mundo y la vida son una sola cosa. (*Die Welt und das Leben sind Eins.*) [58]

---

[56] *Tractatus*, 6.54

[57] *Tractatus*, 1, 1.1

[58] *Tractatus*, 6 45, 5.621

Lo místico, ya vimos, no es "*cómo* sea el mundo, sino *que* es" y, por consiguiente, no puede ser uno de los hechos del mundo ni expresarse como tal; sólo puede mostrarse:

> Hay, ciertamente, lo inexpresable (*Unaussprechlichen*), lo que se *muestra* (*zeigt*) a sí mismo; esto es lo místico.[59]

Por otro lado, como ya señalamos, para Wittgenstein el sentido del mundo, si es que lo hay, no puede encontrarse *en* el mundo ni en *cómo* sea el mundo, pues este es el ámbito de la contingencia; debe quedar entonces "fuera del mundo", y es, por ello, inexpresable pero también referencia de valor y sentido que podríamos identificar con lo místico, con la existencia no cualificada del mundo, aquella que para Leibniz cae dentro del orden de la creación y la necesidad moral. Para Leibniz la existencia también precede al análisis, pero no sólo en el estricto sentido ontológico de que el mundo existe, sino en el sentido de que hay una razón para que exista, una razón para distinguirlo como único dentro de la gama de mundos posibles que este mundo nos permite concebir y pensar. Así, aceptar la existencia del mundo como vía mística de sentido del mundo, vincularía tal aceptación con el principio de razón suficiente leibniziano, que se podría ver, precisamente, como la posibilidad misma de darle al mundo en el que vivimos, por más contingente y casual que sea, sentido. El orden moral de Leibniz, el orden de la creación limitada por la bondad y la razón, se orientaría hacia el ámbito ético, hacia la posibilidad de vivir el mundo de los felices, de hacer coincidir el mundo limitado con las limitaciones de la vida, ya que, "El mundo y la vida son uno".

Bajo los propios lineamientos leibnizianos y, obviamente, bajo los de Wittgenstein, ésta no es una buena razón para considerar ~~que~~ el principio que afirma que todo tiene una razón, como un principio lógico, pero sí es una buena razón para, simplemente, considerarlo; una buena razón para no descartarlo demasiado rápidamente en aras de una necesidad no sólo lógica, sino excluyente. Esta necesidad, se sabe, es la que prevalece en los contextos que, como *Principia Mathematica*, aspiran al máximo rigor lógico, no obstante que en algunos casos, como el de *Principia* misma, se encuentren contaminados por principios que, como el de los indiscernibles o el de infinitud, difícilmente pueden aspirar a reducirse a una estructura tautológica. El que ésta sea la

---

[59] *Tractatus*, 6 522

necesidad que prevalece es también la buena razón por la que la sensatez de Clarke haya prevalecido sobre la especulación de Leibniz y las críticas de Wittgenstein se impusieran sobre los afanes de Russell, aunque, como hemos visto, el precio a pagar todavía no sea muy claro. Por otro lado, estas catedrales lógicas pueden ser un buen lugar para hacer una parada y reflexionar sobre las insistencias de Leibniz y Russell de redistribuir altares y reacomodar capillas. O tal vez, más simplemente, sean un buen lugar para reflexionar, con Wittgenstein, sobre la existencia del mundo y su catedral. En todo caso aquí nos ha permitido atisbar el tamaño de la apuesta ontológica que encierra la definición russelliana de la identidad.

Resumen

En la definición de la identidad de *Principia* se pueden distinguir dos implicaciones: la primera dice que si x=y, entonces no hay ninguna propiedad que x y y no compartan, esto es son indiscernibles. La segunda implicación dice que si x y y son indiscernibles, entonces son idénticas. El carácter puramente lógico de esta última afirmación ha sido puesto en duda y se le ha asociado con el principio de la identidad de los indiscernibles (PII) de Leibniz, que afirma que "... no hay en la Naturaleza dos Seres que sean perfectamente el uno como el otro, y donde no sea posible encontrar una diferencia...". Normalmente este principio ha sido y es rechazado por su falta de *status* lógico. El PII no es un principio lógico porque, bajo los propios criterios leibnizianos, su negación no es una contradicción o, como arguyó Clarke, podemos concebir dos cosas completamente semejantes sin que este ejercicio mental sea un disparate. Leibniz aceptó que la necesidad del principio no podía ser lógica, pero arguyó que era moral o hipotética. En su argumentación aclara que él no afirmó que no se pudieran *concebir* dos cosas con todas sus propiedades en común, sino simplemente que no existían. Afirma además que la necesidad del PII proviene de la de un principio superior que es el de razón suficiente (PRS). De esta manera Leibniz distinguirá entre una necesidad lógica, relacionada con las esencias, y una necesidad moral relacionada con la existencia: "lo contingente que existe le debe su existencia al principio de lo que es mejor, razón suficiente de las cosas". De esta manera el PRS se convierte en un principio fundante y fundamental, en un "principe des existences" o, como se tradujo al inglés, "ground of existences": fundamento de las existencias. Si ignoramos esta concepción ontológica del principio corremos el riesgo de reducirlo a su versión puramente epistemológica; esta versión suele propiciar la candidez de juicio, que Voltaire ilustró, con respecto a las tesis leibnizianas. A Voltaire, como a otros tantos, le pareció que la afirmación de Leibniz acerca de que éste es el mejor de los mundos posibles era una manifestación típica de la inocencia filosófica. Tal vez lo sea, pero hay que recordar dos cosas: en primer lugar, que esa tesis tiene que ver con que este mundo, con un mundo que a diferencia de otros lógicamente posibles, existe y, en segundo lugar, que el optimismo que esa afirmación parece entrañar puede ser cuestionado si notamos que Cándido pudo haber creído que éste era el mejor de los mundo posibles, pero Leibniz lo sabía. Optimismo y pesimismo pueden ser así el resultado de dos lecturas de la misma frase o las dos caras que un ser humano puede poner ante el mundo, más allá o más acá de cualquier predicación. Las versiones religiosas, místicas, estéticas y existenciales de esta escena son varias, pero la que representa Leibniz apunta

hacia la existencia como presupuesto ontológico de la predicación y a la posibilidad de la diferencia. Es por esto que la existencia no cae dentro del ámbito de la necesidad lógica, ni dentro de la reflexión de las esencias y la predicación propiamente dicha; y es en esta situación en la que Leibniz plantea la pertinencia de dos tipos de principio y dos formas de la necesidad. Sin embargo, el predominio contemporáneo de la lógica suele asociarse con el dominio de una sola clase de principios, los lógicos, y con el rechazo de cualquier forma de necesidad que no sea subsumible en estos principios. Una expresión posible de esta tendencia es la de Wittgenstein en el *Tractatus* y su pertinencia para los problemas que aquí se plantean es doble: por un lado, en el *Tractatus*, Wittgenstein critica, en términos paralelos a los que Clarke usó contra Leibniz, la definición de la identidad de *Principia* y desarrolla una concepción del lenguaje y la realidad que se caracterizará por su imposición de límites, tanto a lo que podemos decir como al mundo del que podemos hablar. Por otro lado, la posición wittgensteiniana está esencialmente ligada con la paradoja de su formulación: lo que se dice en el *Tractatus*, de acuerdo con los criterios allí establecidos, pertenece a aquello de lo que no se puede hablar, a aquello acerca de lo cual, según el propio consejo de Wittgenstein, deberíamos guardar silencio. Esta paradoja no se limita a la epistemología del *Tractatus*, que Wittgenstein usa y desecha como una escalera, sino que se extiende a otras preguntas que ahí se formulan y entre las que destaca la del sentido del mundo y, consecuentemente, de la vida. Estas preguntas son éticas y no pueden reducirse, de acuerdo con Wittgenstein, a ningún saber específico del mundo, por lo cual "El sentido del mundo debe quedar fuera del mundo" ya que *en* él, en el mundo, no hay ningún valor. Al quedar fuera del mundo, fuera de la totalidad de los hechos, el sentido del mundo quedará fuera de lo expresable, pero no fuera de la reflexión de Wittgenstein ni fuera del lenguaje, ya que pasará a formar parte de lo que Wittgenstein llama lo místico, aquello de lo que no se puede hablar pero se puede mostrar. El paralelo entre esta posición y la de Leibniz se establece a partir básicamente de dos afirmaciones de Wittgenstein: en la primera se identifica lo místico con que el mundo exista ("No es lo místico *cómo* sea el mundo, sino *que* sea.") y, en la segunda, habla de la "experiencia" que es necesaria para entender la lógica, esta "experiencia", enfatiza, "no es que algo ocurra de tal y tal modo, sino que algo *es*". Si la experiencia de lo que *es* es necesaria y precede al *cómo*, y si lo místico está relacionado con la existencia no cualificada del mundo, entonces tal vez no sea del todo aventurado sugerir un paralelo de la distinción de Wittgenstein, entre lo que se puede decir y lo místico (de lo que no se puede hablar), con la distinción de Leibniz entre lo lógico y lo moral. Ambos, podríamos decir, coinciden no sólo en la importancia de la reflexión lógica y científica acerca de las esencias y del cómo en general, sino en la importancia de la existencia no cualificada del mundo como punto de referencia para hablar tanto de mundos posibles como del sentido del mundo que los hace posibles. Este paralelo se refuerza señalando, por un lado, que en el *Tractatus* la identidad no se define sino que se muestra (en el simbolismo) y, por otro, que la noción de la identidad de Wittgenstein no es incompatible con el PII leibniziano. La moraleja que se deriva de estos planteamientos es que, desde el punto de vista filosófico, la existencia, en forma de cuantificador existencial o en forma de ser-ahí, sigue siendo un punto de referencia que no sólo no podemos ignorar, sino que no podemos escindir sin violencia y con la nitidez que algunos desearan.

Capítulo 1

La definición de la identidad en *Principia Mathematica*.

Dixit quidam ex illis, propius ipsorum propheta:
"Cretenses semper mendaces, malae bestiae, ventras pigri".

Tito, 1, 12

En *Principia Mathematica* Russell ofrece la siguiente definición de la identidad:

$$x = y. =: (\phi): \phi!x.\supset.\phi!y \quad \mathit{Df.}$$ [1]

Los problemas que presenta esta definición se pueden dividir en dos grupos: aquellos que tienen que ver directa y técnicamente con el proyecto lógico-matemático que constituye la obra de Whitehead y Russell y aquellos que se podrían plantear dentro de un contexto filosófico más amplio. A los problemas del primer grupo pertenecerían los de las relaciones entre la mencionada definición con los aspectos más notorios de la solución russelliana de las paradojas lógicas: la supeditación de las clases a las funciones proposicionales, la teoría de los tipos y el axioma de reducibilidad. Entre los problemas del segundo grupo se podrían mencionar los relacionados con la concepción cantoriana del infinito, los que presenta la aceptación del principio leibniziano de la identidad de los indiscernibles y las críticas a una caracterización de la identidad que presuponga este principio; en este último caso se encontrarían las críticas de Clarke a Leibniz y las de Wittgenstein al propio Russell. Esta división, sin embargo, es básicamente expositiva, ya que,

1 B. Russell y A.N. Whitehead, *Principia Mathematica*, § 13.

como veremos, hay problemas que, aunque formulados en lenguajes diferentes, aparecen en ambos grupos de manera tal que se podría decir que varios de los problemas que presenta la definición de la identidad de *Principia* son un reflejo o manifestación de las dificultades que, a lo largo de la tradición filosófica, se han encontrado para dar una definición o caracterización adecuada de la identidad.

Empecemos con una caracterización general del contexto conceptual en el que se da la definición de *Principia*. Como se sabe, los planteamientos de Whitehead y Russell se sitúan dentro de lo que se ha llamado el programa logicista que, en términos generales, se puede caracterizar como el proyecto de dar un fundamento lógico a las matemáticas, pero que también puede tomar la forma más radical de intentar demostrar que "las matemáticas y la lógica son idénticas" (Russell, *The Principles of Mathematics*, p. v). Este proyecto ya había sido desarrollado por Frege con un rigor incomparable en tres libros subsecuentes: *Conceptografía* (*Begriffsschrift*, 1879), *Los fundamentos de la aritmética* (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884) y *Las leyes básicas de la aritmética* (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893/1903).[2] Sin embargo, en junio de

2 La magnitud de la obra de Frege se puede apreciar mejor si se considera que, en términos generales, el proyecto logicista se puede dividir en los siguientes tres estadios:

i) la formulación de un aparato lógico adecuado para los razonamientos matemáticos; este requisito implicaba crear una lógica que superara las limitaciones de la lógica aristotélica o silogística. La superación de los logros aristotélicos implicaba básicamente resolver el problema de la cuantificación múltiple y este problema había resistido más de un intento de solución a lo largo de más de veinte siglos.

ii) una vez establecido un aparato formal adecuado a la matemática era necesario formular las definiciones que sirvieran de contenido a dicho aparato. Dentro de estas definiciones destaca la de número, ya que no obstante los impresionantes desarrollos que había alcanzado la matemática, esta noción sufría de una considerable vaguedad y de formulaciones equívocas y equivocadas.

iii) cuando se cumplieran los estadios i) y ii) quedaba aún la tarea de llevar a cabo la reducción misma, esto es, mostrar que los razonamientos matemáticos se podrían formular en los términos de ese aparato lógico y de las definiciones pertinentes.

Frege llevó a cabo este proyecto en tres libros subsecuentes. En el primero Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro, (Halle, 1879) estableció la lógica de primer orden, o sea los fundamentos de la lógica contemporánea. A partir de este logro el desarrollo de la lógica se puede comparar al de la aviación: en menos de cien años se pasó de vuelos de menos de veinte metros a poner un pie en la luna.

En el segundo libro, Los fundamentos de la aritmética, una investigación lógico matemática sobre el concepto de número, Frege criticó en forma devastadora las versiones psicologistas y empiristas de la matemática, dio una caracterización lógica de lo que es un número, mostró la importancia del lenguaje en el planteamiento de problemas filosóficos, proveyó a lo que más tarde sería la filosofía analítica de una buena parte de sus puntos de partida y estableció un nivel de rigor en las discusiones filosóficas al que muchos todavía siguen aspirando.

En su tercer libro: Las leyes básicas de la aritmética se lleva a cabo la laboriosa tares de transcribir las operaciones básicas de la aritmética al lenguaje lógico de la Conceptografía.

Desgraciadamente la vida de este proyecto se vio marcada desde su nacimiento por heridas que no han podido cicatrizar; la primera de ellas se la infligió Russell. Cuando estaba en prensa el segundo volumen de los Grundgesetze le envió a Frege una carta donde en unas cuantas líneas le hablaba de una dificultad en su sistema; esta dificultad era la paradoja que ahora conocemos como la paradoja de Russell. Con esa carta Frege conoció también otra paradoja: después de la incomprensión con que había sido recibida su obra, el primer hombre que lo entendía cabalmente y que estaba destinado a ser el trampolín para su reconocimiento había encontrado un problema lógico fundamental en un proyecto que se preciaba de ser básicamente lógico. La respuesta de Frege, según Russell, fue "la matemática se tambalea".

1901 Russell descubrió la paradoja que lleva su nombre y aproximadamente un año más tarde, el 16 de junio de 1902, cuando el segundo volumen de las *Grundgesetze* estaba en prensa, le comunicó a Frege su descubrimiento en una carta. Vale la pena citar la primera parte de esa carta no sólo porque muestra el conocimiento –y reconocimiento– que Russell tenía de la obra de Frege, sino porque pone de manifiesto los términos en que se planteó el problema:

> Querido colega:
> Desde hace un año y medio que tengo conocimiento de sus *Grundgesetze der Arithmetik* pero no es sino hasta ahora que he podido darme el tiempo para el estudio cuidadoso que planeo hacer de su trabajo. Me encuentro en completo acuerdo con usted en todo lo esencial, particularmente en el rechazo de todo elemento (*Moment*) psicológico en la lógica y en el alto valor otorgado a una ideografía (*Begriffsschrift*) para la fundamentación de las matemáticas y de la lógica formal, mismas que, incidentalmente, escasamente se pueden distinguir. Con respecto a muchas cuestiones específicas, encuentro en su trabajo discusiones, distinciones y definiciones que uno busca en vano en el trabajo de otros lógicos. En especial, en lo que concierne a las funciones (§ 9 de su *Begriffsschrift*) por mí mismo he llegado a puntos de vista que, aún en los detalles, son los mismos. Hay un solo punto donde he encontrado una dificultad. Usted afirma (p. 17) que una función, también, puede actuar como el elemento indeterminado. Esto lo creí alguna vez, pero ahora este punto de vista me parece dudoso dada la siguiente contradicción. Sea *w* el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado de sí mismo. ¿Puede *w* ser predicado de sí mismo? De cualquiera de las dos respuestas se sigue su contradictoria. Debemos concluir, por tanto, que *w* no es un predicado. Paralelamente, no hay una clase (como una totalidad) de aquellas clases que, cada una de ellas tomadas como una totalidad, no pertenezcan a sí mismas. De esto concluyo que bajo ciertas circunstancias una colección (*Menge*) definible no forma una totalidad.[3]

El descubrimiento de esta paradoja fue para Russell el final de la "luna de miel intelectual" que gozara durante septiembre de 1900, después de descubrir el trabajo de Peano en el Congreso de Filosofía que se llevó a cabo en París en julio de ese mismo año.[4] De junio de 1901 hasta 1904 se dedicó a buscar una solución a lo que entonces llamaba "la contradicción" y a reformular el programa logicista de manera tal que no se viera afectado por el estigma lógico que representaban las paradojas que ya habían empezado a multiplicarse. Así, para cuando Russell escribe con Whitehead *Principia* ya ha formulado más de una solución para este problema y está plenamente convencido de que si no se

3 G Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, pp. 130-131

4 Véase B. Russell, *My Philosophical Development*, p. 73 y *The Autobiography of Bertrand Russell: 1872 to World War I*, cap. VI

elimina este vicio la pureza de la reducción de las matemáticas a la lógica quedaría en cuestión.

Ahora bien, este cuestionamiento del programa logicista tiene un aspecto obvio: si un sistema lógico-matemático como el de Frege, que se suponía debía mostrar el carácter analítico[5] de las verdades matemáticas, puede dar lugar a una contradicción, entonces las bases más profundas del proyecto estarían viciadas,[6] además de que la razón misma de la existencia de la lógica matemática –la fundamentación de la aritmética– quedaría cuestionada en sus propios, y muy lógicos, términos. O como se dice que comentó Poincaré: ahora ya no puede decirse que la lógica matemática sea estéril; genera contradicciones. Este aspecto del efecto de la paradoja en el programa logicista se puede apreciar en la respuesta de Frege a la carta de Russell. En lo que concierne a la paradoja dice Frege:

> Su descubrimiento de la contradicción me ha causado la más grande de las sorpresas y, casi diría, consternación puesto que ha sacudido la base sobre la cual intentaba construir la aritmética. Parece así que transformar la generalización de una igualdad en una igualdad de curso de valores (§ 9 de mi *Grundgesetze*) no puede ser siempre permitida, que mi Regla V (§ 20, p. 36) es falsa y que mis explicaciones en el § 31 no son suficientes para asegurar que mis combinaciones de signos tengan significado en todos los casos. Debo reflexionar más sobre esto. Es de la mayor importancia porque con la pérdida de mi Regla V no sólo los fundamentos de mi aritmética, sino también la única fundamentación posible de la aritmética parece desvanecerse No obstante, me gustaría pensar, debe ser posible establecer condiciones para la transformación de la generalización de una igualdad a una igualdad de curso de valores tal que la parte esencial de mis pruebas quedara intacta. En cualquier caso su descubrimiento es muy notable y tal vez tenga como resultado un gran avance en la lógica, por más que a primera vista no parezca ser bienvenido.[7]

En este texto no sólo podemos constatar que Frege fue consciente de las consecuencias desastrosas que para su obra y el programa logicista tenía el descubrimiento de Russell, sino que también vislumbró que el problema rebasaba los límites de su trabajo y que podía ser el punto de partida de otros

5 Para Frege una verdad analítica es aquella cuya prueba sólo conlleva leyes lógicas generales y definiciones Véase G Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, esp §§ 3, 17 y 87

6 Una de las conclusiones de Frege en los *Grundlagen* era: ". . la aritmética sólo sería una lógica más avanzada, cada proposición aritmética sería una ley lógica, aunque derivada " (§ 87)

7 G Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, pp 131-133

desarrollos. Esta actitud parece haber sido compartida por Russell, ya que aun cuando encontró una forma de bloquear la paradoja, consideró que esto no era suficiente y que era necesario profundizar en el origen del problema. Este segundo aspecto del examen de la paradoja tiene que ver entonces con una explicación adecuada de las condiciones que la hacen posible y, por lo tanto, con algunas de las tesis que se desarrollarán en *Principia Mathematica*. En 1906, cuando ya había aceptado la conexión entre las paradojas y el llamado principio del círculo vicioso, Russell expresaba así esta actitud:

> Es importante señalar que el principio del círculo vicioso no es en sí mismo la solución de las paradojas del círculo vicioso, sino solamente la consecuencia que una teoría debe proveer para aportar una solución. Dicho de otra manera, debe construirse una teoría de las expresiones que contienen variables aparentes que provea, como una consecuencia, el principio del círculo vicioso.[8]

Ahora bien, antes de entrar en la reconstrucción de los principios lógicos a los que Russell hace referencia, empecemos con la dificultad misma que exigía esta reconstrucción. Dejando por el momento a un lado los detalles de las distintas formulaciones que se han dado de la paradoja, incluyendo las del propio Russell,[9] podríamos decir que la paradoja se presenta en dos pasos: el primero consiste en definir una clase –digamos *k*– como la clase de todas aquellas clases *x* tales que *x* no pertenece a *x*, esto es la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas. Un miembro de la clase *k*, por ejemplo, sería la clase de los hombres, puesto que esta clase no es, ella misma, un hombre. El segundo paso es preguntar si *k*, a su vez, es o no es miembro de sí misma. Si respondemos que sí, entonces debería tener la propiedad definitoria de la clase, que es precisamente la de no ser miembro de sí misma, por lo tanto no podría ser miembro de *k*. Por otro lado, si respondemos que *k* no es miembro de sí misma, entonces automáticamente tendría la propiedad definitoria de la clase *k* y, consecuentemente, debería de pertenecer a ella. Finalmente de las dos inferencias –si *k* pertenece a *k*, entonces *k* no pertenece a *k*, y si *k* no pertenece a *k*, entonces *k* pertenece a *k*– podemos concluir la equivalencia contradictoria: *k* pertenece a *k* si y sólo si *k* no pertenece a *k*. En términos simbólicos tendríamos el siguiente esquema:

---

8 B Russell, "Les Paradoxes de la Logique", *Revue de Metaphysique et de la Morale*, 14 (1906) (pp. 627-650) pp. 640-641 (Citado por Ch Chihara en *Ontology and the Vicious-Circle Principle*) p 11

9 Entre las distintas versiones que Russell dio de su paradoja se pueden contar la de la citada carta a Frege, (1902), la de *Los principios de la matemática*, (1903), la de "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", (1908) y la de *Principia*, (1910-1913)

1. $k = \{x : x \notin x\}$	definición de la clase *k* como la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas.
2. ¿$k \notin k$?	pregunta: ¿pertenece *k* a *k*?
3. $k \in k \rightarrow k \notin k$	consecuencia de responder que sí pertenece: por definición de *k*, si pertenece entonces no pertenece.
4. $k \notin k \rightarrow k \in k$	consecuencia de responder que no pertenece: también por definición de *k*, si no pertenece, entonces sí pertenece.
5. $k \in k \leftrightarrow k \notin k$	contradicción que resulta de conjugar los resultados 3 y 4.

En su momento, la importancia matemática de esta paradoja se relacionó con la existencia o no-existencia del mayor de los cardinales y, consecuentemente, con la existencia de clases o totalidades muy grandes, como lo podría ser la clase de todas las clases.

La situación se suele narrar de la siguiente manera: de acuerdo con Church[10] y Fraenkel, en 1895 Cantor había descubierto una paradoja en relación con el más grande de los ordinales y se lo había dejado saber a Hilbert en 1896.[11] En 1897 Burali-Forti publicó esta paradoja, que ahora conocemos como la paradoja de Burali-Forti o del más grande de los ordinales[12] y que se considera la primera paradoja contemporánea publicada. La tentación de pensar mal, moralmente hablando, de Burali-Forti no está fundada y se ve disminuida por un juicio sobre su capacidad matemática: según John van Heijenoort en la formulación de la paradoja se puede notar que Burali-Forti no entendía adecuadamente la noción de conjunto bien ordenado de Cantor aunque ese mismo año escribió una nota aclaratoria.[13] En cualquier caso, Cantor, que seguía jugueteando con los números transfinitos, encontró otra paradoja, esta vez en relación con el más grande de los cardinales y le escribió a Dedekind en agosto de 1899 explicándosela. Esta vez corrió con un poco

10 Véase A. Church, "Paradoxes, logical" en *Dictionary of Philosophy*, D. Runes, editor

11 Véase A. Fraenkel, "Cantor, Georg" en *The Encyclopedia of Philosophy*, editada por Paul Edwards. Allí Fraenkel afirma: "As early as 1895 he (Cantor) discovered Cesare Burali-Forti's antinomy" (v. 2, p. 21)

12 En términos generales la paradoja de Burali-Forti consiste en señalar que si el conjunto de los ordinales está bien ordenado, entonces le corresponde un ordinal, pero este ordinal tendría que ser, a su vez, un miembro del conjunto de los ordinales y mayor.

13 Véase J. van Heijenoort, *From Frege to Godel*, pp. 104-105

más de suerte, ya que no hubo un Burali-Forti que interpusiera su nombre: esta paradoja se conoce como la paradoja de Cantor. Sin embargo, quien se llevó la gloria en cuestión de paradojas fue Russell, ya que en la formulación de su propia paradoja parece resumir y generalizar los resultados de Cantor-Burali-Forti y Cantor-Cantor.

La relación de la paradoja de Russell con las ideas de Cantor la reconoce *en passant* el propio Russell en sus *Principios de las matemáticas*:

> Podría mencionar que fui conducido a ella [la contradicción] durante la tarea de reconciliar la prueba de Cantor de que no puede existir un número cardinal que sea el mayor de ellos con la muy plausible suposición de que la clase de todos los términos (que hemos visto es esencial a todas las proposiciones formales) necesariamente tiene el mayor número posible de miembros. (p.101)

En su *Autobiografía* Russell es más explícito:

> Cantor tenía una prueba de que no existe el mayor de los números y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo debería ser el mayor posible. Consecuentemente examiné su prueba con cierto cuidado y traté de aplicarla a la clase de todas las cosas que hay. Esto me condujo a considerar aquellas clases que no son miembros de sí mismas y a preguntar si la clase de tales clases es o no es miembro de sí misma. Encontré que cualquiera de las dos respuestas implicaba su contradictoria.[14]

La prueba a la que hace referencia Russell es la famosa prueba cantoriana de que la cardinalidad de un conjunto S es menor que la de $P(S)$, el conjunto de todos los sub-conjuntos de S o conjunto potencia. La prueba de Cantor consiste en mostrar que no se puede establecer una relación de uno a uno entre los elementos de S y los de $P(S)$; de aquí se sigue que no puede existir un cardinal que sea el más grande, dado que al caracterizar un cardinal como el mayor lo relacionamos con un conjunto –el conjunto al que le corresponde ese cardinal–pero entonces también podemos formar el conjunto potencia de ese conjunto, cuya cardinalidad sería mayor, y así sucesivamente. La paradoja de Cantor consiste en señalar que si S es el conjunto de todos los conjuntos entonces, aún cuando él probó que $P(S)$ –el conjunto potencia de S– debe contener a S, S debería de contener a $P(S)$ puesto que $P(S)$ es un conjunto y S se definió como el conjunto de todos los conjuntos.

---

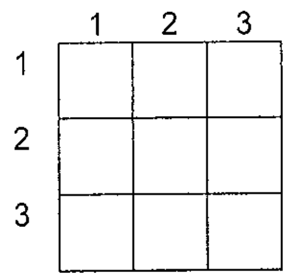
14 B Russell, *The Autobiography of Bertrand Russell*, p. 195

Esta paradoja pone de manifiesto que aunque el teorema de Cantor es evidente cuando tratamos con conjuntos finitos no lo es tanto cuando consideramos totalidades "muy grandes" –como el conjunto de todos los conjuntos– o cuando consideramos conjuntos infinitos. En el caso de conjuntos finitos es obvio que si establecemos una relación de uno a uno entre los elementos de *A* y *P(A)* siempre habrá elementos de *P(A)* que queden sin parear ya que podríamos empezar pareando cada uno de los elementos de *A* con aquellos elementos de *P(A)* que tengan a esos elementos como únicos miembros; el resto de los elementos de *P(A)* quedarán sin parear. Por ejemplo, si $A=\{a, b, c\}$ entonces $P(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\phi\}$. Por lo tanto, si pareo *a* con $\{a\}$, *b* con $\{b\}$ y *c* con $\{c\}$ habré agotado *A* y aún quedarán elementos en *P(A)* que no han sido pareados con ningún elemento de *A*. En el caso de conjuntos infinitos la situación es diferente, ya que si *A* es un conjunto infinito no parecería que hubiera manera de agotar todos sus miembros; lo más que podríamos afirmar sería la existencia de otros conjuntos infinitos cuando pudiéramos mostrar que se puede establecer una relación de uno a uno entre los miembros de *A* y los miembros del conjunto comparado. Por ejemplo, Galileo sabía que el conjunto de los números enteros se puede poner en correspondencia con el conjunto de sus cuadrados:

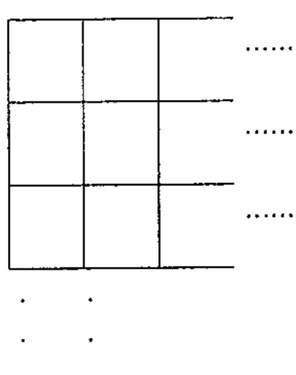
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \\ & & & & & | & & & \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64\ldots \end{array}$$

sin que ninguno de los dos conjuntos se agote y, en general, parece que ya los estoicos sabían que los miembros de un conjunto infinito se pueden hacer corresponder con los miembros de algunos de sus subconjuntos, aunque no fue sino hasta 1888 cuando Dedekind caracterizó específicamente un conjunto infinito como aquel en que se puede establecer una relación de uno a uno entre sus elementos y los elementos de alguno de sus subconjuntos propios.

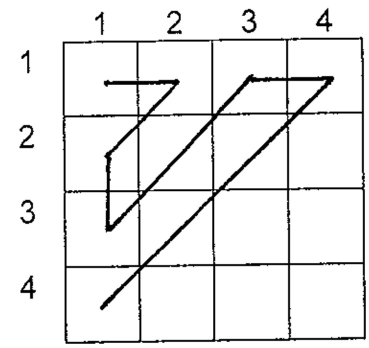
En este sentido podríamos decir que los conjuntos infinitos descubiertos por Cantor no sólo ponían en cuestión la intuición ontológica de Russell, acerca de que "el número de todas las cosas en el mundo debería ser el mayor posible", sino que también violan la regla lógica de que la parte es menor que el todo. De hecho también violan la regla aritmética de que $a^2 > a$. Si $a = \infty$, entonces $a^2=a$. La demostración de esta identidad nos puede ayudar a entender la dificultad de mostrar que $P(A) > A$ cuando A es un conjunto infinito. Supongamos que $a=3$, entonces podemos representar a^2 con el siguiente cuadrado



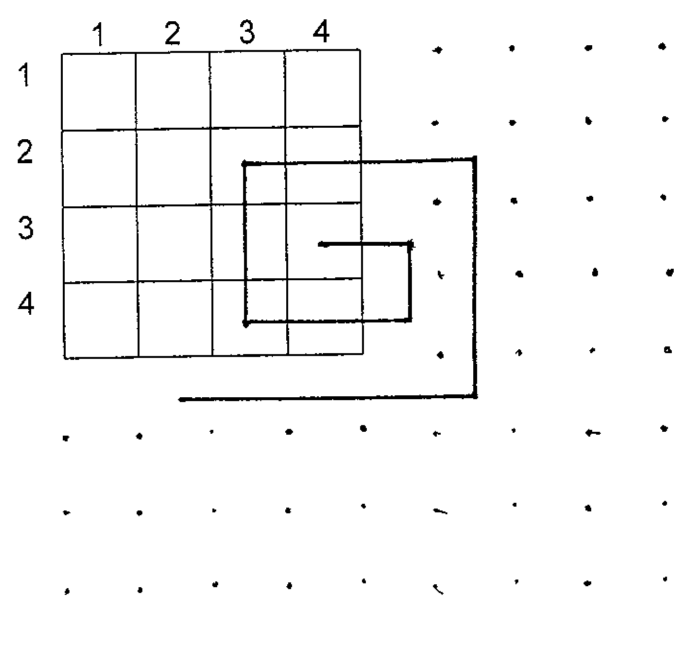
que tiene nueve cuadrados que miden 1 x 1. Supongamos ahora un cuadrado que representara el resultado de multiplicar ∞ por ∞.



Para mostrar que el número que le corresponde al cuadrado de infinito es infinito tenemos que mostrar que es posible establecer una relación de uno a uno entre *1, 2, 3,...* y los cuadrados de *1* por *1* que conforman el cuadrado total sin que a ninguno de estos cuadrados le deje de corresponder un número, esto es, que podemos contar los cuadrados que forman el cuadrado total. Intuitivamente esto se puede hacer trazando una línea zig-zageante a partir del primer cuadrado como se muestra en el siguiente diagrama:



o una espiral empezando en un cuadrado cualquiera



En cualquiera de los dos casos no habrá ningún cuadrado al que no le corresponda un único número, ni ningún número al que no le corresponda un único cuadrado.

Se puede ver así la importancia del teorema de Cantor; probarlo conlleva la introducción de conjuntos que no son pareables con el conjunto de los números naturales, esto es, la existencia de conjuntos cuya cardinalidad es transfinita. Tendríamos entonces conjuntos finitos –aquellos con un número finito de miembros–, conjuntos *denumerables* –aquellos cuyos miembros se pueden poner en relación de uno a uno con el conjunto de los números naturales y que por lo tanto son infinitos–, conjuntos *contables* –los que son finitos o denumerables– y conjuntos *no-contables*, los que no son ni finitos ni denumerables y que, por lo tanto son infinitos y les corresponde un número transfinito. El nombre mismo de conjunto no contable nos da una idea de que la prueba del teorema de Cantor conlleva la noción de contar, esto es, de parear los miembros de un conjunto con los números naturales. Y los conjuntos no-contables, como ya señalamos, no son denumerables, esto es, no se puede establecer una relación de uno a uno entre la totalidad de sus miembros y los números naturales.

Así, un primer paso hacia el teorema de Cantor es mostrar que existen conjuntos no-contables. Esto lo hizo Cantor en diferentes momentos y de varias maneras, pero una de ellas consiste en demostrar que el conjunto de todos los subconjuntos de los números naturales no es contable.[15] Obviamente este conjunto no es finito, ya que se puede establecer una relación de uno a uno entre los números naturales y aquellos subconjuntos que tienen como único miembro a cada uno de los números naturales. Por otro lado, para demostrar que este conjunto no es contable hay que mostrar que no es posible establecer una relación de uno a uno entre los números naturales y todos y cada uno de los subconjuntos de números naturales. Para hacerlo supongamos cómo podríamos empezar a establecer esta correlación gráficamente: en una primera columna estarían los números naturales, en una segunda los diversos subconjuntos de números naturales y, en una tercera la determinación de los elementos de dichos subconjuntos a través de una secuencia que indique con un "SÍ" si un número natural pertenece al conjunto y con un "NO" si no pertenece. El resultado sería un cuadro como el siguiente:

15 Véase J W. Dauben *Georg Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, esp pp. 47-120

	0	1	2	3	4	5	6
0 --- el conjunto de todos los números enteros	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
1 --- el conjunto vacío	no	no	no	no	no	no	no
2 --- el conjunto de todos los pares	no	no	sí	no	sí	no	sí
3 --- el conjunto de todos los nones	no	sí	no	sí	no	sí	no
4 --- el conjunto de todos los primos	no	no	sí	sí	no	sí	no
5 --- el conjunto de todos los cuadra	sí	sí	no	no	sí	no	no
6 --- el conjunto de todos los cubos	sí	sí	no	no	no	no	no
. . . .	.		. . . .				
. .		.	. . . .				
. . . .	.		. . . .				

La idea de Cantor es que por mucho que ampliemos este cuadro, siempre podemos formar un subconjunto de los números naturales que no se encuentre en él y que, por lo tanto, no se haya puesto en correspondencia con un número natural. La constitución de este conjunto no correlacionado se lleva a cabo usando el llamado "argumento diagonal" que consiste en trazar una diagonal en el cuadro que determina los elementos de los diversos subconjuntos e intercambiando los "SÍ" por "NO" y viceversa de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	....
NO	***SÍ***	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	....
NO	NO	***NO***	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	....
NO	SÍ	NO	***NO***	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	....
NO	NO	SÍ	SÍ	***SÍ***	SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO	SÍ	....
SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	***SÍ***	NO	NO	NO	SÍ	NO	NO	....
SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	***SÍ***	NO	SÍ	NO	NO	NO	....
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Esta diagonal es una secuencia que define a un subconjunto de números naturales que difiere de cada uno de los subconjuntos originalmente pareados en al menos un elemento. Agregar este subconjunto a la lista original no ayuda ya que siempre podemos repetir el proceso de diagonalización y generar un conjunto que no ha sido pareado. De aquí se concluye que no hay una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de todos los subconjuntos de los números naturales. Por lo tanto el conjunto de todos los subconjuntos de los números naturales no es denumerable y puesto que no es finito entonces no es contable.

Por otro lado, el propiamente llamado teorema de Cantor, generaliza este resultado al afirmar que el conjunto potencia de un conjunto tiene un número cardinal mayor que el del conjunto. En sus términos básicos la prueba de que A, un conjunto cualquiera, y $P(A)$, el conjunto de todos sus subconjuntos o conjunto potencia, no son equivalentes, $\neg[A \sim P(A)]$ y que $P(A)$ tiene una cardinalidad mayor que A se lleva a cabo estableciendo una correlación entre los elementos de A con los de $P(A)$ y mostrando que esta correlación puede agotar a los elementos de A pero no a los de $P(A)$. Esto es así porque puesto que $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A y la correlación es arbitraria, entonces los elementos de A pueden o no pertenecer al subconjunto de $P(A)$ con el que están relacionados. Consideremos aquellos elementos de A que no pertenecen a su correlato en $P(A)$, con ellos podemos definir un conjunto α, vacío o no, de elementos de A. α , por definición de $P(A)$ como el conjunto de todos los subconjuntos de A, debe pertenecer a P(A), pero no puede haber en A ningún elemento que se correlacione con α , ya que α fue definido como el conjunto de aquellos elementos de A que no pertenecen a su correlato en $P(A)$. Supongamos que existiera un elemento z de A que se correlacionara con α; por definición de α, z no puede pertenecer a α, pero si no pertenece entonces debería de pertenecer, ya que α es precisamente el conjunto de todos aquellos elementos de A que no pertenecen a su correlato. De aquí se sigue que no puede haber ningún elemento en A para correlacionar con α, que es un subconjunto de $P(A)$, y, por lo tanto, que $P(A)$ tiene más elementos que A. La existencia de estos elementos de $P(A)$ que no son correlacionables con los de A son los que permiten afirmar que la cardinalidad de $P(A)$ es mayor que la de A.

En términos un poco más formales la prueba es como sigue: supongamos que A y $P(A)$ fueran equivalentes, esto querría decir que existe una relación ϕ de uno a uno entre los elementos de A y los de $P(A)$. En este caso ϕ sería un conjunto de pares ordenados con las siguientes propiedades:

i. $< x, y > \in \phi$ sólo si *x* es miembro de *A* y *y* es miembro de *P(A)*
ii. para todo elemento *x* de *A*, existe uno y sólo un elemento *y* de *P(A)* tal que $< x, y > \in \phi$
iii. para todo elemento *y* de *P(A)*, existe uno y sólo un elemento *x* de *A* tal que $< x, y > \in \phi$

Definamos ahora el conjunto α de todos aquellos elementos de *A* que no pertenecen a su correlato en *P(A)* de la siguiente manera:

$$(x)(x \in \alpha \leftrightarrow x \in A \ \& \ (y)(<x, y> \in \phi \rightarrow x \notin y))$$

Ahora bien, puesto que α es un subconjunto de *A*, entonces $\alpha \in P(A)$. De aquí se sigue que si hay una relación ϕ, de uno a uno, entre los elementos de *A* y los de *P(A)*, entonces debe haber un par ordenado, formado por un elemento *z* de *A* y α, que pertenezca a la relación ϕ. O sea, si α pertenece a *P(A)* y existe una relación ϕ de uno a uno entre *A* y *P(A)*, entonces α debe tener un único correlato *z* en *A*, esto es, $<z, \alpha> \in \phi$. Pero si relacionamos a z con α por medio de la función ϕ entonces podemos preguntar si z está o no incluido en su correlato α. Si $z \in \alpha$, entonces, por definición de α, $z \notin \alpha$, pero si $z \notin \alpha$, entonces $z \in \alpha$. De aquí que no pueda establecerse una correspondencia de uno a uno entre el conjunto *A* y *P(A)*, el conjunto de todos sus subconjuntos o conjunto potencia.[16]

En otras palabra, la pertenencia de *z* a α nos conduce a un resultado contradictorio:

$$(z \in \alpha \rightarrow z \notin \alpha) \ \& \ (z \notin \alpha \rightarrow z \in \alpha)$$

$$\therefore \qquad z \in \alpha \leftrightarrow z \notin \alpha$$

por lo tanto, nuestra asunción , acerca de la posibilidad de una correlación de uno a uno entre los elementos de *A* y los de *P(A)* debe ser incorrecta, ya que no puede haber un correlato *z* en *A* para α, y α, por definición, pertenece a

16 Véase Ch Chihara, *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, pp 6-7

$P(A)$. Además, puesto que $P(A)$ es al menos tan numeroso como A, entonces $P(A)$ debe ser más numeroso que A, esto es, debe tener una cardinalidad mayor que A. Y si esto es así entonces no puede haber un cardinal que sea el más grande, puesto que este cardinal sería especificado como el que le corresponde a un conjunto B y, en principio, siempre podríamos generar el conjunto $P(B)$, cuya cardinalidad sería automáticamente mayor.

Ahora, si asumimos este resultado de que A y $P(A)$ no son equivalentes y caracterizamos a A como el conjunto de todos los conjuntos entonces tendremos la llamada "paradoja de Cantor", ya que aún cuando sabemos que $P(A)$ tiene una cardinalidad mayor a la de A, A, por ser el conjunto de todos los conjuntos, debería incluir a $P(A)$. Esquemáticamente tendríamos la siguiente inferencia:

1) $A \subset P(A)$ por definición de $P(A)$
2) $P(A) \subset A$ por definición de A
3) $A \sim P(A)$ de 1 y 2 por el teorema de Schroder-Bernstein.[17]

Podemos ver así, por un lado, la semejanza del mecanismo lógico que usó Cantor para la prueba de su teorema con la formulación de la paradoja de Russell: ambos apelan a la caracterización del elemento de un conjunto cuya condición de pertenencia es contradictoria. Por otro lado podemos ver que la dificultad que encontró Cantor está relacionada con la existencia de un conjunto omnicomprensivo y, como veremos, la solución que dará Russell a las paradojas se puede relacionar precisamente con la existencia de este tipo de conjuntos.[18]

Ahora bien, no obstante estos paralelismos, a la paradoja de Russell se le suele atribuir no sólo prioridad histórica sino teórica.[19] Esta preeminencia tiene que ver con las siguientes razones: en primer lugar la paradoja de Russell se formula en términos de "clase" y "miembro de una clase", esto es, no hace referencia a la existencia de cierta clase de números ni a teoremas

17 *Ibid* p 5

18 Con respecto a las relaciones entre la reflexion de Russell sobre la infinitud y su descubrimiento de la paradoja, véase Gregory H. Moore, "The roots of Russell's paradox", en *Russell*, n s. 8, pp 46-56, 1988

19 Vease W. van O. Quine, "The Ways of Paradox", recogido en *The Ways of Paradox and other essays*, esp. pp 12-15 y J. van Heijenoort, "Logical Paradoxes" en *The Encyclopedia of Philosophy*, editada por Paul Edwards

matemáticos específicos, como es el caso de las paradojas de Cantor y Burali-Forti. En segundo lugar, la paradoja de Russell ponía en cuestión un axioma matemático general y no un teorema en particular, como sería el caso de las paradojas de Cantor y Burali-Forti. Este axioma es el llamado "axioma de abstracción" o "ley de comprensión" que dice que para toda propiedad o condición, existe una clase cuyos miembros son aquellas cosas que tienen esa propiedad o, si se prefiere –dados ciertos pruritos para hablar de propiedades– una clase de cosas que satisfacen dicha condición.[20] En términos simbólicos el axioma se puede expresar así:

$$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv Fx)$$

A partir de este axioma podemos derivar la paradoja caracterizando a *y* como la clase que satisface la función $x \notin x$, y permitiendo que *y* sea un valor de la variable cuantificada *x*. En tercer lugar, al poner en cuestión la relación entre propiedades –en la terminología de Russell– y la existencia de clases, la paradoja pone de manifiesto las tensiones entre un punto de vista intensional –el hablar de propiedades– y un punto de vista extensional: el hablar de clases o conjuntos.

Como se sabe, la solución que da Russell a la paradoja en *Principia Mathematica* es la llamada teoría ramificada de los tipos, sin embargo no hay que olvidar que esta solución tiene varios antecedentes en la obra del propio Russell anterior a *Principia* y que, en cierta forma, es la culminación de una serie de trabajos donde Russell plasmó sus diversos intentos de solucionarla. El examen de estos antecedentes nos permitirá entender mejor la insistencia de Russell en preservar esta solución no obstante sus implicaciones teóricas y las críticas que suscitó.

Empecemos con el texto donde apareció por primera vez publicada la paradoja y el primer bosquejo de solución: la teoría simple de los tipos. Cuando Russell publica *Los principios de la matemática* en 1903 incluye, desde luego, una formulación de lo que entonces llama "la contradicción" y, como Frege en el segundo volumen de los *Grudgesetze*, agrega un apéndice, el "B", que llama "La doctrina de los tipos", que ofrece los lineamientos de una solución a la

20 Véase W. van O. Quine, *Set Theory and Its Logic*, §34, pp. 241-249

contradicción. El carácter aproximativo de esta solución lo hace explícito el propio Russell:

> La doctrina de los tipos se plantea aquí en forma tentativa, como una posible solución a la contradicción; pero muy probablemente requerirá transformarse en alguna forma más sutil antes de que pueda solucionar todas las dificultades.[21]

Estas transformaciones las intentó Russell en diversas ocasiones, en "On Some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order types" (1905), en "On the Substitutional Theory of Classes and Relations" (1906), en "Les Paradoxes de la Logique" (1906), en "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" (1908) y, claro está, en la primera edición de *Principia* (1910-1913), pero nunca quedó totalmente satisfecho con los resultados; aún en la *Introducción a la filosofía matemática* de 1919 se refiere a la teoría de los tipos como una teoría "todavía confusa y obscura" y las soluciones propuestas en la segunda edición de *Principia* de 1925 tampoco se presentan como una solución totalmente adecuada. Sin embargo, podríamos decir que aún cuando efectivamente la teoría sufrió diferentes transformaciones, dos ideas se mantuvieron presentes: en primer lugar la de que ciertas totalidades, o los mecanismos para generarlas, pueden producir problemas lógicos y, en segundo, que es necesario distinguir entre los elementos de una clase y la clase misma, entre lo que Russell llama la clase en tanto que una y la clase en tanto que muchos. Esta terminología, y algunos de los problemas que se plantean a partir de ella, podría tener su origen en la muy discutida caracterización de Cantor de un conjunto: "una multiplicidad que puede considerarse singularmente".[22] Brevemente dichas, las opciones que nos ofrece Russell durante este período son las siguientes: en los *Principios* se distingue entre la clase como unidad y la clase como pluralidad, entre lo que Russell llama la clase como una –o como un todo– y la clase como muchos (*many*).

> También una clase, al menos en un sentido, es distinta del todo que componen sus términos, ya que este último es sólo y esencialmente uno, mientras que la primera, donde tiene muchos (*many*) términos, es, como veremos más tarde, exactamente la clase de objeto del cual se afirmará *muchos*. La distinción de una clase como muchos de una clase como un todo se hace frecuentemente en el lenguaje: el espacio y los puntos, el tiempo y los instantes, el ejército y los soldados, la armada y los marinos, el gabinete y los ministros del gabinete, todos

21 B. Russell, *Principles of Mathematics*, p. 523

22 Véase la "Introducción" de Ph.E.B. Jourdain a *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, de Cantor Esp. pp. 54-55

ilustran la distinción. La noción de un todo, en el sentido aquí pertinente de un puro agregado, no es como veremos, siempre aplicable cuando se aplica la noción de clase como muchos [23]

Esta distinción nos podría hacer pensar en la relación que establece Frege entre un concepto y un número en el parágrafo 46 de los *Grundlagen*, sin embargo, para Russell, su fundamento parece estar más cercano al contraste clásico entre un punto de vista extensional y un punto de vista intensional con respecto a las clases:

> Existe una cierta tentación de identificar la clase como muchos y la clase como uno, por ejemplo, *todos los hombres* y *la raza humana*. Sin embargo, siempre que una clase consiste de más de un término, se puede probar que tal identificación no es permisible. Un concepto de una clase, si denota una clase como una, es diferente de cualquier concepto de la clase que denota. Esto es, *las clases de todos los animales racionales*, que denota a la raza humana como un término, es diferente de *hombres*, que denota a los hombres, esto es, la raza humana como muchos. Pero, si la raza humana fuera idéntica con los hombres, se seguiría que todo lo que denotara a la una debería denotar a la otra, y la diferencia mencionada sería imposible.[24]

La distinción, por otro lado, le permite a Russell esbozar los lineamientos de una solución a su paradoja. En primer lugar, si planteamos la paradoja en términos de la distinción, esto es, si en lugar de establecer, *simpliciter*, la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas, partimos del hecho de que una clase como una puede ser un término de ella misma en tanto que muchos y formamos la clase de todas aquellas clases que, en tanto que una, no son términos de ella misma en tanto que muchos, entonces tendremos nuevamente una contradicción, pero una contradicción que nos invita a cuestionar cierto tipo de clases y no la formación de clases en general:

> Podemos así concluir nuevamente que las clases que, como unas, no son miembros de sí mismas como muchas, no forman una clase, o, más bien, que no forman una clase como una, ya que el argumento no puede mostrar que no formen una clase como muchas.[25]

Tenemos aquí entonces las bases para un primer cuestionamiento de una caracterización de las clases que invitaba a una posición nominalista

23 Vease B Russell, *Pnnciples of Mathematics*, pp 68-69

24 *Ibid*. p. 76

25 *Ibid*. p 102

tradicional[26] pero que se convirtió en el punto de partida de lo que más tarde se llamará la "*no-class theory*", de la posición que trata de reducir el hablar de clases a un hablar de funciones. Sin embargo, hay que notar que, a estas alturas del desarrollo del pensamiento russelliano, lo que se rechaza es hablar de clases como una, ya que, como él mismo dice, "el argumento no puede mostrar que no formen una clase como muchas". A partir de esta conclusión y de la consideración de las relaciones, Russell pondrá en cuestión el axioma de abstracción, pero se da cuenta de que su solo rechazo tampoco conlleva una solución:

> La razón por la cual surge aquí una contradicción es que hemos considerado como un axioma el que cualquier función proposicional que contenga una sola variable es equivalente a afirmar membresía con respecto a una clase definida por la función proposicional. Ya sea este axioma, o el principio de que toda clase puede ser considerada como un término, es claramente falso y no hay una objeción fundamental para abandonar cualquiera de los dos. Pero si abandonamos el axioma surge la pregunta: ¿Qué funciones proposicionales definen clases que son tanto términos singulares (*single*) como plurales (*many*) y cuáles no? Y con esta pregunta empiezan nuestras verdaderas dificultades.[27]

La dificultad básica a la que se refiere Russell es la de establecer una relación, ya sea uno a uno o uno a muchos, entre todos los términos y todas las funciones proposicionales. La prueba de esta imposibilidad tiene, nuevamente, fuertes resonancias cantorianas y es la siguiente:

> Sea ϕx una función proposicional correlacionada con x; entonces, si la correlación cubre todos los términos, la negación de ϕx (x) será una función proposicional, puesto que es una proposición para todos los valores de x. Pero no puede ser incluida en la correlación ya que si fuera correlacionada con a, ϕa (x) sería equivalente, para todos los valores de x, con la negación de ϕx (x), pero esta equivalencia es imposible para el valor a ya que hace a ϕa (a) equivalente a su propia negación. Se sigue que hay más funciones proposicionales que términos: un resultado que parece obviamente imposible, no obstante que la prueba es tan convincente como cualquiera otra en matemáticas.[28]

26 Esta posición se la sugirió a Russell el matemático americano Maxime Bocher en una carta en abril de 1905 donde argüía que: "El punto central en cuestión es su "clase como una". Si lo entiendo correctamente su actitud hacia este término es la del realista; la mía es la del nominalista. Yo no puedo admitir que una clase sea en sí misma una entidad; para mí siempre es muchas entidades (su "clase como muchas"). Cuando hablamos de ella como una entidad singular, estamos considerando un nuevo objeto que asociamos con la clase, pero no la clase misma. Esto es, la "la clase como una" es simplemente un símbolo o nombre que podemos escoger a nuestro antojo." (Citado por Douglas Lackey en *Bertrand Russell. Essays in Analysis*, 1973, pp. 130-131)

27 *Principles of Mathematics*, pp. 102-103

28 *Ibid*. p. 103

La estrategia de Russell para salir de esta situación es la de cuestionar el axioma de abstracción a través de una distinción entre la clase como una y la clase como muchos y éste será el germen de una diferenciación de tipos lógicos. En los *Principios* Russell afirma que:

> Consideramos un axioma que la clase como uno se encontrará siempre que haya una clase como muchos; pero no se necesita admitir este axioma universalmente y parece ser la fuente de la contradicción. Por lo tanto, al rechazarlo, la dificultad en su totalidad será superada.
> Una clase como una, diremos, es un objeto del mismo *tipo* que sus términos; esto es, cualquier función proposicional $\phi(x)$ que es significativa cuando uno de sus términos se substituye por x es también significativa cuando la clase como una es substituida. Pero la clase como una no siempre existe y la clase como muchos es de un tipo diferente al de los términos de la clase, aun cuando la clase tenga un solo miembro, esto es, hay funciones proposicionales $\phi(u)$ en las que u puede ser la clase como muchos, que no tienen significado si substituimos por u uno de los términos de la clase. Consecuentemente "x es una entre las x" no es de ninguna manera una proposición si la relación que involucra es la de un término con su clase como muchos; y ésta es la única relación cuya presencia siempre nos asegura una función proposicional. Desde este punto de vista una clase como muchos puede ser un sujeto lógico, pero en una proposición de una clase diferente de aquellas en que sus términos son sujetos; de todo objeto diferente de un término singular (*single*), la pregunta de si es uno o muchos tendrá diferentes respuestas de acuerdo con la proposición en la que aparece. Tenemos así "Sócrates es uno entre los hombres" en que hombres es plural, pero "el hombre es uno entre las especies animales", donde el hombre es singular. La distinción de tipos lógicos es la clave de todo el misterio.[29]

En el apéndice "B" de los *Principios* Russell elabora este bosquejo de solución señalando, en primer lugar, que toda función proposicional $\phi(x)$ deberá tener además de un rango de verdad, un rango de significatividad, a saber, "un rango dentro del cual se debe encontrar x si $\phi(x)$ va a llegar a ser una proposición, ya sea verdadera o falsa."[30] En segundo lugar, afirma que los rangos de significatividad forman tipos, esto es,

> si x pertenece al rango de significatividad de $\phi(x)$, entonces existe una clase de objetos, el *tipo* de x, que también deben pertenecer en su totalidad al rango de significatividad de $\phi(x)$, sin importar qué tan variada pueda ser ϕ; el rango de significatividad es siempre un solo tipo o la suma de varios tipos completos.[31]

---

29 *Ibid* pp 104-105

30 *Ibid* p 523

31 *Ibid.* loc cit

A partir de estos dos puntos se elabora una mínima jerarquía: "Un *término* o un *individuo*" –Russell no distingue claramente entre ellos– "es cualquier objeto que no es un rango. Este es el tipo más bajo de objeto."[32] "El siguiente tipo consiste en rangos o clases de individuos" [33] y el siguiente "después de las clases de individuos consiste en las clases de clases de individuos"[34] y así sucesivamente. La simpleza de esta jerarquización lógica se ve un tanto opacada por las connotaciones epistemológicas y ontológicas de los ejemplos que ofrece Russell de estos tipos lógicos. Un punto en el espacio pertenece al rango más bajo de objetos pero la clase como uno es también un individuo

> siempre que sus miembros sean individuos: los objetos de la vida cotidiana, las personas, las mesas, las sillas, las manzanas, etc. son clases como uno. (Una persona es una clase de existentes psíquicos, los otros son clases de puntos materiales, quizás con alguna referencia a las cualidades secundarias) Estos objetos, por tanto, son del mismo tipo que los individuos simples. Parecería que todos los objetos que se designan por una sola palabra, ya sean cosas o conceptos, son de este tipo.[35]

Es difícil, por tanto, entender porqué Russell dice, en el mismo Apéndice B, que: "Los individuos son los únicos objetos de los cuales no se pueden afirmar significativamente números."[36] Por otro lado, esta reticencia a atribuirle un número a los individuos, no obstante que un objeto es caracterizado como un conjunto de puntos y una persona como una clase de existentes psíquicos, podría estar relacionada con la dificultad de sujetar el concepto de número cardinal a las restricciones de una tipología.[37] Consideraciones epistemológicas aparte, la jerarquización de tipos lógicos de Russell en individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos, etc., permite, al menos *prima facie*, ponerle un alto a la paradoja, señalando que para que "x es un u" sea significativa x y u deben pertenecer a diferentes tipos lógicos. Sin embargo, puesto que para Russell las clases van de la mano con las funciones, esta

---

32 *Ibid* *loc* *cit*

33 *Ibid*. p. 524

34 *Ibid*. loc. cit.

35 *Ibid*. p.523

36 *Ibid* *loc* *cit*.

37 Véase A. Urquhart, "Russell's zigzag path to the ramified theory of types", *Russell*, n s 8. 82-91, 1988. esp p. 84

solución presenta el siguiente problema: si *u* es el rango relacionado con la función proposicional $\phi(x)$, la negación de *u* incluirá todos aquellos objetos para los cuales $\phi(x)$ es falsa y que, por tanto, forman también parte de *u*, esto es, son del mismo tipo que los miembros de *u*. La dificultad consiste en que pueden existir dos funciones proposicionales $\phi(x)$ y $\phi(y)$ equivalentes desde el punto de vista extensional, esto es, en términos russellianos, que tengan el mismo rango de verdad *u*, pero que tengan diferentes rangos de significatividad; en este caso, dice Russell, no-*u* se haría ambiguo. Dentro del contexto de los *Principios* este problema no es fácil de solucionar porque Russell mismo ha enfatizado la diferencia entre funciones que determinan la misma clase. Hablando de Peano dice:

> ... él identifica la igualdad de clases, que consiste en tener los mismos términos, con la identidad: un procedimiento bastante ilegítimo cuando la clase se considera como el concepto-clase. Para percibir que *hombre* y *bípedo implume* no son idénticos no es necesario tomar una gallina y desplumar al pobre animal. O, para tomar un caso menos complejo, es claro que *primo par* no es idéntico con *entero que sigue a 1*. Así, cuando identificamos la clase con la clase-concepto, debemos admitir que dos clases pueden ser iguales sin ser idénticas. Es claro, sin embargo, que cuando dos clases-concepto son iguales alguna identidad está involucrada ya que decimos que tienen los *mismos* términos. Existe así algún objeto que es positivamente idéntico cuando dos conceptos-clase son iguales y este objeto parecería ser llamado, más apropiadamente, la clase. Dejando a un lado la gallina desplumada, la clase de los bípedos implumes –todo el mundo diría– es la *misma* que la clase de los hombres; la clase de los primos pares es la *misma* que la clase de los enteros inmediatamente después de 1. No debemos identificar por tanto la clase con el concepto-clase o considerar "Sócrates es un hombre" como expresando la relación de un individuo con una clase de la cual es un miembro.[38]

Después del Apéndice "B" Russell continuó buscando con tenacidad y urgencia una solución para las paradojas, pero no fue sino hasta 1905 cuando vislumbró una solución distinta. En uno de sus escritos autobiográficos Russell relata así este momento:

> Cuando terminé los *Principios de las Matemáticas* me propuse el decidido intento de encontrarle una solución a las paradojas. Sentía esto como una cuestión personal y, de ser necesario, hubiera pasado todo el resto de mi vida tratando de resolverla. Sin embargo, por dos razones encontré esta tarea excesivamente desagradable. En primer lugar el problema en su integridad me parecía trivial y odiaba el tener que concentrar mi atención en algo que no parecía intrínsecamente

---

38 *Principles of Mathematics*, p 68

interesante. En segundo lugar, a pesar de mis esfuerzos, no lograba progresar. Durante 1903 y 1904 dediqué mi trabajo casi completamente a este asunto, pero sin obtener el menor indicio de éxito Mi primer triunfo fue la teoría de las descripciones en la primavera de 1903... Esto, aparentemente no estaba relacionado con las contradicciones, pero con el tiempo surgió una relación inesperada.[39]

Como ya se dijo, entre la posición de los *Principios* y la de *Principia*, Russell formuló soluciones alternativas al problema de las paradojas. Estas soluciones están relacionadas con diferentes posiciones teóricas que vale la pena recordar brevemente porque con frecuencia reflejan aspectos problemáticos de teorizaciones posteriores. Así, la teoría simple de los tipos, que se encuentra en el Apéndice B de los *Principios*, establece una jerarquización que parte de individuos y continúa con rangos o conjuntos de individuos (agrupados por satisfacer una función), conjuntos de conjuntos de individuos y así sucesivamente. Cada nivel de esta estructuración constituye un tipo y la predicación queda constreñida por el principio de que el predicado debe ser de un tipo ([illegible] r más alto que el del sujeto. Esta solución, sin embargo, no es suficiente para evitar la paradoja de Cantor (si la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto es mayor que la de dicho conjunto, entonces la cardinalidad del conjunto potencia del conjunto de todos los conjuntos debería ser mayor que la del conjunto de todos los conjuntos) dado el carácter omniabarcante de la descripción "el conjunto de todos los conjuntos".[40] A Cantor, debemos recordar, no le preocupaba especialmente este resultado paradójico ya que para él hablar del conjunto de todos los conjuntos sólo tenía sentido en el orden de lo que él mismo llamaba lo Absoluto, esto es, un orden quasi-teológico. Pero para Russell, cuya paradoja dependía de este tipo de generalizaciones, la situación lo obligaba a tratar de dar una explicación más adecuada de la estructuración lógica oculta en la inocente descripción "el conjunto de todos los conjuntos". La posición de Russell será entonces la de complicar la teoría simple de los tipos, mientras que la mayoría de los teóricos contemporáneos creen que el precio a pagar por dicha complicación es demasiado alto y prefieren preservar únicamente la jerarquización simple establecida por la teoría original.[41]

39 B. Russell, *My Philosophical Development*, p. 79

40 Según Douglas Lackey este problema lo señaló Russell independientemente en las secciones 344, 348 y 249 de los *Principios* y constituiría la primera versión publicada de la dificultad. Vease D Lackey (Ed) *Bertrand Russell. Essays in Analisis*, p. 127

41 Véase, por ejemplo, W.v.O. Quine, "The Axiom of Reducibility"

Por otro lado, Russell también opta por cuestionar la noción misma de clase y plantear el problema en los términos en los que se había planteado la teoría de los tipos, esto es, en términos de funciones proposicionales. Como ya vimos, esta opción había resultado inadecuada, ya que la paradoja se podía volver a plantear en términos de funciones. (*cf.* p.33) Sin embargo, uno de los logros de la teoría ramificada de los tipos es precisamente distinguir entre funciones extensionalmente equivalentes por lo que Russell pudo pensar que una teoría de tipos enriquecida podría salvar la dificultad. Además, la idea de que las clases pueden ser eliminadas parece haber quedado latente en Russell ya que, como él mismo señala, su teoría de las descripciones de 1905, que mostraba la manera de eliminar los nombres propios vía descripciones, le trajo nuevas esperanzas de resolver las paradojas.

Con este espíritu, en diciembre de 1905, Russell presentará, ante la London Mathematical Society, un trabajo titulado "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" donde se discuten tres formas o tácticas para lidiar con las paradojas. La primera de ellas es la que Russell llama "*zigzag theory*"; la denominación apunta a la idea de que todas las clases conflictivas son generadas por un mecanismo de diagonalización.[42] Este zig-zag le permite a Russell distinguir entre funciones que se pueden considerar "*fairly simple*" y a las que se les puede aplicar el axioma de abstracción y funciones "complicadas y recónditas" que generan paradojas si se les aplica dicho axioma.

> En la teoría zig-zag partimos de la sugerencia de que las funciones proposicionales determinan clases cuando son más o menos simples y que sólo lo dejan de hacer cuando son complicadas y recónditas.[43]

La segunda forma de lidiar con las paradojas en ese trabajo de 1905 es limitar el tamaño de las clases, esto es, establecer reglas que impidan que ciertas clases lleguen a ser "demasiado grandes" y den origen a contradicciones. La tercera forma es la que se conoce como "la teoría sin clases" (*no-classes theory*) ya que propone la eliminación de las clases. Además del interés intrínseco de estas formulaciones russellianas es de

---

42 43. B. Russell, "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" en *Bertrand Russell. Essays in Analysis*, (D Lackey, editor), pp. 145-146

43 Véase A Urquhart, *op cit.* pp 84-85

notarse que se pueden establecer paralelos entre ellas y algunas posiciones contemporáneas. Así, por ejemplo, Lackey, siguiendo muy probablemente a Gödel,[44] afirma que la teoría zig-zag "tiene alguna similitud con la sugerida por W.v.O Quine en "New Foundations for Mathematical Logic" en 1937" y también establece paralelos entre la limitación de tamaño y las posiciones, en teoría de conjuntos, de Zermelo-Frankel y von Newman-Bernay.[45]

Después de "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers" y de las reflexiones que le precedían[46] Russell se dedicó a refinar su táctica para eliminar a las clases; los resultados de estos esfuerzos se consolidarán en un trabajo titulado "On the Substitutional Theory of Classes and Relations" que también presentó en la London Mathematical Society, el 10 de mayo de 1906, pero que, por diversas razones, no se publicó inmediatamente.[47] Una de estas razones, debemos notar, es la actitud cambiante de Russell con respecto a la eliminación de clases: en febrero de 1906, cuando seguramente estaba trabajando en el manuscrito de su conferencia de mayo, le agregó al texto de "On Some Difficulties..." la siguiente nota: "A partir de investigaciones posteriores escasamente tengo, ahora alguna duda acerca de que la teoría sin clases proporcione la solución completa de todas las dificultades enunciadas en este trabajo."[48] Sin embargo, en octubre del mismo año, cuando la London Mathematical Society aprobó la publicación del trabajo, Russell decidió retirarlo.[49] En este artículo, que no se publicó hasta 1973, Russell parte de un principio que le parece tanto obvio como básico y que proviene de las reflexiones sobre el significado formuladas en 1905 en el que sería su artículo más celebre: "On Denoting". En 1906 lo formula así:

> El principio lógico fundamental del que parte la teoría [aquí enunciada] es un principio que pocas gentes rechazarían. Consiste en que, en cualquier oración,

44 Véase K. Gödel, "Russell's mathematical logic" en P Benacerraf & H Putnam, *Philosophy of mathematics: Selected readings*, pp. 447-469, esp. p. 453

45 Véase D. Lackey, (ed.) *op cit.* p. 130

46 Existe un manuscrito titulado "On functions" que Russell envió a Whitehead el 27 de octubre de 1904 en donde, de acuerdo con A. Urquhart, elabora un bosquejo detallado de la teoría zig-zag. Véase A Urquhart, *op. cit* pp. 86-87

47 Vease D Lackey, "Russell's Unknown Theory of Classes: the Substitutional theory of 1906", *Journal of the History of Philosophy*, 14 (1976): 69-78

48 Véase A. Urquhart, *op cit.* p. 87

49 Véase D. Lackey, (ed), *op. cit* p. 130

> una palabra sola o una frase de un sólo componente, puede frecuentemente no tener significado al separarla de su contexto. En tal caso, si se asume equivocadamente que la palabra o frase tiene un significado independiente, obtenemos lo que podría llamarse una "abstracción falsa" y se propiciarán paradojas y contradicciones.[50]

El entusiasmo de Russell en relación con las "abstracciones falsas" no se circunscribe a las clases sino que, naturalmente, se extiende a las relaciones y, no tan naturalmente, a los números y a "casi todas aquellas cosas con las que tratan las matemáticas".[51] La consecuencia, fundamental para la argumentación de Russell pero un tanto apresurada, de considerar a las clases como falsas abstracciones, es que le permite cuestionar el significado de aquellas afirmaciones acerca de clases que dieron pie a la formulación de la paradoja.

> Así, un enunciado como 'la clase de los seres humanos es un ser humano' no será falso sino que no tendrá significado y, de la misma manera, tampoco tendrá significado decir 'la clase de los seres humanos no es un ser humano'. La razón es que realmente no existen cosas que sean clases y los enunciados que aparentan ser acerca de clases sólo serán significantes cuando puedan ser analizados en enunciados acerca de todos o de algunos miembros de la clase.[52]

Si la afirmación "La clase de los seres humanos es un ser humano" no tiene sentido, entonces la descripción "La clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas" quedará incapacitada para ser un paso hacia la paradoja. Por otro lado, la paradoja será explicada en la medida en que se muestre que nuestro hablar de clases puede ser analizado, y legalizado ontológicamente, por un mecanismo de substitución. Este mecanismo lo plantea Russell distinguiendo, en primer lugar, entre "determinación" y "substitución": "La *determinación* consiste en asignar una constante como el valor de una variable; la *substitución* consiste en reemplazar una constante por otra".[53] Esta distinción, por un lado, se puede relacionar, con la distinción entre

---

50 B. Russell, "On the Substitutional Theory of Clases and Relations" en *Bertrand Russell. Essays in Analysis*, (D. Lackey, editor), p. 165

51 *Ibid.* p 166

52 *op. cit.*, loc. cit

53 *Ibid.* p. 167

"ser un constituyente de" y "ser una función de"[54] y, por otro, permite entender mejor el uso que Russell hará de la substitución caracterizada de la siguiente manera:

> Uso *p(x/a)!q* o *p/a;x!q* para decir '*q* resulta de *p* por substitución de *x* por *a* en todos aquellos lugares (si los hay) donde *a* aparece en *p*'. Es conveniente pensar en *p* (y por lo tanto en *q*) como una proposición, pero esto no es esencial; lo único que es esencial es que *p* debe ser el nombre de una entidad genuina, y no una mera frase como 'el rey de Francia' o 'el rey de Inglaterra'.[55]

Si dejamos de lado el problema de la caracterización de las "entidades genuinas" y sus nombres podemos pasar a la parte del proceso que consiste en usar *p/a* para representar una clase:

> La teoría que deseo defender es que este símbolo elusivo (*shadowy*) *p/a* representa una clase. En forma similar, *p/(a,b)* representará una relación dual (diádica), *p/(a,b,c)* representará una relación triple (triádica) y así sucesivamente. Ninguna de ellas es una entidad y, consecuentemente, no existen tales cosas como las clases o las relaciones.[56]

Aquí tal vez debamos notar que esta última afirmación de Russell acerca de la existencia de clases no sólo está relacionada con la solución de las paradojas, sino que forma parte integral de su ontología y su teoría del significado. Para el Russell de 1906 "absolutamente todo lo que hay es una entidad"[57] y, por lo tanto, tiene que explicar porqué una expresión referencial unívoca no tiene que *nombrar* necesariamente una entidad, distanciándose así de la concepción de Frege de los nombres propios pero acercándose a los problemas ontológicos ya mencionados de caracterizar "entidades genuinas" y encontrarles nombres propios y apropiados.

> Cuando decimos 'el tal y tal no es una entidad', el significado, hablando con propiedad, es 'La *frase "tal y tal"* no es el nombre de una entidad'. Así, cuando

54 A. Urquhart, *op. cit.* pp. 86-87

55 B. Russell, "On the Substitutional Theory of Classes and Relations", p. 168

56 *Ibid.* p. 170

57 *Ibid. loc. cit.*

> decimos que una matriz no es una entidad, queremos decir que una matriz es un conjunto de símbolos, o una frase que, por sí misma, no tiene ningún significado, pero que a través de la adición de otros símbolos o palabras llega a ser parte del símbolo o frase que tiene significado, es decir, es el nombre de algo.[58]

De esta manera, el fundamento ontológico y semántico de la substitución –como vía de eliminación– es la introducción del nombre de una entidad:

> ... la matriz *p/a* es un símbolo de la frase 'el resultado de reemplazar *a* en *p* por', que es incompleta y no tiene significado; para que adquiera significado debemos añadir el nombre de la entidad que va a reemplazar a *a*.[59]

De esta manera puede Russell caracterizar la pertenencia a una clase sin comprometerse ontológicamente con la existencia de clases:

> Así '*x* es un miembro de la clase *p/a*' será interpretado como 'el resultado de reemplazar *a* en *p* por *x* es verdadera'. Aquí la frase representada por *p/a* aparece como parte de la oración completa, pero obviamente no es una parte que tenga un significado propio independiente.[60]

Consecuentemente, si queremos analizar una proposición del tipo "Platón es un hombre" o "Platón es un miembro de la clase de los hombres", tenemos que acudir a la predicación básica que fundamenta la generación de la clase y mostrar su surgimiento a partir de ella. Russell sugiere que lo hagamos de la siguiente manera:

> ... debemos empezar con una proposición *p* que no sea de la forma '*x* es una *u*'. Tomemos 'Sócrates es humano' como *p* y 'Sócrates' como *a*. Entonces *x* pertenece a la clase *p/a* si, cuando *x* es substituida por Sócrates en 'Sócrates es humano' el resultado es una proposición verdadera. Así, si definimos la clase de los hombres como la clase *p/a*, encontramos que Platón es un hombre, porque *p/a*' Platón .=. Platón es humano, que es una proposición verdadera.[61]

---

58 *Ibid. loc. cit.*

59 *Ibid loc. cit*

60 *Ibid. loc cit*

61 *Ibid.* 173

De esta forma se completa el proceso de traducción que, por un lado, aligera el hablar de pertenencia y clases de su peso ontológico y, por otro, le cierra el camino a la paradoja al descalificar a la expresión "*x* es miembro de sí misma" por carecer de significado russelliano.

> Decir que *x* es un miembro de la clase α es ahora decir que para algunos valores de *p* y *a*, α es la matriz *p/a* y *p/a*;*x* es verdadera. Aquí, en lugar de la función variable ϕ, que no podía ser separada de su argumento, tenemos dos variables *p* y *a*, que son entidades, y que pueden ser variadas. Pero ahora '*x* es una *x*' deja de tener significado, porque '*x* es una α' requiere que α sea de la forma *p/a*, y, por lo tanto, para nada, una entidad. Se puede definir así la membresía de clase y, al mismo tiempo, evitar la contradicción.[62]

Sin embargo, como ya se señaló, Russell decidió que no se publicara el artículo y, por lo tanto, que no se conociera tan importante conclusión. Esta decisión parece razonable si uno piensa en los presupuestos ontológicos asumidos –"lo único que es esencial es que *p* debe ser el nombre de una entidad genuina"– y en la necesidad de establecer algún tipo de jerarquía entre aquellas matrices que nos permiten dar cuenta de clases *simpliciter* y aquellas que dan cuenta de clases de clases.

> Se llama a una matriz de la forma *p/a* del primer *tipo*; a una de la forma *p/(a,b)* se la llama del segundo tipo y así sucesivamente. Podremos definir la substitución de una matriz por una matriz de manera tal que obtengamos matrices como *q/(p/a)*, que quieren decir 'el resultado de reemplazar *p/a* en *q* por'. Así, por ejemplo, si *q* es '*x* es un miembro de *p/a*', *q/(p/a)*; *(p'/a')* será '*x* es un miembro de *p'/a'* '. Esta clase de matriz da lugar a clases de clases; es meramente una sub-división de las matrices del segundo tipo.[63]

El problema, como lo indica Russell en ese mismo trabajo, es que: "A veces no es inmediatamente obvio cuál es el tipo de la matriz". Esta conclusión, acerca de la problematicidad de adjudicar un tipo a la matriz, aunada a la voluntad de Russell de dar una solución cabal a las paradojas que incluyera las llamadas semánticas –Epiménides– y las concernientes a la

---

62 *Ibid.* p 172

63 *Ibid.* pp 176-177

definición –Richard, Berry– hará que en sus siguientes trabajos se reformule y se le dé un papel central a la teoría de los tipos. Por otro lado, estos trabajos –"Les Paradoxes de la Logique" (1906), "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" (1908) y ""La Theorie des Types Logiques" (1910)– fueron escritos en el contexto de una polémica acerca de los fundamentos de la matemática y el infinito. Esta polémica la habían iniciado Louis Couturat –leibniziano ardiente, defensor del infinito y partidario de Russell– y Henri Poincaré, crítico de Russell, del logicismo y de la realidad del infinito cantoriano. En lo que concierne a Russell la polémica se desarrolló así: en 1906 Poincaré publicó un trabajo –"Les Mathématiques et la Logique"–[64] en donde mencionaba y criticaba "On Some Difficulties..." publicado por Russell ese mismo año; Russell le contestó, como ya mencionamos, con "Les Paradoxes..." (o "On 'Insolubia' and their Solution by Symbolic Logic").[65] Al siguiente año, 1907, Brouwer, que ya tenía una posición antitética al logicismo, entró a la polémica del lado de Poincaré y se empezó a perfilar la posición intuicionista.[66] En ese mismo año Russell escribe "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", que será publicado en 1908, y al que Poincaré responderá en 1909 con "La Logique de l'Infini". Finalmente, en 1910, Russell responderá con "La Theorie de Types Logiques".

Obviamente no nos podemos detener aquí en los detalles de esta polémica, pero si es de notarse el papel fundamental y fundante que empiezan a jugar el infinito y los razonamientos cantorianos en la reflexión acerca de las matemáticas. Por otro lado, también son de destacarse algunas ideas que sobrevivirán a los aspectos más circunstanciales y personales de la discusión. La primera de ellas es la del papel de la intuición en el pensamiento matemático; esta idea, como se sabe, la desarrollará más tarde Brouwer y, con este desarrollo, no sólo pondrá en cuestión el platonismo predominante en matemáticas, sino que propiciará el nacimiento de una lógica intuicionista (Heyting) y la aparición explícita de restricciones constructivistas. Otra idea importante, aportada por Richard, pero asociada con Poincaré y que Russell, aunque remitiéndola a Occam, aceptará y asumirá como básica, es la de que

64 Poincaré, Henri. "Les Mathématiques et la Logique". *Revue de Metaphysique et de Morale*, 14, 1906

65 Este artículo se publicó originalmente en francés como "Les Paradoxes de la Logique" en la *Revue de Metaphysique et de Moral*, 14, 1906. Su versión inglesa, "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic", extraida de los Archivos Bertrand Russell, se publicó en 1973 en *Bertrand Russell Essays in Analysis* (D Lackey, editor)

66 Véase L E. J Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, (Maas y van Suchhtelen, Amsterdam y Leipzig, Noordhoff, Groningen), 1907. La referencia es de Lackey.

las paradojas se generan a partir de un círculo vicioso. A partir de entonces las formulaciones de lo que Russell llamará el principio del círculo vicioso son varias pero siempre tendrán un núcleo común que invita a establecer una jerarquía tipológica en relación con la solución de las paradojas. Pero antes de pasar a las formulaciones russellianas del principio es justo recordar que Poincaré, al hablar del círculo vicioso, hace referencia a una carta de Richard y que Russell mismo cita esta referencia. La cita de Russell del texto de Poincaré es la siguiente:

> Me parece que la solución se puede encontrar en una carta de M. Richard... Después de exponer la antinomia que hemos llamado la antinomia de Richard, él da una explicación de ella... *E* es el conjunto de *todos* los números que se pueden definir usando un número finito de palabras, *sin introducir la noción del conjunto mismo E* De otra manera, la definición de *E* conllevaría un círculo vicioso; uno no puede definir *E* por medio del conjunto mismo *E*.[67]

Fue entonces la idea de Richard[68] la que generalizó Poincaré y que, finalmente, Russell transformó en un principio formulable en los términos de un lenguaje lógico-matemático:

> ... reconozco, además, este elemento de verdad en la objeción de M. Poincaré a la totalidad, que todo aquello que de alguna manera concierne a *todos*, *cualquiera* o *algunos* (sin determinar) de los miembros de una clase no debe ser, él mismo, uno de los miembros de una clase. En el lenguaje de M. Peano el principio que deseo defender podría decir: 'Lo que sea que involucre una variable aparente, no debe encontrarse entre los valores posibles de esa variable.'[69]

La introducción de principio del círculo vicioso en "Les Paradoxes..." la relaciona Russell no tanto con las paradojas de clases, las cuales, insiste, se pueden resolver por su teoría de la eliminación, como con la solución de las paradojas que Ramsey calificó de semánticas y Peano llamó lingüísticas. Sin

67 "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic" en *Bertrand Russell. Essays in Analysis*. p 197, H. Poincaré, *op. cit.* p. 307

68 El punto de vista de Richard con respecto a su propia paradoja se encuentra en "The principles of mathematics and the problem of sets". Este trabajo lo envió Richard en forma de carta al editor de la *Revue générale des sciences pures et appliquées*, donde se publicó en 1905 En 1906 apareció nuevamente en Acta Mathematica Véase van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, en donde aparece y se presenta el artículo pp. 142-144

69 B. Russell, "On 'Insolubilia'..." en *Essays in Analysis*, p 198

embargo, la receta que propondrá Russell para estas paradojas será similar a la aplicada a las clases: distinguir entre la verdad de un enunciado y el de una proposición y alegar ambigüedad temporal. Dice Russell:

> Hasta donde puedo ver, la doctrina anterior [acerca de la eliminación de clases] resuelve todas las paradojas en lo que concierne a clases y relaciones; pero para resolver la de Epiménides parece que se necesita una doctrina similar para las proposiciones. Para evitar la falacia del círculo vicioso requerimos [...] del principio: "Lo que sea que involucre una variable aparente, no debe encontrarse entre los valores posibles de la variable".[...] El caso importante de este principio puede ser enunciado en forma menos exacta de la siguiente manera: 'Sea lo que sea que involucre *todo* no debe ser uno del *todo* que involucra'. Así, un enunciado acerca de *todas* las proposiciones debe o carecer de significado o ser el enunciado de algo que no es una proposición en el sentido que nos concierne. Cualquier enunciado acerca de *todas* las proposiciones involucra una proposición como variable aparente; de aquí que, para evitar círculos viciosos, necesitemos de un significado de proposición de acuerdo con el cual ninguna proposición pueda contener una variable aparente. Este resultado, me parece, puede asegurarse diciendo que un enunciado acerca de *todo* [...] es realmente una afirmación de una proposición ambigua de las varias obtenidas de casos particulares. Por ejemplo, si afirmamos: 'Sea lo que sea x, $x=x$' estamos afirmando una proposición ambigua de las proposiciones de la forma '$x=x$'; así, aunque tenemos un nuevo enunciado, no tenemos una nueva proposición.[70]

A partir de esta situación teórica y de la aceptación de que las observaciones de Richard-Poincaré eran la clave de la solución de las paradojas, lo único que podrá hacer Russell es tratar de quitarle al principio del círculo vicioso su carácter *ad hoc* elaborando una teoría que lo pudiera asumir como uno de sus resultados o que, al menos, propiciara su formulación. Este proyecto lo llevará naturalmente a preguntarse sobre el carácter –restricto o irrestricto– de la cuantificación y el funcionamiento de las variables ligadas por el cuantificador universal.

> Es necesario [...] construir una teoría de las expresiones que contienen variables aparentes que tenga como resultado el principio del círculo vicioso. [...] La dificultad de aplicar el principio del círculo vicioso surge del argumento por el que, parecería, podemos probar que nuestras variables deben ser capaces de *todos* los valores. Los lógicos simbólicos más viejos tenían la doctrina del *universo de discurso*, que establecía algo así como los límites de la decencia, fuera de los cuales ninguna variable bien portada saldría a pasear.[71]

---

70 *Ibid*. p. 204

71 *Ibid* p. 205

Pero los límites de la decencia discursiva, como los de la moral, no son algo fácil de establecer. No es fácil, podríamos decir, controlar los afanes de variables que fueron reales (libres) y ahora, bajo el régimen de un cuantificador, son aparentes y están ligadas a un universo de discurso. Es cierto que podemos acudir a principios; Russell sugiere el de un rango de significatividad que relacionaría las variables con una jerarquía, pero estas restricciones, como él mismo muestra, pueden resultar contraproducentes:

> Podríamos entonces decir que una función dada ϕx tendrá siempre un *rango de significatividad* que será ya sea *individuos*, o *clases*, o *clases de clases*, [...] La dificultad de este punto de vista esta en la proposición, digamos, 'ϕx sólo es significativa cuando x es una clase' Esta proposición no se debe restringir, en relación con su rango, al caso en que x *es* una clase; ya que queremos que implique 'ϕx no es significativa cuando x no es una clase'. Encontramos así que, después de todo, hemos regresado a las variables sin restricciones de rango.[72]

La solución de Russell, para conciliar el principio del círculo vicioso con el carácter irrestricto de la cuantificación, consiste en limitar el rango de las variables a individuos y asumir que éstos agotan nuestra ontología. Claro está que el uso de variables para clases es muy importante, pero este uso no nos comprometa ontológicamente puesto que, como ya vimos, Russell piensa que las clases pueden ser eliminadas, que son sólo una manera de hablar.

> ... tenemos que asumir que una sola letra, como x, sólo puede estar en lugar de un individuo y que esto sólo puede ser así si los individuos son realmente todas las entidades y las clases, etc., son meramente una *façon de parler*. Así nuestra variable x tiene ahora nuevamente un rango irrestricto, puesto que puede ser cualquier individuo, y no hay realmente nada que no sea un individuo.[73]

Sin embargo, la sola eliminación de las clases no es suficiente ya que la raíz del problema se encuentra en el carácter irrestricto de la cuantificación y en la naturaleza misma de las variables, que no están comprometidas, en y por principio, con ningún tipo particular de entidades. El resultado de combinar estos dos factores se hace patente en las diferentes lecturas que se pueden

---

72 *Ibid* pp 205-206

73 *Ibid* p. 206

hacer de una proposición categórica como "Todos los hombres son mortales". De acuerdo con una lectura clásica en esta proposición se está diciendo de los hombres, o de todos los hombres, que son mortales; sin embargo, al traducirla al lenguaje lógico canónico como $(x)(Hx \supset Mx)$ se podrá leer como una afirmación irrestricta acerca de todas las cosas sin importar su determinación. De aquí que Russell se vea obligado a buscar una estructura en todos aquellos valores de las variables distintos de los individuos y esta búsqueda lo obligará a volver los ojos hacia su vieja teoría de tipos que, en este contexto, nos podría recordar la vieja teoría del universo de discurso y los límites de la decencia.

> Si vamos a evitar esto [tener variables sin restricción de rango], el rango de significatividad deberá de estar, de alguna manera, dado con la variable. Esto sólo se puede hacer usando variables que tengan una estructura *interna* cuando se trate de un tipo lógico definitivo que no sea el de los individuos.[74]

Esta estructuración de las variables y del universo la planteará Russell en su artículo de 1908 "Mathematical logic as based on the theory of types"; allí, en buena medida, resume sus resultados anteriores y empieza a delinear lo que será su posición en *Principia*. De esta manera, podemos notar, las fuertes críticas que este artículo suele suscitar pasarán a serlo de *Principia* también. El punto de partida es el ya mencionado principio del círculo vicioso que ahora se empezará formulando como una regla muy general: "ninguna totalidad puede contener miembros definidos en términos de ella misma"; esta formulación permitirá introducir la idea básica de tipo ya que es ésta la que determinará el rango de significatividad de las variables cuantificadas. Sin embargo Russell media este paso con la elaboración de una distinción entre "todos" y "cualquiera" que relaciona con la distinción entre una enunciación general y una enunciación particular en Euclides y que, finalmente, tendrá que ver con distinguir entre "(1) afirmar cualquier valor de una función proposicional y (2) afirmar que la proposición es siempre verdadera...". De esta manera "todos" se relacionará con una variable aparente, ligada por un cuantificador universal, mientras que "cualquiera" se asociará con una variable real –libre– de una función proposicional.

> La enunciación general nos dice algo acerca de, digamos, todos los triángulos, mientras que la enunciación particular toma un triángulo y afirma lo mismo de este triángulo particular. Pero el triángulo tomado es *cualquier* triángulo, no algún triángulo en especial [...] Si decimos "Sea ABC un triángulo, entonces, los lados

74 *Ibid loc cit*

AB y AC juntos son más grandes que el lado BC". estamos diciendo algo acerca de *un* triángulo, no acerca de todos los triángulos, pero el triángulo en cuestión es absolutamente ambiguo y, consecuentemente, nuestro enunciado es absolutamente ambiguo también.[75]

Esta ambigüedad, debemos notar, está íntimamente relacionada con el contraste entre el funcionamiento de las variables libres en una función proposicional y el de las variables ligadas por un cuantificador universal:

> Esta noción de una afirmación ambigua es muy importante y es vital no confundir una afirmación ambigua con la afirmación definitiva de que lo mismo se mantiene en todos los casos.[76]

La importancia entonces de la distinción para Russell es la posibilidad de hacer afirmaciones generales sin generar paradojas cuando el rango de las variables no fueran individuos sino proposiciones o propiedades; así se explica que en este contexto "cualquier valor" sea una forma legítima de hablar, mientras que "todos los valores" será censurada.

> En el caso de variables como proposiciones o propiedades, "cualquier valor" es legítimo, pero "todos los valores" no lo es. Podemos así decir: "*p* es verdadera o falsa, cuando *p* es cualquier proposición", aunque no podamos decir "todas las proposiciones son verdaderas o falsas".[...] Podemos así admitir "cualquier valor" de una variable en casos en los que "todos los valores" conduciría a falacias reflexivas, ya que la admisión de "cualquier valor" no crea nuevos valores de la misma manera. De aquí que se puedan enunciar las leyes fundamentales de la lógica en relación con *cualquier* proposición aunque no podamos significativamente decir que se mantienen para todas las proposiciones.[77]

La pregunta que entonces se empieza a perfilar es cuándo y de qué manera se pueden legitimar las afirmaciones universales; la propuesta de Russell es compleja en la medida en que se ve obligado a una formulación que no deje abierta la puerta al planteamiento de paradojas. Así, por un lado, podrá

---

75 B. Russell, "Mathematical logic as based on the theory of types", recogido en van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, p. 156

76 *Ibid.*, *loc. cit.*

77 *Ibid.* p. 158

decir que una proposición universal afirma que una función proposicional es siempre verdadera pero tendrá que agregar que lo que esto significa es "todos los valores de dicha función son verdaderos, no que la función sea verdadera para todos los argumentos". Esta distinción restrictiva la justifica Russell afirmando que hay argumentos para los cuales la función no tiene significado y, por lo tanto, tampoco tiene un valor. De aquí la necesidad de volver a traer a cuento el rango de significatividad de las variables y de tratar de darle a esta noción una estructuración que no sea *ad hoc* o circular.

> .. podemos hablar de *todos* (*all*) de una colección cuando y sólo cuando la colección forme una parte o el todo del *rango de significatividad* de alguna función proposicional; el rango de significatividad se define como la colección de aquellos argumentos para los que la función en cuestión es significativa, esto es, tiene un valor.[78]

La noción de tipo se introducirá entonces, en primer lugar, como paralela a la de rango de significatividad: un tipo será caracterizado como "el rango de significatividad de una función proposicional". Sin embargo, la ventaja de hablar de tipos es que éstos pueden ser jerarquizados y facilitan la aplicación del principio del círculo vicioso ya que "lo que sea que contenga una variable aparente debe ser de un tipo diferente del de los posibles valores de esa variable", esto es, la cuantificación nos lleva a un tipo más alto que el de los valores de las variables. Este movimiento hace entonces detectable la mezcla de rangos de significatividad que ocasionan las paradojas, sólo que ahora estos rangos de significatividad, en tanto que tipos, podrán regimentarse. Esta regimentación tomará la forma de una jerarquía que tiene como base natural a los individuos: puesto que la generalización puede explicarse a partir de proposiciones elementales –esto es, sin variables aparentes– y los sujetos de estas proposiciones son individuos, es plausible asumir que estos individuos constituyen el tipo más bajo, el fundamento de la jerarquía.

> Aplicando el proceso de generalización a los individuos que aparecen en las proposiciones elementales, obtenemos nuevas proposiciones. La legitimidad de este proceso sólo requiere que ningún individuo sea una proposición [...] Las proposiciones elementales junto con aquellas que sólo contienen individuos como variables aparentes las llamamos *proposiciones de primer orden*. Estas forman el segundo tipo lógico. Tenemos así una nueva totalidad, la de las *proposiciones de primer orden*. Podemos así formar nuevas proposiciones en las que las

78 *Ibid* p. 163

proposiciones de primer orden aparecen como variables aparentes. A estas las llamamos *proposiciones de segundo orden* y forman un tercer tipo lógico.[79]

Sin embargo, la aparente naturalidad de estos planteamientos tiene sus bemoles, especialmente cuando se toma en cuenta que la jerarquización en cuestión afectará lo que podríamos llamar el orden de la significatividad, para conservar la terminología y ambigüedad russellianas. Estos bemoles se hacen patentes en la forma en que se habla del ámbito de aplicación del principio del círculo vicioso; Russell, como ya vimos, lo formula de una manera extremadamente general:

> Lo que sea que contenga una variable aparente no debe ser un valor posible de esa variable. Así, lo que sea que contenga una variable aparente debe ser de un tipo diferente del de los posibles valores de esa variable; nosotros diremos que es de un tipo *más alto*.[80]

Para Quine la vaguedad de esta formulación esconde una confusión entre objetos y expresiones que, como veremos un poco más adelante, puede apuntar a dificultades ontológicas graves que se hacen patentes cuando el peso de la interpretación de los cuantificadores cae sobre la interpretación de las variables. Comentando el planteamiento que acabamos de citar, Quine señala lo siguiente:

> La formulación es problemática. Las variables, en su sentido más simple, son letras y lo que las contiene son expresiones notacionales. ¿Está entonces Russell asignando tipos a sus objetos o a sus notaciones? La confusión persiste cuando procede a definir "proposiciones del orden n". Su tipo más bajo comprende a los individuos; el siguiente lo que él llama proposiciones de primer orden, y así en sentido ascendente. Estas proposiciones, a diferencia de los individuos, son evidentemente notación; en todo caso, pueden contener variables. Sin embargo, como los individuos, tienen tipo y figuran como valores de variables cuantificadas.[81]

---

79 *Ibid.* p. 164

80 *Ibid.* p. 163

81 W v.O.Quine, presentación del artículo de Russell en *From Frege to Gödel*, p. 151

Los efectos de estas críticas se harán más claros cuando Quine la extienda a la jerarquía de tipos de funciones proposicionales que Russell propone como "más conveniente" que la de tipos de proposiciones. Esta jerarquía de funciones proposicionales la introduce Russell, vía la substitución, de la siguiente manera:

> Se pueden obtener funciones de varios órdenes a partir de proposiciones de varios órdenes por el método de *substitución*. Si *p* es una proposición y *a* un constituyente de *p*, dejemos que "*p/a'x*" denote a la proposición que resulta de substituir *x* por *a* en todos los lugares en donde *a* ocurre en *p*. Entonces *p/a*, que llamaremos una *matriz*, puede tomar el lugar de una función; su valor para el argumento *x* es *p/a'x*, y su valor para el argumento *a* es *p*.[82]

Al someter las funciones proposicionales a la jerarquía de tipos se insiste en que estas funciones sean valores de variables cuantificadas y, consecuentemente, se hace explícita su problematicidad epistemológica y ontológica. Así, para Quine, este movimiento pone de manifiesto no sólo la ya mencionada confusión entre notación y objeto, sino una confusión de obvias consecuencias ontológicas entre oraciones y atributos:

> De su jerarquía de tipos de proposiciones Russell deriva una jerarquía de tipos de funciones proposicionales. El habla aquí de substitución de una manera que sugiere que sus funciones también tienen carácter notacional; simplemente parecen ser oraciones abiertas, oraciones con variables libres. No obstante les asigna tipos y permite que sean valores de variables cuantificadas. En esta medida no deberían ser consideradas oraciones abiertas sino *atributos* o, cuando son funciones de dos o más argumentos, como *relaciones*. Así, no distinguir entre oraciones abiertas, por un lado, y atributos y relaciones, por el otro, tiene graves consecuencias para este trabajo ["Mathematical Logic as based on the theory of types"] y, paralelamente, para *Principia Mathematica*, cuyo estilo se establece aquí.[83]

Pero, ¿se trata realmente de una confusión, de un descuido, de una incapacidad para ver formas platónicas, de una suerte de miopía ontológica? Algunos lectores de Russell han manifestado dudas y reservas con respecto a esta confusión; Lackey, por ejemplo, en relación con otro texto ("Whitehead and

---

82 *Ibid.* p 164

83 *Ibid.* p. 151

the rise of modern logic")[84] donde Quine hace una crítica semejante, hace notar que:

> Es difícil creer que Russell pudiera dejar pasar inadvertidos los compromisos ontológicos inherentes a un sistema en el que habia estado trabajando diez años. En una serie de notas no publicadas tituladas 'La paradoja del mentiroso', escritas en 1906, Russell escribió: '... lo que pueda ser una variable aparente debe tener alguna clase de ser', y, específicamente, aplica esta regla a la cuantificación de variables de predicados. Este pasaje anticipa, por unos cuantos años, el *dictum* del propio Quine: 'ser es ser el valor de una variable ligada'. Russell podría estar equivocado con respecto a las propiedades, pero, ciertamente, no estaba confundido.[85]

La medida de la confusión russelliana tal vez se haga más clara si regresamos a algunos de los detalles técnicos de la transición de una jerarquía de proposiciones a una de funciones proposicionales, que será la base de la llamada teoría ramificada de los tipos. Como ya vimos, en una jerarquía de proposiciones podemos hablar de proposiciones de primer orden como aquellas proposiciones que o son elementales o generalizan a partir de los individuos que son sujetos de predicación en las proposiciones elementales; las proposiciones de segundo orden se generarían por predicación de las totalidades de proposiciones de primer orden y así sucesivamente. Esta sería una forma de una teoría simple de tipos como la que se generaba cuando hablábamos de individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos, etc. Por otro lado, una jerarquía de funciones conlleva o puede sugerir ramificaciones en cada nivel, ya que, para Russell, como señala Quine, "... el tipo de una función depende tanto de los tipos de sus argumentos como de los tipos de las variables aparentes contenidas en ella (o en su expresión) en caso que éstos excedan los tipos de los argumentos."[86] Esta ramificación puede hacerse aparente en el siguiente esquema, sugerido por Chihara[87] y muy semejante, según el propio Chihara, al desarrollado por Hao Wang para el sistema R.[88] El esquema es básicamente el siguiente:

84 W.v.O. Quine, "Whitehead and the rise of modern logic", en *The Philosophy of Alfred North Whitehead,* pp. 125-64. editado por P A. Schilpp (La Salle, Open Court, 1941)

85 *Bertrand Russell. Essays in Analysis,* (D Lackey, editor), pp 133-134

86 en *From Frege to Gödel*, p 151

87 Ch. Chihara, *op cit.* p 21

88 Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic*, (Amsterdam, North-Holland, 1962)

T4.0 T4.1 T4.2.0 T4.2.1 T4.3.0 T4.3 1 T4.3.2.0 T4.3 2.1
T3 0 T3 1 T3 2.0 T3.2.1
T2.0 T2 1
T1
T0

En este esquema el nivel T0 corresponde a los individuos. El nivel T1 es el de las funciones de primer orden, o sea aquellas cuyos argumentos son individuos. Hasta aquí la complejidad es paralela a la de una teoría simple de tipos; el problema surge en el siguiente nivel, ya que las funciones de segundo orden pueden ser de dos tipos: aquellas cuyos argumentos son individuos y aquellas cuyos argumentos son funciones proposicionales de primer orden. En el tercer nivel la ramificación crece, ya que allí se podrán distinguir cuatro tipos de funciones proposicionales: las que tienen a individuos como argumentos, las que tienen a funciones de primer orden como argumentos, las que tienen a funciones proposicionales de segundo orden –cuyos argumentos son individuos– como argumentos y las que tienen a funciones proposicionales de segundo orden, –cuyos argumentos son funciones de primer orden– como argumentos. Bajo este régimen de crecimiento ramificado, en el cuarto nivel se podrán distinguir ocho tipos distintos de funciones y en el quinto 16. De esta manera se podrán generar 2^{n-1} tipos de funciones diferentes proposicionales del *orden n y se podrá calificar de predicativa a una función proposicional* cuando su orden sea superior al de sus argumentos. Las funciones predicativas, adecuadamente señaladas por Russell con un signo de admiración, se convierten así en una vacuna en contra de las paradojas que se puede caracterizar, dentro del esquema mencionado, diciendo que "una función es predicativa si su tipo es o T1 o Tk.k -1.σ (donde k es un número natural y σ una secuencia del tipo requerido)."[89]

Por otro lado hay que notar que el precio de esta vacuna puede ser un tanto alto, ya que la doble clasificación de funciones –por tipo y por orden- no sólo las multiplica considerablemente y hace difícil su manejo, sino que automáticamente nos prohibe hablar de todas las funciones de un individuo *a* sin especificar el nivel de las funciones. Sin embargo, este tipo de generalizaciones son fundamentales tanto en matemáticas –piénsese en la

89 Ch Chihara, *op. cit* p 22

inducción– como en los razonamientos ordinarios. Esta dificultad la había reconocido Russell desde su artículo de 1908 y la expresa así en *Principia*:

> [.] de acuerdo con la jerarquía mencionada, no se puede hacer significativamente ningún enunciado acerca de "todas las funciones de *a*", donde *a* es un objeto dado. Así, una noción como "todas las propiedades de *a*", en el sentido de "todas las funciones que son verdaderas con el argumento *a*", serán ilegítimas. Tendremos que distinguir el orden de la función en cuestión. Podemos hablar de "todas las propiedades predicativas de *a*", "todas las propiedades de segundo orden de *a*", y así sucesivamente. [...] Pero no podemos hablar de "todas las propiedades de a."[90]

La importancia para la fundamentación de las matemáticas de esta situación es su inevitable relación con la formulación de la inducción matemática:

> [...] es absolutamente necesario, si las matemáticas van a ser posibles, que tengamos algún método para hacer enunciados que usualmente son equivalentes con lo que tenemos en mente cuando (sin exactitud) hablamos de "todas las propiedades de x". Esta necesidad se presenta en muchos casos, pero especialmente en relación con la inducción matemática. Usando *cualquiera* en lugar de *todas* podemos decir: "Cualquier propiedad que poseen 0 y los sucesores de todos los números que la poseen, la poseen todos los números finitos". Pero no podemos continuar a: "Un número finito es aquel que posee *todas* las propiedades poseídas por 0 y por los sucesores de todos los números que las poseen". Si confinamos este enunciado a todas las propiedades de primer orden de los números, no podemos inferir que se sostiene para las propiedades de segundo orden.[91]

La solución de esta dificultad es el muy discutido axioma de reducibilidad que afirma que para toda función existe una función predicativa equivalente. En la notación de *Principia* el axioma se expresa así:[92]

$$\vdash :(\exists\psi):\phi x \equiv_x .\psi!x.$$

---

90 *Principia*, p. 55

91 B. Russell. "Mathematical logic as based on the theory of types", p 167

92 *Principia* p. 56

Como con otros axiomas de *Principia* el primer problema con éste es su *status* lógico, o, mejor dicho, su falta de *status* lógico. Sin embargo, para algunos críticos, empezando por Ramsey,[93] el verdadero problema del axioma no es tanto una cuestión de escrúpulos como de efectividad lógica. La dificultad básica es la siguiente: para formular el axioma Russell tiene que tener un criterio de equivalencia entre funciones y este criterio es básicamente extensional. La naturaleza extensional de este criterio se hace explícita en *Principia*:

> Se dice que dos funciones ϕx, ψx son "equivalentes formalmente" cuando, para todo posible argumento x, ϕx es equivalente a ψx, esto es, ϕx y ψx son o ambas verdaderas o ambas falsas. Así, dos funciones son formalmente equivalentes cuando son satisfechas por el mismo conjunto de argumentos.[94]

Esta caracterización obviamente sugiere la reaparición del espectro de las recién eliminadas clases, pero por el momento nos podemos suponer curados de espantos y atender a un problema que se puede plantear en los propios términos de la ampliación russelliana de la teoría simple de los tipos. El problema es que si bien la equivalencia extensional fundamenta la reducción también coarta la ramificación, ya que la posibilidad misma de reducción –vía la equivalencia extensional- muestra el carácter superfluo de la ramificación. En los términos del esquema Wang-Chihara, la dificultad es la siguiente: el axioma de reducibilidad permite reducir cualquier función de la secuencia T1, T2.0, T3.0, T4.0... a la función predicativa T1, esto es, al segundo elemento de la columna vertical izquierda. Paralelamente, la secuencia T2.1, T3.1, T4.1... puede reducirse verticalmente a la función predicativa T2.1. El mismo procedimiento puede aplicarse a las otras secuencias verticales contiguas: en todos los casos la función con la que se inicia la columna constituye la función predicativa a la que pueden reducirse las funciones por encima de ella.[95] Por otro lado hay que notar que puesto que T2.0 es equivalente extensionalmente a

---

93 Vèase F P Ramsey, "The Foundations of Mathematics" en *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, editado por R.B Braithwaite y con un prefacio de G E Moore (Londres, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1931) pp. 1-61

94 *Principia*, p 56

95 Tal vez por esta razón en *Principia* la introducción del signo ! se hace en relación con funciones cuyos valores son proposiciones elementales "Ya que mas tarde habra ocasión de considerar funciones cuyos valores no son proposiciones elementales, distinguiremos aquellas cuyos valores son proposiciones elementales por un signo de admiración entre la letra que denota la función y la que denota el argumento Así "ϕ !x" es una función de dos variables, x y ϕ !z " *Principia*, p xxviii

T1, entonces T3.2.0 es redundante en términos extensionales. En este sentido podríamos decir que los tipos que realmente constituyen la jerarquización son: T0, T1, T2.1, T3.2.1, T4.3.2.1, T5.4.3.2.1 ... y de aquí inferir que la teoría ramificada de los tipos, reforzada con un axioma de reducibilidad que conlleva una caracterización extensional de la equivalencia, se reduce básicamente a una teoría simple de tipos.[96] Esta conclusión, como ya mencionamos, proviene de Ramsey y fue Quine quien se encargó de darle otra vuelta de tuerca al hacer obvio que, una vez que aceptamos la equivalencia extensional, la ramificación sale sobrando.[97] Esto se logra sugiriendo la construcción, a partir de la equivalencia extensional de funciones, de un sistema paralelo a *Principia* que garantiza que todas sus funciones son predicativas. Este sistema es equivalente a *Principia* pero no requiere la distinción de órdenes, luego la distinción sale, lógicamente, sobrando.

> De acuerdo con el axioma de reducibilidad para toda función proposicional existe una función predicativa formalmente equivalente. Aún más, sólo hay una, ya que dos de ellas serían formalmente equivalentes y del mismo orden y, por lo tanto, idénticas de acuerdo con el principio de extensionalidad parcial. Podemos entonces hablar de *la* función predicativa que es formalmente equivalente a una función dada. Construyamos entonces otro sistema que difiera del de P.M. sólo en este sentido interpretacional: toda expresión que en P.M. denotaría una función no-predicativa ϕ, debe ser construida en el nuevo sistema como denotando la función predicativa que es formalmente equivalente a ϕ. La materia de estudio del nuevo sistema no incluye sino funciones predicativas; todas las particiones de tipos de funciones en ordenes distintos desaparece y el sistema es indistinguible de aquel que sería P.M. si no se hubiera inventado la distinción de órdenes.[98]

Ahora, dado que el axioma de reducibilidad se introdujo precisamente para garantizar la reducción de funciones de no importa qué orden a una función predicativa, se puede argüir, como lo hace Quine, que si se acepta el principio de extensionalidad tanto la ramificación como la reducibilidad son prescindibles. Dice Quine:

96 Véase Chihara, *op cit* p. 45

97 Véase W v O Quine, "On the axiom of reducibility", *Mind* 45, 1936, pp. 498-500

98 *Ibid.* p 499

> Concedido el principio de extensionalidad parcial lo que muestra el argumento mencionado es que o el axioma de reducibilidad no es legítimo para empezar, o que tanto él como la segunda parte de la teoría de los tipos son superfluos.[99]

Pero, podemos preguntar, ¿cómo pasamos de lo necesario a lo prescindible? La respuesta de Quine apunta, como ya mencionamos, hacia una confusión entre funciones y su expresión y, por tanto, una vez que se establece un criterio extensional de equivalencia entre funciones sus diferencias de expresión salen sobrando. Sin embargo, es de notarse que las diferencias de expresión salen sobrando porque, desde el punto de vista lógico, no tienen un lugar dentro del orden estrictamente matemático que es el objeto de estudio de *Principia*. Aunque sin concederles un lugar propio, Quine sugiere que estas diferencias expresivas podrían ser acomodadas dentro de un orden matemático que clasificara "no funciones proposicionales, sino sus expresiones simbólicas".[100] Planteadas así las cosas, la confusión russelliana se podría presentar como una confusión entre lo que pertenece estrictamente al orden matemático de *Principia* y lo que se encuentra fuera de él. Ahora, dentro de este contexto polémico se podrían pensar varias razones que Russell podría aducir para retener las diferencias de expresión de funciones dentro del orden matemático según *Principia*. En primer lugar hay que recordar el afán de eliminar las clases; si las clases estuvieran disponibles, no habría que acudir a la estratificación de funciones que viene a tomar su lugar.[101]

De aquí que otra forma de plantear la crítica al sistema russelliano es decir que la aceptación de la equivalencia extensional equivale a la reintroducción de clases y, consecuentemente, a la vacuidad tanto de la ramificación como del axioma de reducibilidad. De aquí también que Russell califique de parcial su principio de equivalencia extensional y en la segunda

---

99 *Ibid*, *loc. cit*

100 *Ibid*

101 Las tensas relaciones entre clases y funciones perduraran hasta la segunda edición de *Principia* en donde, por un lado, Russell reconoce que " no hay ninguna razon para distinguir entre funciones y clases, ya que, en virtud de lo anterior (el principio de extensionalidad) tenemos:

$$\phi x \equiv \psi x . \supset \phi x = \psi x$$

(*Principia*, introd a la segunda edición, p xxxix) Sin embargo, en la misma introducción, insiste en que. "No hay, por tanto, manera de escapar del resultado que ξ es de un orden más alto que el de las subclases de α consideradas en la definición de $Cl^{\prime}\alpha$ Consecuentemente, cuando no se asume el axioma de reducibilidad, la prueba de $2^{n} > n$ se derrumba Encontraremos, sin embargo, que la proposición permanece verdadera cuando n es finito." (*Ibid* p xliii) edición de *Principia* vuelva a plantear el problema de las relaciones entre funciones y clases a las que aludimos en la nota anterior. Señala Quine:

> En su prefacio (*sic*) a la segunda edición de P.M. (p. xxxix) Russell adopta un principio de extensionalidad parcial para las funciones proposicionales hasta el grado de identificar funciones que son formalmente equivalentes y del mismo orden. Sin embargo, continúa sosteniendo que funciones formalmente equivalentes pueden diferir en orden y, por lo tanto, no ser idénticas.[102]

Esto quiere decir que, aún si supusiéramos la introducción de clases, podría haber funciones equivalentes pero no idénticas y esta diferencia se podría sostener aũn sin acudir a la distinción de órdenes, ya que dos funciones pueden determinar la misma clase sin ser idénticas. Recuérdese la insistencia de Russell en que no se necesita desplumar una gallina para saber que "bípedo implume" no es lo mismo que "animal racional". De esta manera una segunda razón para explicar la confusión russelliana podría apuntar hacia una distinción entre un punto de vista extensional y uno intensional con respecto a las funciones. En el caso de Russell esta distinción se suele asociar con su preocupación por ofrecer una teoría que diera cuenta de todas las paradojas, incluyendo las calificadas de semánticas, pero se puede mostrar que el contexto discursivo en el que Russell situaba la distinción era mucho más amplio. Considérese, por ejemplo, el siguiente fragmento de un diálogo con Hardy en los primeros años del siglo:

> (i) ¿Está la definición por *extensión* lógicamente restringida a las clases *finitas* (?) En los "Princ. de las Math." Ud parece decir: No. ¿Está Ud. de acuerdo con esto, y si lo está no afecta la raíz de la dificultad de la clase multiplicativa (?)"
> (1) *Definición por extensión.* Lógicamente, no existe tal cosa. La clase cuyos miembros son a y b se define por la *intención* "idéntico con a o idéntico con b"; y lo que comúnmente se llama definición por extensión es realmente definición por intensiones de este tipo;. .[103]

Finalmente se podría argüir que la distinción entre una función y su expresión es esencial al lenguaje matemático y que, consecuentemente, afecta el análisis de la argumentación. Desde esta posición podríamos recordar la

102 Quine, "On the axiom of reducibility", p 498

103 Citado por I Grattan-Guinness en "How Bertrand Russell discovered his paradox", *Historia Matemática* 5, 1978, pp. 127-137, p. 131.

distinción de Frege entre sentido y referencia y hablar del sentido de un predicado o de una función proposicional. Claro está que no podemos olvidar que Russell criticó violentamente tal distinción en "On Denoting" pero, como piensa Chihara, si se trata de aclarar la noción de función proposicional tal vez deberíamos de considerar esta opción.

> Una posibilidad que por sí misma se sugiere es que una función proposicional sea esencialmente lo que se podría llamar el *sentido* o el *significado* de un predicado (o, quizá, de una oración abierta) No obstante la vaguedad y poca claridad de la noción de sentido, una interpretación de este tipo ayudaría a explicar porqué se supone que las funciones proposicionales están tan íntimamente ligadas con las expresiones de *Principia* que las denotan.[104]

Aquí tal vez habría que notar que lo que precisamente señala Russell es que la intimidad no implica identidad; por más cercana que sea la relación entre una función y las expresiones que la denotan, la pluralidad de estas últimas impide una identificación epistemológica. Las funciones proposicionales de cualquier orden podrán ser reducidas en base a la equivalencia extensional, pero esta reducción no borra las diferencias entre las funciones desde el punto de vista de su expresión. De aquí que, en el paralelo con la distinción de Frege, tal vez el énfasis debería recaer sobre la paradoja del análisis, que es el punto de partida de la distinción entre sentido y referencia.[105] Esta paradoja pone precisamente de manifiesto que la equivalencia extensional –en el caso de Frege la identidad de referencia– no conlleva la identidad de forma de establecer la referencia, esto es, la identidad de sentido. Dos expresiones pueden tener la misma referencia y diferente sentido; para Frege –a quien nadie puede acusar de psicologista o intuicionista– este hecho es esencial al lenguaje y no puede descartarse, à *la* Ramsey, como parte de las limitaciones humanas.[106] De esta manera el problema de la naturaleza de las matemáticas y su lenguaje apuntaría al problema más general de la naturaleza humana, o inhumana, del lenguaje mismo.

104 Chihara, op. cit p. 30

105 Véase G. Frege, "On Sense and Meaning", en *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, editadas por p. Geach y M. Black (Oxford, Basil Blackwell, 1952)

106 Véase L. Wittgenstein, *Notebooks, 1914-1916*, (líneas escritas el 6 de septiembre y el 11 de octubre de 1914), pp. 4 y 10, respectivamente.

Resumen

El panorama que acabamos de esbozar del contexto teórico en el que se plantea la definición de la identidad en *Principia* nos permite destacar, en sus propios términos, algunas ideas y puntos de vista que reaparecerán más tarde en la discusión de la noción de identidad. Puesto que estas referencias serán más temáticas que históricas, una lista de ellas tal vez sea suficiente para resumir su pertinencia para la discusión.

a) El contexto en el que Russell reflexiona sobre la fundamentación de las matemáticas está enmarcado por dos logros teóricos que, aunque fechados en el último tercio del siglo XIX, van a ser fundamentales para delinear el pensamiento del siglo XX. El primero de ellos es la reinvención de la lógica, dentro de un proyecto de fundamentación de las matemáticas. Después de más de dos mil años en los que el Occidente había tratado de dar continuidad y sentido al descubrimiento aristotélico, Frege, al solucionar el problema de la cuantificación múltiple, logró esta continuidad. El segundo logro teórico lo constituye, obviamente, la aparición de los números transfinitos, que no sólo abrió matemáticamente las puertas de la infinitud, sino que transformó la noción filosófica tradicional de infinito y propició una intensa reflexión sobre la naturaleza de las pruebas matemáticas. Esta reflexión ha replanteado el contrate entre una posición realista –de corte platónico– y posiciones, como la intuicionista, que cuestionan las asunciones platónicas en el pensamiento matemático.

b) Más allá de la ya de por sí indicadora anécdota de que Russell descubrió su paradoja tratando de entender el teorema de Cantor, están las notorias semejanzas de mecanismos lógicos de ambos razonamientos. El que uno de estos razonamientos abriera, a juicio de Hilbert, el paraíso de los números transfinitos y el otro, a juicio de Frege vía Russell, hiciera tambalear las matemáticas, muestra las complejidades de valorar los resultados de la argumentación diagonal.[107]

c) Los tormentosos caminos que transitó Russell en su afán de resolver las paradojas y las distintas interpretaciones y narraciones de estos avatares[108] reflejan, si uno pone un poco de atención a los presupuestos de la discusión, el

107 Véase R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, esp. cap. IV, "Truth, proof and insight".

108 Véase, por ejemplo, J A Coffa, "The Humble Origins of Russell's Paradox", Russell, 33-34, 1979; I. Grattan-Guinness, "How Bertrand Russell discovered his paradox", *Historia Matemática*, 5, 1978, S. Lavine, *Understanding the Infinite*, esp pp. 1-10, G.H Moore, "The roots of Russell's paradox', *Russell*, n s. 8, 1988.

tamaño de las apuestas teóricas y filosóficas que subyacen al uso de ciertas nociones lógicas fundamentales.

d) Las nociones lógicas que las paradojas hacen preeminentes son las de clase, cuantificador y universo de discurso. Estas nociones son fundamentales para lo que aquí nos concierne porque son ellas las que enmarcan el uso de las variables individuales. Fuera de ciertos marcos de decencia, las variables, como ya notó Russell, tienden a tener conductas que dan qué pensar.

e) Puesto que estas variables son individuales, los problemas con los que se relacionan no sólo tienen que ver con la existencia y la totalidad, sino con las muy tradicionales nociones de individuo y predicación que aparecerán en el próximo capítulo.

f) El contraste entre una posición estrictamente extensional y una que atiende a las diferencias de expresión tiene una manifestación privilegiada en el análisis de la argumentación matemática. Así, el carácter mismo de las funciones matemáticas propicia una reflexión sobre su relación con las expresiones de que nos servimos para establecerlas. Esta reflexión apunta a diferentes actitudes en relación con las matemáticas y con el lenguaje en general que nos serán importantes.

Capítulo 3

La indiscernibilidad de los idénticos: el principio de substitutividad

.. frases impecables desde el punto de vista gramatical
pero enteramente desprovistas, no diré de significado,
porque bien examinado sí tenían alguno,
y a veces varios, pero de fundamento.

Beckett

En *Principia Mathematica* Russell ofrece una definición de la identidad que, como ya vimos en los capítulos anteriores, puede escindirse en dos implicaciones: la primera deriva la indiscernibilidad de la identidad y la segunda la identidad de la indiscernibilidad. Estas dos caras de la definición, vimos también, pueden presentar aspectos problemáticos que a veces invitan, y otras exigen, una toma de posición teórica. La posibilidad irrestricta de generar totalidades a partir de funciones predicativas, los compromisos ontológicos y epistemológicos derivados de la cuantificación de segundo orden, la aceptación de principios *a priori* con contenido existencial, la distinción entre principios lógicos y principios morales en relación con los atributos divinos y las tribulaciones humanas, son algunos de estos aspectos. Ante este panorama se pueden tomar diversas actitudes que van desde la renuncia a dar una definición de la identidad hasta intentos que asumen todas las consecuencias filosóficas de este afán. Por otro lado, estas actitudes suelen generar tensiones y propiciar polémicas acerca de los límites entre la filosofía y la lógica y, en los casos más radicales, a reflexionar sobre los límites de la pertinencia teórica. La Correspondencia entre Leibniz y Clarke y las críticas de Wittgenstein a la definición russelliana son ejemplos claros de cómo la identidad puede propiciar la manifestación de diferencias de actitud teórica y filosófica. Para lo que aquí nos ocupa estas diferencias pueden tomar, esquemáticamente, dos formas: por un lado está el filósofo que quiere preservar las características lógicas de la identidad con un mínimo de compromisos filosóficos y que, consecuentemente, echará mano de todo su ingenio técnico para evitar que la identidad sea trampolín de especulaciones que rebasen la conceptualización establecida alrededor de la ortodoxia lógica. Por otro lado está el filósofo que cree que hacer explícito el potencial teórico concentrado en la noción de identidad, conduce directamente al examen y, a veces, al cuestionamiento de los presupuestos filosóficos de la ortodoxia lógica. Este contraste, claro está, depende en última instancia de los límites que se imponga a lógica y a la pertinencia teórica en general, pero también depende de la actitud filosófica con la que se conciban estas reflexiones. Leibniz, que especulaba con la misma facilidad con la que calculaba, decía: "reconozco que la verdadera Metafísica no es muy diferente de la verdadera lógica, esto es del arte de inventar en general." [1] Pero en estos tiempos pocos pensadores arriesgarían una síntesis tal. En todo caso, en este capítulo, sólo nos ocuparemos de algunos aspectos de la posición de Quine que coinciden con los afanes de pureza y delimitación del primer tipo de filósofo. No obstante nuestro punto de partida seguirá siendo Leibniz.

En una carta de noviembre de 1686, Leibniz le comenta a su corresponsal Placcius: "... aunque no me parece que haya necesidad de otro tipo de prueba además de la que depende de la substitución de equivalentes." [2] Esta relación entre la identidad y la substitutividad, y el poder lógico de asumirla, no ha dejado en general de reconocerse. Frege, por ejemplo, afirma en los *Grudlagen* [3] que las leyes que caracterizan a la identidad se pueden derivar analíticamente de su definición y asume como definición el principio leibniziano de substitución *salva veritate.* En el contexto del problema general de establecer una noción o concepto a partir de una equivalencia dice Frege:

> De aquí surge una segunda duda; la de si por usar tal método no podríamos vernos envueltos en contradicción con las conocidas leyes de la identidad. ¿Cuáles son éstas? Se podrían desarrollar a partir del concepto mismo como verdades analíticas. Leibniz define así: "*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*" Hago mía esta definición de la igualdad. [...] De hecho, en la sustituibilidad general están contenidas todas las leyes de la identidad.[4]

---

[1] Citado por H. Ishiguro en *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, p 10

[2] Leibniz, "Carta a Placcius", citada por Ishiguro, *op. cit.* p. 17.

[3] Véase G. Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, esp. parágrafo 65.

[4] G Frege, *op cit., loc. cit.*

Años después, en una reseña de la *Philosophie der Arithmetik* de Husserl, Frege renuncia a dar una definición propiamente dicha de la identidad, pero insiste en la importancia fundamental del principio leibniziano de la substitutividad *salva veritate*. Dice Frege:

> ... convengo con el autor en que la explicación de Leibniz: "*eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*" no merece ser calificada como una definición; sin embargo, mis razones son diferentes de las suyas. Puesto que cualquier definición es una identidad, la identidad misma no puede ser definida. La explicación de Leibniz podría ser considerada como un axioma que explicita la naturaleza de la relación de identidad; como tal su importancia es fundamental.[5]

Esta actitud, de explicitar y caracterizar el funcionamiento lógico de la identidad más que intentar definirla, la asumirá Gödel en su prueba de la completitud del cálculo de predicados de primer orden de 1930 [6] y la secundará Quine en sus trabajos sobre la lógica de la teoría de los conjuntos.[7] En estos dos casos, como en el de Frege, la idea central es que la substitutividad es esencial al funcionamiento de la identidad y, como veremos más adelante, este es el punto de partida de la reflexión de Quine. Pero antes de pasar a Quine tal vez sea conveniente hacer algunas precisiones terminológicas. El llamado principio de substitutividad *salva veritate* es una afirmación que hace Leibniz en distintos textos y de maneras diversas [8] sin relacionarlo explícitamente con la ahora llamada ley de Leibniz, que se suele formular así:

$$A = B \rightarrow (\phi\ )(\phi A \equiv \phi B)$$

y que claramente se emparenta con una de las dos implicaciones contenidas en la definición de *Principia*: aquella que deriva la indiscernibilidad de la identidad.

---

[5] G. Frege, reseña de la *Philosophie der Arithmetik* de Husserl, recogida parcialmente en *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Peter Geach y Max Black, eds., pp. 80-81.

[6] Véase K. Godel, "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic" en van Heijencort, *From Frege to Gödel*, pp 582-591

[7] Véase W.v.O Quine, *Set theory and Its Logic*, esp, parágrafo 1.

[8] Algunas referencias específicas se encuentran en Ishiguro, *op cit.*, esp. cap. 2 y en *Leibniz: Logical Papers*, G.H.R. Parkinson (trad.).

Esta "ley de Leibniz" también puede tomar otras formas y otros nombres: por contraste con el principio de la identidad de los indiscernibles también se la ha llamado el principio de la indiscernibilidad de los idénticos. Wiggins, por ejemplo, asume esta identificación cuando habla de "... un principio conocido usualmente como la ley de Leibniz o de la indiscernibilidad de los idénticos, a saber:

$$(x)(y)\ ((x=y) \supset (\phi x \equiv \phi y))"^{9}$$

Sin embargo, la fuente más conocida del uso de estos términos tal vez se encuentre en el artículo de Quine "Reference and Modality", que se gestó en los años cuarenta y se publicó en 1953. Allí dice Quine:

> Uno de los principios fundamentales que gobierna la identidad es el de *substitutividad*, o, como bien puede llamarse, el de la *indiscernibilidad de los idénticos*. Este principio estipula que: dado un enunciado verdadero de identidad, uno de sus términos puede substituirse por el otro en cualquier enunciado verdadero y el resultado será verdadero.[10]

Qué tan sensato sea identificar al principio de substitutividad con la ley de Leibniz o caracterizarlo como principio de la indiscernibilidad de los idénticos, son cuestiones que debemos posponer ya que están íntimamente ligadas con el planteamiento del problema y con las diferentes versiones que se suelen dar de "una" ley o "un" principio. Richard Cartwrigt, por ejemplo, ofrece buenas razones para distinguir entre el principio de substitutividad y la ley de Leibniz, aunque, como veremos, su versión de esta última pone el énfasis en su interpretación ontológica.[11] Por otro lado, los problemas asociados con las conocidas excepciones al principio de substitutividad se suelen asociar con la distinción entre contextos extensionales y contextos intensionales, mientras que el problema de la indiscernibilidad tiende a relacionarse con la caracterización de las substancias vía la predicación y la posibilidad de una diferencia *solo numero* o a plantearse en términos de posibilidades lingüísticas de descripción.

[9] Véase David Wiggins, *Sameness and Substance*, p.19

[10] W.v.O Quine, "Reference and Modality", en *From a Logical Point of View*, p. 139.

[11] Véase Richard Cartwright, "Identity and Substitutivity", en Milton K. Munitz (ed.), *Identity and Individuation.*

Una forma de empezar a entender estas diferencias es tratar de establecer el énfasis que las determina y que prepara el camino para establecer prioridades lógicas y ontológicas. Tomemos, por ejemplo, la ley de Leibniz entendida como la implicación que deriva la indiscernibilidad de la identidad y que, como ya vimos, se puede expresar así: $A = B \rightarrow (\phi)(\phi A \equiv \phi B)$. Por un lado la verdad de esta afirmación tiene algo de perogrullesco: si A y B son iguales, ¿cómo las vamos a diferenciar? Pero, como ya hemos insistido, esta imposibilidad de diferenciación se establece a través de una cuantificación universal sobre propiedades y esta cuantificación, como la noción misma de propiedad, tiene sus bemoles lógicos y ontológicos. Una cosa es la obviedad de Pero Grullo y otra la claridad cartesiana.

Regresemos entonces al principio leibniziano que sintetiza la función lógica básica de la identidad y que, en general, suscita más reparos por su formulación que por su contenido. La más conocida de sus expresiones es la que cita Frege, parcialmente, y que se puede complementar extendiéndola una línea más:

> Son lo mismo aquellos que uno puede ser substituido por el otro sin que se altere la verdad, como "triángulo" y "trilátero", "cuadrángulo" y "cuadrilátero."
> ("*Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate, ut Triangulum et Trilaterum, Quadrangulum et Quadrilaterum.*")[12]

Desafortunadamente y aunque –como nota Ishiguro– es claro que en este texto Leibniz está discutiendo una relación entre conceptos, la mayoría de los lectores de Leibniz han señalado que en otros pasajes la formulación del principio no es tan clara o apunta hacia una discusión de objetos más que de conceptos. Así, en otro escrito, dice Leibniz:

> Que A es lo mismo que B quiere decir que el uno puede substituirse por el otro en cualquier proposición sin que se altere la verdad.
> ("Idem autem esse A ipsi B significat alterum alteri substitui posse in propositione quacumque salva veritate.")[13]

Pero también afirma:

---

[12] Citado por Ishiguro, *op. cit*, p. 19 Véase Parkinson, *Leibniz: Logical Papers*, p.34 y C.I. Gerhard, *Die philosophische Schriften von G.W Leibniz*, v. VII, p. 219.

[13] Citado por Ishiguro, p 19 Referencias: Parkinson, LLP, p 52 y Couturat, OFI, p. 362.

> A coincide con B si el uno puede substituirse en el lugar del otro sin que se altere la verdad, o si, al analizar cada uno de ellos por la substitución de sus valores (sus definiciones) en el lugar de los valores, lo mismo aparece en ambos lados. Lo mismo lo entiendo formalmente (*formaliter*).
> *("Coincidit A ipsi B, si alterum in alterius locum substitui potest salva veritate, seu si resolvendo utrumque per substitutionem valorum (seu definitionum) in locum terminorum utrubique prodeunt eadem, eadem inquam formaliter...")*[14]

Aquí la palabra clave es "*formaliter*" porque, como señala Ishiguro, su uso proviene de la filosofía medieval y su sentido es el "de aquello que concierne a las cosas mismas más que a la idea de las cosas."[15] Sin embargo, más que entrar a las fuentes de una supuesta ambigüedad leibniziana[16] entre uso y mención, tal fuera conveniente atender a los principios que se evocan con tal distinción. Esta actitud se justifica no sólo porque, desde el punto de vista de la erudición leibniziana, la lectura más coherente del principio de substitutividad lo relaciona con conceptos y no con cosas o palabras, sino porque aún dentro del ámbito de los conceptos el principio no parece tener una función uniforme. Ishiguro, por ejemplo, piensa que a veces el principio puede interpretarse como una definición de la identidad de conceptos –como cuando se infiere la substitutividad de la identidad– pero también señala que en otras formulaciones –cuando se deriva la identidad de la substitutividad– parece funcionar como un criterio de identidad de conceptos.[17] Para lo que aquí nos interesa, los principios que estarían en cuestión y que deben establecerse con cierta nitidez son los que Richard Cartwright caracteriza como principio de substitutividad y principio de identidad. En el contexto general de establecer las relaciones entre estas nociones, Cartwright delimita los principios que las rigen de la siguiente manera: por un lado tenemos un principio leibniziano que, en términos contemporáneos, se puede formular así:

> (A) para todas las expresiones α y β, $\alpha = \beta$ expresa una proposición verdadera si y sólo si, para todas las oraciones S y S', si S' es como S excepto por contener una ocurrencia de β donde S contiene una ocurrencia de α, entonces S expresa una proposición verdadera sólo si S' también la expresa.[18]

---

[14] Citado por Ishiguro, p.19. Referencias: Parkinson, LLP, p. 53 y Couturat, OFI, p. 362.

[15] Ishiguro, *op. cit* p. 20.

[16] Véase, en relación con este problema, Ishiguro, *op. cit.* esp. cap. 2

[17] En relación con estos problemas véase Ishiguro, *op. cit.*, esp. cap. 2.

[18] Richard Cartwright, "Identity and Substitutivity", en M.K. Munitz (ed.) *Identity and Individuation*, p. 120.

(A) se puede considerar, de acuerdo con Cartwright, como la fusión de:

(B) para todas las expresiones α y β, $\alpha = \beta$ expresa una proposición verdadera si la substitución de β por α preserva la verdad.

con

(C) para todas las expresiones α y β, $\alpha = \beta$ expresa una proposición verdadera sólo si la substitución de β por α preserva la verdad.[19]

Este desglose le permite a Cartwright establecer a (C), y no a (B), como el principio de substitutividad; en las palabras de Quine, que Cartwright cita, esto quiere decir que: "dado un enunciado verdadero de identidad, uno de sus términos puede substituirse por el otro en cualquier enunciado verdadero y el resultado será verdadero."[20] La delimitación y limitación del principio de substitutividad a la implicación que va de la identidad a la substitutividad no deja de tener problemas ya que, al menos en la formulación quineana, se sigue usando la noción de "término" que, como se sabe, sufre (y goza) de una notoria ambigüedad compartida con las nociones de "sujeto" y "predicado".[21] Sin embargo, lo que le interesa a Cartwright es distinguir entre (C), el principio de substitutividad, y (D), que lo que el llama el principio de identidad. Este último lo expresa así:

(D) si x = y, entonces toda propiedad de x es una propiedad de y [22]

(D) es un principio que no sólo se suele asociar con (C) sino que, se podría considerar su fundamento. Si x es igual a y, si son la misma cosa, entonces todo lo que se predique con verdad de x se predicará, también con verdad, de y. El problema, como señala Cartwright y muestra la amplia bibliografía sobre el tema, es que –más allá de las discusiones acerca de cómo salirles al paso– el principio de substitutividad tiene excepciones. Discutibles o no, estas excepciones indican que (C), el principio de substitutividad, no

[19] Cartwright, *op. cit. loc. cit.*

[20] Véase Cartwright, *op. cit.*, p. 121 y Quine, From a Logical Point of View, *(2da. ed.), p. 139.*

[21] Véase Peter Geach, *Reference and Generality*, esp. p. 22 (Citado por Ishiguro).

[22] Cartwright, *op. cit.* p. 121.

comparte la transparencia y simpleza de (D), el principio de identidad. Es por esto que para Cartwright es importante mostrar que, aunque a veces se confundan o se piense que el uno es la manifestación material del otro, (C) y (D) son dos principios diferentes y, sobre todo, que (D) no implica a (C). En este planteamiento se enfatizarán dos cosas: en primer lugar que pensar que (D) implica a (C) equivale a pensar que de las excepciones a (C) se puede derivar la falsedad de (D). Dice Cartwright:

> ... preguntar si el principio de identidad implica el principio de substitutividad es preguntar si de la proposición acerca de que hay un contraejemplo al principio de substitutividad se puede inferir legítimamente la falsedad del principio de identidad.[23]

En segundo lugar se pone énfasis en el carácter ineludible de las excepciones al principio de substitutividad: la existencia misma de oraciones donde la substitutividad no es transparente y requiere de una explicación que justifique su opacidad, muestra que el principio y sus excepciones van de la mano. Esta relación es de notarse ya que, como habíamos mencionado, la substitutividad se suele asociar con el principio de identidad y es esta asociación la que sugiere la imposibilidad de excepciones. Así, refiriéndose al principio de substitutividad, Quine dice el siguiente:

> Es fácil encontrar casos contrarios a este principio. Por ejemplo, los enunciados:
> (1) Giorgione = Barbarelli
> (2) A Giorgione lo llamaban así por su tamaño
> son verdaderos; sin embargo, el reemplazar el nombre 'Giorgione' por el nombre 'Barbarelli' convierte a (2) en la falsedad: A Barbarelli lo llamaban así por su tamaño.[24]

Pero, un ejemplo más adelante, insiste:

> Sin embargo, la base del principio de substitutividad parece bastante sólida; todo lo que se puede decir acerca de la persona Cicerón (o Giorgione) debe ser igualmente verdadero de la persona Tulio (o Barbarelli) ya que son la misma persona [25]

---

[23] Cartwright, *op. cit.* p.122.

[24] W.v.O Quine, "Reference and Modality", en *From a Logical Point of View,* p. 139.

[25] *Ibid*

Es este punto de vista el que obliga a Quine a relacionar las excepciones al principio de substitutividad con opacidades referenciales veniales y su aplicación cabal con una transparencia que, en su pureza, sólo puede ser constada por esa misma aplicación cabal. Sin embargo, señalar aquí una circularidad sería un tanto apresurado ya que es precisamente esta circularidad la que suelda la substitutividad con la pureza referencial. Cartwright, por otro lado, piensa que lo importante de estos ejemplos es que constituyen excepciones y el que haya formas, ingeniosas o tormentosas, de enderezar su oblicuidad o restituir su transparencia, sólo enfatiza el hecho de su excepcionalidad. Con Quine en mente dice Cartwright:

> Algunos responden a esto [la diferencia entre S1: "A Giorgione lo llamaban así por su tamaño" y S2: "A Barbarelli lo llamaban así por su tamaño"] señalando que la proposición expresada por S1 también se expresa por la oración diferente: "A Giorgione lo llamaban 'Giorgione' por su tamaño" y aquí la substitución de 'Barbarelli' en el lugar de la primera aparición de 'Giorgione' resulta en una oración que, en contraste con S2, expresa una proposición verdadera. Pero la respuesta apropiada a esto es. cierto, pero no pertinente. Ya que, por más que la situación pueda ser diferente con otros pares de oraciones, el hecho es que el par (S1,S2) es un contraejemplo. Aún más, a veces se dice que la aparición de 'Giorgione' en S1 no es puramente referencial (no puramente designativa, oblicua). Pero esto, lejos de salvar al principio de substitutividad, sólo reconoce que el par (S1,S2) es de hecho su contraejemplo, ya que también se nos dice que la aparición de un nombre en una oración cuenta como puramente referencial sólo si la substitución de esa aparición por todas y cada una de las expresiones co-designativas preserva el valor de verdad."[26]

Este planteamiento está orientado hacia una pregunta básica en la argumentación: ¿en qué medida las oraciones S1 y S2 podrían considerarse como una excepción al principio de identidad? Puesto que este principio está formulado en términos de propiedades, la excepcionalidad de (S1,S2) tendría que ver con una propiedad de Giorgione que no lo fuera de Barbarelli; la dificultad es determinar cuál podría ser esta propiedad. El intento de determinar una propiedad de Giorgione de la que Barbarelli carezca, arguye Cartwright, resulta en una incoherencia que no puede usarse como contraejemplo del principio de identidad. Pero antes de tratar de formular esa incoherencia hay que notar que la propiedad en cuestión no puede ser la propiedad de ser llamado 'Giorgione' por su tamaño, ya que esta propiedad la tienen tanto Giorgione como Barbarelli. Tampoco se puede pensar en la propiedad de ser

[26] Cartwright, *op. cit.* p. 122.

así llamado en razón de su tamaño, ya que entonces tendríamos que especificar cómo de hecho se es llamado. Estas dificultades indican que precisar una propiedad de Giorgione que no posea Barbarelli no es una tarea simple y requiere que se establezca una relación entre un objeto y la verdad de una afirmación específica acerca de él. Dice Cartwright:

> Una sugerencia más adecuada es que la propiedad en cuestión sea aquella que tiene un objeto si y sólo si la proposición acerca de que al objeto en cuestión lo llaman así por su tamaño, es una proposición verdadera. Se podría por tanto sugerir que si suponemos que P es la propiedad que tiene una cosa x únicamente cuando la proposición acerca de que a x la llaman así por su tamaño es verdadera, entonces, puesto que la proposición acerca de que a Giorgione lo llamaban así por su tamaño es verdadera, Giorgione tiene P, y, puesto que la proposición acerca de que a Barbarelli lo llamaban así por su tamaño es falsa, Barbarelli no tiene P, y de esto, junto con la identidad de Giorgione con Barbarelli, se puede concluir que el par (S1,S2) falsifica el principio de identidad.[27]

Esta conclusión, como ya mencionamos, conlleva para Cartwright una incoherencia que, esquemáticamente, se puede formular así: supongamos que la propiedad en cuestión es P, entonces la formulación del ejemplo inicia con la verdad de:

(1) Giorgione tiene P

y se agrega:

(2) A Giorgione lo llaman 'Barbarelli'

De (1) y (2) se puede derivar, por generalización existencial:

(3) Hay alguien a quien llaman 'Barbarelli' y tiene P

que, dada la caracterización de P como "la propiedad que tiene una cosa x únicamente cuando la proposición acerca de que a x la llaman así por su tamaño es verdadera", es equivalente a:

(4) Hay alguien a quien llaman "Barbarelli" y la proposición acerca de que lo llaman así por su tamaño es verdadera

[27] Cartwright, *op. cit* p. 123.

que, en el mejor de los casos y en el espíritu del ejemplo, es falsa: no hay alguien a quien se llame "Barbarelli" por su tamaño. Claro está que el defensor de P podría argüir que tanto la incongruencia como la falsedad de (4) provienen precisamente de la violencia ejercida en contra del principio de identidad. Después de todo se podría pensar que lo que muestra el ejemplo de Quine es que existe al menos una propiedad que tiene Giorgione y de la que carece Barbarelli, no obstante que son la misma cosa gorda. Sin embargo, hay que recordar que a lo que apunta la argumentación de Cartwright es hacia la posibilidad de caracterizar adecuadamente a P. En este tenor el defensor de P podría sugerir que (4) no es una formulación adecuada de (3) ya que en (4) la expresión "lo llamaban así" hace referencia a "Barbarelli". El problema es que la única forma de eliminar la posibilidad que "lo llamaban así" no se ancle en un nombre es eliminar ese nombre, pero si seguimos este camino la equivalencia adecuada de (3) sería:

(5) Hay alguien tal que la proposición acerca de que lo llamaban así por su tamaño es verdadera

En (5) "lo llamaban así" no tiene antecedente, sino que aparece por sí sola, sin referencia a un contexto lingüístico; pero esto es precisamente lo que quiere enfatizar Cartwright, que una expresión como "lo llamaban así" tiene que hacer referencia a un contexto y la ausencia de ese contexto vicia la formulación de la proposición y, consecuentemente, la definición de la discutida propiedad P. Dice Cartwright:

> De acuerdo con esa definición, un objeto dado tiene P únicamente en el caso de que la proposición acerca de que lo llamen así por su tamaño sea verdadera. Pero, ¿cómo debemos entender esto? Si suponemos que la expresión 'lo llaman así' tiene un referente fijo -el nombre 'Giorgione', digamos- entonces P no servirá para falsificar el principio de identidad; y si entendemos que el referente de 'lo llaman así' cambia con cada una de las diferencias en la elección de nombre para el objeto dado, entonces la definición presupone algo falso, a saber, que existe algo como la proposición acerca de que el objeto en cuestión lo llaman así por su tamaño.[28]

[28] Cartwright, *op. cit.* p. 124

Para Cartwright el examen cuidadoso del ejemplo quineano muestra entonces dos cosas, por un lado que el principio de substitutividad tiene excepciones y que la gravedad de estas excepciones se suele asociar con el principio de identidad, por otro, se argumenta que el principio de identidad no implica al de substitutividad, ya que la transformación del contraejemplo a la substitutividad en un contraejemplo al principio de identidad conlleva, como vimos, considerables dificultades de formulación. Su argumentación, dice Cartwright,

> Muestra que no todo contraejemplo para el principio de substitutividad es un contraejemplo para el principio de identidad y, por lo tanto, que el principio de identidad no implica el principio de substitutividad. Y esto, me parece, es algo que debe reconocerse de una vez por todas.[29]

Aunque convincente esta conclusión mantiene en el aire una pregunta muy general: ¿cuál es la relación entre identidad y substitutividad? Si, como arguye Cartwright, el principio de identidad no implica al de substitutividad, ¿podemos suponer que son independientes?, ¿hay que renunciar a considerar a la identidad como el fundamento ontológico de la substitutividad? En lo que resta de este capítulo examinaremos una posición, la de Quine, que en parte replantea y en parte reevalúa estas preguntas. Para Quine, como para Frege, Gödel y la mayoría de los lógicos, la substitutividad va de la mano con la identidad y separarlas equivaldría a privarnos de un mecanismo lógico muy poderoso. El problema entonces es cómo dar una caracterización de la identidad que garantice la substitutividad y que no dependa de nociones ontológicas cuestionables y muy discutidas como las de substancia o propiedad, sino que pueda ser formulada en los términos más sobrios de individuación, variables individuales, predicados y cuantificación.

Un logro muy cercano a este ideal se debe a Gödel quien, como se sabe probó la completitud del cálculo de predicados en su tesis doctoral de 1930. En su prueba de los dos primeros teoremas

Teorema I. Toda fórmula válida del cálculo funcional restringido es probable.

y su equivalente:

---

[29] Cartwright, *op. cit.* p. 125

Teorema II. Toda fórmula del cálculo proposicional restringido es o refutable o puede ser satisfecha (y, además, puede ser satisfecha en el dominio denumerable de individuos).

Gödel parte de seis axiomas que no incluyen a la identidad.[30] Sin embargo, un poco antes de formular el Teorema VII, dice:

> Tanto el Teorema I como el Teorema II se pueden generalizar en varias direcciones. En primer lugar es fácil incorporar la noción de identidad (entre individuos) a la consideración agregando a los Axiomas 1-6, ya mencionados, dos más:
>
> 7. $x = x$, 8. $x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$.[31]

de esta forma se amplía el ámbito de fórmulas a las que se aplicaban los Teoremas I y II y se obtiene:

Teorema VII. Toda fórmula del ámbito ampliado es probable si es válida (más precisamente, si es válida en todo dominio de individuos)

y

Teorema VIII. Toda fórmula del ámbito ampliado es o refutable o puede ser satisfecha (y, además, puede ser satisfecha en un dominio finito o denumerable de individuos).

El mecanismo para lograr esta extensión consiste en agregar a la fórmula del ámbito ampliado que se desee probar el Axioma 7 y todas las fórmulas generadas por la aplicación sistemática del Axioma 8 a sus predicados (monádicos, diádicos, etc.). Esta receta garantiza la eliminación del signo de identidad de una fórmula sin alterar sus propiedades lógicas. Dice Gödel:

> En lo que respecta a la prueba, supongamos que A denota una fórmula arbitraria del ámbito ampliado. Construimos una fórmula B como el producto (conjunción) de A, $(x)(x=x)$, y todas las fórmulas que obtenemos del Axioma 8 substituyendo F por las variables funcionales que ocurren en A, esto es, más precisamente:

[30] Véase K. Godel, "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", que es la traducción de la versión publicada, en el mismo año, de la tesis de 1930. En van Heijencort, *op. cit.*, pp. 582-591.

[31] Godel, p 589

$$(x)\,(y)\,\{\, x = y \rightarrow [F\,(x) \rightarrow F\,(y)\,]\,\}$$

para todas las variables funcionales singulares de A,

$(x)\,(y)\,(z)\,\{x = y \rightarrow [\,F(x,z) \rightarrow F(y,z)\,]\} \;\&\; (x)\,(y)\,(z)\,\{x = y \rightarrow [F\,(z,x) \rightarrow F\,(z,y\,)\,]\,\}$

para todas las variables funcionales binarias de A (incluyendo la misma "=") y las fórmulas correspondientes para las variables funcionales n-arias de A para las cuales $n \geqslant 3$. Supongamos que B' sea la fórmula que resulta de B cuando el signo "=" se reemplaza por una variable funcional G que no aparezca en B de ninguna manera. Entonces el signo "=" ya no aparece en la expresión B' que, por lo tanto, de acuerdo con lo que se ha probado antes, es o refutable o puede ser satisfecha. Si es refutable también lo es B, puesto que resulta de B' a través de la substitución de "=" por G. Pero B es el producto lógico de A y una sub-fórmula de que obviamente se puede probar por los Axiomas 7 y 8. En este caso, por lo tanto, A es refutable.[32]

La satisfacción, como es de imaginarse, genera otros vericuetos en relación con la identidad que no se reducen a la falta de elementos de discernimiento sino que, por el contrario, enfatizan problemas de distinción, de número y de clase a los que haremos referencia en el siguiente capítulo. Por lo pronto notemos que los Axiomas 7 y 8 de Gödel nos permiten formular un facsímil de la identidad que, sin respaldos ontológicos, logra garantizar la substitutividad ya que la identidad se resume en la indiscernibilidad y ésta se establece en términos puramente predicativos. Así, si dejamos a un lado por un momento el problema de la individuación, podemos entender que Quine asuma gustosamente la solución de Gödel y la reformule en términos más generales.

En el contexto de una discusión acerca del ámbito de la lógica[33], Quine plantea el problema de incluir o excluir a la identidad dentro de ese ámbito. Sugiere así que una buena razón para excluirla es que, si asumimos que las verdades lógicas lo son en razón de su estructura, entonces las verdades paradigmáticas de la teoría de la identidad no serían verdades lógicas. Aceptar a la identidad como parte de la lógica podría entonces poner en tela de juicio su irreprochable carácter formal. Dice Quine:

> Sin embargo, esta actitud general hacia la verdad lógica es amenazada (threatened) por el predicado '=' de identidad. Verdades de la teoría de la identidad como 'x=x', además de '(∃ y) (x=y)' o '~(x=y . ~(y=x))', son inaceptables como verdades lógicas bajo las definiciones proyectadas de verdad lógica, ya que son falsificables al substituir otros predicados en lugar de '='.[34]

[32] *Ibid*, p 589

[33] Véase W v.O Quine, *Philosophy of Logic*, esp. cap 5, "The Scope of Logic".

[34] Quine, *op. cit.* p 61

Otra razón, más específicamente quineana, para expulsar a la identidad del reino de la lógica, es la idea de que la generalidad lógica es típicamente oblicua, esto es, se ejerce sobre oraciones y no sobre objetos:

> Podemos generalizar a partir de 'Tom es mortal', 'Dick es mortal' y así sucesivamente, sin hablar de verdad o de oraciones; podemos decir: 'Todos los hombres son mortales'. En forma similar podemos generalizar a partir de 'Tom es Tom', 'Dick es Dick', '0 es 0' y así sucesivamente, diciendo 'Todo es igual a sí mismo'. Pero cuando, por otro lado, queremos generalizar a partir de 'Tom es mortal o Tom no es mortal', 'La nieve es blanca o la nieve no es blanca' y así sucesivamente, ascendemos a hablar de verdades y de oraciones, decimos 'Toda oración de la forma 'p o no p' es verdadera', o 'Toda alternancia de una oración con su negación es verdadera'. Lo que propicia este ascenso semántico no es que 'Tom es mortal o Tom no es mortal' sea de alguna manera acerca de oraciones mientras que 'Tom es mortal' y 'Tom es Tom' es acerca de Tom. Las tres son acerca de Tom. Ascendemos únicamente por la manera oblicua en que se relacionan entre sí las instancias sobre las que generalizamos.[35]

Así las cosas, si la identidad o, para el caso cualquier otro predicado, formara parte de la lógica, entonces el quineano ascenso semántico, propiciado por la oblicuidad, quedaría anclado al lenguaje objeto y a su discurrir sobre objetos. Esta, que podría pensarse como la situación natural, Quine la considera "desafortunada" ya que la distinción entre generalizar a partir de objetos y generalizar a partir de oraciones y verdades es esencial para distinguir entre las ciencias naturales y la lógica. Dice Quine:

> Si [...] consideráramos a '=' o cualquier otro predicado como parte del vocabulario puramente lógico, tendríamos entonces que reconocer que, después de todo, a través de la cuantificación directa en el lenguaje objeto se pueden expresar algunas generalidades lógicas; '(x)(x=x)', por ejemplo. Esto parece desafortunado. El contraste entre generalidades que se pueden expresar así por la cuantificación en el lenguaje objeto, por un lado, y las generalidades que, por el otro, requieren del ascenso semántico, marca un lugar notorio y tentador para establecer la línea divisoria entre las otras ciencias y la lógica.[36]

A pesar de estas tentaciones de exclusión, existen otras razones que nos pueden inclinar a incluir la identidad dentro del enrarecido ámbito de la pureza lógica. La primera de ellas la distancia, lógica y epistemológicamente, de las

---

[35] *Ibid*, p. 11

[36] *Ibid*, p. 61

matemáticas: es la completitud; Gödel, como ya recordamos, mostró, usando los Axiomas 7 y 8, que el cálculo de predicados con identidad es completo, mientras que, como Gödel también mostró en 1931, la aritmética no lo es. La segunda razón es la neutralidad, la teoría de la identidad "no tiene preferencias", y esta neutralidad, y la universalidad consiguiente, la emparenta más con la lógica que con las matemáticas. Dice Quine:

> Otro aspecto en que la teoría de la identidad parece más lógica que matemáticas es la universalidad: trata a todos los objetos imparcialmente. Es cierto que, en forma semejante, cualquier teoría puede formularse con variables generales con un rango universal, sin embargo, los únicos valores de las variables que importan, por ejemplo, para la teoría de los números o la teoría de los conjuntos, son los números y los conjuntos, mientras que la teoría de la identidad no tiene preferencias.
> Esta última característica sugiere que la teoría de la identidad, como la teoría de la cuantificación, es peculiarmente básica."[37]

Este carácter básico de la identidad, aunado a la posibilidad de dar una caracterización funcionalmente adecuada de ella a partir de predicados y cuantificadores, inclina a Quine a considerar la identidad como parte de la lógica. La ventaja teórica de esta caracterización es que no se establece en abstracto, como una definición, sino en función de la riqueza descriptiva del lenguaje que se está regimentando.

> Aunque no podemos definirla puramente en términos de funciones de verdad y cuantificación, podemos definir la identidad, o un útil facsímil de ella, en los sistemas donde se apliquen las funciones de verdad y los cuantificadores.[38]

Así, en lugar de dar una definición general como la de *Principia*, que inmediatamente se ve lastrada por sus implicaciones teóricas, Quine, como Gödel, da los lineamientos de una definición para cada sistema o lenguaje lógico en el que se desee incorporar la identidad. Estos lineamientos, podríamos decir, son una aplicación del principio de indiscernibilidad de los idénticos al caso particular de un lenguaje o sistema: básicamente consiste en asegurarse que si x es igual a y entonces no haya forma de discernir entre ellas. En el caso de un lenguaje en particular esto quiere decir garantizar que

---

[37] *Ibid.* p 62

[38] *Ibid.* p. 63

en ese lenguaje no existan recursos para distinguir entre dos términos relacionados verdaderamente por el predicado de identidad, esto es, asegurar que los recursos descriptivos de ese lenguaje no permiten distinguir entre x y y; dado cualquier predicado de *ese* lenguaje, ya sea monádico, diádico o n-ádico, x lo tendrá si y sólo si y también lo tiene. Pedagógicamente Quine explica el mecanismo de la siguiente manera:

> El método de definición es evidente a partir del siguiente ejemplo. Considérese un lenguaje estándar cuyo léxico de predicados consiste en un predicado 'A' de un lugar, dos predicados, 'B' y 'C', de dos lugares y un predicado 'D' de tres lugares. Podemos entonces definir 'x=y' como la abreviación de:
>
> (3) $Ax \equiv Ay \,.\, (z)(Bzx \equiv Bzy \,.\, Bxz \equiv Byz \,.\, Czx \equiv Czy \,.\, Cxz \equiv Cyz \,.\, (z')(Dzz'x \equiv Dzz'y \,.\, Dzxz' \equiv Dzyz' \,.\, Dxzz' \equiv Dyzz'))$.
>
> Nótese cuál es el plan: el agotamiento de las combinaciones. Lo que 'x=y' nos dice, de acuerdo con esta definición, es que los objetos x y y son indistinguibles por los cuatro predicados; que aún en sus relaciones con otros objetos z y z' son indistinguibles uno del otro en tanto esas relaciones se expresen en oraciones simples."[39]

Esta posibilidad de ver "x=y" como la forma sucinta o abreviada de (3) permite considerar las leyes de la identidad como formas abreviadas de verdades lógicas de la teoría de la cuantificación, esto es, como verdades puramente formales o estructurales que no hacen referencia a un lenguaje objeto o a un conjunto de predicados en particular. De aquí que finalmente, dado este mecanismo que permite pensar la identidad como un esquema lógico neutro, Quine se incline por su asimilación dentro de la lógica.[40] Las ventajas de esta asimilación desde el punto de vista quineano son claras: por un lado hace justicia a la universalidad y neutralidad de la identidad, por el otro garantiza la substitutividad, que simplemente se deriva de la indiscernibilidad, sin tener que acudir a ningún principio ontológico. De esta manera el planteamiento de Quine distancia la caracterización de la identidad del problema de la substancia y lo acerca al de la individuación.[41] Sin embargo, es precisamente en su relación con la individuación donde surge una pequeña dificultad en la versión quineana de la identidad y esta dificultad, como veremos

---

[39] *Ibid* p. 63

[40] Véase Quine, *op. cit.* p 64

[41] Este punto de vista lo enfatiza Quine en "Identity" pero, hasta donde yo sé, no ha sido publicado.

en el siguiente capítulo, puede crecer hasta cuestionar la neutralidad y universalidad de la identidad. Después de establecer el mecanismo de reducción de la identidad a la gramática estándar del lenguaje cuantificado, Quine señala:

> Puede suceder que los objetos que se proponen como valores de las variables de cuantificación no sean completamente distinguibles uno del otro a través de los cuatro predicados. Cuando esto pasa (3) no logra definir la identidad *genuina*. Este *fracaso*, sin embargo, permanece *oculto* [remains unobservable] desde *el interior del lenguaje* [from within the language]; desde ese punto *privilegiado* (3) es tan buena como la identidad.[42]

Pero si este "método de definir o simular la identidad" fracasa en tanto que definición "genuina", y esto sucede cuando los predicados disponibles no son suficientes para diferenciar completamente a los objetos que, se supone, serán los valores de las variables, entonces surgen preguntas que ese método debería si no eliminar, sí, al menos, acallar. Estas preguntas, tradicionales que son, se pueden formular en los términos del ejemplo quineano: si la individuación generada por los cuatro predicados del lenguaje en cuestión no es suficiente, ¿cuántos predicados y de qué lenguaje sí serían adecuados para hablar de una identidad genuina? Si la identidad se relaciona con la individuación, ¿la individuación generada por la "simulación" de la identidad es un simulacro de individuación? ¿Cuál sería el costo ontológico de este simulacro? Si la identidad se establece en función de un lenguaje, ¿en qué medida se podría hablar de una relativización de la identidad y, por ende, de la ontología? Y, por último, en qué medida esta situación no le abre nuevamente la puerta a la tentación de pensar que la mejor forma de entender los valores de las variables de cuantificación son las viejas substancias? Algunas de estas preguntas son las que nos ocuparán en el siguiente capítulo.

[42] *Ibid.* p 63, (mis énfasis).

Resumen

El funcionamiento lógico de la identidad tiene dos vertientes fundamentales y paralelas: la substitutividad y la indiscernibilidad. Estas características, quasi-definitorias, han sido enfatizadas por Leibniz, Frege, Gödel y, más recientemente, Quine. Sin embargo, las formas de introducir y garantizar o justificar el cumplimiento de estas propiedades pueden ser bastante diferentes; la coherencia misma del sistema leibniziano, por ejemplo, invita a relacionar el principio lógico de la substitutividad con los principios de la identidad de los indiscernibles y de razón suficiente, que se podrían considerar ontológicos. Frege, que asume el principio leibniziano de la substitutividad salva veritate, renuncia a dar una definición propiamente dicha de la identidad. Gödel piensa también que un par de axiomas puede sintetizar la esencia lógica de la identidad. En el contexto de la demostración de la completitud del cálculo de predicados, Gödel introduce dos axiomas que le permiten transformar cualquier fórmula que incluya el signo de identidad en una fórmula equivalente en donde no aparezca ese signo.

La evaluación de las implicaciones filosóficas de estos usos y recursos lógicos se propicia por una caracterización cuidadosa del principio de substitutividad. Richard Cartwright lleva a cabo esta caracterización como parte del afán de distinguir entre ese principio del que él llama de identidad, a saber, si x=y, entonces toda propiedad de x es una propiedad de y. Cartwright arguye que aunque a veces estos principios se confundan, o se piense que el uno es la manifestación material del otro, son diferentes y, sobre todo, que el principio de identidad no implica al de substitutividad. Esta delimitación es convincente y conveniente, ya que permite reconsiderar las implicaciones ontológicas atribuibles al principio de substitutividad y ofrece un punto de referencia para evaluar los alcances y presupuestos de la solución quineana. Esta solución, básicamente, sigue los pasos de Gödel pero se replantea en varios contextos; uno de estos contextos es el de establecer los límites entre la lógica y la matemática y las conveniencias o inconveniencias de incluir la identidad dentro de una de ellas. La adopción del modelo gödeliano le permite a Quine, por un lado, garantizar que el ascenso semántico, característico de su concepción de la lógica, no se vea lastrado por las pesadas barras de la identidad, por el otro, le permite conservar a la identidad dentro de la lógica y no entregarla a las matemáticas. Esta inclusión le hace justicia, enfatiza Quine, al carácter universal y neutral de la identidad. Sin embargo, son precisamente estas características las que podrían ser cuestionadas a partir de ciertos aspectos de

la solución quineana. En al menos un caso, señalado por el propio Quine, su solución "no logra definir la identidad genuina" y aunque este "fracaso" normalmente pase desapercibido y no se le conceda importancia teórica, sí abre la puerta a ciertas dudas muy generales acerca de las consecuencias filosóficas de asumir la posición quineana. Estas dudas están básicamente relacionadas con la individuación de los objetos propuestos como valores de las variables cuantificadas, con la posible reaparición de las desplazadas substancias y con la amenaza de relativización de la identidad y la ontología.

Capítulo 4

Ortodoxia y relatividad

"la fonction référentielle est un piège, mais inévitable"

Paul de Man

En su demostración de la completitud del cálculo de predicados, Gödel, ya vimos, incorpora la identidad a dicha demostración a través de dos axiomas que permiten generar una fórmula del cálculo restringido a partir de una fórmula del cálculo ampliado, esto es, del cálculo que incluye fórmulas donde aparece el signo de identidad.[1] La prueba de este resultado consta, esquemáticamente, de dos pasos: el primero consiste en formar una conjunción con la fórmula que se va a reducir (llámese *A*), el Axioma 7, $(x)(x=x)$, y todas las fórmulas que resulten de la aplicación del Axioma 8, $x=y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$, reformulado adecuadamente si las funciones de *A* son binarias o n-arias. El resultado de esta conjunción es la fórmula *B*. El segundo paso es reemplazar las apariciones del signo de identidad en *B* por una función *G* y producir una fórmula *B'* donde ya no aparece el signo de identidad y que, de acuerdo con la demostración gödeliana, o es refutable o puede ser satisfecha. Lo notable, para lo que aquí nos interesa del proceso, es que la función *G*, que reemplaza a *"="* y que obviamente tiene todas las propiedades lógicas de la identidad, genera automáticamente una partición del dominio de elementos encargado de la posible satisfacción de *B'*.[2] Así, si suponemos un dominio de individuos y un sistema de funciones, entonces la función de este sistema que ocupe el lugar de *G* será, como la identidad, reflexiva, simétrica y transitiva y dividirá a los elementos del dominio en clases cuyos elementos serán indiscernibles y, por lo tanto, equivalentes. La indiscernibilidad de estos elementos sugiere y permite, como señala Gödel, que consideremos a las

---

[1] Véase Gödel, "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", esp. los axiomas 7 y 8 y los teoremas VII y VIII, en van Heijenoort, *From Frege to Gödel*

[2] *Ibid*, p. 589

clases que los agrupan como los elementos de un nuevo dominio de individuos. Dice Gödel:

> Asumamos ahora que B' puede ser satisfecha en el dominio denumerable Σ de individuos para un sistema determinado *S* de funciones. Por la manera en que se formó *B'* es claro que *g* (esto es, la función del sistema *S* que va a substituir a *G*) es una relación reflexiva, simétrica y transitiva; por lo tanto, genera una partición de los elementos de Σ, aún más, la genera de tal manera que una función que ocurre en el sistema *S* sigue manteniéndose o no, según sea el caso, cuando elementos de la misma clase se substituyen entre sí. Por lo tanto, si identificamos entre sí a todos los elementos que pertenecen a la misma clase (considerando tal vez a las clases mismas como elementos de un nuevo dominio de individuos), entonces *g* se convierte en la relación de identidad y tenemos un sistema que satisface a *B* y, por lo tanto, también a *A*.[3]

Esta curiosa situación, en la que los individuos (que constituyen el universo original) desaparecen *qua* individuos, al hacerse si no invisibles sí indiscernibles, y otros aparecen como las clases que los agrupan, también es notada por Quine. Como ya vimos, Quine señala que los recursos predicativos de un lenguaje pueden ser insuficientes para discernir entre los objetos asumidos como posibles valores de las variables y que, en ese caso, su reducción de la identidad a la indiscernibilidad dentro de un lenguaje en particular fracasa en tanto que caracterización de la identidad genuina.[4] Quine, desgraciadamente, no elabora sobre ese fracaso y sólo explica la naturaleza de la identidad genuina relativamente; no obstante, esta anomalía, destacada y aumentada, reaparecerá más tarde en una reflexión de Peter Geach sobre las posibles consecuencias teóricas de asumirla.[5] Sin embargo, aunque el punto de partida de Geach es la formulación quineana, su trasfondo teórico es la posición de Frege que, como se sabe, afirma que la identidad sólo puede tomar una forma y relaciona la legitimidad de hablar de una entidad con la posibilidad de establecer un criterio que nos permita reconocerla como la misma. Para Frege la existencia de ese criterio es esencial para la aplicación de las matemáticas, ya que se encuentra implicado en la noción misma de contar: el proceso de parear los elementos del conjunto contado con los elementos del conjunto de los números naturales; para que este proceso se logre es preciso que no se cuente el mismo elemento dos veces, esto es, que sea posible reconocerlo como el mismo. De estas observaciones Frege deriva

---

[3] *Ibid.*, pp. 589-590

[4] Véase Quine, *Philosophy of Logic*, cap. 5, esp. p. 63

[5] Véase Geach, "Identity", *Review of Metaphysics*, XXI (1967-1968), pp. 3-12

una relación entre el número y el concepto y Quine su famoso *dictum* "*no entity without identity*". Así, una vez que se introduce una noción tan básica como la de contar, que se relacionan números con conceptos y que se piensa formular criterios ontológicos, el tamaño de las apuestas empieza a aumentar considerablemente. Dice Frege:

> Si al examinar uno y el mismo fenómeno externo, puedo decir con igual verdad: 'este es un grupo de árboles' y 'estos son cinco árboles' o 'aquí están cinco compañías' y 'aquí están 500 hombres', con ello no se altera ni el individuo ni el todo, el agregado, sino mi denominación. Pero esto es sólo el indicio de la substitución de un concepto por otro.[6]
>
> Pero ya hemos asegurado que bajo los términos numéricos hay que entender objetos independientes. Con esto se nos da un género de proposiciones que deben tener sentido, el de las proposiciones que expresen un reconocimiento (*Wiedererkennen*). Si se ha de designar un objeto con el símbolo *a*, entonces debemos poseer un criterio que nos permita distinguir en general si *b* es lo mismo que *a*, aunque no siempre esté en nuestro poder el aplicar este criterio.[7]

Este contexto teórico se irá haciendo más evidente a lo largo de la discusión que, como ya dijimos, parte explícitamente de la formulación quineana. Geach usa la versión que aparece en *Set Theory and its Logic*, donde Quine, aunque menciona los axiomas de Gödel con respecto a la identidad y la Satz VIII, refiere al lector al primer volumen (1934) de los *Grundlagen der Mathematik* de Hilbert y Bernays en lo que se refiere a eliminación de la identidad. En su texto Quine nota además que el esquema "$Fy \equiv (\exists x)(x=y.\ Fx)$" es suficiente para generar tanto "$y=y$" como "$x=y.\ Fx. \supset Fy$" y, por lo tanto, todas las leyes de la identidad y atribuye esta simplificación a Hao Wang.[8] Al trasladar el esquema de Hao Wang a su notación, Geach, que no pierde oportunidad de llevar agua a su molino, hace perdediza una variable que substituye por una constante para obtener:

$$(1) \qquad Fa \leftrightarrow Vx(Fx \wedge x=a)$$

de aquí se puede derivar tanto "$\vdash a=a$" como la indiscernibilidad de los

[6] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, § 46

[7] *Ibid*, § 62

[8] Quine, *Set Theory and its Logic*, pp. 12-13

idénticos que, consecuentemente, Geach formula así:

$$Fb \wedge b=a \leftrightarrow Fa$$

Su adhesión a la ortodoxia, representada por Gödel y Quine, la expresa y delimita Geach aceptando la completitud del cálculo de predicados con identidad y enfatizando la coincidencia de todas las relaciones que se ajusten al esquema (1). Recordándonos que él usa la palabra "predicables" "como un término para las expresiones verbales que otros lógicos llaman "predicados"" y que reserva "el término "predicado" para un predicable que de hecho se está usando como el funtor principal de una proposición dada, dice Geach:

> El sistema lógico que se obtiene al agregar el esquema (1) a la teoría clásica de la cuantificación es un sistema con un procedimiento de prueba completo; aún más, su interpretación es categórica en el siguiente sentido: si tratamos de introducir *dos* predicables de dos lugares que separadamente se conformen por el esquema (1), resultará que coinciden en su aplicación.[9]

El cuestionamiento de Geach parte del examen de la noción de lo que él llama un predicable-I, *un predicable de identidad, que es un predicado* que, al ajustarse al esquema de Hao Wang, genera la auto-identidad y la indiscernibilidad características de la solución gödeliana. Quine, como ya vimos, señala que el facsímil de la identidad que se genera por la aplicación del esquema de Hao Wang o de condiciones equivalentes (axiomas gödelianos, v.g.), se logra en relación con los predicados de un determinado lenguaje o sistema. Geach asume la formulación quineana pero prefiere hablar de teorías interpretadas en vez de lenguajes para establecer la situación sobre la que quiere reflexionar y que es la siguiente:

> El que un predicable de dos lugares sea un predicable-I no es algo absoluto, sino relacionado con una teoría *T* dada. Pero, de por sí, esto no proporciona ninguna base para afirmar la relatividad de la identidad, ya que sólo equivale al hecho de que lo que una expresión significa es relativo al lenguaje que estamos usando. Según lo que he dicho hasta aquí, bien puede ser verdad que si un predicable es un predicable-I en una teoría *T* entonces lo que expresa en esa teoría es la identidad estricta, absoluta y no cualificada.[10]

---

[9] "Identity", p. 4

[10] "Identity", p. 5

Claro que Geach, como Quine antes que él, se da cuenta que lo que básicamente garantiza el predicable-I es la indiscernibilidad dentro de una teoría o lenguaje y que, consecuentemente, esta indiscernibilidad es una función de los predicados de la teoría o lenguaje en cuestión.

> No obstante, si lo consideramos por un momento, vemos que un predicable-I en una teoría dada *T no necesita* expresar la identidad estricta, absoluta y no-cualificada; no necesita sino significar que dos objetos son indiscernibles vía los predicados que constituyen los recursos descriptivos de la teoría: la ideología de la teoría, para usar el útil término quineano.[11]

Geach, sin embargo, da el paso que Quine sólo había marcado desde el punto de vista de un lenguaje muy restringido y relacionado con un universo discursivo de entidades abstractas: preguntarse por la naturaleza de esa identidad. Intentar dar una caracterización general de la identidad genuina o verdadera suele considerarse un mal paso porque, por un lado, propicia una discusión ontológica y, por otro, más lógico, nos conduce al problema de dar una caracterización predicativa de los valores de las variables que al mencionar totalidades de predicados y rebasar la lógica de primer orden, replantea los problemas que Russell trató de solucionar.

> Sin embargo, para la identidad verdadera (*real identity*), se nos podría ocurrir decir, "no necesitamos traer a colación la ideología de una determinada teoría T. Para la identidad verdadera *todo* (*whatever*) lo que es verdad de algo idéntico con *a* es verdadero de *a* y a la inversa, sin importar en qué teoría esto se pueda expresar; y un predicable de dos lugares que signifique la identidad verdadera debe ser un predicable-I sin importar cuales otros predicados aparezcan con él en la teoría." Pero si deseamos hablar de esta manera pronto caeremos en contradicciones; un lenguaje inmoderado en relación con "todo lo que es verdad de *a*", que no se relativiza a la ideología determinada de una teoría *T*, nos conducirá a paradojas tan notorias como la de Grelling o la de Richard.[12]

Justificadamente Geach piensa que la amenaza de las paradojas es una buena razón para renunciar al intento de caracterizar la identidad en términos de la totalidad de las propiedades de un objeto *a*, pero, no tan justificadamente, asume que un predicable-I debería expresar la identidad

---

[11] *Ibid.*

[12] *Ibid*, p. 5

estricta, esto es, una identidad que, según la formulación de Geach, nos permitiera hablar de "todo lo que es verdadero" de algo. Pero, como ya sabíamos y Geach enfatiza, lo único que un predicable-I garantiza es la indiscernibilidad. Haciendo referencia al esquema de axioma de Hao Wang, dice Geach:

> Parecería que la satisfacción del esquema (1) nos daba una condición necesaria y suficiente para que un predicable expresara la identidad estricta. Pero la lectura inocente del esquema (1), por la cual deberíamos hablar sin restricciones de "todo lo que es verdadero del tal y tal" es inadmisible debido a las paradojas semánticas. Si en lugar de ello consideramos un predicable que sea un predicable-I *relativo a una teoría T*, entonces éste sólo requiere expresar la indiscernibilidad en relación con la ideología de T y no necesita expresar la identidad estricta y sin cualificaciones.[13]

La importancia para Geach del contraste entre la simple indiscernibilidad y la identidad estricta y sin cualificaciones se empieza a hacer patente cuando señala las relaciones que, según su punto de vista, privan entre una teoría *T*, su ideología y su universo de discurso. Supongamos una teoría *T*, acerca de cierto universo de discurso y con una ideología que genera un predicable-I determinado. De acuerdo con ese predicable-I algunos objetos son indiscernibles, pero si la ideología se altera entonces podría suceder que los objetos que eran indiscernibles en *T* sean discernibles en la variación *T1* de *T*. Esta situación la ejemplifica Geach con el siguiente ejemplo: supongamos que *T* sea una teoría acerca de las expresiones de un lenguaje natural y que el rango de los cuantificadores de *T* sean los casos particulares o instancias (*tokens*) de esas expresiones. Ahora, si también suponemos que la ideología de *T* es lo suficientemente limitada para no poder discernir entre, digamos, dos instancias de una misma palabra tipo, entonces un predicable que exprese la igualdad de forma (o equiformidad) de dos o más instancias de una misma expresión será un predicable-I en la teoría *T*. Pero si a la ideología de *T* le agregamos un predicado que permita discernir entre dos instancias de la misma expresión, entonces el predicable " ξ es equiforme con η " ya no será un predicable-I en la teoría *T* enriquecida. Esta situación anima a Geach a usar un plural, que si bien no es mayestático sí es retórico, al afirmar que un predicable-I podría expresar la identidad estricta. Su uso, en cambio, de una terminología legal tiene más visos morales que retóricos. Dice Geach:

---

[13] *Ibid* p. 6

Pensamos que teníamos un criterio para determinar que un predicado expresara la identidad estricta pero la cosa se nos ha desmoronado en las manos y, hasta ahora, no se ha sugerido un criterio riguroso alternativo que pudiera reemplazarlo. Inicialmente traté de persuadir, con bases intuitivas, que la noción de identidad no cualificada no existe; ahora parece que mi intuición era confiable. Podría decir: la fiscalía ha terminado.[14]

Aprovechando esta terminología jurídica podríamos señalar que el fiscal Geach, que ya notamos no pierde oportunidad de llevar agua a su molino, no se apega siempre al espíritu de la ortodoxia que critica. Así, en el ejemplo de la teoría acerca de las expresiones, vimos que afirmaba que los cuantificadores de esa teoría tenían como rango las instancias o casos individuales de esas expresiones, pero que esas instancias eran indiscernibles vía los recursos descriptivos de esa teoría y que, consecuentemente, el predicable "ξ es equiforme con η" sería un predicable-I que podría considerarse como criterio de identidad para las palabras-tipo. De esta manera la distinción entre una afirmación universal -acerca de todos las instancias- y una existencial -al menos una de ellas- dependía, en buena medida, de la suposición de un universo de expresiones o palabras-tipo que dieran sentido a los cuantificadores. Estas libertades se pueden vislumbrar cuando Geach toma la voz de la defensa y formula, a su manera, la posición quineana. Para Geach la base de la defensa quineana está en la interpretación que hace Quine de los cuantificadores y en la relación que esta interpretación establece entre cuantificación e identidad. Esta relación, junto con su estructuración y su importancia, quedó en buena medida establecida en la tesis doctoral de Gödel de 1930 y en el artículo correspondiente del mismo año, pero sus formulaciones, interpretaciones y consecuencias siguen discutiéndose. Así, el planteamiento de Geach con respecto a la formulación quineana es que la interpretación de los cuantificadores es paralela a la determinación de un predicable-I. Esto quiere decir, según Geach, que de acuerdo con la doctrina quineana

...si encontramos un predicable-I en una teoría *T*, deberíamos construir el rango de los cuantificadores en *T* como una clase de objetos para los cuales el predicable-I expresa la identidad absoluta y construir los otros predicables de *T* en forma correspondiente. De acuerdo con este principio, en un sistema *T1*, más amplio, el rango de los cuantificadores podría ser diferente...[15]

---

[14] Ibid., p. 6

[15] *Ibid.*, pp. 6-7

El ejemplo que usa Geach para ilustrar esta situación es similar al de la teoría acerca de las expresiones de un lenguaje, pero en este caso se recurre a letras y palabras y se plantea desde el punto de vista quineano. Para empezar Geach nos invita a considerar las letras y palabras de uno de los libros en su biblioteca de Leeds. En principio esto parece fácil ya que, lejos como estamos de Leeds y de la biblioteca no tendremos la tentación de dedicarle un tiempo a la elección del libro, o a la admiración de las letras o la reflexión de las palabras. No, lo único que tenemos que suponer es que el rango de los cuantificadores de una teoría *T* son las letras y palabras de ese volumen en particular y que la ideología de *T* no nos permite distinguir entre dos instancias (*tokens*) de una misma palabra tipo. Esta situación plantea, de acuerdo con Geach, una dicotomía: si tenemos un predicable-I ("$E\ \xi\ \eta$") acorde con la ideología de *T*, entonces podemos pensar que el rango de los cuantificadores de *T* son las instancias de las letras y palabras del volumen elegido y que "*Exy*" significa "*x* es una instancia equiforme con *y*", o podemos pensar que el rango de los cuantificadores de *T* son las letras y palabras tipo del libro en cuestión y que "*Exy*" significa "*x* es idéntica a *y*". De acuerdo con Geach esta última interpretación sería la favorecida por Quine, lo cual no es muy difícil de suponer; lo que ya no es tan fácil de asumir, sin mayor reserva, es que la identidad entre *x* y *y* sea absoluta, como quiere Geach. Como ya señalamos el aceptar que "ξ es equiforme con η" es un predicable-I quiere decir, como acepta Geach, que el rango de los cuantificadores son las letras y palabras tipo, por lo que "*x* es idéntica con *y*" es equivalente a "*x* es la misma letra/palabra tipo que *y*", pero no es equivalente a "*x* es absolutamente idéntica a *y*", esto es, idéntica sin referencia a ningún marco teórico. Sin embargo, como veremos, es precisamente a la importancia de este tipo de consideraciones hacia las que apunta la argumentación de Geach. Así, en este último ejemplo, el resultado de una ampliación de la ideología de *T*, que permite la discernibilidad de instancias de la misma palabra, tiene como resultado que el rango de los cuantificadores sean las palabras-instancia y no las palabras-tipo que se sugería para la interpretación quineana. Pero de acuerdo con el primer ejemplo, como señalamos, la indiscernibilidad de instancias era compatible con que las instancias constituyeran el rango de los cuantificadores de *T*. El planteamiento de Geach del primer ejemplo era la siguiente:

Sea la teoría *T* una teoría acerca de las expresiones de un lenguaje natural dado; sea el rango de los cuantificadores de *T* las instancias (*tokens*) de las expresiones de ese lenguaje; pero sea la ideología de tal forma restringida que en *T* no podamos dar descripciones diferentes de dos instancias de la misma palabra-tipo.[16]

En el segundo ejemplo, sin embargo, es precisamente la discernibilidad de las instancias la que origina que éstas se constituyan en el rango de los cuantificadores. El ejemplo se plantea así:

> Supongamos ahora que le añadimos al vocabulario de *T* uno o dos predicados que nos permiten discriminar entre instancias diferentes (*different tokens*) de la misma palabra o letra. En el sistema aumentado *T1* cada oración completa de *T* ocurrirá con exactamente las mismas condiciones de verdad que tenía en *T*, pero la importancia de las oraciones subordinadas en las oraciones cambiará radicalmente. El rango de los cuantificadores será ahora las palabras- instancia (*token words*) de mi volumen y no las palabras-tipo, y una cláusula "*Exy*" no significará "*x* es idéntica con *y*" sino sólo "*x* es una instancia equiforme con *y*".[17]

Sin embargo estas diferencias en el rango de los cuantificadores no son suficientes de por sí para cuestionar la posición quineana ya que, como reconoce el propio Geach, no afecta las condiciones de verdad de una oración dada y, por lo tanto, no son evidencia de que estemos hablando de otra cosa. Complementando su segundo ejemplo Geach hace referencia, en un tono cuasi-bizantino, a estas diferencias de formulación que no llegan a afectar la verdad.

> En forma similar, si el predicable de un lugar "F" significa "____ contiene dos ocurrencias de 'e'," esto se explicará como "____ contiene letra-instancias 'e'" y ya no como "____ contiene dos segmentos iniciales cada uno de los cuales termina con la letra 'e'." Consideremos ahora la fórmula
>
> $$Vx\ Vy\ (Fx \wedge Fy\ \wedge \neg Exy)$$
>
> En *T* esto se leerá como "En el libro de Geach hay dos palabras tipo x y y que no son idénticas y tanto x como y tienen dos segmentos iniciales que terminan con *la* letra 'e'." En T1 se leerá como "en el libro de Geach hay dos palabra-instancias, no equiformes, x y y, y tanto x como y contienen dos letras 'e'." Si lo pensamos con cuidado nos damos cuenta de que los cambios de significado (*import*) correspondientes a las partes de la fórmula se cancelan y las condiciones de verdad del todo permanecen sin alteración.[18]

---

[16] *Ibid.*, p. 5

[17] *Ibid.*, p. 8

[18] Ibid., p 8

Este párrafo no sólo ejemplifica los retorcimientos argumentativos propios de la filosofía de la lógica (la noción de "segmentos iniciales" proviene de Quine), sino que también preludia una especie de anticlímax que se resume en la declaración explícita de Geach de que no posee un argumento contundente en contra de la posición quineana. ¿Cuál es entonces, podríamos preguntar, la importancia de la reflexión de Geach sobre la identidad? Una respuesta plausible, pero que también puede tomar formas más o menos exóticas, es que los planteamientos de Geach llaman la atención hacia las dificultades de establecer, más allá de sobrentendidos obvios, de qué estamos hablando. En términos quineanos podríamos decir que las observaciones de Geach apuntan hacia el esclarecimiento de los presupuestos filosóficos de la regimentación del discurso teórico en general y del científico en particular. Como ya habíamos señalado, el marco más reciente de esta reflexión es la obra de Frege, especialmente *Los fundamentos de la aritmética*, que gira alrededor de la pregunta qué es un número. Claro está que esa pregunta, que podríamos pensar limitada a la fundamentación de las matemáticas, se desborda en la respuesta que relaciona el número con el concepto y se hace abiertamente ontológica en el *dictum* quineano: "*no entity without identity*". En la argumentación de Geach, este proceso, que va del detalle técnico a la generalización teórica fundamental, se lleva a cabo de una manera a la vez brusca, taimada, retorcida, muy bien escrita y salpicada de ejemplos y formulaciones que piden a gritos un poco más de un grano de sal para digerirlos. Veamos entonces desde qué niveles de humildad se gesta el ambicioso y heterodoxo proyecto geachiano. Después de concluir su proceso en contra de Quine al señalar que las dos interpretaciones de la fórmula $\forall x \forall y (Fx \wedge Fy \wedge \neg Exy)$ no afectan sus condiciones de verdad, dice Geach:

> Como se pueden imaginar no tengo una respuesta lógica decisiva para esto: difícilmente Quine va a ser atrapado en un franco (*straightforward*) error lógico.[19]

Sin embargo, piensa Geach, vista a la luz de sus consideraciones, la posición quineana con respecto a la interpretación de los cuantificadores, genera cierta tensión dentro de su posición teórica general. De acuerdo con esta posición, la relación entre ideología y ontología no tiene los grados de intimidad que la versión geachiana de Quine podría sugerir. La razón básica por la que esta intimidad es poco probable es que la imaginable variabilidad de la ideología tiene que adaptarse a una deseable estabilidad de la ontología. La sensatez de esta posición la expresa Quine en un párrafo que Geach cita:

---

[19] Ibid., p. 8

> Pero la ontología, mientras no se revise, está más claramente bajo control que lo que podríamos llamar la *ideología*, la cuestión de los predicados admisibles... La mera presencia de los cuantificadores en el lenguaje de la ciencia requiere que la ontología, mientras no se revise, sea relativamente determinada, ya que sólo se puede decir que los cuantificadores han sido interpretados y entendidos en tanto que hemos establecido el rango de las variables. El que el acervo de predicados pueda ser siempre suplementado está implícito en un teorema de las metamatemáticas, ya que se sabe que para cualquier teoría, sin importar su riqueza, hay clases que no son la extensión de ninguna de sus oraciones.[20]

Esta posición de relativa estabilidad ontológica contrasta claramente con la posibilidad de multiplicar la lectura de los cuantificadores señalada por Geach. La ontología asumida por Quine –surgida de sus aspiraciones nominalistas y sus limitaciones realistas– podrá esta abierta a la reconsideración e incluso al rechazo, pero básicamente es tan antigua como la dicotomía entre substancias primeras y substancias segundas, tan antigua como la alternativa entre Platón y Aristóteles. La ideología en cambio ha sido tan cambiante como los atributos que la vista ha imaginado y la imaginación ha observado. Esta mezcla de observación e imaginación genera la especulación y ésta, podríamos decir, es básicamente posible precisamente porque distinguimos entre una realidad que, por desconocida, puede ser variable, y una reflexión que, por humana, siempre será cuestionable. Sin embargo, los afanes de sensatez metodológica y cautela ontológica de Quine no parecen llevarse bien con la idea de que el rango de los cuantificadores de una teoría es una función del predicado-I. Una teoría no sólo puede cambiar su ideología con mayor facilidad que su ontología, sino que, como señala Geach, su riqueza ideológica inicial puede ser suficiente para que sea plausible escindirla en varias subteorías con sus correspondientes predicados-I y con la consiguiente multiplicación de rangos para sus cuantificadores. Refiriéndose al afán quineano de ser conservador con respecto a la ontología y liberal con respecto a la ideología, dice Geach:

> Un afán admirable pero que difícilmente podremos lograr por el recurso quineano de interpretar los predicables-I como identidad estricta (*reading strict identity into I-predicables*) en una teoría y construir, en forma correspondiente, el resto de las expresiones. Consideremos una teoría *T* a cuyos cuantificadores se les haya asignado un cierto rango de acuerdo con el método de Quine: si *T* es una teoría rica, podremos encontrar dentro de *T* varios predicables *E1, E2, E3*, ..., cada uno de los cuales es un predicable-I en relación con alguna sub-teoría correspondiente *T1, T2, T3*, ..., y que no coinciden en su aplicación *en T*. Desde el punto de vista

[20] Ibid., pp. 8-9 y Quine, "The Scope and Language of Science" en *The Ways of Paradox*, pp. 215-232

de Quine, *E1* expresará identidad estricta en *T1*, *E2* en *T2* y *E3* en *T3*, ...; en forma correspondiente, los cuantificadores de las teorías *T1, T2, T3*,..., tendrán que ser reconstruidos como teniendo diferentes rangos (*as having different ranges*) en cada caso. Queríamos mantener nuestra ontología comparativamente fija aunque se permitieran cambios en nuestra ideología, pero ahora unos cuantos cambios triviales en la ideología –la mera omisión de algunos predicables de una teoría– resulta en amplias adiciones a nuestra ontología, al ámbito que se supone es el rango de nuestros cuantificadores.[21]

Qué tan fiel sea esta lectura a la posición quineana es algo que podría aclararse un poco a través de un tercer ejemplo de Geach que, nuevamente, tiene como referencia uno de sus libros. Y es precisamente en una parte de la ambigüedad característica de la descripción "uno de sus libros" sobre la que Geach fija su atención: cuando hablamos de uno de los libros de Geach podemos estar pensando en uno de los libros que ha escrito o en uno de los libros que, aunque le pertenecen, no recibe regalías por ellos. Esta diferencia se hace patente cuando notamos que los últimos son más numerosos que los primeros. El ejemplo entonces enfatiza los diferentes resultados de contar las palabras de un libro, según el criterio con el que decidamos llevar a cabo la tarea. Esto es lo que, según Geach, señaló Austin cuando notó que palabras-instancia y palabras-tipo son dos formas de contar palabras. Puede haber otras y a cada una de ellas le corresponde un predicable-I que nos permite contarlas e instituirlas como el rango de un cuantificador. Dice Geach:

Podemos, por ejemplo, contar las palabras con una explicación en el diccionario; en este caso "*theism*", con el significado creencia en un solo Dios y "*theism*" con el significado de adicción al té, aunque equiformes, contarían como dos palabras; pero, por otro lado, en un artículo sobre filosofía de la religión el singular "*theism*", el plural "*theisms*" y el genitivo "*theism's*", como en "el error fundamental del ____", contarían todas como una sola palabra. Podemos ahora encontrar una teoría restringida adecuada para cada uno de los predicables "____ es la misma palabra-instancia que ____", "____ es una instancia equiforme con ____", "____ tiene el mismo artículo en el diccionario que ____" y otros tantos predicables de tal manera que, en la teoría apropiada, el predicable sea un predicable-I; por ejemplo, para el predicable "____ tiene el mismo artículo en el diccionario que ____" sólo necesitamos asumir que los recursos descriptivos de la teoría son tan magros que no pueden distinguir entre dos palabras a las que les corresponde el mismo artículo en el diccionario. Así, si elegimos seguir a Quine, habrá *in rerum natura* tantos dominios diferentes de palabras como se quiera en un solo volumen de mis libreros en Leeds.[22]

---

[21] "Identity", p. 9

[22] *Ibid.*, p. 10

¿No debería preocupar esta proliferación de palabras convertidas en entidades a un amante de los paisajes desérticos como Quine? ¿No deberíamos usar la navaja de Ockam para cortar de raíz estas excrecencias más meinongnianas que platónicas? Estas son preguntas que se hace Geach. Quine, podemos suponer, daría una respuesta positiva a estas preguntas, aunque, claro está, también podemos suponer que lo podría hacer por razones distintas a las aducidas por Geach. Pero, por lo pronto, veamos cómo piensa Geach que se puede resolver la tensión entre ideología y ontología. La solución de Geach es muy simple: rechazar la identidad absoluta y admitir tantos predicables como sean necesarios de la forma "____ es el mismo A que _____", en la que A es un substantivo contable (*count noun*). Podemos así partir de un universo de palabras y constituirlo de acuerdo con las diferentes maneras en que contemos las palabras:

> Las palabras en mi libro (digamos) constituirán sólo *un* universo de discurso; pero diferentes criterios de identidad relativa, todos aplicables con el mismo derecho en este universo, se establecerán por diferentes predicables de dos lugares, por ejemplo, "____ es la misma palabra-instancia que ____", "____ es la misma palabra-tipo que ____", "____ es la misma palabra-artículo de diccionario que ____".[23]

Este recurso nos evita, de acuerdo con Geach, aceptar entidades indeseables que de otra manera tendrían derecho a la existencia por llenar el requisito de contar con un carnet/criterio de identidad. La situación que Geach tiene en mente la ilustra con un ejemplo muy discutido y discutible pero que tiene ecos de un ejemplo quineano y, por ello, nos permitirá contrastar mejor sus diferencias. En un párrafo de *Set Theory and its Logic*, que Geach no menciona, Quine hace referencia a dos casos en los que su explicación de la identidad podría cuestionarse; el primero tiene que ver con números, el segundo con personas. Con respecto a este último dice Quine:

> Pero si tomamos un universo de personas y se interpretan los predicados de maneras que no dependan sino de los ingresos de las personas, entonces la manera propuesta de definir '$x=y$' hará equivalentes a las personas con los mismos ingresos; tenemos aquí, por lo tanto, un caso desfavorable en el que '$x=y$' no resulta tener el sentido de la identidad genuina. En estos casos podríamos quejarnos de que la interpretación del universo y los predicados está mal elegida y que sería mejor rectificarla de manera tal que los miembros del universo se

[23] *Ibid.*

construyeran como grupos unitarios de ingresos.[24]

El ejemplo de Geach no habla de gente con los mismos ingresos sino con el mismo nombre y no tiene como resultado la postulación de grupos económicos sino de androides. Dice Geach:

> Como señalé hace años al criticar a Quine, hay un cierto conjunto de predicables que se aplican con verdad a los hombres pero que no discriminan entre dos hombres del mismo nombre (*the same surname*). Si la ideología de una teoría *T* se restringe a tales predicables, la ontología de *T* trae a la existencia un universo de androides (como dicen los fanáticos de la ciencia ficción) que sólo difieren de los hombres en este sentido: dos diferentes no pueden compartir el mismo nombre (*surname*). A estos androides los llamo nom-hombres (*surmen*); un nom-hombre (*surman*) es de muchas maneras muy semejante a un hombre, por ejemplo, tiene cerebro en la cabeza, corazón en el pecho y tripas en el vientre, ya que, en este respecto, dos hombres con el mismo nombre no difieren.[25]

Son estas entidades, surgidas a partir de un predicable tan convencional como "____ es el mismo nom-hombre que ____", las que Geach no quiere traer a la existencia bajo el pretexto de que dicho predicable establece un criterio de identidad. Y Quine, podemos suponer, tampoco querría asumir ninguna atribución de paternidad. Sin embargo, hay que recordar que bajo la sensatez geachiana se agazapa no sólo un cuestionamiento de la tensión entre ideología y ontología en la posición de Quine, sino un cuestionamiento de la relación entre identidad y ontología; esta relación ya está en Frege pero es Quine quien la convierte en un *dictum*: no hay entidad sin identidad. La pregunta pertinente es entonces: ¿basta contar con un criterio de identidad para generar una entidad? La respuesta de Geach es negativa; lo que nos ofrecen los predicables de identidad relativizada son maneras de contar, no pasaportes a la existencia. La población de Leeds, como las palabras de un libro, puede ser enumerada de diferentes maneras, pero estas diferentes enumeraciones no deben afectar nuestra ontología. Dice Geach:

> ... podemos contar los hombres en Leeds o, con un resultado diferente, los nom-hombres (*surmen*) en Leeds; pero no por ello hay en Leeds tanto hombres como nom-hombres. Lo único que sucede es que estamos enumerando los habitantes de Leeds de dos maneras diferentes; sólo se trata de un predicable diferente --ya

---

[24] Quine, *Set Theory and its Logic*, p 15

[25] "Identity", p 10

sea el predicable "____ es el mismo *hombre* que ____", ya sea el predicable "_____ es el mismo *nom-hombre* que ____" (y esto, simplemente, quiere decir: "____ es un hombre con el mismo nombre que ____, quien también es un hombre")-- que nos sirve como criterio para evitar contar *al mismo* (*the same one*) dos veces. Nuestra ontología está ahora firmemente bajo control; sólo nuestra ideología es susceptible de expansión: no podemos decir con antelación qué tantos predicables de identidad vamos a necesitar.[26]

Pero, ¿en qué sentido está nuestra ontología bajo control?, ¿acaso lo está porque ya no aceptamos androides en ella o porque nos obliga a recordar que hablar de grupos es sólo una manera de agrupar individuos y no de acrecentarlos? Estas preguntas no son ni irónicas ni fáciles de responder y basta mencionar una última reflexión de Geach para vislumbrar qué tan radical es su posición. Según Geach su idea de la relatividad de la identidad se encuentra prefigurada en la discusión de Locke de la identidad personal en el Ensayo;[27] este antecedente le permite replantear la posición de Locke y la suya propia de la siguiente manera:

La manera en que Locke plantea el problema de la identidad personal podría ser reformulada así: aún si todo hombre es una persona y toda persona es un hombre no podemos inferir que el predicable "____ es la misma persona que ____" y "____ es el mismo hombre que ____" coincidan en aplicación (*coincide in application*); para apoyar esta conclusión se requiere de una elaborada argumentación que pertenece a la filosofía de la mente, no de una pequeña manipulación lógica en la teoría de la identidad. Locke, que despreciaba la lógica formal, no se hubiera dejado impresionar por una "prueba" formal de que en ese caso el mismo hombre es exactamente la misma persona y a la inversa; sus razones para rechazar la "prueba" habrían sido, a mi entender, malas, pero creo que su rechazo es correcto. No estoy aquí diciendo si el mismo hombre *es* la misma persona, y viceversa; todo lo que digo es que Locke estaba en lo correcto al no permitir que esto se estableciera con facilidad, aún bajo la suposición de que no hay hombres impersonales ni personas no humanas.[28]

Después de estas afirmaciones es claro que la crítica de Geach no se puede reducir a la exhibición de un Meinong ignorado pero en potencia en la explicación que da Quine de la identidad y la cuantificación. Tampoco podemos pensar que su actitud se agote en la sensatez de señalar que cuando hablamos de palabras podemos contarlas de diferentes maneras y

---

[26] *Ibid*, pp. 10-11

[27] Véase Locke, *Ensayo sobre el entendimiento humano*, esp. lib. II, cap. xxvii, 11-29

[28] *Ibid*, p. 11

cuando hablamos de grupos estamos subsumiendo en ellos individuos que *qua* miembros del grupo no son diferenciables. La evidencia en contra de limitar así la interpretación son las propias afirmaciones de Geach de que no podemos inferir, sin mayor trámite argumentativo, que los predicables "____ es el mismo hombre que ____" y "____ es la misma persona que ____" coinciden en aplicación; la dificultad de llevar a cabo esta inferencia, cree Geach, se mantiene a pesar de que todos los hombres sean personas y todas las personas sean hombres. Aunque es muy diferente, esta situación nos podría recordar la que ya comentamos de dos predicados con la misma extensión y diferente intención; "animal racional" y "bípedo implume", decía Russell, podrán tener la misma extensión pero no hay que desplumar a una gallina para notar la diferencia de significado. Pero aquí no se trata solamente de que "hombre" y "persona" coincidan en extensión y difieran en intención; se trata de que no necesariamente coinciden en aplicación y esto, me parece, quiere decir que no necesariamente coinciden en número a pesar de poder tener la misma extensión. Dicho de otra manera, cuando asumimos que un predicado del tipo "____ es el mismo A que ____" nos ofrece una manera de contar, no podemos suponer, sin que medie una argumentación, que otro predicado "____ es el mismo B que ____" tenga la misma aplicación, cuente de la misma manera. Pensar que la equivalencia extensional de A y B puede obviar esta argumentación es cometer el error que Geach trata de hacer explícito. Podemos suponer, por ejemplo, que todas las palabras-tipo de un libro sean palabras a las que les corresponde una explicación en el diccionario y viceversa, pero esta suposición no nos permite inferir que "____ es la misma palabra-tipo que ____" y "____ es la misma palabra con explicación en el diccionario ____" necesariamente tengan la misma aplicación, tengan como resultado el mismo número si contamos con ellas. Esto no va en contra de que estos predicables puedan, de hecho, tener la misma aplicación, sino en contra de que se asuma, sin argumentación, la igualdad de aplicación. Así, aunque todos los hombres sean personas y todas las personas sean hombres, tenemos que elaborar una argumentación que apoye la conclusión de que contar hombres es lo mismo que contar personas y que, consecuentemente, su número *debe* ser el mismo. La conclusión de Geach se podría entonces reformular, en forma tentativa, diciendo que la igualdad de extensión de dos predicados no conlleva estructuralmente que el número que les corresponde a dichos predicados sea el mismo. La formulación es tentativa porque la noción de "igual extensión" tal vez tenga que ser reformulada, ya que hemos pasado del cuestionamiento de la ortodoxia según Quine a la reconsideración de la ortodoxia de acuerdo con otros padres de la lógica. Esta última incluiría la relación establecida por Frege entre números y conceptos y su reconsideración nos obligaría a repensar las consecuencias de afirmar:

> Si al examinar *uno y el mismo fenómeno* externo, puedo decir con igual verdad: "éste es *un grupo* de árboles", y "éstos son *cinco árboles*", o "aquí están *cinco compañías*" y "aquí están *500 hombres*", con ello no se altera ni *el individuo* ni *el todo, el agregado*, sino mi denominación.[29]

Los énfasis agregados a las palabras de Frege están aquí para subrayar los ecos que tienen esas palabras en la posición de Geach; en el siguiente capítulo trataremos de indicar qué tan lejos va y qué tan lejos está esta posición de la ortodoxia de Frege.

[29] Frege *Los fundamentos de la aritmética*, $46 (Los subrayados han sido agregados).

Resumen

Tanto Gödel como Quine, en su reducción de la identidad a una función de los predicados de un lenguaje o sistema, notan que este procedimiento puede resultar en la indiscernibilidad de ciertos elementos. De acuerdo con Gödel, si suponemos un dominio de individuos y un sistema de funciones, entonces la función que ocupe el lugar de la identidad tendrá sus propiedades lógicas y dividirá a los elementos del dominio en clases cuyos elementos serán indiscernibles y, por lo tanto, equivalentes. La indiscernibilidad de estos elementos sugiere y permite que consideremos a las clases que los agrupan como los elementos de un nuevo dominio de individuos. Cuando este resultado aparece en la correspondiente reducción quineana, Quine nota que el procedimiento podría considerarse un fracaso en tanto que caracterización de la identidad genuina. Estos señalamientos, junto con el trasfondo teórico de la posición de Frege, da pie a que Peter Geach cuestione la ortodoxia lógica en relación con la identidad y la cuantificación. Las afirmaciones pertinentes de Frege para lo que aquí se discute son: *a)* la identidad sólo puede tomar una forma, *b)* la legitimidad de hablar de una entidad está relacionada con la posibilidad de establecer un criterio de identidad ("*no entity without identity*", en la formulación quineana), *c)* número y concepto son dos nociones íntimamente relacionadas. El cuestionamiento de Geach parte de lo que él llama un predicable-I, que es un predicado que se ajusta al esquema "$Fy \equiv (\exists x)(x=y.Fx)$" de Hao Wang, que sintetiza los axiomas gödelianos y, por tanto, genera la autoidentidad y la indiscernibilidad. El primer señalamiento de Geach es que un predicable-I se establece en relación con una teoría *T* dada y que, consecuentemente, lo que garantiza es la indiscernibilidad dentro de *T*. Se plantea entonces el problema de dar una caracterización de la identidad que no se reduzca a la mera indiscernibilidad y no esté limitada por los recursos predicativos de una teoría. Esta posibilidad se rechaza porque conlleva el trato con totalidades que se sabe son difíciles de controlar. Por otro lado, si nos limitamos a la versión quineana, entonces, arguye Geach, tendremos que dar cuenta de las relaciones entre la ontología de una teoría –su universo de discurso, la lectura de sus cuantificadores– y su ideología: sus predicados. La complejidad de estas relaciones la ilustra Geach con una serie de ejemplos que no siempre son del todo fieles a Quine, pero que apuntan hacia las maneras en que se puede ver afectada la ontología de una teoría por variaciones en su ideología. Estas observaciones conducen directamente al problema de la lectura o interpretación de los cuantificadores de una teoría; de acuerdo con Quine, según Geach, el rango de los cuantificadores de una

teoría *T* debería ser la clase de objetos para los cuales un predicable-I constituya un criterio de identidad. Sin embargo, las diferencias en el rango de los cuantificadores que esta interpretación podría propiciar no son suficientes para cuestionar la posición quineana ya que, como indica el propio Geach, no afectan las condiciones de verdad de una oración dada. No obstante, piensa Geach, esta situación es antitética con los declarados afanes quineanos de moderación ontológica y apertura científica; si hacemos depender nuestra ontología de una ideología en esencia variante, difícilmente podremos mantener nuestra ontología bajo control. La tensión entre ideología y ontología se agrava y empieza a desbordar el ámbito de la ortodoxia puramente quineana cuando Geach señala que dos predicables-I pueden enumerar con diferentes resultados un mismo universo de discurso: las palabras de un libro, por ejemplo, se pueden contar como palabras-tipo o como palabras-instancia. Este hecho, más o menos trivial, lo usa Geach para sugerir que la lectura quineana de los cuantificadores conllevaría una proliferación tan *non sancta* de entidades que podría tentarnos a cuestionar la desértica vocación de Quine. La alternativa es rechazar la identidad absoluta –atribuida, más por mor de la argumentación que por evidencia, a Quine– y admitir, sin comprometerse ontológicamente, tantos predicables como sean necesarios de la forma "___ es el mismo A que ___", donde A es un substantivo contable. La sensatez ontológica de esta posición consiste en rechazar la idea de que un criterio lógico sirva como carnet de identidad; sin embargo bajo esta sensatez se esconde una crítica más substantiva de la ortodoxia. Esta crítica consiste en señalar, en primer lugar, que lo que ofrecen los predicables de identidad relativizada son maneras de contar y no pasaportes a la existencia y, en segundo, que estas maneras de contar pueden ser diferentes en casos que no son ni obvios ni inocuos. Al final de su argumentación, Geach relaciona su idea de relativizar la identidad con la discusión de Locke de la identidad personal. En términos de Geach, la posición de Locke se podría reformular así: aún si todo hombre es una persona y toda persona es un hombre, no podemos inferir, directamente y sin argumentación, que los predicables "___ es la misma persona que ___" y "___ es el mismo hombre que ___" tengan la misma aplicación. En el contexto de la argumentación de Geach esto quiere decir que no les corresponde *necesariamente* el mismo número *aun cuando*, en cierto sentido, podamos afirmar que determinan la misma extensión. Esto, claro está, no va en contra de que esos predicables puedan, de hecho, tener la misma aplicación, sino en contra de que asumamos, sin argumentación, la igualdad de aplicación. Aunque todos los hombres sean personas y todas las personas hombres, la conclusión de que contar hombres es lo mismo que contar personas requiere de una elaboración filosófica y no puramente lógica.

La conclusión de Geach se podría entonces reformular tentativamente diciendo que la igualdad de extensión de dos predicados no conlleva, estructuralmente, que el número que les corresponde sea el mismo. La formulación es tentativa en la medida que la noción de "misma extensión" tal vez tenga que ser reformulada, pero esto puede ser un indicio del alcance de los cuestionamientos de Geach.

Capítulo 5

Contar y cuantificar

[..] es la filosofía, y sólo la filosofía, la que insiste en distinguir lo que es diferente tanto lógicamente como en la experiencia; mientras que los que se dicen devotos de la experiencia son quienes erigen a la identidad abstracta como el principio básico del conocimiento

Hegel

En el capítulo anterior vimos cómo las observaciones de Geach acerca de la ortodoxia quineana se transformaban en el cuestionamiento de una ortodoxia más católica, que incluía la interpretación de algunas tesis seminales de Frege. Estas tesis, que establecen una relación entre números y conceptos, aparecen como trasfondo de la discusión porque la relativización de la identidad, propuesta por Geach, se establece con referencia a un substantivo contable (*count name*). Esta referencia se hacía necesaria porque la alternativa de Geach a la identidad absoluta consistía en aceptar predicables, que establecen una partición del universo de discurso, sin atribuirles un compromiso ontológico y estos predicables tenían la forma "... es el mismo *A* que...", donde "*A*" es un substantivo contable. Es este planteamiento el que propicia la reflexión sobre las relaciones entre la identidad y los substantivos contables y permite establecer la radicalidad de la posición de Geach. En una primera instancia uno podría suponer, ortodoxamente, que la comprensión de "... es el mismo *A* que..." supone la comprensión de "*A*" o "es un *A*" pero, en realidad, señala Geach, el orden lógico es el inverso: la definición de "*A*" o "es un *A*" se lleva a cabo a través del predicable "... es el mismo *A* que...", ya que "es un *A*" se puede definir como "es el mismo *A* que algo u otro" o, más concisamente, "es el mismo *A* que sí mismo". En un trabajo posterior a "Relative Identity" dice Geach:

> Pero, en primer lugar, necesito especificar qué predicables pueden expresar identidad relativa. Sería inútil decir: aquellos que se forman substituyendo un substantivo contable en lugar de "A" en "es el mismo A que". Esa respuesta sólo traería más problemas: ¿qué es un substantivo contable?, ¿cuál es la relación sintáctica entre ese tipo de substantivo y el prefijo "el mismo"?, ¿por qué unos substantivos pueden establecer esta relación y otros no?.
> Evadimos estas dificultades diciendo que las predicaciones de un substantivo contable "A" no sirven para formar el predicable "es el mismo A que" sino al revés: como lo dije en *Reference and Generality (§109), el predicable de un lugar "es un A" es definible como significando "es el mismo A que algo u otro".*[1]

En efecto, en *Reference and Generality* Geach ya había planteado la idea de analizar "es un *A*" en términos de "es el mismo *A* que algo" y había dejado claro que "es el mismo *A* que" no podía descomponerse en "es un *A* y es el mismo *A* que", donde "el mismo" queda sin relativizar y se podría considerar absoluto.[2] También en ese libro ya había hecho explícita una de las formulaciones más discutidas de su tesis: la posibilidad de que dos cosas pudieran ser diferentes bajo un predicado e iguales bajo otro. En el contexto de una discusión en la que se traen a colación objetos intencionales decía Geach:

> Desde mi propio punto de vista acerca de la identidad no podría objetar, en principio, a que diferentes *A* fueran uno y el mismo *B*; es concebible que dos objetos intencionales pudieran ser uno y el mismo hombre, como diferentes funcionarios (*official personages*) podrían ser uno y el mismo hombre.[3]

En su reseña de *Reference and Generality*[4], Quine consideró que el ejemplo era endeble y, refiriéndose al cuestionamiento de Geach de la doctrina tradicional de la distribución, se preguntó: "¿Si la doctrina de la distribución era incoherente, qué vamos a decir de esto?" La posibilidad de que *x* y *y* sean el mismo *F* y diferente *G* raya con la incoherencia porque, entre otras cosas, pone en cuestión una asunción ortodoxa de la teoría de la cuantificación. Para Quine, y la ortodoxia que él tan bien representa, la

[1] "Ontological Relativity and Relative Identity", pp. 290-291

[2] Véase *Reference and Generality*, p. 191

[3] *Ibid*, p. 157

[4] Véase Quine, Reseña de *Reference and Generality* de Peter Geach, en *Philosophical Review*, 73 (1964) 100-104

cuantificación supone que los valores de las variables difieren o son iguales en términos categóricos: no pueden ser iguales bajo un concepto y diferentes bajo otro. En la reseña mencionada dice Quine:

> Al final del capítulo [2] uno encuentra, para su desgracia, la doctrina que dice que "$x=y$" carece de significado excepto cuando se relativiza a un término general como parámetro: "x y y son el mismo F". Esta noción es antitética con la noción misma de cuantificación, la fuente principal de la lógica moderna. La cuantificación depende de que los valores de las variables sean iguales o diferentes absolutamente; concedida la cuantificación no hay elección con respecto a la identidad de las variables. En un lenguaje con cuantificación sólo hay una versión legítima de "$x=y$" (sin contar versiones equivalentes)."[5]

Estas afirmaciones tal vez expliquen porqué Geach cuestionó la coherencia de la posición quineana relacionando su interpretación de la cuantificación con su posición ontológica. Por otro lado, en el libro reseñado por Quine, Geach se refiere a una observación de Frege y al problema, planteado en los *Grundlagen*, de explicar la equinumerosidad; estas referencias, podríamos decir, son las que enmarcan sus afirmaciones sobre la identidad. La observación, hecha en el contexto de distinguir entre el uno y la unidad, señala que cuando decimos que Solón era un sabio, el predicado "era un sabio" no puede analizarse como "era uno" y "era sabio".[6] Sin embargo, nota Geach, Frege no estableció un paralelo entre "uno" y "el mismo"; dice Geach:

> Causa sorpresa que, por el contrario, Frege haya sido constante en asumir que "x es el mismo A que y" sí se escinde en "x es un A (y y es un A)" y "x es el mismo que (*ist dasselbe wie, ist gleich*) y.[7]

La afinidad entre "uno" y "el mismo", consagrada en la frase que los conjuga, no es casual, sino el resultado de una familiaridad lógica que los medievales describieron como transcendental. El carácter transcendental de estos términos no se refiere, obviamente a alturas kantianas sino a la manera en la que estos términos pasan por encima de los temas específicos de

[5] Quine, Reseña, p. 101

[6] Véase Frege, *Fundamentos de la aritmética*, § 29

[7] *Reference and Generality*, p. 152

discusión. Los transcendentales, además, se pueden acoplar en pares que resaltan cierta afinidad; este es el caso de "uno" y "existe" o de "uno" y "el mismo". Dice Geach:

> Este término [identidad] o, mejor dicho, el término concreto correspondiente "idéntico" o "el mismo", pertenece a la familia de términos que los medievales llamaron transcendentales: debe estar con "existe" y "algo" y "uno" y "verdadero" y "bueno". "Transcendental" refiere a la manera en que estos términos saltan por encima de cualquier barrera conceptual entre diferentes clases de discursos; son, en las palabras de Ryle, tópico-neutrales. [...] De cualquier par de transcendentales los medievales dicen que cambian (*convert*), *convertuntur*. [...] Desde luego que no vamos a lograr nada si tratamos de construir el cambio de los transcendentales como cambio lógico, coextensividad o como intercambiabilidad *salva veritate*; pero si vemos la etimología latina de "*convert*" obtenemos una metáfora adecuada y útil. Los transcendentales se mueven al unísono (*turn together*), como un tren de ruedas dentadas.[8]

Esta imagen será especialmente apta al considerar las ruedas de la unidad y la identidad; Geach, como Frege y Quine, relaciona el compromiso ontológico con la posibilidad de establecer un criterio de identidad, pero su fidelidad a la imagen le obliga a notar la relación inversa: no hay identidad sin entidad. El problema es que esta inversión, tácita en su crítica de Quine, podría volver la generosidad meinongniana en contra del propio Geach; sin embargo, la importancia de la afirmación de Geach tal vez radique en señalar que quien asuma o haga suyo el *dictum* quineano debería de tomar posición en relación con el *dictum* inverso. Dice Geach:

> Dadas estas relaciones entre los transcendentales no necesito disculparme por un trabajo acerca de la identidad en una serie dedicada a la ontología. Ya que, como Quine ha dicho, no hay entidad sin identidad; él y yo estamos de acuerdo en considerar como *entia non grata* aquellas entidades, filosóficamente postuladas, para las cuales simplemente no hay indicios acerca de si se está hablando de la misma cosa o no. Además, tanto Quine como yo diríamos: No hay identidad sin entidad.[9]

Por otro lado, como ya notamos, la posición de Geach surge de una reflexión sobre algunos problemas planteados por Frege. Como se sabe, en el

---

[8] "Ontological Relativity and Relative Identity", pp. 287-288

[9] *Ibid, p. 288*

proceso de definir lo que es un número, Frege necesita establecer, en términos puramente lógicos, la relación "uno a uno", ya que una vez establecida esta relación podrá caracterizar la equinumerosidad y considerarla como un criterio de identidad para determinar cuándo a dos conceptos les corresponde el mismo número. Superado este paso su posición platónica con respecto a los números quedará establecida: serán entidades cuya identidad está lógicamente garantizada. La pureza lógica de este proceso conlleva que, aunque Frege haya relacionado números con conceptos, la relación "uno a uno" se establezca sin hacer referencia a ningún concepto, en términos puramente extensionales que sólo suponen una diferencia numérica (*solo numero*) entre los objetos que caen bajo los conceptos. Así, una relación ϕ será "uno a uno" cuando se cumplan las siguientes dos condiciones:

1. si *d* está en la relación ϕ con respecto a *a*, y si *d* está en la relación ϕ respecto a *e*, entonces resulta en general que, sean lo que fueren *d, a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.

2. si *d* está en la relación ϕ respecto a *a* y si *b* está en la relación ϕ respecto a *a*, entonces resulta en general que, sean lo que fueren *d, b* y *a, d* es lo mismo que *b*.[10]

En la formulación de estas condiciones, podemos notar, Frege usa nombres (constantes) aunque señala que no importa qué nombren. De aquí que Frege pueda hablar de una caracterización puramente lógica que le permite definir la equinumerosidad entre dos conceptos *F* y *G* de la siguiente manera:

> hay una relación ϕ que coordina biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto *F* con los objetos que caen bajo *G*[11]

Esta definición de equinumerosidad (*gleichzahlig*), como se sabe, complementa la definición que afirma que "el número que corresponde al concepto *F*, es la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *F*"" y le permite a Frege definir "*n* es un número" como "hay un concepto de tal tipo (*Bregriff der Art*) que *n* es el número que le corresponde." De acuerdo con

[10] Véase Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, § 72

[11] *Ibid*

Geach este proceso debe ser reformulado de manera tal que no sólo sea más procedente, sino de manera que ponga en evidencia lo que a él, Geach, le parece una asunción incorrecta de Frege. El primer paso de la reformulación es establecer la relación "uno a uno" como una relación entre *A*'s y *B*'s, esto es, no asumir que los nombres usados nombran cualquier cosa, sino que nombran objetos que son *A* o que son *B*; esto nos permite hablar de un *A* y de un *B* no especificados excepto como "es el mismo *B* que *e*" o "es el mismo *A* que *d*". Así, el criterio para que una relación *R* sea "uno a uno" se establece para Geach por la satisfacción de las siguientes condiciones:

1° Si cualquier *A*, digamos *d*, es *R* con respecto a un *B*, digamos *e*, entonces cualquier *B* para el cual *d* es *R* es el mismo *B* que *e*.

2° Si cualquier *A*, digamos *d*, es *R* con respecto a un *B*, digamos *e*, entonces cualquier *A* que es *R* con respecto a *e* es el mismo *A* que *d*. [12]

En este contexto, debemos notar, lo que Geach está enfatizando es que si "el mismo *A*" y "el mismo *B*" funcionan como criterios de identidad, tanto "*A*" como "*B*" deben ser términos que puedan cumplir esa función. El problema es que no todos los términos son aptos para esta función y esto es algo que, según Geach, la caracterización de Frege de la relación "uno a uno" solapa. La idea de Geach se aclara si la consideramos como una restricción a la aplicación de la definición de Frege de "tantos como"; para Frege el que haya tantos *F* como *G* quiere decir que, con respecto a una relación *R*, cada *F* es *R* con respecto a algún *G* y cada *G* es *R* con respecto a algún *F* y "ser *R* con respecto a" es una relación "uno a uno".[13] Pero si adoptamos la caracterización de Geach de esta última condición, entonces *F* y *G* deberían poder ser derivados por "restricción" de los términos substantivos *A* y *B*. La consecuencia de esta limitación de la definición de Frege es que hace patente que no cualquier término puede ocupar el lugar de *A* o de *B*, ya que su uso presupone que las expresiones "es el mismo *A* que" y "es el mismo *B* que" tengan sentido. Por ejemplo, arguye Geach, podemos determinar si en este cuarto hay tantas sillas como personas porque sabemos cuándo una silla es la misma silla y cuándo una persona es la misma persona; sin embargo, si usamos la caracterización de Geach de la relación "uno a uno", no podemos determinar si en este cuarto hay tantas cosas rojas como no rojas, ya que no

[12] Véase *Reference and Generality*, p. 152

[13] Véase *Reference and Generality*, pp. 152-153 y *Fundamentos*, § 11-72

hay manera de establecer que *d* es la misma cosa roja que *e*. En estos casos, dice Geach,

> [...] Frege astutamente señala que (el concepto significado por) el predicable no determina un número finito, pero el problema no es que en estos casos no podamos parar de contar, sino que no podemos ni siquiera empezar a establecer una relación de uno a uno entre los numerales y las cosas contadas.[14]

Esta conclusión no sólo afecta la caracterización de Frege de las relaciones entre "uno a uno" y "tantos como", sino que al traer a colación términos que, como "rojo", no tienen un criterio de identidad y no son propicios a la adjudicación de un número, obliga a la reconsideración de las relaciones entre "es un substantivo", "es contable", "es cuantificable" y "es el mismo". Esto, claro está, no implica que las conclusiones de Geach sean las correctas; Quine, por ejemplo, cree que sus reflexiones están básicamente mal encaminadas y, con respecto a la imposibilidad de contar cosas rojas, dice:

> Sin embargo ésta es una consideración que se ha tergiversado (*gone awry*). Dada la divisibilidad conceptual de cosas rojas en cosas rojas, ciertamente no hay manera de contarlas; pero esto no quiere decir que no haya manera de decir si *d* es la misma cosa roja que *e*.[15]

El problema es que "cosa" es un concepto que difícilmente podría satisfacer a Geach ya que o corresponde a su generalidad, y carece entonces de un criterio de identidad, o tiene que renunciar a ella y desvelarse como un tipo o clase de cosa. Claro que si el vicio y la virtud no tienen la autonomía que se les atribuye, entonces se puede transformar el vicio de la vaguedad en la virtud de la neutralidad. Podemos pensar que las variables individuales (básicas para la cuantificación de primer orden e íntimamente ligadas al ser, según Quine) no se refieren a cosas específicas; su carácter lógico radica, precisamente, en no hacer referencia a ningún tipo de cosa en especial. Esta característica se suele notar, ya sea con énfasis en la virtud o en el vicio que representa, cuando se señala que la afirmación "Todos los hombres son mortales", mal que bien, habla de los hombres (piénsese en la teoría de la

---

[14] *Ibid*, p. 153

[15] Quine, Reseña, p. 102

distribución), mientras que su traducción lógica, $(x)(Hx \supset Mx)$, hace una afirmación acerca de todas las cosas; tal es la fuerza de la cuantificación irrestricta. Claro está que la traducción de las proposiciones categóricas y el carácter irrestricto de la cuantificación han sido muy discutidas por sus implicaciones lógicas y ontológicas, pero aquí lo que nos interesa señalar es que la vaguedad de "cosa" se puede convertir en la neutralidad de una variable individual porque asumimos que tiene sentido hablar de una cosa y de dos o más cosas diferentes, sin especificar de qué cosa o cosas estamos hablando. La sensatez o insensatez de esta asunción es la que Geach cuestiona cuando recuerda la relación establecida por Frege entre números y conceptos. Dice Geach:

> Habiendo explicado así "criterio de identidad" [como estándar para juzgar si se da la identidad], todavía tengo que decir, una vez más que la tesis que afirma que la identidad es siempre relativa con respecto a tal criterio me parece una obviedad, como la tesis afín de Frege que dice que un número siempre es relativo a un *Begriff*. Tiene tan poco sentido hablar de identificación con independencia de identificar alguna *clase* de cosa como hablar de contar con independencia de contar alguna clase de cosa. Un término numérico exige completarse con un nombre contable y algo similar sucede con "el mismo" y "otro". [16]

¿Cómo es entonces posible ignorar la referencia a los conceptos en aras de la generalidad o, más técnicamente, cómo podemos hablar de la misma cosa o de cosas diferentes sin hacerlo con relación a un concepto o, más simplemente, cómo podemos contar cosas? La respuesta a estas preguntas se puede sintetizar en el rechazo al principio de la identidad de los indiscernibles y en la asunción de la diferencia *solo numero*, la diferencia sin diferencias, anterior a la diferenciación predicativa. Pregunta Geach:

> [...]¿*es* contar un proceso sin sentido si no se aplica a objetos reunidos bajo el mismo *Begriff*? Algunos filósofos han pensado de otra manera: de hecho todos aquellos que han negado la identidad de los indiscernibles [...]. "Los objetos *x*, *y* y *z*", ellos dirían, "pueden ser distintos meramente en términos numéricos; y aún si también difieren en características, tendrán autoidentidad y distinción numérica lógicamente prioritarias a tales disimilitudes. [17]

[16] "Ontological Relativity and Relative Identity", pp. 288-289

[17] *Ibid*, p. 289

A estas alturas uno se puede preguntar si la prioridad lógica de la diferencia *solo numero* está a la base de la concepción moderna de la cuantificación o si dicha prioridad se deriva del lugar prioritario en que se suele situar esa concepción y la ortodoxia que la acompaña. Sin embargo tal vez lo más apropiado sería recordar que se pueden establecer otras prioridades –como las que consideramos en el capítulo dos– que no sólo son compatibles con la aceptación del principio de la identidad de los indiscernibles, sino que pueden considerarse como su fundamento, aun cuando este fundamento no pueda calificarse como lógico. En todo caso lo que Geach nos recuerda, y en esto coincide con Quine, es que el problema de la identidad está íntimamente ligado al de la individuación, con la diferencia que, para Geach, la posibilidad de otorgar prioridad lógica a la diferenciación puramente numérica está relacionada con la posibilidad de postular meros particulares o particulares desnudos (*bare*). Pero esta idea, piensa Geach, no es sólo absurda, sino que conlleva una contradicción en su misma formulación:

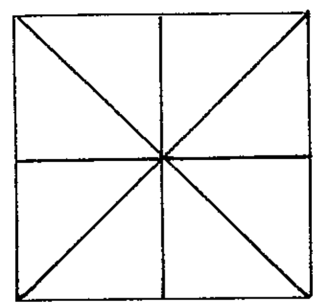
> La doctrina que dice que la autoidentidad de un individuo y su diferenciación de otros pueden tener prioridad lógica sobre su tener características es, de cualquier manera, absurda. Separado de sus características un individuo no es nada y el hablar de meros (*bare*) particulares, que extrañamente todavía sobrevive, es un sinsentido manifiesto. Hábiles cambios de formulación o de énfasis pueden permitir que un filósofo se persuada a sí mismo y a otros de que no se contradice cuando dice que un individuo, o algún núcleo óntico de un individuo, es un particular sin cualidades, sin cualidades precisamente *porque* Él es lo que TIENE las cualidades; de alguna manera el énfasis, en lugar de hacer la contradicción manifiesta, sirve para esconderla.[18]

Claro está que esta crítica a la desnudez ontológica no implica que, por el contrario, Geach piense que un individuo se pueda caracterizar como un conjunto de propiedades. Aquí, más que argumentar, Geach predica con un ejemplo que es bastante ilustrativo: piénsese en un área triangular y sus lados, "No tenemos", dice Geach, "que identificar el triángulo con sus lados, ni hipostasiar un triángulo sin lados que posee o viste (*wears*) los lados y carece de ellos precisamente por eso."[19] Más allá de su eficacia para ponernos en el buen camino entre la desnudez pura y el puro vestido, el ejemplo es curioso porque recurre a un área geométrica y éstas, se sabe, no se dejan contar tan fácilmente. Geach mismo recuerda que Davidson le señaló que las áreas y los

[18] *Íbid., pp 289-90*

[19] *Ibid.*, p. 290

lapsos temporales pueden ser identificados pero no contados. Una situación similar ya había sido ilustrada por Quine en "Identity. Ostension and Hypostasis". Supongamos con Frege que estamos ante un fenómeno y, con Quine, que dicho fenómeno es la siguiente figura:



Si nuestro discurso es acerca de "las regiones convexas delineadas (*outlined convex regions*) visibles, grandes y pequeñas", entonces el número que le corresponde a esta figura es 33. Por otro lado, si consideramos que las regiones geométricamente similares son intercambiables, entonces el número correspondiente sería 5, que enumera cinco formas geométricas: triángulo isósceles rectángulo, cuadrado, rectángulo dos a uno, y dos formas trapezoides. Así, dice Quine,

> [...], nuestra máxima de identificación de los indiscernibles nos conduce, para los fines de este discurso, a hablar no de similaridad sino de identidad; a decir no que *x* y *y* son similares, sino que *x*=*y*, reconstruyendo así los objetos *x* y *y* no ya como regiones, sino como formas.[20]

Desafortunadamente el paralelo originado en las áreas y regiones no va muy lejos, ya que Quine usa su ejemplo para contrastar "rojo" con "triángulo" (ambos son universales pero su explicación es distinta), mientras que Geach prefiere subsumir el problema de si toda equivalencia define un término contable en el problema de un criterio de divisibilidad, que era precisamente el problema que, de acuerdo con Quine, dificultaba contar cosas rojas. Así, por un lado, Geach se pregunta:

[20] Quine, "Identity, Ostension and Hypostasis", en *From a Logical Point of View, p. 73*

> ¿Puede cualquier expresión de una relación de equivalencia servir para definir un substantivo contable? [..] Donald Davidson sugirió lo contrario y dio una razón: las áreas y los lapsos temporales se pueden identificar pero no contar. Esto se relaciona con un dificultad ya formulada por Frege (*Grundlagen der Aritmetik,* p.66) en relación con qué *Bregriff* determina un número cardinal. Tiene que ver con la divisibilidad de lo que es un *A* en partes que también son *A*, o con la combinabilidad de partes que son *A* en un todo que también es *A*.[21]

Por otro lado, Quine, como ya vimos, relaciona el problema de la divisibilidad con conceptos como "rojo" y no con conceptos cuyo criterio de identidad es lo suficientemente claro como para determinar una relación de equivalencia. Para Geach la dificultad es que si los substantivos contables van a ser explicados por una relación de equivalencia y no todas las equivalencias establecen un mecanismo para contar, entonces la determinación de cuál sea la adecuada se convertirá en una decisión problemática que se relaciona con la teorización acerca de los términos masa. Señala Geach:

> (Y aquí podríamos tener que retornar al tópico de los términos masa.) No trataré de resolver este problema aquí, ya que no necesitamos dudar que la predicación de un substantivo contable se puede siempre explicar de la manera que lo he hecho, en términos de *alguna* relación de equivalencia; lo que pasa es que *no todas* las relaciones de equivalencia sirven para este propósito y la restricción requerida todavía no es clara.[22]

Y tampoco es claro, podríamos agregar, cómo se podría establecer un criterio de identidad para términos como "agua" o "azúcar" que, en opinión de Quine, no se prestan naturalmente a ser precedidos por "la misma" o "una": "la misma agua", "una azúcar".[23] Esta dificultad es la que, en primera instancia, aleja a los términos masa de la cuantificación. El problema básico de Geach, no obstante, es cómo establecer sus tesis de que "el mismo *A*" tiene prioridad sobre "es un *A*" en términos afines con la cuantificación, ya que la cuantificación, al menos ortodoxamente concebida, favorece la prioridad de "es un *A*". Esta inclinación casi natural se deriva de la especificación de un universo de discurso como "el conjunto de *x* tales que...", donde los puntos

[21] "Ontological Relativity and Relative Identity", p. 291

[22] *Ibid* , pp. 291-92

[23] Véase Reseña, p 102

suspensivos son ocupados por un término contable. Una vez que se establece cuáles son los miembros del universo podemos establecer relaciones entre ellos y una de estas relaciones es la de equivalencia; pero la prioridad es obvia, primero se es un *A* y después se es igual o diferente y las identidades o igualdades serán naturalmente absolutas. Y de Ferdinand mejor ni hablemos. De Geach podemos decir que tiene que explicar cómo cuenta sus *A* y sus *B* no sólo en el caso en que, ortodoxamente, *B* sea una partición de *A*, sino cuando cada uno de los elementos del dominio sea un *A* y sea un *B*. Esta explicación será básica para entender qué tan radical es la afirmación "*x* es el mismo *A* que *y*, pero no el mismo *B*" y para distinguirla de interpretaciones que aceptan la importancia de especificar un substantivo contable en una relación de identidad, pero que, no obstante, insisten en el carácter absoluto de la relación.

La explicación ortodoxa de la relación entre la cuantificación y la enumeración se puede ilustrar con la explicación que da Quine en *Methods of Logic.*[24] En este libro ejemplar Quine señala que la introducción del signo de identidad dentro de la cuantificación está relacionada con la flexibilidad de las variables que permite que dos variables se puedan referir al mismo objeto o a objetos diferentes. La necesidad de introducir cierta rigidez (no kripkeana, desde luego) se hace patente cuando tenemos que traducir expresiones que involucran números y precisiones numéricas; en estos casos es esencial que se establezca la igualdad o diferencia entre las variables. Los ejemplos de Quine son las siguientes fórmulas:

$(x)(y)(x$ es un dios . y es un dios . $\supset$. $x=y)$
$(\exists x)[x$ es un dios . $(y)(y$ es un dios $\supset$. $x=y)]$
$(\exists x)(\exists y)(x$ es un dios . y es un dios . $x\neq y)$
$(x)(y)(z)(x$ es un dios . y es un dios . z es un dios . $\supset$: $x=y$ .v. $x=z$ .v. $y=z)$

que equivalen, respectivamente, a las afirmaciones:

Hay, a lo más, un dios.
Hay, exactamente, un dios.
Hay, al menos, dos dioses.
Hay, a lo más, dos dioses.[25]

[24] Véase Quine, *Methods of Logic*, 3° ed. rev.

[25] *Ibid.*, p.223

Este proceso se podría generalizar si quisiéramos cuantificadores numéricamente definidos; con Frege, Quine identifica "$(\exists_0 x)Fx$" y " $(\sim\exists x)Fx$" y, a partir de esta identificación y la identidad, genera el resto de los cuantificadores numéricos:

"$(\exists_1 x)Fx$" se explicaría como "$(\exists x)[Fx \,.\, (\exists_0 y)(Fy \,.\, y \neq x)]$"

"$(\exists_2 x)Fx$" como "$(\exists x)[Fx \,.\, (\exists_1 y)(Fy \,.\, y \neq x)]$"

"$(\exists_3 x)Fx$" como "$(\exists x)[Fx \,.\, (\exists_2 y)(Fy \,.\, y \neq x)]$"[26]

Las limitaciones de este proceso, nos indica Quine, es que aun cuando podemos reconocer que a dos predicados les corresponde el mismo cuantificador numérico, no podemos establecer en general cuándo a dos predicados les corresponde el mismo número. Esto quiere decir que no tenemos una caracterización de un cuantificador numérico con variable *n*. Por tanto, dice Quine:

> [...] aunque fácilmente podemos decir que hay doce apóstoles y doce musas, en la forma:
>
> $$(\exists_{12} x)Fx \,.\, (\exists_{12} x)Gx$$
>
> encontramos con dificultades si simplemente queremos decir: 'Hay tantos apóstoles como musas', sin decir cuantos. El plan:
>
> $$(\exists n)[(\exists_n x)Fx \,.\, (\exists_n x)Gx]$$
>
> no está disponible, ya que no tenemos a la mano definiciones para expandir esta *expresión* [...][27]

Lo que falta es una caracterización adecuada de número, pero la versión quineana de la cuantificación numérica es suficiente para compararla con la

[26] *Ibid.*, p. 241

[27] *Ibid.*

forma en que cuenta Geach y con la forma en que habla de un universo de discurso. La discrepancia fundamental es que, como ya vimos, Geach no acepta la diferencia *solo numero* y, consecuentemente, sólo contará en relación con un substantivo y con un criterio de identidad asociado con él. Esto presupone que la caracterización de los objetos que constituyen un dominio también ha sido relativizada o establecida con la vaguedad asociada a "cosa" u "objeto", de manera tal que podamos hablar de los objetos del dominio que son *A* y contarlos con ese criterio. De esta manera toda enumeración se llevará a cabo con la ayuda de un substantivo y no se podrá contar *solo numero*, sin referencia substantival. Al mismo tiempo, desde el punto de vista de Geach, al definir "es un *A*" como "es el mismo *A* que algo u otro" se muestra que "*A*" sigue siendo un substantivo contable. La manera en la que Geach establece su lista es la siguiente:

> Especificaré una manera de asignar números a aquellos objetos en un dominio en tanto que son *A* (*as are A's*): cada uno de ellos el mismo *A* que algo u otro. Asignamos el 1 a un objeto *x* y a todo lo que (*whatever*) sea el mismo *A* que *x*, y a nada más (*nothing else*); asignamos el 2 a un objeto *y*, y a todo lo que sea el mismo *A* que *y*, y a nada más, y así sucesivamente."[28]

Una vez especificado el criterio con el que se va a contar tenemos que garantizar que no contemos el mismo objeto dos veces; esta garantía, enfatiza Geach, nos la da la noción misma de clase equivalente, ya que estas clases o coinciden o no tienen miembros en común. Dice Geach:

> No debemos asignar dos números a ningún objeto en el dominio; esta condición se puede cumplir porque las cosas que son el mismo *A* que *x* no pueden traslaparse con las cosas que son la misma *A* que *y*; las clases de equivalencia deben o coincidir o escindirse.[29]

En este sentido no es difícil suponer que dados dos diferentes substantivos contables, "*A*" y "*B*", es posible que las cuentas sean diferentes; lo que ya no es tan fácil de aceptar es que la misma discrepancia sea posible cuando todos los elementos del dominio sean *A* y sean *B*. Sin embargo, aquí hay que notar que aunque Geach usa las variables *x* y *y*, no está

[28] "Ontological Relativity and Relative Identity", p. 292

[29] *Ibid.*

presuponiendo, ortodoxamente, la posibilidad de diferenciarlas *solo numero*, esto es, la posibilidad de distinguirlas en términos absolutos. También hay que notar que, como ya habíamos señalado, esta situación nos podría hacer pensar en una coincidencia extensional y una diferencia intensional entre "*A*" y "*B*", pero Geach rechaza esta interpretación. En primer lugar explica que el que todos los elementos del dominio sean *A* y sean *B* quiere decir, en su teoría, que todos los elementos son tanto el mismo *A* que algo como el mismo *B* que algo. En segundo lugar nos ofrece un ejemplo que ilustra su afirmación: supongamos un dominio en el que todos los padres son tíos y todos los tíos son padres, esto no implica que "es padre de" coincida extensionalmente con "es tío de". En palabras de Geach:

> Es fácil ver que si "*A*" y "*B*" representan substantivos contables diferentes, la cuenta de los *A* en un dominio puede ser diferente de la cuenta de los *B*, aun si todo en el dominio es tanto un *A como un B, es decir*, es, a la vez, el mismo *A* que algo y el mismo *B* que algo. Esto parecería introducir contextos no extensionales, "es el mismo ... que" y "la cuenta de ... " para substantivos contables. Pero un momento de reflexión basta para hacer desaparecer esta apariencia. En forma similar, en un dominio en el que todo lo que es un padre es un tío y a la inversa, "es padre de" y "es tío de" no necesitan de ninguna manera coincidir; pero esto no quiere decir que en la construcción "es ... de" haya un lugar no extensional para un argumento (*a nonextensional argument place*) que pueda ser ocupado por substantivos como "padre" y "tío"."[30]

Estas precisiones le permiten a Geach contestar algunas objeciones muy repetidas y enfatizar el alcance de su propuesta. En primer lugar están dos preguntas básicas que se suelen formular asumiendo la identidad absoluta: dadas dos expresiones referenciales, ¿designan o no la misma cosa? y, dada una lista, ¿contiene repeticiones, aparece la misma cosa más de una vez? La naturalidad misma de estas preguntas hace manifiesta la heterodoxia de Geach; para él, claro está, estas preguntas deben relativizarse y reformularlas agregando un substantivo contable cuyo criterio de identidad explicite de qué estamos hablando. Este problema, saber de qué estamos hablando, se plantea abiertamente en la teoría de la cuantificación cuando aparecen las nociones de universo de discurso y de interpretación. La respuesta de Geach es que cuando es plausible caracterizar un dominio con una lista, cuando es finito, la lista no tiene que ser no-repetitiva. Esto es así porque, dado un dominio finito, la cuantificación universal se interpreta como una conjunción

[30] *Ibid.*

(finita) y la cuantificación existencial como una disyunción (finita) y en ambos casos la repetición no afecta la verdad de las fórmulas resultantes. Arguye Geach:

> Se podría objetar (y se ha objetado) que no tengo derecho a hablar, como lo he hecho, acerca de un dominio de cuantificación, un universo de discurso; un dominio se debe dar por un pequeño párrafo (*bit*) absolutamente no repetitivo o no darse, punto. Quienes así objetan *parece que mal entienden* la tarea de asignar interpretaciones en la lógica de predicados. En primer lugar podríamos tener que considerar dominios indenumerables (*indenumerable*). Tales dominios simplemente no pueden ser listados, sea la lista finita o infinita. En segundo, la interpretación por medio de un dominio finito y listado no requiere de ninguna manera que la lista sea no-repetitiva.[31]

Además, si alguien *decidiera insistir en que* la repetición es un defecto que afecta nuestra manera de contar, Geach está dispuesto a aceptar que puede haber una ambigüedad en la forma en que introduce su dominio, pero también está pronto a ofrecernos el remedio: la introducción de un substantivo contable que, gracias a la equivalencia que lo estructura, acabará con las repeticiones. Volviendo a un ejemplo ya mencionado, dice Geach:

> La palabra "palabra", señalé, es ambigua. Puede significar "palabra-instancia" o "palabra-tipo" o "palabra con entrada en el diccionario" o varias otras cosas. No obstante, puedo especificar como universo de discurso las palabras en un volumen dado de mi cuarto en Leeds, ya que le podría dar a cada palabra en el volumen un nombre propio y obtener una lista finita. La ambigüedad que acabo de mencionar es una ambigüedad que afecta lo que contará como la misma palabra; pero puesto que, de todos modos, una lista que especifica un dominio no necesita que ser no-repetitiva, *esto no debe preocuparnos*.[32]

Pero, alguien podría insistir, ¿no debe preocuparnos la conclusión geachiana que conjunta la posibilidad de contar en función de diferentes criterios con la posibilidad de que una entidad sea tres cosas distintas y una a la vez?, ¿podríamos pensar que la heterodoxia lógica empieza a tomar visos de una ortodoxia teológica? En términos más *bibliotecarios* que teológicos, Geach no sólo distingue tres formas de contar palabras, sino que las cuenta

---

[31] Ibid.

[32] *Ibid*. p. 294

como "cosas" que si bien surgen de un substantivo contable no están casadas con él. Dice Geach:

> [...] cada cosa en el universo es la misma palabra-instancia que sí misma *y* la misma palabra-tipo que sí misma *y* la misma palabra con entrada en el diccionario que sí misma, y así, cada una es (*both is*) una palabra-instancia *y* una palabra-tipo *y* una palabra con entrada en el diccionario.[33]

Pero, si hablamos de una entidad, ¿no debería ésta pertenecer a una sola clase? La respuesta es compleja porque depende finalmente de la idea que tengamos de una entidad; si pensamos que podemos hablar de entidades con independencia de una categorización, distinguibles *solo numero*, entonces el problema es explicar la necesidad de pertenencia. Si, por otro lado, pensamos que al hablar de entidades hacemos siempre referencia, implícita o explícitamente, a una categorización, *entonces la pertenencia* está determinada por esa categorización. El problema está enraizado en la teoría clásica de la cuantificación, recordemos que la ortodoxia acepta la existencia de particiones que generan clases de equivalencias dentro de un universo ya establecido y que, incluso, puede permitir que nuestro discurso, por conveniencia, haga referencia a esas clases en términos de entidades. Refiriéndose a los críticos que les parece inaceptable que un miembro de un universo (de palabras) pueda ser una palabra-instancia y una palabra-tipo y una palabra con entrada en el diccionario, dice Geach:

> Hago caso omiso de la protesta que este resultado es incoherente porque la entidad en cuestión debe ser (*must be*) de sólo una de estas tres clases; no hay tal "debe". Tenemos ante nosotros (*in view*) una entidad que pertenece al campo de esas diferentes relaciones de equivalencia y que, por lo tanto, cae bajo diferentes cuentas al usar diferentes substantivos contables; cada uno de los substantivos contables tiene aplicación: así es como se usan los substantivos contables. Al contrario, es la pregunta: "pero, ¿cuál es realmente? la que es incoherente e ininteligible."[34]

Esta conclusión sugiere inmediatamente la pregunta: ¿cómo se estableció el universo de discurso?; hablar de una lista (de palabras) tiene sus bemoles ya que, desde el punto de vista de Geach, debemos evitar la

[33] *Ibid.* p. 294

[34] *Ibid.*

prioridad tradicional de "... es una palabra" sobre "... es la misma palabra que...". Por otro lado, si se hace notar que con el uso de nombres propios se suele asociar un criterio de identidad y que, por tanto, al hacer la lista de palabras implícitamente se está haciendo referencia a un criterio de identidad (de palabras), entonces o volvemos a la vaguedad referencial de las variables, propiciada por la falta de un substantivo contable, o apelamos a otro substantivo, posiblemente más general, que delimite el universo de discurso sobre el que establecer la equivalencia "... es la misma palabra que ...". Este escalamiento tendría la ventaja de relacionar mecanismos y afanes de categorización, típicamente filosóficos o científicos, con los mecanismos de la cuantificación y la predicación. Pero este proceso puede ser complejo, la transcategorización relacionada con un mismo nombre o, si se quiere, el cambio de cuentas de acuerdo con el cambio de sustantivo contable, tendría el curioso resultado de propiciar que algunos nombres propios perdieran su propiedad. Esta propiedad bien podría entenderse como aquella substancia con la que singularmente se les asocia o bien podría ser la propiedad cuasi definitoria de ser expresiones referenciales unívocas; en ambos casos la unidad daría paso a la pluralidad. Esta posibilidad es aceptada por Geach:

> [...] Estoy aquí considerando desarrollos lingüísticos a partir de un aumento de conocimiento; esto no es un cambio de opinión sino de tema.) Y si enlistamos por sus nombres las cosas que cuantificamos, uno de estos nombres puede resultar no un nombre propio sino compartido, de objetos que ahora podemos discriminar pero antes no podíamos.[35]

Claro que si nombres que eran propios se pueden volver comunes y viceversa, escasamente podemos pensar que nuestra ontología está, como alguna vez creyó Geach, bajo control. Sin embargo, esta pérdida de control, o de ilusión de control, no es tan importante, es sólo parte de una actitud epistemológica que acepta que el conocimiento puede cambiar. Lo que sí es importante es mostrar que el control ontológico asociado con la interpretación ortodoxa de la identidad no es tan claro como asumir un universo de discurso y establecer una relación de equivalencia; que esta falta de claridad persista aun asumiendo el punto de vista relativista de Geach es otra cosa. Este punto de vista insiste tanto en la cualificación de la identidad como en la prioridad de la relación "es el mismo *F* que" sobre la predicación "es un *F*". La ortodoxia, por el contrario, privilegia "es un *F*" y considera que una vez establecida esta

---

[35] *Ibid* p. 301

predicación la relación de identidad no puede ser sino absoluta; esta prioridad tradicional la podríamos entender entonces como suponiendo una entidad independientemente de un criterio de identidad que la determine. La prioridad geachiana, por otro lado, al privilegiar el criterio de identidad hace que la entidad de la que vamos a predicar dependa de ese criterio. Esto quiere decir que la relación de nombrar no es tan adánica como podría pensarse, que si bien las cosas pueden estar allí para ser nombradas, su bautizo las ensimisma con respecto a la comunidad de un substantivo contable.

La posibilidad de que con un mismo nombre se asocien diferentes números tiene un notorio antecedente en la Santísima Trinidad que, como su nombre lo indica, más acá de consideraciones teológicas y de su santidad, es una y son tres. Pero antes de apresurar paralelos debemos recordar que entre ese nombre y su substanciación media un dogma; este dogma, rechazado por la ortodoxia lógica, puede ser reconsiderado desde un punto de vista lógico y desestigmatizado como paradigma de irracionalidad. Esto, sin embargo, no quiere decir que el dogma de la trinidad sea inmediatamente aceptable ya que, de acuerdo con el propio Geach, el número adscrito está en función de un substantivo y no en términos propiamente numéricos: con la Santísima Trinidad asociamos el tres no simplemente porque toda trinidad está compuesta de tres elementos, sino porque en este caso se trata de tres personas. El problema es entonces como concebir estas personas sin privarlas de su divina realidad, esto es, sin reducirlas a relaciones lógicas que nos acercaran peligrosamente a la herejía Sabeliana:

> Padre se denomina sólo por la paternidad y el Hijo sólo por la filiación. Por lo tanto si no existiera una paternidad real o una filiación real en Dios, se seguiría que Dios no es realmente Padre o Hijo, sino sólo en nuestro entendimiento; y esta es la Herejía Sabeliana.[36]

Este problema, sin embargo, ya no es puramente lógico, puesto que tiene que ver con la existencia y su substancia (si la tiene), con la divinidad y sus personas (si lo son). Lo cual quiere decir, finalmente, que la ortodoxia lógica está reñida con el dogma no tanto porque éste sea ilógico, sino porque la concepción de la substancia que priva en la ortodoxia lógica es puramente numérica. No se trata entonces de principios lógicos sino de lo que Leibniz llamó principios morales; el problema no es tanto la argumentación lógica sino su fundamento.

---

[36] Santo Tomás, *Summa Teologica*, q.28, a.1

Resumen

En este capítulo se examinaron algunas de las tesis de Geach relacionadas con la relatividad de la identidad; la principal de ellas es la que afirma la prioridad del predicable relacional "es el mismo A que" sobre el predicable "es un A". La prioridad se establece arguyendo que "es un A" se puede definir como "es el mismo que algo u otro" o, más concisamente, como "es el mismo A que sí mismo"; en esta argumentación se enfatiza que "es el mismo A que" no se puede descomponer en "es un A y es el mismo que", donde "el mismo" queda sin relativizar y podría considerarse absoluto. Esta consideración apunta a una de las formas más controvertidas de la teoría de Geach: la posibilidad de afirmar que diferente A puedan ser el mismo B, como diferentes funcionarios (official personages) pueden ser la misma persona. Esta posición cuestiona la idea de que los valores de las variables difieren o son iguales en términos categóricos y por tanto, señala Quine, "es antitética con la noción misma de cuantificación", que supone la identidad sin cualificaciones. Esta asunción de la identidad absoluta es clara en la teorización que le permite a Frege definir la noción de número en los *Grundlagen*, especialmente cuando tiene que establecer la noción de "equinumerosidad" y caracterizar una relación como "uno a uno". Consecuentemente, Geach reformulará, en términos relativizados, la caracterización de Frege de "uno a uno" y aprovechará este contexto para señalar que, según Frege, "el número de cosas rojas en este salón" no determina un número finito, cuando la realidad, según Geach y su relativización, es que no podemos empezar a contarlas. Esta conclusión no sólo afecta la caracterización de Frege de las relaciones "uno a uno" y "tantos como", sino que invita a un examen de aquellos términos que, como "rojo", no tienen un criterio de identidad claro y no son susceptibles a la adjudicación de un número; la anomalía de la situación propicia también la reconsideración de las relaciones entre los predicados "es un substantivo", "es contable", "es cuantificable" y "es el mismo". Para Quine el problema radica en la "divisibilidad conceptual de las cosas rojas en cosas rojas", puesto que dificulta que las contemos, pero esto no quiere decir, señala, que no haya forma de determinar si *d* es la misma cosa roja que *e*. Claro que "cosa" es un concepto que difícilmente puede satisfacer a Geach, ya que o es muy general, y carece entonces de un criterio de identidad, o no es tan general y tiene que relacionarse con clase determinada por un criterio de identidad. Una cosa es la vaguedad y otra la neutralidad, aunque a veces se lleven bien; la vaguedad de "cosa" se puede convertir en la neutralidad de una variable individual porque asumimos que tiene sentido hablar de la misma cosa, o de dos o más cosas diferentes, sin especificar de qué cosa estamos hablando. Esta asunción la cuestiona Geach recordando *la relación que* estableció Frege entre números y conceptos: "un número siempre es relativo a un *Begriff*". ¿Cómo es entonces que podemos contar o hablar de la misma cosa sin hacer referencia a un concepto? Rechazando, responde Geach, el principio de la identidad de los indiscernibles y aceptando la diferencia *solo numero*. Algunos aspectos de estas nociones ya se examinaron en los capítulos anteriores; Geach considera y rechaza las relacionadas con aquellas concepciones que reducen a los *individuos a meros (bare)* particulares sin propiedades o a meros conjuntos de propiedades. El problema de la identificación de individuos y la posibilidad de contarlos se relaciona con una observación de Davidson, acerca de que las áreas y los lapsos de tiempo pueden ser identificados pero no contados, y con una dificultad, planteada por Quine, acerca de las diversas formas de contar áreas. Geach, a su vez, relaciona el problema con la cuestión, planteada por Frege, de qué conceptos determinan un número cardinal y con la teorización de acerca de los "términos masa", términos que, como "agua" y "azúcar", no se llevan bien con expresiones como "la misma" o "una". Esta dificultad aleja a los términos masa de la cuantificación y centra la atención en los substantivos contables y en la posibilidad de caracterizarlos *a la* Geach, esto es, favoreciendo "es el mismo A" sobre "es un A". La dificultad se centra en la noción de universo de discurso, ya que un universo de discurso se suele especificar como el conjunto de aquellos *x* que son A. Una vez establecido el universo de discurso se pueden establecer relaciones de equivalencia, pero ortodoxamente, esto no afecta la identidad del valor de las variables, que se ancla en la predicación "es un A". Geach, en cambio, tiene que especificar su universo de discurso con referencia a "es el mismo A que algo" y mostrar que esta forma de hacerlo, aunque deja abierta la posibilidad de que se adscriban diferentes números a ese universo, es compatible con la teoría de la cuantificación. La diferencia en número, entre un universo especificado por "es el mismo A que algo" y uno especificado por "es el mismo B que algo", se convierte en una diferencia teórica notable cuando Geach insiste en que se puede dar aun cuando todo en ese universo sea tanto A como B. A la objeción de que si tuviera que enlistar su universo, la lista sería repetitivas, Geach responde que la repetición no afecta las condicioners de verdad de las oraciones interpretadas. Y si se insiste en que la repetición es un defecto que afecta nuestra manera de contar, Geach está dispuesto a aceptar que puede haber cierta ambigüedad en la forma en que se introduce el dominio o universo, pero también está presto a ofrecernos el *remedio*: la introducción de un substantivo contable que, gracias a la equivalencia que lo estructura, acabará con las repeticiones. Esta introducción de substantivos contables como marco de referencia puede relacionarse con afanes de categorización *típicamente* filosóficos y científicos; la necesidad de estas categorizaciones marcaría la distancia que nos separa de la diferenciación puramente numérica.

Conclusiones

Las conclusiones a las que apunta esta investigación se resumen en las siguientes observaciones:

i. El afán lógico de caracterizar la identidad conlleva la discusión de nociones y principios que rebasan el ámbito puramente formal y son parte del acervo clásico de problemas filosóficos. Al ocupar un lugar privilegiado en las discusiones acerca de la cuantificación, los compromisos ontológicos y la definición de número, la reflexión sobre la identidad es un recordatorio de que el "ascenso semántico" sigue anclado en una problemática clásica en la que la lógica requiere de fundamento.

ii. La relación entre los problemas que plantea la caracterización de la identidad y algunas actitudes clásicas no sólo se manifiesta en la frecuencia con la que aparecen las nociones de "entidad", "cosa", "individuo" o principios como el de la identidad de los indiscernibles, de razón suficiente o de diferencia *solo numero*, sino que también es manifiesta en la repetición de actitudes y argumentos, como lo muestran los paralelos entre la polémica Leibniz-Clarke y las críticas de Wittgenstein a Russell o la afinidad entre la argumentación de Kripke en relación con la noción de mundos posibles y la posición leibniziana.

iii. Estas relaciones entre una problemática clásica y una típicamente contemporánea abren la puerta, si no al rechazo, sí a una mejor comprensión de esa ortodoxia y sus razones. Aunque entre estas razones no se suele encontrar la existencia, ésta se puede considerar, dentro de cierta heterodoxia, como condición del análisis lógico; así lo consideró Leibniz cuando distinguió entre principios morales y principios lógicos y así podría interpretarse la mencionada actitud de Kripke con respecto a los mundos posibles o su distinción entre necesidad metafísica y necesidad epistemológica.

iv. La versión heterodoxa o relativista de la identidad de Peter Geach podrá no ser convincente en sus conclusiones pero sus planteamientos han sido suficientes para incitar y propiciar la explicitación de las razones de la ortodoxia que se establece a partir de la gran obra de Frege. Esta explicitación ha hecho manifiesta la complejidad de la relación entre la identidad y las nociones de nombre propio, referencia dividida, términos masa y número.

v. El afán quineano de explicar las fallas de substitutividad en términos de transparencia y opacidad, es circular y muestra que las asunciones ontológicas (estamos hablando de la misma cosa) con respecto a la aplicación de un principio tienen sus bemoles. La independencia de una entidad con respecto a la manera en que *nos referimos* a ella o establecemos su existencia –piénsese en los números y en las entidades abstractas en general– no es siempre fácil de establecer y propicia actitudes filosóficas antiplatónicas que no hacen abstracción de nuestra temporalidad y nuestra finitud.

vi. Los planteamientos de Geach invitan a pensar que la neutralidad de las variables, que supone la diferencia *solo numero* y la equivalencia extensional, debe ser suplementada por la conceptualización que marca la problematicidad filosófica. Como señala Geach, no basta con saber que todos los hombres son personas y viceversa para identificarlos, se necesita argumentar. O, como diría Russell, no hace falta desplumar una gallina para saber que "bípedo implume" todavía dista de la esencia humana, por más que se la encarne en ciclista. Sin embargo, tal vez el ejemplo más claro de cómo la argumentación puede suplementar los planteamientos formales es el que estableció Russell cuando, de la estructura lógica que había servido para establecer la transfinitud, derivó una paradoja y pasó buena parte de su vida tratando de evitarla; la transfinitud, en cambio, con o sin paradoja, siguió creciendo.

vii. La neutralidad ontológica de las variables tiene inmensas ventajas y va de la mano con la identidad sin cualificaciones, sin embargo nuestra reflexión no puede ignorar que el ascenso semántico al *topos uranus* está marcado por la oblicuidad. Ortodoxamente esta oblicuidad es la que conlleva un discurso que habla de verdades y oraciones; heterodoxamente, suponiendo la relatividad de la identidad, esta oblicuidad podría afectar la rectitud referencial de las variables y la "decencia" de la ontología que se asocie con ellas.

Referencias Bibliográficas

Anscombe, G.E.M. (1967) *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, 3ra. ed., Hutchinson University Library, Hutchinson, Londres.

Aquino, Sto. Tomás de (1978) *Summa Theologica*, trad. Fathers of the English Dominican Province, Encyclopaedia Britannica, Chicago.

Aristóteles (1962) *Categorías*, trad. H.P. Cook, Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Cartwright, Richard (1971) "Identity and Substitutivity" en M.K. Munitz (ed.) *Identity and Individuation*, New York University Press, Nueva York.

Chihara, Charles (1973) *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, Cornell University Press, Ithaca y Londres.

Church, Alonzo (1968) "Paradoxes, logical" en D. Runes (ed.) *Dictionary of Philosophy*.

Coffa, J.A. (1979) "The Humble Origins of Russell's Paradox", *Russell*, 33-34.

Dauben, J.W. (1979) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Fraenkel, Abraham A. (1967) "Cantor, George" en Paul Edwards (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan Publishing Co., Nueva York.

Frege, Gottlob (1892) "On Sense and Meaning" en P. Geach y M. Black (eds.) *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*.

-------------- (1894) "Ilustrative Extracts from Frege's Review of Husserl's *Philosophie der Arithmetik*, en P. Geach y M. Black (eds.) *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*.

-------------- (1972) *Conceptografía * Los fundamentos de la aritmética * Otros estudios filosóficos*, trad. Hugo Padilla, UNAM, México.

-------------- (1980) *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, 3ra. ed., P. Geach y M. Black (eds. y trads.), Basil Blackwell, Oxford.

-------------- (1980) *Philosophical and Mathematical Correspondence*, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, (eds), trad. Hans Kaal, The University of Chicago Press, Chicago.

Geach, Peter (1967/8) "Identity", *Review of Metaphysics*, XXI.

------------ (1970) *Reference and Generality: An examination of Some Medieval and Modern Theories*, ed. correg., Cornell University Press, Ithaca y Londres.

------------ (1973) "Ontological Relativity and Relative Identity" en M.K. Munitz (ed.), *Logic and Ontology*, New York University Press, Nueva York.

Gödel, Kurt (1930) "The completeness of the Axioms of the functional calculus of Logic" en van Heijenoort *From Frege to Gödel.*

----------- (1983) "Russell's Mathematical Logic" en P. Benacerraf y H. Putnam (eds), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge.

Grattan-Guinness, Ivo (1978) "How Bertrand Russell discovered his paradox", *Historia Mathematica*, 5.

Heijenoort, Jean van (1967) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts.

---------- (1967) "Logical Paradoxes" en Paul Edward (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan Publishing Co., Nueva York.

Ishiguro, Hidé (1972) *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, Duckworth, Londres.

Jourdain, Philip (1955) "Introducción" en Georg Cantor *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, Nueva York.

Kripke, Saul (1972) "Naming and Necessity" en D. Davidson y G. Harman (eds.), *Semantics of Natural Languages*, D. Reidel, Dordrecht-Holland.

Lackey, Douglas (1976) "Russell's Unknown Theory of Classes: the Substitutional theory of 1906", *Journal of the History of Philosophy*, 14.

Lavine, Shaughan (1994) *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts.

Leibniz, G.W. (1903) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, L. Couturat (ed.), Paris.

------------- (1956) *The Leibniz-Clarke Correspondence*, H.G. Alexander (introd. y edición), Manchester University Press, Manchester.

------------- (1957) *Correspondance Leibniz-Clarke*, A. Robinet (presentación y edición), Presses Universitaires de France, Paris.

------------- (1962) *Discurso de Metafísica*, A. Castaño Piñán, Aguilar, Buenos Aires.

------------- (1964) *Monadología*, M. Fuentes (trad.), Aguilar, Buenos Aires.

------------- (1966) *Leibniz: Logical Papers*, G.H.R. Parkinson (trad.), Oxford University Press, Oxford.

Lewis, David (1973) *Conterfactuals*, Basil Blackwell, Oxford.

Locke, John (1959) *An Essay Conceming Human Understanding*, A.C. Fraser (ed.), Dover, Nueva York.

Moore, Gregory H. (1988) "The roots of Russell's Paradox", *Russell*, n.s. 8.

Nussbaum, Martha (1988) "Aristotle" en Bryan Magee (ed), *The Great Philosophers*, Oxford University Press, Oxford.

Parkinson, G.H.R. (1965) *Logic and Reality in Leibniz's Metaphysics*, Oxford University Press, Oxford.

Penrose, Roger (1989) *The Emperor's New Mind: Conceming Computers, Minds, and The Laws of Physics*, Oxford University Press, Nueva York.

Poincaré, Henri (1906) "Les Mathématiques et la Logique", *Revue de Metaphysique et de Morale*, 14.

Quine, W.v.O. (1936) "On the Axiom of Reducibility", *Mind*, 45.

------------- (1941) "Whitehead and the rise of modern logic", en P.A Schilpp (ed.) *The Philosophy of Alfred North Whitehead*, Open Court, La Salle.

------------- (1950) "Identity, Ostension and Hypostasis", en Quine *From a Logical Point of View*.

------------- (1953) "Reference and Modality" en Quine *From a Logical Point of View*.

------------- (1954) "The Scope and Language of Science" en *The Ways of Paradox*.

------------- (1960) *Word and Object*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

------------- (1961) "The Ways of Paradox", en *The Ways of Paradox and Other Essays*.

------------- (1963) *From a Logical Point of View*, 2da. ed. rev., Harper Torchbooks, Harper & Row, Nueva York.

------------- (1963) *Set Theory and Its Logic*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

------------- (1964) Reseña de *Reference and Generality* de Peter Geach, *Philosophical Review* 73.

------------- (1966) *The Ways of Paradox and Other Essays*, Random House, Nueva York.

------------- (1970) *Philosophy of Logic*, Foundations of Philosophy Series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

------------- (1974) *Methods of Logic*, 3ra. ed. rev., Routledge & Kegan Paul, Londres.

Ramsey, F.P. (1931) "The Foundations of Mathematics" en *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, R.B. Braithwaite (ed.), Routledge & Kegan Paul, Londres.

Richard, Jules (1905) "The principles of mathematics and the problem of sets" en van Heijenoort *From Frege to Gödel*.

Russell, Bertrand (1906) "Les Paradoxes de la Logique", *Revue de*

Metaphysique et de la Morale, 14. traducida como "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic" en B. Russell *Essays in Analysis*, D. Lackey (ed).

--------------- (1908) "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", en van Heijenoort, *From Frege to Gödel.*

--------------- (1903) *Principles of Mathematics*, 2da. ed., 1937, Norton, Nueva York, s.f.

--------------- (1906/1973) "On the Substitutional Theory of Classes and Relations", en B. Russell *Essays in Analysis*, D. Lackey (ed.).

--------------- (1937/1958) *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, 2da. ed., Allen & Unwin, Londres.

--------------- (1959) *My Philosophical Development*, Georges Allen and Unwin, Londres.

--------------- (1969) *The Autobiography of Bertrand Russell: 1872 to World War I*, Bantam Books, Nueva York.

--------------- (1973) *Essays in Analysis*, Douglas Lackey (ed.), Londres.

Russell, B. y Whitehead, A.N. (1964) *Principia Mathematica*, The Cambridge University Press, Cambridge.

Slote, Michael A. (1975) *Metaphysics and Essence*, Library of Philosophy and Logic, Blackwell, Oxford.

Strawson, P.F. (1964) *Individuals: An Essay in Descriptive Metaphysics*, University Paperbacks, Methuen, Londres.

Urquhart, Alasdair (1988) "Russell's zigzag path to the ramified theory of types", *Russell*, n.s. 8.

Voltaire (1961) *Dictionnaire Philosophique*, J. Benda (introd.) y R. Naves (edición), Classiques Garnier, Garnier Freres, Paris.

Wang, Hao (1962) *A Survey of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam.

Wiggins, David (1980) *Sameness and Substance*, Basil Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, Ludwig (1957) *Tractatus Logico-Philosophicus*, B.Russell (introd.), E. Tierno Galván (trad.), Revista de Occidente, Madrid.

------------------- (1969) *Notebooks, 1914-1916*, E. Anscombe (trad.), Harper Torchbooks, Harper and Row, Nueva York.