# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# "CATEGORIAS CONCRETAS TOPOLOGICAS"

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**M A T E M A T I C O**

PRESENTA

**SAUL ARCE ROCHA**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JAVIER PAEZ CARDENAS



MAYO 2000

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Categorías concretas topológicas"

realizado por SAUL ARCE ROCHA

con número de cuenta 8351585-7 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

Propietario M. en C. ALEJANDRO ODGERS LÓPEZ

Propietario DRA. SILVIA DE NEYMET URBINA

Suplente DRA. MARTHA TAKANE IMAY

Suplente DR. MARCELO AGUILAR GONZALEZ

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

# Índice General

# Introducción

Entre los seis manuscritos que el Dr. Roberto Vázquez García escribiera durante los ocho meses en que la enfermedad que nos lo arrebató lo tuvo confinado en su casa, hay uno titulado "Categorías Concretas Topológicas" [manuscrito CCT]. Se trata de un ensayo donde el Dr.Vázquez abordó el estudio de la reflexividad y la correflexividad en las categorías concretas topológicas. Años atrás, en 1978, bajo la dirección de Roberto Vázquez, Graciela Salicrup llevó a cabo un estudio parecido: el de la epirreflexividad y la conexidad en las categorías concretas topológicas. A lo largo de 1990 Don Roberto dictó un par de seminarios en los que, acaso sin proponérselo, proporcionó las herramientas necesarias para que su obra, y la de la Dra. Salicrup, pudiesen ser abordadas. Con base en el trabajo de ella y en las notas de esos cursos, se ha preparado una introducción al estudio del manuscrito CCT.[1] La primera parte de esa introducción consta de cinco capítulos. Son los capítulos que conforman el presente trabajo.

En el primero se definen los conceptos de categoría y categoría concreta y se dan ejemplos de ambos conceptos. En el segundo se presenta el concepto de funtor y con base en él se construye la idea de *concreción*. Esta idea permite evidenciar que son concretas (*concretables*) categorías que con mucha frecuencia se suelen presentar como ejemplos típicos de categorías que no son concretas; de hecho, no es fácil demostrar la no concretabilidad de categorías efectivamente no concretas. En el capítulo 2 de su tesis doctoral, Graciela Salicrup dejó enunciado un ejemplo de una categoría que no es concretable; en este trabajo tal enunciado aparece transcrito al final del segundo capítulo, donde se demuestra que se trata efectivamente de un ejemplo "artificial" de una categoría no concretable. En los capítulos tercero y cuarto se desarrolla todo el respaldo teórico que permitirá, a lo largo del capítulo quinto, un estudio preliminar de las categorías concretas topológicas: En el tercero se generaliza la idea de estructura topológica débil y fuerte de manera que tenga sentido en cualquier categoría concreta; también los conceptos topológicos de inmersión y de cociente cobran generalidad en estas categorías, lo cual se lleva a cabo en el capítulo cuarto.

El trabajo ha sido confeccionado siguiendo el patrón que ofrece la compilación de notas de clase ya citada y ha sido redactado de modo que puedan acercarse a él alumnos de la licenciatura en matemáticas con conocimientos generales de álgebra moderna y topología; es una propuesta para un seminario de álgebra o de topología o para un curso introductorio a la teoría de categorías. En cada capítulo se dan numerosos ejemplos de los conceptos expuestos y, para mejor conservar el sello personal que el Dr.Vázquez imprimía en sus cursos, hemos intercalado ejercicios a lo largo del texto a fin de resaltar un detalle que a partir de cierta

[1] Las notas de los seminarios referidos se encuentran publicadas bajo el título de "Reflexividad, Correflexividad y Teoría de las Estructuras Matemáticas" en http://www.red-mat.unam.mx/

época fue característico en la cátedra del doctor: Desde cierta época, fue su costumbre la de dictar ejercicios entre una u otra clase que a la cuenta de diez anunciaban la inminencia del examen parcial correspondiente al material abarcado por el cuestionario que los diez ejercicios conformaban. En las notas tomadas en clase estos ejercicios quedaban dispersos. Una vez dictados, el profesor solía referirse a muchos de ellos para desprender resultados de sus exposiciones posteriores; solía, incluso, llegar a remitirnos a enunciados de problemas dictados mucho tiempo atrás: *"...Por el inciso (a) del ejercicio 6 de la segunda tanda de ejercicios del semestre pasado, tenemos..."* eran frases que Vázquez pronunciaba impasible ante el grupo; con ello, tanto o más asombrados quedábamos cuanto que jamás vimos al doctor portando nota alguna ni ningún solo papel a la hora de impartirnos la clase. Con frecuencia sólo llevaba un tarro de café. Por esto es que a lo largo del desarrollo del presente trabajo se hallan dispersos muchos ejercicios, y muchas de las consecuencias teóricas de resultados ulteriores dependen de ejercicios anteriores.

Se pensará que esta manera de introducir ejercicios en un texto es inoportuna y está fuera de lugar, por eso hemos querido advertir al lector las causas que movieron a ello.

Los ejercicios se distribuyen libremente entre todo lo expuesto y la nomenclatura que permite ubicarlos, en nada depende de la introducida para los capítulos del trabajo.

El grado de dificultad en los ejercicios no suele ser alto; alguna vez explicó Don Roberto que él no proponía la realización de un ejercicio por su grado de dificultad sino por la facilidad que otorgara en la comprención de la teoría expuesta; y solía ocurrir como se mencionó antes, que el desarrollo del curso llegaba a depender muchas veces del resultado de un ejercicio. Lo mismo acontece en este trabajo.

De la nomenclatura para los capítulos habría que decir algo: Es abigarrada y compleja (aunque sigue cierta lógica). Ocurre que quisimos conservar la nomenclatura que empleó el doctor en la confección del manuscrito CCT; ahí, este vocabulario de referencias para las partes del artículo ni es engorroso ni confuso sino elegante y de buen gusto. Hubiéramos querido, por ejemplo, que cada resultado del manuscrito llevase en este trabajo el mismo signo de referencia que tiene en aquél. Pero a medida que avanzábamos explicando su contenido, multitud de resultados intermedios que tuvimos que intercalar entre unos y otros del manuscrito para hacerlos comprensibles, pronto dieron al traste con nuestra empresa y vimos a las claras lo poco conveniente que era heredar esa nomenclatura. Pese a ello insistimos en mantenerla como algo provisional en tanto adquiría forma el documento, pensando en que después idearíamos otra que fuese la adecuada; y no supimos ver a qué hora esta nomenclatura heredada empezó a ser parte inherente del texto y hasta tal punto que cuando nos dimos cuenta ya nos era muy difícil desasirnos de ella sin desbaratarlo todo y comenzar de nuevo. Por eso tuvimos que mantenerla hasta el final.

# Capítulo 1

# Categorías y Categorías Concretas

K.0.0 Siempre que en matemáticas se habla de una categoría $\mathfrak{K}$ se encuentran en contexto, implícitos o explícitos, tres tipos de datos:

($\cdot$) El que se refiere a una clase $|\mathfrak{K}|$ de entidades $A, B, C, \ldots$ que constituye la **clase de $\mathfrak{K}$-objetos u objetos de $\mathfrak{K}$.**

($\cdot\cdot$) El que para todo par de $\mathfrak{K}$-objetos $A, B$ define un conjunto $\mathfrak{K}(A, B)$ denominado **conjunto de $\mathfrak{K}$-morfismos de $A$ a $B$.**

($\cdot\because$) Una **ley de composición** que para cualesquiera tres $\mathfrak{K}$-objetos $A, B, C$ permita determinar unívocamente un $\mathfrak{K}$-morfismo $gf$ en $\mathfrak{K}(A, C)$ siempre que sean dados dos $\mathfrak{K}$-morfismos: $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}(B, C)$.

Estos datos y las nociones en ellos involucradas se sujetan a los siguientes axiomas:

1. Los conjuntos $\mathfrak{K}(A_1, B_1)$ y $\mathfrak{K}(A_2, B_2)$ son ajenos excepto cuando $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.
2. Para $f \in \mathfrak{K}(A, B)$, $g \in \mathfrak{K}(B, C)$, $h \in \mathfrak{K}(C, D)$ cualesquiera se tiene $h(gf) = (hg)f$.
3. Para cada $\mathfrak{K}$-objeto $A$ hay un $\mathfrak{K}$-morfismo $1_A \in \mathfrak{K}(A, A)$ tal que para cualesquiera $\mathfrak{K}$-morfismos $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}(C, A)$ satisface: $f1_A = f$ y $1_A g = g$.

K.0.1 **Nota:** En adelante, para indicar que $A$ es un $\mathfrak{K}$-objeto haremos abuso de notación escribiendo $A \in \mathfrak{K}$ en vez de $A \in |\mathfrak{K}|$.

K.0.2 *Ejemplos.*

K.0.2.1 Sea $\mathfrak{Set}$ la colección que consta de lo siguiente:

($i$) Una clase $|\mathfrak{Set}|$ que es la clase de todos los conjuntos.

($ii$) Para cualesquiera conjuntos $X$ y $Y$,

$$\mathfrak{Set}(X, Y) = Y^X$$

(el conjunto de funciones de $X$ en $Y$).[1]

[1] Acaso convenga, aunque sólo sea como nota a pie de página, explicitar la idea de función que tendremos en mente siempre que en lo sucesivo hagamos uso de este concepto:

Def. Una **función** es una terna $(A, B, f)$ en la que $A$ y $B$ son conjuntos tales que $B \neq \emptyset$ si $A \neq \emptyset$. Si $A \neq \emptyset$, entonces $f$ es una relación $f \subseteq A \times B$ que pone en correspondencia un elemento de $B$, y solamente uno, con cada elemento de $A$. Si $A = \emptyset$ y $B$ arbitrario, entonces $f$ es la relación vacía $\emptyset \subseteq \emptyset \times B$. A la terna $(A, B, f)$ la denotaremos como $f : A \to B$.

*(iii)* Entonces queda determinada una única $h \in \mathfrak{Set}(X,Z)$ dadas cualesquiera $f \in \mathfrak{Set}(X,Y)$ y $g \in \mathfrak{Set}(Y,Z)$ haciendo $h = g \circ f$, o sea, empleando como ley de composición la composición ordinaria entre funciones.

Veamos que también se verifican los axiomas apuntados arriba:

1. Si

$$\mathfrak{Set}(X_1,Y_1) \cap \mathfrak{Set}(X_2,Y_2) \neq \emptyset$$

entonces existen

$$f_1 \in \mathfrak{Set}(X_1,Y_1) \quad \text{y} \quad f_2 \in \mathfrak{Set}(X_2,Y_2)$$

que son iguales. Por definición, dos funciones son iguales si, y sólo si, tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia. Por lo tanto, $X_1 = X_2$ y $Y_1 = Y_2$.

2. La composición usual entre funciones es asociativa; o sea que para cualesquiera $\mathfrak{Set}$-morfismos

$$f \in \mathfrak{Set}(W,X)\,, g \in \mathfrak{Set}(X,Y)\,, h \in \mathfrak{Set}(Y,Z)$$

se tiene

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

3. La función identidad en un conjunto $X$ es un $\mathfrak{Set}$-morfismo

$$1_X \in \mathfrak{Set}(X,X)$$

que para cualesquiera

$$f \in \mathfrak{Set}(X,Y) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{Set}(W,X)$$

satisface

$$f \circ 1_X = f \quad \text{y} \quad 1_X \circ g = g$$

En vista de esto nos referiremos con frecuencia a **la categoría de conjuntos y funciones** $\mathfrak{Set}$.

[✓]

K.0.2.1.1 **Nota:** En adelante omitiremos el símbolo $\circ$ en la composición de funciones salvo que lo juzguemos necesario.

K.0.2.2 Mediante $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ denotaremos a la colección que se forma de lo que sigue:

*(i)* La clase $\left|\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right|$ consta de ternas $(X_0,\varphi,X_1)$ en las que $X_0$ y $X_1$ son conjuntos y $\varphi : X_0 \to X_1$ es una función que transforma a $X_0$ en $X_1$.

*(ii)* Los conjuntos

$$\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\left((X_0,\varphi,X_1)\,,(Y_0,\psi,Y_1)\right)$$

constan de parejas

$$\left(\left(X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0\right), \left(X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1\right)\right)$$

que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

(*iii*) Sean

$$X = (X_0, \varphi, X_1)\,, Y = (Y_0, \psi, Y_1)\,, Z = (Z_0, \chi, Z_1)$$

y definamos para

$$(f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y) \quad \text{y} \quad (g_0, g_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(Y, Z)$$

la composición por componentes, i.e.

$$(g_0, g_1)(f_0, f_1) = (g_0 f_0, g_1 f_1)$$

Así, del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 & \xrightarrow{g_0} & Z_0 \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \psi \downarrow & \circlearrowleft & \chi \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 \end{array}$$

pasamos a

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{g_0 f_0} & Z_0 \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \chi \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{g_1 f_1} & Z_1 \end{array}$$

que es conmutativo a consecuencia de la conmutatividad del anterior.

Entonces se verifican los axiomas que definen a una categoría:

1. Si

$$\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y) \cap \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X', Y') \neq \emptyset$$

entonces existen

$$(f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y) \quad \text{y} \quad (f_0', f_1') \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X', Y')$$

que son iguales; i.e. $f_0 = f_0'$ y $f_1 = f_1'$ y en consecuencia los dominios y codominios de estas parejas son respectivamente iguales, i.e. $X = X'$ y $Y = Y'$.

2. Si

$$(f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(W, X)\,,\ (g_0, g_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(X, Y)\,,\ (h_0, h_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(Y, Z)$$

entonces, de acuerdo con la definición,

$$(h_0, h_1)(g_0, g_1)(f_0, f_1) = (h_0 g_0 f_0, h_1 g_1 f_1)$$

que es asociativo por componentes, lo cual se refleja en que al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} W_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 & \xrightarrow{g_0} & Y_0 & \xrightarrow{h_0} & Z_0 \\ \omega \downarrow & \circlearrowleft & \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \psi \downarrow & \circlearrowleft & \chi \downarrow \\ W_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 & \xrightarrow{h_1} & Z_1 \end{array}$$

podemos hacerlo conmutar en sus dos primeros tercios con el tercero o bien en los dos últimos con el primero, obteniendo en ambos casos el mismo resultado.

3. Finalmente, para cada $X \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{1_{X_0}} & X_0 \\ \varphi\downarrow & \circlearrowleft & \varphi\downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{1_{X_1}} & X_1 \end{array}$$

o sea que $(1_{X_0}, 1_{X_1}) = 1_X$.

Los objetos en esta categoría pueden pensarse como conjuntos que se han visto transformados a lo largo del tiempo. Antes (digamos, al tiempo cero) el conjunto $X$ era $X_0$; luego, al tiempo uno, $X$ vino a ser $X_1$. Con esta óptica un morfismo entre dos objetos $X$ y $Y$ es una función $f$ que antes era $f_0$ y luego se convirtió en $f_1$. Debido a esta interpretación hablaremos de $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ como de la **categoría de conjuntos variables y funciones variables**. [✓]

Para el siguiente ejemplo recordemos el concepto de homotopía entre funciones continuas.

Def. Sean, $X$ y $Y$ dos espacios topológicos arbitrarios y $f_1, f_2 : X \to Y$ dos funciones continuas cualesquiera. Una **homotopía de $f_1$ a $f_2$** es una función continua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que para toda $x \in X$

$$H(x,0) = f_1(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = f_2(x)$$

En tal caso se dice que $f_1$ **es homotópica** a $f_2$ y se escribe

$$f_1 \simeq f_2 \quad \text{o} \quad H : f_1 \simeq f_2 \quad \text{o} \quad f_1 \overset{H}{\simeq} f_2$$

Se sabe que $\simeq$ es una relación de equivalencia entre funciones continuas de $X$ a $Y$. Dada cualquier $f : X \to Y$ continua, sea

$$[f] = \left\{h \in Y^X : h \text{ es continua y homotópica a } f\right\}$$

K.0.2.3 Mediante $H\mathfrak{Top}$ denotaremos a la colección formada por lo que sigue:

$(i)$ $|H\mathfrak{Top}|$ es la clase de todos los espacios topológicos.

$(ii)$ Para cualesquiera espacios topológicos $X$ y $Y$,

$$H\mathfrak{Top}(X,Y) = \left\{[f] : f \in Y^X \text{ es continua}\right\}$$

$(iii)$ Si

$$[f_1] \in H\mathfrak{Top}(X,Y) \quad \text{y} \quad [f_2] \in H\mathfrak{Top}(Y,Z)$$

entonces

$$[f_2] \circ [f_1] = [f_2 f_1]$$

Antes de seguir adelante vamos a comprobar que esta ley de composición no depende de la elección de los representantes en las clases $[f_1]$ y $[f_2]$.

Sean $h_1 \in [f_1]$ y $h_2 \in [f_2]$; hay que probar que $[f_2 f_1] = [h_2 h_1]$, es decir, que existe

$$H : X \times [0,1] \to Z$$

continua y tal que $f_2 f_1 \overset{H}{\simeq} h_2 h_1$. Por hipótesis

$$f_1 \simeq h_1 \quad \text{y} \quad f_2 \simeq h_2$$

o sea que existen

$$H_1 : X \times [0,1] \to Y \quad \text{y} \quad H_2 : Y \times [0,1] \to Z$$

continuas y tales que para cualesquiera $x \in X$ y $y \in Y$

$$H_1(x,0) = f_1(x), H_1(x,1) = h_1(x) \quad \text{y} \quad H_2(y,0) = f_2(y), H_2(y,1) = h_2(y)$$

Sea

$$H' : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$$

dada por

$$H'(x,t) = (H_1(x,t), t)$$

$H'$ es continua porque son continuas sus funciones componentes. Por lo tanto, es continua la función

$$H : X \times [0,1] \to Z$$

definida como $H = H_2 H'$; y tenemos:

$$\begin{aligned} H(x,0) &= H_2(H'(x,0)) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = f_2(f_1(x)) = f_2 f_1(x) \\ H(x,1) &= H_2(H'(x,1)) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(h_1(x),1) = h_2(h_1(x)) = h_2 h_1(x) \end{aligned}$$

o sea que $f_2 f_1 \overset{H}{\simeq} h_2 h_1$. Por lo tanto, $[f_2 f_1] = [h_2 h_1]$, como se quería demostrar.

Ahora veremos que se satisfacen los axiomas que definen una categoría.

1. Si tenemos

$$[f] \in H\mathfrak{Top}(X_1, Y_1) \cap H\mathfrak{Top}(X_2, Y_2)$$

entonces

$$f \in Y_1^{X_1} \quad \text{y} \quad f \in Y_2^{X_2}$$

por lo que $X_1 = X_2$ y $Y_1 = Y_2$.

2. Sean

$$[e] \in H\mathfrak{Top}(W, X) \qquad [f] \in H\mathfrak{Top}(X, Y) \qquad [g] \in H\mathfrak{Top}(Y, Z)$$

Se tiene:

$$[g] \circ ([f] \circ [e]) = [g] \circ [fe] = [g(fe)] = [(gf)e] = [gf] \circ [e] = ([g] \circ [f]) \circ [e]$$

3. Si $X$ es un espacio topológico, sabemos que $1_X : X \to X$ es una función continua; por lo tanto, $[1_X] \in H\mathfrak{Top}(X, X)$. Además, si $[e] \in H\mathfrak{Top}(W, X)$ y $[f] \in H\mathfrak{Top}(X, Y)$, entonces

$$[1_X] \circ [e] = [1_X e] = [e] \quad \text{y} \quad [f] \circ [1_X] = [f 1_X] = [f]$$

$\mathcal{H}\mathfrak{Top}$ es la **categoría de espacios topológicos y clases de homotopía.**
[✓]
**Definición.** Se dice que **una categoría es pequeña** si su clase de objetos es un conjunto.

Los dos ejemplos que siguen son clásicos ejemplos de categorías pequeñas.

K.0.2.4 Sea $X$ un conjunto preordenado, es decir, un conjunto en el que está definida una relación binaria, $\leq$, que es reflexiva y transitiva. Ahora consideremos la colección $\mathcal{C}$ que consta de lo siguiente:

$(i)$ Una clase de objetos que son los elementos de $X$; i.e. $|\mathcal{C}| = X$.

$(ii)$ Para cada par $a, b \in X$ un conjunto $\mathcal{C}(a,b)$ definido por

$$\mathcal{C}(a,b) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \nleq b \\ \{\langle a,b\rangle\} & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

$(iii)$ Si

$$\langle a,b\rangle \in \mathcal{C}(a,b) \quad \text{y} \quad \langle b,c\rangle \in \mathcal{C}(b,c)$$

entonces podemos definir

$$\langle b,c\rangle \circ \langle a,b\rangle = \langle a,c\rangle$$

gracias a la transitividad de $\leq$.

Veamos que se satisfacen los axiomas que definen a una categoría.

1. Si

$$\mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(a',b') \neq \varnothing$$

entonces ningún intersectando es vacío y $\langle a,b\rangle$ es elemento de ambos. Como el único elemento de $\mathcal{C}(a',b')$ es $\langle a',b'\rangle$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.

2. Si

$$\langle a,b\rangle \in \mathcal{C}(a,b)\,, \ \ \langle b,c\rangle \in \mathcal{C}(b,c)\,, \ \ \langle c,d\rangle \in \mathcal{C}(c,d)$$

entonces, aplicando transitividad tenemos

$$\langle c,d\rangle \circ [\langle b,c\rangle \circ \langle a,b\rangle] = \langle c,d\rangle \circ \langle a,c\rangle = \langle a,d\rangle = \langle b,d\rangle \circ \langle a,b\rangle = [\langle c,d\rangle \circ \langle b,c\rangle] \circ \langle a,b\rangle$$

3. Debido a la reflexividad de $\leq$ tenemos que para toda $b \in X$

$$\langle b,b\rangle \in \mathcal{C}(b,b)$$

Además, si

$$\langle a,b\rangle \in \mathcal{C}(a,b) \quad \text{y} \quad \langle b,c\rangle \in \mathcal{C}(b,c)$$

entonces

$$\langle b,b\rangle \circ \langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle \quad \text{y} \quad \langle b,c\rangle \circ \langle b,b\rangle = \langle b,c\rangle$$

o sea que $\langle b,b\rangle = 1_b$.
[✓]
K.0.2.5 Sea $G$ un grupo arbitrario; entonces $G$ es una terna $(X,\cdot,e)$ en la que $X$ es un conjunto distinto del vacío, $\cdot : X \times X \to X$ es una operación binaria que es asociativa y e

es un elemento de $X$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e$, $\forall x \in X$. Además, para cada elemento $x$ de $X$ existe su *elemento inverso*, es decir un $x^{-1} \in X$ tal que

$$x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$$

Mediante $G$ podemos definir una categoría $\mathcal{C}_G$ como sigue:

($i$) La clase de objetos de $\mathcal{C}_G$ es un conjunto con un solo elemento que llamaremos $O$: $|\mathcal{C}_G| = \{O\}$

($ii$) $\mathcal{C}_G(O, O) = X$

($iii$) Para cualesquiera dos morfismos en $\mathcal{C}_G$, $x_1, x_2 \in X$, definimos la composición como

$$x_2 \circ x_1 = x_1 \cdot x_2$$

Entonces se satisfacen los axiomas que definen categoría.

1. Es trivial.
2. Como $\cdot$ es una operación asociativa tenemos

$$x_3 \circ (x_2 \circ x_1) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_3 \circ x_2) \circ x_1$$

3. Para el morfismo $O \xrightarrow{e} O$ tenemos

$$x \circ e = e \cdot x = x = x \cdot e = e \circ x$$

o sea que $e = 1_O$.

[✓]

Es de notar que, a diferencia del primer ejemplo, en los cuatro últimos hubo que especificar la ley de composición que regía entre morfismos, mientras que en aquél omitimos tal especificación debido, desde luego, a la familiaridad que tenemos con la ley de composición usual entre funciones. Haremos general esta omisión siempre que al describir una categoría los morfismos en ella sean cierta clase de funciones cuya ley de composición sea la composición ordinaria. Tal es el caso con las *categorías concretas*.

$\underline{K}$.0.3 En una categoría concreta $\underline{K}$ la clase de objetos consta de *conjuntos dotados de alguna estructura*; por ello hay que referirse previamente a *un tipo de estructura* (determinado en cada caso específico) que a su vez permita referirnos a una clase $\underline{K}[X]$ de $\underline{K}$-*estructuras*, para todo conjunto $X$. En cuanto a los morfismos, son funciones entre conjuntos (*estructurados*) que preservan la estructura; su ley de composición, como ya dijimos, es la composición entre funciones.

En limpio: Para hablar de una categoría concreta $\underline{K}$ deben tenerse en contexto tres tipos de datos:

(i) El de una *estructura* que permita la referencia a una clase $\underline{K}[X]$ de $\underline{K}$-*estructuras* para cada conjunto $X$.

(ii) Una colección de *conjuntos estructurados* que es la clase $|\underline{K}|$ de objetos de $\underline{K}$.

(iii) La noción de *función que preserva la estructura* que permita definir al conjunto de $\underline{K}$-morfismos entre dos $\underline{K}$-objetos cualesquiera.

$\underline{K}$.0.4 Algunos ejemplos aclararán esta idea.

$\underline{K}$.0.4.1 La *categoría* $\mathfrak{Top}$ *de espacios topológicos y funciones continuas* es nuestro primer ejemplo de categoría concreta.

(i) En $\mathfrak{Top}$ la noción de *estructura topológica* nos permite referir a cada conjunto $X$ una clase $\mathfrak{Top}[X]$ de $\mathfrak{Top}$-estructuras que son precisamente las topologías de $X$.

(ii) Los $\mathfrak{Top}$-objetos, en consecuencia, son parejas $(X, \tau)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$, es decir, son los espacios topológicos.

(iii) Las funciones que preservan la estructura topológica son las funciones continuas; por lo tanto, para cualesquiera $\mathfrak{Top}$-objetos $A = (X, \tau)$ y $B = (Y, \sigma)$ tenemos que

$$\mathfrak{Top}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) : f \text{ es continua}\}$$

Notemos de pasada que los $\mathfrak{Top}$-morfismos satisfacen el siguiente par de propiedades:

($m_1$) Para cualesquiera $\mathfrak{Top}$-objetos $A, B, C$ si

$$f \in \mathfrak{Top}(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{Top}(B, C)$$

entonces

$$gf \in \mathfrak{Top}(A, C)$$

ya que en tal caso $gf$ es una función continua de $A$ en $C$.

($m_2$) Para cada $\mathfrak{Top}$-objeto $A = (X, \tau)$, la función

$$1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$$

es un $\mathfrak{Top}$-morfismo y coincide con $1_A$.

K.0.4.2 Mediante $R$-$\mathfrak{Mod}$ se denota a la *categoría de módulos sobre un anillo $R$ y homomorfismos modulares.*

(i) Para $X \in \mathfrak{Set}$ la *estructura modular sobre $R$* permite la referencia a una clase $R$-$\mathfrak{Mod}[X]$ cuyos miembros son parejas del tipo $(+, \cdot)$, donde

$$+ : X \times X \to X \quad \text{y} \quad \cdot : R \times X \to X$$

son operaciones sujetas a los consabidos axiomas para módulos.

(ii) Por consiguiente, los ($R$-$\mathfrak{Mod}$)-objetos o $R$-módulos son parejas $(X, (+, \cdot))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(+, \cdot) \in R$-$\mathfrak{Mod}[X]$.

(iii) Entre dos $R$-módulos $A = (X, (+_X, \cdot_X))$ y $B = (Y, (+_Y, \cdot_Y))$ una función $f : X \to Y$ que preserve la estructura debe ser tal que

$$\begin{aligned} f(x_1 +_X x_2) &= f(x_1) +_Y f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X \\ f(r \cdot_X x) &= r \cdot_Y f(x), \forall x \in X, r \in R \end{aligned}$$

Tales funciones son los $R$-homomorfismos entre $R$-módulos. Por lo tanto,

$$R - \mathfrak{Mod}(A, B) = \{f \in \mathfrak{Set}(X, Y) : f \text{ es un } R\text{-homomorfismo}\}$$

Es de observar que también en este ejemplo se verifican las propiedades ($m_1$) y ($m_2$) anteriores:

($m_1$) Para cualesquiera $A, B, C \in R - \mathfrak{Mod}$ tenemos que

$$f \in R - \mathfrak{Mod}(A, B) \text{ y } g \in R - \mathfrak{Mod}(B, C) \Rightarrow gf \in R - \mathfrak{Mod}(A, C)$$

($m_2$) Para cualquier $R$-módulo $A = (X, (+, \cdot))$

$$1_A = 1_X : (X, (+, \cdot)) \to (X, (+, \cdot))$$

**Nota:** Para indicar que en una categoría concreta $\underline{K}$ la función $f : X \to Y$ es un $\underline{K}$-morfismo de $(X, \xi)$ en $(Y, \eta)$ escribiremos $(f, (\xi, \eta))$. En caso de no prestarse a equívocos el saber de qué $\underline{K}$-estructuras están revestidos $X$ y $Y$ para que $f$ sea un $\underline{K}$-morfismo, omitiremos la notación $(f, (\xi, \eta))$ y el $\underline{K}$-morfismo se denotará simplemente por $f$.

Esto ha de aclarar suficientemente la idea de categoría concreta que venimos comentando y permitir la cabal comprensión de la definición formal de este concepto que es como sigue.

$\underline{\text{K}}$.0.5 **Definición.** Una **categoría concreta** $\underline{K}$ es una colección que consta de:

($i$) Clases $\underline{K}[X]$, para todo $X \in \mathfrak{Set}$, cuyos miembros se denominan **$\underline{\text{K}}$-estructuras del conjunto $X$.**

($ii$) Objetos que son parejas $A = (X, \xi)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ es el **conjunto subyacente de** $A$ y $\xi \in \underline{K}[X]$ es la **$\underline{K}$-estructura que reviste a** $X$.

($iii$) Conjuntos de morfismos del tipo

$$\underline{K}(A, B) \subseteq \mathfrak{Set}(X, Y) \times \{(\xi, \eta)\}$$

que para cualesquiera $\underline{K}$-objetos $A = (X, \xi)$, $B = (Y, \eta)$, $C = (Z, \zeta)$ satisfacen las condiciones:

($m_1$) $(f, (\xi, \eta)) \in \underline{K}(A, B)$ y $(g, (\eta, \zeta)) \in \underline{K}(B, C) \Rightarrow (gf, (\xi, \zeta)) \in \underline{K}(A, C)$

($m_2$) $(1_X, (\xi, \xi)) \in \underline{K}(A, A)$ y coincide con $1_A$.

Si $(f, (\xi, \eta)) \in \underline{K}(A, B)$, entonces $f \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ es la **función subyacente del $\underline{K}$-morfismo** $(f, (\xi, \eta))$.

$\underline{\text{K}}$.0.6 **Observaciones.** (a) Es fácil ver que la definición anterior implica que una categoría concreta es, ante todo, una categoría.

(b) La clase de $\underline{K}$-estructuras de $X$ puede ser vacía. V.gr.: si en el ejemplo anterior tomamos $R = \mathbb{R}$ entonces la *categoría* $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ *de espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$ *y transformaciones lineales* queda comprendida por la categoría $R$-$\mathfrak{Mod}$ correspondiente; y si $X$ es un conjunto finito y tiene más de un elemento, entonces "le queda grande" la estructura de $\mathbb{R}$-*espacio vectorial* y no puede revestirse con ella, i.e. $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}[X] = \varnothing$, si $1 < \#(X) < \infty$.

# Capítulo 2

# Funtores y Concreciones

K.1.0 La idea de morfismo entre objetos de una categoría puede hacerse extensiva a "morfismos entre categorías" mediante la introducción del concepto de funtor cuyo rol en el desarrollo de la teoría de categorías ha sido fundamental.

La idea de funtor $F : \Im \to \Re$ de una categoría $\Im$ en una categoría $\Re$ permite la doble asociación de $\Im$-objetos con $\Re$-objetos, por una parte, y de $\Im$-morfismos con $\Re$-morfismos, por otra, a condición de que tales correspondencias preserven, por así decirlo, la estructura categórica; como ésta viene dada en la definición misma de categoría mediante la exigencia de una ley de composición de morfismos y la existencia de los morfismos idénticos, entonces un funtor debe preservar ambas nociones. Como en nuestro trabajo haremos uso frecuente de esta idea conviene contar con su definición precisa que es la que sigue:

K.1.1 **Definiciones.** (a) Un **funtor**

$$F : \Im \to \Re$$

es una regla de correspondencia que asocia

($i$) a cada $\Im$-objeto $A$ un $\Re$-objeto $FA$

($ii$) a cada $\Im$-morfismo $f \in \Im(A, B)$ un $\Re$-morfismo $Ff \in \Re(FA, FB)$

Esta regla:

[$a$] *preserva composiciones*, i.e.

$$(Fg)(Ff) = F(gf) : FA \to FC$$

para cualesquiera morfismos $f \in \Im(A, B)$, $g \in \Im(B, C)$;

[$b$] *preserva morfismos idénticos*, i.e.

$$F1_A = 1_{FA}, \forall A \in \Im$$

(b) De acuerdo con ($ii$), el funtor $F$ induce funciones

$$F_{(A,B)} : \Im(A, B) \to \Re(FA, FB)$$

dados cualesquiera $\Im$-objetos $A$ y $B$. Diremos que:

1. $F$ es un **funtor fiel** cuando toda función $F_{(A,B)}$ es inyectiva.
2. $F$ es un **funtor pleno** si toda función $F_{(A,B)}$ es suprayectiva.

$\underline{K}$.1.2 *Ejemplo.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, definimos

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

por

$$U(X,\xi) = X, \text{ para todo } \underline{K}\text{-objeto } (X,\xi)$$

y

$$U(f,(\xi,\eta)) = f, \text{ para todo } \underline{K}\text{-morfismo } (f,(\xi,\eta))$$

Entonces:

[$a$] Si $(f,(\xi,\eta))$ y $(g,(\eta,\zeta))$ son $\underline{K}$-morfismos,

$$[U(g,(\eta,\zeta))][U(f,(\xi,\eta))] = gf = U(gf,(\xi,\zeta))$$

i.e. $U$ preserva composiciones.

[$b$]

$$U(1_X,(\xi,\xi)) = 1_X = 1_{U(X,\xi)}$$

i.e. $U$ preserva morfismos idénticos.

$U$ es fiel porque la función

$$U_{(A,B)} : \underline{K}(A,B) \to \mathfrak{Set}(X,Y)$$

es inyectiva para cualesquiera $A = (X,\xi), B = (Y,\eta) \in \underline{K}$, pues si

$$U_{(A,B)}(f,(\xi,\eta)) - U_{(A,B)}(g,(\xi,\eta))$$

entonces $f = g$, de modo que además de tener el mismo dominio $A$ y el mismo codominio $B$, los morfismos $(f,(\xi,\eta))$ y $(g,(\xi,\eta))$ también tienen la misma regla de correspondencia, es decir, son iguales. Hablaremos de $U$ como del **funtor que olvida**.

Ya dijimos que los funtores son esencialmente morfismos entre categorías Es natural entonces que nos preguntemos por sus identidades y por su ley de composición.

$\underline{K}$.1.3 **Definiciones:** 1. Si $\Re$ es una categoría, entonces el **funtor identidad** en $\Re$

$$1_{\Re} : \Re \to \Re$$

se define como

$$1_{\Re}A = A, \forall A \in \Re \quad \text{y} \quad 1_{\Re}f = f, \forall f \in \Re(A,B)$$

2. Si

$$F : \Im \to \Re \quad \text{y} \quad G : \Re \to \wp$$

son funtores arbitrarios, entonces definimos el **funtor composición**

$$GF : \Im \to \wp$$

como

$$(GF)A = G(FA), \forall A \in \Im \quad \text{y} \quad (GF)f = G(Ff), \forall f \in \Im(A,B)$$

$\underline{K}$.1.4 **Observaciones:** (a) Si en (2) hacemos $\Im = \Re$ y $F = 1_\Re$, tendremos

$$(G1_\Re)\,A = G\,(1_\Re A) = GA \quad \text{y} \quad (G1_\Re)\,f = G\,(1_\Re f) = Gf$$

y si en lugar de esto hacemos $\wp = \Re$ y $G = 1_\Re$, entonces

$$(1_\Re F)\,A = 1_\Re\,(FA) = FA \quad \text{y} \quad (1_\Re F)\,f = 1_\Re\,(Ff) = Ff$$

O sea que el funtor identidad se comporta efectivamente como un morfismo idéntico.

(b) Se espera, desde luego, que el funtor composición $GF$ preserve composiciones de morfismos y morfismos idénticos, cosa que en efecto acontece:

[$a$] Si $f \in \Im\,(A,B)$ y $g \in \Im\,(B,C)$ son morfismos arbitrarios:

$$[(GF)\,g]\,[(GF)\,f] = [G\,(Fg)]\,[G\,(Ff)] = G\,[(Fg)\,(Ff)] = G\,[F\,(gf)] = GF\,(gf)$$

[$b$] Y si $A \in \Im$, entonces

$$(GF)\,1_A = G\,(F1_A) = G1_{FA} = 1_{G(FA)} = 1_{(GF)A}$$

*Primer cuestionario de ejercicios. Ejercicio $t_1$1.* Sean $F : \Im \to \Re$, $G : \Re \to \wp$, $H : \wp \to \Sigma$ categorías y funtores arbitrarios. Probar que:

$a$) $GF$ es fiel si son fieles $F$ y $G$

$b$) $GF$ es pleno si $F$ y $G$ son plenos.

$\underline{K}$.1.5 **Definición.** Un funtor $F : \Im \to \Re$ es un **isomorfismo de categorías** si existe un funtor (*inverso*) $F^{-1} : \Re \to \Im$ tal que

$$F^{-1}F = 1_\Im \quad \text{y} \quad FF^{-1} = 1_\Re$$

En tal caso se dice que **las categorías $\Im$ y $\Re$ son isomorfas.** Para indicar que $\Im$ y $\Re$ son categorías isomorfas escribiremos $\Im \cong \Re$; y emplearemos las notaciones $F : \Im \cong \Re$ y $\Im \overset{F}{\cong} \Re$ para explicitar a $F$ como isomorfismo entre ambas.

*Ejercicio $t_1$2.* (a) Demuestre que un funtor $F$ es un isomorfismo si, y sólo si, es fiel, es pleno y la correspondencia

$$F_\bullet : |\Im| \to |\Re|$$

inducida por $F$ es biyectiva.

(b) Demuestre que $\cong$ es una relación de equivalencia entre categorías.

(c) $H\,(GF) = (HG)\,F$

$\underline{K}$.1.6 **Definición.** Una categoría $\underline{H}$ es **concretable** si existe un isomorfismo $F : \underline{H} \to \underline{K}$, con $\underline{K}$ concreta.

$\underline{K}$.1.7 **Proposición.** Una categoría $\underline{H}$ es concretable si, y sólo si, existe un funtor fiel

$$F : \underline{H} \to \mathfrak{Set}$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un isomorfismo $G : \underline{H} \to \underline{K}$, con $\underline{K}$ concreta y apliquemos a ésta el funtor que olvida, $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$. Sabemos que tanto $G$ como $U$ son funtores fieles; entonces, por ($a$) del ejercicio 1, también $F = UG$ es fiel.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si existe un funtor fiel $F : \underline{H} \to \mathfrak{Set}$ y llamamos $\underline{K}$ a la colección que consta de:

$(i)$ Clases $\underline{K}[X]$, para cada $X$ en $\mathfrak{Set}$, definidas por

$$\underline{K}[X] = \{A \in \underline{H} : FA = X\}$$

$(ii)$ La clase $|\underline{K}|$ definida por

$$|\underline{K}| = \{(FA, A) : A \in \underline{H}\}$$

$(iii)$ Conjuntos definidos como

$$\underline{K}((FA, A), (FB, B)) = \{(Ff, (A, B)) : f \in \underline{H}(A, B)\}$$

Entonces:

$(m_1)$

$$(Fg, (B, C))(Ff, (A, B)) = (FgFf, (A, C)) \in \underline{K}((FA, A), (FC, C))$$

porque

$$(FgFf, (A, C)) = (F(gf), (A, C))$$

$(m_2)$ Para cada $(FA, A) \in \underline{K}$ tenemos

$$(1_{FA}, (A, A)) \in \underline{K}((FA, A), (FA, A))$$

porque

$$(1_{FA}, (A, A)) = (F1_A, (A, A)) . \forall A \in \underline{H}$$

Además

$$\begin{aligned} (1_{FA}, (A, A))(Fh, (B, A)) &= (F1_A Fh, (B, A)) = (F(1_A h), (B, A)) = (Fh, (B, A)) \\ (Ff, (A, B))(1_{FA}, (A, A)) &= (Ff F1_A, (A, B)) = (F(f1_A), (A, B)) = (Ff, (A, B)) \end{aligned}$$

o sea que

$$(1_{FA}, (A, A)) = 1_{(FA,A)}$$

Por lo tanto, $\underline{K}$ es una categoría concreta.

Por otra parte, si definimos

$$G : \underline{H} \to \underline{K}$$

mediante

$$GA = (FA, A), \forall A \in \underline{H}$$

$$Gf = (Ff, (A, B)), \forall f \in \underline{H}(A, B)$$

entonces queda bien definido un funtor de $\underline{H}$ en $\underline{K}$ ya que $F$ tiene una regla bien definida y además:

[a] Si $f \in \underline{H}(A, B)$ y $g \in \underline{H}(B, C)$ son morfismos arbitrarios:

$$G(gf) = (F(gf), (A, C)) = (Fg, (B, C))(Ff, (A, B)) = (Gg)(Gf)$$

i.e. $G$ preserva composiciones.

[$b$] Si $A \in \underline{H}$, entonces

$$G1_A = (F1_A, (A, A)) = 1_{(FA,A)} = 1_{GA} \quad [1]$$

También puede definirse el funtor inverso a $G$

$$G^{-1} : \underline{K} \to \underline{H}$$

haciendo

$$G^{-1}(FA, A) = A, \forall (FA, A) \in \underline{K}$$

$$G^{-1}(Ff, (A, B)) = f, \forall (Ff, (A, B)) \in \underline{K}((FA, A), (FB, B))$$

Claramente la regla de asociación de objetos de $G^{-1}$ está bien definida; donde podría caber alguna ambigüedad es en su regla de asociación de morfismos pero, debido a la fidelidad de $F$, si $f \neq g$ entonces $Ff \neq Fg$, de modo que ésta también está bien definida. Desde luego,

$$G^{-1}G = 1_{\underline{H}} \quad \text{y} \quad GG^{-1} = 1_{\underline{K}}$$

como fácilmente se comprueba; o sea que $G$ es un isomorfismo. Pero entonces $\underline{H}$ es concretable, como se quería demostrar. [✓]

$\underline{\mathrm{K}}$.1.8 **Definición.** Llamaremos **concreción** de $\underline{H}$ a la categoría concreta $\underline{K}$ inducida por un funtor fiel

$$F : \underline{H} \to \mathfrak{Set}$$

$\underline{\mathrm{K}}$.1.9 *Ejemplos.*

$\underline{\mathrm{K}}$.1.9.1 Dado que $1_{\mathfrak{Set}}$ es, obviamente, un funtor fiel

$$1_{\mathfrak{Set}} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$$

tenemos, debido al resultado anterior, que la categoría $\mathfrak{Set}$ es concretable. Denotando por $\overline{\mathfrak{Set}}$ a su concreción, tenemos:

($i$) Para cada $X \in \mathfrak{Set}$

$$\overline{\mathfrak{Set}}[X] = \{A \in \mathfrak{Set} : 1_{\mathfrak{Set}}A = X\} = \{X\}$$

($ii$)

$$\left|\overline{\mathfrak{Set}}\right| = \{(X, X) : X \in \mathfrak{Set}\}$$

($iii$)

$$\overline{\mathfrak{Set}}((X, X), (Y, Y)) = \{(f, (X, Y)) : f \in \mathfrak{Set}(X, Y)\}$$

[✓]

$\underline{\mathrm{K}}$.1.9.2 Pensemos en la categoría $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ y para cada uno de sus objetos, $X = (X_0, \rho, X_1)$, consideremos la unión ajena $X_0 \sqcup X_1$ de los conjuntos $X_0$ y $X_1$.[2] Sea

$$F : \mathfrak{Set}^{\{0,1\}} \to \mathfrak{Set}$$

[1] Obsérvese que hasta aquí no hemos utilizado la fidelidad de $F$; por consiguiente, puede asignarse una categoría concreta $\underline{K}$ a cualquier categoría $\mathfrak{R}$ y definirse un funtor $G : \mathfrak{R} \to \underline{K}$ con tal que exista un funtor $F : \mathfrak{R} \to \mathfrak{Set}$.

[2] Recuérdese que $X_0 \sqcup X_1 = (X_0 \times \{0\}) \cup (X_1 \times \{1\})$.

tal que

$$F(X_0, \varphi, X_1) = X_0 \sqcup X_1$$

y para cualquier $(f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1))$,

$$\begin{array}{rccc} F(f_0, f_1): & X_0 \sqcup X_1 & \to & Y_0 \sqcup Y_1 \\ & (x, i) & \mapsto & (f_i(x), i) \end{array}, i \in \{0, 1\}$$

Entonces $F$ es un funtor bien definido ya que

[a] Si $(g_0, g_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}((Y_0, \psi, Y_1), (Z_0, \chi, Z_1))$ tenemos

$$\begin{aligned} F[(g_0, g_1)(f_0, f_1)](x, i) &= F(g_0 f_0, g_1 f_1)(x, i) = (g_i f_i(x), i) \\ &= F(g_0, g_1)(f_i(x), i) = F(g_0, g_1)[F(f_0, f_1)(x, i)] \\ &= [F(g_0, g_1)][F(f_0, f_1)](x, i), \forall (x, i) \in X_0 \sqcup X_1 \end{aligned}$$

o sea que $F$ preserva composiciones.

[b] También preserva identidades porque

$$F(1_{X_0}, 1_{X_1})(x, i) = (1_{X_i}(x), i) = (x, i) = 1_{X_0 \bigsqcup X_1}(x, i), \forall (x, i) \in X_0 \sqcup X_1$$

Además se trata de un funtor fiel porque si

$$(f_0, f_1), (f_0', f_1') \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1))$$

son tales que $F(f_0, f_1) = F(f_0', f_1')$, entonces $(f_i(x), i) = (f_i'(x), i)$, $\forall (x, i) \in X_0 \bigsqcup X_1$; pero entonces $f_i(x) = f_i'(x)$, $\forall x \in X_i, i \in \{0, 1\}$, lo cual significa que $(f_0, f_1) = (f_0', f_1')$. O sea que la función

$$F_{(X,Y)}: \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}((X_0, \varphi, X_1), (Y_0, \psi, Y_1)) \to \mathfrak{Set}(X_0 \sqcup X_1, Y_0 \sqcup Y_1)$$

es inyectiva. En consecuencia, $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$ es concretable.

Denotando por $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}$ a la concreción correspondiente, tenemos:

(i) $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}[X] = \left\{A \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}} : FA = X\right\}, \forall X \in \mathfrak{Set}$

(ii) $\left|\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}\right| = \left\{(FA, A) : A \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}\right\}$

(iii) $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}((FA, A), (FB, B)) = \left\{(F(f_0, f_1), (A, B)) : (f_0, f_1) \in \mathfrak{Set}^{\{0,1\}}(A, B)\right\}$

[✓]

K.1.9.3 Sea $C$ la categoría cuya clase de objetos es el conjunto preordenado $X$, descrita en K.0.2.4 y sea

$$F : C \to \mathfrak{Set}$$

tal que

$$Fa = \{a\}, \forall a \in X$$
$$F\langle a, b \rangle = f \in \mathfrak{Set}(\{a\}, \{b\})$$

Entonces:

[a]

$$F[\langle b, c \rangle \circ \langle a, b \rangle] = F\langle a, c \rangle = h \in \mathfrak{Set}(\{a\}, \{c\})$$

Por otra parte, si

$$F\langle a,b\rangle = f \in \mathfrak{Set}(\{a\},\{b\}) \quad \text{y} \quad F\langle b,c\rangle = g \in \mathfrak{Set}(\{b\},\{c\})$$

entonces

$$[F\langle b,c\rangle][F\langle a,b\rangle] = gf \in \mathfrak{Set}(\{a\},\{c\})$$

Y como solamente hay una función de $\{a\}$ en $\{c\}$, entonces $gf = h$ y tenemos

$$F[\langle b,c\rangle \circ \langle a,b\rangle] = [F\langle b,c\rangle][F\langle a,b\rangle]$$

O sea que $F$ preserva composiciones.

[b]

$$F\langle a,a\rangle = 1_{\{a\}} = 1_{Fa}$$

Lo que significa que $F$ también preserva identidades. Por lo tanto $F$ es un funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{Set}$.

Sean $a,b \in X$ cualesquiera y consideremos la función

$$F_{(a,b)} : \mathcal{C}(a,b) \to \mathfrak{Set}(\{a\},\{b\})$$

Analicemos entonces los dos casos posibles:

1º $a \not\leq b$; entonces $\mathcal{C}(a,b) = \varnothing$, por lo que es válida la implicación

$$u,v \in \mathcal{C}(a,b),\, u \neq v \Rightarrow F_{(a,b)}(u) \neq F_{(a,b)}(v)$$

2º $a \leq b$; entonces $\mathcal{C}(a,b) = \{\langle a,b\rangle\}$ y $F_{(a,b)}$ es inyectiva.

Esto demuestra que $F$ es un funtor fiel. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es concretable.

Denotando por $\overline{\mathcal{C}}$ a la concreción de $\mathcal{C}$ tenemos:

$(i)$ $\overline{\mathcal{C}}[A] = \{a \in X : Fa = A\} = \{a \in X : \{a\} = A\}, \forall A \in \mathfrak{Set}$

$(ii)$ $|\overline{\mathcal{C}}| = \{(Fa,a) : a \in X\} = \{(\{a\},a) : a \in X\}$

$(iii)$ $\overline{\mathcal{C}}((\{a\},a),(\{b\},b)) = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } \mathcal{C}(a,b) = \varnothing \\ \left(\{a\} \xrightarrow{f} \{b\},(a,b)\right), \text{ si } \mathcal{C}(a,b) \neq \varnothing \end{cases}$

[✓]

K.1.9.4 Sea $\mathcal{C}_G$ la categoría de un solo objeto $O$ cuyo conjunto de morfismos es el conjunto subyacente de un grupo $G = (X,\cdot,e)$, descrita en K.0.2.5 y sea

$$F : \mathcal{C}_G \to \mathfrak{Set}$$

tal que

$$FO = X$$
$$Fg = h_g \in \mathfrak{Set}(X,X), \forall g \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

donde

$$h_g(x) = x \cdot g, \forall x \in X$$

Entonces:

[a] Sean

$$g_1 \in \mathcal{C}_G(O,O) \quad \text{y} \quad g_2 \in \mathcal{C}_G(O,O)$$

Hay que averiguar si

$$F(g_2 \circ g_1) = (Fg_2)(Fg_1)$$

Sea $x \in X$; por un lado tenemos

$$F(g_2 \circ g_1)(x) = h_{g_2 \circ g_1}(x) = h_{g_1 \cdot g_2}(x) = x \cdot (g_1 \cdot g_2)$$

en tanto que por el otro lado

$$[(Fg_2)(Fg_1)](x) = h_{g_2}(h_{g_1}(x)) = h_{g_2}(x \cdot g_1) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$$

o sea que, merced a la asociatividad en $G$, $F$ preserva composiciones.

[$b$] $F$ también preserva identidades, pues

$$Fe = h_e \in \mathfrak{Set}(X, X)$$

es tal que

$$h_e(x) = x \cdot e = x, \forall x \in X$$

i.e. $Fe = 1_X$.

Además tratamos con un funtor fiel ya que si

$$g_1, g_2 \in \mathcal{C}_G(O, O), \; g_1 \neq g_2$$

entonces

$$h_{g_1}(e) = e \cdot g_1 = g_1 \neq g_2 = e \cdot g_2 = h_{g_2}(e)$$

Por lo tanto, $h_{g_1} \neq h_{g_2}$.

Denotando por $\overline{\mathcal{C}_G}$ a la concreción de $\mathcal{C}_G$ tenemos que

($i$) $\overline{\mathcal{C}_G}[Y] = \{A \in \mathcal{C}_G : FA = Y\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } Y \neq X \\ \{O\}, \text{ si } Y = X \end{cases}, \forall Y \in \mathfrak{Set}$

($ii$) $\left|\overline{\mathcal{C}_G}\right| = \{(FA, A) : A \in \mathcal{C}_G\} = \{(X, O)\}$

($iii$) $\mathcal{C}_G((X,O),(X,O)) = \{(Fg,(O,O)) : g \in \mathcal{C}_G(O,O)\} = \{h_g : g \in X\}$

[✓]

K.1.9.2,3,4.1 **Nota:** Algunos autores (Peter Hilton, por ejemplo, Yel-chiang Wu o Joseph Rotman) presentan en sus textos a $\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}$, a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{C}_G$ como categorías que no son concretas siendo que lo son por isomorfismo con $\overline{\mathfrak{Set}^{\{0,1\}}}$, con $\overline{\mathcal{C}}$ y con $\overline{\mathcal{C}_G}$, respectivamente. La idea de concretabilidad en este trabajo se debe a A.G.Kurosh quien la dió a conocer en 1961. El primer ejemplo de una categoría no concretable (nuestro ejemplo K.1.10.10) fue hallado por J.R.Isbell en 1963.

K.1.9.5 Sea

$$\mathtt{Pot} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$$

tal que

$$\mathtt{Pot}\ X = 2^X$$

i.e. la familia de subconjuntos de $X$; y si $f \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ entonces

$$\mathtt{Pot}\ f = 2^f \in \mathfrak{Set}(2^X, 2^Y)$$

se define por

$$2^f(A) = f(A), \forall A \in 2^X$$

donde $f(A)$ denota a la imagen de $A$ bajo la función $f$, es decir, al conjunto

$$\{f(a) \in Y : a \in A\}$$

[$a$] Pot preserva composiciones ya que si

$$f \in \mathfrak{Set}(X,Y) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{Set}(Y,Z)$$

entonces

$$\mathsf{Pot}\ gf = 2^{gf}$$

es tal que para cualquier $A \in 2^X$

$$2^{gf}(A) = gf(A) = g(f(A)) = 2^g(f(A)) = 2^g\left(2^f(A)\right) = 2^g 2^f(A)$$

[$b$] Pot preserva identidades porque

$$2^{1_X}(A) = 1_X(A) = A, \forall A \in 2^X$$

es decir

$$2^{1_X} = 1_{2^X}$$

A Pot se lo conoce por el nombre de **funtor conjunto potencia (covariante)**[3].

Fijemos ahora dos conjuntos cualesquiera $X$ y $Y$ y consideremos la función

$$\mathsf{Pot}_{(X,Y)} : \mathfrak{Set}(X,Y) \to \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

Si $f, f' \in \mathfrak{Set}(X,Y)$, $f \neq f'$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq f'(x)$; sean $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$. Entonces:

$$2^f(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\} \neq \{y'\} = \{f'(x)\} = f'(\{x\}) = 2^{f'}(\{x\})$$

Por lo tanto Pot es un funtor fiel.

Denotando por $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ a la concreción de $\mathfrak{Set}$ vía Pot tenemos:

($i$) $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}[X] = \left\{A \in \mathfrak{Set} : 2^A = X\right\}$

($ii$) $\left|\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}\right| = \left\{\left(2^A, A\right) : A \in \mathfrak{Set}\right\}$

($iii$) $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}\left(\left(2^A, A\right), \left(2^B, B\right)\right) = \left\{\left(2^f, (A,B)\right) : f \in \mathfrak{Set}(A,B)\right\}$

Desde luego, $\overline{\mathfrak{Set}} \cong \overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ pues ambas son isomorfas a $\mathfrak{Set}$ y $\cong$ es una relación de equivalencia entre categorías. Nótense, sin embargo, diferencias entre $\overline{\mathfrak{Set}}$ y $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$; por ejemplo, en $\overline{\mathfrak{Set}}$ la clase de estructuras siempre consta de un único miembro para todo conjunto, en tanto que en $\overline{\overline{\mathfrak{Set}}}$ puede constar de ninguno y ser vacía como ocurre con $X = \{a, b, c\}$, porque no hay $A \in \mathfrak{Set}$ tal que $2^A = X$. [✓]

[3] La razón de ser del apellido *covariante* la veremos luego.

$\underline{K}$.1.10 Terminaremos esta parte exhibiendo un ejemplo de categoría que no sea concretable. Para construirlo requerimos algunos conceptos y resultados que presentaremos enseguida.

$\underline{K}$.1.10.1 **Definición.** Una **subcategoría** de una categoría $\mathfrak{R}$ es una categoría $\wp$ tal que:

i) Todo $\wp$-objeto es un $\mathfrak{R}$-objeto.

ii) Todo $\wp$-morfismo es un $\mathfrak{R}$-morfismo.

iii) La composición en $\wp$ es heredada de $\mathfrak{R}$, i.e. dados cualesquiera $\wp$-morfismos $f, g, h$, la igualdad $gf = h$ ocurre en $\wp$ si, y sólo si, ocurre en $\mathfrak{R}$.

Obsérvese que el inciso (iii) de esta definición está de más cuando $\mathfrak{R}$ es concreta, porque en tal caso la ley de composición viene dada por la composición ordinaria de funciones.

$\underline{K}$.1.10.2 **Proposición.** Toda categoría concreta es isomorfa a una subcategoría de $\mathfrak{Set}$.

*Demostración.* Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Para cada $X \in \mathfrak{Set}$ sea $t_X$ un elemento que no pertenece a $X$. Si ahora sometemos a todo $X \in \mathfrak{Set}$ a la operación de añadirle ese elemento que le es ajeno, entonces podemos pensar que, con la excepción del vacío, todo conjunto es la unión que se obtiene añadiendo a otro conjunto un elemento que le es ajeno. Si además definimos extensiones $\tilde{f} : X \cup \{t_X\} \to Y \cup \{t_Y\}$ de toda $f \in Y^X$ haciendo $\tilde{f}(t_X) = t_Y$, entonces ya estamos en condiciones de referirnos a una colección $\underline{K}'$ que consta de:

*i)* Clases $\underline{K}'[X \cup \{t_X\}] = \underline{K}[X]$, $\forall X \in \mathfrak{Set}$.

*ii)* Una clase $|\underline{K}'|$ definida como

$$|\underline{K}'| = \{(X \cup \{t_X\}, \xi) : \xi \in \underline{K}[X], \forall X \in \mathfrak{Set}\}$$

*iii)* Conjuntos definidos para cualesquiera $A = X \cup \{t_X\}$ y $B = Y \cup \{t_Y\}$ por

$$\underline{K}'((A,\xi),(B,\eta)) = \left\{\tilde{f} : (A,\xi) \to (B,\eta) \mid f \in \underline{K}((X,\xi),(Y,\eta))\right\}$$

Veamos que se satisfacen las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen una categoría concreta.

$(m_1)$ Si para $A = X \cup \{t_X\}$, $B = Y \cup \{t_Y\}$ y $C = Z \cup \{t_Z\}$ tenemos que

$$\tilde{f} \in \underline{K}'((A,\xi),(B,\eta)) \quad \text{y} \quad \tilde{g} \in \underline{K}'((B,\eta),(C,\zeta))$$

entonces

$$\widetilde{gf} \in \underline{K}'((A,\xi),(C,\zeta))$$

porque

$$gf \in \underline{K}((X,\xi),(Z,\zeta));$$

pero es claro que $\widetilde{gf} = \tilde{g}\tilde{f}$.

$(m_2)$

$$\widetilde{1_X} \in \underline{K}'((A,\xi),(A,\xi)) \quad \text{porque} \quad 1_X \in \underline{K}((X,\xi),(X,\xi))$$

y es claro que $\widetilde{1_X} = 1_{X \cup \{t_X\}}$.

Obsérvese que $\underline{K}'$ es una categoría concreta sin objetos que tengan como conjunto subyacente al conjunto vacío, aun cuando tal conjunto sí dé lugar a objetos (no necesariamente uno solo) en $\underline{K}$. Pese a esto, ambas categorías son isomorfas.

En efecto, si definimos $F : \underline{K}' \to \underline{K}$ haciendo

$$F(X \cup \{t_X\}, \xi) = (X, \xi), \forall (X \cup \{t_X\}, \xi) \in \underline{K}'$$

y

$$F\tilde{f} = f, \ \forall \tilde{f} \in \underline{K}'((X \cup \{t_X\}, \xi), (Y \cup \{t_Y\}, \eta))$$

entonces

[a] $F$ preserva composiciones porque

$$F\left(\tilde{g}\tilde{f}\right) = F\left(\widetilde{gf}\right) = gf = (F\tilde{g})\left(F\tilde{f}\right)$$

[b] $F$ preserva identidades porque

$$F1_{(X\cup\{t_X\},\xi)} = F\widetilde{1_{(X,\xi)}} = 1_{(X,\xi)} = 1_{F(X\cup\{t_X\},\xi)}$$

O sea que $F$ es un funtor entre ambas categorías al que, además, podemos definirle su funtor inverso $F^{-1} : \underline{K} \to \underline{K}'$ como

$$F^{-1}(X, \xi) = (X \cup \{t_X\}, \xi), \forall (X, \xi) \in \underline{K}$$

y

$$F^{-1}f = \tilde{f}, \ \forall f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$$

lo cual prueba la isomorfía entre $\underline{K}'$ y $\underline{K}$.

Ahora probaremos que $\underline{K}'$ es isomorfa a una subcategoría $\underline{S}$ de $\mathfrak{Set}$ cuyos objetos son conjuntos de la forma

$$A \times \{\xi\}, \text{ donde } \xi \in \underline{K}'[A], \forall A = X \cup \{t_X\} \in \underline{K}'$$

y cuyos morfismos son funciones

$$\widehat{f} : A \times \{\xi\} \to B \times \{\eta\}, \ A = X \cup \{t_X\}, B = Y \cup \{t_Y\}$$

tales que para toda $\tilde{f} \in \underline{K}'((A, \xi), (B, \eta))$,

$$\widehat{f} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, B \times \{\eta\}) \Leftrightarrow \widehat{f}(a, \xi) = \left(\tilde{f}(a), \eta\right)$$

Claramente se satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) de la definición anterior, por lo que sólo falta verificar que $\underline{S}$ es una categoría para tener que es, efectivamente, una subcategoría de $\mathfrak{Set}$. Como $\mathfrak{Set}$ es concreta, basta checar para $\underline{S}$ las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$.

$(m_2)$ $\widehat{1_X} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, A \times \{\xi\})$, porque $\widetilde{1_X} \in \underline{K}'((A, \xi), (A, \xi))$, $\forall A = X \cup \{t_X\}$

$(m_1)$ Si

$$\widehat{f} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, B \times \{\eta\}) \quad \text{y} \quad \widehat{g} \in \underline{S}(B \times \{\eta\}, C \times \{\zeta\})$$

entonces

$$\widetilde{f} \in \underline{K}'((A, \xi), (B, \eta)) \quad \text{y} \quad \widetilde{g} \in \underline{K}'((B, \eta), (C, \zeta));$$

y ya vimos que en tal caso también $\widetilde{gf} \in \underline{K'}((A,\xi),(C,\zeta))$. En consecuencia

$$\widehat{gf} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, C \times \{\zeta\})$$

y como

$$\begin{aligned} \widehat{gf}(a,\xi) &= (c,\zeta) \\ &\Leftrightarrow \widetilde{gf}(a) = c \\ &\Leftrightarrow \widetilde{g}\left(\widetilde{f}(a)\right) = c \\ &\Leftrightarrow \widehat{g}\left(\widetilde{f}(a),\eta\right) = (c,\zeta) \\ &\Leftrightarrow \widehat{g}\left(\widehat{f}(a,\xi)\right) = (c,\zeta) \end{aligned}$$

tenemos que también

$$\widehat{g}\widehat{f} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, C \times \{\zeta\})$$

Finalmente, definamos $G : \underline{S} \to \underline{K'}$ haciendo

$$G(A \times \{\xi\}) = (A,\xi), \forall A \times \{\xi\} \in \underline{S}$$

y

$$G\widehat{f} = \widetilde{f}, \forall \widehat{f} \in \underline{S}(A \times \{\xi\}, B \times \{\eta\})$$

Entonces

[*a*] $G$ preserva composiciones, ya que

$$G\left(\widehat{g}\widehat{f}\right) = G\left(\widehat{gf}\right) = \widetilde{gf} = \widetilde{g}\widetilde{f} = (G\widehat{g})\left(G\widehat{f}\right)$$

[*b*] $G$ preserva identidades, pues siendo $A = X \cup \{t_X\}$ tenemos que

$$G1_{A\times\{\xi\}} = G\widehat{1_X} = \widetilde{1_X} = 1_{(A,\xi)} = 1_{G(A\times\{\xi\})}$$

Además podemos definir el funtor inverso $G^{-1} : \underline{K'} \to \underline{S}$ mediante

$$G^{-1}(A,\xi) = A \times \{\xi\}, \forall (A,\xi) \in \underline{K'}$$

y

$$G^{-1}\widetilde{f} = \widehat{f}, \forall \widetilde{f} \in \underline{K'}((A,\xi),(B,\eta))$$

Por lo tanto, $\underline{S} \cong \underline{K'}$. Como consecuencia del inciso (b) del ejercicio 2 tenemos que también $\underline{K} \cong \underline{S}$, con lo que la proposición queda demostrada. [✓]

$\underline{K}$.1.10.3 **Definiciones.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria y sean $A_1$ y $A_2$ $\mathfrak{K}$-objetos cualesquiera.

a) Un $(A_1, A_2)$-**abanico** es una pareja $(f_1, f_2)$ de $\mathfrak{K}$-morfismos cuyos codominios son $A_1$ y $A_2$, respectivamente; o sea que un $(A_1, A_2)$-abanico es cualquier diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\ A_1 & & A_2 \end{array}$$

donde $B \in \mathfrak{K}$ y $f_i \in \mathfrak{K}(B, A_i)$, $i \in \{1,2\}$.

b) Diremos que dos $(A_1, A_2)$-abanicos, $(f_1, f_2)$ y $(f_1', f_2')$, **son equivalentes** si siempre forman los mismos cuadrados conmutativos, es decir, si para $\mathfrak{K}$-morfismos cualesquiera $g_i \in \mathfrak{K}(A_i, C)$, $i \in \{1,2\}$, los cuadrados

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B' \arrow[dl, "f_1'"'] \arrow[dr, "f_2'"] & \\ A_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

son ambos conmutativos o ninguno conmuta. Para denotar la equivalencia entre los abanicoES $(f_1, f_2)$ y $(f_1', f_2')$ escribiremos $(f_1, f_2) \sim (f_1', f_2')$.

K.1.10.4 **Proposición**. Para cada $(A_1, A_2)$-abanico $(f_1, f_2)$ en $\mathfrak{Set}$, considérese la relación

$$\varrho_{(f_1,f_2)} = \{(f_1(b), f_2(b)) : b \in B\} \subseteq A_1 \times A_2$$

Entonces tiene lugar la implicación siguiente:

$$\varrho_{(f_1,f_2)} = \varrho_{(f_1',f_2')} \Rightarrow (f_1, f_2) \sim (f_1', f_2')$$

*Demostración.* Asumamos el antecedente de la implicación anterior y supongamos que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 \arrow[dr, "g_1"'] & \circlearrowleft & A_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Sea $b' \in B'$ arbitraria; como $(f_1'(b'), f_2'(b')) \in \varrho_{(f_1,f_2)}$, existe $b \in B$ tal que $f_i(b) = f_i'(b')$. Por lo tanto

$$g_1 f_1'(b') = g_1 f_1(b) = g_2 f_2(b) = g_2 f_2'(b')$$

lo que significa que también

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[dl, "f_1'"'] \arrow[dr, "f_2'"] & \\ A_1 \arrow[dr, "g_1"'] & \circlearrowleft & A_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Análogamente se prueba que la conmutatividad de este diagrama implica la conmutatividad del otro. Por lo tanto, $(f_1, f_2) \sim (f_1', f_2')$. [✓]

K.1.10.5 **Definición.** Sea $\mathfrak{K}$ cualquier categoría. Se dice que $\mathfrak{K}$ satisface la **condición de Isbell** si para cualquier par de $\mathfrak{K}$-objetos $A_1$ y $A_2$ existe un conjunto $M_{(A_1,A_2)}$ de $(A_1, A_2)$-abanicoES tal que todo $(A_1, A_2)$-abanico es equivalente a exactamente un elemento de $M_{(A_1,A_2)}$.

K.1.10.6 **Proposición.** $\mathfrak{Set}$ satisface la condición de Isbell.

*Demostración.* Sean $A_1, A_2 \in \mathfrak{Set}$, arbitrarios. Para cada relación $\rho \in \mathrm{Pot}\,(A_1 \times A_2)$ sean $p_\rho$ y $q_\rho$ las proyecciones

$$\begin{array}{rccc} p_\rho : & \rho & \to & A_1 \\ & (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} q_\rho : & \rho & \to & A_2 \\ & (a_1, a_2) & \mapsto & a_2 \end{array}$$

Entonces

$$\varrho_{(p_\rho, q_\rho)} = \rho, \ \forall \rho \in \mathrm{Pot}\,(A_1 \times A_2)$$

Consideremos el conjunto

$$\widetilde{M}_{(A_1, A_2)} = \{(p_\rho, q_\rho) : \rho \in \mathrm{Pot}\,(A_1 \times A_2)\}$$

y supongamos que $(f_1, f_2)$ es un $(A_1, A_2)$-abanico. Entonces

$$(f_1, f_2) \sim \left(p_{\varrho_{(f_1, f_2)}}, q_{\varrho_{(f_1, f_2)}}\right) \in \widetilde{M}_{(A_1, A_2)}$$

En efecto, dado cualquier par $g_i \in \mathfrak{Set}\,(A_i, C)$, $i \in \{1, 2\}$, tenemos

$$g_1 f_1(b) = g_2 f_2(b) \Leftrightarrow g_1 p_{\varrho_{(f_1, f_2)}}(f_1(b), f_2(b)) = g_2 q_{\varrho_{(f_1, f_2)}}(f_1(b), f_2(b))$$

Esto prueba que $\widetilde{M}_{(A_1, A_2)}$ contiene al menos un elemento equivalente a cualquier $(A_1, A_2)$-abanico dado. Por el Axioma de Elección existe un subconjunto $M_{(A_1, A_2)}$ de $\widetilde{M}_{(A_1, A_2)}$ con la propiedad que exige la condición de Isbell. [✓]

K.1.10.7 **Corolario.** Toda subcategoría $\underline{S}$ de $\mathfrak{Set}$ satisface la condición de Isbell.

*Demostración.* En efecto, cualquier par de $(A_1, A_2)$-abanicos en $\underline{S}$ no equivalentes en $\underline{S}$ son $(A_1, A_2)$-abanicos en $\mathfrak{Set}$ no equivalentes en $\mathfrak{Set}$. Debido a la proposición anterior, tales abanicos no pueden constituir una clase que no sea un conjunto. Por lo tanto, $\underline{S}$ también satisface la condición de Isbell. [✓]

K.1.10.8 **Proposición.** Sean $\mathfrak{R}$ y $\wp$ categorías arbitrarias. Si $\mathfrak{R} \cong \wp$ y $\wp$ satisface la condición de Isbell, entonces $\mathfrak{R}$ también la satisface.

*Demostración.* Sea $F : \wp \cong \mathfrak{R}$ y sean $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}$; entonces existen $P_1, P_2 \in \wp$ tales que $FP_1 = A_1$ y $FP_2 = A_2$. Por hipótesis, en $\wp$ existe un conjunto $M_{(P_1, P_2)}$ de $(P_1, P_2)$-abanicos que contiene un único $(P_1, P_2)$-abanico equivalente a un $(P_1, P_2)$-abanico dado. Sea

$$M_{F(P_1, P_2)} = \left\{(F\varphi_1, F\varphi_2) : (\varphi_1, \varphi_2) \in M_{(P_1, P_2)}\right\} \ ;$$

entonces $M_{F(P_1, P_2)}$ es un conjunto de $(A_1, A_2)$-abanicos, y si $(f_1, f_2)$ es un $(A_1, A_2)$-abanico arbitrario, existe un $(P_1, P_2)$-abanico $(g_1, g_2)$ tal que $Fg_i = f_i$, $i \in \{1, 2\}$, debido a que $F$ es un isomorfismo. Pero $(g_1, g_2) \sim (\varphi_1, \varphi_2)$, para algún abanico $(\varphi_1, \varphi_2) \in M_{(P_1, P_2)}$, de modo que

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & g_1 \swarrow & & \searrow g_2 & \\ P_1 & & \circlearrowleft & & P_2 \\ & h_1 \searrow & & \swarrow h_2 & \\ & & R & & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 & \\ P_1 & & \circlearrowleft & & P_2 \\ & h_1 \searrow & & \swarrow h_2 & \\ & & R & & \end{array}$$

Pero debido a la fidelidad de $F$ y a que $F$ preserva composiciones, se tiene que

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Q \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ P_1 \arrow[dr, "h_1"'] & \circlearrowleft & P_2 \arrow[dl, "h_2"] \\ & R & \\ & \Updownarrow & \\ & FQ \arrow[dl, "Fg_1"'] \arrow[dr, "Fg_2"] & \\ FP_1 \arrow[dr, "Fh_1"'] & \circlearrowleft & FP_2 \arrow[dl, "Fh_2"] \\ & FR & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & Q' \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ P_1 \arrow[dr, "h_1"'] & \circlearrowleft & P_2 \arrow[dl, "h_2"] \\ & R & \\ & \Updownarrow & \\ & FQ' \arrow[dl, "F\varphi_1"'] \arrow[dr, "F\varphi_2"] & \\ FP_1 \arrow[dr, "Fh_1"'] & \circlearrowleft & FP_2 \arrow[dl, "Fh_2"] \\ & FR & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & FQ \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 \arrow[dr, "Fh_1"'] & \circlearrowleft & A_2 \arrow[dl, "Fh_2"] \\ & FR & \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd}[row sep=small] & FQ' \arrow[dl, "F\varphi_1"'] \arrow[dr, "F\varphi_2"] & \\ A_1 \arrow[dr, "Fh_1"'] & \circlearrowleft & A_2 \arrow[dl, "Fh_2"] \\ & FR & \end{tikzcd}$$

De aquí que $(f_1, f_2) \sim (F\varphi_1, F\varphi_2)$. Esto prueba que también $\mathfrak{R}$ satisface la condición de Isbell. [✓]

$\underline{K}$.1.10.9 **Corolario**. Toda categoría concreta satisface la condición de Isbell.

*Demostración.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, entonces existe una subcategoría de $\mathfrak{Set}$, $\underline{S}$, con la cual $\underline{K}$ es isomorfa. Debido al corolario anterior, $\underline{S}$ satisface la condición de Isbell; y debido a la proposición precedente, $\underline{K}$ también la satisface. [✓]

$\underline{K}$.1.10.10 Sean: $\mathbb{C}$ una clase que no es un conjunto, $a, b, c$ tres elementos que no pertenezcan a $\mathbb{C}$, $\mathfrak{R}$ la categoría cuya clase de objetos es

$$|\mathfrak{R}| = (\mathbb{C} \times \{b\}) \cup \{a\} \cup (\mathbb{C} \times \{c\})$$

y cuyos conjuntos de morfismos se definen a continuación:

$\mathfrak{R}(X, X) = \{1_X\}, \forall X \in \mathfrak{R}$;

$\mathfrak{R}(a, (\alpha, b)) = \varnothing = \mathfrak{R}((\alpha, c), a), \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

$\mathfrak{R}((\alpha, b), (\beta, b)) = \varnothing = \mathfrak{R}((\alpha, c), (\beta, c)), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \beta$;

$\mathfrak{R}((\alpha, b), a) = \{f_\alpha\}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

$\mathfrak{R}(a, (\alpha, c)) = \{g_\alpha, h_\alpha\}, (g_\alpha \neq h_\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

$\mathfrak{R}((\alpha, c), (\beta, b)) = \varnothing, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

$\mathfrak{R}((\alpha, b), (\alpha, c)) = \{g_\alpha f_\alpha, h_\alpha f_\alpha\}, (g_\alpha f_\alpha \neq h_\alpha f_\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

$\mathfrak{R}((\alpha, b), (\beta, c)) = \{g_\beta f_\alpha = h_\beta f_\alpha\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \beta$.

Observemos que la construcción de esta categoría impide que se satisfaga la condición de Isbell, porque no permite la existencia de un conjunto $M_{(a,a)}$ que cumpla con ella, ya que para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ existe un $(a, a)$-abanico que no es equivalente a ningún otro.

En efecto, de acuerdo con la construcción de $\mathfrak{R}$, todo $(a, a)$-abanico es una pareja de la forma $(f_\alpha, f_\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{C}$; pero si $\alpha \neq \alpha'$, entonces, según hemos descrito los morfimos, tenemos dos cuadrados

$$\begin{array}{ccc} & (\alpha,b) & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow f_\alpha \\ a & & a \\ g_\alpha \searrow & & \swarrow h_\alpha \\ & (\alpha,c) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & (\alpha',b) & \\ f_{\alpha'} \swarrow & & \searrow f_{\alpha'} \\ a & & a \\ g_\alpha \searrow & & \swarrow h_\alpha \\ & (\alpha,c) & \end{array}$$

el primero de los cuales no es conmutativo en tanto que el segundo sí lo es, lo cual significa que $(f_\alpha, f_\alpha) \nsim (f_{\alpha'}, f_{\alpha'})$. En consecuencia, la familia $M_{(a,a)}$ de $(a,a)$-abanicos es exactamente tan numerosa como $\mathbf{C}$, que por hipótesis no constituye un conjunto.

Aplicando el resultado del corolario anterior tenemos a esta $\mathfrak{R}$ como ejemplo de una categoría que no es concretable. [✓]

**Dos notas** para finalizar: 1ª Además de necesaria, la condición de Isbell también es suficiente para garantizar la concretabilidad de una categoría. Este es un problema que permaneció abierto cerca de diez años y fue resuelto por Peter Freyd en 1973.(Véase [2] de las referencias.)

2ª Otro ejemplo de categoría que no es concretable es $H\mathfrak{Top}$ (nuestro ejemplo $\underline{K}$.0.2.3). También se debe a Freyd la prueba de su no concretabilidad (ver [3] en las referencias)

# Capítulo 3

# Estructuras Iniciales y Finales. Dualidad

En lo que sigue, $I$ denotará una familia de índices arbitraria.

## 3.1 Estructuras Iniciales

$\underline{K}$.2.1 **Definición.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria. Una **fuente en** $\mathfrak{K}$ o $\mathfrak{K}$**-fuente** es una pareja $(A,(f_i)_I)$ en la que $A$ es un $\mathfrak{K}$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\mathfrak{K}$-morfismos $f_i \in \mathfrak{K}(A, A_i)$, $i \in I$. En tal caso, $A$ recibe el nombre de **dominio de la fuente**, la clase $(A_i)_I$ de $\mathfrak{K}$-objetos es el **codominio de la fuente** y cada morfismo $f_i$ es **una flecha de la fuente**. Notaciones alternativas que también emplearemos para las fuentes son:

$$\left(A \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I \quad \text{y} \quad (f_i : A \to A_i)_I$$

Con frecuencia consideraremos fuentes en $\mathfrak{Set}$

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

y supondremos que cada miembro $X_i$ de su codominio puede $\underline{K}$-estructurarse según una categoría concreta arbitraria $\underline{K}$. Ahora bien, con su codominio ya $\underline{K}$-estructurado la fuente deja de ser propiamente una $\mathfrak{Set}$-fuente; tampoco podrá considerársela una $\underline{K}$-fuente a menos que se muestre una $\underline{K}$-estructura para $X$ que haga de cada una de las flechas un $\underline{K}$-morfismo. Esta es precisamente la finalidad al considerar esta situación: dar lugar al hallazgo y escrutinio de $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hagan de cada flecha de la fuente un $\underline{K}$-morfismo. Nos permitiremos extender el vocablo *fuente* para abarcar con él a estas "fuentes híbridas" indicando, eso sí, en cada caso, de qué categoría concreta son objetos los miembros de su codominio.

$\underline{K}$.2.2 *Ejemplo.* Si $(X,(f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i,\tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología para $X$ generada por

$$\gamma = \left\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, \forall i \in I\right\}$$

es una $\mathfrak{Top}$-estructura para $X$ que hace de cada $f_i$ una función continua.

En efecto, sea $i \in I$ y sea $\tau$ la topología generada por $\gamma$; entonces

$$U \in \tau_i \Rightarrow f_i^{-1}(U) \in \gamma \subseteq \tau$$

Por lo tanto, $f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ es continua.

La topología anterior es la **topología débil**[1] **para** $X$ **correspondiente a** $(f_i)_I$ **y a** $(\tau_i)_I$.

$\underline{K}$.2.3 **Definición.** Sea $X$ un conjunto arbitrario. Si $F = (X, (f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(B_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $B_i = (X_i, \xi_i)$ de una categoría concreta $\underline{K}$, entonces **una $\underline{K}$-estructura inicial para $X$ con respecto a la fuente $F$** es una estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $B = (X, \xi)$ entonces:

$(i)$ $f_i \in \underline{K}(B, B_i)$, $\forall i \in I$.

$(ii)$ Si $A = (W, \omega)$ es un $\underline{K}$-objeto y $f : W \to X$ es una función tal que

$$f_i f \in \underline{K}(A, B_i), \forall i \in I$$

entonces $f \in \underline{K}(A, B)$.

Si $\xi$ es una $\underline{K}$-estructura inicial para $X$ con respecto a $F$, entonces hablaremos de $F$ como de una **$\underline{K}$-fuente inicial.**

*Ejercicio $t_1 3$.* Demuestre que las condiciones $(i)$ y $(ii)$ de la definición anterior pueden sintetizarse en una sola:

Para cada $\underline{K}$-objeto $A = (W, \omega)$ y cada función $f : W \to X$

$$f \in \underline{K}(A, B) \Leftrightarrow f_i f \in \underline{K}(A, B_i), \forall i \in I$$

*Ejercicio $t_1 4$.* Sea $F = (X, (f_i)_I)$ una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos. Probar que la topología débil para $X$ correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $X$ con respecto a la fuente $F$.

$\underline{K}$.2.4 *Ejemplos.*

$\underline{K}$.2.4.1 Debido al ejercicio anterior, la topología débil para $X$ correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $X$ con respecto a la fuente

$$F = (f_i : X \to (X_i, \tau_i))_I$$

$\underline{K}$.2.4.2 Si $\overline{\mathfrak{Set}}$ es la concreción de $\mathfrak{Set}$ descrita anteriormente y

$$F = (f_i : X \to (X_i, X_i))_I$$

es una fuente de codominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces $X$ es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura inicial para $X$ con respecto a $F$.

En efecto, $X \in \overline{\mathfrak{Set}}[X]$ y si $B = (X, X)$ y $B_i = (X_i, X_i)$, $\forall i \in I$, entonces:

$(i)$ Como para cada $i \in I$, $f_i \in \mathfrak{Set}(X, X_i)$, entonces

$$1_{\mathfrak{Set}} f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}((1_{\mathfrak{Set}} X, X), (1_{\mathfrak{Set}} X_i, X_i)), \forall i \in I$$

es decir

$$f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}(B, B_i), \forall i \in I$$

[1] También llamada inicial

$(ii)$ Si $A = (W, W)$ y $f : W \to X$ es tal que para cada $i \in I$, $f_i f \in \overline{\mathfrak{Set}}(A, B_i)$, entonces [por el solo hecho de ser $f \in \mathfrak{Set}(W, X)$], $f \in \overline{\mathfrak{Set}}(A, B)$.

$\underline{K}$.2.5 **Definiciones.** (a) Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria. Una $\mathfrak{R}$-fuente $F = (B, (f_i)_I)$ es una **$\mathfrak{R}$-monofuente** si toda vez que para un $\mathfrak{R}$-objeto $A$ cualquiera se tengan morfismos

$$h, k \in \mathfrak{R}(A, B)$$

tales que $f_i h = f_i k$, $\forall i \in I$, resulta que $h = k$.

(b) Si $F = (B, f)$ es una $\mathfrak{R}$-monofuente con una sola flecha $f$, entonces $f$ recibe el nombre de **$\mathfrak{R}$-monomorfismo.**

(c) Si $\underline{K}$ es concreta y $F = ((X, \xi), (f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente, se dice que $F$ **separa puntos** si para cualquier par de puntos distintos del dominio de $F$ existe al menos un $\underline{K}$-morfismo en la clase $(f_i)_I$ que los aplica en puntos distintos del miembro correspondiente del codominio de $F$; en símbolos:

$$x \neq x' \Rightarrow f_i(x) \neq f_i(x'), \text{ p.a. } i \in I$$

Como veremos a continuación, en una categoría concreta las fuentes que separan puntos constituyen una parte (algunas veces propia) de las monofuentes.

$\underline{K}$.2.6 **Proposición.** Si $\underline{K}$ es concreta y $F = ((X, \xi), (f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente que separa puntos, entonces $F$ es monofuente.

*Demostración.* Hay que probar que para

$$h, k \in \underline{K}((W, \omega), (X, \xi))$$

se tiene

$$h \neq k \Rightarrow f_i h \neq f_i k, \text{ p.a. } i \in I$$

Pero si $h \neq k$, entonces $h(w) \neq k(w)$, p.a. $w \in W$; como $F$ separa puntos, existe $i \in I$ tal que

$$f_i h(w) \neq f_i k(w)$$

que es a lo que se quería llegar.$_{[\checkmark]}$

$\underline{K}$.2.7 *Ejemplos.*

$\underline{K}$.2.7.1 Como se sabe, los espacios topológicos pueden clasificarse según la posibilidad que haya en ellos de separar puntos y conjuntos de acuerdo con los llamados *axiomas de separación.* En ellos se establecen propiedades que dan lugar a categorías concretas cuyos objetos son espacios topológicos con tales propiedades y cuyos morfismos son funciones continuas. Como ejemplo consideraremos la **categoría de espacios de Hausdorff y de funciones continuas** que denotaremos por $\mathbf{T_2}$.

Como sabemos, $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$ si, y sólo si, para cualesquiera puntos distintos $x, x' \in X$ existen $U, U' \in \tau$ tales que $x \in U$, $x' \in U'$ y $U \cap U' = \varnothing$.

$\underline{K}$.2.7.1.1 **Proposición**. Si

$$F = \left((X, \tau) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)\right)_I$$

es una monofuente de funciones continuas y $\tau_i \in \mathbf{T_2}[X_i]$, $\forall i \in I$, entonces $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$.

*Demostración.* Por hipótesis, para

$$h, k : (W, \omega) \to (X, \tau)$$

continuas vale la implicación siguiente:

$$h \neq k \Rightarrow f_i h \neq f_i k, \text{ p.a. } i \in I$$

Sean $x, x' \in X$, $x \neq x'$, y definamos

$$h, k : (W, \omega) \to (X, \tau), \text{ con } W = \{w\} \text{ y } \omega = \{\{w\}, \varnothing\}$$

como

$$h(w) = x \quad \text{y} \quad k(w) = x'$$

Por ser constantes ambas funciones son continuas y son distintas porque $x \neq x'$; en consecuencia existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(x')$. Para esa $i$ escojamos $U, U' \in \tau_i$ ajenos y tales que $f_i(x) \in U$ y $f_i(x') \in U'$; entonces $f_i^{-1}(U)$ y $f_i^{-1}(U')$ son abiertos ajenos en $\tau$ y $x \in f_i^{-1}(U)$ y $x' \in f_i^{-1}(U')$. Esto prueba que también $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$. [✓]

Como corolario de este resultado podemos extraer condiciones suficientes para la existencia de $\mathbf{T_2}$-estructuras iniciales.

**Corolario.** Sean, $X$ un conjunto y $F = (X, (f_i)_I)$ una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios de Hausdorff. Si $F$ es una fuente que separa puntos, entonces a $X$ se lo puede revestir con una $\mathbf{T_2}$-estructura inicial respecto de la fuente $F$.

*Demostración.* Sea $\tau$ la topología débil para $X$ correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$. Entonces $F$ se convierte en una fuente de funciones continuas que es monofuente porque separa puntos. Como además $\tau_i \in \mathbf{T_2}[X]$, $\forall i \in I$, entonces, debido a la proposición anterior, $\tau$ es una $\mathbf{T_2}$-estructura para $X$. Además, si $(W, \omega) \in \mathbf{T_2}$ y $f : W \to X$ es una funcion tal que para toda $i \in I$ $f_i f$ es continua, entonces también $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es continua porque $(W, \omega) \in \mathfrak{Top}$ y $\tau$, por el ejercicio 4, es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $X$ correspondiente a $F$. Por lo tanto, $\tau$ es una $\mathbf{T_2}$-estructura inicial para $X$. [✓]

K.2.7.1.2 **Proposición**. Sea $F = ((X, \tau), (f_i)_I)$ una fuente inicial de funciones continuas. Si $\tau \in \mathbf{T_2}[X]$, entonces $F$ es monofuente.

*Demostración.* Sean

$$h, k : (W, \omega) \to (X, \tau)$$

funciones continuas tales que

$$f_i h = f_i k, \forall i \in I$$

Consideremos el espacio de Sierpinski $(S, \sigma)$, donde $S = \{s_1, s_2\}$ y $\sigma = \{S, \{s_1\}, \varnothing\}$ y para $w \in W$ arbitraria pero fija, definamos

$$f_w : (S, \sigma) \to (X, \tau)$$

por

$$f_w(s_1) = h(w)$$
$$f_w(s_2) = k(w)$$

Entonces cada composición $f_i f_w$ es continua porque es constante para toda $i \in I$. Debido a la inicialidad de $F$, también $f_w$ es continua. Pero entonces $h(w)$ y $k(w)$ no pueden ser distintos ya que, como $(X, \tau)$ es de Hausdorff, si fuesen distintos existirían abiertos ajenos $U$ y $V$ en $X$ tales que $h(w) \in U$ y $k(w) \in V$; pero entonces, debido a la continuidad de $f_w$,

$$\{s_1\} = f_w^{-1}(U) \quad \text{y} \quad \{s_2\} = f_w^{-1}(V)$$

serían abiertos en $(S, \sigma)$, lo que es falso. Este argumento vale para toda $w \in W$; en consecuencia, $h = k$ y, por lo tanto, $F$ es monofuente.$_{[\checkmark]}$

**Corolario.** Toda $\mathbf{T_2}$-fuente inicial es monofuente.$_{[\checkmark]}$

$\underline{K}$.2.8 **Definición.** Sea $\mathfrak{R}$ cualquier categoría; un morfismo $f \in \mathfrak{R}(A, B)$ es un $\mathfrak{R}$-**isomorfismo** si existe $g \in \mathfrak{R}(B, A)$ tal que

$$gf = 1_A \quad \text{y} \quad fg = 1_B$$

$\underline{K}$.2.9 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean $(X, \xi)$ y $(Y, \eta)$ $\underline{K}$-objetos arbitrarios. Entonces son equivalentes:

(a) $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo

(b) $f : X \to Y$ es una función biyectiva tal que

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)) \quad \text{y} \quad f^{-1} \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$$

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) De acuerdo con la definición existe $g \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$ tal que $gf = 1_{(X,\xi)}$ y $fg = 1_{(Y,\eta)}$; en consecuencia, $gf = 1_X$ y $fg = 1_Y$, lo cual significa que $f : X \to Y$ es una función invertible y por lo tanto biyectiva. Además, $f$ es un $\underline{K}$-morfismo porque es $\underline{K}$-isomorfismo, y como, por su parte, $g = f^{-1}$ entonces tenemos que

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)) \quad \text{y} \quad f^{-1} \in \underline{K}((Y, \eta), (X, \xi))$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Es claro que $f$ y $f^{-1}$ son $\underline{K}$-morfismos tales que

$$f^{-1}f = 1_{(X,\xi)} \quad \text{y} \quad ff^{-1} = 1_{(Y,\eta)}$$

Por lo tanto, $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo como se quería demostrar.$_{[\checkmark]}$

$\underline{K}$.2.10 *Ejemplos.*

$\underline{K}$.2.10.1 Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces

$$f : (X, X) \to (Y, Y)$$

es un $\overline{\mathfrak{Set}}$-isomorfismo.

$\underline{K}$.2.10.2 Los $\mathfrak{Top}$-isomorfismos son los homeomorfismos.

*Ejercicio $t_1 5$.* Sea $F = \left(X \xrightarrow{f} (Y, \eta)\right)$ una fuente de una sola flecha y supóngase que $f$ es biyectiva. Probar que $\xi$ es inicial en $X$ con respecto a $F$ si, y sólo si, $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.

La proposición que sigue nos permitirá dar un giro en el lenguaje cuando nos refiramos a las estructuras iniciales; ya no diremos, por ejemplo, que $\xi$ es *una* estructura inicial con respecto a la fuente $\mathcal{F}$ sino *la* estructura inicial con respecto a esa fuente, pues lo que establece es precisamente la unicidad en la inicialidad de $\xi$.

$\underline{K}$.2.11 **Proposición.** a) Si $\mathcal{F} = ((X,\xi), (f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente inicial y $h : (X,\xi') \to (X,\xi)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces la fuente $\mathcal{F}' = ((X,\xi'), (f_i h)_I)$ también es una $\underline{K}$-fuente inicial.

b) Si

$$\mathcal{F} = \left((X,\xi) \xrightarrow{f_i} (X_i,\xi_i)\right)_I \quad \text{y} \quad \mathcal{F}' = \left((X,\xi') \xrightarrow{f_i} (X_i,\xi_i)\right)_I$$

son $\underline{K}$-fuentes iniciales, entonces existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : (X,\xi') \to (X,\xi)$ tal que $f_i h = f_i$, $\forall i \in I$.

*Demostración.* a) Sea $(W,\omega)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario y supongamos que $f : W \to X$ es una función tal que $(f_i h) f$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$. Entonces $hf$ es una función tal que $f_i(hf)$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, debido a la inicialidad de $\mathcal{F}$, $hf$ resulta $\underline{K}$-morfismo. Como además $h$ es un $\underline{K}$-isomorfismo entonces, debido al resultado establecido en el ejercicio anterior, también $\xi'$ es inicial para $X$ con respecto a la fuente cuya única flecha es $h$ y, por lo tanto, también $f$ es un $\underline{K}$-morfismo.

b) Si

$$h = 1_X : (X,\xi') \to (X,\xi)$$

entonces, como $\mathcal{F}'$ es una $\underline{K}$-fuente, resulta que

$$f_i 1_X = f_i : (X,\xi') \to (X_i,\xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, por la inicialidad de $\mathcal{F}$,

$$1_X \in \underline{K}((X,\xi'),(X,\xi))$$

La demostración de que

$$1_X^{-1} \in \underline{K}((X,\xi),(X,\xi'))$$

es análoga.

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi') \arrow[rr, shift left, "1_X"] \arrow[dr, "f_i"'] & \circlearrowleft & (X,\xi) \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "f_i"] \\
& (X_i,\xi_i) &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $1_X$ es un $\underline{K}$-isomorfismo. [✓]

$\underline{K}$.2.12 En el ejercicio 4 se establece que en $\mathfrak{Top}$ la topología débil para $X$ es una (y, por el resultado anterior, es *la*) $\mathfrak{Top}$-estructura inicial con relación a cierta fuente $\mathcal{F}$. El nombre de *débil* le viene a consecuencia de ser la *menos fina* de las topologías para $X$ que hace de cada flecha de $\mathcal{F}$ una función continua. El nombre de *inicial* en una $\underline{K}$-estructura obedece a razones análogas: es la "más chica" de las $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hace de cada flecha de $\mathcal{F}$ un $\underline{K}$-morfismo. Desde luego, se requiere establecer una jerarquía entre las $\underline{K}$-estructuras de $X$ que dé sentido a tal afirmación. En $\mathfrak{Top}$, $\tau$ es menos fina que $\tau'$ si $\tau \subseteq \tau'$, lo cual es equivalente a pedir que

$$1_X : (X,\tau') \to (X,\tau)$$

sea continua. Esta condición es susceptible de generalización a cualquier categoría concreta.

$\underline{K}$.2.13 **Definición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria y sean $\theta, \xi \in \underline{K}[X]$ cualesquiera. Diremos que $\theta$ **es menos fina que** $\xi$ o que $\xi$ **es más fina que** $\theta$ si

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \theta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. En tal caso escribiremos $\xi \leq_{\underline{K}} \theta$.

$\underline{K}$.2.14 *Ejemplos.*

$\underline{K}$.2.14.1 De acuerdo con lo anterior, si $\tau, \tau' \in \mathfrak{Top}[X]$ entonces

$$\tau' \leq_{\mathfrak{Top}} \tau \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau'$$

$\underline{K}$.2.14.2 Para el ejemplo que sigue introduciremos una nueva categoría concreta; es la **categoría de gráficas dirigidas y funciones compatibles:** $\mathfrak{Gra}$.

$(i)$ La clase de $\mathfrak{Gra}$-estructuras para cada conjunto $X$ es la familia de relaciones binarias en $X$:

$$\mathfrak{Gra}[X] = \{\alpha \mid \alpha \subseteq X \times X\}$$

$(ii)$ Los $\mathfrak{Gra}$-objetos, llamados **gráficas dirigidas** o **digráficas** son, por supuesto, las parejas del tipo $(X, \alpha)$, con $\alpha \in \mathfrak{Gra}[X]$. En tal caso, los elementos de $X$ se llaman **vértices de la digráfica** y los de $\alpha$ **flechas** de la misma.

$(iii)$ Dados $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ en $\mathfrak{Gra}$, los morfismos de $A$ en $B$ son las **funciones que son compatibles con** $\alpha$ **y** $\beta$, i.e.

$$\mathfrak{Gra}(A, B) = \left\{f \in Y^X \mid (x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in \beta\right\}$$

Es fácil ver que se satisfacen las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen a una categoría concreta.

En cuanto a la jerarquía entre $\mathfrak{Gra}$-estructuras de $X$ tenemos que

$$\alpha \leq_{\mathfrak{Gra}} \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

En efecto, $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$ es un $\mathfrak{Gra}$-morfismo si, y sólo si,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (1_X(x_1), 1_X(x_2)) = (x_1, x_2) \in \beta$$

$\underline{K}$.2.15 **Proposición.** Sea $F = ((X, \xi), (f_i)_I)$ una $\underline{K}$-fuente inicial cualquiera. Entonces $\xi$ es la menos fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hacen de cada $f_i$ un $\underline{K}$-morfismo.

*Demostración.* Supongamos que $\theta$ es otra $\underline{K}$-estructura para $X$ que hace de cada $f_i$ un $\underline{K}$-morfismo.

$$\begin{tikzcd}
(X,\theta) \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "f_i"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & (X,\xi) \arrow[dl, "f_i"] \\
& (X_i,\xi_i) &
\end{tikzcd}$$

Entonces, la composición $f_i = f_i 1_X : (X, \theta) \to (X_i, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, lo cual, debido a la inicialidad de $F$, implica que $1_X$ es un $\underline{K}$-morfismo, y esto significa precisamente que $\xi$ es menos fina que $\theta$. $[\checkmark]$

$\underline{K}$.2.16 El resultado anterior es útil cuando se da uno a la tarea de averiguar si existe una estructura inicial para $X$ con respecto a una fuente cuyo codominio es una familia de objetos de alguna categoría concreta ya que entonces basta considerar todas aquellas estructuras para $X$ que hacen de cada flecha de la fuente un morfismo. Un ejemplo aclarará lo dicho; para ello presentaremos otra categoría concreta: $\mathfrak{Pos}$ es la **categoría de los conjuntos parcialmente ordenados (*copos*) y de las funciones monótonas.**

(*i*) $\mathfrak{Pos}[X]$ es la familia de órdenes parciales en el conjunto $X$, es decir, de relaciones binarias en $X$ que son reflexivas, transitivas y antisimétricas.

(*ii*) En consecuencia, los $\mathfrak{Pos}$-objetos, que llamaremos copos, son parejas $(X, \leq)$ en las que $X$ es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial en $X$.

(*iii*) Los $\mathfrak{Pos}$-morfismos entre dos copos cualesquiera $A = (X, \leq_X)$ y $B = (Y, \leq_Y)$ son las funciones monótonas, es decir,

$$\mathfrak{Pos}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : x \leq_X x' \Rightarrow f(x) \leq_Y f(x') \right\}$$

Los axiomas $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen a una categoría concreta se comprueban fácilmente.

Ahora consideremos una fuente

$$F = \left( X \xrightarrow{f_i} (X_i, \leq_i) \right)_I$$

y preguntémonos acerca de la existencia de un orden parcial para $X$ que sea inicial con relación a $F$.

De acuerdo con la proposición anterior, si tal orden existe debe ser el menos fino de los órdenes parciales para $X$ que hacen de cada $f_i$ una función monótona. Esta condición sugiere cómo definir tal orden parcial: Dados cualesquiera $x, x' \in X$,

$$x \preceq x' \Leftrightarrow f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$$

Entonces, $\preceq$ resulta reflexivo y transitivo, como se verifica fácilmente, y la antisimetría viene a ser el parteaguas en la solución del problema porque:

1. Si $\preceq$ es antisimétrico, entonces es el orden parcial buscado.
2. Si $\preceq$ no es antisimétrico, entonces el orden parcial buscado no existe.

*Demostración:* 1. Sean $(W, \leq)$ un copo y $h : W \to X$ una función tales que toda composición

$$f_i h : (W, \leq) \to (X_i, \leq_i)$$

es monótona. Entonces $w \leq w'$ implica

$$f_i(h(w)) \leq_i f_i(h(w')), \forall i \in I$$

lo cual, de acuerdo con la definición de $\preceq$, es equivalente a escribir $h(w) \preceq h(w')$. Luego,

$$h : (W, \leq) \to (X, \preceq)$$

es monótona, que es lo que había que demostrar para sostener que $\preceq$ es una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para $X$ con relación a $F$.

2. Supongamos que pese a no ser antisimétrico $\preceq$ existiese, sin embargo, una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial $\leq$ para $X$ con relación a $F$. Siendo así, demostraremos que $\leq$ es menos fino que $\preceq$.

Sean $x_0, x'_0 \in X$ tales que $x_0 \preceq x'_0$ y definamos un orden $\leqq$ en $X$ como sigue: Para cualesquiera $x, x' \in X$

$$x \leqq x' \Leftrightarrow x = x' \text{ o } \begin{cases} x = x_0 \\ \text{y} \\ x' = x'_0 \end{cases}$$

Obsérvese que $x_0 \leqq x'_0$. Entonces la composición

$$(X, \leqq) \xrightarrow{1_X} (X, \leq) \xrightarrow{f_i} (X_i, \leq_i)$$

es monótona para toda $i \in I$, ya que si $x \leqq x'$ y:

i) $x = x'$, entonces $f_i(x) = f_i 1_X(x) = f_i 1_X(x') = f_i(x')$; $\therefore f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$.

ii) $x = x_0$ y $x' = x'_0$, entonces $x \preceq x'$ lo cual, de acuerdo con la definición de $\preceq$, implica que también $f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$.

Pero $\leq$ es inicial para $X$ con relación a $F$; luego,

$$1_X : (X, \leqq) \to (X, \leq)$$

es monótona, de modo que, como $x_0 \leqq x'_0$, tenemos que $x_0 \leq x'_0$. Si además de $x_0 \preceq x'_0$ tuviéramos que también $x'_0 \preceq x_0$, el mismo razonamiento nos llevaría a que también $x'_0 \leq x_0$ y, por la antisimetría de $\leq$, tendríamos que $x_0 = x'_0$ $\underset{\circ}{\nabla}$. Esto contradice nuestro supuesto de que $\preceq$ no es antisimétrico. Luego, falso suponer la existencia de un orden parcial para $X$ que sea inicial con relación a $F$. $_{[\checkmark]}$

## 3.2 Principio de Dualidad

K.3.1 Sea $C$ la categoría cuya clase de objetos es el conjunto subyacente $X$ del conjunto preordenado $(X, \leq)$ descrita en K.0.2.4, y definamos en $X$ la relación $\preceq$ mediante

$$x \preceq x' \Leftrightarrow x' \leq x, \quad \forall x, x' \in X$$

La relación $\preceq$ resulta claramente reflexiva y transitiva, por lo que tiene lugar otra categoría que denotaremos por $C^{op}$, cuya clase de objetos es la misma que la de $C$ y para la cual, dados $b, a \in X$, el conjunto de morfismos $C^{op}(b, a)$ es

$$C^{op}(b,a) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b \npreceq a \\ \{\ll b, a \gg\} & \text{si } b \preceq a \end{cases}$$

o bien

$$C^{op}(b,a) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \nleq b \\ \{(a, b)\} & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

así que

$$C^{op}(b,a) = C(a,b)$$

En cuanto a la ley de composición, sabemos que si

$$\ll c, b \gg \in C^{op}(c, b) \quad \text{y} \quad \ll b, a \gg \in C^{op}(b, a)$$

entonces

$$\ll b, a \gg \circ \ll c, b \gg = \ll c, a \gg = \langle a, c\rangle = \langle b, c\rangle \circ \langle a, b\rangle$$

o bien, considerando que

$$C^{op}(c, b) = C(b, c) \quad \text{y} \quad C^{op}(b, a) = C(a, b)$$

también puede expresarse lo anterior escribiendo

$$\langle a, b\rangle \circ^{op} \langle b, c\rangle = \langle b, c\rangle \circ \langle a, b\rangle$$

La categoría $C^{op}$ se llama *categoría dual de* $C$, que es un caso particular de la idea que sigue.

K.3.2 **Definición. La categoría dual** $\mathfrak{K}^{op}$ de una categoría $\mathfrak{K}$ se forma del siguiente modo:

($i$) La clase de objetos de $\mathfrak{K}^{op}$ es la misma que la clase de objetos de $\mathfrak{K}$: $|\mathfrak{K}^{op}| = |\mathfrak{K}|$

($ii$) Dados $B, A \in \mathfrak{K}^{op}$ (i.e. $A, B \in \mathfrak{K}$) se tiene

$$\mathfrak{K}^{op}(B, A) = \mathfrak{K}(A, B)$$

($iii$) Si

$$f \in \mathfrak{K}^{op}(C, B) \quad \text{y} \quad g \in \mathfrak{K}^{op}(B, A)$$

entonces

$$g \circ^{op} f = f \circ g$$

K.3.3 *Ejemplos.*

K.3.3.1 La categoría dual, $\mathfrak{Set}^{op}$, a la categoría de los conjuntos tiene como objetos a todos los conjuntos y como conjunto de morfismos entre dos conjuntos $X$ y $Y$ arbitrarios a

$$\mathfrak{Set}^{op}(X, Y) = X^{Y} \quad [2]$$

K.3.3.2 Sea $G = (X, \cdot, e)$ un grupo cualquiera y sea $C_G$ la categoría con un sólo objeto $O$ y cuyo conjunto de morfismos es $X$, descrita en K.0.2.5. Entonces, también $C_G^{op}$ tiene como único objeto a $O$ y también $C_G^{op}(O, O) = X$; en cuanto a su ley de composición, dados $g_1, g_2 \in X$ tenemos:

$$g_1 \circ^{op} g_2 = g_2 \circ g_1 = g_1 \cdot g_2$$

Es decir, si en $X$ definimos la operación binaria $*$ mediante

$$g_2 * g_1 = g_1 \cdot g_2, \forall g_1, g_2 \in X$$

y llamamos $G'$ al grupo $(X, *, e)$, entonces

$$C_G^{op} = C_{G'}$$

[2] Mucho cuidado con llegar a confundir a $\mathfrak{Set}^{op}$ con $\mathfrak{Set}$; no son la misma categoría.

K.3.4 Recalquemos el hecho de que tanto los objetos como los morfismos de una categoría son objetos y morfismos en la categoría dual [y viceversa: $(\mathfrak{K}^{op})^{op} = \mathfrak{K}$], y que la composición de cualesquiera dos de sus morfismos se traduce en *otra* composición (la composición dual) en la categoría dual. Esta sencilla observación conlleva repercusiones teóricas de carácter profundo porque hace factible duplicar el contenido teórico de la teoría tanto a nivel proposicional como a nivel conceptual. Para entender cómo es esto posible, supongamos que $A$ es una afirmación que tiene sentido *en cualquier categoría;* si con $A(\mathfrak{K})$ denotamos la afirmación $A$ en $\mathfrak{K}$, entonces $A(\mathfrak{K}^{op})$ es una afirmación con sentido en $\mathfrak{K}^{op}$ que, debido a la observación anterior, puede interpretarse como *otra* afirmación en $\mathfrak{K}$ (la afirmación dual) que denotaremos como ${}^{co}A(\mathfrak{K})$ para distinguirla de $A(\mathfrak{K})$.

Así, si $A$ define un concepto en cualquier categoría, entonces $A(\mathfrak{K}^{op})$, que es la definición de tal concepto en $\mathfrak{K}^{op}$, define *otro* concepto (el concepto dual o "co-concepto") en $\mathfrak{K}$. Más aún, si $A$ fuese una proposición cuya validez ha sido demostrada *en cualquier categoría*, entonces $A(\mathfrak{K}^{op})$ es una proposición verdadera que conserva su carácter de verdad aún leida como "co-proposición" en $\mathfrak{K}$.[3]

Ilustremos lo dicho con unos ejemplos:

K.3.4.1 La definición de monomorfismo dada en K.2.5 (b) puede reescribirse de la manera siguiente:

$A$ : Un **monomorfismo** es un morfismo $f : A \to B$ tal que para todo par de morfismos $h, k : A' \to A$ se tiene que

$$fh = fk \Rightarrow h = k$$

Entonces, $A(\mathfrak{K})$ es la definición de $\mathfrak{K}$-monomorfismo. $\mathfrak{K}$-escribámosla:

$A(\mathfrak{K})$ : Un $\mathfrak{K}$-monomorfismo es un $\mathfrak{K}$-morfismo $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ tal que para todo par de $\mathfrak{K}$-morfismos $h, k \in \mathfrak{K}(A', A)$ se tiene que

$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$$

Análogamente, $A(\mathfrak{K}^{op})$ define monomorfismo en $\mathfrak{K}^{op}$; si queremos $\mathfrak{K}^{op}$-escribirla sólo hay que "elevar a la op" algunas "letras" del párrafo anterior. Haciéndolo obtenemos:

$A(\mathfrak{K}^{op})$ : Un $\mathfrak{K}^{op}$-monomorfismo es un $\mathfrak{K}^{op}$-morfismo $f \in \mathfrak{K}^{op}(A, B)$ tal que para todo par de $\mathfrak{K}^{op}$-morfismos $h, k \in \mathfrak{K}^{op}(A', A)$ se tiene que

$$f \circ^{op} h = f \circ^{op} k \Rightarrow h = k$$

Llega el toque final: leer a $A(\mathfrak{K}^{op})$ como definición del concepto de comonomorfismo en $\mathfrak{K}$; co-escribámosla:

${}^{co}A(\mathfrak{K})$ : Un $\mathfrak{K}$-*comonomorfismo* es un $\mathfrak{K}$-morfismo $f \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que para todo par de $\mathfrak{K}$-morfismos $h, k \in \mathfrak{K}(A, A')$ se tiene que

$$h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

Por razones técnicas y lingüísticas se ha creído idóneo elegir el prefijo *epi* para sustituirlo por los prefijos *co* y *mono* al referirse a este tipo de morfismos. El procedimiento anterior nos ha conducido a ellos y ahora podemos dar su definición precisa:

[3] Con frecuencia emplearemos (coloquialmente) los vocablos *coconcepto* y *coproposición* para referirnos a conceptos duales y proposiciones duales, respectivamente.

$B$ : Un **epimorfismo** es un morfismo $f : A \to B$ tal que para todo par de morfismos $h, k : B \to B'$ se tiene que

$$hf = kf \Rightarrow h = k$$

Es fácil comprobar que la aplicación del proceso anterior a la afirmación $B$ nos llevaría de regreso a $A$.

K.3.4.2 Ahora demostraremos que la siguiente proposición $P$ es verdadera en toda categoría.

$P$ : Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son monomorfismos, entonces $g \circ f$ es monomorfismo.

*Dem.* Sean $A' \xrightarrow{h,k} A$ morfismos tales que $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$; entonces $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$, de donde $f \circ h = f \circ k$ por ser $g$ un monomorfismo. Como $f$ también lo es, de la última igualdad se sigue que $h = k$. Por lo tanto, $g \circ f$ es monomorfismo. [✓]

La proposición $P$ referida a una categoría $\mathfrak{K}$ arbitraria dice:

$P(\mathfrak{K})$ : Si $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}(B, C)$ son $\mathfrak{K}$-monomorfismos, entonces $g \circ f$ es $\mathfrak{K}$-monomorfismo.

Referida a la categoría dual dice:

$P(\mathfrak{K}^{op})$ : Si $f \in \mathfrak{K}^{op}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}^{op}(B, C)$ son $\mathfrak{K}^{op}$-monomorfismos, entonces $g \circ^{op} f$ es $\mathfrak{K}^{op}$-monomorfismo.

$P(\mathfrak{K}^{op})$ es particularmente verdadera en $\mathfrak{K}^{op}$ porque la verdad de $P$ la hemos demostrado en general; vale para cualquier categoría. Sólo que ahora, por la relación entre $\mathfrak{K}^{op}$ y $\mathfrak{K}$, podemos releerla como una afirmación (verdadera) referente a $\mathfrak{K}$-morfismos que dice *otra* cosa:

${}^{co}P(\mathfrak{K})$ : Si $f \in \mathfrak{K}(B, A)$ y $g \in \mathfrak{K}(C, B)$ son $\mathfrak{K}$-comonomorfismos, entonces $f \circ g$ es $\mathfrak{K}$-comonomorfismo.

Bien traducida, esta "nueva" proposición puede quedar así:

$Q$ : Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son epimorfismos, entonces $g \circ f$ es epimorfismo.

K.3.5 Para quedar en punto de formular el Principio de Dualidad sólo resta hacer la advertencia de que no lo formularemos con todo el rigor de que es susceptible; aunque sugerente, nuestra formulación será informal e imprecisa. Mayor precisión en la fórmula exige una aplicación metódica de la lógica formal que, quien se interese, podrá hallar en el libro de Mac Lane señalado en [8] de las referencias.

PRINCIPIO DE DUALIDAD

*I. Para todo concepto* I *concerniente a cualquier categoría* $\mathfrak{K}$, *el* concepto dual *o* coconcepto *(*${}^{co}$I*) se obtiene "aplicando"* I *a la categoría dual* $\mathfrak{K}^{op}$.

*II. Para toda proposición verdadera* P *sobre categorías, la* proposición dual *o* coproposición *(*${}^{co}$P*), que se obtiene sustituyendo en* P *todo concepto por el coconcepto correspondiente, también es verdadera.*

Los ejemplos anteriores ya han dado idea del uso que haremos de este principio. Desde luego, en adelante omitiremos los detalles del proceso de dualizar limitándonos a dar nombres (cuando haya que darlos) a los coconceptos obtenidos y a dejar enunciadas las coproposiciones anteponiéndoles siempre el prefijo ${}^{co}$. Sigamos entonces, para ilustrar este breve modo de proceder, con otra proposición referente también a monomorfismos.

K.3.6 **Proposición.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria y sean $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}(B, C)$. Si $gf$ es un $\mathfrak{K}$-monomorfismo, entonces también lo es $f$.

*Demostración.* Sean $h, k \in \mathfrak{K}(A', A)$ tales que $fh = fk$. Entonces

$$(gf)\,h = g\,(fh) = g\,(fk) = (gf)\,k$$

y como $gf$ es monomorfismo, entonces $h = k$. Por lo tanto, $f$ también es monomorfismo. [✓]

$^{co}$K.3.6 $^{co}$**Proposición.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria y sean $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{K}(B, C)$. Si $gf$ es un $\mathfrak{K}$-epimorfismo, entonces también lo es $g$.

K.3.7 **Definición.** En una categoría arbitraria un morfismo que sea simultáneamente monomorfismo y epimorfismo se llama **bimorfismo**.

Obsérvese que el someter esta definición al proceso de dualización en busca del coconcepto correspondiente nos trae de regreso al mismo concepto de bimorfismo. Se trata pues de un concepto **autodual.**

Tomando en cuenta que los morfismos identidad de $\mathfrak{K}^{op}$ son los mismos que los de $\mathfrak{K}$, tenemos que también el concepto de isomorfismo es ejemplo de un concepto autodual. Esta situación nos pone en condiciones de poder mostrar un ejemplo de una proposición que sea autodual.

K.3.8 **Proposición.** En cualquier categoría todo isomorfismo es un bimorfismo.

*Demostración.* Sea $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ un isomorfismo; entonces existe $g \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que

$$gf = 1_A \quad \text{y} \quad fg = 1_B$$

Sean

$$A' \underset{k_1}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} A \quad \text{y} \quad B \underset{k_2}{\overset{h_2}{\rightrightarrows}} B$$

morfismos tales que

$$fh_1 = fk_1 \quad \text{y} \quad h_2 f = k_2 f$$

entonces

$$(gf)\,h_1 = (gf)\,k_1 \quad \text{y} \quad h_2\,(fg) = k_2\,(fg)$$

de modo que

$$h_1 = k_1 \quad \text{y} \quad h_2 = k_2$$

Esto significa que $f$ es monomorfismo y es epimorfismo. Por lo tanto, $f$ es un bimorfismo. [✓]

*Ejercicio $t_1 6$.* Demuestre que en $\mathfrak{Set}$:

a) $f$ es inyectiva si, y sólo si, $f$ es un monomorfismo.

b) $f$ es suprayectiva si, y sólo si, $f$ es un epimorfismo.

K.3.9 De acuerdo al ejercicio anterior, en $\mathfrak{Set}$ los conceptos categóricos de monomorfismo y epimorfismo coinciden con los de función inyectiva y función suprayectiva, respectivamente. Como entre monomorfismos y epimorfismos se da esa dualidad mutua que ya vimos, hay quienes presentan la inyectividad y la suprayectividad como ideas recíprocamente duales, cosa que ya no es del todo cierta.

En $\mathfrak{Set}$ la inyectividad y la suprayectividad tienen una connotación muy precisa; pensemos en la primera: aplicar elementos distintos de un conjunto en elementos distintos de otro conjunto de modo que se consiga la inmersión del primero en el segundo. ¿Y qué noción se antojaría proponer como dual de esta idea? ...¡Pues, quién sabe! Con la intuición de lo que ha de ser dualidad acaso pudiera ocurrírsenos algo, menos proponer la suprayectividad como noción dual. Y lo propio acontece si pensamos en ésta última.

Y es que a la idea de dualidad le ocurre lo que ya presumía Platón que acaecía a toda idea: mientras se mantiene inscrita en el orbe al que pertenece, goza de una perfección impecable, pero a medida que tiende a *concretarse*, su perfección se diluye, sus componentes mutan y la idea de dualidad asume deformaciones teóricamente muy interesantes dentro de cada categoría específica.

Pese a esto, no deja de dar la gana de pensar a lo inyectivo como "dual deformado" de lo suprayectivo, no sólo en $\mathfrak{Set}$, sino incluso hacer extensivo este pensamiento y concebir a los morfismos inyectivos y suprayectivos como nociones recíprocamente duales dentro de toda categoría concreta. Sostenernos en este tenor puede parecer necio pero da la pauta para que podamos hacer un uso un tanto diferente del Principio de Dualidad de cómo lo hemos venido empleando, pues a partir de una afirmación que, sin tener sentido en toda categoría sí lo tenga para una clase especial de categorías como son las categorías concretas, podemos, aplicando el Principio, conjeturar una afirmación que sea *"casi dual"* de la que partimos. Veamos detalladamente un ejemplo que ilustre esto que venimos diciendo.

$\underline{K}$.3.10 Después nos ocuparemos en demostrar que la categoría dual de una categoría concreta también es concreta[4]; por ahora supondremos cierto tal resultado. En $\underline{K}$.2.6 se demostró que en toda categoría concreta una fuente que separa puntos es monofuente. Un caso particular de este resultado se tiene cuando la fuente consta de una sola flecha; si la fuente separa puntos, tal flecha es un **morfismo inyectivo**. Por lo tanto, el corolario que estamos desprendiendo de la proposición $\underline{K}$.2.6 puede enunciarse así:

$C$ : Todo morfismo inyectivo es un monomorfismo.

Como $C$ sólo tiene sentido (y es verdadera) en cualquier categoría concreta, apliquémosla a una categoría concreta $\underline{K}$; tenemos:

$C(\underline{K})$ : Todo $\underline{K}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}$-monomorfismo.

Como (según nuestro supuesto) también $\underline{K}^{op}$ es concreta, entonces también es verdadera la afirmación:

$C(\underline{K}^{op})$ : Todo $\underline{K}^{op}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}^{op}$-monomorfismo.

De lo cual podemos sospechar la verdad de la afirmación siguiente:

$D$ : Todo morfismo suprayectivo es un epimorfismo.[5]

Tratemos de probarla: Sea $f \in \underline{K}(A, B)$ suprayectivo y sean $h, k \in \underline{K}(B, B')$ tales que $hf = kf$. Entonces, dada la suprayectividad de $f$, para cada elemento $y$ del conjunto subyacente a $B$ existe $x$ en el conjunto subyacente a $A$ tal que $f(x) = y$. En consecuencia

$$h(y) = h(f(x)) = k(f(x)) = k(y)$$

Por lo tanto, $h = k$. [✓]

[4] Podríamos hacerlo ahora pero estamos en otra cosa; además, para este propósito nos serviremos de un concepto "semidual" al de funtor que veremos después.

[5] Desde luego, $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un **morfismo suprayectivo** si $f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$ y la función $f : X \to Y$ es suprayectiva.

De la verdad de una proposición "casi dual" siempre hay que cerciorarse pues aunque en los más de los casos es legitimable, no siempre resulta cierta[6].

$\underline{K}$.3.11 Pero insistamos más sobre lo poco conveniente que resulta mirar como duales conceptos cuya significación sólo tiene sentido en el ámbito de las categorías concretas; redundaremos un poco respecto de lo ya comentado arriba y, como ahí, hablaremos figuradamente.

Según hemos visto, los monomorfismos y los epimorfismos son perfectamente duales en una alta esfera del pensamiento abstracto y cuando son proyectados sobre la "categoría base" de las categorías concretas ($\mathfrak{Set}$) coinciden con sus morfismos inyectivos y suprayectivos, respectivamente. Cuando, con base en $\mathfrak{Set}$, formamos una categoría concreta $\underline{K}$, posiblemente sólo una parte de las funciones inyectivas y suprayectivas entre los conjuntos subyacentes de los $\underline{K}$-objetos sean $\underline{K}$-morfismos porque quizá no todas ellas preserven la $\underline{K}$-estructura. Ya vimos que todas aquellas que sí la preservan pasan a formar parte de los $\underline{K}$-monomorfismos, si son inyectivas, y de los $\underline{K}$-epimorfismos, si son suprayectivas. Denotando por $\underline{K}^{\text{mor}}_{\text{in}}$ y $\underline{K}^{\text{mor}}_{\text{su}}$ a las clases de $\underline{K}$-morfismos inyectivos y suprayectivos, y por $M_{\underline{K}}$ y $E_{\underline{K}}$ a las clases de $\underline{K}$-monomorfismos y $\underline{K}$-epimorfismos, respectivamente, podemos simbolizar esos resultados escribiendo

$$\underline{K}^{\text{mor}}_{\text{in}} \subseteq M_{\underline{K}} \quad \text{y} \quad \underline{K}^{\text{mor}}_{\text{su}} \subseteq E_{\underline{K}}$$

Ahora bien, pueden mostrarse ejemplos de categorías concretas para las cuales al menos una de las contenciones anteriores resulte una contención propia (daremos ejemplos). Tomando esto en consideración vemos con algo más de claridad lo complicado que resultaría insistir sobre la dualidad entre las subclases $\underline{K}^{\text{mor}}_{\text{in}}$ y $\underline{K}^{\text{mor}}_{\text{su}}$ (o entre sus miembros) siendo que en ellas la dualidad efectiva que hay entre $M_{\underline{K}}$ y $E_{\underline{K}}$ se encuentra menguada, quizá estrictamente y, peor aún, quizá en "proporciones" diferentes.

Pero no vaya a pensarse que ya por eso nos desentenderemos de estas subclases de $\underline{K}$-morfismos ni que las haremos a un lado. No; pese a la "casi dualidad" que guardan (o tal vez debido a ella), los $\underline{K}$-morfismos inyectivos y suprayectivos (acompañados de $\underline{K}$-estructuras iniciales y coiniciales) constituyen parte esencial del estudio que nos ocupa.

$\underline{K}$.3.12 Un ejemplo de categoría concreta en la que existen epimorfismos que no son morfismos suprayectivos es $\mathfrak{Rng}_u$, la categoría de **anillos con elemento unitario y homomorfismos anulares que conservan la unidad.**

($i$) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Rng}_u[X]$ consta de ternas $(+,\cdot,u)$ en las que

$$+,\cdot : X \times X \to X \quad \text{y} \quad u \in X$$

están sujetos a los consabidos axiomas para anillos con uno.

($ii$) En consecuencia, parejas del tipo $(X,(+,\cdot,u))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(+,\cdot,u) \in \mathfrak{Rng}_u[X]$ son los $\mathfrak{Rng}_u$-objetos o **anillos con elemento unitario.**[7]

($iii$) Dados dos anillos con uno, $A = (X,(+_X,\cdot_X,u_X))$ y $B = (Y,(+_Y,\cdot_Y,u_Y))$, una función $f : X \to Y$ tal que

$$f(x_1 +_X x_2) = f(x_1) +_Y f(x_2)$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdot_X x_2) &= f(x_1) \cdot_Y f(x_2) \\ \text{y} \quad f(u_X) &= u_Y \end{aligned}$$

[6] V.gr. Proposición $\underline{K}$.8.17. Léase comentario $\underline{K}$.8.18.

[7] Por brevedad hablamos de "anilos con uno".

es un $\mathfrak{Rng}_u$-morfismo u **homomorfismo anular que conserva la unidad.**

Los axiomas $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen a una categoría concreta se verifican fácilmente.

Consideremos ahora los anillos $(\mathbb{Z},(+,\cdot,1))$ y $(\mathbb{Q},(+,\cdot,1))$ con sus sumas, productos y unos usuales, y pensemos en la inclusión $\iota:\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$. Es claro que

$$\iota\in\mathfrak{Rng}_u\left((\mathbb{Z},(+,\cdot,1)),(\mathbb{Q},(+,\cdot,1))\right)$$

y que no es un morfismo suprayectivo. Es un epimorfismo sin embargo.

En efecto, dados

$$h,k\in\mathfrak{Rng}_u\left((\mathbb{Q},(+,\cdot,1)),(X,(+,\cdot,1))\right)$$

tales que $h\iota=k\iota$ tenemos que, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$,

$$h(n)=h(\iota(n))=h\iota(n)=k\iota(n)=k(\iota(n))=k(n)$$

y si $n\neq 0$

$$h(n)\cdot h\left(\frac{1}{n}\right)=h\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=h(1)=1=k(1)=k\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=k\left(\frac{1}{n}\right)\cdot k(n)$$

de modo que

$$h\left(\frac{1}{n}\right)=h\left(\frac{1}{n}\right)\left[k(n)\cdot k\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\left[h\left(\frac{1}{n}\right)\cdot k(n)\right]k\left(\frac{1}{n}\right)=\left[h\left(\frac{1}{n}\right)\cdot h(n)\right]k\left(\frac{1}{n}\right)-k\left(\frac{1}{n}\right)$$

Así, si $m,n\in\mathbb{Z}$ y $n\neq 0$

$$h\left(\frac{m}{n}\right)=h(m)\cdot h\left(\frac{1}{n}\right)=k(m)\cdot k\left(\frac{1}{n}\right)=k\left(\frac{m}{n}\right)$$

i.e. $h=k$

[✓]

Otra categoría concreta en la que hay epimorfismos que no son suprayectivos es la categoría $\mathbf{T_2}$ de los espacios de Hausdorff y funciones continuas.

Para mostrar un ejemplo requeriremos de un par de resultados básicos de topología general que son los siguientes.

K.3.13 **Proposición.** Sean, $h,k:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ dos funciones continuas cualesquiera y

$$A=\{x\in X:h(x)=k(x)\}$$

Si $(Y,\sigma)$ es $\mathbf{T_2}$ entonces $A$ es cerrado en $(X,\tau)$.

*Demostración:* Sea $x\in X-A$; entonces $h(x)\neq k(x)$, y como $(Y,\sigma)$ es $\mathbf{T_2}$, existen $V_1,V_2\in\sigma$ tales que $h(x)\in V_1$, $k(x)\in V_2$ y $V_1\cap V_2=\varnothing$. Además $h$ y $k$ son continuas, de modo que, siendo $\mathcal{N}_x^\circ$ la familia de vecindades abiertas de $x$, se tiene $h^{-1}(V_1),k^{-1}(V_2)\in\mathcal{N}_x^\circ$:
$\therefore h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\in\mathcal{N}_x^\circ$, y como

$$h\left(h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\right)\subseteq V_1 \text{ y } k\left(h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\right)\subseteq V_2$$

entonces $h^{-1}(V_1)\cap k^{-1}(V_2)\subseteq X-A$; $\therefore X-A\in\tau$; por lo tanto, $A$ es cerrado.

[✓]

K.3.14 **Corolario.** Sean $h,k:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ dos funciones continuas tales que $h\mid D=k\mid D$, donde $D$ es denso en $(X,\tau)$; si $(Y,\sigma)$ es $\mathbf{T_2}$ entonces $h=k$.

*Demostración:* Como $h\mid D=k\mid D$, entonces $D\subseteq A$ (de la proposición anterior) que es cerrado. Luego,

$$X=\overline{D}\subseteq\overline{A}=A \quad [8]$$

[8] Las barras denotan cerradura.

Por lo tanto, $A = X$; por lo tanto, $h = k$. [✓]

Ahora el ejemplo: Consideremos los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ que con sus topologías usuales son de Hausdorff; tomemos la inclusión $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ y un par de $\mathbf{T_2}$-morfismos

$$h, k : \mathbb{R} \to (Y, \sigma)$$

tales que $h\iota = k\iota$. Entonces

$$h(q) = h(\iota(q)) = h\iota(q) = k\iota(q) = k(\iota(q)) = k(q)$$

para todo $q \in \mathbb{Q}$; o sea que $\mathbb{Q} \subseteq A$. Como consecuencia del corolario tenemos $h = k$. Por lo tanto, $\iota$ es un epimorfismo que, por supuesto, no es suprayectivo. [✓]

K.3.15 *Nota:* En cada uno de los ejemplos anteriores el ejemplo expuesto ha sido un morfismo inyectivo, por lo tanto, un monomorfismo. Como ambos son epimorfismos y ninguno suprayectivo, ambos son ejemplos de bimorfismos que no son isomorfismos.

Para el caso de $\mathbf{T_2}$ podemos decir más todavía.

**Definición.** En $\mathfrak{Top}$ y en cualquiera de sus subcategorías, un morfismo es **denso** si es densa su imagen en el codominio.

K.3.16 **Proposición.** En $\mathbf{T_2}$ todo morfismo denso es un epimorfismo.

*Demostración*. Sea

$$f \in \mathbf{T_2}((X, \tau), (Y, \sigma))$$

denso y sean

$$h, k \in \mathbf{T_2}((Y, \sigma), (Y', \sigma'))$$

tales que $hf = kf$; entonces, $h \mid f(X) = k \mid f(X)$. Debido al corolario anterior, $h = k$; por lo tanto, $f$ es un epimorfismo. [✓]

La caracterización de los epimorfismos en una categoría concreta abre un interesante campo de dificultades en esta teoría. En el caso de $\mathbf{T_2}$, el recíproco de la proposición anterior termina de dar la caracterización completa.

K.3.17 **Proposición.** Todo epimorfismo en $\mathbf{T_2}$ es un morfismo denso.

*Demostración*. Procederemos por reducción al absurdo suponiendo la existencia de un epimorfismo $f \in \mathbf{T_2}((X, \tau), (Y, \sigma))$ que no es denso; con base en ello construiremos un espacio de Hausdorff $(Z, \rho)$ hacia el cual puedan definirse desde $(Y, \sigma)$ dos funciones continuas distintas pero cuyas composiciones con $f$ sean iguales. Esto será una contradicción con la hipótesis de ser $f$ un epimorfismo y, como se verá, no tendrá otra razón de ser más que el haber supuesto no denso a $f$.

Empecemos definiendo para cada $i \in \{1, 2\}$ al conjunto

$$Y_i = \{(y, i) : y \in Y\}$$

y consideremos las biyecciones

$$\begin{array}{rccc} g_i : & Y & \to & Y_i \\ & y & \mapsto & (y, i) \end{array}$$

Entonces

$$\sigma_i = \{g_i(V) : V \in \sigma\}$$

es una topología para $Y_i$ que hace de cada

$$g_i : (Y,\sigma) \to (Y_i,\sigma_i)$$

un homeomorfismo. Ahora consideremos, el conjunto $Y_1 \cup Y_2$, las inclusiones

$$\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \cup Y_2$$

y la topología $\vartheta$ para $Y_1 \cup Y_2$ definida por

$$\vartheta = \left\{U \subseteq Y_1 \cup Y_2 : \iota_i^{-1}(U) \in \sigma_i, \forall i \in \{1,2\}\right\}$$

que hace de cada inclusión una función continua. No es difícil comprobar que $(Y_1 \cup Y_2, \vartheta)$ es de Hausdorff.

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $Y_1 \cup Y_2$ definida por
(1) $(y,i) \sim (y,i), \forall y \in Y, i \in \{1,2\}$;
(2) $(y,i) \sim (y,j)$, si $y \in \overline{f(X)}$ e $i,j \in \{1,2\}$.

Sea $Z$ la familia de clases de equivalencia $(Y_1 \cup Y_2) / \sim$ y consideremos la aplicación canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & Y_1 \cup Y_2 & \to & Z \\ & (y,i) & \mapsto & [(y,i)] \end{array}$$

Entonces

$$\rho = \left\{\widetilde{U} \subseteq Z : p^{-1}\left(\widetilde{U}\right) \in \vartheta\right\}$$

es una topología para $Z$ que hace de $p$ una función continua. Veamos que $\rho \in \mathbf{T_2}[Z]$ analizando dos posibles casos.

Sean $[(u,i)], [(v,j)] \in Z, [(u,i)] \neq [(v,j)]$; sea $W = Y - \overline{f(X)}$.

(1º) $u = v$; entonces $u, v \in W$ y $j \neq i$;

$$\therefore\ [(u,i)] = \{(u,i)\}\ ,\ [(v,j)] = \{(v,j)\}$$

Además

$$(u,i) \in g_i(W) \in \sigma_i\ ,\ (v,j) \in g_j(W) \in \sigma_j$$

porque $W \in \sigma$; y como

$$g_i(W) = \iota_i^{-1}(g_i(W)), \iota_j^{-1}(g_i(W)) = \varnothing \quad \text{y} \quad g_j(W) = \iota_j^{-1}(g_j(W)), \iota_i^{-1}(g_j(W)) = \varnothing$$

entonces $g_i(W), g_j(W) \in \vartheta$ (en conformidad con la definición de $\vartheta$). Sean

$$\widetilde{U} = \{[(y,i)] : y \in W\} \quad \text{y} \quad \widetilde{V} = \{[(y,j)] : y \in W\}$$

entonces

$$[(u,i)] \in \widetilde{U} \quad \text{y} \quad [(v,j)] \in \widetilde{V}$$

Además

$$p^{-1}\left(\widetilde{U}\right) = g_i(W) \quad \text{y} \quad p^{-1}\left(\widetilde{V}\right) = g_j(W)$$

por lo tanto, $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \rho$ y es claro que $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$.

(2º) $u \neq v$; entonces para $(u, i)$ y $(v, i)$ existen $U_i, V_i \in \sigma_i$ tales que

$$(u,i) \in U_i \ , \ (v,i) \in V_i \text{ y } U_i \cap V_i = \varnothing$$

Sea $k \in \{1,2\}$ , $k \neq i$; entonces

$$\iota_i^{-1}(U_i) = U_i, \iota_k^{-1}(U_i) = \varnothing \quad \text{y} \quad \iota_i^{-1}(V_i) = V_i, \iota_k^{-1}(V_i) = \varnothing$$

En consecuencia, tenemos que $U_i, V_i \in \vartheta$. Para esta $k$ hagamos

$$U_k = \{(y,k) : (y,i) \in U_i\} \quad \text{y} \quad V_k = \{(y,k) : (y,i) \in V_i\}$$

También $U_k$ y $V_k$ son abiertos ajenos en $\vartheta$ porque

$$\begin{array}{rccc} g: & (Y_i, \sigma_i) & \to & (Y_k, \sigma_k) \\ & (y,i) & \mapsto & (y,k) \end{array}$$

es un homeomorfismo y $g(U_i) = U_k$ y $g(V_i) = V_k$. Luego

$$U = U_i \cup U_k \in \vartheta \quad \text{y} \quad V = V_i \cup V_k \in \vartheta$$

Entonces

$$(u,i) \in U \ , \ (v,j) \in V \text{ y } U \cap V = \varnothing$$

cualquiera que sea el caso (i.e. $j = i$ ó $i \neq j$). Sean

$$\widetilde{U} = \{[z] : z \in U\} \quad \text{y} \quad \widetilde{V} = \{[z] : z \in V\}$$

entonces $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \rho$ y

$$[(u,i)] \in \widetilde{U} \ , \ [(v,j)] \in \widetilde{V} \text{ y } \widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$$

porque $p^{-1}\left(\widetilde{U}\right) = U$ y $p^{-1}\left(\widetilde{V}\right) = V$, como fácilmente se comprueba.

Hasta aquí la prueba de que $(Z, \rho)$ es de Hausdorff.

Finalmente, definamos para cualesquiera $y \in Y$ e $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{array}{rccc} h_i: & (Y, \sigma) & \to & (Z, \rho) \\ & y & \mapsto & [(y,i)] \end{array}$$

Entonces

$$h_i : (Y, \sigma) \xrightarrow{g_i} (Y_i, \sigma_i) \xhookrightarrow{\iota_i} (Y_1 \cup Y_2, \vartheta) \xrightarrow{p} (Z, \rho) \ , \ \forall i \in \{1,2\}$$

Por lo tanto, $h_1$ y $h_2$ son funciones continuas. El suponer que $f$ no es denso nos permite asegurar que $h_1 \neq h_2$ ya que entonces existe $y \in Y - \overline{f(X)}$ para la que

$$h_1(y) = [(y,1)] = \{(y,1)\} \neq \{(y,2)\} = [(y,2)] = h_2(y)$$

Sin embargo

$$h_1(f(x)) = [(f(x),1)] = \{(f(x),1),(f(x),2)\} = [(f(x),2)] = h_2(f(x)) \quad \underset{\circ}{\nabla}$$

Por consiguiente, falso suponer no denso a $f$.
[✓]

En cuanto a los monomorfismos, más adelante veremos que es posible dar hipótesis adecuadas a fin de garantizar su coincidencia con los morfismos inyectivos en una amplia familia de categorías concretas.[9]

$\underline{K}$.3.18 El carácter general que poseen las nociones de monomorfismo y epimorfismo en categorías se consigue abstrayendo las propiedades algebraicas de composición correspondientes (leyes laterales de cancelación) elevándolas al rango abstracto de los morfismos. Siguiendo la misma vía podemos dar cabida a otras nociones de carácter igualmente abstracto y general y cuya resonancia con las que ya se tienen son de gran interés teórico.

*Ejccicio* $t_1$ 7. Demuestre que en $\mathfrak{Set}$:

a) $f : X \to Y$ es inyectiva si, y sólo si, existe $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$.

b) $f : X \to Y$ es suprayectiva si, y sólo si, existe $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$.

$\underline{K}$.3.19 **Definición**. Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria; entonces, cualquiera de sus morfismos $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ es una **$\mathfrak{K}$-retracción** si existe otro morfismo $g \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$.

$^{co}$**Definición**. En una categoría $\mathfrak{K}$ un morfismo $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ es una **$\mathfrak{K}$-corretracción** si existe otro morfismo $g \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$.

*Nota:* Las corretracciones se llaman **secciones**.

$\underline{K}$.3.20 **Proposición**. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, entonces toda $\underline{K}$-retracción es un morfismo suprayectivo.

*Demostración*. Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ una $\underline{K}$-retracción. Entonces, $f$ es un $\underline{K}$-morfismo y existe otro, $g : (Y, \eta) \to (X, \xi)$ tal que $fg = 1_{(Y,\eta)}$. En consecuencia, $f : X \to Y$ es una función para la cual existe otra, $g : Y \to X$, tal que $fg = 1_Y$. Por (b) del ejercicio 7, $f$ es suprayectiva como había que demostrar.
[✓]

La proposición casi dual

$^{co}$**Proposición**. En una categoría concreta $\underline{K}$, toda $\underline{K}$-sección es un morfismo inyectivo también es verdadera y se prueba similarmente.

Estos resultados, sumados a la información que reunimos con respecto a las relaciones entre inyectividad y monomorfía, suprayectividad y epimorfía, ya hablan sobre la no coincidencia entre retracciones y epimorfismos ni entre secciones y monomorfismos. De hecho, retomando una notación que ya introdujimos y denotando ahora como $S_{\underline{K}}$ y $R_{\underline{K}}$ a las clases de secciones y retracciones de una categoría concreta $\underline{K}$ tenemos

$$S_{\underline{K}} \subset \underline{K}^{\text{mor}}_{\text{in}} \subset M_{\underline{K}} \quad \text{y} \quad R_{\underline{K}} \subset \underline{K}^{\text{mor}}_{\text{su}} \subset E_{\underline{K}}$$

Esto trae a colación que en una categoría concreta toda sección es un monomorfismo y toda retracción un epimorfismo, lo cual sugiere proponer un resultado más general:

$\underline{K}$.3.21 **Proposición**. En cualquier categoría $\mathfrak{K}$ toda sección es un monomorfismo.

*Demostración*. Sea $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ una sección arbitraria y sean $h, k \in \mathfrak{K}(A', A)$ tales que $fh = fk$. Por definición de sección sabemos que existe otro morfismo $g \in \mathfrak{K}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$; en consecuencia

$$h = 1_A h = (gf)\, h = g\,(fh) = g\,(fk) = (gf)\, k = 1_A k = k$$

[9] Proposición $\underline{K}$.7.7.

Por lo tanto, $f$ es un monomorfismo. [✓]

$^{co}$**Proposición.** En cualquier categoría $\mathfrak{K}$ toda retracción es un epimorfismo.

*Ejercicio* $t_1 8$. Sean, $\mathfrak{K}$ una categoría y $f : A \to B$ un $\mathfrak{K}$-morfismo, arbitrarios. Probar que son equivalentes:

$(a)$ $f$ es un isomorfismo.

$(b)$ $f$ es sección y retracción.

K.3.22 Veamos un ejemplo de un morfismo inyectivo que no es sección.

Sean
$$X = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad X' = \{a', b', c'\}$$
y sean
$$\alpha \in \mathfrak{Pos}[X] \quad \text{y} \quad \alpha' \in \mathfrak{Pos}[X']$$
definidas como
$$\alpha = \{(x, x), (a, x) \mid x \in X\} \quad \text{y} \quad \alpha' = \{(x', x'), (a', x'), (b', c') \mid x' \in X'\}$$
Entonces
$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \alpha) & \to & (X', \alpha') \\ & x & \mapsto & x' \end{array}$$
es una función monótona e inyectiva y suprayectiva; por lo tanto, existe su función inversa
$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & X' & \to & X \\ & x' & \mapsto & x \end{array}$$
Sin embargo
$$f^{-1} \notin \mathfrak{Pos}((X', \alpha'), (X, \alpha))$$
ya que
$$(b', c') \in \alpha' \nRightarrow \left(f^{-1}(b'), f^{-1}(c')\right) \in \alpha$$
porque $(b, c) \notin \alpha$.

*Ejercicio* $t_1 9$. Sea $F : \mathfrak{I} \to \mathfrak{K}$ un funtor y sea $F^{op} : \mathfrak{I}^{op} \to \mathfrak{K}^{op}$ el **funtor dual** a $F$ que se define con la misma regla que se define $F$, i.e.
$$F^{op}A = FA, \forall A \in \mathfrak{I} \quad \text{y} \quad F^{op}f = Ff, \forall f \in \mathfrak{I}^{op}(A, B)$$
Probar que: (a) Con esta definición el concepto de funtor es un concepto autodual.

$(\mathrm{b}_1)$ $F^{op}$ es fiel si, y sólo si, $F$ es fiel;

$(\mathrm{b}_2)$ $F^{op}$ es pleno si, y sólo si, $F$ es pleno.

### 3.2.1 Funtores y Dualidad

K.3.23 Según queda indicado en (a) del ejercicio anterior, no es gran novedad lo que se obtiene sometiendo la idea de funtor al proceso de dualización; el coconcepto obtenido es el mismo. En cambio, ha resultado mejor la idea de dejar la dualidad a medio camino, ya sea de ida o de regreso, aplicando el procedimiento a medias, considerando funtores
$$F : \mathfrak{I}^{op} \to \mathfrak{K} \quad \text{o} \quad G : \mathfrak{I} \to \mathfrak{K}^{op}$$

Como los objetos y morfismos de la categoría dual de una categoría son objetos y morfismos de la propia categoría, podemos mirar en tales funtores reglas que asocian objetos y morfismos de $\mathfrak{S}$ con objetos y morfismos de $\mathfrak{R}$. Como las identidades en una categoría son las mismas que en la categoría dual, en su paso de $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{R}$ estas reglas preservan identidades. Y lo propio acontece con las composiciones sólo que en el orden invertido.

En efecto, si $f \in \mathfrak{S}(A,B)$ y $g \in \mathfrak{S}(B,C)$, entonces:

$(i)$ $f \in \mathfrak{S}^{\mathrm{op}}(B,A)$, $g \in \mathfrak{S}^{\mathrm{op}}(C,B)$ y tenemos que

$$F(g \circ f) = F(f \circ^{\mathrm{op}} g) = (Ff) \circ (Fg);$$

$(ii)$ $Gf \in \mathfrak{R}^{\mathrm{op}}(GA, GB)$, $Gg \in \mathfrak{R}^{\mathrm{op}}(GB, GC)$ por lo que

$$G(g \circ f) = (Gg) \circ^{\mathrm{op}} (Gf) = (Gf) \circ (Gg).$$

Este hecho distingue a estas reglas de las dadas por los funtores tal cual los veníamos concibiendo; sin embargo, tal como acabamos de ver, también son reglas funtoriales de asociación de elementos entre categorías, debido a lo cual, también las llamaremos funtores.

K.3.24 **Definición.** Sean $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{R}$ categorías arbitrarias. Un **funtor contravariante** de $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{R}$ es un funtor $F : \mathfrak{S}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{R}$. Escribiremos: $F : \mathfrak{S} \rightharpoonup \mathfrak{R}$.

*Nota y observaciones:* 1. Para acentuar más la diferencia entre los funtores contravariantes y los funtores (a secas) se ha dado a éstos el apellido de **covariantes**.

2. Está claro que la notación $F : \mathfrak{S} \rightharpoonup \mathfrak{R}$ para un funtor contravariante no da lugar a equívocos porque en tal caso sabemos, de acuerdo con la definición, que $F$ (como funtor covariante) va de $\mathfrak{S}^{\mathrm{op}}$ en $\mathfrak{R}$.

3. Siguiendo la definición anterior, un funtor $G : \mathfrak{S} \rightharpoonup \mathfrak{R}^{\mathrm{op}}$ es un funtor contravariante de $\mathfrak{S}^{\mathrm{op}}$ en $\mathfrak{R}^{\mathrm{op}}$ ya que (como funtor covariante) podemos reescribirlo como $G : (\mathfrak{S}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to (\mathfrak{R}^{\mathrm{op}})$.

K.3.25 *Ejemplo.* Sea

$$\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}$$

dado para toda $X \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}$ por

$$\mathtt{Opt}\ X = 2^X, \forall X \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}$$

y para toda $f \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y)$ por

$$\mathtt{Opt}\ f \in \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^Y\right)$$

donde

$$\mathtt{Opt}\ f(A) = f^{-1}(A), \forall A \in 2^X$$

$[a]$ Opt preserva composiciones.

En efecto, sean $f \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(X,Y)$ y $g \in \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}(Y,Z)$; entonces, dado cualquier $A \subseteq X$ tenemos

$$\mathtt{Opt}(g \circ^{\mathrm{op}} f)(A) = \mathtt{Opt}(f \circ g)(A) = (f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) = (\mathtt{Opt}g)(\mathtt{Opt}f)(A)$$

$[b]$ Opt preserva identidades.

En efecto, si $A \subseteq X$, entonces

$$\mathtt{Opt}\ 1_X \in \mathfrak{Set}\left(2^X, 2^X\right)$$

es tal que

$$\mathtt{Opt} 1_X (A) = 1_X^{-1}(A) = A = 1_{2^X}(A) = 1_{\mathtt{Opt}X}(A)$$

$\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$ es el llamado **funtor conjunto potencia contravariante.**

Obsérvese que para $\mathtt{Opt}$ valen las siguientes propiedades (que $\mathtt{Pot}$ no tiene):

(i) $\mathtt{Opt}\ f(B_1 \cup B_2) = \mathtt{Opt}\ f(B_1) \cup \mathtt{Opt}\ f(B_2)$

(ii) $\mathtt{Opt}\ f(B_1 \cap B_2) = \mathtt{Opt}\ f(B_1) \cap \mathtt{Opt}\ f(B_2)$

(iii) $\mathtt{Opt}\ f(\emptyset) = \emptyset$

(iv) $\mathtt{Opt}\ f(Y) = X$

(v) $X - \mathtt{Opt}\ f(B) = \mathtt{Opt}\ f(Y - B)$

*Ejercicio $t_1 10$.* ($a$) Demuestre que $\mathtt{Opt} : \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}$ es un funtor fiel.

($b$) Describa la concreción de $\mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}$ a la que $\mathtt{Opt}$ da lugar.

($c$) $\overline{\mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}} = \overline{\overline{\mathfrak{Set}}}^{\mathrm{op}}$

1. *Segundo cuestionario de ejercicios. Ejercicio $t_2 1$.*¿Puede describirse una concreción de $\mathfrak{Set}$ vía $\mathtt{Opt}$? De responder afirmativamente describa tal concreción. De responder negativamente, justifique su respuesta.

Antes de pasar a otra cosa probaremos un resultado que supusimos cierto en $\underline{K}$.3.10 pero cuya demostración quedó pendiente.

$\underline{K}$.3.26 **Proposición.** La categoría dual de una categoría concreta también es concreta.

*Demostración.* Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$ el funtor que olvida; sabemos que $U$ es un funtor fiel, de modo que, por ($b_1$) del ejercicio $t_1 9$, también es fiel el funtor dual $U^{\mathrm{op}} : \underline{K}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}^{\mathrm{op}}$. Entonces, por ($a$) de los ejercicios $t_1 1$ y $t_1 10$ tenemos que el funtor compuesto

$$\mathtt{Opt}U^{\mathrm{op}} : \underline{K}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Set}$$

es un funtor fiel, de lo cual se sigue que también $\underline{K}^{\mathrm{op}}$ es una categoría concreta. |✓|

## 3.3 Estructuras Finales

En la sección anterior hablamos de la posibilidad de duplicar el contenido de la teoría expuesta empleando el Principio de Dualidad (ya sabemos en qué sentido). Es lo que haremos enseguida con relación a la sección antepresedente.

En $\underline{K}$.2.1 se definió una fuente para una categoría $\mathfrak{K}$ arbitraria como una pareja $(A, (f_i)_I)$ en la que $A$ es un $\mathfrak{K}$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\mathfrak{K}$-morfismos $f_i \in \mathfrak{K}(A, A_i)$, $i \in I$. El coconcepto correspondiente al de fuente se llama sumidero.

$\underline{K}$.4.1 **Definición.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria. Un **sumidero en $\mathfrak{K}$** o **$\mathfrak{K}$-sumidero** es una pareja $((f_i)_I, A)$ en la que $A$ es un $\mathfrak{K}$-objeto arbitrario y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de $\mathfrak{K}$-morfismos $f_i \in \mathfrak{K}(A_i, A)$, $i \in I$. En tal caso, $A$ recibe el nombre de **codominio del sumidero,** la clase $(A_i)_I$ de $\mathfrak{K}$-objetos es el **dominio del sumidero** y cada morfismo $f_i$ es **una flecha del sumidero**. Notaciones alternativas para sumideros son:

$$\left(A_i \xrightarrow{f_i} A\right)_I \quad \text{y} \quad (f_i : A_i \to A)_I$$

Como con las fuentes, también consideraremos sumideros en $\mathfrak{Set}$

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

suponiendo que cada miembro $X_i$ de su dominio puede $\underline{K}$-estructurarse según una categoría concreta arbitraria $\underline{K}$, y lo mismo que entonces, no consideraremos a este sumidero ("híbrido") un $\underline{K}$-sumidero a menos que se demuestre la existencia de una $\underline{K}$-estructura para $X$ que haga de cada $f_i$ un $\underline{K}$-morfismo.

$\underline{\text{K}}$.4.2 *Ejemplo.* Si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la familia

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in I\right\}$$

es una $\mathfrak{Top}$-estructura para $X$ que hace de cada $f_i$ una función continua.

En efecto, dados $i \in I$ y $U \in \tau$ cualesquiera tenemos $f_i^{-1}(U) \in \tau_i$, de modo que $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau)$ es una función continua.

La topología anterior es la **topología fuerte**[10] **para** $X$ **correspondiente a** $(\tau_i)_I$ **y a** $(f_i)_I$.

El coconcepto correspondiente al de $\underline{K}$-estructura inicial es el de $\underline{K}$-estructura final. Su definición es como sigue:

$\underline{\text{K}}$.4.3 **Definición.** Sea $X$ un conjunto arbitrario. Si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$ de una categoría concreta $\underline{K}$, entonces **una $\underline{\text{K}}$-estructura final para $X$ con respecto al sumidero $S$** es una estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$ entonces:

$(i)$ $f_i \in \underline{K}(A_i, A)$, $\forall i \in I$.

$(ii)$ Si $B = (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-objeto y $f : X \to Y$ es una función tal que

$$f f_i \in \underline{K}(A_i, B), \forall i \in I$$

entonces $f \in \underline{K}(A, B)$.

Si $\xi$ es una $\underline{K}$-estructura final para $X$ con respecto a $S$, entonces hablaremos de $S$ como de un **$\underline{\text{K}}$-sumidero final.**

*Ejercicio $t_2 2$.* Las condiciones $(i)$ y $(ii)$ pueden sintetizarse en una sola:

Para cada $\underline{K}$-objeto $B = (Y, \eta)$ y cada función $f : X \to Y$

$$f \in \underline{K}(A, B) \Leftrightarrow f f_i \in \underline{K}(A_i, B), \forall i \in I$$

*Ejercicio $t_2 3$.* Sea $S = ((f_i)_I, X)$ un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos. Probar que la topología fuerte para $X$ correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para $X$ con respecto al sumidero $S$.

[10] también llamada **final**

$\underline{K}$.4.4 *Ejemplos.*

$\underline{K}$.4.4.1 Debido al ejercicio anterior, la topología fuerte para $X$ correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para $X$ con respecto al sumidero

$$S = (f_i : (X_i, \tau_i) \dot{\rightarrow} X)_I$$

$\underline{K}$.4.4.2 Si $\overline{\mathfrak{Set}}$ es la concreción de $\mathfrak{Set}$ descrita anteriormente y

$$S = (f_i : (X_i, X_i) \rightarrow X)_I$$

es un sumidero de dominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces $X$ es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura final para $X$ con respecto a $S$.

En efecto, $X \in \overline{\mathfrak{Set}}[X]$ y si $A = (X, X)$ y $A_i = (X_i, X_i)$, $\forall i \in I$, entonces:

$(i)$ Como $f_i \in \mathfrak{Set}(X_i, X)$, $i \in I$, entonces

$$1_{\mathfrak{Set}} f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}((1_{\mathfrak{Set}} X_i, X_i), (1_{\mathfrak{Set}} X, X)), \forall i \in I$$

o sea

$$f_i \in \overline{\mathfrak{Set}}(A_i, A), \forall i \in I$$

$(ii)$ Si $B = (Y, Y)$ y $f : X \rightarrow Y$ es tal que para cada $i \in I$, $ff_i \in \overline{\mathfrak{Set}}(A_i, B)$, entonces [por el solo hecho de ser $f \in \mathfrak{Set}(X, Y)$], $f \in \overline{\mathfrak{Set}}(A, B)$.

$\underline{K}$.4.4.3 Si $S = \left((X_i, \alpha_i) \xrightarrow{f_i} X\right)_I$ es un sumidero cuyo dominio es una clase de $\mathfrak{Gra}$-objetos $(X_i, \alpha_i)_I$, entonces una $\mathfrak{Gra}$-estructura final para $X$ con respecto a $S$ es

$$\alpha = \{(f_i(x), f_i(x')) : (x, x') \in \alpha_i \text{ e } i \in I\}$$

En efecto;

$(i)$ Para cada $i \in I$, $f_i : (X_i, \alpha_i) \rightarrow (X, \alpha)$ es compatible porque

$$(x, x') \in \alpha_i \Rightarrow (f_i(x), f_i(x')) \in \alpha$$

$(ii)$ Si $(Y, \beta)$ es una digráfica y $f : X \rightarrow Y$ es una función tal que toda composición $ff_i : (X_i, \alpha_i) \rightarrow (Y, \beta)$ es compatible, entonces dada cualquier $(f_i(x), f_i(x')) \in \alpha$ tenemos $(ff_i(x), ff_i(x')) \in \beta$, o sea que $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ es compatible.

También tenemos un coconcepto correspondiente al de $\mathfrak{K}$-monofuente cuyo caso particular, cuando consta de una sola flecha, ya lo conocemos: es el de epimorfismo. El concepto de $\underline{K}$-fuente que separa puntos también da lugar a un concepto casi dual en una categoría concreta:

$\underline{K}$.4.5 **Definiciones.** (a) Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria. Un $\mathfrak{K}$-sumidero $S = ((f_i)_I, A)$ es un **$\mathfrak{K}$-episumidero** si toda vez que para un $\mathfrak{K}$-objeto $B$ cualquiera se tengan morfismos

$$h, k \in \mathfrak{K}(A, B)$$

tales que $hf_i = kf_i$, $\forall i \in I$, resulta que $h = k$.

(b) Si $\underline{K}$ es concreta y $S = ((f_i)_I, (X, \xi))$ es un $\underline{K}$-sumidero, se dice que $S$ es **exhaustivo** si todo punto de su codominio posee una preimagen bajo al menos un miembro de la clase de $\underline{K}$-morfismos de $S$.

Veamos que también vale la proposición casi dual a la $\underline{K}$.2.6

$\underline{K}$.4.6 **Proposición.** Si $\underline{K}$ es concreta y $S = ((f_i)_I, (X, \xi))$ es un $\underline{K}$-sumidero exhaustivo, entonces $S$ es episumidero.

*Demostración.* Hay que probar que para

$$h, k \in \underline{K}((X,\xi), (Y,\eta))$$

se tiene

$$h \neq k \Rightarrow hf_i \neq kf_i, \text{ p.a. } i \in I$$

Pero si $h \neq k$, entonces $h(x) \neq k(x)$, p.a. $x \in X$; como $S$ es exhaustivo, existe $i \in I$ tal que $x = f_i(x')$. Por lo tanto

$$hf_i(x') \neq kf_i(x')$$

para esa misma $i$, que es a lo que se quería llegar. [✓]

$\underline{K}$.4.7 *Ejercicio $t_2 4$.* Sea $S = \left((W,\omega) \xrightarrow{f} X\right)$ un sumidero de una sola flecha y supóngase que $f$ es biyectiva. Probar que $\xi$ es final en $X$ con respecto a $S$ si, y sólo si, $f : (W,\omega) \to (X,\xi)$ es un isomorfismo.

Como con las estructuras iniciales, también con las finales se da una unicidad esencial que enunciaremos enseguida. Se trata de la proposición casi dual a la $\underline{K}$.2.11. Su demostración, como veremos, es completamente similar. Como consecuencia, también aquí hablaremos (cuando exista) de *la* estructura final para un conjunto $X$ respecto de un sumidero $S$.

$\underline{K}$.4.8 **Proposición.** a) Si $S = ((f_i)_I, (X,\xi))$ es un $\underline{K}$-sumidero final y $h : (X,\xi) \to (X,\xi')$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces $S' = ((hf_i)_I, (X,\xi'))$ también es un $\underline{K}$-sumidero final.

b) Si

$$S = \left((X_i,\xi_i) \xrightarrow{f_i} (X,\xi)\right)_I \quad \text{y} \quad S' = \left((X_i,\xi_i) \xrightarrow{f_i} (X,\xi')\right)_I$$

son $\underline{K}$-sumideros finales, entonces existe un $\underline{K}$-isomorfismo $h : (X,\xi) \to (X,\xi')$ tal que $hf_i = f_i$, $\forall i \in I$.

*Demostración.* a) Sea $(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario y supongamos que $f : X \to Y$ es una función tal que $f(hf_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$. Entonces $fh$ es una función tal que $(fh)f_i$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de manera que, por la finalidad de $S$, $fh$ resulta $\underline{K}$-morfismo. Como además $h$ es un $\underline{K}$-isomorfismo entonces, debido al resultado establecido en el ejercicio anterior, podemos aplicar la propiedad característica de un sumidero final y asegurar que $f$ es un $\underline{K}$-morfismo.

b) Sea

$$h = 1_X : (X,\xi) \to (X,\xi')$$

Como $S'$ es un $\underline{K}$-sumidero, entonces

$$1_X f_i = f_i : (X_i,\xi_i) \to (X,\xi')$$

es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, de modo que, por la finalidad de $S$, resulta

$$1_X \in \underline{K}((X,\xi), (X,\xi'))$$

La demostración de que

$$1_X^{-1} \in \underline{K}((X,\xi'), (X,\xi))$$

es análoga.

$$\begin{array}{ccc} (X,\xi') & \overset{1_X}{\leftrightarrows} & (X,\xi) \\ f_i \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow f_i \\ & (X_i,\xi_i) & \end{array}$$

Por lo tanto, $1_X$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.$_{[\checkmark]}$

$\underline{\mathrm{K}}$.4.9 Por el ejercicio $t_2 3$ y el resultado anterior, en $\mathfrak{Top}$ la topología fuerte para $X$ es *la* $\mathfrak{Top}$-estructura final con relación a cierto sumidero $S$. El nombre de ***fuerte*** le viene a consecuencia de ser la ***más grande*** de las topologías para $X$ que hace de cada flecha de $S$ una función continua. También el vocablo ***final*** para una $\underline{K}$-estructura obedece a razones similares. Es justamente la situación casi dual que priva con las estructuras iniciales:

$\underline{\mathrm{K}}$.4.10 **Proposición.** Sea $S = ((f_i)_I, (X,\xi))$ un $\underline{K}$-sumidero final cualquiera. Entonces $\xi$ es la más fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hacen de cada $f_i$ un $\underline{K}$-morfismo.

*Demostración.* Supongamos que $\theta$ es otra $\underline{K}$-estructura para $X$ que hace de cada $f_i$ un $\underline{K}$-morfismo.

$$\begin{array}{ccc} (X,\theta) & \overset{1_X}{\longleftarrow} & (X,\xi) \\ f_i \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow f_i \\ & (X_i,\xi_i) & \end{array}$$

Entonces, la composición $1_X f_i$ es un $\underline{K}$-morfismo, $\forall i \in I$, lo cual, debido a la finalidad de $S$, implica que $1_X$ es un $\underline{K}$-morfismo, y esto significa precisamente que $\xi$ es más fina que $\theta$.$_{[\checkmark]}$

# Capítulo 4

# Inmersiones, Cocientes y Objetos Libres

Es tan frecuente la aparición de las ideas de inmersión y cociente en las teorías matemáticas, que sería raro no hallar un concepto general de ellas aplicable en cualquier categoría concreta. Esta aplicabilidad exige, desde luego, que tal concepto sea lo suficientemente dúctil como para adoptar las formas específicas que cada categoría concreta imponga; sin embargo, su formulación no puede ser de otro modo sino inducida, recogiendo en lo particular la pepita de generalidad que dé carácter universal a su fórmula, aun cuando tal universalidad no rebase las fronteras discursivas del orbe que tiene como núcleo a $\mathfrak{Set}$.

## 4.1 Inmersiones

$\underline{K}$.5.1 Partamos del hecho intuitivo de que en $\mathfrak{Set}$ se consigue la *inmersión* de un conjunto $A$ en un conjunto $B$ siempre que $A$ es *inyectable* en $B$, es decir, siempre que existe una función inyectiva $f : A \to B$. De hecho, ésta es, aunque a muy grosso modo todavía, la idea de inmersión que perseguimos: Definir qué debe entenderse por *sumergir* un objeto dentro de otro[1] en una categoría concreta.

Obsérvese que esto es lo mismo que describir los morfismos a través de los cuales tal *inmersión* se consigue (y puesto que esto consiguen, es a ellos a quienes ha de darse el nombre de *inmersiones*). Ya se ve que para que la cosa marche tales morfismos deben ser ante todo morfismos inyectivos.

Podría pensarse que, como con éstos se preserva la $\underline{K}$-estructura al inyectar al $\underline{K}$-objeto $A$ en el $\underline{K}$-objeto $B$, entonces todos y cada uno de ellos dan lugar a $\underline{K}$-*inmersiones*, pero pronto nos convencemos de que no es así. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, denotando con $\tau_d$ y $\tau_i$ a las topologías discreta e indiscreta de un conjunto $X$ cualquiera, tenemos que

$$1_X : (X, \tau_d) \to (X, \tau_i)$$

es continua e inyectiva pero no por ello presumimos de haber sumergido a $(X, \tau_d)$ en $(X, \tau_i)$. ¿Por qué? ¿Qué nos chocaría de eso?

[1] Válganos la redundancia.

Sin duda, el hallar a $X$ discreto dentro de $X$ indiscreto. ¿Y por qué nos chocaría esto? Pues porque *los espacios indiscretos sólo inducen subespacios indiscretos.*

Ah, entonces ésta es la manera de distinguir, al menos en $\mathfrak{Top}$, a las inmersiones de entre los morfismos inyectivos: Una inmersión topológica $f$ que inyecte al espacio $(X,\tau)$ en el espacio $(Y,\sigma)$ debe "dejar a $(X,\tau)$ tal cual espacio topológico que es" como *subespacio* de $(Y,\sigma)$; dicho en forma más técnica pero más precisa: Por medio de $f$ debe quedar definido un homeomorfismo entre $(X,\tau)$ y el *subespacio* de $(Y,\sigma)$, $(f(X), \sigma \mid f(X))$.

Para dar cabida a la generalización de estas ideas bastaría contar con el concepto categórico correspondiente al de *subespacio topológico.*

Recordemos que en $\mathfrak{Top}$, el subespacio inducido por $W \subseteq Y$ en $(Y,\sigma)$ es $(W, \sigma \mid W)$, donde $\sigma \mid W$ es la topología relativa para $W$ definida por

$$\sigma \mid W = \{V \cap W : V \in \sigma\}$$

Denotemos con $\iota$ a la inclusión de $W$ en $Y$ y observemos que

$$V \cap W = \iota^{-1}(V), \forall V \in \sigma$$

Pero

$$\tau(\iota,\sigma) = \left\{\iota^{-1}(V) : V \in \sigma\right\}$$

es la topología débil para $W$ con repecto a $\iota$ y $\sigma$; es decir, es la $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $W$ correspondiente a la fuente $(W \hookrightarrow (Y,\sigma))$ cuya única flecha es $\iota$.

Para la estructura inicial respecto de una fuente $F$ ya contamos con una definición categórica precisa. Si $F = (X, f)$, o sea, si sólo consta de una sola flecha, tal definición puede reescribirse como sigue:

$\underline{K}$.5.2 **Definición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, $(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-objeto, $X$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función, cualesquiera. Diremos que $\xi \in \underline{K}[X]$ **es inicial para *X* con respecto a *f* y $\eta$** si se satisfacen las condiciones:

(1) $f \in \underline{K}((X,\xi),(Y,\eta))$;

(2) Si $(W,\omega) \in \underline{K}$ y $g : W \to X$ es una función tal que

$$fg \in \underline{K}((W,\omega),(Y,\eta))$$

entonces, $g \in \underline{K}((W,\omega),(X,\xi))$.

Por lo tanto, podemos proponer como generalización de la idea de subespacio la siguiente.

$\underline{K}$.5.3 **Definición.** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, $(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-objeto y $W \subseteq Y$, arbitrarios. Considerando la inclusión $\iota : W \hookrightarrow Y$ , diremos que $W$ **induce un subobjeto en** $(Y,\sigma)$ si existe $\omega \in \underline{K}[W]$ que sea inicial para $W$ con respecto a $\iota$ y $\eta$. En tal caso diremos que el $\underline{K}$-objeto $(W,\omega)$ **es un subobjeto de** $(Y,\eta)$.

Apoyándonos en esta definición tenemos como primera aproximación de la idea general de inmersión la siguiente.

$\underline{K}$.5.4 *Definición provisional.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo inyectivo y $\theta \in \underline{K}[f(X)]$ una $\underline{K}$-estructura tal que $(f(X),\theta)$ es subobjeto de $(Y,\eta)$. Si la restricción

$$f\mid^{(f(X),\theta)} : (X,\xi) \to (f(X),\theta)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces $f$ recibe el nombre de $\underline{K}$-*inmersión*.

Aunque ésta es ya casi la definición de $\underline{K}$-inmersión que emplearemos, unas observaciones van a servirnos para afinarla un poco.

En $\underline{K}$.2.11 probamos que si $F = ((X,\xi),(f_i)_I)$ es una $\underline{K}$-fuente inicial y $h : (X,\xi') \to (X,\xi)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces la fuente $F' = ((X,\xi'),(f_ih)_I)$ también es una $\underline{K}$-fuente inicial. Por otra parte, de acuerdo con la *definición provisional* anterior, para ver en un $\underline{K}$-morfismo inyectivo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ una $\underline{K}$-*inmersión* debemos tener una $\underline{K}$-fuente inicial $((f(X),\theta),\iota)$ y un $\underline{K}$-isomorfismo

$$f\mid^{(f(X),\theta)}: (X,\xi) \to (f(X),\theta)$$

Aplicando el resultado que mencionamos tenemos que también

$$\left((X,\xi),\iota f^{(f(X),\theta)}\right)$$

es una $\underline{K}$-fuente inicial; pero $\iota f \mid^{(f(X),\theta)}= f$. Por consiguiente, $\xi$ es la $\underline{K}$-estructura inicial para $X$ correspondiente a $f$ y $\eta$.

Recíprocamente; sean, $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo inyectivo, $\theta \in \underline{K}[f(X)]$ una $\underline{K}$-estructura tal que $(f(X),\theta)$ es subobjeto de $(Y,\eta)$, y supongamos que $\xi$ es inicial para $X$ respecto a $f$ y $\eta$. Debido a la inyectividad de $f$, la restricción

$$f\mid^{f(X)}: X \to f(X)$$

es biyectiva, por lo que también podemos considerar su función inversa

$$\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1} : f(X) \to X$$

Como además

$$f\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1} = \iota \in \underline{K}\left((f(X),\theta),(Y,\eta)\right)$$

entonces, debido a la inicialidad de $\xi$ tenemos que

$$\left(f\mid^{f(X)}\right)^{-1} \in \underline{K}\left((f(X),\theta),(X,\xi)\right)$$

Por otra parte, como

$$\iota f\mid^{f(X)}= f \in \underline{K}\left((X,\xi),(Y,\eta)\right)$$

entonces, debido a la inicialidad de $\theta$ con respecto a $\iota$ y $\eta$, tenemos que también

$$f\mid^{f(X)}\in \underline{K}\left((X,\xi),(f(X),\theta)\right)$$

Por lo tanto

$$f\mid^{(f(X),\theta)}: (X,\xi) \to (f(X),\theta)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo y $f$ una $\underline{K}$-*inmersión*.

Estas observaciones justifican el que adoptemos como definición la siguiente:

$\underline{K}$.5.5 **Definición.** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, $(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-objeto, $X$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función inyectiva, cualesquiera. Si $\xi \in \underline{K}[X]$ es inicial en $X$ con respecto a $f$ y $\eta$, entonces daremos el nombre de $\underline{K}$-**inmersión** al $\underline{K}$-morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$.

$\underline{K}$.5.5.1 **Observación**. Como acabamos de ver, tanto en la definición de $\underline{K}$-inmersión como en la de subobjeto, empleamos la noción de $\underline{K}$-estructura inicial. Por consiguiente, en uno y otro caso vale aplicar los resultados que para $\underline{K}$-estructuras iniciales hemos demostrado. Por ejemplo, que la $\underline{K}$-estructura inicial es única (salvo isomorfismo) o que es la menos fina que hace de la función correspondiente un $\underline{K}$-morfismo.

$\underline{K}$.5.6 *Ejemplos:* 1. Consideremos en $\mathfrak{Pos}$ un copo arbitrario $(Y, \leq)$; sean, $X$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Entonces, podemos definir una relación $\preceq$ en $X$ como

$$x \preceq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x'), \qquad \forall x, x' \in X$$

Notemos que:

a) $\preceq$ es un orden parcial en $X$.

En efecto, para cualesquiera $x, x', x'' \in X$ tenemos

(i) $x \preceq x$ porque $f(x) \leq f(x)$.

(ii) Si $x \preceq x'$ y $x' \preceq x''$, entonces $f(x) \leq f(x')$ y $f(x') \leq f(x'')$; $\therefore f(x) \leq f(x'')$; $\therefore x \preceq x''$.

(iii) Si $x \preceq x'$ y $x' \preceq x$, entonces $f(x) \leq f(x')$ y $f(x') \leq f(x)$; $\therefore f(x) = f(x')$; como $f$ es inyectiva, esto implica que $x = x'$.

b) $\preceq$ es inicial en $X$ con respecto a $f$ y $\leq$.

En efecto:

(1) $f \in \mathfrak{Pos}((X, \preceq), (Y, \leq))$ porque $x \preceq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'), \forall x, x' \in X$.

(2) Sean, $(W, \leqq)$ un copo y $g : W \to X$ una función tal que

$$fg \in \mathfrak{Pos}((W, \leqq), (Y, \leq))$$

Entonces, para cualesquiera $w, w' \in W$ tales que $w \leqq w'$ tenemos

$$f(g(w)) = fg(w) \leq fg(w') = f(g(w'))$$

lo cual, según la definición del orden parcial $\preceq$, es si, y sólo si, $g(w) \preceq g(w')$. Por lo tanto

$$g \in \mathfrak{Pos}((W, \leqq), (X, \preceq))$$

Por lo tanto, $f : (X, \preceq) \to (Y, \leq)$ es una $\mathfrak{Pos}$-inmersión. $[\checkmark]$

2. $\mathfrak{Met}$ denota a la categoría de los **espacios métricos** y **contracciones**.

(i) La **estructura métrica** en un conjunto $X$ arbitrario le viene dada por funciones del tipo

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

que, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$, satisfacen las condiciones

($d_1$) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

($d_2$) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

($d_3$) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$

Una función con estas características es una **métrica** para el conjunto $X$. Por lo tanto

$$\mathfrak{Met}[X] = \{d : X \times X \to [0, \infty) \mid d \text{ es una métrica para } X\}$$

(ii) En consecuencia, los $\mathfrak{Met}$-objetos o **espacios métricos** son parejas $(X,d)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $d \in \mathfrak{Met}[X]$.

(iii) Los $\mathfrak{Met}$-morfismos o **contracciones** entre dos espacios métricos $M_1 = (X_1, d_1)$ y $M_2 = (X_2, d_2)$ cualesquiera, son funciones tales que

$$d_2\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \leq d_1\left(x_1, x_2\right), \forall x_1, x_2 \in X_1$$

Es fácil comprobar que $\mathfrak{Met}$ satisface las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen a una categoría concreta.

Supongamos ahora que $(Y, d_Y)$ es un espacio métrico, $X$ un conjunto, y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Entonces

$$d_X : X \times X \to [0, \infty)$$

definida por

$$d_X\left(x_1, x_2\right) = d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right), \forall x_1, x_2 \in X$$

es una métrica para $X$. En efecto, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$ tenemos que:

(d$_1$) Si $d_X\left(x_1, x_2\right) = 0$, entonces $d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) = 0$, lo cual, debido a que $d_Y$ es una métrica, es si, y sólo si, $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$; y como $f$ es inyectiva, esto implica que $x_1 = x_2$.

(d$_2$)

$$d_X\left(x_1, x_2\right) = d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) = d_Y\left(f\left(x_2\right), f\left(x_1\right)\right) = d_X\left(x_2, x_1\right)$$

(d$_3$)

$$d_X\left(x_1, x_3\right) = d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_3\right)\right) \leq d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) + d_Y\left(f\left(x_2\right), f\left(x_3\right)\right) = d_X\left(x_1, x_2\right) + d_X\left(x_2, x_3\right)$$

$d_X$ es la $\mathfrak{Met}$-estructura inicial para $X$ correspondiente a $f$ y $d_Y$. En efecto,

(1) $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es, obviamente, una contracción.

(2) Si $(W, d_W)$ es un espacio métrico y $g : W \to X$ una función tal que

$$fg \in \mathfrak{Met}\left(\left(W, d_W\right), \left(Y, d_Y\right)\right)$$

Entonces, dados cualesquiera $w_1, w_2 \in W$ tenemos

$$d_Y\left(fg\left(w_1\right), fg\left(w_2\right)\right) \leq d_W\left(w_1, w_2\right) \ ;$$

pero, por definición de $d_X$ :

$$d_X\left(g\left(w_1\right), g\left(w_2\right)\right) = d_Y\left(f\left(g\left(w_1\right)\right), f\left(g\left(w_2\right)\right)\right) = d_Y\left(fg\left(w_1\right), fg\left(w_2\right)\right)$$

Por lo tanto

$$g \in \mathfrak{Met}\left(\left(W, d_W\right), \left(X, d_X\right)\right)$$

Por lo tanto, $f$ es $\mathfrak{Met}$-inmersión. [✓]

El siguiente resultado establece la relación que guarda el concepto catégorico de sección con el concepto de inmersión.

$\underline{K}$.5.7 **Proposición.** En una categoría concreta arbitraria toda sección es una inmersión.

*Demostración.* Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ una $\underline{K}$-sección cualquiera. Entonces, $f$ es un $\underline{K}$-morfismo inyectivo para el que existe otro $\underline{K}$-morfismo

$$g : (Y, \eta) \to (X, \xi)$$

tal que $gf = 1_X$. En consecuencia, si $(W,\omega) \in \underline{K}$ y $h : W \to X$ es tal que

$$fh \in \underline{K}\left((W,\omega),(Y,\eta)\right)$$

entonces, también es un $\underline{K}$-morfismo la composición

$$g(fh) = (gf)\,h = 1_X h = h : (W,\omega) \to (X,\xi)$$

Esto prueba que $\xi$ es inicial en $X$ con respecto a $f$ y $\eta$. Por lo tanto, $f$ es una $\underline{K}$-inmersión. $[\checkmark]$

$\underline{K}$.5.8 Observemos que en los dos ejemplos anteriores siempre es posible definir estructuras que hagan de $f(X)$ un subobjeto del codominio de $f$.[2] Ya probamos que cuando esto ocurre, la restricción $f\,|^{f(X)}$ define un isomorfismo entre $X$ (con la estructura inicial) y el subobjeto $f(X)$.

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[rr, shift left, "f\,|^{f(X)}"] \arrow[dr, "f"'] & & (f(X),\theta) \arrow[ll, shift left, "\left(f\,|^{f(X)}\right)^{-1}"] \arrow[dl, "\iota"] \\
& \circlearrowleft \\[-20pt]
& (Y,\eta) &
\end{tikzcd}$$

Una categoría concreta en la que para cualquier objeto $(X,\xi)$ y para cualquier conjunto $A \subseteq X$ existe una estructura $\alpha$ tal que $(A,\alpha)$ es subobjeto de $(X,\xi)$ se llama **hereditaria**.

Por otra parte, como en toda categoría dos objetos son teóricamente indistinguibles si son isomorfos entre sí, entonces podemos decir que en toda categoría concreta que sea hereditaria los objetos *inmersibles* en un objeto $(Y,\eta)$ [3] se agotan con los subobjetos de $(Y,\eta)$, y las inmersiones con las inclusiones de los mismos. Esta es (en el sentido del isomorfismo) la interpretación que podemos dar del diagrama anterior.

$\underline{K}$.5.9 Pero no toda categoría concreta es hereditaria. Como ejemplo pensemos en $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$; es claro que no todo subconjunto de un espacio vectorial es subespacio suyo. Otro ejemplo nos lo da $\mathfrak{Topc}_2$, la categoría de los **espacios compactos de Hausdorff y funciones continuas**. En $\mathfrak{Topc}_2$ los subobjetos de un espacio $(X,\tau)$ son única y exclusivamente los subconjuntos cerrados de $(X,\tau)$.

En efecto, por resultados de topología general sabemos que los subconjuntos cerrados de un espacio compacto también son compactos y que el ser de Hausdorff es una propiedad que hereda todo subespacio de un espacio de Hausdorff. Por consiguiente, si $A \subseteq X$ es cerrado en $(X,\tau)$ y $(X,\tau) \in \mathfrak{Topc}_2$, entonces también $(A,\tau \mid A) \in \mathfrak{Topc}_2$. Además:

(1) $\iota : (A,\tau \mid A) \hookrightarrow (X,\tau)$ es continua porque

$$\iota^{-1}(U) = U \cap A \in \tau \mid A,\ \forall U \in \tau$$

(2) Si $(Z,\rho) \in \mathfrak{Topc}_2$ y $g : Z \to A$ es una función tal que

$$\iota g : (Z,\rho) \to (X,\tau)$$

[2] Estamos expresándonos con ambigüedad diciendo esto de "que hagan de $f(X)$ un subobjeto del codominio de $f$". Es que es usual referirse a un conjunto $A \subseteq X$ como *subobjeto de* $(X,\xi)$ cuando existe una estructura $\alpha$ tal que $(A,\alpha)$ es subobjeto de $(X,\xi)$.

[3] Se entiende, aquéllos desde los que puede definirse una inmersión en $(Y,\eta)$.

es continua, entonces

$$g^{-1}(U \cap A) = g^{-1}\left(\iota^{-1}(U)\right) = (\iota g)^{-1}(U) \in \rho,\ \forall U \cap A \in \tau \mid A$$

lo que significa que también $g : (Z, \rho) \to (A, \tau \mid A)$ es continua.

Esto prueba que $(A, \tau \mid A)$ es subobjeto de $(X, \tau)$.

Recíprocamente, si $(A, \tau \mid A)$ es subobjeto de un $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}\mathfrak{c}_2$, entonces $A$ es cerrado en $(X, \tau)$ porque los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff son cerrados. $[\checkmark]$

$\underline{K}$.5.10 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ **tiene intersecciones** si para todo $\underline{K}$-objeto $(X, \xi)$ y para cualesquiera subobjetos suyos $(A_i, \alpha_i)_I$ existe una $\underline{K}$-estructura para $\bigcap_{i \in I} A_i$ con la cual resulte subobjeto de $(X, \xi)$.

$\underline{K}$.5.11 *Ejemplos de categorías concretas con intersecciones y sin ellas.*

1. Toda categoría concreta que sea hereditaria posee intersecciones.

2. Como los subobjetos de cualquier $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}\mathfrak{c}_2$ son los subconjuntos cerrados de $(X, \tau)$ y como toda intersección arbitraria de éstos es cerrada en $(X, \tau)$, tenemos que $\mathfrak{Top}\mathfrak{c}_2$ tiene intersecciones.

3. El ejemplo que sigue es el de una categoría con la que hasta ahora no hemos trabajado. Comenzaremos presentándola.

Sus objetos se llaman **retículas**[4]; son copos $(X, \leq)$ con la propiedad de que todo par $x_1, x_2$ de sus elementos tiene un **ínfimo** $x_1 \wedge x_2 \in X$ y un **supremo** $x_1 \vee x_2 \in X$; es decir, los elementos $x_1 \wedge x_2$ y $x_1 \vee x_2$ son tales que

$$x_1 \wedge x_2 \leq x_1, x_2 \leq x_1 \vee x_2$$

y si para $z, z' \in X$ se tiene

$$z' \leq \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} \leq z$$

entonces

$$z' \leq x_1 \wedge x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee x_2 \leq z$$

respectivamente. Los morfismos entre dos retículas $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ cualesquiera son los **homomorfismos reticulares**, es decir, funciones $f \in Y^X$ tales que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ cumplen

$$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2) \quad \text{y} \quad f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2)$$

La categoría de las **retículas y homomorfismos reticulares** se denota por $\mathfrak{Lat}$. Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Lat}[X]$ es la familia de *estructuras reticulares*, es decir, la familia de órdenes parciales que convierten a $X$ en retícula. Es fácil probar las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$ con las que $\mathfrak{Lat}$ resulta una categoría concreta.

Antes de seguir adelante insertaremos los ejercicios $t_2 5$ y $t_2 6$.

*Ejercicio $t_2 5$.* Demuestre que $\mathfrak{Lat}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Pos}$.

---

[4] O, si se prefiere, en francés: *lattices*.

*Ejercicio $L_2 6$.* Sean $X, Y \in \mathfrak{Set}$, $X \subseteq Y$; si $\alpha \in \mathfrak{Lat}[X]$ y $\beta \in \mathfrak{Lat}[Y]$, probar que $(X, \alpha)$ es subobjeto de $(Y, \beta)$ si, y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$x_1 \wedge_\beta x_2 = x_1 \wedge_\alpha x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee_\beta x_2 = x_1 \vee_\alpha x_2$$

Para continuar con el ejemplo, supongamos que $(Y_i, \beta_i)_I$ es una familia de subretículas de una retícula arbitraria $(X, \alpha)$; sea $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$. Debido al resultado establecido en el ejercicio anterior, dados cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$ tenemos

$$y_1 \wedge_\alpha y_2, \; y_1 \vee_\alpha y_2 \in Y_i, \; \forall i \in I$$

Por lo tanto, siendo $\beta$ el orden parcial inducido por $\alpha$ en $Y$ y haciendo

$$y_1 \wedge_\beta y_2 = y_1 \wedge_\alpha y_2 \quad \text{y} \quad y_1 \vee_\beta y_2 = y_1 \vee_\alpha y_2$$

tenemos, a consecuencia del ejercicio 6, que también $(Y, \beta)$ es subretícula de $(X, \alpha)$. Esto prueba que $\mathfrak{Lat}$ es una categoría concreta con intersecciones.

4. Por los cursos de álgebra lineal sabemos que la intersección arbitraria de subespacios de un espacio vectorial cualquiera es también un subespacio de éste. Así, $\mathfrak{Vec}$ es otro ejemplo de categoría concreta con intersecciones.

5. $\mathfrak{Topc}$ denotará a la categoría de **espacios compactos y funciones continuas.** Veremos un ejemplo que muestra que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones.

Sea $Z = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ y sea $\rho$ la topología para $Z$ definida por

$$U \in \rho \Leftrightarrow \begin{cases} Z - U \text{ es finito} \\ \text{o} \\ U \cap \{-\infty, +\infty\} = \emptyset \end{cases}$$

Entonces, $\rho \in \mathfrak{Topc}[Z]$. En efecto, si $\mathcal{A} = (U_i)_I$ es una cubierta abierta arbitraria de $Z$, entonces $-\infty \in U_{i_0}$, p.a. $i_0 \in I$; luego, $U_{i_0} \cap \{-\infty, +\infty\} \neq \emptyset$, y como $U_{i_0} \in \rho$, entonces $Z - U_{i_0}$ es finito y por lo tanto puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\mathcal{A}$. Estos miembros y $U_{i_0}$ constituyen una subcubierta finita para $Z$, lo cual prueba que, efectivamente, $(Z, \rho) \in \mathfrak{Topc}$.

Valiéndonos de argumentos similares a éste podemos evidenciar que

$$Y_1 = Z - \{-\infty\} \quad \text{y} \quad Y_2 = Z - \{+\infty\}$$

son subconjuntos compactos de $Z$. En consecuencia, los subespacios de $(Z, \rho)$

$$(Y_1, \rho \mid Y_1) \quad \text{y} \quad (Y_2, \rho \mid Y_2)$$

son subobjetos en $\mathfrak{Topc}$. Sin embargo, su intersección

$$\mathbb{Z} = Y_1 \cap Y_2$$

no puede mirarse como subobjeto de $(Z, \rho)$ en $\mathfrak{Topc}$ ya que, de hecho, la topología inducida $\rho \mid \mathbb{Z}$ es la topología discreta: En efecto, observemos que para toda $z \in \mathbb{Z}$

$$U_z = \{z\} \in \rho \text{ porque } U_z \cap \{-\infty, +\infty\} = \emptyset$$

de manera que

$$U_z \cap \mathbb{Z} = \{z\} \in \rho \mid \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}$$

Por consiguiente, si $\varrho$ fuese una topología para $\mathbb{Z}$ según la cual $(\mathbb{Z}, \varrho)$ resultase $\mathfrak{Topc}$-subobjeto de $(Z, \rho)$, entonces, por la continuidad de la inclusión

$$\iota : (\mathbb{Z}, \varrho) \hookrightarrow (Z, \rho)$$

tenemos

$$\{z\} = \iota^{-1}(U_z) \in \varrho, \ \forall z \in \mathbb{Z}$$

i.e. $\varrho = \rho \mid \mathbb{Z}$. Pero $(\mathbb{Z}, \rho \mid \mathbb{Z})$ no es compacto porque de la cubierta abierta

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\}$$

es imposible extraer una subcubierta finita. Así pues, tal $\varrho$ no existe. [✓]

K.5.12 **Observación.** Si $\underline{K}$ tiene intersecciones, entonces para todo subconjunto $M$ de todo $\underline{K}$-objeto $(X, \xi)$ existe el más chico de los subobjetos $(A, \alpha)$ de $(X, \xi)$ tal que $M \subseteq A$: a saber, es la intersección de todos los subobjetos de $(X, \xi)$ que contienen a $M$.

K.5.13 **Definición.** Si $(A_i, \alpha_i)_I$ es la familia de los subobjetos de $(X, \xi)$ que contienen a $M \subseteq X$ y $\alpha$ es una $\underline{K}$-estructura que hace de $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ un subobjeto de $(X, \xi)$, diremos que $M$ **genera a** $(A, \alpha)$. Si $A = X$, hablaremos de $M$ como de un **conjunto de generadores de** $(X, \xi)$. Así, $M$ es un conjunto de generadores de $(X, \xi)$ si, y sólo si, ningún subobjeto de $(X, \xi)$, excepto $(X, \xi)$ mismo, contiene a $M$. Diremos que $(X, \xi)$ **tiene** $n$ **generadores** si existe un conjunto $M$ de generadores de $(X, \xi)$ cuyo número cardinal es $n$ y si ningún subconjunto de $X$ de cardinalidad menor que $n$ puede generar a $(X, \xi)$.

K.5.14 *Ejemplos:* 1. En $\mathfrak{Top}$, para cualquier espacio topológico $(X, \tau)$ el $\mathfrak{Top}$-subobjeto generado por cualquier $A$ es $(A, \tau \mid A)$.

2. En forma más general: Si $\underline{K}$ es hereditaria, el subobjeto de $(X, \xi)$ generado por $A \subseteq X$ es $(A, \alpha)$, donde $\alpha$ es una $\underline{K}$-estructura que hace de $A$ un subobjeto de $(X, \xi)$.

3. El intervalo $[0, 1]$ con la topología relativa a la usual de $\mathbb{R}$ es un $\mathfrak{Topc}_2$-objeto con $\aleph_0$ generadores.

En efecto, si $M = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $A \subseteq [0, 1]$ es un subobjeto (en $\mathfrak{Topc}_2$) que contiene a $M$, entonces $A$ es cerrado en $[0, 1]$ y por lo tanto $\overline{M} \subseteq A$; pero $\overline{M} = [0, 1]$ porque $\mathbb{Q}$ es denso en $[0, 1]$. Por lo tanto, el único subobjeto que contiene a $M$ es el propio intervalo. Además, se sabe que $M$ es un conjunto infinito numerable, o sea que su número cardinal es $\aleph_0$.

Por otro lado, si $N \subseteq [0, 1]$ es un conjunto de cardinalidad menor que $\aleph_0$, entonces $N$ es finito y, por lo tanto, compacto (y de Hausdorff, por estar en un Hausdorff); i.e. $N \in \mathfrak{Topc}_2$ y, por lo tanto, el subobjeto generado por $N$ es $N$ mismo. Esto prueba que en $\mathfrak{Topc}_2$ el intervalo $[0, 1]$ no puede generarse con menos de $\aleph_0$ elementos; y como con $\aleph_0$ sí se genera, entonces tiene $\aleph_0$ generadores, como se quería demostrar.

4. De un modo más general podemos asegurar que en $\mathfrak{Topc}_2$ el subobjeto que $A \subseteq X$ genera en $(X, \tau)$ es $\overline{A}$.

En efecto, ya vimos que los subobjetos de cualquier $(X, \tau) \in \mathfrak{Topc}_2$ son precisamente los subconjuntos cerrados de $(X, \tau)$; por consiguiente, hablar del subobjeto generado por un subconjunto $A$ cualquiera es hablar del más chico de los cerrados de $(X, \tau)$ que contienen a $A$, o sea, es referirse a $\overline{A}$.

A consecuencia de esto tenemos que los subconjuntos densos de $(X, \tau)$ son precisamente los conjuntos generadores en este tipo de espacios ya que ellos, y solamente ellos, tienen la propiedad de que sus cerraduras coinciden con todo el espacio.

5. Como sabemos por los cursos de álgebra lineal, en $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ un subconjunto de $n$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

6. La categoría que a continuación presentamos suele denotarse por medio de $\mathfrak{Mon}$.

$(i)$ Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Mon}[X]$ consta de parejas $(\cdot, e)$ en las que

$$\cdot : X \times X \to X$$

es una operación binaria que es asociativa y $e$ es un elemento de $X$ llamado **neutro** que cumple lo siguiente:

$$e \cdot x = x = x \cdot e, \ \forall x \in X$$

$(ii)$ Por consiguiente los $\mathfrak{Mon}$-objetos son parejas del tipo $(X, (\cdot, e))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(\cdot, e) \in \mathfrak{Mon}[X]$; reciben el nombre de **monoides**.

$(iii)$ Si $A = (X, (\cdot, e))$ y $B = (Y, (\circ, \mathrm{e}))$ son monoides cualesquiera, entonces

$$\mathfrak{Mon}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : f(e) = \mathrm{e} \text{ y } f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \circ f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X \right\}$$

Los $\mathfrak{Mon}$-morfismos se llaman **homomorfismos de monoides**.

En $\mathfrak{Mon}$ se verifican los axiomas $(m_1)$ y $(m_2)$ que definen a una categoría concreta, como se comprueba fácilmente.

En $\mathfrak{Mon}$ los subobjetos se caracterizan por ser cerrados bajo la operación del monoide en cuestión y contener al elemento neutro.

En efecto, supongamos que $(X, (\cdot, e))$ es un monoide y que $A \subseteq X$ es cerado bajo $\cdot$ y contiene a $e$. Entonces, $(A, (\cdot, e))$ es un monoide y tenemos:

(1) $\iota : (A, (\cdot, e)) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$ es un homomorfismo de monoides ya que, como para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ tenemos $a_1 \cdot a_2 \in A$, entonces

$$\iota(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot a_2 = \iota(a_1) \cdot \iota(a_2)$$

(2) Si $(Z, (\circ, \mathrm{e})) \in \mathfrak{Mon}$ y $g : Z \to A$ es tal que

$$\iota g \in \mathfrak{Mon}((Z, (\circ, \mathrm{e})), (X, (\cdot, e)))$$

entonces

$$g(z_1 \circ z_2) = \iota(g(z_1 \circ z_2)) = \iota g(z_1 \circ z_2) = \iota g(z_1) \cdot \iota g(z_2) = g(z_1) \cdot g(z_2), \ \forall z_1, z_2 \in Z$$

Además

$$e = \iota g(\mathrm{e}) = \iota(g(\mathrm{e})) = g(\mathrm{e})$$

Esto prueba que también $g : (Z, (\circ, \mathrm{e})) \to (A, (\cdot, e))$ es un homomorfismo.

Por lo tanto, $(A, (\cdot, e))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, e))$.

Recíprocamente, si $(A, (\circ, \mathrm{e}))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, e))$, entonces

$$\iota : (A, (\circ, \mathrm{e})) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$$

es un homomorfismo, de manera que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ tenemos

$$a_1 \circ a_2 = \iota(a_1 \circ a_2) = \iota(a_1) \cdot \iota(a_2) = a_1 \cdot a_2 \ ;$$

pero por ser un monoide, $a_1 \circ a_2 \in A$. Por lo tanto, $A$ está cerrada bajo $\cdot$ . Además,

$$\mathsf{e} = \iota(\mathsf{e}) = e$$

por definición de $\mathfrak{Mon}$-morfismo. Por lo tanto, $e \in A$.

*Ejercicio* $t_2 7$. Demuestre que $\mathfrak{Mon}$ tiene intersecciones.

Consideremos ahora el monoide aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, 0))$ y veamos que tiene dos generadores: $1$ y $-1$.

En efecto, si un submonoide $A \subseteq \mathbb{Z}$ contiene a estos dos números, entonces, por ser cerrado bajo la suma, también contendrá a

$$...-4 = (-1)+(-3)\,, -3 = (-1)+(-2)\,, -2 = (-1)+(-1)\,, -1+1, 1+1 = 2, 1+2 = 3, 1+3 = 4...$$

y en consecuencia, $A = \mathbb{Z}$. Por otra parte, un solo entero $n$ genera en $\mathbb{Z}$ al submonoide

$$\{0, n, 2n, ...\} \subsetneq \mathbb{Z}$$

sea cual sea este entero, y esto prueba que $(\mathbb{Z}, (+, 0))$ tiene dos generadores.$_{[\checkmark]}$

## 4.2 Cocientes

En $\underline{K}$.4.3 se definió el coconcepto correspondiente al concepto de fuente inicial y quedó bautizado como sumidero final. Para tener presente esta definición en el caso particular en que el sumidero consta de una sola flecha la escribimos a continuación.

$\underline{K}$.6.1 **Definición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, $(X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto, $Y$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función, cualesquiera. Diremos que $\eta \in \underline{K}[Y]$ es **final para** $Y$ **con respecto a** $f$ **y** $\xi$ si se satisfacen las condiciones:

(1) $f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$;

(2) Si $(Z, \zeta) \in \underline{K}$ y $g : Y \to Z$ es una función tal que

$$gf \in \underline{K}((X, \xi), (Z, \zeta))$$

entonces también

$$g \in \underline{K}((Y, \eta), (Z, \zeta))$$

Ahora aplicaremos el principio de dualidad a la definición $\underline{K}$.5.5 para definir el concepto casi dual al concepto de $\underline{K}$-inmersión.

$\underline{K}$.6.2 **Definición** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, $(X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto, $Y$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función suprayectiva, cualesquiera. Si $\eta \in \underline{K}[Y]$ es final para $Y$ con respecto a $f$ y $\xi$, entonces daremos el nombre de $\underline{K}$-**cociente** al morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. En tal caso hablaremos de $(Y, \eta)$ como de un $\underline{K}$-**objeto cociente** de $(X, \xi)$ correspondiente al morfismo $f$.

*Ejercicio $t_2 8$.* Demuestre que en cualquier categoría concreta toda retracción es un cociente.

*Ejercicio $t_2 9$.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo, arbitrarios. Probar que son equivalentes:

$(a)$ $f$ es un isomorfismo.

$(b)$ $f$ es inmersión y cociente.

Como vemos, la dualidad (o casi dualidad) exige que para definir cocientes en categorías concretas se emplee la noción de $\underline{K}$-estructura final. Por otra parte, nuestra recién adquirida experiencia con las $\underline{K}$-inmersiones nos disuade de querer esperar cocientes de simples $\underline{K}$-morfismos suprayectivos. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, la misma función

$$1_X : (X,\tau_d) \to (X,\tau_i)$$

en la que $\tau_d$ y $\tau_i$ denotan a las topologías discreta e indiscreta, respectivamente, es un morfismo suprayectivo al cual chocaría ver como cociente. ¿Por qué?

Pues porque toda *identificación* que se haga en un espacio discreto da por resultado un espacio que también es discreto.

En efecto, si hacemos idénticos (*identificamos*) a elementos de $X$ mediante una relación de equivalencia $\sim$ cualquiera y denotamos por $X \,/ \sim$ a la familia de clases obtenida, sabemos, por resultados de topología general, que la aplicación canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X \,/ \sim \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

debe ser continua y que su continuidad caracteriza a la estructura topológica de $X \,/ \sim$ como

$$\widetilde{\tau} = \left\{U \subseteq (X \,/ \sim) \mid p^{-1}(U) \in \tau\right\}$$

Pero si la topología $\tau$ en $X$ es discreta, entonces todas las fibras $p^{-1}\{[x]\}$ son abiertas en $X$ y, por lo tanto, cada clase $[x]$ es abierta en $X \,/ \sim$; o sea que $\widetilde{\tau}$ es la topología discreta de $X \,/ \sim$.

Bueno, ¿pero qué tienen que ver las identificaciones con los cocientes?

En $\mathfrak{Top}$ ambos conceptos se toman como sinónimos uno del otro porque siempre resultan equivalentes (homeomorfos) entre sí. Pero si queremos una respuesta más aplia a la pregunta anterior, habría que intentar elevar la noción de identificación al contexto general de las categorías concretas. Es lo que haremos enseguida.

Observemos, para empezar, que en $\mathfrak{Top}$ la estructura $\widetilde{\tau}$ con la que se topologiza a $X \,/ \sim$ es la topología fuerte correspondiente a $p$ y $\tau$. Por el ejercicio $t_2 3$ sabemos que tal topología es la $\mathfrak{Top}$-estructura final para $X \,/ \sim$ respecto al sumidero cuya única flecha es $X \xrightarrow{p} X \,/ \sim$.

$\underline{K}$.6.3 **Definición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, $(X,\xi)$ cualquier $\underline{K}$-objeto, $\sim$ una relación de equivalencia en $X$ y $p : X \to X \,/ \sim$ la aplicación canónica. Si existe $\widetilde{\xi} \in \underline{K}[X \,/ \sim]$ que sea final para $X \,/ \sim$ con respecto a $p$ y $\xi$, entonces llamaremos **$\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente a $\sim$** al $\underline{K}$-objeto $\left(X \,/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$. En tal caso hablaremos del morfismo

$$p : (X,\xi) \to \left(X \,/ \sim, \widetilde{\xi}\right)$$

como de una $\underline{K}$-**identificación.**

$\underline{\mathrm{K}}$.6.3 *Ejemplos.* 1. Sean, $(X, \alpha)$ una digráfica y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$, cualesquiera, y hagamos

$$\widetilde{\alpha} = \{([u_1], [u_2]) : \text{existe } x_i \in [u_i] \text{ tal que } (x_1, x_2) \in \alpha\}$$

Esto define una relación binaria (o $\mathfrak{Gra}$-estructura) en $X / \sim$ para la cual tenemos que:

(1) $p : (X, \alpha) \to (X / \sim, \widetilde{\alpha})$ es una función compatible ya que

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (p(x_1), p(x_2)) = ([x_1], [x_2]) \in \widetilde{\alpha}$$

(2) Si $(Z, \gamma)$ es cualquier digráfica y $h : X / \sim \to Z$ es una función tal que

$$hp : (X, \alpha) \to (Z, \gamma)$$

es compatible entonces, como para cualquier $([u_1], [u_2]) \in \widetilde{\alpha}$ existen $x_i \in [u_i]$ tales que $(x_1, x_2) \in \alpha$, tenemos

$$(h[u_1], h[u_2]) = (hp(x_1), hp(x_2)) \in \gamma$$

y por lo tanto

$$h : (X / \sim, \widetilde{\alpha}) \to (Z, \gamma)$$

también es compatible.

Entonces, $(X / \sim, \widetilde{\alpha})$ es el $\mathfrak{Gra}$-objeto de identificación de $(X, \alpha)$ correspondiente a $\sim$. $_{[\checkmark]}$

2. Para el ejemplo que sigue presentaremos otra categoría concreta que denotaremos $\mathfrak{Sgr}$.

($i$) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Sgr}[X]$ es la clase de operaciones binarias en $X$ que son asociativas, es decir

$$\mathfrak{Sgr}[X] = \{\cdot : X \times X \to X \mid x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, \ \forall x_1, x_2, x_3 \in X\}$$

($ii$) Por lo tanto, los $\mathfrak{Sgr}$-objetos, que se llaman **semigrupos**, son parejas del tipo $(X, \cdot)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\cdot \in \mathfrak{Sgr}[X]$.

($iii$) Si $A = (X, \cdot)$ y $B = (Y, \circ)$ son semigrupos, entonces

$$\mathfrak{Sgr}(A, B) = \left\{f \in Y^X : f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \circ f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X\right\}$$

Los $\mathfrak{Sgr}$-morfismos son los **homomorfismos de semigrupos**. Las condiciones $(m_1)$ y $(m_2)$ se verifican fácilmente.

En el semigrupo aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ definimos una relación de equivalencia $\sim$ como sigue:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \text{ es par}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

Entonces $\mathbb{Z} / \sim$ consta de dos clases:

$$[1], \text{ la clase de los nones} \quad \text{y} \quad [0], \text{ la clase de los pares}$$

Si definimos $\oplus$ en $\mathbb{Z} / \sim$ como

$$[0] \oplus [0] = [1] \oplus [1] = [0] \quad \text{y} \quad [0] \oplus [1] = [1] \oplus [0] = [1]$$

entonces, para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$[z_1] \oplus [z_2] = [z_1 + z_2]$$

Por lo tanto:

(1) $p : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z} / \sim, \oplus)$ es un homomorfismo.

(2) Si $(Z, \cdot) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h : \mathbb{Z} / \sim \to Z$ es una función tal que

$$hp : (\mathbb{Z}, +) \to (Z, \cdot)$$

es un homomorfismo, entonces, para cualesquiera $[z_1], [z_2] \in \mathbb{Z} / \sim$ tenemos

$$h([z_1] \oplus [z_2]) = h(p(z_1) \oplus p(z_2)) = hp(z_1 + z_2) = hp(z_1) \cdot hp(z_2) = h[z_1] \cdot h[z_2]$$

o sea que también

$$h : (\mathbb{Z} / \sim, \oplus) \to (Z, \cdot)$$

es un homomorfismo.

Entonces, $(\mathbb{Z} / \sim, \oplus)$ es el $\mathfrak{Sgr}$-objeto de identificación de $(\mathbb{Z}, +)$ correspondiente a $\sim$. [✓]

Otra relación de equivalencia definida para cualesquiera $z_1, z_2$ en $\mathbb{Z}$ es

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 > 1 \\ \text{ó} \\ z_1, z_2 \leq 1 \end{cases}$$

Para esta relación, $\mathbb{Z} / \sim$ también consta de dos clases

$$[1] = \{..., -2, -1, 0, 1\} \quad \text{y} \quad [2] = \{2, 3, 4, 5, ...\}$$

Si queremos definir una operación $*$ en $\mathbb{Z} / \sim$ según la cual $(\mathbb{Z}/ \sim, *)$ resulte un $\mathfrak{Grp}$-objeto de identificación de $(\mathbb{Z}, +)$, entonces, dado que $p$ debe resultar un homomorfismo, debemos definir $[1] * [1] = [2]$ ya que debemos tener

$$[2] = p(2) = p(1 + 1) = p(1) * p(1)$$

pero entonces, dado que $p(1) = p(0)$, tendremos

$$[1] = p(0) = p(0 + 0) = p(0) * p(0) = [2] \quad \underset{\circ}{\nabla}$$

Esta contradicción demuestra que tal $\mathfrak{Sgr}$-estructura $*$ para $\mathbb{Z} / \sim$ no existe.

$\underline{K}$.6.5 **Definición.** Una categoría concreta $\underline{K}$ es **cohereditaria** si para todo $\underline{K}$-objeto $(X, \xi)$ y cualquier relación de equivalencia $\sim$ en $X$ existe el $\underline{K}$-objeto de identificación $\left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$ de $(X, \xi)$ correspondiente a $\sim$.

De los ejemplos 1 y 2 anteriores se sigue que $\mathfrak{Gra}$ es cohereditaria y que $\mathfrak{Sgr}$ no lo es.

$\mathfrak{Pros}$, como veremos a continuación, es ejemplo de otra categoría concreta que es cohereditaria; es la categoría de los **conjuntos preordenados** *(copros)* (i.e. aquéllos en que está definida una relación binaria que es reflexiva y transitiva) y **funciones monótonas**.

*Ejercicio 10.* Demuestre (en sentido de *subcategorías*) que son válidas las contensiones

$$\mathfrak{Pos} \subseteq \mathfrak{Pros} \subseteq \mathfrak{Gra}$$

K.6.6 **Proposición.** Sea $X \in \mathfrak{Set}$ y sean $\xi_j \in \mathfrak{Pros}[X]$, $j \in J$, donde $J$ es cualquier familia de índices. Entonces, $\xi = \bigcap_{j\in J} \xi_j \in \mathfrak{Pros}[X]$.

*Demostración.* $(i)$ $\xi$ es reflexiva porque si $x \in X$, entonces $(x,x) \in \xi_j, \forall j \in J$.

$(ii)$ $\xi$ es transitiva porque si

$$(x_1, x_2) \in \xi \quad \text{y} \quad (x_2, x_3) \in \xi$$

es que para cualquier $j \in J$

$$(x_1, x_2) \in \xi_j \quad \text{y} \quad (x_2, x_3) \in \xi_j$$

y, por lo tanto

$$(x_1, x_3) \in \xi_j, \forall j \in J$$

De aquí que $\xi \in \mathfrak{Pros}[X]$. $_{[\checkmark]}$

En vista del resultado anterior y del hecho de que

$$X \times X \in \mathfrak{Pros}[X], \quad \forall X \in \mathfrak{Set}$$

podemos asegurar la existencia de un mínimo preorden para $X$ que contenga a cualquier $A \subseteq X \times X$ ya que al considerar la familia

$$\{\xi_j \in \mathfrak{Pros}[X] : A \subseteq \xi_j, \forall j \in J\}$$

resulta que $\xi = \bigcap_{j\in J} \xi_j$ es tal preorden para $X$.

Def. Sean, $X \in \mathfrak{Set}$ y $A \subseteq X \times X$, arbitrarios. Dados cualesquiera $a,b \in X$, llamaremos *cadena en $A$ de $a$ en $b$* a toda sucesión finita de elementos de $A$ del tipo

$$(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b)$$

K.6.7 **Proposición.** Sean, $X \in \mathfrak{Set}$ y $A \subseteq X \times X$, arbitrarios. Si

$$\Delta(X) = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq A$$

entonces el preorden mínimo para $X$ que contiene a $A$ es

$$\xi = \{(a,b) : \text{existe una cadena en } A \text{ de } a \text{ en } b\}$$

*Demostración.* $A \subseteq \xi$ porque si $(a,b) \in A$, entonces $(a,b)$ es una cadena en $A$ de $a$ en $b$.
$\xi \in \mathfrak{Pros}[X]$; en efecto,
$(i)$ $\xi$ es reflexiva porque $\Delta(X) \subseteq A$;
$(ii)$ $\xi$ es transitiva. Si

$$(a,b) \in \xi \quad \text{y} \quad (b,c) \in \xi$$

en $A$ existen cadenas

$$(a,b_1),(b_1,b_2),...,(b_m,b) \quad \text{y} \quad (b,c_1),(c_1,c_2),...,(c_n,c)$$

que pueden *eslabonarse* para formar una sola cadena

$$(a,b_1),(b_1,b_2),...,(b_m,b),(b,c_1),(c_1,c_2),...,(c_n,c)$$

claramente de $a$ en $c$. De modo que también $(a,c)\in\xi$.

Finalmente, si $\eta$ es cualquier otro preorden para $X$ que contiene a $A$, entonces, como para cualquier $(a,b)\in\xi$ hay una cadena

$$(a,a_1),(a_1,a_2),...,(a_m,b)$$

de elementos de $A$, por aplicaciones sucesivas de la transitividad de $\eta$ tenemos

$$\begin{aligned}(a,a_1),(a_1,a_2) &\in \eta\Rightarrow(a,a_2)\in\eta\\ (a,a_2),(a_2,a_3) &\in \eta\Rightarrow(a,a_3)\in\eta\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a,a_m),(a_m,b)\in\eta\Rightarrow(a,b)\in\eta$$

Por lo tanto, $\xi\subseteq\eta$.$_{[\checkmark]}$

K.6.8 **Proposición.** $\mathfrak{Pros}$ es cohereditaria.

*Demostración.* Sean, $(X,\xi)\in\mathfrak{Pros}$ y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$, arbitrarios, y hagamos

$$A=\{(t_1,t_2)\in(X\ /\sim)\times(X\ /\sim):\text{existen } x_1\in t_1 \text{ y } x_2\in t_2 \text{ tales que } (x_1,x_2)\in\xi\}$$

Veremos que el mínimo preorden para $X\ /\sim$ que contiene a $A$ da lugar al objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$.

Para servirnos de la proposición anterior observemos que $\Delta(X\ /\sim)\subseteq A$, pues, debido a que $\sim$ es una relación de equivalencia en $X$, ninguna $t\in X\ /\sim$ es vacía sino que contiene algún $x\in X$; y como $(x,x)\in\xi,\forall x\in X$, entonces $(t,t)\in A,\forall t\in X\ /\sim$.

En consecuencia

$$\widetilde{\xi}=\{(a,b)\in(X\ /\sim)\times(X\ /\sim):\text{existe una cadena en } A \text{ de } a \text{ en } b\}$$

es el mínimo preorden para $X\ /\sim$ que contiene a $A$. Además:

(1) $p:(X,\xi)\to\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es monótona ya que, por la definición de $A$, tenemos

$$(x_1,x_2)\in\xi\Rightarrow([x_1],[x_2])=(p(x_1),p(x_2))\in A\subseteq\widetilde{\xi}$$

(2) Si $(Z,\zeta)\in\mathfrak{Pros}$ y $h:X\ /\sim\ \to Z$ es una función tal que

$$hp:(X,\xi)\to(Z,\zeta)$$

es monótona, entonces, como para cualquier $(a,b) \in \widetilde{\xi}$ hay una cadena en $A$

$$(a,t_1),(t_1,t_2),...,(t_m,b)$$

y para cada *eslabón* de esta cadena existen elementos

$$x \in a,\ x_1 \in t_1;\ x_1' \in t_1,\ x_2 \in t_2;\ x_2' \in t_2,...,x_m \in t_m;\ x_m' \in t_m,\ y \in b$$

tales que

$$(x,x_1),(x_1',x_2),...,(x_{m-1}',x_m),(x_m',y) \in \xi$$

debido a la monotonía de $hp$ tenemos la sucesión

$$(hp(x),hp(x_1)),(hp(x_1'),hp(x_2)),...,(hp(x_{m-1}'),hp(x_m)),(hp(x_m'),hp(y)) \in \zeta\ ;$$

pero

$$x_i,x_i' \in t_i \Rightarrow p(x_i) = p(x_i'),\forall i \in \{1,2,...,m\}$$

de modo que la sucesión anterior puede escribirse como

$$(h(a),h(t_1)),(h(t_1),h(t_2)),...,(h(t_{m-1}),h(t_m)),(h(t_m),h(b)) \in \zeta$$

de donde, aplicando la transitividad de $\zeta$, se obtiene

$$(h(a),h(b)) \in \zeta$$

Por lo tanto, también

$$h:\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \to (Z,\zeta)$$

es monótona.

Esto prueba que $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es el objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$.

Por lo tanto, $\mathfrak{P}\mathfrak{ros}$ es cohereditaria, que es lo que se quería demostrar. $[\checkmark]$

Como consecuencia de la proposición anterior puede darse una descripción de las relaciones de equivalencia en $\mathfrak{P}\mathfrak{os}$ que derivan en copos de identificación. Para enunciarla nos valdremos del siguiente concepto.

$\underline{K}$.6.9 **Definición.** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $(X,\xi)$ un $\underline{K}$-objeto, arbitrarios. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en $X$ con respecto a la cual existe un $\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente, diremos que $\sim$ es una **$\underline{K}$-congruencia para** $(X,\xi)$.

*Nota:* Cuando no se preste a duda el saber de qué categoría $\underline{K}$ se trata se hablará de $\sim$ como de una *congrencia para* $(X,\xi)$, simplemente.

$\underline{K}$.6.10 **Proposición.** Sean, $(X,\xi)$ un copo y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$, arbitrarios. Si $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es un copro de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$, entonces, son equivalentes:

*a)* $\sim$ es una $\mathfrak{P}\mathfrak{os}$-congruencia para $(X,\xi)$.

*b)* $\widetilde{\xi}$ es antisimétrica.

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a), existe el $\mathfrak{Pos}$-objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$; denotémoslo por $\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)$. Entonces, son monótonas

$$p\ :\ (X,\xi) \xrightarrow{p} \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \xrightarrow{1_{X\ /\sim}} \left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)$$
$$p\ :\ (X,\xi) \xrightarrow{p} \left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right) \xrightarrow{1^{-1}_{X\ /\sim}} \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$$

Por lo tanto, también resultan monótonas

$$1_{X\ /\sim} : \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \to \left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right) \quad y \quad 1^{-1}_{X\ /\sim} : \left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right) \to \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$$

Como consecuencia tenemos que

$$(t_1,t_2) \in \widetilde{\xi} \Leftrightarrow (t_1,t_2) \in \widehat{\xi}$$

De aquí, y de la antisimetría de $\widehat{\xi}$, resulta que $\widetilde{\xi}$ también es antisimétrica.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por hipótesis, el copro $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es un copo; como además la aplicación canónica ya era monótona, entonces

(1) $p : (X,\xi) \to \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es un $\mathfrak{Pos}$-morfismo.

(2) Por otro lado, si $(Z,\zeta) \in \mathfrak{Pos}$ y $h : X\ /\sim \to Z$ es una función tal que

$$hp : (X,\xi) \to (Z,\zeta)$$

es monótona, entonces podemos bajar de la categoría $\mathfrak{Pos}$ a la categoría $\mathfrak{Pros}$ para asegurar que también

$$h : \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \to (Z,\zeta)$$

es monótona.

Esto prueba que $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es el $\mathfrak{Pos}$-objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$. Por lo tanto, $\sim$ es una $\mathfrak{Pos}$-congruencia. [✓]

K.6.11 El resultado anterior hace a $\mathfrak{Pos}$ muy sospechosa de no ser cohereditaria, pero aún cabe una duda: qué tal que siempre que se define una relación de equivalencia en un copo arbitrario $(X,\xi)$ el preorden $\widetilde{\xi}$ resulta antisimétrico(?) Un contraejemplo basta para disiparla:

En el copo $(\mathbb{R},\leq)$ con el orden usual definamos, para cualesquiera $r_1,r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1,r_2 \in [-1,1] \\ \text{ó} \\ r_1,r_2 \in \mathbb{R} - [-1,1] \end{cases}$$

Es claro que se trata de una relación de equivalencia; las clases a que da lugar son

$$c_1 = [-1,1] \quad y \quad c_2 = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

De acuerdo con la construcción del copro de identificación $\left(\mathbb{R} / \sim, \widetilde{\xi}\right)$correspondiente a $\sim$, hay que considerar el conjunto

$$A = \{(t_1, t_2) \in (\mathbb{R} / \sim) \times (\mathbb{R} / \sim) : \text{existen } r_1 \in t_1 \text{ y } r_2 \in t_2 \text{ tales que } r_1 \leq r_2\}$$

que en este caso consta de cuatro elementos:

$$A = \{(c_1, c_1), (c_2, c_2), (c_1, c_2), (c_2, c_1)\}$$

y constituye por sí mismo un preorden para $\mathbb{R} / \sim$ que, claramente, no es antisimétrico.

En consecuencia, $\sim$ no es una $\mathfrak{Pos}$-congruencia para $(\mathbb{R}, \leq)$; por lo tanto, $\mathfrak{Pos}$ no es cohereditaria.

*Tercer cuestionario de ejercicios. Ejercicio $t_3 1$.* En el copo $(\mathbb{R}, \leq)$ con el orden usual, para todo $r \in \mathbb{R}$ sea

$$[r] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$$

Demuestre que

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow [r_1] = [r_2]$$

define una $\mathfrak{Pos}$-congruencia para $(\mathbb{R}, \leq)$, y que el $\mathfrak{Pos}$-objeto de identificación correspondiente a $\sim$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ con su orden usual.

Como en $\mathfrak{Pos}$, también en $\mathfrak{Sgr}$ tenemos una descripción de las congruencias.

K.6.12 **Proposición.** Una relación de equivalencia $\sim$ en un semigrupo $(X, \cdot)$ es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ se tiene que

$$x_1 \sim x_1' \text{ y } x_2 \sim x_2' \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$$

*Demostración.* Siendo válida la implicación anterior podemos definir una operación $*$ en la familia de clases como

$$[x_1] * [x_2] = [x_1 \cdot x_2], \forall x_1, x_2 \in X$$

Haciéndolo así obtenemos que:

(1) $p : (X, \cdot) \to (X / \sim, *)$ es un homomorfismo de semigrupos, pues

$$p(x_1 \cdot x_2) = [x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = p(x_1) * p(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$$

(2) Si $(Y, \circ) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h : X / \sim \to Y$ es tal que $hp : (X, \cdot) \to (Y, \circ)$ es un homomorfismo, entonces, cualesquiera que sean $[x_1], [x_2] \in X / \sim$, tenemos

$$h([x_1] * [x_2]) = h(p(x_1) * p(x_2)) = hp(x_1 \cdot x_2) = hp(x_1) \circ hp(x_2) = h[x_1] \circ h[x_2]$$

lo cual significa que también $h : (X / \sim, *) \to (Y, \circ)$ es un homomorfismo.

Recíprocamente, si $\sim$ es una congruencia para $(X, \cdot)$ y $(X / \sim, *)$ es el $\mathfrak{Sgr}$-objeto de identidicación correspondiente, entonces $p$ es un homomorfismo y en consecuencia

$$[x_1 \cdot x_2] = p(x_1 \cdot x_2) = p(x_1) * p(x_2) = [x_1] * [x_2], \forall x_1, x_2 \in X$$

Si además $x_1 \sim x_1'$ y $x_2 \sim x_2'$, entonces $[x_1] = [x_1']$, $[x_2] = [x_2']$ y por lo tanto

$$[x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = [x_1'] * [x_2'] = [x_1' \cdot x_2']$$

o sea que también $x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$. [✓]

*Ejercicio $l_3 2$.* *a)* Dar una caracterización de las congruencias en $\mathfrak{Mon}$.

*b)* Demuestre que en una retícula arbitraria $(X, \leq)$ una relación de equivalencia $\sim$ en $X$ es una congruencia si, y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2, x_1', x_2' \in X$ se tiene que

$$x_1 \sim x_1' \quad \text{y} \quad x_2 \sim x_2' \quad \Rightarrow \quad (x_1 \vee x_2) \sim (x_1' \vee x_2') \quad \text{y} \quad (x_1 \wedge x_2) \sim (x_1' \wedge x_2')$$

$\underline{K}$.6.13 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria. Si $\underline{K}$ es cohereditaria, entonces coinciden las nociones de $\underline{K}$-identificación y $\underline{K}$-cociente.

*Demostración.* Consideremos una $\underline{K}$-identificación cualquiera

$$p : (X, \xi) \to \left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$$

Es claro que la función

$$p : X \to X / \sim$$

es suprayectiva. Además, de acuerdo con la definición de $\underline{K}$-identificación, $\widetilde{\xi}$ es final para $X / \sim$ con respecto a $p$ y $\xi$. Por lo tanto, el morfismo $p$ es un $\underline{K}$-cociente.

Recíprocamente, supongamos que tenemos un $\underline{K}$-cociente arbitrario

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ definamos

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Es claro que se trata de una relación de equivalencia. Como $\underline{K}$ es cohereditaria existen el $\underline{K}$-objeto de identificación correspondiente, $\left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$, y la $\underline{K}$-identificación

$$p : (X, \xi) \to \left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right).$$

Sea

$$\begin{array}{rccc} h : & X / \sim & \to & Y \\ & [x] & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Es fácil probar que $h$ es una biyección bien definida. Si la componemos con $p$ obtenemos

$$hp = f \in \underline{K}\left((X, \xi), (Y, \eta)\right)$$

de modo que, por la finalidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a $p$ y $\xi$, tenemos que también

$$h \in \underline{K}\left(\left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right), (Y, \eta)\right)$$

En cuanto a la función inversa, $h^{-1}$, tenemos

$$h^{-1}f = p \in \underline{K}\left((X,\xi),\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)$$

de modo que, por la finalidad de $\eta$ con respecto a $f$ y $\xi$, tenemos que también

$$h^{-1} \in \underline{K}\left((Y,\eta),\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)$$

Esto prueba que $h:\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo y, por lo tanto, los $\underline{K}$-objetos cociente, $(Y,\eta)$, y de identificación, $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$, resultan indistinguibles. [✓]

Como consecuencia del resultado anterior puede decirse que en las categorías concretas que son cohereditarias, con los objetos de identificación se agotan los objetos cociente y con las aplicaciones canónicas de aquéllos quedan agotados todos los $\underline{K}$-cocientes. Esta es la interpretación que en tales categorías tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (X,\xi) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right) \arrow[rr, shift left, "h"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & (Y,\eta) \arrow[ll, shift left, "h^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Otro tipo de categorías en las que también coinciden identificaciones y cocientes son las *transportables*.

$\underline{K}$.6.14 **Definición.** Una categoría concreta $\underline{K}$ es **transportable** si para todo $\underline{K}$-objeto $(X,\xi)$ y cualquier biyección $f: X \to Y$ existe un única $\underline{K}$-estructura $\eta \in \underline{K}[Y]$ tal que $f:(X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.

*Ejercicio $t_3$3.* Demuestre que si $\underline{K}$ es transportable:

$a$) con las inclusiones quedan agotadas las $\underline{K}$-inmersiones.

$b$) con las aplicaciones canónicas quedan agotados los $\underline{K}$-cocientes.

$\underline{K}$.6.15 $\mathfrak{Pos}$ es ejemplo de una categoría que, aunque no es cohereditaria, sí es transportable.

En efecto, si $(X,\xi)$ es un copo y $f: X \to Y$ es una función biyectiva, entonces

$$\eta = \{(y_1,y_2) \in Y \times Y : \text{existe } (x_1,x_2) \in \xi \text{ tal que } y_1 = f(x_1) \text{ y } y_2 = f(x_2)\} \in \mathfrak{Pos}[Y]$$

ya que: ($i$) Debido a la biyectividad de $f$, para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, lo que hace de $\eta$ una relación reflexiva.

($ii$) Si $(y_1,y_2) \in \eta$ y $(y_2,y_3) \in \eta$, entonces existen $(x_1,x_2) \in \xi$ y $(x_2,x_3) \in \xi$ tales que $y_i = f(x_i)$ . $i = 1,2,3$. Pero entonces, $(x_1,x_3) \in \xi$ y por lo tanto, $(y_1,y_3) \in \eta$.

($iii$) Si $(y_1,y_2) \in \eta$ y $(y_2,y_1) \in \eta$, entonces existe $(x_1,x_2) \in \xi$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Pero entonces también $(x_2,x_1) \in \xi$, y $x_1 = x_2$; por lo tanto, $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.

Entonces, $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es claramente monótona; y si $(y_1,y_2)$ es cualquier miembro de $\eta$, entonces, debido a la biyectividad de $f$ y a la definición de $\eta$, tenemos que las únicas preimágenes $x_1,x_2$ de $y_1$ y $y_2$ son tales que $(x_1,x_2)\in\xi$. Luego, es válida la implicación

$$(y_1,y_2)\in\eta\Rightarrow\left(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2)\right)\in\xi$$

por lo que también $f^{-1}:(Y,\eta)\to(X,\xi)$ es monótona. Por lo tanto, $f$ es un isomorfismo.

Y si $\eta'$ es otro orden parcial para $Y$ que hace de $f$ un isomorfismo, entonces, por la ~~transitividad de la relación de isomorfía,~~ también

$$1_Y:(Y,\eta)\to(Y,\eta')$$

es un isomorfismo, lo cual implica que

$$(y_1,y_2)\in\eta\Leftrightarrow(y_1,y_2)\in\eta'$$

O sea que $\eta=\eta'$, como se quería demostrar.

Como consecuencia de esto y del ejercicio anterior tenemos que en $\mathfrak{Pos}$ con las inclusiones de los subcopos quedan agotadas todas las $\mathfrak{Pos}$-inmersiones y con las aplicaciones canónicas de los copos de identificación quedan agotados todos los $\mathfrak{Pos}$-cocientes.

*Ejercicio $t_34$.* ¿Es cierto que $\mathfrak{Sgr}$ es transportable? Justifique su respuesta.

$\underline{K}$.6.16 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sean, $(X,\xi)\in\underline{K}$ y $\sim$ una congruencia en $(X,\xi)$, cualesquiera. Entonces $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$ si, y sólo si, $\widetilde{\xi}$ es la más fina de todas las $\underline{K}$-estructuras para $X\ /\sim$ que hacen de la aplicación canónica $p$ un $\underline{K}$-morfismo.

*Demostración.* Ya sabemos que siendo $\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)$ un $\underline{K}$-objeto de identificación de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$, $\widetilde{\xi}$ es la $\underline{K}$-estructura final para $X\ /\sim$ respecto a $p$ y $\xi$, y por lo tanto, es la más fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X\ /\sim$ que hacen de $p$ un $\underline{K}$-morfismo.

Recíprocamente, supongamos que $\widetilde{\xi}$ es la más fina de las $\underline{K}$-estructuras para $X\ /\sim$ que hacen de $p$ un $\underline{K}$-morfismo. Como $\sim$ es una congruencia, existe un $\underline{K}$-objeto de identificación, $\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)$, de $(X,\xi)$ correspondiente a $\sim$. Entonces, $\left(p,\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)\right)$ es un $\underline{K}$-sumidero final por lo que, en particular,

$$p:(X,\xi)\to\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $\widetilde{\xi}\leq\widehat{\xi}$, $\left(i.e.\ 1^{-1}_{X/\sim}\in\underline{K}\left(\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right),\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)\right)$.

Por otro lado tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& (X,\xi) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right) \arrow[rr, "1_{X/\sim}"'] & & \left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)
\end{tikzcd}$$

del cual resulta que

$$1_{X/\sim}\in\underline{K}\left(\left(X\ /\sim,\widehat{\xi}\right),\left(X\ /\sim,\widetilde{\xi}\right)\right)$$

Por lo tanto, $\left(X \;/\sim, \widehat{\xi}\right) \cong \left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)$; o sea que también

$$\left(1_{X\;/\sim}, p, \left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)\right)$$

es un $\underline{K}$-sumidero final. En consecuencia, también $\left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)$ es un $\underline{K}$-objeto de identificación de $(X, \xi)$ correspondiente a $\sim$, que es a lo que se quería llegar. $_{[\checkmark]}$

$\underline{K}$.6.17 **Corolario.** Si $\underline{K}$ es transportable, entonces toda congruencia $\sim$ determina de manera única al objeto de identificación correspondiente.

*Demostración.* Sea $\sim$ una congruencia para $(X, \xi)$ y sea $\left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)$ un $\underline{K}$-objeto de identificación de $(X, \xi)$ correspondiente a $\sim$. Debido a la transportabilidad de $\underline{K}$, existe una única $\underline{K}$-estructura para $X \;/\sim$ que hace de la biyección $1_{X\;/\sim}$ un $\underline{K}$-isomorfismo; y como

$$1_{X\;/\sim} : \left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right) \to \left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces tal $\underline{K}$-estructura es precisamente $\widetilde{\xi}$ y, por lo tanto, $\left(X \;/\sim, \widetilde{\xi}\right)$ está unívocamente determinado. $_{[\checkmark]}$

Según hemos visto en ejemplos como $\mathfrak{Sgr}$ o $\mathfrak{Pos}$, no toda relación de equivalencia en un objeto conduce necesariamente a la formación de objetos de identificación. Sin embargo, suele ser frecuente que las relaciones de equivalencia inducidas por los morfismos en una categoría resulten congruencias. Distinguiremos tales tipos de relaciones con un nombre especial.

$\underline{K}$.6.18 **Definiciones.** (*a*) Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria. **El núcleo de** $f$ es la relación de equivalencia en $X$ definida por

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

(*b*) Diremos que una categoría concreta **tiene núcleos** si el núcleo de cualquiera de sus morfismos es una congruencia.

$\underline{K}$.6.19 *Ejemplos:* 1. Toda categoría concreta que sea cohereditaria tiene núcleos.

2. $\mathfrak{Sgr}$ tiene núcleos.

En efecto, sea $f \in \mathfrak{Sgr}\left((X, \cdot), (Y, \circ)\right)$ y denotemos al núcleo de $f$ mediante $\sim_f$; entonces, dados cualesquiera $x, x', y, y' \in X$ tales que

$$x \sim_f x' \quad \text{y} \quad y \sim_f y'$$

tenemos

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y) = f(x') \circ f(y') = f(x' \cdot y')$$

o sea que también $x \cdot y \sim_f x' \cdot y'$. Por lo visto en la proposición $\underline{K}$.6.12, esto significa que $\sim_f$ es una congruencia, que es lo que había que probar.

Otro ejemplo de una categoría concreta que sin ser cohereditaria tiene núcleos es $\mathfrak{Pos}$.

*Ejercicio $t_3 5$.* Demuestre que $\mathfrak{Pos}$ tiene núcleos.

$\underline{K}$.6.20 Los morfismos en una categoría concreta con núcleos siempre pueden factorizarse por $\underline{K}$-identificaciones y $\underline{K}$-morfismos inyectivos como se indica a continuación.

1$^{\text{ER}}$ TEOREMA DE FACTORIZACIÓN.

Si $\underline{K}$ es una categoría concreta con núcleos, entonces todo $\underline{K}$-morfismo $f$ se puede factorizar como $f = f'p$, donde $p$ es una $\underline{K}$-identificación y $f'$ un $\underline{K}$-morfismo inyectivo.

*Demostración*. Sea $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario y sean, $\sim_f$ el núcleo de $f$ y $\widetilde{\xi}$ una $\underline{K}$-estructura para $X / \sim_f$ que hace de la aplicación canónica $p$ una $\underline{K}$-identidicación. Es claro que si hacemos

$$\begin{array}{ccc} X / \sim_f & \xrightarrow{f'} & Y \\ [x] & \mapsto & f(x) \end{array}$$

obtenemos una función inyectiva bien definida. Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, \xi) & \xrightarrow{f} & (Y, \eta) \\ p \searrow & \circlearrowleft & \nearrow f' \\ & \left(X / \sim_f, \widetilde{\xi}\right) & \end{array}$$

del cual resulta (debido a la finalidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a $p$ y $\xi$) que

$$f' \in \underline{K}\left(\left(X / \sim_f, \widetilde{\xi}\right), (Y, \eta)\right)$$

con lo que el teorema queda demostrado. [✓]

Otro teorema de factorización (casi dual a éste) es válido cuando las imágenes de todos los morfismos de una categoría concreta dan lugar a subobjetos en los codominios correspondientes.

$\underline{K}$.6.21 **Definición.** Diremos que una categoría concreta **tiene imágenes** si para todo morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$, el conjunto $f(X)$ puede estructurarse como subobjeto de $(Y, \eta)$.

$\underline{K}$.6.22 *Ejemplos:* 1. Toda categoría concreta que sea hereditaria tiene imágenes.

2. $\mathfrak{Mon}$ tiene imágenes.

En efecto, recordemos que los subobjetos de un monoide se caracterizan por contener al elemento neutro y ser cerrados bajo la operación del monoide. Sea $f : (X, (e, \cdot)) \to (Y, (\mathsf{e}, \circ))$ un homomorfismo entre monoides y sean $y_1, y_2 \in f(X)$; entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Luego,

$$y_1 \circ y_2 = f(x_1) \circ f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \in f(X)$$

Por otra parte, la definición de homomorfismo entre monoides exige explícitamente la preservación del elemento neutro; en consecuencia

$$\mathsf{e} = f(e) \in f(X)$$

3. $\mathfrak{Topc}_2$ tiene imágenes.

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un $\mathfrak{Topc}_2$-morfismo; entonces $f$ es continua y $(X, \tau)$ compacto. Se sabe que las imágenes continuas de compactos son compactas; como además $(Y, \sigma)$ es de Hausdorff y los subconjuntos compactos en un espacio de Hausdorff son cerrados, entonces $f(X)$ es cerrado en $(Y, \sigma)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{Topc}_2$-subobjeto de $(Y, \sigma)$.

$\underline{K}$.6.23 2º TEOREMA DE FACTORIZACIÓN.

Sea $\underline{K}$ una categoría concreta con imágenes; entonces, todo $\underline{K}$-morfismo $f$ se puede factorizar en la forma $f = \iota\bar{f}$, donde $\bar{f}$ es un $\underline{K}$-morfismo suprayectivo e $\iota$ es un $\underline{K}$-morfismo inclusivo de un subobjeto del codominio de $f$.

*Demostración*. Sea $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario y sea $\theta \in \underline{K}[f(X)]$ tal que $(f(X), \theta)$ es subobjeto de $(Y,\eta)$. Es claro que la restricción

$$f\,|^{f(X)} : X \to f(X)$$

es una función suprayectiva. Además, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X,\xi) & \xrightarrow{f} & (Y,\eta) \\ f\,|^{f(X)}\searrow & \circlearrowleft & \nearrow\iota \\ & (f(X),\theta) & \end{array}$$

del cual resulta (debido a la inicialidad de $\theta$ con respecto a $\iota$ y $\eta$) que

$$f\,|^{f(X)} \in \underline{K}((X,\xi),(f(X),\theta))$$

con lo que el teorema queda demostrado. [✓]

Como consecuencia de los teoremas de factorización tenemos el siguiente resultado

$\underline{K}$.6.24 TEOREMA. En toda categoría concreta $\underline{K}$ con núcleos e imágenes, todo $\underline{K}$-morfismo $f$ puede factorizarse como $f = \iota\check{f}p$, donde $p$ es una $\underline{K}$-identidicación, $\check{f}$ es un $\underline{K}$-morfismo biyectivo e $\iota$ la inclusión de algún subobjeto del codominio de $f$.

*Demostración*. Sea $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo arbitrario. Aplicando el 1er teorema de factorización sabemos que tiene lugar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X,\xi) & \xrightarrow{f} & (Y,\eta) \\ p\searrow & \circlearrowleft & \nearrow f' \\ & \left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) & \end{array}$$

en donde

$$\begin{array}{ccc} \left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) & \xrightarrow{f'} & (Y,\eta) \\ {[x]} & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es un $\underline{K}$-morfismo inyectivo. Si restringimos el codominio de la función $f'$ a $f(X)$ obtenemos la función biyectiva

$$\begin{array}{ccc} X/\sim_f & \xrightarrow{(f')\,|^{f(X)}} & f(X) \\ {[x]} & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Hagamos $\check{f} = (f')\,|^{f(X)}$; tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X,\xi) & \xrightarrow{f} & (Y,\eta) \\ p\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow\iota \\ \left(X/\sim_f,\widetilde{\xi}\right) & \xrightarrow{\check{f}} & (f(X),\theta) \end{array}$$

del cual resulta (por la finalidad de $\widetilde{\xi}$ o por la inicialidad de $\theta$) que

$$\check{f} \in \underline{K}\left(\left(X / \sim_f, \widetilde{\xi}\right), (f(X), \theta)\right)$$

con lo que el teorema queda demostrado. [✓]

## 4.3 Objetos Libres

$\underline{K}$.7.1 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Diremos que un $\underline{K}$-objeto $(X,\xi)$ es **libre sobre un conjunto** $M \subseteq X$ si para todo $\underline{K}$-objeto $(Y,\eta)$ y cualquier función $f_0 : M \to Y$ existe un único $\underline{K}$-morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ que extiende a $f_0$ (o sea que $f(m) = f_0(m), \forall m \in M$).

$\underline{K}$.7.2 *Ejemplos.* 1. En $\mathfrak{Mon}$, el monoide aditivo de números naturales $(\mathbf{N},(+,0))$ es libre sobre $\{1\}$.

En efecto, si $(Y,(\cdot,e)) \in \mathfrak{Mon}$ y $f_0 : \{1\} \to Y$ es cualquier función, sea $y_0 = f_0(1)$. Entonces, la única extensión de $f_0$ a un homomorfismo de monoides

$$f : (\mathbf{N},(+,0)) \to (Y,(\cdot,e))$$

es

$$\begin{aligned} f(0) &= e \\ f(1) &= y_0 \\ f(2) &= f(1+1) = f(1)\cdot f(1) = y_0 \cdot y_0 \\ f(3) &= f(1+1+1) = f(1)\cdot f(1)\cdot f(1) = y_0\cdot y_0\cdot y_0 \quad \text{etcétera} \end{aligned}$$

2. En $\mathfrak{Mon}$ otro ejemplo viene a ser **el monoide de palabras** operado mediante *concatenación de palabras*; veamos en qué consiste.

Sea $\Sigma$ un conjunto arbitrario (que llamaremos **alfabeto** y a cuyos elementos llamaremos **letras**) y sea $\Sigma^*$ el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $\Sigma$ (a cuyos elementos llamaremos **palabras**). Los elementos de $\Sigma^*$ son: $\emptyset$, **la palabra vacía**; $\sigma_1$, las palabras de una sola letra $(\forall\sigma_1 \in \Sigma)$; $\sigma_1\sigma_2$, las palabras con dos letras $(\forall\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma)$; etcétera. Ahora definimos la **concatenación de palabras**

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

como

$$\sigma_1\sigma_2...\sigma_m \cdot \tau_1\tau_2...\tau_n = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m\tau_1\tau_2...\tau_n$$

para cualesquiera $\sigma_1\sigma_2...\sigma_m, \tau_1\tau_2...\tau_n \in \Sigma^*$. Obsérvese que

$$\emptyset \cdot \sigma_1\sigma_2...\sigma_m = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m \cdot \emptyset \ ;$$

además $\cdot$ es una operación (binaria) claramente asociativa. Por lo tanto, $(\Sigma^*,(\cdot,\emptyset)) \in \mathfrak{Mon}$. Este monoide es libre sobre $\Sigma$.

En efecto, si $(Y,(\circ,e)) \in \mathfrak{Mon}$ y $f_0 : \Sigma \to Y$ es cualquier función, entonces la única extensión de $f_0$ a un homomorfismo

$$f : (\Sigma^*, (\cdot, \varnothing)) \to (Y, (\circ, e))$$

es

$$\begin{aligned} f(\varnothing) &= e \\ f(\sigma_1) &= f_0(\sigma_1), \forall \sigma_1 \in \Sigma \\ f(\sigma_1\sigma_2) &= f(\sigma_1) \circ f(\sigma_2), \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma \\ f(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) &= f(\sigma_1) \circ f(\sigma_2) \circ f(\sigma_3), \forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Sigma \qquad \text{etcétera} \end{aligned}$$

Obsérvese, en consecuencia, que para todo número cardinal existe un conjunto $\Sigma$ (con esa cardinalidad) sobre el cual es libre su monoide de palabras.

3. En $\mathfrak{Met}$, el espacio métrico singular $(\{x\}, d_0)$ es libre sobre $\{x\}$.

En efecto, si $(X,d) \in \mathfrak{Met}$ y $f_0 : \{x\} \to X$ es cualquier función, entonces

$$f_0 \in \mathfrak{Met}((\{x\}, d_0), (X, d))$$

*Ejercicio* $t_3 6$. Demuestre que en $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$ todo espacio vectorial es libre sobre cualquiera de sus bases.

En lo sucesivo haremos uso frecuente del sencillo resultado que viene a continuación.

$\underline{K}$.7.3 **Lema.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y supongamos que uno de sus $\underline{K}$-objetos, $(X,\xi)$, es libre sobre un conjunto $M \subseteq X$. Si dos $\underline{K}$-morfismos cualesquiera

$$h, k : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

son tales que

$$h(m) = k(m), \forall m \in M$$

entonces $h = k$.

*Demostración*. Sea $f_0 : M \to Y$ tal que $f_0(m) = h(m) = k(m), \forall m \in M$. Entonces $h$ y $k$ son $\underline{K}$-extensiones de $f_0$; de ahí que sea $h = k$. [✓]

$\underline{K}$.7.4 **Definición.** Cuando un $\underline{K}$-objeto $(X,\xi)$ sea libre sobre un conjunto $M \subseteq X$, nos referiremos a $M$ como a **un conjunto de generadores libres**. También diremos que $(X,\xi)$ **es un objeto libre con** $n$ **generadores**, si $\#(M) = n$.

Recordemos que en $\underline{K}$.5.13 definimos un conjunto de generadores de un $\underline{K}$-objeto $(X,\xi)$. Enseguida probaremos que esta definición no es inconsistente con aquélla.

$\underline{K}$.7.5 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta y sea $(X,\xi)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario. Si $(X,\xi)$ es libre sobre $M \subseteq X$, entonces $M$ es un conjunto de generadores de $(X,\xi)$.

*Demostración.* Hay que probar que el más chico de los subobjetos de $(X,\xi)$ que contienen a $M$ es $(X,\xi)$. Supongamos que $(Y,\eta)$ es un subobjeto de $(X,\xi)$ tal que $M \subseteq Y$. Consideremos las funciones inclusivas

$$\upsilon : M \hookrightarrow X \quad \vartheta : M \hookrightarrow Y \quad \iota : Y \hookrightarrow X$$

Es claro que

$$\iota\vartheta = \upsilon$$

Como $(X,\xi)$ es libre sobre $M$, la función $\vartheta$ se extiende a un $\underline{K}$-morfismo

$$\overline{\vartheta} : (X,\xi) \to (Y,\eta) \ ;$$

componiendo $\overline{\vartheta}$ con el $\underline{K}$-morfismo inclusivo $\iota : (Y,\eta) \hookrightarrow (X,\xi)$ obtenemos un $\underline{K}$-morfismo

$$\iota\overline{\vartheta} : (X,\xi) \to (X,\xi)$$

que evaluado en $M$ coincide con $1_X$. En efecto, para cualquier $m \in M$ tenemos

$$\iota\overline{\vartheta}(m) = \iota(\vartheta(m)) = v(m) = m$$

Entonces, debido al lema, $\iota\overline{\vartheta} = 1_X$. En consecuencia

$$x = \iota\left(\overline{\vartheta}(x)\right) \in Y, \forall x \in X$$

Por lo tanto, $Y = X$, que es a lo que se quería llegar. [✓]

En el ejemplo 1 anterior vimos que $(\mathbb{N},(+,0))$ es un monoide libre sobre $\{1\}$. Como consecuencia del ejemplo 2, el monoide de palabras

$$(\{|\}^*,(\cdot,\emptyset))$$

es un $\mathfrak{Mon}$-objeto libre sobre $\{|\}$. Obsérvese que los elementos de este monoide son los mismos naturales (pero disfrazados de palitos):

$$\varnothing, |, ||, |||, \ldots, \underbrace{||| \ldots |}_{n \text{ veces}} = |^{[n]}, \ldots$$

Por lo tanto, es claro que se obtiene un $\mathfrak{Mon}$-isomorfismo

$$f : (\mathbb{N},(+,0)) \to (\{|\}^*,(\cdot,\varnothing))$$

haciendo

$$f(0) = \varnothing,\ f(1) = \ | \ ,\ f(2) = \ || \ ,\ f(3) = \ ||| \ , \ldots,\ f(n) = \ |^{[n]}, \ldots$$

Como veremos enseguida, esto no es una casualidad.

$\underline{K}$.7.6 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sean $A = (X,\xi)$ y $A' = (X',\xi')$ dos $\underline{K}$-objetos arbitrarios.

(1) Si $A$ y $A'$ son $\underline{K}$-objetos libres sobre conjuntos biyectables, entonces $A$ y $A'$ son $\underline{K}$-isomorfos.

(2) Si $A$ es libre sobre un conjunto $M$ y $A'$ es isomorfo a $A$, entonces $A'$ es libre sobre un conjunto $M'$ biyectable con $M$.

*Demostración.* (1) Supongamos que $A$ es libre sobre $M$, que $A'$ es libre sobre $M'$, y que $f_0 : M \to M'$ es una función biyectiva; consideremos las inclusiones

$$\iota : M \hookrightarrow X \quad \text{y} \quad \iota' : M' \hookrightarrow X'$$

Entonces, para las composiciones

$$\iota' f_0 : M \to X' \quad \text{y} \quad \iota f_0^{-1} : M' \to X$$

existen sendas $\underline{K}$-extensiones

$$f : (X, \xi) \to (X', \xi') \quad \text{y} \quad f' : (X', \xi') \to (X, \xi)$$

Desde luego, esperamos que tales extensiones den el $\underline{K}$-isomorfismo buscado; como ambas son $\underline{K}$-morfismos, basta probar que una es inversa de la otra. Para ello evaluemos, por ejemplo, la composición $f'f$ en los elementos de $M$:

$$f'f(m) = f'\iota' f_0(m) = f' f_0(m) = \iota f_0^{-1} f_0(m) = \iota(m) = m, \forall m \in M$$

Por el lema, esto implica que $f'f = 1_X$. Análogamente se demuestra que $ff' = 1_{X'}$. Por lo tanto, $f' = f^{-1}$y $f$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.

(2) Sea $g : (X, \xi) \to (X', \xi')$ un $\underline{K}$-isomorfismo y supongamos que $(X, \xi)$ es libre sobre $M \subseteq X$. Dado que $g$ es una función biyectiva, la restricción

$$g\,|_M^{g(M)} : M \to g(M)$$

es una función biyectiva. Probaremos que $(X', \xi')$ es libre sobre $g(M)$. Sean, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f_0 : g(M) \to Y$ una función cualquiera. Entonces

$$f_0 g\,|_M^{g(M)} : M \to Y$$

tiene una $\underline{K}$-extensión

$$\widehat{f} : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

que compuesta con el $\underline{K}$-morfismo inverso a $g$ produce la $\underline{K}$-extensión buscada

$$f = \widehat{f} g^{-1} : (X', \xi') \to (Y, \eta)$$

En efecto, para cada $m' \in g(M)$ tenemos que $g^{-1}(m') \in M$, de modo que

$$f(m') = \widehat{f} g^{-1}(m') = \widehat{f}\left(g^{-1}(m')\right) = f_0 g\,|_M^{g(M)}\left(g^{-1}(m')\right) = f_0(m') \ ;$$

y si $f' : (X', \xi') \to (Y, \eta)$ es otra extensión de $f_0$, entonces los morfismos

$$fg : (X, \xi) \to (Y, \eta) \quad \text{y} \quad f'g : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

son tales que

$$fg(m) = f(g(m)) = f_0(g(m)) = f'(g(m)) = f'g(m), \forall m \in M$$

Por el lema, esto implica que $fg = f'g$; luego,

$$f = f\left(gg^{-1}\right) = (fg)\, g^{-1} = (f'g)\, g^{-1} = f'\left(gg^{-1}\right) = f'$$

o sea que la extensión $f$ es única.$_{[\checkmark]}$.

En el comentario anterior a $\underline{K}$.3.18 mencionamos que es posible dar condiciones adecuadas sobre una categoría concreta a fin de garantizar en ella la coincidencia entre los morfismos inyectivos y los monomorfismos. Ya estamos en condiciones de formalizar a ese resultado.

$\underline{K}$.7.7 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta con al menos un objeto libre con un solo generador. Entonces, un $\underline{K}$-morfismo es monomorfismo si, y sólo si, es un morfismo inyectivo.

*Demostración.* Ya sabemos que en toda categoría concreta todo morfismo inyectivo es un monomorfismo, por lo que, del enunciado, sólo hay que probar la implicación de izquierda a derecha. Supongamos entonces que

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un monomorfismo arbitrario. Sean $x_1, x_2 \in X$ cualesquiera y sea $(W, \omega)$ un $\underline{K}$-objeto libre sobre $\{w_0\} \subseteq W$; definimos

$$\begin{array}{rccc} h_0 : & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} k_0 : & \{w_0\} & \to & X \\ & w_0 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Entonces, existen sendas $\underline{K}$-extensiones únicas

$$h : (W, \omega) \to (X, \xi) \quad \text{y} \quad k : (W, \omega) \to (X, \xi) \ ;$$

y si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$fh(w_0) = f(h_0(w_0)) = f(x_1) = f(x_2) = f(k_0(w_0)) = fk(w_0) \ ;$$

aplicando el lema, tenemos que $fh = fk$, y como $f$ es monomorfismo, entonces $h = k$. O sea que $x_1 = x_2$; por lo tanto, $f$ es un $\underline{K}$-morfismo inyectivo. $_{[\checkmark]}$

*Ejercicio* $t_3$ 7. Demuestre que en cada una de las categorías concretas enlistadas a continuación el objeto que se describe es libre sobre $\{x\}$.

($i$) En $\mathfrak{Top}$, el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\{x\}$.

($ii$) En $\mathfrak{Gra}$, la digráfica $(\{x\}, \varnothing)$.

($iii$) En $\mathfrak{Rng}$, el anillo de polinomios $P[x]$ con coeficientes enteros en la indeterminada $x$.

($iv$) En $\mathfrak{Grp}$, el grupo aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, 0))$, [haciendo $x = 1$].

($v$) En $\mathfrak{Lat}$, la retícula cuyo conjunto subyacente es $\{x\}$.

Por el ejercicio y la proposición anteriores, $\mathfrak{Top}$, $\mathfrak{Gra}$, $\mathfrak{Rng}$, $\mathfrak{Grp}$ y $\mathfrak{Lat}$ son ejemplos de categorías concretas en las que los monomorfismos coinciden con los morfismos inyectivos. También tienen esta cualidad $\mathfrak{Mon}$,$\mathfrak{Met}$ y $\mathfrak{Vec}_{\mathbf{R}}$ como se deduce de la proposición anterior, de los ejemplos 1 y 3 y del ejercicio 6. Otro ejemplo en esta situación es $\mathfrak{Clat}$, la categoría de *retículas completas y homomorfismos reticulares completos* que definiremos enseguida.

$\underline{K}$.7.8 **Definiciones:** ($i$) Sea $(X, \leq)$ un copo arbitrario y sea $A$ cualquier subconjunto de $X$; entonces:

$$(1) \begin{cases} c \in X \text{ es una } \textbf{cota superior de } A \text{ en } X \text{ si } a \leq c, \forall a \in A; \\ d \in X \text{ es una } \textbf{cota inferior de } A \text{ en } X \text{ si } d \leq a, \forall a \in A. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x \in X \text{ es } \textbf{supremo de } A \text{ en } X \text{ si} \begin{cases} s_1)\ x \text{ es cota superior de } A \text{ en } X \\ s_2)\ x \le c, \text{ para toda cota superior } c \text{ de } A \text{ en } X \end{cases} \\ x \in X \text{ es } \textbf{ínfimo de } A \text{ en } X \text{ si} \begin{cases} i_1)\ x \text{ es cota inferior de } A \text{ en } X \\ i_2)\ d \le x, \text{ para toda cota inferior } d \text{ de } A \text{ en } X \end{cases} \end{cases}$$

**Observaciones y notas:** ($a$) En el caso particular en que $A$ es vacío, todo $x \in X$ es tanto cota superior como cota inferior de $A$, ya que en tal caso $a \in A \Rightarrow a \le x \le a, \forall x \in X$.

($b$) Por la condición de antisimetría en un copo, cuando $A$ posee supremo e ínfimo, éstos son únicos. Emplearemos la notación $\sup A$ para el supremo, e $\inf A$ para el ínfimo.

($c$) Si además el copo es una retícula, entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\sup\{x_1, x_2\} = x_1 \vee x_2 \quad \text{e} \quad \inf\{x_1, x_2\} = x_1 \wedge x_2$$

($ii$) Se dice que una retícula $(X, \le)$ es una **retícula completa** cuando todo subconjunto de $X$ posee ínfimo y supremo en $X$.

En una retícula completa los elementos $\sup \varnothing$ e $\inf \varnothing$ reciben los nombres de cero y uno, respectivamente; (0 es el primer elemento de $X$, según $\le$, y 1 el último)[5].

*Ejemplo de retícula completa:* Para cualquier conjunto $X$ consideremos su conjunto potencia $\mathtt{Pot}(X)$. Claro es que $(\mathtt{Pot}(X), \subseteq)$ es un copo. Y si $A$ es un subconjunto arbitrario de elementos de $\mathtt{Pot}(X)$, entonces $A$ es una familia $(X_i)_I$ de subconjuntos de $X$; luego

$$\sup A = \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{e} \quad \inf A = \bigcap_{i \in I} X_i$$

Por lo tanto, $(\mathtt{Pot}(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

Así, $\mathfrak{Clat}[X]$ es la familia de órdenes parciales que hacen de $X$ una retícula completa; y si $A = (X, \le)$ y $B = (Y, \le)$ son dos $\mathfrak{Clat}$-objetos cualesquiera, definimos

$$\mathfrak{Clat}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : f(\sup U) = \sup f(U) \text{ y } f(\inf U) = \inf f(U), \forall U \subseteq X \right\}$$

cuyos miembros son los **homomorfismos reticulares completos**.

La retícula completa de tres elementos

$$(\{0, x, 1\}, \le), \text{ con } 0 \le x \le 1$$

es libre sobre $\{x\}$ porque si $(Y, \le) \in \mathfrak{Clat}$ y $f_0 : \{x\} \to Y$ es cualquier función, entonces

$$f : (\{0, x, 1\}, \le) \to (Y, \le)$$

definida por

$$f(0) = 0 \ , \ f(x) = f_0(x) \ , \ f(1) = 1$$

es una $\mathfrak{Clat}$-extensión de $f_0$, como se comprueba fácilmente.

*Ejercicio $t_3 8$.* Sea $X$ un conjunto arbitrario y denotemos mediante $Eq(X)$ al conjunto de relaciones de equivalencia en $X$. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in Eq(X)$ definimos

$$\alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

[5] I.e. $0 = \inf X$ y $1 = \sup X$.

(*a*) Demuestre que $(Eq(X), \leq)$ es una retícula completa y describa sus elementos cero y uno.

*Def.* En cualquier categoría concreta diremos que un objeto $B$ **puede encajarse** en un objeto $A$ si $B$ es isomorfo a un subobjeto de $A$.

(*b*) Pruebe que si $\preceq$ es un orden parcial en $X$, entonces el copo $(X, \preceq)$ puede encajarse en $(Eq(X), \leq)$.

$\underline{K}$.7.9 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ **tiene objetos libres** si tiene objetos libres sobre conjuntos de toda cardinalidad.

$\underline{K}$.7.10 *Ejemplos.* 1. Según vimos en el ejemplo 2 anterior, el monoide de palabras $(\Sigma^{*}, (\cdot, \emptyset))$ es libre sobre $\Sigma$, para todo $\Sigma \in \mathfrak{Set}$. Por lo tanto, $\mathfrak{Mon}$ tiene objetos libres.

2. $\mathfrak{Top}$ tiene objetos libres porque el espacio discreto $(X, \tau_d)$ es libre sobre $X$, para todo $X \in \mathfrak{Set}$. En efecto, si $(Y, \sigma) \in \mathfrak{Top}$ y $f_0 : X \to Y$ es cualquier función, entonces

$$f_0 \in \mathfrak{Top}((X, \tau_d), (Y, \sigma))$$

3. $\mathfrak{Pos}$ tiene objetos libres porque el copo discreto $(X, \leq)$ [i.e. $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$] es libre sobre $X$, para todo $X \in \mathfrak{Set}$. En efecto, si $(Y, \preceq) \in \mathfrak{Pos}$ y $f_0 : X \to Y$ es cualquier función, entonces

$$f_0 \in \mathfrak{Pos}((X, \leq), (Y, \preceq))$$

Los dos últimos ejemplos son casos particulares de una situación más general que explicaremos enseguida.

$\underline{K}$.7.11 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta y sea $X$ un conjunto arbitrario. Diremos que una $\underline{K}$-estructura $\xi \in \underline{K}[X]$ es **discreta** si para cualesquiera $Y \in \mathfrak{Set}$ y $f \in Y^X$ se tiene

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)), \ \forall \eta \in \underline{K}[Y]$$

En tal caso hablaremos de $(X, \xi)$ como de un **$\underline{K}$-objeto discreto.**

$\underline{K}$.7.12 **Proposición.** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $(X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto, arbitrarios. Son equivalentes:

(*a*) $(X, \xi)$ es discreto.

(*b*) $(X, \xi)$ es libre sobre $X$.

Demostración. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Sean, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f_0 : X \to Y$ una función, cualesquiera. Debido a la discresión de $(X, \xi)$,

$$f_0 \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$$

O sea que $f_0$ es la única $\underline{K}$-extensión de sí misma (la unicidad es obvia). Por lo tanto, $(X, \xi)$ es libre sobre $X$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) Sean, $Y \in \mathfrak{Set}$, $f \in Y^X$ y $\eta \in \underline{K}[Y]$, cualesquiera. Entonces, $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y, por (*b*), $f$ puede extenderse a un $\underline{K}$-morfismo que no tiene más remedio que ser la propia $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. Por lo tanto, $(X, \xi)$ es discreto. [✓]

$\underline{K}$.7.13 $\mathfrak{Met}$ es un ejemplo de categoría concreta sin objetos libres. En efecto, sean $(X, d) \in \mathfrak{Met}$ y $M \subseteq X$ con $\#(M) > 1$. Si consideramos el espacio métrico $(X, 2d)$, entonces para la inclusión

$$\iota : M \hookrightarrow X$$

no existe una extensión

$$f:(X,d)\to(X,2d)$$

que sea contracción, ya que para $m_1,m_2\in M$, $m_1\neq m_2$, debería suceder

$$2d\left(f\left(m_1\right),f\left(m_2\right)\right)=2d\left(m_1,m_2\right)\leq d\left(m_1,m_2\right)$$

lo cual es absurdo.

$\underline{K}$.7.14 **Definición.** Sea $\mathfrak{K}$ cualquier categoría. Un $\mathfrak{K}$-objeto $I$ es **inicial** si para cada $A\in\mathfrak{K}$ el conjunto $\mathfrak{K}(I,A)$ consta de un solo morfismo. Para tal morfismo emplearemos la notación $!_A$.

$\underline{K}$.7.15 **Proposición.** En una categoría concreta $\underline{K}$, todo objeto inicial es libre sobre el conjunto vacío.

*Demostración.* Sea sabe que del vacío en cualquier conjunto $X$ sólo existe una función: *$\phi$, la función vacía.* También se sabe que $\emptyset\subseteq Y$, para todo $Y\in\mathfrak{Set}$. Así, si $A=(X,\xi)\in\underline{K}$, entonces todo morfismo de codominio $A$ es extensión de $\phi$. Por lo tanto, siendo $I$ un $\underline{K}$-objeto inicial, $\phi$ encuentra en $\underline{K}(I,A)$ una extensión única, para todo $\underline{K}$-objeto $A$. De aquí que $I$ sea libre sobre $\emptyset$. [✓]

$\underline{K}$.7.15.1 **Observación.** Como vimos en (1) de la proposición $\underline{K}$.7.6, dos $\underline{K}$-objetos libres sobre conjuntos con la misma cardinalidad son $\underline{K}$-isomorfos. Entonces, a consecuencia de la proposición anterior, en una categoría concreta $\underline{K}$ dos $\underline{K}$-objetos iniciales siempre son $\underline{K}$-isomorfos, pues ambos son libres sobre un conjunto $\emptyset$ con 0 generadores. Este resultado también es válido para categorías arbitrarias, como veremos a continuación.

$\underline{K}$.7.16 **Proposición.** Si $I$ y $J$ son $\mathfrak{K}$-objetos iniciales de una categoría $\mathfrak{K}$ arbiraria, entonces $I\cong J$.

*Demostración.* Consideremos las composiciones

$$I\xrightarrow{!_J}J\xrightarrow{!_I}I\qquad\qquad J\xrightarrow{!_I}I\xrightarrow{!_J}J$$

Debido a la inicialidad de ambos objetos, las identidades respectivas son los únicos morfismos

$$\text{en }\mathfrak{K}(I,I)\quad\text{y}\quad\text{en }\mathfrak{K}(J,J)$$

Luego,

$$!_I!_J=1_I\quad\text{y}\quad !_J!_I=1_J$$

lo cual significa que $!_I$ es un $\mathfrak{K}$-isomorfismo y que $!_J=!_I^{-1}$. [✓]

$\underline{K}$.7.16.1 **Observación.** Nótese que el $\mathfrak{K}$-isomorfismo $!_I$ es el único posible de $J$ en $I$; de aquí que se diga que dos objetos iniciales de una categoría son canónicamente equivalentes.

*Ejemplos.* 1. En $\mathfrak{Set}$ el objeto inicial es el $\emptyset$.

2. En $\mathfrak{Gra}$ el objeto inicial es la digráfica vacía $(\emptyset,\emptyset)$.

3. En $\mathfrak{Top}$ el objeto inicial es el espacio vacío $(\emptyset,\{\emptyset\})$.

4. En $\mathfrak{Mon}$ el objeto inicial es el monoide trivial $(\{e\},(\cdot,e))$.

5. En $\mathfrak{Rng}_u$ el objeto inicial es el anillo de números enteros $(\mathbb{Z},(+,\cdot,1))$.

El coconcepto correspondiente al concepto de objeto inicial se llama objeto final.

$\underline{K}$.7.17 $^{\text{co}}$**Definición.** Sea $\mathfrak{K}$ cualquier categoría. Un $\mathfrak{K}$-objeto $F$ es **final** si para cada $A\in\mathfrak{K}$ el conjunto $\mathfrak{K}(A,F)$ consta de un solo morfismo. Para tal morfismo emplearemos la notación $¿_A$.

*Ejemplos.* En $\mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Pos}$, $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{Met}$ es final el objeto cuyo conjunto subyacente es cualquier singulete $\{x\}$.

Desde luego, es verdadera la coproposición correspondiente a la proposición anterior.

$^{co}$K.7.16 **Proposición.** Si $F$ y $G$ son $\mathfrak{K}$-objetos finales de una categoría $\mathfrak{K}$ arbiraria, entonces $F \cong G$.

K.7.18 **Definición.** Cuando un $\mathfrak{K}$-objeto $Z$ de una categoría $\mathfrak{K}$ arbiraria es simultáneamente inicial y final recibe el nombre de **objeto cero**.

K.7.18.1 **Observaciones.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría con objeto cero; entonces:

1. Todo $\mathfrak{K}$-objeto inicial y todo $\mathfrak{K}$-objeto final es un objeto cero.

2. Para cualesquiera $\mathfrak{K}$-objetos $A$ y $B$ existe un morfismo distinguido $0_{AB} \in \mathfrak{K}(A, B)$. Es, a saber, el que pasa por el objeto cero:

$$0_{AB} : A \xrightarrow{\text{¡}_A} Z \xrightarrow{!_B} B$$

Este morfismo se llama **morfismo cero**; a veces lo denotaremos simplemente como 0.

K.7.19 **Proposición.** Sea $\mathfrak{K}$ una categoría arbitraria con objeto cero. Entonces, cualesquiera que sean los $\mathfrak{K}$-morfismos $f$ y $g$, tenemos

$$0f = 0 \quad \text{y} \quad g0 = 0$$

*Demostración.*[6]

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[drr, "!_{B'}"] & & \\
A' \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "\text{¡}_{A'}"'] & A \arrow[r, "\text{¡}_A"] \arrow[ur, "\text{¡}_A"] & Z \arrow[r, "!_B"] \arrow[u, "1_Z"'] \arrow[d, "1_Z"] & B \arrow[r, "g"] & B' \\
 & & Z \arrow[ur, "!_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

[✓]

[6] *Al buen entendedor*
*...pocos diagramas.*

# Capítulo 5

# Categorías Concretas Topológicas

$\underline{K}$.8.1 **Definiciones.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta.

($a$) Se dice que $\underline{K}$ es **topológica** si para todo conjunto $X$ y cualquier fuente $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ cuyo codominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$, existe una $\underline{K}$-estructura inicial para $X$ con respecto a $\mathcal{F}$.

($b$) Se dice que $\underline{K}$ es **cotopológica** si para todo conjunto $X$ y cualquier sumidero $S = ((f_i)_I, X)$ cuyo dominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i)$, existe una $\underline{K}$-estructura final para $X$ con respecto a $S$.

$\underline{K}$.8.2 **Observaciones.** Cuando $\underline{K}$ satisface alguna de estas definiciones, hacer la consideración de las fuentes y sumideros vacíos, respectivamente, resulta de importancia.

a) Si $\underline{K}$ es cotopológica y $X$ es un conjunto cualquiera, entonces la clase de $\underline{K}$-estructuras $\underline{K}[X]$ está obligada a contener un miembro, $\xi$, que haga del sumidero vacío

$$S = ((f_i)_I, X), \text{ con } I = \emptyset$$

un $\underline{K}$-sumidero final. De acuerdo con la definición de $\underline{K}$-estructura final debemos tener:

(i) $f_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i) \to (X, \xi)), \forall i \in I$.

(ii) Si $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f : X \to Y$ es una función tal que, para toda $i \in I$,

$$ff_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i), (Y, \eta))$$

entonces

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$$

Pero con $I = \varnothing$ siempre es válida la implicación

$$i \in I \Rightarrow ff_i \in \underline{K}((X_i, \xi_i), (Y, \eta))$$

En consecuencia, para cualesquiera $Y \in \mathfrak{Set}$ y $f \in Y^X$ se tiene

$$f \in \underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)), \ \forall \eta \in \underline{K}[Y]$$

lo que significa que $\xi$ es una $\underline{K}$-estructura discreta para $X$.[1]

[1]Cf. definición $\underline{K}$.7.11.

Por consiguiente, en toda categoría concreta cotopológica todo conjunto puede quedar discretamente estructurado.

b) En forma casi análoga: si $\underline{K}$ es topológica y para cualquier conjunto $X \neq \varnothing$ consideramos la fuente vacía

$$F = (X, (f_i)_I), \text{ con } I = \emptyset$$

entonces, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que para cualesquiera $W \in \mathfrak{Set}$ y $f \in X^W$ tengamos

$$f \in \underline{K}((W, \omega), (X, \xi)), \forall \omega \in \underline{K}[W]$$

Esto significa que $\xi$ es una $\underline{K}$**-estructura indiscreta** para $X$ y que $(X, \xi)$ es un $\underline{K}$**-objeto indiscreto**.

Por lo tanto, en toda categoría concreta topológica siempre es posible dotar a cualquier conjunto no vacío de una estructura indiscreta.[2]

$\underline{K}$.8.3 *Ejemplos*. 1. Por el ejercicio $t_1 4$ sabemos que si $F = (X, (f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología débil para $X$ correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura inicial para $X$ con respecto a la fuente $F$. También sabemos, en vista del ejercicio $t_2 3$ que si $S = ((f_i)_I, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la topología fuerte para $X$ correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(f_i)_I$ es una $\mathfrak{Top}$-estructura final para $X$ con respecto al sumidero $S$. Por lo tanto, $\mathfrak{Top}$ es topológica y cotopológica.

2. Sea $\overline{\mathfrak{Set}}$ la concreción de $\mathfrak{Set}$ descrita en $\underline{K}$.1.9.1. Por el ejemplo $\underline{K}$.2.4.2, si

$$F = (f_i : X \to (X_i, X_i))_I$$

es cualquier fuente de codominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces $X$ es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura inicial para $X$ con respecto a $F$. Por el ejemplo $\underline{K}$.4.4.2, si

$$S = (f_i : (X_i, X_i) \to X)_I$$

es un sumidero de dominio en $\overline{\mathfrak{Set}}$, entonces $X$ es una $\overline{\mathfrak{Set}}$-estructura final para $X$ con respecto a $S$. Por lo tanto, también $\overline{\mathfrak{Set}}$ es una categoría concreta que es topológica y cotopológica.

3. En $\underline{K}$.4.4.3 vimos que si $S = \left((X_i, \alpha_i)_I \xrightarrow{f_i} X\right)_I$ es un sumidero cuyo dominio es una familia de gráficas dirigidas $(X_i, \alpha_i)_I$, entonces

$$\alpha = \{(f_i(x), f_i(x')) : (x, x') \in \alpha_i, i \in I\}$$

es una $\mathfrak{Gra}$-estructura para $X$ correspondiente a $S$. Por lo tanto, $\mathfrak{Gra}$ es una categoría concreta cotopológica.

[2] Nótese que entre (a) y (b) la *casi dualidad* de que son susceptibles no es perfecta: el haber cuidado el caso vacío en (b) evitándolo explícitamente, hace una diferencia con (a) que puede parecer irrelevante pero que a la larga mostrará que tiene consecuencias. Ya dijimos en otra ocasión que de la verdad de una proposición "casi dual" hay que procurar cerciorarse porque no siempre resulta cierta. En lo sucesivo, sería bueno tener presente este consejo en lo referente a proposiciones en las que las ideas de discreción o de indiscreción desepeñen algún papel.

$\mathfrak{Gra}$ también es topológica porque si una familia de gráficas dirigidas $(Y_i, \beta_i)_I$ es codominio de una fuente $F = (Y, (f_i)_I)$, entonces

$$\beta = \{(y, y') \in Y \times Y : (f_i(y), f_i(y')) \in \beta_i, \forall i \in I\}$$

es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para $Y$ con respecto a $F$.

En efecto,

(i) Toda flecha $f_i : (Y, \beta) \to (Y_i, \beta_i)$ es compatible a consecuencia de la definición de $\beta$;

(ii) Si $(X, \alpha) \in \mathfrak{Gra}$ y $f : X \to Y$ es una función tal que

$$f_i f \in \mathfrak{Gra}((X, \alpha), (Y_i, \beta_i)), \forall i \in I$$

entonces para cualquier $(x, x') \in \alpha$ tenemos

$$(f(x), f(x')) \in Y \times Y$$

y

$$(f_i(f(x)), f_i(f(x'))) = (f_i f(x), f_i f(x')) \in \beta_i, \forall i \in I$$

o sea que $(f(x), f(x')) \in \beta$, lo cual implica que $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es compatible. [✓]

$\underline{K}$.8.4 En vista de los ejemplos anteriores cabe preguntarnos acerca de la posibilidad de hallar un ejemplo de una categoría concreta que sea topológica pero no cotopológica, o viceversa.

Relacionemos conceptos anteriores con los que ahora nos ocupan. Claramente:

(*i*) Toda categoría concreta topológica es hereditaria.

(*ii*) Toda categoría concreta cotopológica es cohereditaria.

Por lo tanto, todas las categorías concretas que no son hereditarias, como $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{Grp}$ o $R$-$\mathfrak{Mod}$, tampoco son topológicas. Ni son cotopológicas las no cohereditarias, como $\mathfrak{Sgr}$, $\mathfrak{Pos}$ o $\mathfrak{Cat}$.

También es claro que:

(*iii*) Toda categoría concreta topológica tiene intersecciones.

(*iv*) Toda categoría concreta cotopológica tiene núcleos.

En $\underline{K}$.5.11.5 vimos que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones; por lo tanto, la categoría de espacios topológicos compactos y funciones continuas no es topológica (!). También vimos, en $\underline{K}$.5.9, que $\mathfrak{Topc}_2$ no es hereditaria; en consecuencia, la categoría de espacios compactos de Hausdorff y funciones continuas tampoco es topológica (!).

Se podría demostrar que $\mathfrak{Topc}_2$ y $\mathfrak{Topc}$, así como $\mathfrak{Vec}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{Grp}$ y $R$-$\mathfrak{Mod}$, tampoco son cotopológicas; y que no son topológicas $\mathfrak{Sgr}$, $\mathfrak{Pos}$ ni $\mathfrak{Cat}$. O sea que ninguna de estas categorías reune la condición pedida: satisfacer una de las dos definición sin satisfacer la otra.

En realidad, es éste un caso de autodualidad notable que quedará evidenciado luego del par de resultados que vienen a continuación.

$\underline{K}$.8.5 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta cotopológica y sean, $X$ un conjunto, $(A_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i, \xi_i), i \in I$, $F = (f_i : X \to A_i)_I$ una fuente, $\xi$ una

$\underline{K}$-estructura para $X$ y $(\alpha_j)_J$ la familia de las $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hacen de $F$ una $\underline{K}$-fuente. Entonces son equivalentes:

(a) $\xi$ es inicial para $X$ con respecto a $F$.

(b) $\xi$ es final para $X$ con respecto al sumidero de identidades

$$\mathcal{I} = (1_X : (X, \alpha_j) \to X)_J$$

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Consideremos la familia de $\underline{K}$-estructuras $(\alpha_j)_J$ descrita arriba, fijemos cualquier $j \in J$ y hagamos $A_j = (X, \alpha_j)$. Entonces

$$F = \left(A_j \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$$

es una $\underline{K}$-fuente; por lo tanto, para toda $i \in I$, la composición

$$f_i : (X, \alpha_j) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; por la inicialidad de $\xi$, esto implica que

$$1_X \in \underline{K}\left((X, \alpha_j), (X, \xi)\right), \ (j \in J).$$

Observemos, por otra parte, que, debido a la inicialidad de $\xi$,

$$F = \left((X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)\right)_I$$

es una $\underline{K}$-fuente; por lo tanto, $\xi \in (\alpha_j)_J$. Así, si $(Y, \eta) \in \underline{K}$ y $f : X \to Y$ son tales que, para toda $j \in J$, la composición

$$f : (X, \alpha_j) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, entonces lo es en particular

$$f : (X, \xi) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta)$$

es decir

$$f \in \underline{K}\left((X, \xi), (Y, \eta)\right)$$

Esto prueba que $\xi$ es final en $X$ con respecto a $\mathcal{I}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Como para toda $j \in J$ la fuente $F_j = \left((X, \alpha_j) \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$ es una $\underline{K}$-fuente, entonces para toda $i \in I$ la composición

$$f_i : (X, \alpha_j) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Pero $\xi$ es final para $X$ con respecto a $\mathcal{I}$; luego

$$f_i \in \underline{K}\left((X, \xi), (X_i, \xi_i)\right), \forall i \in I. \quad [3]$$

[3] Nótese que hasta esta parte de la demostración no se ha empleado la hipótesis de que $\underline{K}$ sea cotopológica; por lo tanto, lo que hasta aquí llevamos vale para cualquier categoría concreta.

Por otra parte, sean $(W,\omega)$ un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ una función tales que, para toda $i \in I$, la composición

$$f_i g : (W,\omega) \to (X_i,\xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Como $\underline{K}$ es cotopológica, existe la $\underline{K}$-estructura final para $X$ con respecto a $\omega$ y $g$; denotémosla por $\xi_0$. Entonces, para toda $i \in I$, la composición

$$(W,\omega) \xrightarrow{g} (X,\xi_0) \xrightarrow{f_i} (X_i,\xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y por la finalidad de $\xi_0$ con respecto a $\omega$ y $g$, tenemos que

$$f_i \in \underline{K}\left((X,\xi_0),(X_i,\xi_i)\right), \forall i \in I$$

Por lo tanto, $\xi_0 \in (\alpha_j)_J$; y como $\xi$ es final con respecto al sumidero $\mathcal{I}$, entonces

$$1_X : (X,\xi_0) \to (X,\xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto

$$1_X g = g \in \underline{K}\left((W,\omega),(X,\xi)\right)$$

Esto demuestra la inicialidad de $\xi$ con respecto a $\mathcal{F}$, con lo que la proposición queda demostrada. [✓]

También es válido el resultado casi dual:

$^{co}\underline{K}$.8.5 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y sean, $X$ un conjunto, $(A_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i,\xi_i), i \in I$, $S = (f_i : A_i \to X)_I$ un sumidero, $\xi$ una $\underline{K}$-estructura para $X$ y $(\alpha_j)_J$ la familia de las $\underline{K}$-estructuras para $X$ que hacen de $S$ un $\underline{K}$-sumidero. Entonces son equivalentes:

(a) $\xi$ es final para $X$ con respecto a $S$.

(b) $\xi$ es inicial para $X$ con respecto a la fuente de identidades

$$\mathcal{J} = (1_X : X \to (X,\alpha_j))_J$$

$\underline{K}$.8.6 **Definiciones.** El sumidero $\mathcal{I}$ de la proposición anterior se llama **sumidero dual** de la fuente $\mathcal{F}$. Análogamente, la fuente $\mathcal{J}$ de la coproposición anterior es la **fuente dual** del sumidero $S$.

Contando con estos resultados ya podemos responder a la cuestión planteada.

$\underline{K}$.8.8 **Corolario.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta arbitraria. Son equivalentes:

$a)$ $\underline{K}$ es topológica.

$b)$ $\underline{K}$ es cotopológica.

*Demostración.* $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $S = ((f_i)_I, X)$ cualquier sumidero cuyo dominio es una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos $A_i = (X_i,\xi_i)$, y cuyo codominio $X$ es un conjunto arbitrario. Consideremos la fuente dual del sumidero $S$ :

$$\mathcal{J} = (1_X : X \to (X,\alpha_j))_J$$

Por $(a)$ existe $\xi \in \underline{K}[X]$, inicial respecto a $\mathcal{J}$. Por la coproposición anterior, $\xi$ es final para $X$ con respecto a $S$. Por lo tanto, $\underline{K}$ es cotopológica.

$(b) \Rightarrow (a)$ Se demuestra de manera similar. [✓]

$\underline{K}$.8.9 *Nota:* En lo sucesivo, cuando queramos indicar que $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica diremos, simplemente, que $\underline{K}$ es topológica.

## 5.1 Discreción e Indiscreción en Categorías Concretas Topológicas

Para seguir adelante, veremos caracterizaciones de las $\underline{K}$-estructuras discretas e indiscretas en categorías concretas topológicas.

$\underline{K}$.9.1 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y sea $A = (X, \xi)$ un $\underline{K}$-objeto arbitrario. Son equivalentes:

($a$) $\xi$ es discreta.

($b$) $\xi$ es final respecto a cualquier $\underline{K}$-sumidero del que $A$ sea codominio.

($c$) $\xi$ es inicial respecto a la fuente de identidades (completa [4])

$$F = \left(1_X : X \to \left(X, \tilde{\xi}\right)\right)_{\tilde{\xi} \in \underline{K}|X|}$$

*Demostración:* ($a$) $\Rightarrow$ ($b$) Supongamos que

$$S = \left((X_i, \xi_i) \xrightarrow{f_i} (X, \xi)\right)_I$$

es un $\underline{K}$-sumidero. Si $(Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-objeto y $g : X \to Y$ es una función, tales que toda composición $gf_i$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces, aplicando($a$), también lo es $g : (X, \xi) \to (Y, \eta)$. Por lo tanto, $\xi$ es final respecto a $S$.

($b$) $\Rightarrow$ ($c$) Consideremos el sumidero vacío

$$S = ((f_i)_I, A), \text{ con } I = \varnothing$$

Por ($b$), $\xi$ es final con respecto a $S$. En consecuencia tenemos que

$$1_X \in \underline{K}\left((X, \xi), \left(X, \tilde{\xi}\right)\right), \forall \tilde{\xi} \in \underline{K}[X] \quad ^5$$

Y si $(W, \omega) \in \underline{K}$ y $f : W \to X$ son tales que

$$f : (W, \omega) \xrightarrow{f} (X, \xi) \xrightarrow{1_X} \left(X, \tilde{\xi}\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo para toda $\tilde{\xi} \in \underline{K}[X]$, entonces, puesto que $\xi \in \underline{K}[X]$,

$$f : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

también es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $\xi$ es inicial con respecto a $F$.

($c$) $\Rightarrow$ ($a$) Sean, $Y \in \mathfrak{Set}, \eta \in \underline{K}[Y]$ y $f \in Y^X$, arbitrarios. Como $\underline{K}$ es topológica, existe una $\underline{K}$-estructura, $\xi_f$, inicial para $X$ con respecto a $f$ y $\eta$. En consecuencia

$$f : (X, \xi_f) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Puesto que $\xi_f \in \underline{K}[X]$, aplicando ($c$), tenemos que también

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi_f)$$

[4] En el sentido de que el codominio consta de todos los $\underline{K}$-objetos sobre $X$.

[5] Véase la observación $\underline{K}$.8.2 (a).

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, también lo es la composición

$$f : (X,\xi) \xrightarrow{1_X} (X,\xi_f) \xrightarrow{f} (Y,\eta)$$

que es a lo que se quería llegar.$_{[\checkmark]}$

También tiene lugar el resultado casi dual; debido al corolario anterior, podemos escribir:

$^{co}\underline{K}$.9.1 **Proposición.** Si $\underline{K}$ es topológica y $A = (X,\xi)$ es un $\underline{K}$-objeto arbitrario, entonces son equivalentes:

($a$) $\xi$ es indiscreta.

($b$) $\xi$ es inicial respecto a cualquier $\underline{K}$-fuente de la que $A$ sea dominio.

($c$) $\xi$ es final respecto al sumidero de identidades (completo [6])

$$S = \left(1_X : \left(X,\widetilde{\xi}\right) \to X\right)_{\widetilde{\xi}\in\underline{K}|X|}.$$

Como veremos enseguida, la existencia de estructuras discretas e indiscretas está estrechamente relacionada con la coincidencia de las clases de monomorfismos y morfismos inyectivos, y de epimorfismos y morfismos suprayectivos, respectivamente.

$\underline{K}$.9.2 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si algún singulete puede revestirse con una $\underline{K}$-estructura discreta, entonces coinciden los $\underline{K}$-monomorfismos con los $\underline{K}$-morfismos inyectivos.

*Demostración.* Ya sabemos que en toda categoría concreta todo $\underline{K}$-morfismo inyectivo es un $\underline{K}$-monomorfismo. Para probar lo recíproco, supongamos que $\{w_0\}$ es un singulete para el cual existe una $\underline{K}$-estructura discreta $\omega_0$. Sea

$$f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$$

un $\underline{K}$-monomorfismo arbitrario y sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$; definimos

$$h : \begin{array}{ccc} \{w_0\} & \to & X \\ w_0 & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad k : \begin{array}{ccc} \{w_0\} & \to & X \\ w_0 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Debido a la discreción de $\omega_0$,

$$h,k \in \underline{K}\left(\left(\{w_0\},\omega_0\right),(X,\xi)\right)$$

Además

$$fh(w_0) = f(x_1) = f(x_2) = fk(w_0)$$

Debido a la monomorfía de $f$, esto implica que $h = k$; en consecuencia

$$x_1 = h(w_0) = k(w_0) = x_2$$

Por lo tanto, $f$ es inyectivo.$_{[\checkmark]}$

$\underline{K}$.9.3 **Corolario.** Si $\underline{K}$ es topológica, entonces coinciden los $\underline{K}$-monomorfismos con los $\underline{K}$-morfismos inyectivos.

---

[6] Idem.

*Demostración.* En efecto, ya sabemos que en toda categoría concreta topológica todo conjunto puede quedar discretamente estructurado; particularmente, los singuletes. [✓]

Es de esperar que también valga el resultado casi dual al enunciado en este corolario; vale. Sin embargo, no lo desprenderemos de la proposición casi dual a la anterior sino de otra que le es casi casi dual; ésta:

$\underline{K}$.9.4 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si existe una $\underline{K}$-estructura indiscreta para el conjunto $\{0,1\}$, entonces coinciden los $\underline{K}$-epimorfismos con los $\underline{K}$-morfismos suprayectivos.

*Demostración.* Ya sabemos que en toda categoría concreta todo $\underline{K}$-morfismo suprayectivo es un $\underline{K}$-epimorfismo. Supongamos, por otro lado, que el $\underline{K}$-morfismo

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

no es suprayectivo y que $\upsilon$ es una $\underline{K}$-estructura indiscreta para $\{0,1\}$. Escogiendo $y_0 \in Y - f(X)$, definimos

$$h, k : Y \to \{0,1\}$$

como

$$h(y) = 0, \forall y \in Y \qquad \text{y} \qquad k(y) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \neq y_0 \\ 1, \text{ si } y = y_0 \end{cases}$$

Debido a la indiscreción de $\upsilon$,

$$h, k \in \underline{K}((Y,\eta), (\{0,1\}, \upsilon))$$

En consecuencia, $f$ no puede ser un $\underline{K}$-epimorfismo pues aunque claramente $hf = kf$, también es claro que $h \neq k$. [✓]

$\underline{K}$.9.5 **Corolario.** Si $\underline{K}$ es topológica, entonces coinciden los $\underline{K}$-epimorfismos con los $\underline{K}$-morfismos suprayectivos. [✓]

En $\underline{K}$.3.13-14 vimos que $\mathbf{T_2}$, la categoría de espacios de Hausdorff y funciones continuas, es una categoría en la que no todo epimorfismo es un morfismo suprayectivo. Como consecuencia del corolario anterior resulta que $\mathbf{T_2}$ no es topológica (!)

Otro resultado que es consecuencia de este corolario y del anterior a éste es el siguiente.

$\underline{K}$.9.6 **Proposición.** Si $\underline{K}$ es topológica y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces $f$ es un bimorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es biyectiva. [✓]

*Ejercicio 9.* ¿Son válidas las coproposiciones de las proposiciones de las que derivamos los dos corolarios anteriores? Justifique su respuesta.

$\underline{K}$.9.7 **Observación.** Las proposiciones que dieron lugar a los corolarios anteriores pudieron haber sido corolarios, a su vez, de dos resultados más generales. En efecto, sabemos que los monomorfismos y los epimorfismos son casos particulares de monofuentes y episumideros, respectivamente, en tanto que un caso particular de una fuente que separa puntos es un morfismo inyectivo, así como uno suprayectivo es caso particular de un sumidero exhaustivo.[7] Con esto en mente resulta claro que las proposiciones a que nos referimos son corolarios de las dos siguientes:

[7] Recuérdense las definiciones correspondientes vistas en $\underline{K}$.2.5 y en $\underline{K}$.4.5, respectivamente.

$\underline{K}$.9.7.1 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si algún singulete puede revestirse con una $\underline{K}$-estructura discreta, entonces coinciden las $\underline{K}$-monofuentes con las $\underline{K}$-fuentes que separan puntos.

$\underline{K}$.9.7.2 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Si existe una $\underline{K}$-estructura indiscreta para el conjunto $\{0, 1\}$, entonces coinciden los $\underline{K}$-episumideros con los $\underline{K}$-sumideros exhaustivos.

Estas proposiciones pueden demostrarse en forma exactamente similar a como demostramos las dos anteriores, respectivamente[8]. Los corolarios que de ellas se desprenden son generalizaciones de los dos corolarios anteriores.

$\underline{K}$.9.7.3 **Corolario.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y sea $F = ((X,\xi), (f_i)_I)$ una $\underline{K}$-fuente arbitraria. Son equivalentes:

a) $F$ es monofuente.

b) $F$ separa puntos.

$\underline{K}$.9.7.4 **Corolario.** Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y sea $S = ((f_i)_I, (X,\xi))$ un $\underline{K}$-sumidero arbitrario. Son equivalentes:

a) $S$ es episumidero.

b) $S$ es exhaustivo.

Para ver una caracterización más de los objetos discretos en las categorías concretas topológicas consideremos el concepto categórico que definimos a continuación.

$\underline{K}$.9.8 **Definición.** Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria y sea $A$ un $\mathfrak{R}$-objeto cualquiera. Se dice que $A$ es **proyectivo** si siempre que se tiene un diagrama como el siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & B' \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

en donde $f : A \to B$ es un $\mathfrak{R}$-morfismo y $g : B' \to B$ es un $\mathfrak{R}$-epimorfismo, es posible definir otro $\mathfrak{R}$-morfismo, $h : A \to B'$, tal que $gh = f$; es decir, tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$\underline{K}$.9.9 **Proposición.** Si $(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-objeto arbitrario de una categoría concreta topológica $\underline{K}$ cualquiera, entonces son equivalentes:

*a*) $(X,\xi)$ es discreto.

*b*) $(X,\xi)$ es proyectivo.

*Demostración.* $(a) \Rightarrow (b)$ Sean, $f : (X,\xi) \to (Z,\zeta)$ un $\underline{K}$-morfismo y $g : (Y,\eta) \to (Z,\zeta)$ un $\underline{K}$-epimorfismo, cualesquiera. Debido al corolario anterior podemos dar por hecho que $g : Y \to Z$ es una función suprayectiva; entonces existe una función $h : X \to Y$ tal que

[8] Que en cualquier categoría concreta:

(i) toda fuente que separa puntos es monofuente, se probó en $\underline{K}$.2.6;

(ii) todo sumidero exhaustivo es episumidero, se probó en $\underline{K}$.4.6.

$gh = f$. Por $(a)$, $h : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y tenemos

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowleft & (Y,\eta) \arrow[dl, "g"] \\ & (Z,\zeta) & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(X,\xi)$ es proyectivo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean, $Y \in \mathfrak{Set}$, $\eta \in \underline{K}[Y]$ y $f \in Y^X$, cualesquiera. Consideremos el sumidero $S$ descrito en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) \arrow[dr, "f"'] & & (Y,\eta) \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Como $\underline{K}$ es topológica, existe una $\underline{K}$-estructura $\widetilde{\eta}$ para $Y$ que es final con respecto a $S$; entonces

$$f : (X,\xi) \to (Y,\widetilde{\eta}) \qquad \text{y} \qquad 1_Y : (Y,\eta) \to (Y,\widetilde{\eta})$$

son $\underline{K}$-morfismos, el segundo de los cuales es epimorfismo, lo que, por $(b)$, implica que

$$f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$$

es $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $(X,\xi)$ es discreto. [✓]

El coconcepto correspondiente al concepto de objeto proyectivo se llama *objeto inyectivo*. Para su definición hay que invertir el sentido de cada flecha que aparece en la definicón de objeto proyectivo.

$^{\mathrm{co}}\underline{K}$.9.8 **Definición.** Sea $\mathfrak{R}$ una categoría arbitraria y sea $A$ un $\mathfrak{R}$-objeto cualquiera. Se dice que $A$ es **inyectivo** si siempre que se tiene un diagrama como el siguiente

$$\begin{tikzcd} A & & B' \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

en donde $f : B \to A$ es un $\mathfrak{R}$-morfismo y $g : B \to B'$ es un $\mathfrak{R}$-monomorfismo, es posible definir otro $\mathfrak{R}$-morfismo, $h : B' \to A$, tal que $hg = f$; es decir, tal que

$$\begin{tikzcd} A & \circlearrowleft & B' \arrow[ll, dashed, "h"'] \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$\underline{K}$.9.10 Es de esperar que tenga lugar un resultado casi dual al enunciado en la proposición anterior. Pero he aquí que en esta ocasión hay un caso particular en que la coproposición correspondiente deja de ser verdadera; se trata del caso en el que el $\underline{K}$-objeto $(X,\xi)$ tiene por conjunto subyacente al conjunto vacío.[9]

[9] Véase la nota a pie de página bajada al final de la observación $\underline{K}$.8.2.(b).

Si en la proposición anterior tomamos $X = \varnothing$ y denotamos por $\xi_\varnothing$ a la $\underline{K}$-estructura discreta para $X$, entonces $f$ es el morfismo vacío $\phi$, mismo que hace que conmute el triángulo

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi_\varnothing) \arrow[rr, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & (Y,\eta) \\
& (Z,\zeta) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

En cambio, para $\underline{K}$-objetos arbitrarios como son $(Y,\eta)$ y $(Z,\zeta)$, los morfismos $f$, $g$ y $h$ que desde ellos definamos no pueden tener por codominio un $\underline{K}$-objeto vacío salvo que $Y$ y $Z$ sean vacíos, ya que nuestro concepto de función exige que tengamos codominio no vacío para toda función definida sobre un dominio no vacío[10]. De aquí que no podamos invertir las flechas (ni podamos considerar la situación dual) del diagrama anterior mientras tengamos $X = \varnothing$.

Por espacio de cuatro años este detalle pasó inadvertido ante los ojos de los especialistas hasta que, en 1978 (dirigida por el Dr. Vázquez), Graciela Salicrup lo hizo notar en el tercer capítulo de su tesis doctoral (veáse [10]). Aunque parece insignificante, tiene importancia el detallito: Permite mostrar un ejemplo en el que la *casi dualidad* aplicada a una proposición verdadera da por resultado una proposición que no es verdadera.

Ya corregida, la afirmación correspondiente puede escribirse como sigue:

$\underline{K}$.9.11 **Proposición.** Si $(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-objeto arbitrario de una categoría concreta topológica $\underline{K}$ cualquiera, entonces son equivalentes:

*a*) $\xi$ es indiscreta y $X \neq \emptyset$.

*b*) $(X,\xi)$ es inyectivo.

*Demostración.* $(a) \Rightarrow (b)$ Se prueba casi dualmente a como se probó la primera parte de la proposición $\underline{K}$.9.9.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-objeto, con $Y \neq \emptyset$. Por vacuidad, la función vacía

$$\phi : \emptyset \to Y$$

es inyectiva; en consecuencia,

$$\phi : (\emptyset, \xi_\varnothing) \to (Y,\eta)$$

es un monomorfismo, siendo $\xi_\varnothing$ la $\underline{K}$-estructura discreta de $\emptyset$; consideremos también el $\underline{K}$-morfismo vacío

$$\phi : (\emptyset, \xi_\varnothing) \to (X,\xi)$$

Por $(b)$, existe un $\underline{K}$-morfismo

$$h : (Y,\eta) \to (X,\xi)$$

que da conmutatividad al triángulo

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) & & (Y,\eta) \arrow[ll, dashed, "h"'] \\
& (\emptyset,\xi_\varnothing) \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $Y \neq \emptyset$, el concepto de función nos obliga a tener $X \neq \emptyset$. El resto de la demostración es casi dual al de la segunda parte de la proposición $\underline{K}$.9.9. $_{[\checkmark]}$

[10] Revísese la definición que apuntamos en la nota a pie de página bajada desde el ejemplo $\underline{K}$.0.2.1.

## 5.2 Categorías Monotopológicas

No deja de ser desconcertante el haber hallado que subcategorías de $\mathfrak{Top}$ como $\mathbf{T_2}$, $\mathfrak{Topc}$ y $\mathfrak{Topc}_2$ no son topológicas. Para ellas resultó demasiado restrictiva la condición de tener que dotar de estructuras iniciales a todos los conjuntos que sean dominio de fuentes cuyos codominios consten de familias de objetos pertenecientes a ellas. Esta condición puede holgarse un poco y dar lugar a una clase de categorías concretas donde tengan cabida muchas de las que habían quedado excluidas de la clase de las topológicas.

$\underline{K}$.10.1 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ es **monotopológica** si para todo conjunto $X$ y cualquier fuente que separe puntos $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$, cuyo codominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $\mathcal{F} = \left(A \xrightarrow{f_i} A_i\right)_I$ es una $\underline{K}$-fuente inicial.

$\underline{K}$.10.2 *Ejemplos:* 1. Toda categoría concreta topológica es monotopológica.

2. $\mathbf{T_2}$ es monotopológica.

En efecto, en el corolario que extrajimos de la proposición $\underline{K}$.2.7.1.1 quedó establecido que si $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ es una fuente que separa puntos cuyo codominio es una familia de espacios $\mathbf{T_2}$, entonces existe una $\mathbf{T_2}$-estructura para $X$ que es inicial con respecto a $\mathcal{F}$.

3. $\mathfrak{Pos}$ es monotopológica.

En efecto, sabemos que para cualquier fuente $\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_i} (X_i, \leq_i)\right)_I$ de codominio en $\mathfrak{Pos}$, el preorden $\preceq$ en $X$ definido para cualesquiera $x, x' \in X$ por

$$x \preceq x' \Leftrightarrow f_i(x) \leq_i f_i(x'), \forall i \in I$$

es una $\mathfrak{Pos}$-estructura inicial para $X$ con respecto a $\mathcal{F}$ si es antisimétrico[11]. Ahora bien, si $x$ y $x'$ son tales que

$$x \preceq x' \quad \text{y} \quad x' \preceq x$$

entonces para toda $i \in I$ tenemos

$$f_i(x) \leq_i f_i(x') \quad \text{y} \quad f_i(x') \leq_i f_i(x)$$

Y como $\leq_i$ es un orden parcial, entonces

$$f_i(x) = f_i(x'), \forall i \in I.$$

Si $\mathcal{F}$ separa puntos, esto implica que $x = x'$ y, por lo tanto, $\preceq$ es antisimétrico.

$\underline{K}$.10.3 **Observación.** Dado que la inclusión $\iota$ de cualquier subconjunto $A$ de $X$ en $(X, \xi)$ constituye una fuente que separa puntos con una sola flecha

$$\iota : A \hookrightarrow (X, \xi)$$

tenemos que toda categoría monotopológica es hereditaria.

Esta observación revela que ni $\mathfrak{Topc}$ ni $\mathfrak{Topc}_2$ han quedado incluidas en la clase de categorías monotopológicas. Sin embargo, no suena tan feo el oir, por ejemplo, que *la categoría de espacios compactos y funciones continuas no es monotopológica.*

[11] Véase el ejemplo $\underline{K}$.2.16.

El coconcepto correspondiente al de categoría monotopológica es el de *categoría epitopológica*.

$^{co}\underline{K}$.10.1 **Definición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Se dice que $\underline{K}$ es **epitopológica** si para todo conjunto $X$ y cualquier sumidero exhaustivo $S = ((f_i)_I, X)$, cuyo dominio sea una familia $(A_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos, existe $\xi \in \underline{K}[X]$ tal que si $A = (X, \xi)$, entonces $S = \left(A_i \xrightarrow{f_i} A\right)_I$ es un $\underline{K}$-sumidero final.

*Ejercicio $t_3$10.* Siendo $\underline{K}$ cualquier categoría concreta considérese el par de afirmaciones siguiente

*a*) $\underline{K}$ es monotopológica.

*b*) $\underline{K}$ es epitopológica.

¿Son equivalentes (*a*) y (*b*)? Justifique su respuesta.

$\underline{K}$.10.4 Como ya hemos señalado, la clase de categorías monotopológicas incluye dentro de sí a todas las categorías topológicas. Una propiedad que poseen algunas categorías concretas (y que describiremos enseguida) resulta ser, en la clase de las categorías monotopológicas, propiedad característica de las categorías topológicas. Con la prueba de esta caracterización pondremos fin a este estudio.

La propiedad a que nos referimos permite que en algunas categorías concretas puedan obtenerse objetos nuevos de los ya dados *escindiendo puntos* en los conjuntos subyacentes. En $\mathfrak{Top}$, por ejemplo, escindiendo el punto $x$ del singulete $\{x\}$ en dos puntos, obtenemos un espacio topológico sobre un conjunto de dos puntos

$$\{x_1, x_2\}$$

Si convenimos en adoptar para él la topología que por cada abierto $U$ en el singulete da un abierto formado por las escisiones de los puntos de que constaba $U$, obtenemos que los abiertos son

$$\varnothing \quad \text{y} \quad \{x_1, x_2\}$$

es decir, obtenemos el espacio indiscreto de dos puntos. Es claro que si en vez de escindir a $x$ en dos lo escindimos en tres puntos, obtendremos, de acuerdo con la descripción anterior, el espacio indiscreto de tres puntos. Escindiendo indefinidamente al singulete se obtienen todos los espacios indiscretos.

$\underline{K}$.10.4.1 Aún en $\mathfrak{Top}$, pero de modo más general: Si el conjunto subyacente de un espacio topológico $(X, \tau)$ consta de una familia de puntos $X = (x_i)_I$ de la cual cada miembro $x_i$ se escinde en una familia $x_i = (x_{ij})_{J_i}$, entonces por cada $U \in \tau$ queda definido un conjunto

$$\widehat{U} = \{x_{ij} : x_i \in U\}$$

y es fácil ver que la familia $\widehat{\tau}$ formada por estos conjuntos constituye una topología para el conjunto

$$\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} \{x_{ij} : j \in J_i\}$$

Observemos que de $\widehat{X}$ en $X$ podemos definir de modo natural una función $f$ mediante

$$\begin{aligned} f : \ \widehat{X} &\rightarrow X \\ x_{ij} &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Nótese que $f$ es suprayectiva. Más aún,

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\tau}\right) \to (X, \tau)$$

es una función continua, pues, evidentemente,

$$f^{-1}(U) = \widehat{U},\ \forall U \in \tau$$

Además, si $(W, \omega) \in \mathfrak{Top}$ y $g : W \to \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W, \omega) \to (X, \tau)$$

es continua, entonces para todo $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ tenemos que

$$g^{-1}\left(\widehat{U}\right) = g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = (fg)^{-1}(U) \in \omega$$

Es decir,

$$g : (W, \omega) \to \left(\widehat{X}, \widehat{\tau}\right)$$

es continua. Esto demuestra que $\widehat{\tau}$ es la topología inicial para $\widehat{X}$ con respecto a $f$ y $\tau$.

Recíprocamente, como $\mathfrak{Top}$ es topológica, a cualquier conjunto $\widehat{X}$ desde el cual se encuentre definida una función suprayectiva $f$ sobre cualquier espacio topológico $(X, \tau)$ podemos dotarlo de la topología inicial correspondiente a $f$ y $\tau$ y visualizarlo como el resultado de una escisión de puntos ocurrida en $X$: la fibra $f^{-1}(\{x\})$ de cada $x \in X$ es la familia de puntos en que $x$ se ha escindido.

K.10.4.2 Consideremos otro ejemplo, ahora en $\mathfrak{Gra}$. Supongamos que el conjunto subyacente de una gráfica dirigida $(X, \beta)$ es $X = (x_i)_I$ y que cada punto $x_i$ se escinde en una familia $x_i = (x_{ij})_{J_i}$, dando lugar al conjunto

$$\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} \{x_{ij} : j \in J_i\}$$

Definiendo

$$\widehat{\beta} = \left\{(x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{X} \times \widehat{X} : (x_i, x_{i'}) \in \beta\right\}$$

es claro que

$$\left(\widehat{X}, \widehat{\beta}\right) \in \mathfrak{Gra}$$

Observemos que también en este caso, de la función suprayectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \widehat{X} & \to & X \\ & x_{ij} & \mapsto & x_i \end{array}$$

se obtiene un morfismo

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\beta}\right) \to (X, \beta)$$

ya que

$$(x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{\beta} \Rightarrow (f(x_{ij}), f(x_{i'j'})) = (x_i, x_{i'}) \in \beta$$

Por otro lado, supongamos que otra digráfica $(W,\alpha)$ y una función $g : W \to \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W,\alpha) \to (X,\beta)$$

es compatible. Si para cualquier $(w_1, w_2) \in \alpha$ son

$$g(w_1) = x_{ij} \qquad \text{y} \qquad g(w_2) = x_{i'j'}$$

entonces

$$(x_i, x_{i'}) = (f(x_{ij}), f(x_{i'j'})) = (fg(w_1), fg(w_2)) \in \beta$$

porque $fg$ es compatible; pero entonces de acuerdo con la definición de $\widehat{\beta}$ debemos tener

$$(x_{ij}, x_{i'j'}) \in \widehat{\beta}$$

lo que significa que

$$g : (W,\alpha) \to \left(\widehat{X}, \widehat{\beta}\right)$$

también es compatible. Esto prueba que $\widehat{\beta}$ es una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial para $\widehat{X}$ con respecto a $f$ y $\beta$.

Y también recíprocamente: como $\mathfrak{Gra}$ es topológica, a cualquier conjunto $\widehat{X}$ desde el cual se encuentre definida una función suprayectiva $f$ sobre cualquier digráfica $(X,\beta)$ podemos dotarlo de una $\mathfrak{Gra}$-estructura inicial correspondiente a $f$ y $\beta$ y visualizarlo como el resultado de una escisión de puntos ocurrida en $X$ según las fibras determinadas por $f$.

Estos ejemplos ya dan una idea precisa de los siguientes conceptos.

$\underline{K}$.10.5 **Definiciones.** Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta y $(X,\xi)$ un $\underline{K}$-objeto, cualesquiera. Un $\underline{K}$-objeto $\left(\widehat{X}, \widehat{\xi}\right)$ es una **escisión** de $(X,\xi)$ si existe un morfismo suprayectivo

$$f : \left(\widehat{X}, \widehat{\xi}\right) \to (X,\xi)$$

y si $\widehat{\xi}$ es inicial para $\widehat{X}$ con respecto a $f$ y $\xi$. Diremos que $\underline{K}$ **permite escisiones** si para toda fuente con una flecha del tipo

$$\mathcal{F} = \left(\widehat{X} \xrightarrow{f} (X,\xi)\right), \qquad (f \text{ suprayectiva})$$

siempre existe $\widehat{\xi} \in \underline{K}\left[\widehat{X}\right]$ que es inicial con respecto a $\mathcal{F}$.

Como claramente podemos observar, toda categoría concreta topológica permite escisiones. Sin embargo, esta propiedad no es exclusiva de las categorías concretas topológicas; para mostrar un ejemplo presentaremos una categoría que hasta ahora no hemos visto.

$\mathcal{P}$**met** es la **categoría de espacios seudométricos y contracciones.**

$\underline{K}$.10.6 **Definiciones.** Una **seudométrica** para un conjunto $X$ es una función

$$\delta : X \times X \to \mathbb{R}$$

que para cualesquiera $x, y, z \in X$ satisface las dos condiciones siguientes:

(*i*) $\delta(x,x) = 0$.
(*ii*) $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$.
Una **contracción** entre dos espacios seudométricos $(X,\delta)$ y $(X',\delta')$ es una función

$$f : X \to X'$$

tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\delta'(f(x), f(y)) \leq \delta(x,y)$$

Para probar que $\mathcal{P}$met permite escisiones, consideremos cualquier espacio seudométrico $(X,\delta)$ y cualquier función suprayectiva

$$f : \widehat{X} \to (X,\delta)$$

Definiendo

$$\widehat{\delta} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$$

mediante

$$\widehat{\delta}(\widehat{x},\widehat{y}) = \delta(f(\widehat{x}), f(\widehat{y}))$$

obtenemos una función bien definida que claramente convierte a

$$f : \left(\widehat{X},\widehat{\delta}\right) \to (X,\delta)$$

en una contracción. Además, si otro espacio seudométrico $(W,\gamma)$ y una función $g : W \to \widehat{X}$ son tales que

$$fg : (W,\gamma) \to (X,\delta)$$

es una contracción, entonces para $u, v \in W$ arbitrarios tenemos

$$\widehat{\delta}(g(u), g(v)) = \delta(fg(u), fg(v)) \leq \gamma(u,v)$$

lo que significa que

$$g : (W,\gamma) \to \left(\widehat{X},\widehat{\delta}\right)$$

también es una contracción. Esto prueba que $\widehat{\delta}$ es una seudométrica inicial para $\widehat{X}$ con respecto a $f$ y $\delta$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$met permite escisiones.

Pero $\mathcal{P}$met no es topológica, pues si para el conjunto $X = \{0,1\}$ definimos, para toda $n \in \mathbb{N}$ las seudométricas

$$\delta_n(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ n, \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

entonces para $X$ no puede haber una seudométrica inicial con respecto a la fuente

$$F = (1_X : X \to (X,\delta_n))_{\mathbb{N}}$$

porque para cualquier seudométrica $\delta$ que propongamos siempre podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta(0,1) < n, \ \forall n > N;$$

o sea que a partir de cierto momento las identidades dejan de ser contracciones.

Para finalizar, demostremos la caracterización de que hablamos.

$\underline{K}$.10.7 **Proposición.** Sea $\underline{K}$ cualquier categoría concreta. Entonces, $\underline{K}$ es topológica si, y sólo si, $\underline{K}$ es monotopológica y permite escisiones.

*Demostración.* Basta demostrar la implicación de derecha a izquierda. Consideremos entonces, para $X \in \mathfrak{Set}$ arbitrario, cualquier fuente de codominio en $\underline{K}$

$$F = \left(X \xrightarrow{f_i} (X_i, \xi_i)\right)_I ;$$

Definamos, para cualesquiera $x, x' \in X$, la relación

$$x \sim x' \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(x'), \forall i \in I$$

y consideremos la aplicación canónica

$$p : X \to X / \sim$$

Si para toda $i \in I$ definimos

$$\begin{array}{rccc} f_i' : & X / \sim & \to & X_i \\ & [x] & \mapsto & f_i(x) \end{array}$$

entonces la fuente

$$F' = \left(X / \sim \xrightarrow{f_i'} (X_i, \xi_i)\right)_I$$

separa puntos. En efecto, si $[x] \neq [x']$ entonces $x \nsim x'$, es decir, existe $i \in I$ para la cual

$$f_i(x) \neq f_i(x')$$

Entonces para esa $i$

$$f_i'[x] \neq f_i'[x']$$

Como $\underline{K}$ es monotopológica, tenemos que existe una $\underline{K}$-estructura $\widetilde{\xi}$ para $X / \sim$ que es inicial con respecto a $F'$. Pero además $\underline{K}$ permite escisiones; entonces, considerando que la aplicación canónica es una función suprayectiva

$$p : X \to \left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right)$$

podemos garantizar la existencia de una $\underline{K}$-estructura $\widehat{\xi}$ para $X$ inicial con respecto a $p$ y $\widetilde{\xi}$. Creemos que $\widehat{\xi}$ ha resultado inicial para $X$ con respecto a $F$; comprobémoslo.

(i) $f_i : \left(X, \widehat{\xi}\right) \to (X_i, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo por ser la composición de dos $\underline{K}$-morfismos

$$f_i : \left(X, \widehat{\xi}\right) \xrightarrow{p} \left(X / \sim, \widetilde{\xi}\right) \xrightarrow{f_i'} (X_i, \xi_i), \forall i \in I$$

(ii) Dados $(W, \omega) \in \underline{K}$ y $g : W \to X$ tales que para toda $i \in I$

$$f_i g : (W, \omega) \to (X_i, \xi_i)$$

son $\underline{K}$-morfismos, tenemos (puesto que $f_i = f_i'p$) el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (W,\omega) & \overset{f_i g}{\longrightarrow} & (X_i,\xi_i) \\ g\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow f_i' \\ \left(X,\widehat{\xi}\right) & \overset{p}{\longrightarrow} & \left(X/\sim,\widetilde{\xi}\right) \end{array}$$

~~Debido a la ini~~cialidad de $\widetilde{\xi}$ con respecto a $F'$ tenemos que $pg$ es un $\underline{K}$-morfismo. Y como $\widehat{\xi}$ es inicial con respecto a $p$ y $\widetilde{\xi}$, entonces también $g$ es un $\underline{K}$-morfismo, y la demostración llega a su fin. [✓]

# Bibliografía


[1] J.Adámek, H.Herrlich, G.E.Streker; *"The Structure of Initial Completions"* Cahiers Topo. et Géo. Diff. 20 (1970), pp. 333-352.

[2] P.J.Freyd; *"Concreteness"* J. Pure Appl. Algebra 3 (1973), pp. 171-191.

[3] P.J.Freyd; *"Symposia Mathematica IV"* (INDAM Rome 1968-69), Academic Press, London, New York 1970, pp. 431-456.

[4] H.Herrlich and ;G.E.Streker *"Category Theory"* Allyn & Bacon, Boston, 1973.

[5] H.Herrlich; *"Topological Functors"* General Topology and its Applications 4 (1974), pp. 125-142.

[6] H.Herrlich; *"Topological Structures"* Mathematical Centre Tracts. 52 (1974), pp. 59-122.

[7] J.R.Isbell; *"Two Set-Theoretical Theorems in Categories"* Fund. Math. 53 (1963), 43-49.

[8] S.Mac Lane; *"Categories for the Working Mathematician"* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[9] J.J.Rotman; *"An Introduction to Homological Algebra"* Academic Press, New York, 1970.

[10] G. Salicrup; *"Epirreflexividad y Conexidad en Categorías Concretas Topológicas"* Anales del Instituto de Matemáticas, vol. 18 nº 2, 1978.

[11] Y.Wu and P.Hilton; *"A Course in Modern Algebra"* J. Wiley, New York 1974.

# Índice de Materias