

00365
7



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**USO DE LOS PROCESOS ARMA EN LA
FORMULA DE SAMUELSON PARA
VALUACION DE DERIVADOS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(M A T E M A T I C A S)
P R E S E N T A:**

RAMSES HUMBERTO MENA CHAVEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT

MEXICO, D. F.

2000

28/15



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Uso de los Procesos ARMA en la Fórmula de Samuelson para Valuación de Derivados

Ramsés H. Mena Chávez

Índice General

Introducción	1
1 Características Generales de los Derivados Financieros	3
§1.1 Estructuras Financieras	3
§1.2 Derivados	5
§1.3 Opciones	5
§1.4 Principio de No Arbitraje	9
§1.5 Estrategias de Negociación	9
§1.6 Cotas Racionales para Opciones	11
§1.7 Paridad Put - Call	18
2 Modelos de Valuación de Opciones	19
§2.1 Movimiento Browniano o Proceso de Wiener	19
§2.2 El modelo Black-Scholes	27
§2.3 Valuación	33
§2.4 Volatilidad	37
§2.5 Fórmula de Samuelson	41
3 Fórmula de Samuelson utilizando Series de Tiempo	44
§3.1 Modelos Estocásticos Lineales	45
§3.2 Modelos Estocásticos no Lineales	54
§3.3 El método de Monte Carlo	59
§3.4 Estimador Monte Carlo - Samuelson	64
§3.5 Estimación de Monte Carlo usando Procesos ARMA	65
§3.6 Ejemplo CPB	67
§3.7 Conclusiones	75
A Gráficas	78

B Esperanza Condicional	85
C Lema de Itô	87
D Series de Tiempo	90
Bibliografía	92

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los mercados financieros han sufrido cambios radicales, la tecnología en la manipulación de la información provoca la necesidad de incorporar procesos más precisos y rápidos. Actualmente es posible invertir en cualquier mercado y en tiempos que antes eran inverosímiles. Esto trae consigo riesgos, riesgos que pueden ser cubiertos mediante el uso de derivados.

Un derivado es un instrumento financiero con la característica de que su valor depende del valor de otro instrumento. Existe una gran variedad de derivados como lo son los contratos *forward*, los *swaps*, los *futuros* y las *opciones* es sus diferentes variedades. El presente trabajo se limitara en las opciones, sin dar a entender con esto que el desarrollo es exclusivo para este tipo de derivados.

Uno de los principales objetivos de la teoría financiera actual es poder predecir el estado futuro de los valores en un mercado financiero y con esto poder cubrirse ante un probable riesgo de pérdida o simplemente obtener una ganancia.

Dentro de los problemas financieros que más repercusión han tenido en la matemática moderna, están los problemas de valuación y cobertura. La valuación consiste en asignar un precio al instrumento en cualquier momento del tiempo y la cobertura consiste en mostrar como el emisor o tenedor de cierto instrumento se puede proteger de los riesgos contingentes subyacentes al mercado. Este trabajo se enfoca principalmente el problema de la valuación sin ser exhaustivo con el problema de cobertura, sin embargo, los resultados pueden ser aplicados en la solución de este último.

En muchas las teorías para resolver el problema de la valuación, se supone, entre otras cosas, que los log-rendimientos tienen asociada una distribución normal, sin embargo este supuesto en la mayoría de los casos no se cumple. Modelos como la fórmula Black-Scholes trabajan bajo este esquema y se ha

llegado a demostrar que no necesariamente es lo óptimo, ya que las distribuciones empíricas de los log-rendimientos cuentan con características que no pueden modelarse bajo este esquema.

Para el problema específico de la valuación existen en la actualidad una gran variedad de soluciones, las cuales no trabajan bajo el supuesto de normalidad antes mencionado. El punto central de este trabajo es explorar, como alternativa de valuación, la fórmula de Samuelson bajo una modulación de procesos ARMA y con esto verificar si bajo este supuesto se logra caracterizar de una mejor manera que la distribución de los log-rendimientos, y con esto poder obtener una valuación más atinada.

El trabajo consiste básicamente en examinar mediante ejemplos reales si el método propuesto resulta en una mejor valuación. Con este objeto, se estudia y analiza de manera paralela el modelo Black-Scholes, que es uno de los más usados para valorar derivados. Esto último con la finalidad de poder comparar si los resultados fueron satisfactorios.

El trabajo se divide en 3 Capítulos:

Capítulo 1 En este capítulo se exhiben las propiedades generales que deben cumplir los precios de los productos derivados, enfatizando en las opciones de compra, ya que este será la regla de comparación entre el modelo propuesto y el modelo Black-Scholes.

Capítulo 2 En este capítulo se expone, de manera no rigurosa, la teoría clásica de valuación de opciones tipo Europeas, esto con la finalidad de entender los supuestos usuales bajo los que dicha teoría trabaja. También en este capítulo se analiza en particular el modelo Black-Scholes y sus parámetros.

Capítulo 3 Finalmente en esta parte se hace una revisión rápida de los modelos de series de tiempo y se utilizan estos para la valuación de opciones de compra mediante el uso del estimador Monte Carlo para la fórmula de Samuelson. También se enuncia el método de reducción de varianza que se utilizó, con la finalidad de que los programas de cómputo realizados fuesen más rápidos.

Capítulo 1

Características Generales de los Derivados Financieros

Desde un punto de vista moderno (ver [12]) la teoría financiera debe analizar las propiedades de las estructuras financieras y encontrar la manera óptima de operar los recursos que estas brindan, esto mediante el uso de instrumentos y estrategias, tomando en cuenta factores como tiempo, riesgo y usualmente bajo un ambiente aleatorio.

Estos factores son los que hacen posible el uso de elementos como procesos estocásticos, series de tiempo e inferencia estadística entre otros en el área de finanzas. Aunque en este trabajo el objetivo es un modelo en particular, es de importancia conocer las características de ambiente en que este puede ser utilizado, con la finalidad de interpretar mejor los resultados.

§1.1 Estructuras Financieras

La naturaleza de los problemas financieros, en los cuales las herramientas matemáticas pueden actuar, puede distinguir las siguientes estructuras básicas:

- Individuos
- Corporaciones
- Intermediarios
- Mercados financieros

Individuos

En los mercados financieros se intercambian diversos tipos de bienes a cambio de dinero, esto mediante el uso de información disponible, información que puede ser económica, política o de otra índole. Esta información puede llevar a tomar decisiones determinantes en las negociaciones. Los individuos (e.g. *agentes*) que toman tales decisiones pueden ser catalogados en cuanto a su aversión al riesgo como arriesgados (mayor incertidumbre) y conservadores (menor incertidumbre). También pueden ser clasificados en cuanto a su actividad, preferencias y tipo de operación entre otras clasificaciones¹.

Corporaciones

Aquí se pueden considerar las compañías o firmas que poseen fabricas, tierra, maquinaria o que mantienen alguna relación de negocio, manufactura etc. Para incrementar su capital las corporaciones usualmente negocian acciones o bonos (e.g. los gobiernos también lo hacen). Entonces una buena administración corporativa debe tomar en cuenta el uso de instrumentos financieros.

Intermediarios

En esta clasificación se pueden encontrar bancos, compañías aseguradoras, fondos de pensiones, etc. También aquí, se podrían situar las casas de bolsa y mercados de opciones y futuros (e.g. mercados financieros).

Entre los mercados más renombrados y de los cuales se obtuvo la información para este trabajo se encuentran NYSE (the New York Stock Exchange), AMEX (the American Stock Exchange), NASDAQ (the NASDAQ Stock Market), CBOT (the Chicago Board of Trade), etc.²

¹Una clasificación más completa se puede encontrar en [17].

²La razón principal por la cual se eligieron mercados en los Estados Unidos, fue por la disponibilidad de información.

Mercados financieros

Entre estos se incluyen los mercados de divisas, los mercados de metales, y los mercados de instrumentos financieros. En los mercados de instrumentos usualmente se distinguen los instrumentos subyacentes (también llamados bienes o valores) y los derivados, en donde los últimos se construyen como función de los subyacentes.

Dentro de los instrumentos subyacentes se pueden incluir básicamente bonos, acciones y divisas. Y dentro de los derivados, se tienen opciones, futuros, warrants, swaps, spreads, etc.

Frecuentemente se entiende como *ingeniería financiera* a la manipulación de derivados como herramienta de reducción del riesgo causado por la incertidumbre del mercado.

§1.2 Derivados

Como ya se mencionó anteriormente los derivados financieros se pueden definir como simples funciones de los bienes subyacentes, dentro de los derivados más comunes se encuentran las *opciones*, los *futuros*, los *forwards*, y los *swaps* entre otros. Los mercados más recurridos son los mercados de opciones, es por eso que en este trabajo se estudiarán de manera singular, aunque no necesariamente los resultados serán exclusivos de este tipo de derivado.

§1.3 Opciones

La discusión inicial de la teoría de valuación de opciones se enfoca en definir e interpretar los términos en que estas se negocian. Las opciones se clasifican en opciones de compra (*call*) y opciones de venta (*put*). Una opción de compra (o venta) es un contrato que otorga al *tenedor* de esta, el derecho más no la obligación, de comprar (o vender) el *bien subyacente* a un precio determinado (*precio de ejercicio*) y sobre cierta fecha (*fecha de expiración*). Existen dos modalidades de fechas de expiración en las cuales las opciones son ejercidas, si la opción puede ser ejercida únicamente en la fecha de expiración, entonces

se dice que la opción es de tipo *Europea*, mientras que si la opción se puede ejercer en cualquier momento antes o igual a la fecha de expiración se dice que la opción es de tipo *Americana*.

A los contratos recién mencionados se les conoce como opciones simples, sin embargo, existe una gran variedad de modificaciones llamadas opciones exóticas, por ejemplo, opciones Asiáticas, opciones con barrera, opciones rusas, etc.

Pagos Terminales

Considérese una opción de compra tipo Europea con precio de ejercicio K y sea S_T el precio del bien subyacente en la fecha de expiración T . Si $S_T > K$, entonces el tenedor de una opción de compra escoge ejercer la opción puesto que él puede comprar el bien, cuyo valor es S_T , por solamente K (ya que así lo pacto), obteniendo con esto una ganancia de $S_T - K$ ³. Si $S_T \leq K$, entonces el tenedor⁴ de la opción de compra no ejerce la opción puesto que el valor del bien subyacente es menor en el mercado que lo establecido en el contrato. Así pues el *pago terminal* para una opción de compra tipo Europea se puede sintetizar mediante la expresión

$$f_T = \max(S_T - K, 0) - C_T = (S_T - K)^+ - C_T \quad (1.1)$$

De manera análoga el pago terminal para el tenedor de una opción de venta tipo Europea es

$$f_T = \max(K - S_T, 0) - P_T = (K - S_T)^+ - P_T \quad (1.2)$$

en donde C_T (P_T) es el precio por la adquisición del instrumento financiero (*prima*). Es decir, C_T (P_T) es el precio que el tenedor de la opción de compra (venta) paga por el contrato y es la cantidad que el *emisor* (persona que adquiere la obligación) de la opción debe administrar para cumplir con las condiciones del contrato.⁵

³Sin considerar el costo del contrato (prima).

⁴También existe el punto de vista del emisor.

⁵La notación f_T , se utiliza en general para denotar el valor de cualquier derivado al momento T .

Si en las expresiones 1.1 y 1.2 se sustituye a S_T por el promedio del bien subyacente durante el periodo de cobertura de la opción (en particular $\bar{S}_T = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k$), entonces se obtienen las expresiones para las opciones asiáticas aritméticas.

Aunque existe una gran variedad de instrumentos derivados, en el presente trabajo, la mayoría de las veces se utilizarán a las opciones como tema de ejemplo, esto debido a que estas son las más negociadas en los mercados financieros.

El precio de la opción (precio del contrato), como se observó anteriormente, depende del precio de ejercicio y el tiempo de expiración, sin embargo, de manera menos obvia se tiene que tal precio también depende de la tasa de interés libre de riesgo subyacente en el mercado y el grado de aleatoriedad en el precio del bien. Tal grado de aleatoriedad, comúnmente llamado *volatilidad*⁶, es sin lugar a duda uno de los conceptos más ampliamente discutidos en la teoría financiera.

Tabla §1.3 Acciones, precios de opciones y pagos terminales observados⁷(NYSE)

Clave NYSE	Fecha de Expiración T	S_0	S_T Obs.	K	C_T (Bid)	C_T (Ask)	P_T (Bid)	P_T (Ask)	f_T Call	f_T Put
EL	22/04/2000	50.4375	50.6334	50	4.875	5.250	4.000	4.375	-4.242	-4.000
GM	19/02/2000	72.9375	73.3216	70	5.500	5.875	2.313	2.500	-2.178	-2.313
HLT	22/04/2000	9.3125	7.2944	7.5	2.250	2.813	0.375	0.500	-2.250	-0.169
JNJ	19/02/2000	94.3750	77.1575	95	3.625	3.875	4.125	4.500	-3.625	13.718
XRX	19/02/2000	23.5000	20.8430	25	1.188	1.438	2.688	2.938	-1.188	1.470
BAB	19/02/2000	65.5000	43.0939	65	4.375	4.750	3.000	3.375	-4.375	18.906
IMN	22/04/2000	31.1870	21.7500	35	2.687	3.000	5.125	5.500	-2.687	8.125
SNE	19/02/2000	232.5000	133.5630	230	25.500	28.250	18.625	21.000	-25.500	77.812
DD	19/02/2000	51.7167	51.3243	65	5.500	5.750	1.563	1.813	-5.500	12.113
SLE	19/02/2000	20.7500	16.0499	20	1.812	2.062	0.813	1.063	-1.812	3.138
KMB	19/02/2000	65.8750	52.3263	60	6.875	7.375	0.938	1.188	-6.875	6.736
CPB	20/05/2000	36.1847	28.1875	37.5	2.562	2.812	3.375	3.625	-2.562	5.938
MCD	19/02/2000	41.0000	32.5000	40	2.375	2.562	1.063	1.313	-2.375	6.438
OMC	22/04/2000	97.4375	83.4026	80	20.125	21.125	1.500	1.750	-16.722	-1.500
PEP	19/02/2000	36.7500	33.9826	35	2.500	2.750	0.750	0.875	-2.500	0.267
WHR	19/02/2000	63.9726	57.7591	60	5.625	6.125	1.438	1.688	-5.625	0.803

⁶El grado de aleatoriedad, no necesariamente es representado por el término volatilidad, también se puede descomponer en otros componentes para su estudio.

⁷Los precios fueron observados el 11/01/00. En el caso de los valores S_T , estos fueron los cotizados a la fecha de expiración. La fuente de los datos es <http://finance.yahoo.com>

EL	Estee Lauder	DD	Dupont Company
GM	General Motors	SLE	Sara Lee
HLT	Hilton Hotels	KMB	Kimberly Clark
JNJ	Johnson & Johnson	CPB	Campbells
XRX	Xerox Co.	MCD	McDonald's Co.
BAB	British Airways	OMC	Omicron
IMN	Imation	PEP	Pepsi Inc.
SNE	Sony Co.	WHR	Whirpool

La atención de los agentes hacia las opciones, se debe a que estas no son muy costosas y la comisión obtenida puede ser considerable. Como se puede observar en la tabla §1.3, los pagos terminales fueron, en casi todos los casos, favorables para los tenedores de opciones de venta (Put). A la vez se puede ver que para el caso de opciones de tipo europeo (Call) siempre se tuvo un pago terminal negativo, es decir, una pérdida⁸ (en algunos casos fue igual al costo de la prima). En la tabla §1.3 se reportan dos cotizaciones para los precios de las opciones *bid* y *ask*. La mayoría de los mercados financieros (incluyendo CBOE Chicago Board Options Exchange, el mercado más grande de opciones) usan sistemas de mercado para facilitar las negociaciones (market maker systems). El intermediario (market maker), para cierto contrato de opciones, es la persona indicada para establecer las dos cotizaciones bid y ask. El bid es el precio al cual el intermediario se prepara para comprar y el ask es el precio al cual se prepara para vender. En el momento en que el bid y el ask son cotizados, el intermediario no sabe si el agente quiere comprar o vender el bien. Claramente el ask es mayor que el bid y a la diferencia *ask - bid* se le conoce como *spread*. Es bien sabido, en el ambiente financiero, que el spread esta directamente correlacionado con la volatilidad del subyacente .

Aunque en la tabla se reportan, tanto los precios bid como los ask, para el calculo de los pagos terminales (1.1) y (1.2) se uso el precio bid, no obstante esto no necesariamente es lo óptimo.

Como se ha ido observando dentro del lenguaje utilizado hasta el momento, existen conceptos tal como "call", "put", "fecha de expiración", "bid", etc.

⁸Una pérdida en el sentido estricto. Aunque el hecho de haber comprado más barato puede ser favorable.

Sumados a estos, existen otros términos de interés, como lo son las siguientes:

- Se dice que la opción esta "*out-of-the-money*"⁹ si al momento del ejercicio de la opción esta no es redituable, es decir, $S_T < K$ en el caso de una opción de compra o $S_T > K$ en el caso de una opción de venta. Se dice que la opción esta "*in-the-money*", si esta tiene un valor positivo al momento del ejercicio, es decir, se ejerce la opción.
- Se conoce como *valor intrínseco*, a la cantidad por la cual la opción esta "in-the-money".
- La posición *corta* en una negociación sobre un bien subyacente, es la posición en la cual uno se deshace del bien y la posición *larga* es en la que se adquiere el bien.

§1.4 Principio de No Arbitraje

En la teoría de valuación de opciones un concepto de importancia es el de la ausencia de oportunidades de *arbitraje*, una oportunidad de arbitraje se traduce como la posibilidad de obtener una ganancia sin incurrir en ningún riesgo. Como un ejemplo supóngase que el precio de una determinada acción, en el mercado A tiene un valor de \$45, y en otro mercado B un valor de \$48. Si se asume que no hay costos de transacción, entonces un agente podría obtener una ganancia de \$3 sin incurrir en ningún riesgo, ya que compraría en el mercado A y vendería en el B.

Aunque en muchos modelos el supuesto de no arbitraje es necesario, este no necesariamente se cumple. En (Hull [17]) se puede ver un ejemplo real en donde existió una oportunidad de arbitraje.

§1.5 Estrategias de Negociación

Supóngase que un inversionista tiene un *portafolio* con una combinación de acciones, bonos y derivados. Al paso del tiempo, el valor del portafolio cambia

⁹Se utiliza la terminología en inglés ya que esta es la más utilizada inclusive en países de habla hispana

puesto que los valores que lo forman cambian. Por otro lado las estrategias que el inversionista utiliza afectan el valor del portafolio, por ejemplo si se cambiase las proporciones de cada bien que forma al portafolio o si se añadiesen más valores al portafolio, entonces obviamente el valor del portafolio cambiaría.

Se dice que una estrategia es *auto-financiable* si el inversionista no añade o quita ningún valor al *portafolio*¹⁰ inicialmente pactado. Es decir, el inversionista lo único que tiene que hacer para incurrir en una estrategia auto-financiable es la inversión inicial y permanecer inmóvil hasta la expiración del portafolio, si es que este tiene alguna fecha.

Existe una gran variedad de estrategias de negociación, estas varían dependiendo si son desde el punto de vista del emisor o el tenedor del valor. Por ejemplo en el caso del emisor de una opción de compra, si este no posee el bien subyacente al momento de la emisión, para el probable ejercicio del contrato, entonces se dice que el emisor esta en una *posición desnuda*. Sin embargo, si el emisor posee alguna cantidad del bien subyacente, entonces la pérdida, de la posición corta en la opción de compra, puede ser compensada en el caso de que el bien subyacente aumentase su precio, esto gracias a la posición larga en el bien subyacente. A esta estrategia se le llama *posición cubierta*. Aunque esta última estrategia también puede llevar a una pérdida, en el caso de que el valor del subyacente disminuyera. Una mejor forma de cubrirse ante el riesgo del posible ejercicio del tenedor de la opción es haciendo una combinación de las estrategias antes mencionadas. Una manera de hacer esto, en el caso de una opción de compra, es comprando el subyacente (o una cantidad de este), cuando el subyacente sea mayor que el precio de ejercicio y venderlo cuando sea menor, con la finalidad de tener el subyacente al momento del posible ejercicio de la opción. A este último tipo de estrategias se les denomina como *combinaciones*. Existen muchas maneras de cubrirse ante el riesgo, un estudio más completo se puede ver en (Hull [17]).

¹⁰Un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros, el cual puede estar constituido tanto de bienes como de derivados y bonos.

§1.6 Cotas Racionales para Opciones

Para que una teoría de valuación de opciones sea consistente, esta debe cumplir con ciertas propiedades. Aquí se presentaran algunas cotas para los valores de las opciones con respecto a los precios del bien subyacente, en el caso en donde no hay dividendos. Sin embargo, Merton [18] presenta un estudio más completo. Para este propósito no es necesario asociar ninguna distribución al movimiento de los precios del bien subyacente, pero como consecuencia tampoco se pueden conocer los precios de las opciones. Los supuestos básicos son que no hay oportunidades de arbitraje, que los inversionistas dentro del sistema financiero siempre buscan maximizar sus ganancias, que no existen costos de transacción y que se cuenta con una tasa libre de riesgo.

Con la finalidad de diferenciar entre la opción tipo europeo y la opción tipo americano, se introduce la siguiente notación:

- C y P denotan opciones Americanas de compra y venta respectivamente, mientras c y p denotan las opciones Europeas.
- $B(\tau)$ denota el valor presente del bono con valor a la fecha de maduración¹¹ de \$1 y donde τ es el tiempo de maduración. En el caso más simple, cuando la tasa de interés r es constante $B(\tau) = e^{-r\tau}$ y cuando r no es constante, pero una función conocida de τ , entonces $B(\tau) = e^{-\int_0^\tau r(u)du}$. Obviamente $B(\tau)$ se vuelve más complicado cuando la tasa de interés es estocástica.

De la condición de responsabilidad limitada de los contratos de opciones se tiene

$$C \geq 0, \quad P \geq 0, \quad c \geq 0, \quad p \geq 0 \tag{1.3}$$

Al tiempo de ejercicio $\tau = 0$, los pagos terminales son

$$C(S, 0; K) = c(S, 0; K) = (S - K)^+ \tag{1.4}$$

$$P(S, 0; K) = p(S, 0; K) = (K - S)^+ \tag{1.5}$$

¹¹Usualmente se utiliza la palabra 'maduración' para los bonos y 'expiración' para las opciones

Puesto que las opciones tipo Americano pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de expiración, sus valores deben ser al menos sus valores intrínsecos, es decir,

$$C(S, \tau; K) \geq (S - K)^+ \tag{1.6}$$

$$P(S, \tau; K) \geq (K - S)^+ \tag{1.7}$$

si esto no sucediera ($C < S - K$ cuando $S \geq K$), entonces un inversionista podría obtener una estrategia de arbitraje, pidiendo prestado $C + K$ unidades monetarias para adquirir una opción de compra, la cual ejercería inmediatamente (pues $S \geq K$) y recibiría el valor del bien S . La ganancia sin riesgo que el inversionista obtendría sería $S - K - C > 0$. De manera análoga ocurre con (1.7). Debido a que las opciones de tipo Europeo no tienen el privilegio del ejercicio temprano, entonces las condiciones (1.6) y (1.7) no necesariamente se cumplen, en este caso.

Las opciones tipo Americano tienen todos los derechos de las opciones tipo Europeas más el privilegio del ejercicio en cualquier momento antes de la fecha de expiración, obviamente este privilegio no tiene un costo negativo, por lo tanto el valor de las opciones Americano debe ser al menos igual al valor de las opciones de tipo Europeas

$$C(S, \tau; K) \geq c(S, \tau; K) \tag{1.8}$$

$$P(S, \tau; K) \geq p(S, \tau; K). \tag{1.9}$$

Si se tienen dos opciones tipo Americano con diferentes fechas de expiración τ_1 y τ_2 ($\tau_1 \geq \tau_2$), entonces la que tenga la mayor fecha de expiración debe valer más que la que tenga menor cobertura, ya que por ser de tipo Americano entonces, la de mayor cobertura tiene como caso particular la de menor cobertura.

$$C(S, \tau_1; K) > C(S, \tau_2; K) \tag{1.10}$$

$$P(S, \tau_1; K) > P(S, \tau_2; K). \tag{1.11}$$

Las propiedades (1.10) y (1.11) no pueden ser aplicadas cuando el tipo de la opción es Europea, ya que no se tiene el privilegio del ejercicio temprano.

Cuando existen diferentes precios de ejercicio, la opción de compra, ya sea Europea o Americana, que tenga mayor precio de ejercicio tiene una ganancia esperada menor que la que tiene un menor precio de ejercicio. Esto debido a que la opción con mayor precio de ejercicio tiene menos oportunidad de ser ejercida con un pago positivo, y aún si se ejerciera, esta tendría una ganancia menor. Entonces, se puede decir que el precio de una opción de compra es una función decreciente de sus precios de ejercicios, es decir,

$$c(S, \tau; K_2) < c(S, \tau; K_1) \quad X_1 < X_2 \quad (1.12)$$

$$C(S, \tau; K_2) < C(S, \tau; K_1) \quad X_1 < X_2. \quad (1.13)$$

Ejemplo 1.1. *Tomando en cuenta los valores proporcionados para Xerox en la tabla §1.3 se tiene que $S = 23.5$, $K = 25$, $\tau = 40$ días, ahora si se hace variar a K ($20 \leq K \leq 30$), entonces como se puede ver en la figura (1.1) el precio de la opción de compra es una función decreciente con respecto al precio de ejercicio.*

De manera análoga a las desigualdades (1.12) (1.13), para el caso de las opciones de venta, se deducen

$$p(S, \tau; K_2) > p(S, \tau; K_1) \quad X_1 < X_2 \quad (1.14)$$

$$P(S, \tau; K_2) > P(S, \tau; K_1) \quad X_1 < X_2. \quad (1.15)$$

Para una opción de compra (venta), Americana o Europea, con un argumento similar al de arriba se puede ver que el precio de la opción de compra (venta) es una función creciente (decreciente) de el precio del subyacente, es decir,

$$c(S_2, \tau; K) > c(S_1, \tau; K) \quad S_1 < S_2 \quad (1.16)$$

$$C(S_2, \tau; K) > C(S_1, \tau; K) \quad S_1 < S_2. \quad (1.17)$$

y

$$p(S_2, \tau; K) < p(S_1, \tau; K) \quad S_1 < S_2 \quad (1.18)$$

$$P(S_2, \tau; K) < P(S_1, \tau; K) \quad S_1 < S_2. \quad (1.19)$$

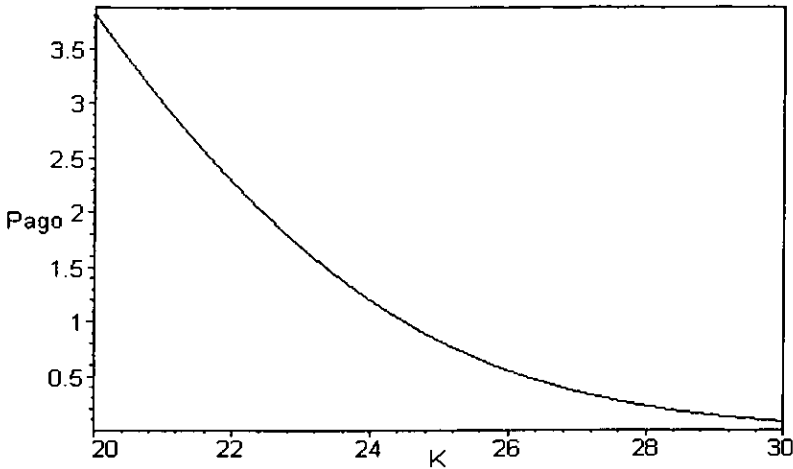


Figura 1.1: Valor de una opción de compra como función del precio de ejercicio

Se dice que una opción de compra es *perpetua* si su fecha de expiración es infinita. El subyacente mismo puede ser considerado como una opción de compra Americana con precio de ejercicio igual a cero más derechos adicionales como pueden ser los dividendos. Entonces aplicando las condiciones (1.8) y (1.10), se puede establecer que

$$S \geq C(S, \infty; 0) \geq C(S, \tau; K) \geq c(S, \tau; K). \tag{1.20}$$

Por lo tanto los valores para las opciones de compra Americanas y Europeas están acotados superiormente por el valor del subyacente¹². Más aun si $S = 0$ en la condición (1.20) y se aplica (1.3), entonces se obtiene,

$$0 = C(0, \tau; K) = c(0, \tau; K), \tag{1.21}$$

es decir, los valores de la opción se vuelven cero cuando el subyacente vale cero.

¹²En particular el proceso encontrado por Bachelier no cumple con (1.20).

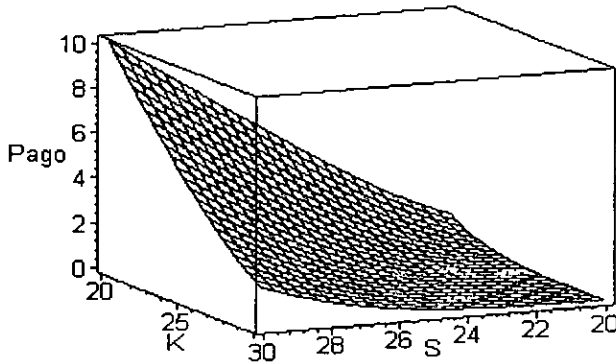


Figura 1.2: Valor de una opción de compra como función del precio de ejercicio y el subyacente.

El precio de una opción de venta Americana iguala al valor de precio de ejercicio cuando el valor del subyacente es igual a cero, de otra manera, este precio esta acotado por el precio de ejercicio. Junto con la condición (1.9), se tiene

$$K \geq P(S, \tau; K) \geq p(S, \tau; K). \tag{1.22}$$

Ejemplo 1.2. Considerando el mismo caso del ejemplo (1.1), pero ahora tomando al pago terminal como función no solamente del precio de ejercicio sino también del bien subyacente, entonces se observa en la figura (1.2) que el pago terminal (en el caso de una opción de compra), se puede ver como una función decreciente de S y K .

Ya establecidas las cotas superiores para las opciones es de interés conocer las cotas inferiores para estas. Si se supone que el bien subyacente no tiene dividendos entonces el precio de una opción Europea de compra es al menos igual al bien subyacente menos el valor presente del precio de ejercicio. Para

ilustrar esto supóngase que se tienen dos portafolios. El portafolio A que consiste de una opción de compra Europea sobre un bien subyacente que no paga dividendos más un bono con fecha de maduración igual a la fecha de expiración del la opción. Y el portafolio B que consta de una unidad del bien subyacente. Los pagos terminales de estos portafolios se resumen en la tabla (2.3), en donde V_A y V_B representan el valor de los portafolios A y B respectivamente.

Tabla 2.3 Pagos terminales para los portafolios A y B.

Valor del subyacente	$S_T < K$	$S_T \geq K$
Portafolio A	K	$(S_T - K) + K = S_T$
Portafolio B	S_T	S_T
Resultado	$V_A > V_B$	$V_A = V_B$

Se puede ver entonces que el valor del portafolio V_A , es más grande o al menos igual que V_B al momento de la fecha de expiración. Así pues, el valor presente del portafolio A debe ser igual o mayor que el valor presente del portafolio B, ya que si esto no ocurriera existirían oportunidades de arbitraje. Esto es,

$$c(S, \tau; K) + KB(\tau) \geq S, \tag{1.23}$$

que junto con la condición (1.3), se deduce que la cota inferior para el valor de una opción de compra tipo Europea es

$$c(S, \tau, K) = (S - KB(\tau))^+. \tag{1.24}$$

Combinando (1.24) con la condición (1.20), el valor de una opción tipo Europea, sobre un bien que no da dividendos, esta acotada por

$$S \geq c(S, \tau; K) \geq (S - KB(\tau))^+. \tag{1.25}$$

Una propiedad importante que se utilizara más adelante para la elaboración de los ejemplos reales, es la igualdad entre los valores de los precios de una opción de compra Americana y Europea. En cualquier momento que una opción de compra sea ejercida, su valor inmediatamente se convierte en $(S - K)^+$ el cual es menor que $(S - KB(\tau))^+$, la cota inferior para la opción de compra si esta sigue vigente. Esto implica que el hecho de ejercer antes de la fecha de

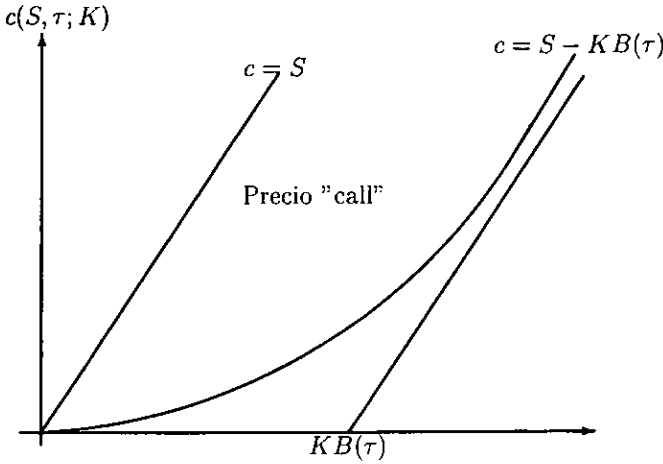


Figura 1.3: Cotas para la opción de compra Europea.

expiración causa una disminución en el precio de la opción de compra. Para beneficio de el tenedor, una opción de compra tipo Americano sobre un subyacente sin dividendos no debe ser ejercida antes de la fecha de expiración. Puesto que el privilegio del ejercicio temprano es perdido, entonces los precios de opciones tipo Americanas y Europeas debe ser el mismo. Cuando el subyacente paga dividendos puede ser que el ejercicio temprano sea óptimo, esto cuando el valor del subyacente es muy alto y los dividendos son calculables, bajo estas circunstancias usualmente es más atractivo para el inversionista (el tenedor) adquirir el subyacente que la opción. En el caso de las opciones de venta tipo Americano, no importa si el subyacente tiene o no dividendos, siempre será óptimo el ejercicio antes de la fecha de expiración cuando el subyacente es lo suficientemente bajo (ver [18]).

§1.7 Paridad Put - Call

La paridad entre el precio de una opción de compra y el precio de una opción de venta sobre el mismo bien subyacente y con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración, esta dada por

$$p = c - S + KB(\tau). \quad (1.26)$$

Esta relación no puede ser aplicada en el caso de opciones de tipo Americano, debido a la característica del ejercicio temprano. En la siguiente tabla se observan los precios bid y ask cotizados para una opción de venta así como los obtenidos por la relación (1.26) utilizando los precios cotizados de las opciones de venta.

Símbolo	Precios cotizados		Precios de paridad put-call	
	$P_T(bid)$	$P_T(ask)$	$P_T(bid)$	$P_T(ask)$
El	4.0000	4.3750	3.6569	4.0319
GM	2.3125	2.5000	2.1360	2.5110
HLT	0.3750	0.5000	0.3204	0.8829
JNJ	4.1250	4.5000	3.6712	3.9212
XRX	2.6875	2.9375	2.5352	2.7852
BAB	3.0000	3.3750	3.4790	3.8540
IMN	5.1250	5.5000	5.9535	6.2665
SNE	18.6250	21.0000	21.5987	24.3487
DD	1.5625	1.8125	18.3873	18.6373
SLE	0.8125	1.0625	0.9402	1.1902
KMB	0.9375	1.1875	0.6345	1.1345
CPB	3.3750	3.6250	3.1342	3.3842
MCD	1.0625	1.3125	1.1313	1.3183
OMC	1.5000	1.7500	1.4385	2.4385
PEP	0.7500	0.8750	0.5368	0.7868
WHR	1.4375	1.6875	1.2869	1.7869

Capítulo 2

Modelos de Valuación de Opciones

El problema de valuación de opciones tiene varios enfoques, entre los más usados está el de procesos estocásticos, sin embargo, en la actualidad existen muchos otros como los proporcionados en áreas como programación lineal, sistemas dinámicos, redes neuronales y series de tiempo entre otros. En este capítulo se hace la comparación de los resultados obtenidos más adelante, con la fórmula Black-Scholes, entonces con la finalidad de hacer esta comparación más completa se introducen los elementos básicos de la teoría usada por este último enfoque. Para este fin se suponen los conocimientos básicos de probabilidad y estadística (ver [3] y [9]).

§2.1 Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

El movimiento Browniano tiene un papel importante en la teoría de procesos estocásticos y consecuentemente en la teoría financiera, razón por la cual se hace una pequeña introducción en esta sección.

El movimiento Browniano, nombrado así después de las investigaciones hechas por el biólogo Robert Brown (1820), fue usado por primera vez dentro de la teoría financiera por Louis Bachelier (1900) en su tesis doctoral *Théorie de la Spéculation* [1]. En su trabajo Bachelier propuso que la evolución de los

precios de un bien en un mercado financiero se podrían modelar mediante el uso de un proceso estocástico.

Analizando los datos experimentales de precios $S_t^{(\Delta)}$ $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ (registrados en intervalos de tiempo Δ) Bachelier observó que las diferencias $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ tenían promedios aproximados a cero y fluctuaciones $|S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}|$ de orden $\sqrt{\Delta}$. Estas propiedades son las mismas que tiene una caminata aleatoria $S_t^{(\Delta)}$ $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ con

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k \leq \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} X_k^{(\Delta)} \quad (2.1)$$

en donde $X_k^{(\Delta)}$ son variables aleatorias i.i.d. que toman dos valores $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. Se puede ver que si $\Delta \rightarrow 0$ se obtiene el proceso estocástico

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

donde $W = (W_t)_{t \geq 0}$, es justamente el proceso encontrado por Bachelier (o proceso de Wiener, llamado así por Norbert Wiener quien desarrollo, en 1923, la matemática rigurosa de dicho proceso).

Definición 2.1. A un proceso estocástico $W = (W_t)_{t \geq 0}$ $t \in T \subset \mathfrak{R}$ se le llama movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) Comienza en cero; $W_0 = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes y estacionarios.

Es decir, si $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t+h} - W_{s+h}$, se dice que tiene incrementos estacionarios. Y se dice que tiene incrementos independientes si para cada elección de $t_i \in T$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $n \geq 1$

$$W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

iii) Para cada $t > 0$, W_t tiene una distribución $N(0, t)$.

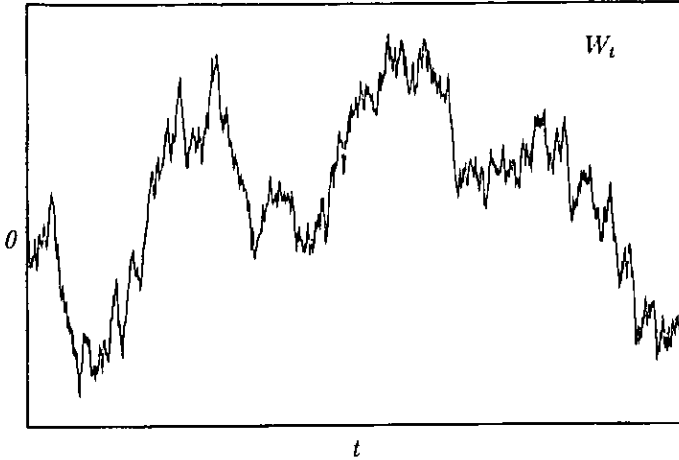


Figura 2.1: Simulación de un movimiento Browniano

iv) Es continuo.

En la figura §2.1 se puede observar el comportamiento de un movimiento Browniano.

Usando este proceso, Bachelier derivó la fórmula $C_T = \mathbb{E}[f_T]$, en donde $f_T = (S_T - K)^+$ (la expresión para el pago terminal de una opción de compra, sin el monto de la prima). La fórmula de Bachelier es:

$$C_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (2.2)$$

donde

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy,$$

es decir, la función de densidad y distribución correspondiente a una variable aleatoria normal.

En general se puede ver que el movimiento Browniano $W = (W_t)_{t \geq 0}$ puede ser construido de muchas maneras diferentes, dentro de estas, las tres mas usadas son:

- 1 Como un proceso de incrementos independientes (definición 2.1)
- 2 Como un proceso Gaussiano: El movimiento Browniano es un proceso Gaussiano centrado, es decir $\mathbf{E}[W_t] = 0$ para toda t , con función de covarianza $C_W(s, t) = \min(s, t)$, recuérdese que un proceso Gaussiano esta caracterizado por su vector de medias y su matriz de covarianzas.
- 3 Como el límite de caminatas aleatorias: Como ya se enunció en el proceso estudiado por Bachelier (expresión 2.1), cuando $\Delta \rightarrow 0$, este proceso converge en un sentido apropiado al movimiento Browniano. Esto se puede ver con el principio de invarianza de Donsker.

Como se puede ver en la figura §2.1 la continuidad de el movimiento Browniano no tiene propiedades especiales. Pero se puede mostrar que se puede construir, en un espacio de probabilidad adecuado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un proceso de Wiener $W = (W_t)_{t \geq 0}$ tal que las trayectorias de este sean continuas.

Filtraciones

Si se considera a $X = (X_t)_{t \geq 0}$ como un proceso sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, entonces se denota por \mathcal{F}_t al σ - álgebra generado por las variables aleatorias X_s , para $s \leq t$, esto es, el σ - álgebra más pequeño con respecto al cual esas variables aleatorias son medibles. Se tiene entonces que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ y también que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$. A la familia creciente $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se le llama *filtración* generada por el proceso X , también denotada como $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$. De manera más general, una filtración es cualquier familia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de *sub* - σ - álgebras de \mathcal{A} que satisfacen que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$.

En la literatura financiera a menudo se interpreta a la filtración \mathcal{F}_t^X como la información actualizada del proceso X , el cual normalmente se asocia a la trayectoria del bien subyacente. Es decir, si se tienen 2 tiempos t_1 y t_2 , entonces se dice que al tiempo t_2 se tiene más información que al tiempo t_1 si

$\mathcal{F}_{t_1}^X \subset \mathcal{F}_{t_2}^X$, lo que en la descripción de la trayectoria de un bien normalmente se cumple.

Ejemplo 2.1. Filtración generada por el movimiento Browniano

Si para cada t , W_t es \mathcal{F}_t medible y se verifica que para cada t y $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ los incrementos del movimiento Browniano

$$W_{t_1} - W_t, \quad W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, \quad W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son independientes de \mathcal{F}_t .

Una manera de construir \mathcal{F}_t , es fijando t y si $s \in [0, t]$ y $C \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ están dados, considérese

$$\{W_s \in C\} = \{\omega : W_s(\omega) \in C\}$$

en \mathcal{F}_t . Si esto se repite para todos los posibles $s \in [0, t]$ y $C \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$, y cualquier otro conjunto generado por las propiedades del σ -álgebra. Entonces \mathcal{F}_t contiene exactamente la información actualizada por el observador del movimiento Browniano hasta el tiempo t y a \mathcal{F}_t se le llama la filtración generada por el movimiento Browniano.¹

Propiedad de Markov

Si se tiene el movimiento Browniano W sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ y la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ que este genera, entonces por la definición 2.1, se observa que la variable aleatoria $Y = W_{t+s} - W_t$ es independiente de el σ -álgebra \mathcal{F}_t . Por lo tanto del apéndice (B.1), para cada función \mathcal{F} medible y acotada f sobre \mathfrak{R} se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(W_{t+s})] &= \mathbb{E}[f(W_t + Y) | \mathcal{F}_t] \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2s} f(W_t + x) dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La fórmula (2.3) muestra que el movimiento Browniano es un proceso de Markov, es decir condicionado sobre \mathcal{F}_t la distribución de W_{t+s} no depende

¹ $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ denota el σ -álgebra de Borel

de su pasado, (sobre las variables aleatorias W_r para $r \leq t$) sino solamente del valor presente del proceso W_t . Por otro lado la distribución de W_{t+s} dada \mathcal{F}_t depende de s , pero no de t , es decir, que el proceso es homogéneo en el tiempo.

Ejemplo 2.2. *Considérese el movimiento Browniano $W = (W_t)_{t \geq 0}$ y asociado a este, la estructura de información del proceso representado por los σ -álgebras $\mathcal{F}_s = \sigma(W_x, x \leq s)$. Se desea calcular*

$$\mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = E(W_t | W_x, x \leq s) \text{ para } s \geq 0.$$

Si $s \geq t$, $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_t$, entonces por la propiedad 4 (ver apéndice esperanza condicional)

$$\mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = W_t.$$

Ahora considérese que $s < t$. Entonces por la linealidad del la esperanza condicional

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}[(W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(W_s | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

Puesto que $(W_t - W_s)$ es independiente de \mathcal{F}_s , entonces

$$\mathbf{E}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(W_t - W_s) = 0.$$

Más aun, $\sigma(W_s) \subset \sigma(W_x, x \leq s) = \mathcal{F}_s$, por lo tanto $\mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s$. Finalmente

$$\mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = W_{\min(s,t)}.$$

Martingalas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad dotado con la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Un proceso real valuado $M = (M_t)_{t \geq 0}$ es una *martingala* si este es adaptado (es decir, cada M_t es \mathcal{F}_t -medible), si cada variable M_t es integrable, y si

$$t \leq s \Rightarrow M_t = \mathbf{E}(M_s | \mathcal{F}_t). \quad (2.4)$$

Si en vez de la igualdad (2.4) se tiene

$$M_t \geq \mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) \quad (2.5)$$

entonces se tiene una *super-martingala*, y si

$$M_t \leq \mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) \quad (2.6)$$

una *sub-martingala*. Es obvio que una martingala es también una super-martingala y una sub-martingala. Si M es una super-martingala, entonces $-M$ es una sub-martingala.

Del ejemplo (2.2) para $s \leq t$, se ve claramente que el movimiento Browniano es una Martingala. También se puede demostrar fácilmente (aplicando la propiedad 4 y (B.1) del apéndice) que los procesos $M_t = W_t^2 - t$ y $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ son martingalas.

Puente Browniano o Browniano Atado

Si se considera al proceso

$$X_t = W_t - tW_1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.7)$$

en donde claramente

$$X_0 = W_0 - 0W_1 = W_0 = 0 \quad y \quad X_1 = W_1 - 1W_1 = 0.$$

entonces se dice que X_t es un puente Browniano o Browniano atado.

De manera fácil se puede verificar que la distribución finito dimensional de (2.7) es Gaussiana², por lo tanto se observa que el puente Browniano tiene esperanza cero y covarianza

$$Cov(X_t, X_s) = \min(t, s) - ts, \quad s, t \in [0, 1].$$

²Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ se distribuye $N(\mu, \sigma)$ y A es una matriz de $m \times n$, entonces $AX' \sim N(A\mu', A\sigma A')$.

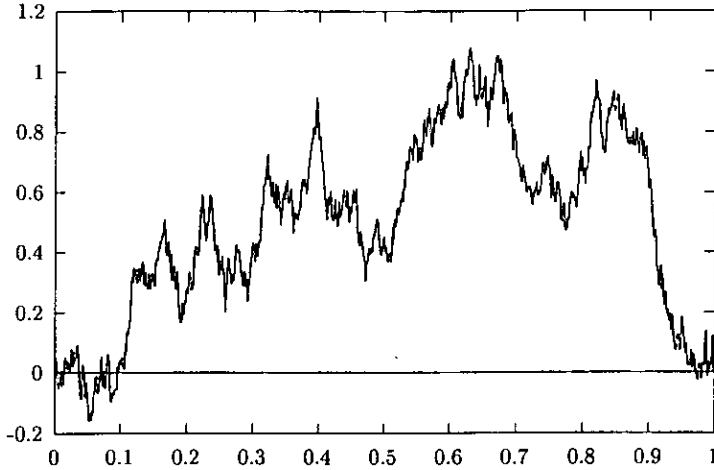


Figura 2.2: Simulación de un Puente Browniano

Movimiento Browniano con Deriva Lineal

El movimiento Browniano con deriva lineal se caracteriza con el proceso

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0 \tag{2.8}$$

para $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$. También en este caso se puede verificar que X_t es un proceso Gaussiano con esperanza igual a μt y covarianza $Cov(X_t, X_s) = \sigma^2 \min(t, s)$, $s, t \geq 0$. La función $\mu_X(t) = \mu t$ (la deriva lineal del proceso) caracteriza esencialmente la forma del proceso.

Movimiento Browniano Geométrico

El proceso sugerido por Black, Scholes y Merton (1973), que esta dado por

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0, \tag{2.9}$$

es decir, el exponencial del movimiento Browniano con deriva lineal.

Aunque el proceso encontrado por Bachelier (2.2) captura ciertas propiedades de las trayectorias de bienes financieros, bajo un ambiente de riesgo, dicho proceso tiene fuertes inconvenientes, entre los más importantes, es que este puede tomar valores negativos, lo cual obviamente no sucede en los mercados financieros. Sin embargo el proceso utilizado por Black, Scholes y Merton no tiene este inconveniente y quizá esta es la razón de su extenso uso.

Con la finalidad de contestar la pregunta de si son o no predecibles los movimientos de los precios en un mercado financiero, muchos autores (1930's) estudiaron estadísticamente las características de datos financieros, algunos de ellos concluían que los incrementos $h_n = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ de los logaritmos de los precios S_n , $n \geq 1$, deberían ser independientes, pero casi ninguno de ellos ponía atención a esto.

La idea de que la sucesión $(H_n)_{n \geq 1}$, donde $H_n = h_1 + \dots + h_n$, posee las características de una caminata aleatoria, contradecía la idea de que la serie de precios tiene una tendencia, ciclicidad o características históricas que hicieran fácil su pronóstico. Este argumento fue tal vez la razón que impulso a los matemáticos al desarrollo de fórmulas analíticas, sin embargo, en los últimos 10 años se han desarrollado modelos basados en series de tiempo (es decir, considerando las características históricas), demostrando con esto que dichos modelos son más aproximados (en la realidad) que las fórmulas analíticas existentes.

A continuación se revisaran algunos modelos que son de gran uso en el ambiente financiero, un estudio más extenso de estos se puede encontrar en libros como ([17], [18] y [21]).

§2.2 El modelo Black-Scholes

La suposición más aceptada a cerca de la dinámica de los precios de instrumentos financieros, es que los logaritmos de estos siguen un movimiento Browniano, es decir, los precios de los bienes siguen un movimiento Browniano geométrico. Esto podría implicar que la distribución del cociente de los pre-

cios es independiente del precio actual o que los cocientes de los precios son independientes.

De forma similar a la fórmula (C.13) presentada en el apéndice, supóngase que la dinámica de los precios de determinado bien esta dada por

$$\frac{dS}{S} = \rho dt + \sigma dW, \quad (2.10)$$

donde ρ es el rendimiento esperado de el cociente de precios, σ es la volatilidad de el proceso de precios. Si se define $G = \ln S$, entonces por el lema de Itô (ver apéndice) se tiene,

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} dt \\ &= \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \end{aligned} \quad (2.11)$$

puesto que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

de tal manera que $G = \ln S$ es un proceso Browniano con deriva $\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ y varianza σ^2 . En otras palabras, si se denota a S_t y S_T el precio actual al tiempo t y el precio futuro al tiempo T , respectivamente, entonces

$$h_t = \ln S_T - \ln S_t = \ln \frac{S_T}{S_t}$$

se distribuye normalmente con media $\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$. Alternativamente, de las propiedades de la distribución log-normal (ver apéndice), se puede ver que la media y la varianza de $\frac{S_T}{S_t}$ están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{S_T}{S_t} \mid S_t \right) &= \exp \left(\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \right) \\ &= e^{\rho(T-t)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y

$$\text{var} \left(\frac{S_T}{S_t} \mid S_t \right) = e^{2\rho(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]. \quad (2.13)$$

Desde la era de los 70's los derivados financieros han tenido un gran auge tanto en los mercados financieros como entre la comunidad académica, aunque Bachelier dio un gran paso en el año de 1900, no fue si no hasta la era de los 60's que Samuelson redescubrió el trabajo realizado por Bachelier y retomo su trabajo. En el año de 1973, precisamente el año en que el CBOE comenzó a negociar con opciones ³, F. Black y M. Scholes [4] y Merton [19] publicaron sus artículos sobre valuación de opciones exponiendo una fórmula analítica que se puede ver como función de algunas variables observables (excepto una, el parámetro de la volatilidad)⁴.

Si se considera al emisor de una opción de compra tipo Europea sobre determinado bien subyacente, se puede ver que dicho emisor esta expuesto al riesgo de cumplir con el contrato, en caso de que este se ejerciese ($S_T > K$). Para protegerse de su posición corta en la opción, el emisor podría comprar cierta cantidad del bien subyacente de manera que con esto se compensara la posición corta en la opción, si esto sucediese se dice que el emisor tiene una posición cubierta. Como se vio anteriormente una estrategia que consiste de una combinación de subyacentes y opciones (posición cubierta) es frecuentemente usada por inversionistas, ya sea para cubrir la posible pérdida de la opción con una parte del subyacente o viceversa. Black y Scholes demostraron que un inversionista puede crear un portafolio de cobertura libre de riesgo, en donde todos los riesgos del mercado son eliminados. En un mercado eficiente sin la oportunidad de estrategias de arbitraje cualquier portafolio libre de riesgo debe tener un rendimiento esperado igual al de la tasa libre de riesgo.

En la derivación usada por Black y Scholes en su artículo [4], se establecen los siguientes supuestos sobre el mercado financiero

³ Antes de esta fecha ya se negociaban opciones en los mercados llamados *over the counter*.

⁴ En reconocimiento a su contribución en la teoría de valuación de derivados, Scholes y Merton recibieron el premio Nobel de economía en 1997 (desafortunadamente Black ya había fallecido para esta fecha).

- (i) Las negociaciones se pueden llevar a cabo en cualquier momento (son continuas en el tiempo).
- (ii) La tasa libre de riesgo r es conocida y constante en el periodo de protección del derivado.
- (iii) Los subyacentes no pagan dividendos.
- (iv) No hay costos de transacción por comprar o vender el subyacente o la opción y tampoco hay impuestos.
- (v) Los subyacentes son perfectamente divisibles (es decir, cualquier cantidad de este puede ser comprada o vendida).
- (vi) No hay cargos por ventas en corto.
- (vii) No hay oportunidades de arbitraje.

Se asume que la evolución del precio del subyacente al tiempo t se modula mediante un movimiento Browniano geométrico (2.10). Considérese también un portafolio, el cual consiste, de la venta en corto de una unidad de una opción de compra tipo Europea y de una posición larga de Δ unidades del bien subyacente. El valor del portafolio Π es:

$$\Pi = -c + \Delta S, \tag{2.14}$$

donde $c = c(S, t)$ denota el precio de la opción de compra⁵. Tanto c como Π son variables aleatorias, entonces aplicando el lema de Itô (ver apéndice) para calcular su diferencial estocástica, se tiene

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt \tag{2.15}$$

y

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dc + \Delta dS \\ &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) dS \\ &= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \rho S \right] dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \sigma S dW. \end{aligned} \tag{2.16}$$

⁵Nótese que ΔS se refiere, en este caso, a Δ veces S , no al cambio infinitesimal en S

El componente estocástico del portafolio aparece como el último término $(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S}) \sigma S dW$. Si se escoge

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S},$$

entonces el portafolio se convierte en una cobertura libre de riesgo⁶. En *equilibrio*⁷, el portafolio de cobertura debe tener un rendimiento igual al de la tasa libre de riesgo. De otra manera, supóngase que el portafolio de cobertura gana más que la tasa libre de riesgo, entonces un inversionista podría tener una oportunidad de arbitraje, pidiendo prestado tanto dinero como le fuese posible para invertir en el portafolio de cobertura.

Fijando $d\Pi = r\Pi dt$, se tiene

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt = r\Pi dt = r \left(-c + S \frac{\partial c}{\partial S} \right) dt, \quad (2.17)$$

que simplificando, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \quad (2.18)$$

A la expresión (2.18) se le llama la ecuación de Black-Scholes [4]. Nótese que el parámetro ρ , que denota la tasa de rendimiento esperada del subyacente, no aparece en la ecuación. Para completar la formulación del modelo para valuación de opciones, se necesita el término correspondiente al pago terminal, que en el caso de una opción de compra con la actual notación esta dado por

$$c(S, T) = (S - K)^+,$$

Como en ninguna de las dos últimas ecuaciones aparece el término ρ , se puede concluir que las preferencias de los inversionistas no afectan el precio de la

⁶Como se vera más adelante la Δ de un portafolio tiene un significado importante en la práctica. Es por eso que se introdujo a ΔS , a pesar de su posible confusión con el cambio infinitesimal en S

⁷El concepto de equilibrio no es otra cosa sino la claridad del mercado, es decir, los agentes no toman decisiones hasta que el mercado se aclare (la demanda agregada para cada bien sea cero).

opción. Esta observación de *neutralidad al riesgo* es uno de los grandes avances de la teoría de Black y Scholes. En el caso de una opción de venta, únicamente se reemplaza a c por p en la ecuación (2.18). En general, se puede ver que el precio para un derivado en particular esta dado por la solución a la ecuación (2.18) reemplazando a c por el derivado correspondiente.

En un ambiente neutral al riesgo, las tasas de rendimiento esperadas del subyacente y de la opción son iguales a la tasa libre de riesgo, es decir si en la expresión (2.12) se reemplaza a ρ por r , se tiene

$$\mathbb{E} \left(\frac{S_T}{S} \mid S \right) = e^{r(T-t)} \tag{2.19}$$

y

$$\mathbb{E} \left(\frac{c_T}{c} \mid S \right) = e^{r(T-t)} \tag{2.20}$$

en donde, como antes, S_T y c_T son variables estocásticas que denotan el precio del subyacente y de la opción a la fecha de expiración, respectivamente. Puesto que el pago terminal de una opción de compra Europea es $c_T = (S_T - K)^+$, la ecuación (2.20) se puede reescribir como

$$\frac{1}{c} \mathbb{E}(c_T \mid S) = \frac{1}{c} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] = e^{r(T-t)} \tag{2.21}$$

o

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \tag{2.22}$$

Tanto en la ecuación (2.19) como en (2.22), el operador esperanza \mathbb{E} esta tomado con respecto una distribución de probabilidad neutral al riesgo. La distribución ajustada es log-normal con deriva igual a la tasa libre de riesgo. La ecuación (2.22) muestra que el valor de la opción de compra puede ser considerado como el valor presente de su pago terminal en un ambiente neutral al riesgo.

Si se denota a $\psi(S_T \mid S)$ la densidad de transición del precio del subyacente S_T , dado el valor actual de este S , en un ambiente neutral al riesgo, entonces

el operador esperanza definido en (2.22), se puede representar formalmente como

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty (S_T - K)^+ \psi(S_T | S) dS_T. \quad (2.23)$$

Sin la noción de la neutralidad al riesgo, la fórmula (2.23) podría forzar a la estimación de los rendimientos esperados tanto del subyacente como de la opción. En efecto, el modelo propuesto por Samuelson (1965) tiene la forma siguiente

$$c(S, t) = e^{-\rho_c(T-t)} \int_0^\infty (S_T - K)^+ \psi(S_T | S, \rho) dS_T. \quad (2.24)$$

donde ρ_c denota el rendimiento esperado de la opción y $\psi(S_T | S, \rho)$ la densidad de transición correspondiente al rendimiento esperado ρ del subyacente.

En un ambiente neutral al riesgo la expresión (2.19) se puede escribir como

$$\mathbf{IE}(e^{-r(T-t)} S_T | S) = S \quad (2.25)$$

De acuerdo con la definición de martingala, la ecuación de arriba indica que el proceso de los precios del subyacente traído a valor presente, $e^{-r(T-t)} S_T$, es una martingala. A la distribución ajustada a la neutralidad en riesgo también se le llama *medida martingala equivalente* y el presente enfoque de valuación también es conocido como la *técnica de valuación martingala*.

§2.3 Valuación

Como ya se mostró en la sección anterior el precio de una opción se puede interpretar como el valor presente de la esperanza de su pago terminal bajo una distribución de probabilidad neutral al riesgo (ver ec. (2.23)). En esta parte del trabajo se resuelve la ecuación de Black y Scholes para el caso más popular, que es el caso de la opción de compra.

Recuérdese que se supone que el movimiento Browniano geométrico, como modulación de la dinámica de los precios. Y que en un ambiente neutral al

riesgo se puede decir que la deriva es r , de tal manera que $\ln \frac{S_T}{S}$ se distribuyen normalmente con media $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$.

Puesto que la fórmula (2.23) satisface la ecuación de Black-Scholes y se esta en un ambiente neutral al riesgo, entonces

$$c(S, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^\infty (S_T - K)^+ \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\{\ln S_T - [\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\}^2}{2\sigma^2\tau}\right) dS_T, \quad (2.26)$$

donde $\tau = T - t$. De tal manera que la densidad de transición en (2.23) puede ser vista como

$$\psi(S_T | S) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\{\ln S_T - [\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\}^2}{2\sigma^2\tau}\right). \quad (2.27)$$

Tomando $\xi = \ln S_T$ y $y = \ln S$ y considerando el caso $S_T > K$ ($e^\xi > K \Leftrightarrow \xi > \ln K$), la expresión (2.26) tiene la forma

$$\begin{aligned} c(S, \tau) &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^\infty (e^\xi - K) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{[y + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \xi]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\ &= e^{-r\tau} \left[e^{\{y + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau\}} N\left(\frac{y + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \ln K + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right. \\ &\quad \left. + KN\left(\frac{y + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \ln K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\ &= e^{-r\tau} \left[e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - KN\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (2.29)$$

y $N(\cdot)$ es la distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

De la paridad entre una opción de compra y una opción de venta tipo Europea (ver (1.26)), se obtiene que la expresión equivalente, en el caso de una opción de venta es

$$p(S, \tau) = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (2.30)$$

La fórmula (2.28) es el caso más popular de la ecuación diferencial de Black-Scholes, que es el caso en donde se valúa una opción de compra tipo Europea, recuérdese que la fórmula (2.18) puede servir para la valuación de otros derivados. Como se puede observar en la expresión (2.28), esta depende de cinco parámetros que son

S El precio actual del bien subyacente.

τ Denotando $T - t$, τ representa el tiempo de protección de la opción.

r La tasa libre de riesgo (e.g. tasa anual convertible instantáneamente)

K Precio de ejercicio.

σ La volatilidad del subyacente.

Todos a excepción del último parámetro, la volatilidad, son observables directamente del mercado. Así que el único que tendrá que ser estimado de alguna manera es la volatilidad.

Para entender las implicaciones de un modelo de valuación de opciones, es necesario examinar la sensibilidad de este y/o el portafolio de cobertura, ante los cambios de cada uno de sus parámetros. Como consecuencia de esta necesidad se tienen las siguientes medidas.

Medidas de sensibilidad para una opción de compra tipo Europea.

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

Unidades que se deben de adquirir del bien subyacente para tener un portafolio de cobertura *delta* (2.17).

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{2\pi\tau}}$$

Tasa de cambio de la delta con respecto al precio del subyacente. Un valor pequeño de la *gamma* implica que la delta cambia lentamente con respecto al precio del subyacente y por lo tanto los ajustes que se tienen que hacer al portafolio para mantenerlo "delta neutral", pueden ser hechos con menos frecuencia.

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{S e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sigma}{2\sqrt{\tau}} - r K e^{-r\tau} N(d_2)$$

Tasa de cambio de la opción con respecto al tiempo. La *theta* permite determinar cuándo una opción puede estar "at-the-money", "in-the-money" o "out-of-the-money".

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r\tau} N(d_2)$$

Anteriormente se argumentó que el precio de una opción de compra es una función decreciente del precio de ejercicio (ver (1.12) y figura (1.1)). Esta medida sirve para verificar estas propiedades en el caso del modelo Black-Scholes.

$$\Lambda_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau} e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

En el modelo Black-Scholes se asume que la volatilidad es constante, pero en realidad esta cambia con el tiempo. La *vega* mide como el valor de la opción responde a los cambios en la volatilidad. se puede ver fácilmente que cuando la volatilidad aumenta, el precio de la opción también, lo cual es lógico ya que, debido al aumento de la volatilidad, existe una gama más amplia de posibles valores terminales.

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = \tau K e^{-r\tau} N(d_2)$$

A una tasa de interés alta le corresponde una disminución en el precio de la opción. Es decir, que la tasa de cambio de la opción de compra con

respecto a la tasa de interés, confirma la consistencia de la valuación en un ambiente neutral al riesgo, con los cambios en la tasa libre de riesgo.

Estas medidas se pueden generalizar para cualquier derivado o inclusive para portafolios de inversión, únicamente se tiene que reemplazar el término c por el término correspondiente al derivado o al portafolio, por ejemplo $\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$.

Además de servir como medidas de sensibilidad, estas medidas pueden servir para la construcción y conservación de un portafolio de cobertura. Sin embargo, recuérdese que la construcción de un portafolio con una cobertura perfecta depende del supuesto de que las negociaciones son continuas. Estos y otros supuestos del modelo Black-Scholes hicieron que este fuese ampliamente criticado y corregido en trabajos futuros (ver [17]). Por ejemplo, el supuesto del movimiento Browniano geométrico como dinámica de los precios no refleja las características reales de los procesos de precios actuales. También, el supuesto de que la tasa de interés es constante, no es verdadero, pues esta cambia con el paso del tiempo.

Sin embargo, a pesar de estas limitaciones el modelo Black-Scholes sigue siendo fundamental entre la comunidad financiera.

§2.4 Volatilidad

Como ya se vio en la sección (§2.3) la fórmula para la valuación de una opción de compra tipo Europea depende de cinco parámetros, todos observables excepto la volatilidad σ . Existen varias maneras de estimar o pronosticar la volatilidad del subyacente de interés, a continuación se verán dos de las técnicas más conocidas.

Volatilidad Implicada

Esta técnica se basa en la idea de que el parámetro asociado a la volatilidad, utilizado en las fórmulas de valuación, debe ser pronosticado para el tiempo de vida del derivado directamente del mercado, en vez de ser estimado con datos anteriormente cotizados en el mercado.

Entonces, bajo este método, se plantea el siguiente problema inverso; en vez de obtener el precio de la opción dado el valor de la volatilidad usando la fórmula Black-Scholes, se encuentra el valor de la volatilidad del precio cotizado de la opción. Al valor de la volatilidad, implicada por el precio de la opción observado se le llama *volatilidad implicada* e indica el nivel de volatilidad determinado por el mercado.

Como en el mercado normalmente se cotizan diferentes opciones sobre el mismo subyacente, un agente podría encontrar diferentes valores de la volatilidad implicada, y estos le podrían dar, desde el punto de vista actual del mercado, el valor necesario para la opción del subyacente en la cual esta interesado.

Puesto que el valor de la volatilidad implicada no se puede encontrar de manera explícita en términos de S , K , r y τ , la valuación de la volatilidad implicada se lleva a cabo mediante el uso de métodos de interpolación. Los más usados son los siguientes.

Método de Bisección

El método de bisección toma ventaja de la propiedad de monotonía de la función de precios $V(\sigma)$ (en el caso de una opción de compra $V(\sigma) = c(\sigma)$). El procedimiento se elabora como sigue, primero se encuentra por ensayo y error $V(\sigma_-)$ y $V(\sigma_+)$ tal que

$$V(\sigma_-) < V(\text{mercado}) < V(\sigma_+).$$

Si se denota a σ_{imp} , a la volatilidad tal que $V(\sigma_{imp}) = V_{mercado}$, entonces por la propiedad de monotonía $\sigma_{imp} \in (\sigma_-, \sigma_+)$. Ahora si $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2}$ y se biseca el intervalo (σ_-, σ_+) en $(\sigma_-, \bar{\sigma})$ y $(\bar{\sigma}, \sigma_+)$, de tal manera que si

$$Q = [V_{mercado} - V(\bar{\sigma})][V_{mercado} - V(\sigma_+)] < 0$$

entonces se omite $(\sigma_-, \bar{\sigma})$ y se toma $\sigma_- = \bar{\sigma}$ y si $Q > 0$, entonces se omite $(\bar{\sigma}, \sigma_+)$ y se toma $\sigma_+ = \bar{\sigma}$.

Después de una iteración el intervalo (σ_-, σ_+) se reduce a la mitad y se repite el procedimiento hasta obtener la exactitud requerida.

Método de Newton-Raphson

En este caso únicamente se utiliza la fórmula de Newton-Raphson, que aplicada al presente problema es

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{V(\sigma_n) - V_{\text{mercado}}}{V'(\sigma_n)} \tag{2.31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_{\text{imp}}}{\sigma_n - \sigma_{\text{imp}}} = 1 - \frac{V(\sigma_n) - V(\sigma_{\text{imp}})}{\sigma_n - \sigma_{\text{imp}}} \frac{1}{V'(\sigma_n)} = 1 - \frac{V'(\sigma_n^*)}{V'(\sigma_n)}$$

donde, $\sigma_n^* \in (\sigma_n, \sigma_{\text{imp}})$ por el teorema de valor medio. En el caso de una opción de compra

$$V'(\sigma) = \frac{S\sqrt{\tau}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

y

$$V''(\sigma) = \frac{S\sqrt{\tau}d_1d_2e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{V'(\sigma)d_1d_2}{\sigma}$$

Entonces los puntos críticos de $V'(\sigma)$ se dan cuando $d_1 = 0$ y $d_2 = 0$, es decir,

$$\sigma^2 = -2 \frac{\ln \frac{S}{K} + r\tau}{\tau} \quad \sigma^2 = 2 \frac{\ln \frac{S}{K} + r\tau}{\tau}$$

Por lo que una primera iteración para implementar Newton-Raphson podría ser

$$\sigma_1 = \sqrt{\left| \frac{2}{\tau} \left(\ln \frac{S}{K} + r\tau \right) \right|}$$

Como la sucesión (σ_n) es monótona y acotada entonces (σ_n) converge a la única solución σ_{imp} .

Volatilidad Histórica

Otra manera de obtener el parámetro de la volatilidad es mediante el uso de datos cotizados con anterioridad a la fecha de elaboración del contrato del

derivado. Los datos históricos de los precios de un subyacente, se encuentran comúnmente reportados en días, semanas, meses y en ocasiones hasta en años.

Si se define

$$h_t(\delta) = \ln \left(\frac{S_{t\delta}}{S_{(t-1)\delta}} \right)$$

en donde δ es la periodicidad de los datos observados con respecto a un año. Bajo el supuesto de que

$$h_t(\delta) \sim N \left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] \tau \delta, \sigma^2 \tau \delta \right)$$

se obtiene el estimador máximo verosímil, esto es

$$\tilde{\sigma}^2(\delta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (h_j(\delta) - \tilde{\mu}_n)^2 \tag{2.32}$$

donde

$$\tilde{\mu}_n = \sum_{j=1}^n h_j(\delta). \tag{2.33}$$

Entonces $\tilde{\sigma}^2(\delta)$ es el estimador histórico para $\sigma^2\delta$, es decir si por ejemplo se tienen datos diarios y se considera que los días de negociación al año son 252 (es el caso de NYSE), entonces

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} = \sqrt{\delta \tilde{\sigma}^2(\delta)} &= \sqrt{\frac{1}{n\delta} \sum_{j=1}^n (h_j(\delta) - \tilde{\mu}_n)^2} \\ &= \sqrt{\frac{252}{n} \sum_{j=1}^n \left(h_j \left(\frac{1}{252} \right) - \tilde{\mu}_n \right)^2} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Existe una gran discusión acerca del tamaño de la muestra n , algunos autores recomiendan usar entre 90 y 180 días de negociación, otros dicen que se utilice un periodo de muestra igual al del tiempo de expiración de la opción. Es

obvio que la muestra no debe de ser muy grande pues si esto sucediera, el estimador heredaría características históricas que no necesariamente describen el comportamiento actual del subyacente, sin embargo, como se sabe los estimadores máximo verosímiles son consistentes y por lo tanto a mayor tamaño de muestra más consistente es el estimador con respecto al verdadero valor de la volatilidad.

Ejemplo 2.3. *En el mismo contexto de la tabla §1.3, si se calcula la volatilidad histórica y con esta el precio calculado con la fórmula Black-Scholes (2.28) y con un rendimiento fijo en el mercado de $r = 0.055$, se obtienen los resultados reportados en la tabla 2.1. En la mayoría de los casos se observa que los precios obtenidos con la Fórmula Black-Scholes son menores que los cotizados (ver precios bid, tabla §1.3), lo cual es claro debido a que no se están incluyendo ningún tipo de costos de transacción ni impuestos y a que no necesariamente los precios cotizados fueron encontrados con el modelo Black-Scholes. Recuérdese que en el caso de la opción de compra el precio de esta, tanto en modalidad Europea como Americana deben ser el mismo, sin embargo, como se mencionó anteriormente esta propiedad no la tienen las opciones de venta. Los precios cotizados, presentados en la tabla §1.3 no son correspondientes a opciones de tipo Europeo, sino de tipo Americano. Por esta razón es que únicamente se presentan los precios para la opción de compra.*

§2.5 Fórmula de Samuelson

Como se mencionó anteriormente sin la noción de neutralidad al riesgo, Samuelson propuso que un modelo para valuar el precio de una opción de compra tenía la siguiente forma

$$c(S, t) = e^{-\rho_c(T-t)} \int_0^\infty (S_T - K)^+ \psi(S_T | S, \rho) dS_T. \quad (2.35)$$

donde ρ_c denota el rendimiento esperado de la opción y $\psi(S_T | S, \rho)$ la densidad de transición correspondiente al rendimiento esperado ρ del subyacente. De una manera más general la expresión (2.35) para la valuación de cualquier derivado tipo Europeo es

Símbolo	τ	S_0	K	Vol. hist.	BS_{call}
EI	103	50.4375	50	0.3432	4.2859
GM	40	72.9375	70	0.3136	4.9501
HLT	103	9.3125	7.5	0.3767	2.0326
JNJ	40	94.3750	95	0.2736	3.4102
XRX	40	23.5000	25	0.4369	0.8308
BAB	40	65.5000	65	0.3327	3.3465
IMN	103	31.1870	35	0.4060	1.4968
SNE	40	232.5000	230	0.3702	13.3987
DD	40	51.7167	65	0.3490	0.0719
SLE	40	20.7500	20	0.2983	1.3152
KMB	40	65.8750	60	0.3235	6.8906
CPB	131	36.1847	37.5	0.3162	2.4947
MCD	40	41.0000	40	0.2980	2.2974
OMC	103	97.4375	80	0.3397	19.6297
PEP	40	36.7500	35	0.3600	2.8688
WHR	40	63.9726	60	0.3486	5.5392

Tabla 2.1: Volatilidad histórica y precio Black-Scholes.

$$c(S, t) = e^{-\rho_g(T-t)} \int_0^\infty g(S_T) \psi(S_T | S, \rho) dS_T. \tag{2.36}$$

o de manera alternativa

$$p(g) = e^{-\rho_g(T-t)} \mathbb{E} [g(S_T)] \tag{2.37}$$

en donde $p(g)$ denota el precio del derivado, y \mathbb{E} es el operador esperanza bajo una medida que no necesariamente es neutral al riesgo.

Ahora supóngase que el subyacente S_T es libre de riesgo, entonces el precio de $g(S_T)$ esta dado por

$$p(g) = e^{-r\tau} g(S_t \exp(r\tau)) \quad \tau = T - t, \tag{2.38}$$

puesto que, $g(S_T)$ también es libre de riesgo y $S_T = S_t e^{r\tau}$ entonces se tiene que $p(g)$ es el valor presente de $g(S_T) = g(S_t e^{r\tau})$.

En el caso en donde el subyacente no es libre de riesgo, el precio justo por un bien que paga S_T al tiempo T , se puede pensar que es el promedio de los posibles valores de $S_T(\omega)$, donde ω representa un valor del proceso aleatorio al tiempo T . Así pues se puede dar la siguiente definición

Definición 2.2. El único precio justo para un subyacente que paga S_T al tiempo T esta dado por

$$\tilde{S}_t = \frac{S_T}{\mathbb{E}S_T} S_t. \quad (2.39)$$

Es decir que si se invierte \tilde{S}_t , a la tasa libre de riesgo en el mercado, entonces este daría $\tilde{S}_t e^{r\tau}$ al tiempo T .

Si en vez del subyacente se tuviese un derivado de este, entonces el precio del derivado estaría dado por el promedio de sus precios obtenidos con la inversión de estos a la tasa libre de riesgo.

Definición 2.3. El precio p_g de un derivado $g(S_T)$ esta dado por

$$p_g = e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_T}{\mathbb{E}S_T} S_t e^{r\tau} \right) \right]. \quad (2.40)$$

Si se observa la fórmula (2.40), esta depende de los valores del bien subyacente, en la fecha de expiración S_T , los cuales por supuesto no so observables. Sin embargo, esta expresión es muy útil cuando se usan simulaciones, ya que en este caso si se conoce a S_T o a muchos posibles valores de S_T , en el caso de muchas simulaciones.

Capítulo 3

Fórmula de Samuelson utilizando Series de Tiempo

Como ya se mencionó anteriormente uno de los supuestos, usualmente considerado en muchos modelos, es que $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$ tienen una distribución normal estándar o también que (ver (2.11))

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \quad (3.1)$$

Sin embargo, es bien sabido que en las finanzas actuales que los log-rendimientos no son del todo bien caracterizados por la distribución normal, ya que estos tienen distribuciones leptocúrticas, asimétricas y con colas más pesadas. Existen algunos modelos en los que se utilizan otro tipo de distribuciones base más generales, como lo son las distribuciones estables e infinitamente divisibles, sin embargo en el contexto de valuación de derivados, estos modelos, únicamente tienen soluciones numéricas y algunas de estas muy lentas.

Otra manera de describir estas características no triviales, se puede llevar acabo mediante el análisis empírico de los movimientos de los precios, o de manera análoga, de los log-rendimientos de estos.

Si se denota a $H_n = \ln \frac{S_n}{S_0}$, se ve claramente que H_n se puede representar como la suma

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0} = \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_1}{S_0} \right) = h_1 + h_2 + \cdots + h_n, \quad (3.2)$$

donde $h_j = \ln \frac{S_j}{S_{j-1}}$.

Si la sucesión (H_n) es una martingala con respecto a alguna filtración (\mathcal{F}_n) , entonces las variables (h_n) forman una diferencia-martingala ($\mathbb{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$), y por lo tanto las h_n son no correlacionadas, es decir $\mathbb{E}h_{n+m}h_n = 0$ $m \geq 1, n \geq 1$. Como es bien sabido, esto no necesariamente implica que las variables sean independientes, puede darse el caso en que las variables h_n sean no correlacionadas pero h_{n+m}^2 y h_n^2 o $|h_{n+m}|$ son positivamente relacionadas (al hecho de que h_{n+m}^2 y h_n^2 o $|h_{n+m}|$ sean positivamente correlacionados se le conoce como la *propiedad de conglomeración*). El análisis empírico de la mayoría de los datos financieros muestra que este es el caso, sin embargo, con la ayuda de modelos de series de tiempo, como lo son los procesos AR, MA, ARMA, ARCH y GARCH esta estructura de correlación puede ser capturada.

§3.1 Modelos Estocásticos Lineales

Como ya se mencionó la teoría de series de tiempo posee varios modelos empíricos, los cuales sirven para describir ciertas características de los precios financieros. Entre estos modelos, destacan los siguientes:

$MA(q)$ Modelo de promedios móviles de orden q (moving average).

$AR(p)$ Modelo autorregresivo de orden p (autoregressive).

$ARMA(p, q)$ Modelo combinado de $MA(q)$ y $AR(p)$ (autoregressive moving average).

Que como se vera más adelante son lineales en sus parámetros. La popularidad de estos modelos se debe a su fácil manejo y a su buena aproximación para sucesiones estacionarias (ver apéndice para la definición de estacionalidad). En este capítulo no se intenta hacer un estudio exhaustivo de estos modelos sino un simple resumen de estos, un estudio bastante completo puede ser encontrado en ([8] y [21]).

Modelo $MA(q)$

En la teoría de series de tiempo se supone que los modelos tienen una sucesión básica $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, la cual se asume que es un ruido blanco (ver apéndice para definición), y se identifica a este como la fuente de aleatoriedad del modelo en cuestión.

En el caso en que la evolución de la sucesión $h = (h_n)$, este descrita mediante un proceso $MA(q)$, uno asume que h_n puede ser construido básicamente de la sucesión ε mediante la siguiente expresión

$$h_n = (\mu + \theta_1\varepsilon_{n-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{n-q}) + \theta_0\varepsilon_0 \quad (3.3)$$

Donde q es el parámetro que describe el grado de dependencia del "pasado" mientras que ε_n actualiza la información contenida en el σ -álgebra $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots)$. A veces es conveniente introducir al operador de retraso L , el cual opera sobre la sucesión $x = (x_n)$, mediante la siguiente fórmula

$$Lx_n = x_{n-1} \quad (3.4)$$

Puesto que $L(Lx_n) = Lx_{n-1} = x_{n-2}$, es natural usar la notación $L^k x_n = x_{n-k}$, para todo $k \geq 0$.

Entonces usando esta notación el proceso (3.3) se puede escribir como

$$h_n = \mu + \beta(L)\varepsilon_n, \quad (3.5)$$

donde

$$\beta(L) = \theta_0 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q.$$

En el caso en donde $q = 1$ se tiene que

$$h_n = \mu + \theta_0\varepsilon_n + \theta_1\varepsilon_{n-1}, \quad (3.6)$$

en donde claramente se ve que

$$\mathbb{E}h_n = \mu, \quad Dh_n = \theta_0^2 + \theta_1^2, \quad (3.7)$$

ya que (ε_n) es un ruido blanco, y además

$$\text{Cov}(h_n, h_{n+1}) = \theta_0\theta_1, \quad \text{Cov}(h_n, h_{n+k}) = 0, \quad k > 1. \quad (3.8)$$

Las dos últimas propiedades significan que $h = (h_n)$ es una sucesión con elementos consecutivos correlacionados $(h_n$ y $h_{n+1})$, mientras que para $k > 1$ la correlación entre h_n y h_{n+k} es cero.

Entonces de (3.7) y (3.8) se puede ver que los los elementos de la sucesión h , tienen valores medios, varianzas y covarianzas independientes de n . Entonces la sucesión h es estacionaria.

Ahora si se considera a la trayectoria (h_1, \dots, h_n) como el resultado observado de las variables h_k en los instantes $k = 1, \dots, n$ y si se denota a

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \quad (3.9)$$

como el promedio de dichas observaciones. Entonces si se mide la calidad de este estimador mediante $\mathbb{E}|\bar{h}_n - \mu|^2$, se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}|\bar{h}_n - \mu|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(k), \quad (3.10)$$

donde $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$ y $h = (h_n)$ es una sucesión arbitraria, la cual es estacionaria (ver [21])¹. Entonces el modelo $MA(1)$ es ergódico en el sentido de que \bar{h}_n converge a la media μ .

Recuérdese que dada la covarianza $\text{Cov}(h_n, h_m)$, la fórmula para la correlación esta dada por

$$\text{Corr}(h_n, h_m) = \frac{\text{Cov}(h_n, h_m)}{\sqrt{Dh_n Dh_m}}, \quad (3.11)$$

Donde D denota la desviación estándar. En el caso estacionario la $\text{Cov}(h_n, h_{n+k})$ es independiente de n . Denotando este valor por $R(k)$ y fijando

$$\rho(k) = \text{Corr}(h_n, h_{n+k}) = \frac{R(k)}{R(0)}, \quad (3.12)$$

¹A $R(k)$ se le conoce también como la función de autocovarianza. Y a $\rho(k)$ como la función de autocorrelación ACF.

entonces por (3.8) se tiene que para $MA(1)$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{\theta_0\theta_1}{\theta_0^2 + \theta_1^2}, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

En el caso general del modelo $MA(q)$, se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h_n &= \mu, \\ Dh_n &= \theta_0^2 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 \end{aligned}$$

y

$$\rho(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j\theta_{k+j}, & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q. \end{cases} \quad (3.14)$$

De (3.14) es claro que esquemas del tipo $MA(q)$ pueden ser usados para simular las características de las sucesiones $h = (h_n)$ sin correlación entre las variables h_n y h_{n+k} para $k > q$. En el proceso de ajuste del modelo $MA(q)$, a ciertos valores muestrales h_1, h_2, \dots es de mucho interés (como se puede ver en [8]), el análisis empírico de los datos, e.g. la media muestral \bar{h}_n , la varianza muestral

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2,$$

y la correlación muestral de orden k

$$r_n(k) = \frac{\sum_{i=k+1}^n (h_i - \bar{h}_n)(h_{i-k} - \bar{h}_n)}{n\hat{\sigma}_n^2}.$$

Una característica importante de los procesos MA , es que toda sucesión $h = (h_n)$ estacionaria, puede ser representada por un proceso $MA(\infty)$, es decir,

$$h_n = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{n-j}, \quad (3.15)$$

un proceso de promedios móviles de orden infinito. La demostración de esta aseveración se puede ver en [8].

Modelo $AR(p)$

Se dice que una sucesión $h = (h_n)_{n \geq 1}$ es gobernada por un modelo autorregresivo de orden p si

$$h_n = \mu_n + \sigma \varepsilon_n, \quad (3.16)$$

donde

$$\mu_n = \phi_0 + \phi_1 h_{n-1} + \dots + \phi_p h_{n-p} \quad (3.17)$$

o expresado de otra forma con el operador de retraso L ,

$$\alpha(L)h_n = \phi_0 + \sigma \varepsilon_n \quad (3.18)$$

donde $\alpha(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$. De la expresiones (3.16) y (3.17) se puede ver que para una descripción completa de la evolución de la sucesión h se necesitan $(h_{1-p}, h_{2-p}, \dots, h_0)$ valores iniciales.

Si se considera un proceso $AR(1)$, es decir,

$$h_n = \phi_0 + \phi_1 h_{n-1} + \sigma \varepsilon_n, \quad (3.19)$$

y además h_0 es independiente de la sucesión $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ de ruido blanco i.i.d., entonces la sucesión $h = (h_n)_{n \geq 1}$ es una cadena de Markov, es decir la única contribución del pasado $h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_{n-p}$ en h_n esta dada por el estado anterior inmediato h_{n-1} . De (3.19) se puede encontrar recursivamente que

$$h_n = \phi_0(1 + \phi_1 + \dots + \phi_1^{n-1}) + \phi_1^n h_0 + \sigma(\varepsilon_n + \phi_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + \phi_1^{n-1} \varepsilon_1). \quad (3.20)$$

Por lo tanto las propiedades de la sucesión h dependen esencialmente del valor del parámetro ϕ_1 . Este valor se debe distinguir en tres casos, cuando $|\phi_1| < 1$ (se dice que el proceso $h = (h_n)_{n \geq 1}$ es causal), cuando $|\phi_1| > 1$ (el proceso $h = (h_n)_{n \geq 1}$ no es causal) y cuando $|\phi_1| = 1$ (no hay representación estacionaria del proceso $h = (h_n)_{n \geq 1}$).

De (3.20) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h_n &= \phi_1^n \mathbb{E}h_0 + \phi_0(1 + \phi_1 + \dots + \phi_1^{n-1}), \\ Dh_n &= \phi_1^{2n} Dh_0 + \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{2(n-1)}), \\ \text{Cov}(h_n, h_{n-k}) &= \phi_1^{2n-k} Dh_0 + \sigma^2 \phi_1^k (1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{2(n-k-1)}) \end{aligned}$$

para $n - k \geq 1$. De estas relaciones es claro que si $|\phi_1| < 1$ y $\mathbb{E}|h_0| < \infty$, entonces

$$\mathbb{E}h_n = \phi_1^n \mathbb{E}h_0 + \frac{\phi_0(1 - \phi_1^n)}{1 - \phi_1} \rightarrow \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y si $Dh_0 < \infty$

$$Dh_n = \phi_1^{2n} Dh_0 + \frac{\sigma^2(1 - \phi_1^{2n})}{1 - \phi_1^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2},$$

$$\text{Cov}(h_n, h_{n-k}) \rightarrow \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^2}.$$

Por lo tanto la sucesión $h = (h_n)_{n \geq 0}$, en este caso ($|\phi_1| < 1$), se aproxima a una constante cuando $n \rightarrow \infty$. Más aun cuando la distribución inicial de es normal, es decir,

$$h_0 \sim N\left(\frac{\phi_0}{1 - \phi_1}, \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}\right)$$

entonces, h es un proceso Gaussiano estacionario y se puede ver que en este caso

$$\rho(k) = \phi_1^k \quad |\phi_1| < 1,$$

es decir, la función de autocorrelación entre las variables decrece geoméricamente.

Comparando la representación (3.20) y la fórmula (3.17), se observa que para cada n fija la variable h_n en el modelo $AR(1)$ puede ser tratada como su contraparte h_n en el modelo $MA(q)$ con $q = n - 1$. Se puede decir con esto que algunas veces el modelo $AR(1)$ puede ser considerado como un $MA(\infty)$ (ver [8]).

En el modelo $AR(1)$, el caso $|\phi_1| = 1$ corresponde a la caminata aleatoria, y en este caso

$$h_n = \phi_0 n + h_0 + \sigma(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n).$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}h_n = \phi_0^n + \mathbb{E}h_0$$

y

$$Dh_n = \sigma^2 n \longrightarrow \infty \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

El caso $|\phi_1| > 1$ es explosivo, en el sentido de que ambas $\mathbb{E}h_n$ y Dh_n crecen exponencialmente cuando $n \rightarrow \infty$.

En el caso general cuando el modelo es $AR(p)$, es decir,

$$h_n = \phi_0 + \phi_1 h_{n-1} + \dots + \phi_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n \quad (3.21)$$

o usando el operador de retraso

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)h_n = \phi_0 + \sigma \varepsilon_n. \quad (3.22)$$

Se tiene que usando el mismo argumento que en el caso $p = 1$, se considera la factorización

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L) \quad (3.23)$$

donde se asume que los λ_i , $i = 1, \dots, p$ son todos distintos.

Si $|\lambda_i| < 1$ (es decir, las raíces de la ecuación $1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i = 0$ están dentro del disco unitario), entonces la solución estacionaria de (3.22) empezando de $-\infty$ puede ser expresada como

$$h_n = (1 - \lambda_1 L)^{-1} (1 - \lambda_2 L)^{-1} \dots (1 - \lambda_p L)^{-1} [\phi_0 + \sigma \varepsilon_n] \quad (3.24)$$

solución que es única con segundos momentos finitos. También se puede ver que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son las raíces de la ecuación

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0 \quad (3.25)$$

donde $\lambda_i = z_i^{-1}$ y z_i son las raíces de $1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i = 0$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, entonces se tiene que

$$\frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \dots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z}, \quad (3.26)$$

donde c_1, \dots, c_p son constantes por ser determinadas. Multiplicando ambos lados de (3.26) por $(1 - \lambda_1 z) \cdots (1 - \lambda_p z)$, entonces para toda z

$$1 = \sum_{i=1}^p c_i \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} (1 - \lambda_k z). \tag{3.27}$$

Esta igualdad se vale en particular para $z = \lambda_1^{-1}, \dots, z = \lambda_p^{-1}$, que proporciona los siguientes valores para c_1, \dots, c_p :

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} (\lambda_i - \lambda_k)}. \tag{3.28}$$

Entonces por (3.24), (3.26), y (3.28),

$$h_n = \sum_{l=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^l + \cdots + c_p \lambda_p^l) [\phi_0 + \sigma \varepsilon_{n-l}]. \tag{3.29}$$

La representación (3.29) permite evaluar diversas características del proceso h , como lo son sus momentos $\mathbb{E}h_n^k$, sus covarianzas, etc.

Si se supone que se esta en el caso estacionario, entonces directamente de (3.21) se tiene que

$$\mathbb{E}h_n = \mu = \frac{\phi_0}{1 - (\phi_1 + \cdots + \phi_p)} \tag{3.30}$$

y sus covarianzas $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$

$$R(k) = \phi_1 R(k-1) + \cdots + \phi_p R(k-p) \tag{3.31}$$

para $k = 1, 2, \dots$. Si $k = 0$, entonces

$$R(0) = \phi_1 R(1) + \cdots + \phi_p R(p) + \sigma^2. \tag{3.32}$$

Las funciones de autocorrelación $\rho(k), k \geq 0$, satisfacen las ecuaciones (3.31) y (3.32) que son llamadas ecuaciones de *Yule-Walker*.

Uno de los principales objetivos en estadística es estimar los parámetros $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \sigma)$ correspondientes a (3.16) y (3.17) asumiendo que h_0, h_{-1}, \dots son constantes conocidas. Existen muchos métodos de estimación, entre los más populares esta el de máxima verosimilitud (bajo el supuesto de que el proceso de ruido blanco ε es Gaussiano). Un estudio de estas técnicas de estimación puede ser encontrado en Brockwell [8].

Modelo ARMA(p,q)

Los modelos $ARMA(p, q)$ combinan las propiedades de los modelos $MA(q)$ y $AR(p)$, razón por la que pueden explicar de una mejor manera las características de la sucesión $h = (h_n)$.

Considérese el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dotado con la filtración (\mathcal{F}_n) . Es conveniente asumir que $\mathcal{F}_n = \sigma(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ donde $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ es un ruido blanco. Se dice que un proceso es gobernado por un modelo $ARMA(p, q)$ si

$$h_n = \mu_n + \sigma \varepsilon_n, \tag{3.33}$$

donde

$$\mu_n = (\phi_0 + \phi_1 h_{n-1} + \dots + \phi_p h_{n-p}) + (\theta_1 \varepsilon_{n-1} + \theta_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{n-q}). \tag{3.34}$$

Donde, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el valor de σ es conocido e igual a uno: $\sigma = 1$. Entonces por (3.33) y (3.34), se tiene que

$$h_n - (\phi_1 h_{n-1} + \dots + \phi_p h_{n-p}) = \theta_0 + [\varepsilon_n + \theta_1 \varepsilon_{n-1} + \theta_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{n-q}] \tag{3.35}$$

o

$$\alpha(L)h_n = \phi_0 + \beta(L)\varepsilon_n, \tag{3.36}$$

donde $\alpha(L)$ y $\beta(L)$ están definidos como antes. Se puede ver fácilmente que si $q = 0$, entonces,

$$\alpha(L)h_n = \phi_0 + \varepsilon_n, \tag{3.37}$$

es decir, se tiene un proceso $AR(p)$. Y en el caso de que $p = 0$, se tiene un proceso $MA(q)$.

Considérese la expresión (3.36) escrita de la siguiente manera

$$h_n = \mu + \frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_n, \tag{3.38}$$

donde

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - (\phi_1 + \dots + \phi_p)} \tag{3.39}$$

y bajo el supuesto de que $\sum_i \phi_i \neq 1$.

La existencia de una solución estacionaria para la ecuación (3.35) depende, de la misma manera que en el modelo $AR(p)$, del operador $\alpha(L)$. Si todas las raíces de la ecuación (3.25) son menores que uno en valor absoluto, entonces este modelo tiene una única solución estacionaria $h = (h_n)$. Para esta solución estacionaria

$$\mathbb{E}h_n = \frac{\phi_0}{1 - (\phi_1 + \dots + \phi_p)}. \tag{3.40}$$

También se puede ver fácilmente de (3.35) que la covarianza $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$ satisface las mismas relaciones que las expresiones (3.31) y (3.32) en el caso del modelo $AR(p)$ cuando $k > q$. En el caso de que $k < q$, la representación de $R(k)$ se vuelve más complicada puesto que se debe tomar en cuenta la correlación entre ε_{n-k} y h_{n-k} (ver [8]).

En el caso en donde la serie que se quiere describir $x = (x_n)$ no sea estacionaria, entonces la consideración de la diferencia $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ o las diferencias de orden d , $\Delta^d x_n$ en vez del proceso mismo, ocasionalmente resulta en procesos "más" estacionarios $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$. Si este es el caso entonces se dice que la sucesión x esta gobernada por un modelo $ARIMA(p,d,q)$. Un estudio completo del proceso $ARIMA$ así como de los otros modelos vistos se pueden encontrar en libros de series de tiempo como lo es el ya mencionado Brockwell and Davis [8]. En este libro se pueden encontrar también las técnicas para predecir el comportamiento de la serie en cuestión bajo los esquemas de modelación vistos hasta ahora.

§3.2 Modelos Estocásticos no Lineales

Algunas de las características de los log-rendimientos de instrumentos financieros, como lo son la asimetría y la leptocurtosis, no pueden ser explicadas

fácilmente con modelos lineales. Sin embargo en la actualidad existe toda una gama de procesos no lineales que enfrentan estos problemas. A continuación se mencionan algunos de estos.

Modelo ARCH(p)

Como se vio en la sección anterior el modelo $AR(p)$ trabaja bajo el supuesto de que la sucesión $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ es un ruido blanco, lo que implica que la varianza incondicional de ε_n es constante. Sin embargo la varianza condicional puede cambiar con el tiempo.

Así pues con la finalidad de describir la evolución de las variables

$$h_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (3.41)$$

R. Engle [15] introdujo el modelo autorregresivo condicional heterocédastico $ARCH(p)$. El cual se define como

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1} \sim N(0, 1) \quad (3.42)$$

en donde las volatilidades σ se definen como sigue

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2, \quad (3.43)$$

donde $\alpha > 0$, $\alpha_i \geq 0$, y $h_0 = h_0(\omega)$ es una variable aleatoria independiente de la sucesión ε . De (3.42) y (3.43) se observa que los σ_n son funciones de $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$, más aun los valores de σ_n^2 son directamente proporcionales a los valores de h_{n-i}^2 . Si h_n^2 toma un valor muy grande mientras que los valores de las variables precedentes $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$ son pequeños, entonces esto puede ser explicado por un valor grande de ε_n . Esto es, los modelos no lineales describen mejor la propiedad de conglomeración (es decir, el agrupamiento de los valores de h_n).

En el caso cuando $p = 1$, esto decir,

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2, \quad (3.44)$$

se tiene que, dado

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n \quad (3.45)$$

entonces

$$\mathbb{E}h_n = 0, \quad (3.46)$$

$$\mathbb{E}h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}h_{n-1}^2, \quad (3.47)$$

$$\mathbb{E}(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2. \quad (3.48)$$

Si $0 < \alpha_1 < 1$ entonces la relación (3.47) tiene una única solución estacionaria dada por

$$\mathbb{E}h_n^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad n \geq 0 \quad (3.49)$$

entonces fijando $h_0^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$ se obtiene la fórmula (3.49) para $\mathbb{E}h_n^2, n \geq 1$. También se observa que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h_n^4 &= \mathbb{E}\sigma_n^4 \mathbb{E}\varepsilon_n^4 = 3\mathbb{E}\sigma_n^4 = 3\mathbb{E}(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)^2 \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \mathbb{E}h_{n-1}^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}h_{n-1}^4) \\ &= \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{1 - \alpha_1} + 3\alpha_1^2 \mathbb{E}h_{n-1}^4. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Y si $0 < \alpha_1 < 1$ y $3\alpha_1^2 < 1$, entonces se obtiene la siguiente solución estacionaria

$$\mathbb{E}h_n^4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}. \quad (3.51)$$

Entonces por (3.49) y (3.51), el valor estacionario de la curtosis es

$$K = \frac{\mathbb{E}h_n^4}{(\mathbb{E}h_n^2)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}, \quad (3.52)$$

el cual es positivo, lo que significa que la densidad (en un sentido estable) de las variables h_n tiene un pico alrededor del valor de la media, o dicho de otra manera la densidad de las variables h_n es leptocúrtica. Recuérdese que $K = 0$ en el caso de la distribución normal.

El valor empírico \widehat{K}_N de la curtosis puede ser calculado de los valores h_1, \dots, h_N mediante la fórmula

$$\widehat{K}_N = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (h_k - \bar{h}_N)^4}{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (h_k - \bar{h}_N)^2\right)^2} - 3, \quad (3.53)$$

En el caso $0 < \alpha_1 < 1$ la sucesión $h = (h_n)$ con $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ es una diferencia martingala y por lo tanto una sucesión de variables ortogonales, es decir,

$$\text{Cov}(h_n, h_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Aunque recuerdese que esto no necesariamente implica que sean independientes. Una idea de la dependencia entre h_n y h_m se puede obtener, mediante el análisis de la correlación entre sus cuadrados h_n^2 y h_m^2 o sus valores absolutos $|h_n|$ y $|h_m|$ (en particular se puede analizar la función de autocorrelación ACF).

El modelo $ARCH(p)$ esta relacionado con los procesos $AR(p)$, mediante la siguiente expresión

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \dots + \alpha_p x_{n-p} + \nu_n \quad (3.54)$$

donde $x_n = h_n^2$ y $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$.

Modelo GARCH(p,q)

Como resultado del éxito que tuvieron los modelos $ARCH(p)$ y sus modificaciones en la descripción de algunas características "no comunes" de los log-rendimientos, como lo son las colas pesadas y la leptocurtosis, T. Bollerslev [6] generalizó el proceso $ARCH(p)$, como una forma análoga a la generalización de los procesos AR a los procesos $ARMA$.

Se dice que un proceso es $GARCH(p, q)$ si al igual que en el proceso $ARCH(p)$, se tiene $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, pero en este caso la volatilidad esta dada por

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2 \quad (3.55)$$

donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ y $\beta_j \geq 0$.

Una de las principales ventajas que tiene los modelos $GARCH(p, q)$ sobre los procesos $ARCH(p)$ es que el orden (p, q) de los procesos $GARCH(p, q)$ no necesita ser tan grande como lo es en el caso del proceso $ARCH(p)$, en donde p frecuentemente esta muy por encima del p y q correspondientes al proceso $GARCH(p, q)$ (ver [6]).

En el caso del proceso del proceso $GARCH(1, 1)$, se puede (ver [6]) que la curtosis "estacionaria" esta dada por

$$K = \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2}. \tag{3.56}$$

Como ya se menciona anteriormente los log-rendimientos no necesariamente tienen distribuciones simétricas, es decir, son asimétricas. Esto se puede ver al considerar la correlación entre h_{n-1} y σ_n , la cual es negativa. Este fenómeno, que es causado por la tendencia del crecimiento de la volatilidad después de una caída en los precios (i.e. cuando los log-rendimientos se vuelven negativos), no puede ser capturado por los modelos $ARCH$ y $GARCH$ ya que en estos modelos la volatilidad σ_n^2 , que depende de h_{n-i}^2 , no distingue los signos de h_{n-i} . Entonces, para capturar este efecto Nelson (1990) propuso el modelo exponencial $GARCH(p, q)$ o $EGARCH(p, q)$ mediante $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ donde σ_n satisface

$$\ln \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left[\theta \varepsilon_{n-i} + \gamma \left(|\varepsilon_{n-i}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{j=i}^q \beta_j \ln \sigma_{n-j}^2. \tag{3.57}$$

Existen otros modelos no lineales que capturan el efecto de la asimetría (e.g. $TGARCH$, $VGARCH$ y GJR).

Se ha discutido, que el uso del movimiento Browniano geométrico como modelo de las trayectorias de un instrumento financiero tiene consecuencias, en el sentido de que bajo esta modelación la distribución asociada a los log-rendimientos $h_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ se supone normal y bajo este supuesto no se capturan

ciertas características de h_t (e.g. leptocurtosis, asimetría, colas pesadas y correlación). Sin embargo, una manera de capturar estas características se puede lograr mediante el uso de series de tiempo.

En la sección §2.5 se vio que que si S_T es libre de riesgo, entonces $S_T = S_t e^{\tau r}$ donde $\tau = T - t$, sin pérdida de generalidad se tomara $t = 0$. Por otra parte si se supone que (S_n) como una trayectoria discreta con $n = 0, \Delta 1, \Delta 2, \dots, \Delta T$ obsérvese que

$$\begin{aligned}
 S_T &= S_0 \exp\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right) \\
 &= S_0 \exp\left(\ln \frac{S_T}{S_{T-1}} \frac{S_{T-1}}{S_{T-2}} \dots \frac{S_1}{S_0}\right) \\
 &= S_0 \exp\left(\ln \frac{S_T}{S_{T-1}} + \ln \frac{S_{T-1}}{S_{T-2}} + \dots + \ln \frac{S_1}{S_0}\right) \\
 &= S_0 \exp(h_1 + h_2 + \dots + h_T) \\
 &= S_0 e^{H_T},
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde $H_T = \sum_{n=1}^T h_n$, $h_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$ y $\Delta = 1$.

Es obvio que los h_n con $n = 1, 2, \dots, T$ no son conocidos, sin embargo, en base a una información histórica $h_0, h_{-1}, h_{-2}, \dots, h_{-N}$ de la serie (h_n) , se puede ajustar un modelo de series de tiempo, de manera que se pudiesen predecir los h_n .²

§3.3 El método de Monte Carlo

La evaluación de opciones se ha atacado tanto analítica como numéricamente. Sin embargo, los métodos numéricos han superado la aplicación práctica de los analíticos, esto debido a su flexibilidad y capacidad de implementación. Existe una gama de técnicas numéricas para valuación de opciones, dentro de estas se distinguen tres familias principales

- Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas

²Bajo esta notación n representa los tiempos por estimar y N la información histórica.

- Árboles binomiales
- Simulación de Monte carlo

En la primera familia lo que se busca es encontrar las soluciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas con la ayuda de métodos numéricos como el de Euler. Es claro que si se dispone de una solución analítica del problema dinámico resultante se tendrá una mejor valuación, sin embargo es muy raro encontrarse con situaciones tan ventajosas como la fórmula Black-Scholes. También se puede valorar numéricamente con los métodos binomiales o de ramificación, estos métodos son de los más usados, debido a la ventaja de incorporar eventos extraordinarios en la técnica (e.g. ejercicio temprano), un ejemplo es el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (ver [13] y [14]). En este trabajo se utilizó el método de Monte Carlo que se describe a continuación.

A partir de los resultados hasta ahora obtenidos se puede decir que una amplia clase de problemas de valuación de derivados recae en la evaluación de

$$\mathbb{E}(g(S_T)).$$

Como una tercera alternativa, aparte de los métodos binomiales y la solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, se ha probado que la simulación con el método de *Monte Carlo* es una herramienta poderosa y versátil.

Originado en la segunda guerra mundial para simular la dinámica del neutrón³, el método de Monte Carlo es básicamente un procedimiento numérico para estimar el valor esperado de una variable aleatoria. Por lo tanto, su uso en la valuación de derivados tiene cabida. El procedimiento de simulación requiere generar variables aleatorias con una función de probabilidad dada y el uso de la ley fuerte de los grandes números para tomar como el promedio de estas simulaciones como un estimador del valor esperado de la variable aleatoria de interés. En el contexto de la valuación del precio de un derivado, los pasos del método de Monte Carlo se pueden escribir como sigue:

³El método de Monte Carlo fue publicado por primera vez en 1949. Como una referencia se puede ver [7]

- i) Simular las trayectorias muestrales del bien subyacente (e.g. S_T) utilizado en el derivado.
- ii) Para cada simulación evaluar el valor presente del pago terminal del derivado (e.g. $e^{-rT}g(S_T)$).
- iii) Tomar el promedio muestral de los valores obtenidos en (ii).

Ejemplo 3.1. *En el caso del modelo Black-Scholes, se esta en un ambiente neutral al riesgo de manera que la expresión (3.1) se puede escribir de la siguiente forma*

$$S_T = S_0 e^{\sigma \varepsilon \sqrt{T} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \quad \varepsilon \sim N(0, 1), \quad (3.59)$$

donde ε es un valor simulado, $\sigma \varepsilon \sqrt{T}$ representa una aproximación discreta a un incremento del movimiento Browniano y σ es la volatilidad en el incremento de tiempo T . El precio de una opción de compra correspondiente a el precio del subyacente simulado S_T , esta dado por

$$c = e^{-rT}(S_T - K)^+. \quad (3.60)$$

Esto completa una iteración de la simulación Monte Carlo. Después de repetir la simulación de arriba un número suficientemente grande, el valor esperado de la opción de compra se calcula como el promedio de estas simulaciones. Esto es, si se denota a c_i como el valor de la opción de la i -ésima simulación y M como el número total de simulaciones, entonces el valor esperado de la opción de compra esta dado por,

$$\hat{c} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M c_i, \quad (3.61)$$

y el estimador de la varianza se calcula mediante

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (c_i - \hat{c})^2. \quad (3.62)$$

Para un número M suficientemente grande, la distribución de

$$\frac{\hat{c} - c}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{M}}} \quad (3.63)$$

tiende a una distribución normal estándar. Obsérvese que la desviación estándar de \hat{c} es igual a \hat{s}/\sqrt{M} y por lo tanto los intervalos de confianza pueden reducirse cuando M es incrementado.

Por poner un ejemplo, considérese la acción CPB de la tabla §1.3, si en este caso se calcula el precio de una opción de compra con el estimado de Monte Carlo visto arriba se obtienen los siguientes resultados.

M	c	Int. al 95% de confianza
100	3.1234	(2.0776 , 4.169)
1000	2.8458	(2.5538 , 3.1379)
10000	2.5103	(2.4251 , 2.5956)
100000	2.4985	(2.4717 , 2.5254)
1000000	2.4939	(2.4854 , 2.5024)

Si se considera que el precio calculado con la fórmula analítica (Black-Scholes) es 2.4947, entonces se puede ver, de la tabla anterior, que los estimadores de Monte Carlo son consistentes. El precio del subyacente obtenido del promedio de las 1000000 simulaciones es 36.9137, por lo que también es consistente con las cotas establecidas en la sección §1.6, ya que no existe una oportunidad de arbitraje teórica, puesto que el precio de ejercicio es 37.5. Por otro lado en la figura (3.1) se puede observar la distribución de 20000 log-rendimientos simulados, los cuales obviamente se distribuyen normalmente, bajo el esquema de Black-Scholes.

Como se observo la desviación estándar del estimador de Monte Carlo se reduce cuando se incrementa el número de simulaciones M . La apariencia de M como factor de $1/\sqrt{M}$ implica que la reducción de la desviación estándar por un factor de 10 requiere incrementar el número de simulaciones 100 veces.

La gran ventaja que ofrece el método de Monte Carlo es su fácil implementación, pero su gran desventaja es el gran número de simulaciones requeridas para encontrar un estimador más preciso. Sin embargo, en la practica es mucho más conveniente el Método de Monte Carlo que tratar de solucionar, ya sea analítica o numéricamente, las ecuaciones diferenciales estocásticas.

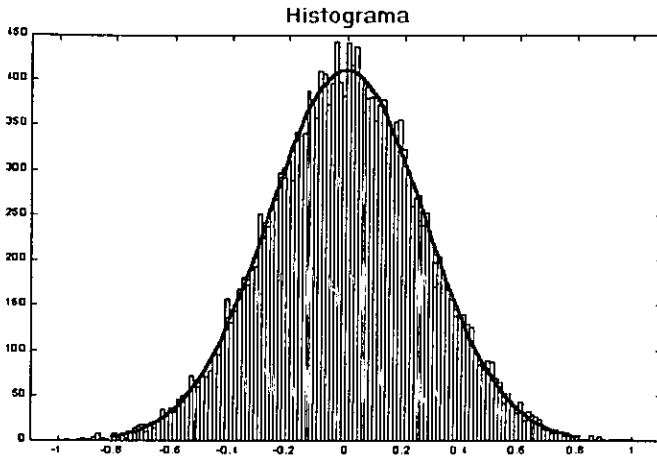


Figura 3.1: Log-rendimientos simulados bajo el esquema Black-Scholes.

La eficiencia del Método de Monte Carlo en términos de tiempo puede ser mejorada si se utilizan técnicas de reducción de varianza.

Reducción de Varianza

Una manera de reducir el número de simulaciones, y con ello el tiempo para la valuación, se puede lograr con la reducción de la varianza \hat{s}^2 . Una técnica es la siguiente; Supóngase que $\{\epsilon^i\}$ denota muestras i.i.d. de la distribución normal estándar para la i -ésima simulación del subyacente $S_T^{(i)} = \zeta(\epsilon^i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ con M igual al número de simulaciones, entonces de las expresiones (3.60) y (3.61) del ejemplo anterior, el precio de una opción de compra tipo Europea con precio de ejercicio K está dado por

$$\hat{c} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_T^{(i)} - K)^+. \tag{3.64}$$

Ahora si $(\epsilon^{(i)})$ tiene una distribución normal estándar, entonces también $(-\epsilon^{(i)})$ tiene una distribución normal estándar y por lo tanto es válido obtener un es-

timador $\tilde{S}_T^{(i)}$ de $(-\varepsilon^{(i)})$ y consecuentemente un estimador \tilde{c} . De tal forma que c_i y \tilde{c}_i están negativamente correlacionados, es decir si por un lado se sobreestima el verdadero valor por otro lado se subestima. Parece razonable, entonces tomar el promedio de estos dos estimadores, de manera que

$$\bar{c} = \frac{\hat{c} + \tilde{c}}{2} \tag{3.65}$$

La evidencia empírica ha demostrado que este método es eficiente en cuanto a la reducción en el número de simulaciones y también es fácil de implementar.

§3.4 Estimador Monte Carlo - Samuelson

En el caso en donde el subyacente no necesariamente se modela con un movimiento Browniano geométrico, la fórmula de Samuelson

$$p_g = e^{-rT} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_T}{\mathbb{E}S_T} S_0 e^{rT} \right) \right], \tag{3.66}$$

en donde $S_T = S_0 e^{H_T}$, $H_T = (h_n)_{n=1, \dots, T}$.⁴ Para este caso el estimador de Monte Carlo se deduce como

$$p_g = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g \left(\frac{S_T^i}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_T^i} S_0 e^{rT} \right) \tag{3.67}$$

donde $g(\cdot)$ representa el pago terminal del derivado de interés, en el caso de una opción de compra la fórmula (3.67) se puede expresar como sigue

$$p_c = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{S_T^i}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_T^i} S_0 e^{rT} - K, 0 \right)^+. \tag{3.68}$$

⁴Si $S_T = S_0 \exp \left[\sigma W_T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]$, entonces $\mathbb{E}(S_T) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}(e^{\sigma W_T}) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} = S_0 e^{\mu T}$, por lo que $p_g = e^{-rT} \mathbb{E} \left[g \left(S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \right) \right]$. Es decir, la fórmula de Samuelson tiene como caso particular al movimiento Browniano geométrico.

§3.5 Estimación de Monte Carlo usando Procesos ARMA

Con las expresiones (3.68) y (3.58) se puede encontrar una fórmula numérica para la valuación de una opción de compra. Por ejemplo si en $S_T = S_0 e^{H_T} = S_0 e^{h_1+h_2+\dots+h_T}$, se considera a (h_n) , $n = 1, \dots, T$ como un proceso $AR(p)$, es decir, si

$$h_n = \phi_0 + \phi_1 h_{n-1} + \dots + \phi_p h_{n-p} \quad \text{para todo } n = 1, \dots, T.$$

Por ejemplo en el caso de un proceso $AR(1)$ si se usa la fórmula recursiva (3.20), entonces

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp(H_T) \\ &= S_0 \exp\left(\sum_{n=1}^T h_n\right) \\ &= S_0 \exp\left(\sum_{n=1}^T \left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_1^i (\phi_0 + \sigma \varepsilon_{n-i}) + \phi_1^n h_0\right]\right), \end{aligned} \quad (3.69)$$

en donde claramente se observa la dependencia de $h_0 = \frac{S_0}{S_{-1}}$, es decir, que para simular S_T se necesita la cotización anterior a la actual (e.g. si los cambios en T están medidos en días entonces se necesita la cotización del día anterior).

con la expresión (3.69) únicamente se obtiene un valor para la simulación de Monte Carlo, de manera que para un número grande de simulaciones usando el estimador (3.68) se obtiene un estimador para el valor de la opción de compra.

Obviamente para poder obtener este estimador se necesita tanto ajustar el proceso $AR(1)$ como simularlo para los tiempos futuros $n = 1, 2, \dots, T$, es decir los periodos futuros en los cuales se extiende la protección de la opción de compra.

Así pues, el primer paso es ajustar el proceso, de manera que con este se capturen las características de la serie en cuestión. Existe muchas maneras y criterios para ajustar un modelo a una serie, en Brockwell and Davis [8]

se analizan algunas de las más comunes. En este trabajo el ajuste se realizó de forma análoga al la propuesta por ellos (más adelante se indicarán los pasos que se siguieron), y en algunos casos se utilizó su paquete de cómputo "Interactive Time Series Modelling Package" (ITSM-PEST versión 4.1).

Los pasos que se utilizaron para el ajuste de los procesos *ARMA* se pueden resumir en la combinación de los siguientes puntos.

- Análisis gráfico de los log-rendimientos (gráfico de normalidad, histogramas y ACF).
- Estimación de los coeficientes del proceso *ARMA* mediante el algoritmo recursivo de Innovaciones.
- Selección del orden del proceso *ARMA* con los criterios de Akaike (FPE (*Final Prediction Error*) en el caso de un proceso *AR* y AICC en los procesos *ARMA*).
- Pruebas de

El análisis gráfico se realizó con el propósito de entender la estructura de correlación e independencia de los log-rendimientos asociados a cada serie y también con la finalidad verificar las características del ruido blanco asociado. Por otro lado se utilizó el algoritmo de innovación como método de estimación debido a que en este, no importa si la serie es estacionaria o no. Como criterio de selección, se utilizó al modelo que minimizase la información de Akaike. Por último se seleccionaron únicamente a los coeficientes significativos, de manera que se podía tener un modelo *ARMA*(3, 5) en donde solamente se tuviese

$$h_t - \phi_3 h_{t-3} = \varepsilon_t + \theta_5 \varepsilon_{t-5}.$$

Esto último normalmente resulta en una información de AICC menor.

Con la finalidad de entender mejor el proceso recientemente descrito se presenta el siguiente ejemplo.

§3.6 Ejemplo CPB

Considérese el problema de obtener el valor de una opción de compra tipo Europeo de una unidad⁵ de la acción CPB (Campbells) al 20/05/2000. El precio actual (con fecha 11/01/00) de la acción es de 36.1847 y el precio de ejercicio pactado es 37.5. La tasa libre de riesgo subyacente en el mercado correspondiente a esas fechas era de 0.055 anual convertible instantáneamente.

De la información arriba proporciona se deduce que en nuestra notación $S_0 = 36.1847$, $K = 37.5$, $r = 0.055$ $T = (20/05/2000 - 11/01/00)/360 = 131/360$ (si se consideran los cambios diarios). Por lo tanto en único parámetro que hace falta, para poder utilizar la fórmula Black-Scholes, es la volatilidad, de manera que si se usa un periodo histórico (13/10/97 – 11/01/00) para estimar dicho parámetro se, tiene de la tabla 2.3, que la volatilidad es $\sigma = 3162$ y también de esta tabla se observa que el precio Black-Scholes en este caso es 2.4947.

Como una forma alternativa al modelo Black-Scholes se utiliza el estimador de Monte Carlo para la formula de Samuelson (fórmula 3.68). Con este objeto es necesario simular los precios de CPB a la fecha de vencimiento S_T . En este caso en vez de considerar la simulación (3.59) se usa el ajuste de un modelo de series de tiempo a los log-rendimientos. Con esta finalidad y siguiendo los pasos antes mencionados para el ajuste de los procesos ARMA se tiene lo siguiente:

En la figura (3.2) se puede observar el histograma de los log-rendimientos históricos en donde claramente se observa que la distribución asociada es leptocurtica y tiene algunos valores grandes en las colas, de hecho se puede ver que el coeficiente de curtosis (expresión 3.53) es $\hat{K}_N = 5.4052$. Si se compara esta distribución con la de la figura (3.1), entonces se puede ver porque bajo el esquema Black-Scholes se tiene sesgo.

También se puede observar en el gráfico de normalidad que las colas de los log-rendimientos son pesadas (ver 3.3). Si por otro lado se explora la estructura de

⁵En los mercados financieros los contratos de opciones normalmente tienen como mínimo del contrato 100 unidades.

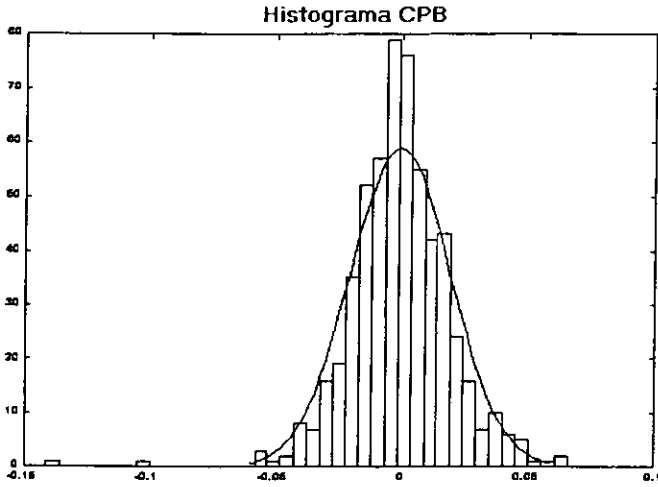


Figura 3.2: Histograma y normal ajustada de log-rendimientos CPB (13/10/97 – 11/01/00).

correlación mediante la función de auto correlación (figura 3.4) que existe entre los log-rendimientos de CPB, se puede decir que el nivel de dependencia de los precios futuros únicamente depende de los precios de hace aproximadamente un mes y medio (lag 34 y 40), lo cual no es muy razonable.

Primeramente se ajusto un modelo *AR*, obteniendo los siguientes resultados de la minoración del los criterios de AICC:

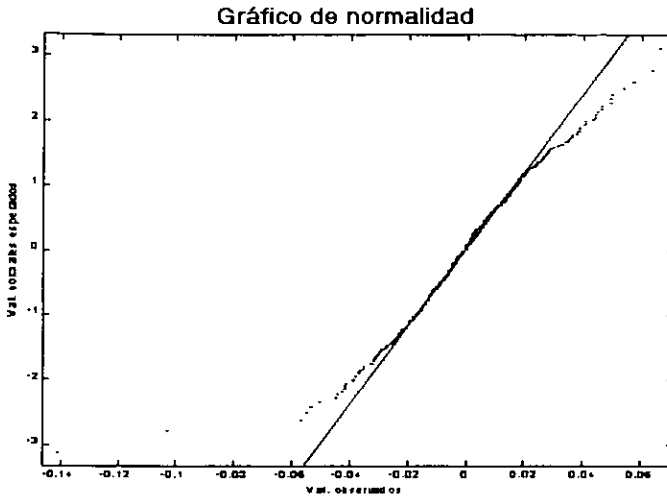


Figura 3.3: Gráfico de Normalidad (CPB).

Orden AR	FPE	AICC
1	-7.8818	-2841.473
2	-7.8790	-2839.715
3	-7.8794	-2840.188
4	-7.8784	-2839.375
5	-7.8774	-2839.370
6	-7.8743	-2837.814
7	-7.8710	-2835.980
8	-7.8681	-2834.160
9	-7.8674	-2835.011
10	-7.8649	-2833.490

De manera que el modelo ajustado que minimiza el "error final de predicción de Akaike (FPE)" esta dado por

$$h_n = -0.0758h_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{3.70}$$

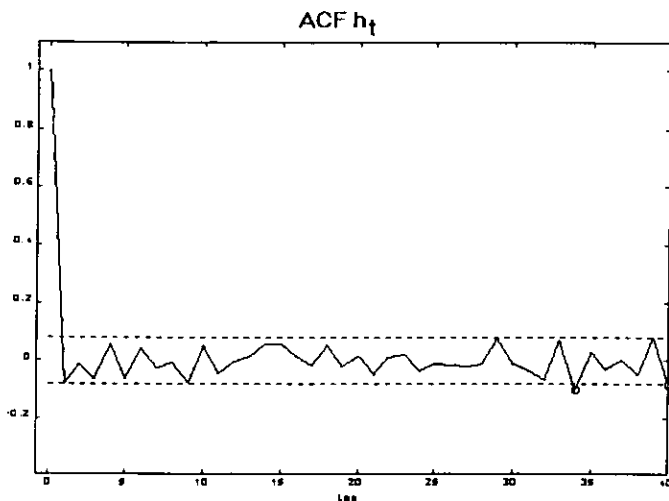


Figura 3.4: ACF lag=40 (CPB).

es decir, un $AR(1)$. Aunque en este caso los log-rendimientos no violan fuertemente el supuesto de que los ruidos blancos no están correlacionados, en la figura (3.5) se observa (gráfico ACF) que el comportamiento de el modelo ajustado es mejor que el de la serie original. También se realizó una prueba de significancia para los residuales, resultando que el nivel de significancia para el rechazo de la hipótesis nula (los residuales son no-correlacionados)⁶ es de 0.6221 de manera que se puede inferir que los residuales son no correlacionados por lo tanto el supuesto de ruido blanco se cumple.

Entonces, utilizando el ajuste del proceso AR a la serie de los log-rendimientos correspondiente al periodo histórico antes mencionado y la expresión (3.69), se obtiene que un valor simulado para el precio de CPB dentro de 131 días

⁶Ver la estadística modificada de Li-McLeod Portmanteau (LMP). Otras pruebas de adecuación del modelo se pueden ver en [8]

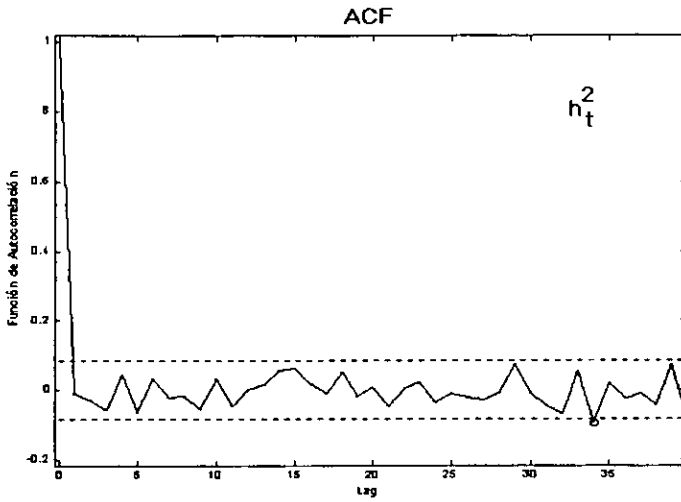


Figura 3.5: ACF lag=40 (CPB-AR(1)).

esta dado por

$$S_{131}^i = 36.1847 \times \exp \left(\sum_{n=1}^{131} \left[\sigma \sum_{j=0}^{n-1} (-0.0758)^j \varepsilon_{n-j} + (-0.0758)^n h_0 \right] \right), \quad (3.71)$$

donde $\sigma = \sqrt{3.7788e^{-004}}$, $h_0 = 0.0104$ y ε_{n-j} son valores simulados de la distribución empírica de los residuales del proceso $AR(1)$ ajustado. De tal forma que calculando el estimador de Monte Carlo (fórmula 3.68) para 20000 simulaciones⁷ se obtuvo que el precio de la opción de compra fue de **2.7279** con un intervalo al 95% de confianza de (2.6620, 2.7938). En la figura (3.6) se pueden observar los log-rendimientos simulados con el proceso $AR(1)$, comparándolos con el proceso original observado (del 13/10/97 al 11/01/00). Tómese en cuenta que el proceso simulado fue por 131 días, mientras que en el observado no se cuentan sábados y domingos, razón por la que la serie observada parece incompleta.

Ahora en vez de ajustar un proceso se repitió el procedimiento anterior en el caso de un proceso $ARMA$. En este caso el modelo que minimizó la información de Akaike (AICC) y resulto ser significativo (LMP) fue el siguiente

$$h_n = 0.5332h_{n-1} - 0.6133h_{n-9} + \varepsilon_n - 0.4968\varepsilon_{n-1} + 0.5438\varepsilon_{n-9}, \quad (3.72)$$

de tal forma que simulando una vez más de los ε'_n s de la distribución de los residuales (los cuales pasaron la prueba de ruido blanco⁸) se obtuvo que, aplicando la estimación de Monte Carlo al modelo ajustado (ver figura 3.7), el precio de la opción de compra con 20000 simulaciones fue de **2.7320** con un intervalo de confianza de (2.6665, 2.7976). Cabe mencionar que es este caso la gráfica ACF parece resultar en un proceso completamente no correlacionado.

Sin embargo, como ya se había mencionado puede ser que los log-rendimientos h_n aparenten no tener correlación pero esto no necesariamente implican que

⁷En las simulaciones se utiliza la técnica de reducción de varianza vista en la sección ??

⁸El que pase la prueba (LMP) no necesariamente implica que se trate de un ruido blanco, sin embargo, se puede hacer la inferencia con cierta confiabilidad.

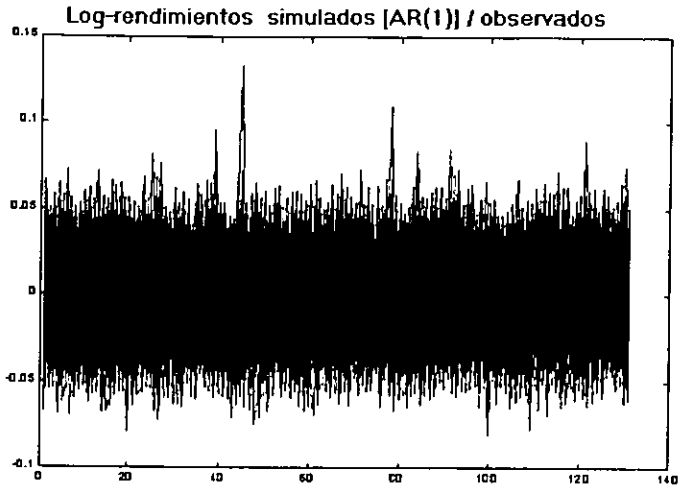


Figura 3.6: Log-rendimientos CPB Simulados/Observados.

sean independientes. Con la finalidad entonces de corroborar este supuesto se estudiaron las gráficas de ACF los cuadrados y los valores absolutos, h_t^2 y $|h_t|$ respectivamente, de los log-rendimientos. En las figuras (3.8) y (3.9) se observa que, en este caso, el supuesto de no-correlación no es tan claro como en el caso de h_n .

Por esta razón es que modelos no lineales antes mencionados pueden resultar en valuaciones más favorables. Sin embargo en este trabajo no se realizaron las simulaciones de Monte Carlo para este caso, esto debido a la problemática del ajuste en este tipo de procesos.

Los resultados obtenidos del presente ejemplo se pueden resumir en la siguiente tabla:

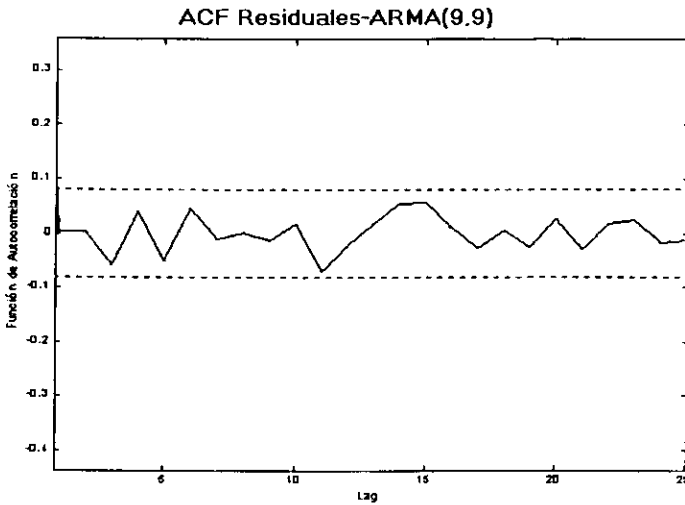


Figura 3.7: ACF de residuales del modelo ARMA(9,9)

Precios de opción de compra para CPB			
Precios cotizados		20000 Simulaciones de Monte Carlo-Samuelson e Int. 95%	
Bid	Ask	Mov. Browniano Geom.	$(h_n) = AR(1)$
2.562	2.812	2.5068	2.7279
		(2.4365, 2.5770)	(2.6620, 2.7938)
			$(h_n) = ARMA(9, 9)$
			2.7320
			(2.6665, 2.7976)
Parámetros	Volatilidad histórica	Precio- Calculado	Log-rendimientos
$S_0 = 36.1847$	$\sigma_{hist} = 0.3162$	Black-Scholes	Curtosis=5.4052
$K = 37.5$	Volatilidad implicada	2.4947	Coef. de Asim.= -0.6106
$T = \frac{131}{360}$	$\sigma_{imp} = 0.3218$		
$r = 0.055$			

Con lo anterior se puede concluir que los precios obtenidos con el estimador de Monte Carlo bajo los esquemas *AR* y *ARMA*, para el precio de una opción de compra son significativamente mayores que el precio obtenido bajo el modelo Black-Scholes, por poner un ejemplo si se tuviese el modelo *ARMA*(9, 9) como dinámica de los log-rendimientos de *CPB*, la valuación obtenida es de \$2.7320 por opción, de manera que comparándola con el precio Black-Scholes \$2.4947 existe una diferencia del 10% aproximadamente. Por otro lado los precios

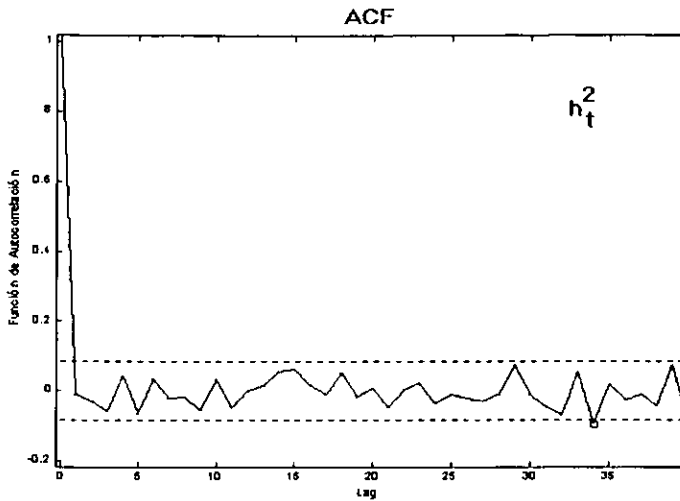


Figura 3.8: Cuadrado de log-rendimientos CPB (ACF).

obtenidos con el estimador Monte Carlo de la fórmula de Samuelson están contenidos en el intervalo de los precios bid y ask negociados, lo cual es un resultado significativo en la práctica.

La razón más probable de porque los modelo $AR(1)$ y $ARMA(9,9)$ describen mejor la distribución de los log-rendimientos se puede deber a que bajo estos esquemas se describen mejor las características de colas pesadas así como la estructura de dependencia de los datos históricos.

§3.7 Conclusiones

Con la finalidad de hacer las conclusiones más consistentes se realizó el análisis análogo al del ejemplo CPB, de las acciones presentadas en la tabla §1.3, de manera que los resultados obtenidos se pueden ver en la siguiente tabla, así como el análisis gráfico en el apéndice.

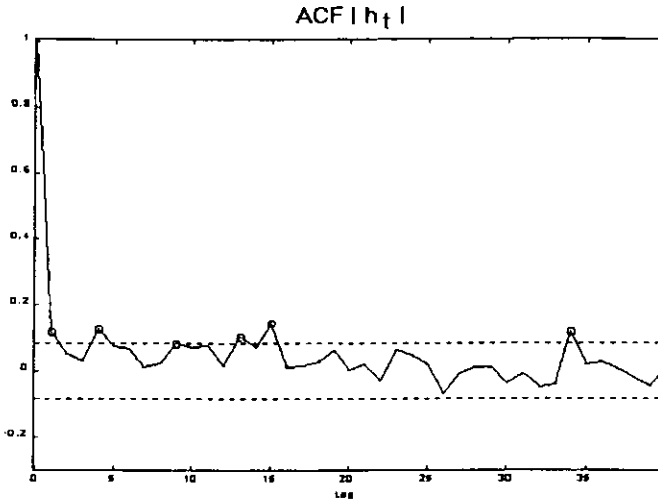


Figura 3.9: Valor absoluto de log-rendimientos CPB (ACF).

Símbolo	Precio Bid	Precio Ask	Precio B-S	Orden del AR	Simulaciones MC-SAM-AR	Orden del ARMA*		Simulaciones MC-SAM-ARMA
EJ	4.875	5.250	4.2859	1	5.1330	2	2	4.7393
GM	5.500	5.875	4.9501	1	5.3848	1,2,12	1,2,12	5.1325
HLT	2.250	2.813	2.0326	1	2.1023	1	1,6	2.1354
JNJ	3.625	3.875	3.4102	3	3.6142	1,2,9	1,9	5.5500
XXR	1.188	1.438	0.8308	2	1.0304	1,2	1,2,15	0.8476
BAB	4.375	4.750	3.3465	3	4.3625	1,2	1,2	4.1427
IMN	2.687	3.000	1.4968	1	2.0954	25	17	1.8471
SNE	25.500	28.250	13.3987	8	15.8754	1,2	1,2	16.7546
SLE	1.812	2.062	1.3152	1	1.4534	1,2,3	1,2,3	1.3913
KMB	6.875	7.375	6.8906	1	7.1850	3,4	3	6.8906
CPB	2.562	2.812	2.4947	1	2.7281	1,9	1,9	2.7322
MCD	2.375	2.562	2.2974	1	2.6143	13	13	3.4742
QMC	20.125	21.125	19.6297	8	20.4707	2	2	23.8279
PEP	2.500	2.750	2.8688	5	2.5976	1	1,8	2.9046
WHR	5.625	6.125	5.5392	1	6.0522	0	0	6.0131

*El orden del proceso ARMA, esta indicado por los correspondientes parámetros significativos. Es decir si se tiene un MA 1,9, lo que significa es que únicamente entraron θ_1 y θ_9 al modelo. El número de simulaciones se fijó de manera que la longitud del intervalo de confianza fuese 1/8, resultando en un promedio de 20000 simulaciones.

Así pues, se puede concluir que el tratar de describir las características históricas de los instrumentos financieros mediante modelos de series de tiempo puede ser favorable en el sentido de que se logra obtener un precio mayor que el obtenido mediante la fórmula de Black-Scholes para el valor de una opción de compra, cuyo valor subestima el verdadero valor de la opción en el mercado⁹. El número de simulaciones se realizó de manera que se parara de simular hasta que la longitud del intervalo de confianza fuese menor a $1/8$. Esto debido a que en la práctica los precios en el mercado cambian discretamente con brincos no menores a $1/8$.

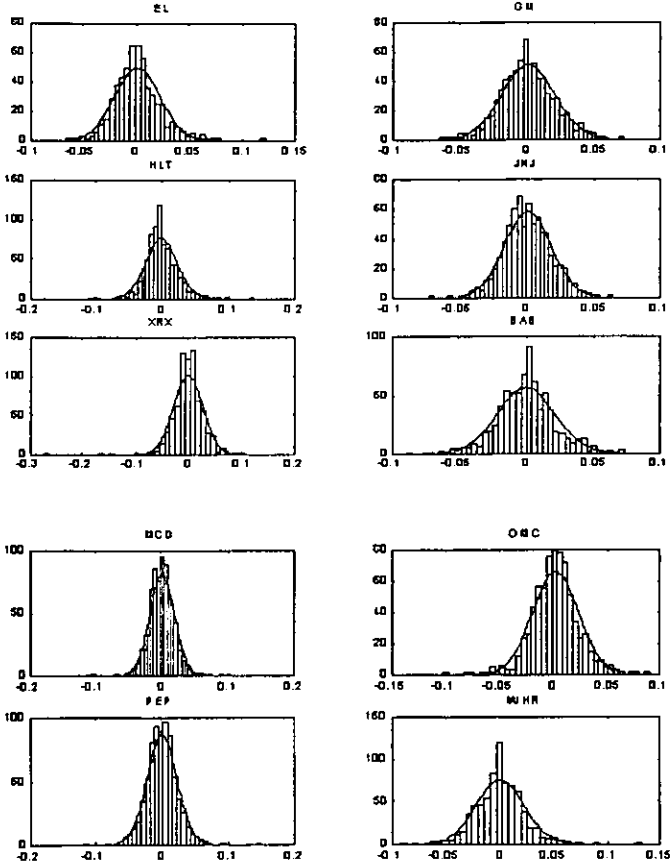
Existe una gran discusión acerca de si los precios futuros de un instrumento financiero pueden ser predecibles ó no. Samuelson de alguna manera demostró que no se pueden predecir los precios futuros, sino únicamente simularlos bajo cierto esquema aleatorio. En el modelo Black-Scholes se hace esta modulación con el movimiento Browniano, sin embargo, como ya se vio este supuesto no necesariamente se ajusta al verdadero comportamiento de los datos. Las características de leptocurtosis, colas más pesadas así como la asimetría en las distribuciones asociadas a los log-rendimientos provocan sesgo en el supuesto de normalidad. En los últimos 10 años se han desarrollado modelos que logran caracterizar, de mejor manera, distribuciones con las características arriba señaladas. Modelos como el de Duan (1995) y sus modificaciones se han vuelto lo suficientemente populares como para reemplazar el modelo de Black-Scholes en algunos casos.

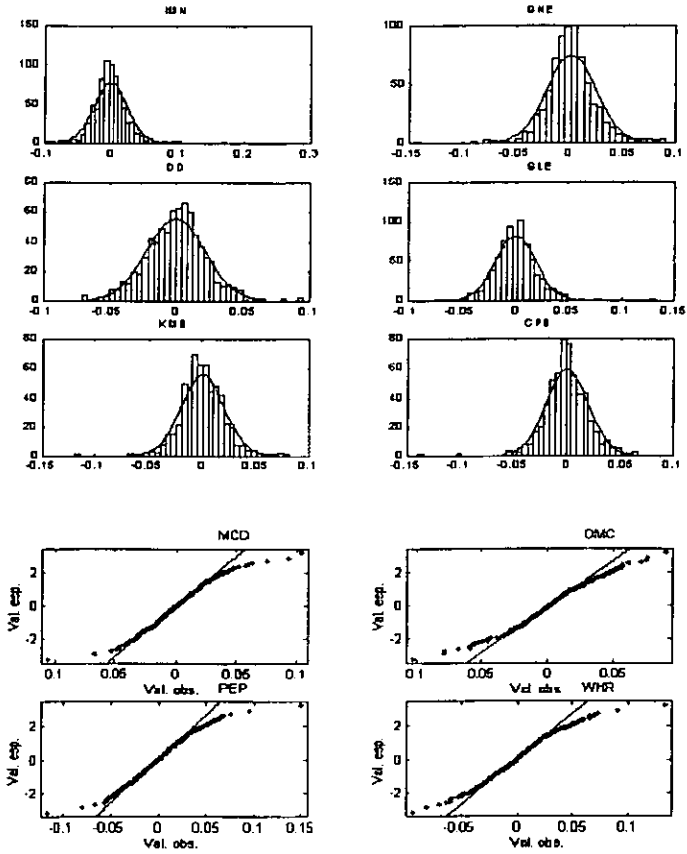
En los resultados obtenidos en este trabajo, se puede ver que el utilizar modelos de memoria como modulación de los log-rendimientos financieros resulta en una mejor valuación, sin embargo, esta labor requiere de métodos numéricos más eficientes así como el uso de lenguajes como C++. Los resultados presentados en la tabla anterior fueron obtenidos mediante la elaboración de programas en *Matlab* y *C++*. Sin embargo la manera óptima es elaborar todo el programa en C++ tanto la parte del ajuste como las simulaciones.

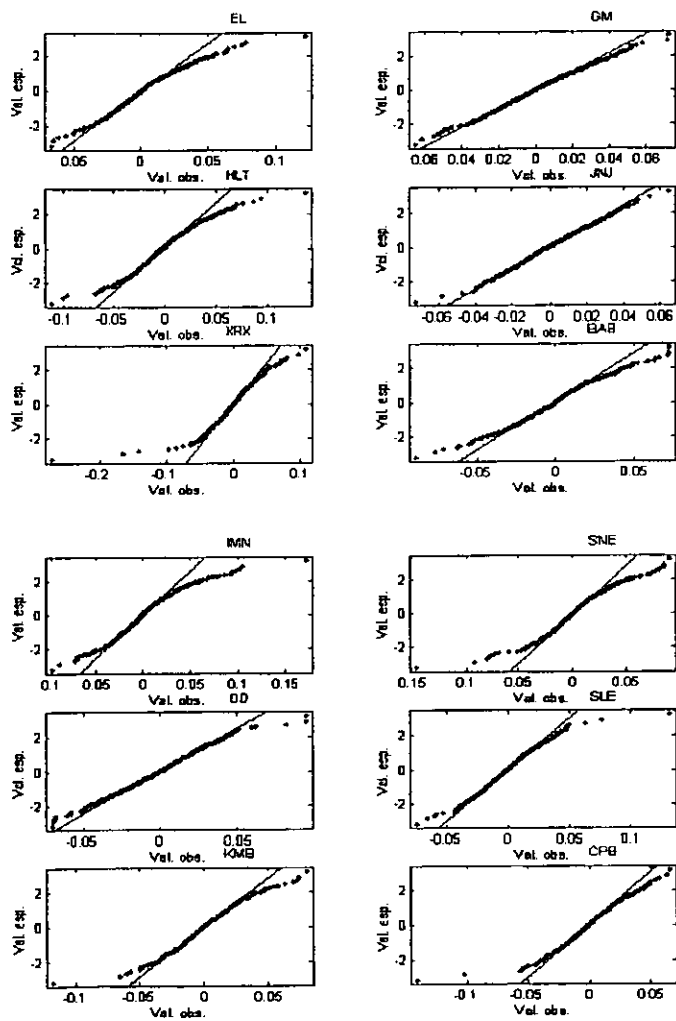
⁹La experiencia en los mercados financieros es que el valor de una opción de compra calculado mediante la fórmula de Black-Scholes, por lo regular resulta ser menor que el verdadero.

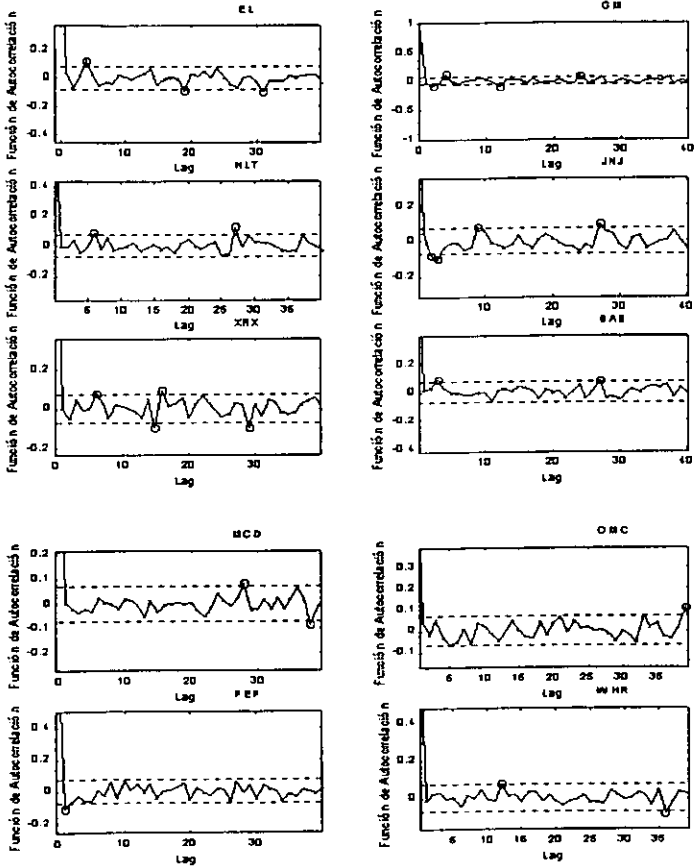
Apéndice A

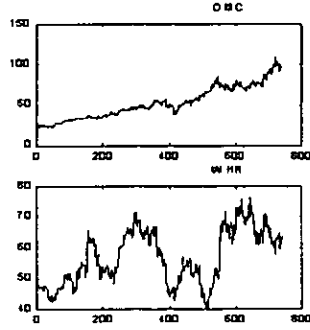
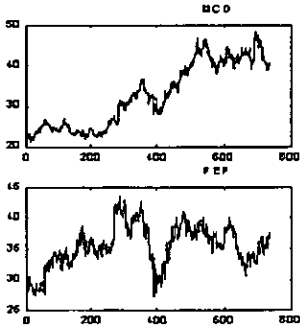
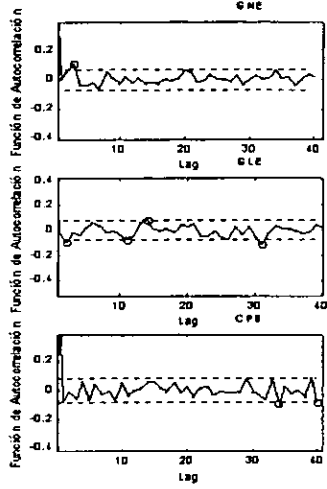
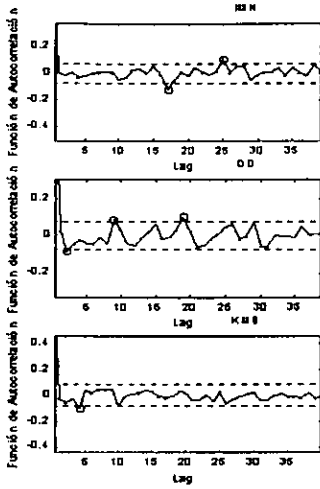
Gráficas

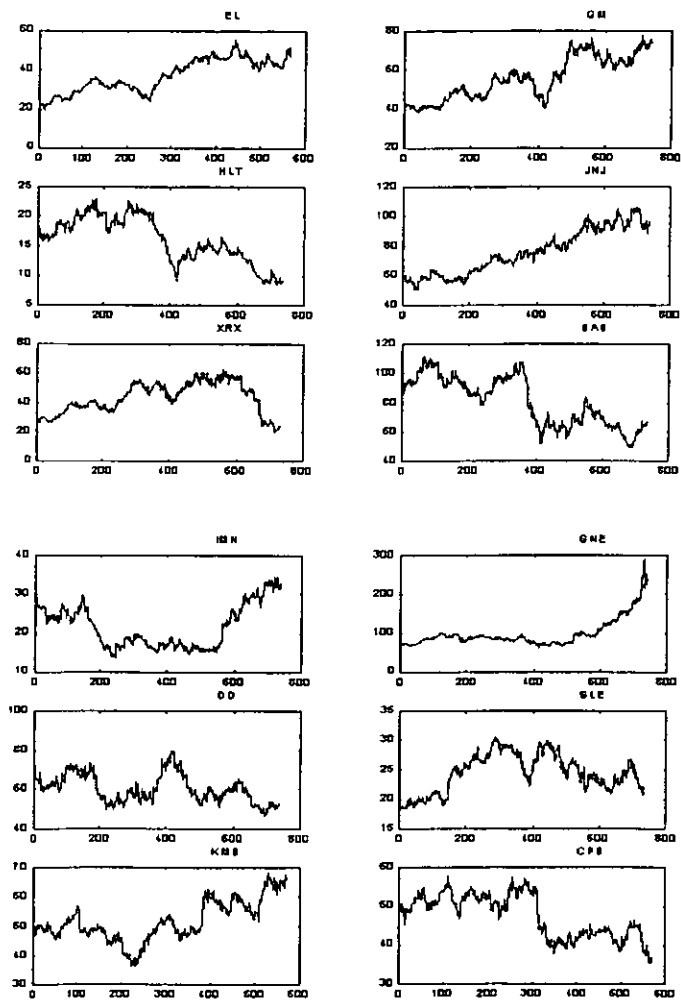












Propiedad 6 Si \mathcal{F} y \mathcal{F}' son dos σ -álgebras con $\mathcal{F} \in \mathcal{F}'$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(G|\mathcal{F}')|\mathcal{F}), \\ \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(G|\mathcal{F})|\mathcal{F}').\end{aligned}$$

De la propiedad 3 y 5, si se tiene que Y es una variable aleatoria que toma valores en \mathbb{R}^d y si f es una función medible acotada sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, entonces

$$\mathbb{E}[f(X, Y)|\mathcal{F}] = \int f(x, Y)\mu(dx) \quad (\text{B.1})$$

donde μ es la distribución de X .

Otros

- La *distribución de dimensión finita* de un proceso estocástico $X = (X_t)$ es la distribución multivariada de los vectores aleatorios

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \quad t_1, \dots, t_n \in T$$

para todas las posibles elecciones de tiempos $t_1, \dots, t_n \in T$ para cada $n \geq 1$.

- Un *proceso es Gaussiano* si su distribución de dimensión finita es Normal multivariada.

En el caso del movimiento Browniano la matriz de covarianzas se puede expresar de la siguiente manera

$$\text{Cov}(W_t) = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Apéndice B

Esperanza Condicional

A una variable aleatoria Z se le llama esperanza condicional de X dada el σ -álgebra \mathcal{F} (denotado como $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$) si $\sigma(Z) \subset \mathcal{F}$ y si $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A)$ para toda $A \in \mathcal{F}$.

Propiedad 1 La esperanza condicional es lineal, es decir, si X_1, X_2 son dos variables aleatorias y c_1, c_2 dos constantes, entonces

$$\mathbb{E}([c_1X_1 + c_2X_2]|\mathcal{F}) = c_1\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) + c_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}).$$

Propiedad 2 $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F})]$.

Propiedad 3 Si X y el σ -álgebra \mathcal{F} son independientes, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.

Propiedad 4 Si $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, entonces,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X.$$

Propiedad 5 Si $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, entonces para cualquier variable aleatoria G ,

$$\mathbb{E}(XG|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(G|\mathcal{F}).$$

En particular, si X es una función de Y , $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, entonces $\mathbb{E}(XG|Y) = X\mathbb{E}(G|Y)$.

a cero. Por lo tanto $(dW)^2 = dt$ y $dt dW = 0$ se satisfacen no solo en esperanza sino también exactamente.

El movimiento Browniano con deriva se puede escribir como la forma diferencial estocástica siguiente:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (\text{C.7})$$

Usando los resultados $(dW)^2 = dt$ y $dt dW = 0$, se observa que

$$(dX_t)^2 = \sigma^2 dt, \quad (\text{C.8})$$

es decir, que aunque dX_t es una variable aleatoria, $(dX_t)^2$ no lo es.

Lema de Itô

Sea $u(X, t)$ una función no aleatoria continua y con derivadas parciales continuas. Y X_t un proceso estocástico definido por

$$dX_t = a(X, t)dt + b(X, t)dW_t \quad (\text{C.9})$$

donde W_t es el proceso de Wiener estándar (expresión C.2). Entonces el proceso estocástico $Y_t = u(X_t, t)$ tiene la siguiente forma diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) dt \\ &+ b(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} dW_t. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

El lema de Itô puede ser considerado como una extensión de las reglas de diferenciación del cálculo ordinario al cálculo estocástico. Si se hace la expansión de ΔY mediante series de Tylor hasta de segundo orden, se tiene,

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \frac{\partial u}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \Delta X^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 \right) \\ &+ o(\Delta t). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Apéndice C

Lema de Itô

Si se considera a W_t , el movimiento Browniano sin deriva y ΔW_t denota el cambio en W_t durante el incremento de tiempo Δt , entonces por la propiedad (iii) del movimiento Browniano (definición 2.1), se tiene que

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t = \tilde{x}\sqrt{\Delta t}, \quad (\text{C.1})$$

donde \tilde{x} es una variable aleatoria normal estándar. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, la expresión (C.2) puede ser expresada en la forma diferencial

$$dW_t = \tilde{x}\sqrt{dt}. \quad (\text{C.2})$$

Notese que $\mathbb{E}(dW) = 0$ y $\text{var}(dW) = dt$. También se puede observar que

$$\mathbb{E}[(\Delta W)^2] = \text{var}(\Delta W) + [\mathbb{E}(\Delta W)]^2 = \Delta t, \quad (\text{C.3})$$

$$\text{var}[(\Delta W)^2] = \mathbb{E}[(W_{t+\Delta t} - W_t]^4) - [\mathbb{E}[(\Delta W)^2]]^2 = o(\Delta t), \quad (\text{C.4})$$

y

$$\mathbb{E}[\Delta t \Delta W] = \mathbb{E}[\Delta t (W_{t+\Delta t} - W_t)] = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\text{var} = \mathbb{E}[\Delta t^2 (W_{t+\Delta t} - W_t)^2] - [\mathbb{E}[\Delta t (W_{t+\Delta t} - W_t)]]^2 = o(\Delta t). \quad (\text{C.6})$$

Las expresiones para las formas diferenciales correspondientes son las mismas, únicamente cambia Δt por dt . Supóngase que por simplicidad, los términos $o(dt)$ se consideran como ceros, entonces se observa que los términos $(dW)^2$ y $dt dW$ son no estocásticos, puesto que sus varianzas son esencialmente iguales

Obsérvese que $\Delta X^2 = b(X, t)^2 \bar{x}^2 \Delta t$ + momentos de orden más grandes en Δt y por lo tanto el término ΔX^2 en (C.11) no puede ser ignorado en la derivación de la diferencial puesto que este es de orden Δt . El valor esperado de $\bar{x}^2 \Delta t$ es Δt y se puede mostrar que la varianza de $\bar{x}^2 \Delta t$ es $o(\Delta t)$, y por lo tanto $\bar{x}^2 \Delta t$ se convierte en no estocástico y igual a Δt . En los límites diferenciales $\Delta X \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, ambos $\Delta X \Delta t$ y Δt^2 no contribuyen a la diferencial y por lo tanto la ecuación (C.11) se puede escribir

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial X} dX + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) dt \\ &\quad + b(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} dW_t. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Forma Diferencial del Movimiento Browniano Geométrico

Considérese al movimiento Browniano geométrico (ecuación 2.9), que corresponde a la elección

$$u(X, t) = \exp(X_t),$$

en la ecuación (C.10) donde X_t es el movimiento Browniano con deriva lineal (ecuación 2.8). Entonces por el lema de Itô, la diferencial estocástica de Y_t se expresa como

$$dY = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y dt + \sigma Y dW$$

de manera que

$$\frac{dY}{Y} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW. \quad (\text{C.13})$$

La deriva de Y_t y su varianza correspondiente están dadas por $\mu + \frac{\sigma^2}{2}$ y σ^2 , respectivamente.

Apéndice D

Series de Tiempo

Estacionalidad

Se dice que un proceso $\{X_t\}_{t \in Z}$ es *estrictamente estacionario* si la distribución de dimensión finita de (X_1, \dots, X_n) es igual a la distribución de dimensión finita de $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$ para todos los enteros h y $n \geq 1$.

Por otro lado se dice que el proceso $\{X_t\}_{t \in Z}$ es simplemente *estacionario* si

(i) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ para todo $t \in Z$

(ii) $\mathbb{E}X_t = m$ para todo $t \in Z$

(iii) $R(r, s) = R(r + t, s + t)$ para todo $r, s, t \in Z$

donde $R(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s)$. Un ejemplo de un proceso estrictamente estacionario (y por lo tanto estacionario), es el caso del proceso Gaussiano.

Ruido Blanco

Se dice que un proceso $\{\varepsilon_t\}$ es *ruido blanco* con media 0 y varianza σ^2 , si y solo si $\{\varepsilon_t\}$ tiene media cero y función de covarianza

$$R(k) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Propiedades del Operador de retraso

El operador de retraso definido como $L^k x_n = x_{n-k}$ para $k \geq 0$ tiene las siguientes propiedades. Si c, c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces

$$\begin{aligned}L(cx_n) &= cLx_n \\L(x_n + y_n) &= L(x_n) + L(y_n) \\(c_1L + c_2L^2)x_n &= c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} \\(1 - \lambda_1L)(1 - \lambda_2L)x_n &= x_n - (\lambda_1 + \lambda_2)x_{n-1} + (\lambda_1\lambda_2)x_{n-2}.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BACHELIER, L.. *Théorie de la spéculation*. Ann. Sci. École Norm. Sup. III-17, 21-86, 1900.
- [2] ISHWAR V. BASAWA AND B.L.S. PRAKASA RAO . *Statistical Inference for Stochastic Processes*. Academic Press INC., 1980.
- [3] PATRICK BILLINGSLEY. *Probability and Measure*. Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [4] BLACK, F AND M. SCHOLES . *The pricing of option and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, vol 81, 1973 p. 637-659.
- [5] MOGENS BLADT. *A Markov Modulated Financial Model*. Stochastic Models, 14 (1&2), 225-239, 1998.
- [6] TIM BOLLERSLEV. *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*. Journal of Econometrics, 31, 307-327 , 1986.
- [7] DIEGO BRICIO H. Y L. J. ALVAREZ. *Método de Monte Carlo*. Sociedad Matemática Mexicana, Obras Completas Vol. 2, 1995.
- [8] BROCKWELL, P. J. AND DAVIS, A. . *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York. 2nd. ed., 1991.
- [9] G. CASSELA AND R. L. BERGER. *Statistical Inference*. Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software, 1990.
- [10] CAMPBELL, JOHN Y., W LO, ANDREW AND CRAIG MACKUNGLEY, A. *The econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1997.

-
- [11] ETHAN CINLAR. *Introduction to Stochastic Processes*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1975.
- [12] T. COPELAND AND J. WESTON. *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley, Reading, MA. 1988.
- [13] J. C. COX, S. A. ROSS, AND M. RUBINSTEIN. *Option pricing: A simplified approach..* Journal of Financial Economics, 7:229-263, 1979.
- [14] MICHAEL U. DOTHAN. *Prices in Financial Markets*. Oxford University Press, 1990.
- [15] ENGLE, R. F. . *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. *Econometrica* , 50, no. 4, 987-1008 1982.
- [16] WILLIAM FELLER. *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. 1..* Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [17] JOHN C. HULL. *Options, Futures, and Other Derivatives* . Prentice Hall, 1997.
- [18] MERTON, R. C. , . *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 1973.
- [19] MERTON, R. C. . *Theory of rational option pricing*. Bell Journal of Economics and Management Sciences, vol 4, 1973 p. 141-183.
- [20] MIKOSCH, THOMAS. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific, vol 6, 1998.
- [21] SHIRYAEV, A. N. , . *Essentials of Stochastic Finance*. World Scientific, vol 3, 1999.