



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS DE UN PROBLEMA DE BARRAS DE  
COSSERAT GIRANDO

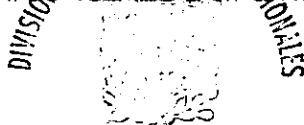
TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

FISICO

PRESENTA  
BRENO LORENZO MADERO SALMERON



DIRECTOR DE ESTUDIOS DE TESIS  
DR. JORGE IZELAMACHE



282549

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"Aspectos de un problema de barras de Cosserat girando"

realizado por MADERO SALMERON BRENO LORENZO

con número de cuenta 923494S-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. JORGE IZE LAMACHE

Propietario

DR. FAUSTINO SANCHEZ GARDUÑO

Propietario

DR. JUAN MANUEL LOZANO MEJIA

Suplente

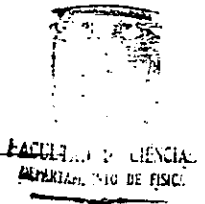
DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO

Suplente

DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura



# Aspectos de un problema de barras de Cosserat girando.

Breno Madero Salmerón

28 de agosto de 2000

A mi padre  
*in memoriam*

# Agradecimientos.

Deseo agradecer en primer término al Dr. Jorge Ize Lamache por todo lo que me enseñó a lo largo de la carrera, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él, por su asesoría, su ayuda y su paciencia para la realización de este trabajo, por su apoyo, su interés y sus regaños. En buena medida todos mis logros son también sus logros.

Al Dr. Juan Manuel Lozano pues tuve la suerte de tomar dos cursos con él. Le agradezco haberme enseñado la poca Mecánica que sé, permitirme disfrutar del placer de su conversación y también el interés que mostró por esta tesis y los comentarios que me hizo para mejorarla.

A los Doctores Faustino Sánchez, Antonmaría Minzoni y Arturo Olvera por el tiempo dedicado a este trabajo y por sus enriquecedores comentarios al respecto.

A todo el departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS por haberme ayudado muchísimo. tanto en mi formación académica como en el desarrollo de este trabajo. En particular, desea agradecer al Dr. Gilberto Flores por haber sido uno de los mejores profesores que tuve, por haberme apoyado siempre y por ser una influencia determinante en mi vocación.

A todos los demás profesores que tuve en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en especial a la M. en C. Pilar Martínez por su apoyo y la formación que de ella recibí, al Dr. Guillermo Grabinsky por haberme mostrado lo maravilloso que puede ser el análisis matemático y a quienes eran, respectivamente, sus ayudantes cuando tomé clases con ellos, al Beto y a Cesar.

A mi familia, por su comprensión y su cariño. Principalmente a mi madre pues nada de esto habría sido posible si ella no hubiera estado presente. Gracias Ma.

A Adriana por haber estado conmigo todos estos años a pesar de mis inconsistencias, mi necedad y mi neurosis. Por haberme ayudado como nadie, de la manera que sólo ella sabe, a convertirme en lo que soy ahora (hmm...)

Al Pelón por ser el mejor amigo que uno puede tener. Por las horas y horas de conversación, de memorias, de ideas y de estupideces que hemos pasado juntos.

A todos los amigos que han estado conmigo y que espero sigan estando. A Luz, Rodrigo, el Sixto, el Primo, Vian, Javier, Mauricio, Luis G. N., Gerardo, Tania, Pablo, Ma. José, Mariana, Ennio, Susana, Alejandro y toda la gente maravillosa que conocí gracias a que el Pelón tuvo la *absurda* idea de estudiar Letras Hispánicas, a Diana, a Tere, a todo el grupo de Cálculo, al grupo de Análisis y a toda la gente que estuvo conmigo en la facultad durante estos años, a Inés, a Paulina, a Vale y a todas las amigas y los amigos que ahora tengo gracias a Adriana y a su estancia en el Colegio Madrid.

A toda la gente de Logos: alumnos, profesores, directivos (gracias Sergio), administrativos, etc.

Deseo agradecer también al proyecto G25427-E de CONACYT "Matemáticas Nolineales en la Física y la Ingeniería" por la beca que recibí para la realización de este trabajo.

# Índice General

Introducción	5
<b>1 Ecuaciones de movimiento y deformación.</b>	<b>11</b>
1.1 Definiciones básicas.	11
1.2 Geometría de la deformación.	15
1.3 Caracterización de las variables de esfuerzo	18
1.4 Mecánica de la deformación	21
1.5 Restricción al caso plano	30
1.6 Ecuaciones constitutivas	35
<b>2 Estados rectos de barras girando</b>	<b>45</b>
2.1 Planteamiento del problema	46
2.1.1 Caso general	46
2.1.2 Caso recto	49
2.2 Expectativas físicas: comportamiento cualitativo	52
2.3 Existencia de soluciones I	56
2.4 Caso recto como problema variacional	62
2.5 Existencia de soluciones II	64
2.6 Dependencia de la solución respecto a $\lambda$	77
2.6.1 Linealización del caso recto.	77
2.6.2 Nucleo de $L(n, \epsilon)$ y curvas de soluciones.	81
2.7 Estudio completo para barras suaves	92
<b>3 Estados doblados para barras girando</b>	<b>109</b>
3.1 Replanteamiento del problema general	109
3.2 Linealización de $G$	114
3.3 Ecuación de bifurcación	116
3.4 Bifurcación global	119



3.5	Espectro de la linealización . . . . .	120
3.6	Ejemplo de espectro y comportamiento nodal . . . . .	122
<b>Conclusiones</b>		<b>128</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>130</b>

# Introducción.

*...como los artesanos suelen proceder con escasa exactitud, ocurre que la Mecánica entera se distingue de la Geometría de tal modo que lo que se hace con exactitud se asimila a la Geometría y lo que se hace con poca exactitud a la Mecánica. Sin embargo, los errores no pertenecen a las artes, sino a los artífices.*  
Isaac Newton

En el siglo XVIII, de la mano de gente de la talla de Johann y Daniel Bernoulli, Jean D'Alambert y, sobre todo, Leonhard Euler, comenzó una transformación y profundización en los estudios de la mecánica iniciada por Galileo y Newton. La formulación de la mecánica de cuerpos rígidos, la creación del concepto de sistema de referencia, de la noción de campo, el comienzo de las mecánicas de fluidos y de cuerpos elásticos y las distintas representaciones de la mecánica son algunos ejemplos de esto. Como señala Giulio Maltese, "el punto fundamental de esa transición fue simplemente el arte de representar matemáticamente el movimiento, cuya evolución, lejos de ser un aspecto puramente formal, permitió penetrar de manera más profunda en las leyes de la mecánica a través de una representación más conveniente de las ecuaciones de movimiento"<sup>1</sup>.

En esa época, cuando no había distinción entre problemas lineales y no-lineales, el énfasis para la modelación radicaba en los aspectos geométricos del problema y en aquellos relacionados con las leyes básicas de la mecánica.

Desgraciadamente, esta visión se perdió tiempo después. El siglo XIX está plagado de aproximaciones geométricas y suposiciones mecánicas *ad hoc*

---

<sup>1</sup>Maltese, Giulio, [Mal] p.324.

que no pueden ser justificadas de manera clara. No es gratuito que la mecánica de medios continuos desarrollada en esa época (y que en buena medida se sigue usando hasta nuestros días) tenga muchas de esas aproximaciones y suposiciones, lo que nos lleva comunmente a problemas matemáticos conocidos (usualmente lineales) pero que no permite obtener toda la información posible.

En el siglo XX, comenzando con los estudios de Poincaré al problema de tres cuerpos y siguiendo con los trabajos de Lyapunov, se ha tratado de revertir esa tendencia. El desarrollo de los métodos cualitativos en el estudio de ecuaciones diferenciales y el crecimiento del análisis no lineal, han mostrado que esta naturaleza de los problemas es fundamental, por lo que no puede dejarse de lado.

Así, el objetivo de este trabajo es formular un problema mecánico con base en su geometría y en las leyes básicas de la mecánica y después tratar de obtener la mayor cantidad de información posible atacando frontalmente su carácter inherente.

Concretamente esta tesis trata de dos cosas: la descripción del movimiento y deformación de una barra elástica (no lineal) unida por uno de sus extremos a un anillo rígido que gira con velocidad angular constante y la del cambio que sufre la barra al variar la velocidad de giro. A lo largo del trabajo se verá que este comportamiento depende de diversos factores entre los que se encuentra la longitud inicial de la barra respecto al radio del anillo, la relación que exista entre los esfuerzos en la barra y las fuerzas de deformación que ésta sufre y la forma y densidad de la barra.

En el capítulo 1 se hace la deducción de las ecuaciones que modelan el comportamiento de una barra elástica no lineal usando el modelo especial de barras de Cosserat. Comenzamos definiendo de la manera más precisa posible qué es lo que entendemos por barra y como podemos describir su movimiento para después enfocarnos a su geometría, ver cuál es el mejor sistema de referencia que podemos usar y cuales son las deformaciones que puede sufrir (sus esfuerzos). Más adelante se describe la mecánica de la deformación considerando el momento lineal, el momento angular y la energía cinética de la barra para después, aplicando la segunda Ley de Newton (y la generalización hecha por Euler para el caso angular), obtener las ecuaciones de movimiento. Hasta este momento se estudian barras tridimensionales, sin embargo, para simplificar el problema, se hace una reducción bidimensional y se explican las condiciones que debe de satisfacer la barra para justificar esta restricción. Para terminar este capítulo, se hace también una caracte-

rización de las ecuaciones constitutivas (relaciones entre esfuerzos y fuerzas de deformación) que es lo que determina el carácter elástico no lineal de la barra.

En el capítulo 2. se aplica la teoría desarrollada en el anterior al problema concreto que nos ocupa. el de una barra unida a un anillo rígido rotando permitiendo que la barra se doble en el plano que es perpendicular al anillo y gira junto con él. Después de encontrar las ecuaciones que modelan este sistema, se hace una especialización al caso en el que la barra no se dobla, sino sólo se comprime o se elonga. Esta configuración es muy importante pues a partir de ella se presentan doblamientos, lo que nos lleva a considerarla nuestra solución "trivial". La ecuación que describe el comportamiento en este caso es

$$N''(s) + \lambda \hat{\nu}(N(s)) = 0$$

$$N(0) = 0 \quad N'(1) = -\lambda R$$

Donde  $N$  es la tensión en la barra,  $s$  es la longitud de la barra en la configuración de referencia,  $\hat{\nu}$  es su dilatación,  $R$  es el radio del anillo y  $\lambda$  está relacionada con la velocidad angular y la densidad de la barra.

El estudio de esta ecuación proporciona mucha información de interés. Comenzamos haciendo un análisis de las expectativas físicas que tenemos y del comportamiento cualitativo de la ecuación para más adelante probar la existencia de soluciones al problema. Desarrollando después su formulación variacional (usando el principio de acción crítica), encontramos que de hecho es posible tener valores de  $\lambda$  para los cuales haya soluciones múltiples al problema. Esto nos lleva a considerar cómo es la relación que existe entre  $N$  y  $\lambda$ . En general se encuentra que hay curvas de soluciones para ciertos rangos de  $\lambda$  y se prueba en qué casos podemos hablar de unicidad al problema con condiciones iniciales y de frontera. Por último, se estudia el caso concreto de una barra muy suave resistiendo extensión encontrando en este caso el diagrama completo de soluciones dependiendo de  $\lambda$ . En este capítulo están muchos de los resultados más interesantes de la tesis. los cuales no se encuentran en la bibliografía mencionada al final del trabajo. Sobre todo, las relaciones encontradas entre  $N$  y  $\lambda$  son aspectos que no habían sido cubiertos.

El capítulo 3 se centra en el estudio de los estados que se alejan del caso recto, es decir, las configuraciones en las cuales la barra se dobla. Replantando matemáticamente el problema completo, para poder aplicar diversos

resultados de análisis no lineal y teoría de bifurcaciones. se llega a una ecuación de bifurcación que nos describe los aspectos importantes para tener estados doblados. A partir de ella se encuentra que estos estados se presentan para ciertos valores de la velocidad angular, dependiendo fuertemente del tipo de material que manejemos. Después de encontrar esto, se aplica un teorema muy importante de la teoría de bifurcaciones, el teorema de alternativa de Rabinowitz, con el cual describimos el comportamiento global de las soluciones dobladas. A partir de esto vemos que difícilmente se tiene un doblamiento y después un regreso al estado recto y que si esto llega a suceder es cambiando completamente el estado de la barra (de estar comprimida a estar tensa). Además de esto, el teorema de Rabinowitz, aunado a la forma de nuestro sistema de ecuaciones, nos lleva a concluir que el comportamiento nodal de  $\theta$  (el ángulo que forma la barra con el plano del anillo) se hereda de la linealización de la ecuación. Esto es muy importante porque este ángulo determina, en buena medida, la forma de la barra y el estudio de la linealización es mucho más fácil que el de la ecuación no lineal. Por último, se estudian ciertas clases de materiales en las cuales se puede asegurar que sólo se presentarán doblamientos cuando toda la barra se encuentra comprimida. También en este capítulo hay varios resultados que amplían lo desarrollado en la bibliografía, como por ejemplo la ecuación de bifurcación y la caracterización de los estados en los cuales hay doblamientos.

La numeración de los teoremas, lemas, etc. es consecutiva en cada sección indicando por ejemplo, el primer teorema o lema de la sección 3 (independientemente del capítulo) por 3.1 y el segundo por 3.2. Cuando dentro de un mismo capítulo se hace referencia a algún resultado anterior, se indica solamente su número, sin embargo, cuando este resultado es de un capítulo diferente se indica en números romanos el capítulo seguido por el número del resultado (II.3.1. por ejemplo). La numeración de las ecuaciones o desigualdades importantes sigue el mismo criterio, siendo esta numeración independiente de aquélla que se refiere a los teoremas. Las figuras por su parte, llevan una numeración consecutiva a lo largo de cada capítulo.

La notación usada a lo largo del trabajo es en cierto sentido estándar y fue copiada del libro de Antman [Ant1]: los vectores se escriben en negritas a diferencia de los escalares; para la matriz (tensor) totalmente antisimétrica de Levi-Civita escribimos  $\epsilon_{ijk}$  donde índices latinos indican que se toman valores entre 1 y 3 e índices griegos se refieren a valores de 1 y 2;  $\epsilon_{\gamma\mu} = \epsilon_{\gamma\mu 3}$ ; índices repetidos implican suma sobre los mismos de acuerdo con la notación tensorial de Einstein; las derivadas parciales se denotan con el subíndice en

la variable respecto a la cual se derivó, con  $\partial_N$  o por el símbolo  $\frac{\partial}{\partial N}$ , también con este último símbolo nos referimos a gradientes cuando la variable es un vector o matrices jacobianas si tanto la función como la variable son vectores: la derivada respecto de  $s$  (la longitud de arco de la barra en su estado de referencia) se denota por prima así como otras derivadas con las cuales no hay lugar a confusión; con  $o(N)$  y  $O(N)$  denotamos el orden del residuo, se tiene que  $\frac{o(N)!}{|N|} \rightarrow 0$  cuando  $|N| \rightarrow 0$  y  $\frac{O(N)!}{|N|}$  es acotado cuando  $|N| \rightarrow 0$  y por último, se indica el término de una prueba con el símbolo  $\diamond$ .



# Capítulo 1

## Ecuaciones de movimiento y deformación.

Intuitivamente la idea de una barra que puede sufrir una deformación es clara, tomemos como ejemplos cotidianos el de una hélice o bien una vara de árbol. Sin embargo, la caracterización de este cuerpo “delgado” en términos matemáticos precisos es muy complicada pues la noción de delgadez no está bien definida.

A lo largo de este trabajo usaremos la llamada Teoría de barras de Cosserat en la cual, el hecho de que el cuerpo estudiado es una barra, está determinado por ciertas restricciones matemáticas con fundamentación física. Esta teoría tiene además otras ventajas: es exacta en el sentido geométrico y mecánico a diferencia de las teorías estandar de elasticidad o de mecánica estructural e introduce la posibilidad de que las partículas del material sufran rotaciones por lo que existen las llamadas torcas de contacto.

La teoría de barras restringe las ecuaciones de movimiento y deformación de tal modo que la descripción es esencialmente unidimensional, esto la hace mucho más manejable que la teoría general para cuerpos en el espacio.

### 1.1 Definiciones básicas.

Uno de los conceptos fundamentales en física es el de masa, a partir de



ella se definen por ejemplo el momento lineal y la energía cinética que son también básicos.

Sin embargo, a pesar de que la idea de masa ha sido usada por la física durante mucho tiempo, se han dado diversas definiciones de ella que no han sido del todo esclarecedoras. Muchas de ellas son circulares (recordemos por ejemplo el caso de Newton, quien en los *Principia* define masa en términos de volumen y densidad y después define densidad en términos de masa y volumen), otras simplemente reducen la definición a otros términos igualmente vagos (como sustancia o materia). En este trabajo no intentaremos dar una definición de masa, pero trataremos de formalizar matemáticamente el concepto suponiendo que ésta es una propiedad inherente a los cuerpos. Si fuera estrictamente necesario, podemos considerar como una primera definición válida, la operacional: tomando al kilogramo patrón y comparando las masas con él del modo propuesto por Mach a fines del siglo XIX (considerando la inercia de cada cuerpo).

Comencemos definiendo un cuerpo tridimensional como un conjunto  $\mathcal{B}$  que ocupa regiones en  $E^3$ , el espacio euclídeo de 3 dimensiones (es decir, que tiene volumen), que posee una propiedad inherente que puede ser medida  $m(\mathcal{B})$  (su masa) y al que se le pueden aplicar fuerzas. En términos más generales de mecánica de medios continuos, podemos pedir a un cuerpo que además de lo anterior, posea entropía y energía, tenga carga eléctrica y se le puedan aplicar tanto flujos de calor como campos electromagnéticos, previa definición de estos conceptos. Para nuestros propósitos esto no es necesario por lo que mantendremos la primera definición evitando mayores complicaciones. A los elementos de un cuerpo les llamamos puntos materiales o partículas, aunque este nombre no implique asociación con las nociones manejadas por la física moderna, pues el tratamiento que manejamos se restringe a lo puramente clásico.

La masa de un cuerpo es siempre un cantidad no negativa, propia de dicho cuerpo, que cumple lo siguiente:

- i) El cuerpo vacío  $\emptyset$  (i.e. el vacío físico) no posee masa.  $m(\emptyset) = 0$ .
- ii) Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son cuerpos y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  ( $\mathcal{A}$  es una parte de  $\mathcal{B}$ ), entonces se tiene que  $m(\mathcal{A}) \leq m(\mathcal{B})$ .
- iii) Si  $\{\mathcal{B}_k\}$  es una sucesión contable de cuerpos disjuntos, entonces
 
$$m\left(\bigcup_k \mathcal{B}_k\right) = \sum_k m(\mathcal{B}_k).$$

De estas propiedades podemos decir, para efectos de formalización, que la

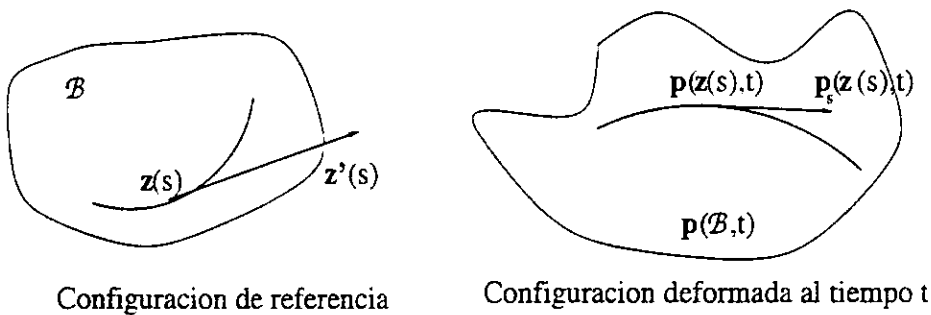


Figura 1.1: Cuerpo  $\mathcal{B}$ , curva material  $z$  y sus imágenes deformadas.

masa es una medida (¡por lo que aceptando el axioma de elección, la teoría de la medida predice la existencia de cuerpos sumamente irregulares cuya masa no podría ser definida!) A lo largo de este trabajo hablaremos de cuerpos que sean conjuntos abiertos y conexos de puntos materiales junto con la frontera de estos conjuntos. Esta restricción la hacemos por dos razones, en primer lugar para referirnos a los cuerpos que encontramos cotidianamente y en segundo para evitar dificultades derivadas de la teoría de la medida, como la existencia de estos cuerpos extraños cuya masa no podría ser definida.

Al ser  $m$  una medida, es posible escribir entonces  $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} dm(z)$  lo que se puede interpretar como el hecho de que la masa total de un cuerpo está determinada aditivamente por la masa de sus partes, es decir, que la masa es una cantidad extensiva (al igual que el volumen, por ejemplo).

La posición de un cuerpo al tiempo  $t$  está descrita por la función  $p(z, t)$  con  $z \in \mathcal{B}$  y  $t \in \mathbb{R}$ .  $p$  es inyectiva en  $z$  para asegurar que 2 puntos materiales distintos no ocupen simultáneamente la misma posición en el espacio. Esta es la expresión matemática de la impenetrabilidad de la materia, principio clásico fundamental. También debemos pedir que  $p$  sea continua en  $z$  para evitar la posibilidad de que un punto desaparezca y aparezca súbitamente en otra región del espacio. De cualquier forma, por razones prácticas, supondremos que  $p$  tiene tantas derivadas respecto a  $z$  y a  $t$  como sea necesario.

Al ser la masa una propiedad intrínseca al cuerpo, no debe depender de la configuración que ocupe lo que postula el principio de conservación de masa.

Así, para cualquier cuerpo  $\mathcal{B}$ , tenemos lo siguiente:

$$m(\mathcal{B}) = m(\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)) = \int_{\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)} dm(\mathbf{p}(\mathbf{z}, t)) \quad (1.1)$$

Como  $m(\mathcal{B})$  no depende de  $t$ , entonces,  $\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)} dm(\mathbf{p}(\mathbf{z}, t)) = 0$  que es la forma integral del principio de conservación.

Si suponemos que cuando una parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$  tiene volumen cero, entonces su masa es cero, al ser el volumen ( $v$ ) también una medida, se tiene por definición que  $m$  es absolutamente continua con respecto a  $v$  (en notación de teoría de la medida,  $m \ll v$ ). Con eso, podemos aplicar el teorema de Radon-Nikodym<sup>1</sup> para asegurar la existencia de una densidad de referencia  $\rho \geq 0$  tal que  $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{z}) dv(\mathbf{z})$ .  $\rho(\mathbf{z})$  es la razón en  $\mathbf{z}$  de masa y volumen en la configuración de referencia.

Del mismo modo podemos decir que existe una función  $\tilde{\rho}$  tal que  $m(\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)) = \int_{\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)} \tilde{\rho}(\mathbf{y}, t) dv(\mathbf{y})$ . Con esta representación, al considerar la fórmula de cambio de variables, tenemos de (1.1) lo siguiente:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{z}) dv(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)} \tilde{\rho}(\mathbf{y}, t) dv(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{B}} \tilde{\rho}(\mathbf{p}(\mathbf{z}, t), t) \det J(\mathbf{z}, t) dv(\mathbf{z})$$

donde  $\det J(\mathbf{z}, t) \neq 0$  (por el teorema de cambio de variable). Al ser  $\mathcal{B}$  arbitrario, pues cada parte (medible) de un cuerpo es también un cuerpo, lo anterior nos lleva a la forma local del Principio de conservación de la masa, ecuación válida para todo  $\mathbf{z}$  en nuestro cuerpo salvo, posiblemente, un conjunto de medida cero

$$\rho(\mathbf{z}) = \tilde{\rho}(\mathbf{p}(\mathbf{z}, t), t) \det J(\mathbf{z}, t) \quad (1.2)$$

donde  $J(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}$ . La ecuación (1.2) es puntualmente la forma material de la ecuación de continuidad.

Identificaremos al cuerpo con la región  $\mathcal{B}$  que ocupa en la configuración de referencia y los puntos materiales del cuerpo con la posición  $\mathbf{z}$  que ocupan en  $\mathcal{B}$ . Sin embargo debemos tener claro que hay una distinción importante entre los puntos materiales y los espaciales, esto es lo que determina la existencia de 2 diferentes formulaciones de la mecánica de medios continuos:

<sup>1</sup>Teorema de Radon-Nikodym. Sea  $(X, \mathcal{S})$  un espacio de medida y  $\nu, m: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  dos medidas finitas tales que  $m \ll \nu$ . Entonces existe  $\rho \in L^1_+(\nu)$  (única casi dondequiera relativa a  $\nu$ ) tal que  $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \rho d\nu$  para todo  $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$

la lagrangiana, en donde se estudia el comportamiento de los puntos materiales como en nuestro caso y la euleriana, en donde el interés se centra en los puntos espaciales, esencial en la mecánica de fluidos por ejemplo. Ambas formulaciones son igualmente válidas y el problema particular que tratemos determina cuál puede ser más útil.

## 1.2 Geometría de la deformación.

Considerando que nuestro cuerpo es delgado en el sentido intuitivo, podemos pensar que la configuración de referencia es de forma prismática (o cilíndrica)<sup>2</sup> con longitud  $s_2 - s_1$ . Sea  $s$  la longitud de arco del eje del cuerpo (o bien de un eje de centroides), entonces  $s$  nos permite identificar secciones transversales naturales del cuerpo, consistentes en los puntos materiales cuya posición está en el plano perpendicular al eje de la barra en  $s$ . Para la descripción del cuerpo, serán relevantes entonces tanto su eje como estas secciones transversales.

El movimiento de una barra especial de Cosserat se define entonces por tres funciones vectoriales  $\mathbf{r}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 : [s_1, s_2] \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$  con  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  ortonormales. Para cada  $t$ ,  $\mathbf{r}$  se interpreta como la configuración del eje de la barra al tiempo  $t$  y  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  determinan la forma de la sección material  $s$  (es decir, la correspondiente a  $s$ ) al mismo tiempo. En particular,  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  se pueden ver como dos vectores que caracterizan a un par de líneas materiales, ortogonales entre sí, en la sección  $s$ . Suponer que estas líneas están determinadas exclusivamente por los vectores no es descabellado si consideramos que  $B$  es una barra (cuerpo delgado); para un cuerpo en general es claro que esto no es necesariamente cierto.

Haciendo  $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$ , entonces  $\{\mathbf{d}_k\}_{k=1}^3$  para cada  $(s, t)$  es una base ortonormal para  $E^3$ ; a estos vectores se les llama directores.

El uso de las seis componentes de los directores  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  para definir la configuración de una barra es complicado pues estas componentes están sujetas a tres constricciones expresando su ortogonalidad. Sin embargo, los directores pueden determinarse a partir de tan sólo tres ángulos, los ángulos

---

<sup>2</sup>Suponerlo así no representa pérdida de generalidad siempre y cuando el cuerpo considerado pueda ser deformado continuamente a una forma como las mencionadas pues no suponemos que esta configuración sea natural.

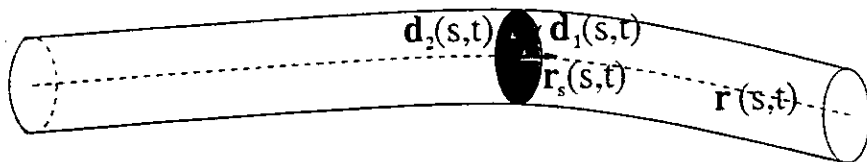


Figura 1.2: Configuración de la barra al tiempo  $t$ . Se muestran los directores y el eje.

de Euler,  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$ , de tal forma que la condición de ortonormalidad sea automáticamente satisfecha, como se puede ver en la figura 1.3. De la mecánica de cuerpos rígidos, a  $\theta$  se le llama el ángulo de nutación, a  $\phi$  el de precesión y a  $\psi$  el de giro; estos ángulos son descritos de la siguiente forma:

Sea  $\{j_i\}_{i=1}^3$  una base ortonormal fija para  $E^3$ . Describimos  $d_3$  por coordenadas esféricas  $d_3 = \sin\theta h + \cos\theta j_3$  con  $h = \cos\phi j_1 + \sin\phi j_2$ .  $d_1$  y  $d_2$  estarán confinados al plano perpendicular a  $d_3$ . Si identificamos una línea característica en este plano, podemos fijar la ubicación de  $d_1$  y  $d_2$  especificando el ángulo que uno de ellos forma con esta línea (recordemos que son perpendiculares).

Si  $\sin\theta \neq 0$ , el plano perpendicular a  $d_3$  intersecta al plano generado por  $j_1, j_2$  a lo largo de la línea perpendicular tanto a  $j_3$  como a  $d_3$ . Un vector unitario sobre esta línea de nodos es

$$k_2 = \frac{j_3 \times d_3}{|j_3 \times d_3|} = j_3 \times h = -\sin\phi j_1 + \cos\phi j_2$$

Sean  $k_1 = k_2 \times d_3 = \cos\theta h - \sin\theta j_3$  y  $k_3 = d_3$ . Por construcción  $k_1$  y  $k_2$  forman una base ortonormal para el plano perpendicular a  $d_3$ . sea entonces  $\psi$  el ángulo de  $k_1$  a  $d_1$ . Con esto se tiene que  $d_1 = \cos\psi k_1 + \sin\psi k_2$  y  $d_2 = -\sin\psi k_1 + \cos\psi k_2$  lo que determina explícitamente a los directores en términos de la base fija y los ángulos de Euler.

Al ser  $\{d_k\}_{k=1}^3$  una base ortonormal orientada positivamente en  $E^3$ , existen funciones vectoriales  $u$  y  $w$  tales que  $\partial_s d_k = u \times d_k$  y  $\partial_t d_k = w \times d_k$ . Esto sucede pues al ser  $d_i$  unitario,  $d_i \cdot d_i = 1$  de donde, al derivar el producto punto respecto de  $s$  o de  $t$ , la derivada se anula. De esto último se tiene que

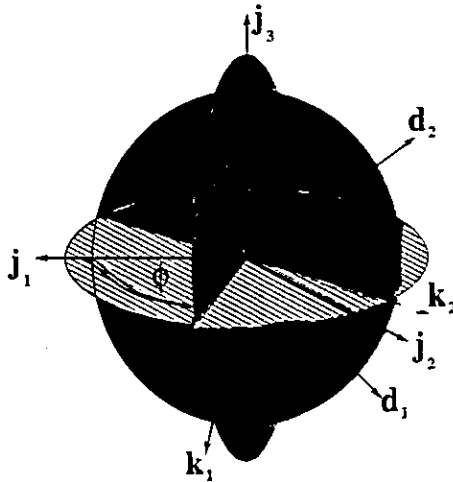


Figura 1.3: Relación entre los directores y una base fija a través de los ángulos de Euler.

$\partial_s(d_i \cdot d_i) = 2d_i \cdot \partial_s d_i = 0$  por lo que  $d_i$  es ortogonal a  $\partial_s d_i$  y análogamente con  $\partial_t d_i$ . En particular,  $\partial_s d_i(s, t) = a_j^i(s, t)d_j(s, t) + a_k^i(s, t)d_k(s, t)$ .

Como la base es ortogonal, se cumple que  $d_i \cdot d_j = 0$ . Derivando esto último se tiene que  $d_j \cdot \partial_s d_i = -d_i \cdot \partial_s d_j$ , por lo tanto  $a_j^i = -a_i^j$ . Así, las expresiones para las derivadas son:

$$\partial_s d_1 = a_2^1 d_2 + a_3^1 d_3$$

$$\partial_s d_2 = -a_2^1 d_1 + a_3^2 d_3$$

$$\partial_s d_3 = -a_3^1 d_1 - a_3^2 d_2$$

Con estos valores es claro que  $u$ , con las características descritas anteriormente, tiene componentes  $(a_3^2, -a_3^1, a_2^1)$  en la base dada. Tomando el producto punto entre  $\partial_s d_j$  y  $\partial_s d_k$  y sumando se obtiene que

$$u_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} (\partial_s d_k) \cdot d_l$$

Procediendo análogamente se puede garantizar la existencia de  $w$  y obtener que sus componentes en la base de los directores :

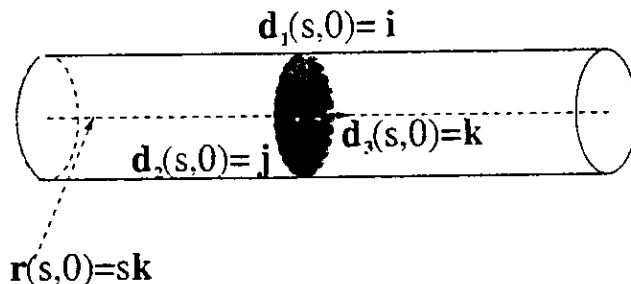


Figura 1.4: Estado de referencia.

$$w_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} (\partial_t d_k) \cdot d_l$$

Una vez conocidos  $u$  y  $w$ , descomponiendo también  $r_s$  en términos de la base "natural"  $\{d_k\}$ , se tiene que  $u = u_k d_k$ ,  $w = w_k d_k$  y  $r_s = v_k d_k$  con  $v_k = r_s \cdot d_k$ . Las tripletas  $(u_1, u_2, u_3)$  y  $(v_1, v_2, v_3)$  son las variables de esfuerzo correspondientes al movimiento, la justificación de su nombre y su interpretación se verán a continuación.

### 1.3 Caracterización de las variables de esfuerzo

Consideremos que tenemos una barra cilíndrica y que su eje está paralelo al eje de coordenadas canónico  $k$ . En la configuración de referencia se tiene que  $r(s,0) = sk$ ,  $d_1(s,0) = i$ ,  $d_2(s,0) = j$  y  $d_3(s,0) = k$ . Ver figura 4.

Supongamos ahora que sometemos a la barra a ciertas deformaciones y esperamos hasta alcanzar un estado de equilibrio por lo que podemos ignorar la dependencia temporal. Veamos algunos casos particulares:

a) Elongación pura. Tomemos el caso en que solamente cambia la longitud de la barra, estirándola o comprimiéndola. El estado deformado queda determinado por  $r(s) = \lambda sk$  y sin cambio en los vectores directores. Como vimos en la sección anterior, se tiene que  $u_l = w_l = 0$  para  $l = 1, 2, 3$ . Como  $r_s = \lambda k$ , entonces  $v_1 = v_2 = 0$  y  $v_3 = r_s \cdot d_3 = \lambda$  por lo que  $v_3$  podría considerarse como la medida de elongación. Pero esto no es del todo exacto dado

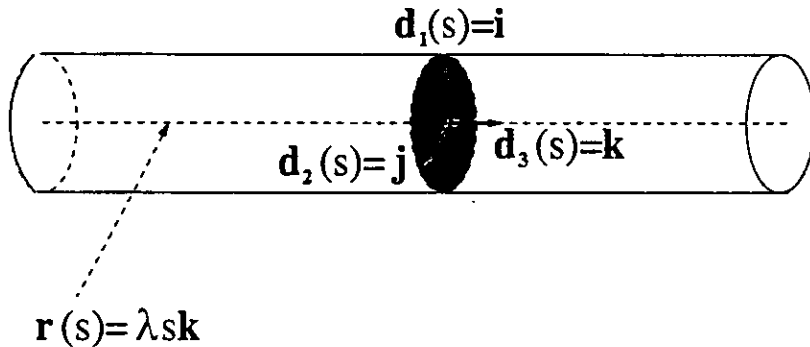


Figura 1.5: Configuración estacionaria para una elongación pura.

que  $v_3 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_3 = \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)$ . Como  $\mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) = |\mathbf{r}_s| |\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2| \cos \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo que forma  $\mathbf{r}_s$  con  $\mathbf{d}_3$  y  $|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|$  es el área del paralelogramo formado por estos dos vectores, podemos considerar entonces que  $v_3$  es el volúmen que forman las rectas transversales al eje y el tangente. Como antes de la deformación este volúmen es uno por construcción, podemos considerar que  $v_3$  es la razón de los volúmenes antes y después de la deformación. Así,  $v_3$  más que medir el estiramiento puro, mide la dilatación en general.

Una restricción importante a considerar es que  $v_3 > 0$  durante todo el movimiento. Como se puede ver en este ejemplo, el paralelepípedo formado por  $\mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  siempre está orientado positivamente y como  $v_3 = \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)$ , un modo de asegurar la preservación de esta orientación es que  $v_3$  sea estrictamente positivo (ver figura 1.5). Esta condición se debe satisfacer en general, para preservar la orientación como en este caso. Además, es necesario para que una sección típica  $s$  no se deforme en ningún momento al grado de que el plano generado por  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  (el plano  $\langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle$ ) sea tangente a la curva  $\mathbf{r}$  en  $s$ . Otra razón para pedir que esto se cumpla es que así aseguramos que  $|\mathbf{r}_s| > 0$ . Esto es necesario para que la razón local de deformación (por longitud de referencia del eje) no se anule.

b) Deformación pura. Consideremos ahora que el estado de la barra está dado por  $\mathbf{r}(s) = s(\beta \mathbf{i} + \mathbf{k})$  y los vectores directores originales. Entonces  $u_l = w_l = 0$  para  $l = 1, 2, 3$  y  $v_1 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_1 = \beta$ ,  $v_2 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_2 = 0$  y  $v_3 = 1$ . Con esto se puede decir que  $v_1$  mide el desplazamiento entre  $\mathbf{d}_3$  y  $\mathbf{r}_s$ , sin embargo hay que tener en cuenta que un estiramiento también puede producir torcas



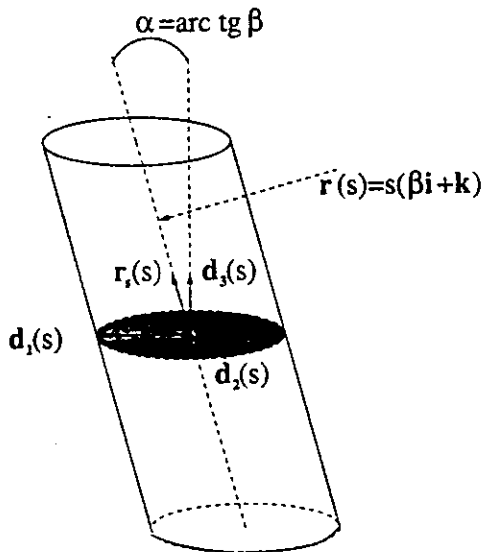


Figura 1.6: Configuración para una deformación pura.

sobre las secciones transversales lo que se vería reflejado en  $v_1$ . Una medida de deformación pura es  $\frac{r_s \cdot d_1}{\|r_s\|}$  que determina el ángulo de desviación.

Si la deformación considerada fuera similar, pero en el eje  $j$ , veríamos que la variable de esfuerzo implicada es  $v_2$ ; su carácter es igual al de  $v_1$ .

c) Torsión pura. Si la barra es torcida girando sobre su eje, el estado deformado se caracteriza por  $r_s = sk$ ,  $d_1 = \cos(\mu s)i + \sin(\mu s)j$ ,  $d_2 = k \times d_1$  y  $d_3 = k$ . Entonces se tiene que  $w_l = 0$  con  $l = 1, 2, 3$ ,  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = \mu$ ,  $v_1 = v_2 = 0$  y  $v_3 = 1$ . Por esto se considera que  $u_3$  es una medida de la torsión.

d) Flexión pura. Deformando la barra hasta formar un anillo en el plano generado por  $i, k$ , la configuración resultante es:  $r = \lambda(\sin(\omega s)k - \cos(\omega s)i)$ ,  $d_1 = j \times d_3$ ,  $d_2 = j$  y  $d_3 = \cos(\omega s)k + \sin(\omega s)i$ .

Con estos valores de  $r_s$  y los directores, tenemos que  $w_l = 0$  con  $l = 1, 2, 3$ ,  $u_1 = u_3 = 0$ ,  $u_2 = \omega$ ,  $v_1 = v_2 = 0$  y  $v_3 = \omega\lambda$ . De esto se sigue que  $u_2$  mide la cantidad de flexión en la deformación. Hay que tener cuidado de no confundir esto último y pensar que  $u_2$  mide la curvatura pues esto no es cierto. A pesar de que en este caso el ángulo de inclinación del vector tangente a la curva

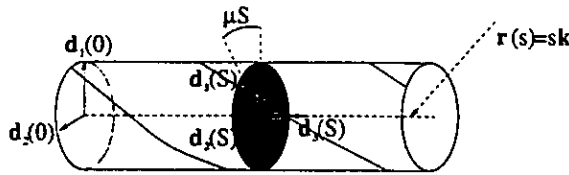


Figura 1.7: Configuración estacionaria para torsión pura.

$(d_3)$  es  $\phi = \omega s$  y  $u_2 = \frac{d\phi}{ds}$ ,  $s$  es la longitud de arco en el estado de referencia. En el estado deformado, la longitud de arco cambia, por ejemplo en este caso es  $\lambda\omega s$  por lo que la curvatura es  $\lambda^{-1}$ .

El carácter de  $u_1$  es igual, salvo que esta variable mide la flexión en un plano distinto.

Por lo visto arriba, a las variables de esfuerzo se les llama de la siguiente manera:  $v_1$  y  $v_2$  son los esfuerzos de deformación pura;  $v_3$  es la dilatación;  $u_1$  y  $u_2$  son los esfuerzos de flexión y  $u_3$  es el esfuerzo de torsión.

## 1.4 Mecánica de la deformación

Consideremos una barra en el espacio del mismo modo como la hemos manejado hasta ahora y sea  $\mathcal{B}$  la región ocupada por ella en su configuración de referencia. De nueva cuenta identificaremos cada punto material con su posición  $z$  en esta configuración.

Si tenemos una transformación diferenciable e invertible  $\bar{x} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^3$  dada por  $z \rightarrow \bar{x}(z)$ , tal que el jacobiano es siempre positivo ( $\det(\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}) > 0$  para todo  $z \in \mathcal{B}$ ), esta transformación origina un triplete de coordenadas curvilineas en cada  $z$ ; estas coordenadas son  $(x^1, x^2, x^3)$ . A  $x^3$  lo asociamos con  $s$ , es decir,  $x^3 = s$ . Como el determinante de la matriz de Jacobi es siempre positivo, podemos hablar de una inversa a la que denotaremos por  $\bar{z}$ . Esta inversa es

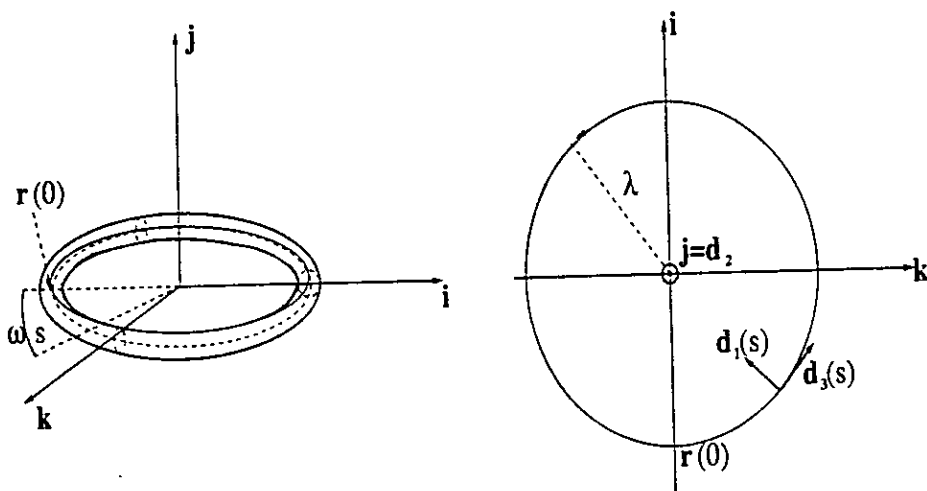


Figura 1.8: Configuración estacionaria correspondiente a una flexión pura. En la segunda figura, el círculo en el centro se refiere al vector  $j$ .

a su vez continuamente diferenciable como consecuencia del teorema de la función inversa. Definamos  $j(\mathbf{x}) \equiv \det \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$  que será también estrictamente positivo para todo  $\mathbf{x} \in \bar{\mathbf{x}}(\mathcal{B})$ .

Para que  $\mathcal{B}$  tenga forma de barra, es necesario pedir que la coordenada  $s$  varíe en el intervalo  $(s_1, s_2)$  cuando  $\mathbf{x}$  varía en  $\bar{\mathbf{x}}(\mathcal{B})$  (i.e.  $(s_1, s_2) = \{s | \mathbf{x} = (x^1, x^2, s) \in \bar{\mathbf{x}}(\mathcal{B})\}$ ). Otra restricción importante que necesitamos hacer para asegurar que nos referimos a barras, es que la sección transversal  $s$ ,  $\mathcal{B}(s) = \{\mathbf{z} \in (\mathcal{B}) | \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = (x_1, x_2, s)\}$ , sea acotada para cada  $s \in [s_1, s_2]$ . En  $\mathbb{R}^3$ , la sección queda definida como  $A(s) \equiv \bar{\mathbf{x}}(\mathcal{B}(s))$ . Ver figura 1.9.

Con  $\mathbf{p}(\mathbf{z}, t)$ , la posición del punto material  $\mathbf{z}$  al tiempo  $t$ , podemos definir una nueva función  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{p}}(x^1, x^2, s, t) \equiv \mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}), t)$ . Para  $t$  y  $s$  fijos,  $\bar{\mathbf{p}}$  es la configuración de la sección  $\mathcal{B}(s)$  al tiempo  $t$ . Definamos también  $\bar{\rho}(\mathbf{x}) \equiv \rho(\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}))$  con  $\rho(\mathbf{z})$  la densidad de masa en  $\mathbf{z}$  definida en la sección 1.

En la mecánica clásica, el momento de un cuerpo se define como la integral sobre él del producto de la velocidad de cada punto por su densidad de masa (si consideráramos un cuerpo "puntual", su momento sería simplemente el producto de su velocidad por su masa). Así, dado  $s_1 < a < b < s_2$ , si  $P[a, b]$

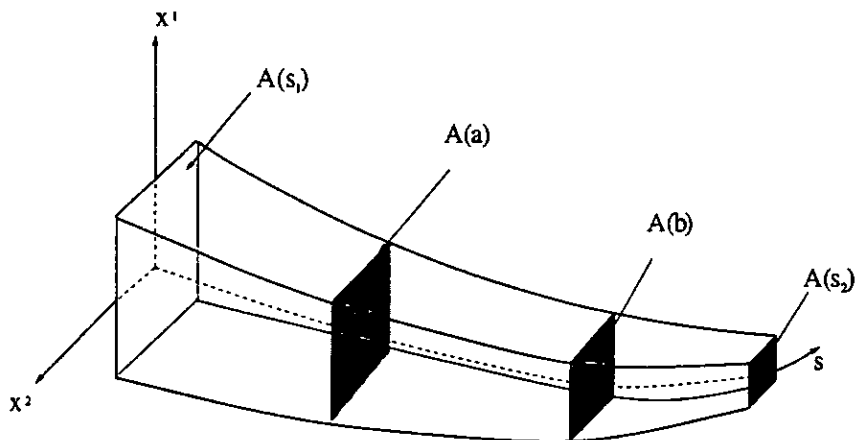


Figura 1.9: Coordenadas curvilíneas para la configuración de referencia de  $\mathcal{B}$ . Se muestran las secciones transversales  $a$  y  $b$ .

es el momento lineal de  $\mathcal{B}([a, b]) = \bigcup_{s \in [a, b]} \mathcal{B}(s)$  al tiempo  $t$ , entonces:

$$P[a, b] = \int_a^b \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t) j(\bar{\mathbf{x}}) dx^1 dx^2 \right) ds \quad (4.1)$$

Introduzcamos un vector  $\mathbf{r}(s, t)$  que sea adecuado para reducir lo anterior y de tal forma que denote al mismo vector que usamos para describir la geometría de la deformación.

Por ejemplo, podemos definir  $(\rho A)(s) \mathbf{r}(s, t) \equiv \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$

con

$(\rho A)(s) \equiv \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$ , la densidad de masa en la configuración de referencia por unidad de longitud de referencia. Con esta definición de  $\mathbf{r}$ , se

tiene que  $\rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t) = \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$  por lo que (4.1) se reduce a  $P[a, b] = \int_a^b (\rho A)(s) \mathbf{r}_t(s, t) ds$ . De otro modo, si  $\bar{\mathbf{z}}(0, 0, s) \in \mathcal{B}$  para cada  $s$ , podemos tomar de manera natural

$\mathbf{r}(s, t) \equiv \bar{\mathbf{p}}(0, 0, s, t)$ . Con esto,  $\mathbf{r}_t(s, t) = \bar{\mathbf{p}}_t(0, 0, s, t)$ .

De cualquier forma, el momento del segmento de barra correspondiente a  $[a, b]$  es:

$$P[a, b] = \int_a^b [\rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t) + \mathbf{q}_t(s, t)] ds \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{q}_t$  es  $\int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 - \rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t)$ , es decir,

$$\mathbf{q}_t = \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) [\bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}_t(s, t)] j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$$

por lo cual podemos pensar en  $\mathbf{q}$  como

$$\mathbf{q}(s, t) \equiv \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) [\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}(s, t)] j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$$

De esta última definición se tiene que  $\mathbf{q}$  es la densidad de momento relativo a  $\mathbf{r}$  (es decir, el momento lineal total es la suma del momento de  $\mathbf{r}$  más el momento relativo a él).

Si con  $L[a, b]$  denotamos el momento angular de  $\mathcal{B}([a, b])$  respecto a  $0$  al tiempo  $t$  se tiene que

$$L[a, b] = \int_a^b \left[ \int_{A(s)} \bar{\mathbf{p}} \times (\bar{\rho}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t)) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right] ds \quad (4.3)$$

pues el momento angular de un cuerpo se define como la integral sobre él mismo del producto vectorial entre la posición de cada punto y su densidad de momento lineal relativas a un origen dado (igualmente, para un cuerpo "puntual", su momento angular sería simplemente el producto vectorial de su posición y su momento lineal). Con  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{h}$  las funciones definidas anteriormente, haciendo  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{r} + \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{r}$  y sustituyendo en 4.3, se tiene que  $L[a, b]$  es igual a

$$\int_a^b [(\rho A)(s) \mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t) + \mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{q}_t(s, t) + \mathbf{q}(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t) + \mathbf{h}(s, t)] ds \quad (4.4)$$

con

$$\mathbf{h} \equiv \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) [\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}(s, t)] \times [\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}_t(s, t)] j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$$

Así,  $h$  es el momento angular relativo a  $r$ .

Otro concepto importante en la mecánica clásica es el de energía (mecánica), que en un sistema consta de dos sumandos, energía cinética y energía potencial; de esta última hablaremos más adelante. La energía cinética de un cuerpo se define como la integral sobre él de un medio de su densidad de masa por el cuadrado de la norma de su velocidad; así, si  $K[a, b]$  es la energía cinética de la parte de la barra correspondiente a  $[a, b]$  tenemos entonces que

$$K([a, b], t) = \int_a^b \left( \int_{A(s)} \frac{1}{2} \bar{\rho}(\mathbf{x}) (\bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t) \cdot \bar{\mathbf{p}}_t(\mathbf{x}, t)) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) ds$$

Los resultados anteriores son exactos, sin embargo, para obtener representaciones adecuadas para  $q$  y para  $h$  necesitamos hacer ciertas aproximaciones. Tomaremos el movimiento constreñido a que la posición tenga la siguiente forma  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{r}(s, t) + \mathbf{g}(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{d}_1(s, t), \mathbf{d}_2(s, t), \mathbf{x}, t)$  donde  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  son los directores definidos en la sección 2. Esta es una suposición fácilmente aceptable, pues significa que la posición de un punto de la barra está determinado por la sección que ocupa y su posición relativa al centroide de esa sección (que dependerá de los directores de la sección, del punto material del que se trate y del tiempo).  $\mathbf{g}$  es una función dada y existen diversas especializaciones para su forma, todas partiendo de argumentos físicos razonables bajo ciertas hipótesis. Por ejemplo:

- a)  $\mathbf{g}$  es independiente del tiempo (la constricción es escleronómica).
- b)  $\mathbf{g}$  es independiente de  $\mathbf{r}$  (es decir que todos los centroides son equivalentes).
- c)  $\mathbf{g}$  es independiente de  $s$  (todas las secciones son equivalentes).
- d)  $\mathbf{g}$  es lineal como función de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$ .
- e)  $\mathbf{g}$  es una combinación lineal de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$ .
- f) En la configuración de referencia,  $\mathbf{g}$  es una combinación lineal de  $\mathbf{r}$  y los directores.
- g)  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{x}, t) = x^1 \mathbf{d}_1 + x^2 \mathbf{d}_2$

La forma g) es la más tradicional y satisface todas las anteriores, es la que se encuentra usualmente en textos clásicos de elasticidad. Sin embargo, nosotros usaremos un modelo distinto en el que se satisfacen b) y e).

Si la forma de las secciones transversales en el estado de referencia es plana, después de la deformación (o durante ésta) la sección tendrá la forma de

una superficie parametrizada en la base  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ . El modelo de deformación plano va más allá, supone que en el estado deformado, las secciones  $\mathcal{B}(s)$  siguen siendo planas. Esto dice que los puntos que se encontraban en el plano generado por  $\mathbf{d}_1(s, 0)$  y  $\mathbf{d}_2(s, 0)$ , al tiempo  $t$  se encontrarán en el plano generado por  $\mathbf{d}_1(s, t)$  y  $\mathbf{d}_2(s, t)$  por lo que  $\mathbf{g}$  es de la forma  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \phi_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{d}_\gamma(s, t)$ . Claramente, con esa forma,  $\mathbf{g}$  es independiente de  $\mathbf{r}$  y es lineal en  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  por lo que satisface b) y e). Nosotros seguiremos este modelo.

Supongamos que las  $\phi_\gamma$  son continuamente diferenciables y que  $\det \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x^\mu} > 0$  en  $A(s)$  (por lo tanto,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son independientes entre sí como funciones de  $s$ ). Podemos además tomar que la configuración de referencia queda definida en este caso por  $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(s, 0) + \phi_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{d}_\gamma(s, 0) \equiv \mathbf{r}_0(s) + \phi_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{d}_\gamma^0(s)$  donde  $\{\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0 \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s}\}$  es una base ortonormal orientada positivamente.

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(s, t) &= \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) [\mathbf{r}(s, t) + \phi_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{d}_\gamma(s, t) - \mathbf{r}(s, 0)] j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \\ &= \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_\gamma(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) \mathbf{d}_\gamma(s, t) \end{aligned}$$

Definiendo  $\rho I_\gamma(s) \equiv \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_\gamma(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2$  lo anterior se reduce a

$\mathbf{q}(s, t) = \rho I_\gamma(s) \mathbf{d}_\gamma(s, t)$ .  $(\rho I_\gamma)(s)$  son los primeros momentos de masa, cada uno se puede interpretar como el momento en el eje  $\gamma$  de la sección  $s$ .

Para  $\mathbf{h}$  procedemos igual, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s, t) &= \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{d}_\gamma(s, t) \times \phi_\delta(\mathbf{x}) \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \\ &= \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) \mathbf{d}_1(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_1(s, t) \\ &\quad + \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) \mathbf{d}_1(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_2(s, t) \\ &\quad + \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) \mathbf{d}_2(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_1(s, t) \\ &\quad + \left( \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \right) \mathbf{d}_2(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_2(s, t) \end{aligned}$$

Definamos los segundos momentos de masa del siguiente modo,  $(\rho J_{\gamma\delta})(s) \equiv \epsilon_{\gamma\mu}\epsilon_{\delta\nu} \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x})\phi_\mu(\mathbf{x})\phi_\nu(\mathbf{x})j(\mathbf{x})dx^1dx^2$ . Claramente  $\rho J_{\gamma\delta}(s)$  son las componentes de una matriz de  $2 \times 2$ . Esta matriz es positiva definida como veremos a continuación y se puede interpretar como la matriz de los momentos de inercia de la sección  $s^3$ .

La matriz de los momentos de inercia es positiva definida como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz<sup>4</sup>, al considerar que un producto interior para el espacio de funciones en el que trabajamos puede ser  $(u, v) = \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})j(\mathbf{x})dx^1dx^2$ . Si  $\mathbf{u} = (x, y)^t$  y la matriz  $\rho J$  es la matriz de los momentos de inercia, entonces

$$\mathbf{u}^t \rho J \mathbf{u} = \rho J_{11}x^2 + \rho J_{12}xy + \rho J_{21}yx + \rho J_{22}y^2$$

Como  $\rho J_{12} = - \int_{A(s)} \bar{\rho}(\mathbf{x})\phi_1(\mathbf{x})\phi_2(\mathbf{x})j(\mathbf{x})dx^1dx^2 = \rho J_{21}$ , la forma cuadrática asociada a  $\rho J$  es  $\mathbf{u}^t \rho J \mathbf{u} = \rho J_{11}x^2 + 2\rho J_{12}xy + \rho J_{22}y^2$ . De esto último y de la desigualdad de C-B-S se sigue que  $|(\phi_1, \phi_2)| = |\rho J_{12}| \leq \|\phi_1\| \|\phi_2\| = \sqrt{\rho J_{11}}\sqrt{\rho J_{22}}$ , por lo tanto

$$\mathbf{u}^t \rho J \mathbf{u} \geq \rho J_{11}x^2 - 2\sqrt{\rho J_{11}}\sqrt{\rho J_{22}}xy + \rho J_{22}y^2 = (\sqrt{\rho J_{11}}x - \sqrt{\rho J_{22}}y)^2 > 0$$

para  $\mathbf{u} \neq 0$ , que es la definición de matriz positiva definida.

A partir de la definición de los segundos momentos de masa,  $\mathbf{h}$  queda como sigue:

$$\mathbf{h}(s, t) = \epsilon_{\gamma\mu}\epsilon_{\delta\nu}(\rho J_{\mu\nu})(s)\mathbf{d}_\gamma(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t)$$

Los símbolos alternantes  $\epsilon_{ij}$  son introducidos de tal forma que los índices en  $\rho J$  corresponden a los ejes respecto a los cuales están definidos estos momentos.

Tenemos entonces que los momentos lineal y angular de la parte de la barra correspondiente al intervalo  $[a, b]$  son, respectivamente:

<sup>3</sup>La matriz (o tensor) de momentos de inercia  $\mathbf{I}$ , se define como la aplicación lineal que permite transformar la velocidad angular de un cuerpo en su momento angular,  $\mathbf{l} = \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$ . Sus componentes están dadas por  $I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{x})(\|\mathbf{x}\|^2\delta_{jk} - x_jx_k)dV$  donde  $x_i$  es la distancia del vector  $\mathbf{x}$  al eje  $i$  y  $\delta_{jk}$  la delta de Kronecker.

<sup>4</sup>Desigualdad de C-B-S. Dado un espacio con producto interior  $(X, (,))$  y con la norma derivada de éste ( $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x, x)}$  para todo  $x \in X$ ), se cumple, para todo  $x, y \in X$ , que  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ .



$$P([a, b], t) = \int_a^b [\rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t) + \rho I_\gamma(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t)] ds \equiv \int_a^b P(s, t) ds \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} L([a, b], t) &= \int_a^b [\rho A(s) \mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t) + \mathbf{r}(s, t) \times \rho I_\gamma(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \\ &\quad + \rho I_\gamma(s) \mathbf{d}_\gamma(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t) \\ &\quad + \epsilon_{\gamma\mu} \epsilon_{\delta\nu} (\rho J_{\mu\nu})(s) \mathbf{d}_\gamma(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t)] ds \\ &\equiv \int_a^b L(s, t) ds \end{aligned} \quad (4.5)$$

Además, como  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{r}(s, t) + \phi_\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{d}_\gamma(s, t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_t \cdot \bar{\mathbf{p}}_t &= \mathbf{r}_t(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) + 2\phi_\gamma(\mathbf{x}) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) \\ &\quad + \phi_\gamma(\mathbf{x}) \phi_\delta(\mathbf{x}) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t) \end{aligned}$$

Con este valor y las definiciones de los primeros y segundos momentos de masa, la energía cinética del material correspondiente a  $[a, b]$ , toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} K([a, b], t) &= \frac{1}{2} \int_a^b (\rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) + 2\rho I_\gamma(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) \\ &\quad + \epsilon_{\gamma\mu} \epsilon_{\delta\nu} \rho J_{\mu\nu}(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t)) ds \end{aligned}$$

Los resultados anteriores se refieren principalmente a la parte cinética del movimiento (y deformación) de la barra. Para estudiar la parte dinámica y obtener las ecuaciones de movimiento y deformación, consideremos que el segmento material relativo a  $(b, s_2]$  ejerce sobre el material correspondiente a  $[a, b]$  una fuerza de contacto resultante  $\mathbf{n}^+(b, t)$  y una torca de contacto resultante<sup>5</sup>  $\mathbf{r}(b, t) \times \mathbf{n}^+(b, t) + \mathbf{m}^+(b, t)$  respecto al origen  $O$ . Al tiempo  $t$ ,  $\mathbf{n}^+$  y  $\mathbf{m}^+$  dependen sólo de la sección que separa las dos partes del cuerpo y son

<sup>5</sup>El considerar que existe también torca de contacto es una ventaja más que posee la teoría de barras de Cosserat y la hace diferente a la teoría clásica de barras elásticas. Esta torca de contacto permite predecir, por ejemplo, torsiones y flexiones que no impliquen estiramiento.

independientes de otras propiedades del mismo, su forma es lo que determina el tipo de material del que estamos hablando, veremos ejemplos de esto en la sección 6.

La fuerza de contacto resultante y la torca respecto a  $O$  ejercida sobre el material correspondiente a  $[a, b]$  por  $\{s_1, a\}$  se denotan por  $-\mathbf{n}^-(a, t)$  y  $-\mathbf{r}(a, t) \times \mathbf{n}^-(a, t) - \mathbf{m}^-(a, t)$  respectivamente, los signos se ponen por convención y encontrarán justificación más adelante. Supondremos que todas las otras fuerzas actuando sobre esta parte de la barra tienen la forma  $\int_a^b \mathbf{f}(s, t) ds$  y que todas las torcas se pueden representar por  $\int_a^b [\mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{f}(s, t) + \mathbf{l}(s, t)] ds$ ;  $\mathbf{f}(s, t)$  y  $\mathbf{l}(s, t)$  son respectivamente la fuerza de cuerpo y la torca de cuerpo por unidad de longitud de referencia en  $(s, t)$ . Esta forma de las fuerzas y de las torcas engloba a la gran mayoría de aquellas que podemos encontrarnos clásicamente (gravitacional, electromagnética, etc.), por lo que la suposición no es descabellada.

Si suponemos que existe una función escalar  $w$  de tal forma que las densidades de fuerza y de torca de cuerpo tienen la forma

$$\mathbf{f}(s, t) = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{d}_k(s, t), s)$$

$$\mathbf{l}(s, t) = -\mathbf{d}_k \times \frac{\partial w}{\partial \mathbf{d}_k}(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{d}_k(s, t), s)$$

entonces  $w$  es la densidad de energía potencial (externa) de la barra. Sin embargo, en el caso de existir, la energía potencial total de la barra no está determinada sólo por ella, pues consideramos que en el material hay ciertas fuerzas internas que son responsables de la deformación y de la continuidad del material. Para la parte de la barra correspondiente a  $[a, b]$ , en este caso, su energía potencial externa es  $\Omega([a, b], t) = \int_a^b w(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{d}_k(s, t), s) ds$ .

Para describir el comportamiento de la barra, debemos considerar las leyes fundamentales de la mecánica clásica. Es posible hacer una derivación de las ecuaciones de movimiento usando cualquiera de sus formulaciones: Leyes de Newton, principio de D'Alambert (o de trabajo virtual) y Ley de Impulso-Momento, principio de Hamilton (o de acción extrema), etc. La elección de una de ellas requerirá mayor o menor suavidad en las funciones involucradas, pero en principio no existe diferencia entre ellas, pues son equivalentes.

Por la forma en que derivamos el momento, es más simple considerar las Leyes de Newton. De la segunda Ley, en un sistema de referencia inercial, se

tiene que la fuerza resultante actuando en el material relativo a  $[a, b]$  es igual a la derivada temporal del momento lineal correspondiente a esa región de la barra y la torca resultante para esa parte del cuerpo es igual a la derivada de su momento angular; por lo tanto, tenemos las siguientes ecuaciones que son (junto con las condiciones iniciales y de frontera de cada caso particular) quienes modelan el movimiento y deformación de la barra:

$$\mathbf{n}^+(b, t) - \mathbf{n}^-(a, t) + \int_a^b \mathbf{f}(s, t) ds = \frac{d}{dt}(P([a, b], t)) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(b, t) \times \mathbf{n}^+(b, t) + \mathbf{m}^+(b, t) - \mathbf{r}(a, t) \times \mathbf{n}^-(a, t) - \mathbf{m}^-(a, t) \\ + \int_a^b [\mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{f}(s, t) + \mathbf{l}(s, t)] ds = \frac{d}{dt}(L([a, b], t)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

## 1.5 Restricción al caso plano

La teoría desarrollada hasta ahora considera la deformación de una barra en tres dimensiones. Sin embargo, para diversos problemas, es suficiente considerar el caso bidimensional en el que las ecuaciones se ven reducidas a una forma más fácil de manejar.

Si el cuerpo considerado es muy delgado y simétrico respecto a un plano (inclusive un plano móvil sobre un eje fijo) determinado por dos vectores ortonormales independientes de  $s$ ,  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  o bien es de configuración cilíndrica y una sección transversal típica es la intersección del plano generado por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  (al que nos referiremos como  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ) con el cuerpo, entonces la deformación global se puede describir mediante la deformación de este "cuerpo" plano que se encuentra en  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ . Ver figura 10.

Sea en este caso  $\mathbf{r}_0$  la curva base (la configuración de referencia se puede entender como un ensanchamiento de  $\mathbf{r}_0$ , lo que se ve en la figura 11). Definamos  $\mathbf{b}_0(s)$  como un vector unitario normal a  $\mathbf{r}_0$  en  $s$ ; este vector determinará la sección  $s$  en la configuración de referencia; en el caso plano, esta sección es una curva. Tomemos a  $\mathbf{r}(s, t)$  como la deformación de  $\mathbf{r}_0(s)$  al tiempo  $t$  y  $\mathbf{b}(s, t)$  el vector que caracteriza el cambio en la sección  $s$ .

Al considerar el caso plano, uno de los directores mencionado en las secciones 2 y 4 es un vector fijo al que sin pérdida de generalidad podemos considerar  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ . Por la definición de  $\mathbf{b}$ , este será el otro director así que la

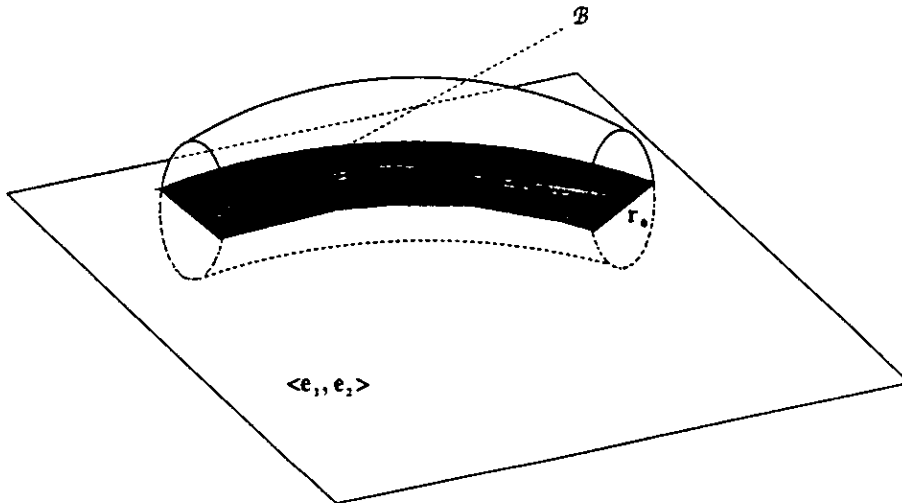


Figura 1.10: Cuerpo plano  $B$  determinado a partir de una barra en 3 dimensiones y el plano indicado.

deformación y el movimiento de la barra quedarán descritos por los vectores  $r$  y  $b$ .

Sea  $d_3 = a = (-e_1 \times e_2) \times b$ . En la sección 2 introdujimos los ángulos de Euler, su restricción al caso plano nos lleva a una representación mucho más simple. Los vectores  $a$  y  $b$  pueden ser descritos como  $a = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  y  $b = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ , con lo cual, para describir la deformación, nos basta con conocer  $r$  y  $\theta$ .

Al ser  $a$  y  $b$  ortonormales y  $\langle a, b \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ , podemos considerar a la base  $\{a, b\}$  la natural para el problema, en particular se tiene que  $r_s = \nu a + \eta b$ . Además, como  $\partial_s a = -\theta' \sin \theta e_1 + \theta' \cos \theta e_2 = \theta' b$  y  $\partial_s b = -\theta' \cos \theta e_1 - \theta' \sin \theta e_2 = -\theta' a$ , podemos afirmar que en este caso, las variables de esfuerzo son las funciones  $\eta$ ,  $\nu$  y  $\theta' = \mu$ , correspondientes a esfuerzo de deformación pura, dilatación y esfuerzo de torsión respectivamente. Esto se puede ver de la sección 3 pues en este caso,  $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, \theta')$  y  $(v_1, v_2, v_3) = (0, \eta, \nu)$ . Es natural esperar que, al estar restringidas las deformaciones al plano, algunas variables de esfuerzo sean nulas para no perder la validez de la descripción. En este caso, la condición de preservación de la orientación es  $\nu > 0$ .

Otras restricciones que se deben de considerar al hacer una descripción

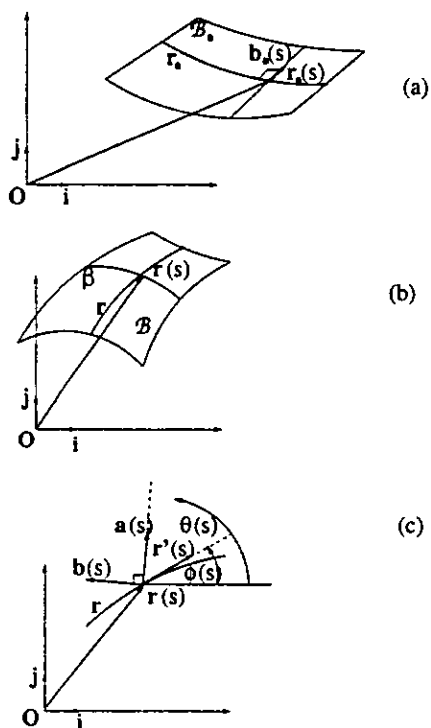


Figura 1.11: (a) Configuración de referencia para un cuerpo en 2 dimensiones; (b) configuración deformada para el mismo cuerpo y (c) configuración deformada de una barra de Cosserat mostrando las variables relevantes.

plana son que las fuerzas de contacto resultantes  $\mathbf{n}^+$  y  $\mathbf{n}^-$  se mantengan en el plano  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  y que las torcas de contacto resultantes sean ortogonales a dicho plano. Las fuerzas y torcas de cuerpo también deben tomar valores sólo en esos conjuntos para asegurar que la descripción siga siendo válida.

Dados  $s_1 < c < s < s_2$ , el momento lineal y el angular en este caso, para la parte de la barra correspondiente a  $[c, s]$  se reducen a lo siguiente:

$$P([c, s], t) = \int_c^s [\rho A(\xi) \mathbf{r}_t(\xi, t) + \rho I(\xi) \mathbf{b}_t(\xi, t)] d\xi \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} L([c, s], t) = & \int_c^s [\rho A(\xi) \mathbf{r}(\xi, t) \times \mathbf{r}_t(\xi, t) + \mathbf{r}(\xi, t) \times \rho I(\xi) \mathbf{b}_t(\xi, t) \\ & + \rho I(\xi, t) \mathbf{b}(\xi, t) \times \mathbf{r}_t(\xi, t) + \rho J(\xi, t) \mathbf{b}(\xi, t) \times \mathbf{b}_t(\xi, t)] d\xi \end{aligned} \quad (5.2)$$

Esto se sigue de suponer al cuerpo plano con directores  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  y que en este caso  $\phi_2 = 0$ . Consideramos  $\rho I(s) = \rho I_1(s)$  y  $\rho J(s) = \rho J_{22}(s) \geq 0$  por definición. Comúnmente estos son, respectivamente, el primer y segundo momentos de masa respecto a  $\mathbf{r}_0$  en la configuración de referencia. Si  $\mathbf{r}_0$  representa la curva de los centros de masa de las secciones transversales, podemos tomar entonces a  $\rho I = 0$ .

Recordemos que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^+(s, t) - \mathbf{n}^-(c, t) + \int_c^s \mathbf{f}(\xi, t) d\xi &= \frac{d}{dt}(P([c, s], t)) \\ \mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{n}^+(s, t) + \mathbf{m}^+(s, t) - \mathbf{r}(c, t) \times \mathbf{n}^-(c, t) - \mathbf{m}^-(c, t) \\ + \int_c^s [\mathbf{r}(\xi, t) \times \mathbf{f}(\xi, t) + \mathbf{l}(\xi, t)] d\xi &= \frac{d}{dt}(L([c, s], t)) \end{aligned}$$

Donde  $P$  y  $L$  están dados por 5.1 y 5.2 respectivamente.

Las condiciones de regularidad sobre las funciones involucradas en estas ecuaciones han sido bastante flexibles, restringiéndolas un poco podemos obtener otros resultados. Considerando que  $\rho A$ ,  $\rho I$ ,  $\rho J$  así como  $\mathbf{r}_t$  y  $\mathbf{b}_t$  son suficientemente suaves como para intercambiar las derivadas con las integrales que definen los momentos y que tanto  $\mathbf{n}^+$  y  $\mathbf{n}^-$  como  $\mathbf{m}^+$  y  $\mathbf{m}^-$  son continuas, intercambiando y tomando el límite cuando  $s$  tiende a  $c$  en la primera ecuación, llegamos a que  $\mathbf{n}^+(c, t) = \mathbf{n}^-(c, t)$ . Esto se cumple pues para cualquier  $\mathbf{g}$  integrable  $\int_c^c \mathbf{g}(\xi, t) d\xi = 0$ . Como  $c$  es un punto arbitrario en  $[s_1, s_2]$ , bajo estas condiciones sobre las funciones involucradas, podemos considerar que los superíndices  $\pm$  son superfluos. Procediendo del mismo modo

para la ecuación que involucra a  $\mathbf{m}^\pm$ , usando el resultado anterior, llegamos a que también en este caso bajo hipótesis de suavidad en las funciones, podemos prescindir de los superíndices. Estos mismos resultados pudimos haberlos tomado como ciertos invocando a la tercera Ley de Newton (acción y reacción), sin embargo existen ciertos materiales en los que no es posible asegurar que esto se cumpla, debido a sus características electromagnéticas<sup>6</sup>.

Ahora bien, si suponemos que las funciones involucradas en los resultados anteriores son suficientemente regulares como para poder derivar las ecuaciones (una vez intercambiadas las integrales con las derivadas) respecto de  $s$ , obtenemos las ecuaciones clásicas de movimiento:

$$\mathbf{n}_s + \mathbf{f} = \rho A \mathbf{r}_{tt} + \rho I \mathbf{b}_{tt} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{r}_s \times \mathbf{n} + \mathbf{l} = \rho I \mathbf{b} \times \mathbf{r}_{tt} + \rho J \mathbf{b} \times \mathbf{b}_{tt} \quad (5.4)$$

La ecuación 5.3 se obtiene usando que  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \mathbf{r}_t + \rho I \mathbf{b}_t) = \rho A \mathbf{r}_{tt} + \rho I \mathbf{b}_{tt}$  y la 5.4 usando lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \mathbf{r} \times \mathbf{r}_t + \rho I \mathbf{r} \times \mathbf{b}_t + \rho I \mathbf{b} \times \mathbf{r}_t + \rho J \mathbf{b} \times \mathbf{b}_t) \\ &= \rho A \mathbf{r} \times \mathbf{r}_{tt} + \rho A \mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_t + \rho I \mathbf{r}_t \times \mathbf{b}_t + \rho I \mathbf{r} \times \mathbf{b}_{tt} \\ &+ \rho I \mathbf{b}_t \times \mathbf{r}_t + \rho I \mathbf{b} \times \mathbf{r}_{tt} + \rho J \mathbf{b} \times \mathbf{b}_{tt} + \rho J \mathbf{b}_t \times \mathbf{b}_t \end{aligned}$$

pero de la ecuación (5.3) tenemos que  $\mathbf{r} \times (\rho A \mathbf{r}_{tt}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{n}_s + \mathbf{f} - \rho I \mathbf{b}_{tt})$  por lo que

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}_s + (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_s + \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{l} \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{n}_s + \mathbf{r} \times \mathbf{f} - \mathbf{r} \times \rho I \mathbf{b}_{tt}) + \rho I \mathbf{r} \times \mathbf{b}_{tt} + \rho I \mathbf{b} \times \mathbf{r}_{tt} + \rho J \mathbf{b} \times \mathbf{b}_{tt} \end{aligned}$$

Por último, considerando que  $(\mathbf{r} \times \mathbf{n})_s = \mathbf{r}_s \times \mathbf{n} + \mathbf{r} \times \mathbf{m}_s$ , al sustituir en lo anterior, llegamos a la ecuación 5.4.

<sup>6</sup>En un sistema en el cual haya cargas en movimiento, las fuerzas entre cargas predichas por las leyes del electromagnetismo (en particular la ley de Biot-Savart) pueden vulnerar la ley de acción y reacción. Por ejemplo, consideremos 2 cargas que se mueven en un instante dado de manera que una se dirija hacia la otra y ésta a su vez se mueva perpendicularmente a la primera, entonces la segunda carga ejerce una fuerza no nula sobre la primera, sin experimentar fuerza de reacción alguna.

## 1.6 Ecuaciones constitutivas

Una vez que se tiene la condición de planaridad, las fuerzas y torcas de contacto pueden ser descritas como  $\mathbf{n} = Na + H\mathbf{b}$  y  $\mathbf{m} = M(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$ . Llamamos a  $H$  la fuerza de deformación y a  $M$  la torca (o momento) de doblamiento. Recordemos que  $\mathbf{r}_s = \nu\mathbf{a} + \eta\mathbf{b}$ , cuando  $\eta \neq 0$  no existe un nombre estandar para  $N$ . La tensión es la proyección en el eje de la barra de la fuerza de contacto, es decir  $\tau = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|}$  por lo que  $N$  es la tensión cuando  $\eta$  es cero.

La forma de  $N$ ,  $H$  y  $M$  determina el tipo de material del cual está hecha la barra y al mismo tiempo, el grado de complejidad del problema que queremos abordar. Decimos que una barra es elástica si existen funciones  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{M}$  tales que  $N(s) = \hat{N}(\nu(s), \eta(s), \mu(s), s)$  y análogamente para  $H$  y  $M$  con dominio tal que  $\nu > 0$  por la condición de preservación de la orientación. Esto es debido a que en un material elástico, las fuerzas y torcas de deformación deben depender exclusivamente de la posición que ocupan y de los esfuerzos que sufren.

Si consideramos que  $N(s)$  está determinado por una función  $\tilde{N}$ ,  $N(s) = \tilde{N}(\nu(s), \eta(s), \mu(s), \nu'(s), \eta'(s), \mu'(s), s)$  e igualmente para  $H$  y  $M$ , entonces decimos que tratamos con una barra viscoelástica de tipo diferencial de complejidad 1. La dependencia en las tasas de esfuerzos le proporciona al material cierta disipación que se puede considerar causada por viscosidad, de ahí el nombre.

Por otro lado, si  $T(s)$  se refiere a la temperatura de la barra (o bien de las secciones), ésta será termoelástica si existe una función  $\tilde{N}$  tal que  $N$  está dada como  $N(s) = \tilde{N}(\nu(s), \eta(s), \mu(s), T(s), s)$  y del mismo modo  $M$  y  $H$ .

A lo largo de este trabajo trataremos exclusivamente el caso de barras elásticas pues la complejidad que genera considerar otros materiales rebasa las intensiones de este texto. Además, al menos en el caso viscoelástico, todavía no existe una homogeneización de los términos ni de las definiciones en la bibliografía relativa al tema.

Las funciones  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{M}$  deben satisfacer ciertas condiciones para asegurar que la situación física se sigue reflejando. La más importante es la condición de monotonía pues se debe asegurar lo siguiente: a) un incremento



en la tensión  $\tau$  debe seguir a un incremento en el estiramiento<sup>7</sup>; b) un incremento en la fuerza de deformación  $H$  debe acompañar a un incremento en el esfuerzo de deformación  $\eta$  y c) un incremento en la torca de doblamiento  $M$  le debe seguir a un incremento en el esfuerzo de torsión  $\mu$ . También es necesario que las situaciones inversas se cumplan (mayor estiramiento siguiendo a mayor tensión, por ejemplo), pero veremos que esto se satisface inmediatamente asegurando lo anterior.

Suponiendo que  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{M}$  son continuamente diferenciables, las condiciones anteriores se expresan matemáticamente como sigue:

a) Sea  $\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|} \equiv \cos \alpha + \cos \beta$  con  $\cos \alpha = \frac{v}{e}$  y  $\cos \beta = \frac{\eta}{e}$ . Como  $\tau = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}_s = N \cos \alpha + H \cos \beta$  y  $N(s) = \hat{N}(v, \eta, \mu, s)$  entonces se tiene que

$$\tau = \hat{N}(e \cos \alpha, e \cos \beta, \mu, s) \cos \alpha + \hat{H}(e \cos \alpha, e \cos \beta, \mu, s) \cos \beta$$

Como queremos que un incremento en estiramiento vaya acompañado por uno en la tensión, necesitamos que  $\tau$  sea creciente como función de  $e$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial_e \tau &= \frac{\partial \hat{N}}{\partial v} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial \hat{H}}{\partial v} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} \cos^2 \beta \\ &= (\cos \alpha, \cos \beta) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{N}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

b) Como  $H(s) = \hat{H}(v(s), \eta(s), \mu(s), s)$ , considerando a  $\hat{H}$  función de  $\eta$  únicamente, la condición de que un incremento en el esfuerzo de deformación produce uno en la fuerza de deformación se expresa del siguiente modo,

$$0 < \hat{H}(v(s), \eta(s) + h, \mu(s), s) - \hat{H}(v(s), \eta(s), \mu(s), s)$$

Supusimos que  $\hat{H}$  era continuamente diferenciable, por lo que podemos usar el teorema del valor medio del cual  $0 < \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta}(v, \bar{\eta}, \mu, s)h$  donde  $\bar{\eta} \in (\eta, \eta + h)$ .

<sup>7</sup>El estiramiento  $e$  es la razón entre la longitud de un segmento de barra después de la deformación y su longitud antes de ser deformado cuando esta última tiende a cero.  $e(s, t) = \lim_{a, b \rightarrow s} \frac{\int_a^b \|\mathbf{r}_s(\xi, t)\| d\xi}{b-a} = \|\mathbf{r}_s(s, t)\|$ . La última igualdad es consecuencia del teorema del valor medio para integrales y de suponer que  $\mathbf{r}_s$  es continua como función de  $s$ .

Al ser  $h > 0$ , es necesario entonces que  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} > 0$  para que se satisfaga la condición.

c) Del mismo modo que en b), al considerar que  $M(s) = \hat{M}(\nu, \eta, \mu, s)$ , para que se cumpla que un incremento en el esfuerzo de torsión ocasiona un incremento en la torca de doblamiento, necesitamos que  $\frac{\partial \hat{M}}{\partial \mu} > 0$ .

Una condición que engloba todas las anteriores es que la matriz  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  sea positiva definida, esto lo probamos a continuación.

**Lema 6.1.** Si la matriz  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  es positiva definida, entonces las tres condiciones de monotonia se satisfacen.

**Demostración.** Una matriz  $A = (a_{ij})$  de  $n \times n$  es positiva definida si su forma cuadrática asociada es siempre positiva, i.e.  $x^t A x > 0$  para todo  $x \in E^n$ ,  $x \neq 0$ . En este caso, si  $\{e_j\}$  es la base canónica de  $E^n$  ( $e_j$  tiene ceros en todas las entradas excepto en la  $j$ -ésima donde tiene 1), se tiene que  $a_{jj} = e_j^t A e_j > 0$  por lo que toda matriz positiva definida tiene sólo elementos positivos en la diagonal. En nuestro caso, los elementos de la diagonal son  $\frac{\partial \hat{N}}{\partial \nu}$ ,  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta}$  y  $\frac{\partial \hat{M}}{\partial \mu}$  por lo es claro que se satisfacen las condiciones b) y c).

Por otro lado, si consideramos el vector  $u = (\cos \alpha, \cos \beta, 0)^t$ , al ser  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  positiva definida, se tiene que  $u^t \frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)} u > 0$  por lo tanto

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \nu} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \nu} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} \cos^2 \beta > 0$$

o lo que es igual,

$$(\cos \alpha, \cos \beta) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \nu} & \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial \nu} & \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix} > 0$$

que es la condición a), lo que termina la demostración.  $\diamond$

Otra restricción importante que deben de cumplir las ecuaciones constitutivas son las llamadas condiciones extremas; valores extremos de los esfuerzos son acompañados de valores extremos de las fuerzas:

1.  $\hat{N}(\nu, \eta, \mu, s) \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$  cuando  $\nu \rightarrow \begin{cases} \infty \\ 0_+ \end{cases}$  con  $\eta, \mu$  y  $s$  fijas.
2. Para  $\nu, \mu$  y  $s$  fijas,  $\hat{H}(\nu, \eta, \mu, s) \rightarrow \pm \infty$  cuando  $\eta \rightarrow \pm \infty$ .
3.  $\hat{M}(\nu, \eta, \mu, s) \rightarrow \pm \infty$  cuando  $\mu \rightarrow \pm \infty$  con  $\nu, \eta$  y  $s$  fijas.

Consideraremos que es igualmente difícil deformar la barra en un sentido que en el opuesto y que ni  $N$  ni  $M$  (la torca de doblamiento) son afectadas por este sentido de la deformación. Esto se expresa matemáticamente diciendo que  $\hat{N}$  y  $\hat{M}$  son pares como funciones de  $\eta$  (esfuerzo de deformación) y que  $\hat{H}$  (fuerza de deformación) es impar.

Del mismo modo, es igualmente difícil torcer la barra en un sentido que en el otro por lo que es necesario que  $\hat{N}$  y  $\hat{H}$  sean pares como funciones de  $\mu$  y  $\hat{M}$  sea impar.

Finalmente, es necesario que  $N$ ,  $H$  y  $M$  sean nulos en la configuración de referencia, pues suponemos que en ésta la barra está en su estado "natural". En la configuración de referencia  $\nu = 1$  (la barra no ha sufrido cambio en su longitud),  $\eta = 0$  (no ha habido deformación) y  $\mu = \mu_0$ , esto implica que  $\hat{N}(1, 0, \mu_0, s) = 0 = \hat{M}(1, 0, \mu_0, s)$ . La condición sobre  $\hat{H}$  se satisface automáticamente debido a las consideraciones respecto a la paridad de las funciones hechas anteriormente.

Para cada  $s$  podemos suponer que la transformación

$$(\nu, \eta, \mu) \rightarrow (\hat{N}(\nu, \eta, \mu, s), \hat{H}(\nu, \eta, \mu, s), \hat{M}(\nu, \eta, \mu, s))$$

tiene una inversa,

$$(N, H, M) \rightarrow (\hat{\nu}(N, H, M, s), \hat{\eta}(N, H, M, s), \hat{\mu}(N, H, M, s))$$

. Dada esta inversa, podemos escribir las ecuaciones constitutivas como

$$\nu(s) = \hat{\nu}(N(s), H(s), M(s), s) \quad \eta(s) = \hat{\eta}(N(s), H(s), M(s), s)$$

$$\mu(s) = \hat{\mu}(N(s), H(s), M(s), s)$$

Considerando esta representación, tomamos que  $\hat{\nu} > 0$ . La existencia local de esta inversa lo podemos ver en el siguiente resultado:

**Teorema 6.2.** Sean  $N$ ,  $H$ ,  $M$  y  $s$  números dados. Si  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  es positiva definida, entonces el sistema para  $\nu$ ,  $\eta$  y  $\mu$  dado por  $N = \hat{N}(\nu, \eta, \mu, s)$ ,  $H = \hat{H}(\nu, \eta, \mu, s)$  y  $M = \hat{M}(\nu, \eta, \mu, s)$ , tiene a lo más una solución, por lo que podemos inferir la existencia de una inversa local con la misma diferenciabilidad para la transformación  $(\nu, \eta, \mu) \rightarrow (\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})$ .

**Demostración.** Si una matriz  $A$  tiene determinante igual a cero, entonces existe un vector no nulo  $x$  tal que  $Ax = 0$ . En este caso, se tiene que

$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0$  por lo que la matriz  $A$  no puede ser positiva definida. Dado que la matriz  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  es positiva definida, entonces podemos asegurar que es invertible por lo que el teorema de la función inversa nos dice que siempre y cuando exista una solución dada  $((\nu_0, \eta_0, \mu_0), (N_0, H_0, M_0))$ , entonces existe una única solución al sistema. El hecho de que la inversa local tenga la misma diferenciabilidad también lo garantiza el teorema.  $\diamond$

Es posible probar que esta inversa local es de hecho una inversa global. Para probar esto es necesario usar argumentos un poco más elaborados, principalmente algunos que involucran la teoría de grado topológico. La prueba para el caso general (sin condiciones de planaridad) de este resultado se puede consultar en [Viv], página 77.

Otra consecuencia de que la matriz jacobiana es positiva definida es que también  $\frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)}$  es definida positiva. Esto se puede ver del siguiente modo:

Sabiendo que el mapeo es invertible globalmente entonces tenemos que la matriz  $\frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} = [\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}]^{-1}$  y esto sucede para cualquier valor de las variables. Como  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  es positiva definida, para toda  $\mathbf{y} \in E^3$  se tiene que  $\mathbf{y}^t \frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)} \mathbf{y} > 0$  en particular para  $\mathbf{y} = \frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} \mathbf{x}^t$  que es posible encontrarlo siempre pues la inversa es global. En este caso, para todo  $\mathbf{x} \in E^3$ , se tiene que:

$$\left[ \frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} \mathbf{x}^t \right]^t \frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)} \frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} \mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t \left[ \frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} \right]^t \mathbf{x}^t$$

pero toda forma cuadrática es un escalar de donde su transpuesta es igual a su valor original. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^t \frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)} \mathbf{x} > 0$$

Las funciones encontradas  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\hat{\mu}$  cumplen además (por el hecho de ser inversas globales) con condiciones extremas equivalentes a las que cumplen  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{M}$ . De estas condiciones tenemos por ejemplo, que incrementos en la tensión producen incrementos en el estiramiento o bien que el esfuerzo de

deformación es infinito si la fuerza de deformación lo es.

Las condiciones de paridad también se preservan, por ejemplo consideremos a  $N_0 = \hat{N}(\nu, \eta, \mu)$ ,  $H_0 = \hat{H}(\nu, \eta, \mu)$  y  $M_0 = \hat{M}(\nu, \eta, \mu)$ . Por ser funciones inversas, se tiene que  $\hat{\eta}(N_0, H_0, M_0) = \eta$ . Pero

$$\hat{\eta}(N_0, -H_0, M_0) = \hat{\eta}(\hat{N}(\nu, \eta, \mu), -\hat{H}(\nu, \eta, \mu), \hat{M}(\nu, \eta, \mu))$$

y por las condiciones de paridad en  $\eta$  de las funciones  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{M}$  tenemos que

$$\hat{\eta}(N_0, -H_0, M_0) = \hat{\eta}(\hat{N}(\nu, -\eta, \mu), \hat{H}(\nu, -\eta, \mu), \hat{M}(\nu, -\eta, \mu)) = -\eta$$

Por lo tanto,  $\hat{\eta}$  es impar como función de  $H$ . Del mismo modo se puede ver que además  $\hat{\eta}$  es par en  $N$  y en  $M$  y que  $\hat{\mu}$  es par  $\hat{N}$  y en  $H$  e impar en  $M$ .

Si además de ser positiva definida, la matriz  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\nu, \eta, \mu)}$  es simétrica, podemos asegurar que existe una función escalar  $W$  tal que  $W = W(\nu, \eta, \mu, s)$  y  $\hat{N} = W_\nu$ ,  $\hat{H} = W_\eta$  y  $\hat{M} = W_\mu$ . Esto se deriva de lo siguiente:

Por la simetría se tiene que  $\hat{N}_\eta = \hat{H}_\nu$ ,  $\hat{N}_\mu = \hat{M}_\nu$  y  $\hat{H}_\mu = \hat{M}_\eta$ . Definiendo la función  $W$  como  $W(\nu, \eta, \mu, s) \equiv \int_1^\nu \hat{N}(\bar{\nu}, \eta, \mu, s) d\bar{\nu}$ , entonces  $W_\nu = \hat{N}$ . Derivando  $W$  respecto a  $\eta$ , al ser  $\hat{N}$  continuamente diferenciable ( $C^1$ ), podemos intercambiar la derivada y la integral de donde  $W_\eta = \int_1^\nu \hat{N}_\eta(\bar{\nu}, \eta, \mu, s) d\bar{\nu}$ . Aplicando la primera condición de simetría y el teorema fundamental del cálculo se tiene que,

$$W_\eta = \int_1^\nu \hat{H}_\nu(\bar{\nu}, \eta, \mu, s) d\bar{\nu} = \hat{H}(\nu, \eta, \mu, s) - \hat{H}(1, \eta, \mu, s)$$

pero  $\nu = 1$  define la configuración de referencia por lo que  $\hat{H}$  es nulo en ese valor y  $\hat{H} = W_\eta$ .

Del mismo modo, usando la segunda condición de simetría, el teorema fundamental del cálculo y el hecho de que  $\hat{M}$  es nulo en la configuración de referencia, llegamos a que  $W_\mu = \hat{M}$ . De esto último es claro que  $\hat{H}_\mu = W_{\eta\mu} = W_{\mu\eta} = \hat{M}_\eta$ , pues  $W$  es dos veces continuamente diferenciable por su definición y el hecho de que  $\hat{N}$  es  $C^1$ . Así, se satisface automáticamente la tercera condición de simetría con lo que podemos concluir que  $W$  es la función escalar que buscábamos.

A  $W$  se le llama la función de energía almacenada o función de energía de esfuerzo. En el caso de existir, debido a consideraciones termodinámicas, a

la barra se le denomina hiperelástica<sup>8</sup>. Así, en este caso, la energía potencial de la barra estará determinada por el potencial del cual deriva  $f$ , la fuerza de cuerpo, y por  $W$ .

De la simetría de  $\frac{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}$  y del mismo teorema de la función inversa, se sigue que también la matriz  $\frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})}$  es simétrica. Como en el caso anterior, esto asegura que existe una función  $W^*$  a la que llamamos la función conjugada de energía almacenada, que cumple que  $\hat{\nu} = W_N^*$ ,  $\hat{\eta} = W_H^*$  y  $\hat{\mu} = W_M^*$ .

Hagamos un breve paréntesis para entender mejor la naturaleza de  $W^*$ . Consideremos  $L(t, q_1, \dots, q_n, z_1, \dots, z_n)$  una función de  $\mathbf{R}^{2n+1}$  a  $\mathbf{R}$  a la que podemos interpretar como una función lagrangiana igual a las utilizadas en la mecánica analítica. Fijando  $t, q_1, \dots, q_n$  y definiendo  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ , sea entonces  $f(\mathbf{z}) = L(t, q_1, \dots, q_n, z_1, \dots, z_n)$ .

Un plano tangente a la superficie  $U = f(\mathbf{z})$  en  $(\mathbf{z}_0, U_0)$ , con  $U_0 = f(\mathbf{z}_0)$ , tiene la ecuación  $U - U_0 = \nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$  e interseca al eje  $U$  en  $\bar{U} = -\nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot \mathbf{z}_0 + f(\mathbf{z}_0)$ . Sean  $p_i = f_{z_i} = L_{z_i}$ ,  $\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{z}_0)$  y definamos  $H$  (que se interpreta como el hamiltoniano del sistema de  $n$  partículas con posiciones generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  correspondientes a cada partícula) como  $H = -U + \sum_i p_i z_i^0 = -L + \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}_0 = -\bar{U}$ .

La transformada de Legendre  $\mathcal{L}$  se define por  $(\mathbf{z}_0, U) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{p}, H)$ ;  $\mathcal{L}$  es una transformación de  $\mathbf{R}^{n+1}$  a  $\mathbf{R}^{n+1}$  tal que, para  $U = f(\mathbf{z})$ , se cumple que  $(\mathbf{z}, f(\mathbf{z})) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\nabla f(\mathbf{z}), H)$  en donde  $H = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} - f(\mathbf{z})$ , es decir, la intersección del plano tangente con el eje  $U$ .

Como consecuencia del teorema de la función inversa, la transformación  $\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{z})$  es invertible si la matriz jacobiana  $(f_{z_i z_j})_{ij}$  es invertible. Escribiendo la inversa como  $\mathbf{z} = g(\mathbf{p})$ , tenemos entonces que  $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} - f(\mathbf{z}) = \mathbf{p} \cdot g(\mathbf{p}) - f(g(\mathbf{p})) \equiv H(\mathbf{p})$ . Con esto último tenemos que la superficie  $U = f(\mathbf{z})$  se transforma en la superficie  $H = H(\mathbf{p})$ .

Si repetimos la transformación,  $(\mathbf{z}, U) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{p}, H) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{x}, K)$  se tiene que  $\mathbf{x} = \nabla H$  y  $K = \nabla H \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p})$  de donde  $x_i = z_i + \sum_j p_j \frac{\partial z_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial p_i}$ , pero

<sup>8</sup>Para un material termoelástico, si el esfuerzo depende sólo de la deformación, el comportamiento es igual al de un material puramente elástico. Por otro lado, si el esfuerzo no depende en absoluto de la temperatura, entonces podemos derivar los esfuerzos de un potencial y tenemos que el material está más restringido que uno elástico, por lo que se le denomina hiperelástico.

$p_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$  por lo que  $x_i = z_i$ . Además,  $K = \sum_i x_i p_i - H = \sum_i z_i p_i - H = U$  y  $(H_{p_i, p_j}) = (\frac{\partial^2 z_i}{\partial p_j^2}) = (U_{z_i, z_j})^{-1}$  por lo que podemos escribir a  $\mathbf{p}$  como función de  $\mathbf{x}$ . De estos resultados tenemos lo siguiente:

Proposición 6.3. *La transformada de Legendre es una involución, es decir,  $\mathcal{L}^2 = Id$ .*

Por otro lado, suponemos que  $f$  es al menos dos veces continuamente diferenciable por lo que su desarrollo de Taylor es

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + \nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^t \text{Hess}(f(\mathbf{z}_0))(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \dots$$

Si en un punto crítico ( $\nabla f(\mathbf{z}_0) = 0$ ) el hessiano es positivo definido, entonces  $\mathbf{z}_0$  es un mínimo local de  $f(\mathbf{z})$ . En este caso,  $H(\mathbf{p}_0) = -f(\mathbf{z}_0)$ ,  $\nabla H(\mathbf{p}_0) = \mathbf{z}_0$  por ser  $\mathcal{L}$  involución y  $\text{Hess}(H(\mathbf{p}_0)) = (\text{Hess}(f(\mathbf{z}_0)))^{-1}$  de donde, si  $\mathbf{z}_0 = 0$ , la superficie  $H = H(\mathbf{p})$  tendrá también un mínimo, el cual ocurrirá en  $\mathbf{p}_0$ . Estos argumentos son la base de los principios variacionales duales, pues la transformada respeta en este sentido los puntos extremos.

Volviendo a  $W$  y  $W^*$ , para  $\mathbf{z} = (\nu, \eta, \mu)$  y  $s$  fija,  $W = W(\mathbf{z})$ . La transformada de Legendre correspondiente sería  $(\mathbf{z}, W) \rightarrow (\mathbf{Z}, \tilde{W})$  en donde, si  $W = W(\mathbf{z})$  entonces  $(\mathbf{z}, W(\mathbf{z})) \rightarrow (\nabla W(\mathbf{z}), \nabla W(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} - W(\mathbf{z}))$ . Como  $\nabla W(\mathbf{z}) = (W_\nu, W_\eta, W_\mu) = (\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})$ , se tiene entonces que  $\mathbf{Z} = (N, H, M)$  y  $\tilde{W} = \tilde{W}(N, H, M)$ . Vimos que la inversa de la transformación dada por  $(\hat{N}, \hat{H}, \hat{M})$  es  $(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})$  por lo que  $\tilde{W}(\mathbf{Z}) = (N, H, M) \cdot (\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu}) - W(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})$ . Con  $\tilde{W}$  dada de esa forma, se cumple que

$$\tilde{W}_N = \hat{\nu} + N\hat{\nu}_N + H\hat{\eta}_N + M\hat{\mu}_N - [W_\nu\hat{\nu}_N + W_\eta\hat{\eta}_N + W_\mu\hat{\mu}_N]$$

Tomando en cuenta los valores de las parciales de  $W$ , se tiene entonces que  $\tilde{W}_N = \hat{\nu}$ . Análogamente, llegamos a que  $\tilde{W}_H = \hat{\eta}$  y  $\tilde{W}_M = \hat{\mu}$  por lo que podemos afirmar que  $\tilde{\mathbb{I}} = W'^{*9}$ , es decir que la función conjugada de energía almacenada es la transformada de Legendre de  $W$ , por lo que posee las propiedades características de ésta.

---

<sup>9</sup>Realmente difieren por una constante como sucede habitualmente en física al definir funciones de energía potencial o almacenada, esto se debe a que la energía de referencia es arbitraria.

Cuando la barra es hiperelástica, las fuerzas de deformación se derivan de la función de energía almacenada. Debido a esto, la energía potencial del sistema tendrá dos componentes, una debida a las fuerzas externas (de cuerpo) y otra proveniente de  $W$ . De este modo, la parte de la barra correspondiente a  $[a, b]$  con  $s_1 < a < b < s_2$ , tendrá una energía almacenada  $\Psi([a, b], t) = \int_a^b W(\nu, \eta, \mu, s) ds$ . Más aún, en caso de existir la función  $w$  de energía potencial definida en la sección 4, la energía potencial total del material relativo a  $[a, b]$  al tiempo  $t$  será  $\Psi([a, b], t) + \Omega([a, b], t)$  y la energía total de la barra será esta energía potencial más la cinética.





## Capítulo 2

# Estados rectos de barras girando

A partir de este capítulo, estudiaremos un problema particular de la teoría de barras. A pesar de que conceptualmente es un problema relativamente simple, posee una riqueza matemática considerable; al considerar barras elásticas no lineales, su estudio es un buen pretexto para adentrarnos en algunos de los métodos que se usan en el análisis no lineal.

El problema concreto que nos ocupa es el de describir el comportamiento de una barra elástica que gira con velocidad angular constante alrededor de un eje fijo. Tomamos una barra unida por uno de sus extremos a un anillo rígido y con el otro extremo libre. Estudiaremos las deformaciones que sufre esta barra debidas a la rotación del anillo y a su carácter no lineal.

Si la barra fuese rígida, al estar unida al anillo que gira con velocidad angular constante, podemos esperar que se mueva uniformemente, con cada punto material en movimiento circular. Sin embargo, si no está unida al anillo, pero si es mantenida girando con velocidad angular constante, el movimiento será distinto.

El movimiento de un cuerpo rígido se puede describir como una combinación de 2 movimientos: el de su centro de masa (CM) más el del cuerpo alrededor de éste. Si el cuerpo se mantiene girando con velocidad angular constante, su centro de masa tendrá simplemente un movimiento circular uniforme. El movimiento del cuerpo rígido alrededor del CM será el mismo que describe un trompo libre con un punto fijo (en el CM), pues no hay torcas externas. En el caso de una barra cilíndrica (o prismática) los momentos de inercia son  $I_{11} = I_1 = I_2 = I_{22}$  e  $I_3 = I_{33} \neq I_1$ , todos diferentes de cero. En este caso, la teoría clásica de cuerpo rígido nos dice que la barra tendrá un

movimiento de precesión alrededor del CM, formando un cono con vértice en el punto fijo durante el movimiento. Ver [Gold].

Para el caso en que la barra es elástica no lineal y está unida a un anillo, podemos pensar que los dos comportamientos se combinan por lo que esperamos que haya estados en los cuales la barra se desvíe del plano del anillo. En este capítulo obtendremos el sistema de ecuaciones que describe el movimiento y las deformaciones de la barra y nos centraremos en los estados en los cuales la barra permanece recta. En el capítulo siguiente, consideraremos el caso en el que la barra sufre doblamientos, considerando las deformaciones que suceden en el plano que gira junto con la barra y que es perpendicular al anillo.

## 2.1 Planteamiento del problema

### 2.1.1 Caso general

En el marco de la teoría desarrollada en el capítulo anterior, considerando que la barra tiene longitud  $l$  en su estado de referencia, el problema es el siguiente. El extremo de la barra determinado por  $s = l$  está unido al interior del anillo de radio  $R$  de tal forma que la barra (a la que suponemos naturalmente recta) se encuentra en un rayo de la parte interior del anillo hacia su centro. Tomamos al anillo en el plano  $\langle i, j \rangle$  y al extremo dado por  $s = 0$  libre.

Al considerar únicamente las deformaciones en el plano que gira con velocidad angular constante y que es perpendicular al anillo, podemos usar una descripción bidimensional para la barra considerando el plano  $\langle k, e \rangle$  con  $e = \cos(\omega t)i + \sin(\omega t)j$ . Vimos en el capítulo anterior que las ecuaciones que describen el comportamiento de una barra bidimensional son

$$\mathbf{n}_s + \mathbf{f} = \rho A \mathbf{r}_{tt} + \rho I \mathbf{b}_{tt} \quad (I.5.3)$$

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{r}_s \times \mathbf{n} + \mathbf{l} = \rho I \mathbf{b} \times \mathbf{r}_{tt} + \rho J \mathbf{b} \times \mathbf{b}_{tt} \quad (I.5.4)$$

Estudiaremos soluciones estacionarias por lo que tomamos a los directores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  como  $\mathbf{a}(s, t) = \cos\theta(s)\mathbf{e}(t) + \sin\theta(s)\mathbf{k}$  y  $\mathbf{b}(s, t) = -\sin\theta(s)\mathbf{e}(t) + \cos\theta(s)\mathbf{k}$ . Además, el eje de la barra estará descrito por  $\mathbf{r}(s, t) = r(s)\mathbf{e}(t) + z(s)\mathbf{k}$  y si consideramos que este eje es el de los centros de masa, entonces  $\rho I = 0$ . En nuestro caso no hay fuerzas ni torcas externas, es decir  $\mathbf{f} = \mathbf{l} = \mathbf{0}$ ,

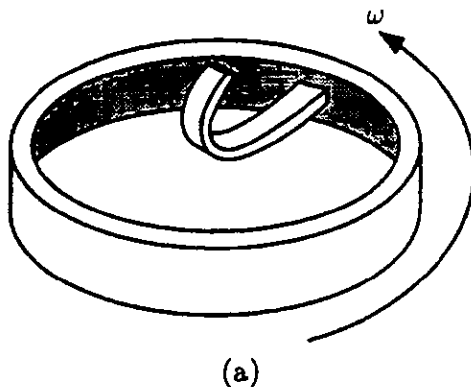


Figura 2.1: Barra girando unida a un anillo y sus doblamientos.

y tomando en cuenta que  $\mathbf{e}_{tt}(t) = -\omega^2 \mathbf{e}(t)$ , las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s &= \rho A(s) r(s) \mathbf{e}_{tt}(t) = -\omega^2 \rho A(s) r(s) \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{m}_s + \mathbf{r}_s \times \mathbf{n} &= \rho J(s) [-\text{sen}\theta(s) \mathbf{e}(t) + \cos\theta(s) \mathbf{k}] \times [-\text{sen}\theta(s) \mathbf{e}_{tt}(t)] \\ &= \omega^2 \rho J(s) \cos\theta(s) \text{sen}\theta(s) [\mathbf{k} \times \mathbf{e}(t)] \end{aligned}$$

Tenemos además que el extremo dado por  $s = 0$  es libre y el correspondiente a  $s = 1$  está unido al anillo de radio  $R$ , entonces  $\mathbf{n}(0, t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m}(0, t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}(1, t) = R\mathbf{e}(t)$  y  $\theta(1) = 0$ . Con esto se determina el problema completamente.

Para describir el sistema anterior por componentes, recordemos que  $\mathbf{n} = N\mathbf{a} + H\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}_s = \nu\mathbf{a} + \eta\mathbf{b}$  y  $\mathbf{m} = M(\mathbf{e} \times \mathbf{k})$ . Así,  $\mathbf{n}_s = (N \cos\theta - H \text{sen}\theta)' \mathbf{e} + (N \text{sen}\theta + H \cos\theta)' \mathbf{k}$  y la primera ecuación tiene 2 componentes

$$\begin{aligned} (N \cos\theta - H \text{sen}\theta)' &= -\omega^2 \rho A(s) r(s) \\ (N \text{sen}\theta + H \cos\theta)' &= 0 \end{aligned}$$

De la última de estas ecuaciones, tenemos que

$$N(s) \text{sen}\theta(s) + H(s) \cos\theta(s) = N(0) \text{sen}\theta(0) + H(0) \cos\theta(0)$$

pero  $\mathbf{n}(0, t) = \mathbf{0}$  por lo que  $N(s)\text{sen}\theta(s) + H(s)\text{cos}\theta(s) = 0$ . Así, al considerar que  $\text{cos}\theta(s) \neq 0$ , se cumple que  $H\text{sen}\theta = -\frac{N\text{sen}^2\theta}{\text{cos}\theta}$ . Por lo tanto,

$$\left(\frac{N}{\text{cos}\theta}\right)' = -\omega^2 \rho A(s)r(s)$$

Si también suponemos que  $\text{sen}\theta \neq 0$  entonces  $\frac{H}{\text{sen}\theta} = -\frac{N}{\text{cos}\theta}$ . Con esto, tenemos una segunda ecuación

$$\left(\frac{H}{\text{sen}\theta}\right)' = \omega^2 \rho A(s)r(s)$$

Por la forma de  $\mathbf{n}$  y de  $\mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{r}_s \times \mathbf{n} = (\nu H - \eta N)\mathbf{e} \times \mathbf{k}$ . Entonces, la ecuación para el momento angular (1.5.4) es, quitando un factor general  $\mathbf{e} \times \mathbf{k}$ ,

$$M' = -(\nu H - \eta N) - \omega^2 \rho J(s) \text{cos}\theta(s)\text{sen}\theta(s)$$

Consideramos que nuestra barra es hiperelástica y no lineal, por lo que existen funciones continuamente diferenciables

$$(\hat{\nu}(N, H, M, s), \hat{\eta}(N, H, M, s), \hat{\mu}(N, H, M, s)) = (\nu(s), \eta(s), \mu(s))$$

con  $\mu(s) = \theta'(s)$  tales que la matriz  $\frac{\partial(\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\mu})}{\partial(N, H, M)}$  es simétrica y positiva definida.

Además,  $r(s)$  está dada también en términos de  $N, H, M$  y  $\theta$ . Esto se sigue de la forma que tienen **a** y **b**. Considerando que  $\mathbf{r}_s$  es combinación de estos vectores, tenemos que  $\mathbf{r}_s = (\nu \text{cos}\theta - \eta \text{sen}\theta)\mathbf{e} + (\nu \text{sen}\theta + \eta \text{cos}\theta)\mathbf{k}$ , pero en nuestra configuración, el eje está determinado por  $\mathbf{r} = r(s)\mathbf{e} + z(s)\mathbf{k}$ , de donde  $r'(s) = \hat{\nu} \text{cos}\theta - \hat{\eta} \text{sen}\theta$ . Como  $\mathbf{r}(1, t) = R\mathbf{e}$ , entonces  $r(1) = R$ . Usando esta condición de frontera e integrando la derivada de  $r$ , obtenemos que  $r$  como función de  $N, H, M$  y  $\theta$  es

$$r(s) = R - \int_s^1 [\hat{\nu}(N, H, M, \xi) \text{cos}\theta(\xi) - \hat{\eta}(N, H, M, \xi) \text{sen}\theta(\xi)] d\xi$$

Con  $r$  dada de esta forma, las ecuaciones que modelan nuestro problema son

$$\left(\frac{N}{\text{cos}\theta}\right)' = -\omega^2 \rho A(s)r(s)$$

$$\left(\frac{H}{\text{sen}\theta}\right)' = \omega^2 \rho A(s)r(s) \quad (1.1)$$

$$M' = -(\hat{\nu}H - \hat{\eta}N) - \omega^2 \rho J(s) \cos \theta(s) \text{sen}\theta(s)$$

$$\theta'(s) = \hat{\mu}$$

A estas ecuaciones debemos agregarles las condiciones de frontera que surgen de considerar que el extremo dado por  $s = 0$  es libre (por lo que no hay esfuerzos en él) y que el determinado por  $s = 1$  está unido al anillo (por lo que no hay desviación angular en él). Con estas condiciones de frontera, la forma integral de las ecuaciones anteriores es como sigue:

$$N(s) = -\omega^2 \left[ \int_0^s \rho A(\xi)r(\xi)d\xi \right] \cos \theta$$

$$H(s) = \omega^2 \left[ \int_0^s \rho A(\xi)r(\xi)d\xi \right] \text{sen}\theta \quad (1.2)$$

$$M(s) = - \int_0^s [(\hat{\nu}H(\xi) - \hat{\eta}N(\xi)) - \omega^2 \rho J(\xi) \cos \theta(\xi) \text{sen}\theta(\xi)] d\xi$$

$$\theta(s) = \int_1^s \hat{\mu}(N(\xi), H(\xi), M(\xi), \xi) d\xi$$

Considerando por simplicidad que la barra es uniforme ( $\rho A = \text{cte.}$ ), podemos definir un parámetro  $\lambda \equiv \omega^2 \rho A$  del cual dependen las ecuaciones; si la densidad no fuera constante, entonces este parámetro sería una función lo cual complicaría demasiado nuestro problema. En adelante tomaremos a la barra uniforme.

### 2.1.2 Caso recto

El problema anterior es nuestro modelo para el caso general de una barra elástica no lineal unida a un anillo rígido que gira con velocidad angular constante. Como es fácil de observar, este problema es bastante complicado considerando que las funciones constitutivas nos son desconocidas en principio. Tomando en cuenta que además, la ecuación depende de un parámetro, la teoría que usaremos para abordar este problema será la de bifurcaciones. Parte fundamental de esta teoría es la consideración del problema como un problema de punto fijo, es decir, buscamos parejas solución para el problema  $f(\lambda, \mathbf{u}) = \mathbf{u}$ .

Considerando el sistema (1.2), podemos definir  $\mathbf{u} \equiv (N, H, M, \theta)^t$  y el operador

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\lambda \left[ \int_0^s r(\xi) d\xi \right] \cos \theta \\ \lambda \left[ \int_0^s r(\xi) d\xi \right] \sin \theta \\ - \int_0^s \left[ \hat{\nu} H(\xi) - \hat{\eta} N(\xi) + \omega^2 \rho J(\xi) \cos \theta(\xi) \sin \theta(\xi) \right] d\xi \\ \int_1^s \hat{\mu}(N(\xi), H(\xi), M(\xi), \xi) d\xi \end{pmatrix}$$

Nuestro problema es entonces encontrar parejas solución para el problema  $\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{u}) = \mathbf{u}$

En el marco de la teoría de bifurcaciones, se supone que existe un conjunto de soluciones conocidas al problema de punto fijo. A estas soluciones se les llama triviales por constar usualmente de las parejas  $(\lambda, \mathbf{0})$ . En nuestro caso, la búsqueda de esta familia trivial no será tan sencilla por lo que comenzaremos nuestro estudio (abarcando todo lo que resta de este capítulo) con ella.

Para el problema particular que consideramos, la familia trivial de soluciones queda determinada por aquellas configuraciones que preservan a la barra recta. Los estados que se desvían de esta configuración son los estados doblados, los que estudiaremos en el capítulo siguiente.

En el caso en que no hay deformaciones que desvíen a la barra ni del plano  $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$  ni del plano  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{k} \rangle$ , se tiene que  $\theta \equiv 0$ . En este caso, las primeras dos ecuaciones nos dan  $N(s) = -\omega^2 \left[ \int_0^s \rho A(\xi) r(\xi) d\xi \right]$  y  $H(s) = 0$ . A partir de que  $H = 0$  y como  $\hat{\eta}$  es impar en  $H$  (Cf. capítulo 1 sección 6), tenemos en la tercera ecuación que  $M(s) = \int_0^s N(\xi) \hat{\eta}(N(\xi), 0, M(\xi), \xi) d\xi = 0$ . Así, las ecuaciones que describen el comportamiento de la barra en este caso son

$$\begin{aligned} N(s) &= -\omega^2 \left[ \int_0^s \rho A(\xi) r(\xi) d\xi \right] \\ r(s) &= R - \int_s^1 \hat{\nu}(N(\xi), \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde  $\hat{\nu}(N(\xi), \xi) \equiv \hat{\nu}(N(\xi), 0, 0, \xi)$ .

Las ecuaciones (1.3) es posible obtenerlas si tomamos a la barra restringida al plano  $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$  y considerando únicamente los estados rectos y estacionarios, es decir, tomando a los directores como  $\mathbf{a}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}$  y  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{k} \times \mathbf{a}$  y al eje dado por  $\mathbf{r}(s, t) = r(s)\mathbf{a}(t)$ . Si quisieramos considerar deformaciones en este plano, los directores serían iguales, pero el eje estaría

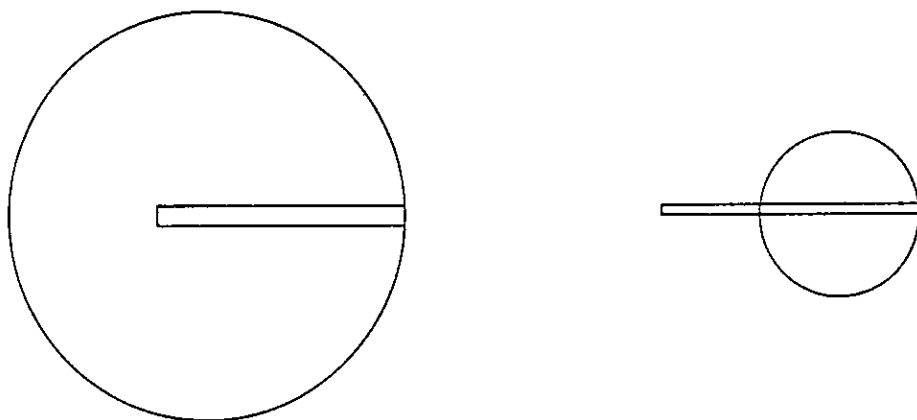


Figura 2.2: Configuración de referencia para barras planas unidas a anillos grandes y pequeños ( $R > 1$  y  $R < 1$  respectivamente).

dado por  $r(s, t) = u(s)a(t) + v(s)b(t)$ .

Si existe una solución para (1.3) con  $r'$  integrable, entonces  $r$  es continua y de la ecuación integral se tiene que  $r$  es  $C^2$  y  $N$  sería 3 veces continuamente diferenciable. Con esto, el sistema es equivalente a la siguiente ecuación de segundo orden

$$N''(s) + \lambda \hat{\nu}(N(s), s) = 0$$

$$N(0) = 0 \quad ; \quad N'(1) = -\lambda R \quad (1.4)$$

Así, podemos definir  $\bar{u} = (N_0, 0, 0, 0)^t$  con  $N_0$  solución de (1.3) (o equivalentemente de (1.4)) y tener que  $g(\lambda, \bar{u}) = \bar{u}$ . Esto último, muestra que  $\bar{u}$  es la solución trivial que buscamos para el sistema (1.2). Una justificación más precisa de esto la encontraremos en el capítulo 3.



## 2.2 Expectativas físicas; comportamiento cualitativo

Antes de abordar matemáticamente el problema al que llegamos en la sección anterior para el caso recto (es decir, la solución trivial mencionada anteriormente), trataremos de conocer de manera intuitiva el tipo de soluciones que esperamos obtener.

Como en este caso,  $\eta = 0$ , entonces  $N$  es de hecho la tensión que sufre la barra (Cf. Capítulo I sección 6). Con esto, una solución al problema será compresiva si  $N(s) < 0$  para  $0 \leq s \leq 1$ , extensiva si  $N(s) > 0$  para  $s$  en el mismo intervalo y de comportamiento mixto si para algún  $s_0 \in [0, 1]$  se tiene que  $N(s) \geq 0$  para  $0 \leq s \leq s_0$  y  $N(s) \leq 0$  para  $s_0 \leq s \leq 1$ . Veremos más adelante que estas son las únicas opciones posibles.

Consideremos primero que  $R \geq 1$  con lo que la barra queda por completo entre la pared y el centro del anillo y supongamos además que aumentamos la velocidad angular lentamente hasta un valor constante  $\omega$ . Una vez alcanzado este valor, al estar la barra en reposo y libre de fuerzas en un sistema de referencia no inercial que gira con velocidad angular constante, ésta sufrirá una densidad de fuerza centrífuga que es esencialmente  $-\lambda r a$  por lo que habrá una tendencia de toda la barra a sufrir compresión. Por lo tanto, en este caso esperamos que exista una solución compresiva  $r(s; \lambda)$  con  $r'(s; \lambda) < 1$  para cada  $s$  y decreciente como función de  $\lambda$ .

Ahora bien, si  $R < 1$  —con lo que la barra tendrá una parte entre la pared del anillo y su centro y otra parte después del centro— y alcanzamos una velocidad angular constante, la fuerza centrífuga producirá compresión en la parte de la barra que está del lado del extremo fijo (al menos para velocidades angulares que no sean demasiado grandes) y extensión en la otra. Podría suceder que el material en tensión sea incapaz de resistir la fuerza centrífuga con lo que en este caso no tendríamos soluciones de equilibrio, esto dependerá de que tan grande es  $\omega$ , de las propiedades elásticas del material y de que tan pequeño es  $R$ .

Sin embargo, si  $R < 1$  o incluso  $R < 1/2$ , es posible producir soluciones compresivas de modo artificial. Comprimiendo la barra a la longitud deseada y haciendo girar el anillo rápidamente de tal forma que la fuerza centrífuga

## 2.2. EXPECTATIVAS FÍSICAS; COMPORTAMIENTO CUALITATIVO 53

mantenga a la barra comprimida. Por otro lado, si  $R > 1$ , es posible tener configuraciones con longitud deformada mayor que  $2R$  cuando la rapidez de giro es grande y el material es suficientemente fuerte resistiendo tensiones.

Una vez estudiadas brevemente las expectativas físicas de las soluciones, consideremos las ecuaciones (1.3) en su forma diferencial, esto es

$$\begin{aligned} N'(s) &= -\lambda(s)r(s) \\ r'(s) &= \hat{\nu}(N(s)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Multiplicando la segunda por  $N'(s)$ , tenemos que  $r'N' = \hat{\nu}(N)N'$ . De la primera tenemos que  $N' = -\lambda r$  por lo que  $-\lambda r r' = \hat{\nu}(N)N'$ . Integrando esta ecuación entre 0 y  $s$  y recordando que la función conjugada de energía almacenada definida en 1.6 es  $W^*(N) = \int_0^N \hat{\nu}(\bar{N})d\bar{N}$  por lo que  $\frac{dW^*(N)}{dN} = \hat{\nu}(N)N'$ , tenemos lo siguiente:

$$\frac{\lambda r^2}{2} - \frac{\lambda r^2(0)}{2} + W^*(N(s)) - W^*(N(0)) = 0$$

Vimos que  $N(0) = 0$  y por definición  $W^*(0) = 0$ , con lo que el sistema (1.3) tiene la siguiente integral:

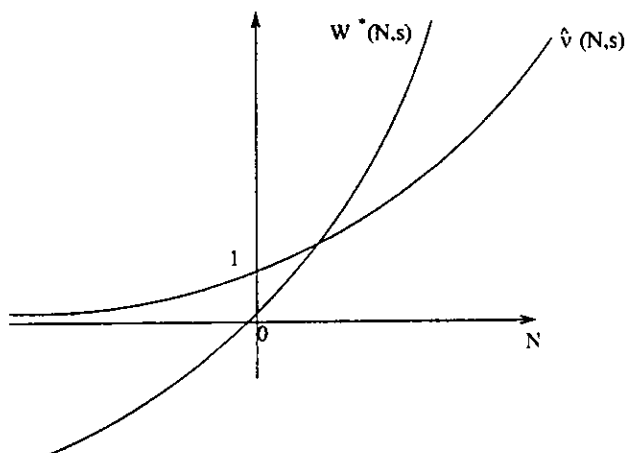
$$\lambda r^2 + 2W^*(N(s)) = 2c \quad (2.1)$$

Con  $\lambda r^2(0) \equiv 2c \geq 0$ .

Dada esta integral del sistema, para estudiar su comportamiento en el plano de fases  $N - r$  necesitamos conocer previamente el comportamiento de  $W^*(N(s))$ . La función  $\hat{\nu}(N)$  satisface (como consecuencia de las condiciones dadas en (1.6) sobre las funciones de esfuerzos) que  $\hat{\nu} > 0$  para todo  $N$ ,  $\hat{\nu}(0) = 1$ ,  $\hat{\nu} \rightarrow 0^+$  cuando  $N \rightarrow -\infty$  y  $\hat{\nu} \rightarrow \infty$  cuando  $N \rightarrow \infty$ ; además,  $\hat{\nu}$  es continuamente diferenciable y  $\hat{\nu}_N > 0$  por lo que  $\hat{\nu}$  es creciente. Así, la forma de  $\hat{\nu}$  es como la mostrada en la figura 2.3.

Como  $W^*(N) = \int_0^N \hat{\nu}(\bar{N})d\bar{N}$ , dada  $\hat{\nu}$  del modo anterior,  $W^*$  será como se muestra en la misma figura. Una función simple que satisface las condiciones sobre  $\hat{\nu}$  es, por ejemplo,  $\hat{\nu}(N) = e^N$  con lo que  $W^*(N) = e^N - 1$ .

De este modo, la integral (2.1) tiene las trayectorias mostradas en la figura (2.4), este es el retrato de fases del sistema (1.3). Solamente aquellas trayectorias que intersectan al eje  $N$  no negativo son consistentes con el

Figura 2.3: Gráficas de  $W^*$  y de  $\hat{v}$ .

requerimiento de que  $c \geq 0$ ; además, cada trayectoria debe comenzar en  $N = 0$  (pues  $N(0) = 0$ ) y terminar en  $r = R$  (pues  $r(1) = R$ ) tomando exactamente una unidad de variable independiente  $s$  en la transición.

Así vemos que sólo puede haber 3 tipos de soluciones como aseguramos más arriba: aquellas con  $N \leq 0$  siempre, con  $N(s) > 0$  para  $0 < s < s_0$  y  $N(s) < 0$  para  $s_0 < s < 1$  ( $s_0 \in (0, 1)$ ) o bien, trayectorias con  $N > 0$  siempre. También podemos observar que  $N$  es simétrica respecto al centro del anillo (para el cual  $r = 0$ ) lo que muestra que la fuerza de deformación depende de la fuerza centrífuga que sufre el material.

Como  $2c = \lambda R^2 + 2W^*(N(1))$ , los parámetros importantes para la determinación de la solución (incluso de su existencia) son la velocidad angular constante a la cual gira la barra ( $\omega = \frac{\lambda}{\rho A}$ ), la longitud de la barra respecto al radio del anillo ( $\frac{1}{R}$ ) y la fuerza de contacto entre el anillo y la barra ( $N(1)$ ). Esta última nos es desconocida en principio, pero tanto  $\lambda$  como  $R$  son determinadas inicialmente.

No es difícil ver que las trayectorias cumplen además lo siguiente:

-La trayectoria correspondiente a  $c_1$  está dentro de la región delimitada por la correspondiente a  $c_2$  si  $c_1 < c_2$ .

2.2. EXPECTATIVAS FÍSICAS; COMPORTAMIENTO CUALITATIVO 55

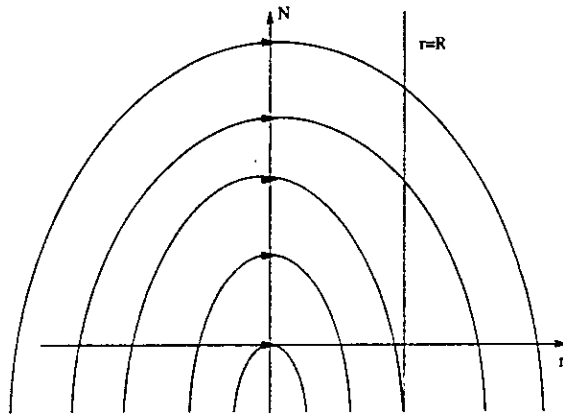


Figura 2.4: Retrato de fases para el sistema de ecuaciones (1.3).

-En cualquier trayectoria  $r^2$  es una función estrictamente decreciente de  $N$ .

-Las trayectorias son asintóticamente paralelas al eje  $N$  cuando  $N \rightarrow \infty$  si y sólo si  $W^*$  es finita cuando  $N \rightarrow -\infty$

Con esta caracterización, podemos considerar que sabemos que tipo de comportamiento esperamos. A partir de ahora, procederemos a probar diversos teoremas en los que aseguramos la existencia de soluciones de diferentes tipos y comprobaremos las propiedades mencionadas; esto será una muestra de la riqueza del problema "trivial".

## 2.3 Existencia de soluciones I

Consideremos la ecuación de esfuerzo-desplazamiento (1.3)

$$r' = \hat{v}(N) \quad r(1) = R$$

$$N' = -\lambda r \quad N(0) = 0$$

Es posible asegurar la existencia y unicidad de soluciones a este problema para algunos valores de  $\lambda$  y de  $R$ , aplicando algunos resultados clásicos en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos resultados se refieren tanto a existencia y unicidad de soluciones como a la dependencia continuamente diferenciable de éstas respecto a parámetros. La formulación y prueba del siguiente teorema puede encontrarse en muchos libros de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en particular se puede consultar [John] páginas 43-53, para su demostración:

**Teorema 3.1** (Dependencia diferenciable respecto a parámetros). *Considere la ecuación  $\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$ ;  $y(x_0) = \phi(\lambda)$ . Sean  $\phi(\lambda)$  definida en  $R_r = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < r\}$  y continua en  $\lambda_0$  y consideremos a  $f$ ,  $f_{y_i}$ ,  $f_{\lambda_i}$  continuas en  $S = \{(x, y, \lambda) : (x, y) \in D \text{ un dominio con } (x_0, \phi(\lambda_0)) \in D \text{ y } \lambda \in R^n\}$ . Supongamos que existe  $y = y(x, \lambda_0)$  solución de la ecuación con  $\lambda = \lambda_0$  en el intervalo finito  $x_0 \leq x \leq x_0 + b$ . Entonces, dada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ , existe una única solución  $y(x, \lambda)$  definida al menos en  $x_0 \leq x \leq x_0 + b - \epsilon$ . Más aún, si  $\phi_{\lambda_i}(\lambda)$  es continua para  $\lambda \in R_p$  con  $r \geq \rho > 0$ , entonces la solución  $y(x, \lambda)$  depende de manera continuamente diferenciable*

de  $\lambda \in R_p$

Con ayuda de este resultado, abordaremos el problema que nos ocupa, la ecuación (1.3). El primer teorema de existencia que consideraremos, lo probaremos usando el llamado método de tiro de Poincaré, método bastante común para la demostración de resultados de existencia en el caso de ecuaciones con valores a la frontera.

**Teorema 3.2.** *Sea  $R > 0$  arbitraria. Entonces (1.3) tiene una única solución con  $N'(0)$  pequeña, si  $\lambda$  es suficientemente pequeña.*

**Demostración.** Consideremos el problema adicional de valores iniciales

$$\begin{aligned} r' &= \hat{\nu}(N) & r(0) &= R - 1 + \alpha \\ N' &= -\lambda r & N(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para  $\lambda_0 = \alpha_0 = 0$ , el problema tiene una solución (única) dada como sigue.  $N' = 0$  por lo que  $N$  es constante, pero como  $N(0) = 0$ , concluimos que  $N \equiv 0$ . Con esto,  $\hat{\nu}(N) = \hat{\nu}(0) = 1$  por lo que  $r(s) = s + R - 1$ . Esta solución está definida en todo el intervalo  $[0, 1]$ .

Como  $\hat{\nu}(N)$  es continuamente diferenciable, tenemos que

$$f(r, N, s, \lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} \hat{\nu}(N(s)) \\ -\lambda r(s) \end{pmatrix}$$

es tal que  $f_N$ ,  $f_r$ ,  $f_\lambda$  y  $f_\alpha$  son continuas. Además, para  $\phi(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} R - 1 + \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$  también  $\phi_\lambda$  y  $\phi_\alpha$  son continuas. Así, por la primera parte del teorema (3.1), se tiene que para  $\lambda$  y  $|\alpha|$  pequeñas existe una única solución al problema adicional de valores iniciales.

Sea esta solución  $(r(\cdot; \alpha, \lambda, R), N(\cdot; \alpha, \lambda, R))$  y definamos  $F(\alpha, \lambda, R) = r(1; \alpha, \lambda, R) - R$ . Si existe  $\alpha$  tal que  $F(\alpha, \lambda, R) = 0$ , entonces la pareja  $(r, N)$  correspondiente a esta  $\alpha$  es solución de nuestro problema original. Por lo que vimos anteriormente,  $F(0, 0, R) = 0$  y de la segunda parte del teorema (3.1), como  $f(r, N)$  es  $C^1$ , se tiene que  $F$  es diferenciable. Si  $\lambda$  no es muy grande y  $F_\alpha(0, 0, R) \neq 0$ , del teorema de la función implícita sabemos que existe  $\alpha$  tal que  $F(\alpha, \lambda, R) = 0$ . Veamos que  $F_\alpha(0, 0, R) \neq 0$ .

Claramente  $F_\alpha(\alpha, \lambda, R) = r_\alpha(1; \alpha, \lambda, R)$  por lo que  $F_\alpha(0, 0, R)$  está determinado por los valores de  $r_\alpha$  en  $\alpha = \lambda = 0$ . De la ecuación (3.1) ( $N' = -\lambda r$ ) se tiene que

$$N'_\alpha(s; \alpha, \lambda, R) = -\lambda r_\alpha(s; \alpha, \lambda, R)$$

por lo que  $N'_\alpha(s; 0, 0, R) = 0$  y entonces  $N_\alpha(s; 0, 0, R) = N_\alpha(0; 0, 0, R)$ . Pero tenemos que  $N(0; \alpha, \lambda, R) = 0$  de donde  $N_\alpha(0; \alpha, \lambda, R) = 0 = N_\alpha(0; 0, 0, R)$

También de la ecuación (3.1) ( $r' = \hat{\nu}(N)$ ) tenemos que

$$r'_\alpha(s; \alpha, \lambda, R) = \hat{\nu}_N(N(s; \alpha, \lambda, R))N_\alpha(s; \alpha, \lambda, R)$$

Como  $N_\alpha(s; 0, 0, R) = 0$  entonces  $r'_\alpha(s; 0, 0, R) = 0$ . Integrando esta última expresión respecto de  $s$ ,  $r_\alpha(s; 0, 0, R)$  es constante y como  $r_\alpha(0; 0, 0, R) = 1$  (pues  $r(0) = R - 1 + \alpha$ ), llegamos a que  $F_\alpha(0, 0, R) = 1 \neq 0$  con lo que concluimos.  $\diamond$

Sea entonces  $\alpha^*(\lambda, R)$  la solución pequeña de  $F(\alpha, \lambda, R) = 0$  para  $\lambda$  no demasiado grande. En este caso, la solución a (1.3) es

$$(r(\cdot; \alpha^*(\lambda, R), \lambda, R), N(\cdot; \alpha^*(\lambda, R), \lambda, R))$$

Considerando esta  $N$  y la derivada respecto de  $\lambda$  de la ecuación (1.4) tenemos lo siguiente:

$$N''_\lambda + \hat{\nu}(N) + \lambda \hat{\nu}_N(N)N_\lambda = 0; \quad N_\lambda(0) = 0 \quad N'_\lambda(1) = -R$$

En  $\lambda = 0$ , como  $N = 0$  en este caso y  $\hat{\nu}(0) = 1$ , la ecuación toma la forma

$$N''_\lambda + 1 = 0 \quad N_\lambda(0) = 0 \quad N'_\lambda(1) = -R$$

Por lo tanto, en  $\lambda = 0$ ,  $N_\lambda(s; 0, 0, R) = -\frac{s^2}{2} + (1 - R)s$ .

Con esto último tenemos lo siguiente: si  $M = \frac{N}{\lambda}$  entonces

$$M'' + \hat{\nu}(\lambda M) = 0 \quad M(0) = 0 \quad M'(1) = -R$$

y para  $\lambda$  cercana a cero, al ser  $\hat{\nu}(0) = 1$  tenemos que  $M$  es cercana a  $N_\lambda(s; 0, 0, R)$  con lo que  $N$  es entonces cercana a  $\lambda N_\lambda(s; 0, 0, R)$  y tiene la forma mostrada a continuación.

Estos resultados confirman la argumentación intuitiva dada en la sección anterior.

Dada esta solución, podemos encontrar ciertas cotas dentro de las cuales se encuentra. Estas cotas además de indicarnos el tamaño aproximado que tiene  $N$ , serán de mucha utilidad más adelante.

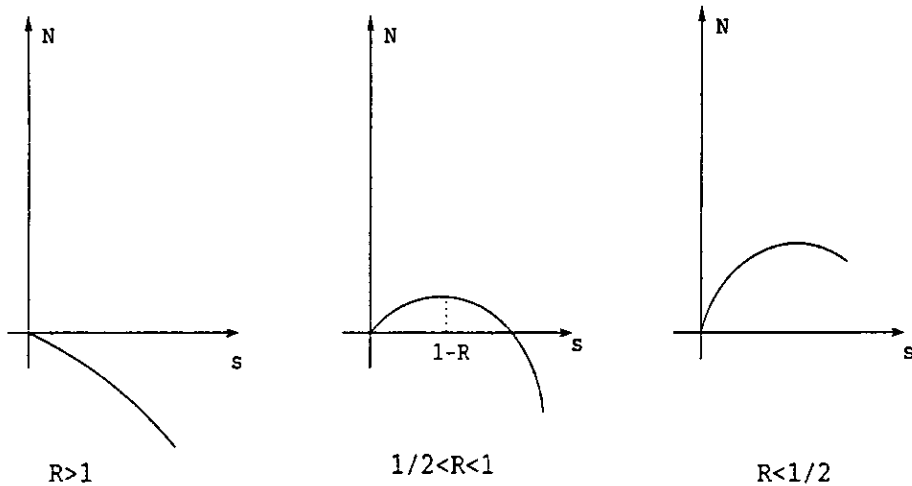


Figura 2.5: Distintas formas que adopta  $N(s)$  para varios radios del anillo cuando  $\lambda$  es pequeño.

Como  $N'$  es decreciente,  $N' \geq -\lambda R = N'(1)$ , con lo que al integrar tenemos que  $N \geq -\lambda R s$ , pues  $N(0) = 0$ . Esto es válido independientemente del signo de  $N'$ .

Si tomamos que  $N' \leq 0$  entonces  $N''' \geq 0$ , pues al derivar la ecuación  $N'' = -\lambda \hat{\nu}(N)$  respecto de  $s$ , tenemos que

$$N''' = -\lambda \hat{\nu}_N N'$$

Podemos afirmar en este caso que  $N'$  es convexa. Con esto,  $N'(s) \leq -\lambda R s$  e integrando esta expresión, llegamos a que  $N(s) \leq -\lambda R \frac{s^2}{2}$ . En el caso en que  $N' \leq 0$ , las 2 desigualdades obtenidas podemos resumirlas como :

$$-\lambda R s \leq N(s) \leq -\lambda R \frac{s^2}{2} \quad (3.2)$$

El segundo resultado de esta sección es un poco más particular, muestra que bajo condiciones sobre  $R$  podemos asegurar la existencia de configuraciones completamente compresivas. Además de eso, un aspecto muy importante



de este resultado es que asegura la existencia de estas soluciones para cualquier  $\lambda$ . En este caso volveremos a aplicar el método de tiro de Poincaré, pero de manera global.

**Teorema 3.3.** Si  $R \geq 1$ , entonces para cada  $\lambda \geq 0$ , el problema (1.3) tiene una solución  $N$  tal que  $-\lambda R s < N(s; \alpha^*(\lambda, R), \lambda, R) < \lambda(-R s + s - \frac{s^2}{2})$  y  $N'(s; \alpha^*(\lambda, R), \lambda, R) < 0$  para cierto  $\alpha^*(\lambda, R)$ .

**Demostración.** Consideremos el problema de valores iniciales (3.1), este sistema es equivalente a las ecuaciones integrales

$$N(s) = -\lambda \int_0^s \tau(\xi) d\xi \quad (a)$$

$$\tau(s) = R - 1 + \alpha + \int_0^s \hat{\nu}(N(\xi)) d\xi \quad (b)$$

La integral de este sistema encontrada en la sección 2 nos asegura que la solución está definida en todo el intervalo  $[0, 1]$  para cualquier elección de los parámetros. Buscamos  $\alpha$  tal que la condición de frontera restante  $r(1) = R$  se satisfaga, es decir que  $\alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(s; \alpha, \lambda, R)) ds = 1$

De (b), como  $\hat{\nu} > 0$ , para  $s \geq 0$  se tiene que

$$R - 1 + \alpha \leq r(s; \alpha, \lambda, R) \leq R - 1 + \alpha + \int_0^s \hat{\nu}(N(s)) ds$$

Con esto, integrando de 0 a  $s$ , considerando que  $\lambda > 0$  y la ecuación (a) llegamos a lo siguiente:

$$-\lambda[R - 1 + \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(\xi)) d\xi] s \leq N(s; \alpha, \lambda, R) \leq -\lambda[R - 1 + \alpha] s$$

Como  $1 \geq s \geq 0$ , entonces

$$-\lambda[R - 1 + \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(\xi)) d\xi] \leq -\lambda[R - 1 + \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(\xi)) d\xi] s$$

Al ser  $\hat{\nu}$  monótona se tiene entonces que

$$\alpha \leq \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(-\lambda[R - 1 + \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(\xi)) d\xi]) ds \leq \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(N(s; \alpha, \lambda, R)) ds \equiv V$$

y además  $V \leq \alpha + \int_0^1 \hat{\nu}(-\lambda[R - 1 + \alpha] s) ds$ .

Ahora bien, si  $R \geq 1$  y  $\alpha = 0$  entonces  $V \leq \int_0^1 \hat{\nu}(-\lambda[R - 1] s) ds$  y  $R - 1 > 0$  por lo que  $-\lambda(R - 1) s < 0$  ( $s > 0$ ). Tenemos también que  $0 < \hat{\nu}(N) < 1$  para  $N < 0$  de donde  $\int_0^1 \hat{\nu}(-\lambda[R - 1] s) ds \leq \int_0^1 ds = 1$ .

Por otro lado, si  $\alpha \rightarrow \infty$  se tiene que  $V \rightarrow \infty$ . Entonces, por el teorema del valor intermedio, al ser  $V$  una función continua de  $\alpha$  (recordemos que  $N$  es diferenciable en  $\alpha$  y  $\hat{v}$  es continuamente diferenciable), debe existir  $\alpha^*(\lambda, R)$  tal que  $V = 1$ , que es la condición de frontera faltante.

Así, como  $\alpha^* + \int_0^1 \hat{v}(N(s; \alpha^*, \lambda, R)) ds = 1$  y vimos que

$$0 < \int_0^1 \hat{v}(N(s; \alpha^*, \lambda, R)) ds \leq \int_0^1 \hat{v}(-\lambda[R-1+\alpha^*]s) ds \leq 1$$

se tiene que  $\alpha^* \geq 0$ . Con esto, tomando en cuenta que

$$-\lambda[R-1+\alpha^* + \int_0^1 \hat{v}(N(\xi; \alpha^*, \lambda, R)) d\xi]s = -\lambda Rs$$

y usando la última desigualdad para  $N$ , se tiene la desigualdad que se encontró anteriormente  $-\lambda Rs \leq N(s; \alpha^*, \lambda, R)$ .

Sabemos también que  $N(s; \alpha^*, \lambda, R) \leq -\lambda(R-1+\alpha^*)s$  con lo que se puede asegurar que  $N(s; \alpha^*, \lambda, R) \leq 0$  (pues  $s > 0$ ,  $R \geq 1$  y tanto  $\alpha^*$  como  $\lambda$  son no negativos). De esto último, podemos afirmar que  $\hat{v}(N(s; \alpha^*, \lambda, R)) \leq 1$  y así,  $\int_s^1 \hat{v}(N(\xi)) d\xi \leq \int_s^1 d\xi = 1 - s$ . Al tener que  $\alpha^* + \int_0^1 \hat{v}(N(s; \alpha^*, \lambda, R)) ds = 1$ , llegamos a la conclusión de que

$$R-1+s \leq R-1+\alpha^* + \int_0^s \hat{v}(N(\xi)) d\xi = \tau(s)$$

De la ecuación integral (a),  $N(s) = -\lambda \int_0^s \tau(\xi) d\xi$ , por lo tanto, aplicando la desigualdad anterior para  $\tau$  e integrando, tenemos que  $N(s) \leq \lambda[-Rs + s - \frac{s^2}{2}]$ . De las dos desigualdades para  $N$  obtenemos que

$$-\lambda Rs \leq N(s; \alpha^*, \lambda, R) \leq \lambda[-Rs + s - \frac{s^2}{2}] \quad (3.3)$$

Como  $R-1+\alpha^* \leq \tau(s; \alpha^*, \lambda, R)$  y  $\alpha^* \geq 0$ ,  $R-1 > 0$ , entonces  $\tau(s; \alpha^*, \lambda, R) > 0$ . Por lo tanto,  $N' = -\lambda \tau < 0$  para  $\alpha = \alpha^*$ , con lo que terminamos la prueba.  $\diamond$

## 2.4 Caso recto como problema variacional

En la sección anterior vimos que existen soluciones en el caso recto para valores pequeños de  $\lambda$  (esencialmente, valores pequeños de la velocidad angular) y para valores de  $R$  cercanos a 1 (*i.e.* con el extremo libre de la barra cercano al centro del anillo). También encontramos soluciones para valores de  $R \geq 1$  (longitud de la barra menor que el radio del anillo) con  $\lambda \geq 0$  arbitraria. En esta sección abordaremos el problema desde un punto de vista variacional y usando esta formulación veremos en la siguiente sección mayores resultados referentes a nuestro problema.

En primer lugar, recordemos que los problemas mecánicos se pueden plantear de manera variacional a través del principio de Hamilton (de mínima acción), el cual es equivalente al planteamiento de Newton. El funcional de acción (o funcional lagrangiano) se define como la integral del lagrangiano del sistema entre los tiempos inicial y final del movimiento,  $S = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt$ . A su vez, en el caso de fuerzas conservativas, el lagrangiano se define como la diferencia entre la energía cinética del sistema y su energía potencial. El principio de Hamilton dice que el movimiento del sistema será tal que  $S$  se encontrará en un punto crítico<sup>1</sup> (para sistemas simples, este punto crítico es un mínimo).

Suponiendo que nuestra barra es hiperelástica, sabemos que existe una función de energía almacenada que proporciona la parte potencial relativa a las fuerzas de contacto. Además, al estar en el caso estacionario, podemos considerar que  $t_f = T$  fija y arbitraria y  $t_0 = 0$ .

En el capítulo 1 (sección 6) vimos que la energía potencial de una barra hiperelástica libre de fuerzas externas estaba dada por

$$\psi[a, b](t) = \int_a^b W(\nu, \eta, \mu, s) ds$$

<sup>1</sup>Dado un funcional  $J[N]$ , la derivada de Gateaux de  $J$  en la dirección  $h$  se define como  $\frac{d}{dt} J[N + th]|_{t=0}$ . La derivada de Frechet de  $J$  es el funcional lineal y acotado  $L$  tal que  $J[N] = L[N] + o(N^2)$ ; no es difícil ver que si existe  $L$  entonces  $L[N]h = \frac{d}{dt} J[N + th]|_{t=0}$ . Decimos que  $J$  tiene un punto crítico en  $N$  si sus derivadas de Gateaux se anulan en todas las direcciones admisibles; en particular, si  $J$  tiene derivada de Frechet, en el punto crítico  $N$  se tiene que  $L[N] \equiv 0$ . Casos particulares de puntos críticos son puntos máximos y mínimos del funcional.

con  $W$  la función de energía almacenada y  $s_1 \leq a < b \leq s_2$ . En el mismo capítulo (sección 4), encontramos que la energía cinética de una barra es

$$K([a, b], t) = \frac{1}{2} \int_a^b (\rho A(s) \mathbf{r}_t(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) + 2\rho I_\gamma(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \mathbf{r}_t(s, t) + \epsilon_{\gamma\mu} \epsilon_{\delta\nu} \rho J_{\mu\nu}(s) \partial_t \mathbf{d}_\gamma(s, t) \cdot \partial_t \mathbf{d}_\delta(s, t)) ds$$

En el caso plano,  $\rho I = \rho I_1$ ,  $\rho I_2 = 0$ ,  $\rho J = \rho J_{22}$ ,  $\rho J_{11} = \rho J_{12} = \rho J_{21} = 0$  y  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ , de donde la energía cinética es

$$K([a, b], t) = \frac{1}{2} \int_a^b [\rho A \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_t + 2\rho I \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{r}_t + \rho J \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{b}_t] ds$$

Para la barra girando, en estado estacionario,  $\mathbf{r}(s, t) = r(s)\mathbf{e}(t) + z(s)\mathbf{k}$  con  $\mathbf{e}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}$  y como consideramos que esto determina el eje de centros de masa de la barra,  $\rho I = 0$ . Además,  $\mathbf{b} = -\sin(\theta(s))\mathbf{e}(t) + \cos\theta(s)\mathbf{k}$  y en el caso recto  $\theta \equiv 0$  por lo que  $\mathbf{b} = \mathbf{k}$  y  $\mathbf{b}_t = \mathbf{0}$ . Así, la energía cinética para nuestro problema es

$$K[a, b](t) = \frac{1}{2} \int_a^b \omega^2 \rho A(s) r^2 ds$$

Con esto, el funcional de acción del sistema que consideramos es:

$$S = \int_0^T \left\{ \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 \omega^2 \rho A(s) r^2(s) ds \right] - \left[ \int_0^1 W(\nu, \eta, \mu, s) ds \right] \right\} dt$$

Recordemos que tomamos a la barra homogénea por lo que  $\rho A$  es constante y  $\lambda = \omega^2 \rho A$ . Además, al estar en el caso recto,  $W$  sólo depende de  $\nu$  (y probablemente de  $s$ ) y tenemos también independencia temporal. Por todo esto,  $S$  toma la siguiente forma:

$$S = T \int_0^1 \left[ \frac{\lambda}{2} r^2(s) - W(\nu, s) \right] ds \quad (4.1)$$

Por las ecuaciones equivalentes (dada la formulación newtoniana), sabemos que  $r = -\frac{N'}{\lambda}$  y  $\nu = \hat{\nu}(N) = -\frac{1}{\lambda} N''$  e introduciendo la transformada de Legendre de  $W$  (la función conjugada de energía almacenada  $W^*$  que satisface que  $W = N\hat{\nu} - W^*$ ) y usando que  $(N'N)' = N''N + (N')^2$  llegamos a lo siguiente:

$$S = \frac{-T}{\lambda} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N'(s)^2 - \lambda W^*(N, s) \right] ds - N'N \Big|_0^1 \right\}$$

Recordemos que  $N'(1) = -\lambda R$  y que  $N(0) = 0$  por lo que  $S$  es  $S = \frac{-T}{\lambda} \Phi_\lambda[N]$  con  $\Phi_\lambda[N]$  definida como sigue:

$$\Phi_\lambda[N] = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N''(s)^2 - \lambda W^*(N(s), s) \right] ds + \lambda RN(1) \quad (4.2)$$

A partir de este momento estudiaremos el comportamiento del funcional  $\Phi_\lambda[N]$  pues es independiente de  $T$ , depende sólo de  $N$  y al ser un múltiplo constante de  $S$ , alcanza sus puntos críticos en los mismos puntos (de hecho, las ecuaciones que determinan estos puntos críticos, las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema, son exactamente las mismas para ambos funcionales).

## 2.5 Existencia de soluciones II

Dada la formulación variacional, podemos usar algunos resultados teóricos para conocer la existencia de soluciones de nuestro problema. Los métodos directos del cálculo de variaciones dan condiciones suficientes para asegurar la existencia de soluciones para problemas en los que se minimizan (o maximizan) funcionales, como en nuestro caso. El principal teorema de existencia que se tiene es una generalización del teorema de Weierstrass del análisis real, el cual dice que toda función continua de valores reales sobre un conjunto compacto alcanza su máximo y su mínimo en él. Haremos un breve paréntesis para ver estos resultados.

Del mismo modo que en el teorema de Weierstrass un concepto fundamental es el de continuidad, para su generalización consideraremos la idea de semicontinuidad.

**Definición.** Sea  $\mathcal{B}$  un espacio lineal normado y completo respecto a esa norma (i.e. un espacio de Banach). Un funcional  $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  es semicontinuo inferiormente en  $y_0$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $J(y) - J(y_0) > -\epsilon$  para  $\|y - y_0\| \leq \delta$ .  $J$  será semicontinuo superiormente en  $y_0$  si para  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $J(y) - J(y_0) < \epsilon$  para  $\|y - y_0\| \leq \delta$ .

Claramente, un funcional semicontinuo tanto superior como inferiormente es simplemente continuo. Dada esta definición, podemos probar entonces la generalización del teorema de Weierstrass.

**Teorema 5.1.** *Si el funcional  $J : B \rightarrow \mathbf{R}$  es semicontinuo inferiormente (o superiormente) sobre un conjunto compacto, entonces su mínimo (o máximo) están sobre el compacto.*

**Demostración.** Sean  $J(f)$  el funcional,  $K$  el compacto y  $\epsilon > 0$ . Para cada  $f_0 \in K$ , por la semicontinuidad inferior de  $J$ , existe una vecindad  $U$  tal que para  $f \in U$ ,  $J(f) \geq J(f_0) - \epsilon$ . Como  $K$  es compacto se tiene que  $J$  es acotado inferiormente sobre  $K$ , sea entonces  $\{f_n\}$  una sucesión minimizante (es decir que  $J(f_n) \rightarrow \inf_K J$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ). Como  $K$  es compacto, existe una subsucesión convergente  $\{f_{n_j}\}$ , sea  $\bar{f} \in K$  su límite. Entonces, por ser  $\{f_{n_j}\}$  convergente y  $J$  semicontinua en  $\bar{f}$ , si  $n_j$  es grande, se tiene que  $J(\bar{f}) - \epsilon \leq J(f_{n_j}) \leq \inf_K J + \epsilon$ .

Así,  $\inf_K J \leq J(\bar{f}) \leq \inf_K J + 2\epsilon$  y como  $\epsilon$  es arbitraria podemos concluir que  $J(\bar{f}) = \inf_K J$ . En el caso de semicontinuidad superior basta con tomar  $-J$ .  $\diamond$

Este resultado puede modificarse para hacer menos restrictivas las hipótesis, principalmente la referente a la compacidad de  $K$  pues en espacios de Banach arbitrarios los conjuntos compactos no son tan fáciles de caracterizar como en  $\mathbf{R}^n$ . La compacidad se usó en dos puntos: para probar que  $J$  es acotado por abajo y para asegurar que la sucesión minimizante tiene una subsucesión convergente. El primer punto puede ser satisfecho si consideramos que  $J$  manda conjuntos acotados en acotados y que  $J \rightarrow \infty$  cuando  $\|f\| \rightarrow \infty$ , esta es la llamada hipótesis de coercividad que será de mucha importancia a lo largo de este trabajo. Para el segundo punto podemos pedir que  $J$  sea semicontinuo en una topología más débil donde esto se cumpla de manera automática o casi automática. Veamos esta idea más a fondo.

Si la norma de nuestro espacio de Banach proviene de un producto interior  $(\cdot, \cdot)$ , entonces hablamos de un espacio de Hilbert. En estos espacios, digamos  $H$ , toda sucesión acotada  $\{f_n\}$  tiene la propiedad de que existe una subsucesión  $\{f_{n_j}\}$  y una  $\bar{f} \in H$  tales que  $(f_{n_j}, g) \rightarrow (\bar{f}, g)$  para toda  $g \in H$ . A este tipo de convergencia se le llama débil (y la topología asociada es la topología débil buscada). El requerimiento de que  $J$  sea semicontinuo en la topología débil sería que para esta subsucesión,  $J(f_{n_j}) \geq J(\bar{f}) - \epsilon$  para  $n_j$  grande (o equivalentemente, que  $J(\bar{f}) \leq \liminf J(f_n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ).

En el caso de espacios de Banach sin producto interior, debemos considerar el dual de este espacio. Si  $B$  es nuestro espacio, su dual es  $B^* = \{v^* : B \rightarrow \mathbf{R} | v^* \text{ es lineal y acotado}\}$ , un espacio de Banach es reflexivo si  $(B^*)^*$  es isométricamente isomorfo a  $B$ . Para un espacio de Banach reflexivo, la con-

vergencia débil se define a través de la generalización del producto interior,  $\langle \cdot, \cdot \rangle: B \times B^* \rightarrow \mathbf{R}$  definido como  $\langle u, v^* \rangle = v^*[u]$  y decimos entonces que  $u_k$  converge débilmente si existe  $\bar{u} \in B$  tal que  $\langle u_k, v^* \rangle \rightarrow \langle \bar{u}, v^* \rangle$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para todo  $v^* \in B^*$

Con estos elementos, la modificación al teorema (5.1) es entonces como enunciamos a continuación. Para su prueba se puede ver [Struwe] página 4.

**Teorema 5.2.** *Sea  $B$  un espacio de Banach reflexivo. Un funcional débil e inferiormente semicontinuo  $J: A \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  con  $A$  un subconjunto débilmente cerrado y no vacío de  $B$  está acotado inferiormente y tiene su mínimo en  $A$  si:*

- (i)  $A$  es acotado ó
- (ii)  $J(u) \rightarrow \infty$  cuando  $\|u\| \rightarrow \infty$  con  $u \in A$

Aplicando este resultado, se puede probar un teorema para el caso concreto de funcionales como aquellos que aparecen en nuestro trabajo. Consideremos que  $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  es una colección de funciones con valores reales,  $f_0$  es una función en  $\{(z, z', s) : z \in \mathbf{R}^m, z' \in V(s), s \in [a, b]\}$  con  $V(s)$  un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbf{R}^m$ .  $\psi_0$  es una función dada y  $b: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

El problema de minimización que consideramos es respecto al funcional

$$J[z] = \psi_0(z(a), z(b)) + \int_a^b f_0(z(s), z'(s), s) ds$$

sobre la clase de funciones  $\mathcal{A}$  para las cuales  $b(z(a), z(b)) = 0$ . Suponemos que existe un espacio de Banach reflexivo  $\mathcal{W}$  tal que  $\mathcal{A} \in \mathcal{W}$ .

Claramente este problema tendrá un mínimo como consecuencia del teorema anterior si el funcional  $J$  es débilmente semicontinuo inferiormente o débilmente continuo y el conjunto  $\mathcal{A}$  es débilmente cerrado. La propiedad sobre  $\mathcal{A}$  es fácil de ver pues supusimos que  $b$  era continuo. De esta continuidad, para  $z_0 = \lim z_j$  con  $z_j \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $b((z_0(a), z_0(b))) = \lim b((z_j(a), z_j(b))) = \lim 0 = 0$ . Esto se debe a que cualquier sucesión débilmente convergente es uniformemente convergente.

El teorema siguiente prueba que  $J$  es débilmente semicontinuo inferiormente con lo que podemos aplicar completamente el teorema 5.2. Si  $\mathcal{A}$  no es acotado, entonces se tendrá que probar además que  $J \rightarrow \infty$  cuando  $\|z\| \rightarrow \infty$  para  $z \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 5.3.** *Sea  $J$  un funcional como el de arriba tal que  $\psi_0$  y  $f_0$  son continuas,  $f_0$  es convexa en  $V(s)$  y  $\psi_0$  es acotada inferiormente. Supongamos*

además que  $F : \mathcal{W} \rightarrow C^0[a, b]$  dado por  $F(\mathbf{z}')(s) = \int_c^s \mathbf{z}'(\xi) d\xi$  con  $c \in [a, b]$  es compacto<sup>2</sup>. Si existe una función integrable  $\gamma$  tal que  $f_0(\mathbf{z}(s), \mathbf{z}'(s), s) \geq \gamma(s)$ , entonces  $J$  es débil e inferiormente continua en  $\mathcal{W}$  y por lo tanto en  $\mathcal{A}$ .

La demostración de este teorema (de una manera un poco más general) se puede encontrar en [Ant] página 240. Nosotros la omitiremos pues el tipo de demostración no aporta demasiado para el caso particular que estudiamos.

Volviendo a nuestro problema, consideremos el funcional  $\Phi_\lambda[N]$  definido más arriba con  $N \in H = \{N \in H^1[0, 1] : N(0) = 0\}$  donde  $H^1[0, 1] = \{N \in \mathcal{L}_2[0, 1] : \int_0^1 (N')^2(s) ds < \infty\}$  (con la derivada tomada en el sentido débil<sup>3</sup>).  $H^1[0, 1]$  es un espacio de Hilbert con el producto interior  $(N, M)_{H^1} = \int_0^1 [NM + N'M'] ds$ . Probaremos a continuación un lema que nos será de utilidad en uno de los teoremas de existencia del caso recto.

**Lema 5.4.** *Sea  $N \in H$ . Entonces se cumple que  $\|N\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq 4\|N'\|_{\mathcal{L}_2}^2$ .*

**Demostración.** Como  $N(0) = 0$ , entonces  $N^2(s) = 2 \int_0^s N(t)N'(t) dt$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz al lado derecho de esta expresión tenemos  $N^2(s) \leq 2 \left(\int_0^s N^2(t) dt\right)^{1/2} \left(\int_0^s (N')^2(t) dt\right)^{1/2}$  y claramente  $\int_0^s N^2(t) dt \leq \int_0^1 N^2(t) dt$  pues  $0 \leq s \leq 1$  y del mismo modo para  $N'$ . Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 N^2(s) ds &\leq \int_0^1 \left[ 2 \left( \int_0^1 N^2(t) dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 (N')^2(t) dt \right)^{1/2} \right] ds \\ &= 2 \left( \int_0^1 N^2(t) dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 (N')^2(t) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados, dividiendo entre  $\int_0^1 N^2(s) ds$  y usando la definición de norma en  $\mathcal{L}_2$ , llegamos a que  $\|N\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq 4\|N'\|_{\mathcal{L}_2}^2$ .  $\diamond$

Una vez visto este resultado, consideremos que el material es suficientemente fuerte resistiendo extensión y probemos el primer teorema de existencia para nuestro problema en esta sección.

**Teorema 5.5.** *Sean  $\lambda$  y  $R$  fijas y arbitrarias. Supongamos que existen números  $\alpha \in (0, \frac{1}{8})$  y  $K > 0$  tales que  $\lambda W^* \leq \alpha N^2 + K$  (esta es la condición*

<sup>2</sup>Decimos que una función es compacta cuando manda conjuntos acotados en conjuntos compactos.

<sup>3</sup>Para  $N \in \mathcal{L}_2[0, 1]$ , se tiene que  $N$  es débilmente diferenciable si  $(N, M') < \infty$  para todo  $M \in C^1[0, 1]$  y la derivada débil de  $N$  se define de tal modo que  $(N', M) = -(N, M')$ .



de que el material sea fuerte resistiendo extensión). Entonces, el problema (1.3) tiene una solución (débil) que minimiza  $\Phi_\lambda$  en  $H$ .

Demostración. Del lema anterior y de la hipótesis referente a la fuerza del material, se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda[N] - \lambda RN(1) &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N'(s)^2 - \lambda W^*(N(s), s) \right] ds \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} N'(s)^2 ds - \lambda \int_{\{s \in [0,1]: N(s) > 0\}} W^*(N(s), s) ds \\ &\geq \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N'(s)^2 - \alpha N^2(s) - K \right] ds \\ &\geq -K + \left(-4\alpha + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N'(s)^2 \right] ds\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\Phi_\lambda[N] \rightarrow \infty$  cuando  $\|N\|_{H^1} \rightarrow \infty$ . De esto y del teorema (5.3), podemos asegurar que existe  $\tilde{N} \in H$  tal que  $\Phi_\lambda[\tilde{N}]$  es mínimo. Por lo tanto, en este caso, el problema (1.3) tiene una solución débil.  $\diamond$

Es posible probar también que de hecho la solución es fuerte, es decir que se puede derivar de la manera usual y sustituir en la ecuación diferencial. Sin embargo, probar esto necesita de mayores herramientas del cálculo de variaciones que no abordaremos (en particular el método de la "agujeta").

Dada la formulación variacional, es posible probar otros resultados, como la existencia de soluciones particulares (soluciones completamente comprimidas, completamente extendidas, independientes de la fuerza del material, etc.). Los siguientes teoremas dan muestra de la variedad de resultados que podemos obtener con estas herramientas, además de evidenciar que el problema "trivial" planteado no es simple. Probaremos que para ciertos valores de  $\lambda$  existen más de una solución a nuestro problema original y que inclusive estas soluciones tienen un carácter completamente distinto, una es compresiva y la otra es tensa.

Dado  $H$  como lo definimos anteriormente, podemos hacerlo un espacio de Hilbert si consideramos el producto interior equivalente  $(N, M)_H = \int_0^1 N' M' ds$ . Por otro lado, sabemos que el funcional  $\Phi_\lambda$  tiene un punto crítico en  $N$  cuando sus derivadas de Gateaux se anulan en todas direcciones, esto es  $\frac{d}{dt} \Phi_\lambda[N + th]|_{t=0} = 0$  con  $h \in H$ . Abusando de la notación, podemos escribir

entonces  $\frac{d}{dt}\Phi_\lambda[N + th]|_{t=0} = (\Phi'_\lambda[N], h)_H$  con  $\Phi'_\lambda[N]$  un operador de  $H$  en  $H$ , pues de este modo  $\Phi_\lambda$  tendrá un punto crítico en  $N$  cuando  $\Phi'_\lambda[N] = 0$  (débilmente). Por la definición de derivada débil y la del producto interior en  $H$ , se tiene que

$$(\Phi'_\lambda[N], h)_H = - \int_0^1 \Phi'_\lambda[N(s)]h''(s)ds$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_\lambda[N + th]|_{t=0} &= \int_0^1 (N'h' - \lambda\hat{\nu}(N)h + \lambda Rh')ds \\ &= - \int_0^1 [N - \lambda \int_0^s \int_\sigma^1 \hat{\nu}(N(\tau))d\tau d\sigma + \lambda Rs]h''ds \end{aligned}$$

para  $h$  adecuadas. No es difícil ver que el conjunto de las  $h$  que satisface esta última igualdad es denso en  $H^1[0, 1]$  por lo que podemos considerar entonces que

$$\Phi'_\lambda[N](s) = N - \lambda \int_0^s \int_\sigma^1 \hat{\nu}(N(\tau))d\tau d\sigma + \lambda Rs \equiv N - K_\lambda[N]$$

y  $\Phi'_\lambda[N]$  está en  $H$  como dijimos anteriormente. Una vez discutido esto, estamos listos para probar el siguiente resultado.

**Teorema 5.6.** *Sea  $R$  dado, entonces existen  $a \leq 0$  y  $\lambda_0 \geq 0$  tales que para todo  $\lambda > \lambda_0$  existe un minimizador local de  $\Phi_\lambda$  relativo al conjunto  $Q_a = \{N \in H : N(s) \leq \lambda a \text{ para } 0 \leq s \leq 1\}$ . Más aún, cuando  $R \geq 1$ , basta tomar  $a = \lambda_0 = 0$ .*

**Demostración.** Para todo  $a \leq 0$  y todo  $\lambda \geq 0$ ,  $\Phi_\lambda$  tiene un ínfimo relativo a  $Q_a$ . Esto sucede pues  $W^*(N) \leq 0$  y es convexo por definición, de donde  $\Phi_\lambda$  es coercivo en  $Q_a$  y como este conjunto es cerrado y convexo, es débilmente cerrado. Anteriormente vimos que  $\Phi_\lambda$  es débilmente semicontinuo inferiormente por lo que usando el teorema (5.2) podemos afirmar que existe un minimizador local respecto a  $Q_a$  por lo que esta solución (débil) es compresiva.

Escojamos ahora  $a \leq 0$  y  $\lambda_0 \geq 0$  tales que  $K_\lambda[\lambda a s] \leq \lambda a s$  para  $\lambda \geq \lambda_0$ . Para esto consideremos dos casos:

(i) Si  $R \geq 1$ , entonces  $K_\lambda[0](s) = \lambda(s - \frac{s^2}{2} - Rs) \leq 0$  para  $s \in [0, 1]$  por lo que podemos tomar  $a = 0$  y  $\lambda_0 = 0$  en este caso.

(ii) En el caso restante,  $0 < R < 1$ , sea  $a$  cualquier número tal que  $-R < a < 0$ . Como  $\hat{\nu}(N) \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow -\infty$ , podemos encontrar un  $\lambda_0 > 0$

tal que  $\int_0^1 \hat{\nu}(\lambda as) ds \leq R + a$  para  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\int_a^1 \hat{\nu}(\lambda a\tau) d\tau \leq \int_0^1 \hat{\nu}(\lambda a\tau) d\tau$ , podemos afirmar que,  $K_\lambda[\lambda as] \leq \lambda \int_0^s (R+a) d\sigma - Rs = \lambda as$ , de donde, tanto  $a$  como  $\lambda_0$ , tienen las propiedades requeridas.

Para esos valores de  $a$  y de  $\lambda_0$ , se tiene que  $K_\lambda[Q_a] \subset Q_a$  para  $\lambda \geq \lambda_0$ . Probemos ahora que el minimizador encontrado es de hecho un punto crítico de  $\Phi_\lambda$ , para esto, sea  $N_1$  este minimizador. Por convexidad de  $Q_a$ , si  $0 \leq t \leq 1$  se tiene que  $N_1 - t\Phi'_\lambda[N_1] = (1-t)N_1 + tK_\lambda[N_1] \in Q_a$ . Si  $N_1$  no fuera un punto crítico, entonces  $\Phi'_\lambda[N_1] \neq 0$  con lo cual, para  $t$  pequeña se tiene que  $\Phi_\lambda(N_1 - t\Phi'_\lambda[N_1]) < \Phi_\lambda(N_1)$  lo cual es imposible pues  $N_1$  es minimizador en  $Q_a$ . Por lo tanto, podemos concluir que  $N_1$  es un punto crítico de  $\Phi_\lambda$ .  $\diamond$

Este teorema prueba la existencia de una solución al problema (1.3) que es un minimizador local (pues es relativo a  $Q_a$ ) de  $\Phi_\lambda$  y que es compresiva. Con este resultado como base, probaremos el siguiente teorema que nos garantiza la existencia de un minimizador global para materiales fuertes con lo que tendremos 2 soluciones que son mínimos del funcional en este caso.

**Teorema 5.7.** *Sea  $R$  dada y supongamos que  $W^*(N)N^{-2} \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$  (es decir, que la barra es fuerte resistiendo extensión). Entonces, existe  $\lambda_1 \geq 0$  tal que para  $\lambda \geq \lambda_1$  existen 2 soluciones de (1.3)  $N_1$  y  $N_2$  tales que  $N_1$  es compresiva,  $N_2$  es tensa y  $\Phi_\lambda[N_2] < \Phi_\lambda[N_1]$ .*

**Demostración.** Si  $N \in Q_0$  entonces  $W^*(N(s)) \leq 0$  para  $0 \leq s \leq 1$  y por lo tanto

$$\Phi_\lambda(N) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 [(N')^2(s)] ds + \lambda RN(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(N' + \lambda R)^2 - \lambda^2 R^2] ds$$

Como  $\frac{1}{2} \int_0^1 (N' + \lambda R)^2 ds \geq 0$ , entonces  $\inf_{Q_0} \Phi_\lambda \geq -\frac{\lambda^2 R^2}{2}$ .

Sea  $M_1 \in H$  dada por  $M_1(s) = \lambda Rs$  para  $0 \leq s \leq 1$ , así,

$$\Phi_\lambda(M_1) = \frac{3}{2} \lambda^2 R^2 - \lambda \int_0^1 W^*(\lambda Rs) ds$$

Sabemos que  $\hat{\nu}(N) \rightarrow \infty$  cuando  $N \rightarrow \infty$  y como  $W^*(N) = \int_0^N \hat{\nu}(\bar{N}) d\bar{N}$  entonces se tiene que  $\frac{W^*(N)}{N} \rightarrow \infty$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . De esto último, podemos afirmar entonces que  $\int_a^b \frac{W^*(\lambda Rs)}{\lambda} ds \rightarrow \infty$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  para todo  $a, b$  tales que  $0 \leq a \leq b \leq 1^4$ .

<sup>4</sup>Esto es consecuencia del Lema de Fatou

De este modo, escojamos  $\lambda^*$  suficientemente grande para asegurar que  $\int_0^1 \frac{W^*(\lambda R s)}{\lambda} ds > 2R^2$  si  $\lambda > \lambda^*$ . Con esto se tiene entonces lo siguiente:

$$\inf_H \Phi_\lambda \leq \Phi_\lambda(M_1) < -\frac{\lambda^2 R^2}{2} \leq \inf_{Q_0} \Phi_\lambda \leq \inf_{Q_a} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda(N_1)$$

para  $a \leq 0$  pues en este caso,  $Q_a \subset Q_0$ .

Ahora bien, como supusimos que  $\hat{\nu}(N) \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow -\infty$  y por hipótesis tenemos que  $W^*(N) = o(N^2)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , entonces  $\Phi_\lambda$  es coercivo pues la parte negativa que podría evitar que tendiera a infinito cuando  $N$  lo hace, decrece a un ritmo menor que la parte positiva que tiende a infinito. Al ser débilmente semicontinuo inferiormente, por el teorema (5.2) tiene un minimizador global (es decir, relativo a todo  $H$ ). Sea  $N_2$  este minimizador global.

$N_2$  debe tener algunos valores positivos pues si no pertenecería a  $Q_0$ , lo que vimos más arriba es imposible. Al ser minimizador global, es solución de (1.3) y se puede probar (usando de nuevo el método de la "agujeta") que es solución fuerte. Por esto se cumple que  $N_2'' = -\lambda \hat{\nu}(N_2)$  con  $\lambda > 0$  y  $\hat{\nu} > 0$  por lo que  $N_2'$  es decreciente. Como  $N_2'(1) = -\lambda R$ , entonces existe  $\sigma \in (0, 1)$  tal que  $N_2'(s) > 0$  para  $0 \leq s < \sigma$  y  $N_2'(s) < 0$  para  $\sigma < s \leq 1$ .

Deseamos probar que  $N_2$  es extensiva, es decir  $N_2 \geq 0$  si  $\lambda$  es grande. Como  $N_2$  es creciente en  $[0, \sigma]$  y decreciente en  $(\sigma, 1]$  nos basta con probar que  $N_2(1) > 0$  pues  $N_2(0) = 0$ . Supongamos lo contrario para llegar a una contradicción, sea  $N_2(1) \leq 0$ .

Sea primero  $\lambda > \lambda^*$  y consideremos la siguiente función

$$M_2(s) = \begin{cases} \lambda R s & 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ \lambda R(1-s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Para  $\sigma \leq s \leq 2\sigma$  definamos  $g(s) = N_2(2\sigma - s)$ , entonces se tiene que  $g''(s) + \lambda \hat{\nu}(g(s)) = 0$ ,  $g(\sigma) = N_2(\sigma)$  y  $g'(\sigma) = 0 = -N_2'(\sigma)$ . Por la unicidad del problema con valores iniciales, en ese intervalo  $g(s) = N_2(s)$  por lo que la parte positiva de  $N_2$  es simétrica respecto de  $\sigma$ . Usando esto y el hecho de que  $0 \geq N_2'(s) \geq -\lambda R$  para  $\sigma \leq s \leq 1$ , podemos concluir que  $0 \leq N_2'(s) \leq \lambda R$  para  $0 \leq s \leq \sigma$ . Además no es difícil ver por la simetría que  $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, integrando las desigualdades para la derivada de  $N_2$  entre 0 y 1, tenemos que  $N_2(s) \leq M_2(s)$  para  $0 \leq s \leq 1$ .

Considerando que  $W^*$  es creciente por lo que  $W^*(N_2) \leq W^*(M_2)$  y tomando en cuenta que  $N_2(1) \geq -\lambda R$ ,  $\frac{1}{2} \int_0^1 (N_2')^2 ds \geq 0$  y

$$\Phi_\lambda(M_1) - \Phi_\lambda(N_2) =$$

$$\left[\frac{\lambda^2 R^2}{2} - \lambda \int_0^1 W^*(\lambda R s) ds + \lambda^2 R^2\right] - \left[\frac{1}{2} \int_0^1 (N_2')^2 ds - \lambda \int_0^1 W^*(N_2) ds + \lambda R N_2(1)\right]$$

podemos concluir que

$$\Phi_\lambda(M_1) - \Phi_\lambda(N_2) \leq \frac{5}{2} \lambda^2 R^2 - \lambda \int_0^1 W^*(\lambda R s) ds + \lambda \int_0^1 W^*(M_2) ds$$

De la definición de  $M_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 W^*(M_2) ds &= \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 W^*(\lambda R(1-s)) ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R s) ds + \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R s) ds \end{aligned}$$

Como  $W^*(0) = 0$  y  $W^*$  es convexa,

$$\int_0^1 W^*(\lambda R t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(2\lambda R s) ds \geq 4 \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R s) ds$$

por lo tanto

$$\Phi_\lambda(M_1) - \Phi_\lambda(N_2) \leq \frac{5}{2} \lambda^2 R^2 - 2\lambda \int_0^{\frac{1}{2}} W^*(\lambda R s) ds$$

Tomando  $\lambda^*$  suficientemente grande para asegurar que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \lambda^{-1} W^*(\lambda R s) ds > \frac{5R^2}{4}$$

para todo  $\lambda > \lambda^*$ , entonces  $\Phi_\lambda(M_1) < \Phi_\lambda(N_2)$  lo cual es imposible pues  $N_2$  es minimizador global del funcional. Por lo tanto, podemos concluir que para  $\lambda > \lambda^*$  cualquier minimizador global de  $\Phi_\lambda$  deberá ser tenso.

Si  $\lambda_1 = \max\{\lambda_0, \lambda^*\}$  con  $\lambda_0$  el valor determinado en el teorema (5.6), entonces podemos afirmar la existencia de las dos soluciones.  $\diamond$

El último resultado que probaremos en esta sección y que completará el estudio de la existencia de soluciones para el caso recto se refiere a la existencia de una segunda solución al problema siempre y cuando éste no sea lineal y el parámetro  $\lambda$  sea suficientemente grande (es decir, que la velocidad angular sea grande). El primer lema que necesitamos para completar el resultado buscado es el siguiente:

**Lema 5.8** (Paso de Montaña). *Sea  $C$  un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert real  $H$  y sea  $\Phi$  un funcional real con derivada de Frechet continua y acotada. Suponga que el funcional asociado  $\Phi'$  se puede escribir  $\Phi'(u) = u - K(u)$  con  $K(C) \subset C$ . Sean  $e_0$  y  $e_1$  dos puntos en  $C$  y sea  $U$  un subconjunto abierto de  $H$  tal que  $e_0 \in C \cap U$  y  $e_1 \in C \setminus \bar{U}$  y suponga además que*

$$\inf \Phi(C \cap \partial U) > \max\{\Phi(e_0), \Phi(e_1)\}$$

*Suponga también que  $\Phi$  satisface la siguiente variante de la condición de Palais-Smale:*

*Si  $\{u_n\}$  es cualquier sucesión en  $C$  tal que  $\{\Phi(u_n)\}$  es acotada y  $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\{u_n\}$  tiene una subsucesión convergente.*

*Entonces  $C$  contiene un punto crítico  $u$  de  $\Phi$  tal que para  $C = \{h \in C([0, 1], C) : h(0) = e_0, h(1) = e_1\}$ ,*

$$\Phi(u) = \inf_{h \in C} \sup \Phi(h([0, 1]))$$

La prueba de este lema es esencialmente la misma que la prueba original de Ambrosetti y Rabinowitz que se puede encontrar en [Amb] considerando las deformaciones hechas por Hofer en [Hof]<sup>5</sup>.

La idea del lema del paso de montaña es simple a pesar de que puede parecer un poco oscuro. Si tenemos dos mínimos diferentes de un funcional (sean dos mínimos locales, uno local y uno global o uno local y menos infinito), bajo ciertas condiciones, entre ellos dos debe haber otro punto crítico que puede pensarse es un punto silla. Ver figura siguiente.

Una vez conocido este resultado, veremos a continuación algunas condiciones sobre el funcional que nos ocupa para asegurar que satisface la condición de Palais-Smale. Para esto probaremos el siguiente lema

**Lema 5.9.** *Suponga que (i)  $W^*(N) = o(N^2)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  o que (ii) existe  $\alpha > 2$  tal que  $W^*(N)N^{-\alpha}$  es creciente para todo  $N$  suficientemente grande. Entonces  $\Phi_\lambda$  satisface la condición de Palais-Smale para todo  $\lambda > 0$ .*

**Demostración.** Sea  $\{N_n\}$  una sucesión en  $H$  tal que  $|\Phi_\lambda(N_n)| < M$  para todo  $n$  y que  $\|\Phi'_\lambda(N_n)\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Supongamos primero que (i)

<sup>5</sup>Estas referencias fueron tomadas del artículo de Burton [Bur] citado en las referencias

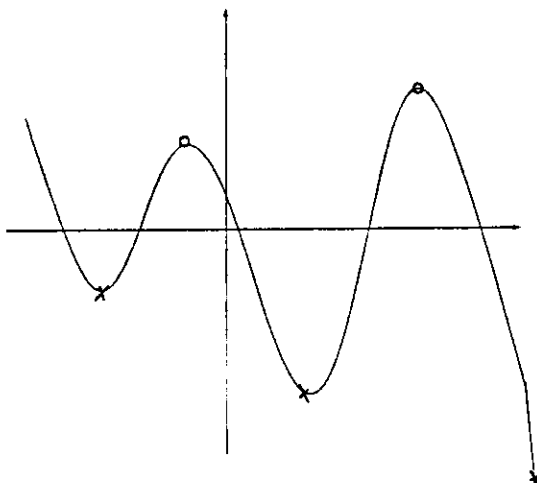


Figura 2.6: Ilustración del lema de paso de montaña. Entre dos valores mínimos hay puntos críticos que, en este caso, es son máximos locales por estar en una dimensión.

se cumple. Como vimos en la prueba del teorema 5.7,  $\Phi_\lambda$  es coercivo en este caso por lo que se sigue inmediatamente que  $\{N_n\}$  es acotada en  $H$ .

Supongamos ahora que (ii) se cumple y escojamos  $m > 0$  tal que  $\alpha W^*(N) \leq N\hat{\nu}(N)$  para todo  $N \geq m$ . Con esto, para  $N \in H$  tenemos que

$$\int_0^1 (\alpha W^*(N) - N\hat{\nu}(N)) ds \leq \int_{N(s) < m} (\alpha W^*(N) - N\hat{\nu}(N)) ds = o(\|N\|)$$

para  $\|N\|$  grande. Esto último es consecuencia de que  $\hat{\nu}(N) \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow -\infty$ .

De las condiciones sobre la sucesión tomada, tenemos que

$$-M \leq \Phi_\lambda(N_n) \leq M$$

$$-\epsilon_n \|N_n\| \leq (\Phi'_\lambda(N_n), N_n) \leq \epsilon_n \|N_n\|$$

donde  $\epsilon_n = \|\Phi'_\lambda(N_n)\|$ ; explícitamente, se tienen las siguientes dos desigualdades (integrando por partes para la segunda):

$$-M \leq \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} N_n'(s)^2 - \lambda W^*(N_n(s), s) \right] ds + \lambda R N_n(1) \leq M$$

$$-\epsilon_n \|N_n\| \leq \int_0^1 [N_n'(s)^2 - \lambda \hat{\nu}(N_n) N_n] ds + \lambda R N_n(1) \leq \epsilon_n \|N_n\|$$

De estas dos desigualdades, obtenemos que

$$\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \int_0^1 N_n'(s)^2 ds \leq$$

$$\lambda \int_0^1 (\alpha W^*(N_n) - N_n \hat{\nu}(N_n)) ds + \alpha M - (\alpha - 1) \lambda R N_n(1) + \epsilon_n \|N_n\|$$

De esta última desigualdad y de la primera se tiene que

$$\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \|N_n\| \leq o(\|N_n\|) + \alpha M + (\alpha - 1) \lambda R \|N_n\| + \epsilon_n \|N_n\|$$

con lo que podemos asegurar que  $\{N_n\}$  es acotada en  $H$ .

Vimos que en ambos casos la sucesión es acotada en  $H$  por lo que tiene un subsucesión débilmente convergente con límite débil  $N_0$ . Al ser  $K_\lambda$  compacto, tenemos que  $K_\lambda(N_{n_j}) \rightarrow K_\lambda(N_0)$  fuertemente en  $H$ . Como también se tiene que  $\Phi'_\lambda(N_{n_j}) \rightarrow 0$  fuertemente en  $H$ , al ser  $\Phi'_\lambda = Id - K_\lambda$  podemos concluir que la subsucesión converge fuertemente lo que asegura la condición de Palais-Smale.  $\diamond$

Con este lema, podemos probar el principal resultado que presentaremos referente a soluciones múltiples. Los siguientes dos teoremas nos aseguran la existencia de dos soluciones para materiales suaves y de tres para materiales fuertes resistiendo extensión al considerar el teorema 5.7.

**Teorema 5.10.** *Suponga que  $W^*(N)N^{-2} \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$  (es decir, que el material es fuerte) y que  $R > 0$ . Entonces, para  $\lambda$  suficientemente grande, existen las dos soluciones descritas anteriormente  $N_1$  y  $N_2$  y una tercera solución  $N_3$  con  $\Phi_\lambda(N_2) < \Phi_\lambda(N_1) < \Phi_\lambda(N_3)$  y  $N_1 < N_3 < N_2$ .*

**Demostración.** Sea  $\lambda > \lambda_1$  como en el teorema 5.7. De ese teorema tenemos que existen  $N_1$  y  $N_2$  como se requieren. Escojamos una bola abierta  $U$  en  $H$  con centro en  $N_1$  tal que  $N_2$  no esté en  $\bar{U}$  y con  $\Phi_\lambda(N_1) < \inf \Phi_\lambda(\partial U)$ . Definamos el siguiente conjunto cerrado y convexo

$$C = \{N \in H : N_1 \leq N \leq N_2\}$$



Como  $K_\lambda$  preserva el orden no es difícil probar que  $K_\lambda(C) \subset C$  y por el lema anterior el funcional tiene la propiedad de Palais-Smale. Con esto, es posible aplicar el lema de paso de montaña lo que asegura la existencia de un tercer punto crítico  $N_3 \in C$  con  $\Phi_\lambda(N_1) < \Phi_\lambda(N_3)$ . Las desigualdades estrictas  $N_1 < N_3 < N_2$  se siguen de las propiedades descritas anteriormente para  $K_\lambda$ .  $\diamond$

Teorema 5.11. *Suponga que  $W^*(N)N^{-\alpha}$  es creciente para  $N$  grande con  $\alpha > 2$  (es decir, que el material es suave) y que  $R > 0$ . Entonces, para  $\lambda$  suficientemente grande, existe  $N_1$  la solución compresiva descrita anteriormente y una segunda solución  $N_2$  que satisface que  $\Phi_\lambda(N_2) > \Phi_\lambda(N_1)$  y que  $N_1 < N_2$ .*

Demostración. Por el teorema 5.6, para  $\lambda > \lambda_0$ , podemos asegurar que existe  $N_1$  punto crítico de nuestro funcional. Escojamos ahora una bola abierta  $U$  con centro en  $N_1$  tal que  $\inf \Phi_\lambda(\partial U) > \Phi_\lambda(N_1)$ . Dado el crecimiento supercuadrático de  $W^*$ , para cualquier  $N_0 \geq 0$  en  $H$ , se cumple que  $\Phi_\lambda(\gamma N_0) \rightarrow -\infty$  cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ . Debido a esto, podemos suponer que  $N_0 \notin \bar{U}$  y  $\Phi_\lambda(N_0) < \Phi_\lambda(N_1)$ . Definamos el siguiente conjunto cerrado y convexo

$$C = \{N \in H : N \geq N_0\}$$

De nueva cuenta, como  $K_\lambda$  preserva el orden en  $H$ , tenemos que  $K_\lambda(C) \in C$ , además  $N_0 \in C$  y por el lema 5.9  $\Phi_\lambda$  satisface la propiedad de Palais-Smale. Con estos elementos, el lema de paso de montaña asegura la existencia de un segundo punto crítico  $N_2 \in C$ . La desigualdad estricta se sigue también de que  $K_\lambda$  preserva el orden.  $\diamond$

Estos son los últimos resultados que tendremos relativos a la existencia de soluciones para la parte trivial. Sin embargo, aún falta estudiar estas soluciones que sabemos existen. El comportamiento de la barra estará íntimamente relacionado con el comportamiento que tenga la función  $N$  con respecto a la velocidad angular del anillo. La próxima sección se refiere a este comportamiento en el caso general. Es importante señalar que los resultados siguientes superan lo hecho en esta dirección tanto en [Ant2] como en [Bur].

## 2.6 Dependencia de la solución respecto a $\lambda$

### 2.6.1 Linealización del caso recto.

Recordemos que la ecuación que describe el comportamiento de la barra en su estado recto es

$$\begin{aligned} N(s) &= -\omega^2 \left[ \int_0^s \rho A(\xi) r(\xi) d\xi \right] \\ r(s) &= R - \int_s^1 \hat{\nu}(N(\xi), \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.3)$$

o lo que es igual

$$N(s) + \lambda \int_0^s R - \int_\sigma^1 \hat{\nu}(N(\xi), \xi) d\xi d\sigma \equiv N - G_0(\lambda, N) \equiv g_0(\lambda, N) = 0$$

Para  $\lambda$  fija, el operador  $G_0$  es continuo como operador de  $C^0$  en si mismo. Esto se sigue fácilmente de la continuidad de  $\hat{\nu}$  y del teorema del valor medio para integrales al considerar que la norma en  $C^0$  es la norma del supremo. Como  $C^2$  está encajado compactamente<sup>6</sup> en  $C^0$ , tenemos que  $G_0$  es un operador compacto pues manda sucesiones acotadas en sucesiones que poseen subsucesiones convergentes. Esto es obvio de la continuidad de  $G_0$  y del encajamiento mencionado anteriormente.

Para el estudio de  $g_0$  es necesario considerar su linealización cerca de una solución conocida  $(\lambda_0, N_0)$ . Esta linealización corresponderá a la derivada de Frechet de  $g_0$  en el caso de que sea un operador acotado y el residuo sea de orden superior. Para este fin, sean  $N = N_0 + n$  y  $\lambda = \lambda_0 + \epsilon$  con lo que se tiene lo siguiente:

$$g_0(\lambda, N) = n + N_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) - \lambda \int_0^s \int_\sigma^1 (\hat{\nu}(N_0 + n) - \hat{\nu}(N_0)) d\xi d\sigma$$

es decir

$$g_0(\lambda, N) = n - \frac{\epsilon}{\lambda_0} N_0 - \lambda \int_0^s \int_\sigma^1 (\hat{\nu}_N(N_0)n) d\xi d\sigma + O(n^2)$$

<sup>6</sup>Es decir, que cualquier sucesión acotada en  $C^2$  tiene una subsucesión convergente en  $C^0$

$$\equiv n - L(\lambda)n - \frac{\epsilon}{\lambda_0}N_0 + O(n^2)$$

Tenemos que  $L(\lambda)$  es derivada de Frechet de  $G_0$  con una cota sobre el residuo mostrada a continuación. Como

$$|G_0(\lambda, N)(s) - G_0(\lambda_0, N_0)(s) - L(\lambda)n(s)| = \\ \lambda \left| \int_0^s \int_\sigma^1 (\hat{\nu}(N) - \hat{\nu}(N_0) - \hat{\nu}_N(N_0)(N - N_0)) d\xi d\sigma \right|$$

y  $\hat{\nu}$  es  $C^2$  como función de  $N$ ,  $H$  y  $M$ , recordando que  $\hat{\nu}_H(N, 0, 0) = \hat{\nu}_M(N, 0, 0) = 0$ , tenemos lo siguiente:

$$\hat{\nu}(N) = \hat{\nu}(N_0) + \hat{\nu}_N(N_0)(N - N_0) + O((N - N_0)^2)$$

Usando el teorema del valor medio para integrales en la expansión para el residuo y la igualdad anterior, se tiene que

$$|G_0(\lambda, N)(s) - G_0(\lambda_0, N_0)(s) - L(\lambda)n(s)| \leq$$

$$\lambda |\hat{\nu}(N(\alpha)) - \hat{\nu}(N_0(\alpha)) - \hat{\nu}_N(N_0(\alpha))(N(\alpha) - N_0(\alpha))| = O((N(\alpha) - N_0(\alpha))^2)$$

con  $\alpha \in [0, 1]$

Como  $|O((N(\alpha) - N_0(\alpha))^2)| \leq |O((N - N_0)^2)|_0$ , podemos asegurar que para  $\lambda$  fija,  $L(\lambda)$  es la derivada de Frechet de  $G_0(\lambda, N)$

Con esto, la linealización de  $g_0$  con respecto a  $\lambda$  y  $N$  es  $L(n, \epsilon) \equiv n - L(\lambda_0)n - \frac{\epsilon}{\lambda_0}N_0$  operador lineal entre  $R \times C^0$  y  $C^0$ . Además,  $L(\lambda_0)n + \frac{\epsilon}{\lambda_0}N_0$  es un operador compacto por lo que tenemos una perturbación lineal y compacta de la identidad. Esto es muy importante por la gran cantidad de resultados que se tienen para estos operadores.

Una noción que es muy importante al considerar operadores lineales entre espacios de Banach, es la de operador de Fredholm.

**Definición** (Operador de Fredholm e índice de Fredholm). Sea  $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  lineal y acotado con  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  espacios de Banach.  $L$  es de Fredholm si

## 2.6. DEPENDENCIA DE LA SOLUCIÓN RESPECTO A $\lambda$

$\dim(\ker L) < \infty$  y  $\text{codim}^7(\text{Rg}L) < \infty$ . Se define el índice de Fredholm como el número finito obtenido de  $\dim(\ker L) - \text{codim}(\text{Rg}L)$ .

Dos de los resultados clásicos de operadores de Fredholm que serán de mucha importancia más adelante son los siguientes:

**Teorema 6.1** *El operador  $L$  es de Fredholm con índice cero si  $L$  es la suma de un operador invertible y uno compacto.*

**Teorema 6.2** *Si  $L$  es de Fredholm con índice cero y  $\dim(\ker L) = 0$ , entonces la ecuación  $Lx = f$  tiene una única solución para todo  $f \in \mathcal{Y}$ . Más aún, el operador inverso  $L^{-1}$  es lineal y acotado.*

Volviendo a nuestro caso, por el teorema 6.1 uno tiene que para  $\epsilon_0$  fija,  $L(n, \epsilon_0) : C^0 \rightarrow C^0$  es de Fredholm con índice cero.

Ahora bien, considerando que  $\epsilon_0 \neq 0$  se tiene  $n_{\epsilon_0} \in \ker(L(n, \epsilon_0))$  si y sólo si  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} n_{\epsilon_0} \in \ker(L(n, \epsilon))$  con  $\epsilon$  real. A partir de esta observación, se tiene que si  $\ker(L(n, \epsilon_0)) = \{n_{\epsilon_0}\}$  y  $n_{\epsilon_0} \neq 0$  entonces  $\ker(L(n, \epsilon))$  es el subespacio generado por  $n_{\epsilon_0}$ . Por lo tanto, si probamos que  $\ker(L(n, \epsilon))$  tiene dimensión uno entonces podemos asegurar que  $L$  es sobre y que para  $\epsilon$  fijo tiene un núcleo con dimensión cero. En este caso,  $L$  sería invertible y podríamos aplicar el teorema de la función implícita en espacios de Banach.

**Teorema 6.3** (de la función implícita de Hildebrandt y Graves). *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  y  $\mathcal{Z}$  espacios de Banach y  $U$  una vecindad de  $(0, 0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . Sea  $g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  continua, con  $g(0, 0) = 0$  y cuya derivada de Frechet existe, es continua en  $U$  y cumple que  $D_x g(0, 0)$  es invertible. Entonces, existe  $V$  vecindad de  $0$  en  $\mathcal{Y}$  tal que  $g(x, y) = 0$  tiene una solución única para  $x$  dada por un operador continuo  $h : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  con  $h(0) = 0$  tal que  $g(h(y), y) = 0$  para todo  $y \in \mathcal{Y}$ . Más aún, si  $g$  es  $k$  veces continuamente diferenciable en  $U$  con  $k \geq 1$ , entonces  $h$  también es  $k$  veces continuamente diferenciable en  $V$ .*

Para la demostración de este teorema, recordemos primero que toda contracción entre espacios de Banach tiene un único punto fijo. Este resultado es el usado en la prueba de existencia y unicidad del problema de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una generalización de este resultado

<sup>7</sup>Si para todo  $x \in \mathcal{X}$  existen dos conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $x = a + b$  con  $a \in \mathcal{A}$  y  $b \in \mathcal{B}$  y esta descomposición es única, entonces tenemos que  $\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ . Se define  $\text{codim} \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$ . No es difícil probar que este valor es independiente de  $\mathcal{B}$ , es decir que es característico de  $\mathcal{A}$ .

es el siguiente lema que nos servirá en la prueba del teorema 6.3.

**Lema 6.4.** Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  espacios de Banach y  $C \in \mathcal{X}$  cerrado y  $V \in \mathcal{Y}$ . Sea  $f : U \times V \rightarrow U$  una contracción uniforme, es decir, que existe  $K \in [0, 1)$  independiente de  $y \in V$  tal que para  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ ,  $\|f(x_1, y) - f(x_2, y)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$ . Supongamos además que  $f$  es continua como función de  $y$  para  $x$  fijo y que  $h(y)$  es el único punto fijo de  $f(\cdot, y)$ . Entonces  $h : V \rightarrow U$  es continua.

**Demostración.** Como  $h$  denota los puntos fijos, por definición tenemos que

$$h(y+z) - h(y) = f(h(y+z), y+z) - f(h(y), y+z) + f(h(y), y+z) - f(h(y), y)$$

de donde

$$\|h(y+z) - h(y)\| \leq K\|h(y+z) - h(y)\| + \|f(h(y), y+z) - f(h(y), y)\|$$

es decir

$$\|h(y+z) - h(y)\| \leq \frac{1}{1-K} \|f(h(y), y+z) - f(h(y), y)\|$$

Por la continuidad de  $f$  como función de  $y$ , tenemos que para todo  $(1-K)\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(h(y), y+z) - f(h(y), y)\| < (1-K)\epsilon$  si  $\|z\| < \delta$ . Por lo tanto, al considerar la última desigualdad,  $h$  es continua.  $\diamond$

Del mismo modo, no es difícil ver que si  $f$  es  $k$  veces continuamente diferenciable entonces  $h$  también lo es. Ahora estamos listos para probar el teorema de la función implícita.

**Demostración**(del teorema de la función implícita). Sea  $A \equiv D_x g(0, 0)$  con  $A$  invertible por hipótesis. Claramente  $g(x, y) = g(x, y) - Ax + Ax$  por lo que la ecuación  $g(x, y) = 0$  se puede escribir como

$$x = -A^{-1}(g(x, y) - Ax) \equiv f(x, y)$$

Por el teorema del valor medio se tiene que

$$g(x, y) - g(w, y) - A(x - w) = \left( \int_0^1 D_x g(tx + (1-t)w, y) - A dt \right) \cdot (x - w)$$

Por la continuidad de la derivada de Frechet de  $g$ , la integral anterior se puede hacer tan pequeña como se quiera para  $(x, w, y)$  cercano a  $(0, 0, 0)$ . Por lo tanto,

$$\|f(x, y) - f(w, y)\| = \|A^{-1}(g(x, y) - g(w, y) - A(x - w))\| =$$

$$\|A^{-1}(\int_0^1 D_x g(tx + (1-t)w, y) - A dt) \cdot (x - w)\| \leq k \|A^{-1}\| \|x - w\|$$

Como dijimos más arriba,  $k$  se puede hacer tan chico como se quiera para  $(x, w, y)$  cercano a  $(0, 0, 0)$  de donde podemos considerar que  $f$  es una contracción uniforme en la componente  $x$  en una vecindad de cero. Claramente  $f$  es continua en  $y$  por lo que aplicando el lema anterior podemos asegurar que existe  $h$  con la misma suavidad que  $g$  tal que  $g(h(y), y) = 0$ .  $\diamond$

En nuestro caso podríamos asegurar entonces que  $g_0(\lambda, N) = 0$  es una curva si  $\ker L(n, \epsilon)$  tiene dimensión uno. Esta curva será parametrizada por  $\lambda$  si  $I - L(\lambda_0)$  es invertible. En caso contrario, al tener que  $N = aN_0 \oplus M$  con  $\ker L(\lambda_0)$  generado por  $N_0$ ,  $a$  real y  $M$  ortogonal a  $N_0$  en  $L^2$ , la curva estará parametrizada por  $a$ . Estas ideas las veremos con mayor detalle más adelante.

En este momento es claro que para poder avanzar en el estudio de nuestro problema, necesitamos conocer el nucleo de la linealización de  $g_0$ .

### 2.6.2 Nucleo de $L(n, \epsilon)$ y curvas de soluciones.

Para estudiar el nucleo de la linealización de  $g_0(\lambda, N)$  debemos considerar que  $L(n, \epsilon) = 0$  es equivalente a  $n - L(\lambda_0)n - \frac{\epsilon}{\lambda_0}N_0 = 0$ . Si tenemos a  $n$  continua y solución de esta ecuación podemos afirmar que de hecho  $n$  tiene dos derivadas continuas por lo que el problema es equivalente a:

$$n'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)n = -\epsilon \hat{\nu}(N_0)$$

$$n(0) = 0 \quad n'(1) = -\epsilon R \quad (6.1)$$

Definamos  $m = n - \frac{\epsilon}{\lambda_0}N_0$ . Entonces, si  $n$  es solución de la ecuación anterior,  $m$  tendrá condiciones de frontera homogéneas y será solución de

$$m'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)m = -\epsilon \hat{\nu}_N(N_0)N_0 \quad (6.2)$$

Para estudiar esta ecuación, consideremos el conjunto  $H = \{\phi \in C^2 : \phi(0) = 0 \quad \phi'(1) = 0\}$  con el producto interior de  $L^2[0, 1]$  y definamos el

operador lineal  $M : H \rightarrow C^0$  dado por

$$M\phi = \phi'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)\phi$$

Este operador es simétrico en  $H$  pues si  $\phi, \psi \in H$  entonces

$$(M\phi, \psi)_H = \int_0^1 (\phi'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)\phi)\psi ds = \\ \int_0^1 (\psi'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)\psi)\phi ds + \phi'\psi - \phi\psi'|_0^1 = (\phi, M\psi)$$

Por otra parte, si  $M^*$  es el adjunto de  $M$ , definido por  $(M\phi, \psi) = (\phi, M^*\psi)$  para  $\phi$  en  $H$ , es fácil ver que necesariamente  $\psi$  satisface la ecuación diferencial y las mismas condiciones de frontera por lo que  $M^* = M$ , es decir,  $M$  es autoadjunto.

Para resolver esta ecuación, consideremos que  $N_0$  es solución de  $N_0'' + \lambda_0 \hat{\nu}(N_0) = 0$  con condiciones  $N_0(0) = 0$  y  $N_0'(1) = -\lambda_0 R$ . Al derivar la ecuación completa, encontramos que  $N_0'$  es solución a su vez de

$$\phi'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)\phi = 0 \quad (6.3)$$

con  $\phi(1) = -\lambda_0 R$  y  $\phi'(0) = -\lambda_0$  (pues  $\hat{\nu}(0) = 1$ ). Una vez conocida esta solución de la ecuación lineal de segundo orden, podemos usar reducción de orden para encontrar una segunda solución linealmente independiente. Esto se hace como sigue:

Consideremos a  $y_1$  solución particular y no trivial de la ecuación de orden  $n$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

Haciendo  $y = y_1 \int u dx$  se tiene entonces que  $y = y_1 z$  y  $z' = u$ . Esto nos lleva a

$$a_0 z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0$$

Pero  $z \equiv 1$  es la solución correspondiente a  $y = y_1$  por lo que  $a_n \equiv 0$ . Sustituyendo el valor de  $u$  tenemos que la ecuación se transforma en

$$a_0 u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u = 0$$

una ecuación de orden  $n - 1$ , como deseabamos.

En nuestro caso, se tiene que  $u$  satisface la ecuación de primer orden  $u' + \frac{2(N_0)'}{N_0}u = 0$  de donde  $u = (N_0')^{-2}$  con lo que la segunda solución es  $N_0' \int_0^s \frac{d\xi}{N_0'^2}$ . Sin embargo, esta solución tiene el inconveniente de que la integral diverge cuando  $N_0'$  se anula.

Para evitar esto, consideremos que

$$\int_0^s \frac{d\xi}{N_0'^2} = \int_0^s \frac{N_0'' d\xi}{-\lambda_0 \hat{\nu}(N_0) N_0'^2} = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^s \frac{1}{\hat{\nu}(N_0)} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{N_0'} \right) d\xi$$

Al integrar por partes la última expresión llegamos a que

$$\int_0^s \frac{d\xi}{N_0'^2} = \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{N_0' \hat{\nu}(N_0)} - \frac{1}{N_0'(0)} + \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi \right)$$

Así,

$$\phi \equiv \frac{1}{\hat{\nu}(N_0)} + N_0' \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi$$

es también solución y la integral esta siempre definida pues  $\hat{\nu} > 0$ . Derivando esta función, tenemos que  $\phi' = N_0'' \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi$  y se tienen los valores de frontera  $\phi(0) = 1$  y  $\phi'(0) = 0$ .

Calculando el Wronskiano de las dos soluciones encontradas, tenemos que

$$W(N_0', \phi) = N_0'' \phi - N_0' \phi' = \frac{N_0''}{\hat{\nu}(N_0)} = -\lambda_0 \neq 0$$

Por lo tanto,  $N_0'$  y  $\phi$  son linealmente independientes. Estos resultados los resumimos en la siguiente proposición.

**Proposición 6.5.** *Sea  $H = \{\phi \in C^2 : \phi(0) = 0 \quad \phi'(1) = 0\}$  con el producto interior de  $L^2[0, 1]$ . Entonces, el operador lineal  $M : H \rightarrow C^0$  dado por  $M\phi = \phi'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N(N_0)\phi$  es simétrico y autoadjunto en  $H$ . Más aún, la ecuación  $M\psi = 0$  tiene como solución general  $\psi = aN_0' + b\phi$  con  $a$  y  $b$  reales donde  $N_0'$  solución de  $N_0'' + \lambda \hat{\nu}(N_0) = 0$  y  $\phi = \frac{1}{\hat{\nu}(N_0)} + N_0' \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi$ .*

Recordemos que para conocer el comportamiento de  $n \in \ker L(n, \epsilon)$  necesitamos considerar a  $m$ , la solución de  $Mm = \epsilon \hat{\nu}(N_0) N_0$  con condiciones homogéneas. Si  $M$ , con las condiciones de frontera homogéneas, fuera invertible y  $M^{-1}$  su inversa, entonces  $m = -\epsilon M^{-1}(\hat{\nu}(N_0) N_0)$  lo que aseguraría que



$$n = m + \frac{\epsilon}{\lambda_0} N_0 = -\epsilon(M^{-1}(\hat{\nu}(N_0)N_0) + \frac{N_0}{\lambda_0})$$

De este modo es claro que en ese caso  $\ker L(n, \epsilon)$  tiene dimensión uno.

Para estudiar la invertibilidad de  $M$  imponemos las condiciones de frontera sobre  $\psi$ . Como  $N_0'' \neq 0$ , llegamos al siguiente sistema para  $a$  y  $b$ :

$$aN_0''(0) + b = 0$$

$$a + b \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} = 0$$

Claramente  $a = b = 0$  es solución del sistema y es la única solución salvo cuando

$$\int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} = \frac{1}{N_0''(0)} \quad (6.4)$$

Si  $N_0''(0) < 0$ , esta condición no puede suceder por lo que podemos asegurar que  $M$  es uno a uno y entonces  $g_0(\lambda, N) = 0$  define una curva de soluciones parametrizada por  $\lambda$ . En este caso, al ser  $N_0'' < 0$ ,  $N_0'$  es decreciente de donde  $N_0'(s) < 0$  y  $N$  mismo es decreciente. Al comenzar en cero, tenemos entonces que la solución es compresiva.

Por otro lado, si definimos

$$\psi = \phi - \frac{N_0''}{N_0''(0)} = \frac{1}{\hat{\nu}(N_0)} + N_0' \left( \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi - \frac{1}{N_0''(0)} \right)$$

entonces  $\psi(0) = 0$  y  $\psi'(s) = N_0'' \left( \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi - \frac{1}{N_0''(0)} \right)$ . Con esto se tiene que  $\psi'(1) = 0$  si y sólo si  $\int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} = \frac{1}{N_0''(0)}$  con lo que  $\psi'(s) = -N_0'' \int_s^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi > 0$ . Por lo tanto,  $\psi$  es creciente y no negativa. Esto muestra que en el caso que nos interesa,  $\psi$  es solución de la ecuación homogénea.

Dada esta expresión para la solución de la ecuación homogénea, consideremos ahora la ecuación no homogénea  $Mm = -\epsilon\hat{\nu}_N N_0$  en el espacio  $H$ . Si  $m$  es solución de esta ecuación, entonces se cumple que  $(Mm, \psi)_H = (-\epsilon\hat{\nu}_N N_0, \psi)_H$  para todo  $\psi \in H$ . Al ser  $M$  autoadjunto, tenemos que  $(Mm, \psi)_H = (m, M\psi)_H$ . Pero, si  $\psi \in \ker M$ , entonces  $M\psi = 0$  y se tiene que cumplir que  $(-\epsilon\hat{\nu}_N N_0, \psi)_H = 0$ . Esta es una versión sencilla de lo que

se conoce como alternativa de Fredholm.

Para nuestro caso, esta condición de ortogonalidad es  $\int_0^1 \hat{v}_N N_0 \psi = 0$  o bien  $\epsilon = 0$ . Usando que  $\psi$  es solución de la ecuación homogénea, la primera condición se reduce, al integrar por partes y usar los valores de frontera de  $\psi$ , a lo siguiente:

$$\int_0^1 \hat{v} \psi d\xi - R\psi(1) = 0$$

Además,  $\psi(1) = \frac{1}{\hat{v}(N_0(1))}$  pues  $\int_0^1 \frac{\hat{v}_N}{\hat{v}^2} = \frac{1}{N_0'(0)}$ . Esto transforma la condición de ortogonalidad del siguiente modo:

$$\frac{R}{\hat{v}(N_0(1))} = \int_0^1 (1 + \hat{v} N_0' (\int_0^s \frac{\hat{v}_N}{\hat{v}^2} d\xi - \frac{1}{N_0'(1)})) ds$$

Usando a su vez, que  $\hat{v} = \frac{-N_0''}{\lambda_0}$  entonces

$$\frac{R}{\hat{v}(N_0(1))} = 1 - \int_0^1 \frac{N_0' N_0''}{\lambda_0} (\int_0^s \frac{\hat{v}_N}{\hat{v}^2} d\xi - \frac{1}{N_0'(1)}) ds$$

o lo que es igual,

$$\frac{R}{\hat{v}(N_0(1))} = 1 - \frac{N_0'(0)}{2\lambda_0} - \int_0^1 \frac{N_0'}{2\lambda_0} \frac{d}{dt} (\frac{1}{\hat{v}})$$

Considerando además que  $\hat{v}(N_0(0)) = 1$  y que  $\frac{N_0''}{2\lambda_0 \hat{v}} = -\frac{1}{2}$  tenemos que

$$\frac{R}{\hat{v}(N_0(1))} = 1 - \frac{N_0'(1)}{2\lambda_0 \hat{v}(N_0(1))} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{R}{2\hat{v}(N_0(1))}$$

Esta condición es entonces equivalente a que

$$R = \hat{v}(N_0(1)) \tag{6.5}$$

Con estos resultados, podemos asegurar que se cumple el lema siguiente:

**Lema 6.6.** *La ecuación no homogénea  $M\pi = -\epsilon \hat{v}_N N_0$  tiene una única solución si  $M$  es invertible. En caso contrario, tenemos solución sólo cuando (i)  $\int_0^1 \hat{v}_N N_0 \psi ds = 0$  o bien, (ii)  $\epsilon = 0$ . La condición (i) es equivalente a  $R = \hat{v}(N_0(1))$ .*

Ahora bien, la primera condición de ortogonalidad no es posible si  $N_0 > 0$  pues  $\hat{v}_N > 0$  y  $\psi > 0$  (salvo en cero donde es cero). Por lo tanto, en este

caso, o tenemos una curva parametrizada por  $\lambda$  o no tenemos solución. Análogamente, si  $N_0 < 0$ , es imposible que se cumpla dicha condición de ortogonalidad. De esto es inmediato que las únicas soluciones posibles en este caso son aquellas que cambian de signo (soluciones con una parte comprimida y otra tensa). Como vimos anteriormente, este tipo de soluciones se caracterizan por satisfacer que  $N_0(1) < 0$  de donde (al ser  $\hat{\nu}$  creciente) tenemos que  $\hat{\nu}(N_0(1)) < \hat{\nu}(0) = 1$ .

De esto último, si  $R \geq 1$  es imposible que  $R = \hat{\nu}(N_0(1))$  por lo que en este caso si quisieramos que se cumpliera alguna condición de ortogonalidad, esta tendría que ser  $\epsilon = 0$  lo que nos lleva a que  $m = \psi$ . Claramente  $\alpha\psi$  es también solución con  $\alpha$  real, entonces  $\ker L(n, \epsilon)$  tiene dimensión uno y podemos asegurar que  $g_0(\lambda, N) = 0$  define una curva.

Para la solución obtenida a partir del teorema 5.6 y para aquellas dadas por el teorema 5.7 se cumple que cerca de ellas  $g_0(\lambda, N) = 0$  define una curva. Esto es debido a que en un caso esta solución satisface que  $N_1 < 0$  y para la otra se tiene que  $N_2 > 0$ . En el primer caso la curva esta parametrizada por  $\lambda$  como vimos anteriormente y en el segundo se cumple que  $\epsilon = 0$  con lo que tenemos la curva discutida arriba. Estos resultados serán profundizados más adelante.

De hecho, para la ecuación no homogénea

$$m'' + \lambda_0 \hat{\nu}_N m = -\epsilon \hat{\nu}_N N_0$$

con las condiciones  $m(0) = 0$  y  $m'(1) = 0$ , tenemos que  $N'_0$  y  $\phi$  son soluciones de la homogénea por lo que haciendo variación de parámetros (suponiendo que  $m = a.N'_0 + b\phi$  con  $a$  y  $b$  funciones de  $s$  e imponiendo la condición  $a'N'_0 + b'\phi = 0$ ) tenemos que

$$m(s) = \frac{-\epsilon}{\lambda_0} \left( N_0 + \frac{N_0'^2(s) - N_0'^2(0)}{2\lambda_0 \hat{\nu}(N_0)} \right) + \frac{N'_0(s)}{2\lambda_0} \int_0^s (N_0'^2 - N_0'^2(0)) \left( \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} \right) d\xi$$

es solución particular de la ecuación no homogénea y la solución con las condiciones de frontera es

$$\hat{\psi}(s) = m(s) + a(N'_0(s) - \frac{N'_0(0)}{\hat{\nu}} - N'_0(0)N'_0(s) \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi)$$

donde  $a$  esta dado por

$$a = \frac{\epsilon}{2\lambda_0^2} \left( \int_0^1 (N_0'' - N_0''(0)) \left( \frac{\hat{v}_N}{\hat{v}^2} \right) ds \right) \left( \frac{1}{1 - N_0'(0) \int_0^1 \frac{\hat{v}_N}{\hat{v}^2} ds} \right)$$

Usando los resultados vistos hasta ahora, podemos entonces afirmar la siguiente proposición

**Proposición 6.7.** Si  $N_0$  es solución de  $N_0'' + \lambda_0 \hat{v}(N_0) = 0$  con las condiciones  $N_0(0) = 0$  y  $N_0'(1) = -\lambda_0 R$  con  $N_0'(0) \leq 0$ , entonces, para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , existe una curva  $N(s; \lambda)$  tal que  $N''(s; \lambda) + \lambda \hat{v}(N(s; \lambda)) = 0$ ,  $N(s; \lambda_0) = N_0$  y  $N'(0; \lambda) \leq 0$ .

**Demostración.** Como vimos anteriormente, si  $N_0'(0) \leq 0$  uno tiene localmente la curva  $N(\lambda)$  con  $N''(\lambda) + \lambda \hat{v}(N(\lambda)) = 0$  y las condiciones  $N(0) = 0$  y  $N'(1) = -\lambda R$ . Diferenciando esta ecuación respecto de  $\lambda$  tenemos que  $N_\lambda'' + \lambda \hat{v}_N N_\lambda = -\hat{v}$  con  $N_\lambda(0) = 0$  y  $N_\lambda'(1) = -R$ .

Se tiene que  $n = \psi + \frac{\epsilon N_0}{\lambda_0}$  es solución de

$$n'' + \lambda_0 \hat{v}_N n = -\epsilon \hat{v}$$

con las condiciones  $n(0) = 0$  y  $n'(1) = -\epsilon R$  de donde  $N_\lambda$  es la solución con  $\epsilon = 1$ . A partir de esto,  $N_\lambda = \psi + \frac{N_0}{\lambda_0}$  y tiene derivada en cero  $N_\lambda'(0)$ . De hecho,  $N_\lambda(s; 0)$  es solución de  $N_\lambda''(s; 0) = -1$ ,  $N_\lambda(0; 0) = 0$  y  $N_\lambda'(1; 0) = -R$  por lo que  $N_\lambda(s; 0) = -\frac{s^2}{2} + (1 - R)s$  y  $N_\lambda'(0; 0) = 1 - R$ .

Usando estos resultados, hacemos el siguiente desarrollo:

$$N'(\lambda) = N'(\lambda_0) + N'_\lambda(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$$

es decir

$$N'(\lambda) = -a\mu\lambda_0 + \frac{\lambda}{\lambda_0} N'(0; \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$$

donde  $\mu = \lambda - \lambda_0$  y  $a$  es el valor definido más arriba.

Por lo tanto,  $N'(\lambda; 0) - N'(\lambda_0; 0) = \mu(N'(\lambda_0; 0) - a\lambda_0) + o(\mu)$  y con esto,  $N'(\lambda; 0) - N'(\lambda_0; 0) < 0$  si  $\mu > 0$ . Así, la curva que sale con  $N_0'(0) \leq 0$  continúa con  $N'(0) \leq 0$ . Además, vimos que  $-\lambda R \leq N' \leq -\lambda(R - 1)$  por lo que para toda  $R$ ,  $-\lambda R \leq N' \leq 0$  lo que asegura que la solución no puede tender a infinito (en norma) cuando  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$  por la izquierda para cualquier  $\bar{\lambda}$ .  $\diamond$

Físicamente lo que esto nos representa es que una vez comprimida la barra, al aumentar la velocidad angular lo único que se puede lograr es un

aumento en la compresión de la barra lo que sugiere alguna especie de estabilidad de este estado comprimido respecto a las soluciones triviales.

Por otro lado, para  $R \geq 1$ , tenemos además que la curva que sale de  $\lambda_0 = 0$  es compresiva por lo que se extiende para toda  $\lambda > 0$  con  $N'(0) \leq 0$ . Más aún, en este caso, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 6.8** *Si  $R \geq 1$  entonces existe una solución con  $N'(0) \leq 0$  y para todo  $\lambda \geq 0$  esta solución es la única que cumple esta condición.*

**Demostración.** En este caso, se probó anteriormente que existen soluciones compresivas para todo  $\lambda \geq 0$  y que estas soluciones se encuentran en el cono  $-\lambda R s \leq N(s) \leq -\lambda(R-1)s$ . Estas soluciones estarán sobre una curva en este cono, por lo que es posible extenderlas hasta  $\lambda = 0$ . Sin embargo, probamos en la sección 3 que para  $\lambda = 0$  hay unicidad de las soluciones por lo que la curva que se encuentra en ese cono es única.  $\diamond$

De hecho, probaremos a continuación un resultado similar pero para todas las soluciones compresivas. Recordemos que esto es muy importante pues para cualquier forma que tenga  $\hat{\nu}$ , existen estas soluciones para valores grandes de  $\lambda$ .

**Proposición 6.9.** *Sean  $R > 0$  y  $\hat{\nu}$  dadas. Entonces existe  $\lambda_0 \geq 0$  tal que para todo  $\lambda \geq \lambda_0$  hay una única solución a  $N'' + \lambda \hat{\nu}(N) = 0$ ,  $N(0) = 0$  y  $N'(1) = -\lambda R$  con  $N \leq 0$ .*

**Demostración.** A partir del teorema 5.5 sabemos que existe esta solución compresiva que es un minimizador local de  $\Phi_\lambda$ . Vimos además que para esta solución tenemos que  $g_0(\lambda, N) = 0$  define cerca de ella una curva de soluciones parametrizada por  $\lambda$  que cumple que  $-\lambda R \leq N'(s) \leq -\lambda R s$ . Esta curva (que no es necesariamente única) debe cortar al eje  $\lambda$ . En el punto de corte, tenemos entonces una solución del siguiente problema

$$N'' + \lambda \hat{\nu}(N) = 0 \quad N(0) = 0 \quad N'(0) = 0 \quad (6.6)$$

que cumple además que  $N'(1) = -\lambda R$ .

De la forma de la ecuación y de las dos condiciones iniciales, por el teorema clásico de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, sabemos que existe una única solución analítica en  $\lambda$ .

Por otro lado, al considerar la energía del sistema y usando que para esta solución  $W^*(N(0)) = W^*(0) = 0$  y  $N'(0) = 0$ , se debe de cumplir que  $N'^2(s) + 2\lambda W^*(N(s)) = 0$ .

$N$ , la solución de la ecuación auxiliar 6.6, satisface que  $N'(1) = -\lambda R$  si y sólo si  $\lambda R^2 + 2W^*(N(1)) = 0$ . Definamos entonces la siguiente función:

$$g(\lambda) = \lambda R^2 + 2W^*(N(1; \lambda))$$

Vimos anteriormente que la solución correspondiente a  $\lambda = 0$  es  $N = 0$  por lo que  $g(0) = 0$  y tenemos además que  $g'(\lambda) = R^2 + 2\hat{\nu}(N(1; \lambda))N_\lambda(1)$ . También de lo desarrollado en esta sección es fácil ver que  $N_\lambda = \frac{\hat{\nu}N'}{2\lambda}$  si  $\lambda > 0$ . Usando esto,

$$g'(\lambda) = R^2 + \hat{\nu}(N(1; \lambda)) \frac{N'(1)}{\lambda}$$

Si  $\lambda = 0$  entonces  $N_\lambda = -\frac{R^2}{2}$  con lo que  $g'(0) = R^2 - 1$ .

Ahora bien,

$$g''(\lambda) = \hat{\nu}_N \frac{N_\lambda N''(1)}{\lambda} + \frac{\hat{\nu} N'_\lambda}{\lambda} - \frac{\hat{\nu} N'}{\lambda^2}$$

pero  $N'_\lambda(1; \lambda) = \frac{N'' - \lambda \hat{\nu}}{2\lambda}$  de donde

$$g''(\lambda) = \hat{\nu}_N \frac{N''(1)}{2\lambda^2} + \frac{\hat{\nu}}{2\lambda} \left( \int_0^1 \hat{\nu}(N) ds - \hat{\nu}(N(1)) \right)$$

Como  $N$  es decreciente y  $\hat{\nu}$  es creciente, entonces  $\hat{\nu}(N(1)) \leq \hat{\nu}(N(s))$  por lo que  $\hat{\nu}(N(1)) \leq \int_0^1 \hat{\nu}(N) ds$  de donde  $g''(s) > 0$ . Dado esto, sabemos que  $g$  es convexo y comienza en cero por lo que tendrá a lo más un punto de cruce con el eje  $\lambda$ . El resultado variacional usado anteriormente nos asegura que de hecho este punto de cruce existe lo que termina la prueba.  $\diamond$

Dada esta curva de soluciones parametrizada por  $\lambda$ , podemos de hecho conocer su comportamiento en algunos aspectos. En primer lugar, podemos conocer la pendiente con la cual surge del origen. A este respecto tenemos lo siguiente:

**Proposición 6.10** *La curva  $N(\lambda)$  que sale del origen cumple que  $N_\lambda(0; s) = -\frac{R^2}{2} + (1 - R)s$  por lo que la pendiente de  $N'(0)(\lambda)$  en  $\lambda = 0$  es  $1 - R$ .*

**Demostración.** Como  $N''(\lambda)|_{s=0} = N''_\lambda(0, 0)\lambda + \dots$  pues  $N'(0, 0) = 0$ , tenemos que existe una curva diferenciable  $N'(0)(\lambda)$  que de hecho representa nuestras soluciones. Al derivar la ecuación para  $N(\lambda)$  ( $N'' + \lambda \hat{\nu}(N) = 0$ ) respecto de  $\lambda$ , tenemos que  $N_\lambda$  es solución de  $N''_\lambda + \lambda \hat{\nu}_N N_\lambda = -\hat{\nu}$  con las condiciones  $N_\lambda(0) = 0$  y  $N'_\lambda(1) = -R$ .

Así, en  $\lambda = 0$ , tenemos que  $N''_\lambda = -1$  con  $N_\lambda(0) = 0$  y  $N'_\lambda(1) = -R$ . Por lo tanto, al resolver esta ecuación, tenemos que  $N_\lambda = -\frac{R^2}{2} + (1 - R)s$  de

donde la pendiente de  $N'(0)(\lambda)$  en  $\lambda = 0$  es  $N'_\lambda(0) = 1 - R$ . Esto nos indica los rangos de  $R$  para los cuales la curva que sale del origen es decreciente y aquellos para los que es creciente.  $\diamond$

En el caso en que  $N'(0) \leq 0$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 6.11** *Sea  $N = N(\lambda)$  la curva de soluciones con  $N'(0) \leq 0$ . Entonces,  $N_\lambda < 0$  por lo que la curva es decreciente.*

**Demostración.** Como  $N'(0) \leq 0$  y  $N'$  es decreciente (pues  $N'' < 0$ ) entonces  $N' \leq 0$  y  $N$  es decreciente. Pero  $N(0) = 0$  por lo que de hecho,  $N \leq 0$ . En este caso, la proposición anterior asegura que existe una curva de soluciones  $N = N(\lambda)$  que es derivable con derivada  $N_\lambda = \tilde{\psi} + \frac{N}{\lambda}$  donde  $\tilde{\psi}$  es la función que resuelve el problema lineal no homogéneo, es decir,

$$\tilde{\psi}(s) = m(s) + a(N'_0(s) - \frac{N'_0(0)}{\hat{\nu}} - N'_0(0)N'_0(s) \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi)$$

donde  $a$  está dado por

$$a = \frac{\epsilon}{2\lambda_0^2} \left( \int_0^1 (N'^2 - N'^2(0)) \left( \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} \right) ds \right) \left( \frac{1}{1 - N'_0(0) \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} ds} \right)$$

y

$$m(s) = \frac{-\epsilon}{\lambda_0} \left( N_0 + \frac{N'^2(s) - N'^2(0)}{2\lambda_0 \hat{\nu}(N_0)} + \frac{N'(s)}{2\lambda_0} \int_0^s (N'^2 - N'^2(0)) \left( \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} \right) d\xi \right)$$

De esto tenemos que

$$\tilde{\psi}' = \frac{\hat{\nu}}{2\lambda} \left( \int_0^s (N'^2 - N'^2(0)) \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi - \frac{1 - N'(0) \int_0^s \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi}{1 - N'(0) \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi} \int_0^1 (N'^2 - N'^2(0)) \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi \right)$$

Definiendo  $g(s)$  como  $\tilde{\psi}' = \frac{\hat{\nu}}{2\lambda} g(s)$ , se tiene que  $g(1) = 0$  y

$$g(0) = - \frac{\int_0^1 (N'^2 - N'^2(0)) \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi}{1 - N'(0) \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi} < 0$$

pues  $N'(0) < 0$  y  $N'$  es decreciente de donde  $|N'| \geq |N'(0)|$ . Además, podemos definir otra función, digamos  $h$  tal que  $g'(s) = \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} h(s)$ , es decir,

$$h(s) = N'^2(s) - N'^2(0) + N'(0) \frac{\int_0^s (N'^2 - N'^2(0)) \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi}{1 - N'(0) \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} d\xi}$$

Para  $h$  se tiene que  $h(0) < 0$  pues  $N'(0) < 0$  y  $h'(s) = 2N'N'' > 0$  por lo que  $h$  crece. Si  $h(1) < 0$  entonces  $h(s) < 0$  y  $g'(s) < 0$ . Pero esto es imposible pues  $g(0) < 0$  y  $g(1) = 0$  de donde podemos afirmar que  $h(1) \geq 0$ . Por lo tanto,  $g'$  tiene un cero único por lo que  $g$  es convexa y podemos asegurar que  $g \leq 0$  lo que implica que  $\psi' \leq 0$ .

Como  $N'_\lambda = \tilde{\psi}' + \frac{N'}{\lambda}$  tenemos que  $N'_\lambda \leq 0$  y al ser  $N_\lambda(0; \lambda) = 0$ , entonces  $N_\lambda \leq 0$ , es decir, que la curva de soluciones es, en este caso, decreciente.  $\diamond$

Usando este resultado y algunos de los que usamos para la prueba, es posible probar otra proposición referente a la longitud de la barra.

**Proposición 6.12** *Sea  $R(\lambda)$  la longitud de la barra correspondiente a  $\lambda$ . Entonces, si estamos sobre curvas de soluciones que salen del origen, se cumple que*

(i) *Si la barra está en una rama de soluciones comprimidas,  $R(\lambda)$  es decreciente.*

(ii) *Si la barra está en una rama de soluciones no comprimidas,  $R(\lambda)$  es creciente.*

(iii) *Si la barra está en una rama de soluciones tensas,  $R(\lambda)$  es creciente y  $R(\lambda) > 2R$*

**Demostración.**  $R(\lambda) = r(1) - r(0) = \int_0^1 \hat{\nu}(N) dN$ . Pero en una solución,  $N'' + \lambda \hat{\nu}(N) = 0$  por lo que  $R(\lambda) = \frac{N'(0) - N'(1)}{\lambda} = R + \frac{N'(0)}{\lambda}$ . Sobre una curva diferenciable de soluciones, tenemos entonces que  $R'(\lambda) = \frac{N'_\lambda(0)}{\lambda} - \frac{N'(0)}{\lambda^2}$ .

Recordemos que  $N_\lambda(s) = \tilde{\psi} + \frac{N}{\lambda}$  como vimos en la prueba del teorema anterior. Por lo tanto,  $R'(\lambda) = \frac{\psi'(0)}{\lambda}$ . Como  $\psi'(0) = -a\lambda$  con  $a$  dado en la prueba del teorema anterior considerando que  $\epsilon = 1$ . Por lo tanto,

$$R'(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda_0^2} \left( \int_0^1 (N_0'^2 - N_0'^2(0)) \left( \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} \right) ds \right) \left( \frac{1}{1 - N_0'(0) \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N}{\hat{\nu}^2} ds} \right)$$

Si la rama de soluciones conecta con el origen, entonces el denominador es positivo. Por su parte, para estudiar el signo del numerador, consideremos que  $N'^2 - N_0'^2(0)$  tiene derivada  $2N'N''$  que es igual a  $-2\lambda \hat{\nu} N'$  por lo que tiene signo opuesto a  $N'$ .

Ahora bien, en una rama de soluciones comprimidas se cumple que  $N'(0) < 0$ . Entonces (como  $N'$  es decreciente), tenemos que  $R'(\lambda) < 0$ , es decir,  $R(\lambda)$  es decreciente.

En una rama de soluciones no comprimidas (mixtas o tensas), se cumple que  $N'(0) > 0$ , con lo que (al ser  $N'$  decreciente),  $R'(\lambda) > 0$ , es decir,  $R$  es



creciente como función de  $\lambda$ .

En la rama de soluciones tensas se cumple, además de lo anterior, que  $N'(0) > \lambda R$ . Por la forma de  $R(\lambda)$ , podemos concluir que en este caso,  $R(\lambda) > 2R$ .  $\diamond$ .

El último resultado que veremos respecto a las curvas de soluciones (en general), se refiere a la existencia de una región en la que se encuentran confinadas. Recordemos para esto que la integral de energía está dada por  $N'^2 + 2\lambda W^*(N) = c$  con  $c > 0$ . Si suponemos que  $\int_{-\infty}^0 \hat{\nu}(N) dN < 0$  y llamamos  $A$  a ese valor, tenemos entonces lo siguiente

$$N'^2(0) + 2\lambda A = \lambda^2 R^2 + 2\lambda \bar{W}(N(1))$$

con  $\bar{W}(N) = \int_{-\infty}^N \hat{\nu}(\xi) d\xi$ . Claramente  $\bar{W}(N) \geq 0$  por lo que  $N'^2(0) + 2\lambda A \geq \lambda^2 R^2$ , es decir,  $\lambda R^2 < 2A$  ó  $|N'(0)| \geq \sqrt{\lambda^2 R^2 - 2\lambda A}$ . Así, cuando  $\lambda R^2 \leq 2A$  tenemos que las posibles curvas de solución estarán por afuera de la región delimitada por la hipérbola

$$N'^2(0) = \lambda^2 R^2 - 2\lambda A \tag{6.7}$$

que es asintótica a  $\pm \lambda R$ .

Por otra parte, de la misma integral de energía, tenemos que  $N'(0) > \lambda R$  si y sólo si  $N(1) > 0$  pues  $W^*$  es creciente. Pero las soluciones tensas se encuentran caracterizadas por la última desigualdad de donde podemos afirmar que las soluciones tensas se encuentran entre la recta  $N'(0) = \lambda R$  y la hipérbola encontrada anteriormente.

Hasta este momento, hemos esbozado el comportamiento de las soluciones y su dependencia respecto de  $\lambda$ . En la próxima sección trataremos un caso particular con el cual se ejemplificarán los comportamientos deducidos hasta ahora y se completarán los resultados para todas las soluciones dadas variacionalmente. En el ejemplo que se estudia a continuación se encontrarán completamente las curvas de soluciones que existen para este problema.

## 2.7 Estudio completo para barras suaves

Para hacer el estudio completo de la estructura de soluciones veremos un caso particular en el cual la barra es suave resistiendo extensión. En este

caso la función de esfuerzos  $\hat{\nu}$  depende de la tensión  $N$  de manera exponencial. Vimos que las hipótesis que debe de cumplir la función de esfuerzos son totalmente satisfechas por la función  $\hat{\nu}(N) = e^N$  por lo que podemos considerar un buen ejemplo de comportamiento. Tomamos esta función por simplicidad, sin embargo a partir de los resultados variacionales dados en la sección 5, podemos suponer que cualquier barra suave (caracterizada por cumplir que para  $\alpha > 2$ ,  $W^*(N)N^{-\alpha}$  sea creciente para  $N$  grande) tendrá un comportamiento similar. Incluso, el comportamiento en este caso es un buen indicador de como es el comportamiento para cualquier caso considerando el cambio en el número de soluciones y el tipo de curvas que encontraremos.

En este caso, la integral de energía es

$$N'^2 + 2\lambda e^N = c$$

con  $c = 2\lambda + N'^2(0)$  una constante positiva. Al integrar esta ecuación obtenemos que

$$\int_0^s \frac{N'}{\sqrt{c - 2\lambda e^N}} d\sigma = \epsilon s$$

con  $\epsilon$  igual al signo de  $N'(0)$ . Haciendo el cambio de variables  $v = \sqrt{c - 2\lambda e^N}$  llegamos a que  $N$  está dado como sigue:

$$N(s) = \ln \left( \frac{c}{2\lambda} \left( \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{a - \epsilon \sqrt{cs}}{2} \right)} \right) \right) \quad (7.1)$$

Imponiendo la condición  $N(0) = 0$  tenemos que  $\cosh^2 \left( \frac{a}{2} \right) = \frac{c}{2\lambda}$  y  $N'(0) = \epsilon \sqrt{c} \tanh \left( \frac{a}{2} \right)$ . De esta última ecuación se ve que  $a > 0$  pues  $\epsilon$  es el signo de  $N'(0)$ .

Para  $N'(0) < 0$ , se tiene que  $\epsilon < 0$  y con esto  $N$  está definido siempre con  $N' < 0$ . Este caso fue el que estudiamos en general en la sección anterior.

Por otro lado, si  $N'(0) > 0$  entonces  $\epsilon > 0$  y se tiene que

$$N(s) = \ln \left( \frac{c}{2\lambda} \left( \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{a - \sqrt{cs}}{2} \right)} \right) \right)$$

Con la condición  $N'(1) = -\lambda R$  se tiene que esto es equivalente a pedir que

$$\tanh \left( \frac{\sqrt{c}}{2} \right) = \sqrt{c} \left( \frac{\lambda R + N'(0)}{c + \lambda R N'(0)} \right)$$

Para estudiar esta condición, definamos la siguiente función analítica para  $N'(0) > 0$  y  $\lambda > 0$ :

$$g(\lambda, N'(0)) = \frac{\sqrt{c}}{2} \left( \coth\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{c + \lambda R N'(0)}{\lambda R + N'(0)} \right) \quad (7.2)$$

Para este caso, podemos resumir los resultados vistos hasta ahora en la siguiente proposición.

**Proposición 7.1.** *La ecuación  $N'' + \lambda e^N = 0$  con las condiciones  $N(0) = 0$ ,  $N'(1) = -\lambda R$  y  $N'(0) > 0$ , tiene como solución a*

$$N(s) = \ln \left( \frac{c}{2\lambda} \left( \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{a - \sqrt{c}s}{2}\right)} \right) \right)$$

donde  $\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{c}{2\lambda}$ ,  $N'(0) = \sqrt{c} \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$  y la función  $g(\lambda, N'(0))$  definida en 7.2 es  $g(\lambda, N'(0)) = 0$ .

La función  $g$  satisface que  $g(0, N'(0)) = \frac{N'(0)}{2} \left( \coth\left(\frac{N'(0)}{2}\right) - 1 \right)$  de donde  $g(0, N'(0)) > 0$  para  $N'(0)$  positiva. Por el otro lado,

$$g(\lambda, 0) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right) - \frac{1}{R}$$

Con esto,  $g(0, 0) = 1 - \frac{1}{R}$  y como  $x \coth x$  es creciente, tenemos un cero único para  $g(\lambda, 0)$  si  $1 - \frac{1}{R} \leq 0$  (es decir, si  $R \leq 1$ ). El caso  $R \geq 1$  fue estudiado anteriormente y vimos que existe una solución compresiva que se encuentra en una curva de soluciones parametricada por  $\lambda$ . Debido a esto nos restringiremos por el momento al caso de barras grandes respecto al anillo.

El comportamiento de  $g$  en infinito también proporciona información importante. No es difícil ver que para todo  $N'(0)$ , se tiene que  $g(\lambda, N'(0))$  tiende a infinito cuando  $\lambda$  tiende a infinito. El comportamiento cuando  $N'(0)$  tiende a infinito es un poco menos evidente.

Como

$$\coth\left(\frac{N'(0)}{2} \left(1 + \frac{2\lambda}{(N')^2(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + 2e^{-N'(0)\left(1 + \frac{2\lambda}{(N')^2(0)}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

tenemos que  $\coth\left(\frac{N'(0)}{2} \left(1 + \frac{2\lambda}{(N')^2(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 1$  más rápidamente que cualquier potencia de  $\frac{1}{N'(0)}$ . Además, como

$$g(\lambda, N'(0)) = \frac{N'(0)}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{(N')^2(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \coth \left( \frac{N'(0)}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{(N')^2(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - 1 - \frac{2\lambda}{(N')^2(0)} \left( 1 - \frac{2R}{N'(0)} + \dots \right) \right]$$

se tiene que

$$\lim_{N'(0) \rightarrow \infty} g(\lambda, N'(0)) = \lim_{N'(0) \rightarrow \infty} \frac{N'(0)}{2} \left( 1 + \frac{\lambda}{(N')^2(0)} - 1 - \frac{2\lambda}{(N')^2(0)} \right) = 0^-$$

A partir de esta información, existen más soluciones que las anteriormente descritas. Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 7.2. *Dada la ecuación  $N'' + \lambda e^N = 0$  con las condiciones  $N(0) = 0$  y  $N'(1) = -\lambda R$ , existen siempre soluciones para  $\lambda$  cercana a cero y  $N'(0)$  grande y también para  $\lambda$  y  $N'(0)$  grandes. De hecho, estas soluciones forman localmente una curva.*

Demostración. Como vimos más arriba,  $g(0, N'(0)) > 0$ . Por continuidad de  $g$  podemos asegurar que para  $\lambda > 0$  pequeño, también  $g(\lambda, N'(0)) > 0$ . Por otro lado, se tiene que para todo  $\lambda$ ,  $\lim_{N'(0) \rightarrow \infty} g(\lambda, N'(0)) = 0^-$  por lo que de nueva cuenta, podemos asegurar que para  $\lambda$  pequeño existe  $N'(0)$  grande tal que  $g(\lambda, N'(0)) = 0$ .

Por otro lado, vimos que  $g(\lambda, 0) > 0$  para  $\lambda$  grande pues

$$g(\lambda, 0) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \coth \left( \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \right) - \frac{1}{R}$$

y la función  $x \coth x$  es creciente para  $x > 0$ . Análogamente a lo desarrollado en el párrafo anterior, debido a la continuidad de  $g$  (por el teorema del valor intermedio) y al hecho que para cualquier  $\lambda$ ,  $\lim_{N'(0) \rightarrow \infty} g(\lambda, N'(0)) = 0^-$ , podemos asegurar que existen  $\lambda$  y  $N'(0)$  grandes tales que  $g(\lambda, N'(0)) = 0$ .

Por la analiticidad de  $g$ , podemos asegurar que estas soluciones encontradas forman localmente una curva (consecuencia del teorema de la función implícita).  $\diamond$

Antes de seguir adelante, estudiemos el caso  $R = 0$ . En este caso la función  $g$  se transforma en

$$g(\lambda, N'(0)) = \frac{\sqrt{2\lambda + N'^2(0)}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{2\lambda + N'^2(0)}}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{2\lambda + N'^2(0)}{N'}$$

Definamos una nueva función

$$h(\lambda, N'(0)) = \frac{N'(0)}{2} - \frac{\sqrt{2\lambda + N'^2(0)}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{2\lambda + N'^2(0)}}{2}\right)$$

Claramente, los ceros de  $h$  serán ceros de  $g$  por lo que podemos reducir en este caso el estudio a la función  $h$ .

Se tiene que  $h(0, N'(0)) = \frac{N'(0)}{2}(1 - \tanh \frac{N'(0)}{2}) > 0$  y el comportamiento en infinito es  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda, N'(0)) = -\infty$ . Además,

$$h_\lambda = \frac{-1}{2\sqrt{c}} \left( \tanh \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} (1 - \tanh^2 \frac{\sqrt{c}}{2}) \right) < 0$$

Por lo tanto, para cada  $N'(0)$  hay una única solución y una curva de la forma  $\lambda = \lambda(N'(0))$ . Cerca de  $\lambda = 0$ , esta curva está parametrizada por  $\lambda$  y de hecho vimos que en este caso,  $N'_\lambda = -\frac{s^2}{2} + s$  por lo que  $N'_\lambda(0) = 1$  y  $\lambda'(0) = 1$ .

Además, cuando  $h = 0$ ,  $h_\lambda|_{h=0} = -\frac{N'(0)+\lambda}{2c}$  y  $h_{N'(0)}|_{h=0} = \frac{\lambda}{2c}(2 - N'(0))$ . Por lo tanto, tenemos que  $\lambda'(N'(0)) = \frac{\lambda(2 - N'(0))}{\lambda + N'^2(0)}$ . Esta derivada se anula si  $\lambda = 0$  o si  $N'(0) = 2$ . Pero en  $\lambda = 0$  esto no puede suceder pues en esa región la curva está parametrizada por  $\lambda$  de donde  $N'(0) = 2$  es el extremo de la curva  $\lambda(N'(0))$ . Toda esta información nos lleva a considerar que la curva de soluciones que tenemos en este caso tiene la forma mostrada a continuación.

Hay que señalar que en este caso límite, sólo tenemos una curva de soluciones pues, como veremos más adelante, la otra rama tiende a infinito cuando  $R$  tiende a cero.

Volvamos ahora al estudio de las soluciones para el caso  $R > 0$ . Vimos en la sección anterior que siempre existe una curva de soluciones que sale del origen y que hay otra curva caracterizada por  $N'(0) < 0$  que es de hecho decreciente y que existe para  $\lambda < \lambda_0$ . La proposición 7.2 nos asegura que existen otras dos curvas de soluciones: una para valores pequeños de  $\lambda$  y valores grandes de  $N'(0)$  y otra para valores grandes de los dos parámetros.

Es importante ver si estas cuatro curvas se unen entre sí y si es posible asegurar que no hay más soluciones, al menos en este caso.

Para ver de que manera se unen las curvas encontradas (si es que lo hacen), consideremos la familia de parábolas (parametrizadas por  $N'(0)$ )  $\lambda = a(N')^2(0)$  donde  $a$  es un real positivo. Sobre estas curvas tenemos lo siguiente:

$$g(a(N')^2(0), N'(0)) = \frac{N'(0)}{2} (\sqrt{1+2a} \coth(\frac{N'(0)}{2} \sqrt{1+2a}) - 1) - \frac{2a}{1+aRN'(0)}$$

Definamos la función  $f$  por  $g(a(N')^2(0), N'(0)) = \frac{N'(0)}{2} f(N'(0))$ . Claramente los ceros de  $f$  nos llevan a ceros de  $g(a(N')^2(0), N'(0))$  si  $N'(0) \neq 0$ . Se tiene que  $f(0^+) = \infty$  y  $f(\infty) = \sqrt{1+2a} - 1 > 0$ . Además,

$$f'(N'(0)) = -\left(\frac{1+2a}{2}\right) \frac{1}{\sinh^2(\frac{N'(0)}{2} \sqrt{1+2a})} + \frac{2a^2 R}{(1+aRN'(0))^2}$$

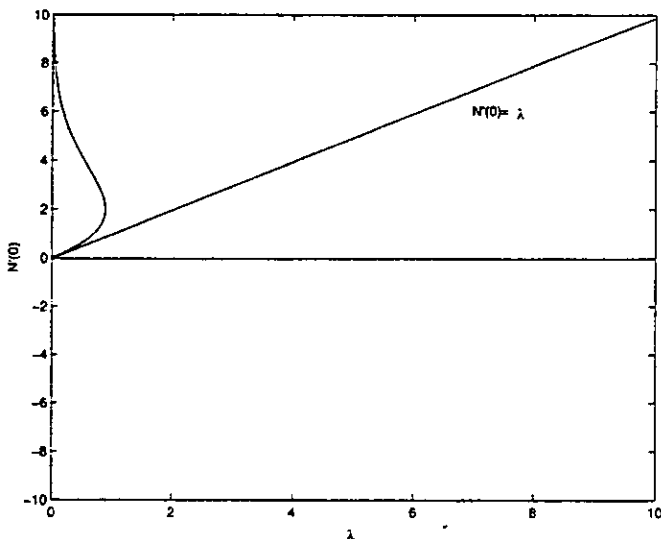


Figura 2.7: Curva de soluciones para el caso límite  $R = 0$ .

Tendremos que  $f'(N_1'(0)) = 0$  si  $N_1'(0)$  es tal que

$$\sinh\left(\frac{N'(0)}{2}\sqrt{1+2a}\right) = \alpha(1 + aRN_1'(0))$$

con  $\alpha = \frac{\sqrt{1+2a}}{2a\sqrt{R}}$ . Es decir, si definimos  $x_1 = \frac{\sqrt{1+2a}}{2}N_1'(0)$  entonces se tiene que  $\sinh(x_1) = \sqrt{R}x_1 + \alpha$ .

No es difícil ver que la función  $\sinh(x) - \sqrt{R}x$  es convexa por lo que hay un único valor  $N_1'(0)$  que cumple que  $f'(N_1'(0)) = 0$  y este valor corresponde a un mínimo de  $f$  (por los valores que tiene  $f$  en cero y en infinito).

Si este mínimo es menor que cero, entonces tenemos 2 puntos en los cuales la parábola  $\lambda = a(N')^2(0)$  intersecta a las curvas  $g(\lambda, N'(0)) = 0$ . Si el mínimo es mayor que cero entonces no hay puntos de intersección. Esto determina cómo son las curvas definidas por  $g(\lambda, N'(0)) = 0$  y nos lleva al siguiente resultado:

**Proposición 7.3.** *Para la ecuación  $N'' + \lambda e^N = 0$  con las condiciones  $N(0) = 0$  y  $N'(1) = -\lambda R$ , existe  $R_c > 0$  tal que se tienen dos curvas de soluciones caracterizadas del siguiente modo:*

(a) *Si  $R \geq R_c$  tenemos que las dos ramas de soluciones abren como funciones de  $\lambda$  y hay un intervalo en el eje  $N'(0)$  positivo en el que no hay soluciones.*

(b) *Si  $R \leq R_c$  las dos ramas de soluciones abren como funciones de  $N'(0)$  y hay un intervalo en el eje  $\lambda$  en el cuales no hay soluciones estacionarias.*

**Demostración.** Para conocer el comportamiento de las curvas, debemos determinar los puntos en que las curvas intersectan a las parábolas  $\lambda = a(N')^2(0)$  con  $a$  real. Como vimos más arriba, esta condición de intersección está determinado por los ceros de la función  $f$  definida por  $g(a(N')^2(0), N'(0)) = \frac{N'(0)}{2}f(N'(0))$ . Sea  $f_0 = f(N_1'(0)) = \min f$ . Tenemos que  $f_0 \leq 0$  si y sólo si

$$a^2R^2N_1'^2(0) - (1 - 2a(R - 1)) \leq 0$$

Esto nos lleva a considerar distintos casos:

(i)  $R \geq 1$  y  $a > \frac{1}{2(R-1)}$ . En este caso,  $f_0 > 0$  con lo que no hay intersección.

Por lo tanto, entre  $N'(0) \equiv 0$  y la parábola  $\lambda = \frac{N'(0)^2}{2(R-1)}$  no hay soluciones.

(ii)  $R \geq 1$  y  $a \leq \frac{1}{2(R-1)}$  ó  $R \leq 0$ . En este caso  $f_0 \leq 0$  si y sólo si

$$N_1'(0) \leq \frac{\sqrt{1+2a-2aR}}{aR} \equiv N_0'(0)$$

o bien

$$x_1 \leq \frac{\sqrt{1+2a}}{2} N'_0(0) \equiv x_0$$

Si  $R \leq 1$ , la función  $\sinh(x) - \sqrt{R}x$  es creciente por lo que  $x_1 \leq x_0$  es equivalente a  $\sinh(x_1) - \sqrt{R}x_1 \leq \sinh(x_0) - \sqrt{R}x_0$ . Esto es a su vez equivalente a  $\sinh(x_0) - \sqrt{R}x_0 - \alpha \geq 0$ .

Para estudiar esta última desigualdad, sea  $z = \frac{1}{2a}$  y definamos la siguiente función:

$$F(z) = \sinh\left(\frac{\sqrt{1+z}\sqrt{1-R+z}}{R}\right) - \frac{\sqrt{1+z}\sqrt{1-R+z}}{R} - \frac{\sqrt{1+z}\sqrt{z}}{\sqrt{R}} \quad (7.3)$$

La desigualdad anterior es entonces equivalente a  $F(z) \geq 0$  con  $z \geq 0$ . Además tenemos que

$$F'(z) = \frac{1}{2R} \frac{(2-R+2z)}{\sqrt{(1+z)(1-R+z)}} \cosh\left(\frac{\sqrt{1+z}\sqrt{1-R+z}}{R}\right) - \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{(2-R+2z)}{\sqrt{(1+z)(1-R+z)}} - \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{(1+2z)}{\sqrt{z(1+z)}}$$

Por lo tanto,  $F'(z) = 0$  si y sólo si

$$\cosh\left(\frac{\sqrt{1+z}\sqrt{1-R+z}}{R}\right) = \sqrt{R} + \sqrt{R} \frac{(1+2z)}{2-R+2z} \sqrt{\frac{1-R+z}{z}} \quad (7.4)$$

El lado izquierdo de esta igualdad es creciente y la derivada del lado derecho es

$$\sqrt{R} \left( \frac{2(1-R)}{(2-R+2z)^2} \sqrt{\frac{1-R}{z} + 1} + 1 - \frac{1}{2z^2} \left( \frac{1+2z}{2-R+2z} \right) \frac{1-R}{\sqrt{\frac{1-R}{z} + 1}} \right)$$

que es igual a

$$\frac{\sqrt{R}(1-R)}{(2-R+2z)^2} \sqrt{\frac{1-R}{z} + 1} \frac{1}{z(1-R)+z} \left( -(1-R+z+Rz + \frac{R}{2}) \right)$$

Esta última expresión es claramente negativa para  $R \leq 1$  por lo que el lado derecho de 7.4 es decreciente. Como dijimos que el lado izquierdo era



creciente, podemos entonces afirmar que  $F'(z)$  es cero sólo en un punto que es de hecho un mínimo para  $F$  pues  $F(0) > 0$  y  $F(\infty) = \infty$ . El hecho de que se tenga un único mínimo asegura el hecho de que hay dos curvas pues cuando tenemos dos intersecciones cuando este mínimo es positivo, una cuando es cero y ninguna cuando es negativo.

Recordemos que  $f_0 \leq 0$  si y sólo si  $F(z) > 0$ , es decir, si  $F$  es siempre positiva, entonces para cualquier parábola tenemos 2 intersecciones de las curvas. Si  $F$  es negativa para algunos valores, en esos valores de  $a$ , la parábola  $\lambda = a(N')^2(0)$  no corta a las ramas de soluciones y tenemos regiones en el eje  $N'(0)$  por las cuales no pasan estas curvas de soluciones. En el caso en que hay siempre intersección, al ser dos curvas ajenas, debe haber al menos un intervalo en el eje  $\lambda$  en el cual no haya soluciones.

En esta página y en las siguientes se muestran algunas gráficas de  $F$  calculadas numéricamente para diferentes valores de  $R$ . A partir de ellas se observa que hay un valor crítico de  $R$  para el cual el comportamiento cambia; sea  $R_c$  este valor.

La existencia de este valor crítico lo podemos ver también del siguiente modo. Al considerar  $F$  con  $R = 1$ , tenemos que  $F(z) = \sinh(\sqrt{1+z}\sqrt{z}) - 2\sqrt{1+z}\sqrt{z}$ . Como la función  $g(x) = \sinh(x) - 2x$  es decreciente en el intervalo  $[0, \cosh^{-1}(2)]$  y  $g(0) = 0$ , entre esos valores será negativa. Por lo tanto, podemos afirmar que  $F$  tomará algunos valores negativos, en particular, su mínimo será negativo. Por otro lado, como  $F \rightarrow \infty$  cuando  $R \rightarrow 0$  para cualquier  $z$ , para  $R$  pequeña,  $F$  será positiva siempre. Así, al ser  $F$  continua como función de  $R$  ( $R > 0$ ), por el teorema del valor intermedio, debe existir  $R_c$  tal que el mínimo de  $F$  sea cero.  $\diamond$

Claramente el valor de  $R_c$  determina el momento en el que las curvas de soluciones se intersectan, es decir, cuando tenemos solución de  $g(\lambda, N'(0)) = 0$  con las condiciones  $\int_0^1 \frac{\dot{v}_N}{v^2} ds = \frac{1}{N'(0)}$  y  $R = \dot{v}(N(1))$ . En casos contrarios tenemos que hay curvas únicas: Cuando  $g(\lambda, N'(0)) = 0$  y  $\int_0^1 \frac{\dot{v}_N}{v^2} ds \neq \frac{1}{N'(0)}$ , tenemos que  $N' = N'(\lambda)$ ; cuando se cumplen las dos condiciones, pero  $R \neq \dot{v}(N(1))$  se tiene que  $\lambda = \lambda(N'(0))$ .

En el caso exponencial, al integrar, la primera condición es

$$\frac{2\lambda R}{c - \lambda^2 R^2} = \frac{2}{N'(0)} - 1$$

Esta expresión se obtiene considerando que  $\sinh(a) = \frac{N'(0)\sqrt{c}}{\lambda}$  y que  $\sinh(a - \sqrt{c}) = -\frac{2\lambda R\sqrt{c}}{c - \lambda^2 R^2}$ .

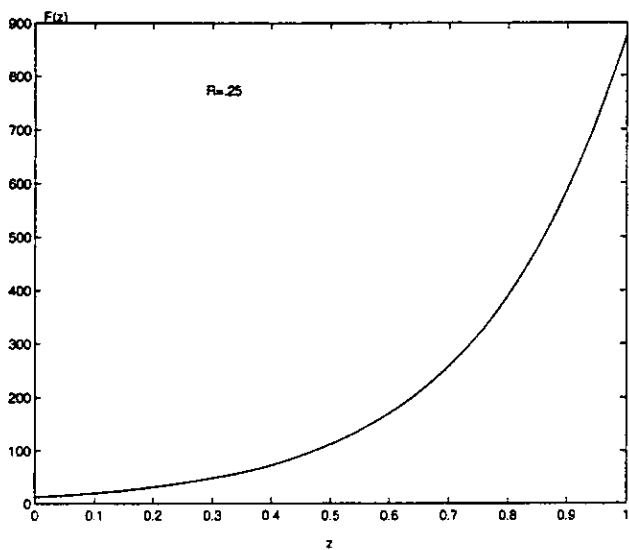


Figura 2.8: Gráfica de  $F$  quando  $R = .25$ .

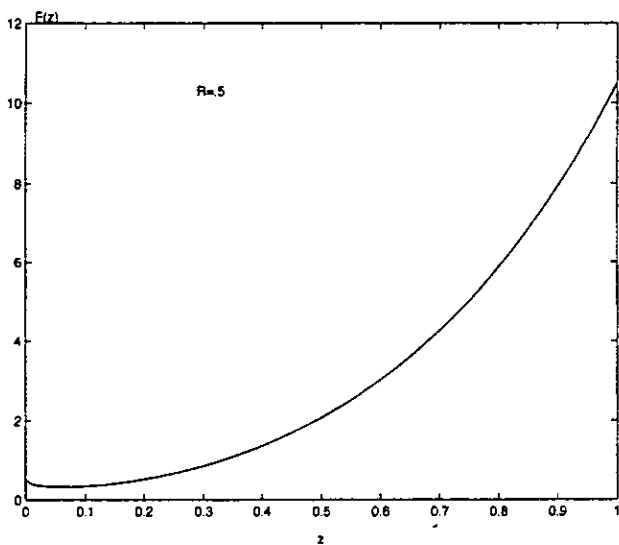
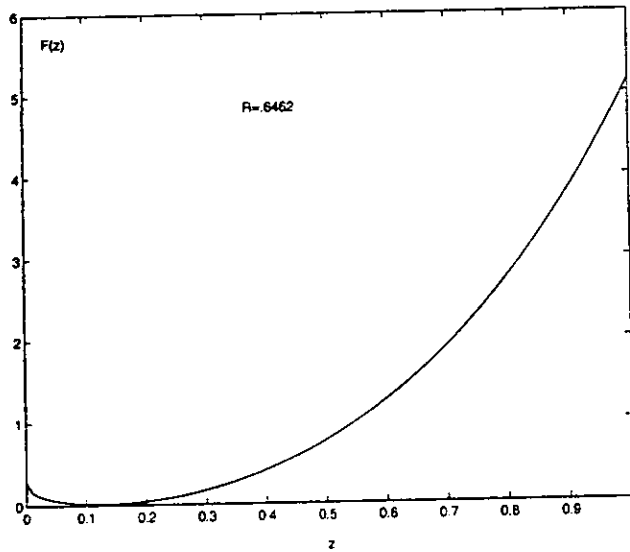
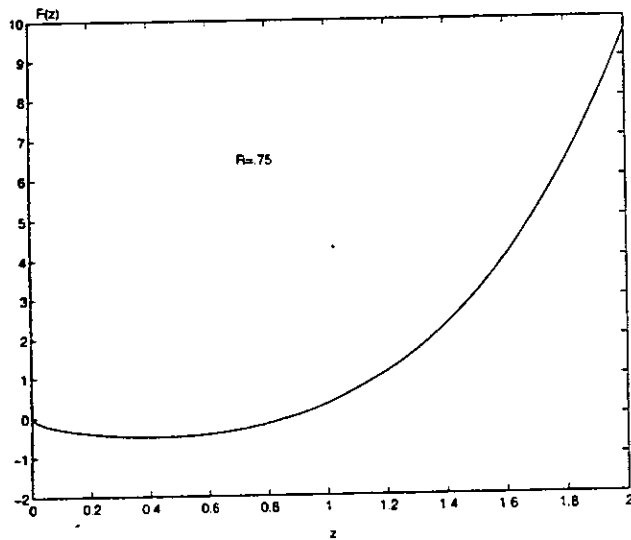
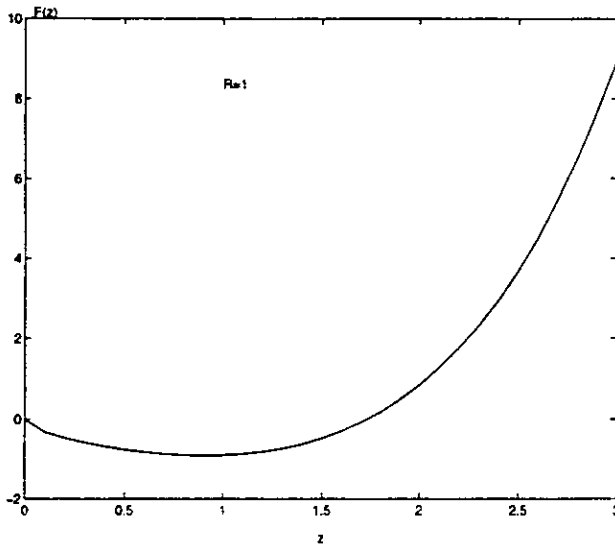


Figura 2.9: Gráfica de  $F$  quando  $R = .5$ .

Figura 2.10: Gráfica de  $F$  cuando  $R = .6462$ .Figura 2.11: Gráfica de  $F$  cuando  $R = .75$ .

Figura 2.12: Gráfica de  $F$  cuando  $R = 1$ .

Esto da también los puntos de tangencia vertical, por ejemplo, para  $R = 0$  se tiene que  $N'(0) = 2$  como vimos anteriormente.

La segunda condición en este caso es  $c - \lambda^2 R^2 = 2\lambda R$ , la que obtenemos usando que  $\tanh\left(\frac{a-\sqrt{c}}{2}\right) = -\frac{\lambda R}{\sqrt{c}}$ .

Al considerar ambas igualdades, tenemos que  $N'(0) = 1$  lo que reduce las restricciones a  $(\lambda R + 1)^2 = 2(\lambda + 1)$ .

Consideremos entonces la curva de soluciones en el valor  $N'(0) = 1$ . Con esto se tiene que

$$g(\lambda, 1) = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{1+2\lambda}}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{2\lambda + 1 + \lambda R}{\lambda R + 1}$$

Si hacemos  $x = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{2}$  entonces tenemos la siguiente función:

$$g(x) = x \coth(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \quad (7.5)$$

Numéricamente es posible encontrar el valor de  $x$  para el cual  $g(x_0) = 0$ .

El valor obtenido, usando el programa Matlab de computadora, es  $x_0 =$

1.2473 con lo cual,  $\lambda_0 = \frac{4z_0^2-1}{2} = 2.6115$ . El valor crítico de  $R$  es entonces  $R_c = \frac{\sqrt{2(\lambda_0+1)}-1}{\lambda_0} = 0.6462$ . Este valor coincide con aquel en el cual las gráficas mostradas anteriormente cambiaban su comportamiento.

Por último, para determinar la naturaleza de las soluciones encontradas, recordemos que  $N > 0$  si y sólo si  $N(1) > 0$ . Vimos en la sección anterior que esto es equivalente a pedir que  $N'(0) > \lambda R$ . Esto nos determina el comportamiento que tendrá cada solución en las curvas. Cuando estamos en el semieje  $N'(0)$  negativo tenemos soluciones compresivas; para valores de  $N'(0)$  positivos pero debajo de la recta  $N'(0) = \lambda R$  tenemos soluciones mixtas y para valores por encima de esta recta las soluciones son tensas. Para estudiar este comportamiento, consideremos la función  $g$  en la recta  $N'(0) = \lambda R$ .

$$g(\lambda, \lambda R) \equiv H(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda + \lambda^2 R^2}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{2\lambda + \lambda^2 R^2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \lambda R\right)$$

Se tiene que  $H(0) = 1 - \frac{1}{2R}$  y no es difícil ver que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H(\lambda) = 0^-$  por lo que, para  $R > \frac{1}{2}$ , hay por lo menos una intersección de las curvas de soluciones con la recta. Para  $R \leq \frac{1}{2}$  el número de intersecciones es par. También numéricamente, es posible determinar que para  $R \leq \frac{1}{2}$  no hay intersecciones y que para  $R > \frac{1}{2}$  sólo hay una intersección.

Una última consideración que debemos hacer para poder determinar por completo el comportamiento de las soluciones es la delimitación de una zona prohibida para las soluciones. En la sección anterior vimos que la región determinada por la curva  $N'^2(0) = \lambda^2 R^2 - 2\lambda A$ , con  $A = \int_{-\infty}^0 \hat{\nu}(N) dN$ , es prohibida para las soluciones (ecuación 6.7). En nuestro caso particular,  $A = 1$  con lo que esta región prohibida está dada por esta hipérbola que es asíntótica a  $N'(0) = \pm \lambda R$ .

A partir de toda la información obtenida, tenemos entonces los siguientes esquemas para las curvas de soluciones.

Con todos los resultados obtenidos en este capítulo, podemos considerar que conocemos suficientemente las cuestiones de existencia y comportamiento cualitativo de la solución "trivial" a nuestro problema completo, a pesar de no tenerla explícitamente en el caso general. A partir de este punto llamaremos

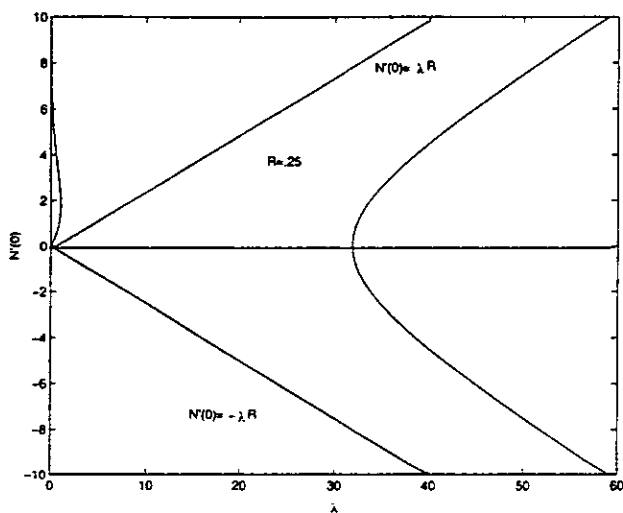


Figura 2.13: Curvas de soluciones cuando  $R = .25$ . Se muestran las rectas  $N'(0) = \lambda R$  y  $N'(0) = -\lambda R$ .

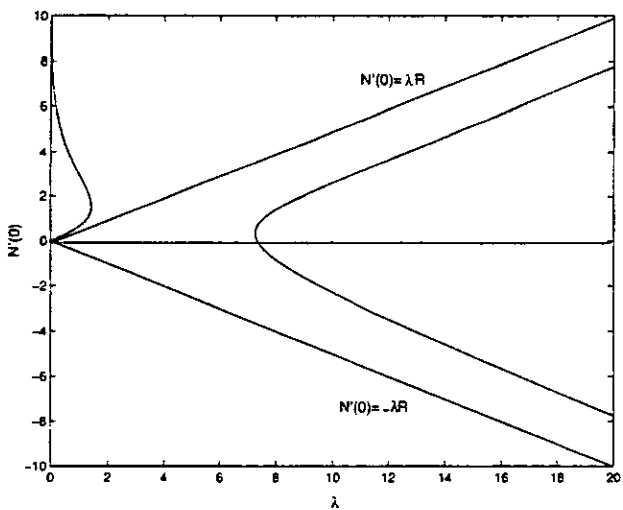


Figura 2.14: Curvas de soluciones cuando  $R = .5$ . La curva sale del origen tangente a la curva  $N'(0) = \lambda R$ .

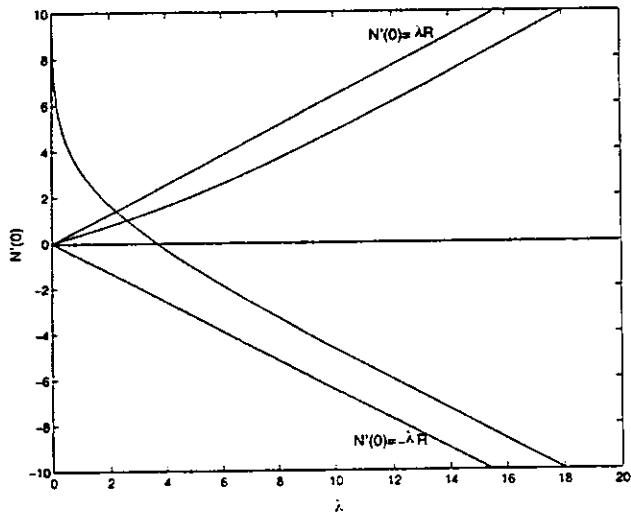


Figura 2.15: Curvas de soluciones cuando  $R = .6462$ . Las dos curvas son tangentes en el punto  $(2.6115, 1)$ .

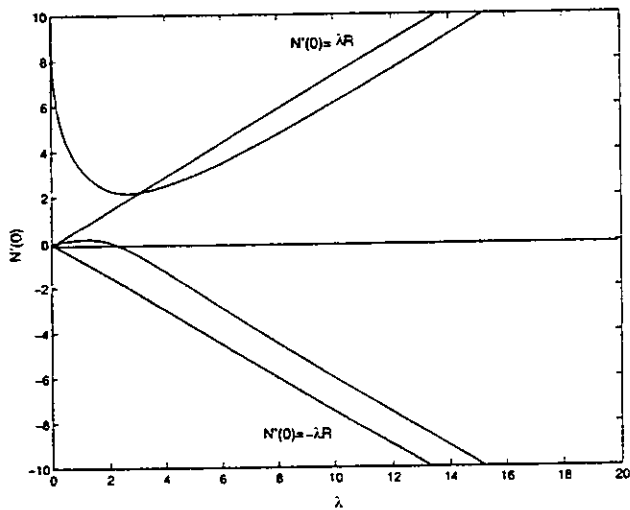


Figura 2.16: Curvas de soluciones cuando  $R = .75$ . Se observa que las dos curvas tienen partes positivas.

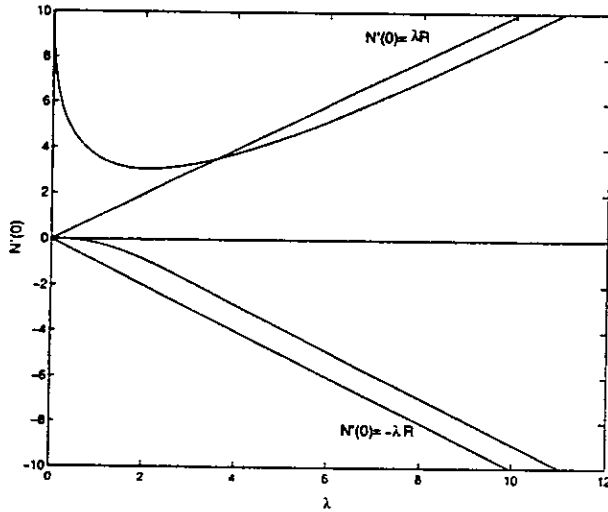


Figura 2.17: Curvas de soluciones cuando  $R = 1$ . Una curva está enteramente en el semiplano positivo, saliendo tangente al eje  $\lambda$ , y la otra en el negativo.

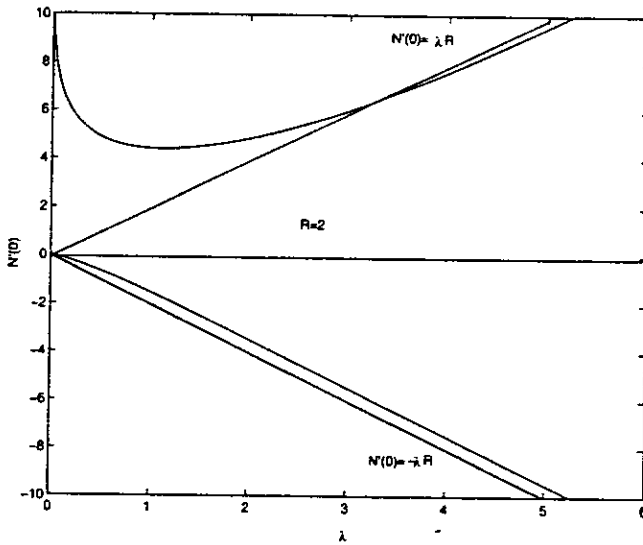


Figura 2.18: Curvas de soluciones cuando  $R = 2$ .



$N_0$  a esta solución y la usaremos para describir lo estados de la barra que se alejan de ella, los estados doblados.

## Capítulo 3

# Estados doblados para barras girando

Como dijimos al principio del capítulo anterior, en éste estudiaremos las configuraciones de la barra que se alejan del estado recto. Una vez estudiada la estructura de soluciones para este caso, abordaremos los doblamientos que sufra la barra desde la perspectiva de la teoría de bifurcaciones. Con esto encontraremos algunos de los diferentes estados doblados que posee la barra girando y veremos sus propiedades. Estudiaremos también la dependencia de estos estados respecto a las características de la barra.

Este capítulo tiene una carga matemática considerable, sin embargo, las conclusiones físicas que se obtienen son muy interesantes encontrando que el carácter no lineal del problema determina de manera importante el comportamiento de la barra.

### 3.1 Replanteamiento del problema general

Dado que  $\mathbf{u} \equiv (N, H, M, \theta)^t$ , matemáticamente el problema que nos ocupa es la búsqueda de puntos fijos para el operador

$$G(\lambda, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\lambda \left[ \int_0^s r(\xi) d\xi \right] \cos \theta \\ \lambda \left[ \int_0^s r(\xi) d\xi \right] \sin \theta \\ - \int_0^s [(\hat{\nu} H(\xi) - \hat{\eta} N(\xi)) + \omega^2 \rho J(\xi) \cos \theta(\xi) \sin \theta(\xi)] d\xi \\ \int_1^s \hat{\mu}(N(\xi), H(\xi), M(\xi), \xi) d\xi \end{pmatrix}$$

donde

$$r(s) = R - \int_s^1 [\hat{\nu}(N, H, M, \xi) \cos \theta(\xi) - \hat{\eta}(N, H, M, \xi) \operatorname{sen} \theta(\xi)] d\xi$$

Para poder resolver este problema, debemos primero encontrar el espacio de funciones sobre el cual es posible y sencillo trabajar. Con esto en mente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *El operador  $G : (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}} \rightarrow (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$  de manera compacta.*

Demostración. Un operador es compacto si manda sucesiones acotadas en sucesiones que posean subsucesiones convergentes. Escogemos el espacio de Banach  $(C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$  por ser el espacio más cómodo para trabajar y en el que no se imponen demasiadas restricciones sobre las soluciones<sup>1</sup>.

Sea entonces  $\mathbf{u}_k \in (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$  una sucesión acotada. Debemos probar que  $G(\mathbf{u}_k) \in (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$  tiene una subsucesión convergente. Sea  $M$  la cota de la sucesión y sea

$$r_k = R - \int_s^1 [\hat{\nu}(N_k, H_k, M_k, \xi) \cos \theta_k(\xi) - \hat{\eta}(N_k, H_k, M_k, \xi) \operatorname{sen} \theta_k(\xi)] d\xi$$

Al ser  $\hat{\nu}$  y  $\hat{\eta}$  continuas, tenemos que  $r_k \in C^1$  y existe  $N > 0$  tal que  $|\hat{\nu}|, |\hat{\eta}| \leq N$  (esto pues son funciones continuas definidas en el compacto  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|, |y|, |z| \leq M\}$  por lo que alcanzan su máximo y su mínimo). A partir de esto, se tiene que

$$|r_k| \leq R + \int_0^1 |\hat{\nu}(N_k, H_k, M_k, \xi) \cos \theta_k(\xi) - \hat{\eta}(N_k, H_k, M_k, \xi) \operatorname{sen} \theta_k(\xi)| d\xi$$

Usando que  $|\operatorname{sen} \theta|, |\cos \theta| \leq 1$  y que  $|\hat{\nu}|, |\hat{\eta}| \leq N$ , podemos entonces asegurar que  $|r_k| \leq R + 2N$ .

Claramente  $g_k = -\lambda \cos \theta_k \int_0^s r_k(\xi) d\xi$  (que es la primera componente de  $G$ ) está en  $C^{0, \frac{1}{2}}$  y más aún,

<sup>1</sup>El espacio  $C^0$  es el espacio de las funciones continuas con la norma del supremo (i.e.  $\|f\|_0 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ); el espacio  $C^{0, \frac{1}{2}}$  es el espacio de las funciones Hölder continuas con exponente  $\frac{1}{2}$  (i.e.  $f \in C^{0, \frac{1}{2}}$  si y sólo si existe  $M > 0$  tal que, para todo  $x$  y  $y$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\frac{1}{2}}$ ) con la norma  $\|f\|_{0, \frac{1}{2}} = \|f\|_0 + \sup_{x, y \in [0,1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}}$

$$|g_k(x) - g_k(y)| = \lambda |(\cos \theta_k(x) - \cos \theta_k(y)) \int_0^x r_k(\xi) d\xi - \cos \theta_k(y) \int_x^y r_k(\xi) d\xi|$$

Usando que  $\cos x$  es Lipschitz (con coeficiente  $l$ ) y que  $\theta_k$  es Hölder continua (acotada uniformemente por  $M$  para todo  $k$ ), tenemos entonces lo siguiente

$$|g_k(x) - g_k(y)| \leq \lambda l M |y - x|^{\frac{1}{2}} (R + 2N) + \lambda |y - x| (R + 2N)$$

Por lo tanto,

$$\frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{|y - x|^{\frac{1}{2}}} \leq \lambda l M (R + 2N) + \lambda |y - x|^{\frac{1}{2}} (R + 2N) \leq \lambda (R + 2N) (lM + \sqrt{2})$$

La última desigualdad la obtenemos a partir de que  $x, y \in [0, 1]$ . Definamos  $S \equiv \lambda (R + 2N) (lM + \sqrt{2})$ .

Ahora bien, de esta desigualdad y del hecho que  $\|g_k\|_0 < \lambda \|r_k\|_0 < \lambda (R + 2N)$  podemos concluir que  $\|g_k\|_{0, \frac{1}{2}} < \lambda (R + 2N) + S$  y esto es válido para todo  $k$  natural. Tenemos entonces una sucesión uniformemente acotada en  $C^{0, \frac{1}{2}}$ , pero este espacio está encajado compactamente en  $C^0$  por lo que cualquier sucesión acotada en  $C^{0, \frac{1}{2}}$  tendrá una subsucesión convergente en  $C^0$ . Con esto, podemos concluir que la primera componente del operador  $\mathbf{G}$  es compacta. De manera completamente análoga, usando que también  $\sin(x)$  es Lipschitz podemos asegurar que la segunda componente de nuestro operador es compacta.

Para la tercera componente es más fácil probar la compacidad pues es de la forma  $f_k = \int_0^s F_k(\xi) d\xi$  con la sucesión  $\{F_k\}$  acotada uniformemente y cada  $F_k$  al menos continua. Con esto, podemos asegurar que la sucesión  $\{f_k\}$  es de hecho acotada uniformemente en  $C^1[0, 1]$  que se encuentra también encajado compactamente en  $C^0$ .

Para la última componente, sea  $k_n = \int_1^s \hat{\mu}(N_k, H_k, M_k) d\xi$ . Igual que en el caso anterior, al ser  $\hat{\mu}(N_k, H_k, M_k)$  continua y acotada uniformemente, podemos asegurar que la sucesión  $\{k_n\}$  está acotada (con la misma cota para todo  $n$ ) en  $C^1[0, 1]$  que se encuentra encajado compactamente en  $C^{0, \frac{1}{2}}$  con lo que terminamos la prueba.  $\diamond$

Una vez visto esto, se tiene que las soluciones que se encuentran en ese espacio, tienen de hecho una regularidad determinada. Esta regularidad nos ayudará en el estudio de nuestro problema. A este respecto se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 1.2** Si  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\hat{\mu}$  son  $C^k$  y consideramos a  $\mathbf{u} \in (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$ , entonces se tiene que la solución al problema  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  es tal que  $N$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $\tau \in C^{k+1}$ .

**Demostración.** Haremos la prueba por inducción sobre  $k$ . Sea en primer lugar  $k = 0$ . Entonces  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\hat{\mu}$  son continuas y se tiene que  $\int_1^s \hat{\mu}(N, H, M) d\xi$  es  $C^1$  por lo que  $\theta$  es  $C^1$  y

$$\tau(s) = R - \int_s^1 [\hat{\nu}(N, H, M, \xi) \cos \theta(\xi) - \hat{\eta}(N, H, M, \xi) \operatorname{sen} \theta(\xi)] d\xi$$

es también  $C^1$  (como consecuencia del teorema fundamental del cálculo). Por lo tanto, como  $N = -\lambda \cos \theta \int_0^s \tau(\xi) d\xi$  y  $H = \lambda \operatorname{sen} \theta \int_0^s \tau(\xi) d\xi$ , tendremos que  $N$  y  $H$  son  $C^1$  al igual que  $\theta$ . Por último, como  $F(s) \equiv (\hat{\nu}H(s) - \hat{\eta}N(s)) + \omega^2 \rho J(s) \cos \theta(s) \operatorname{sen} \theta(s)$  es continua (pues todas las funciones involucradas son al menos continuas), entonces  $M = \int_0^s F(\xi) d\xi$  es  $C^1$  por lo que en este caso,  $N$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $\tau \in C^1$ .

Supongamos ahora que para  $l$  natural, se cumple que si  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\hat{\mu}$  son  $C^l$ , entonces  $N$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $\tau \in C^{l+1}$ . Sean entonces  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\hat{\mu}$  funciones en  $C^{l+1}$ . En particular, las funciones de esfuerzos son  $C^l$  por lo que podemos concluir que  $N$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $\tau \in C^{l+1}$ . Así, como  $\theta' = \hat{\mu}(N, H, M)$ , se tiene que  $\theta'$  es al menos  $C^{l+1}$  de donde  $\theta$  será  $C^{l+2}$ . Por otro lado, como  $\tau'(s) = -\hat{\nu}(N, H, M) \cos \theta(s) - \hat{\eta}(N, H, M) \operatorname{sen} \theta(s)$  entonces  $\tau'$  es  $C^{l+1}$  y  $\tau$  es  $C^{l+2}$ . Así, tanto  $N = -\lambda \cos \theta \int_0^s \tau(\xi) d\xi$ , como  $H = \lambda \operatorname{sen} \theta \int_0^s \tau(\xi) d\xi$  serán  $C^{l+2}$  al involucrar exclusivamente funciones  $C^{l+2}$ . Por último, como  $M' = \hat{\nu}H(s) - \hat{\eta}N(s) + \omega^2 \rho J(s) \cos \theta(s) \operatorname{sen} \theta(s)$ , entonces  $M'$  es  $C^{l+1}$  y  $M$  es  $C^{l+2}$ . Entonces se tiene que  $N$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $\tau \in C^{l+2}$  con lo que concluimos.  $\diamond$

Dado este resultado de regularidad de las soluciones, el problema integral  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  podemos transformarlo en un sistema de ecuaciones diferenciales cuando  $\mathbf{u} \in (C^0)^3 \times C^{0, \frac{1}{2}}$ . Supongamos que las funciones de esfuerzos tienen al menos 2 derivadas continuas, entonces, derivando directamente la ecuación llegamos al siguiente sistema:

$$N' = -HM\bar{\mu} - \lambda \cos \theta \tau(s)$$

$$H' = -NM\bar{\mu} + \lambda \operatorname{sen} \theta \tau(s)$$

$$M' = -H\hat{\nu} - NH\hat{\eta} - \lambda k \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad (1.1)$$

$$\theta' = M\bar{\mu}$$

con  $k = \frac{\rho J}{\rho A}$  y las condiciones de frontera  $N(0) = 0$ ,  $H(0) = 0$ ,  $M(0) = 0$ ,  $\theta(1) = 0$  y  $r(1) = R$ .

A partir de las condiciones de paridad que se impusieron sobre las variables de esfuerzos, escribimos  $\hat{\mu} = M\bar{\mu}$  y  $\hat{\eta} = H\bar{\eta}$ . La forma de este sistema de ecuaciones es muy peculiar y gracias a esto se tiene un resultado que es muy importante relativo a las propiedades nodales de la función  $\theta$  que resuelva este sistema. A este respecto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3 Para el sistema de ecuaciones 1.1, si en un punto,  $\theta$  tiene un cero doble, entonces  $\theta = M = H \equiv 0$ .

Demostración. Para el sistema 1.1, con  $N$  y  $r$  dados y  $\theta(0)$  fija, tenemos una única solución para  $\theta$ ,  $H$  y  $M$ , como consecuencia del teorema clásico de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

Si  $\theta$  corresponde a esta solución única y tiene un cero doble en  $s_0 \in [0, 1]$ , entonces  $\theta(s_0) = \theta'(s_0) = 0$ . Como  $\hat{\mu}$  es creciente e impar como función de  $M$ , tenemos un cero único en  $M = 0$ . Por lo tanto, en  $s_0$ ,  $M(s_0) = 0$  por la forma de la última ecuación. La solución única en este caso cumple que  $\theta = M \equiv 0$ . Pero con esto,  $H' \equiv 0$  (pues  $\hat{\mu} \equiv 0$ ) y como  $H(0) = 0$ , también  $H \equiv 0$ .  $\diamond$

Este hecho es muy importante ya que gracias a esto, el comportamiento de las soluciones no triviales a nuestro problema tienen un carácter heredado de su linealización. Esto sucede pues, como veremos más adelante, una ecuación sobre  $\theta$  gobierna todo el sistema y  $\theta = 0$  determina las soluciones triviales como se verá a continuación.

Aparte de la regularidad de las soluciones, se tiene que el operador en sí tiene ciertas propiedades que determinan a las soluciones o bien que nos indican que tipo de soluciones podemos tener. En particular, las simetrías del operador nos indican cómo encontrar más soluciones una vez conocida una o bien a partir de que solución tenemos bifurcación. En el capítulo anterior nos referimos al caso recto como aquel a partir del cual se presentan bifurcaciones, esto se comprueba también con el estudio de las simetrías de  $G$ . En este sentido, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4 Sea  $\gamma$  la acción de  $Z_2$  sobre  $R^4$  dada por  $\gamma \cdot (N, H, M, \theta) =$

$(N, -H, -M, -\theta)$ , entonces se tiene que  $G(\lambda, \gamma \cdot \mathbf{u}) = \gamma \cdot G(\lambda, \mathbf{u})$ . En particular, el estado trivial del operador  $G$  está dado por los puntos fijos de  $\gamma$  (i.e.  $(\lambda, N, 0, 0, 0)$ ) y si  $(\lambda, N, H, M, \theta)$  es solución de  $G(\lambda, \mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , entonces  $(\lambda, N, -H, -M, -\theta)$  también lo es.

Demostración. Tenemos que  $\hat{\nu}$  es par en  $H$  y en  $M$ , que  $\hat{\mu}$  es par en  $H$  e impar en  $M$  y  $\hat{\eta}$  es impar en  $H$  y par en  $M$  (Cf. I.6). Por lo tanto,  $\hat{\nu}(N, -H, -M) = \hat{\nu}(N, H, M)$ ,  $\hat{\eta}(N, -H, -M) = -\hat{\eta}(N, H, M)$  y  $\hat{\mu}(N, -H, -M) = -\hat{\mu}(N, H, M)$ . A partir de esto y las paridades conocidas del seno y del coseno, podemos ver que

$$\tau(s) = R - \int_s^1 [\hat{\nu}(N, H, M, \xi) \cos \theta(\xi) - \hat{\eta}(N, H, M, \xi) \text{sen} \theta(\xi)] d\xi$$

es invariante bajo la acción. Dado que  $G$  está dado como

$$G(\lambda, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\lambda \left[ \int_0^s \tau(\xi) d\xi \right] \cos \theta \\ \lambda \left[ \int_0^s \tau(\xi) d\xi \right] \text{sen} \theta \\ - \int_0^s [(\hat{\nu}H(\xi) - \hat{\eta}N(\xi)) + \omega^2 \rho J(\xi) \cos \theta(\xi) \text{sen} \theta(\xi)] d\xi \\ \int_1^s \hat{\mu}(N(\xi), H(\xi), M(\xi), \xi) d\xi \end{pmatrix}$$

es fácil ver que a partir de la invariancia de  $\tau$  y de las paridades mencionadas, se cumple que  $G(\lambda, \gamma \cdot \mathbf{u}) = \gamma \cdot G(\lambda, \mathbf{u})$ .

Ahora bien, los puntos fijos de la acción son puntos  $\mathbf{u}_0$  de la forma  $\mathbf{u}_0 = (N, 0, 0, 0)$  y cumplen que

$$G(\lambda, \mathbf{u}_0) = G(\lambda, \gamma \cdot \mathbf{u}_0) = \gamma \cdot G(\lambda, \mathbf{u}_0)$$

por lo que  $G(\lambda, \mathbf{u}_0)$  es otro punto fijo de la acción. Por lo tanto, el estado trivial es aquel que se caracteriza por los puntos fijos que son de la forma  $(\lambda, N, 0, 0, 0)$  y son únicos.

Por último, consideremos que  $\gamma \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \gamma$  para  $\mathbf{I}$  la identidad en  $R^4$ . Entonces, si  $(\mathbf{I} - G)\mathbf{u} = 0$ , se tiene que también  $\gamma \cdot (\mathbf{I} - G)\mathbf{u} = 0$  por lo que  $(\mathbf{I} - G)\gamma \cdot \mathbf{u} = 0$ . Esto significa que si  $(\lambda, N, H, M, \theta)$  es solución de nuestro problema, entonces también  $(\lambda, N, -H, -M, -\theta)$  lo será.  $\diamond$

### 3.2 Linealización de $G$

Al considerar el problema como la búsqueda de puntos fijos de  $G$ , no podemos olvidar que existe un parámetro  $\lambda$  que también determina estos puntos fijos.

Uno de los objetivos que tenemos es ver como influye este parámetro a las soluciones del problema completo del mismo modo que vimos la estructura de las soluciones dependiendo de  $\lambda$  para el caso recto.

Para el estudio de esta dependencia y en general de la existencia de los puntos fijos del operador, es necesario conocer que tan regular es  $\mathbf{G}$  pues si tiene derivada de Frechet, a partir del estudio de esta derivada podemos conocer bastante sobre el comportamiento de nuestro operador usando el teorema de la función implícita visto en el capítulo anterior.

Consideremos la linealización del problema  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  alrededor de una curva de soluciones  $(N_0(\lambda), \lambda)$  de aquellas que vimos en el capítulo 2 (principalmente en la sección 6). En este caso, definimos la pareja  $(N, \lambda) = (N_0(\lambda) + n, \lambda)$  y la linealización se hará para  $(n, H, M, \theta)$ . Sean  $\hat{v}_0 = \hat{v}(N_0(\lambda), 0, 0)$  y  $r_0 = R - \int_s^1 \hat{v}_0 d\xi$ . Recordemos que  $N_0$  es tal que  $N_0(\lambda) + \lambda \int_0^s r_0 d\xi = 0$ . Dado esto, la primera componente de  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  es

$$n + \lambda(\cos \theta - 1) \int_0^s r_0 d\xi + \lambda \cos \theta \int_0^s (r - r_0) d\xi = 0$$

lo que es igual a

$$n + \lambda \int_0^s \int_\xi^1 (\hat{v}_0 - \hat{v}) d\tau d\xi + O(\theta^2) = 0$$

y desarrollando por último  $\hat{v}$  se tiene que

$$n - \lambda \int_0^s \int_\xi^1 \hat{v}_N n d\tau d\xi + o(|\mathbf{u}|) = 0$$

Esto es debido a que  $\hat{v}_H = \hat{\eta}_M = 0$  en  $H = 0$  y  $\hat{v}_M = \hat{\mu}_H = 0$  en  $M = 0$  como consecuencia de las paridades mencionadas anteriormente.

Análogamente para las demás componentes se tiene que

$$H - \lambda \theta \int_0^s r_0 d\xi + o(|\mathbf{u}|) = 0$$

$$M + \int_0^s (H \hat{v}_0 - N_0 H \hat{\eta}_0 + \lambda k \theta) d\xi + o(|\mathbf{u}|) = 0$$

$$\theta - \int_1^s \hat{\mu}_0 M d\xi + o(|\mathbf{u}|) = 0$$

donde  $\hat{\eta}_0 = \hat{\eta}(N_0, 0, 0)$  y  $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}(N_0, 0, 0)$ .



Dados estos desarrollos es claro que la linealización (es decir, la derivada de Frechet) de  $g \equiv I - G$  es

$$Dg(\lambda, N_0(\lambda), 0, 0, 0) \begin{pmatrix} n \\ H_1 \\ M_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - \lambda \int_0^s \int_\xi^1 \hat{\nu}_N n d\tau d\xi \\ H_1 - \lambda \theta_1 \int_0^s r_0 d\xi \\ M_1 + \int_0^s (H_1 \hat{\nu}_0 - N_0 H_1 \tilde{\gamma}_0 + \lambda k \theta_1) d\xi \\ \theta_1 - \int_1^s \tilde{\mu}_0 M_1 d\xi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Este operador lineal es de la forma  $I - K$  con  $I$  la identidad y  $K$  un operador compacto por lo que sabemos que es Fredholm de índice cero.

Para conocer el núcleo del operador  $Dg(\lambda, N_0(\lambda), 0, 0, 0)$ , necesitamos conocer el conjunto de las  $(n, H_1, M_1, \theta_1)$  tales que

$$Dg(\lambda, N_0(\lambda), 0, 0, 0) \begin{pmatrix} n \\ H_1 \\ M_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

Esto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales una vez derivadas las ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} n'' + \lambda \hat{\nu}_N n &= 0 \\ H_1 &= -N_0 \theta_1 \\ M_1' &= (\hat{\nu}_0 N_0 - N_0^2 \tilde{\gamma}_0 - \lambda k) \theta_1 \\ \left(\frac{\theta_1'}{\mu}\right)' + (\lambda k + N_0^2 \tilde{\gamma}_0 - \hat{\nu}_0 N_0) \theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

con las condiciones de frontera  $n(0) = 0$ ,  $n'(1) = 0$ ,  $M_1(0) = 0$ ,  $\theta_1'(0) = 0$  y  $\theta_1(1) = 0$ .

### 3.3 Ecuación de bifurcación

Para poder adentrarnos en el estudio de los estados que se alejan de la configuración recta, es necesario que consideremos primero el núcleo de la linealización de  $g$ . Un elemento de este núcleo será solución del sistema de ecuaciones 2.2.

A partir de la forma de este sistema, si estamos sobre la curva  $(\lambda, N(\lambda))$ , la primera ecuación tiene como única solución  $n \equiv 0$ . Además, dado  $\theta_1$ , se tiene que la segunda y la tercera de las ecuaciones tienen una única solución por lo que nuestro estudio se puede centrar en la última. Esta ecuación corresponde a la búsqueda del núcleo de un operador autoadjunto en  $L^2[0, 1]$ , digamos  $A(\lambda)$ , que sabemos es de dimensión menor o igual a uno. Si el núcleo de este operador es trivial entonces es invertible y claramente  $\theta_1 \equiv 0$  es la solución de esta ecuación con lo que el sistema lineal tiene como única solución la trivial. Con esto, como consecuencia del teorema de la función implícita en espacios de Banach (Teorema II.6.3), el problema no lineal  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  tiene como única solución  $(\lambda, N_0(\lambda), 0, 0, 0)$ .

Vimos que la ecuación no lineal para  $n$  se puede escribir como

$$n + \lambda \int_0^s \int_{\xi}^1 (\hat{\nu}_0 - \hat{\nu}) d\tau d\xi + O(\theta^2) = 0$$

y dado que

$$H_1 = -N_0\theta_1$$

$$M'_1 = (\hat{\nu}_0 N_0 - N_0^2 \bar{\eta}_0 - \lambda k)\theta_1$$

si  $\theta$  es solución del problema no lineal, entonces, también por el teorema de la función implícita, podemos afirmar que para  $\theta$  pequeño, las funciones  $n$ ,  $H$  y  $M$  que resuelven el problema están dadas como  $n = n(\theta, \lambda) = O(\theta^2)$ ,  $H = H(\theta, \lambda) = O(\theta)$  y  $M = M(\theta, \lambda) = O(\theta)$ .

Por lo tanto, usando estos resultados, localmente se puede considerar que nuestro problema es la búsqueda de  $\theta$  tal que

$$\theta - \int_1^s \bar{\mu}(N(\lambda) + n(\theta, \lambda), H(\theta, \lambda), M(\theta, \lambda)) M(\theta, \lambda) d\xi = 0$$

lo que es equivalente a

$$\left(\frac{\theta'}{\bar{\mu}}\right)' + (\lambda k + N_0^2 \bar{\eta}_0 - \hat{\nu}_0 N_0)\theta + O(\theta^2) = 0 \quad \theta'_1(0) = 0 \quad \theta_1(1) = 0$$

Sea  $a(\lambda) = \lambda k + N_0^2 \bar{\eta}_0 - \hat{\nu}_0 N_0$  y supongamos que  $\theta_0$  es la solución del problema lineal correspondiente a  $\lambda_0$  (es decir, que  $A(\lambda_0)\theta_0 = 0$ ). Dado que el operador  $A(\lambda_0)$  es autoadjunto, podemos definir un par de proyecciones,

una sobre su núcleo y otra sobre su rango (que en este caso es el espacio ortogonal al núcleo). Dadas estas proyecciones, podemos entonces escribir  $\theta = \epsilon\theta_0 + \phi$  con  $\phi$  perpendicular a  $\theta_0$  y  $\epsilon = \int_0^1 \theta\theta_0 ds$ . Llamemos  $P$  a la proyección ortogonal sobre el núcleo de  $A(\lambda_0)$  (i.e.  $P\theta = \epsilon\theta_0$ ) con lo que  $I - P$  es la proyección sobre el rango.

Con esto, la ecuación que deseamos resolver la escribimos como

$$A(\lambda)\theta + O(\theta^2) = 0$$

o, al considerar las proyecciones,

$$P(A(\lambda)\theta + O(\theta^2)) \oplus (I - P)(A(\lambda)\theta + O(\theta^2))$$

Usando que  $\theta = \epsilon\theta_0 + \phi$ , que  $A(\lambda) = A(\lambda_0) + (A(\lambda) - A(\lambda_0))$  y el hecho de que una suma directa es cero si y sólo si ambos sumandos son cero, tenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$A(\lambda_0)\phi + (I - P)((A(\lambda) - A(\lambda_0))(\epsilon\theta_0 + \phi)) + (I - P)O(\theta^2) = 0$$

$$P(((A(\lambda) - A(\lambda_0))(\epsilon\theta_0 + \phi)) + PO(\theta^2) = 0$$

La primera de estas corresponde a la proyección sobre el rango de  $A(\lambda_0)$  y la segunda a la proyección sobre su núcleo. De nueva cuenta, por el teorema de la función implícita, la primera de estas ecuaciones tiene una única solución  $\phi(\epsilon, \lambda)$  para  $\lambda$  cercano a  $\lambda_0$  pues sobre su rango el operador  $A(\lambda_0)$  es invertible y  $(A(\lambda) - A(\lambda_0))$  es tan pequeño como queramos por ser  $A$  continua como función de  $\lambda$ . Esta función  $\phi$  es  $C^2$  en  $s$ ,  $\phi(\epsilon, \lambda) = o(\epsilon^2)$  y cumple que  $\|\phi\|_{L^2} \leq (\epsilon|\lambda - \lambda_0| + \epsilon^2)$ .

La ecuación sobre el núcleo de  $A(\lambda_0)$  es explícitamente

$$\theta_0 \int_0^1 [(\epsilon\theta_0' + \phi')(\frac{1}{\bar{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda_0)})]' \theta_0 + (a(\lambda) - a(\lambda_0))(\epsilon\theta_0 + \phi)\theta_0 + O(\theta^2)\theta_0 ds = 0$$

Sustituyendo en esto la expresión encontrada para  $\phi$  e integrando por partes en algunos casos, llegamos a la siguiente ecuación de bifurcación:

$$\epsilon \int_0^1 (a(\lambda) - a(\lambda_0))\theta_0^2 - (\frac{1}{\bar{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda_0)}) (\theta_0')^2 ds$$

$$+ \int_0^1 (a(\lambda) - a(\lambda_0))\theta_0 \phi - \left( \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda_0)} \right) \theta'_0 \phi' ds + o(\epsilon^2) = 0$$

es decir,

$$(\lambda - \lambda_0) \left( \int_0^1 a_\lambda(\lambda_0) \theta_0^2 + \frac{\bar{\mu}_\lambda(\lambda_0)}{\bar{\mu}^2(\lambda_0)} (\theta'_0)^2 \right) + O((\lambda - \lambda_0)^2) + o(\epsilon) = 0 \quad (3.1)$$

De esta última ecuación es fácil ver que si el coeficiente de  $(\lambda - \lambda_0)$  es diferente de cero, entonces el teorema de la función implícita usual (en  $R^2$ ) nos asegura que  $(\lambda - \lambda_0) = f(\epsilon)$  con  $f(0) = 0$ . Esto nos dice que hay una rama  $C^1$  bifurcada a partir de aquellos  $\lambda$  que son valores propios de la linealización, que esta rama está parametrizada por  $\epsilon$  y representa soluciones no triviales de la forma  $(\epsilon\theta_0 + \phi(\epsilon), (\lambda - \lambda_0)(\epsilon))$ .

Más aún, como  $\phi = O(\epsilon^2)$  y  $\theta/\epsilon = \theta_0 + \phi/\epsilon$ , en este caso los ceros de  $\theta$  son vecinos a los de  $\theta_0$ , es decir que en este problema las propiedades nodales de la solución son heredadas de su linealización. Este es un resultado muy importante en nuestro caso particular pues en buena medida la forma que tendrá la barra deformada está determinada por el comportamiento de  $\theta$ , el cual es posible conocer aproximadamente a partir del estudio de su linealización (conocer al menos cuantas veces se anula que para nosotros representa el número de doblamientos que tendrá la barra).

### 3.4 Bifurcación global

En la sección anterior vimos que localmente tenemos bifurcación para nuestro problema en ciertos valores de  $\lambda$ . Ahora veremos de que manera se prolongan estas ramas bifurcadas y cual es su estructura global. Para esto usaremos el Teorema de bifurcación global de Rabinowitz (de la alternativa) que nos determina que posibilidades tienen estas ramas para desarrollarse y de qué modo se conectan entre ellas. El teorema lo enunciamos a continuación y para su prueba se puede consultar [Rab].

**Teorema 4.1** (Alternativa de Rabinowitz). *Sean  $\lambda_0$  un valor propio de la linealización del problema  $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}_0$  la solución trivial al mismo problema correspondiente a  $\lambda_0$ . Entonces, cada rama  $S(\lambda_0)$  que bifurca a partir de  $(\lambda_0, \mathbf{u}_0(\lambda_0))$  es un subconjunto maximal conexo y cerrado del conjunto  $S$  de*

*soluciones no triviales. Además,  $S(\lambda_0)$  satisface alguna de las siguientes alternativas:*

*(i)  $S(\lambda_0)$  es no acotado ó*

*(ii)  $S(\lambda_0)$  regresa a la curva de soluciones triviales en  $(\lambda_1, \mathbf{u}_1(\lambda_1))$  donde  $\lambda_1$  es otro valor propio del problema linealizado y  $\mathbf{u}_1$  es la solución trivial correspondiente.*

Esto lo que quiere decir es que a partir de  $(\lambda_0, N_0(\lambda_0), 0, 0, 0)$  bifurca un continuo de soluciones que, o es no acotado o regresa a otro punto de bifurcación. En nuestro caso, vimos en la sección anterior que el número de ceros sobre la rama no trivial se conserva cerca de la linealización. Además de esto, se sabe en general que cuando el número de ceros cambia se presentan ceros dobles<sup>2</sup> lo que en nuestro caso corresponde a la rama trivial (Cf. sección 1). Por lo tanto, como el número de ceros se conserva sobre el continuo, si este fuera acotado, sólo podría conectar puntos de bifurcación con el mismo número de ceros (lo que puede suceder, por ejemplo, en 2 ramas diferentes de soluciones triviales).

Para poder conocer con más detalle como se aplica este resultado a nuestro caso, tenemos que estudiar el problema linealizado, ver cómo son sus valores propios y que comportamiento nodal tienen las funciones propias correspondientes. Esto lo haremos en la siguiente sección.

### 3.5 Espectro de la linealización

El primer paso que haremos para estudiar la linealización de nuestro problema y su espectro es considerar la siguiente ecuación auxiliar de la cual es posible obtener información

$$\left(\frac{\theta'}{\bar{\mu}}\right)' + (\rho + N^2\bar{\eta} - N\hat{\nu})\theta = 0 \quad \theta'(0) = 0 \quad \theta(1) = 0 \quad (5.1)$$

Supondremos que  $N$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\mu}$  y  $\hat{\nu}$  son independientes de  $\rho$  a quien tomamos constante. Hemos quitado el subíndice 0 a las variables de esfuerzos para

<sup>2</sup>Cuando la rama es una curva esto es claro. En el caso del continuo esto también es cierto; la prueba en nuestro caso sería una pequeña modificación de aquélla que se encuentra en [Lou] pp.103-105.

simplificar la notación, sin embargo seguimos considerando estas variables en la rama trivial. En este caso, podemos aplicar la siguiente especialización de un teorema clásico de la teoría de Sturm-Liouville cuya prueba se puede ver en [Codd](p.212).

**Teorema 5.1.** *Para el problema dado por 5.1, si  $\tilde{\mu}$ ,  $N^2\tilde{\eta}$  y  $N\hat{\nu}$  son continuas y  $\tilde{\mu} > 0$ , entonces existe una sucesión infinita de valores propios simples  $\{\rho_n\}$  tales que  $\rho_1 < \rho_2 < \dots$  y  $\rho_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Las funciones propias correspondientes  $\theta_n$  tendrán  $n$  ceros en el intervalo  $[0, 1]$ .*

Para atacar nuestro problema original, sean  $\rho_0$  un valor propio del problema auxiliar,  $\theta_0$  su función propia correspondiente y definamos  $b(\lambda) = N_0^2(\lambda)\tilde{\eta}(\lambda) + N_0(\lambda)\hat{\nu}(\lambda)$ . Para  $\lambda$  cercano a  $\lambda_0$  escribamos  $\theta = \theta_0 + \phi$  con  $\phi$  perpendicular a  $\theta_0$  y  $\rho$  cercano a  $\rho_0$ . Con esto y un desarrollo similar al usado en la sección 3 para llegar a la ecuación de bifurcación, el problema

$$\left(\frac{\theta'}{\tilde{\mu}(\lambda)}\right)' + (\rho + b(\lambda))\theta = 0 \quad \theta'(0) = 0 \quad \theta(1) = 0$$

es equivalente a

$$(\rho - \rho_0) \int_0^1 \theta_0^2 ds + \int_0^1 (b(\lambda) - b(\lambda_0))\theta_0^2 + \left(\frac{1}{\tilde{\mu}(\lambda_0)} - \frac{1}{\tilde{\mu}(\lambda)}\right)(\theta_0')^2 ds + O((\lambda - \lambda_0)^2) = 0$$

Tomando  $\int_0^1 \theta_0^2 ds = 1$  (i.e. normalizando las funciones propias), entonces tenemos que  $(\rho - \rho_0) = f(\lambda)$  con  $f(0) = 0$ , además se cumple que

$$f'(\lambda) = - \int_0^1 (b'(\lambda)\theta_0^2 + \frac{\tilde{\mu}'(\lambda)}{\tilde{\mu}^2(\lambda)}(\theta_0')^2) ds$$

De esto obtenemos funciones diferenciables  $\rho_n(\lambda)$  tales que  $\rho_n(0)$  corresponde al  $n$ -ésimo valor propio del problema auxiliar. Además, por la unicidad que asegura el teorema de la función implícita, para  $n \neq m$  las curvas  $\rho_n(\lambda)$  y  $\rho_m(\lambda)$  no se cruzan lo que será de importancia más adelante. Consideremos  $N(\lambda)$  la curva que sale del origen tal que  $N(0) = 0$ . Entonces, como en  $\lambda = 0$  las curvas  $\rho_n$  están ordenadas, este orden se preserva después para todo  $\lambda$ .

Dada la función  $\rho = \lambda k$ , nos interesa ver cuando las curvas  $\rho_n$  la intersecan. Supongamos por simplicidad en la exposición que  $k$  es constante (es decir, que todas las secciones transversales de la barra son iguales). Estos resultados más algunos que son inmediatos los resumimos en la siguiente proposición:

Proposición 5.2 Dado el problema de Sturm-Liouville 5.2, existen curvas diferenciables  $\rho_n(\lambda)$  tales que  $\rho_n(0)$  es valor propio del problema auxiliar 5.1,  $\rho_n'(\lambda) = -\int_0^1 (b'(\lambda)\theta_0^2 + \frac{\mu'(\lambda)}{\mu^2(\lambda)}(\theta_0')^2) ds$  y  $\lambda_n$  es el  $n$ -ésimo valor propio de 5.2 si  $\rho_n(\lambda_n) = \lambda_n k$ . Además, se cumple lo siguiente:

1. Si para algún  $n$  natural se tiene que  $\rho = \lambda k$  intersecta a  $\rho_n(\lambda)$ , entonces tiene que intersectar a  $\rho_j(\lambda)$  para todo  $j \leq n$ .

2. Si  $b'(\lambda), \mu'(\lambda) \geq 0$  entonces para todo  $n$ , la recta  $\rho = \lambda k$  corta a estas curvas una sola vez.

3. Si  $f'(\lambda) < k$ , entonces, para todo  $n$ ,  $\rho_n(\lambda)$  corta a  $\rho = \lambda k$  al menos una vez.

Demostración. Lo único que falta por demostrar son las tres especializaciones del resultado.

1. A partir del orden que tienen las curvas y el hecho de que esto se preserva, al ser  $\rho = \lambda k$  creciente, podemos afirmar que esto se cumple.

2. En este caso, las curvas  $\rho_n$  son decrecientes pues  $\rho_n' < 0$ . Por lo tanto, para todo  $n$ , la recta  $\rho = \lambda k$  corta a estas curvas una sola vez.

3. Si  $f'(\lambda) < k$ , para  $\epsilon$  pequeña, se tiene que  $f'(\lambda) < k - \epsilon$  de donde  $f(\lambda) < (k - \epsilon)\lambda + f(0)$  es decir,  $\rho_n(\lambda) < (k - \epsilon)\lambda + \rho_n(0)$  por lo que  $\rho_n(\lambda) < k\lambda - \epsilon\lambda + \rho_n(0) < k\lambda$  si  $\lambda$  es grande. Como  $\rho_n(0) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  podemos asegurar que en este caso existe al menos un corte.  $\diamond$

Es posible hacer un tratamiento análogo si  $k$  no es constante, sin embargo, es claro que la dificultad que esto generaría es considerable.

En la sección siguiente haremos una restricción sobre las funciones de esfuerzos para poder ahondar en estos resultados. En el caso general, los resultados hasta aquí mostrados indican cual es el tipo de comportamiento que se puede esperar en la barra.

### 3.6 Ejemplo de espectro y comportamiento nodal

En primer lugar, recordemos que en el capítulo 2, sección 6, vimos que dada la curva de soluciones  $N(\lambda)$  con  $N \leq 0$ , se cumple que  $N_\lambda < 0$ . Junto con esto, consideremos un caso particular de barra (una clase de materiales) para los cuales se cumplen las siguientes condiciones:

i)  $\bar{\mu}_N \leq 0; \bar{\eta}_N \leq 0$

ii)  $\hat{\nu}_N(0) \leq 2\hat{\eta}(0)$

La primera de estas condiciones las cumplen los materiales para los cuales, al aumentar la tensión, se dificultan cada vez más tanto la deformación como la torsión. Este es el caso por ejemplo de los materiales de caracter fibroso pues para ellos, el estiramiento impide cualquier movimiento que no sea en la dirección de las fibras.

Claramente esta condición se ve satisfecha si  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\eta}$  son constantes respecto de  $N$ , es decir, si el esfuerzo de deformación y la torsión dependen linealmente de la tensión. Esta condición de linealidad es una buena aproximación para la mayoría de los materiales si consideramos que  $N$  no es muy grande.

Respecto a la otra condición, tenemos que  $\hat{\eta}_H = \tilde{\eta} + H\tilde{\eta}_H$  por lo que  $\hat{\eta}|_{H=0} = \tilde{\eta}|_{H=0}$ . Esto hace que la segunda condición sea equivalente a pedir que  $\hat{\nu}_N(0) \leq 2\hat{\eta}_H(0)$  es decir, que el cambio de la dilatación respecto a la tensión sea menor que el doble del cambio de la deformación respecto a la fuerza de deformación cerca del estado de referencia. Esta condición tampoco es muy fuerte pues para la mayoría de los materiales, cerca del estado de referencia, el cambio de la dilatación y el de la deformación son bastante similares.

Dadas estas dos condiciones, considerando que  $\hat{\nu}$  es convexa ( $\hat{\nu}_{NN} > 0$ ), se tiene que  $\hat{\nu}_{NN} > 2\hat{\eta}_N$  de donde  $2\hat{\eta}(N) - \hat{\nu}_N(N)$  es decreciente para  $N < 0$ . Con esto podemos concluir que en este caso  $2\hat{\eta}(N) - \hat{\nu}_N(N) \geq 0$ .

Recordemos que en la sección anterior vimos que  $\rho - \rho_0 = f(\lambda)$  y que

$$f'(\lambda) = - \int_0^1 (b'(\lambda)\theta_0^2 + \frac{\tilde{\mu}'(\lambda)}{\tilde{\mu}^2(\lambda)}(\theta_0')^2) ds$$

Claramente, con las condiciones impuestas y  $N \leq 0$  se tiene que

$$b'(\lambda) = (2\hat{\eta} - \hat{\nu}_N)NN_\lambda + N^2\tilde{\eta}_HN_\lambda - \hat{\nu}N_\lambda \geq 0$$

y  $\tilde{\mu}'(\lambda) = \tilde{\mu}_NN_\lambda \geq 0$  por lo que  $f'(\lambda) < 0$ . Con esto, podemos asegurar la siguiente proposición.

Proposición 6.1 *Supongamos que el material de la barra es tal que, para  $N < 0$ ,*

(i)  $\tilde{\mu}_N \leq 0$ ;  $\tilde{\eta}_N \leq 0$  y

(ii)  $\hat{\nu}_N(0) \leq 2\hat{\eta}(0)$

*Entonces, existen una infinidad de valores propios para el problema 5.2 a partir de los cuales hay bifurcación.*



En particular, para  $R \geq 1$  tenemos que la rama con  $N' < 0$  sale del origen y con las condiciones impuestas podemos afirmar que esta rama tiene un número infinito de puntos de bifurcación dados por los valores de  $\lambda$  en los cuales  $\rho = \lambda k$  corta a las curvas  $\rho_n(\lambda)$ . Por las propiedades nodales descritas anteriormente, estas ramas bifurcadas no pueden regresar a la misma curva por lo que o son no acotadas o conectan con la curva de soluciones triviales que tiene  $N''(0) > 0$ . Si las ramas son no acotadas, tendríamos que, al aumentar la velocidad angular, la barra se comprime hasta alcanzar un punto en que se dobla y una vez doblada ya no regresa nunca al estado recto. En el otro caso, tendríamos que la barra se comprime hasta doblarse y que después de estar doblada, comienza a elongarse hasta regresar al estado recto pero en estado de tensión. Para poder determinar si esto sucede o no, habría que estudiar el comportamiento de la rama trivial caracterizada por  $N''(0) > 0$ . Vimos que en general este estudio es bastante complicado, sin embargo en algunos casos particulares es posible.

Para  $R < 1$ , consideramos a la rama trivial que sale del origen. Recordemos que cerca del origen esta rama no cumple que  $N''(0) < 0$ , pero después de un cierto valor de  $\lambda$  al que llamamos  $\lambda_0$  si se tiene que  $N''(0) < 0$ . En este caso, después de  $\lambda_0$ , las curvas  $\rho_n(\lambda)$  son decrecientes por lo que  $\rho = \lambda k$  corta estas curvas al menos una vez (una sola vez si el primer corte sucede para  $\lambda > \lambda_0$ ). Para  $n$  grande, este corte sucede después de  $\lambda_0$  pues si no fuera así, tendríamos una  $\tilde{\lambda} < \infty$  tal que  $\lambda_n k \rightarrow \tilde{\lambda} k$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La función propia correspondiente a  $\tilde{\lambda}$  tendría una infinidad de ceros pues cada función propia correspondiente a  $\lambda_n$  tiene  $n$  ceros. Esto implicaría que esta función propia, digamos  $\tilde{\theta}$ , sería  $\tilde{\theta} \equiv 0$ . Pero recordemos que las funciones propias estaban normalizadas ( $\int_0^1 \theta_n = 1$  para todo  $n$ ) y al ser  $\tilde{\theta}$  la función propia correspondiente a  $\tilde{\lambda}$  se cumple que  $\theta_n \rightarrow \tilde{\theta}$  lo que es imposible pues tendríamos que la función idénticamente cero integra uno.

Ahora bien, si tenemos que  $\rho'_n(\lambda) < k$  entonces hay bifurcación y la rama bifurcada podría regresar a la misma rama trivial. Esto es debido a que en este caso, puede haber varios cortes en la misma curva  $\rho_n(\lambda)$ , al menos uno antes de  $\lambda_0$  y uno después. Esto significa que la barra comienza extendiéndose al empezar a girar y en un valor de la velocidad angular se dobla, sin embargo, después regresa al estado recto aunque esto puede suceder cuando este estado recto ya se caracterice por tener compresión en la barra.

Antes de seguir adelante y ahondar en el comportamiento nodal de las

soluciones, probaremos un teorema de comparación sturmiano que nos será de utilidad en este estudio del comportamiento nodal.

**Teorema 6.2.** Sean  $\mu_1 \geq 0$  y  $a_1 \geq 0$  tales que  $0 < \bar{\mu} \leq \mu_1$  y  $0 \leq a \leq a_1$  y consideremos a  $\theta$  y a  $\phi$  soluciones de

$$\left(\frac{\theta'}{\bar{\mu}}\right)' + a\theta = 0 \quad \theta'(0) = 0$$

y

$$\left(\frac{\phi'}{\mu_1}\right)' + a_1\phi = 0 \quad \phi'(0) = 0$$

respectivamente. Entonces, entre 2 ceros consecutivos de  $\theta$  hay un cero de  $\phi$  y entre 0 y el primer cero de  $\theta$  hay también un cero de  $\phi$ .

Demostración. Como

$$\left(\frac{\theta'}{\bar{\mu}}\right)' \phi - \left(\frac{\phi'}{\mu_1}\right)' \theta + (a - a_1)\theta\phi = 0$$

integrando esta ecuación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , se tiene que

$$\frac{\theta'\phi}{\bar{\mu}} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{\phi'\theta}{\mu_1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = - \int_{\alpha}^{\beta} \theta'\phi' \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\bar{\mu}}\right) + (a - a_1)\theta\phi ds$$

Recordemos que  $\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\bar{\mu}} \leq 0$  y  $a - a_1 \leq 0$ . Como  $a \geq 0$  y  $\bar{\mu} > 0$ , entonces tenemos que los máximos de  $\theta$  son positivos y sus mínimos son negativos. Esto es debido a que  $\theta$  cumple que

$$\frac{\theta''}{\bar{\mu}} - \frac{\theta'}{\bar{\mu}^2} \bar{\mu}' + a\theta = 0$$

y en un extremo  $\theta' = 0$  de donde es claro que  $\theta$  y  $\theta''$  tienen signos contrarios por lo que en un máximo  $\theta'' < 0$  implica que  $\theta > 0$  y análogamente para los mínimos. Es posible tener un resultado igual para  $\phi$ .

Ahora bien, si  $\alpha = 0$  entonces  $\theta'(\alpha) = 0$  y  $\phi'(\alpha) = 0$ . Sea  $\beta$  el primer cero de  $\theta$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $\theta > 0$  en  $[\alpha, \beta]$  (si no consideremos  $-\theta$ ). Entonces tenemos que  $\theta' < 0$  en ese intervalo.

Si  $\phi > 0$  en  $[0, \beta]$  (o  $\phi' < 0$  con lo que consideramos  $-\phi$ ) entonces  $\frac{\theta'\phi}{\bar{\mu}} < 0$  pero el lado derecho de la igualdad es positivo lo que es imposible. Por lo tanto, debe haber un valor  $\gamma \in [0, \beta]$  tal que  $\phi(\gamma) = 0$ .

Por otro lado, sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ceros consecutivos de  $\theta$  con  $\theta > 0$  en  $(\alpha, \beta)$  (si no, tomemos  $-\theta$  de nueva cuenta). Sea  $\alpha_1$  el máximo de  $\theta$  en ese intervalo

y supongamos que  $\phi$  tiene el mismo signo en  $[\alpha, \beta]$  (digamos sin pérdida de generalidad  $\phi > 0$ ).

Si  $\phi' > 0$  en  $[\alpha, \alpha_1]$ , integrando entre  $\alpha$  y  $\alpha_1$  se cumple que  $-\frac{\phi'\theta}{\mu_1}|_{\alpha_1} - \frac{\theta'\phi}{\mu}|_{\alpha} < 0$ . El lado derecho de la igualdad es positivo lo que hace imposible que esto se cumpla, entonces existe  $\gamma_1 \in [\alpha, \alpha_1]$  tal que  $\phi'(\gamma_1) \leq 0$

Considerando que  $\phi' < 0$  en  $[\alpha_1, \beta]$ , al integrar entre  $\alpha_1$  y  $\beta$  tenemos que  $\frac{\theta'\phi}{\mu}|_{\beta} + \frac{\phi'\theta}{\mu_1}|_{\alpha_1} < 0$ , pero el lado derecho es positivo lo que es imposible. Por lo tanto, debe existir  $\gamma_2 \in [\alpha_1, \beta]$  tal que  $\phi'(\gamma_2) \geq 0$ .

Podemos concluir entonces que entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  existe un mínimo de  $\phi$  que debe ser negativo como vimos anteriormente. Pero esto no es posible si  $\phi$  es positivo en todo el intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Esta contradicción nos muestra que existe  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  tal que  $\phi(\gamma) = 0$ .  $\diamond$

En nuestro caso, para  $N \leq 0$ , se tiene que

$$0 \leq b(\lambda) \leq \lambda^2 R^2 \bar{\eta}(-\lambda R) + \lambda R$$

pues  $N^2 \bar{\eta} - N \hat{\nu}_0$  y  $\bar{\eta}$  decrecen mientras  $\hat{\nu}$  crece y vemos además que  $N(s) \geq -\lambda R s$  y  $\hat{\nu}(0) = 1$ . También  $\bar{\mu}$  decrece por lo que  $0 < \bar{\mu}(-\lambda R)^{-1} \leq \bar{\mu}^{-1} \leq \bar{\mu}(0)^{-1}$

Usando esto y el teorema anterior, consideremos a  $\theta$  la función con  $n$  ceros correspondiente a  $\rho_n(\lambda)$  y  $\lambda \geq \lambda_0$ . Sea  $\phi$  solución de la siguiente ecuación:

$$\phi'' + \bar{a}\phi = 0 \quad \phi'(0) = 0$$

con  $\bar{a} = (\rho_n(\lambda) + \lambda^2 R^2 \bar{\eta}(-\lambda R) + \lambda R) \bar{\mu}(-\lambda R)$ .

Entonces,  $\phi(s) = B \cos(\sqrt{\bar{a}}s)$  y debe tener al menos  $n$  ceros en  $[0, 1]$ . El último de estos ceros es  $\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} \leq 1$ . Sin embargo, si  $\bar{a} < \frac{\pi^2}{4}$  esto no es posible con lo que la única solución posible es la idénticamente cero y no hay bifurcación.

Por ejemplo, si  $\bar{\eta} \equiv 1$ ,  $\hat{\nu}_N(0) \leq 2$  y  $\bar{\mu}$  es constante, como vimos en la sección 6 del capítulo 2 que  $\lambda_0 \leq \frac{2A}{R^2}$  con  $A = \int_{-\infty}^0 \hat{\nu}(N) dN$ , se tiene que

$$\frac{2A}{R^2}(k + 2A + R)\bar{\mu} < \frac{\pi^2}{4}$$

si  $\bar{\mu}$  es suficientemente chico, es decir, si la barra es muy dura resistiendo torsión.

Si además, para  $N > 0$  uno tiene que  $\hat{\nu}(N) \geq N$ , podemos comparar la ecuación

$$\theta'' + (\lambda k + N^2 - \hat{\nu}N)\bar{\mu}\theta = 0$$

con la ecuación

$$\phi'' + (\lambda k + \lambda_0^2 R^2 + -\lambda_0 R)\bar{\mu}\phi = 0$$

En este caso, si  $\theta$  tiene  $n$  ceros,  $\phi$  tendrá al menos  $n$  ceros. Pero esto no es posible para  $\lambda < \lambda_0$  y  $\bar{\mu} < \frac{\pi^2}{4}$ . Por lo tanto, con estas condiciones, para  $\bar{\mu}$  chico no hay bifurcación en la parte positiva de la rama y la primera bifurcación sucede ya que la barra se comprime.

Más aún, tenemos que  $(\lambda k + N^2 - \hat{\nu}N)\bar{\mu} \leq (\lambda k + \lambda^2 R^2 + \lambda R)\bar{\mu}$  si  $N(1) < 0$  pero  $(\lambda k + N^2 - \hat{\nu}N)\bar{\mu} \leq \lambda k \bar{\mu}$  si  $N(1) \geq 0$ . De donde, si  $\lambda < \lambda_1$  implica que  $\lambda(k + \lambda R^2 + R) < \frac{\pi^2}{4}$ , entonces no hay bifurcación para los valores de  $\lambda$  menores a esta  $\lambda_1$ . Igualmente, si  $\lambda < \lambda_2$  implica que  $\lambda k \bar{\mu} < \frac{\pi^2}{4}$  y  $N(1) > 0$ , entonces no hay bifurcación para  $\lambda < \lambda_2$ .

Estos resultados se pueden resumir como sigue

Proposición 6.3 *Supongamos que se cumplen las mismas condiciones de la Proposición 6.1 y además,  $\bar{\eta} \equiv 1$ ,  $\hat{\nu}_N(0) \leq 2$ ,  $\bar{\mu}$  es constante y para  $N > 0$ ,  $\hat{\nu}(N) \geq N$ . Entonces, para  $\bar{\mu}$  suficientemente chico (un material muy fuerte resistiendo torsión) no hay bifurcación en la parte tensa de la rama que sale del origen.*

Esto recuerda en algún sentido el doblamiento clásico de una barra a la que se le aplica una fuerza en uno de sus extremos. Este doblamiento sólo se produce cuando la barra está comprimida y esta compresión supera un valor crítico.

Claramente lo encontrado en esta sección puede ser ampliado y profundizado, sin embargo, para el objetivo de este trabajo, puede servir como un ejemplo del tipo de comportamiento que sigue la barra y como un indicativo del tipo de conclusiones a las que uno puede llegar trabajando en esta dirección.



## Conclusiones.

A lo largo de este trabajo hemos visto la riqueza que un problema conceptualmente sencillo puede tener, desde su modelación física hasta el estudio matemático de las ecuaciones que lo describen. Vimos un modelo de barras elásticas encontrando de que manera su geometría y las leyes fundamentales de la mecánica se relacionan para determinar su comportamiento. Estudiamos un ejemplo particular, el de una barra elástica girando, en el cual se aprecia de manera muy clara esta relación llegando en este caso a un sistema de 4 ecuaciones diferenciales que describe tanto el movimiento de la barra como su deformación. Usamos diferentes métodos del análisis no lineal para obtener la mayor cantidad de información posible a partir de este sistema dividiendo este trabajo en dos partes: el estudio de la barra recta y el de sus doblamientos. En el caso de la barra recta, encontramos que puede haber soluciones múltiples dependiendo de la velocidad angular que se tenga y que, en algunos casos, hay curvas de soluciones con esta velocidad como parámetro. En el caso particular de una barra suave vimos que hay dos curvas de soluciones y que inclusive puede haber zonas (valores de la velocidad angular) en las que no haya solución estacionaria. Respecto a los doblamientos, encontramos que estos suceden para valores bien determinados de la velocidad angular y que estos valores dependen fuertemente del tipo de material que consideremos. Para terminar, vimos el caso particular para el cual podemos asegurar que los doblamientos sólo suceden cuando la barra se encuentra comprimida. Los teoremas que se refieren a la existencia de soluciones múltiples usando métodos variacionales (capítulo 2, sección 5) fueron tomados del artículo [Bur] de Burton; aquellos que se encuentran en el capítulo 2, secciones dos, tres y el principio de la cinco así como los referentes a las propiedades nodales<sup>3</sup> y la bifurcación global provienen del artículo [Ant2] de Antman y Nachman; el resto de los resultados de los capítulos 2 y 3 son originales.

---

<sup>3</sup>Con una prueba diferente a la presentada en este trabajo

Sin embargo, estos resultados no concluyen con este problema pues todavía hay muchas preguntas que no fueron contestadas o incluso grandes temas que no han sido tratados, por ejemplo:

1. El problema relativo a la estabilidad de las soluciones.
2. El estudio de las soluciones que no son estacionarias.
3. El comportamiento en general de la rama de soluciones triviales tensas.
4. La forma de las ramas de soluciones no triviales (su convexidad, si son curvas, etc.)
5. El estudio de los doblamientos en otros planos (en particular, en el mismo plano del anillo).

Otro de los aspectos que no fueron mencionados a profundidad y que pueden llevarnos a problemas interesantes son los relacionados con las aplicaciones de estos resultados. Si bien el problema fue considerado como puramente teórico, puede tener diversas aplicaciones prácticas. Dada la respuesta que se encontró de los doblamientos respecto a la velocidad angular, vimos que esto depende fuertemente del tipo de material que consideremos. Esto puede ayudar al diseño de algún mecanismo sencillo y no demasiado costoso que permita separar materiales elásticos o facilitar su clasificación, aspecto que puede ser de gran utilidad en la ciencia de materiales. Otras posibles aplicaciones están relacionadas con la ingeniería. El estudio a profundidad de los doblamientos y sus características puede ayudar a controlar estos doblamientos o incluso fracturas en aparatos que funcionen con una barra unida a un anillo. Por ejemplo, si una hélice de avión o de helicóptero llega a doblarse, puede tener consecuencias graves y con un estudio profundo puede encontrarse cual es el valor crítico de la velocidad angular para el cual, el material de la hélice se dobla (evitando este valor, se puede evitar el doblamiento). Incluso se pueden tener aplicaciones biológicas o fisiológicas, pues la teoría de barras de Cosserat ha mostrado ser un buen modelo para huesos o tallos.

# Bibliografía.

[Amb] Ambrosetti, A y Rabinowitz, P.H., Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications, J. Funct. Analysis No. 14, USA, 1973.

[Ant1] Antman, Stuart, Nonlinear Problems of Elasticity, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ant2] Antman, Stuart y Nachman, Arje, Large Buckled States of Rotating Rods, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications Vol.4 No.2, Great Britain, 1980.

[Bur] Burton, G.R., Multiple Steady States for Rotating Rods, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications Vol.4 No.2, Great Britain, 1986.

[Cod] Coddington y Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, USA, 1955.

[Gold] Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley, USA, 1984.

[Hof] Hofer, H., Variational and Topological Methods in Partially Ordered Hilbert Spaces, Math. Annls 261, USA, 1982.

[Inc] Ince, E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, USA, 1956.

[Ize] Ize, Jorge, Calculo de Variaciones, CINVESTAV, IPN, México, 1987.

[John] John, Fritz, Ordinary Differential Equations, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1965.

[Lou] Loubet, Enrique, Un Problema No lineal sobre Cuerdas Elásticas Rotando, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1996.

[Mal] Maltese, Giulio, On the Relativity of Motion in Leonhard Euler's Science, Arch. Hist. Exact Sciences No. 54, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Rab] Rabinowitz, P.H., Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems, J. Func. Analysis No. 7, Academic Press, USA, 1971.

[Struwe] Struwe, Michael, Variational Methods, Springer-Verlag, USA, 1980.

[Viv] Viveros, Jorge, Deformación de un anillo de Cosserat en el plano, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1997.