UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"DERIVADA E INTEGRAL"
CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ENRIQUE ALVAREZ SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2000

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Derivada e Integral" Conceptos Básicos del Cálculo

realizado por Alvarez Sandoval Enrique

con número de cuenta 6611126-5, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	
Propietario	M. en C. Agustín Ontiveros Pineda	
Propietario	Mat. César Alejandro Rincón Orta	
Suplente	Mat. Gilberto Fuentes Romero	
Suplente	M. en C. Raúl Meléndez Venancio	

Consejo Departamental de Matemáticas

Hector Méndez L.

Dr. Héctor Méndez Lango

MATEMATICAS

INTRODUCCIÓN

Al recordar nuestra vida cotidiana, nos damos cuenta fácilmente que en múltiples ocasiones hemos logrado un mismo objetivo por diferentes caminos.

Consideremos como ejemplo una acción que seguramente todos hemos realizado, "frecuentar una casa".

Cuando visitamos por primera ocasión esa casa quizás tuvimos dificultades en llegar al domicilio, en un caso extremo tuvimos que preguntar para lograr nuestro objetivo. Esta situación se debe a que se desconoce la zona en que se encuentra ubicada y por consecuencia el camino a seguir.

Es claro que existen múltiples caminos para llegar a esa casa, pero también es claro que, al conocer cada vez más la zona nos damos cuenta de los diferentes caminos que podemos seguir para lograr nuestro objetivo.

Las matemáticas no son la excepción cuando se quiere lograr un objetivo dentro de ellas, es decir, en múltiples ocasiones existen diferentes caminos para lograr la meta que nos planteamos.

El camino a seguir depende del cúmulo de conocimientos que se tiene y que están relacionados con aquello que se quiere obtener, así como, la habilidad en la aplicación de los mismos.

En este trabajo queremos mostrar un camino útil para que un alumno tenga un panorama de lo que el Cálculo Diferencial e Integral estudia, así como una referencia de su metodología característica, propia de una manera metódica y cuantitativa de abordar el estudio de cierto tipo de situaciones.

Para ello, veremos una semblanza de los enfoques geométricos, algebraicos y de aproximaciones para resolver algunas situaciones específicas que se reducen a encontrar las pendiente de rectas tangentes y áreas de regiones.

INDICE

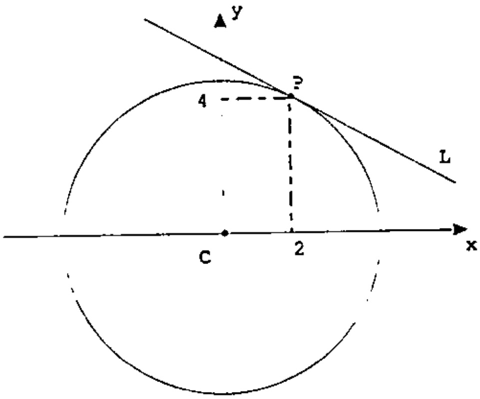
Capítulos	Págs.
INDICE	
I PENDIENTE DE RECTAS TANGENTES	1
I.1 Enfoque Geométrico	1
I.2 Enfoque Algebraico	4
I.3 Enfoque por Aproximaciones	9
I.3.1 Para una Circunferencia	9
I.3.2 Para una Parábola	26
I.3.3 Algunas Precisiones Acerca de las Sucesiones	29
I.3.4 Para una Cúbica	31
II ALGUNAS SITUACIONES QUE PUEDEN RESOLVERSE A TRAVÉS DE PENDIENTES DE RECTAS TANGENTES	35
II.1 Problema 1	35
II.2 Problema 2	41
III CÁLCULO POR APROXIMACIONES DE ÁREAS DE REGIONES ESTABLECIDAS POR UNA GRÁFICA	54
III.1 Problema 1	54
III.2 Problema 2	71
III.3 Problema 3	74
IV CONCEPTOS NECESARIOS PARA FORMALIZAR EL CÁLCULO	79
IV.1 Variable	79
IV.2 Función	84
IV.3 Límite de una función	93
V DERIVADA	102
VI INTEGRAL	125
CONCLUSIONES	139
BIBLIOGRAFÍA	140

I. PENDIENTE DE RECTAS TANGENTES.

I.1 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Encontrar la ecuación de la recta L tangente a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 20$ en el punto P(2,4).

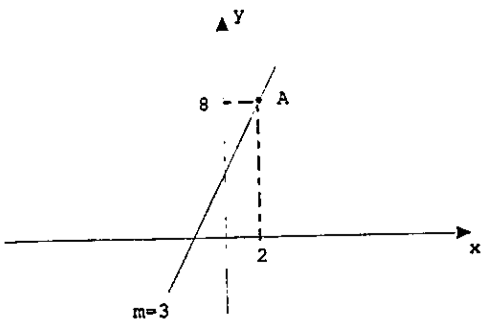
La ecuación $x^2 + y^2 = 20$ tiene como gráfica la circunferencia con centro C(0,0) y radio $\sqrt{20}$



Se quiere obtener la ecuación de la recta L.

Recordemos que la ecuación de una recta se puede establecer por medio del valor de su pendiente y las coordenadas de un punto de la misma.

Ejemplo: una recta pasa por el punto A (2,8) y tiene pendiente $m = 3$



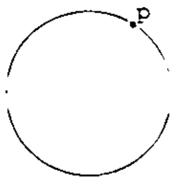
La ecuación de esta recta es:

$$y - 8 = 3\,(x - 2)$$

La recta L pasa por el punto de tangencia P (2 , 4), por lo que, para establecer su ecuación sólo nos falta conocer el valor de su pendiente.

Veremos ahora como se puede obtener el valor de su pendiente, la cual representamos con "m".

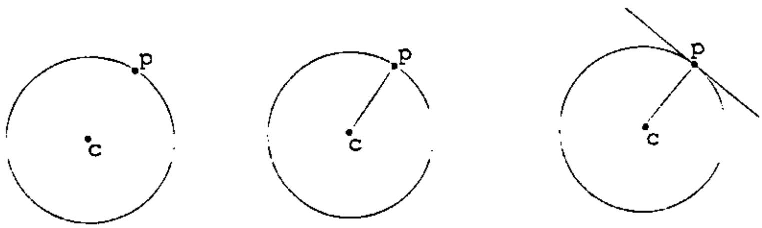
Al recordar nuestros estudios de Geometría sabemos que: La recta tangente a una circunferencia en un punto P de la misma, se puede trazar siguiendo los pasos que a continuación se indican.



a) Encontrar el centro C de la circunferencia

b) Trazar el radio CP

c) Trazar la recta que pasa por P, perpendicular a $\overline{CP}$

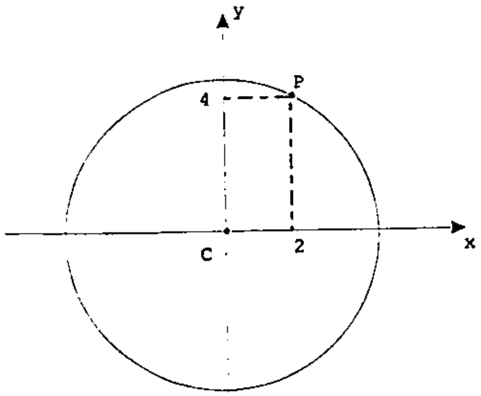


Para obtener el valor de la pendiente de la recta tangente L(el valor de m), seguiremos este camino dentro de la Geometría Analítica, conjuntamente con dos conocimientos de la misma.

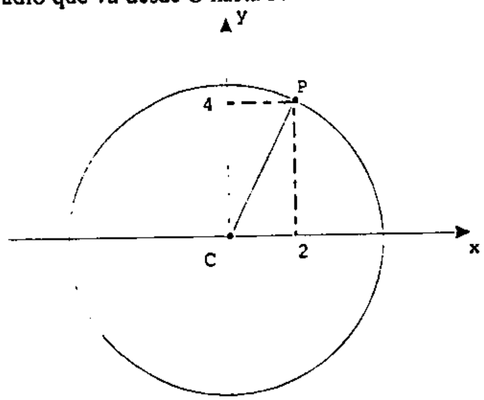
— Si una recta pasa por los puntos A (a, b) y B (c, d), su pendiente se obtiene de la forma:

$$m_{AB} = \frac{d - b}{c - a}$$

La circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 20$ tiene centro C(0,0) y pasa por el punto P(2,4).



Trazamos ahora el radio que va desde C hasta P.



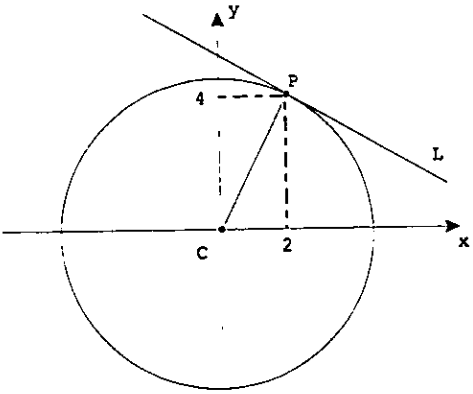
¿Cuál es la pendiente de la recta CP?.

Efectivamente: Como la recta CP pasa por los puntos C(0,0) y P(2,4), la pendiente de esta recta la cual representamos m_{CP} es:

$$m_{CP} = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

■ Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a "–1".

Trazamos ahora la recta que pasa por P, perpendicular a $\overline{CP}$, la cual es la recta tangente L



Como L es perpendicular a $\overline{CP}$, el producto de sus pendientes es igual a – 1:

$$m(m_{CP}) = -1.$$

Como $m_{CP} = 2$, al sustituir este valor en la ecuación anterior tenemos:

$$m\ (2) = -1$$
$$m = -\tfrac{1}{2}$$

Sabemos ahora que la recta tangente L tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto P(2,4), por lo que su ecuación es:

$$y - 4 = -\tfrac{1}{2}\ (x - 2)$$

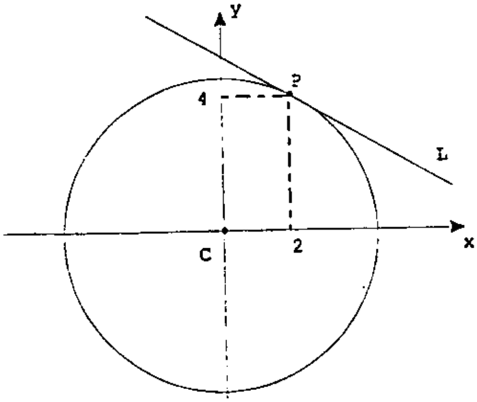
Con esto, hemos dado solución al problema que se planteo.

Veremos ahora como resolvemos el mismo problema siguiendo otro razonamiento.

I.2 ENFOQUE ALGEBRAICO.

Encontrar la ecuación de la recta L tangente a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 20$ en el punto P (2,4).

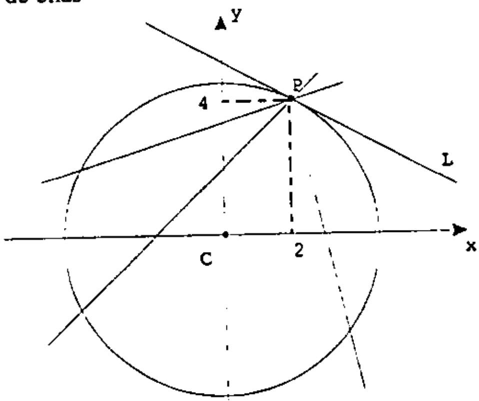
No olvidemos que la ecuación $x^2 + y^2 = 20$ tiene como gráfica la circunferencia con centro en C (0,0) y radio $\sqrt{20}$.



¿ Cuántas rectas pasan por el punto P (2,4) ?.

Efectivamente, una infinidad.

Trazaremos algunas de ellas



Es claro que todas las rectas que pasan por P sólo tienen a ese punto en común.

También es claro que cualesquiera dos rectas que pasan por P tienen pendiente diferente.

La razón que justifica lo anterior se debe a que sólo las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Recordemos que la ecuación de una recta que pasa por un punto H (p, q) y tiene pendiente m es:

$$y - q = m\,(x - p)$$

¿Cuál es la ecuación de una recta que pasa por P (2 , 4) ?

Efectivamente, si la pendiente de la recta se representa con m, como ésta pasa por el punto P (2 , 4) su ecuación es:

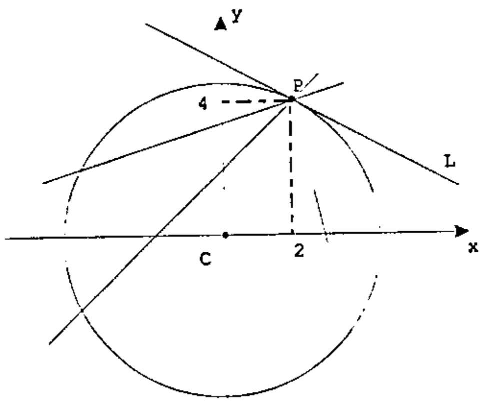
$$y - 4 = m (x - 2)$$

En esta ecuación no está definido el valor de m (pendiente de la recta), ya que, no sabemos de cual de todas las rectas que pasan por P estamos hablando.

Es claro que cuando se tiene la información para saber a cual recta nos estamos refiriendo, podremos obtener el valor de su pendiente y por tanto su ecuación.

¿Cuántas rectas pasan por P (2 , 4) y son tangentes a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 20$?.

Efectivamente; sólo una, a la cual representamos con L.



¿Qué caracteriza a la recta tangente L de todas las rectas que pasan por P?.

Efectivamente, es la única que intersecta a la circunferencia en un solo punto (el punto de tangencia).

Recordemos que al resolver un sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas de los puntos en donde se intersectan todas las gráficas del sistema.

Tenemos ahora ya las ideas básicas para resolver el problema.

¿Qué procedimiento algebraico piensas que debemos seguir para encontrar la pendiente de la recta tangente L y por tanto su ecuación?.

Efectivamente, resolver el sistema que se forma con la ecuación de una recta que pasa por P (2, 4) y la ecuación de la circunferencia a la cual es tangente la recta y determinar las condiciones para que la solución a este sistema sea única.

De esta forma tendremos las condiciones para que la recta y la circunferencia se intersecten en un solo punto, y por tanto, la recta sea la tangente de la cual hablamos.

$y - 4 = m(x - 2)$ — Ecuación de una recta que pasa por P (2, 4) y tiene pendiente m.

$x^2 + y^2 = 20$ — Ecuación de la circunferencia.

Resolvamos el Sistema

Al despejar "y" en la primera ecuación tenemos:

$y - 4 = m(x - 2)$

$y - 4 = mx - 2m$

$y = mx - 2m + 4$

Al sustituir el valor de "y" en la segunda ecuación tenemos:

$x^2 + y^2 = 20$

$x^2 + (mx - 2m + 4)^2 = 20$

$x^2 + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 + 8mx - 16m + 16 = 20$

$x^2 + m^2x^2 - 4m^2x + 8mx + 4m^2 - 16m - 4 = 0$

$(1 + m^2)x^2 + (8m - 4m^2)x + (4m^2 - 16m - 4) = 0$

Tenemos ahora una ecuación de 2° grado con "x" como variable, por lo que, al resolverla obtenemos los valores de "x" que son solución de la ecuación.
Recordemos que las soluciones de las ecuaciones de segundo grado de la forma "$ax^2 + bx + c = 0$" se pueden obtener de la de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para resolver la ecuación de segundo grado planteada anteriormente tenemos:

$a = 1 + m^2$ $\quad$ $b = 8m - 4m^2$ $\quad$ $c = 4m^2 - 16m - 4$

Los valores para "x" que son solución:

$$x = \frac{-(8m - 4m^2) \pm \sqrt{(8m - 4m^2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 16m - 4)}}{2(1 + m^2)}$$

$$x = \frac{-8m + 4m^2 \pm \sqrt{64m^2 - 64m^3 + 16m^4 - 16m^2 + 64m + 16 - 16m^4 + 64m^3 + 16m^2}}{2 + 2m^2}$$

$$x = \frac{-8m + 4m^2 \pm \sqrt{64m^2 + 64m + 16}}{2 + 2m^2}$$

$$x_1 = \frac{-8m + 4m^2 + \sqrt{64m^2 + 64m + 16}}{2 + 2m^2}$$

$$x_2 = \frac{-8m + 4m^2 - \sqrt{64m^2 + 64m + 16}}{2 + 2m^2}$$

¿Qué se necesita para que el sistema tenga una sola solución?.

Efectivamente, para que la solución al sistema sea única debe cumplirse $X_1 = X_2$.

¿Qué se necesita para que los valores X_1 y X_2 sean iguales?.

Efectivamente, estos valores serán iguales cuando se cumpla que:

$$64m^2 + 64m + 16 = 0$$

Tenemos ahora una ecuación de 2° grado con variable m, la cual vamos a resolver para encontrar los valores de ésta.

Para resolver esta ecuación tenemos " $a = 64$, $b = 64$ y $c = 16$", por lo que:

$$m = \frac{-64 \pm \sqrt{(64)^2 - 4(64)(16)}}{2(64)}$$

$$m = \frac{-64 \pm \sqrt{4096 - 4096}}{128}$$

$$m = \frac{-64 \pm \sqrt{0}}{128}$$

$$m = \frac{-64 \pm 0}{128}$$

$$m = \frac{-64}{128}$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

Sabemos ahora que si el valor de m es $-\frac{1}{2}$, el sistema anteriormente planteado tiene solamente una solución, y por tanto, la recta con esta pendiente es la tangente L a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 20$, en el punto P(2,4).

Como la recta tangente L tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por P (2, 4), su ecuación es:

$$y - 4 = -\tfrac{1}{2}\ (x - 2)$$

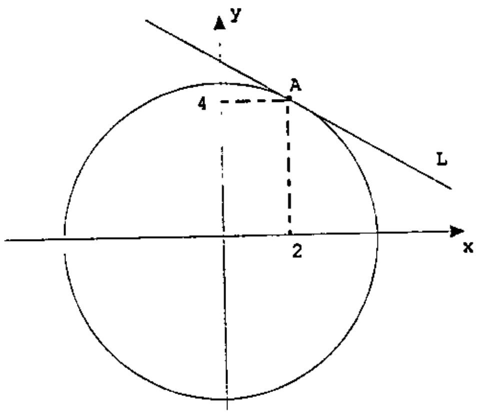
Hemos llegado a la misma solución, sólo que ahora seguimos un camino diferente al anterior.

Veremos ahora cómo resolvemos el mismo problema siguiendo un procedimiento distinto a los anteriores.

Esta idea que vamos a utilizar se puede considerar el principio para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, tema que es el centro de nuestra atención en este trabajo. Por lo que debemos hacer nuestro mejor esfuerzo para la comprensión del mismo.

I.3 Enfoque por aproximaciones.
I.3.1 Para una circunferencia.

Encontrar la ecuación de la recta L tangente a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 20$ *en el punto A (2, 4)*



No hay que olvidar que la ecuación de una recta se puede establecer al conocer su pendiente y las coordenadas de un punto de la misma.

Puesto que la recta tangente L pasa por el punto A (2,4), sólo nos falta saber el valor de su pendiente para establecer su ecuación.

Representaremos el valor de la pendiente de la recta tangente L con m.

Consideremos un punto Q_1 diferente de A (2, 4), sobre la circunferencia.

¿Cuántos puntos hay en esta circunferencia diferentes de A(2,4)?.

Efectivamente, hay una infinidad.

¿ Cómo se puede establecer una posición fija en la circunferencia para el punto Q_1?.

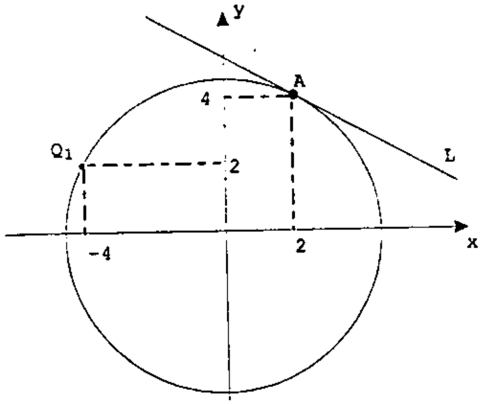
Efectivamente, encontrando una pareja de números que cumplan la ecuación $x^2 + y^2 = 20$, y considerando estos valores como las coordenadas de Q_1.

¿Los valores $x = -4$, $y = 2$ cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 = 20$?.

Efectivamente, estos valores cumplen la ecuación $x^2 + y^2 = 20$ ya que:

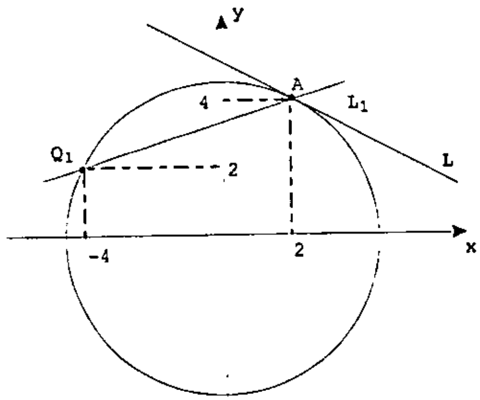
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ (-4)^2 + (2)^2 &= 20 \\ 16 + 4 &= 20 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

Consideremos que la posición del punto Q_1 sobre la circunferencia es: Q_1 (– 4 , 2).



¿Cuántas rectas pasan por los puntos Q_1 y A ?.

Efectivamente, sólo una.



Es claro que la recta que pasa por Q_1 y A, a la cual designaremos con L_1, no es la recta tangente L.

¿Cuál es el valor de la pendiente m_1 de la recta L_1?.

Efectivamente, como la recta L_1 pasa por los puntos $Q_1(-4, 2)$ y $A(2, 4)$ tenemos:

$$m_1 = \frac{4-2}{2-(-4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Seguramente en este momento estás haciendo la siguiente pregunta:

¿Para qué nos sirve encontrar el valor de la pendiente de una recta que no es la tangente?

El objetivo que se pretende es precisamente mostrarte que "encontrando pendientes de cierto tipo de rectas que no son tangentes y una reflexión, puede llevarnos a obtener la pendiente de la recta tangente L".

Consideremos ahora un punto Q_2 de la circunferencia, diferente de A y Q_1.

¿Cómo se le asigna una posición en la circunferencia al punto Q_2?.

Efectivamente, encontrando una pareja de números que cumplan la ecuación de la circunferencia y considerando estos como las coordenadas de Q_2.

¿Qué procedimiento podemos seguir para encontrar un valor para "x" y un valor para "y" que cumplan la ecuación $x^2 + y^2 = 20$?.

Efectivamente, se considera un valor dentro del rango que abarca la circunferencia en el eje de las abscisas, se considera éste como el valor de "x" en $x^2 + y^2 = 20$, y posteriormente se resuelve la ecuación que nos quede para obtener un valor para "y".

¿Cuál es el rango que abarca la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{20}$?.

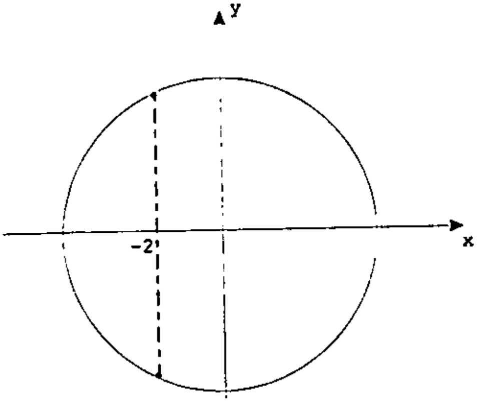
Efectivamente, son todos los números reales que van desde $-\sqrt{20}$ hasta $\sqrt{20}$. Estos valores forman un intervalo que representamos de la forma $[-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$.
Como -2 está en el intervalo, al considerar que $x = -2$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 20 \\
(-2)^2 + y^2 &= 20 \\
4 + y^2 &= 20 \\
y^2 &= 20 - 4 \\
y^2 &= 16 \\
y &= \pm\sqrt{16} \\
y &= \pm\ 4
\end{aligned}
$$

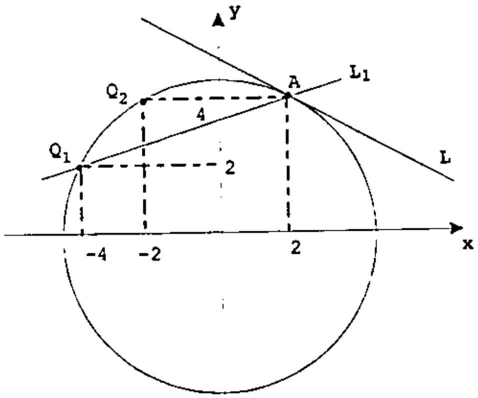
En este caso hay dos valores que se pueden considerar para "y": 4 y -4

¿Por qué en este caso hay dos valores para y ?.

Efectivamente, se debe a que hay dos puntos en la circunferencia que tienen abscisa -2 (uno en la parte superior y otro en la inferior).

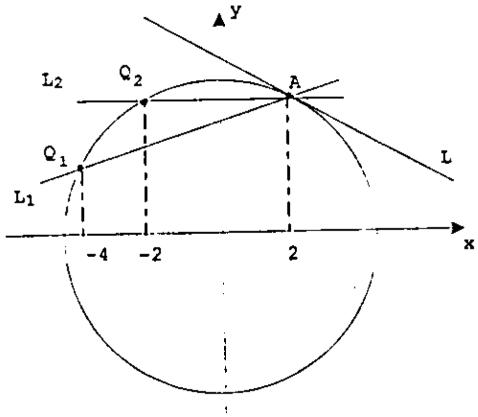


Si Consideramos que el punto Q_2 está en la parte superior, el valor para "y" debe ser el positivo, por lo que, las coordenadas son $Q_2(-2, 4)$.



Sabemos que sólo hay una recta que pasa por Q_2 y A, la cual no es la recta tangente L.

Representaremos a la recta que pasa por Q_2 y A con L_2.



¿Porqué la recta L_2 no es tangente a la circunferencia?.

Efectivamente, se debe a que pasa por dos puntos de la circunferencia.

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_2, la cual representamos con m_2?.

Efectivamente, como la recta L_2 pasa por los puntos A (2,4) y Q_2 (–2,4) tenemos:

$$m_2 = \frac{4-4}{-2-2} = \frac{0}{-4} = 0$$

Tenemos ahora dos valores que corresponden a las pendientes de las rectas L_1 y L_2:

$$m_1 = 1/3 \qquad y \qquad m_2 = 0$$

¿Qué se puede afirmar de estos valores, al compararlos con la pendiente de la recta tangente L?.

Efectivamente, cero es el valor más cercano (más próximo) a la pendiente de la recta tangente L. Esto es, la pendiente de la recta L_2 está mas cerca (más próximo) a la pendiente de la recta tangente L.

¿Cómo se puede justificar esta afirmación?

Efectivamente, en esta ocasión tenemos dos formas para justificarla.

a) Si consideramos que este problema ya lo resolvimos, saber que la pendiente de la recta tangente L es – ½, nos permite afirmar sin temor a equivocarnos que entre 0 y 1/3, 0 es el valor más cercano a la pendiente de la tangente.

b) Como la posición de la recta es la más cerca de la recta tangente L, el valor de la pendiente de la recta L_2 es el más cercano al valor de la pendiente de la recta tangente L (ver gráfica 16).

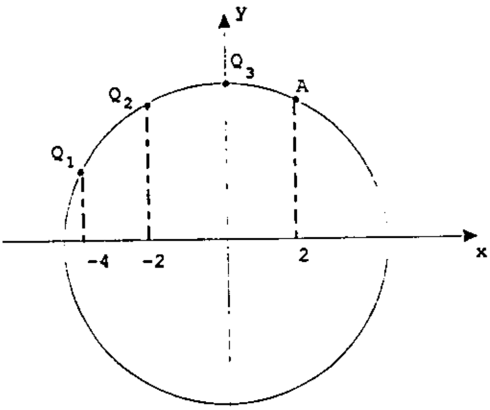
La justificación del inciso "b" es la que utilizaremos en adelante.

Consideremos ahora un punto Q_3 sobre la parte superior de la circunferencia, diferente a Q_1, Q_2 y A.

¿Cómo se establece una posición para el punto Q_3?.

Efectivamente: como el punto se considera en la parte superior de la circunferencia, para establecer una posición para Q_3, sólo tenemos que darle un valor a "x" que esté en el intervalo $[-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$.

Si consideramos que $x = 0$, la posición del punto Q_3 es:



¿Cómo se obtiene el valor de la ordenada del punto Q_3?.

Efectivamente, al darle un valor a "x", el valor para "y" se obtiene con la ecuación de la circunferencia, de la siguiente forma:

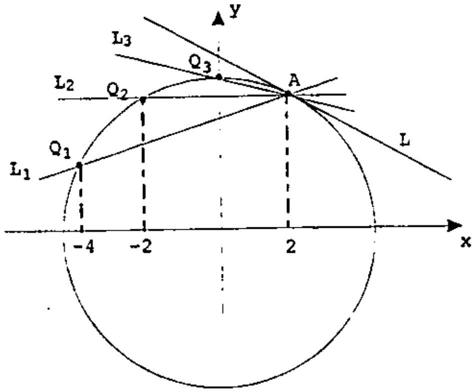
$$x^2 + y^2 = 20.$$
$$(0)^2 + y^2 = 20.$$
$$0 + y^2 = 20.$$
$$y^2 = 20$$
$$y = \pm\sqrt{20}$$

Como el punto está en la parte superior de la circunferencia, la ordenada es el valor positivo que se obtiene para "y".

¿Cuáles son las coordenadas del punto Q_3?.

Efectivamente, las coordenadas de este punto son: $Q_3(0, \sqrt{20})$

Tracemos la recta que pasa que pasa por Q_3 y A, a la cual llamaremos L_3.



¿ Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_3?.

Efectivamente, como la recta L_3 pasa por los puntos Q_3 $(0, \sqrt{20})$ y A (2,4) tenemos:

$$m_3 = \frac{4-\sqrt{20}}{2-0} = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = -\ 0.236067......$$

Los puntos suspensivos nos indican que hay más dígitos.

Como la posición de la recta L_3 es la más cerca a la posición de la recta tangente L, tenemos ahora que:

De las rectas L_1, L_2 y L_3, el valor de la pendiente de la recta L_3 "$m_3 = -0.236067....$" es el más cercano al valor de la pendiente de la recta tangente L.

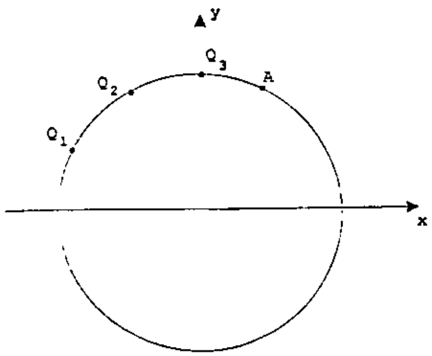
Sabemos ahora que si trazamos rectas secantes a la circunferencia que pasen por A cada vez más cerca a la recta tangente L, la pendiente de éstas se acerca cada vez más al valor de la pendiente de la recta tangente L.

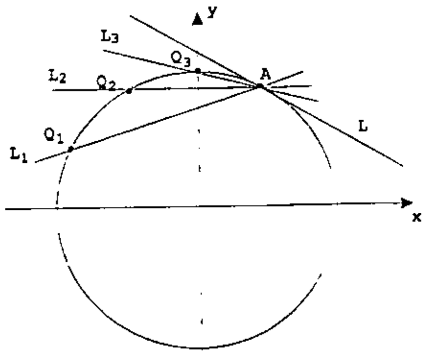
Haremos algunas precisiones y reflexiones relacionadas con estos valores (pendientes de rectas que no son tangentes), los cuales nos llevarán a la solución del problema planteado.

Es claro que la posición de los puntos Q_1, Q_2 y Q_3 que escogimos sobre la circunferencia no es al azar, se seleccionaron de forma que la recta secante que se traza se aproxime cada vez más a la posición de la recta tangente L.

¿Cómo se seleccionaron los puntos en la circunferencia para que la recta que se va trazando (L_1, L_2 y L_3), se aproxime cada vez más a la recta tangente L, y en consecuencia, el valor de la pendiente de estas (m_1, m_2 y m_3) se aproxime cada vez más a la pendiente de la recta tangente L?.

Efectivamente, en esta ocasión se seleccionaron sobre la parte superior de la circunferencia y cada vez más cerca al punto A.

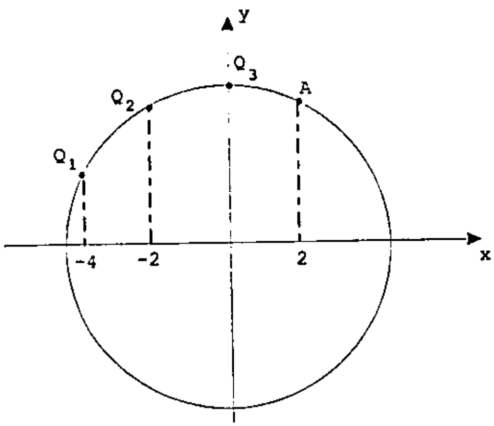




Recordemos que para fijar la posición de un punto en la parte superior de la circunferencia, sólo tenemos que asignar un valor a "x" que esté en el intervalo $[-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$.

¿Cómo son los valores que se le asignaron a la variable "x" para que la posición del punto que se va seleccionando en la circunferencia, se aproxime cada vez más a la posición del punto A?

Efectivamente, los valores para "x" se aproximan cada vez más a 2 (abscisa del punto de tangencia de la recta L).



Muy bien, sabemos ahora como se obtienen valores cada vez más cerca al de la pendiente de la recta tangente L: 1/3, 0, – 0.236065....

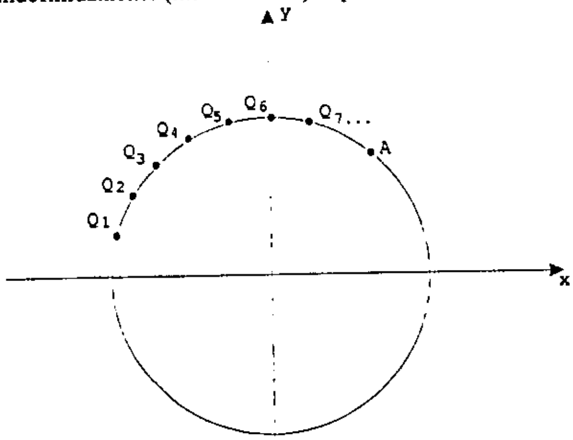
¿Cómo se obtiene la pendiente de la recta tangente L, basándonos en valores como los que tenemos hasta este momento?.

Efectivamente, en múltiples ocasiones se nos ha presentado una situación similar como la que tenemos en este momento, sólo tenemos que recordar aquellas ocasiones en nuestra vida cotidiana en la que, con base a cierta información, hacemos una deducción para establecer algo que nos interesa saber en ese momento.

¿Hay alguna consideración basada en estos valores que se pueda hacer, con la cual se determine el valor de la pendiente de la recta tangente L?.

Efectivamente, todavía no estamos en condiciones para poder afirmar cuál es ese valor ya que, ninguno de los anteriores es la pendiente de la recta tangente L y no tienen alguna lógica que nos lleve a lo que se quiere. Sólo sabemos que se aproximan cada vez más a la respuesta.

Dejemos correr ahora nuestra imaginación y hagamos una reflexión sobre lo que sucederá al considerar una infinidad de puntos sobre la circunferencia de tal forma que, en orden de aparición estén cada vez más cerca al punto A. Más aún, que con ellos nos aproximemos indefinidamente (infinitamente) al punto A.

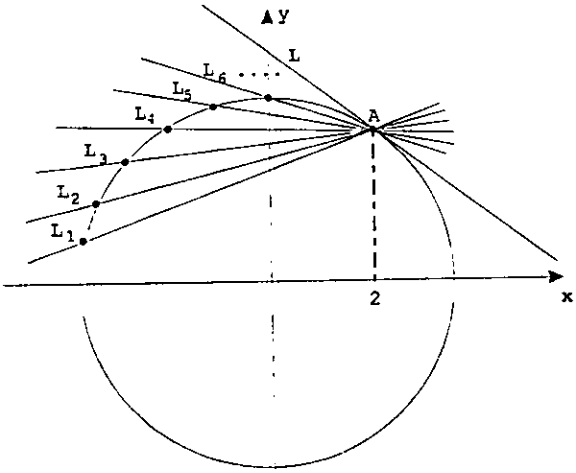


Sabemos que por cada punto que se considere sobre la circunferencia, hay una recta secante a ésta, la que pasa por A y el punto considerado.

¿Cuántas rectas secantes a la circunferencia se pueden trazar al considerar una infinidad de puntos sobre la misma?.

Efectivamente, se pueden trazar una infinidad de rectas secantes.

Trazaremos algunas de ellas como un ejemplo.



¿Qué podemos afirmar respecto a la posición de esa infinidad de rectas secantes?.

Efectivamente, la posición de la recta secante se aproxima indefinidamente (infinitamente) a la recta tangente L.

Como hay una infinidad de rectas y cada una tiene una pendiente, se puede construir una sucesión infinita de valores. Los términos de esta sucesión son las pendientes de las rectas secantes en orden de aparición.

¿Qué podemos afirmar respecto a esta sucesión infinita de valores?.

Efectivamente, como la posición de la recta secante se aproxima indefinidamente a la recta tangente L, la sucesión a la cual nos referimos se aproxima indefinidamente al valor de la pendiente de la recta tangente.

¿Cuál debe ser el valor de la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 20$ en el punto A(2,4)?.

Efectivamente, basándonos en estas reflexiones se puede afirmar sin temor a equivocarnos que la pendiente de la recta tangente L es el valor al cual se aproxima indefinidamente (infinitamente) la sucesión infinita de valores.

Sabemos ahora como se puede obtener el valor de m (la pendiente de la recta tangente L) por medio de pendientes de rectas secantes. Para ello, sólo tenemos que realizar lo que hasta este momento imaginamos:

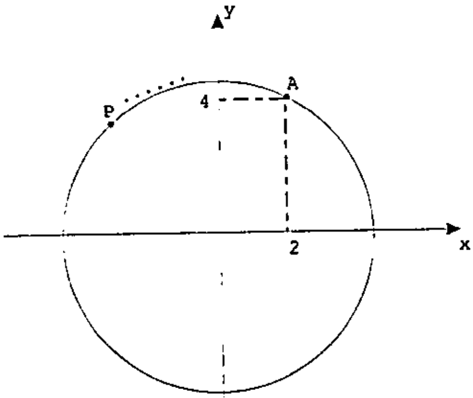
a) Establecer la posición de una infinidad de puntos sobre la circunferencia de tal forma que: Los puntos seleccionados en orden de aparición estén cada vez más cerca al punto A (el punto de tangencia), y más aún, que estos se aproximen infinitamente al punto A.

b) Obtener la pendiente de las rectas secantes para establecer la sucesión infinita de valores.

c) Definir el valor al cual se aproxima indefinidamente (infinitamente) la sucesión.

Tenemos ahora los conocimientos para iniciar el procedimiento que nos lleve a obtener la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 20$ en el punto A(2,4).

Iniciaremos considerando que un punto P(x,y) se va a mover sobre la parte superior de la circunferencia.



¿Cómo se establece una infinidad de posiciones para el punto P(x,y), en la parte superior de la circunferencia?.

Efectivamente, asignando a la variable "x" una infinidad de valores que estén en el intervalo $[-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$.

¿Cómo deben ser los valores que se le asignan a la variable "x", para que la posición del punto P(x,y) se aproxime indefinidamente al punto A(2,4)?.

Efectivamente, deben aproximarse indefinidamente a 2 (abscisa del punto de tangencia).

Sabemos ahora como deben ser los valores para la variable x.

¿Cómo le asignamos a la variable "x" una infinidad de valores con las características anteriormente expuestas?.

Efectivamente, en la práctica es imposible establecer uno por uno los valores para "x", como lo hemos venido haciendo, hasta tener una infinidad. Sin embargo, esto no es un impedimento para lograr lo que se quiere, ya que, afortunadamente existen técnicas que se presentan como una alternativa.

Los valores que vamos a considerar, a diferencia de los que le hemos asignado a "x" hasta este momento, presentarán una forma especial, la cual nos permitirá establecer lo que se quiere.

1.9, 1.99, 1.999

Al hecho de asignarle estos valores a "x" lo representaremos de la siguiente forma:

x: 1.9, 1.99, 1.999

¿ Estos valores pertenecen al intervalo $[-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$ y se aproximan cada vez más a 2?.

Efectivamente, es claro que en el orden que aparecen se aproximan cada vez más a 2, y todos ellos están entre $-\sqrt{20}$ y $\sqrt{20}$ (son mayores que $-\sqrt{20}$ y menores que $\sqrt{20}$).

¿El valor para la variable x se aproxima infinitamente a 2 cuando le asignamos estos valores?.

Efectivamente, no se aproxima infinitamente a 2 ya que, para que se cumpla una situación de este tipo, entre otras cosas, se le debe asignar una infinidad de valores a la variable.

¿Qué característica tienen estos valores?.

Efectivamente, además de que se aproximan cada vez más a 2, la forma que presentan lleva una secuencia.

Es claro que, si continuamos asignándole valores a la variable "x" siguiendo esta secuencia, sabemos cuales son estos aunque no se escriban.

¿Cuáles son los siguientes dos valores para la variable "x" ?.

Efectivamente, los dos valores que siguen para x son 1.9999 y 1.99999.

Al hecho de continuar indefinidamente asignándole valores a la variable "x" siguiendo esta secuencia, lo representaremos de la siguiente forma:

x: 1.9, 1.99, 1.999, ...

¿Qué se puede afirmar del valor para la variable "x", al asignarle estos valores?.

Efectivamente, se aproxima infinitamente a 2.

Este hecho lo representamos de la siguiente forma:

x: 1.9, 1.99, 1.999, ... ——> 2

Sabemos ahora los valores que se le pueden asignar a "x", los cuales establecen las posiciones del punto P(x;y) sobre la circunferencia para que se aproxime indefinidamente al punto A(2,4).

Como los valores que se consideran para x están muy cerca de 2, es imposible hacer una gráfica adecuada, tal y como lo hicimos anteriormente para los puntos Q_1, Q_2 y Q_3, la cual nos permita visualizar la posición de algunos de estos puntos sobre la circunferencia y las rectas secantes que se trazan.

Sin embargo, es conveniente que en tu mente generes una imagen de lo que estamos haciendo.

Una vez que establecimos los valores para la variable x, vamos a obtener la pendiente de la recta secante PA, para algunas posiciones del punto P.

A las posiciones del punto P(x,y) las representaremos : P_1, P_2, P_3, P_4, etcétera.

Sabemos que la pendiente de la recta secante se puede obtener cuando se conocen las coordenadas de dos de sus puntos.

También sabemos que el valor para "y" se obtiene al asignarle un valor a "x" en la ecuación $x^2 + y^2 = 20$, por lo que:

Si $x = 1.9$ tenemos:

$$\begin{aligned} (1.9)^2 + y^2 &= 20 \\ 3.61 + y^2 &= 20 \\ y^2 &= 20 - 3.61 \\ y^2 &= 16.39 \\ y &= \pm\sqrt{16.39} \end{aligned}$$

Si $x = 1.99$ tenemos:

$$\begin{aligned} (1.99)^2 + y^2 &= 20 \\ 3.9601 + y^2 &= 20 \\ y^2 &= 20 - 3.9601 \\ y^2 &= 16.0399 \\ y &= \pm\sqrt{16.0399} \end{aligned}$$

Si $x = 1.999$ tenemos: $(1.999)^2 + y^2 = 20$

$$3.996001 + y^2 = 20$$
$$y^2 = 20 - 3.996001$$
$$y^2 = 16.003999$$
$$y = \pm\sqrt{16.003999}$$

Como la posición del punto P(x,y) es en la parte superior de la circunferencia, el valor para "y" es la raíz positiva.

Sabemos ahora que las tres primeras posiciones que se están considerando para el punto P (x, y) son:

$P_1\,(1.9\,,\ \sqrt{16.39}\,)$, $P_2\,(1.99\,,\ \sqrt{16.0399}\,)$ y $P_3\,(1.999\,,\ \sqrt{16.003999}\,)$

Representaremos con m_1, m_2 y m_3 la pendiente de las rectas P_1A, P_2A, y P_3A respectivamente.

Como la recta P_1A pasa por los puntos $P_1(1.9,\ \sqrt{16.39}\,)$ y A(2,4), su pendiente es:

$$m_1 = \frac{4 - \sqrt{16.39}}{2 - 1.9} = \frac{4 - \sqrt{16.39}}{0.1} = -\,0.484....$$

Como la recta P_2A pasa por los puntos $P_2\,(1.99,\ \sqrt{16.0399}\,)$ y A (2,4), su pendiente es:

$$m_2 = \frac{4 - \sqrt{16.0399}}{2 - 1.99} = \frac{4 - \sqrt{16.0399}}{0.01} = -\,0.4984...$$

Como la recta P_3A pasa por los puntos $P_3\,(1.999,\ \sqrt{16.003999}\,)$ y A (2,4) su pendiente es:

$$m_3 = \frac{4 - \sqrt{16.003999}}{2 - 1.999} = \frac{4 - \sqrt{16.003999}}{0.001} = -\,0.49984....$$

El valor de la pendiente de la recta PA en las tres primeras posiciones que se consideraron para punto P(x,y), lo representaremos de la siguiente forma:

m_{PA}: $-\,0.484....,\ -\,0.4984....,\ -\,0.49984...,$

¿Qué caracteristica presentan estos valores?.

Efectivamente, llevan una secuencia.

¿Qué se puede obtener cuando los valores llevan una secuencia?

Efectivamente, al continuar asignándole valores a "x" siguiendo la secuencia que presentan, sin realizar operación alguna se pueden establecer los valores de m_{PA}.

¿Cuáles son los valores de m_{PA} si le asignamos a "x" los dos siguientes valores de acuerdo a la secuencia que presentan?.

Efectivamente:

Si $x = 1.9999$ tendremos $m_{PA} = -0.499984....$

Si $x = 1.99999$ tendremos $m_{PA} = -0.4999984....$

Recordemos que: Al asignarle valores a "x" que se aproximen cada vez más a 2 (abscisa del punto de tangencia), los valores de m_{PA} (pendiente de la recta PA en las diferentes posiciones que toma) se aproximan cada vez más al valor de la pendiente de la recta tangente L.

¿Cuántas veces se puede hacer este proceso que hemos venido realizando(asignarle un valor a "x" para establecer la posición del punto P(x,y) y obtener la pendiente de la recta PA)?.
Efectivamente, tantas veces como se quiera :100, 150, 200, 500, 1000, etcétera.

¿Podemos hacer este proceso indefinidamente veces (un número infinito de veces)?.

Es claro que, en la práctica es imposible hacer este proceso como cualquier otra cosa un número infinito de veces.

Lo que haremos es dejar indicado que este proceso se repetirá indefinidamente veces y sacar conclusiones.

Si x: 1.9 , 1.99 , 1.999 , 1.9999 , ...
entonces m_{PA}: $-0.484....$, $-0.4984....$, $-0.49984...$, $-0.499984....$, ...

Sabemos ahora cual es la sucesión infinita de valores que se forma con la pendiente de la recta secante PA, al asignarle valores a "x" para que la posición del punto P(x;y) se aproxime infinitamente al punto de tangencia A(2,4), y por tanto, la posición de la recta secante PA se aproxime infinitamente a la posición de la recta tangente L.

Por último, estableceremos el valor al cual se aproxima indefinidamente esta sucesión.

¿Hay un valor al que se aproxima infinitamente m_{PA}, al continuar indefinidamente asignándole valores a "x" siguiendo la secuencia que presentan?.

Efectivamente, saber cuales son los valores de m_{PA} aunque no se escriban estos, nos permite afirmar sin temor a equivocarnos que:

Al continuar indefinidamente asignándole valores a "x" siguiendo la secuencia que presentan los que se han considerado hasta este momento, el valor de m_{PA} se aproxima infinitamente a " – 0.5".

Esta situación la representamos de la siguiente forma:

Si x: 1.9 , 1.99 , 1.999 , 1.9999 , ... ——> 2
entonces m_{PA}: – 0.484....,– 0.4984...., – 0.49984... ,– 0.499984...., ... ——> – 0.5

Sabemos ahora que "– 0.5" es el valor al cual se aproxima indefinidamente la sucesión de valores para m_{PA}..

Como el valor al cual se aproxima esta sucesión es la pendiente de la recta tangente L, sabemos ahora que:

La pendiente de la recta tangente L a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 20$, en el punto A(2,4) es "– 0.5".

Podemos ahora concluir que la ecuación de la recta tangente L es:

$$y - 4 = - 0.5 (x - 2)$$

Es claro que siguiendo este procedimiento, hemos llegado a la misma solución que se obtuvo en los casos anteriores.

Seguramente en este momento estas pensando que, este último camino que seguimos es muy largo comparativamente con los anteriores.

En realidad dimos una explicación muy amplia de lo que estamos haciendo y como lo estamos haciendo para la mejor comprensión posible de este procedimiento, ya que, esta idea de aproximación es la base fundamental del Cálculo Diferencial e Integral.

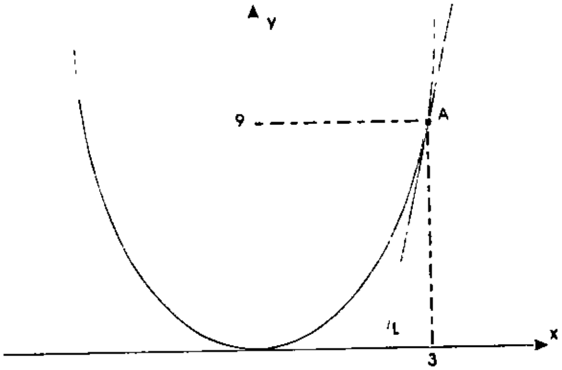
Comparto contigo esta preocupación, sólo que, por el momento se está generando la herramienta rudimentaria, para posteriormente entrar al mundo maravilloso del Cálculo Diferencial e Integral en donde este tipo de problemas se pueden resolver en un abrir y cerrar de ojos.

Resolveremos ahora otro problema en el cual prescindiremos de la explicación amplia para reafirmar esta idea de aproximación.

Es conveniente que en tu mente generes una explicación de lo que vamos haciendo para una mejor comprensión.

I.3.2 Para una parábola.

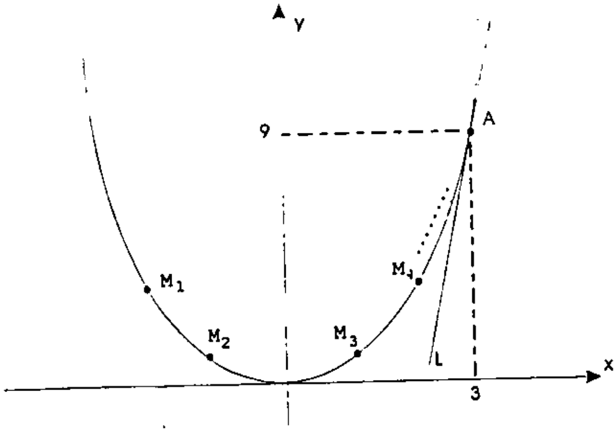
Encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $y = x^2$ en el punto A(3,9).



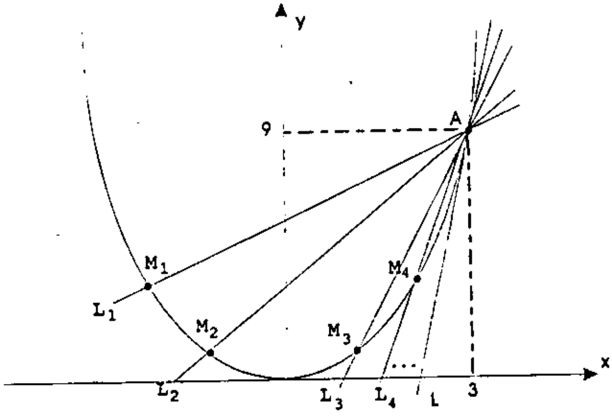
Representaremos con m a la pendiente de la recta L.

Para obtener el valor de m, vamos a considerar que un punto M (x,y) se mueve sobre la gráfica de tal forma que, las posiciones sucesivas que toma hacen que se aproxime indefinidamente al punto A.

A las posiciones que se consideren para el punto M les llamaremos M_1, M_2, M_3, M_4, etc.



Las posiciones de la recta MA se llamarán L_1, L_2, L_3,L_4, etc.



Para establecer las cuatro primeras posiciones que vamos a considerar para el punto M(x, y), le asignaremos a "x" sucesivamente los valores 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999.

¿Cuál es el valor de "y" para cada uno de los valores que se le están asignando a "x"?.

Efectivamente, como la gráfica tiene por ecuación $y = x^2$, tenemos:

Si $x = 2.9$ entonces $y = (2.9)^2 = 8.41$

Si $x = 2.99$ entonces $y = (2.99)^2 = 8.9401$

Si $x = 2.999$ entonces $y = (2.999)^2 = 8.994001$

Si $x = 2.9999$ entonces $y = (2.9999)^2 = 8.99940001$

Sabemos ahora que las cuatro primeras posiciones que estamos considerando para el punto M son:

M_1 (2.9,8.41), M_2 (2.99, 8.9401), M_3 (2.999, 8.994001), M_4 (2.9999,8.99940001)

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta MA para las cuatro primeras posiciones que toma?.

Efectivamente:

Como la recta L_1 pasa por los puntos A (3,9) y M_1 (2.9, 8.41) tenemos:

$$m_1 = \frac{9-8.41}{3-2.9} = 5.9$$

Como la recta L_2 pasa por los puntos A (3,9) y M_2 (2.99, 8.9401) tenemos:

$$m_2 = \frac{9 - 8.9401}{3 - 2.99} = 5.99$$

Como la recta L_3 pasa por los puntos A (3,9) y M_3 (2.999, 8.994001) tenemos:

$$m_3 = \frac{9 - 8.994001}{3 - 2.999} = 5.999$$

Como la recta L_4 pasa por los puntos A (3,9) y M_4 (2.9999, 8.99940001) tenemos:

$$m_4 = \frac{9 - 8.99940001}{3 - 2.9999} = 5.9999$$

Sabemos ahora que:

Si x: 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999
entonces m_{MA}: 5.9, 5.99, 5.999, 5.9999

Al continuar indefinidamente asignándole valores a "x", siguiendo la secuencia que presentan los que hasta este momento se han considerado, tenemos que:

– La sucesión de valores para "x" se aproxima infinitamente a 3, por lo que, la posición del punto M (x,y) que se mueve sobre la gráfica se aproxima infinitamente al punto de tangencia A(3,9).

– Como la posición del punto M se aproxima infinitamente al punto de tangencia, la posición de la recta MA se aproxima infinitamente a la recta tangente L.

– Como la posición de la recta MA se aproxima infinitamente a la recta tangente, el valor de la pendiente de la recta MA se aproxima infinitamente al valor de la pendiente de la recta tangente L.

Al continuar indefinidamente asignándole valores a "x" tenemos:

Si x: 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, 2.99999, 2.999999, ... ——> 3
entonces m_{MA}: 5.9, 5.99, 5.999, 5.9999, 5.99999, 5.999999, ... ——> 6

Podemos ahora afirmar que $m = 6$, es decir, la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $y = x^2$ en el punto A(3,9) es 6.

Antes de continuar resolviendo problemas con esta idea de aproximación, vamos a precisar algunas situaciones que se presentaron en estos casos.

I.3.3 Algunas precisiones acerca de las sucesiones.

En cada problema se obtuvo el valor de la pendiente de una recta tangente a una gráfica, para lo cual, se considera un punto de tal forma que:

a) Se mueve sobre la gráfica.
b) Se aproxima cada vez más al punto de tangencia
c) Se aproxima infinitamente(indefinidamente) al punto de tangencia

¿ Cómo se establece que un punto R (x, y) se mueve sobre la gráfica?

Efectivamente, considerando que el punto toma diferentes posiciones sobre la gráfica. Algebraicamente sólo tenemos que asignarle a la variable "x" valores diferentes dentro de cierto rango que puede establecerse por medio de la ecuación ó la gráfica.

Tomaremos como ejemplo el último problema cuya gráfica es una parábola que abarca todo el eje de las abscisas, lo cual establece que el rango de variación para la variable "x" son todos los números reales.

Para que el punto R(x,y) tome diferentes posiciones sobre la parábola, sólo tenemos que asignarle valores a "x".

Ejemplos:
a) x: -6, -4, -2, 0, 2
b) x: 4, 20, 10, -2, 6
c) x: ½, 8, ¾, 20, -1
d) x: 2.9, 2.98, 2.989, 2.9898
e) x: 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001
f) x: 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999

Cada valor que se le asigne a "x" establece una posición para el punto R sobre la parábola.

¿Qué se necesita para que el punto R (x , y) se aproxime cada vez más al punto de tangencia A(3,9)?.

Efectivamente, los valores que se consideren para "x" deben aproximarse cada vez más a 3(abscisa del punto de tangencia).

¿Cuáles de los valores que se consideran para x en los ejemplos anteriores, satisfacen esta condición?.

Efectivamente, sólo los de los incisos a, d, e y f.

a) x: -6, -4, -2, 0, 2

d) x: 2.9, 2.98, 2.989, 2.9898

e) x: 3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001

f) x: 2.9 , 2.99 , 2.999 , 2.9999

¿Cómo se establece que el punto R(x,y) se mueve indefinidamente sobre la parábola?.

Efectivamente, asignándole una infinidad de valores a "x".

¿Cómo se puede establecer una infinidad de valores para "x"?.

Efectivamente, una forma se presenta al considerar valores que lleven una secuencia, la cual establece los valores que siguen para "x" aunque no se escriban.

¿Cuáles de los incisos a, d, e y f cumplen con esta característica?.

Efectivamente, todos ellos llevan una secuencia.

¿Cómo se deja indicado la infinidad de valores que se le asignan "x", de acuerdo a la secuencia que presentan los primeros?.

Efectivamente, de la siguiente forma:

a) x: $-6, -4, -2$, 0 , 2, ...

d) x: 2.9 , 2.98 , 2.989 , 2.9898, ...

e) x: 3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001, ...

f) x: 2.9 , 2.99 , 2.999 , 2.9999, ...

¿Cuáles de estos siguen cumpliendo que los valores para "x" se aproximan cada vez más a 3?.

Efectivamente, sólo los incisos d, e y f.

d) x: 2.9 , 2.98 , 2.989 , 2.9898, ...

e) x: 3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001, ...

f) x: 2.9 , 2.99 , 2.999 , 2.9999, ...

¿Porqué la del inciso "a" no se considera?.

Efectivamente, los siguientes valores para "x" son 4, 6, 8, 10, etc., estos se alejan cada vez más del 3.

¿Cómo se puede establecer que el punto R(x,y) se aproxima infinitamente al punto de tangencia A(3,9)?.

Efectivamente, cuando el valor para "x" se aproxima infinitamente a 3.

¿Cuáles de los incisos d, e y f hacen que el valor para "x" se aproxime infinitamente a 3?.

Efectivamente, sólo los incisos e y f.

e) x: 3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001, ... ——> 3

f) x: 2.9 , 2.99 , 2.999 , 2.9999, ... ——> 3

¿Porqué los valores del inciso "d" no hacen que "x" se aproxime infinitamente a 3?

Efectivamente, se debe a que la distancia que separa al 3 de cualquiera de estos valores(los que se escriben y los que no se escribieron) es siempre mayor a "0.01".

¿ Existen otras sucesiones, cuyos valores hacen que "x" se aproximen infinitamente a 3?

Efectivamente, si hay mas sucesiones con esta caracteristica.

Ejemplo:

x: $2 , 2 + \frac{1}{2} , 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} , 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 , 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + 1/16$, ... ——> 3

Esta sucesión al realizar las operaciones se puede representar de la forma:

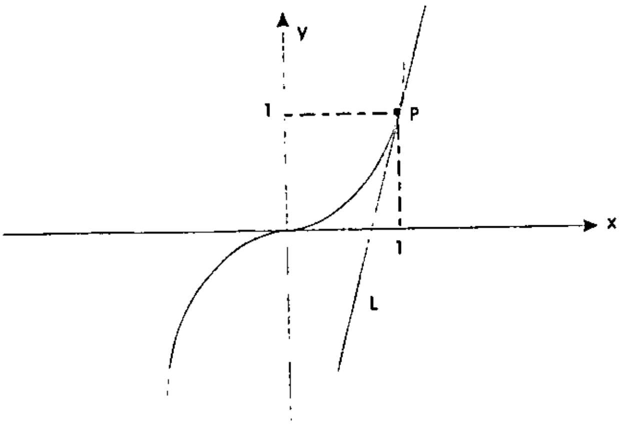
x: 2 , 2.5 , 2.75 , 2.875 , 2.9375 , ... ——> 3

Para familiarizarnos aún más con esta idea de aproximación, encontraremos la pendiente de una recta tangente a otra gráfica.

Es conveniente que en tu mente generes una imagen de lo que vamos haciendo.

I.3.4 Para una cúbica.

Encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $y = x^3$ en el punto P (1 , 1).



Consideremos un punto Q (x , y), el cual se mueve indefinidamente sobre la gráfica de tal forma que se aproxima infinitamente al punto P(1,1)

Para establecer las posiciones del punto Q(x,y) que vamos a considerar, asignaremos a "x" los valores de la siguiente sucesión.

x: 1.1 , 1.01, 1.001 , 1.0001 , 1.00001 , ... ———> 1

El valor de la ordenada para las cuatro primeras posiciones del punto Q(x y) es:

Si x = 1.1 tenemos : $y = (1.1)^3 = 1.331$

Si x = 1.01 tenemos : $y = (1.01)^3 = 1.030301$

Si x = 1.001 tenemos : $y = (1.001)^3 = 1.003003001$

Si x = 1.0001 tenemos : $y = (1.0001)^3 = 1.000300030001$

Las cuatro primeras posiciones que estamos considerando para el punto Q (x , y) son :

Q_1 (1 , 1 . 331), Q_2 (1.01 , 1.030301) , Q_3 (1.001 , 1.003003001) y

Q_4 (1.0001, 1.000300030001)

La pendiente de la recta PQ para las cuatro primeras posiciones del punto P(x,y), las cuales representaremos con m_1, m_2, m_3 y m_4 es:

$$m_1 = \frac{1.331-1}{1.1-1} = \frac{0.331}{0.1} = 3.31$$

$$m_2 = \frac{1.030301 - 1}{1.01 - 1} = \frac{0.030301}{0.01} = 3.0301$$

$$m_3 = \frac{1.003003001 - 1}{1.001 - 1} = \frac{0.003003001}{0.001} = 3.003001$$

$$m_4 = \frac{1.000300030001 - 1}{1.0001 - 1} = \frac{0.000300030001}{0.0001} = 3.00030001$$

Si continuamos indefinidamente este proceso tenemos:

Si x : 1.1 , 1.01 , 1.001 , 1.0001 , ... ——> 1

Entonces m_{PQ} : 3.31, 3.0301, 3.003001, 3.00030001, ... ——> Pendiente de la recta tangente L

Considerando la secuencia que presentan estos valores, afirmamos sin temor a equivocarnos que:

m_{PQ} : 3.31 , 3.0301 , 3.003001 , 3.00030001, ... ——> 3

Podemos ahora afirmar que: 3 es el valor de la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la ecuación $y = x^3$ en el punto P (1 , 1).

Para familiarizarnos con un concepto que se utilizan en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, vamos ahora a precisar una situación que se presenta en estos problemas.

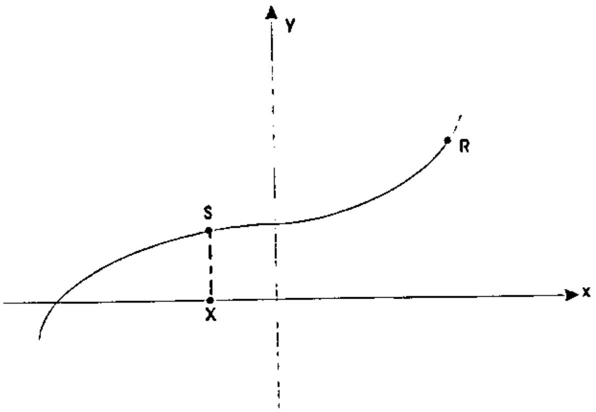
En cada uno de los problemas se establecieron dos variables:

— El valor de la abscisa del punto que se mueve indefinidamente sobre la gráfica

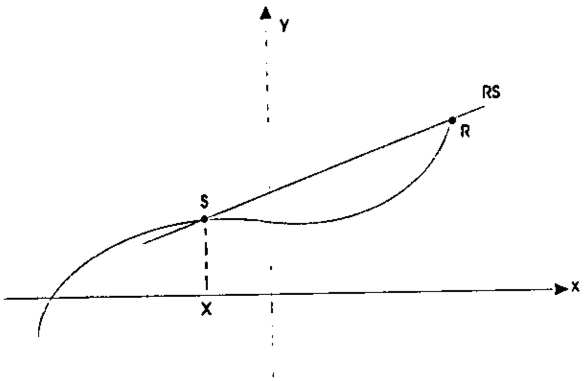
— El valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia y la posición que toma el punto que se mueve sobre la gráfica.

Si representamos con R al punto de tangencia y con S(x,y) al punto que se mueve sobre la gráfica, las variables a las que nos referimos son: "x" y m_{RS}.

Cada valor que se le asigna a "x" establece una y solo una posición sobre la gráfica para el punto S.



Cada posición del punto S establece una y solo una posición para la recta secante RS.



Como cada recta en el plano tiene una pendiente, cada posición de la recta RS establece uno y solamente un valor para m_{RS}.

Sabemos ahora que cada valor de la variable x establece un valor para la variable m_{RS}.

Esta situación la expresaremos de la siguiente forma: "m_{RS} está en función de x"

En una generalidad tenemos cuando dos variables (por ejemplo "z" y "w") están relacionadas de tal forma que, al asignarle un valor a una (digamos z), el valor de la otra (en este caso w) queda determinado, diremos que: "w está en función de z"

Puede ser que en este momento te preguntes: ¿cuál es la importancia de saber encontrar la pendiente de rectas tangentes a gráficas?.

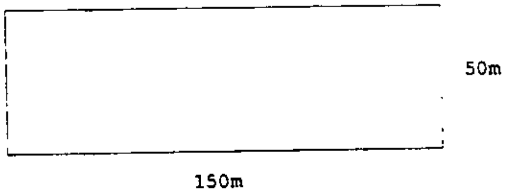
Por el momento el objetivo es entender la idea de aproximación para comprender los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral; pero por curiosidad veremos algunos ejemplos de aplicación.

II. Algunas situaciones que se pueden resolver a través de pendientes de rectas tangentes.

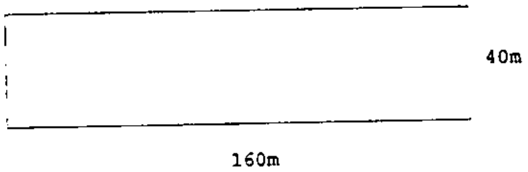
II.1 Problema 1.

El Sr. López va a heredar a sus hijos Pedro, Luis y José un terreno rectangular a cada uno de ellos, la única condición que les pone es que el perímetro sea de 400 m.

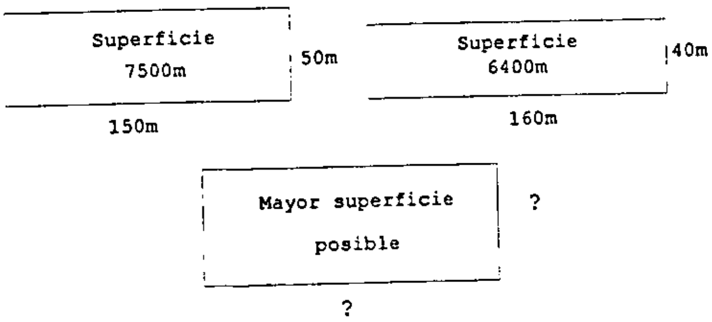
Al preguntarle a Pedro las dimensiones del terreno que desea, éste le contesta largo 150 m y ancho 50 m.



Luis prefiere un terreno de largo 160 m y ancho 40 m.



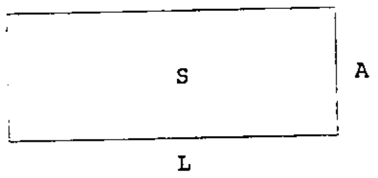
José se da cuenta que el terreno que pide Pedro tiene una superficie de 7500 m^2 y el de Luis 6 400m^2 , por lo que se pregunta: ¿Cuáles son las dimensiones que tengo que pedir para que el terreno tenga la mayor superficie posible?.



¿En este momento consideras que este problema se puede resolver encontrando la pendiente de una recta tangente a una gráfica?

Veamos cómo se puede obtener la respuesta a la pregunta que se hizo José

Representaremos con L, A y S al largo, ancho y superficie de un terreno rectangular.



Sabemos que la superficie del terreno se puede obtener con la fórmula (ecuación) "S = LA".

Como el perimetro debe ser 400 m tenemos:

$$2L + 2A = 400$$
$$2A = 400 - 2L$$
$$A = \frac{400 - 2L}{2}$$
$$A = 200 - L$$

Al sustituir el valor de A en " S = LA " tenemos:

$$S = LA$$
$$S = L(200 - L)$$
$$S = 200L - L^2$$

Tenemos ahora una ecuación con las variables "S y L".

¿Qué utilidad tiene esta ecuación?

Efectivamente, con ella se puede obtener la superficie de un terreno rectangular (el valor de S) de perímetro 400m, conociendo únicamente el largo del mismo (el valor de L).

Ejemplos:

a) Pedro pide un terreno de largo 150 m, por lo que:

Si $L = 150$ tenemos: $S = 200(150) - (150)^2 = 30000 - 22500 = 7500$

La superficie del terreno que pide Pedro es 7500 m^2

b) Luis pide un terreno de largo 160 m, por lo que:

Si $L = 160$ tenemos: $S = 200\ 8\ 160\ ) - (160)^2 = 32000 - 25600 = 6400$

La superficie del terreno que pide Luis es 6400 m^2

c) Si $L = 30$, la superficie del terreno rectangular de perímetro 400 m y largo 30 m es:

$S = 200\ (\ 30\ ) - (\ 30\ )^2 = 6000 - 900 = 5100$

Superficie 5100 m^2

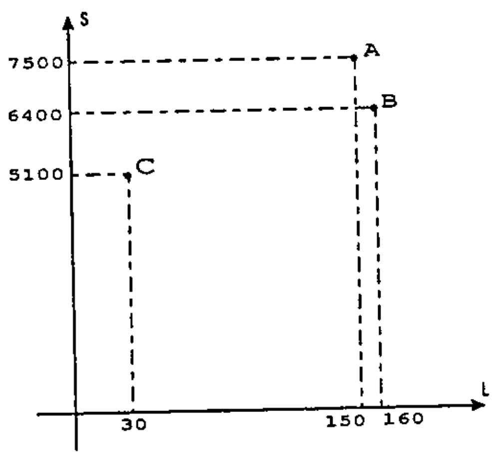
Con estos ejemplos nos damos cuenta de que para cada valor que se le asigna a L, al sustituir éste en la ecuación $S = 200\ L - L^2$ se obtiene un solo valor para S, por lo que, "S está en función de L"

Sabemos ahora que la mayor superficie de todos los terrenos rectangulares con perímetro 400m, es el valor más grande para S en la ecuación $S = 200\ L - L^2$.

¿Cuáles son los puntos del plano que forman la gráfica de la ecuación $S = 200\ L - L^2$?.

Efectivamente, son todos aquellos que tienen por abscisa un posible valor para L y, ordenada el valor que corresponde a S.

Algunos de estos puntos son los que tienen como coordenadas los valores de los ejemplos anteriores: A(150,7500), B(160,6400) y C(30,5100).



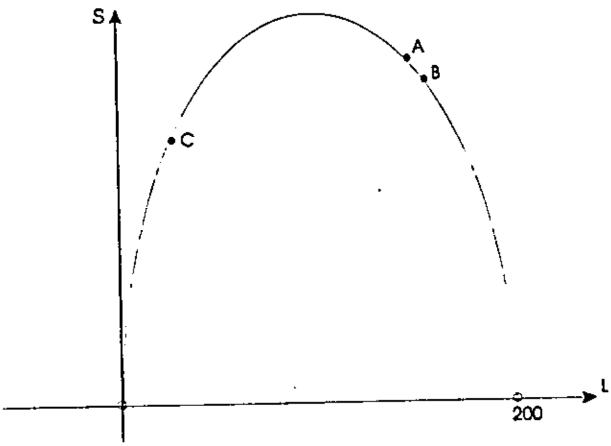
Es claro que no se le puede asignar a L cualquier valor ya que, no existen terrenos rectangulares que tengan perímetro 400m y largo por ejemplo 300m

¿Cuáles son los valores que pueden considerarse para L?

Efectivamente, todos aquellos que son mayores que cero y menores de 200.

¿Cuál es la gráfica de la ecuación $S = 200\,L - L^2$?, considerando que los valores para L son todos aquellos que están entre 0 y 200?.

Efectivamente, considerando que los valores para L son todos aquellos que están entre 0 y 200, es una parte de una parábola como se muestra a continuación.



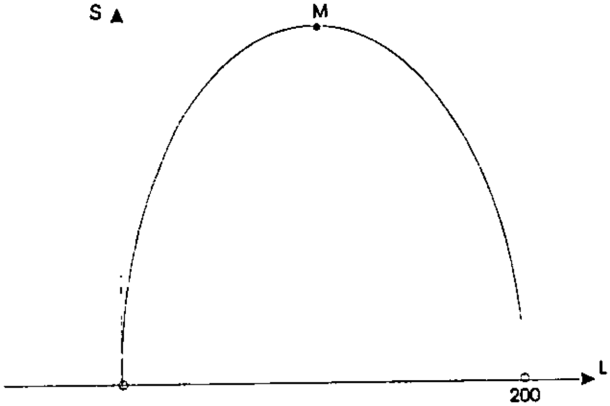
O --- se utiliza para excluir al punto señalado con esta representación.

¿ Cuál es la mayor superficie de los terrenos rectangulares de perímetro 400 m?

Efectivamente, es la ordenada del punto más alto de esta gráfica. Además, la abscisa de este punto es el largo que debe tener el terreno de perímetro 400m y mayor superficie.

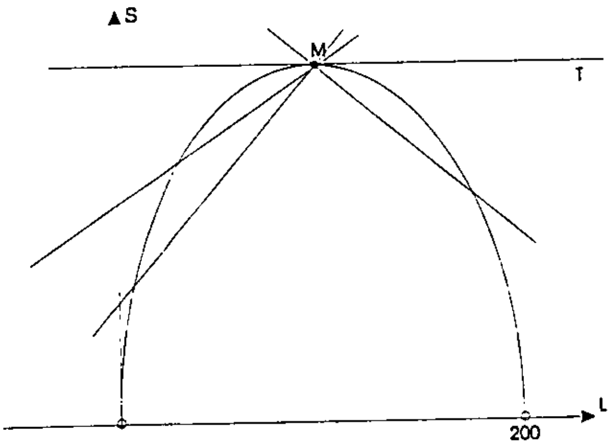
Sabemos ahora que encontrar las coordenadas del punto más alto de esta gráfica, nos permitirá conocer lo que le interesa a José.

Llamaremos M al punto más alto.



¿Cuántas rectas que pasen por M se pueden considerar y cuántas de ellas son tangentes a esta gráfica?.

Trazaremos sólo algunas de ellas.



Efectivamente, una infinidad de rectas pasan por M y sólo una de ellas es tangente a la gráfica, la que representamos con T.

¿Cómo es la recta tangente T?.

Efectivamente, es una recta paralela al eje de las abscisas (en este caso eje L).

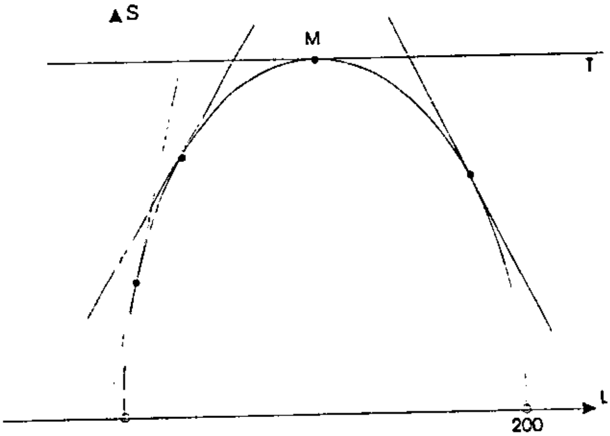
¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta T?.

Efectivamente, como la pendiente de cualquier recta paralela al eje de las abscisas es cero, la pendiente de la recta tangente T es 0.

Sabemos ahora que la pendiente de la recta tangente a esta gráfica en el punto más alto debe ser cero.

¿Cuántas rectas tangentes a esta gráfica se pueden considerar y cuántas de ellas son paralelas al eje de las abscisas?.

Trazaremos sólo algunas de ellas.



Efectivamente, hay una infinidad y sólo la recta tangente T es paralela al eje de las abscisas.

Sabemos ahora que, en esta gráfica sólo la recta tangente en el punto más alto (la recta T) tiene pendiente cero.

¿Cómo se pueden obtener las dimensiones del terreno rectangular con perímetro 400m y mayor superficie?

Efectivamente, encontrando las coordenadas del punto de la gráfica cuya recta tangente tiene pendiente cero.

Con esto podemos damos cuenta que hay una relación estrecha con el problema y el hecho de encontrar pendientes de rectas tangentes.

A diferencia de los casos anteriores en los que sabemos las coordenadas del punto de tangencia y nos piden encontrar la pendiente la recta tangente, ahora sabemos el valor de la pendiente de la recta tangente, en este caso "0" y, queremos encontrar las coordenadas del punto de tangencia.

Sabemos ahora cómo se puede dar solución al problema que se plantea José, por medio de la pendiente de una recta tangente a una gráfica.

Dejaremos pendiente la solución al problema hasta familiarizarnos en el manejo de pendientes de rectas tangentes.

Lo que se pretende en este momento es, comprender el método de aproximación para establecer el concepto de límite de una función, básico para el estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

Veremos ahora otro problema relacionado con la pendiente de recta tangente a una gráfica.

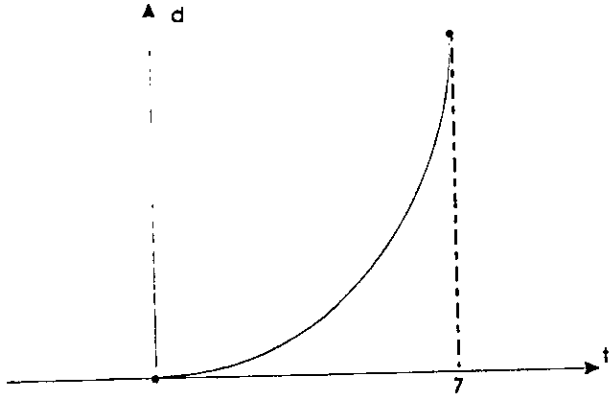
II. 2 Problema 2.

Se tira una pelota desde lo alto de un edificio, la cual llega al piso 7 segundos mas tarde. Considerando el hecho que la distancia "d" metros que recorre la pelota al cabo de un tiempo "t" segundos se obtiene por la ecuación $d = 5t^2$, ¿cuál es la velocidad a la que viaja la pelota al cabo de 4 segundos de que se deja caer?

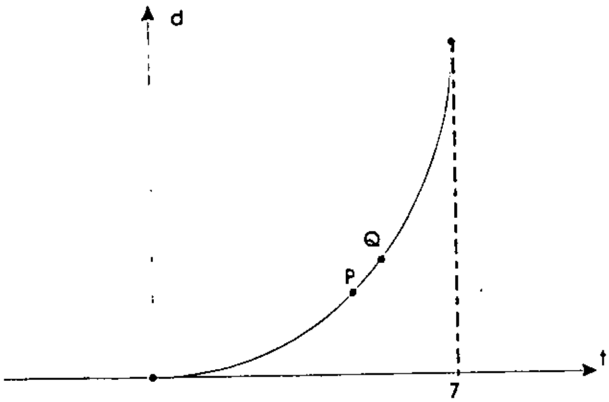
En primer lugar vamos a considerar la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$.

¿Cuáles son los valores que se pueden considerar para la variable "t"?

Efectivamente, como la pelota tarda 7 segundos en llegar al piso desde que se deja caer, los valores que se pueden considerar para t son todos los que están a partir del 0 y hasta el 7. Estos valores forman el intervalo [0 , 7].



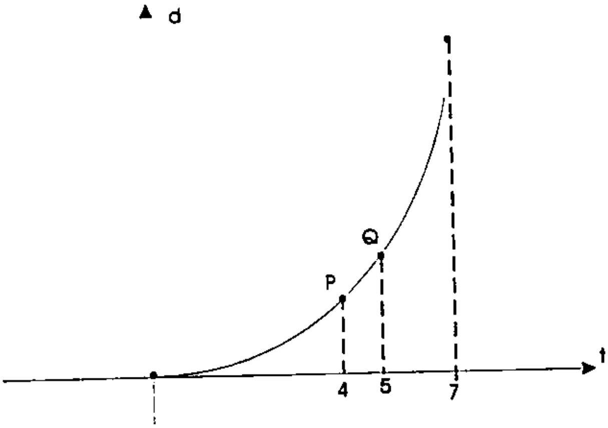
Vamos ahora a considerar dos puntos de esta gráfica que llamaremos P y Q.



¿Cuáles son las coordenadas de estos puntos?.

Efectivamente, si queremos establecer la posición de estos puntos sobre ésta gráfica, sólo tenemos que considerar dos valores que estén en el intervalo [0 , 7] y considerar estos como las abscisas de los puntos P y Q.

Consideremos que la abscisa del punto P es 4 (tiempo en el cual se quiere saber la velocidad de la pelota), y la abscisa del punto Q un valor cualquiera del intervalo como por ejemplo 5.



¿Cómo se obtiene el valor de la ordenada de estos puntos?

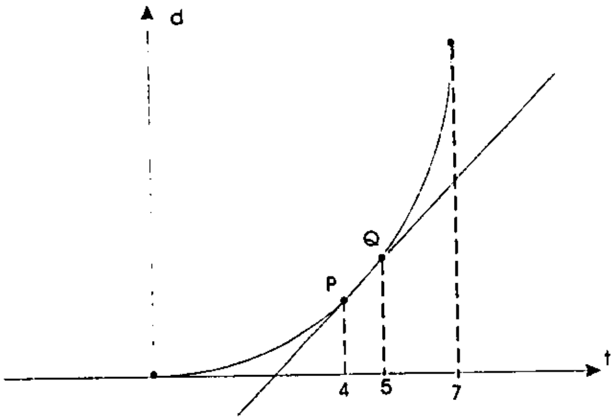
Efectivamente, es el valor correspondiente a la variable d en la ecuación $d = 5t^2$, al considerar que el valor de la variable "t" es 4 en un caso y 5 en el otro.

Si $t=4$ tenemos $d=5(4)^2=5(16)=80$

Si $t=5$ tenemos $d=5(5)^2=5(25)=125$

Sabemos ahora que las coordenadas de estos puntos son: P(4,80) y Q(5,125)

¿Cómo es la recta que pasa por los puntos P y Q?



Efectivamente, es una recta secante a la gráfica

¿Cuál es el valor de la pendiente de esta recta?.

Efectivamente, la pendiente de la recta PQ, la cual representamos como m_{PQ} es:

$$m_{PQ}=\frac{\text{resta de ordenadas de los puntos P y Q}}{\text{resta de abscisas de los puntos P y Q}}=\frac{125-80}{5-4}=\frac{45}{1}=45$$

En múltiples ocasiones en nuestra vida cotidiana hemos mencionado o escuchado "la velocidad promedio".

¿Qué entendemos cuando escuchamos por ejemplo: "La velocidad promedio es 75 km/hr?

Efectivamente, se considera que se está hablando de un objeto en movimiento para el cual, "75 km/hr" es la mejor aproximación que existe en lo general, respecto a la velocidad que lleva el objeto en todo momento de su recorrido o en una parte, según sea el caso que se está comentando.

¿Cuál es la velocidad promedio de un automóvil que mantiene una velocidad constante de 20 km/hr en un recorrido?.

Efectivamente, la velocidad promedio del automóvil en todo su recorrido o solamente en una parte es de 20 km/hr.

Solamente en los casos como éste, en los que la velocidad es constante, la velocidad promedio y la velocidad en todo momento del recorrido es la misma.

En un automóvil hicimos un viaje de México a Acapulco. Recorrimos 360 km en 4 horas; tardamos 2 horas con 30 minutos en llegar a Iguala, el cual se encuentra a 180 km desde que se inicia el viaje.

¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil en el recorrido completo?

¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil en el recorrido de México hasta Iguala?

¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil en el recorrido de Iguala hasta Acapulco?

Efectivamente, sabemos que la velocidad promedio de un objeto en movimiento se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{\text{distancia que se recorre}}{\text{tiempo que se tarda en recorrer la distancia}}$$

Por lo que:

La velocidad promedio de todo el recorrido, la cual representamos como VP_{MA} es:

$$VP_{MA} = \frac{360}{4} = 90 \text{ km/hr}$$

La velocidad promedio en el recorrido de México a Iguala, la cual representamos VP_{MI} es:

$$VP_{MI} = \frac{180}{2.5} = 72 \text{ km/hr}$$

La velocidad promedio en el recorrido de Iguala hasta Acapulco es:

$$VP_{IA} = \frac{180}{1.5} = 120 \text{ km/hr}$$

¿Consideras que 90 km/hr es la velocidad que lleva el automóvil en todo momento del recorrido?

Efectivamente, es claro que la respuesta es no, ya que, en un recorrido normal es imposible mantener la misma velocidad en todo momento.

¿Por qué las velocidades promedio que se tiene desde México hasta Iguala no es la misma que de Iguala hasta Acapulco?

Efectivamente, esto se debe a que, el tiempo que se tarda en recorrer distancias iguales no es el mismo.

En fin, se puede si así se quiere, plantear diversas preguntas relacionadas con la velocidad promedio. Por el momento, para ver la forma en que se da solución al problema, sólo se pretende entender de la mejor forma posible lo siguiente:

La velocidad promedio de un objeto en movimiento es un valor aproximado a la velocidad que lleva el objeto en cada momento del recorrido, y más aún, es la mejor aproximación.

Veremos un ejemplo de otra índole con un número finito de datos para una mejor comprensión de lo establecido anteriormente.

Pedro Pérez está cursando el 5° semestre de bachillerato, en la asignatura de Biología le aplicaron 8 exámenes obteniendo las siguientes calificaciones.

Examen N° : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8

Calificación: 7 , 9 , 6 , 4 , 10 , 10 , 8 , 10

En este caso no podemos hablar de velocidad promedio, pero si de una cuestión similar como lo es el promedio.

¿Cuál es el promedio de calificación que tiene Pedro en los exámenes que presentó?

Efectivamente:

$$\text{Promedio} = \frac{\text{suma de calificaciones}}{\text{número de exámenes}} = \frac{7+9+6+4+10+10+8+10}{8} = 8$$

Sabemos ahora que 8 es la calificación promedio de los ocho exámenes que presentó Pedro en la asignatura de Biologia.

También sabemos que 8 no es la calificación en cada uno de los exámenes.

Luis y José, compañeros de Pedro, conocen solamente la calificación promedio.

Al preguntar a Luis y José, qué calificación consideran que obtuvo Pedro en los exámenes, Luis contesta la calificación promedio "8", José dice una calificación diferente como por ejemplo 7.5.

Es claro que ambos dan una respuesta general, por lo que , Luis considera que 8 es la calificación que obtuvo pedro en cada uno de los exámenes y José considera que es 7.5.

Sabemos que ambos dan una respuesta errónea en lo general ya que, no es 8 ni 7.5 la calificación de Pedro en todos y cada uno de los exámenes. Sin embargo, en lo particular puede ser que ésta coincida.

¿Cuál es la mejor respuesta en lo general?

Efectivamente, 8 es el valor más aproximado en lo general a la calificación que obtuvo Pedro en cada uno de los exámenes.

Veamos cómo justificamos lo anterior.

Examen N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Calificación real	7	9	6	4	10	10	8	10
Calificación propuesta por Luis	8	8	8	8	8	8	8	8
Error de estimación	1	1	2	4	2	2	0	2
Calificación propuesta por José	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
Error de estimación	.5	1.5	1.5	3.5	2.5	2.5	.5	2.5

Si comparamos los errores de estimación en cada uno de los casos nos damos cuenta que: En 5 de los 8 casos, la respuesta que da Luis es más aproximada a la calificación real.

Antes de regresar a nuestro problema, vamos a familiarizarnos con la velocidad promedio de la pelota que se deja caer desde lo alto del edificio.

Con la ecuación $d = 5t^2$ se puede saber la distancia que recorre la pelota, desde que se deja caer hasta que transcurre cierto tiempo.

Ejemplos.

1) si $t = 1$ tenemos $d = 5(1)^2 = 5$

Al cabo de 1 segundo la pelota recorre 5 metros

2) Si $t = 2$ tenemos $d = 5(2)^2 = 5(4) = 20$

Al cabo de 2 segundos la pelota recorre 20 metros

3) Si $t = 3.5$ tenemos $d = 5(3.5)^2 = 5(12.25) = 61.25$

Al cabo de 3.5 segundos la pelota recorre 61.25 metros.

¿Cómo se obtiene la altura del edificio?

Efectivamente, considerando que el valor de t es 7.

Si $t = 7$ tenemos $d = 5\,(7)^2 = 5\,(49) = 245$

La altura del edificio es 245 metros

Un modelo de como va descendiendo la pelota es el siguiente.

t segundos	pelota	d metros
0	Ø	0
1	Ø	5
2	Ø	20
3	Ø	45
4	Ø	80
5	Ø	125
6	Ø	180
7	Ø	245

¿Cómo se obtiene la distancia que recorre la pelota en un lapso de tiempo, el cual no inicia en el momento que se deja caer?

Efectivamente, la distancia que recorre por ejemplo a partir del segundo 1 y hasta el segundo 2, es la diferencia entre la distancia que recorre al cabo de 2 segundos y la que recorre al cabo 1 segundo.

Como la distancia que recorre al cabo de un segundo es 5 metros y la que recorre al cabo de 2 segundos es 20 metros, la distancia que recorre a partir del segundo 1 y hasta el segundo 2 es: $20 - 5 = 15$ metros.

En la ecuación $d = 5t^2$, para cada valor que se le asigne a t hay un único valor que corresponde a d, por lo que: "d está en función de t"

Es claro que, la distancia que recorre la pelota en un mismo tiempo aumenta conforme va cayendo ya que:

En el 1er segundo recorre 5 m.
En el 2° segundo recorre 15 m.
En el 3er segundo recorre 25 m.
En el 4° segundo recorre 35 m
Etc. Etc.

Esta situación nos permite afirmar que la velocidad de la pelota aumenta conforme va cayendo.

El tipo de movimiento de la pelota es uniformemente acelerado ya que, la distancia que recorre la pelota en cada segundo aumenta cada vez 10 metros.

Cuando se tenga una función, por ejemplo "y en función de x", al valor de "y" para cada valor de "x" lo representaremos "y(x)" y lo leeremos "y de x".

Ejemplo:

Como "d esta en función de t":

d (1) representa el valor para d cuando t vale 1

d (3) representa el valor que corresponde a d cuando t vale 3

Esta representación nos permite establecer que "d está en función de t", al escribir d(t).

Es claro que para obtener el valor real de d (1) y d (3), solo tenemos que aplicar la regla

$d(t) = 5t^2$, la cual llamaremos " regla de correspondencia de la función".

$d(1) = 5(1)^2 = 5$

$d(3) = 5(3)^2 = 45$

¿Cómo se obtiene la velocidad promedio de un objeto en movimiento en un lapso de tiempo?

Efectivamente, sabemos que esta se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado en recorrer la distancia}}$$

Ejemplos:

a) La velocidad promedio de la pelota en el lapso de tiempo que va del segundo 1 al segundo 4, el cual representamos de la forma " [1 ; 4] " es:

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{d(4)-d(1)}{4-1} = \frac{80-5}{4-1} = \frac{75}{3} = 25 \text{ m/seg}$$

b) La velocidad promedio de la pelota en el lapso de tiempo [2 ; 7] es :

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{d(7)-d(2)}{7-2} = \frac{245-20}{7-2} = \frac{225}{5} = 45 \text{ m / seg}$$

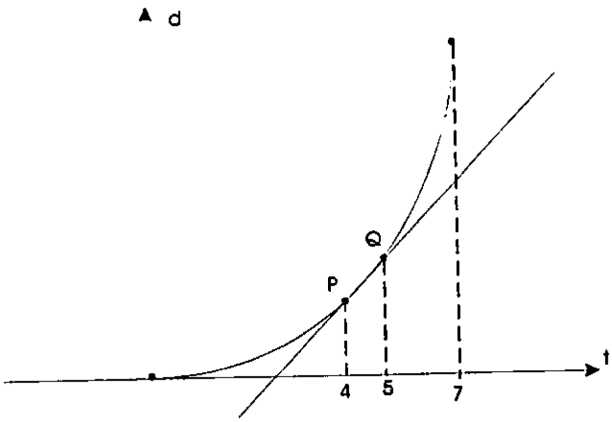
¿Cuál es la velocidad promedio en todo el recorrido de la pelota?

Efectivamente, el lapso de tiempo que debemos considerar es [0 ; 7], por lo que:

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{d(7)-d(0)}{7-0} = \frac{245-0}{7-0} = \frac{245}{7} = 35 \text{ m / seg}$$

Regresemos ahora a nuestro problema.

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(4,80) y Q(5,125)?.



Efectivamente, la pendiente de esta recta es:

$$m_{PQ} = \frac{\text{resta de ordenadas de los puntos P y Q}}{\text{resta de abscisas de los puntos P y Q}} = \frac{125-80}{5-4} = \frac{45}{1} = 45$$

¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en el lapso de tiempo [4 ; 5]?.

Efectivamente, la velocidad promedio de la pelota en este recorrido, la cual representaremos de la forma $VP_{[4;5]}$ es:

$$VP_{[4;5]} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado en recorrer la distancia}} = \frac{d(5)-d(4)}{5-4} = \frac{125-80}{1} = 45$$
m/seg

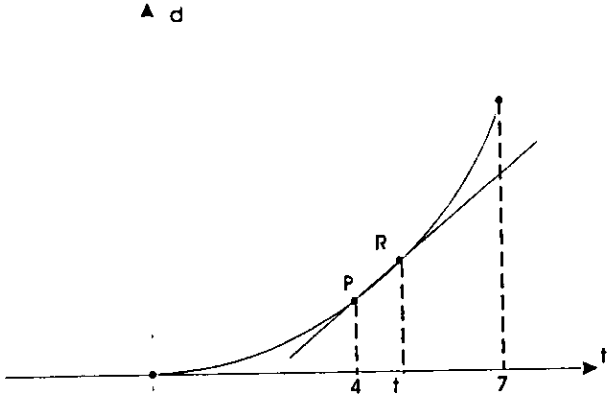
¿Cómo son los valores de m_{PQ} y $VP_{[4;5]}$?.

Efectivamente, son iguales.

Sabemos ahora que: La velocidad promedio de la pelota en el lapso de tiempo [4 ; 5] es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(4,80) y Q(5,125).

Es claro que esta situación se repite para cualquier lapso de tiempo que inicia en el segundo 4 y termina en un valor que se le asigne a la variable t, por lo que:

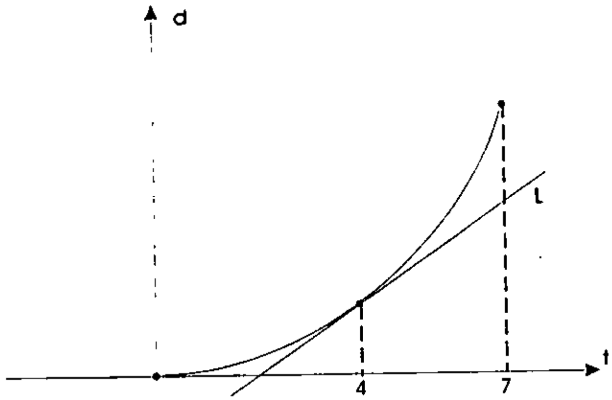
El valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(4,80) y R(t,d) de la gráfica con ecuación $d = 5t^2$, es igual a la velocidad promedio de la pelota en el lapso [4 ; t], la cual se representa de la forma $VP_{[4;t]}$.



Sabemos ahora que: $VP_{[4;t]} = m_{PR}$

¿Cómo se obtiene la pendiente de la recta L, tangente a la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$ en el punto P(4,80)?.

En este caso, el punto de tangencia tiene por abscisa el valor en el cual se quiere saber la velocidad de la pelota.



Efectivamente, considerando primeramente que el punto R(t,d) se mueva sobre esta gráfica de tal forma que, las posiciones sucesivas que toma(R_1, R_2, R_3, etc.) hacen que se aproxime infinitamente al punto P(4,80).

¿Cómo se logra lo anterior?.

Efectivamente, asignando valores a la variable "t" para que se aproxime infinitamente a 4, los cuales pueden ser si así lo queremos:

t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ——> 4

Sabemos que al asignar estos valores a la variable "t", la recta PR tiene diferentes posiciones de tal forma que se aproxima infinitamente a la posición de la recta tangente L. Por lo que, el valor de la pendiente de la recta secante PR se aproxima infinitamente a la pendiente de la recta tangente L.

Si t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ——> 4

Entonces m_{PR} : m_{PR_1} , m_{PR_2} , m_{PR_3} , ... ——> pendiente de L

También sabemos que $m_{PR_1} = VP_{[4;5]}$, $m_{PR_2} = VP_{[4;4.1]}$, $m_{PR_3} = VP_{[4;4.01]}$ etc., por lo que:

Si t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ——> 4

Entonces $VP_{[4;t]}$: $VP_{[4;5]}$, $VP_{[4;4.1]}$, $VP_{[4;4.01]}$, ...——> pendiente de L

Al considerar los valores establecidos para la variable "t", el lapso de tiempo [4 ; t] se va modificando de la siguiente forma:

[4 ; 5] , [4 ; 4.1] , [4 ; 4.01] , [4 ; 4.001] , [4 ; 4.0001] , ...

Como el tiempo para que se desplace la pelota en el lapso [4 ; t] es cada vez más pequeño cuando el valor de "t" se aproxima cada vez más a 4, la posibilidad para que varíe su velocidad la pelota se reduce cada vez más, por lo que, ésta se acerca cada vez más a ser constante en el lapso de tiempo que se está considerando, y por tanto, la velocidad promedio en el lapso [4 ; t] se acerca cada vez más a la velocidad que lleva la pelota en cualquier momento de este lapso, en particular al segundo 4. Por lo que:

Si t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ———> 4

Entonces:
$VP_{[4;t]}$:$VP_{[4;5]}$, $VP_{[4;4.1]}$, $VP_{[4;4.01]}$, ...———>velocidad de la pelota en el segundo 4

Esta situación conjuntamente con la anterior nos permite establecer lo siguiente:

Si t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ———> 4

Entonces:
$VP_{[4;t]}$:$VP_{[4;5]}$, $VP_{[4;4.1]}$, $VP_{[4;4.01]}$, ...———>velocidad de la pelota en el segundo 4

$VP_{[4;t]}$:$VP_{[4;5]}$, $VP_{[4;4.1]}$, $VP_{[4;4.01]}$, ...———>pendiente de L

Sabemos ahora que: La velocidad de la pelota en el segundo 4, es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$, en el punto P(4,80)?.

¿Cómo se obtiene la velocidad de la pelota en el segundo 4?

Efectivamente, encontrando la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$, en el punto P(4,80).

Como ya sabemos obtener pendientes de rectas tangentes a una gráfica, dejaremos como un ejercicio encontrar la solución al problema que se planteó.

Es claro que la relación que se obtuvo para t = 4, se repite en cualquier valor que se considere para t dentro del intervalo [0 , 7]. Esto es:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$ en el punto P(t,d), es igual a la velocidad que lleva la pelota al cabo de t segundos desde que se deja caer. Sabemos ahora que la velocidad de la pelota en un tiempo cualquiera t, es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $d = 5t^2$, en el punto P(t,d).

Es claro que esta situación se repite para cualquier objeto en movimiento, por lo que:

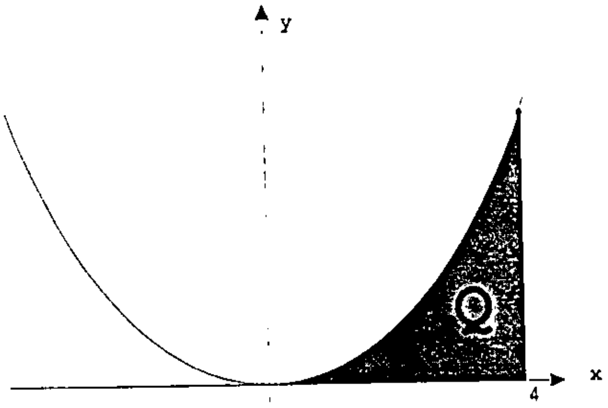
La velocidad de un objeto en movimiento en un tiempo t del recorrido, es igual al valor de la pendiente de la recta tangente en el punto con abscisa t, a la gráfica de la ecuación que establece la distancia que va recorriendo el objeto.

Pasaremos ahora a otro tipo de problemas. Utilizaremos la idea de aproximación para dar respuesta a los mismos.

III. Cálculo por aproximaciones de áreas de regiones establecidas por una gráfica.

III.1 Problema 1.

Hallar la superficie de la región Q comprendida por la gráfica de la ecuación $y = x^2$, el eje de las abscisas y la recta perpendicular a este eje que pasa por 4.

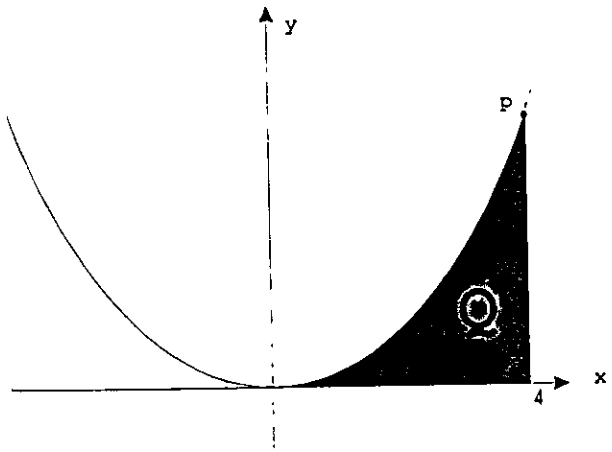


Es claro que la figura que se presenta no corresponde a una de nuestro repertorio usual (no es un triángulo, no es un rectángulo, no es un cuadrado, etc.) de los cuales sabemos cómo encontrar la superficie (área).

Para utilizar nuestra idea de aproximación y encontrar la superficie de la región, construiremos regiones de nuestro repertorio cuyas superficies se aproximen cada vez más a la superficie de la región Q.

Llamaremos P al punto de intersección de la recta perpendicular al eje de las abscisas y la gráfica de la ecuación $y = x^2$

Es claro que la ecuación $y = x^2$ representa una función, la cual tiene regla de correspondencia " $y(x) = x^2$ ".



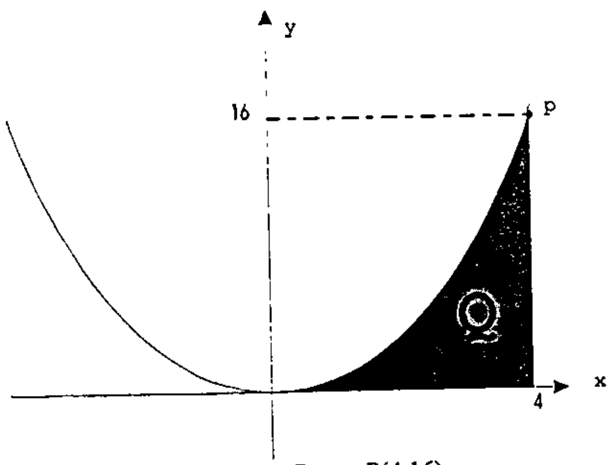
¿Cuáles son las coordenadas del punto P?

Efectivamente:

a) Por estar sobre la recta perpendicular al eje de las abscisas en el 4, la abscisa del punto P es 4.

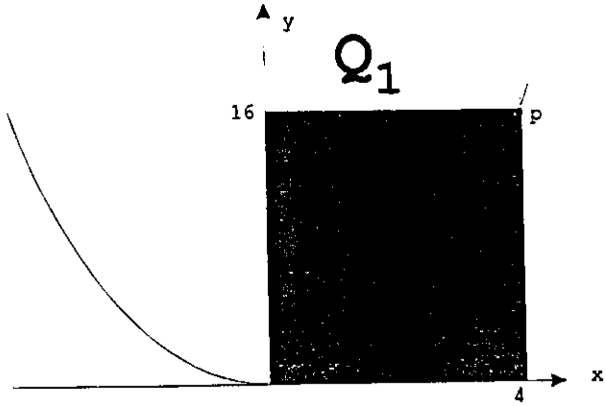
b) Como la abscisa del punto P es 4 y está sobre la gráfica de la ecuación $y = x^2$, la ordenada es:

$$y(4) = 4^2 = 16.$$



Sabemos ahora que las coordenadas del punto P son: P(4,16)

Desde el punto P vamos a trazar una recta perpendicular al eje de las ordenadas para construir una región Q_1.



¿Qué tipo de región es Q_1 ?

Efectivamente, es un rectángulo cuya superficie se sabe como obtenerla.

¿Cuál es la superficie de este rectángulo?

Efectivamente, sabemos que la superficie(área) de un rectángulo es el producto que se obtiene al multiplicar el largo y ancho, por lo que:

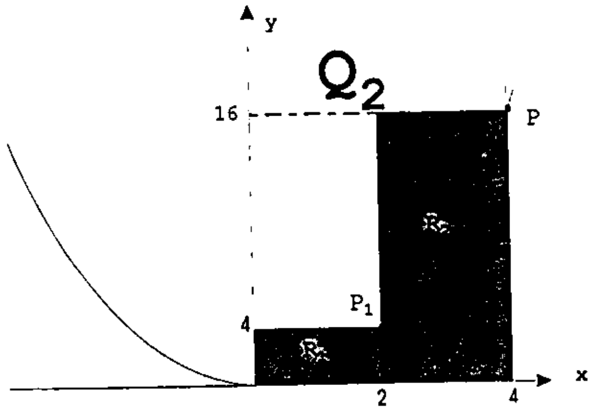
$$\text{Superficie } Q_1 = 4\ (\ 16\ ) = 64\ U^2$$

Es claro que la superficie de la región Q_1 no es la superficie de la región Q ya que, Q es sólo una parte de Q_1.

Construyamos ahora otra región Q_2 de tal forma que, la superficie de Q_2 sea una mejor aproximación a la superficie de Q.

¿Qué podemos hacer para construir la región Q_2?

Efectivamente, se divide al segmento que va de 0 a 4 en el eje de las abscisas en dos partes iguales, desde el punto de división se traza una perpendicular al eje de las abscisas hasta la gráfica, se construyen dos rectángulos que llamaremos R_1 y R_2 como se muestra a continuación.



La región Q_2 está formada por los rectángulos R_1 y R_2.

¿Cuáles son las coordenadas de P_1?.

Efectivamente, siguiendo un razonamiento similar al anterior las coordenadas de este punto son: P_1 (2 , 4).

Como el segmento de longitud 4 se divide en dos partes iguales, la base de cada uno de los rectángulos es 2.

Las alturas de los rectángulos R_1 y R_2 son "y(2), y(4)"respectivamente.

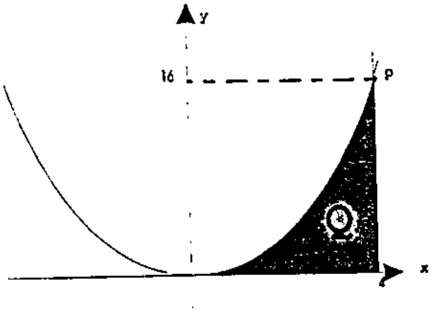
$y(2) = 2^2 = 4 \quad y(4) = 4^2 = 16$
$y(4) = 4^2 = 16$

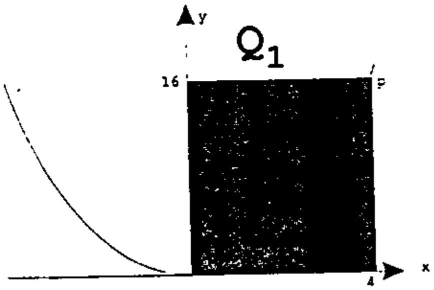
La superficie(área) de la región Q_2 es:

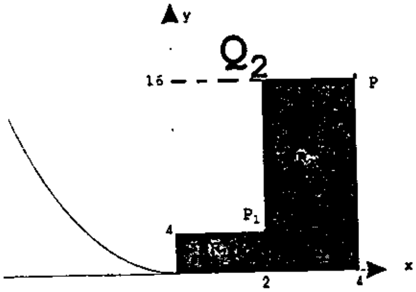
$\text{Sup } Q_2 = \text{Sup } R_1 + \text{Sup } R_2 = 2\,(4) + 2\,(16) = 40\ U^2$

Es claro que la superficie de Q_2 no es la superficie de Q ya que, "Q es sólo una parte de Q_2".

También es claro que: 40 U^2 (superficie de Q_2), es una mejor aproximación a la superficie de Q ya que, "Q es una parte de Q_2 y Q_2 es una parte de Q_1".



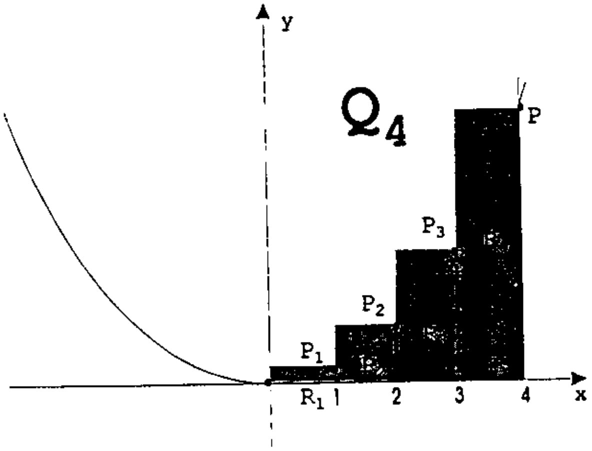




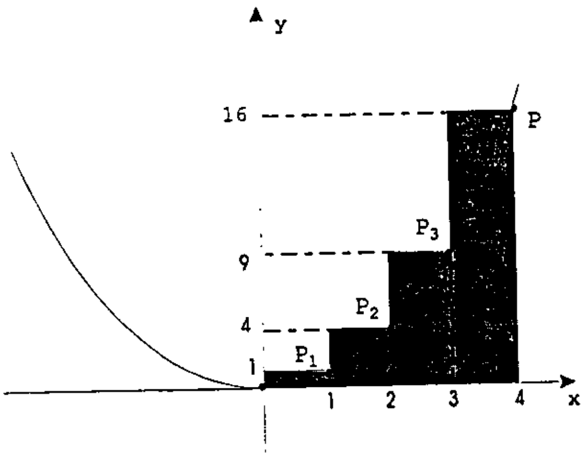
¿Qué hacemos para obtener una mejor aproximación a la superficie de la región Q?

Efectivamente, dividir el segmento que va de cero a cuatro en el eje de las abscisas en 4 partes iguales y construir cuatro rectángulos(R_1, R_2, R_3 y R_4) de la misma forma que se hizo anteriormente.

Llamaremos Q_4 a la región formada por estos rectángulos.



¿Cuáles son las coordenadas de P_1, P_2 y P_3 ?
Efectivamente, las coordenadas de estos puntos son: $P_1(1,1)$, $P_2(2,4)$ y $P_3(3,9)$.



Es claro que la longitud de la base de cada uno de los rectángulos es 1 y las alturas son: 1, 4, 9 y 16 para R_1, R_2, R_3 y R_4 respectivamente.

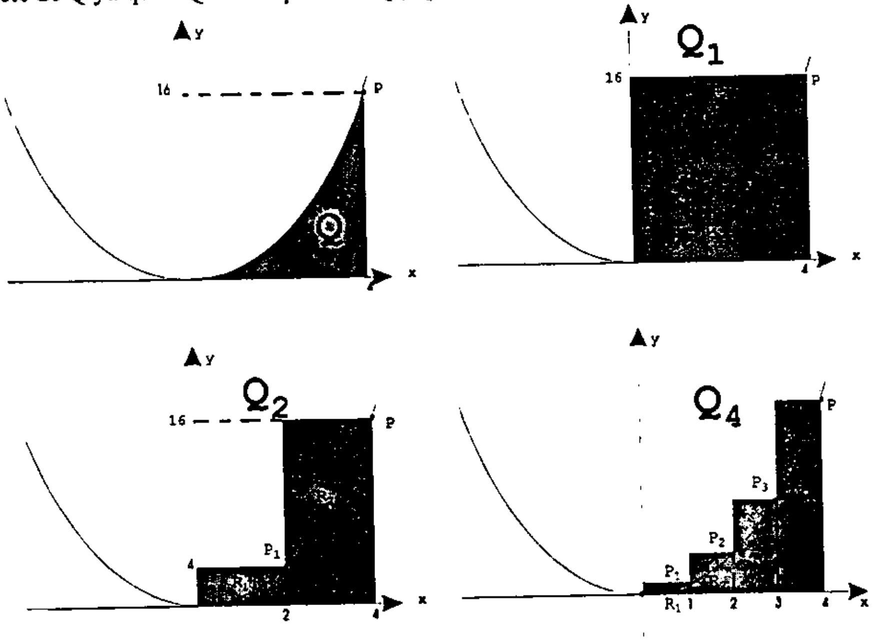
Tenemos ahora que la superficie de la región Q_4 es:

$$\begin{aligned} \text{Sup } Q_4 &= \text{Sup } R_1 + \text{Sup } R_2 + \text{Sup } R_3 + \text{Sup } R_4 \\ &= 1(1) + 1(4) + 1(9) + 1(16) \\ &= 1 + 5 + 9 + 16 \\ &= 31\ U^2 \end{aligned}$$

¿La superficie de Q_4 es igual a la de la región Q?.

Efectivamente, no son iguales ya que, Q es una parte de Q_4.

Es claro que $31U^2$ (superficie de Q_4) es hasta el momento la mejor aproximación a la superficie de Q ya que: Q es una parte de Q_4, Q_4 es una parte de Q_2 y Q_2 es una parte de Q_1.



Consideremos ahora dos variables que representaremos de la siguiente forma:

n – Número de partes iguales en que se divide el segmento que va de 0 a 4 en el eje de las abscisas.

Sn – Área ó superficie de la región Qn, la cual forma con los n rectángulos que se construyen.

Es claro que Sn esta en función de n ya que, al asignarle un valor a n hay un único valor que corresponde para Sn.

Representemos los valores de n que se han considerado hasta este momento y los correspondientes para Sn que se han obtenido.

n: 1 , 2 , 4
Sn: 64 , 40 , 31

Hemos visto que, al asignarle valores a n cada vez más grandes, los correspondientes para Sn se aproximan cada vez más a la superficie de la región Q.

¿Qué sucederá si le asignamos indefinidamente valores enteros a n cada vez más grandes?

Efectivamente, la sucesión de valores correspondientes para Sn se aproximará indefinidamente a la superficie de la región Q, esto es:

Si n : 1 , 2 , 4 , ... ——> indefinidamente grande

Entonces Sn: 64 , 40 , 31 ,................ ——> Superficie región Q.

¿Cuál es la superficie (área) de la región Q?

Efectivamente, el valor al cual se aproxima infinitamente la sucesión de valores correspondientes para Sn.

¿Cómo se obtiene este valor (superficie de la región Q)?

Efectivamente, asignándole valores cada vez más grandes a la variable "n" y encontrando los valores correspondientes para la variable Sn.

¿Cuántos valores tenemos que asignarle a la variable n?

Efectivamente, los que sean necesarios para determinar el valor al cual se aproxima Sn, al continuar indefinidamente asignándole valores a la variable n.

¿Los valores considerados para la variable "n" hasta este momento, permiten establecer el valor al cual se aproxima indefinidamente la variable Sn?.

Efectivamente, son insuficientes estos valores para determinar lo que se quiere. Esto es:

Si n : 1 , 2 , 4 , ... ——> indefinidamente grande

Entonces Sn: 64 , 40 , 30 , ... ——> ?

Tenemos entonces que seguir asignándole valores a "n" hasta que se puede establecer el valor al cual se aproxima la sucesión de valores correspondientes para Sn, al continuar indefinidamente asignándole valores a n.

¿Qué valores es conveniente asignarle a n?

Efectivamente, valores que lleven una secuencia de tal forma que al continuar indefinidamente se haga infinitamente grande.

¿Cuáles pueden ser estos?

Efectivamente, si continuamos la secuencia que presentan los que se han considerado hasta este momento, podemos asignarle a n los valores: 8 , 16 , 32 , 64 , ...

Es claro que si continuamos indefinidamente asignándole valores a "n" siguiendo la secuencia, el valor para n será indefinidamente grande. Este hecho se expresa diciendo "n tiende al infinito" y se representa "$n \longrightarrow \infty$".

¿Estos son los únicos valores que se pueden considerar para n?.

Efectivamente, no son los únicos valores; podemos continuar con otra secuencia como por ejemplo:

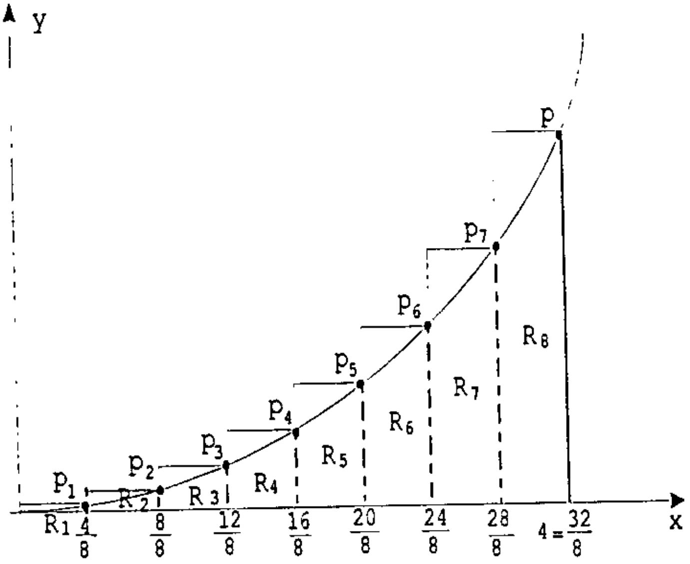
a) 1 , 2 , 4 , 100 , 1000 , 10000 , ...

b) 1 , 2 , 4 , 10^2 , 100^2 , 1000^2, ...

Encontraremos ahora el valor de Sn cuando n = 8.

Al considerar n = 8, siguiendo el procedimiento para encontrar el valor correspondiente de Sn tenemos:

Dividiremos al segmento que va de cero a cuatro en el eje de las abscisas de la región Q en 8 partes iguales para construir 8 rectángulos (R_1 , R_2 , R_3 , R_4, R_5 , R_6 , R_7 y R_8) de la misma forma que lo hicimos antes.



Tenemos ahora una región que llamaremos Q_8 formada por los rectángulos R_1 , R_2 , R_3 , R_4, R_5, R_6 , R_7 y R_8.

¿ Cuáles son las coordenadas de P_1 , P_2 , P_3 , ... P_7 , P?

Efectivamente, como los puntos pertenecen a la gráfica de la ecuación $y = x^2$, las coordenadas de estos al dividir el segmento que va de cero a cuatro en el eje de las abscisas en 8 partes iguales son:

P_1 $(4/8 , (4/8)^2)$, P_2 $(8/8 , (8/8)^2)$, P_3 $(12/8 , (12/8)^2)$, P_4 $(16/8 , (16/8)^2)$, P_5 $(20/8 , (20/8)^2)$, P_6 $(24/8 , (24/8)^2)$, P_7 $(28/8 , (28/8)^2)$, P $(32/8 , (32/8)^2)$.

Es claro que la base de cada uno de los rectángulos es "4 / 8 " y la altura el valòr de la ordenada del punto P_1 , P_2 , P_3 , ... P_7 y P respectivamente, por lo que:

Sup $R_1 = (4/8) (4/8)^2 = (1/2) (1/2)^2 = (1/2) (1/4) = 1/8\ U^2$
Sup $R_2 = (4/8) (8/8)^2 = (1/2) (1)^2 = (1/2) (1) = 1/2\ U^2$
Sup $R_3 = (4/8) (12/8)^2 = (1/2) (3/2)^2 = (1/2) (9/4) = 9/8\ U^2$
Sup $R_4 = (4/8) (16/8)^2 = (1/2) (2)^2 = (1/2) (4) = 2\ U^2$
Sup $R_5 = (4/8) (20/8)^2 = (1/2) (5/2)^2 = (1/2) (25/4) = 25/8\ U^2$
Sup $R_6 = (4/8) (24/8)^2 = (1/2) (3)^2 = (1/2) (9) = 9/2\ U^2$
Sup $R_7 = (4/8) (28/8)^2 = (1/2) (7/2)^2 = (1/2) (49/4) = 49/8\ U^2$
Sup $R_8 = (4/8) (32/8)^2 = (1/2) (4)^2 = (1/2) (16) = 8\ U^2$

¿Cuál es el área (superficie) de la región Q_8?

Efectivamente, la superficie de esta región es:

$S_8 = \text{Sup } Q_8 = \text{Sup } R_1 + \text{Sup } R_2 + \ldots. + \text{Sup } R_7 + \text{Supr } R_8$

$= 1/8 + 1/2 + 9/8 + 2 + 25/8 + 9/2 + 49/8 + 8$

$= 84/8 + 10/2 + 10$

$= 10.5 + 5 + 10 = 25.5 \text{ U}^2$

Al igual que en los casos anteriores tenemos que:

25.5 no es la superficie de la región Q, es el valor más aproximado que se tiene hasta este momento a la superficie de la región Q.

Representemos los valores para n y Sn que tenemos hasta este momento.

Si n : 1 , 2 , 4 , 8
entonces Sn: 64 , 40 , 31 , 25.5

Tenemos ya las condiciones para determinar el valor al cual se aproxima indefinidamente Sn, al continuar asignándole valores a "n" siguiendo la secuencia .

Efectivamente, hasta este momento no tenemos los elementos suficientes para determinar cual es el valor al que se aproxima infinitamente Sn.

¿Qué podemos hacer para determinar el valor que andamos buscando?

Efectivamente, tenemos varias alternativas.

a) Continuar asignándole valores a "n" en el orden establecido en la secuencia, los cuales serán: 16 , 32 , 64 , 128 , etc. etc.
b) Seguir la secuencia saltando algunos valores para reiniciarla con valores más grandes, estos pueden ser por ejemplo: 256, 512, 1024, ...etcétera.
c) Interrumpir la secuencia establecida e iniciar otra con valores grandes desde un principio: 1000, 10000, 100000 ....

En este caso optaremos por la opción del inciso C para acercarnos más rápido a la respuesta.

No olvidemos que al asignarle valores a "n" cada vez más grandes, la superficie de la región Qn formada por los rectángulos que se construyen, se aproxima cada vez más a la de la región Q.

Seguramente estas pensando en la gran cantidad de operaciones que tenemos que realizar si le asignamos a "n" valores como 1000, 10000, 100000 etc.

Afortunadamente existen técnicas para realizar sumas como las anteriores y otras en una forma breve, por lo que, dejaremos por el momento nuestro problema para establecer una forma en que se pueden obtener este tipo de sumas.

Para una mejor comprensión de las propiedades que vamos aplicar dentro del álgebra, encontraremos nuevamente el valor de Sn para n = 8.

Sabemos que: Si dividimos el segmento que va de cero a cuatro en el eje de las abscisas en 8 partes iguales, al construir 8 rectángulos el valor de S_8 es:

$$
\begin{aligned}
S_8 &= \text{Sup } Q_8 = \text{Sup } R_1 + \text{Sup } R_2 + \ldots + \text{Sup } R_7 + \text{Supr } R_8 \\
&= (4/8)(4/8)^2 + (4/8)(8/8)^2 + (4/8)(12/8)^2 + (4/8)(16/8)^2 + \\
&\quad (4/8)(20/8)^2 + (4/8)(24/8)^2 + (4/8)(28/8)^2 + (4/8)(32/8)^2
\end{aligned}
$$

Como en todos los términos aparece como factor el número "4 / 8", éste es un factor común, por lo que:

$$S_8 = (4/8)\left[(4/8)^2 + (8/8)^2 + (12/8)^2 + (16/8)^2 + (20/8)^2 + (24/8)^2 + (28/8)^2 + (32/8)^2\right]$$

Como todos los términos son múltiplos de "4 / 8 " tenemos ahora que:

$$S_8 = (4/8)\left[(4/8)^2 + (2(4/8))^2 + (3(4/8))^2 + (4(4/8))^2 + (5(4/8))^2 + (6(4/8))^2 + (7(4/8))^2 + (8(4/8))^2\right]$$

$$S_8 = (4/8)\left[(4/8)^2 + 2^2(4/8)^2 + 3^2(4/8)^2 + 4^2(4/8)^2 + 5^2(4/8)^2 + 6^2(4/8)^2 + 7^2(4/8)^2 + 8^2(4/8)^2\right]$$

Como $(4/8)^2$ es un factor común, tenemos ahora que:

$$S_8 = (4/8)(4/8)^2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2\right]$$

$$S_8 = (4/8)^3\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2\right]$$

$$S_8 = (1/2)^3\left[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64\right]$$

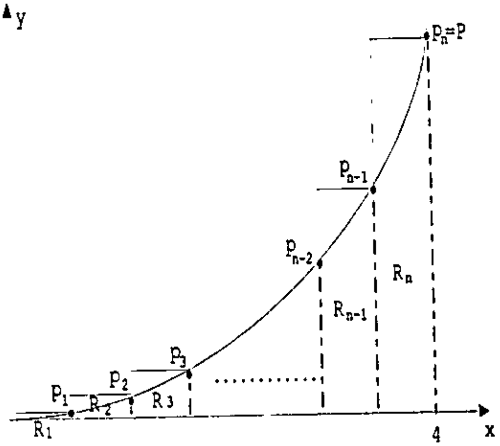
$$S_8 = 1/8\,[204]$$

$$S_8 = 204/8$$

$$S_8 = 25.5$$

Sabemos ahora cómo se puede obtener el valor de S_8, siguiendo un procedimiento diferente a los anteriores.

Obtengamos ahora el valor de Sn, es decir, la suma de las áreas de los n rectángulos que se construyen al dividir en n partes iguales el segmento que va de 0 hasta 4 en el eje de las abscisas.



Seguiremos un procedimiento similar al anterior.

¿Cuál es el valor de Sn?

Efectivamente:

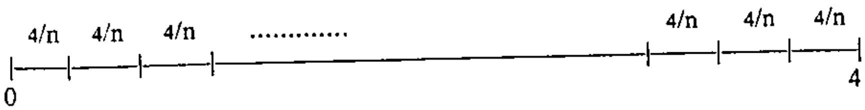
Sn = Sup Qn = sup R_1+Sup R_2 + ...+ Sup R_{n-1} + Sup Rn

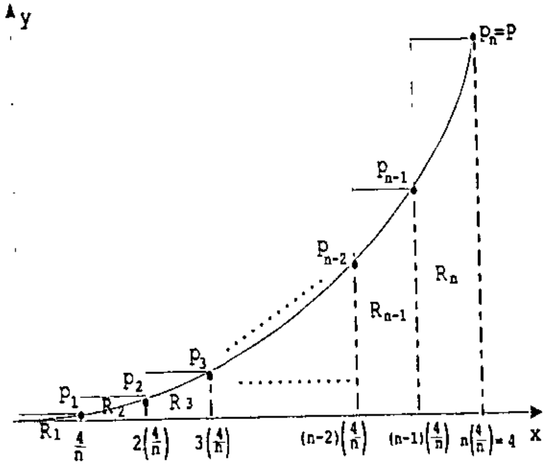
Es claro que el valor real de la superficie (Area) de cada uno de los rectángulos se conocerá hasta que se defina el valor que se le asigna a "n".

Recordemos que para establecer el área de cada uno de los rectángulos es necesario conocer la longitud de la base y la altura de cada uno de ellos.

¿Cuál es la longitud de la base de cada uno de los rectángulos?

Efectivamente, al dividir un segmento de longitud 4 en "n" partes iguales, cada una de las partes mide 4/n, por lo que, la longitud de la base de cada uno de los rectángulos es 4/n





¿Cuál es la longitud de la altura de cada uno de los rectángulos?

Efectivamente, es el valor de la ordenada del punto de la gráfica que se genera al construir el rectángulo al cual nos referimos

Ejemplo: si el rectángulo al cual nos referimos es R_2, la altura es la ordenada del punto P_2.

¿Cuáles son las coordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3, ... , P_{n-1}, P_n.

Efectivamente, como los puntos pertenecen a la gráfica de la ecuación $y = x^2$, saber que las abscisas son 4/n, 2(4/n), 3(4/n), ..., (n – 1) (4/n) nos permite establecer que las coordenadas son:

$P_1(4/n , (4/n)^2)$, $P_2(2(4/n), (2(4/n))^2)$, $P_3(3(4/n), (3(4/n))^2)$, ...
$P_{n-1}((n-1)(4/n), [(n-1)(4/n)]^2)$, $P_n(n(4/n), [n(4/n)]^2)$

Como "$n(4/n) = 4$", el punto P_n tiene coordenadas P_n (4,16), por lo que, P_n y P son el mismo punto.

¿Cuál es entonces el valor de S_n al dividir en "n" partes iguales y construir n rectángulos?

Efectivamente, el valor de S_n es:

$$S_n = \text{Sup } Q_n = \text{Sup } R_1 + \text{Sup } R_2 + \text{sup } R_3 + ... + \text{Sup } R_{n-1} + \text{Sup } R_n$$

$$= 4/n(4/n)^2 + 4/n\,(2(4/n))^2 + 4/n\,(3(4/n))^2 + ... + 4/n\,[(n-1)(4/n)]^2 + 4/n\,[n(4/n)]^2$$

$$= 4/n\,[\ (4/n)^2 + (2(4/n))^2 + (3(4/n))^2 + ... + ((n-1)(4/n))^2 + (\ n(4/n))^2\ ]$$

$= 4/n\,[(4/n)^2 + 2^2\,(4/n)^2 + 3^2\,(4/n)^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2\,(4/n)^2 + n^2\,(4/n)^2\,]$

$= 4/n\,(4/n)^2\,[\,1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2\,]$

$= (4/n)^3\,[\,1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2\,]$

Como $1 = 1^2$ tenemos:

$Sn = (4/n)^3\,[\,1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2\,]$

Tenemos ahora una expresión algebraica (fórmula) que permite obtener el valor de Sn al dividir en n partes iguales y construir n rectángulos en la forma como se hizo.

Ejemplos:

a) Si n = 40, al dividir en 40 partes iguales y construir 40 rectángulos tenemos:

$S_{40} = \sup R_1 + \mathrm{Sup}\,R_2 + \mathrm{Sup}\,R_3 + \ldots\ldots + \mathrm{Sup}\,R_{39} + \sup R_{40}$

$= (4/40)^3\,[\,1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 39^2 + 40^2\,]$

b) Si n = 1000 tenemos:

$S_{1000} = \mathrm{Sup}R_1 + \mathrm{Sup}\,R_2 + \mathrm{Sup}\,R_3 + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{Sup}\,R_{999} + \mathrm{Sup}\,R_{1000}$

$= (4/1000)^3\,[\,1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 999^2 + 1000^2\,]$

Es claro que, para obtener el valor de S_{1000} por ejemplo, tenemos que realizar la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 999^2 + 1000^2$; la cual, hacerla en una forma tradicional puede considerarse muy laboriosa.

Afortunadamente, para realizar este tipo de sumas y otras, existen fórmulas para obtener la suma en una manera sencilla y breve.

Las fórmulas a las cuales nos referimos son:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ejemplos:

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 99 + 100 = \dfrac{100(100+1)}{2} = \dfrac{100(101)}{2} = 5050$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots +(59)^2 + (60)^2 = \dfrac{60(60+1)(2(60)+1)}{6} = \dfrac{60(61)(121)}{6} = 73810$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (27)^3 + (28)^3 = (\dfrac{28(28+1)}{2})^2 = (\dfrac{28(29)}{2})^2 = (406)^2 = 164836$

Podemos establecer ahora que si dividimos en n partes iguales el segmento, al construir n rectángulos de la forma como lo hicimos, el valor de Sn es:

$$Sn = (4/n)^3 [\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2\ ] = (4/n)^3\ (\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ )$$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se puede obtener el valor de Sn, para cualquier valor de n que se considere.

Ejemplos:

a) si n = 4 , sabemos que el valor de S_4 es 30, veamos que obtenemos con la fórmula.

$$_4 = (4/4)^3(\dfrac{4(4+1)(2(4)+1)}{6}) = 1^3\ (\dfrac{4(5)(9)}{6}) = \dfrac{180}{6} = 30$$

b) si n = 8, sabemos que el valor de S_8 es 25.5.

$$S_8 = (4/8)^3(\dfrac{8(8+1)(2(8)+1)}{6}) = (1/2)^3\ (\dfrac{8(9)(17)}{6}) = 1/8\ (204) = 204/8 = 25.5$$

Estamos ahora en condiciones para encontrar en una forma breve y rápida valores de Sn.

Regresemos ahora a nuestro problema para encontrar el área de la región Q.

Asignaremos a n los valores 100, 1000, 10000.

No olvidemos que al asignarle valores a n cada vez más grandes, los valores correspondientes para Sn se aproximan cada vez más a la superficie de la región Q.

Si n = 100 tenemos:

$$S_{100} = (4/100)^3\ (\dfrac{100(100+1)(2(100)+1)}{6}) = (1/25)^3\ (\ \dfrac{100(101)(201)}{6}\ ) = 21.6544$$

Si n = 1000 tenemos:

$$S_{1000} = (4/1000)^3(\dfrac{1000(1000+1)(2(1000)+1)}{6}) = (1/250)^3(\dfrac{1000(1001)(2001)}{6})$$

$$= 21.365344$$

Si n = 10000 tenemos:

$$S_{10000} = (4/10000)^3\left(\frac{10000(10000+1)(2(10000)+1)}{6}\right)$$

$$= (1/2500)^3\left(\frac{10000(10001)(20001)}{6}\right)$$

$$= 21.33653344$$

Representemos los valores que hemos asignado a "n" hasta este momento y los correspondientes para Sn.

n: 1 , 2 , 4 , 8 , 100 , 1000 , 10000
Sn: 64 , 40 , 30 , 25.5 , 21.6544 , 21.365344 , 21.33653344

Observemos el comportamiento de estos valores para contestar la siguiente pregunta.

Si n = 100,000 , ¿cuál es el valor para S_{100000}?

Efectivamente, al continuar la secuencia establecida para los valores que se le asignan a "n" y los correspondientes valores para "Sn", los cuales llevan también una secuencia, sin temor a equivocarnos y sin realizar operación alguna afirmamos que: $S_{10000} = 21.3336533344$.

¿Cuántos valores podemos obtener para Sn?

Efectivamente, todos los que se quieran.

Es claro que es imposible obtener todos los valores para Sn, ya que, al seguir la secuencia establecida o alguna otra, hay una infinidad de valores que se le asignan a "n" y en consecuencia también hay una infinidad de valores para "Sn".

¿Tenemos ya los elementos para dar una respuesta al problema (área de la región Q)?.

Efectivamente, considerando la secuencia que llevan los valores correspondientes para la variable "Sn", la cual nos permite saber el valor que sigue y el que sigue etc. etc., al asignarle indefinidamente valores a la variable "n" siguiendo la secuencia establecida tenemos:

Si n: 100 , 1000 , 10000 , 100000, ...——> ∞

Entonces Sn: 21.6544, 21.365344, 2133653344,21.3336533344, ... ——> 21.33333....

Por lo que: La superficie de la región Q es " 21.33333333 ...... U^2 "

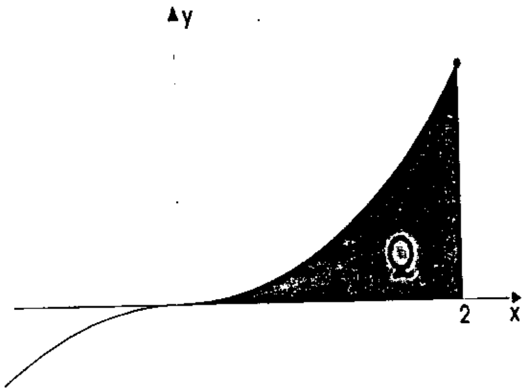
Otra representación del número 21.3333333333.... es 64/3 . Esto es:.

21.33333333 .... = 64/3

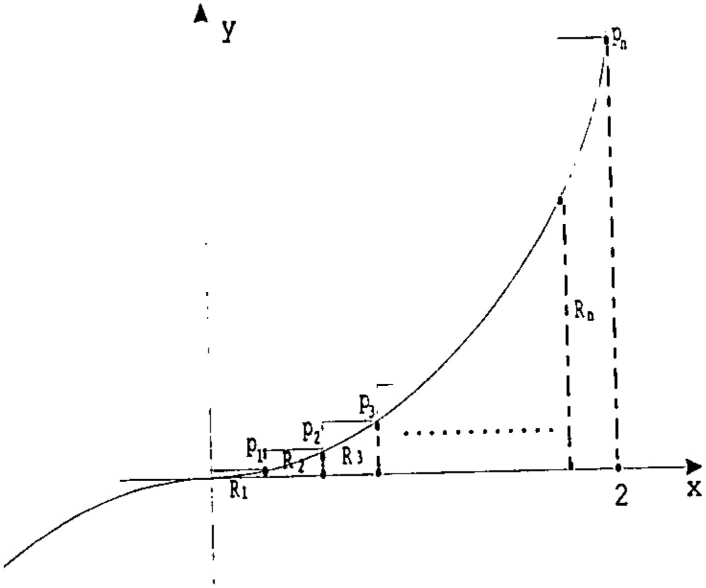
Veremos ahora otro problema similar al anterior en el cual, prescindiremos de una explicación amplia y nos remitiremos solo a la operatividad para obtener la respuesta.

III.2 Problema 2.

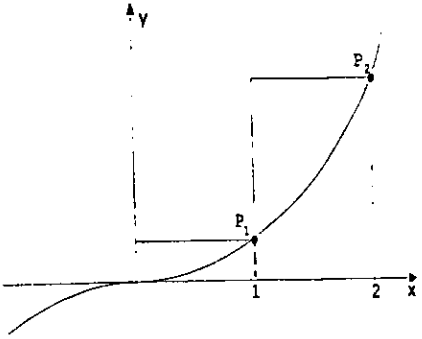
Hallar el área de la región Q, la cual se encuentra comprendida por la gráfica de la ecuación $y = x^3$, el eje de las abscisas y la recta perpendicular a este eje en el 2.

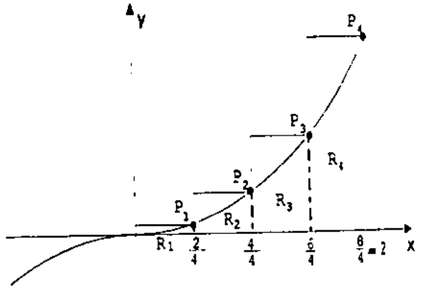


Dividamos el segmento que va de 0 hasta 2 en el eje de las abscisas en n partes iguales, construyamos n rectángulos para formar una región que llamaremos Qn.

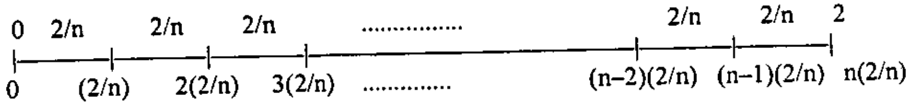


Ejemplos: a) n = 2 b) n = 4





Al dividir el segmento que va de 0 a 2 en el eje de las abscisas en n partes iguales tenemos:



Sabemos ahora que la base de cada uno de los rectángulos que se construyen mide 2/n

¿Cuál es la altura de cada uno de los rectángulos?

Efectivamente, es respectivamente el valor de la ordenada del punto de la gráfica que coincide con el vértice superior del rectángulo al cual nos referimos. Esto es, la altura del rectángulo por ejemplo R_3 es la ordenada del punto P_3.

Las coordenadas de estos puntos son:

$P_1(2/n, (2/n)^3)$, $P_2(2(2/n), (2(2/n))^3)$, $P_3(3(2/n), (3(2/n))^3)$, ...,
$P_{n-1}((n-1)(2/n), ((n-1)(2/n))^3)$, $P_n(n(2/n), (n(2/n))^3)$

El área de la región Qn (la cual representaremos por An) formada por los n rectángulos que se construyen es:

$$\begin{aligned}
An &= \text{área } Qn = \text{área } R_1 + \text{área } R_2 + \text{área } R_3 + \dots\dots\dots + \text{área } R_{n-1} + \text{área } R_n \\
&= 2/n\,(2/n)^3 + 2/n\,(2(2/n))^3 + 2/n\,(3(2/n))^3 + \dots\dots + 2/n\,((n-1)(2/n))^3 + 2/n\,(n(2/n))^3 \\
&= 2/n\ [\ (2/n)^3 + (2(2/n))^3 + (3(2/n))^3 + \dots\dots + ((n-1)(2/n))^3 + (n(2/n))^3\ ] \\
&= 2/n\,(2/n)^3\ [\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + (n-1)^3 + n^3\ ] \\
&= (2/n)^4\,[\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + (n-1)^3 + n^3\ ] \\
&= (2/n)^4\,[\ \frac{n(n+1)}{2}\ ]^2
\end{aligned}$$

Tenemos ahora una fórmula que nos permite obtener el valor de An al dividir en n partes iguales y construir n rectángulos.

El valor de An cuando n es 100, 1000 y 10000 es:

Si n = 100 tenemos:

$$A_{100} = \left(\frac{2}{100}\right)^4 \left(\frac{100(100+1)}{2}\right)^2 = 4.0804$$

Si n = 1000 tenemos:

$$A_{1000} = \left(\frac{2}{1000}\right)^4 \left(\frac{1000(1000+1)}{2}\right)^2 = 4.008004$$

Si n = 10000 tenemos:

$$A_{10000} = \left(\frac{2}{10000}\right)^4 \left(\frac{10000(10000+1)}{2}\right)^2 = 4.00080004$$

Tenemos ahora que:

si n: 100 , 1000 , 10000

entonces An : 4.0804 , 4.008004 , 4.00080004

Si observamos la secuencia que llevan los valores que le asignamos a n y los correspondientes valores para An, sin necesidad de hacer operación alguna, se puede establecer el valor de An al continuar asignándole valores a "n " siguiendo la secuencia que presentan los mismos.

Ejemplos:

a) si n = 100000 tenemos: $A_{100000} = 4.0000800004$

b) si n = 1000000 tenemos: $A_{1000000} = 4.000008000004$

Al continuar asignando indefinidamente valores enteros cada vez más grandes a la variable "n" tenemos:

si n : 100 , 1000 , 10000 , ... ——> ∞

entonces An : 4.0804, 4.008004, 4.00080004, ... ——> 4

Sabemos ahora que la superficie de la región Q es 4 U^2

Basados en una idea natural como lo es "aproximarse cada vez más", hemos logrado establecer un procedimiento que llamaremos: "Método de aproximación".

Con el método de aproximación se tiene una alternativa para dar solución a problemas del tipo que se han presentado hasta este momento y otros.

¿Qué se entiende por el método de aproximación?.

Efectivamente, para dar solución a un problema utilizando el método de aproximación, es necesario encontrar un procedimiento que permita establecer una sucesión infinita de valores con las siguientes características:

a) Los valores de la sucesión en el orden que aparecen se aproximen cada vez más a la solución del problema.

b) Al continuar indefinidamente la sucesión, los valores de ésta se aproximen indefinidamente a la solución.

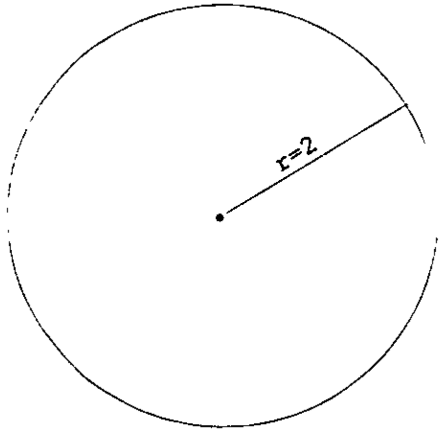
¿Cuál es la solución al problema?

Efectivamente el valor al cual se aproxima infinitamente la sucesión.

Veamos un ejemplo diferente a los anteriores.

III.3 Problema 3.

Hallar la longitud de una circunferencia de radio 2.



Utilizaremos polígonos regulares inscritos en la circunferencia.

¿Qué es un polígono regular?

Efectivamente, es un polígono que tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales.

Ejemplos:

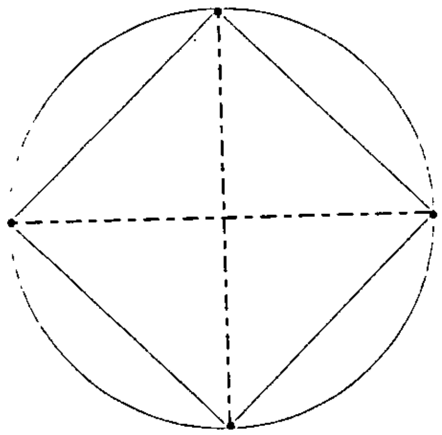
a) Un triángulo equilátero es un polígono regular de 3 lados.

b) Un cuadrado es un polígono regular de 4 lados.

¿Qué es un polígono inscrito en la circunferencia?

Efectivamente, es un polígono que tiene todos sus vértices en la circunferencia.

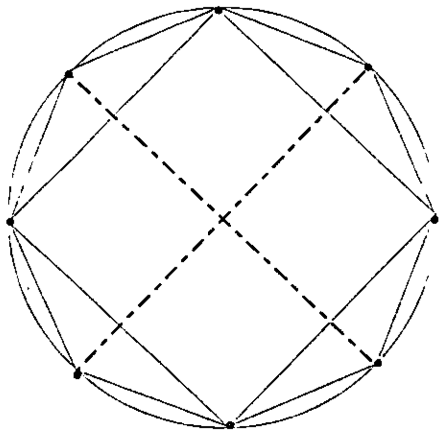
Para construir un cuadrado inscrito en la circunferencia se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, posteriormente se unen los puntos extremos de la siguiente forma:



¿El perímetro del cuadrado inscrito es igual a la longitud de la circunferencia?.

Efectivamente, no son iguales ya que: El perímetro del cuadrado inscrito es menor a la longitud de la circunferencia. Esto se debe a que la línea más corta que une a dos puntos es el segmento de recta.

Para construir un polígono regular de 8 lados inscrito a la circunferencia, se trazan radios que pasen por los puntos medios de los lados del cuadrado y se unen los puntos extremos conjuntamente con los vértices del cuadrado de la siguiente forma:



¿El perímetro del polígono regular inscrito de 8 lados es igual a la longitud de circunferencia?

Efectivamente, por la misma razón que se utiliza para el cuadrado, no son iguales.

El perímetro del cuadrado y el del polígono regular de 8 lados los representaremos con P_4 y P_8 respectivamente

¿Cómo es el perímetro del cuadrado respecto al del polígono regular de 8 lados?.

Efectivamente, es claro que el perímetro del cuadrado inscrito es menor al del polígono regular de 8 lados inscrito en la circunferencia de radio 2.

Sabemos ahora que P_4 y P_8 son valores aproximados a la longitud de la circunferencia, más aún, P_8 es la mejor aproximación.

¿Cómo se encuentra un valor más aproximado a la longitud de la circunferencia que los anteriores?.

Efectivamente, siguiendo un procedimiento similar al anterior, podemos construir un polígono regular de 16 lados inscrito en la circunferencia cuyo perímetro "P_{16}" es un valor más aproximado que los anteriores.

Es claro que este proceso se puede repetir indefinidamente.

¿Qué sucederá si repetimos este proceso indefinidamente?

Efectivamente, el perímetro del polígono regular inscrito se aproximará infinitamente a la longitud de la circunferencia de radio 2.

Representemos con n al número de lados del polígono regular inscrito y con Pn el perímetro del mismo.

Tenemos ahora dos variables tales que "Pn está en función de n", con la siguiente característica:

Si n : 4 , 8 , 16 , 32 , ... ——> ∞

Entonces Pn : P_4 , P_8 , P_{16} , P_{32} , ... ——> longitud de la circunferencia.

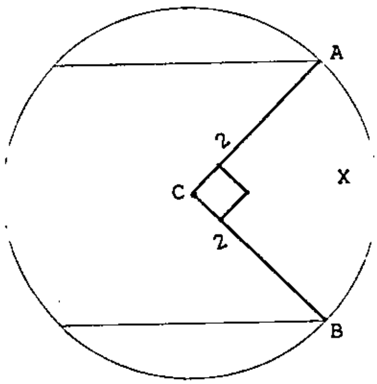
Sabemos ahora que: El valor al cual se aproxima infinitamente la sucesión de valores correspondientes para Pn es la longitud de la circunferencia de radio 2.

Para saber la longitud de la circunferencia de radio 2, sólo nos resta obtener tantos valores como sean necesarios parar establecer el valor al cual se aproxima infinitamente Pn.

Veamos un ejemplo de como se pueden obtener estos valores.

Para encontrar el valor de P_4 podemos hacer lo siguiente:

Representaremos con x la longitud de uno de los lados del cuadrado.



Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC tenemos:

$x^2 = 2^2 + 2^2$
$x^2 = 8$
$x = \pm\sqrt{8}$

Como "x" representa una longitud, no puede ser un valor negativo, por lo que:

$$P_4 = 4\sqrt{8}$$

Dejaremos como un ejercicio encontrar los valores de Pn y al que se aproxima infinitamente.

El procedimiento que se sigue para encontrar pendientes de rectas tangentes a gráficas de ecuaciones y áreas de regiones, nos permitirá establecer los conceptos básicos para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

Formalizaremos ahora estos conceptos, los cuales nos permitirán familiarizarnos con el Cálculo Diferencial e Integral en un lenguaje breve y cómodo.

IV. CONCEPTOS NECESARIOS PARA FORMALIZAR EL CÁLCULO

IV.1 Variable.

En todos los problemas se consideraron cantidades cuyo valor varía.

En el problema donde se obtuvo la pendiente de la recta L tangente a la gráfica de la ecuación $y= x^2$ en el punto A (3,9), las cantidades que se establecieron con esta característica son:

"x"— abscisa de un punto M que se mueve sobre la gráfica.
"m_{MA}" — pendiente de la recta que pasa por los puntos M y A.

¿Cuáles son las cantidades que establecimos en los otros problemas?

Efectivamente, otras cantidades que establecimos son:

t — tiempo final de un lapso de tiempo $[4 ; t]$
$VP_{[4;t]}$ — velocidad promedio de la pelota en el lapso de tiempo.

n — Número de partes iguales en que se divide el segmento sobre el eje de las abscisas de la región Q.
S_n – superficie de la región que se forma con los n rectángulos.

L – largo de un terreno rectangular de perímetro 400m.
S – superficie del terreno de perímetro 400m y largo L.

¿Qué entendemos al decir " el valor de la cantidad varía"?

Efectivamente, se le pueden asignar diferentes valores.

¿Cuáles son los valores que se le pueden asignar a estas cantidades?.

Efectivamente, depende de las restricciones para las mismas.

Ejemplos:

t – tiempo final de un lapso de tiempo que inicia en el segundo cuatro $[4 ; t]$

En este problema se considera que la pelota tarda 7 segundos en llegar al piso. Esta consideración establece que el valor para t no puede ser mayor a 7

Saber que el lapso de tiempo inicia en el segundo 4 nos lleva a establecer que el valor para t no puede ser 4 ó menor que 4.

Considerar lapsos de tiempo como [4 ; 5], [4 ; 6] y [4 ; 5.2], establece que los valores que se consideran para t son: 5 , 6 y 5.2.

¿Cuáles son los valores que pueden considerarse para t?.

Efectivamente, todos los que están entre el 4 y el 7, incluyendo a este. Es decir, todos los que están en el intervalo (4 , 7].

n- número de partes iguales en que se divide el segmento sobre el eje de las abscisas de la región Q.

Pensar en números como 10 , 12 y 35 para n, significa dividir el segmento en 10 , 12 y 35 partes iguales.

¿Se puede asignar a "n" valores negativos o fracciones?

Efectivamente no es posible ya que, carece de sentido dividir un segmento por ejemplo en –3 ó ¾ partes iguales.

Tenemos entonces que: Los valores que se le pueden asignar a "n" son los números enteros positivos.

A este tipo de cantidades se les llama variable.

¿Qué es una variable?

Efectivamente, es una cantidad a la que se le pueden asignar diferentes valores.

Al conjunto constituido por los valores que se le pueden asignar a la variable le llamaremos campo de variación.

Otros ejemplos de variables.

a) s – La superficie de un círculo.
b) L –El largo de un rectángulo de perímetro 20.
c) d – La distancia de la tierra al sol.
d) P – El peso de Juan Pérez López.
e) E – El estado físico del agua.
f) x – Considerar a x simplemente como una variable.
g) y – y es la variable tal que y^2 es un número menor o igual a 25, esto es: $y^2 \leq 25$

¿Cuál es el campo de variación de estas variables?.

Efectivamente, para establecer el campo de variación se consideran en caso que existan, las restricciones físicas o algebraicas y las limitaciones establecidas. En caso de no existir restricciones y limitaciones, el campo de variación se considera el conjunto numérico en el cual se esta trabajando.

Ejemplos:

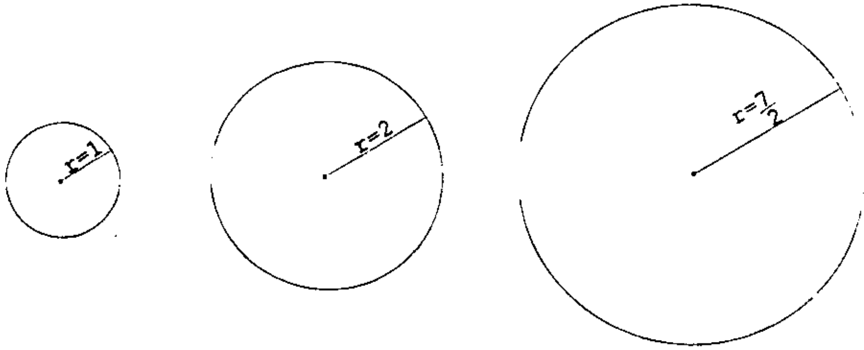
a) s – La superficie de un círculo.

¿Cuántos círculos diferentes hay?

Efectivamente, una infinidad.

Ejemplos:

radio = 1 radio = 2 radio = 7/2



Decir " La superficie de un círculo" no especifica a cuál se refiere, por lo que se consideran todos los círculos.

Sabemos que:

- Todos los círculos tienen como superficie un número real positivo.
- Dos círculos diferentes tienen superficie diferente.

Por ejemplo, la superficie de los círculos anteriores, la cual se obtiene con la fórmula conocida "$s = \pi r^2$ " es:

Si el radio es 1 (r = 1) , la superficie es:
$s = \pi(1)^2$
$s = \pi$

Si el radio es 2 (r = 2) , la superficie es:
$s = \pi(2)^2$
$s = 4\pi$

Si el radio es 7/2 (r = 7/2) , la superficie es:

$s = \pi(7/2)^2$
$s = (49/4)\pi$

¿ Hay un círculo de superficie 4?

Efectivamente, sí hay un círculo con superficie 4.

Si el círculo tiene superficie 4 tenemos:

$4 = \pi r^2$

$\frac{4}{\pi} = r^2$

$r = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi}}$

El valor de "r" no puede ser negativo por ser una longitud.

Sabemos ahora que el circulo de radio $r = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ r tiene superficie 4.

Este proceso lo podemos realizar para todos los números reales positivos, por lo que:

Para cada número real positivo, hay un círculo que tiene como superficie ese número.

Podemos ahora afirmar que: El campo de variación de la variable "s" son todos los números reales positivos, los cuales constituyen el intervalo $(0, \infty)$

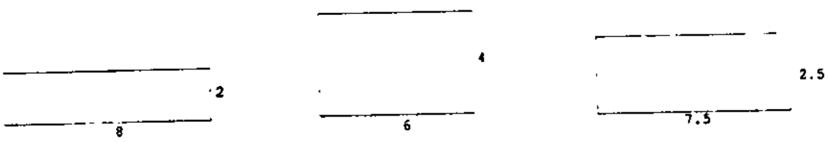
b) L – largo de un rectángulo de perímetro 20.

¿Cuántos rectángulos diferentes hay de perímetro 20 ?

Efectivamente, una infinidad.

Ejemplos:

largo 8 y ancho 2 | largo 6 y ancho 4 | largo 7.5 y ancho 2.5



Decir "El largo de un rectángulo de perímetro 20" no especifica cual es, por lo que se consideran todos los rectángulos de perímetro 20.

Es claro que:

- El largo de todo rectángulo es un número real positivo.

- No hay rectángulo de perímetro 20 y largo un número mayor o igual a 10.

También es claro que, para cualquier número entre 0 y 10, hay un rectángulo con ese largo.

Ejemplo: Consideramos un número entre 0 y 10 como lo es el 9.

Sabemos que el perímetro "P" de un rectángulo de largo "L" y ancho "A" es 2L + 2A, por lo que:

Si P= 20 y L = 9 tenemos:

$$\begin{aligned} P &= 2L + 2A \\ 20 &= 2\,(9) + 2A \\ 20 - 18 &= 2A \\ 2 &= 2A \\ A &= 2/2 = 1 \end{aligned}$$

Sabemos ahora que: el rectángulo de perímetro 20 y largo 9 es el que tiene ancho 1.

Lo mismo que hicimos para el 9 lo podemos hacer para cualquier número real entre 0 y 10

Podemos ahora afirmar que: El campo de variación de la variable L son todos los números comprendidos entre 0 y 10, los cuales constituyen el intervalo " (0 , 10) "

c) d – la distancia de la Tierra al Sol.

Sabemos que la distancia de la Tierra al Sol no es la misma todo el tiempo. Esto se debe al movimiento de traslación.

Es claro que en algún momento la Tierra se encuentra a la menor distancia posible del Sol y en otro a la mayor distancia.

¿Cuál es el campo de variación de la variable "d"?.

Efectivamente, esta formado por todos los números reales comprendidos entre estos 2 valores (distancia menor y mayor), incluyendo a los mismos.

d) E – el estado físico del agua.

Sabemos que el estado físico del agua sólo tiene tres posibilidades: sólido, líquido y gaseoso.

¿Cuál es el campo de variación de la variable "E"?.

Efectivamente, es el conjunto formado únicamente por las tres posibilidades, el cual lo representamos de la forma $\{$sólido, líquido, gaseoso$\}$.

e) y – es la variable tal que $y^2 \leq 25$.

Es claro que los números reales cuyo cuadrado es menor ó igual a 25, son todos aquellos que están entre –5 y 5, incluyendo a estos.

El campo de variación es el intervalo [-5 , 5].

IV.2 Función.

Una característica que presentan los problemas que se han visto hasta este momento es el hecho que: En todos ellos se establecen variables.

Si revisamos los problemas podemos darnos cuenta que estas variables aparecen por parejas; " x " y " m_{MA} ", " n " y " Sn ", " t " y " $VP_{[4;t]}$ " , " L " y " S ".

Una relación que prevalece en cada una de estas parejas es : Para cada valor que se le asigna a una de estas variables, sólo le corresponde un valor a la otra variable.

A cada valor de la variable "x" le corresponde sólo un valor a la variable " m_{MA} ".
A cada valor de la variable "n" le corresponde sólo un valor a la variable "Sn".
A cada valor de la variable "t" le corresponde sólo un valor a la variable " $VP_{[4;t]}$ ".
A cada valor de la variable "L" le corresponde sólo un valor a la variable "S".

Esta característica la expresaremos en forma breve diciendo: El valor de una de las variables depende del valor de la otra.

El valor de " m_{MA}" depende del valor de "x".
El valor de "Sn" depende del valor de "n"
El valor de " $VP_{[4;t]}$ " depende del valor de "t".
El valor "S" depende del valor de "L".

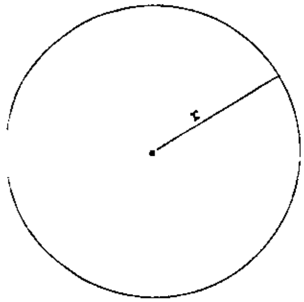
Otros ejemplos de variables cuyo valor depende del valor que se considera para otra variable son:

a) La superficie de un círculo depende de la longitud del radio.
b) El largo de un rectángulo de perímetro 20 depende de la longitud del ancho.
c) La distancia de la Tierra al Sol depende del momento (tiempo) en el cual se mide.
d) El estado físico del agua depende de la temperatura de la misma.
e) La presión del agua en un depósito depende de la profundidad a la que se mide.
f) El área de un triángulo equilátero depende de la longitud de uno de sus lados.
g) La distancia que recorre un objeto en movimiento que lleva una velocidad constante de 50 km/hr depende del tiempo que transcurre.
h) La ganancia que obtiene una empresa en la venta de un artículo cuyo costo de producción es 20 pesos depende del precio de venta.

En múltiples ocasiones en la vida cotidiana hemos usado la palabra depende en frases que entendemos ampliamente. Veremos a continuación algunos de los ejemplos anteriores con mas detalle para precisar nuevamente el sentido con el cual utilizamos esta palabra.

Ejemplos:

a) La superficie de un círculo depende de la longitud del radio.



Estamos hablando de una cosa como lo es el círculo y dos características como lo son: superficie y longitud del radio.

Representaremos a las variables superficie y longitud del radio con "s y r" respectivamente.

Asignemos un valor a r , por ejemplo 8. ¿Cuántos valores pueden considerarse para "s"?.

Efectivamente, todos los círculos de radio 8 tienen la misma superficie, por lo que sólo hay un valor para s.

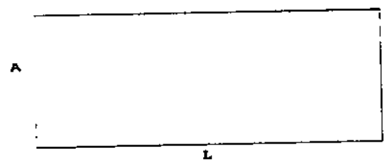
¿Cómo se obtiene el valor de "s" cuando r = 8?

Efectivamente, con la fórmula conocida por todos " $s= \pi r^2$ "

Si r = 8 tenemos:
$s = \pi (8)^2$
$s = 64\pi$

Es claro que esta situación se repite para cada valor que se le asigne a "r" de su campo de variación.

b) El largo de un rectángulo de perímetro 20 depende de la longitud de su ancho.



Estamos hablando de una cosa como lo es un rectángulo de perímetro 20 y dos de sus características como lo son: largo y ancho.

Representaremos a las variables largo y ancho con L y A respectivamente.

Al asignarle un valor a "A", por ejemplo $A = 3$, ¿Cuántos valores le corresponden a L?.

Efectivamente, todos los rectángulos de perímetro 20 y ancho 3 tienen el mismo largo, por lo que sólo hay un valor para L.

¿Cómo se obtiene el valor para L cuando el rectángulo tiene perímetro 20 y ancho 3?

Efectivamente, la fórmula conocida por todos para obtener el perimetro de un rectángulo es " $P = 2L + 2A$". Por lo que:

Si: $P = 20$ y $A = 3$ tenemos:

$$P = 2L + 2A$$
$$20 = 2L + 2(3)$$
$$20 = 2L + 6$$
$$2L = 20 - 6$$
$$2L = 14$$
$$L = 14/2$$
$$L = 7$$

Esta situación se repite para cada valor que se le asigna a la variable "A" de su campo de variación.

Al considerar una cantidad fija para el perímetro, se puede simplificar la fórmula anterior para establecer otra, para los rectángulos de perímetro 20.

Si $P = 20$ tenemos:

$$P = 2L + 2A$$
$$20 = 2L + 2A$$
$$2L = 20 - 2A$$
$$L = \frac{20 - 2A}{2}$$
$$L = 10 - A$$

c) La distancia que recorre un vehículo en movimiento con velocidad constante de 40 km/hr depende del tiempo que transcurre.

Estamos hablando de un vehículo como una cosa y dos características: Distancia que recorre y tiempo que transcurre.

Representemos a las variables distancia y tiempo con "d" y "t" respectivamente.

Al considerar un valor para t, por ejemplo $t = 5$ segundos, ¿cuántos valores hay para d?.

Efectivamente, todos los vehículos con velocidad constante de 40 km/hr recorren la misma distancia en 5 segundos, por lo que, sólo hay un valor para d.

¿Cómo se obtiene el valor para "d" cuando $t = 5$ segundos?.

Efectivamente, con la fórmula conocida por todos "$d = vt$"

Como $v = 40$ y $t = 5$ tenemos:

$d = vt$
$d = 40\,(5)$
$d = 200$ km/hr

Es claro que esta situación se repite para cada valor que le asignemos a la variable "t" de su campo de variación.

En resumen: Tenemos variables que están relacionadas de tal forma que: El valor de una de ellas depende del valor de la otra.

Si "x" y "y" son variables, diremos que "y depende de x" cuando: Para cada valor de la variable "x" de su campo de variación, sólo le corresponde un valor a la variable "y".

Esta situación la podemos extender a 3 ó más variables.

En lo sucesivo utilizaremos la palabra "función" para establecer una relación de este tipo, de la siguiente forma:

Cuando el valor de la variable "y" depende del valor de la variable "x" diremos que: "y está en función de x"

Consideremos que " y está en función de x ".

- A la variable y le llamaremos "Variable dependiente".
- A la variable x le llamaremos "Variable independiente"
- Al campo de variación de la variable independiente le llamaremos "Dominio de la función".
- Al conjunto que se forma con todos los valores para la variable dependiente le llamaremos "imagen o rango de la función".
- A la fórmula con la cual obtenemos el valor para la variable dependiente al asignarle un valor a la variable independiente, le llamaremos "regla de correspondencia de la función.

De los ejemplos anteriores tenemos:

a) "s está en función de r"

Recordemos que "s" es la superficie de un círculo y "r" la longitud del radio.

En esta función "r" es la variable independiente y "s" la variable dependiente.
La regla de correspondencia de la función es la fórmula "$s = \pi r^2$", la cual para precisar que s está en función de r se escribirá:

$$s\,(r) = \pi r^2$$

Otra razón por la cual utilizamos esta notación se debe a que, con ella somos más precisos en cuanto a lo que nos referimos.

s (r) se lee en forma breve "s de r" , lo cual, de acuerdo al significado de las mismas podemos expresarlo: "La superficie de un círculo de radio r".

De esta forma tenemos por ejemplo que:

s(1), " s de 1" representa la superficie de un círculo de radio 1, es decir, es el valor que corresponde a la variable dependiente "s" cuando la variable independiente "r" toma el valor de 1.

s(3/2), "s de 3/2 " representa la superficie del círculo de radio 3/2, es decir, es el valor de la variable dependiente "s" cuando la variable independiente "r" vale 3/2.

¿Cómo se encuentran los valores de s (1) y s (3/2)?

Efectivamente, con la regla de correspondencia de la función. Sólo tenemos que sustituir el valor de r y realizar las operaciones como en las ecuaciones.

$S(1) = \pi(1)^2 = \pi$

$S(3/2) = \pi(3/2)^2 = (9/4)\pi$

¿ Cuál es el dominio de la función?

Efectivamente, puesto que el campo de variación de la variable independiente "r" es el intervalo $(0, \infty)$ tenemos:

El dominio de la función, el cual se representa de la forma "Dom s" es $(0, \infty)$, esto es:

$$\text{Dom } s = (0, \infty)$$

¿Cuál es la imagen o rango de la función?

Efectivamente, como el campo de variación de la variable dependiente "s" es el intervalo $(0, \infty)$ tenemos:

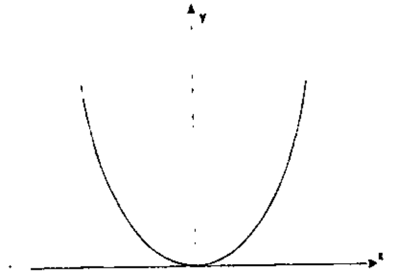
La imagen o rango de la función, la cual se representa de la forma "Imagen S" es $(0, \infty)$,esto es:

$$\text{Imagen } s = (0, \infty)$$

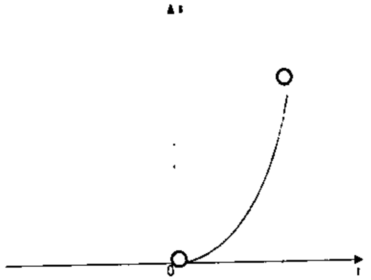
¿Qué hacemos para trazar la gráfica de la función con regla de correspondencia $s(r) = \pi r^2$?

Efectivamente, es como hacer la gráfica de la ecuación $y = \pi x^2$. Los ejes de coordenadas serán "s, r" y los valores para la variable independiente "r" son sólo los números reales positivos.

Gráfica de la ecuación $y = \pi x^2$



Gráfica de la función $S(r) = \pi r^2$, siendo S la superficie de un círculo y r la longitud del radio.



O — significa que ese punto no pertenece a la gráfica.

¿Cuál es la razón por la que la gráfica de la función $S(r) = \pi r^2$ es sólo una parte de la gráfica de la ecuación $y = \pi x^2$?

Efectivamente, sabemos que la gráfica de la ecuación $y = \pi x^2$ son todos los puntos (x , y) en el plano cuyas coordenadas hacen que la ecuación se cumpla. Esta situación permite que x pueda tener valores negativos y positivos.

Para el caso de la función $S(r) = \pi r^2$, por el significado de la variable "r" (longitud del radio de un círculo), ésta solo puede tener valores positivos.

b) L está en función de A

Recordemos que "L" es el largo de un rectángulo de perímetro 20 y "A" el ancho.

¿Cuál es la variable independiente?

Efectivamente, "A" es la variable independiente y "L" la variable dependiente.

¿Cuál es la regla de correspondencia de la función?

Efectivamente, la fórmula con la cual obtenemos el valor para la variable dependiente L, al asignarle un valor a la variable independiente "A".

De los ejemplos anteriores sabemos que esta fórmula es "L =10 – A", la cual representamos ahora de la forma:

$$L\ (A) = 10 - A$$

¿Cómo se lee en forma breve L (A)?

Efectivamente "L de A"

¿Cuál es el significado de L (3)?

Efectivamente, el largo de un rectángulo de perimetro 20 y ancho 3.

¿Cómo obtenemos el valor de L (3)?

Efectivamente, con la regla de correspondencia de la función, de igual forma que en las ecuaciones.

Como $L\ (A) = 10 - A$ tenemos:

$L\ (3) = 10 - 3$

$L\ (3) = 7$

Este hecho nos indica que si el valor de la variable independiente "A" es 3, el valor para la variable dependiente "L" es 7.

También se puede expresar como: "El valor de la función en 3 es 7".

Por el significado de las variables sabemos ahora que: Si un rectángulo de perímetro 20 tiene ancho 3, el largo de este rectángulo es 7

¿Cuál es el dominio de la función?

Efectivamente, como el campo de variación de la variable independiente "A" son todos los números reales que están entre 0 y 10, los cuales forman el intervalo(0,10), tenemos:

$$\text{Dom } L = (0, 10)$$

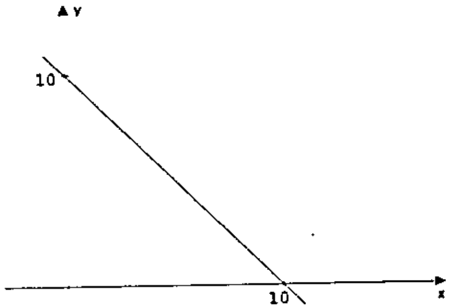
¿Cuál es la imagen de la función?

Efectivamente, como el campo de variación de la variable dependiente "L" son todos los números reales que están entre 0 y 10 tenemos:

$$\text{Imagen } L = (0, 10)$$

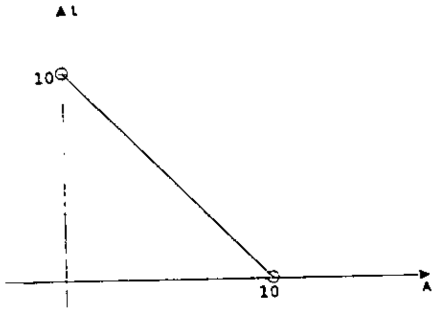
¿Cuál es la gráfica de la ecuación $y = 10 - x$?

Efectivamente, sabemos que su gráfica es una recta, por ser una ecuación lineal.



¿Cuál es la gráfica de la función con regla de correspondencia $L(A) = 10 - A$?.

Efectivamente, como el dominio de la función $L(A) = 10 - A$ es el intervalo $(0, 10)$, la gráfica es un segmento de la recta anterior en un plano cuyos ejes de coordenadas son ahora "A" y "L"



Se deja como un ejercicio, encontrar la regla de correspondencia de las funciones que se establecieron al dar solución a los problemas que se plantearon en un principio, las cuales son:

a) m_{MA} está en función de x.

Recordemos que "x" es la abscisa de un punto M que se mueve sobre la gráfica de la ecuación " $y = x^2$ " y "m_{MA}" la pendiente de la recta que pasa los puntos M(x,y) y A (3 ,9).

b) Sn esta en función de n

Recordemos que "n" es el número de partes iguales en que se divide el segmento sobre el eje de las abscisas de la región Q y Sn la superficie de la región formada por los rectángulos que se construyen.

c) $VP_{[4\,;\,t]}$ esta en función de t

Recordemos que t es el tiempo final de un lapso de tiempo que inicia en el segundo 4 y $VP_{[4\,;\,t]}$ la velocidad promedio de la pelota en ese lapso de tiempo.

¿Cuál es la variable independiente, la variable dependiente, el dominio, la imagen y la gráfica de cada una de estas funciones?

Al procedimiento que se utilizó para resolver todos estos problemas le llamamos "Método de Aproximación".

¿Cómo se puede describir el "Método de Aproximación?.

Efectivamente, establecer una sucesión infinita de valores que se aproxime cada vez más a la solución al problema, más aún , que se aproxime infinitamente.

¿Cuáles son las sucesiones con las características antes mencionadas que se establecieron en los problemas?.

Efectivamente, estas sucesiones son:

m_{MA} : 5.9 , 5.99 , 5.999 , 5.9999, ...

$VP_{[4\,;\,t]}$: 45 , 40.5 , 40.05 , 40.005 , 40.0005 , ...

Sn : 21.6544, 21.365344 , 21.33653344, ...

¿Cómo se obtienen los valores de estas sucesiones?

Efectivamente, con la regla de correspondencia de la función que se establece en cada uno de los problemas y, asignando a la variable independiente los valores de una sucesión.

¿Cuáles son las sucesiones que se consideraron para las variables independientes en cada uno de estos casos?.

Efectivamente, las siguientes:

a)

Si x: 2.9 , 2.99 , 2.999 , 2.9999, ...

Entonces m_{MA}: 5.9 , 5.99 , 5.999, 5.9999, ...

b)

Si t : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001, ...

Entonces $VP_{[4\,;\,t]}$: 45, 40.5, 40.05, 40.005, ...

c)

Si n: 100 , 1000 , 10000, ...

Entonces Sn : 21.6544, 21.365344, 21.33653344, ...

Pasaremos ahora a formalizar esta situación, lo cual nos permitirá establecer un concepto fundamental para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

IV.3 Límite de una función

Consideremos que y está en función de x con regla de correspondencia $y(x) = x^2 + 2x$

Asignemos ahora a la variable independiente "x" los valores de una sucesión que se aproxime infinitamente a 4.

Ejemplo:

x: 3.9 , 3.99 , 3.999 , 3.9999 , ... ——> 4

¿Cuáles son los valores correspondientes para la variable dependiente?.

Efectivamente, los valores correspondientes para la variable dependiente "y" son:

y(3.9) , y(3.99) , y(3.999) , y (3.9999), ...

Para obtener el valor real de cada uno de ellos, aplicaremos la regla de correspondencia "$y(x) = x^2 + 2x$ "

$y(3.9) = (3.9)^2 + 2(3.9) = 23.01$

$y(3.99) = (3.99)^2 + 2\,(3.99) = 23.9001$

$y(3.999) = (\,3.999)^2 + 2\,(3.999) = 23.990001$

$y(3.9999) = (3.9999)^2 + 2\,(3.9999) = 23.99900001$

Los valores correspondientes para la variable dependiente "y" son:

y : 23.01, 23.9001, 23.990001 , 23.99900001, ...

¿Qué podemos afirmar de la sucesión de valores para la variable "y"?

Efectivamente, es claro que esta sucesión se aproxima infinitamente a 24, por lo que:

Si x: 3.9 , 3.99 , 3.999, 3.9999, ... ——> 4

Entonces y: 23.01, 23.9001, 23.990001, 23.99900001, ... ——> 24

Consideraremos otra sucesión de valores que se aproxime infinitamente a 4 y hagamos lo mismo.

x: 4.1 , 4.01, 4.001, 4.0001, ... ——> 4

$y(4.1) = (4.1)^2 + 2\,(4.1) = 25.01$

$y(4.01) = (4.01)^2 + 2\,(4.01) = 24.1001$

$y(\,4.001) = (4.001)^2 + 2\,(4.001) = 24.010001$

$y\,(4.0001) = (4.0001)^2 + 2\,(\,4.0001) = 24.00100001$

Los valores correspondientes para la variable dependiente "y" son:

y: 25.01, 24.1001, 24.010001, 24.00100001, ...

Tenemos nuevamente que: La sucesión de valores para la variable dependiente "y" se aproxima infinitamente a 24, por lo que:

Si x : 4.1 , 4.01, 4.001, 4.0001, ...——> 4

Entonces y : 25.01, 24.1001, 24.010001, 24.00100001, ...——> 24

¿Cuántas sucesiones hay que se aproximen infinitamente a 4?

Efectivamente, una infinidad.

Algunos ejemplos de estas sucesiones son:

a) x: 3 , 3 + ½ , 3 + ½ + ¼ , 3 + ½ + ¼ + 1/8 , 3 + ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 , ... ——> 4

Si realizamos las operaciones, esta sucesión se representa de la siguiente forma::

x: 3, 3.5, 3.75, 3.875, 3.9375, ... ——> 4

b) 3.9, 4.01, 3.999, 4.00001, 3.99999, ... ——> 4

c) $\sqrt{15}$, $\sqrt{15.9}$, $\sqrt{15.99}$, $\sqrt{15.999}$, ... ——> 4

¿Cuál piensas que será el comportamiento del valor para la variable dependiente "y", si le asignamos a la variable independiente "x" los valores de cualquier otra sucesión que se aproxime infinitamente a 4?

Efectivamente, la sucesión para la variable dependiente "y" siempre se aproximará infinitamente a 24.

Esto es:

si x: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ... ——> 4
entonces y : $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$, $y(x_4)$, $y(x_5)$, ... ——> 24

Este hecho lo expresamos diciendo: " El límite de la función $y(x) = x^2 + 2x$ cuando x tiende a 4 es 24", y lo representaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 4} y = 24 \quad ó \quad \lim_{x \to 4} y(x) = 24 \quad ó \quad \lim_{x \to 4} (x^2 + 2x) = 24$$

Una generalización de este hecho lo podemos establecer de la siguiente forma.

Consideremos que "z esta en función de x"

¿Cuándo diremos que: $\lim_{x \to b} z(x) = L$?

Efectivamente, cuando todas las sucesiones de valores que se aproximan indefinidamente a "b", al asignar estas a la variable independiente "x", las sucesiones correspondientes para la variable dependiente "z" siempre se aproximan indefinidamente a "L".

¿Cómo se puede verificar que todas las sucesiones correspondientes para la variable dependiente se aproximan infinitamente a L?

Efectivamente, como hay una infinidad de sucesiones que se aproximan infinitamente a b, también hay una infinidad de sucesiones para la variable dependiente. Por lo que, se antoja demasiado difícil verificar que todas se aproximan infinitamente a L.

Por el momento, para considerar que se cumple la situación establecida anteriormente, lo dejaremos a la experiencia que se tiene en las operaciones con números.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \to 2} 5x =$

¿Cómo se obtienen los valores de la variable dependiente?

Efectivamente, al multiplicar por 5 cada uno de los valores que se consideren para la variable independiente "x".

Consideremos ahora una sucesión de valores para la variable independiente que se aproxime infinitamente a 2, sin especificar cuales son estos.

$x: \; x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; \ldots\ldots\ldots \longrightarrow 2$

¿Cuáles son los valores para la variable dependiente?

Efectivamente, los valores para la variable dependiente son:

$5x : 5x_1, \; 5x_2, \; 5x_3, \; 5x_4, \; 5x_5, \; \ldots\ldots\ldots$

¿Qué podemos afirmar de estos valores?

Efectivamente, saber que los valores para la variable independiente "x" se aproximan infinitamente a 2, sin considerar cuales son estos, al multiplicar cada uno por 5, la experiencia nos permite afirmar que: los valores correspondientes para la variable dependiente se aproximan infinitamente a 10. Esto es:

Si $\quad x: \; x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; \ldots\ldots\ldots \longrightarrow 2$

Entonces $5x : \; 5x_1, \; 5x_2, \; 5x_3, \; 5x_4, \; 5x_5, \; \ldots\ldots\ldots \longrightarrow 10$

Por lo cual podemos ahora afirmar que:

$$\lim_{x \to 2} 5x = 10$$

Veremos un ejemplo en particular para tener mayor claridad en lo que afirmamos.

Consideremos para "x" la siguiente sucesión que se aproxima infinitamente a 2.

$x: \; 1.9, \; 1.99, \; 1.999, \; 1.9999, \; \ldots\ldots \longrightarrow 2$

¿Cuáles son los valores para "5x" ?

Efectivamente:

5x: 5(1.9), 5(1.99), 5(1.999), 5(1,9999), ...

Los cuales, al realizar las operaciones sabemos que son:

5x: 9.5, 9.95, 9.995 , 9.9995, ...

Al observar la secuencia que llevan estos valores, sin temor a equivocarnos afirmamos que: Al continuar asignándole valores a "x" de acuerdo a la secuencia que presentan, la sucesión de valores para "5x" se aproxima infinitamente a 10. Esto es:

Si x: 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... ——> 2

Entonces 5x: 9.5, 9.95, 9.995, 9.9995, ... ——> 10

b) $\lim_{x \to 2} x^3 =$

¿Cómo se obtienen los valores para la variable dependiente?

Efectivamente, elevando al cubo los valores que se consideren para la variable independiente.

Consideremos ahora que los valores para la variable independiente hacen que se aproxime infinitamente a 2.

x: b_1, b_2 , b_3, b_4. .... ——> 2

¿Cuáles son los valores para la variable dependiente?
Efectivamente, los valores para la variable dependiente son:

x^3: $(b_1)^3$, $(b_2)^3$, $(b_3)^3$, $(b_4)^3$, ...

¿Qué afirmas de estos valores?

Efectivamente, saber que la sucesión de valores para la variable independiente "x" se aproxima infinitamente a 2, sin importarnos cuales son estos, al elevar al cubo cada uno de ellos, la experiencia nos permite afirmar que: La sucesión de valores correspondientes para la variable dependiente se aproxima infinitamente a 8. Esto es:

si x: b_1, b_2 , b_3, b_4. .... ——> 2

entonces x^3: $(b_1)^3$, $(b_2)^3$, $(b_3)^3$, $(b_4)^3$, ... ——> 8

Podemos ahora afirmar que:

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Veremos un ejemplo en particular respecto a lo que afirmamos.

Consideremos la siguiente sucesión de valores para x, la cual se aproxima infinitamente a 2.

x: 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... ——> 2

¿Cuáles son los valores para x^3?

Efectivamente, los valores de x^3 son:

x^3: $(2.1)^3$, $(2.01)^3$, $(2.001)^3$, $(2.0001)^3$, ...

Al realizar las operaciones tenemos:

x^3: 9.261, 8.120601, 8.012006001, 8.001200060001, ...

Al observar la secuencia que presentan estos, sin temor a equivocarnos afirmamos que: Al continuar indefinidamente asignándole valores a x siguiendo la secuencia que presentan, la sucesión de valores para x^3 se aproxima infinitamente a 8. Esto es:

si x : 2.1 , 2.01 , 2.001 , 2.0001, ... ——> 2
entonces x^3: 9.261, 8.120601, 8.012006001, 8.001200060001, ... ——> 8

c) $\lim_{x \to 2} x^3 + 5x =$

Si vemos la función a la cual vamos a encontrar el límite, nos damos cuenta que es la suma de las funciones anteriores.

¿Cómo se obtienen los valores para la variable dependiente?

Efectivamente, al asignar un valor a la variable independiente "x", se suman los valores para x^3 y $5x$

Ejemplo:

si x= 2.01 tenemos:

$x^3 = (2.01)^3 = 9.261$ y $5x = 5(2.01) = 10.05$

El valor de la variable dependiente es:

$x^3 + 5x = 9.261 + 10.05 = 19.311$

Consideraremos ahora que los valores para la variable independiente son los de una sucesión que se aproxima infinitamente a 2.

x: d_1, d_2, d_3, d_4, ... ——> 2

¿Cuáles son los valores para la variable dependiente?

Efectivamente, los valores para la variable dependiente son;

$x^3 + 5x : (d_1)^3 + 5d_1 , \quad (d_2)^3 + 5d_2 , \quad (d_3)^3 + 5d_3 , \quad (d_4)^3 + 5d_4, \quad \ldots\ldots\ldots$

¿Qué afirmamos respecto a esta sucesión?

Efectivamente, saber que la sucesión de valores para la variable independiente "x" se aproxima infinitamente a 2, sin temor a equivocarnos la experiencia nos permite afirmar que: Los valores para x^3 y $5x$ se aproximan infinitamente a 8 y 10 respectivamente, por lo que, la suma de los mismos se aproxima infinitamente a la suma de 8 y 10. Esto es:

$$\lim_{x \to 2} \quad x^3 + 5x = 8 + 10 = 18$$

En lo sucesivo, cuando a una variable por ejemplo "x", los valores que se consideren para ésta siempre se aproximan infinitamente a un valor b, lo expresaremos brevemente diciendo "x tiende a b", y lo representaremos de la forma "x –> b".

Bajo estas consideraciones, las siguientes expresiones tienen el mismo significado.

a) $\lim_{x \to b} \quad z(x) = L$

b) si $x \longrightarrow b$
entonces $z(x) \longrightarrow L$

Consideremos ahora una función z (x).

¿Cuándo se puede afirmar que límite de z (x) cuando x tiende a b no existe?. Es decir:

$$\lim_{x \to b} \quad z(x) \text{ no existe}$$

efectivamente, si recordamos lo que debe acontecer para establecer el límite de una función, se considera que el límite no existe cuando se cumpla alguna de las siguientes:

a) Existan dos sucesiones que tiendan a "b" tales que, al asignar estas a la variable independiente "x", las sucesiones para la variable dependiente "z" tienden a valores diferentes. Esto es:

si $x: \; b_1, \; b_2, b_3, \; b_4, \; \ldots\ldots \longrightarrow b$
y
$x: \; d_1, \; d_2, d_3, \; d_4, \; \ldots\ldots \longrightarrow b$

entonces:
$z(x): \; z(b_1), z(b_2), z(b_3), z(b_4), \; \ldots\ldots \longrightarrow L_1$
y
$z(x): \; z(d_1), z(d_2), z(d_3), z(d_4), \; \ldots\ldots \longrightarrow L_2$

$L_1 \neq L_2$

b) Existe una sucesión que tiende a "b" de tal forma que, al asignar estos valores a la variable independiente "x", la sucesión de valores para la variable dependiente z no tiende a valor alguno. Esto es:

si $\quad x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \; \ldots\ldots \longrightarrow b$

entonces $z(x): \; z(x_1),\; z(x_2),\; z(x_3),\; z(x_4),\; z(x_5) \; \ldots\ldots$ no tiende a valor alguno

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

Para verificar que este límite no existe, vamos a considerar dos sucesiones en particular que tiendan a cero, considerar estos valores para la variable independiente "x" y determinar en cada caso lo que acontece con el valor correspondiente para la variable dependiente.

si $\quad x: \quad 1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; 1/8, \; \ldots\ldots \longrightarrow 0$

entonces $2^{\frac{1}{x}}: \; 2^{\frac{1}{1}}, \; 2^{\frac{1}{1/2}}, \; 2^{\frac{1}{1/4}}, \; 2^{\frac{1}{1/8}}, \; \ldots\ldots$

Como "$2^{\frac{1}{1/x}} = 2^x$" cuando x es un número positivo, al realizar las operaciones tenemos:

$$2^{\frac{1}{x}}: \; 2^1, \quad 2^2, \quad 2^4, \quad 2^8, \; \ldots\ldots$$
$$2^{\frac{1}{x}}: \; 2, \quad 4, \quad 16, \quad 256, \; \ldots\ldots \longrightarrow \infty$$

Asignemos ahora a la variable independiente x la siguiente sucesión que también tiende a 0.

si $\quad x: \quad -1, \; -\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{4}, \; -1/8, \; \ldots\ldots \longrightarrow 0$

entonces $2^{\frac{1}{x}}: \; 2^{\frac{1}{-1}}, \; 2^{\frac{1}{-1/2}}, \; 2^{\frac{1}{-1/4}}, \; 2^{\frac{1}{-1/8}}, \; \ldots\ldots$

Como "$2^{\frac{1}{-1/x}} = 2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}$" cuando x es un número positivo, al realizar las operaciones tenemos:

$$2^{\frac{1}{x}}: \; 2^{-1}, \quad 2^{-2}, \quad 2^{-4}, \quad 2^{-8}, \; \ldots\ldots$$
$$2^{\frac{1}{x}}: \; \frac{1}{2^1}, \; \frac{1}{2^2}, \; \frac{1}{2^4}, \; \frac{1}{2^8}, \; \ldots\ldots$$
$$2^{\frac{1}{x}}: \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{16}, \; \frac{1}{256}, \; \ldots\ldots \longrightarrow 0$$

Sabemos ahora que existen dos sucesiones particulares que tienden a 0 con la siguiente característica: Al asignar estos valores a la variable independiente "x", las sucesiones correspondientes para la variable dependiente tienden a valores diferentes.

Podemos ahora afirmar que:

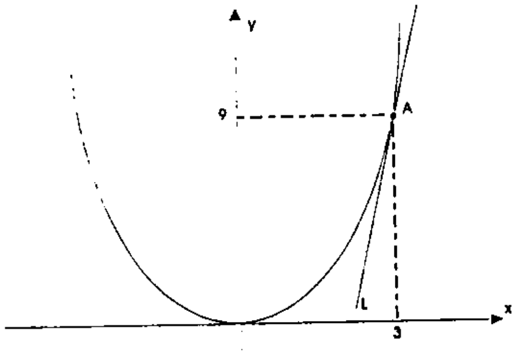
$$\lim_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}} \text{ no existe}$$

Si volvemos a mirar los problemas en los que utilizamos el método de aproximación, para llegar a la solución ahora con este nuevo concepto, nos damos cuenta que ésta se obtiene mediante el límite de una función que se establece en cada caso.

Formalizaremos ahora este tipo de límites, los cuales nos llevan a establecer dos conceptos fundamentales para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral: "Derivada e Integral".

V. DERIVADA

En uno de los problemas que vimos en un principio se pide encontrar la pendiente de la recta tangente "L" a la gráfica de la ecuación $y = x^2$ en el punto A (3,9)



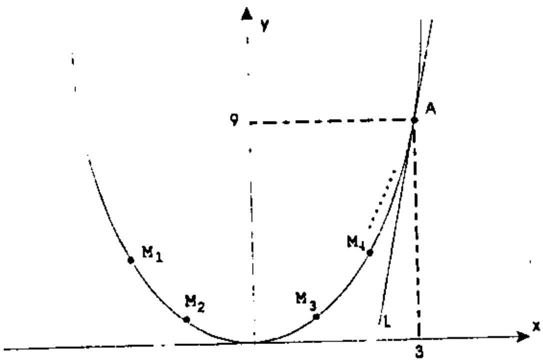
La ecuación "$y = x^2$" describe una función con regla de correspondencia "$y(x) = x^2$".

Esta forma permite representar la ordenada de un punto de diferentes formas.

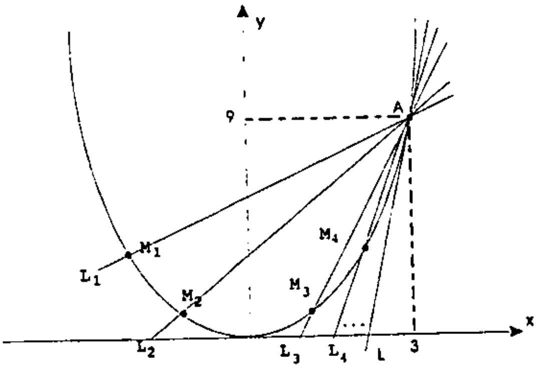
Ejemplos:

a) El punto M(x,y) se representa también como: $M(x, y(x))$ ó $M(x, x^2)$
b) El punto R(a,b) se representa también como : $R(a, y(a))$ ó $R(a, a^2)$
c) el punto A(3,9) se representa también como : $A(3, y(3))$ ó $A(3, 3^2)$

Para obtener la solución al problema se consideran algunas posiciones (M_1 , M_2 , M_3, M_4, etc.) del punto M (x, y) que se mueve sobre la gráfica, aproximándose cada vez más al punto A (3,9).



Posteriormente se encuentra el valor de la pendiente de la recta secante MA a la gráfica de la ecuación "$y = x^2$", para cada una de las posiciones que se consideran del punto M (x, y).

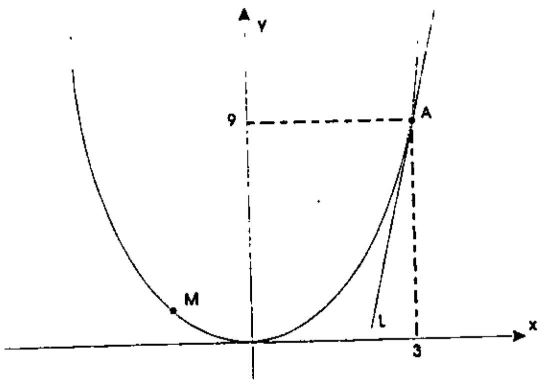


Por último, se observan estos valores para establecer el valor al cual tiende la variable dependiente m_{MA}, al considerar que el punto M(x,y) se aproxima infinitamente al punto A(3,9).

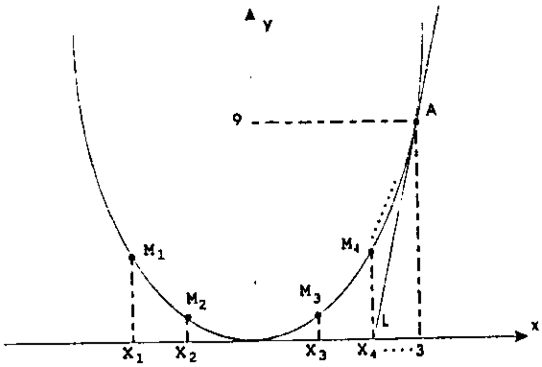
El valor al cual tiende m_{MA} es la solución al problema.

Veremos ahora como establecemos este proceso utilizando la idea de límite.

Consideremos que M(x,y) es un punto de la gráfica de la función $y(x) = x^2$, diferente al punto A(3,9).



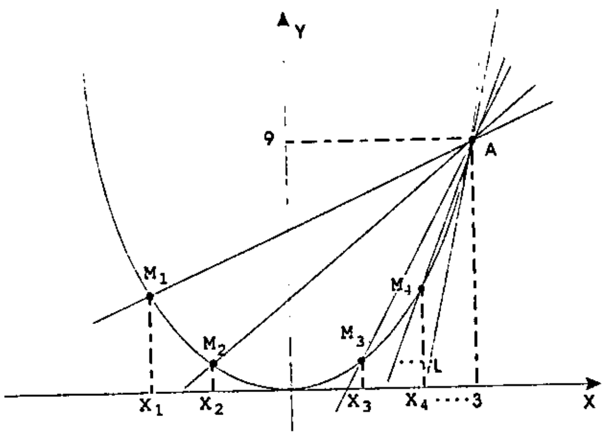
¿Cómo se establece que el punto M (x,y) se mueve sobre la gráfica de tal forma que, las posiciones que toma (M_1, M_2, M_3, M_4, ...) hacen que se aproxime indefinidamente al punto A (3,9)?



Efectivamente, considerando que x ——> 3. Esto es:

$x : x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots \longrightarrow 3$

¿Cómo se obtiene el valor de la pendiente de la recta secante MA, para cada una de las posiciones del punto M(x,y)?.



Efectivamente, sabemos que la pendiente de una recta es el cociente de la resta de las ordenadas entre la resta de las abscisas de dos puntos por donde pasa.

Como la recta MA pasa por los puntos M(x,y) y A(3,9) tenemos:

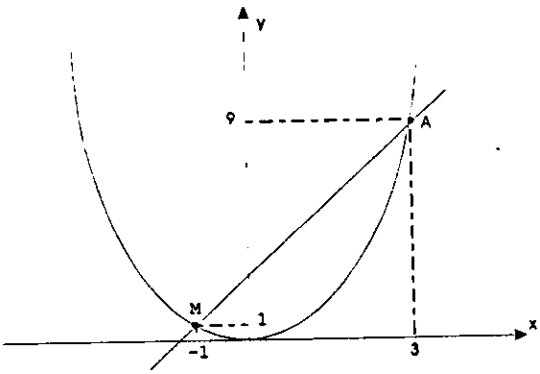
$$m_{MA} = \frac{y-9}{x-3}$$

Como $y = x^2$, al sustituir el valor de "y" en esta expresión tenemos:

$$m_{MA} = \frac{y-9}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se obtiene el valor de la pendiente de la recta secante MA, para cualquier posición del punto M sobre la gráfica.

Ejemplo:
Una posición particular del punto M sobre la gráfica es cuando el valor de la abscisa es por ejemplo –1. La pendiente de la recta MA en esta posición es:



Como $x = -1$ tenemos:

$m_{MA} = x + 3$
$m_{MA} = -1 + 3 = 2$

¿Cómo se obtiene el valor al cual tiende la variable m_{MA}, al considerar que el punto M(x,y) se aproxima infinitamente al punto A (3,9)?

Efectivamente, encontrando el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} x + 3$$

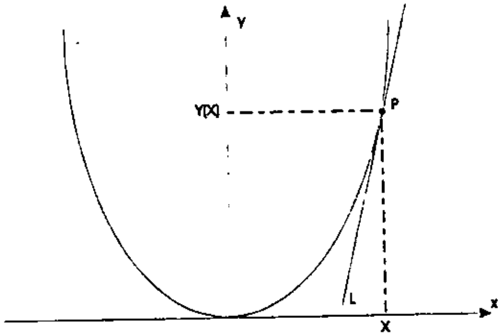
Como $\lim_{x \to 3} x + 3 = 6$, podemos ahora afirmar que:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^2$ en el punto A (3,9) es 6.

Veremos ahora una primera generalización de este hecho, para lo cual, consideraremos que el punto de tangencia es un punto P cualquiera de la gráfica.

Problema:

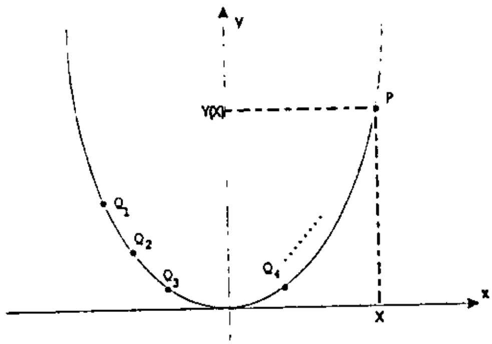
Obtener la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función " $y(x) = x^2$ " en un punto cualquiera P(x, y(x)) de la misma.



¿Cómo se obtiene la pendiente de la recta tangente L?.

Efectivamente, siguiendo un procedimiento similar al anterior.

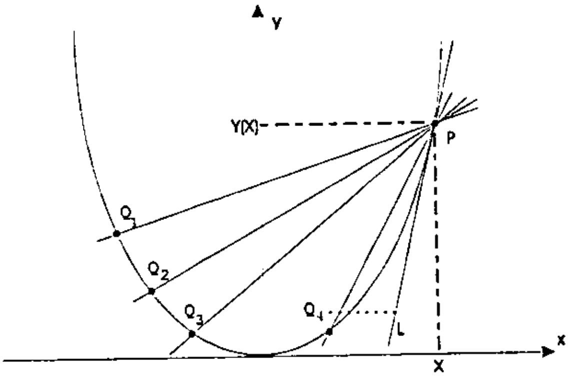
Iniciaremos considerando que un punto Q(b , y(b)) se mueva sobre la gráfica de la función de tal forma que, las posiciones que toma(Q_1,Q_2,Q_3, ...) hacen que se aproxime indefinidamente al punto P(x , y(x)).



¿Cuál es la condición para establecer que el punto Q se mueve sobre la gráfica aproximándose indefinidamente al punto P?.

Efectivamente, considerando que "b ——> x", es decir, el valor para "b" se aproxima infinitamente a "x".

Se considera ahora la recta secante PQ para cada posición del punto Q, y la pendiente de las mismas.



Sabemos que la posición de la recta PQ se aproxima infinitamente a la recta L.

También sabemos que la pendiente de la recta PQ para cada una de sus posiciones se obtiene de la siguiente forma:

La recta pasa por los puntos P(x,y(x)) y Q(b,y(b))

Como la regla de correspondencia de la función es $y(x) = x^2$, saber que las posiciones del punto P están sobre la gráfica de esta función, nos lleva a establecer que $y(b) = b^2$ para todos los valores que se consideren para "b", por lo que:

$$m_{PQ} = \frac{\text{resta de ordenadas}}{\text{resta de abscisas}} = \frac{y(x) - y(b)}{x - b} = \frac{x^2 - b^2}{x - b} = \frac{(x - b)(x + b)}{x - b} = x + b$$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se obtiene el valor de la pendiente de la recta PQ, para cualquier posición de los puntos P y Q sobre la gráfica de esta función.

$$m_{PQ} = x + b$$

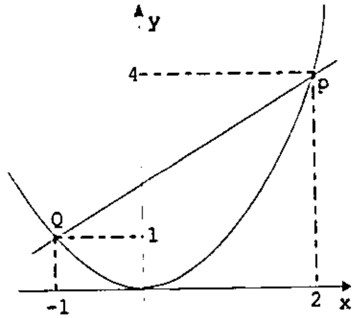
¿Qué se necesita conocer para obtener el valor de la pendiente de la recta PQ, aplicando esta fórmula?.

Efectivamente, únicamente el valor de la abscisa de cada uno de estos puntos.

Ejemplos:

Consideremos que las coordenadas del punto P son : P(2,4).

1) ¿Cuál es la pendiente de la recta PQ, considerando que la posición del punto Q tiene coordenadas Q(−1,1)?.



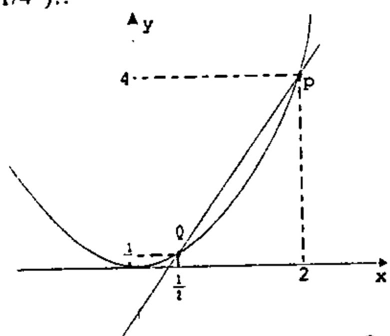
Efectivamente, como las coordenadas de los puntos P y Q son P(2,4) y Q(−1,1), los valores particulares de "x" y "b" son 2 y −1 respectivamente, por lo que la pendiente de la recta en esta posición es:

$m_{PQ} = x + b$

$m_{PQ} = 2 + (-1)$

$m_{PQ} = 1$

2) ¿Cuál es la pendiente de la recta PQ, considerando que la posición del punto Q tiene coordenadas Q(1/2 , 1/4)?.



Efectivamente, saber que las coordenadas de los puntos P y Q son P(2,4) y Q(1/2 , 1/4), establece que los valores de "x" y "b" son 2 y 1/2 respectivamente. La pendiente de la recta en esta posición es:

$m_{PQ} = x + b$

$m_{PQ} = 2 + (1/2)$

$m_{PQ} = 5/2$

Una consideración que se debe tener presente en esta fórmula como en cualquier otra, se relaciona con los símbolos que se utilizan al momento de escribir la misma.

Al observar una fórmula, no debe interpretarse que sólo puede aplicarse en los casos que se utilice la simbología que presenta la misma.

Debemos pensar en lo que representa cada uno de los símbolos que se utilizan y aplicarla en todos los casos cuyo contenido es el mismo.

De esta forma tenemos por ejemplo que la fórmula anterior es conveniente expresarla diciendo: La pendiente de la recta que pasa por dos puntos de la gráfica de la función $y(x) = x^2$, es la suma de las abscisas de estos dos puntos.

Esta forma de expresar la fórmula, indica claramente el camino que a seguir para obtener la pendiente de una recta con esas características, independientemente de la forma en que se representen los puntos y las coordenadas de los mismos.

Ejemplos.

1) Dos puntos de la gráfica de la función $y(x) = x^2$ son A(1,1) y B(3,9). Hallar la pendiente de la recta AB.

Como la recta AB pasa por dos puntos de esta gráfica con abscisas 1 y 3 tenemos:

$m_{AB} = 1 + 3 = 4$

2) Dos puntos de la gráfica de la función $y(x) = x^2$ son $S(s, s^2)$ y $R(r, r^2)$. Cuál es la pendiente de la recta MR.

Como la recta pasa por dos puntos de esta gráfica con abscisas m y r tenemos:

$m_{SR} = s + r$

Muy bien, tenemos la formula para encontrar la pendiente de cualquier recta que pasa por dos puntos de la gráfica de la función $y(x) = x^2$.

Por último y para dar solución al problema, sólo nos falta establecer el valor al cual tiende m_{PQ}, al considerar que $b \longrightarrow x$.. Es decir, el valor al cual se aproxima infinitamente la pendiente de la recta PQ, al considerar que la posición del punto Q se aproxima infinitamente al punto P.

¿Cómo se obtiene este valor?.

Efectivamente, mediante el siguiente límite:

$$\lim_{b \to x} x + b$$

¿Cuál es el valor de este límite?.

Efectivamente:

$$\lim_{b \to x} x + b = x + x = 2x$$

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función $y(x) = x^2$ en el punto $P(x,y(x))$?.

Efectivamente, la pendiente de la recta tangente L es 2x.

Tenemos ahora una fórmula para obtener el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^2$. Ésta puede considerarse como la regla de correspondencia de una función, la cual escribiremos de la siguiente forma:

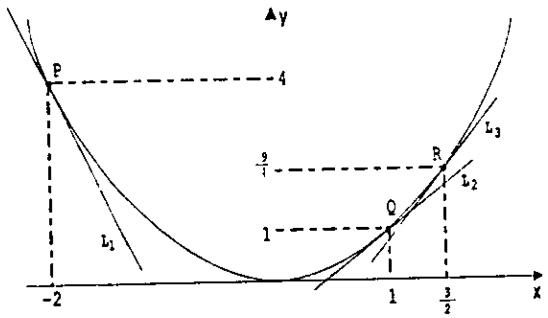
$$y'(x) = 2x$$

¿Qué se necesita conocer para obtener el valor de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^2$?.

Efectivamente, el valor de la abscisa del punto de tangencia.

Ejemplo.

¿Cuál es el valor de la pendiente de las rectas tangentes L_1, L_2 y L_3, a la gráfica de la función $y(x) = x^2$, en los puntos P(–2,4), Q(1,1) y R(3/2,9/4) respectivamente?.



Efectivamente, la pendiente de las rectas L_1, L_2 y L_3, las cuales representamos con m_1, m_2 y m_3 respectivamente son:

$m_1 = y'(1) = 2(1) = 2$
$m_2 = y'(2) = 2(2) = 4$
$m_3 = y'(3) = 2(3) = 6$

A la función con regla de correspondencia $y'(x) = 2x$ se le conoce como la derivada de la función $y(x) = x^2$.

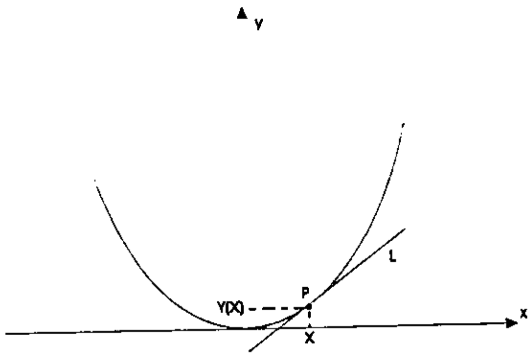
Sabemos ahora que: La derivada de una función es la función que establece el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica.

Hay una forma en particular que usualmente se utiliza para representar el valor de la abscisa del punto que se mueve sobre la gráfica en un proceso como el anterior.

Esta representación que utilizaremos en adelante, es la más usual en los textos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral.

Para familiarizamos con la representación que se va a utilizar, resolveremos nuevamente el problema anterior.

Hallar la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función $y(x) = x^2$, en el punto $P(x,y(x))$.



Sabemos que la derivada de la función $y(x) = x^2$ determina el valor de la pendiente de la recta tangente L.

Consideremos un punto Q sobre esta gráfica, diferente al punto P.

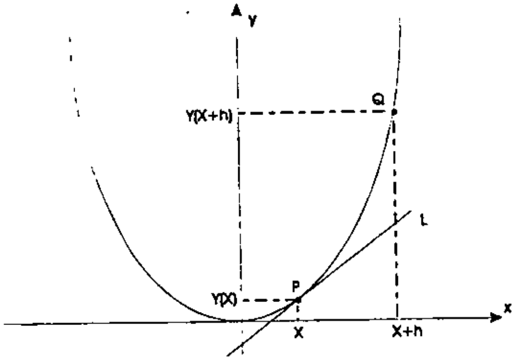
A la abscisa del punto Q la representaremos de la forma "x +h".

¿Cómo establecemos que Q y P son diferentes?

Efectivamente, considerando que $h \neq 0$.

¿Cuáles son las coordenadas del punto Q?.

Efectivamente, las coordenadas de este punto son $Q(x + h, y(x + h))$



¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta PQ?

Efectivamente, como la recta pasa por los puntos P(x , y(x)) y Q(x + h , y(x + h)), la pendiente es:

$$m_{PQ} = \frac{\text{resta de ordenadas}}{\textit{resta}\text{ de abscisas}} = \frac{y(x+h) - y(x)}{(x+h) - x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

como "$y(x) = x^2$" y "$y(x + h) = (x + h)^2$", tenemos ahora que:

$$m_{PQ} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

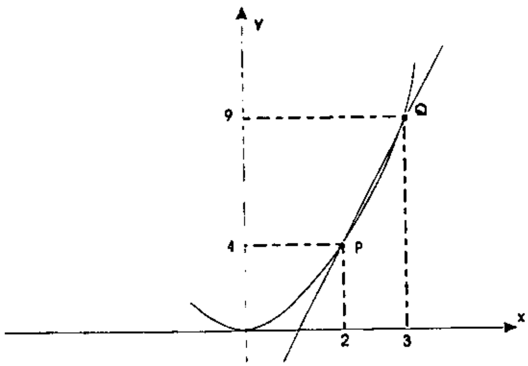
$$= \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Como P y Q son dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función " $y(x) = x^2$ ", tenemos ahora la fórmula " $m_{PQ} = 2x + h$ " para obtener la pendiente de cualquier recta secante a esta gráfica.

Para obtener la pendiente es suficiente conocer el valor de "x" y "h", y aplicar la fórmula.

Veremos unos ejemplos para tener mayor claridad.

1.- Consideremos que la recta pasa por los puntos P(2,4) y Q(3,9).



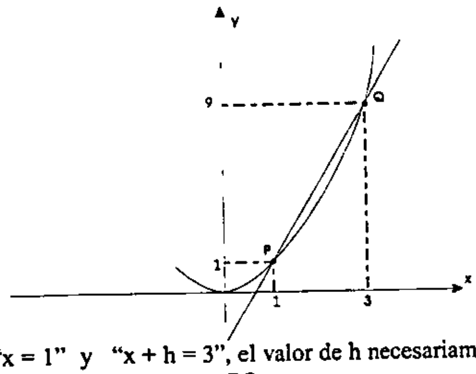
Como "x" y "x + h" representan las abscisas de los puntos de la gráfica por donde pasa la recta secante, si consideramos que el valor de "x" es la abscisa del punto P y "x + h" la abscisa del punto Q, esto es, "x =2 " y " x + h = 3 ", tenemos:

$x + h = 3$
$2 + h = 3$
$h = 3 - 2$
$h = 1$

Sabemos ahora que los valores para "x" y "h" en esta caso en particular son 2 y 1 respectivamente, por lo que, la pendiente de esta recta es:

$m_{PQ} = 2x + h$
$m_{PQ} = 2(2) + 1$
$m_{PQ} = 5$

2.- La recta secante pasa por los puntos P (1,1) y Q(3,9).

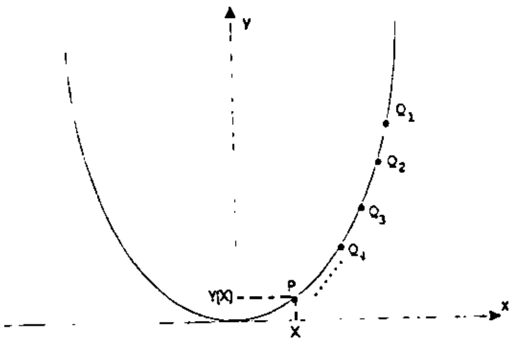


Considerando que "x = 1" y "x + h = 3", el valor de h necesariamente es 2, por lo que el valor de la pendiente de la recta secante PQ es:

$m_{PQ} = 2x + h$
$m_{PQ} = 2(1) + 2$
$m_{PQ} = 4$

Consideremos ahora que el punto $Q(x + h, y(x + h))$ se mueve sobre la gráfica, aproximándose indefinidamente al punto $P(x, y(x))$

¿Cómo se establece que las posiciones para el punto Q(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ...), hacen que se aproxima infinitamente al punto P?.



Efectivamente, considerando que "$x + h \longrightarrow x$".

¿Cuál es la condicionante para establecer que "$x + h \longrightarrow x$".

Efectivamente, cuando "$h \longrightarrow 0$".

Veremos un ejemplo en particular para tener mayor claridad.

Consideremos para "h" la siguiente sucesión de valores que tiende a "0".

$h:\ 1\ , 0.1\ , 0.01\ , 0.001\ , 0.0001\ , \ldots\ldots\ldots \longrightarrow 0$

Al considerar estos valores para "h", los valores para "x + h" son:

$x + h : x + 1\ , x + 0.1\ , x + 0.01\ , x + 0.001\ , x + 0.0001\ , \ldots\ldots$

Es claro que, independientemente del valor que se considere para "x", esta sucesión de valores es tal que:

$x + h : x + 1\ , x + 0.1\ , x + 0.01\ , x + 0.001\ , x + 0.0001\ , \ldots\ldots \longrightarrow x$

Ejemplos.

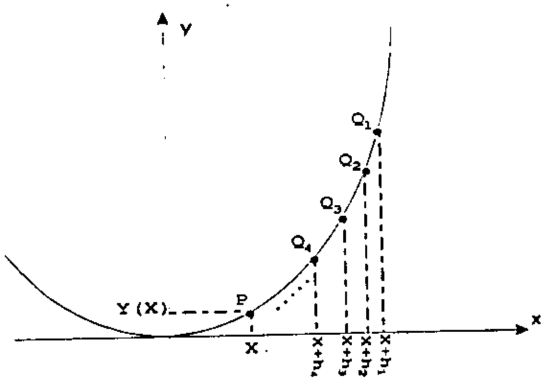
— si $x = 2$ tenemos:

$2 + h : 2 + 1\ , 2 + 0.1\ , 2 + 0.01\ , 2 + 0.001\ , 2 + 0.0001\ , \ldots\ldots$
$2 + h :\ 3\ ,\ 2.1\ ,\ 2.01\ ,\ 2.001\ ,\ 2.0001\ , \ldots\ldots \longrightarrow 2$

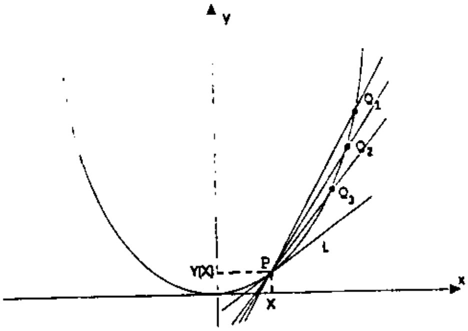
— si x = 4 tenemos:
4 + h : 4 + 1 , 4 + 0.1 , 4 + 0.01 , 4 + 0.001 , 4 + 0.0001 , ...
4 + h : 5 , 4.1 , 4.01 , 4.001 , 4.0001 , ... ——> 2

Sabemos ahora que: Para que la posición del punto Q(x + h , y(x + h)), al moverse sobre la gráfica de la función "$y(x) = x^2$ "se aproxime infinitamente al punto P(x,y(x)), es suficiente considerar que "h ——> 0"

h : $h_1, h_2, h_3, h_4,$ .... ——> 0



Por último, para obtener la pendiente de la recta tangente L, sólo nos falta establecer el valor al cual tiende m_{PQ}, al considerar que h ->0. Esto es, el valor al cual se aproxima infinitamente la pendiente de la recta PQ, al considerar que el punto Q se mueve sobre la gráfica aproximándose infinitamente al punto P.



¿Cómo se obtiene este valor?.

Efectivamente, encontrando el siguiente limite:

$$\lim_{h \to 0} 2x + h =$$

Como $\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$, podemos ahora afirmar que:

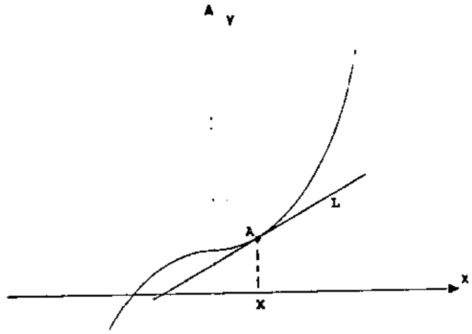
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función " $y(x) = x^2$ " en un punto cualquiera $P(x,y(x))$ de la misma es "2x".

Es claro que se ha obtenido la misma solución que anteriormente.

Para comprender mejor este proceso en el que se utilizó "x + h" para representar la abscisa del punto que se mueve sobre la gráfica de la función $y(x) = x^2$, resolveremos otros problemas siguiendo un procedimiento similar al anterior.

Como nos remitiremos únicamente a lo algebraico, es conveniente que generes una gráfica para una mayor comprensión.

1) Hallar la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función " $y(x) = x^3 + 2$ ", en el punto $A(x,y(x))$.



Consideremos que $B(x + h, y(x + h))$ es un punto de esta gráfica, diferente al punto $A(x, y(x))$.

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{y(x+h) - y(x)}{x+h-x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Como A y B son dos puntos de la gráfica tenemos:

$$y(x) = x^3 + 2$$

$$y(x+h) = (x+h)^3 + 2 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2$$

El valor de la pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2 - (x^3 + 2)}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

Obtendremos ahora el valor al que se aproxima infinitamente la pendiente de la recta AB, al considerar que el punto B se aproxima indefinidamente al punto A.

Si h–>0, el valor al que tiende m_{AB} es:

$$\lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

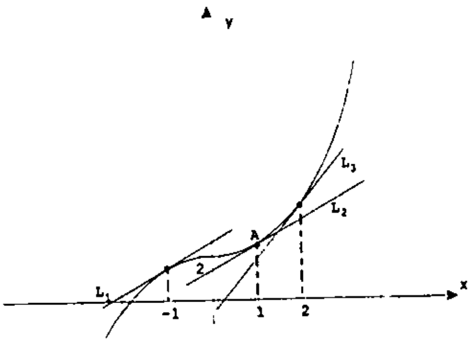
Sabemos ahora que: La pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función "$y(x) = x^3 + 2$" en un punto cualquiera de la misma es "$3x^2$"

Tenemos ahora una fórmula para obtener la pendiente de cualquier recta tangente a esta gráfica. Ésta se considera como la regla de correspondencia de una función que le llamamos la derivada y se representa de la siguiente forma:.

$$y'(x) = 3x^2 \ .$$

Ejemplo.

Hallar el valor de la pendiente de las rectas tangentes L_1, L_2 y L_3 a la gráfica de la función $y(x) = x^3 + 2$, en los puntos A, B y C con abscisa -1, 1 y 2 respectivamente.



Representaremos a las pendientes de las rectas L_1, L_2 y L_3 con m_1, m_2 y m_3 respectivamente.

Como la derivada de la función $y(x) = x^3 + 2$ es la función con regla de correspondencia $y'(x) = 3x^2$, tenemos ahora que::

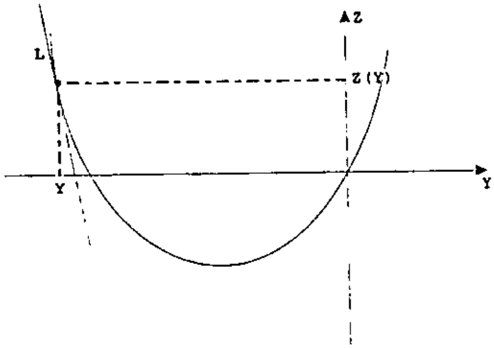
$m_1 = y'(-1) = 3(-1)^2 = 3$

$m_2 = y'(1) = 3(1)^2 = 3$

$m_3 = y'(2) = 3(2)^2 = 12$

2) Hallar la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función $z(y) = 2y^2 + 4y$ en el punto P(y, z(y)). Es decir, en el punto P(y, $2y^2 + 4y$).

En esta función la variable independiente es "y" y la dependiente es "z".



Si prescindimos aun más de la explicación, nos limitamos únicamente a lo siguiente.

La pendiente de la recta tangente L es el valor del siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{z(y+h)-z(y)}{h}$$

El valor de z(y) y z(y + h) es:

$$z(y) = 2y^2 + 4y$$

$$z(y+h) = 2(y+h)^2 + 4(y+h) =$$
$$2(y^2 + 2yh + h^2) + 4y + 4h = 2y^2 + 4yh + 2h^2 + 4y + 4h$$

El valor de $\frac{z(y+h)-z(y)}{h}$ es:

$$\frac{z(y+h)-z(y)}{h} = \frac{2y^2 + 4yh + 2h^2 + 4y + 4h - (2y^2 + 4y)}{h} = \frac{4yh + 2h^2 + 4h}{h}$$

$$= \frac{h(4y+2h+4)}{h} = 4y + 2h + 4$$

Tenemos ahora que::

$$\lim_{h \to 0} \frac{z(y+h)-z(y)}{h} = \lim_{h \to 0} 4y + 2h + 4 = 4y + 4$$

Sabemos ahora que la pendiente de la recta tangente L es $4y + 4$.

También sabemos que se puede establecer una fórmula para obtener la pendiente de cualquier recta tangente a esta gráfica. Ésta se considera como la regla de correspondencia de una función que se le conoce como la derivada y se representa de la siguiente forma:

$$z'(y) = 4y + 4$$

3) Hallar la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^3 + 5x$

Ahora que ya comprendemos ampliamente lo que estamos haciendo, para obtener la respuesta nos limitaremos únicamente a lo siguiente.

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 5(x+h) - (x^3 + 5x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 5x + 5h - x^3 - 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 5 = 3x^2 + 5$$

La pendiente de la recta tangente en un punto P(x,y(x)) de la gráfica de la función $y(x) = x^3 + 5x$ es $3x^2 + 5$.

La derivada de la función $y(x) = x^3 + 5x$ es la función $y'(x) = 3x^2 + 5$.

4) hallar la derivada de la función $z(x) = 3x^2 + 3$

$$z'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 3 - (3x^2 + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \to 0} 6x + 3h = 6x$$

La derivada de la función $z(x) = 3x^2 + 3$ es la función $z'(x) = 6x$

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $z(x) = 3x^2 + 3$, en el punto R(2,15)?.

Efectivamente, la pendiente m de esta recta es:

$m = z'(2) = 6(2) = 12$

5) Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^2 + 3x$, en el punto A(1,4).

Sabemos que $y'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$

En este caso se nos pide encontrar únicamente la pendiente cuando el punto de tangencia es A(1,4), por lo que, nos limitaremos a encontrar la derivada de la función cuando x = 1.

$y(1) = 1^2 + 3(1) = 4$

$y(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h) = 1^2 + 2(1)(h) + h^2 + 3 + 3h = h^2 + 5h + 4$

$$\frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \frac{h^2 + 5h + 4 - 4}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h+5)}{h} = h + 5$$

$$y'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \to 0} h + 5 = 5$$

Sabemos ahora que la derivada de la función $y(x) = x^2 + 3x$ en x = 1 es 5. Esto es, $y'(1) = 5$.

Podemos ahora afirmar que 5 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x) = x^2 + 3x$, en el punto A(1,4).

Muy bien, se ha utilizando un lenguaje matemático para describir en forma breve el método de aproximación para obtener la pendiente de rectas tangentes. Este método que en un principio pudo parecernos engorroso, se presente ahora como un proceso simple y sencillo.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y(x) en el punto P(x,y(x)), es el valor del siguiente limite.

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Al relacionar este hecho con las funciones se establece lo siguiente.

La derivada de la función y(x), es la función y'(x) con regla de correspondencia:

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

¿Qué tan importante puede considerarse en este momento saber encontrar la pendiente de rectas tangentes a una gráficas?.

Efectivamente, resulta poco atractivo si nos quedamos solamente con este hecho. Sin embargo, si empezamos a descubrir todo aquello que puede relacionarse con la pendiente de rectas tangentes, se puede encontrar un mundo interesante.

En realidad, al resolver algunos de los problemas que se han planteado hasta este momento hemos penetrado en ese mundo.

1) Se tira una pelota desde lo alto de un edificio y ésta llega al piso 7 segundos mas tarde. Considerando el hecho que la distancia "d" metros que recorre la pelota al cabo de un tiempo "t" segundos se obtiene por la ecuación $d = 5t^2$. ¿Cuál es la velocidad a la que viaja la pelota al cabo de 4 segundos de que se deja caer?.

Efectivamente, sabemos ahora que la velocidad de la pelota en el segundo 4 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $d(t) = 5t^2$, en el punto Q(4, d(4)). Esto es, la derivada de la función en $t = 4$.

$$d(4+h) = 5(4+h)^2 = 5(16+8h+h^2) = 80+40h+5h^2$$

$$d(4) = 5(4)^2 = 5(16) = 80$$

$$\frac{d(4+h)-d(4)}{h} = \frac{80+40h+5h^2-80}{h} = \frac{40h+5h^2}{h} = \frac{h(40+5h)}{h} = 40+5h$$

$$d'(4) = \lim_{h \to 0} 40+5h = 40$$

¿Cuál es la velocidad de la pelota en segundo 4?

Efectivamente, la velocidad de la pelota en este momento es 40 m/seg.

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $d(t) = 5t^2$ en el punto P(4,80)?.

Efectivamente, la pendiente de esta recta tangente es 40.

¿Cuál es la derivada de la función $d(t) = 5t^2$, para $t = 4$?.

Efectivamente, la derivada de esta función en $t = 4$ es 40. Esto es $d'(4) = 40$.

¿ Cuál es la derivada de la función $d(t) = 5t^2$?.

Efectivamente:

$$d(t+h) = 5(t+h)^2 = 5(t^2 + 2th + h^2) = 5t^2 + 10th + 5h^2$$

$$\frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \frac{5t^2 + 10\,t\,h + 5h^2 - 5t^2}{h} = \frac{10\,t\,h + 5h^2}{h} = \frac{h(10t + 5h)}{h} = 10t + 5h$$

$$d'(t) = \lim_{h \to 0} 10\,t + 5h = 10t$$

La derivada es la función $d'(t)$ con regla de correspondencia $d'(t) = 10t$

¿Qué se puede obtener con la función derivada $d'(t) = 10t$?.

Efectivamente, con ella se puede obtener:

a) La velocidad de la pelota en cualquier momento durante su caída.

Ejemplo.

Como $d'(1) = 10(1) = 10$, $d'(2) = 10(2) = 20$ y $d'(3) = 10(3) = 30$, la velocidad de la pelota en los segundos 1, 2 y 3 es: 10 m/seg , 20 m/seg y 30 m/seg respectivamente.

b) la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica de la función .

Ejemplo.

Como $d'(1) = 10(1) = 10$, $d'(2) = 10(2) = 20$ y $d'(3) = 10(3) = 30$, la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función $d(t) = 5t^2$, en los puntos $A(1,d(1))$, $B(2,d(2))$ y $C(3,d(3))$ son 10, 20 y 30 respectivamente.

c) La derivada de la función $d(t) = 5t^2$ en cualquier valor de t del dominio.

Ejemplo.

La derivada de esta en $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ es:

$d'(1) = 10(1) = 10$, $\quad d'(2) = 10(2) = 20 \quad$ y $\quad d'(3) = 10(3) = 30$

2) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno rectangular de perímetro 400m y mayor superficie?.

Cuando se trató este problema no llegamos a la solución, sin embargo, nos dimos cuenta de lo siguiente.

— La función $S(L) = 200\ L - L^2$ permite obtener la superficie de cualquier terreno rectangular de perímetro 400m y largo L.

— El largo del terreno de mayor superficie es el valor de la abscisa del punto cuya recta tangente tiene pendiente cero.

El ancho del terreno de perímetro 400m y largo L se obtiene con la función $A(L) = 200 - L$

¿Cuál es la derivada de la función $S(L) = 200\ L - L^2$?.

Efectivamente:

$$S(L + h) = 200(L + h) - (L + h)^2 = 200L + 200h - L^2 - 2Lh - h^2$$

$$\frac{S(L + h) - S(L)}{h} = \frac{(200L + 200h - L^2 - 2Lh - h^2) - (200L - L^2)}{h} = \frac{200h - 2Lh - h^2}{h}$$

$$= \frac{h(200 - 2L - h)}{h} = 200 - 2L - h$$

$$S'(L) = \lim_{h \to 0} 200 - 2L - h = 200 - 2L$$

La derivada es la función con regla de correspondencia $S'(L) = 200 - 2L$

¿Cuál es el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica de la función $S(L) = 200\ L - L^2$

Efectivamente, $200 - 2L$

¿Tenemos ahora los elementos para dar solución al problema?.

Efectivamente, ya se puede obtener la solución.

Como la pendiente de la recta tangente debe ser cero, el largo "L" del terreno de mayor superficie es tal que:

$$200 - 2L = 0$$

por lo que:

$$200 = 2L$$

$$L = \frac{200}{2} = 100$$

Sabemos ahora que: Si la recta tangente tiene pendiente cero, el valor de la abscisa del punto de tangencia debe ser 100.

Si $L = 100$ tenemos:

$A(100) = 200 - 100 = 100$

Por lo que:

Las dimensiones del terreno rectangular de perímetro 400m y mayor superficie posible son: L = 100m y A = 100m.

Cuando se plantearon este tipo de problemas, seguramente no imaginamos que ellos se pueden resolver encontrando la pendiente de una recta tangente a una gráfica, es decir, encontrando la derivada de una función en un valor.

El mundo de las aplicaciones de la derivada de una función es tan amplio que difícilmente se puede abarcar en su totalidad. Para ello, es necesario tener amplios conocimientos de la Física, Química, Ingeniería etcétera.

Algunos ejemplos de problemas que se pueden resolver utilizando la derivada de una función son:

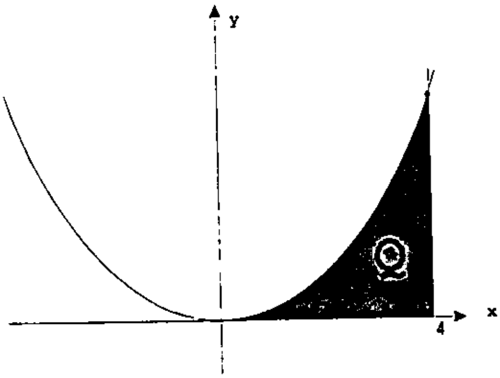
— Se van a construir recipientes cilíndricos metálicos de base circular con ambas tapas y capacidad de un litro. Cuáles son las dimensiones que debe tener el recipiente para que la cantidad de metal que se emplea en su construcción sea la menor posible.

— De un recipiente cónico de 3 metros de radio y 10 de profundidad sale agua a razón de 4 metros cúbicos por minuto. ¿Cuál es la variación , con respecto al tiempo, de la altura de la superficie y del radio de ésta cuando la profundidad del agua es de 6 metros?.

VI. INTEGRAL

Otro tipo de problemas son aquellos donde se pide obtener el área bajo una curva.

Encontrar el área de la región Q limitada por la gráfica de la función $y(x) = x^2$, el eje de las abscisas y la recta perpendicular a este eje en el 4.



Para obtener la solución al problema se realizó lo siguiente.

Se divide el segmento que va de "0" a "4" sobre el eje de las abscisas en partes iguales.

Posteriormente se construye rectángulos para establecer una región.

En seguida se obtiene el área de la región formada por los rectángulos.

Se repite este proceso para establecer una sucesión de valores, para lo cual, el segmento se divide cada vez en un mayor número de partes iguales.

Por último, se observan estos valores para determinar al que se aproxima infinitamente la sucesión, al continuar indefinidamente dividiendo el segmento cada vez en un mayor número de partes iguales

El valor al cual se aproxima infinitamente es la superficie de la región Q.

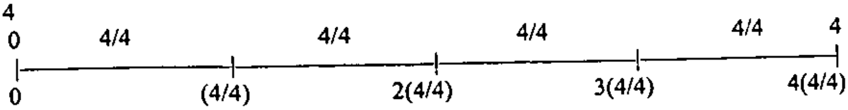
Formalizaremos este proceso utilizando el concepto de límite

¿Cómo se puede establecer que el segmento que va de "0" a "4" en el eje de las abscisas, se divide en partes iguales?.

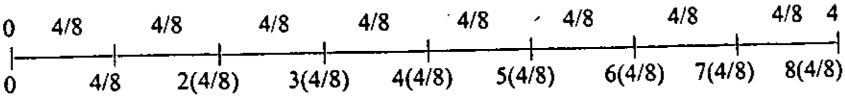
Efectivamente, por medio de una variable, por ejemplo "n", y considerando que los valores que se le asignan indican el número de partes iguales en que se divide el segmento para cada caso.

Ejemplos.

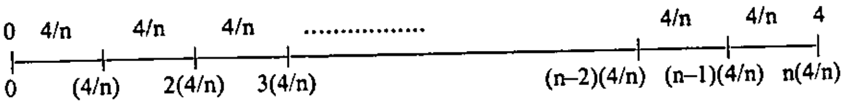
n = 4



n = 8

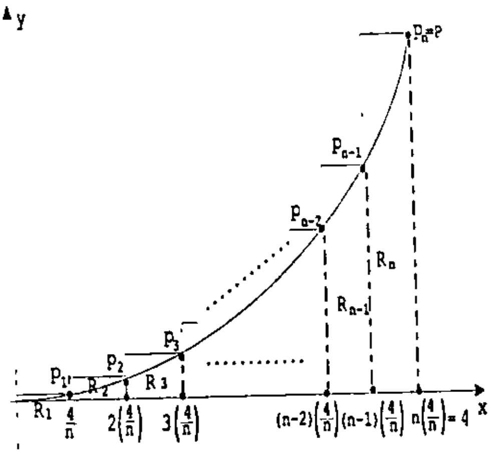


n partes iguales



Es claro que el valor para la variable "n" debe ser un entero positivo.

¿Cuál es el área de la región Qn, al dividir el segmento en "n" partes iguales y construir n rectángulos (R_1, R_2, R_3, ... , R_{n-1}, R_n)?.



Efectivamente, la suma de las áreas de los n rectángulos.

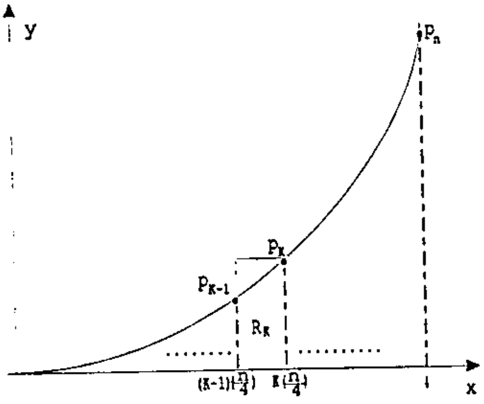
Si representamos con Sn el área de la región Qn tenemos:

Sn = área Qn = área R_1 + área R_2 + área R_3 + ... + área R_{n-1} + área R_n
Veremos como se puede obtener este valor.

Llamaremos R_k al k-ésimo rectángulo de la región Qn.

¿Cuál es el k-ésimo rectángulo de la región Qn?

Efectivamente, mientras no se considere un valor particular para k, R_k es cualquiera de los n rectángulos de la región Qn.



Es claro que los valores para "k" deben ser enteros positivos menores o iguales a "n".

¿Cuál es el área del rectángulo R_k?.

Efectivamente, sabemos que el área de cualquier rectángulo es el producto de la longitud de la base y la altura.

¿Cuál es la longitud de la base del rectángulo R_k?.

Efectivamente, como se esta dividiendo un segmento de longitud 4 en "n" partes iguales, la base de todos los rectángulos que se construyen mide 4/n.

¿Cuál es la longitud de la altura del rectángulo R_k?.

Efectivamente, es la ordenada del punto P_k que está sobre la gráfica de la función $y(x) = x^2$

Como la abscisa del punto P_k es k(4/n) = 4k/n, la ordenada es:

$$y(\frac{4k}{n}) = (\frac{4k}{n})^2 = \frac{16k^2}{n^2}$$

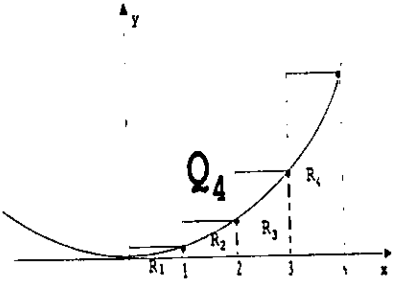
El área del rectángulo R_k es :

área R_k = (base)(altura) = $(\frac{4}{n})(\frac{16k^2}{n^2}) = \frac{64k^2}{n^3} = \frac{64}{n^3}(k^2)$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se obtiene el área de cualquier rectángulo de la región Q_n.

Ejemplos:

1) Si dividimos el segmento en 4 partes iguales($n = 4$) y construimos la región Q_4, cuál es el área de los rectángulos R_1, R_2, R_3 y R_4.



Efectivamente:

área $R_1 = \frac{64}{4^3}(1^2)$

área $R_2 = \frac{64}{4^3}(2^2)$

área $R_3 = \frac{64}{4^3}(3^2)$

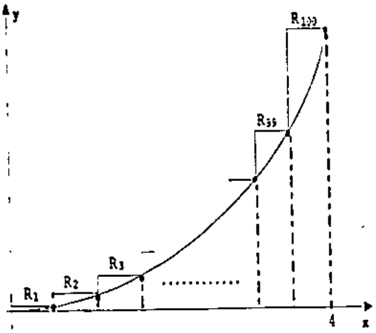
área $R_4 = \frac{64}{4^3}(4^2)$

¿Cuál es el área de la región Q_4?

Efectivamente, el área de la región formada por los cuatro rectángulos, la cual se representa con S_4 es:

$$S_4 = \text{área } Q_4 = \text{área } R_1 + \text{área } R_2 + \text{área } R_3 + \text{área } R_4$$
$$= \frac{64}{4^3}(1^2) + \frac{64}{4^3}(2^2) + \frac{64}{4^3}(3^2) + \frac{64}{4^3}(4^2)$$
$$= \frac{64}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

2) Si dividimos el segmento en 100 partes iguales($n = 100$) y construimos la región Q_{100}, cuál es el área de los rectángulos R_3, R_{27}, R_{64} y R_{89}.



Efectivamente:

$$\text{área } R_3 = \frac{64}{100^3}(3^2)$$
$$\text{área } R_{27} = \frac{64}{100^3}(27^2)$$
$$\text{área } R_{64} = \frac{64}{100^3}(64^2)$$
$$\text{área } R_{89} = \frac{64}{100^3}(89^2)$$

¿Cuál es el área de la región Q_{100}?.

Efectivamente, el área de esta región, la cual representamos con S_{100} es:

$$\begin{aligned} S_{100} = \text{área } Q_{100} &= \text{área } R_1 + \text{área } R_2 + \text{área } R_3 + \ldots\ldots + \text{área } R_{99} + \text{área } R_{100} \\ &= \frac{64}{100^3}(1^2) + \frac{64}{100^3}(2^2) + \frac{64}{100^3}(3^2) + \ldots\ldots + \frac{64}{100^3}(99^2) + \frac{64}{100^3}(100^2) \\ &= \frac{64}{100^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 99^2 + 100^2) \end{aligned}$$

¿Cuál es el área de la región Q_n?.

Efectivamente, es la suma de las áreas de los n rectángulos que forman esta región.

$$\begin{aligned} S_n = \text{área } Q_n &= \text{área } R_1 + \text{área } R_2 + \text{área } R_3 + \ldots\ldots + \text{área } R_{n-1} + \text{área } R_n \\ &= \frac{64}{n^3}(1^2) + \frac{64}{n^3}(2^2) + \frac{64}{n^3}(3^2) + \ldots\ldots + \frac{64}{n^3}(n-1)^2 + \frac{64}{n^3}(n^2) \\ &= \frac{64}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2) \end{aligned}$$

Como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, tenemos:

$$Sn = \frac{64}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{64}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) = \frac{128n^3+192n^2+64n}{6n^3}$$

$$= \frac{128n^3}{6n^3} + \frac{192n^2}{6n^3} + \frac{64n}{6n^3} = \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2}$$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se obtiene el área de cualquier región Qn (el valor de Sn).

Ejemplos:

1) si n = 125, el área de la región Q_{125} formada por los 125 rectángulos que se construyen es:

$$S_{125} = \frac{64}{3} + \frac{32}{125} + \frac{32}{3(125)^2}$$

2) si n = 500, el área de la región Q_{500} formada por los 500 rectángulos que se construyen es:

$$S_{500} = \frac{64}{3} + \frac{32}{500} + \frac{32}{3(500)^2}$$

Esta fórmula puede considerarse como la regla de correspondencia de una función.

¿Cuál es el área de la región Q?

Efectivamente, es el valor al cual se aproxima infinitamente "Sn", al considerar que "n" crece indefinidamente. Esto es, el valor al que tiende Sn cuando $n \to \infty$.

¿Cómo se obtiene este valor?

Efectivamente, por medio del siguiente limite:

$$\lim_{n \to \infty} Sn$$

Como $Sn = \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2}$, tenemos:

$$\text{área } Q = \lim_{n \to \infty} Sn = \lim_{n \to \infty} \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2} = \frac{64}{3}$$

Sabemos ahora que el área de la región Q es $\frac{64}{3}$ U^2

A este tipo de límite se le conoce como la integral y se representa con el símbolo $\int$, de la siguiente forma:

Como la región Q está limitada por la gráfica de la función $y(x) = x^2$ y el segmento sobre el eje de las abscisas que va desde 0 hasta 4, la integral en este caso se queda establecida representa de la siguiente manera:

$$\int_0^4 y(x)\,dx \qquad ó \qquad \int_0^4 x^2\,dx$$

Esta representación se expresa de la siguiente forma: " la integral de y(x) desde x = 0 hasta x = 4 " ó " la integral de x^2 desde x = 0 hasta x = 4 ".

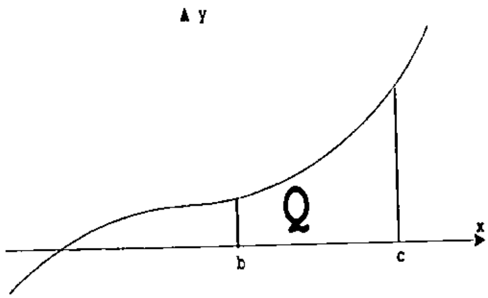
Al establecer el segmento sobre el eje de las abscisas, las caras laterales que limitan a la región son líneas perpendiculares a este eje que van desde el extremo del segmento hasta la gráfica de la función.

El símbolo de integral puede considerarse como la letra "*S*" alargada, la finalidad es ayudarnos a recordar la suma de las áreas de los rectángulos que se construyen para determinar el área de la región.

El símbolo "dx" que involucramos tiene un sentido especial al profundizar en el estudio de las integrales. Por el momento, para utilizar una representación igual a la de los libros, escribiremos este símbolo y lo entenderemos como un elemento más de la representación.

Para generalizar una situación como la anterior, consideremos una función cualquiera "z(x)" y un segmento sobre el eje de las abscisas que va desde x = b hasta x = c, siendo b un número menor que c.

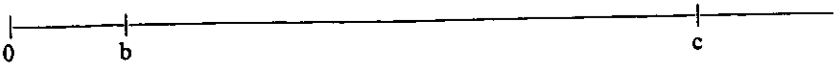
Para seguir el procedimiento en una forma visual, consideremos una gráfica cualquiera para "z(x)" y un segmento cualquiera sobre el eje de las abscisas para construir una región que llamaremos Q.



¿Cómo se obtiene el área de la región Q?.

Efectivamente, siguiendo un procedimiento similar al anterior.
Veamos como llevamos a cabo este procedimiento.

¿Cuál es la longitud del segmento que va desde x = b hasta x = c?.



Efectivamente, la longitud de este segmento es "c – b".

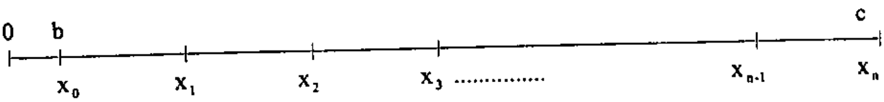
Ejemplo:

¿Cuál es la longitud del segmento que va desde x = b hasta x = c?.

Efectivamente, como b = 2 y c = 8 es claro que la longitud de este segmento es:

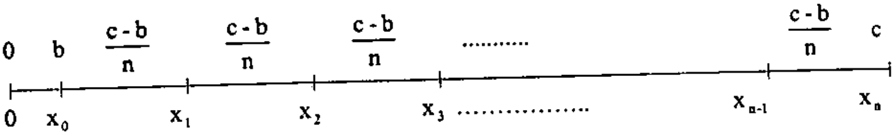
$$c - b = 8 - 2 = 6$$

En primer lugar vamos a dividir el segmento sobre el eje de las abscisas que va desde x = b hasta x = c en n partes iguales.



¿Cuánto mide cada una de las partes y cuál es el valor en el eje de las abscisas para cada uno de los puntos de división($x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$)?.

Efectivamente, cada una de las partes mide $\dfrac{c-b}{n}$

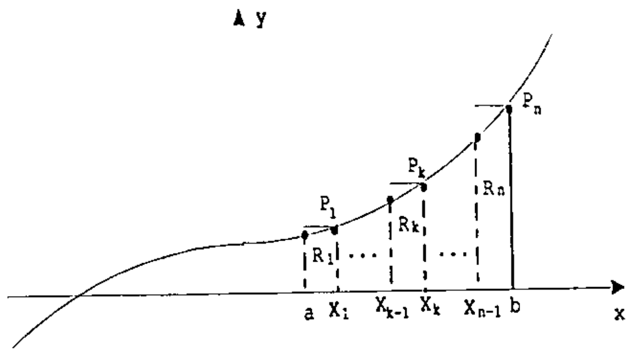


Los puntos de división son los valores que a continuación se especifican.

$$x_0 = b, \quad x_1 = b+\frac{c-b}{n}, \quad x_2 = b+2(\frac{c-b}{n}), \quad x_3 = b+3(\frac{c-b}{n}), \ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{n-1} = b+(n-1)(\frac{c-b}{n}) \quad x_n = b+n(\frac{c-b}{n}) = c$$

Una vez que se divide el segmento en n partes iguales se construyen los rectángulos R_1, R_2, R_3, ... , R_{n-1} y R_n, los cuales forman una región que llamamos Q_n.



¿Cuál es el área del rectángulo Rk?.

Efectivamente, el área de este rectángulo y de cualquier otro, se puede obtener con la fórmula conocida " área de un rectángulo = base por altura ".

No olvidemos que Rk es cualquiera de los n rectángulos que forman la región Qn.

La base del rectángulo Rk es $\dfrac{c-b}{n}$

La altura del rectángulo Rk es la ordenada del punto Pk de la gráfica de la función z(x).

Como la abscisa de este punto es $x_k = b + k(\dfrac{c-b}{n})$, su ordenada, y por tanto la altura, es:

$$\text{Altura } R_k = z(x_k) = z(\ b + k(\frac{c-b}{n})\ )$$

Por lo que:

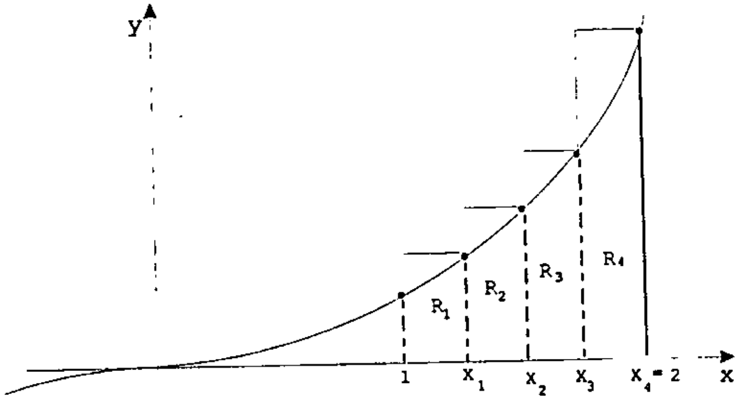
$$\text{área } R_k = (\text{base})(\text{altura}) = (\frac{c-b}{n})(z(x_k)) = (\frac{c-b}{n})(z(\ b + k(\frac{c-b}{n})))$$

Tenemos ahora una fórmula con la cual se puede obtener el área de cualquier rectángulo de la región Qn que se construyen al dividir el segmento sobre el eje de las abscisas en n partes iguales.

Es claro que para obtener el valor real de Rk en cada caso, es necesario conocer la regla de correspondencia de la función y los valores particulares de las literales que aparecen en la fórmula anterior.

Ejemplo.

La regla de correspondencia de una función es $z(x) = x^3$. Si dividimos el segmento que va desde 1 hasta 2 en el eje de las abscisas en cuatro partes iguales y se construyen 4 rectángulos para formar la región Q_4, ¿Cuál es el área del tercer rectángulo (R_3)?.



Como el segmento va desde 1 hasta 2, tenemos "b = 1 y c = 2"
Como el segmento se divide en 4 partes iguales, tenemos "n = 4"
Como se quiere obtener el área de R_3, tenemos "k = 3"

Al sustituir estos valores en la fórmula y aplicar la regla de correspondencia de la función tenemos:

$$\text{área } R_3 = \left(\frac{2-1}{4}\right)(z(x_3)) = \frac{1}{4}\left(z\left(1+3\left(\frac{2-1}{4}\right)\right)\right) = \frac{1}{4}\left(z\left(1+3\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(z\left(1+\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(z\left(\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{343}{64}\right) = \frac{343}{256}$$

Sabemos ahora que el área del tercer rectángulo es $\frac{343}{256}U^2$

Una vez que se obtiene el área del rectángulo R_k, se procede a encontrar el área de la región Qn formada por los n rectángulos que se construyen.

¿Cuál es el área de la región Qn, la cual representamos con Sn?.

Efectivamente, el área de esta región es la suma de las áreas de los n rectángulos que la forman, por lo que:

$$Sn = \text{área } Qn = \text{área } R_1 + \text{área } R_2 + \text{área } R_3 + \dots\dots + \text{área } Rn$$

$$= (\frac{c-b}{n})(z(x_1)) + (\frac{c-b}{n})(z(x_2)) + (\frac{c-b}{n})(z(x_3)) + \dots\dots + (\frac{c-b}{n})(z(x_n))$$

$$= (\frac{c-b}{n})(z(x_1) + z(x_2) + z(x_3) + \dots\dots + z(x_n))$$

Tenemos ahora la fórmula con la cual se obtiene el área de cualquier región Qn, formada por los n rectángulos que se construyen en la forma que se ha venido haciendo.

Sólo nos falta obtener el área de la región Q.

¿Cuál es el área de la región Q?.

Efectivamente, el área de esta región es el valor al cual se aproxima infinitamente Sn al considerar que n(número de partes en que se divide el segmento) crece indefinidamente. Por lo que, el área de la región Q es el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} Sn$$

Como $Sn = (\frac{c-b}{n})(z(x_1) + z(x_2) + z(x_3) + \dots\dots + z(x_n))$, tenemos:

$$\text{área } Q = \lim_{n \to \infty} Sn = \lim_{n \to \infty} (\frac{c-b}{n})(z(x_1) + z(x_2) + z(x_3) + \dots\dots + z(x_n))$$

A este tipo de límite con el cual se obtiene el área de la región Q, se le conoce como "la integral de la función z(x) desde x = b hasta x = c" y se representa $\int_b^c z(x)\,dx$. Por lo que:

$$\int_b^c z(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} (\frac{c-b}{n})(z(x_1) + z(x_2) + z(x_3) + \dots\dots + z(x_n))$$

Sabemos ahora que la integral representa el área de una región.

$\int_b^c z(x)\,dx$ representa el área de la región Q comprendida por la gráfica de la función z(x), el eje de las abscisas y las rectas perpendiculares a este eje en b y c.

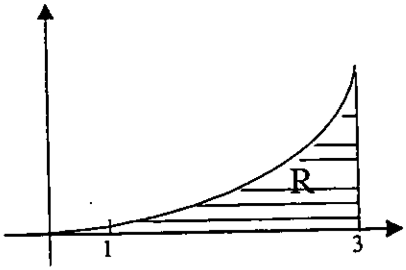
Ejemplo.

Hallar el valor de la siguiente integral.

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

¿Cuál es el valor de esta integral?.

Efectivamente, es el área de la región comprendida por la gráfica de la función $y(x) = x^2$ y el eje de las abscisas desde 1 hasta 3, la cual a continuación se señala con R.



¿Cómo se obtiene el valor de esta integral?.

Efectivamente, encontrando el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{c-b}{n}\right)\left(z(x_1) + z(x_2) + z(x_3) + \ldots\ldots\ldots + z(x_n) \right).$$

Recordemos que para un caso en particular se debe identificar los valores de las literales, considerando el significado de cada una .

¿Cuáles son los valores de "b" y "c" para este caso?.

Efectivamente, como el segmento sobre el eje de las abscisas que limita a la gráfica va desde 1 hasta 3, los valores de estas literales son $b = 1$ y $c = 3$, por lo que:

$$\frac{c-b}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

Sabemos que al dividir un segmento del eje de las abscisas en "n" partes iguales, los valores de los puntos de división se obtienen:

$$x_k = b + k\left(\frac{c-b}{n}\right) \quad \text{para } k = 1,2,3, \ldots\ldots, n$$

Como en este caso el segmento va desde 1 hasta 3 tenemos:

$$x_1 = 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right),\ x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right),\ x_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right),\ \ldots\ldots,\ x_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

El valor de la función $z(x) = x^2$ para estos valores representan las alturas de los rectángulos que se construyen, por lo que:

$$z(x_1) = z(1+1(\frac{2}{n})) = (1+1(\frac{2}{n}))^2 = 1^2 + 2(1)(1(\frac{2}{n})) + (1(\frac{2}{n}))^2 = 1+1(\frac{4}{n}) + 1^2(\frac{4}{n^2})$$

$$z(x_2) = z(1+2(\frac{2}{n})) = (1+2(\frac{2}{n}))^2 = 1^2 + 2(1)(2(\frac{2}{n})) + (2(\frac{2}{n}))^2 = 1+2(\frac{4}{n}) + 2^2(\frac{4}{n^2})$$

$$z(x_3) = z(1+3(\frac{2}{n})) = (1+3(\frac{2}{n}))^2 = 1^2 + 2(1)(3(\frac{2}{n})) + (3(\frac{2}{n}))^2 = 1+3(\frac{4}{n}) + 3^2(\frac{4}{n^2})$$

.

.

.

$$z(x_n) = z(1+n(\frac{2}{n})) = (1+n(\frac{2}{n}))^2 = 1^2 + 2(1)(n(\frac{2}{n})) + (n(\frac{2}{n}))^2 = 1+n(\frac{4}{n}) + n^2(\frac{4}{n^2})$$

¿Cuál es el valor de $(\frac{c-b}{n})(\ z(x_1)+z(x_2)+z(x_3)+..........+z(x_n)\ )$?.

Efectivamente, al realizar esta suma en forma vertical nos damos cuenta que:

$$(\frac{c-b}{n})(z(x_1)+z(x_2)+z(x_3)+..........+z(x_n)) = (\frac{2}{n})(1+1+1+\ .....\ +1\ +$$
$$1(\frac{4}{n})+2(\frac{4}{n})+3(\frac{4}{n})+\ ....\ +n(\frac{4}{n})\ +\ 1^2(\frac{4}{n^2})+2^2(\frac{4}{n^2})+3^2(\frac{4}{n^2})+.......+n^2(\frac{4}{n^2}))$$

$$=(\frac{2}{n})(\ n + \frac{4}{n}(1+2+3+.......+n) + \frac{4}{n^2}(1^2+2^2+3^2+.......+n^2))$$

$$=\frac{2}{n}(n+\frac{4}{n}(\frac{n(n+1)}{2})+\frac{4}{n^2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}))$$

$$=(\frac{2}{n})(n+\frac{4}{n}(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2})+\frac{4}{n^2}(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}))$$

$$=(\frac{2}{n})(n+\frac{4n^2}{2n}+\frac{4n}{2n}+\frac{4n^3}{3n^2}+\frac{4n^2}{2n^2}+\frac{4n}{6n^2})$$

$$=\frac{2n}{n}+\frac{8n^2}{2n^2}+\frac{8n}{2n^2}+\frac{8n^3}{3n^3}+\frac{8n^2}{2n^3}+\frac{8n}{6n^3}$$

$$=2+4+\frac{4}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}$$

$$=\frac{26}{3}+\frac{8}{n}+\frac{8}{6n^2}$$

Se puede ahora establecer que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{c-b}{n}\right)\left(z(x_1)+z(x_2)+z(x_3)+\ldots\ldots\ldots+z(x_n) \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{26}{3}+\frac{8}{n}+\frac{8}{6n^2} = \frac{26}{3}$$

Sabemos ahora que el valor de la integral es:

$$\int_1^3 x^2 \, dx = \frac{26}{3}$$

¿Cuál es el área de la región R señalada anteriormente?.

Efectivamente, como $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$, el área de esta región es $\frac{26}{3} U^2$.

La Integral de una función, al igual que la derivada, tiene un mundo muy amplio de aplicaciones cuando nos involucramos en aspectos de la Ingeniería, física, química etcétera.

Algunos ejemplos de problemas cuya solución se puede obtener por medio de la integral de una función son:

— Un automóvil lleva una velocidad de 150 kilómetros por hora y frena a razón de 8 metros por segundo en cada segundo. Cuál es el espacio que recorre antes de detenerse.

— Un recipiente de forma semicircular de 2 metros de radio esta lleno de un líquido de peso especifico 900 kilopondios por metro cúbico. Cuál es la fuerza que se ejerce al fondo del recipiente.

— Se va a elevar un cohete de 8 toneladas métricas de peso hasta una altura de 200 kilómetros sobre la superficie de la tierra. Cuál es el trabajo que se tiene que realizar contra la fuerza de gravedad.

CONCLUSIONES

El Cálculo Diferencial e Integral tiene su desarrollo formal a partir de los conceptos conocidos con el nombre de "Derivada e Integral".

A lo largo del trabajo se han presentado estos conceptos y los elementos necesarios para adquirir una base sustentada que permita tener una mejor oportunidad para comprender un curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Son el resultado de un proceso que se establece para obtener la pendiente de las rectas tangentes a las gráficas de funciones y el área de la región que se generara con la gráfica, el eje de las abscisas y dos rectas perpendiculares a este eje.

El proceso cuya base está sustentada con una idea natural de aproximación, se presenta al inicio de este trabajo como una nueva alternativa para encontrar pendientes de rectas tangentes.

Antes de poner el punto final, cabe destacar lo siguiente:

Cuando escuchamos decir "los avances de la tecnología", entendemos claramente el sentido que tiene la expresión al relacionarlo con la medicina, la química, la construcción, etcétera. Es inagotable todo aquello con lo que se puede ejemplificar este hecho, para ello, sólo hay que voltear para ver el pasado y mirar el presente: Antes una sumadora, después una calculadora, ahora una computadora.

Los avances en la tecnología se logran día a día acompañados con el estudio de conocimientos para obtener nuevas técnicas que permitan mejorar lo que se tiene y en otros casos obtener lo que no se tiene.

El Cálculo Diferencial e Integral no es la excepción, los avances que ha tenido nos permite obtener la derivada y la integral de una función en una forma mucho más simple que la establecida en los capítulos anteriores.

Lo interesante del Cálculo Diferencial e Integral no es propiamente saber obtener la derivada y la integral de una función, es un requisito para introducirse en ese mundo tan amplio y maravilloso en el cual se aplican estos conceptos para dar solución a necesidades en una realidad como la nuestra.

Por esta razón, una persona interesada en las aplicaciones debe aprender técnicas para obtener mediante un proceso simple la derivada y la integral de funciones. Estas no se presentan en este trabajo pero se encuentran en cualquier libro de Cálculo Diferencial e Integral.

BIBLIOGRAFÍA

COURANT, R. y John, F. **Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático**. Trad. de Saúl Hahn Goldberg. LIMUSA, México 1971.

MARKUSHEVICH, A.I. **Áreas y Logaritmos**. Trad. Del ruso por medkov, K.MIR, URSS, 1975.

SPIVAK, Michael. **Calculus, Cálculo Infinitesimal**. Trad. de Bartolomé Frontera Marqués. Edit. Reverte, España 1988.

ALLAN B. Cruse y Millane Lehman. **Lecciones de Cálculo I.** Trad. en español de Hugo Arizmendi P. Fondo Educativo Interamericano. México 1982.

Alan B. Cruse y Millane Lehman. **Lecciones de Cálculo II** Trad. en español de Hugo Arizmendi P. Fondo Educativo Interamericano México 1982.

FRANK Ayres Jr. **Cálculo Diferencial e Integral**. Shaum.