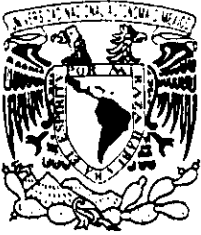


00384

3



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**GRUPOS DE TRENZAS Y CERRADURAS DE TRENZAS PURAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**DOCTORA EN CIENCIAS**

**MATEMÁTICAS**

**PRESENTA**

**M. EN C. LORENA ARMAS SANABRIA**

**MÉXICO, D.F.**

**2000**

282927



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**GRUPOS DE TRENZAS Y CERRADURAS DE TRENZAS PURAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**DOCTORA EN CIENCIAS**

**MATEMÁTICAS**

**PRESENTA**

**M. EN C. LORENA ARMAS SANABRIA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO GONZÁLEZ ACUÑA**

---

## 0. Introducción.

El teorema fundamental de cirugía probado por W. B. R. Lickorish [Li] y A. D. Wallace [Wa] afirma que toda 3-variedad conexa, orientable y cerrada se obtiene por cirugía entera en una  $n$ -trenza pura cerrada contenida en  $S^3$ . Ya que cirugía sobre 1-trenzadas puras cerradas produce espacios lentes [Mo], sobre 2-trenzadas puras cerradas produce, en general, espacios fibrados de Seifert; es natural preguntar qué tipo de variedad es obtenida por cirugía sobre una 3-trenza pura cerrada.

Un nudo  $K$  contenido en  $S^3$  tiene la propiedad P [GA1], si toda cirugía no trivial produce una 3-variedad no simplemente conexa. Diremos que un enlace contenido en  $S^3$  tiene la propiedad P si toda cirugía no trivial produce una 3-variedad no simplemente conexa; entendiéndose por cirugía trivial aquella en la que se hace la cirugía trivial en algunas o en todas las componentes del enlace.

Sea  $\mathbf{B}$  el conjunto de enlaces orientados contenidos en  $S^3$ , obtenidos como la clausura de 3-trenzadas puras. En este trabajo estudiamos la propiedad P para los elementos de  $\mathbf{B}$ . Tratamos este problema desde dos puntos de vista, uno geométrico y otro algebraico.

Un enfoque del problema anterior es desde el punto de vista de la teoría de libros abiertos (ver [Ro]). Las variedades obtenidas por cirugía sobre  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  tienen una descomposición en libros abiertos con página una superficie plana, tal que el número de componentes de su frontera es 4. Sin embargo, este no es el punto de vista considerado.

El grupo de trenzas puras de 3 cuerdas  $\mathbf{P}_3$  es el producto directo de dos grupos libres [FN]. Todo elemento  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  se expresa por  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^n \widehat{\sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$ , donde  $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$  y  $e_i, f_i, e \in \mathbb{Z}$ . Un diagrama representando  $\hat{\beta}$  es mostrado en la fig. 1.1.3. De ahora en adelante llamaremos  $K_i$  a las componentes del enlace, de manera que  $lk(K_1, K_2) = \sum e_i + e$ ,  $lk(K_3, K_2) = \sum f_i + e$ .

---

Sea  $L = \cup_1^n K_i$  un enlace orientado contenido en  $S^3$ . Denotamos por  $\eta(L) = \cup \eta(K_i)$  a la unión disjunta de vecindades regulares de las componentes. Sea  $(m_i, l_i)$  una pareja preferencial meridiano-longitud de  $\partial\eta(K_i)$ . Llamemos  $r_i \subset \partial\eta(K_i)$  a la curva tal que  $r_i = p_i m_i + q_i l_i$  con  $p_i/q_i \in \mathbb{Q} \cup 1/0$ ,  $(p_i, q_i) = 1$ . Hacer cirugía  $r_i$  en la componente  $K_i$  es considerar el espacio  $cl(S^3 - int \eta(K_i)) \cup_{\partial\eta(K_i)} T_i$  con  $T_i$  un toro sólido estándar con pareja preferencial  $(m'_i, l'_i)$  tal que  $m'_i$  se pega a lo largo de la curva  $r_i$ . Denotamos por  $\phi_i$  la cirugía en la cual  $m'_i$  se pega a lo largo de la curva  $m_i$ . Decimos que  $M^3$  es la variedad obtenida por cirugía sobre el enlace  $L = \cup_1^n K_i$  con marco  $(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, \phi_i, r_{i+1}, \dots, r_n)$  si  $M^3 = cl(S^3 - int \eta(L) \cup_{\partial\eta(L)} (\cup_1^n T_i))$ . Desde el punto de vista geométrico se prueba que ciertas trenzas contienen superficies incompresibles en su complemento, que persisten después de cirugía.

Llamemos  $L' \subset B$  al conjunto de enlaces tales que  $|e_i| > 1$ ,  $|f_i| > 1$ ,  $e = 0$ ,  $n \geq 1$ , es decir,  $\hat{\beta} = \prod \sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}$ . Denotemos  $r_{0_j} = lk(K_j, K_2)$  y sea  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-1}, \phi_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n)$  un marco tal que  $\epsilon_i = \pm 1$ , a menos que se especifique de otra forma. Aplicando un resultado de [CGLS] se prueba lo siguiente.

**Teorema 2.1.4** *Dado  $\hat{\beta} \in L'$  un enlace con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ , tal que  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_j \neq r_{0_j}$ , y  $r_j \neq (kr_{0_j} \pm 1)/k$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, 3$  la 3-variedad  $N^3$  obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  es Haken.*

De aquí se concluye lo siguiente, donde  $N^3$  es como en el teorema 2.1.4.

**Corolario 2.1.5**  *$N^3$  no puede ser una esfera homotópica.*

□

Llamemos  $K$  al nudo obtenido de  $\hat{\beta} \in L'$  con marco  $(\epsilon_1, \phi_2, \epsilon_3)$  con  $\epsilon_i = \pm 1/n$ . Probamos que  $K$  se descompone como la suma de dos ovillos  $\partial$ -irreducibles (Lema 2.2.2.,

---

Se calcula el invariante de Casson  $\lambda(M^3)$  de las  $Z$ -esferas homológicas obtenidas sobre elementos  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  algebraicamente separables. Sea  $\hat{\beta}$  algebraicamente separable.

**Teorema 4.1.3** *Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$ . Entonces  $\lambda(M^3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \left( \sum_{j < i}^n e_i f_j \right)^2$ .*

Sea  $B_1$  el conjunto de elementos  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i}$  algebraicamente separables, tales que si  $n$  impar  $e_j = e_{n-(j-1)}$ ,  $f_{n-j} = f_j$ ; si  $n$  par  $f_j = f_{n-j}$ ,  $e_{j+1} = e_{n-j}$ .

**Proposición 4.1.4** *Sea  $M^3$  una  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn en  $\hat{\beta} \in B_1$ . Entonces  $\lambda(M^3) = 0$ .*

**Corolario 4.1.5** *Si  $\hat{\beta} \in B_1 \cap L'$  entonces  $M^3$  no es una esfera homotópica.*

Sea  $\hat{\beta}$  una  $n$ -trenza pura cerrada, algebraicamente separable con marco  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ , orientada y contenida en  $S^3$ . Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . Denotemos por  $\lambda(\hat{\beta})$  al invariante de Casson de la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . Llamemos  $\mathbf{b}$  al conjunto de subenlaces  $\hat{\beta}' \subset \hat{\beta}$  que constan de 3 componentes. Aplicando un resultado de [H, teorema 2.1] se tiene lo siguiente.

**Proposición 4.2.2**  $\lambda(\hat{\beta}) = \sum_{\mathbf{b}} \lambda(\hat{\beta}')$ .

El trabajo consta de 4 capítulos. En el capítulo 1 se da una demostración de que el grupo de trenzas puro de 3 cuerdas  $P_3$ , es el producto directo de dos grupos libres. En el capítulo 2, sección 2.1 se demuestra que existen dos superficies incompresibles en el exterior del enlace  $\hat{\beta} \in L'$  y se prueba el teorema 2.1.4. En la sección 2.2 se demuestra el corolario 2.2.4. En la sección 2.3 se dan ejemplos de trenzas cerradas en las que se obtiene  $S^3$ . En el capítulo 3 se realiza el cálculo del invariante  $\mu$  para las  $Z_2$ -esferas homológicas obtenidas por cirugía entera en elementos de  $\mathbf{B}$ . En el capítulo 4, sección 4.1 se calcula el

---

---

invariante de Casson para las  $Z$ -esferas homológicas obtenidas por cirugía en los enlaces de  $\mathbf{B}$  algebraicamente separables ( proposición 4.1.3 ).

En la sección 4.2, usando un resultado de [H , teorema 2.1] se da la proposición 4.2.2. El simbolo  $\sim$  denota equivalencia entre elementos de un grupo dado en términos de generadores y relaciones, ó equivalencia entre grupos con presentaciones dadas;  $\cong$  denota equivalencia entre espacios hasta homeomorfismos.

## SUMMARY.

By the fundamental theorem of surgery proved by Lickorish-Wallace [LW] we know that any closed, connected and orientable 3-manifold is obtained by integral Dehn surgery on closed pure  $n$ -braids. Also it is known that surgery on closed pure 1-braids produces lens spaces; on closed pure 2-braids produces connected sums of lens spaces and, in general Seifert fiber spaces. So, it is a natural question to ask about what kind of 3-manifolds are obtained by surgery on closed pure 3-braids. We consider the set of links  $\mathbf{B}$  with integral framing  $(l_1, l_2, l_3)$  contained in  $S^3$  which are closed pure 3-braids ( but Chapter 2 Section 2 where non integral surgeries are also considered ). We are interested in knowing when it is possible to obtain a simply connected 3-manifold by integral Dehn surgery on a closed pure 3-braid in  $S^3$  and when such manifold is  $S^3$ . Since manifolds obtained have a decomposition as open books with a planar surface as page such that the number of components of its boundary is 4, the previous problem can be studied from the point of view of open books ( see [Ro] ). However, we will not consider that point of view. By [FN] we have that the group of pure 3-braids can be seen as the direct product of two free groups  $Z \times F_2$ . So we have a diagram representing any closed pure 3-braid. The diagram is the following where  $e_i$  is representing the word  $\sigma_1^{2e_i}$ ,  $f_i$  represents the word  $\sigma_2^{2f_i}$  and  $e$  represents the  $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{2e}$ .



From the geometric point of view we have the following. We denote by  $L' \subset B$  the set of links such that  $|e_i| > 1$ ,  $|f_i| > 1$ ,  $e = 0$  and  $n \geq 1$ . Elements  $L$  of  $L'$  have two incompressible surfaces  $S_j$  with  $j = 1, 3$  in its exterior  $E(L) = cl(S^3 - IntN(L))$  where  $N(L)$  is a regular neighborhood of  $L$ . Applying a result of [CGLS] it is possible to know when these surfaces remain incompressible after doing surgery. A 3-manifold  $N^3$  is Haken if it is irreducible and sufficiently large. So, we have that in many cases we get Haken manifolds and then in this cases is not possible obtain a homotopy sphere. We have the following results where we consider non integral framings and denote by  $M$  the exterior of a link.

**THEOREM 2.1.4**

Let  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i}$  be an element of  $L'$  with framing  $(r_1, r_2, r_3)$ , such that  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_j \neq r_{0_j}$  and  $r_j \neq (Kr_{0_j} \pm 1)/K$  for all  $K \in \mathbf{Z}$ ,  $j = 1, 3$ . Then the 3-manifold  $N^3$  obtained by surgery on  $\hat{\beta}$  is Haken.

□

And we have the the following where  $N^3$  is as in the previous theorem.

**COROLLARY 2.1.5**

$N^3$  cannot be a homotopy sphere.

□

When the 3-braid is  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} (\sigma_1^2)^{e_1} (\sigma_2^2)^{f_1}$  we have non trivial examples which produce  $S^3$  and in general we have

**PROPOSITION 2.1.6**

Let  $N^3$  be a homotopy sphere obtained by Dehn surgery on  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} (\sigma_1^2)^{e_1} (\sigma_2^2)^{f_1}$  with framing  $(r_1, r_2, r_3)$ . Then  $N^3$  is homeomorphic to  $S^3$ .

□

The previous result is extended in the following way. Let  $L \in L'$  be such that  $L =$

$K_1 \cup K_2 \cup K_3$  where the linking number between  $K_1$  and  $K_3$  is zero. We do surgery  $\epsilon_i = \pm 1$  on  $K_1 \cup K_3 \subset L$  to get a knot  $K$  which is the sum of two  $\partial$ -irreducible n-tangles so  $K$  is not trivial. Then we have that it is not possible to obtain  $S^3$  after doing a non-trivial surgery on  $K_2$ . In particular if we suppose  $L$  algebraically split and strongly invertible we will have that  $K$  has the property P by a result of [BS] and [GL].

From the algebraic point of view it is done the following. Applying a result of Gonzalez-Acuña ( see also [CS] ) the  $\mu$ -invariant is calculated. It is an invariant of the classes of cobordism of  $Z_2$ -homology spheres to the rational numbers module 1. Consider  $\hat{\beta} = \Delta^{2e}(\sigma_1^2)^{\epsilon_1}(\sigma_2^2)^{f_1}$  with framing  $(l_1, l_2, l_3)$ . Let  $P = (l_{ij})_{3 \times 3}$  be the linking matrix where

$$l_{ij} = \begin{cases} lk(K_i, K_j) & \text{if } i \neq j \\ l_i & \text{if } i = j \end{cases}$$

and  $U$  be the set of integers  $i$  such that  $\mu_i \neq 0$  where

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = P_2^{-1} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

where  $\bar{l}_i = l_i \pmod 2$  and  $P_2$  the matrix  $P$  module 2. We denote by  $\hat{\beta}_U = \cup_{i \in U} K_i$  to the proper sublink of  $r = \#\{U\}$  components and by  $\sigma(P)$  the signature of  $P$ . Denote  $A = 0$  if  $\#\{U\} = 1$ ,  $A = l_{ij}/4$  where  $l_{ij} = lk(K_i, K_j), i \neq j$  if  $\#\{U\} = 2$  or  $A = [e + \frac{-\sum \epsilon_i + \sum f_j}{2} - \sum_{i>j} f_j \epsilon_i]$  then we have the following where we denote as  $M$  the cobordism class of  $Z_2$ -homology spheres represented by the  $Z_2$ -homology sphere  $M$ .

### THEOREM 3.1.6

Let  $M^3$  be the  $Z_2$ -homology sphere obtained by integral Dehn surgery  $(l_1, l_2, l_3)$  on the closed pure 3-braid  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^{k'} \widehat{\sigma}_1^{-2\epsilon_i} \sigma_2^{2f_i}$ . Then  $\mu(M^3) = \frac{\sigma(P) - \sum_{i,j \in U} l_{ij} + 8A}{16}$

□

The Casson invariant of the oriented  $Z$ -homology spheres obtained on the algebraically split elements of  $\mathbf{B}$  is also calculated. A family of links is exhibited which produce

$Z$ -homology spheres with Casson invariant zero and it is proved that some of these homology spheres cannot be homotopy spheres. Let  $\mathbf{L} \subset \mathbf{B}$  be the set of algebraically split links and  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}$  such that  $\hat{\beta} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ . We consider the knot  $K$  obtained after doing surgery  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  on  $K_1 \cup K_2$  where  $\epsilon_i = \pm 1$ . We calculate the Alexander polynomial of  $K$ . It has the following expression.

$$\Delta_K(t) = 1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{\sum_{j<i} f_j} \right) \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{-\sum_{j<i} f_j} \right)$$

So, we can calculate the Casson invariant of the oriented  $Z$ -homology sphere obtained on any element of  $\mathbf{L}$ .

**THEOREM 4.1.3**

Let  $M^3$  be the oriented  $Z$ -homology sphere obtained by Dehn surgery on  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}$  with framing  $\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_3$ . Then the Casson invariant of  $M^3$  is given by

$$\lambda(M^3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \left( \sum_{j<i}^n e_i f_j \right)^2$$

□

To show the family of links which produce oriented  $Z$ -homology spheres with Casson invariant zero let

$$\mathbf{B}_1 = \{ \hat{\beta} \mid \beta = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i} \}$$

be such that if  $n$  odd  $e_j = e_{n-(j-1)}$  and  $f_{n-j} = f_j$  . and if  $n$  even  $f_j = f_{n-j}$  and  $e_{j+1} = e_{n-j}$ . We suppose  $\sum_{i=1}^n 2e_i = 0$  and  $\sum_{i=1}^n 2f_i = 0$ . Then we prove the following.

**PROPOSITION 4.1.4.**

Let  $M^3$  a oriented  $Z$ -homology sphere obtained by Dehn surgery on  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}_1$  then  $\lambda(M^3) = 0$ .

□

Furthermore, using the fact that any element of  $\mathbf{B}_1$  is strongly invertible we have the following corollary.

### COROLLARY 4.1.7

If  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{L}'$  then  $M^3$  is not a homotopy sphere.

□

Finally let an algebraically split, oriented  $n$ -pure braid  $\hat{\beta}$  be contained in  $S^3$  with framing  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ . Let  $M^3$  be the  $Z$ -homology obtained by surgery on  $\hat{\beta}$ . Denote  $\lambda(\hat{\beta})$  the Casson invariant of the  $Z$ -homology sphere obtained by surgery on  $\hat{\beta}$ . We call  $\mathbf{b}$  the set of sublinks  $\hat{\beta}' \subset \hat{\beta}$  which have 3 components. Applying a result of [H] we have the following.

### PROPOSITION 4.2.2

$$\lambda(M^3) = \sum_{\mathbf{b}} \lambda(\hat{\beta}').$$

The thesis has 4 Chapters and it is organized in the following way. In Chapter 1 a proof is given of the fact that the group of pure 3-braids  $P_3$  can be expressed as the direct product of two free groups. In Chapter 2 the study from the geometric point of view is done, in Section 2.1 the study of the links which we call small  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1}} \sigma_2^{2f_1}$  is done; in Section 2.2 it is proved that in the exterior of the elements of  $L \in \mathbf{L}'$  there exist two incompressible surfaces and that it is not possible to obtain homotopy spheres in many cases; in Section 2.3 it is proved that the knot  $K$  obtained from  $L$  after doing surgery on certain sublink of it is the sum of two  $\partial$ -irreducible  $n$ -tangles and so it is not trivial. In Chapter 3 the  $\mu$ -invariant is calculated. Finally, in Chapter 4 the Casson invariant is calculated; in Section 4.1 the Casson invariant of the oriented  $Z$ -homology spheres obtained from the algebraically split elements of  $\mathbf{B}$  is calculated; in Section 4.2, using a result of [H], the Casson invariant of an algebraically split closed pure  $n$ -braid is expressed as the sum of the invariants of its sublinks of 3 components.

---

## Agradecimientos.

Debido a trámites burocráticos la tesis se registró con el título "Grupos de trenzas y cerraduras de trenzas puras" pero debió ser **"3 - variedades obtenidas por cirugía en cerraduras de 3-trenzas puras"**.

Agradezco a los sinodales por aceptar este trabajo, de manera especial al Dr. Francisco J. González Acuña por todo el tiempo que me dedicó y por su paciencia infinita, al Dr. Mario Eudave Muñoz y al Dr. Max Neumann Coto por sus comentarios.

También agradezco al Instituto de Matemáticas de la UNAM el haberme facilitado sus instalaciones y ofrecerme un ambiente propicio, así como al CONACYT que me otorgó una beca durante los años 1995-1998, durante los cuales se realizó este trabajo bajo la dirección del Dr. González Acuña.

---

# Índice

0. Introducción	3
1. Capítulo 1	
1.1 El grupo de trenzas puras de 3 cuerdas	8
2. Capítulo 2	
2.1 Superficies incompresibles en el complemento de elementos de $\mathbf{B}$	12
2.2 Ovillos frontera irreducibles	25
2.3 Ejemplos en los que se obtiene la 3-esfera	31
3. Capítulo 3	
3.1 El invariante $\mu$	35
4. Capítulo 4	
4.1 El invariante de Casson	60
4.2 El invariante de Casson de una $n$ -trenza pura algebraicamente separable	70
Referencias	73

---

## 0. Introducción.

El teorema fundamental de cirugía probado por W. B. R. Lickorish [Li] y A. D. Wallace [Wa] afirma que toda 3-variedad conexa, orientable y cerrada se obtiene por cirugía entera en una  $n$ -trenza pura cerrada contenida en  $S^3$ . Ya que cirugía sobre 1-trenzadas puras cerradas produce espacios lentes [Mo], sobre 2-trenzadas puras cerradas produce, en general, espacios fibrados de Seifert; es natural preguntar qué tipo de variedad es obtenida por cirugía sobre una 3-trenza pura cerrada.

Un nudo  $K$  contenido en  $S^3$  tiene la propiedad P [GA1], si toda cirugía no trivial produce una 3-variedad no simplemente conexa. Diremos que un enlace contenido en  $S^3$  tiene la propiedad P si toda cirugía no trivial produce una 3-variedad no simplemente conexa; entendiendo por cirugía trivial aquella en la que se hace la cirugía trivial en algunas o en todas las componentes del enlace.

Sea  $\mathbf{B}$  el conjunto de enlaces orientados contenidos en  $S^3$ , obtenidos como la clausura de 3-trenzadas puras. En este trabajo estudiamos la propiedad P para los elementos de  $\mathbf{B}$ . Tratamos este problema desde dos puntos de vista, uno geométrico y otro algebraico.

Un enfoque del problema anterior es desde el punto de vista de la teoría de libros abiertos (ver [Ro]). Las variedades obtenidas por cirugía sobre  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  tienen una descomposición en libros abiertos con página una superficie plana, tal que el número de componentes de su frontera es 4. Sin embargo, este no es el punto de vista considerado.

El grupo de trenzadas puras de 3 cuerdas  $\mathbf{P}_3$  es el producto directo de dos grupos libres [FN]. Todo elemento  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  se expresa por  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^n \widehat{\sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$ , donde  $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$  y  $e_i, f_i, e \in \mathbb{Z}$ . Un diagrama representando  $\hat{\beta}$  es mostrado en la fig. 1.1.3. De ahora en adelante llamaremos  $K_i$  a las componentes del enlace, de manera que  $lk(K_1, K_2) = \sum e_i + e$ ,  $lk(K_3, K_2) = \sum f_i + e$ .

---

Sea  $L = \cup_1^n K_i$  un enlace orientado contenido en  $S^3$ . Denotamos por  $\eta(L) = \cup \eta(K_i)$  a la unión disjunta de vecindades regulares de las componentes. Sea  $(m_i, l_i)$  una pareja preferencial meridiano-longitud de  $\partial\eta(K_i)$ . Llamemos  $r_i \subset \partial\eta(K_i)$  a la curva tal que  $r_i = p_i m_i + q_i l_i$  con  $p_i/q_i \in \mathbb{Q} \cup 1/0$ ,  $(p_i, q_i) = 1$ . Hacer cirugía  $r_i$  en la componente  $K_i$  es considerar el espacio  $cl(S^3 - \text{int } \eta(K_i)) \cup_{\partial\eta(K_i)} T_i$  con  $T_i$  un toro sólido estándar con pareja preferencial  $(m'_i, l'_i)$  tal que  $m'_i$  se pega a lo largo de la curva  $r_i$ . Denotamos por  $\phi_i$  la cirugía en la cual  $m'_i$  se pega a lo largo de la curva  $m_i$ . Decimos que  $M^3$  es la variedad obtenida por cirugía sobre el enlace  $L = \cup_1^n K_i$  con marco  $(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, \phi_i, r_{i+1}, \dots, r_n)$  si  $M^3 = cl(S^3 - \text{int } \eta(L) \cup_{\partial\eta(L)} (\cup_1^n T_i))$ . Desde el punto de vista geométrico se prueba que ciertas trenzas contienen superficies incompresibles en su complemento, que persisten después de cirugía.

Llamemos  $\mathbf{L}' \subset \mathbf{B}$  al conjunto de enlaces tales que  $|e_i| > 1$ ,  $|f_i| > 1$ ,  $e = 0$ ,  $n \geq 1$ , es decir,  $\hat{\beta} = \prod \sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}$ . Denotemos  $r_{0_j} = lk(K_j, K_2)$  y sea  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-1}, \phi_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n)$  un marco tal que  $\epsilon_i = \pm 1$ , a menos que se especifique de otra forma. Aplicando un resultado de [CGLS] se prueba lo siguiente.

**Teorema 2.1.4** *Dado  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  un enlace con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ , tal que  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_j \neq r_{0_j}$ , y  $r_j \neq (kr_{0_j} \pm 1)/k$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, 3$  la 3-variedad  $N^3$  obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  es Haken.*

De aquí se concluye lo siguiente, donde  $N^3$  es como en el teorema 2.1.4.

**Corolario 2.1.5**  *$N^3$  no puede ser una esfera homotópica.*

□

Llamemos  $K$  al nudo obtenido de  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  con marco  $(\epsilon_1, \phi_2, \epsilon_3)$  con  $\epsilon_i = \pm 1/n$ . Probamos que  $K$  se descompone como la suma de dos ovillos  $\partial$ -irreducibles (Lema 2.2.2.,



Teorema 2.2.3 ) y por lo tanto de [GL] se tiene que  $K$  es no trivial y aplicando [GoL] se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.4** *Sea  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  un enlace con marco  $(\epsilon_1, r_2, \epsilon_3)$ , con  $\epsilon_i = \pm 1/n$ ,  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Si  $r_2 \neq 1/0$  entonces no es posible obtener  $S^3$  por cirugía sobre  $\hat{\beta}$ .*

El corolario 2.2.4 extiende el resultado del corolario 2.1.5 para  $r_j = \pm 1/n$ , con  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Cuando la trenza es  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1} \sigma_2^{2f_1}}$  podemos probar lo siguiente.

**Proposición 2.3.1** *Sea  $N^3$  una esfera homotópica obtenida por cirugía de Dehn sobre el enlace  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1} \sigma_2^{2f_1}}$  con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ . Entonces  $N^3$  es homeomorfa a  $S^3$ .*

Además se tienen ejemplos de enlaces en los que se obtiene la 3 - esfera.

Desde el punto de vista algebraico se realiza lo siguiente. Aplicando un resultado de [GA2] ( ver también [CS] ) se calcula el invariante  $\mu$  de las  $Z_2$ -esferas homológicas obtenidas por cirugía sobre elementos de  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  con marco entero  $(l_1, l_2, l_3)$ .

Llamemos  $P$  a la matriz del enlace  $\hat{\beta}$ . Sea  $U$  el conjunto de enteros  $i$  tal que  $u_i \neq 0$  donde

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P_2^{-1} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

con  $\bar{l}_i = l_i \pmod{2}$  y  $P_2$  la matriz  $P$  reducida módulo 2. Denotemos por  $\hat{\beta}_U = \cup_{i \in U} K_i$  al subenlace propio de  $r = \#\{U\}$  componentes y por  $\sigma(P)$  la signatura de la matriz  $P$ .

Tomemos  $A = 0$  si  $\#\{U\} = 1$ ;  $A = l_{ij}/4$  si  $\#\{U\} = 2$  ( $\{U\} = \{i, j\}$ , para  $i \neq j$ ); ó  $A = [e + \frac{-\sum e_i + \sum f_j}{2} - \sum_{i>j} f_j e_i]$  si  $\#\{U\} = 3$ .

**Teorema 3.1.5** *Sea  $M^3$  la  $Z_2$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco entero  $(l_1, l_2, l_3)$ . Entonces  $\mu(M^3) = \frac{\sigma(P) - \sum_{i,j \in U} l_{ij} + 8A}{16} \pmod{1}$*

---

Se calcula el invariante de Casson  $\lambda(M^3)$  de las  $Z$ -esferas homológicas obtenidas sobre elementos  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  algebraicamente separables. Sea  $\hat{\beta}$  algebraicamente separable.

**Teorema 4.1.3** *Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$ . Entonces  $\lambda(M^3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (\sum_{j < i}^n e_i f_j)^2$ .*

Sea  $B_1$  el conjunto de elementos  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i}$  algebraicamente separables, tales que si  $n$  impar  $e_j = e_{n-(j-1)}$ ,  $f_{n-j} = f_j$ ; si  $n$  par  $f_j = f_{n-j}$ ,  $e_{j+1} = e_{n-j}$ .

**Proposición 4.1.4** *Sea  $M^3$  una  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn en  $\hat{\beta} \in B_1$ . Entonces  $\lambda(M^3) = 0$ .*

**Corolario 4.1.5** *Si  $\hat{\beta} \in B_1 \cap \mathbf{L}'$  entonces  $M^3$  no es una esfera homotópica.*

Sea  $\hat{\beta}$  una  $n$ -trenza pura cerrada, algebraicamente separable con marco  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ , orientada y contenida en  $S^3$ . Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . Denotemos por  $\lambda(\hat{\beta})$  al invariante de Casson de la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . Llamemos  $\mathbf{b}$  al conjunto de subenlaces  $\hat{\beta}' \subset \hat{\beta}$  que constan de 3 componentes. Aplicando un resultado de [H, teorema 2.1] se tiene lo siguiente.

**Proposición 4.2.2**  $\lambda(\hat{\beta}) = \sum_{\mathbf{b}} \lambda(\hat{\beta}')$ .

El trabajo consta de 4 capítulos. En el capítulo 1 se da una demostración de que el grupo de trenzas puro de 3 cuerdas  $P_3$ , es el producto directo de dos grupos libres. En el capítulo 2, sección 2.1 se demuestra que existen dos superficies incompresibles en el exterior del enlace  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  y se prueba el teorema 2.1.4. En la sección 2.2 se demuestra el corolario 2.2.4. En la sección 2.3 se dan ejemplos de trenzas cerradas en las que se obtiene  $S^3$ . En el capítulo 3 se realiza el cálculo del invariante  $\mu$  para las  $Z_2$ -esferas homológicas obtenidas por cirugía entera en elementos de  $\mathbf{B}$ . En el capítulo 4, sección 4.1 se calcula el

---

---

invariante de Casson para las  $Z$ -esferas homológicas obtenidas por cirugía en los enlaces de  $\mathbf{B}$  algebraicamente separables ( proposición 4.1.3 ).

En la sección 4.2, usando un resultado de [H , teorema 2.1] se da la proposición 4.2.2. El simbolo  $\sim$  denota equivalencia entre elementos de un grupo dado en términos de generadores y relaciones, ó equivalencia entre grupos con presentaciones dadas;  $\cong$  denota equivalencia entre espacios hasta homeomorfismos.

---

# Capítulo 1

## 1.1 - El grupo de trenzas puras de 3 cuerdas.

El grupo de trenzas puras de Artin de  $n$ -cuerdas  $P_n$ , es el producto semidirecto del grupo de trenzas puras de  $(n - 1)$  cuerdas  $P_{n-1}$ , con un grupo libre de rango  $n$ . En particular, el grupo de trenzas puras de 3-cuerdas  $P_3$  es isomorfo al producto directo de los grupos libres de rango uno y dos. En [FN] se da una prueba de esto utilizando fibraciones. Aquí damos una prueba usando las presentaciones de los grupos.

**Teorema 1.1.1.** ( Artin , ver [B] ) *El grupo de trenzas  $B_n$  admite una presentación con generadores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  y relaciones  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  si  $|i - j| \geq 2$  con  $1 \leq i, j \leq n - 1$   $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$   $1 \leq i \leq n - 2$ .*

El grupo de trenzas puras de Artin  $P_n$  de  $n$ -cuerdas, el cual es un subgrupo del grupo de trenzas  $B_n$ , tiene la siguiente presentación ( ver [MKS] ). Los generadores son los elementos  $a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$  donde  $i < j$  para  $j = 1, \dots, n - 1$  y las relaciones definidas por

$$\begin{aligned}
 a_{rs} a_{ik} a_{rs}^{-1} &= a_{ik} & \text{si } s < i \text{ o } k < r \\
 a_{ks} a_{ik} a_{ks}^{-1} &= a_{is}^{-1} a_{ik} a_{is} & i < k < s \\
 a_{rk} a_{ik} a_{rk}^{-1} &= a_{ik}^{-1} a_{ir}^{-1} a_{ik} a_{ir} a_{ik} & i < r < k \\
 a_{rs} a_{ik} a_{rs}^{-1} &= a_{is}^{-1} a_{ir}^{-1} a_{is} a_{ir} a_{ik} a_{ir}^{-1} a_{is}^{-1} a_{ir} a_{is} & i < r < k < s
 \end{aligned}$$

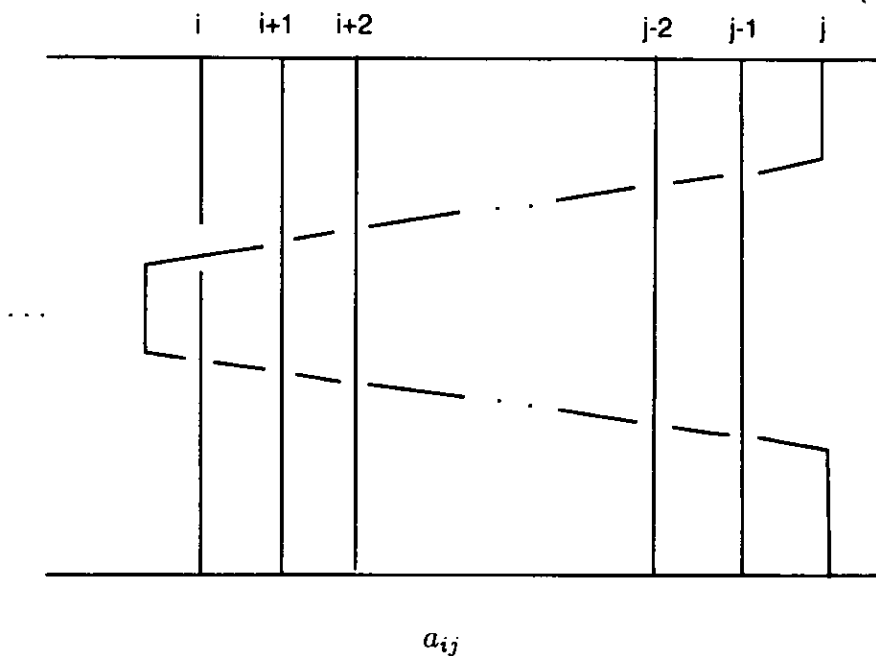


Fig. 1.1.1

En particular el grupo de trenzas puras de 3-cuerdas  $P_3$  tiene una presentación con generadores  $a_{12}, a_{13}, a_{23}$  y relaciones  $r_1 = [a_{13}, a_{12}a_{13}a_{23}] = 1, r_2 = [a_{12}, a_{13}a_{23}] = 1$ .

Ya que  $[a_{12}, a_{13}a_{23}] = 1$  tenemos  $a_{12}a_{13}a_{23} \sim a_{13}a_{23}a_{12}$ . Multiplicando por  $a_{13}$ ,  $a_{12}a_{13}a_{23}a_{13} \sim a_{13}a_{23}a_{12}a_{13}$  y  $a_{12}a_{13}a_{23}a_{13} \stackrel{r_1}{\sim} a_{13}a_{12}a_{13}a_{23}$ . Eliminando  $a_{13}$  tenemos  $a_{12}a_{13}a_{23} \sim a_{23}a_{12}a_{13}$  que es la relación  $r_3 = [a_{23}, a_{12}a_{13}] = 1$ .

Sea  $\Delta^2 \sim (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ . Probemos que  $\Delta^2 \sim a_{13}a_{23}a_{12}$ . Ya que  $a_{12} \sim \sigma_1^2$ ,  $a_{13} \sim \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$  y  $a_{23} \sim \sigma_2^2$  tenemos  $a_{13}a_{23}a_{12} \sim \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_2^2\sigma_1^2 \sim \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \sim \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \sim \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \sim \Delta^2$ . Además  $\Delta^2$  está en el centro de  $P_3$  ya que  $a_{12}\Delta^2 \sim a_{12}a_{13}a_{23}a_{12} \stackrel{r_2}{\sim} a_{13}a_{23}a_{12}a_{12} \sim \Delta^2 a_{12}$ ,  $a_{13}\Delta^2 \sim a_{13}a_{13}a_{23}a_{12} \stackrel{r_2}{\sim} a_{13}a_{12}a_{13}a_{23} \stackrel{r_1}{\sim} a_{12}a_{13}a_{23}a_{13} \stackrel{r_2}{\sim} a_{13}a_{23}a_{12}a_{13} \sim \Delta^2 a_{13}$  y finalmente  $a_{23}\Delta^2 \sim a_{23}a_{13}a_{23}a_{12} \stackrel{r_2}{\sim} a_{23}a_{12}a_{13}a_{23} \stackrel{r_3}{\sim} a_{12}a_{13}a_{23}a_{23} \stackrel{r_2}{\sim} a_{13}a_{23}a_{12}a_{23} \sim \Delta^2 a_{23}$ .

Sea  $F_2$  el grupo libre de rango dos.

**Proposición 1.1.2.** *El grupo de trenzas puras  $P_3$  es isomorfo al producto directo  $Z \times F_2$ .*

*Demostración.* Aplicando movidas de Tietze obtenemos una presentación de  $P_3$  con generadores  $a_{12}, a_{13}, a_{23}$  y las relaciones  $r_1$  y  $r_3$  dadas anteriormente.

Consideremos  $Z := \langle \Delta^2 \rangle$  y el grupo libre  $F_2$  generado por  $a_{12}$  y  $a_{23}$ . Una presentación para el grupo  $P' := Z \times F_2$  está dada por los generadores  $\Delta^2, a_{12}, a_{23}$  y las relaciones  $r'_1 = [\Delta^2, a_{12}] = 1, r'_2 = [\Delta^2, a_{23}] = 1$ . Aplicando movidas de Tietze (ver [LS]), veamos que  $P_3$  es isomorfo a  $P'$ . Ya que  $a_{13} \sim \Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}$  tenemos

$$\begin{aligned} P_3 &= \left\langle a_{12}, a_{13}, a_{23}, \Delta^2 \mid [a_{13}, a_{12}a_{13}a_{23}] = 1, [a_{23}, a_{12}a_{13}] = 1, \Delta^2 = a_{13}a_{23}a_{12} \right\rangle \\ &\sim \left\langle a_{12}, a_{23}, \Delta^2 \mid [\Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}, a_{12} \Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1} a_{23}] = 1, [a_{23}, a_{12} \Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}] = 1 \right\rangle \end{aligned}$$

Aplicando la conmutatividad de  $\Delta^2$  se tiene  $[\Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}, a_{12} \Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1} a_{23}] = [\Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}, \Delta^2] = 1$ , con  $\Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1} \Delta^2 a_{23} a_{12} \Delta^{-2} \Delta^{-2} \sim \Delta^{-2} a_{12}^{-1} \Delta^2 a_{12} \sim 1$ . Similarmente  $[a_{23}, a_{12} \Delta^2 a_{12}^{-1} a_{23}^{-1}] = [a_{23}, \Delta^2 a_{23}^{-1}] = 1$ , de donde tenemos  $a_{23} \Delta^2 a_{23}^{-1} a_{23}^{-1} a_{23} \Delta^{-2} \sim \Delta^2 a_{23} \Delta^{-2} a_{23}^{-1} \sim 1$ . Por lo tanto

$$P_3 \sim \left\langle a_{12}, a_{23}, \Delta^2 \mid [\Delta^2, a_{12}] = 1, [\Delta^2, a_{23}] = 1 \right\rangle \sim P'$$

□

La *clausura* de  $\beta \in P_3$ , denotada  $\hat{\beta}$  se obtiene tomando una proyección de  $\beta$  en el plano euclideo e identificando los extremos iniciales con los finales sin formar nuevos cruces.

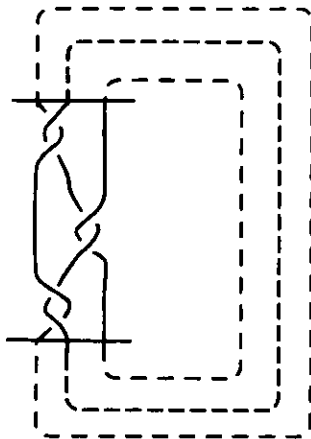


Fig. 1.1.2

El resultado de la proposición 1.1.2 es fundamental ya que permite dar un diagrama representando  $P_3$ . En el diagrama (ver fig. 1.1.3),  $e_i$  representa la palabra  $(\sigma_1^2)^{e_i}$ ,  $f_i$  la palabra  $(\sigma_2^2)^{f_i}$  y  $e$  representa la palabra  $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{2e}$ .

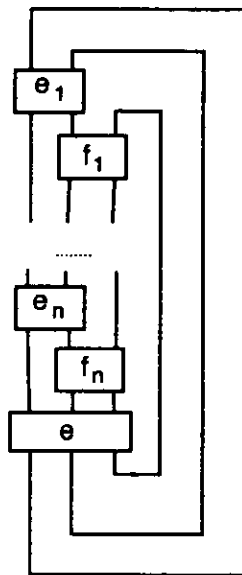


Fig. 1.1.3

Sea  $S^3$  la 3-esfera orientada. Denotemos  $\mathbf{B} = \{\hat{\beta} \subset S^3 \mid \beta \in P_3\}$ . En adelante, consideraremos los elementos  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  orientados tal que cada componente de  $\hat{\beta}$  está orientada en la misma dirección.

---

## Capítulo 2

### 2.1.- Superficies incompresibles en el complemento de elementos de $B$ .

En esta sección consideramos enlaces  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n \sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i} \in B$  tales que  $n \geq 1$ ,  $|e_i| > 1$  y  $|f_i| > 1$  con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ ,  $r_i \in Q \cup 1/0$ ; se sigue que  $lk(K_1, K_3) = 0$ . Probamos que si  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_1 \neq \sum e_i, (k \sum e_i \pm 1)/k$ , y  $r_3 \neq \sum f_i, (k \sum f_i \pm 1)/k$  para toda  $k \in Z$  entonces la variedad obtenida por cirugía es Haken. Por lo tanto, no es posible obtener una esfera homotópica en estos casos.

Llamemos  $L'$  al conjunto de trenzas cerradas  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n \sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}$  tales que  $n \geq 1$ ,  $|e_i| > 1$  y  $|f_i| > 1$ . En el estudio de esta clase de enlaces aplicaremos un resultado del artículo [CGLS].

Sea  $M^3$  una 3-variedad irreducible con una componente frontera un toro  $T$ . A la clase de isotopía de una curva cerrada simple no trivial en  $T$  la llamaremos su pendiente y  $\Delta(r, s)$  denotará el mínimo número de intersección geométrica entre las pendientes  $r$  y  $s$ .  $M(r)$  denotará a la variedad obtenida pegando un toro sólido a  $M$  a lo largo de  $T$  tal que la frontera de un disco meridiano del toro sólido tiene pendiente  $r$ . Finalmente,  $S$  denotará una superficie en  $\partial M - T$  la cual es incompresible en  $M$ . Si  $S \subset \text{int } M$  entonces cortamos  $M$  a lo largo de  $S$ .

**Teorema 2.1.1** ([CGLS], teorema 2.4.3). *Supóngase que  $M^3$  contiene un anillo con una componente frontera en  $S$  y la otra con pendiente  $r_0$  en  $T$ . Entonces*

- a) *La superficie  $S$  se comprime en  $M(r_0)$*
  - b) *La superficie  $S$  es incompresible en  $M(r)$  si  $\Delta(r, r_0) > 1$  a menos que  $M$  sea homeomorfa a  $T \times I$*
-



c) Si  $\Delta(r_i, r_0) = 1$ ,  $i = 1, 2$  entonces  $M(r_1) \cong M(r_2)$ . En particular la superficie  $S$  se comprime en  $M(r)$  para alguna  $r$  tal que  $\Delta(r, r_0) = 1$  si y sólo si se comprime en  $M(r)$  para toda tal  $r$ .

Sea  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i} \in L'$  y  $M^3 = cl(S^3 - int \eta(\hat{\beta}))$ . Tenemos dos superficies disjuntas de género  $n$ ,  $S_1, S_3 \subset int(M^3)$ , ( ver fig. 2.1.1 ).  $S_j$  acota un cubo con asas  $H_j$  en  $S^3$  tal que  $K_j \subset int(H_j)$  y  $K_2 \subset cl(S^3 - H_1 \cup H_3)$ . Llamemos  $U_1 = cl(H_1 - int \eta(K_1))$ ,  $U_2 = cl((S^3 - H_1 \cup H_3) - int \eta(K_2))$  y  $U_3 = cl(H_3 - int \eta(K_3))$ . Entonces  $M^3 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$  y  $S_j = U_j \cap U_2$ .

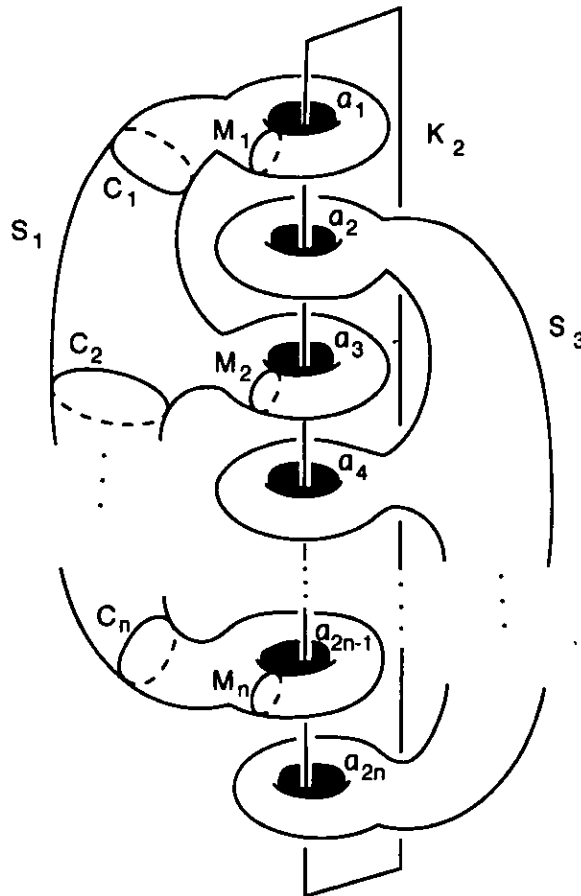
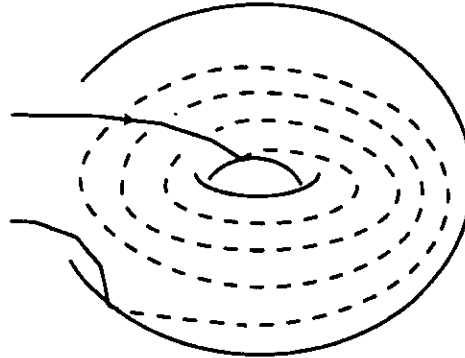


Fig. 2.1.1

---

La componente  $K_j$  del enlace es isotópica a una curva sobre la superficie  $S_j$  tal que si  
 i)  $e_i > 0$  ó  $f_i > 0$



ii)  $e_i < 0$  ó  $f_i < 0$

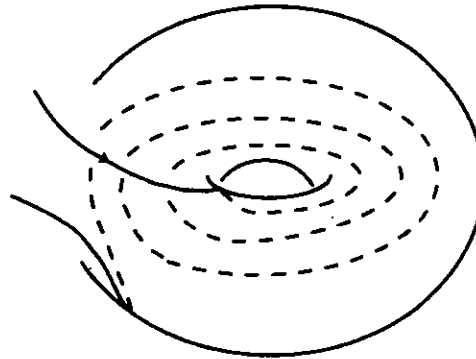


Fig. 2.1.2

Por lo tanto, tenemos un anillo  $b_j$ , tal que una componente frontera  $\partial_0 b_j$  aparece en  $S_j$  y la otra  $\partial b_j$  es una curva en  $\partial\eta(K_j)$  con pendiente

$$r_{0_j} = \begin{cases} \sum e_i & j = 1 \\ \sum f_i & j = 3 \end{cases}$$

Mostremos que  $M^3$  es irreducible. Supóngase que  $S_j$  es incompresible, por lo tanto será suficiente probar que  $U_i$  es irreducible.

---

---

Sea  $S^2 \subset U_j$  una esfera, supongamos que no es frontera de una 3-bola y que  $S^2 \cap b_j$  es transversal. Sea  $\gamma \in S^2 \cap b_j$  una curva cerrada trivial en  $b_j$ . Cortando a lo largo de una curva de más adentro en  $b_j$ , obtenemos dos esferas. Al menos una de ellas no es frontera de una 3-bola. Eliminando así este tipo de intersecciones. Si  $\gamma$  es una curva cerrada no trivial en  $b_j$  entonces  $\gamma$  es frontera de un disco en  $S^2$  y por lo tanto  $\partial_0 b_j$  es frontera de un disco en  $U_j$ . Lo anterior contradice la incompresibilidad de  $S_j$  en  $U_j$ . Entonces  $S^2$  no interseca al anillo  $b_j$ . Cortando  $U_j$  a lo largo del anillo  $b_j$  obtenemos un cubo con asas el cual es irreducible. Por lo tanto  $S^2$  es frontera de una 3-bola.

Probemos que  $U_2$  es irreducible. Sea  $S^2 \subset U_2$  una esfera tal que no es frontera de una 3-bola. Sea  $a = \cup a_i$  la colección de anillos mostrados en la fig. 2.1.1 tal que una frontera se encuentra en  $S_j$ ,  $\partial_0 a_i \subset S_1$  ó  $\partial_0 a_i \subset S_3$  y la otra frontera  $\partial a_i$  se encuentra en  $K_2$ ,  $\partial a_i \subset K_2$ . Supongamos que  $S^2 \cap a$  es transversal. Sea  $\gamma \in S^2 \cap a_i$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada trivial en  $a_i$  eliminamos esta intersección cortando  $S^2$  a lo largo de una curva de más adentro en  $a_i$ , obteniendo dos esferas tal que al menos una no es frontera de una 3-bola. Si  $\gamma$  es una curva cerrada no trivial en  $a_i$ , entonces  $\gamma$  es frontera de un disco en  $S^2$  y por lo tanto  $\partial_0 a_i$  es frontera de un disco en  $U_2$ . Lo anterior contradice la incompresibilidad de  $S_1$  ó  $S_3$  en  $U_2$ . Entonces  $S^2$  no interseca  $a$ . Cortando  $U_2$  a lo largo de  $a$  obtenemos un cubo con asas el cual es irreducible. Por lo tanto  $S^2$  es frontera de una 3-bola.

**Lema 2.1.2** Sea  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\widehat{\sigma_1^2})^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i} \in L'$  y  $S_j$  como antes. Entonces  $S_j$  es incompresible en  $M$ .

*Demostración.* Veamos que la superficie  $S_1$  es incompresible en  $U_1$ . Supongamos que es compresible. Sea  $D$  un disco de compresión, entonces  $\partial D = \alpha$  es una curva no trivial en  $S_1$ . Consideremos los discos  $C_i$  y los discos meridianos  $M_i$  ( ver fig. 2.1.1).

Como  $|e_i| > 1$  para toda  $i$ , el nudo  $K_1$  interseca al disco  $C_i$  en dos puntos, e interseca al disco  $M_i$  en  $|e_i|$  puntos.

---

---

Veamos como son las intersecciones en  $D \cap C_i$ . Supongamos que se intersecan transversalmente. En  $C_i$  tenemos curvas cerradas y arcos que separan ó no separan los puntos. Veamos que todas las intersecciones se pueden eliminar. Tomemos una curva cerrada  $\gamma$  de más adentro en  $D$ . Sea  $D'$  el disco acotado por  $\gamma$  en  $D$  y sea  $B$  el disco acotado por  $\gamma$  en  $C_i$ . Si  $B$  no interseca a  $K_1$ , podemos cortar a  $D$  a lo largo de un disco cuya frontera es una curva de más adentro en  $B$ , reduciendo el número de intersecciones. Si  $B$  interseca a  $K_1$  en un punto entonces tendremos una esfera que interseca en un punto a  $K_1$  lo cual no es posible. Si la esfera  $B \cup D'$  interseca  $K_1$  en dos puntos, un arco de  $K_1$  queda dentro de la bola acotada por  $B \cup D'$ . Ya que  $K_1$  interseca a todos los discos meridianos  $M_i$ , lo anterior nos lleva a una contradicción.

Supongamos que hay arcos de intersección que no separan los puntos de  $K_1$  en  $C_i$ , tomemos el arco  $\sigma$  de más a la orilla en  $C_i$ .  $\sigma$  corta un disco  $C'_i$  en  $C_i$  que no interseca a  $K_1$ . Cortando  $D$  a lo largo de  $C'_i$  obtenemos dos discos, al menos uno es un disco de compresión, que interseca a  $C_i$  en menos arcos. Por lo tanto todos los arcos en  $C_i$  separan los puntos de  $K_1$ . Tomemos el arco  $\sigma$  de más a la izquierda en  $D$ .  $\sigma$  divide a  $D$  y  $C_i$  en dos discos respectivamente,  $D = D_1 \cup D_2$  y  $C_i = B_1 \cup B_2$ , sea  $D_1$  el disco que no contiene arcos de intersección. Entonces tenemos un nuevo disco  $D' = B_1 \cup D_1$ , el cual isotopamos para que sea ajeno de  $C_i$ . Cortemos  $H_1$  a lo largo de los discos  $C_i$ , obteniendo una colección de toros sólidos, y nótese que  $D'$  es un disco propiamente encajado en alguno de los toros sólidos con discos meridianales  $M_i$ . Si  $\partial D'$  es una curva trivial tendremos una esfera intersecando en un punto a  $K_1$ , lo cual no es posible. Si  $\partial D'$  es isotópica a una curva frontera de un disco meridional  $M_i$ , entonces como  $K_1$  interseca a cada disco meridional  $M_i$  en más de un punto tenemos una contradicción. Por lo tanto no existe tal disco de compresión. La incompresibilidad de  $S_3$  en  $U_3$  se prueba de manera similar ya que  $|f_i| > 1$ .

---

Veamos que la superficie  $S_1$  es incompresible en  $U_2$ . El siguiente dibujo muestra el complemento de  $H_1$  en  $S^3$ , el cual es un cubo con asas. Llamemos  $\Sigma_3$  a una espina ( o sea un 1 - complejo ) tal que una vecindad regular de  $\Sigma_3$  es homeomorfa a  $H_3$ .

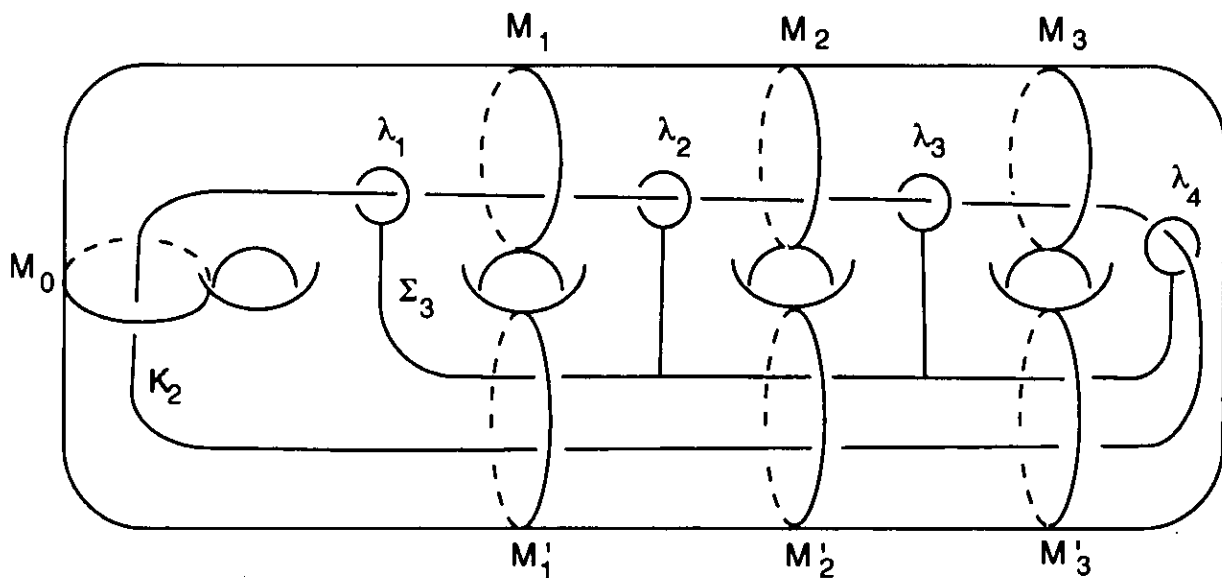


Fig. 2.1.3

Supongamos que la superficie  $S_1$  es compresible en  $U_2$ . Llamemos  $D$  al disco de compresión. Sean  $\{M_i\}_{i=0}^n$  y  $\{M'_i\}_{i=1}^n$  los discos meridianos mostrados en la figura 2.1.3. Nótese que  $M_i$  interseca a  $K_2$  en un punto y es ajeno a  $\Sigma_3$ , y  $M'_i$  los interseca a cada uno en un punto.

Analicemos las intersecciones del disco de compresión con los discos meridianos y probemos que se pueden eliminar. Supongamos que se intersecan transversalmente. Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple de más adentro en alguno de los discos meridianos. Llamemos  $B$  al disco que acota  $\gamma$  en el disco meridiano y  $D'$  al disco que acota en  $D$ .

Si  $K_2$  y  $\Sigma_3$  no intersecan a  $B$  entonces cortando  $D$  a lo largo del disco  $B$ , se obtiene otro disco de compresión; así eliminamos todas las curvas de este tipo. Si el disco  $B$  contiene un punto de intersección y el punto es de  $K_2$  entonces tendremos una esfera  $B \cup D'$  intersecando en un punto a  $K_2$  lo cual no es posible. Si el punto es de  $\Sigma_3$  entonces la bola acotada por la esfera  $B \cup D'$  contiene a un extremo de  $\Sigma_3$ . Sean  $\lambda_i$  las curvas de la espina  $\Sigma_3$  mostradas en la figura 2.1.3. Entonces alguna de las curvas  $\lambda_i$  está contenida en la bola acotada por la esfera  $B \cup D'$ . Ya que el número de enlace de  $K_2$  con  $\lambda_i$  es 1, tenemos una contradicción. Si el disco  $B$  contiene a los dos puntos de intersección entonces la esfera interseca a  $K_2$  en un punto, y como antes esto no es posible. Concluimos que la intersección entre  $D$  y los meridianos consiste solo de arcos.

Tomemos un arco  $\sigma$  de más a la orilla en  $M_i$  ó  $M'_i$ .  $\sigma$  divide el disco meridiano en dos discos, llamemos  $B$  al disco que no contiene arcos de intersección. Si el arco  $\sigma$  no separa los puntos de intersección con  $K_2$  y  $\Sigma_3$  cortemos  $D$  a lo largo de  $B$ . Obtenemos dos discos, uno de los cuales sigue siendo un disco de compresión. De esta forma eliminamos este tipo de arcos. En particular, el disco  $D$  no interseca a los meridianos  $M_i$ . Cortando a lo largo de los discos meridianos  $M_i$  y  $M'_i$  descomponemos  $cl(S^3 - H_1)$  en bolas  $B_i$ , las cuales son de los tipos mostrados en la figura 2.1.4.  $B_1$  es de tipo i),  $B_n$  es de tipo iii) y  $B_i$ ,  $2 \leq i \leq n-1$  de tipo ii).

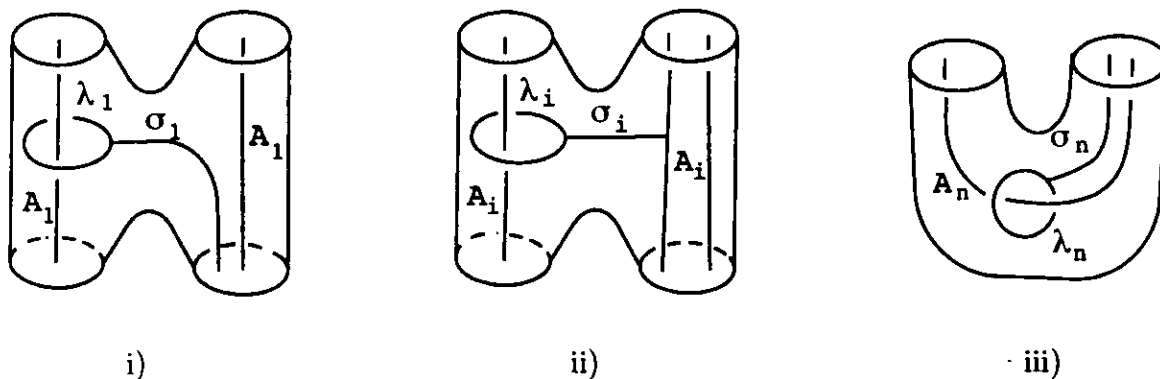


Figura 2.1.4

---

Consideremos los discos meridianos  $N_i$  contenidos en las bolas de tipo ii), como en la figura 2.1.5 ii).  $N_i$  interseca a  $\Sigma_3$  en un punto y no interseca a  $K_2$ . Repitiendo el argumento anterior podemos suponer que el disco  $D$  no interseca a los meridianos  $N_i$ .

Llamemos  $\sigma_i$  a la porción de la espina contenida en  $B_i$  y  $A_i$  al conjunto de arcos de  $K_2$  contenidos en  $B_i$ .

Analicemos los arcos  $\gamma$  de intersección en  $M'_i$  que separan los extremos de  $\sigma_i$  y  $A_i$ . Tomemos un arco  $\gamma$  de más a la orilla en  $D$ . El arco  $\gamma$  acota un disco  $D' \subset D$ , luego  $\partial D' = \alpha \cup \gamma$ . Supongamos que  $D'$  está contenido en la bola de tipo iii). Nótese que  $\partial B_n = M_n \cup R \cup M'_n$ , donde  $R$  es un anillo. Como  $R$  es un anillo, el arco  $\alpha$  es paralelo a un arco en  $\partial M'_n$ . Luego  $D$  se puede isotopar de modo que  $\alpha$  se traslade al otro lado de  $M'_n$ . Esto hace que  $D$  interseque a  $M'_n$  en una curva cerrada, la que podemos eliminar como antes.

Supongamos que  $D'$  está contenido en una bola de tipo ii). Como  $D'$  no interseca a  $N_i$ , el arco  $\alpha$  es paralelo a  $\partial M'_i$  y se puede eliminar como en el caso anterior, o bien  $\alpha$  separa a los discos  $N_i$  y  $M'_{i+1}$ , como en la figura 2.1.5 ii), pero esto implica que  $D'$  interseca a  $\Sigma_3$ , lo cual no es posible.

Por los argumentos anteriores podemos suponer que  $D'$  está contenido en una bola de tipo i), y que los arcos  $\gamma_i$  de más a la orilla en  $D$  acotan discos  $D'_i$  contenidos en la bola de tipo i), ver fig. 2.1.5 i). Supongamos que el disco  $D$  interseca la bola de tipo iii) en la fig. 2.1.4. Sea  $C \subset D \cap B_n$  un disco de intersección, luego  $\partial C = \gamma_1 \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \alpha_n$ , donde  $\gamma_i \subset M'_n$  y  $\alpha_i \subset R$ . Como  $R$  es un anillo, los arcos  $\alpha_i$  son paralelos a  $\partial M'_n$ . Tomemos uno de más a la orilla, e isotopemos  $D$  para trasladar este arco al otro lado, esto hace que  $D$  interseque a  $M'_n$  en un arco que no separa, al que podemos eliminar como antes. Prosiguiendo de esta manera eliminamos todos los arcos. Por lo que podemos suponer que  $D$  no interseca a  $B_n$ .

---

Supongamos que el disco  $D$  interseca a una bola de tipo ii) , digamos a  $B_i$ , pero no interseca a  $B_{i+1}$ . Cortemos a  $B_i$  con  $N_i$  y sea  $B'_i$  la parte que contiene los meridianos  $M'_i$  y  $M'_{i+1}$ . Sea  $C \subset D \cap B'_i$  un disco de intersección, luego  $\partial C = \gamma_1 \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \alpha_n$ , donde  $\gamma_i \subset M'_i$  y  $\alpha_i \subset \partial B'_i - (M'_i \cup M'_{i+1} \cup N_i)$ .  $\partial C$  es una curva en  $\partial B'_i$ , que divide a esta esfera en dos discos, digamos  $E_1$  y  $E_2$ , como en la figura 2.1.5 iii). Si  $\partial C$  separa a los extremos de  $\sigma_i$ , entonces  $C$  interseca a  $\Sigma_3$ , lo cual no es posible, luego los 3 extremos de  $\sigma_i$  están en un mismo disco, digamos  $E_1$ . Análogamente, los dos extremos de  $A_i$  están en un mismo disco. Como  $\partial C$  no interseca a  $M'_{i+1}$  y este contiene extremos de  $\sigma_i$  y  $A_i$ , se sigue que los extremos de  $A_i$  también están en  $E_1$ .  $\partial C$  divide a  $\partial M'_i$  en arcos, que se encuentran alternativamente en  $E_1$  y  $E_2$ . Como no hay puntos de  $A_i$  ó  $\sigma_i$  en  $E_2$ , se sigue que un arco de  $\partial M'_i$  de más a la orilla en  $E_2$  es paralelo a un arco de  $\partial C$ , y como antes estos se pueden eliminar.

Por lo tanto  $D$  solo interseca a la bola  $B_1$ , y se sigue que  $\partial D$  es trivial pues de otro modo  $D$  intersecaría a  $\Sigma_3$  o  $K_2$ . De lo anterior se tiene que no existe tal disco de compresión. De manera similar se prueba la incompresibilidad de  $S_3$  en  $U_2$ .  $\square$

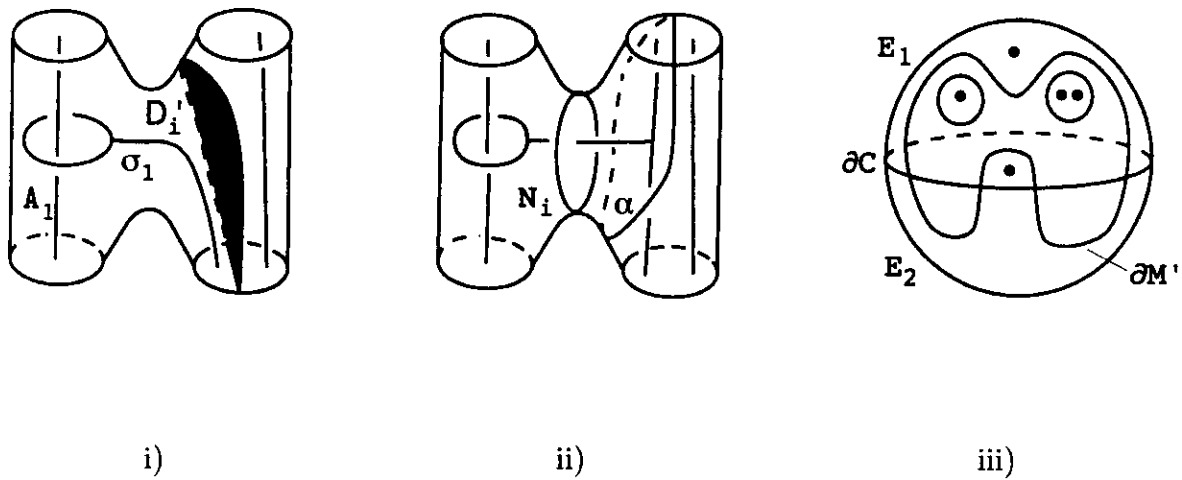


Fig. 2.1.5



Recuérdese que

$$r_{0,j} = \begin{cases} \sum e_i & \text{si } j = 1 \\ \sum f_i & \text{si } j = 3 \end{cases}$$

Llamemos  $V_i$  al espacio obtenido de  $U_i$  al hacer cirugía en la componente  $K_i$  ( ver fig. 2.1.1 ). Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & & V_1 \cup U_2 \cup V_3 \\ & \nearrow \iota & \\ S_j & & \\ & \searrow \iota' & \\ & & U_1 \cup V_2 \cup U_3 \end{array}$$

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  un enlace con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ , tal que  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_j \neq r_{0,j}$ , y  $r_j \neq (kr_{0,j} \pm 1)/k$  para toda  $k \in \mathbf{Z}$ . Entonces  $\iota, \iota'$  son  $\pi_1$ -inyectivas.*

*Demostración.* Veamos que  $\iota$  es  $\pi_1$ -inyectivo. Por el lema 2.1.2,  $S_j$  es incompresible en  $U_2$  y por el teorema 2.1.1, b) se tiene que  $S_j$  es incompresible en  $V_j$ . Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo donde todos los homomorfismos son  $\pi_1$ -inyectivos.

$$\begin{array}{ccccc} & & V_1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S_1 & & & & U_2 \cup V_1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & U_2 & & \\ S_3 & \nearrow & & \searrow & \\ & \searrow & & \nearrow & U_2 \cup V_3 \\ & & V_3 & & \\ & & & \nearrow & \\ & & & & V_1 \cup U_2 \cup V_3 \end{array}$$

Para demostrar que  $\iota'$  es  $\pi_1$ -inyectivo basta probar que  $S_j$  se comprime en  $V_2$  únicamente para  $r_2 = 1/0$ .

Supongamos que  $S_1$  se comprime al realizar la cirugía  $r_2$  en  $K_2$ . Sea  $D$  un disco de compresión en  $V_2 = U_2 \cup_{\partial\eta(K_2)} T_2$ , con  $T_2$  un toro sólido tal que una curva meridiana se pega a lo largo de una curva de pendiente  $r_2$  en  $\partial\eta(K_2)$ , ( ver fig. 2.1.1 ).  $D \cap T_2$  es una colección de discos meridianos y  $D \cap U_2$  es un disco  $D'$  agujerado. Sea  $D' \cap S_1 = \partial_0 D$  y  $(\partial D' - \partial_0 D) = D' \cap \partial\eta(K_2)$ . Nótese que se tienen  $2n$  anillos  $\cup a_i$  en  $M^3$  ( ver fig. 2.1.6), con una componente frontera en  $K_2$  y la otra en  $S_1$  ó en  $S_3$ . Elijamos un anillo  $a$  con una frontera en  $S_1$  y un anillo  $a'$  con una frontera en  $S_3$  ( ver fig. 2.1.6 ). Supongamos que los anillos intersecan al disco  $D'$  transversalmente. Sea  $\gamma \in a' \cap D'$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada trivial en  $a'$  cortamos  $D'$  a lo largo de una curva de más adentro en  $a'$ . Los arcos  $\gamma$  con extremos intersecando  $S_3$  no aparecen ya que la frontera del disco  $D$  aparece sobre  $S_1$ . Sea  $\gamma$  un arco con extremos en  $\partial D' - \partial_0 D$ . Si  $\gamma$  visto en  $D'$  tiene extremos en diferente componente frontera, cortamos  $D'$  a lo largo del disco que acota  $\gamma$  en  $a'$ , pegando dos copias de este disco se obtiene una curva trivial en  $\partial T_2$ , que al tajarla se obtiene un disco de compresión con menos intersecciones con  $T_2$ . De esta manera eliminamos ese tipo de intersección.

Si  $\gamma$  tiene sus extremos en la misma componente frontera, por un argumento de orientabilidad puede ser eliminada, ( regla de paridad en [CGLS] ). Por lo tanto el disco  $D$  no interseca al toro de cirugía  $T_2$ , lo que contradice la incompresibilidad de  $S_1$  en  $U_2$ . La incompresibilidad de  $S_3$  en  $V_2$  se prueba de manera similar.

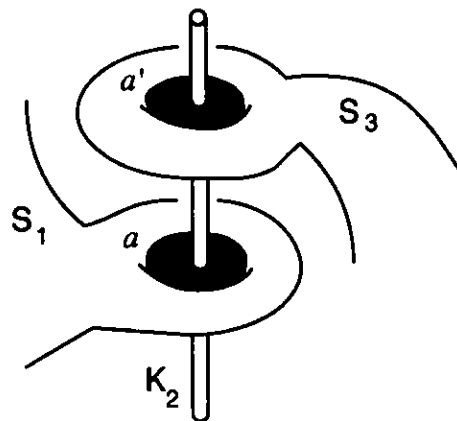


Fig. 2.1.6

□

---

Decimos que una 3-variedad  $N^3$  irreducible es *Haken* si existe una superficie  $S$  distinta de  $S^2$  que es  $\pi_1$ -inyectiva en  $N^3$ .

**Teorema 2.1.4** Dado  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  un enlace con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ , tal que  $r_2 \neq 1/0$ ,  $r_j \neq r_0$ , y  $r_j \neq (kr_0 \pm 1)/k$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, 3$ , la 3-variedad  $N^3$  obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  es *Haken*.

*Demostración.* Por la proposición 2.1.3 basta probar que  $N^3$  es irreducible. Ya que  $N^3 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$  unidas a lo largo de las superficies incompresibles  $S_j$ , es suficiente probar la irreducibilidad de  $V_i$ .

Probemos que  $V_1$  es irreducible. Sea  $V_1 = U_1 \cup_{\partial\eta(K_1)} T_1$  con  $T_1$  el toro de cirugía y  $S^2 \subset V_1$  una esfera en posición general.  $S^2 \cap T_1$  es una colección de discos meridianos  $m_i$ . Llamemos  $S'$  a la esfera agujerada. Sea  $b_1$  un anillo en  $U_1$  tal que  $\partial b_1$  es la componente frontera en  $K_1$  y  $\partial_0 b_1$  la componente frontera en  $S_1$  ( ver pág. 12 ). Sea  $\gamma \in b_1 \cap S'$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada trivial en  $b_1$  la eliminamos cortando a lo largo de una curva de más adentro en  $b_1$ . Arcos con extremos en  $\partial_0 b_1$  no aparecen ya que la esfera está contenida en  $V_1$ . Sea  $\gamma$  un arco de más adentro en  $b_1$  tal que sus extremos aparecen en distintas componentes frontera de  $S'$ . Cortando  $S'$  a lo largo de  $\gamma$  y pegando dos copias del disco que acota obtenemos una curva trivial en  $T_1$  tal que al tajarla con un disco obtenemos una esfera isotópica a  $S^2$  con menos intersecciones con  $T_1$ , eliminando de esta manera ese tipo de intersecciones. Si  $\gamma$  es un arco con extremos en la misma componente frontera  $m_i$  de  $S'$  por un argumento de orientabilidad se elimina. Por lo tanto la esfera  $S^2$  está contenida en  $U_1$ . Ya que  $U_1$  es irreducible, con lo anterior queda probada la irreducibilidad de  $V_1$ . La irreducibilidad de  $V_3$  se prueba de manera similar.

Probemos que  $V_2$  es irreducible. Sea  $S^2 \subset V_2 = U_2 \cup_{\partial\eta(K_2)} T_2$  una esfera en posición general. Llamemos  $A$  a la colección de anillos ajenos en  $U_2$  con fronteras en  $K_2$  y en  $S_j$ .  $S^2 \cap T_2$  es una colección de curvas meridianas.

---

---

Sea  $S'$  la esfera agujerada. Probemos que  $A$  no interseca a  $S'$ . Sea  $a \in A$  un anillo con  $\partial_0 a$  la componente frontera en  $S_1$  ó en  $S_3$  y  $\partial a$  la componente frontera en  $\partial\eta(K_2)$ . Sea  $\gamma \in S' \cap a$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada trivial en  $a$  cortamos a lo largo de una curva de más adentro en  $a$ . Con lo anterior, eliminamos este tipo de intersección. Arcos con extremos en  $\partial_0 a$  no existen ya que  $S' \subset U_2$ . Los casos restantes se eliminan con los argumentos utilizados para mostrar la irreducibilidad de  $V_1$ . Por lo tanto la esfera está contenida en  $U_2$  que es irreducible.

□

De aquí se concluye lo siguiente, donde  $N^3$  es como en el teorema 2.1.4.

**Corolario 2.1.5**  $N^3$  no puede ser una esfera homotópica.

□

## 2.2 - Ovillos frontera irreducibles.

En esta sección consideramos  $\hat{\beta} \in L'$  ( ver sección 2.1 ) un enlace con marco  $(\epsilon_1, r_2, \epsilon_3)$ , con  $\epsilon_i = \pm 1/n$ . Probamos que si  $r_2 \neq 1/0$  entonces no es posible obtener  $S^3$  por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con tal marco. Extendiendo en este sentido el corolario 2.1.5 para  $r_j = \pm 1/n$ , con  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

Un *ovillo de n-cuerdas*, denotado por  $\mathcal{B} = (B, \tau)$  consta de una 3-bola  $B$  y un conjunto  $\tau$  de  $n$  arcos propiamente encajados en  $B$ . Decimos que el ovillo es  *$\partial$ -irreducible* si para cualesquiera 2 cuerdas no existe un disco propiamente encajado en  $B$  que las separa.

Sea  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  tal que  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n \widehat{\sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$  con  $|e_i| > 1$ ,  $|f_i| > 1$  para toda  $i = 1, \dots, n$  y  $K$  el nudo obtenido de  $\hat{\beta} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  ( donde  $lk(K_1, K_3) = 0$  ) después de hacer la cirugía  $(\epsilon_1, \phi_2, \epsilon_3)$ , con  $\epsilon_i = \pm 1/n$  y  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Sean  $\mathcal{B}_i$ , con  $i = 1, 2$  los ovillos de  $n$ -cuerdas mostrados en la figura 2.2.1.

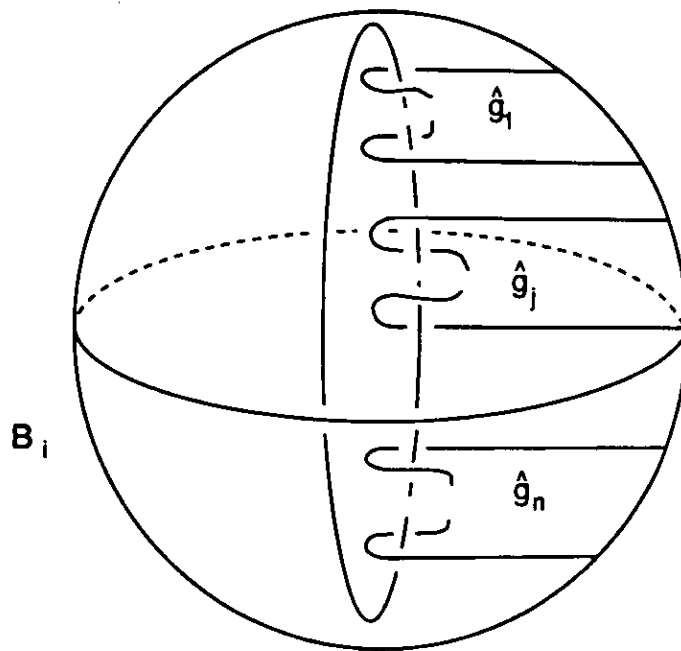


Fig. 2.2.1

Realizando una isotopía en  $\mathcal{B}_i$  obtenemos el ovillo mostrado en la figura 2.2.2 i), después de cirugía obtenemos el ovillo  $\mathcal{B}'_i$  mostrado en ii). ( en la figura se muestra el caso  $n = 2$  ).

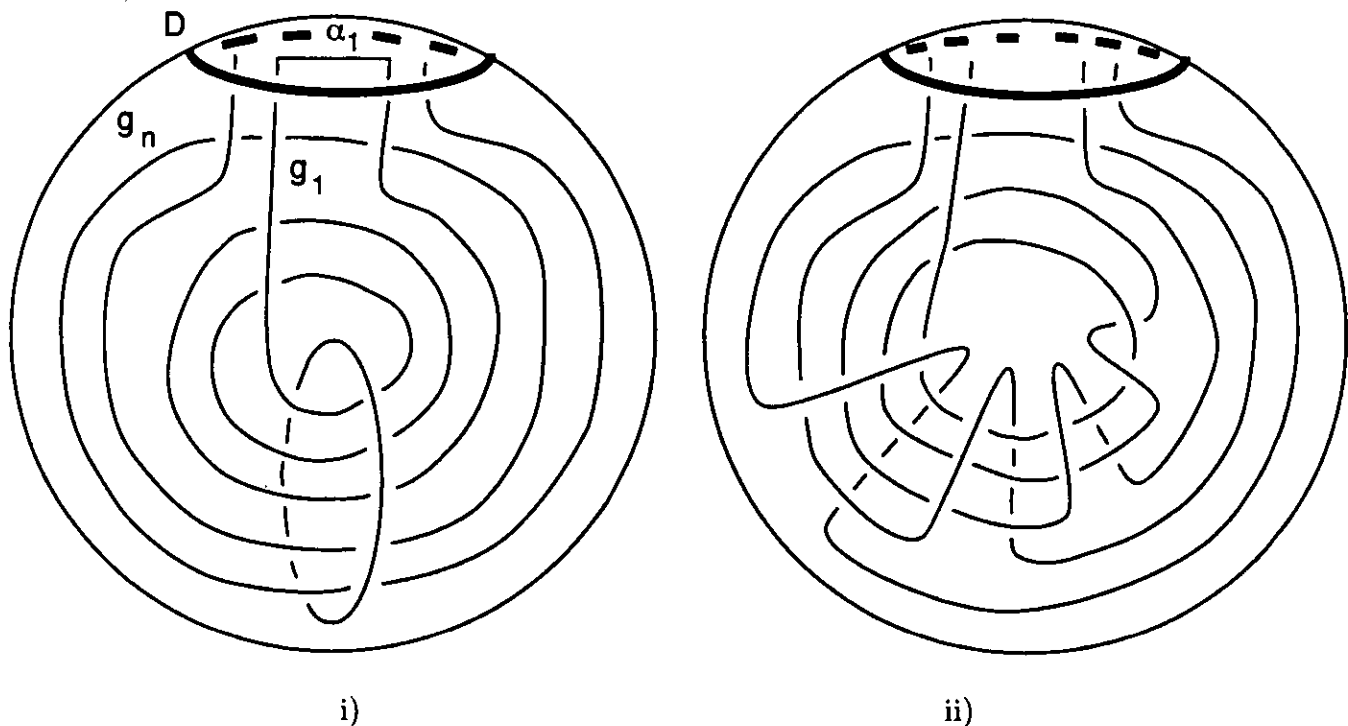


Fig. 2.2.2

Sea  $\partial\mathcal{B}'_i = S^2 - \{2n\text{-puntos}\}$ . La suma  $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$  se define como  $\mathcal{B}_1 \cup_{\varphi} \mathcal{B}_2$  a lo largo de un homeomorfismo  $\varphi : \partial\mathcal{B}_1 \rightarrow \partial\mathcal{B}_2$ . Nótese que  $K = \mathcal{B}'_1 + \mathcal{B}'_2$ , con  $\varphi = Id$ .

Mostremos que  $K$  es no trivial. Por [GL] es suficiente probar que los ovillos de  $n$ -cuerdas  $\mathcal{B}'_i = (\mathcal{B}'_i, \tau)$  son  $\partial$ -irreducibles. ( Un ovillo es primo si no tiene nudos locales y es  $\partial$ -irreducible.)

Sea  $\{g_j\}_1^n$  el conjunto de arcos del ovillo  $\mathcal{B}'_i = (\mathcal{B}'_i, \tau)$ . Obsérvese que existe una familia de toros agujerados (ver fig. 2.2.3 )  $\mathbf{T}_i = \{T_j, \partial T_j\}_{j=1}^{n-1}$  propiamente encajados en  $\mathcal{B}'_i$ , tal que cada toro  $T_j$  separa los primeros  $j$ -arcos de los  $(n-1-j)$ -arcos. Sea  $D \subset S^2$  un disco conteniendo todos los extremos de los arcos (ver fig. 2.2.2 , i)) y  $D_j \subset D$  un disco tal que  $\partial D_j = \partial T_j$ . Sea  $\alpha_j$  un arco encajado en  $D_j$  tal que  $\partial\alpha_j = \partial g_j$ .

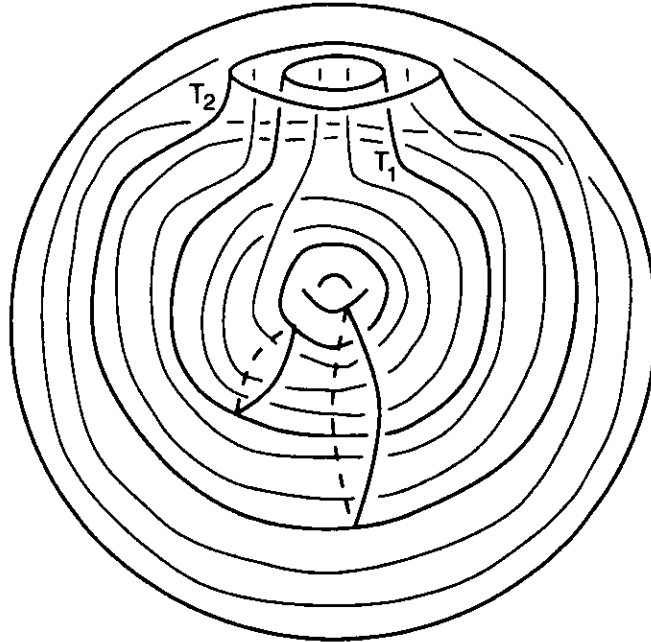


Fig. 2.2.3

**Lema 2.2.1** Cada elemento de la familia  $\mathbf{T}_i$  es incompresible en  $B'_i - \tau_i$ .

*Demostración.* Sea  $(T_j, \partial T_j) \in \mathbf{T}_1$  ( $(T_j, \partial T_j) \in \mathbf{T}_2$ ). Supongamos que existe un disco de compresión  $D^2$  para  $T_j$ . Ya que  $T_j \cup D_j$  es un toro desanudado contenido en una bola  $B^3$ , este es frontera de un toro sólido  $T'$  en  $B^3$ . Supongamos que  $D^2$  está contenido en el toro sólido  $T'$ . Si  $\partial D^2$  es homotópica a un meridiano del toro sólido entonces  $g_j \cap D^2 \neq \emptyset$  ya que  $|e_j| > 1$  ( $|f_j| > 1$ ) y  $g_j \cup \alpha_j$  no es homotópicamente trivial en  $T'$ , por lo tanto  $D^2 \cap (g_j \cup \alpha_j) \neq \emptyset$  lo cual es una contradicción. Si  $\partial D^2$  es homotópicamente trivial en  $T_j \cup D_j$  entonces  $\partial D^2$  es homotópicamente trivial en  $T_j$  ó  $\partial D^2$  es paralela a  $\partial T_j$  lo cual implicaría que  $g_j \cup \alpha_j$  es homotópicamente trivial en  $T'$ , en ambos casos tenemos una contradicción. Por otro lado, si el disco se encuentra en el complemento del toro sólido  $T'$  el cual es también un toro sólido  $T''$ , entonces  $\partial D^2$  es una longitud de  $T_j$ , ó una curva homotópicamente trivial o es paralela a  $\partial T_j$ . Ya que tenemos  $(n-1-j)$ - arcos con  $|e_i| > 1$  ( $|f_i| > 1$ ) se tiene que  $\bigcup_{k=j+1}^{n-1} (g_k \cup \alpha_k) \cap D^2 \neq \emptyset$  obteniéndose nuevamente una contradicción. □

**Lema 2.2.2** Sea  $B'_i$  como antes. Entonces  $B'_i$  es un ovinlo  $\partial$ -irreducible.

*Demostración.* Basta probar que dados cualesquiera dos arcos en  $B'_1$  no existe un disco que los separe. La prueba para  $B'_2$  es similar.

Sean  $g_j, g_k$  con  $j < k$  cualesquiera dos arcos. Supongamos que existe un disco  $E$  que los separa. Sea  $(m, l)$  una pareja preferencial meridiano-longitud para  $T_j \cup D_j$  y  $c$  denotará una curva trivial en  $T_j$ .

Supongamos que  $E$  y  $T_j$  se intersecan transversalmente. Sea  $\gamma \subset E \cap T_j$  una curva cerrada, vista en  $T_j$  es una curva trivial ya que  $T_j$  es incompresible. Cortando  $E$  a lo largo de una curva de más adentro en  $T_j$  eliminamos este tipo de intersecciones. Si  $\gamma \subset E \cap T_j$  es un arco, consideremos el arco  $\gamma_j$  de más a la orilla en  $E$ , ( ver fig. 2.2.4 i ). La frontera de  $D_j$  divide la frontera del ovinlo  $(B'_1, \tau_1)$  en dos discos, uno de los cuales es  $D_j$ . Sea  $\gamma'_j$  un arco contenido en  $\partial E$  tal que  $\partial \gamma'_j = \partial \gamma_j$  y tal que si  $E' \subset E$  es el disco con  $\partial E' = \gamma_j \cup \gamma'_j$  entonces  $\text{int}(E') \cap (E \cap T_j) = \emptyset$ . Si  $\gamma'_j$  está contenido en  $D_j$ , entonces el arco  $\gamma_j$  en  $T_j$  es ( ver fig. 2.2.4, ii): i) Un meridiano  $\mu - (D_j \cap \mu)$ , ó ii) Una curva trivial  $c - (D_j \cap c)$ . Si  $\gamma'_j$  está en el complemento de  $D_j$ , entonces el arco  $\gamma_j$  es como en ii), ó como iii) Una longitud  $l - (D_j \cap l)$ :

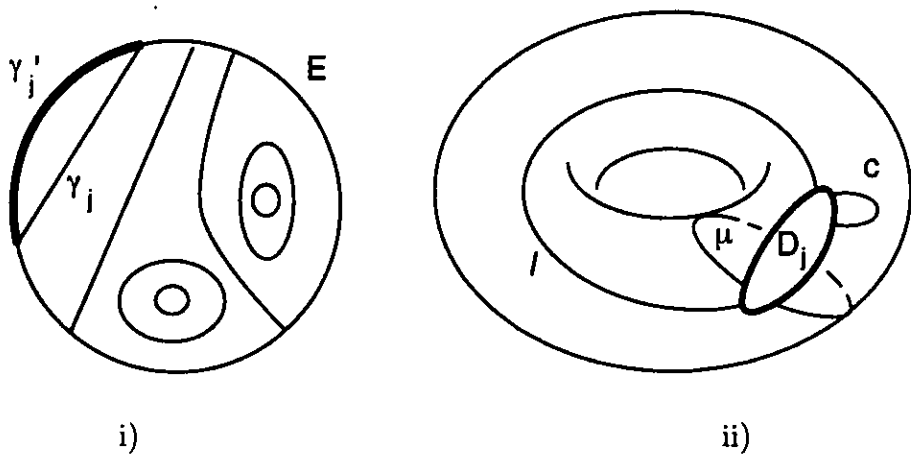


Fig. 2.2.4



---

Supongamos que  $\gamma'_j$  está contenido en  $D_j$ . Cuando  $\gamma'_j$  no separa los extremos de  $g_j$ ,  $\gamma'_j$  es isotópico a un arco sobre  $\partial D_j$  y por lo tanto en i),  $(\mu - (D_j \cap \mu)) \cup \gamma'_j$  es un meridiano en  $T_j$  que es frontera de un disco ajeno de  $g_j$ , lo cual contradice que  $T_j$  es incompresible. Para ii),  $(c - (D_j \cap c)) \cup \gamma'_j$  es una curva trivial en  $T_j$  tal que con una isotopía de  $E$  podemos eliminarla. Cuando el arco  $\gamma'_j$  separa los extremos de  $g_j$ , en i) la curva  $(\mu - (D_j \cap \mu)) \cup \gamma'_j$  es una curva meridional frontera de un disco  $D'$  en el toro sólido acotado por  $T_j \cup D_j$ , tal que  $D' \subset E$ . Si  $g_j \cup \alpha_j = a_j m + b_j l$  con  $|b_j| > 1$ , entonces  $|(g_j \cup \alpha_j) \cap D'| > 1$  y luego  $|g_j \cap D'| \geq 1$  y como  $D' \subset E$  obtenemos una contradicción. En ii) al considerar la curva  $(c - D_j \cap c) \cup \gamma'_j$ , esta es frontera de un disco en  $D$  y frontera de un disco en  $(B'_1, \tau_1)$ , por lo tanto tenemos una esfera  $S^2$  tal que  $S^2 \cap (g_j \cup \alpha_j) = \{1 \text{ punto}\}$  lo cual no es posible. Supongamos ahora que el arco  $\alpha'_j$  está en el complemento del disco  $D_j$ . Un argumento similar nos lleva a una contradicción.

Finalmente, supongamos que  $E \cap T_j = \emptyset$ , por lo tanto  $\partial E$  es paralela a  $\partial D_j$ . En este caso el disco no puede estar en el toro sólido acotado por  $T_j \cup D_j$  ni en su complemento ya que  $g_j \cup \alpha_j$  tiene  $|e_j| > 1$  y  $g_k \cup \alpha_k$  tiene  $|e_k| > 1$  lo que llevaría a que  $E \cap (g_j \cup \alpha_j) \neq \emptyset$  ó  $E \cap (g_k \cup \alpha_k) \neq \emptyset$ . Por lo tanto no existe tal disco que separe a cualesquiera 2 cuerdas.

□

**Teorema 2.2.3** Sean  $B'_i$  los ovillos del lema 2.2.2 y  $K$  un nudo tal que  $K = B'_1 + B'_2$ . Entonces  $K$  es no trivial.

*Demostración.* La demostración se sigue de [GL, 2.1] ya que por el lema 2.2.2 los ovillos son  $\partial$ -irreducibles.

□

---

**Corolario 2.2.4** *Sea  $\hat{\beta} \in \mathbf{L}'$  un enlace con marco  $(\epsilon_1, r_2, \epsilon_3)$ , tal que  $\epsilon_i = \pm 1/n$  con  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Si  $r_2 \neq 1/0$  entonces no es posible obtener  $S^3$  por cirugía sobre  $\hat{\beta}$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  el nudo obtenido al realizar la cirugía  $(\epsilon_1, \phi_2, \epsilon_3)$  sobre  $\hat{\beta}$ . Por el Teorema 2.2.3 el nudo  $K$ , obtenido de  $\hat{\beta}$  es no trivial. El corolario se sigue de un teorema de [GoL].

□

### 2.3.- Ejemplos en los que se obtiene la 3 - esfera.

En esta sección se prueba que si  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1}} \sigma_2^{2f_1} \in \mathbf{B}$  entonces no es posible obtener una esfera homotópica distinta de  $S^3$ . Damos algunos ejemplos no triviales en los cuales se obtiene  $S^3$ .

Sea  $L \subset S^3$  un enlace orientado de  $n$  componentes.  $L$  es fuertemente invertible si existe un representante  $\alpha \in [L]$  en su clase de isotopía y una recta que interseca a cada componente de  $\alpha$  en 2 puntos, tal que  $\alpha$  permanece invariante al hacer una rotación de  $180^\circ$  alrededor de esa recta.

Consideremos los enlaces de la forma  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1}} \sigma_2^{2f_1} \in \mathbf{B}$ . Nótese que  $\hat{\beta}$  es un enlace fuertemente invertible ( ver fig. 2.3.1 ).

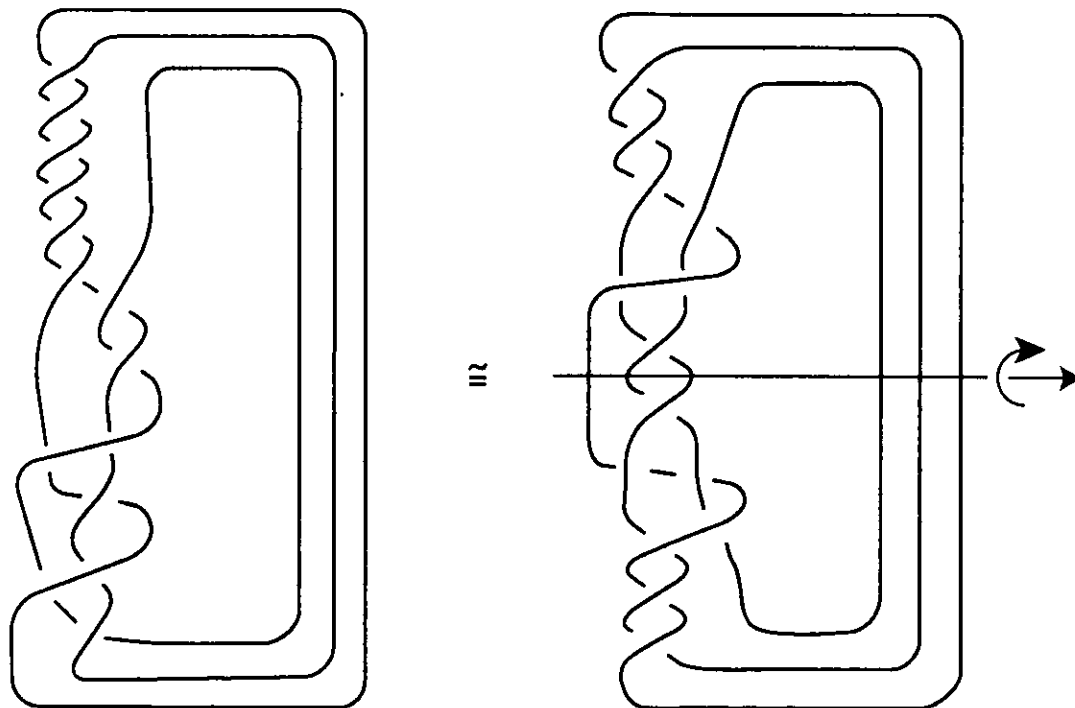


Fig. 2.3.1

---

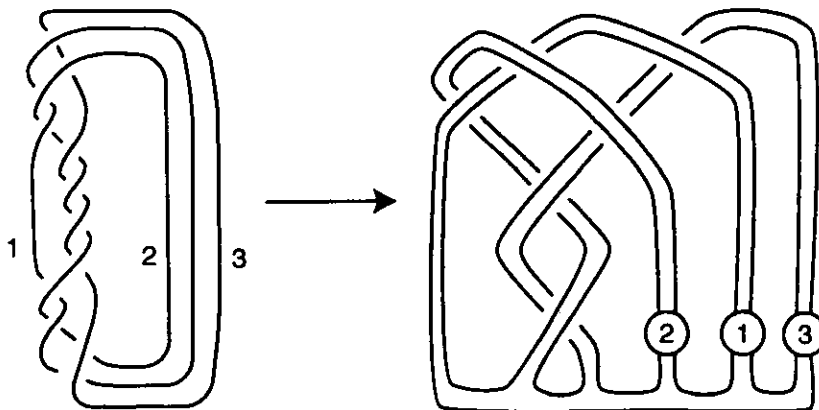
**Proposición 2.3.1** Sea  $N^3$  una esfera homotópica obtenida por cirugía de Dehn sobre el enlace  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \widehat{\sigma_1^{2e_1} \sigma_2^{2f_1}}$  con marco  $(r_1, r_2, r_3)$ . Entonces  $N^3$  es homeomorfa a  $S^3$ .

*Demostración.* Como el enlace es fuertemente invertible cualquier variedad obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  es cubierta doble ramificada de  $S^3$ . Sea  $N^3$  una esfera homotópica, entonces  $N^3$  es homeomorfa a  $S^3$  por la solución de la conjetura de Smith ( ver [MB]).

□

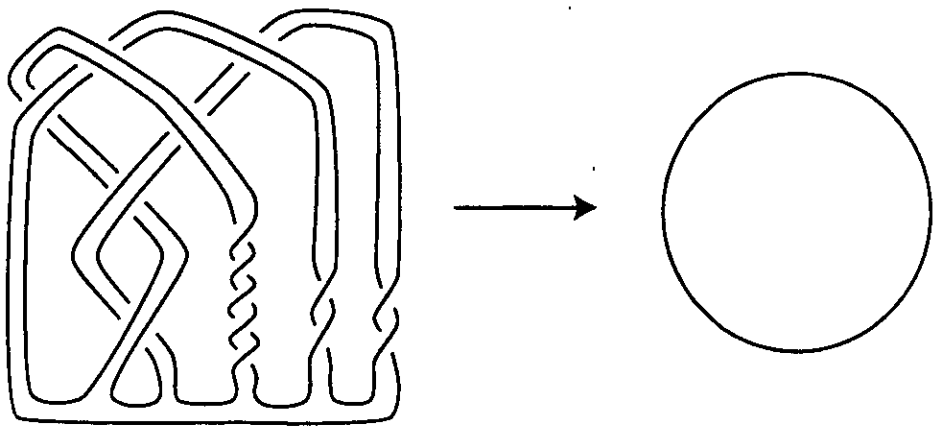
Los siguientes enlaces con marco entero producen  $S^3$ . Todos estos enlaces son fuertemente invertibles, por lo que las variedades obtenidas por cirugía son cubiertas dobles ramificadas de  $S^3$  con conjunto de ramificación un nudo o enlace. Para probar que la variedad obtenida es  $S^3$  es suficiente mostrar que el conjunto de ramificación es el nudo trivial ( ver [M], [MB] ).

1)



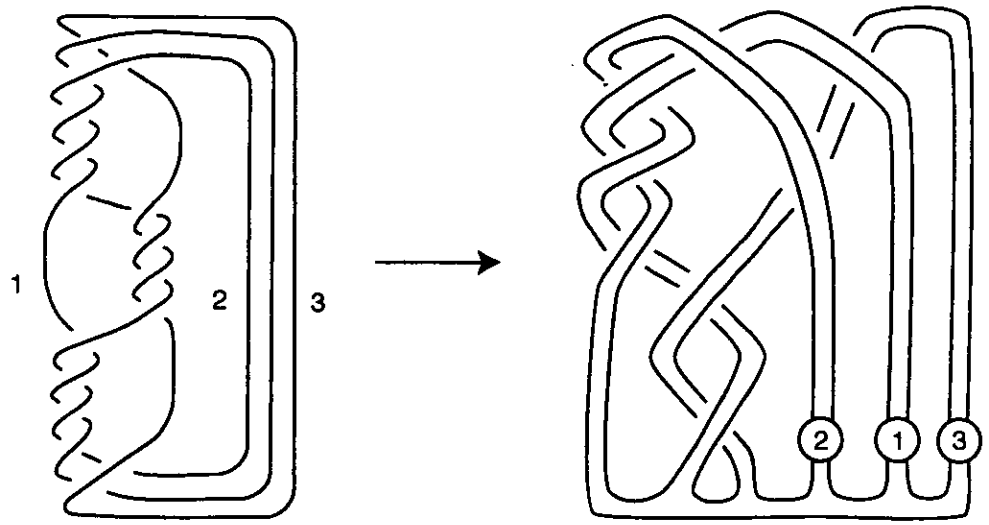
$$e_1 = 1, f_1 = 2, e = 1$$

con marco  $(2, 5, 2)$ .



otros marcos con los que se obtiene  $S^3$  son  $(1, 2, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 6, 2)$ ,  $(1, 4, 2)$ ,  $(1, 5, 3)$ ,  $(1, 4, 3)$ ,  $(1, 3, 1)$  y  $(1, 4, 0)$ . Según Snapea [We], este enlace es hiperbólico, su complemento es isométrico a la variedad S776 de la lista de variedades hechas con 6 tetraedros.

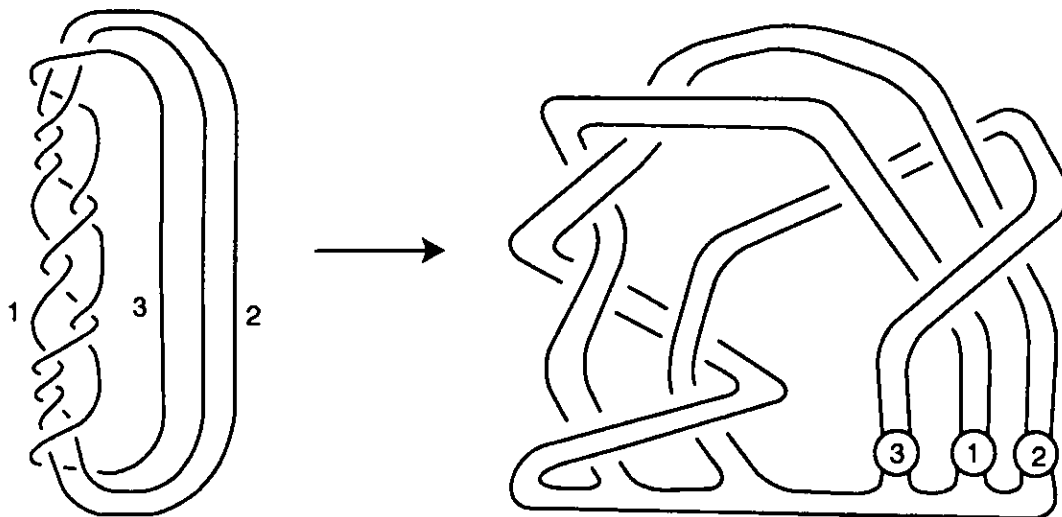
2)



$$e_1 = 3, f_1 = 2, e = 1$$

con marcos  $(5, 5, 3)$ ,  $(2, 9, 2)$ ,  $(5, 6, 2)$ .

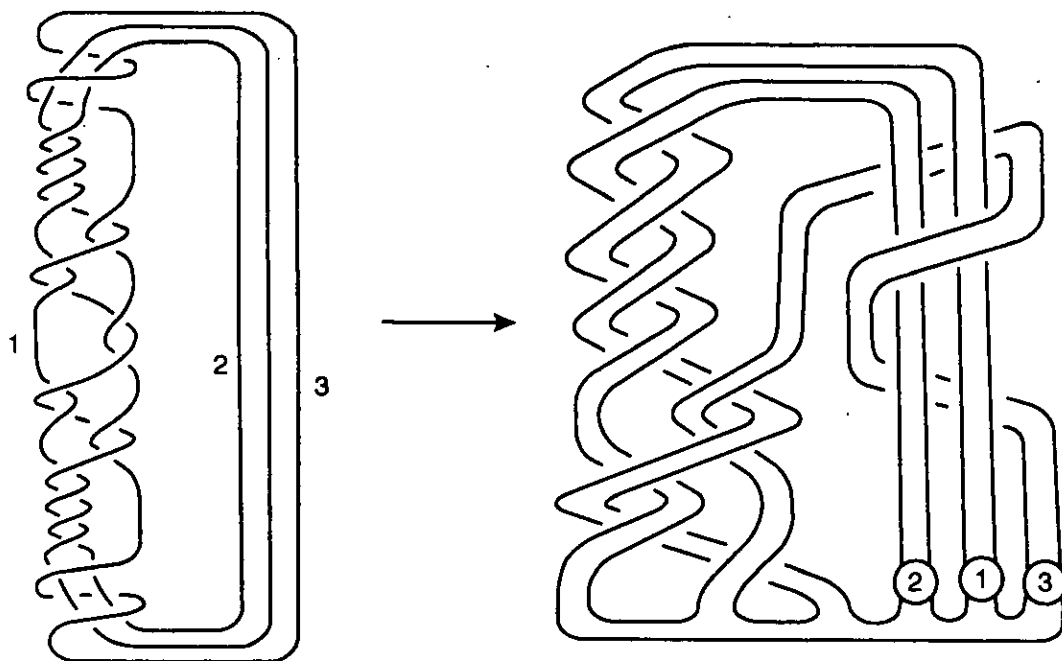
3)



$$e_1 = 1, e_2 = 1, f_1 = 1, f_2 = 1, e = 2$$

con marcos  $(-5, 5, 3)$ ,  $(-3, 5, 3)$ ,  $(3, -1, 1)$ ,  $(3, 1, 1)$ .

4)



$$e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 1, e = 3$$

con marcos  $(4, 1, 2)$  y  $(4, 7, 1)$ .

---

## Capítulo 3

### 3.1 - El invariante $\mu$ .

En este capítulo consideramos todas las posibles  $Z_2$ -esferas homológicas 3-dimensionales  $M^3$  obtenidas haciendo cirugía de Dehn en elementos de  $\mathbf{B}$  con marco entero  $(l_1, l_2, l_3)$ . Calculamos el invariante  $\mu$  de  $M^3$ , el cual es un invariante de las clases de cobordismo de  $Z_2$ -esferas homológicas 3-dimensionales a los racionales módulo 1 ( ver [GA1], [GA2], [CS], [R] ).

Sea  $\hat{\beta} = \cup_1^3 K_i \in \mathbf{B}$  con marco  $(l_1, l_2, l_3)$ , tal que  $l_i \in Z$ . Denotamos por  $P = (l_{ij})_{3 \times 3}$  a la matriz del enlace  $\hat{\beta}$ , donde

$$l_{ij} = \begin{cases} lk(K_i, K_j) & \text{si } i \neq j \\ l_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Nótese que la 3-variedad obtenida por cirugía en  $\hat{\beta}$  es una  $Z_2$ -esfera homológica sí y sólo sí el determinante de  $P$  es 1 mod 2. Supongamos que la 3-variedad obtenida es una  $Z_2$ -esfera homológica, la denotamos por  $M^3$ . Sea  $U$  el conjunto de enteros  $i$  tal que  $u_i \neq 0$  donde

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P_2^{-1} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

con  $\bar{l}_i = l_i \pmod{2}$  y  $P_2$  la matriz  $P$  reducida módulo 2.

Un enlace orientado de  $n$  componentes  $L = \cup_{i=1}^n K_i$  contenido en  $S^3$  es *propio*, si para toda componente del enlace se tiene que  $lk(K_i, \cup_{j \neq i} K_j)$  es un número par. Sea  $\hat{\beta}_U = \cup_{i \in U} K_i$  el subenlace propio de  $r = \#\{U\}$  componentes obtenido de  $\hat{\beta}$ , y  $d$  el polinomio de Alexander evaluado en  $-1$  del nudo que se obtiene de  $\hat{\beta}_U$  después de sumarle  $(r - 1)$  bandas orientadas.

---

---

Dos 3-variedades  $M_1^3, M_2^3$  son *cobordantes* si existe una 4-variedad  $N^4$ , con  $\partial N^4 = M_1^3 \cup M_2^3$  tal que los homomorfismos inducidos por la inclusión de  $M_j^3$  en  $N^4$  en los grupos de homología con coeficientes en  $\mathbf{Z}_2$ , son isomorfismos  $\iota_n : \mathbf{H}_n(M_j^3, \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_n(N^4, \mathbf{Z}_2)$ . Decimos que  $M_1^3$  es equivalente a  $M_2^3$  si  $M_1^3$  es cobordante con  $M_2^3$ . Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia. Se sigue del trabajo de González-Acuña [GA2] ( ver también [CS] ) que el invariante  $\mu : \{ \text{Clases de cobordismo de } \mathbf{Z}_2\text{-esferas homológicas} \} \rightarrow \mathbf{Q} \text{ mod } 1$  está dado por la siguiente expresión

$$\mu(M^3) = \frac{\sigma(P) - \sum_{i,j \in U} l_{ij} + d^2 - 1}{16} \quad \text{mod } 1$$

donde  $\sigma(P)$  es la signatura de la matriz  $P$ .

Del diagrama del enlace  $\hat{\beta}$  es fácil ver que  $lk(K_1, K_2) = (\sum_1^n e_i) + e$ ,  $lk(K_1, K_3) = e$  y  $lk(K_2, K_3) = (\sum_1^n f_i) + e$ , entonces la matriz del enlace es

$$P = \begin{pmatrix} l_1 & \sum_1^n e_i + e & e \\ \sum_1^n e_i + e & l_2 & \sum_1^n f_i + e \\ e & \sum_1^n f_i + e & l_3 \end{pmatrix}$$

y el determinante de  $P$  está dado por

$$Det(P) = l_1 l_2 l_3 + 2e \left( \sum_1^n e_i + e \right) \left( \sum_1^n f_i + e \right) - e^2 l_2 - l_1 \left( \sum_1^n f_i + e \right)^2 - l_3 \left( \sum_1^n e_i + e \right)^2$$

pero ya que consideraremos  $\mathbf{Z}_2$ - esferas homológicas tomamos  $Det(P)$  módulo 2 y tenemos

$$\overline{l_1 l_2 l_3} - \overline{e^2 l_2} - \overline{l_1 \left( \sum_1^n \overline{f_i} + \overline{e} \right)^2} - \overline{l_3 \left( \sum_1^n \overline{e_i} + \overline{e} \right)^2} \cong 1 \text{ mod } 2$$


---



---

Las posibilidades para  $P_2, P_2^{-1}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  son las siguientes.

A) Si  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son impares tenemos los siguientes casos

1.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow \sum e_i, \sum f_i, e$  pares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_2^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

2.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow \sum e_i, \sum f_i$  impares y  $e$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2$$

3.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow \sum e_i, e$  impares y  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_3$$

4.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow \sum f_i, e$  impares y  $\sum e_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1$$


---

---

B) Si  $l_1$  par y  $l_2, l_3$  impares tenemos  $-\overline{e^2 l_2} - \overline{l_3(\sum_1^n \bar{e}_i + \bar{e})^2} \cong 1$  y

1.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum e_i, \sum f_i$  impares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2$$

2.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum e_i$  impares y  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2$$

3.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow e$  par,  $\sum e_i$  impar y  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_3$$

4.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow \sum e_i$  impar,  $e$  par y  $\sum f_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_3$$

C) Si  $l_2$  par y  $l_1, l_3$  impares tenemos  $\overline{l_1(\sum_1^n \bar{f}_i + \bar{e})^2} - \overline{l_3(\sum_1^n \bar{e}_i + \bar{e})^2} \cong 1$

1.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum f_i$  impares y  $\sum e_i$  par

---

---


$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_3$$

2.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum f_i$  pares y  $\sum e_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2 \cup K_3$$

3.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0 \Rightarrow e, \sum e_i$  impares y  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1$$

4.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 0 \Rightarrow e, \sum e_i$  pares y  $\sum f_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2$$

D) Si  $l_3$  par y  $l_1, l_2$  impares tenemos  $-\overline{e^2 l_2} - \overline{l_1(\sum_1^n f_i + \bar{e})^2} \cong 1$

1.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum f_i, \sum e_i$  impares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2 \cup K_3$$


---

---

2.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 0, \overline{e^2 l_2} \cong 1 \Rightarrow e, \sum f_i$  impares y  $\sum e_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2$$

3.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow e$  par,  $\sum f_i$  impar y  $\sum e_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_3$$

4.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1, \overline{e^2 l_2} \cong 0 \Rightarrow e$  par,  $\sum f_i$  impar y  $\sum e_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1$$

**E)** Si  $l_1$  impar y  $l_2, l_3$  pares

1.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1$  y suponemos  $e$  impar  $\Rightarrow \sum f_i$  par y  $\sum e_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

2.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1$  con  $e$  impar  $\Rightarrow \sum f_i$  par y  $\sum e_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2$$


---

---

3.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1$  y  $e$  par  $\Rightarrow \sum f_i$  impar y  $\sum e_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1$$

4.-  $\overline{l_1(\sum f_i + e)^2} \cong 1$  y  $e$  par  $\Rightarrow \sum f_i$  impar y  $\sum e_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_3$$

F) Si  $l_2$  impar y  $l_1, l_3$  pares tenemos los siguientes casos

1.-  $\overline{e^2 l_2} \cong 1$  y suponemos que  $e$  es impar,  $\sum e_i$  y  $\sum f_i$  pares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

2.-  $\overline{e^2 l_2} \cong 1$  y  $e$  impar,  $\sum e_i$  par y  $\sum f_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2 \cup K_3$$

3.-  $\overline{e^2 l_2} \cong 1$ , y  $\sum e_i, e$  impares,  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2$$


---

---

4.-  $\overline{e^2 l_2} \cong 1$  y  $\sum e_i, \sum f_i, e$  impares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2$$

G) Si  $l_3$  impar y  $l_1, l_2$  pares

1.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1$  y suponemos  $e$  impar  $\Rightarrow \sum e_i$  y  $\sum f_i$  pares

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

2.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1$  y  $e$  impar  $\Rightarrow \sum e_i$  par y  $\sum f_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_2 \cup K_3$$

3.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1$  y  $e$  par con  $\sum e_i$  impar y  $\sum f_i$  par

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_3$$

4.-  $\overline{l_3(\sum e_i + e)^2} \cong 1$  y  $e$  par con  $\sum e_i$  impar y  $\sum f_i$  impar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\beta}_U = K_1 \cup K_3$$

---

---

Nótese que en cada caso obtenemos un subenlace propio, este puede ser el nudo trivial, un enlace toroidal de 2 componentes o el enlace total.

Consideremos la representación de Magnus-Peluso  $\varphi : \mathbf{B}_3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$  definida por

$$\sigma_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -t^{-1} & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^{-1} \end{pmatrix}; \left( \sigma_1^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -t \end{pmatrix} \right)$$

Veamos que las matrices correspondientes a los elementos  $\sigma_i^{2k}$  para  $i = 1, 2$  bajo la representación  $\varphi$  son

a)

$$\sigma_1^{2k} \rightarrow \begin{pmatrix} t^{-2k} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} t^{-i} & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\sigma_2^{2k} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} t^{-(i-1)} \\ 0 & t^{-2k} \end{pmatrix}$$

c)

$$\sigma_1^{-2k} \rightarrow \begin{pmatrix} t^{2k} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} t^{i-1} & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\sigma_2^{-2k} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} t^i \\ 0 & t^{2k} \end{pmatrix}$$


---

---

Probémoslo por inducción sobre  $k$ .

a).- Para  $k = 1$

$$\sigma_1^2 \rightarrow \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ t^{-1} - t^{-2} & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que vale para  $k = n$  y veamos que es válida para  $k = n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sigma_1^{2(n+1)} &= \sigma_1^{2n} \sigma_1^2 \rightarrow \begin{pmatrix} t^{-2n} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ -t^{-2} + t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^{-2n-2} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^{-i-2} + t^{-1} - t^{-2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos  $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^{-i-2} + t^{-1} - t^{-2}$  haciendo  $i + 2 = j$  si  $i = 1 \rightarrow j = 3$ ,  
 $i = 2n \rightarrow j = 2n + 2$  por lo tanto tenemos

$$\sum_{j=3}^{2(n+1)} (-1)^{j-1} (-1)^2 t^{-j} + t^{-1} - t^{-2} = \sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^{j+1} t^{-j}$$

□

b).- Para  $k = 1$

$$\sigma_2^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 - t^{-1} \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix}$$

Supongamos que vale para  $k = n$  y veamos que también es válida para  $k = n + 1$ .

---



---


$$\begin{aligned}\sigma_2^{2(n+1)} &= \sigma_2^{2n} \sigma_2^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} t^{-(i-1)} \\ 0 & t^{-2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-t^{-1} \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-t^{-1} + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} t^{-(i-1)-2} \\ 0 & t^{-2(n+1)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$1-t^{-1} + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} t^{-(i-1)-2} = 1-t^{-1} + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} (-1)^2 t^{-(i+1)}$$

Haciendo  $i+1 = j-1$  si  $i=1 \rightarrow j-1=2$ , si  $i=2n \rightarrow j-1=2n+1$  tenemos

$$1-t^{-1} + \sum_{j=3}^{2n+2} (-1)^{j-1} t^{-(j-1)} = \sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^{j-1} t^{-(j-1)}$$

□

c).- Para  $k=1$

$$\sigma_1^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que vale para  $k=n$  y veamos que es válida para  $k=n+1$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-2(n+1)} &= \sigma_1^{-2n} \sigma_1^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} t^{2n} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} t^{i-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^{2n+2} & 0 \\ \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} t^{i+1} + 1-t & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$


---

---

Y tenemos

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} (-1)^2 t^{i+1} + 1 - t = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^{i+1} + 1 - t$$

Haciendo  $i + 1 = j - 1$ , si  $i = 1 \rightarrow j = 3$ , si  $i = 2n \rightarrow j = 2n + 2$  se tiene

$$\sum_{j=3}^{2n+2} (-1)^{j-1} t^{j-1} + 1 - t = \sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^{j-1} t^{j-1}$$

□

d).- Para  $k = 1$

$$\sigma_2^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t - t^2 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que vale para  $k = n$  y veamos que también es válida para  $k = n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-2(n+1)} &= \sigma_2^{-2n} \sigma_2^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^i \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t - t^2 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t - t^2 + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} t^{i+2} \\ 0 & t^{2(n+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$t - t^2 + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} (-1)^2 t^{i+2} = t - t^2 + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+3} t^{(i+2)}$$

Haciendo  $i + 2 = j$  si  $i = 1 \rightarrow j = 3$ , si  $i = 2n \rightarrow j = 2n + 2$  tenemos entonces

$$t - t^2 + \sum_{j=3}^{2n+2} (-1)^{j+1} t^j = \sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^{j+1} t^j$$

□

---

---

Por lo tanto al evaluar los polinomios en -1 tenemos

$$t^{-2e_i}|_{-1} = (-1)^{-2e_i} = 1 ; \quad t^{2e_i}|_{-1} = (-1)^{2e_i} = 1$$

$$t^{-2f_i}|_{-1} = (-1)^{-2f_i} = 1 ; \quad t^{2f_i}|_{-1} = (-1)^{2f_i} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{2e_i} (-1)^{j+1} t^{-j}|_{-1} = \sum_{j=1}^{2e_i} (-1)^{j+1} (-1)^{-j} = \sum_{j=1}^{2e_i} (-1) = -2e_i$$

$$\sum_{j=1}^{2e_i} (-1)^{j-1} t^{j-1}|_{-1} = \sum_{j=1}^{2e_i} (-1)^{j-1} (-1)^{j-1} = \sum_{j=1}^{2e_i} (-1)^{2j-2} = 2e_i$$

$$\sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{j-1} t^{-(j-1)}|_{-1} = \sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{j-1} (-1)^{-(j-1)} = \sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{-(j-1)} = 2f_i$$

$$\sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{j+1} t^j|_{-1} = \sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{j+1} (-1)^j = \sum_{j=1}^{2f_i} (-1)^{2j-1} = -2f_i$$

y las matrices correspondientes son

$$\sigma_1^{2e_i} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2e_i & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1^{-2e_i} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2e_i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^{2f_i} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2f_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^{-2f_i} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2f_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$


---

En [Mu] se calcula el polinomio de Alexander de una 3-trenza cerrada  $\hat{\beta} \in B_3$  usando la representación  $\varphi$  de Magnus-Peluso. Tal polinomio está dado en términos de  $\text{tr}(\varphi(\beta))$ .

Sean  $A_i, B_i$  las matrices triangulares inferior y superior respectivamente, tales que  $a_{ii} = 1, b_{ii} = 1$  y sea  $C = \prod_{i=1}^k A_i B_i$ . Calculemos la traza de la matriz  $C$ .

**Lema 3.1.1.** Sean  $A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i & 1 \end{pmatrix}$   $B_i = \begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$  con  $a_i, b_i \in \mathbf{Z}$  y  $k \geq 1$ , sea  $C = \prod_1^k A_i B_i$ . Entonces la traza de  $C$  está dada por

$$\text{Tr}[C] = 2 + \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s} b_{i_1} a_{j_1} \cdots b_{i_s} a_{j_s} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_s \geq i_s} a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_s} b_{j_s} \right]$$

*Demostración.* Sea  $C = (C_{ij}) = \prod_1^k A_i B_i$  veamos que

$$C_{11} = 1 + \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2, \dots, j_s > i_s} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_s} a_{j_s} \right]$$

$$C_{12} = \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_{s-1} > i_{s-1}, i_s \geq j_{s-1}} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_{s-1}} a_{j_{s-1}} b_{i_s} \right]$$

$$C_{21} = \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_{s-1} \geq i_{s-1}, i_s > j_{s-1}} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_{s-1}} b_{j_{s-1}} a_{i_s} \right]$$

---


$$C_{22} = 1 + \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, i_s > j_{s-1}, j_s \geq i_s} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_s} b_{j_s} \right]$$

La prueba será por inducción.

Supongamos que  $k = 1$ , en este caso tenemos

$$A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & a_1 b_1 + 1 \end{pmatrix}$$

donde  $C_{11} = 1, C_{12} = b_1, C_{21} = a_1$  y  $C_{22} = 1 + a_1 b_1$  por lo tanto

$$Tr[A_1 B_1] = 2 + a_1 b_1$$

Supongamos que las fórmulas valen para  $k$ , probemos que son válidas también para  $k + 1$ .

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} C A_{k+1} B_{k+1} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{k+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} + C_{12} a_{k+1} & (C_{11} + C_{12} a_{k+1}) b_{k+1} + C_{12} \\ C_{21} + C_{22} a_{k+1} & (C_{21} + C_{22} a_{k+1}) b_{k+1} + C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde:

$$C_{11} + C_{12} a_{k+1} =$$

$$= \left[ 1 + \sum_{j_1 > i_1}^k b_{i_1} a_{j_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^k b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s}^k b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_s} a_{j_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots b_{k-1} a_k \right] +$$


---

---


$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{i_1=1}^k b_{i_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^k b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} + \cdots \right. \\
& \cdots + \left. \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_{s-1} > i_{s-1}, i_s \geq j_{s-1}}^k b_{i_1} a_{j_1} \cdots a_{j_{s-1}} b_{i_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k \right] (a_{k+1}) \\
& = 1 + \sum_{j_1 > i_1}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} + \cdots \\
& \cdots + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_s} a_{j_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k a_{k+1} \\
& = 1 + \sum_{s=1}^{k+1} \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_s} a_{j_s} \right]
\end{aligned}$$

$$C_{21} + C_{22} a_{k+1} =$$

$$\begin{aligned}
& = \left[ \sum_{i_1=1}^k a_{i_1} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1}^k a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} + \cdots \right. \\
& \cdots + \left. \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_{s-1} \geq i_{s-1}, i_s > j_{s-1}}^k a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_{s-1}} b_{j_{s-1}} a_{i_s} + \cdots + a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots b_{k-1} a_k \right] + \\
& + \left[ 1 + \sum_{j_i \geq i_1}^k a_{i_1} b_{j_1} + \cdots + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_s \geq i_s}^k a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_s} b_{j_s} + \cdots + a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k \right] (a_{k+1}) \\
& = \sum_{i_1=1}^{k+1} a_{i_1} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} + \cdots
\end{aligned}$$


---

---


$$\cdots + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_{s-1} \geq i_{s-1}, i_s > j_{s-1}}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_{s-1}} b_{j_{s-1}} a_{i_s} + \cdots + a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k a_{k+1}$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} \left[ \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_{s-1} \geq i_{s-1}, i_s > j_{s-1}}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_{s-1}} b_{j_{s-1}} a_{i_s} \right]$$

$$(C_{11} + C_{12} a_{k+1}) b_{k+1} + C_{12} =$$

$$= \left[ 1 + \sum_{j_1 > i_1}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} + \cdots \right.$$

$$\cdots + \left. \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_s} a_{j_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k a_{k+1} \right] (b_{k+1}) +$$

$$+ \left[ \sum b_{i_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^k b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} + \cdots \right.$$

$$\cdots + \left. \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_{s-1} > i_{s-1}, i_s \geq j_{s-1}}^k b_{i_1} a_{j_1} \cdots b_{i_{s-1}} a_{j_{s-1}} b_{i_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots b_{k-1} a_k b_k \right]$$

$$= \sum_{i_1}^{k+1} b_{i_1} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_{s-1} > i_{s-1}, i_s \geq j_{s-1}}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} \cdots b_{i_{s-1}} a_{j_{s-1}} b_{i_s} + \cdots + b_1 a_2 b_2 \cdots a_{k+1} b_{k+1}$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_{s-1} > i_{s-1}, i_s \geq j_{s-1}}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2} \cdots b_{i_{s-1}} a_{j_{s-1}} b_{i_s} \right]$$


---

y finalmente,

$$\begin{aligned}
& (C_{21} + C_{22}a_{k+1})b_{k+1} + C_{22} = \\
& = \left[ \sum_{j_1 \geq i_1}^{k+1} a_{i_1} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} + \cdots \right. \\
& \cdots + \left. \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_{s-1} \geq i_{s-1}, i_s > j_{s-1}}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_{s-1}} b_{j_{s-1}} a_{i_s} + \cdots + a_1 b_1 \cdots a_k b_k a_{k+1} \right] (b_{k+1}) + \\
& + \left[ 1 + \sum_{j_1 \geq i_1}^k a_{i_1} b_{j_1} + \cdots + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_s \geq i_s}^k a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_s} b_{j_s} + \cdots + a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k \right] \\
& = 1 + \sum_{j_1 \geq i_1}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} + \cdots + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_s \geq i_s}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_s} b_{j_s} + \cdots + a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_{k+1} b_{k+1} \\
& = 1 + \sum_{s=1}^{k+1} \left[ \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, i_s > j_{s-1}, j_s \geq i_s}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_s} b_{j_s} \right]
\end{aligned}$$

Y la traza es

$$\begin{aligned}
& C_{11} + C_{12}a_{k+1} + (C_{21} + C_{22}a_{k+1})b_{k+1} + C_{22} = \\
& = 2 + \sum_{s=1}^{k+1} \left[ \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, \dots, j_s > i_s}^{k+1} b_{i_1} a_{j_1} \cdots b_{i_s} a_{j_s} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, \dots, j_s \geq i_s}^{k+1} a_{i_1} b_{j_1} \cdots a_{i_s} b_{j_s} \right]
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el lema.

□



---

Denotemos por  $C$  a la matriz asociada a  $\beta = \prod_{i=1}^k \sigma_1^{-a_i} \sigma_2^{b_i}$  bajo la representación de Magnus - Peluso. Sea  $\hat{\alpha} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^k \sigma_1^{-a_i} \sigma_2^{b_i}$  con  $a_i, b_i \in \mathbf{Z} - \{0\}$ ,  $e \in \mathbf{Z}$ , y  $k \geq 1$ .

**Proposición 3.1.2.** *El polinomio de Alexander de  $\hat{\alpha}$  evaluado en  $-1$  está dado por  $d = 2 - (-1)^e \text{Tr}(C)$ .*

*Demostración.* Sea  $\beta := \prod_{i=1}^k \sigma_1^{-a_i} \sigma_2^{b_i}$ , entonces  $\alpha = \Delta^{2e} \beta$ . Sea  $\varphi : \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$  la representación de Magnus - Peluso. El polinomio de Alexander de  $\hat{\alpha}$  está dado por

$$\Delta_{\hat{\alpha}}(t) = \det [ \varphi( \alpha ) - I ] = \left( \frac{1-t}{1-t^3} \right) [ \det \varphi( \alpha ) - \text{Tr} \varphi( \alpha ) + 1 ]$$

Veamos que  $\varphi( \Delta^2 ) = t^{-3}I$  donde  $I$  denota la matriz identidad. Recordemos que  $\Delta^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2$  y ya que

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} -t^{-1} & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^{-1} & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ -t^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2 \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ -t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ -t^{-2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-3} & 0 \\ 0 & t^{-3} \end{pmatrix} = t^{-3}I.$$

Como  $\varphi( \alpha ) = \varphi(\Delta^{2e} \beta) = t^{-3e}I \varphi( \beta )$ , el determinante de  $\varphi(\alpha)$  es  $\det [ \varphi( \alpha ) ] = t^{-6e} \det [ \varphi( \beta ) ]$ .

Por otro lado, sea  $\varphi(\beta) = A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  entonces

$$\varphi(\Delta^{2e})\varphi(\beta) = \begin{pmatrix} t^{-3e} & 0 \\ 0 & t^{-3e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^{-3e} & bt^{-3e} \\ ct^{-3e} & dt^{-3e} \end{pmatrix}$$

---

por lo tanto la traza de  $\varphi(\alpha)$  es  $Tr \varphi(\alpha) = t^{-3e} Tr \varphi(\beta)$ , de lo anterior se sigue que

$$\det [ \varphi(\alpha) - I ] = \left( \frac{1-t}{1-t^3} \right) \left[ t^{-6e} \det \varphi(\beta) - t^{-3e} Tr \varphi(\beta) + 1 \right]$$

y evaluando en -1 se tiene

$$d = 2 - (-1)^e Tr \varphi(\beta)$$

con  $Tr(\varphi\beta)$  dada por el lema 3.1.2.

□

Considérese la trenza pura cerrada  $\hat{\alpha} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^k \widehat{\sigma_1^{-2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$  tal que  $e_i, f_i \in \mathbf{Z} - \{0\}$ ,  $e \in \mathbf{Z}$  y  $k \geq 1$ . Denotemos por  $A$  a la siguiente expresión.

$$A := \sum_{s=1}^k \left[ \sum_{j_1 \geq i_1, \dots, i_s > j_{s-1}, j_s \geq i_s} 2^{2s} e_{i_1} f_{j_1} \cdots e_{i_s} f_{j_s} + \sum_{j_1 > i_1, \dots, j_s > i_s} 2^{2s} f_{i_1} e_{j_1} \cdots f_{i_s} e_{j_s} \right]$$

**Corolario 3.1.3.** *El polinomio de Alexander de  $\hat{\alpha}$  evaluado en -1 esta dado por  $d = 2 - (-1)^e [ 2 + A ]$ .*

*Demostración..* La demostración se sigue de la proposición 3.1.2.

□

Calculemos el polinomio de Alexander evaluado en -1 del nudo  $K$  obtenido del subenlace  $\hat{\beta}_U$ , donde

$$\hat{\beta}_U = \begin{cases} K_i \\ K_i \cup K_j \\ K_1 \cup K_2 \cup K_3 \end{cases} \quad i \neq j$$

Si  $\hat{\beta}_U$  consta de dos componentes entonces  $K$  será un nudo toroidal de tipo  $\mathbf{T}_{2l_{ij}+1,2}$  con  $l_{ij} = lk(K_i, K_j)$  donde  $i \neq j$ , sea  $a = 2l_{ij} + 1$ . El polinomio de Alexander de un nudo toroidal de tipo  $\mathbf{T}_{a,b}$  es

$$\frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)}$$

derivando por L' Hopital tenemos

$$\frac{(t^{ab} - 1) + ab(t - 1)t^{ab-1}}{bt^{b-1}(t^a - 1) + at^{a-1}(t^b - 1)}$$

y como  $b = 2$ , evaluando en  $-1$  se obtiene

$$\frac{(t^{ab} - 1) + ab(t - 1)t^{ab-1}}{bt^{b-1}(t^a - 1) + at^{a-1}(t^b - 1)} \Big|_{-1} = \frac{4a}{4} = 2l_{ij} + 1$$

**Corolario 3.1.4.** *Sea  $K$  el nudo obtenido de  $\hat{\beta}_U = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  al sumarle 2 bandas orientadas, tal que  $K$  es la cerradura de la trenza  $\Delta^{2e}(\prod_{i=1}^k \sigma_1^{-2e_i} \sigma_2^{2f_i})\sigma_1\sigma_2$ . El polinomio de Alexander de  $K$  evaluado en  $-1$  módulo 16, es*

$$2 - (-1)^e \left[ 2 + \sum_{i=1}^k 2e_i - \sum_j 2f_j + \sum_{i>j} 4f_j e_i - 1 + 8 \sum_{k>j \geq i} e_i f_j e_k - 8 \sum_{k \geq j > i} f_i e_j f_k \right]$$

*Demostración.* Sean  $a_{k+1} = -1, b_{k+1} = 1$  los valores de los cruces respectivos de cada banda. Al considerar  $Tr[\prod_{i=1}^{k+1} A_i B_i]$  como en el lema 3.1.2 y reducir módulo 16, los únicos términos que permanecen son

$$\bar{2} + \sum_{j_1 \geq i_1}^{k'+1} \overline{a_{i_1} b_{j_1}} + \sum_{j_1 > i_1}^{k+1} \overline{b_{i_1} a_{j_1}} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, j_2 \geq i_2}^{k+1} \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2}} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^{k+1} \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2}}$$

Desarrollando los términos en la expresión anterior se tiene:

$$\sum_{j_1 \geq i_1}^{k+1} \overline{a_{i_1} b_{j_1}} = \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1}} + \sum_{i_1=1}^k \overline{a_{i_1} b_{k+1}} + \overline{a_{k+1} b_{k+1}} = \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1}} + \sum_{i_1=1}^k \overline{a_{i_1}} - \bar{1}$$

$$\sum_{j_1 > i_1}^{k+1} \overline{b_{i_1} a_{j_1}} = \sum_{j_1 > i_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1}} + \sum_{i_1}^k \overline{b_{i_1} a_{k+1}} = \sum_{j_1 > i_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1}} - \sum_{i_1=1}^k \overline{b_{i_1}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, j_2 \geq i_2}^{k+1} \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2}} &= \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, j_2 \geq i_2}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2}} + \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1, j_2 > i_2}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{k+1}} + \\ &+ \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{k+1} b_{k+1}} = \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2}} - \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^{k+1} \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2}} &= \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1, j_2 > i_2}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{j_2}} + \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2} a_{k+1}} \\ &= - \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2}} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Tr \left[ \prod_{i=1}^{k+1} A_i B_i \right] = 2 + \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1}} + \sum_{i_1=1}^k \overline{a_{i_1}} - \bar{1} + \sum_{j_1 > i_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1}} - \sum_{i_1=1}^k \overline{b_{i_1}} +$$

$$+ \sum_{j_1 \geq i_1, i_2 > j_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2}} - \sum_{j_1 \geq i_1}^k \overline{a_{i_1} b_{j_1}} - \sum_{j_1 > i_1, i_2 \geq j_1}^k \overline{b_{i_1} a_{j_1} b_{i_2}}$$

y sustituyendo los valores correspondientes tenemos el resultado buscado. □

Sea  $A$  tal que

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } \#\{U\} = 1 \\ l_{ij}/4 & \text{si } \#\{U\} = \{i, j\}, i \neq j \\ \left[ e + \frac{-\sum e_i + \sum f_j}{2} - \sum_{i > j} f_j e_i \right] & \text{si } \#\{U\} = 3 \end{cases}$$

Llamemos  $\hat{\beta} = \Delta^{2e} \prod_{i=1}^{k'} \widehat{\sigma_1^{-2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$ .

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $M^3$  la  $Z_2$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco entero  $(l_1, l_2, l_3)$ . Entonces  $\mu(M^3) = \frac{\sigma(P) - \sum_{i,j \in U} l_{ij} + 8A}{16} \pmod{1}$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  definido como en el párrafo anterior al teorema. La demostración es inmediata cuando  $A = 0$  y  $A = l_{ij}/4$ . Para el caso en que  $\#\{U\} = 3$  el polinomio de Alexander evaluado en  $-1$  módulo 16 es  $d' = 2 - (-1)^e [2 - d]$  donde

$$d = \left( \sum 2f_j - \sum 2e_i \right) + \left( 1 - \sum_{i>j} 4f_j e_i + 8 \sum_{k>j \geq i} e_i f_j e_k - 8 \sum_{k \geq j > i} f_i e_j f_k \right)$$

elevando al cuadrado y reduciendo módulo 16 tenemos  $d'^2 = 4 - 4(-1)^e [2 - d] + (-1)^{2e} [2 - d]^2$

$$d'^2 = (1 - (-1)^e) [8 - 4d] + d^2 = \begin{cases} d^2 & \text{si } e \text{ par} \\ 16 - 8d + d^2 = -8 + d^2 & \text{si } e \text{ impar} \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned}
d^2 &= 4\left(\sum f_j - \sum e_i\right)^2 + 4\left(\sum f_j - \sum e_i\right)\left(1 - \sum_{i>j} 4f_j e_i\right) + 1 - 8 \sum_{i>j} f_j e_i + 16 \left(\sum_{i>j} f_j e_i\right)^2 \\
&= 4\left(\sum f_j - \sum e_i\right) - 8 \sum_{i>j} f_j e_i + 1 \\
&= 8\left[\frac{\left(\sum f_j - \sum e_i\right)}{2}\right] - 8 \sum_{i>j} f_j e_i + 1 \\
&= 8\left[\frac{\left(\sum f_j - \sum e_i\right)}{2} - \sum_{i>j} f_j e_i\right] + 1
\end{aligned}$$

ya que  $(\sum f_j - \sum e_i)$  es un número par por ser  $L_U$  un subenlace propio.

Haciendo

$$A = \left[ -e + \frac{(\sum f_j - \sum e_i)}{2} - \sum_{i>j} f_j e_i \right]$$

tenemos  $d'^2 = 8A + 1 \pmod{16}$ .

□

Consideremos los anillos borromeos. Haciendo una isotopía obtenemos una trenza pura cerrada de 3 cuerdas  $\hat{\beta}$  ( ver fig. 3.1.1 ) tal que  $e_1 = 1, e_2 = -1, f_1 = -1, f_2 = 1$  y  $e = 0$  cuya matriz es

$$P = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}$$

Sea  $M^3$  una  $Z_2$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$ . Aquí  $A = -1$  y

$$\mu(M^3) = \begin{cases} \frac{\pm 1 - (l_1 + l_2 + l_3) - 8}{16} \pmod{1} \\ \frac{\pm 3 - (l_1 + l_2 + l_3) - 8}{16} \pmod{1} \end{cases}$$

Es fácil ver que si  $M^3$  es una  $Z$ -esfera homológica entonces  $\mu(M^3) \neq 0$ .

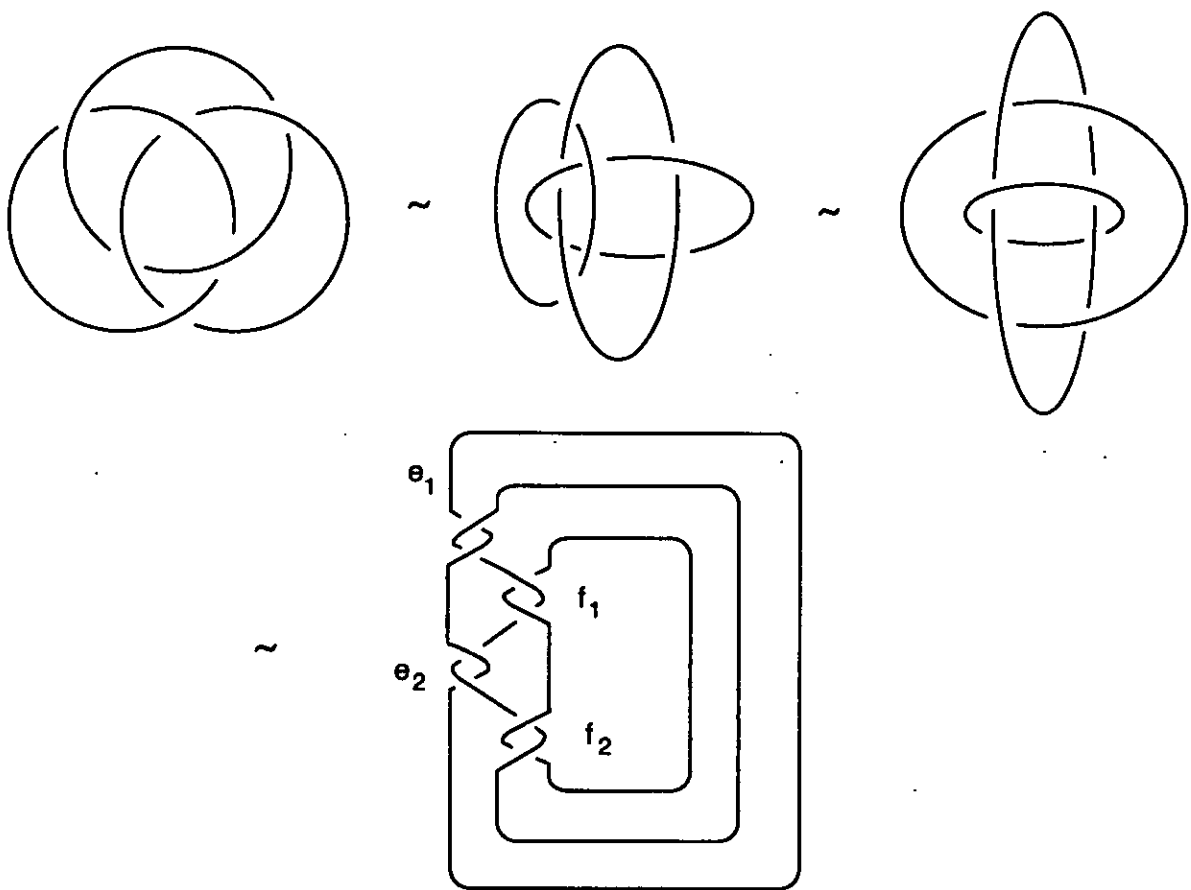


Fig. 3.1.1

---

## Capítulo 4

### 4.1 - El invariante de Casson.

Sea  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  un enlace algebraicamente separable. Sea  $M^3$  una  $Z$ -esfera homológica orientada obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . En esta sección calculamos el invariante de Casson  $\lambda(M^3)$ . Mostramos una familia  $B_1$  de enlaces algebraicamente separables que producen  $Z$ -esferas homológicas tales que  $\lambda(M^3) = 0$ . Se prueba que si  $\hat{\beta} \in B_1 \cap \mathbf{L}'$  ( ver 2.1 ) entonces  $M^3$  no es una esfera homotópica.

Sea  $L = \cup_1^n K_i \subset S^3$  un enlace orientado de  $n$  componentes, decimos que  $L$  es *algebraicamente separable* si  $lk(K_i, K_j) = 0$  para toda  $i \neq j$ .

En lo que sigue consideramos unicamente elementos  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  algebraicamente separables. Obsérvese que si  $\hat{\beta}$  es algebraicamente separable entonces  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n \widehat{\sigma_1^{2e_i} \sigma_2^{2f_i}}$  donde  $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n f_i = 0$ . Denotaremos por  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  a las componentes de  $\hat{\beta}$  tales que  $lk(K_1, K_2) = \sum_{i=1}^n e_i$ ,  $lk(K_3, K_2) = \sum_{i=1}^n f_i$ , ( ver fig. 4.1.1. ). El marco  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-1}, \phi_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n)$  es tal que  $\epsilon_i = \pm 1$ , a menos que se especifique lo contrario.

Sea  $M^3$  una 3-esfera homológica orientada y  $K \subset M^3$  un nudo orientado. Sea  $E(K)$  el exterior de  $K$  y  $(\mu, l)$  una base orientada para  $H_1(\partial E(K), Z)$ . Para cada  $n \in Z$  sea  $\alpha_n = \mu + nl$  la clase de homología de la curva cerrada simple  $\alpha_n \in \partial E(K)$ . Llamemos  $K_n$  a la  $Z$ -esfera homológica  $K_n = E(K) \cup_{\partial E(K)} T$ , tal que una curva meridiana del toro sólido  $T$  se pega a lo largo de la curva  $\alpha_n$ . En particular  $K_0$  es  $M^3$ . Denotemos por  $\Delta_K''$  a la segunda derivada del polinomio de Alexander del nudo  $K$ .

**Teorema 4.1.1** ( Casson, ver [AC] ). *Para todo nudo  $K$  en una 3-esfera homológica orientada  $M^3$ , existe un único invariante  $\lambda(M)$  de 3-esferas homológicas orientadas que satisface  $\lambda(K_{n+1}) - \lambda(K_n) = 1/2 \Delta_K''(1)$ ,  $\lambda(S^3) = 0$*

---



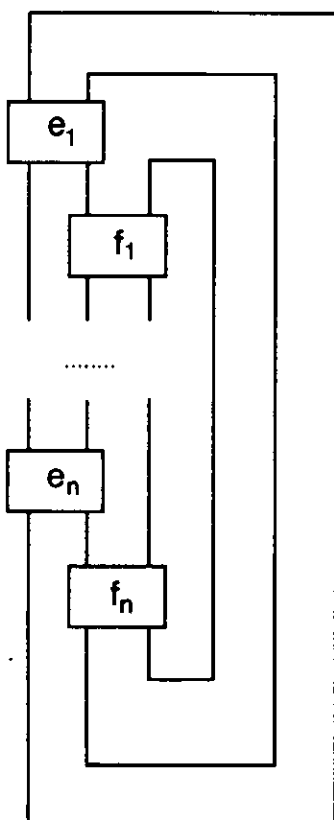


Fig. 4.1.1

Llamemos  $K$  al nudo obtenido por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \phi_3)$ .

**Proposición 4.1.2.** *El polinomio de Alexander simetrizado de  $K$  está dado por*

$$\Delta_K(t) = 1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \left( \sum_{i=1}^n e_{it}^{\sum_{j<i} f_j} \right) \left( \sum_{i=1}^n e_{it}^{-\sum_{j<i} f_j} \right)$$

*Demostración.* Calculamos primero la homología de la cubierta cíclica infinita de  $K$ , por el método de cirugía, como en [Ro], capítulo 7C.

Sea  $\hat{\beta} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  con  $K_i$  como antes. Sea  $S^3 \widetilde{-} K_3$  la cubierta cíclica infinita asociada a  $K_3$ , esta es homeomorfa a  $D^2 \times R^1$ . Sea  $S^3 \widetilde{-} K$  la cubierta cíclica infinita asociada a  $K$ , esta la obtenemos al tomar las preimágenes de  $K_1 \cup K_2$  en  $S^3 \widetilde{-} K_3$ , y hacer cirugía de Dehn en cada componente, tal que tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 \widetilde{-} K_3 & - & \eta(\rho^{-1}(K_1 \cup K_2)) \cup (\cup T_j^1) \cup (\cup T_j^2) \\
 & & \rho \downarrow \\
 & & S^3 - K
 \end{array}$$

El meridiano del toro sólido  $T_j^i$  se pega al levantamiento  $j$ -ésimo de la curva  $\alpha_i = \epsilon_i m + l$  en  $K_i$  para  $i = 1, 2$  donde  $(m, l)$  es una pareja meridiano-longitud de  $K_i$ .

Sea  $D$  un disco meridiano en  $S^3 - K_3$ , y sean  $H_{2r\pi}$  con  $r \in Z$ , las preimágenes de este disco en  $S^3 \widetilde{-} K_3$ . Llamemos  $\tilde{K}_m^1$  y  $\tilde{K}_m^2$  al  $m$ -ésimo levantamiento de los nudos  $K_1$  y  $K_2$  en  $S^3 \widetilde{-} K_3$ ; podemos suponer que  $\tilde{K}_m^1$  está contenido en el disco  $H_{2m\pi}$ .

El  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo  $H_1((S^3 \widetilde{-} K_3) - \eta(\rho^{-1}(K_1 \cup K_2)))$  es libre con dos generadores, los cuales están representados por meridianos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de  $\tilde{K}_0^1$  y  $\tilde{K}_0^2$ .

A  $K_2$  lo podemos expresar como  $K_2 = e_1 \cup f_1 \cup e_2 \cup f_2 \dots \cup e_n \cup f_n \cup \delta$ , donde  $e_i, f_i, \delta$  son arcos, tales que  $e_i$  le da ' $e_i$ ' vueltas alrededor de  $K_1$  y  $f_i$  da ' $f_i$ ' vueltas alrededor de  $K_3$ , y  $\delta$  es el arco que cierra a la componente  $K_2$ . Consideremos el levantamiento de  $K_2$ . Podemos suponer que el levantamiento  $j$ -ésimo de  $\delta$  se encuentra en el plano  $H_{2j\pi}$ . También suponemos que los levantamientos de los extremos de los arcos  $e_i$  y  $f_j$  se encuentran en los planos  $H_{2r\pi}$ . El levantamiento  $j$ -ésimo de  $e_1$  da ' $e_1$ ' vueltas alrededor de  $K_j^1$ . Denotemos por  $f_j^{i,k}$  (respectivamente  $f_j^{f,k}$ ) al punto inicial  $i$  ( punto final  $f$ ) del levantamiento de  $f_j$  visto en el  $k$ -ésimo plano. Es fácil ver que el levantamiento de  $f_j$  que

empieza en  $f_j^{i,k}$  termina en  $f_j^{f,k+f_j}$ . ( Por ejemplo, en la figura 4.1.2 se muestra la cubierta correspondiente a la cerradura de la trenza  $\sigma_1^{2e_1} \sigma_2^{2(-2)} \sigma_1^{2e_2} \sigma_2^{2(-1)} \sigma_1^{2e_3} \sigma_2^{2(4)} \sigma_1^{2e_4} \sigma_2^{2(-1)}$  )

Denotemos por  $\alpha_0^1$  y  $\alpha_0^2$  al levantamiento 0-ésimo de la curva  $\alpha_i = \epsilon_i m + l$  en  $K_i$ , para  $i = 1, 2$ . Calculemos los números de enlace  $lk(\alpha_0^1, \tilde{K}_m^1)$ ,  $lk(\alpha_0^2, \tilde{K}_m^2)$ ,  $lk(\alpha_0^1, \tilde{K}_m^2)$  y  $lk(\alpha_0^2, \tilde{K}_m^1)$ . Si  $m \neq 0$ , o si  $i \neq j$ , entonces  $lk(\alpha_0^i, \tilde{K}_m^j) = lk(\tilde{K}_0^i, \tilde{K}_m^j)$

$$lk(\alpha_0^1, \tilde{K}_m^1) = \begin{cases} \epsilon_1 & m = 0 \\ 0 & \forall m \neq 0 \end{cases}$$

$$lk(\alpha_0^2, \tilde{K}_m^2) = \begin{cases} \epsilon_2 & m = 0 \\ 0 & \forall m \neq 0 \end{cases}$$

$$lk(\tilde{K}_0^2, \tilde{K}_m^1) = \begin{cases} e_1 & m = 0 \\ e_i & m = \sum_{j=1}^{i-1} f_j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$lk(\tilde{K}_0^1, \tilde{K}_m^2) = \begin{cases} e_1 & m = 0 \\ e_i & m = -\sum_{j=1}^{i-1} f_j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz de Alexander que representa a  $H_1(\widetilde{S^3 - K})$  como  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo, con respecto a los generadores  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \sum_{i=1}^n e_i t^{-\sum_{j<i} f_j} \\ \sum_{i=1}^n e_i t^{\sum_{j<i} f_j} & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

Y el polinomio de Alexander de  $K$  es

$$\Delta_K = Det A = \epsilon_1 \epsilon_2 - \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{\sum_{j<i} f_j} \right) \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{-\sum_{j<i} f_j} \right)$$

$\Delta_{\tilde{K}_3}(t)$  está bien definido salvo unidades en  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ .

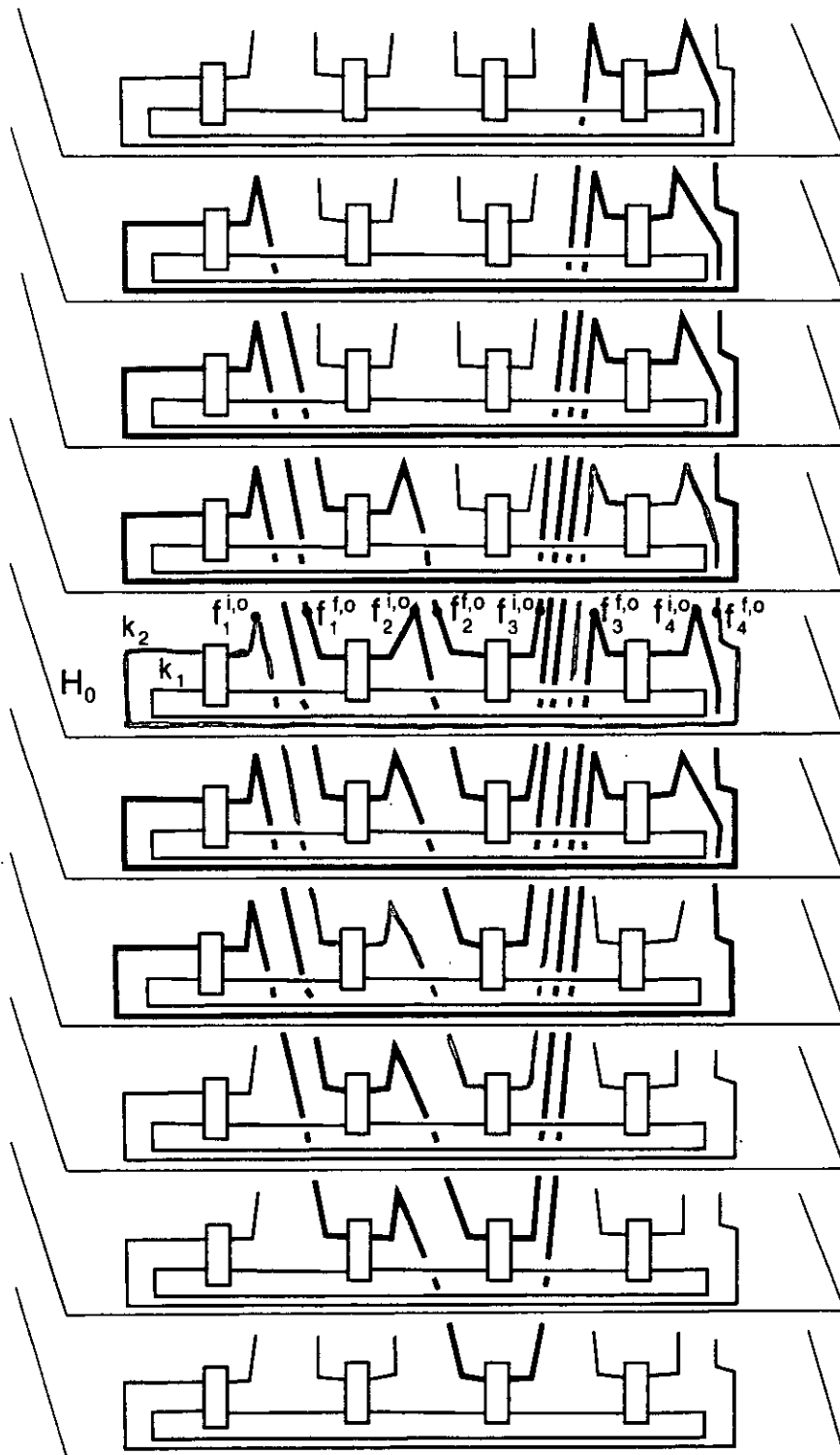


Fig. 4.1.2

---

Para simetrizar multiplicamos  $Det A$  por  $\epsilon_1 \epsilon_2$ , obteniendo

$$\Delta_K(t) = 1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{\sum_{j<i} f_j} \right) \left( \sum_{i=1}^n e_i t^{-\sum_{j<i} f_j} \right)$$

□

**Teorema 4.1.3** Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $\hat{\beta}$  con marco  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  entonces  $\lambda(M^3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \left( \sum_{j<i}^n e_i f_j \right)^2$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata ya que  $\lambda(M^3) = \epsilon_3 \frac{1}{2} \Delta_K''(1)$ . Haciendo

$$g(t) = \sum_{i=0}^n e_{i+1} t^{\sum_{j=1}^i f_j}, \quad g(t^{-1}) = \sum_{i=0}^n e_{i+1} t^{-\sum_{j=1}^i f_j} \quad y \quad h(t) = \epsilon_1 \epsilon_2 - g(t)g(t^{-1})$$

se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= g(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{1}{t^2} \right) - g(t^{-1}) g'(t) \\ h''(t) &= g(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{-2t}{t^4} \right) + \frac{g(t)}{t^2} g''(t^{-1}) \left( \frac{-1}{t^2} \right) + g'(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{1}{t^2} \right) - \\ &\quad - \left[ g(t^{-1}) g''(t) + g'(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{-1}{t^2} \right) \right] \\ &= g(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{-2}{t^3} \right) - \frac{g(t) g''(t^{-1})}{t^4} + \frac{g'(t) g'(t^{-1})}{t^2} - \\ &\quad - g(t^{-1}) g''(t) + \frac{g'(t) g'(t^{-1})}{t^2} \\ &= g(t) g'(t^{-1}) \left( \frac{-2}{t^3} \right) - \frac{g(t) g''(t^{-1})}{t^4} + \frac{2 g'(t) g'(t^{-1})}{t^2} - g(t^{-1}) g''(t) \end{aligned}$$


---

de donde

$$g'(t) = \sum_2^n e_i \left( \sum_{j<i} f_j \right) t^{(\sum_{j<i} f_j) - 1}$$

$$g''(t) = \sum_2^n e_i \left( \sum_{j<i} f_j \right) \left( \sum_{j<i} f_j - 1 \right) t^{(\sum_{j<i} f_j) - 2}$$

Evaluando para  $t = 1$

$$g(t)|_1 = 0 \quad ; \quad g(t^{-1})|_1 = 0$$

$$g'(t)|_1 = \sum_2^n e_i \left( \sum_{j<i} f_j \right) \quad ; \quad g'(t^{-1})|_1 = \sum_2^n e_i \left( \sum_{j<i} f_j \right)$$

Y por lo tanto

$$h''(t)|_1 = 2 \left( \sum_{j<i} e_i f_j \right)^2$$

□

Denotemos por  $B_1$  al conjunto de elementos  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta} = \prod_{i=1}^n (\sigma_1^2)^{e_i} (\sigma_2^2)^{f_i}$  algebraicamente separables tales que si  $n$  impar  $e_j = e_{n-(j-1)}$ ,  $f_{n-j} = f_j$ ; si  $n$  par  $f_j = f_{n-j}$ ,  $e_{j+1} = e_{n-j}$ .

**Proposición 4.1.4.** *Sea  $M^3$  una  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn en  $\hat{\beta} \in B_1$ , entonces  $\lambda(M^3) = 0$ .*

*Demostración.* Por la proposición 4.1.3 se tiene  $\lambda(M^3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \left( \sum_{j<i}^n e_i f_j \right)^2$ . Si  $n$  es impar se tiene

$$2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} e_i + e_{\frac{n+1}{2}} = 0, \quad 2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} f_i + f_n = 0$$

---

sustituyendo  $e_{n-(j-1)} = e_j$  y  $f_{n-j} = f_j$  en  $\sum_{j<i} e_i f_j$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j<i} e_i f_j &= e_2(f_1) + e_3(f_1 + f_2) + \cdots + e_j(f_1 + f_2 + \cdots + f_{j-1}) + \cdots + e_{\frac{n-1}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}-1}) + \\
&\quad + e_{\frac{n+1}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n+1}{2}-1}) + e_{\frac{n-1}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n+1}{2}-1} + f_{\frac{n-1}{2}+1}) + \cdots + \\
&\quad + e_2(f_1 + \cdots + f_{n-2}) + e_1 \left[ 2(f_1 + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}}) \right] \\
&= e_2(f_1) + e_3(f_1 + f_2) + \cdots + e_j(f_1 + f_2 + \cdots + f_{j-1}) + \cdots + \\
&\quad + e_{\frac{n-1}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}-1}) + \left( -2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} e_i \right) \left[ f_1 + \cdots + f_{\frac{n+1}{2}-1} \right] + \\
&\quad + e_{\frac{n-1}{2}} \left[ 2(f_1 + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}}) - \sum_1^{\frac{n-1}{2}-1} f_i \right] + \cdots + \\
&\quad + e_2 \left[ 2(f_1 + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}}) - f_1 \right] + e_1 \left[ 2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} f_i \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para el caso par  $2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_i = 0 \rightarrow e_1 = -\sum_2^{\frac{n}{2}} e_i$ ,  $2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_i + f_{\frac{n}{2}} + f_n = 0$  por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j<i} e_i f_j &= e_2(f_1) + e_3(f_1 + f_2) + \cdots + e_j(f_1 + f_2 + \cdots + f_{j-1}) + \cdots + e_{\frac{n}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1}) + \\
&\quad + e_{\frac{n}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1} + f_{\frac{n}{2}}) + e_{\frac{n}{2}-1}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1} + f_{\frac{n}{2}} + f_{\frac{n}{2}+1}) + \cdots + \\
&\quad + e_1 \left[ 2(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1}) + f_{\frac{n}{2}} \right] \\
&= e_2(f_1) + e_3(f_1 + f_2) + \cdots + e_j(f_1 + f_2 + \cdots + f_{j-1}) + \cdots + \\
&\quad + e_{\frac{n}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1}) + e_{\frac{n}{2}}(f_1 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1} + f_{\frac{n}{2}}) +
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
& + e_{\frac{n}{2}-1} \left[ 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1} f_i + f_{\frac{n}{2}} - \sum_1^{\frac{n}{2}-2} f_i \right] + \cdots + e_2 \left[ 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1} f_i + f_{\frac{n}{2}} - f_1 \right] + \\
& + \left( - \sum_2^{\frac{n}{2}} e_i \right) \left[ 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1} f_i + f_{\frac{n}{2}} \right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

□

Veamos que algunos de estos candidatos no son esferas homotópicas. Nótese que los elementos de  $B_1$  son enlaces fuertemente invertibles, ( ver fig. 4.1.3 ).

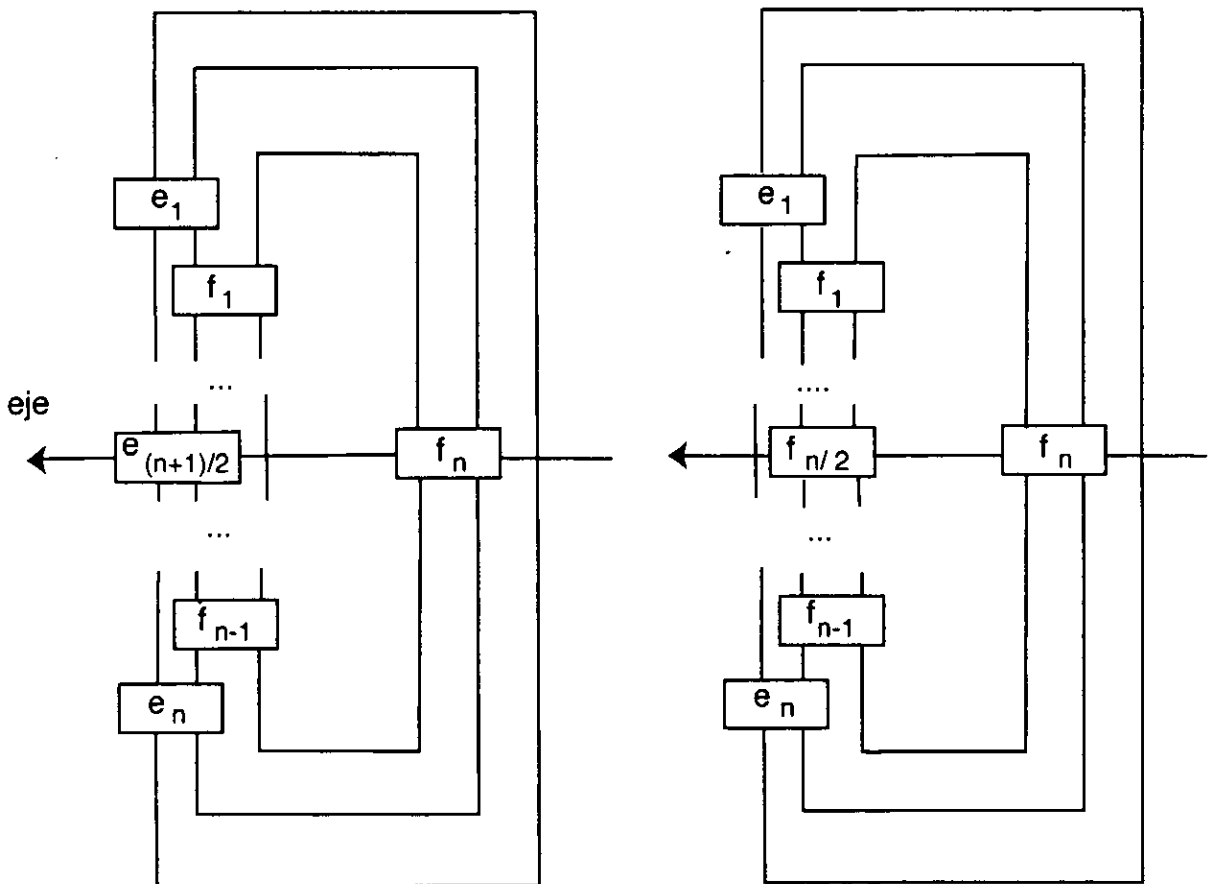


Fig. 4.1.3



---

**Corolario 4.1.5.** Si  $\hat{\beta} \in B_1 \cap \mathbf{L}'$  entonces  $M^3$  no es una esfera homotópica.

*Demostración.* Sea  $\hat{\beta} \in B_1 \cap \mathbf{L}'$  con marco  $(\epsilon_1, \emptyset, \epsilon_3)$ , llamemos  $K$  al nudo obtenido de  $\hat{\beta}$ . Por la proposición 2.3.3 se sigue que  $K$  es no trivial. Ya que  $K$  es fuertemente invertible, se sigue de [BS] que  $K$  tiene la propiedad  $P$ .

□

---

## 4.2 - El invariante de Casson de una n-trenza pura algebraicamente separable.

Sea  $P_n$  el grupo de trenzas puras de  $n$  componentes y  $\hat{\beta}$  un enlace algebraicamente separable tal que  $\beta \in P_n$ . Dado  $L$  un enlace de  $n$  componentes en  $S^3$ , su polinomio de Conway tiene la siguiente expresión.

$$\nabla_{(L, S^3)}(z) = z^{n-1}(a_0 + a_1 z^2 + \cdots + a_m z^{2m})$$

Sea  $\phi_i(L, S^3) = a_i$  y  $\psi(L; \cup p_i/q_i; S^3) = \psi(L, S^3)$  la 3-variedad obtenida por cirugía de Dehn sobre el enlace  $L$  con marco  $(1/q_1, \dots, 1/q_n)$ .

**Teorema 4.2.1** ( ver [H] ). *Sea  $L = \{K_1, \dots, K_n\}$  un enlace orientado contenido  $S^3$ , con marco  $(1/q_1, \dots, 1/q_n)$ . Supóngase que  $lk(K_i, K_j) = 0, \forall i \neq j$ . Entonces el invariante de Casson de la variedad  $M^3$  obtenida por cirugía sobre  $L$  está dado por*

$$\lambda(M^3) = \sum_{L^1 \subset L} \left( \prod_{i \in L^1} q_i \right) \phi_1(L^1, S^3)$$

*tal que la suma es tomada sobre todos los subenlaces de  $L$  con menos de 4 componentes.*

□

En el caso particular  $\hat{\beta} \in \mathbf{B}$  algebraicamente separable

$$\lambda(M^3) = \epsilon \phi_1(L, S^3)$$

con  $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = \pm 1$ ; ya que los subenlaces con 1 y 2 componentes tienen  $a_1 = 0$ .

Sea  $\hat{\beta}$  con marco  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  tal que  $\beta \in P_n$  algebraicamente separable, orientada y contenida en  $S^3$ . Sea  $M^3$  la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ . Denotemos por  $\lambda(\hat{\beta})$  al invariante de Casson de la  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía de Dehn sobre  $\hat{\beta}$ .

---

---

Denotemos por  $\mathbf{b}$  al conjunto de subenlaces  $\hat{\beta}' \subseteq \hat{\beta}$  que constan de 3 componentes.

**Proposición 4.2.2.**  $\lambda(\hat{\beta}) = \sum_{\mathbf{b}} \lambda(\hat{\beta}')$ .

*Demostración.* Ya que  $\hat{\beta}$  es algebraicamente separable la matriz de enlace es

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_n \end{pmatrix}$$

con  $\epsilon_i = \pm 1$  y ya que cualquier subenlace de  $\hat{\beta}$  es también algebraicamente separable, el resultado se sigue del teorema 4.2.1.

□

Consideremos la familia  $\cup b$  de enlaces brunnianos de  $k > 3$  componentes mostrados en la fig. 4.2.1. Cada elemento  $b$  es la clausura de una  $n$ -trenza pura algebraicamente separable, tal que si  $M^3$  es una  $Z$ -esfera homológica obtenida por cirugía sobre  $b$  entonces  $\lambda(M^3) = 0$ .

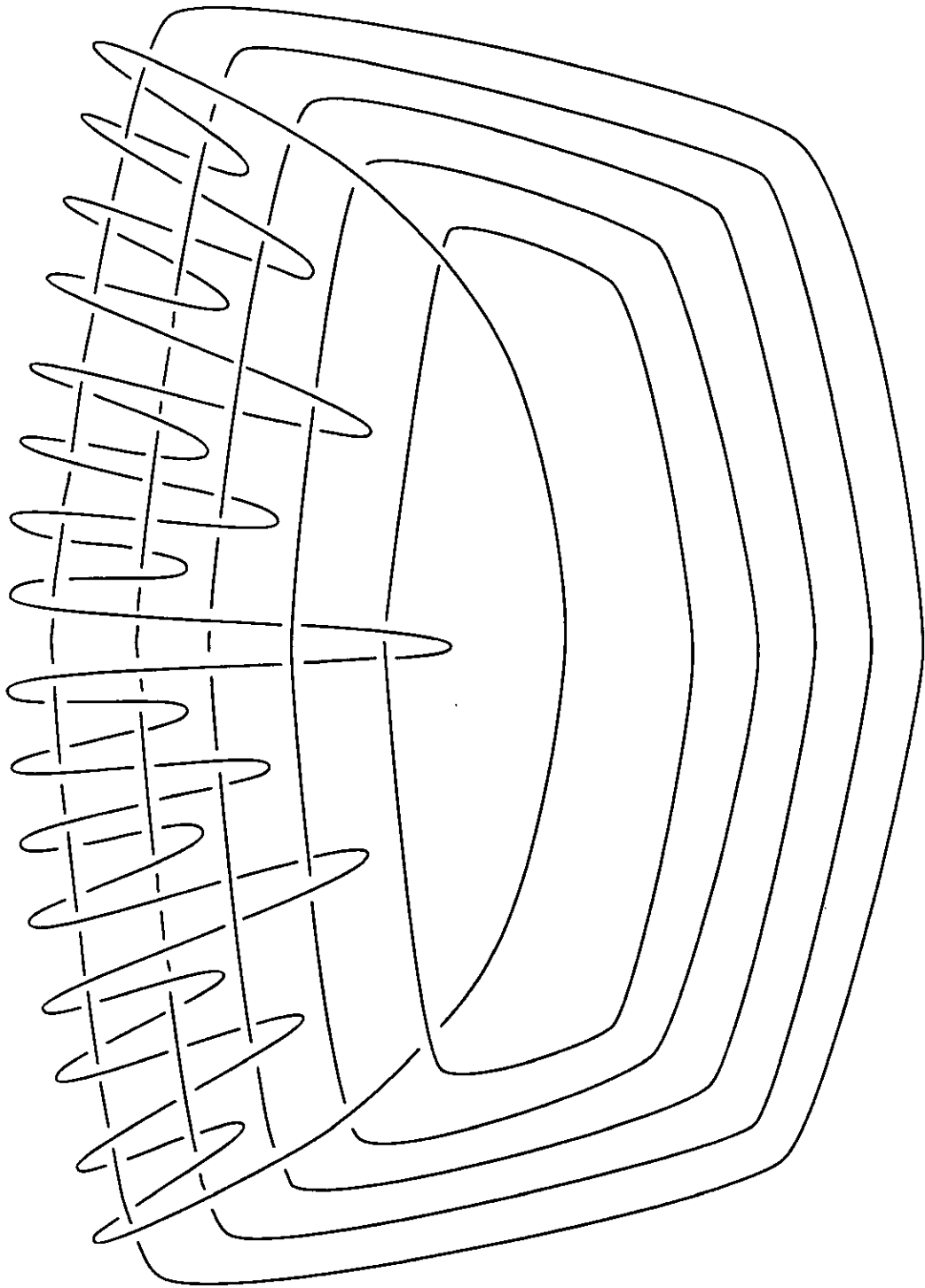


Fig. 4.2.1

---

## Referencias

- [A] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Hamburg Abh. **4** (1925), 47-72.
- [AC] S. Akbulut and J. D. Mc. Carthy, *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*, Mathematical Notes 36, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1990.
- [B] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies No. 82, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1975.
- [BS] S. Bleiler and M. Scharlemann, *A projective plane in  $R^4$  with three critical points is standard; strongly invertible knots have property P*, Topology **27** (1988), 519-540.
- [CGLS] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Annals of Mathematics **125** (1987), 237-300.
- [CS] S. E. Capell and J.L. Shaneson, *Some new four-manifolds*, Annals of Mathematics **104** (1976), 61-72.
- [FN] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration Spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 111-118.
- [Go1] C. McA. Gordon, *Dehn surgery and satellite knots*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **275** (1983), 687-708.
- [Go2] C. McA. Gordon, *Knots, Homology Spheres and Contractible 4-manifolds*, Topology **14** (1975), 151-172.
- [GoL] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complement*, Journal of the Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371-415.

- 
- [GA1] F.J. González-Acuña, *Dehn's Construction on knots*, Bol. Soc. Mat. Mex. **15** (1970), 58-79.
- [GA2] F.J. González-Acuña, *3-Dimensional Open Books*, Lecture Notes, University of Iowa, 1974.
- [GL] J. C. Gómez-Larrañaga, *Graphs of tangles*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **286** (1984), 817-830.
- [H] J. Hoste, *A formula for Casson's invariant*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **297** (1986), 547-562.
- [Li] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Annals of Mathematics **76** (1962), 531-538.
- [LS] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1977.
- [MKS] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Wiley, New York, 1966.
- [M] J. M. Montesinos, *Surgery on links and double branched covers of  $S^3$* , Knots, groups and 3-manifolds, Annals of Mathematics Studies, No. 84, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1975, pp. 227-260.
- [MB] J. W. Morgan and H. Bass (eds.), *The Smith Conjecture*, Pure and Applied Mathematics, vol. 112, Academic Press, Inc. 1984.
- [Mo] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. **38** (1971), 737-745.
- [Mu] K. Murasugi, *On closed pure 3-braids*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **151** (1974).
-

- 
- [R] R. A. Robertello, *An Invariant of Knot Cobordism*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 543-555.
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc. Houston Texas, 1976.
- [S] H. Seifert, *Topology of 3-dimensional fibered spaces*, Acta Mathematica **60** (1933), 147-288. Traducido por W. Heil y reimpresso en Pure and Applied Mathematics, vol. 89, Academic Press, Inc. 1980.
- [Wa] A. D. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. Math. **12** (1960), 503-528.
- [We] J. Weeks, *SnapPea: A computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds*, disponible en [www.northnet.org/weeks](http://www.northnet.org/weeks)