

00384

7



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OSCILADORES FORZADOS DE INTEGRACION  
Y DISPARO: ANALISIS CUALITATIVO DE LAS  
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE  
DISPARO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

FERNANDO ALBERTO ONGAY LARIOS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. HUMBERTO ANDRES CARRILLO CALVET

280708



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Osciladores Forzados de Integración y Disparo: Análisis Cualitativo de las Propiedades de las Funciones de Disparo.

## **Resumen**

Se demuestran nuevos resultados sobre propiedades de regularidad de las funciones de disparo de osciladores forzados de integración y disparo. Usando éstos resultados, se indica una nueva metodología de análisis de ésta clase de osciladores periódicamente forzados, alternativa, y de mayor alcance, a las usadas en trabajos anteriores.

Forced Integrate and Fire Oscillators: Cualitative Analysis of the Firing Maps Properties.

## **Abstract**

We prove new results on the firing maps' regularity properties of forced integrate and fire oscillators. Using this results, we outline a new analysis methodology of the synchronization properties of this kind of oscillators periodically forced, diferent and more powerful than those used in previous works.

A mi esposa Rosita y a mis hijos  
Alegría  
Francisco  
Josué

A mis padres Fausto y Rosa  
con cariño y admiración

A Aquel por quien todo es posible  
Y todo tiene sentido

# Osciladores Forzados de Integración y Disparo: Análisis Cualitativo de las Propiedades de las Funciones de Disparo

Fernando A. Ongay Larios

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Sistemas de Integración y Disparo</b>	<b>6</b>
1.1	Oscilaciones no Lineales . . . . .	6
1.2	Osciladores de Integración y Disparo . . . . .	8
1.2.1	Neuronas de Integración y Disparo . . . . .	8
1.2.2	Neurona mecánica . . . . .	9
1.3	Forzamiento y Sincronización . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Modelos de Osciladores de Integración y Disparo</b>	<b>12</b>
2.1	Modelos Geométricos. . . . .	12
2.2	Modelos Diferenciales . . . . .	13
2.3	Funciones de Disparo . . . . .	15
2.4	Sincronización. . . . .	15
2.5	Funciones en la Circunferencia y Teorías de Rotación . . . . .	17
2.6	Relación entre los Modelos Geométricos y los Diferenciales . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modelos de Acumulación Lineal</b>	<b>20</b>
3.1	El Modelo KHR . . . . .	20
3.2	El Modelo de Acumulación Lineal (LAM) . . . . .	21
3.3	El Método de Análisis de Keener, Hoppensteadt y Rinzel . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Modelo general de los osciladores diferenciales de integración y disparo. Regularidad de la función de Disparo</b>	<b>28</b>
4.1	Modelo General de los Osciladores Diferenciales de Integración y Disparo . . . . .	28
4.1.1	La Función de Disparo . . . . .	29
4.1.2	Forzamiento Periódico . . . . .	30
4.2	Dominio de la Función de Disparo . . . . .	30
4.3	Teoremas de regularidad . . . . .	33
4.3.1	Teorema de Inyectividad . . . . .	36

4.3.2	Teorema de Continuidad . . . . .	38
4.4	Diferenciabilidad . . . . .	42
4.5	Aplicación al Modelo KHR . . . . .	43
4.5.1	Partición del Espacio de Parámetros . . . . .	44
4.6	Apéndice . . . . .	45

## Prefacio

El funcionamiento orgánico de un sistema complejo es posible gracias a la sincronización de sus diferentes componentes o subsistemas. Es así que el estudio de sistemas interactuantes constituye un tema central en cualquier disciplina científica. Sin embargo el análisis matemático de éstos sistemas es un problema difícil, de hecho, el estado actual del conocimiento –científico y matemático– dista aún mucho de poder comprender todos los posibles comportamientos de los sistemas complejos. El problema radica en, por un lado la gran cantidad de componentes, variables y parámetros que pueden estar interactuando, lo que obliga a analizar simplificaciones del problema, y por otro lado a que las interacciones generalmente son no lineales. Un paso fundamental en el estudio de éstas cuestiones es analizar el forzamiento de osciladores no lineales, asunto sobre el que se ha verificado una gran cantidad de trabajo, pero del que aún estamos lejos de comprender completamente la fenomenología que se presenta en éstos problemas.

En este trabajo nos avocamos al estudio de modelos del forzamiento de una clase de osciladores no lineales, llamados **osciladores forzados de integración y disparo**, ampliamente usados en aplicaciones científicas y tecnológicas. Aún cuando aquellos son una simplificación de modelos más realistas, su comportamiento es muy rico. En el caso de forzamiento periódico, la teoría de sistemas dinámicos en la circunferencia permite analizar las propiedades de sincronización de éstos modelos. El uso de ésta poderosa herramienta matemática requiere analizar ciertas propiedades de las funciones de disparo, lo cual no es nada trivial toda vez que éstas funciones por lo general son inaccesibles analíticamente. En casos particulares (como el de los osciladores de acumulación lineal) es posible acceder a una definición implícita de ellas y, de ahí, obtener la información que se requiere. La importancia de éste problema y las limitaciones de los modelos estudiados motivaron el abordar el problema de analizar una amplia clase de modelos, no necesariamente de acumulación lineal.

El primer capítulo discute informalmente los osciladores forzados de integración y disparo y en el segundo describimos los modelos más conocidos que se han elaborado para analizarlos. También señalamos insistentemente la importancia que tienen las cuestiones de **sincronización**, que es, en cierto sentido, el faro principal que conduce la investigación.

El tercer capítulo se dedica al modelo diferencial de acumulación lineal, generalización de un modelo del forzamiento de una neurona marcapaso (modelo al que le llamamos *modelo KHR*), estudiado anteriormente por varios autores. En éste capítulo discutimos brevemente el método de análisis seguido por J. Keener, F.

C. Hoppensteadt y J. Rinzel para analizar el modelo KHR, y mostramos nuevos resultados que permiten generalizar ésta metodología de análisis a los modelos de acumulación lineal. Sin embargo, esta metodología, no es susceptible de ser aplicada a modelos más generales (modelos no lineales) por lo que en el capítulo cuatro, que constituye la parte medular del trabajo, presentamos –y demostramos– nuevos teoremas sobre las propiedades de regularidad de la funciones de disparo, sin necesidad de tener acceso a ellas. De éstos teoremas se deriva una nueva metodología para el análisis del forzamiento de osciladores de integración y disparo, completamente diferente a la usada anteriormente, y que se aplica incluso para el caso de acumulación no lineal. A manera de ilustración, analizamos nuevamente el modelo KHR usando las nuevas herramientas desarrolladas.

Deseo agradecer al Dr. Humberto Carrillo Calvet la dirección de este trabajo y por todas las fructíferas conversaciones que tuvimos, no sólo de matemáticas, sino de muchas otras cosas. Estoy muy agradecido también con Miguel Angel Mendoza y Antonio Carrillo, quienes varias veces me sacaron de apuros al lidiar con esos animales que llamamos computadoras.

# 1. SISTEMAS DE INTEGRACIÓN Y DISPARO

## 1.1. Oscilaciones no Lineales

A *grosso modo*, podemos afirmar que en la naturaleza solamente hay dos tipos de dinámicas: las que presentan oscilaciones o las más o menos impredecibles, como las que se observan en los llamados sistemas caóticos. De hecho, a ciertas escalas el universo pareciera que presenta cierto orden regido por leyes precisas (razón por la cual se le llama *Cosmos*). El entendimiento humano ha permitido ir descifrando algunas de estas leyes y (parcialmente) comprender este Cosmos lo que, a su vez, ha redituado en alcanzar altos niveles en materia de tecnología y salud.

Esto ha sido posible gracias a la capacidad de abstraer y modelar sistemas dinámicos. La modelación de las dinámicas oscilatorias ha sido un reto y una inquietud, presente en la mente de los investigadores, desde los inicios de la ciencia moderna y ha sido también, en buena medida, el motor del desarrollo del Cálculo Diferencial y el Análisis Matemático, entre otras áreas de la matemática.

Ya Kepler, en 1609 y 1619, dió uno de los primeros modelos matemáticos, las famosas *Leyes de Kepler*, que explican de manera satisfactoria el movimiento de los planetas. En el siglo XVII, Newton y Leibniz crearon el Cálculo Diferencial, con lo que fue posible dar un salto cualitativo en la modelación matemática de las leyes físicas que gobiernan la dinámica del movimiento planetario. El siglo XIX fue toda una explosión de resultados teóricos y experimentales en física y matemáticas; el afortunado encuentro que tuvieron el análisis con la geometría dió lugar a herramientas de análisis muy poderosas, como fueron el análisis de Fourier, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la topología, los grupos de Lie y muchas otras. Esto permitió el desarrollo de modelos altamente eficientes, como las leyes de Maxwell del electromagnetismo, sistemas hamiltonianos y la teoría de la relatividad, por mencionar solamente algunos de los más conspicuos.

En la modelación de las oscilaciones, esencialmente se presentan dos problemas: por un lado, modelar sistemas que presentan oscilaciones autosostenidas

(esto es, autónomas de cualquier estímulo externo; a estos sistemas se les llama *osciladores*), y por el otro determinar lo que sucede cuando estos sistemas son sometidos a perturbaciones o estimulaciones (forzamientos). Caso típico de esto último es, si un oscilador recibe un estímulo periódico, determinar condiciones para que la respuesta del sistema este sincronizada con el estímulo.

Sin embargo, la gama de comportamientos oscilatorios que se observan en los sistemas de la vida real es muy grande y algunos son muy complejos. Tenemos por ejemplo el tipo de oscilaciones llamadas por Van der Pol de *relajación*, estudiadas por este y muchos otros autores ([1], [2]) con resultados, a decir verdad, todavía muy modestos. La complejidad que pueden tener estos sistemas es la razón por la que, para muchos sistemas importantes, todavía no es posible tener modelos científicamente satisfactorios o que sean realmente útiles, ya que mucha de la modelación hecha ocurre en escenarios muy simplificados –modelos lineales, por ejemplo–, o su aplicabilidad esta restringida a casos muy especiales, o por el contrario, por su excesiva complejidad o un alto costo en su uso, son prácticamente inmanejables.

Desde el punto de vista del análisis matemático, la complejidad de los modelos de osciladores se debe a que estos suelen ser no lineales y de dimensión mayor que uno. Comúnmente, los osciladores se modelan en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de la forma

$$\dot{x} = F(x)$$

con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Como los sistemas unidimensionales no son capaces de presentar oscilaciones autónomas (todas sus soluciones son monótonas), oscilaciones autosostenidas ocurren en sistemas con al menos dos variables de estado interactuando ( $n \geq 2$ ). En la estructura del modelo, el forzamiento se traduce un una dependencia temporal del sistema de ecuaciones diferenciales. De donde un modelo minimal de oscilador forzado tendrá la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y) \\ \dot{y} &= g(t, x, y).\end{aligned}$$

No obstante, existen otras alternativas para modelar osciladores. La estructura de los modelos de osciladores forzados que nos interesan tienen un grado de complejidad matemática menor y son especialmente apropiados para modelar y analizar los procesos de forzamiento de las llamadas “*oscilaciones diente de sierra*”. Un oscilador de diente de sierra es uno en el que alguna variable de estado

tiene un curso temporal que semeja el perfil de una sierra (véanse las figuras del capítulo siguiente (2)). La dinámica de estos “osciladores matemáticos” es análoga a la de un sistema dinámico físico en el cual una variable de estado  $v(t)$  se acumula a partir del valor de reposo  $v_R$  hasta que un valor umbral  $v_T$  es alcanzado y el sistema se relaja a su reposo nuevamente. De estos sistemas una subclase de osciladores conocidos como de *integración y disparo*, y que describiremos en la siguiente sección, son el objeto de estudio de este trabajo.

## 1.2. Osciladores de Integración y Disparo

Los osciladores de integración y disparo poseen dos características esenciales: La presencia de dos eventos que ocurren en dos escalas de tiempo distintas, una de ellas (el *disparo*) en un lapso de tiempo mucho menor que el otro (la *fase de integración* o, en nuestros modelos, de *acumulación*). En una primera aproximación, el disparo se considera que ocurre instantáneamente. La segunda característica es que estos eventos se repiten siempre de la misma manera (son eventos estereotípicos, como los potenciales de acción de una neurona) de modo que basta con conocer la forma de uno de estos eventos y su ocurrencia temporal. De este modo, en los osciladores de integración y disparo se alternan lentos procesos de acumulación con súbitas descargas (disparos) que provocan una relajación instantánea del sistema (o más precisamente de la variable de estado en cuestión) a su nivel de reposo. Típicamente un oscilador autónomo de integración y disparo emitirá sus disparos a intervalos fijos de tiempo. En un oscilador forzado la secuencia de disparos puede tener una regularidad más complicada o, incluso, dejar de ser regular.

### 1.2.1. Neuronas de Integración y Disparo

Existen células nerviosas que son un buen ejemplo de un oscilador de integración y disparo. La membrana celular es un sistema excitable que dispara un impulso eléctrico (*potencial de acción*) cuando un pulso breve supraumbral de corriente eléctrica le es aplicado. Si en lugar de un pulso, una corriente eléctrica continua  $I$  es aplicada, la célula dispara trenes periódicos de potenciales de acción, es decir: periódicamente el voltaje a través de la membrana celular se incrementa, alcanza el umbral y vuelve al reposo otra vez. Desde este punto de vista, la neurona actúa como un transductor convirtiendo la intensidad  $I$  de la corriente continua aplicada a una señal periódica con frecuencia característica  $w(I)$ .

El estudio de la respuesta de las células nerviosas a una corriente eléctrica aplicada es un problema familiar en fisiología. Es bien conocido entre los fisiólogos que la frecuencia del tren de oscilaciones aumenta con la intensidad de la corriente  $I$  (en ciertos intervalos de intensidad). Este hecho puede ser claramente entendido con la ayuda de modelos incluso tan sencillos como el de la neurona mecánica discutido más adelante.

Algunas neuronas (marcapasos neuronales) tienen una actividad periódica espontánea. Estas exhiben patrones de distribución muy variados, incluyendo ráfagas de oscilaciones, en lugar de trenes de oscilaciones sencillos ([3]).

Como la forma (curso temporal) y el tamaño de los potenciales de acción son característicos de cada célula, no es necesario monitorear el voltaje de membrana durante todo el tiempo que dura el evento, sino solamente la sucesión de tiempos  $\{t_n\}$  de los disparos del potencial de acción. Esto es equivalente a imaginar los disparos como procesos instantáneos. Esta idealización de comprimir el tiempo, y la correspondiente reducción del análisis al estudio de sucesiones temporales, es útil para estudiar procesos en los cuales fenómenos estereotípicos ocurren recurrentemente. El concepto ideal de *tiempo de disparo*,  $t_n$ , y *sucesión de disparo*,  $\{t_n\}$ , emergen de esta idea de compresión temporal. A un sistema excitable junto con la compresión temporal ideal es a lo que llamamos *Neurona de Integración y Disparo*.

### 1.2.2. Neurona mecánica

Como un paradigma de un oscilador de integración y disparo consideraremos un sistema mecánico simple, que llamaremos la neurona mecánica ([4]): considérese un “subibaja” como se muestra en la figura (1.1): un lado de la balanza tiene un contenedor que recibe agua de una llave a una razón constante  $I$ ; en el lado opuesto, la balanza tiene un contrapeso  $h$ . Suponiendo una adecuada relación entre sus constituyentes (i.e.: para ciertos valores de los parámetros), esta *neurona mecánica* transduce la intensidad del flujo continuo de agua en la señal periódica de las descargas del contenedor de agua.

Llamando  $v(t)$  el peso del agua en el contenedor al tiempo  $t$  entonces, mientras  $v(t) \leq h$ , tenemos  $v(t) = v_0 + It$ , donde  $v_0 = v(0)$ . Después, una descarga vacía el contenedor a un nivel de reposo ( $v_R$ ), desde ese peso, el contenedor reanuda su incremento de peso hasta alcanzar el umbral una vez más. Si hacemos una modificación más al sistema agregando un elevador, como se muestra en la figura (1.2), obtenemos un sencillo sistema mecánico forzado que simula la dinámica de

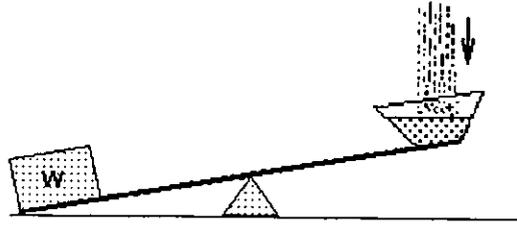


Figura 1.1: Neurona mecánica

una célula nerviosa periódicamente forzada ([4]).

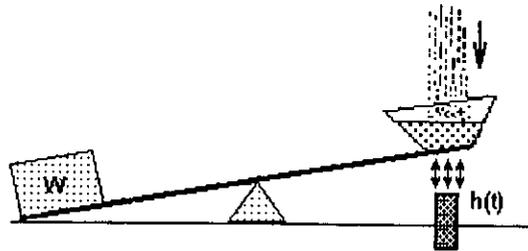


Figura 1.2: Neurona mecánica forzada

**Observación 1.** *Es interesante notar que cuando la función de reposo que fuerza esta “neurona mecánica” (es decir la ley que gobierna el movimiento del elevador) es  $g(t) = -H \sin(2\pi t)$ , entonces la sucesión de disparos del sistema viene dada por las iteraciones de la familia clásica de funciones de Arnold de la circunferencia*

$$t_{n+1} = t_n + a + b \sin(2\pi t_n),$$

con  $a = \frac{h}{I}$ , y  $b = \frac{H}{I}$  (véase la sección 1 del capítulo 2).

### 1.3. Forzamiento y Sincronización

Es un hecho que en la naturaleza interactúan innumerables sistemas y subsistemas de las dinámicas más variadas. Con frecuencia, un sistema que perturba a un

segundo, se ve a sí mismo perturbado por este otro en una, en ocasiones incesante, retroalimentación. En otros, debido a estímulos externos, el comportamiento de un sistema se ve afectado sin que éste, aparentemente, influya en aquellos.

En algunos sistemas pueden identificarse varias componentes oscilatorias que interactúan. Esta interacción puede ser muy complicada, pero generalmente la sincronización juega un papel muy importante. El tipo más general de sincronización es aquella donde las diferentes componentes del sistema tienen frecuencias conmensurables y es llamada *sincronización racional* ([5]).

El fenómeno de sincronización racional es abundante en el campo de la música. Es también conocido que, cuando escuchamos música, el latido de nuestro corazón tiende a sincronizarse racionalmente al ritmo de la música. El latido del corazón mismo es causado por la acción sincrónica de un gran número de osciladores individuales a nivel celular. Aparentemente, algunas enfermedades del corazón como extracístole (saltarse un latido) o fibrilación (el corazón deja de latir) son causados por la pérdida de sincronización entre los diferentes centros oscilatorios.

En un oscilador forzado periódicamente, la sincronización racional se da cuando el periodo de la respuesta del sistema es conmensurable con el periodo,  $T$ , del forzamiento. Para los osciladores de integración y disparo esto significa que la sucesión de disparos,  $\{t_n\}$ , es periódica ( $t_{n+q} = t_n + P$ , para algún entero positivo  $q$ , algún real positivo  $P$  y para toda  $n$ ) y su periodo  $P$  es un múltiplo entero del periodo del forzamiento:  $P = pT$ . En otras palabras, por cada  $p$  ciclos del forzamiento, el sistema produce  $q$  disparos, y el proceso se repite, de modo que los siguientes disparos se dan siempre en las mismas fases, esto es  $t_{n+q} \equiv t_n \pmod{T}$ .

La sucesión  $x_n = t_n \pmod{T}$  está contenida en el intervalo  $[0, T)$  y está formada por las fases en que se dan todos los disparos del sistema respecto al ciclo del forzamiento. Llamamos a la sucesión  $\{x_n\}$  la sucesión de *fases de disparo*. En el caso de sincronización racional, la sucesión de fases de disparo es finita ( $x_n = x_{n+q}$  para toda  $n$ ). Este tipo de sincronización es llamada también *phase locking* por otros autores ([6]).

## 2. MODELOS DE OSCILADORES DE INTEGRACIÓN Y DISPARO

En este capítulo describiremos dos de las clases de modelos de osciladores de integración y disparo más ampliamente discutidos en la literatura; los hemos clasificado en modelos geométricos y modelos diferenciales. Estos modelos, y principalmente los geométricos, han sido usados para estudiar una gran variedad de fenómenos oscilatorios, incluyendo ritmos cardíacos, temblores, osciladores mecánicos, entre otros ([7], [8], [9], [10]). Nuestro estudio se enfocará, más adelante, exclusivamente en los modelos diferenciales.

### 2.1. Modelos Geométricos.

Este tipo de modelación se adapta muy bien para analizar oscilaciones de diente de sierra con procesos de acumulación y relajación lineales. El oscilador autónomo básicamente consiste en un punto que se mueve entre dos líneas paralelas,  $L_1$ ,  $L_2$ , y se refleja de acuerdo a la siguiente regla: el punto deja la línea  $L_1$  con un ángulo  $\alpha$  y se dirige hacia la línea  $L_2$ . Una vez que la alcanza, se refleja con un ángulo  $\beta$ , sobre  $L_2$ , alcanzando nuevamente la línea  $L_1$  y el proceso se repite nuevamente y así sucesivamente (fig 2.1.a). Este oscilador será de integración y disparo si  $\beta = \pi/2$ , (fig. 2.1.b). Llamamos, en analogía con la dinámica de las membranas excitables, *umbral* y *reposo* a las líneas  $L_2$  y  $L_1$ , respectivamente.

El forzamiento de un oscilador autónomo de este tipo se modela cambiando las líneas  $L_1$  y  $L_2$  por las gráficas de dos funciones,  $g$  y  $f$ , que llamamos *función de reposo* y *función umbral* respectivamente.

Nos referiremos a los tiempos en que el punto del modelo alcanza el reposo como los *tiempos de disparo* del oscilador; con ellos se construye, a partir de un tiempo inicial  $t_0$ , la secuencia de tiempos de disparo. Si  $f$  y  $g$  son continuas y acotadas, para todo natural  $n$  dos tiempos consecutivos de disparo están relacionados

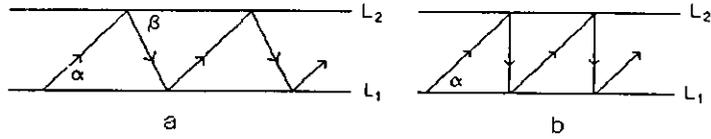


Figura 2.1: Modelos geométricos de osciladores

por la ecuación

$$t_{n+1} = t_n + \frac{f(s_n) - g(t_n)}{\tan \alpha} + \frac{f(s_n) - g(t_{n+1})}{\tan \beta} \quad (2.1)$$

donde  $s_n$  es el tiempo, entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , en el que el punto alcanza el umbral. Es interesante notar que en el caso de integración y disparo ( $\beta = \pi/2$ ), si el umbral es constante:  $f(t) \equiv k$ ,  $t_{n+1}$  está dado por una fórmula explícita en términos de  $t_n$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{k - g(t_n)}{\tan \alpha} \quad (2.2)$$

Para el ejemplo de la neurona mecánica este es el caso con  $g(t) = -H \sin(2\pi t)$ , y de acuerdo con (2.2) tenemos

$$t_{n+1} = t_n + \frac{k}{\tan \alpha} + \frac{H}{\tan \alpha} \sin(2\pi t_n).$$

## 2.2. Modelos Diferenciales

La otra clase útil de modelos para estudiar osciladores forzados de integración y disparo es construido usando una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x). \quad (2.3)$$

Esta ecuación es usada para modelar el proceso de integración (o acumulación) de una variable de estado,  $v$ , hasta que el valor umbral  $v_T$  es alcanzado y el sistema dispara una respuesta que relaja el valor de  $v$  a su valor de reposo,  $v_R$ , por medio de la *condición de disparo (o salto)*

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} v(t) = v_R \text{ cada tiempo, } \tau, \text{ para el cual } v(\tau) = v_T.$$

Es decir,  $v(t)$  es una función discontinua: mientras  $0 \leq v(t) \leq 1$ ,  $v$  es igual a la solución de la ecuación diferencial (2.3) que satisface la condición inicial  $x(\tau) = 0$ , sus discontinuidades son de salto y van del valor umbral  $v_T$  al valor de reposo  $v_R$ , como lo indica la condición de disparo.

Denotemos por  $x(t, \tau, \eta)$  a la solución de (2.3) que satisface la condición inicial  $x(\tau) = \eta$ . El sistema dispara desde el tiempo inicial  $\tau$ , si  $\tau$  es tal que la solución  $x(t, \tau, 0)$  alcanza el valor umbral  $v_T$ , para alguna  $t$  mayor que  $\tau$ . Obsérvese que pueden existir tiempos  $\tau$  para los cuales el sistema nunca dispara:  $x(t, \tau, 0) \neq v_T$ , para toda  $t > \tau$ . La repetición sucesiva del proceso de acumulación y relajación mediante la condición de disparo, genera la secuencia de tiempos de disparo  $\{t_n\}$  (véase la fig. (2.2)).

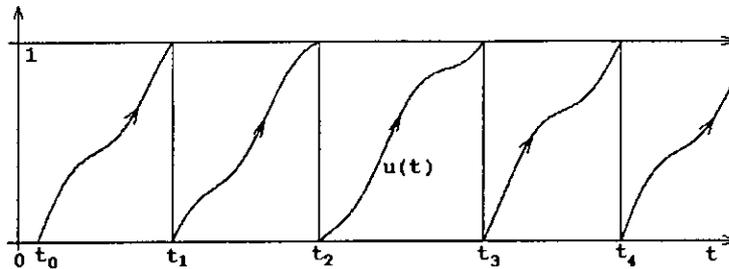


Figura 2.2: Sucesión de disparos de un modelo diferencial, el modelo KHR:  $F(t, x) = -\sigma x + S + H \cos(2\pi t)$ , con  $\sigma = 0.375$ ,  $S = 1$ ,  $H = 0.5$

El modelo de integración y disparo tiene la ventaja, sobre el geométrico, de que la variable de estado  $v$ , en lugar de crecer a razón constante, evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial (2.3). Otra importante diferencia está en la forma en que el forzamiento es modelado: en el modelo diferencial, el umbral y el reposo permanecen constantes, y el forzamiento actúa en el proceso de acumulación, lo cual se refleja en la dependencia temporal (no autonomía) de la ecuación diferencial. La característica interesante que ambas clases de modelos comparten

es que pueden ser analizados en términos de sus funciones de disparo subyacentes y de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales que generan.

### 2.3. Funciones de Disparo

Para ambas clases de modelos de integración y disparo existe una función  $a$ , la función de disparo, que asocia a cualquier tiempo inicial  $\tau$  (del cual el sistema dispare), el valor  $a(\tau)$  del tiempo de disparo, que es el mínimo tiempo mayor a  $\tau$  en el cual la variable de estado del sistema alcanza su valor umbral. Para el modelo geométrico, si las funciones de reposo y umbral son continuas, acotadas y definidas en todo  $\mathbb{R}$ , esta función claramente existe y su dominio  $D_a$  es todo  $\mathbb{R}$ . Por otro lado, bajo condiciones convenientes sobre  $F$  (como las que se especifican en los enunciados de los teoremas de los capítulos siguientes), se puede probar que para cualquier  $\tau \in \mathbb{R}$ , para el cual el sistema dispara, existe un mínimo tiempo  $t = t_{\min}$  que resuelve la ecuación  $x(t; \tau, 0) = v_T$ . Por lo tanto la función de disparo  $a(\tau) = t_{\min}$  esta bien definida para el modelo diferencial, pero en este caso  $D_a$  puede ser un subconjunto propio de  $\mathbb{R}$ , incluso cuando el dominio de  $F$  sea todo  $\mathbb{R}^2$  (véase la sección 4.2 del capítulo 4).

En el caso en el que  $D_a$  está contenida en la imagen de la función de disparo  $a$ , la secuencia de disparo  $\{t_n\}$  está bien definida para toda  $n \in \mathbb{N}$  y son las órbitas del semisistema dinámico discreto generado por la función  $a$ .

**Observación 2.** *Se sobreentiende que las secuencias de disparo de un oscilador de integración y disparo son estrictamente crecientes:  $t_{n+1} > t_n$ . Esto debe implicar que  $a(t) > t$  para toda  $t \in D_a$ , y por lo tanto la función de disparo  $a$  no puede tener puntos fijos. Esto es obvio para el modelo diferencial, pero para el modelo geométrico general, si existe  $t$  tal que  $g(t) \geq f(t)$ , entonces  $a(t) \leq t$  y por tanto la función de disparo no sólo puede tener puntos fijos, sino que la secuencia de disparo podría "retroceder". Para evitar este tipo de anomalía, en la construcción del modelo, normalmente se supone  $g(t) < f(t)$  para toda  $t$ .*

### 2.4. Sincronización.

La mayoría de la investigación hecha en los modelos forzados que consideramos, ha centrado su atención en el caso de forzamiento periódico. Un problema específico es saber cuándo la respuesta del oscilador autónomo se sincroniza o no con el periodo del forzamiento, es decir, bajo qué condiciones se tiene sincronización

racional (ver capítulo 1). La sincronización, como ya se dijo, se da cuando las secuencias de disparo son periódicas:  $t_{n+q} = t_n + P$ , y, además,  $P$  es un múltiplo entero del periodo del forzamiento:  $P = pT$ , si  $T$  es el periodo del forzamiento. Es decir, por cada  $p$  ciclos del forzamiento, el sistema repite la misma secuencia de  $q$  disparos. Llamamos a  $q$  el *periodo* y a  $p$  la *envolvencia* de la sincronización.

En el modelo geométrico, forzamiento periódico significa que ambas funciones  $f$  y  $g$ , tienen el mismo periodo o periodos conmensurables. Para el modelo diferencial,  $F$  es periódica en la variable  $t$ :  $F(t + T, v) = F(t, v)$ .

En el modelo geométrico con forzamiento periódico, a partir de la construcción geométrica, se puede ver que  $a(t + T) = a(t) + T$  para toda  $t$ . Para el caso diferencial, como  $F$  es periódica en  $t$ , es bien conocido que, si  $v(t)$  es una solución de (2.3), entonces  $v(t + T)$  es también solución. A partir de este hecho se pueden probar las siguientes afirmaciones (cf. sección 4.1.2 del capítulo 4):

- (i)  $D_a = D_a + T$ ,
- (ii)  $a(t + T) = a(t) + T$ .

Las consecuencias de estos hechos son importantes: cuando  $D_a = \mathbb{R}$ , podemos pensar a la función de disparo,  $a$ , como un levantamiento de una función de grado uno en la circunferencia. Para un oscilador de integración y disparo periódicamente forzado, la *secuencia de fases de disparo*,  $\{x_n\}$ , es obtenida tomando la clase residual, módulo  $T$ , de la secuencia de disparo:  $x_n = t_n \bmod T$  ( $0 \leq x_n < T$ ), donde  $T$  es el periodo del forzamiento. La *función de fases de disparo* es la función en la circunferencia definida por

$$\alpha(x) = a(x) \bmod(T).$$

Podemos enunciar el siguiente resultado ([11]): *Las secuencias de fases de disparo  $\{x_n\}$ , de un oscilador de integración y disparo periódicamente forzado son las órbitas de un semisistema dinámico en la circunferencia, generado por la función de fases de disparo, si  $D_a = \mathbb{R}$ .*

Visto de este modo, las propiedades sincrónicas de la respuesta del oscilador al forzamiento periódico están codificadas en la función de fases de disparo. La sincronización se revela como la existencia de órbitas periódicas atractoras. El problema de estudiar las propiedades de sincronización del sistema al forzamiento periódico se vuelve ahora un problema técnico: si la función de fases de disparo es un homeomorfismo, la teoría del número de rotación de Poincaré es una herramienta útil para detectar órbitas periódicas atractoras. Si la función de fases de disparo no es un homeomorfismo, pueden ser utilizadas generalizaciones de la

noción de número de rotación. En la siguiente sección haremos un breve resumen de los aspectos más importantes de estas teorías.

## 2.5. Funciones en la Circunferencia y Teorías de Rotación

Si la función de disparo es un homeomorfismo de la circunferencia, el *número de rotación* de Poincaré

$$\rho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n(s)}{n} \bmod 1 \quad (2.4)$$

es útil para determinar la existencia de órbitas periódicas ([12]): si este número es un racional  $p/q$ , la función tiene órbitas de periodo  $q$ ; mas aún, si la función de fases de disparo no es una rotación, entonces tiene órbitas periódicas atractoras, lo cual, como hemos dicho, interpretamos como sincronización. Cuando el número de rotación no es racional, entonces todas sus órbitas son aperiódicas y densas en todo el círculo o en un subconjunto de Cantor. En este caso no tenemos sincronización del oscilador con el forzamiento.

Si la función de fases de disparo no es un homeomorfismo, se requiere generalizar el concepto de número de rotación. Cuando la función es continua pero no monótona, el límite (2.4) depende del punto donde es calculado. Esto nos da un intervalo cerrado de números de rotación ([13], [14]). Por cada número racional  $p/q$  en este intervalo, la función de fases de disparo tiene al menos una órbita periódica de periodo  $q$  ([15]), pero la mayoría de ellas son inestables. Algunos resultados, en su mayoría numéricos, muestran que es posible la coexistencia de órbitas periódicas atractoras de diferente periodo ([6], [16]), fenómeno conocido como *multiestabilidad*; también es posible la existencia de atractores caóticos e, inclusive, la coexistencia de atractores periódicos y caóticos ([17]). Es interesante notar cómo, en este caso, la teoría nos muestra la posibilidad de tener diferentes sincronizaciones, dependiendo de la condición inicial del oscilador forzado. Es más, cabe la posibilidad de tener osciladores forzados para los cuales algunas condiciones iniciales darán lugar a sincronización y otras a comportamientos caóticos.

Si la función de fases de disparo es monótona, pero no continua, el número de rotación queda también bien definido por un límite análogo a (2.4). En este caso se tiene una vez más que, si  $\rho \in \mathbb{Q}$ , entonces existen órbitas periódicas atractoras, y si  $\rho \notin \mathbb{Q}$  las órbitas son densas en un conjunto de Cantor ([18]). Aquí, como en el caso de homeomorfismos, número de rotación racional implica sincronización. Hasta donde nosotros sabemos, no existe en la literatura una teoría desarrollada

para estudiar el caso en que la función de la circunferencia no es ni monótona ni continua.

De acuerdo a los resultados de estas teorías, para estudiar las propiedades de sincronización de un sistema de integración y disparo periódicamente forzado, necesitamos elementos que nos permitan determinar la regularidad (continuidad e inyectividad) de la función de fases de disparo. Al trabajar sistemas con parámetros, se tiene una familia parametrizada de funciones de fases de disparo  $\alpha_\lambda$ . En el espacio de parámetros podemos considerar las siguientes cuatro regiones, de acuerdo a la regularidad de la función de fases de disparo:

- I. Donde  $a(t)$  es un homeomorfismo,
- II. donde  $a(t)$  es continua,
- III. donde  $a(t)$  es inyectiva y
- IV. donde  $a(t)$  no es ni continua ni inyectiva.

El discernimiento de estas regiones de regularidad también tiene importancia por otras razones; en el espacio de parámetros se tienen diferentes zonas de sincronización (llamadas también *lenguas de Arnold*): por cada racional  $\frac{p}{q}$  se considera el conjunto de valores del parámetro tales que la función de fases de disparo tiene una órbita atractora de periodo  $q$  y *envolvencia*  $p$  ([19]). En cada una de las regiones de regularidad, la estructura de las lenguas de Arnold tiene propiedades distintas: de acuerdo a la teoría del número de rotación y sus generalizaciones: en las regiones I y III, las lenguas no pueden intersectarse; en la región II, las zonas de sincronización pueden intersectarse, reflejando el fenómeno de multiestabilidad; en la región IV conjeturamos la existencia de multiestabilidad pero no tenemos ningún resultado teórico que respalde esta afirmación. Es interesante señalar aquí que el análisis de las lenguas de Arnold comunmente sólo puede hacerse con la ayuda de computadoras, y aún así, el esfuerzo computacional requerido es considerable.

## 2.6. Relación entre los Modelos Geométricos y los Diferenciales

Aún cuando los modelos geométricos y los diferenciales son distintos en su naturaleza, es posible bajo ciertas hipótesis, simular la dinámica de un modelo geométrico por la de uno diferencial y viceversa, lo cual permite tener cierta universalidad de algunas de las propiedades de los osciladores de integración y disparo modelados por cualquiera de los dos tipos. En esta sección mostraremos un método, que se puede usar de manera estándar, para asociarle, a un modelo

geométrico, uno diferencial que tenga la misma función de disparo. La operación recíproca (a un modelo diferencial asociarle uno geométrico) no es posible dado que, en general, no es posible obtener, de manera explícita, la función de disparo de los modelos.

Consideremos cualquier función diferenciable  $U(t, x)$  y definamos

$$\frac{\partial U}{\partial t} = M(t, x) \quad y \quad \frac{\partial U}{\partial x} = N(t, x),$$

y consideremos también la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}. \quad (2.5)$$

Entonces  $U(t, x) = c$  nos da las soluciones implícitas de la ecuación, de modo que

$$U(t, x(t; \tau, 0)) = U(\tau, 0),$$

donde  $x(t; \tau, 0)$  es la solución de (2.5) que satisface la condición inicial  $x(\tau) = 0$ . De aquí vemos que la función de disparos  $a(\tau) = x(t; \tau, 1)$  satisface la relación implícita

$$U(a(\tau), 1) = U(\tau, 0). \quad (2.6)$$

Basados en esta ecuación el método para asociar a un modelo geométrico un modelo diferencial, de modo tal que sus funciones de disparo coincidan, es como sigue; suponiendo  $f(t) > g(t)$  para toda  $t$  y diferenciables, tomamos la función  $U(t, x) = mt - g(t) - (f(t) - g(t))x$ . De acuerdo a (2.1), con  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ( lo que implica que  $s_n \rightarrow t_{n+1}$ ), y por (2.6), la función de disparo del modelo geométrico determinado por las funciones  $f, g$ , y el número positivo  $m = \tan \alpha$ , es también la función de disparo del modelo con ecuación diferencial

$$\dot{x} = \frac{m - g'(t) - (f'(t) - g'(t))x}{f(t) - g(t)}.$$

## 3. MODELOS DE ACUMULACIÓN LINEAL

### 3.1. El Modelo KHR

J. P. Keener, F. C. Hoppensteadt y J. Rinzel en ([20]), analizaron un modelo de integración y disparo de la respuesta de una membrana nerviosa a un forzamiento periódico, modelo previamente estudiado por otros autores ([10], [21]). El modelo describe la evolución del potencial de membrana  $v(t)$  en su proceso de acumulación hasta alcanzar un valor umbral  $v_T$  y emitir un disparo (potencial de acción). Después del disparo, el potencial de membrana regresa a un valor de reposo y el proceso se repite. El modelo matemático que ellos formulan es

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + S_0 + S_m \cos(\omega t + \phi)$$

y condición de disparo

$$v(t^+) = 0 \text{ si } v(t) = v_T, \quad (3.1)$$

donde  $S_0$  es el promedio del estímulo aplicado y  $S_m, \omega$  y  $\phi$  son la amplitud, frecuencia y fase del estímulo, respectivamente.

Después de un cambio de variable y el reescalamiento de los parámetros, el análisis se reduce al estudio de las posibles dinámicas generadas por la función de disparo del modelo diferencial

$$\dot{x} = -\sigma x + S + H \cos(2\pi t) \quad (3.2)$$

con umbral normalizado a uno:  $v_T = 1$ . La interpretación del modelo puede ser la de un oscilador autónomo gobernado por la ecuación  $\dot{x} = -\sigma x + S$  y la condición de disparo (3.1), sujeto al forzamiento armónico  $H \cos(2\pi T)$ .

El problema ahora es determinar, en el espacio de parámetros, en dónde la función de disparo  $a$  tiene como dominio toda la recta real  $\mathbb{R}$  así como sus regiones de regularidad para usar la teoría conveniente de funciones de la circunferencia (véase el capítulo 2). Los autores siguieron una metodología que permitió encontrar y delimitar estas regiones de manera completa. En las siguientes secciones explicaremos en qué consiste esta metodología y como ésta puede generalizarse.

### 3.2. El Modelo de Acumulación Lineal (LAM)

El modelo de Keener, Hoppensteadt y Rinzel (KHR) pertenece a una clase más amplia de modelos lineales de osciladores de integración y disparo, que llamamos Modelos de Acumulación Lineal (MAL). Estos modelos describen un proceso de acumulación de la variable de estado,  $x$ , por medio de la ecuación lineal

$$\dot{x} = -\sigma x + g(t), \quad (3.3)$$

junto con la condición de disparo al alcanzar un valor umbral (véase la sección 2.2 del capítulo 2). La función  $g$  generalmente modela el forzamiento de un oscilador autónomo que no necesariamente tiene que ser periódico.

Si la ecuación es autónoma, es decir, no depende del tiempo, el modelo representa un oscilador que dispara cada cierto tiempo característico. En efecto, si  $g(t) = S$  constante, fácilmente se puede realizar la integración de la ecuación diferencial dándonos, si  $\sigma \neq 0$ ,

$$\frac{S - \sigma}{\sigma} e^{\sigma a(t)} = e^{\sigma t} \left( 1 + \frac{S - \sigma}{\sigma} \right)$$

o bien

$$e^{\sigma a(t)} = \left( \frac{S}{S - \sigma} \right) e^{\sigma t}.$$

Si imponemos la condición  $S > \sigma$  obtenemos

$$a(t) = t + \ln \left( \frac{S}{S - \sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

lo que muestra que, efectivamente,  $a$  es el levantamiento de una rotación en un ángulo  $\rho/(2\pi)$ , donde  $\rho = \ln \left( \frac{S}{S - \sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$ . Para el caso  $\sigma = 0$ , directamente se obtiene  $a(t) = t + \rho$  con  $\rho = 1/S$ .

**Observación 3.** Aquí  $\rho$  es el número de rotación. Si se desea encontrar el valor de  $\sigma$  para un número de rotación  $\rho$  dado se puede hacer calculando la intersección de las curvas

$$\begin{aligned} y &= \frac{S}{S - \sigma} \\ y &= e^{\rho\sigma}, \end{aligned}$$

las cuales se intersectan en  $\sigma = 0$  y, si  $\rho \geq \frac{1}{S}$ , para algún otro valor de  $\sigma \in (0, S)$  (ver figura 3.1).

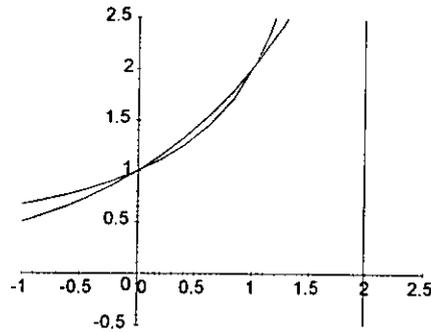


Figura 3.1: Gráficas de  $y = \frac{S}{S-\sigma}$  y  $e^{\rho\sigma}$  con  $S = 2$  y  $\rho = 0.7$

**Observación 4.** El caso  $\sigma = 0$  y  $g(t)$  1-periódica y positiva, también es interesante y se puede analizar directamente. Integrando la ecuación diferencial y usando la condición de disparo tenemos

$$1 = \int_t^{a(t)} g(s) ds = G(a(t)) - G(t)$$

con  $G$  una primitiva de  $g$ . Llamemos  $c = G(t+1) - G(t)$ , que es constante por ser  $g$  periódica. Como  $g(t) > 0$  para toda  $t$ , tenemos  $c \neq 0$ . Definamos ahora el siguiente cambio de variable

$$\tau = h(t) = \frac{G(t)}{c},$$

se tiene que  $h$  es un difeomorfismo ya que  $G'(t) = g(t) > 0$ . Con este cambio de variable tenemos

$$\begin{aligned} \tau &= h(t) \\ h(a(t)) &= G(a(t))/c \\ &= \frac{G(t)+1}{c} \\ &= \tau + 1/c, \end{aligned}$$

de donde vemos que  $a$  es el levantamiento de una función en la circunferencia topológicamente conjugada a una rotación por un ángulo  $1/(2\pi c)$ .

### 3.3. El Método de Análisis de Keener, Hoppensteadt y Rinzel

Mediante un cálculo directo los autores de éste método encuentran que la función de disparo  $a$ , del modelo (3.2), queda determinada por la ecuación implícita

$$F(a(t)) = F(t) + \frac{\sigma}{S}e^{\sigma t}, \quad (3.4)$$

donde

$$F(t) = e^{\sigma t} \left[ 1 - \frac{\sigma}{S} + \frac{H}{S} \sin\beta \sin(2\pi t + \beta) \right]$$

y  $\sin\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}}$ .

La metodología seguida por ellos se reduce a un ingenioso análisis de las gráficas de las funciones  $F(t)$  y  $G(t) = F(t) + \frac{\sigma}{S}e^{\sigma t}$ . La ecuación (3.4) nos da la regla para encontrar la función de disparo, como lo ilustramos en las figuras (3.2) y (3.3). La figura (3.2) reproduce esencialmente la figura 1 de ([20]).

Los máximos y mínimos locales de  $F(t) + \frac{\sigma}{S}e^{\sigma t}$  están sobre las gráficas de las funciones  $e^{\sigma t} [1 + \frac{H}{S} \sin\beta]$  y  $e^{\sigma t} [1 - \frac{H}{S} \sin\beta]$  respectivamente y los máximos y mínimos relativos de  $F(t)$ , sobre las de  $e^{\sigma t} [1 - \frac{\sigma}{S} + \frac{H}{S} \sin\beta]$  y  $e^{\sigma t} [1 - \frac{\sigma}{S} - \frac{H}{S} \sin\beta]$  respectivamente. En las figuras (3.2) y (3.3) se observa que, si los máximos relativos de  $F$  son crecientes ( $1 - \frac{\sigma}{S} + \frac{H}{S} \sin\beta > 0$ ), entonces el dominio de la función de disparo  $D_a = \mathbb{R}$ . Se puede probar ([11]) que  $D_a = \mathbb{R}$  si y sólo si  $1 - \frac{\sigma}{S} + \frac{H}{S} \sin\beta > 0$ .

Un examen cuidadoso de las figuras (3.2) y (3.3) revela que la función de disparo  $a$  es monótona creciente y continua si y sólo si las funciones  $F(t)$  y  $F(t) + \frac{\sigma}{S}e^{\sigma t}$  son monótonas crecientes, pierde continuidad si  $F(t)$  deja de ser monótona y, finalmente, pierde monotonía si  $F(t) + \frac{\sigma}{S}e^{\sigma t}$  no es más monótona.

Este método de análisis puede extenderse a modelos que permitan tener una ecuación como (3.4), y algún criterio para decidir cuando  $D_a = \mathbb{R}$ . Para el modelo general MAL se puede probar que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -\sigma x + g(t),$$

con  $g$  periódica:  $g(t+1) = g(t)$ , tiene una única solución periódica  $\varphi$  globalmente asintóticamente estable ([11]). La condición necesaria y suficiente para que  $D_a = \mathbb{R}$  es  $\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) > 1$ . Para el modelo KHR es posible encontrar explícitamente esta solución, la cual es

$$\varphi(t) = \frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} \sin(2\pi t + \beta) \quad (3.5)$$

de modo que

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}}.$$

La condición  $\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) > 1$  es equivalente a la condición  $1 - \frac{\sigma}{S} + \frac{H}{S} \sin \beta > 0$ , ya señalada con anterioridad y también fue encontrada en ([20]).

Sin embargo, en general no es posible obtener explícitamente el atractor periódico  $\varphi$ . No obstante, se puede probar ([11]) que su promedio  $\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(s) ds$  es  $\varphi_0 = \frac{g_0}{\sigma}$ , donde  $g_0 = \int_0^1 g(s) ds$  es el promedio de  $g(t)$ . Como evidentemente  $\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) \geq \varphi_0$ , una condición suficiente (pero no necesaria) para que  $D_a = \mathbb{R}$  es

$$g_0 > \sigma. \quad (3.6)$$

**Observación 5.** *Esta condición, aún cuando no es necesaria, tiene la ventaja de que puede ser verificada directamente a partir del modelo, sin resolver la ecuación diferencial.*

La solución general de (3.3) (con  $x(\tau) = 0$ ) es

$$x(t) = e^{-\sigma t} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} g(s) ds,$$

como la condición de disparo se cumple cuando  $x(t) = 1$ , tenemos

$$\int_t^{a(t)} e^{\sigma s} g(s) ds = e^{\sigma a(t)},$$

ecuación que podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\int_t^{a(t)} e^{\sigma s} (g(s) - \sigma) ds = e^{\sigma t}. \quad (3.7)$$

Es un sencillo ejercicio comprobar que la ecuación (3.7) se reduce a (3.4) para el caso KHR.

Con (3.6) y (3.7) podemos generalizar la metodología de Keener, Hoppensteadt y Rinzel al modelo más general MAL. En efecto, si  $F(t)$  es una primitiva de  $e^{\sigma t}(g(t) - \sigma)$ , (3.7) nos proporciona la misma regla para encontrar la función de disparo que en el caso KHR. Igual que en ese caso, la función de disparo  $a$  es monótona creciente y continua si y sólo si las funciones  $F(t)$  y  $F(t) + e^{\sigma t}$  son monótonas crecientes; pierde continuidad y monotonía si  $F(t)$  y  $F(t) + e^{\sigma t}$  dejan de

ser monótonas respectivamente. Aún cuando  $F(t)$  no siempre es posible calcularla explícitamente, el análisis se puede llevar a cabo pues  $F'(t) = e^{\sigma t}(g(t) - \sigma)$ . Bajo la condición (3.6) y la hipótesis de que  $g$  sea analítica, estas observaciones se resumen en los siguientes resultados ([11]):

1.  $a$  es continua si y sólo si  $g(t) \geq \sigma$  para toda  $t$ ,
2.  $a$  es monótona creciente (de hecho estrictamente monótona creciente) si y sólo si  $g(t) \geq 0$  para toda  $t$ .

**Observación 6.** *En el caso de  $g$  acotada (por ejemplo si  $g$  es continua y periódica), considerando  $g_{\min} = \inf_{t \in \mathbb{R}} g(t)$ , los criterios de los resultados 1. y 2. se pueden escribir  $g_{\min} \geq \sigma$  y  $g_{\min} \geq 0$  respectivamente. Obsérvese que  $g_{\min} \geq \sigma$  implica  $g_{\min} \geq 0$  y la igualdad se da si y sólo si  $g$  es constante. De modo que, si  $g$  no es constante, entonces  $g_{\min} \geq \sigma$  implica  $D_a = \mathbb{R}$  y  $a$  continua e inyectiva.*

Consideremos ahora modelos con parámetros

$$\dot{x} = -\sigma x + g(t, \lambda),$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $g$  analítica y acotada. Las condiciones  $g_0 = \sigma$ ,  $g_{\min} = \sigma$  y  $g_{\min} = 0$  determinan las fronteras de tres regiones, en el espacio de parámetros  $(\lambda, \sigma)$ , en donde

- I.  $D_a = \mathbb{R}$ ,
- II.  $a$  es continua y
- III.  $a$  es inyectiva.

De la observación anterior, se tiene que  $a$  continua implica  $a$  inyectiva, es decir, la región de continuidad esta contenida en la de inyectividad. Esto fue observado para el modelo KHR en el citado artículo y los resultados 1. y 2. muestran que es válido para el modelo más general MAL.

Propiedades como éstas sobre las regiones de regularidad son importantes para estudiar el problema de sincronización de osciladores periódicamente forzados. Desafortunadamente, para el caso no lineal, generalmente no podemos encontrar una ecuación equivalente a (3.4), por lo que este método de análisis no se puede generalizar a modelos no lineales. En los siguientes capítulos mostraremos resultados que permiten llevar a cabo de otra manera el análisis de las propiedades de regularidad (inyectividad y continuidad) de la función de disparo  $a$  de un modelo general no lineal de integración y disparo, lo cual nos proporcionará otra metodología de análisis.

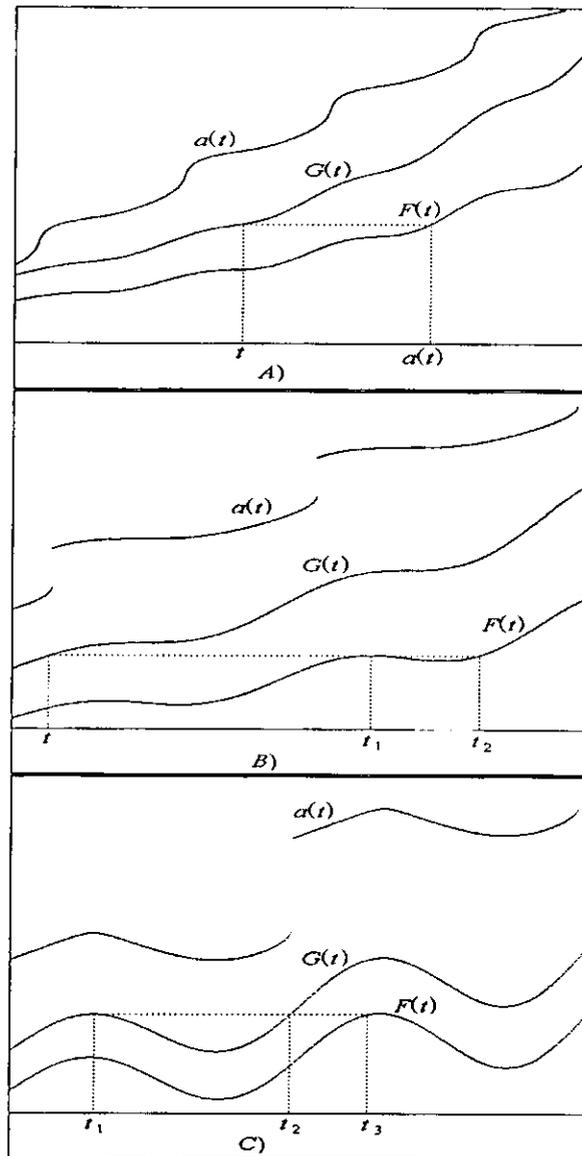


Figura 3.2: Funciones  $F$  y  $G$  del modelo KHR. A) Para  $\sigma = 0.375$ ,  $S = 1$  y  $H = 0.5$ , la función de disparos es un homeomorfismo. B) Con  $\sigma = 0.375$ ,  $S = 1$  y  $H = 1$ , la función  $a$  no es continua. C) Con  $\sigma = 0.25$ ,  $S = 1$  y  $H = 4$ , no es ni continua ni inyectiva.

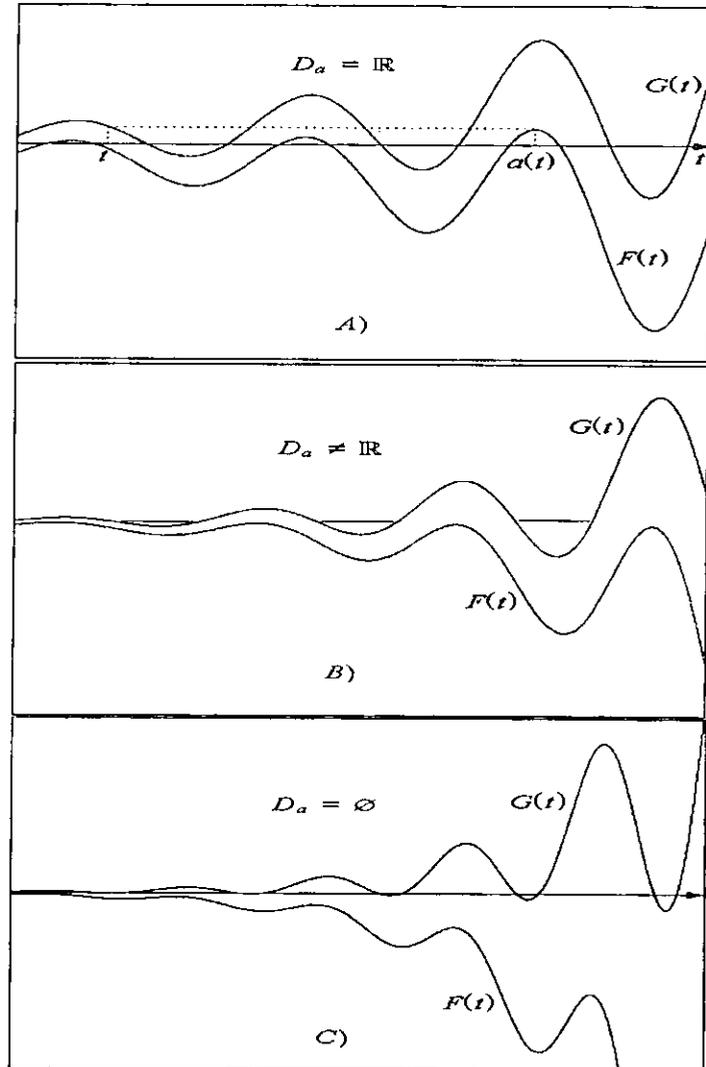


Figura 3.3: En esta figura los mínimos de  $F$  y  $G$  son decrecientes. A)  $\sigma = 0.75$ ,  $S = 0.3$  y  $H = 5$ , el dominio es toda la recta real. B)  $\sigma = 1.0853$ ,  $S = 0.3$  y  $H = 4.5$ , el dominio es un subconjunto propio de  $\mathbb{R}$ . C)  $\sigma = 1.0853$ ,  $S = 0.3$  y  $H = 5$ ,  $D_a = \emptyset$ .

## 4. MODELO GENERAL DE LOS OSCILADORES DIFERENCIALES DE INTEGRACIÓN Y DISPARO. REGULARIDAD DE LA FUNCIÓN DE DISPARO

En este capítulo describimos y analizamos matemáticamente la forma más general concebible de modelos diferenciales con una sola variable de acumulación. Esto nos permitirá comprender una variedad muy amplia de sistemas que no están restringidos necesariamente a procesos de acumulación lineal.

### 4.1. Modelo General de los Osciladores Diferenciales de Integración y Disparo

Supongamos que la variable de estado  $x$  de un oscilador de integración y disparo es gobernada por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (4.1)$$

hasta que alcanza un valor umbral (que normalizaremos a 1), momento en el cual produce un "disparo" y su valor es reinicializado a cero. La *condición de disparo* es descrita por:

$$\text{si } x(\tau) = 1 \implies x \text{ se relaja al valor } 0 \quad (4.2)$$

(ver el significado de esta definición en la sección 2.2 del capítulo 2).

Generalmente  $F$  es una función no lineal que da cuenta del forzamiento del oscilador. Nos referiremos a la ecuación diferencial (4.1) y a la condición de disparo (4.2) como el modelo diferencial del oscilador de integración y disparo. Supondremos a  $F : R \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $R \subset \mathbb{R}^2$  es una región que contiene la franja  $\{-\infty < t < +\infty, 0 \leq x \leq 1\}$  y satisfaciendo, cuando menos, condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial (4.1)

y continuidad de éstas con respecto a condiciones iniciales. Para  $(\tau, \eta)$  en el dominio de  $F$ , denotaremos por  $x(t; \tau, \eta)$  la solución de (4.1) que satisface  $x(\tau) = \eta$ .

En éste modelo de Integración y Disparo, el sistema *dispara a partir* de  $\tau \in \mathbb{R}$  si existe  $t' > \tau$  tal que  $x(t'; \tau, 0) = 1$ ; si el sistema dispara a partir de  $\tau$ , el *tiempo de disparo* a partir de  $\tau$  es

$$\min \{t > \tau : x(t; \tau, 0) = 1\}.$$

En otras palabras, dado  $\tau \in \mathbb{R}$ , existirá un tiempo de disparo posterior a él si, siguiendo la solución de la ecuación diferencial, a partir de  $(\tau, 0)$ , existe algún tiempo  $t' > \tau$  tal que se da la condición de disparo; es en tal caso cuando diremos que el sistema *dispara a partir* de  $\tau$ .

Denotaremos por  $D_a$  al conjunto de momentos a partir de los cuales el sistema dispara:

$$D_a = \{\tau \in \mathbb{R} : \exists t' > \tau \text{ tal que } x(t'; \tau, 0) = 1\}.$$

A partir de un tiempo inicial,  $\tau$ , construiremos una sucesión de tiempos, siguiendo el orden natural de aparición de los siguientes disparos. La *secuencia de tiempos de disparo* a partir de un tiempo inicial,  $\tau$ , se construye a partir de la siguiente definición recursiva:

$$\begin{aligned} t_0 &= \tau, \\ t_n &= \min \{t > t_{n-1} : x(t; t_{n-1}, 0) = 1\}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que esta "sucesión" podría ser finita o incluso constar solamente de  $\tau$  si el sistema no dispara a partir de  $\tau$ .

#### 4.1.1. La Función de Disparo

Definimos la *función de disparo* del modelo diferencial dado por (4.1) y (4.2) como

$$a(\tau) = \min \{t > \tau : x(t; \tau, 0) = 1\}.$$

Esta función genera la familia de secuencias de disparo del modelo; si para todo tiempo inicial  $\tau$ , el sistema dispara (i.e.  $D_a = \mathbb{R}$ ), la secuencia de disparos  $\{t_n\}$  está bien definida para todo  $n \in \mathbb{N}$  y las secuencias de disparo son las órbitas, en la recta real, del semi-sistema dinámico discreto en  $\mathbb{R}$  determinado por la función de disparo  $a$ . Puede ocurrir que para algunos tiempos iniciales  $\tau \in \mathbb{R}$ , el sistema no dispare ( $D_a$  es un subconjunto propio de  $\mathbb{R}$ ). La función de disparo puede definirse sin mayor problema en el dominio donde el sistema sí dispara, pero en este caso las sucesiones de disparo podrían no definir un semi-sistema dinámico.

### 4.1.2. Forzamiento Periódico

La forma general del modelo (4.1) incluye la posibilidad de estudiar sistemas que reciben una estimulación externa que aunque su forma e intensidad varíe en el tiempo, estas variaciones ocurren de una forma fija que está prescrita por alguna regla comprendida en la dependencia temporal de la función  $F(t, x)$ . Por la importancia que tiene en las aplicaciones científicas el caso particular de las estimulaciones periódicas, en la siguiente proposición suponderemos que la función  $F(t, x)$  es  $T$ -periódica con respecto a  $t$ :  $F(t + T, x) = F(t, x)$ .

**Proposición 1.** *Supongamos que  $F(t, x)$  es  $T$ -periódica en  $t$ . Entonces el dominio de la función de disparo  $a$ ,  $D_a$ , satisface:  $D_a = D_a + T$ . Además,*

$$a(t + T) = a(t) + T \quad , \forall t \in D_a.$$

*Demostración.* Primero observemos que si  $x(t)$  es solución de (4.1),  $x(t + kT)$  es también solución de (4.1) para todo entero  $k$ . Sea  $\tau \in D_a$ , y  $x_1(t) = x(t - T; \tau, 0)$ , entonces  $x_1(\tau + T) = 0$  y  $x_1(a(\tau) + T) = 1$ , por lo tanto, por definición,  $a(\tau + T) \leq a(\tau) + T$ . Supongamos que  $\tau + T < a(\tau + T) < a(\tau) + T$ , como  $x_1(t) = x(t; \tau + T, 0)$ , entonces  $x_1(a(\tau + T)) = 1$ ; sea  $x_2(t) = x_1(t + T)$ , luego

$$x_2(\tau) = x_1(\tau + T) = x(\tau; \tau, 0) = 0$$

lo que implica que  $x_2(t) = x(t; \tau, 0)$ , también se tiene

$$x_2(a(\tau + T) - T) = x_1(a(\tau + T)) = 1,$$

pero  $\tau < a(\tau + T) - T < a(\tau)$  contradiciendo la definición de  $a(\tau)$ , por lo tanto  $a(\tau + T) = a(\tau) + T$  y  $\tau + T \in D_a$ . ■

En el caso en que  $D_a = \mathbb{R}$ , la proposición anterior nos dice que la función de disparo,  $a$ , es un levantamiento de un endomorfismo de la circunferencia  $S^1$  de grado 1. Si  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  es la función de la cual  $a$  es levantamiento, entonces  $x_n = \alpha^n(x_0)$ . La función  $\alpha$  es llamada *función de fases de disparo*.

## 4.2. Dominio de la Función de Disparo

La función de disparo del modelo es, a final de cuentas, el objeto principal de interés en el estudio de las propiedades del oscilador modelado por (4.1) y (4.2), pues la dinámica por ella generada exhibe la información relevante del comportamiento

del oscilador. Sin embargo, como hemos señalado anteriormente, el dominio de  $a$  puede no ser toda la recta real. Las siguientes figuras, generadas por M. A. Mendoza usando el modelo KHR, muestran que el dominio puede ser vacío (figura (4.1 A)) o de otras diferentes formas: . Las figuras (4.1 B) y (4.2 A), muestran que también puede ser discreto (la función  $\varphi$  que aparece en la figura 4.2 es la función (3.5)). En la figura (4.1. B) se observa que cualquier condición inicial en  $D_a$  produce sucesiones de tiempos de disparos que tienen, cuando mucho, un sólo elemento. De hecho, las únicas condiciones iniciales para las que puede haber algún disparo están dadas por los puntos donde la función periódica asintóticamente estable  $\varphi(t)$  es tangente al eje horizontal. En la figura (4.2. B), el dominio de la función  $a$  resulta ser la unión de intervalos cerrados.

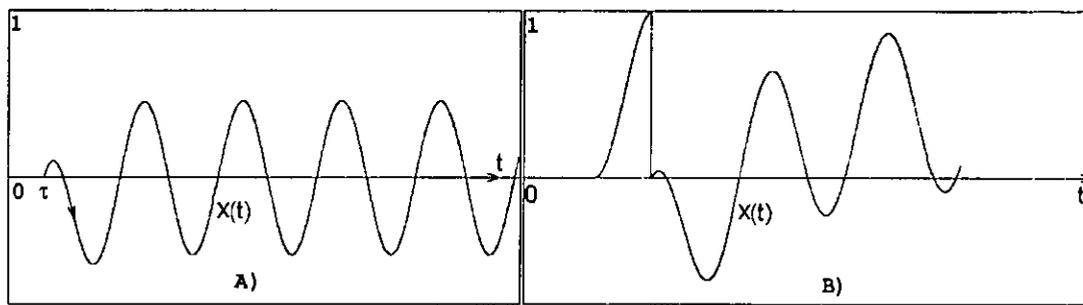


Figura 4.1:

Obviamente, otra posibilidad es que el  $D_a$  sea todo  $\mathbb{R}$  y el sistema dispare desde toda condición inicial; éste último caso es realmente el de interés en las aplicaciones. En esta sección establecemos resultados que permiten decidir cuando el sistema siempre dispara, lo cual es esencial para estudiar las secuencias de disparo como órbitas del semisistema dinámico generado por la función de disparo del modelo. Los resultados para el modelo de acumulación lineal se encuentran reportados en ([11]) y no son esenciales para los resultados principales de este trabajo, por lo que serán mencionados sin demostración.

El sistema siempre dispara si toda solución de la ecuación diferencial (4.1) que empieza en la recta  $x = 0$  alcanza en algún momento la recta  $x = 1$ . Los siguientes resultados, cuyas demostraciones son obvias, dan condiciones sencillas para que esto suceda.

**Proposición 2.** *Supóngase que la ecuación diferencial (4.1) tiene una solución acotada  $\varphi(t)$  que interseca la franja  $0 \leq x \leq 1$  y a lo más una con esta propiedad.*

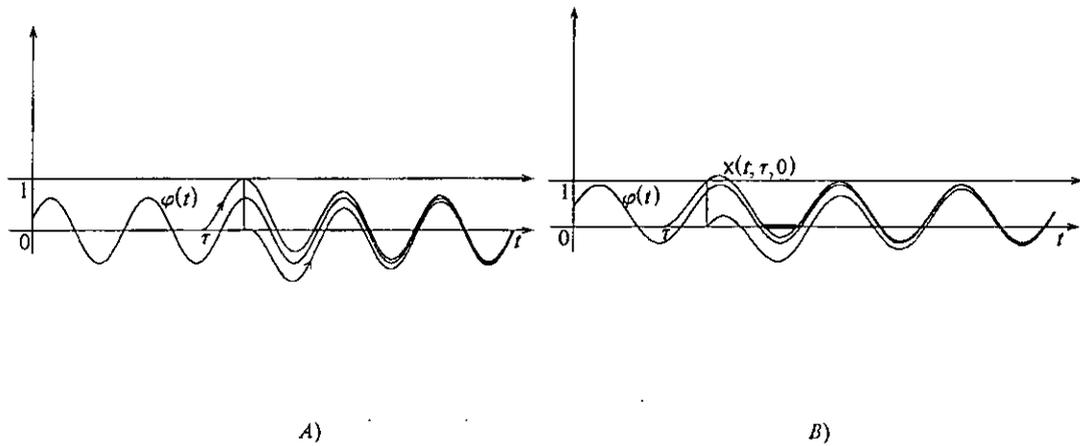


Figura 4.2:

1) Si  $\varphi$  es globalmente asintóticamente estable, entonces una condición necesaria y suficiente para que  $D_a = \mathbb{R}$  es que para toda  $T > 0$  exista  $t > T$  tal que  $\varphi(t) > 1$ .

2) Si  $\varphi$  es globalmente asintóticamente inestable, entonces una condición necesaria y suficiente para que  $D_a = \mathbb{R}$  es que  $\varphi(t) < 0$  para toda  $t$ .

En el caso del modelo de acumulación lineal con forzamiento periódico:  $F(t, x) = Ax + g(t)$ , con  $g(t+T) = g(t)$ , puede probarse que existe una única solución periódica,  $\varphi(t)$ , de la ecuación (4.1) y ésta, globalmente, tiene el mismo tipo de estabilidad que el equilibrio de la ecuación

$$\dot{y} = Ay + g_0$$

donde  $g_0 = \int_0^T g(t) dt$ . Los siguientes resultados se refieren al modelo de acumulación lineal (MAL) con forzamiento periódico ( $A = -\sigma$ ).

**Teorema 3.**  $\varphi(t) > 1$  para algún  $t \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $D_a = \mathbb{R}$ .

Como obviamente se tiene que

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) \geq \varphi_0 = \frac{g_0}{\sigma},$$

por lo tanto tenemos que

**Corolario 4.**  $g_0 > \sigma$  es una condición suficiente (pero no necesaria) para que  $D_a = \mathbb{R}$ .

Esta condición es muy útil, ya que puede ser verificada sin resolver la ecuación diferencial.

**Corolario 5.**  $D_a \neq \mathbb{R}$  si y sólo si  $\max \varphi(t) \leq 1$ .

Es posible también demostrar el siguiente resultado ([11]), interesante por sus implicaciones en la interpretación del modelo.

**Teorema 6.**  $D_a$  es un subconjunto propio de  $\mathbb{R}$  si y sólo si todas las sucesiones de disparo son finitas (el sistema produce solamente un número finito de disparos) o vacías ( $D_a$  es vacío y el sistema no dispara).

El análisis de las simulaciones computacionales de estos modelos nos llevan a formular la siguiente conjetura:

*$D_a$  es un conjunto cerrado.*

### 4.3. Teoremas de regularidad

En esta sección estudiaremos las condiciones que determinan continuidad e inyectividad de la función de disparo. Es natural esperar que la continuidad sea una consecuencia de la continuidad de las soluciones de la ecuación diferencial respecto a condiciones iniciales, sin embargo, la continuidad, así como la inyectividad sorprendentemente dependen también de propiedades geométricas de la gráfica de las soluciones de la ecuación diferencial. Hemos llamado a los resultados que caracterizan esas propiedades **Teoremas de Regularidad**. Las demostraciones de los teoremas de continuidad e inyectividad que aquí presentamos están basadas fundamentalmente en la hipótesis de analiticidad de la ecuación diferencial. Naturalmente esta observación plantea la cuestión de si éstos teoremas permanecen válidos bajo condiciones más débiles.

Varios resultados generales sobre funciones analíticas y las soluciones de la ecuación diferencial (4.1) serán demostrados en el apéndice a este capítulo. Una condición que supondremos en lo sucesivo es que  $\text{int}(D_a) \neq \emptyset$ . Damos primero una definición y algunos resultados preliminares.

**Definición 7.** Decimos que la solución  $x(t)$  de (4.1) cruza ascendentemente la recta  $x = k$  en el punto  $(t_0, k)$  si:

- i)  $x(t_0) = k$ ,
- ii)  $F(t_0, k) \geq 0$  y
- iii) para alguna  $r > 0$ ,  $0 < |t - t_0| < r$  implica que  $F(t, k) > 0$ .

Decimos también que  $x(t)$  *cruza ascendentemente en el punto*  $(t_0, k)$ .

**Proposición 8.** *Si la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  de la ecuación (4.1) cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t, 1)$ , para alguna  $t \geq a(\tau_0)$  (aunque no necesariamente en  $(a(\tau_0), 1)$ ) entonces  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ . El recíproco de esta afirmación es falso, sin embargo, si  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ , y, alrededor del punto  $(\tau_0, 0)$  la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cae dentro de alguno de los casos ii) a iv) del corolario 19 del apéndice, entonces la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t, 1)$ , para alguna  $t \geq a(\tau_0)$ . Si la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  alcanza un valor máximo en  $\tau_0$  (caso (v) del corolario 19), entonces  $\tau_0$  siempre es un punto interior de  $D_a$ .*

*Demostración.* Supongamos que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t_0, 1)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $F(t, 1) > 0$  para  $0 < |t - t_0| < \varepsilon$  y consideremos el homeomorfismo

$$h : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R},$$

definido por  $h(\tau) = x(t_0; \tau, 1)$  (ver el lema 23 del apéndice). Como  $h^{-1}$  es continua y  $h(t_0) = 1$ , existe  $\varepsilon'$  tal que el intervalo  $(1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon') \subset h(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ . Por continuidad de las soluciones con respecto a condiciones iniciales, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|\tau - \tau_0| < \delta$ , entonces  $|x(t_0; \tau, 0) - x(t_0; \tau_0, 0)| = |x(t_0; \tau, 0) - 1| < \varepsilon'$ . Por lo tanto,  $x(t_0; \tau, 0) \in h(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ . Obsérvese que  $x(\cdot; \tau, 0) = x(\cdot; t_0, x(t_0; \tau, 0))$ , por otro lado el lema 23 implica que

$$x(\cdot; t_0, x(t_0; \tau, 0)) = x(\cdot; h^{-1}(x(t_0; \tau, 0)), 1),$$

por tanto

$$x(\cdot; \tau, 0) = x(\cdot; h^{-1}(x(t_0; \tau, 0)), 1)$$

y así

$$x(h^{-1}(x(t_0; \tau, 0)); \tau, 0) = 1,$$

para toda  $\tau$  tal que  $|\tau - \tau_0| < \delta$ . Esto prueba que  $\tau \in D_a$ , así  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ .

Consideremos el caso v) del corolario 19, por unicidad,  $x(t; \tau, 0) \geq x(t; \cdot, 0)$  para  $\tau$  en una vecindad de  $\tau_0$ , entonces  $\tau \in D_a$  y  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ .

Por lo tanto es posible para una solución tener puntos interiores  $\tau_0$  (del tipo v)) para los cuales la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  no cruza ascendentemente la recta  $x = 1$ .

Falta demostrar que para todos los puntos interiores de los tipos ii)-iv) del corolario 19, la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en alguna  $t \geq a(\tau_0)$ .

Mostraremos primero que si  $\tau_0 \in D_a$ , y  $x(t; \tau_0, 0) > 1$  para alguna  $t > \tau_0$  entonces la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en algún punto  $(\tau, 1)$  con  $\tau > \tau_0$ . De la proposición 18 del apéndice se sigue que, si existe  $t > \tau_0$  tal que  $x(t; \tau_0, 0) > 1$ , existen  $t_1 < t_2$ , con  $\tau_0 < t_2$ , tales que

$$x(t_1; \tau_0, 0) < 1 < x(t_2; \tau_0, 0),$$

y la ecuación  $x(t; \tau_0, 0) = 1$  tiene exactamente una solución  $t^*$  en el intervalo  $[t_1, t_2]$ . entonces, en el intervalo  $[t_1, t_*)$  la solución debe alcanzar un máximo en  $t^*$ . Similarmente, en el intervalo  $[t^*, t_2]$ , debe de tenerse un mínimo en  $t^*$ . Del lema 21 del apéndice,  $F(t, 1) > 0$  en una vecindad agujerada de  $t^*$  y entonces  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t^*, 1)$ .

Supongamos que  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ , y, alrededor del punto  $(\tau_0, 0)$ , la gráfica de  $x(t; \tau_0, 0)$  esté en el caso ii) del corolario 19 (los casos iii) y iv) pueden ser demostrados analogamente). Si la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  no cruza ascendentemente la recta  $x = 1$ , en ningún  $(t, 1)$ , con  $t > a(\tau_0)$ , entonces

$$\sup_{t \geq \tau_0} x(t; \tau_0, 0) \leq 1.$$

Esto es debido al hecho de que, si  $\tau_0 \in D_a$ , y  $x(t; \tau_0, 0) > 1$  for some  $t > \tau_0$ , entonces la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  debe cruzar ascendentemente la recta  $x = 1$  en algún punto  $(\tau, 1)$  con  $\tau > \tau_0$ : de la proposición 18 se sigue que, si existe  $t > \tau_0$  tal que  $x(t; \tau_0, 0) > 1$ , existen  $t_1 < t_2$ , con  $\tau_0 < t_2$ , tales que

$$x(t_1; \tau_0, 0) < 1 < x(t_2; \tau_0, 0),$$

y la ecuación  $x(t; \tau_0, 0) = 1$  tiene exactamente una solución  $t^*$  en el intervalo  $[t_1, t_2]$ . Entonces, en el intervalo  $[t_1, t_*)$  la solución debe alcanzar un máximo en  $t^*$ . De modo similar, en el intervalo  $[t^*, t_2]$ , un mínimo debe tenerse en  $t^*$ . Del lema 21,  $F(t, 1) > 0$  en una vecindad agujerada de  $t^*$  y entonces  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t^*, 1)$ .

Como estamos suponiendo el caso ii) del corolario 19, alrededor  $(\tau_0, 0)$ , la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  es estrictamente creciente. Entonces, en un intervalo de la

forma  $[\tau_0, \tau_0 + r]$ ,  $x(t; \tau_0, 0)$  alcanza un mínimo en  $\tau_0$ . Por unicidad, para  $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + r]$ , tenemos que  $x(t; \tau, 0) < x(t; \tau_0, 0) \leq 1$ , para toda  $t \geq \tau_0$ . Así  $\tau \notin D_a$  y por lo tanto  $\tau_0$  es un punto frontera de  $D_a$ . ■

**Corolario 9.** *Para cualquier  $t$ , o bien todos los puntos de  $a^{-1}(t)$  son puntos interiores, o ninguno de ellos lo son, excepto aquellos  $\tau_0 \in a^{-1}(t)$  alrededor de los cuales la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  alcanza un máximo local.*

### 4.3.1. Teorema de Inyectividad

**Teorema 10. (Teorema de Inyectividad).** *La función de disparo  $a$  es inyectiva en  $\text{int}(D_a)$  si y solo si  $F(t, 0) \geq 0$ , para toda  $t \in \text{int}(D_a)$ .*

*Demostración.* Debemos demostrar aquí que la función de disparo  $a$  es inyectiva en el  $\text{int}(D_a)$  si y sólo si  $F(t, 0) \geq 0$ , para toda  $t \in \text{int}(D_a)$ . Si la función de disparo  $a$  es inyectiva y existe  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$  tal que  $F(\tau_0, 0) < 0$ , por el lema 20,  $x(\tau'; \tau_0, 0) < 0$ , para alguna  $\tau'$  satisfaciendo  $\tau_0 < \tau' < a(\tau_0)$ . Ahora, por el Teorema del Valor Intermedio, existe  $\tau_1$  tal que  $x(\tau_1; \tau_0, 0) = 0$  y  $\tau_0 < \tau_1 < a(\tau_0)$ . Por tanto  $\tau_1 \in D_a$ ,  $\tau_1 \neq \tau_0$ ,  $a(\tau_1) = a(\tau_0)$ . Sólomente resta mostrar que  $\tau_1 \in \text{int}(D_a)$ , con objeto de contradecir que la función de disparo  $a$  es inyectiva en el interior de  $D_a$ . Como  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$  y  $F(\tau_0, 0) < 0$ , de la proposición 8, tenemos que la solución  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t, 1)$ , para alguna  $t \geq a(\tau_0)$ , podemos decir lo mismo de la solución  $x(\cdot; \tau_1, 0)$  (ya que las soluciones  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  y  $x(\cdot; \tau_1, 0)$  coinciden en  $t = a(\tau_1) = a(\tau_0)$ ); así, aplicando nuevamente la proposición 8, tenemos que  $\tau_1 \in \text{int}(D_a)$ .

Ahora, para probar el recíproco del teorema (también por contradicción) suponemos que  $F(\tau, 0) \geq 0$  para toda  $\tau \in \text{int}(D_a)$  y que la función de disparo no es inyectiva en el interior de  $D_a$ . Sea  $t_0 \in a(\text{int}(D_a))$ . Si la solución  $x(t; t_0, 1)$  alcanza un valor máximo en algún  $\tau_0 \in a^{-1}(t_0)$  entonces, por la proposición 8,  $\tau_0$  es un punto interior de  $D_a$ . Ahora, por el lema 21 del apéndice, tenemos que, arbitrariamente cerca de  $\tau_0$  (y por tanto en  $\text{int}(D_a)$ ), existen tiempos  $\tau$  tal que  $F(\tau, 0) < 0$ , contradiciendo nuestra hipótesis.

Consideremos que para todos los puntos  $\tau$  en  $a^{-1}(t_0)$  la solución  $x(t; \tau, 0)$  no alcanza un valor máximo en  $\tau$ . Como  $a$  no es inyectiva, existe  $t_0 \in a(\text{int}(D_a))$  tal que el conjunto  $a^{-1}(t_0)$  tiene al menos dos puntos. Por el otro lado, para toda  $t_0 \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $a^{-1}(t_0)$  está acotado superiormente por  $t_0$  y entonces debe tener un supremo. Este supremo pertenece al conjunto  $a^{-1}(t_0)$ , de otro modo éste conjunto tendría un punto de acumulación,  $\tau^*$ . Como un punto  $\tau$  está en  $a^{-1}(t_0)$

si y sólo si  $\tau < t_0$  y  $(\tau, 0)$  es un punto de la gráfica  $\Gamma$  de la solución  $x(\cdot; t_0, 1)$ , existe una sucesión  $\{(\tau_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\Gamma$  que converge a  $(\tau^*, 0)$ . Reordenando, eliminando y agregando puntos, si es necesario, a la sucesión  $\{(\tau_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ , podemos suponer que la sucesión  $\tau_n$  es tal que  $\tau_n < \tau_{n+1}$  y, si  $F(\tau_n, 0) > 0$  entonces  $F(\tau_{n+1}, 0) \leq 0$  o, si  $F(\tau_n, 0) \leq 0$ , entonces  $F(\tau_{n+1}, 0) > 0$ , para toda  $n = 1, 2, \dots$ . Por lo tanto, el Teorema del Valor Intermedio implica que, para toda  $n = 1, 2, \dots$ , existe  $\tau_n < \tau'_n < \tau_{n+1}$  tal que

$$F(\tau'_n, 0) = 0.$$

Como la sucesión  $\tau'_n$  también converge a  $\tau^*$  y la función  $F(\cdot, 0)$  es analítica en  $\mathbb{R}$ , el lema 17 del apéndice implica  $F(\tau, 0) = 0$  para toda  $\tau$  en  $\mathbb{R}$ , contradiciendo que  $a^{-1}(t_0) \neq \emptyset$ .

Sea

$$\tau_2 = \max \{ \tau \in a^{-1}(t_0) \}.$$

Usando un argumento semejante podemos demostrar también que existe

$$\tau_1 = \max \{ \tau \in a^{-1}(t_0) : \tau < \tau_2 \}.$$

Como estamos considerando el caso para el cual la solución  $x(t; \tau, 0)$  no alcanza un valor máximo en  $\tau$ , para todos los puntos  $\tau$  en  $a^{-1}(t_0)$ , por el corolario 9,  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son puntos interiores. También tenemos que  $F(\tau_2, 0)$  debe ser mayor o igual a cero, de otro modo el Teorema del Valor Intermedio implicaría la existencia de un elemento en  $a^{-1}(t_0)$  mayor que  $\tau_2$ . Usando un argumento semejante, concluimos que  $x(t) = x(t; \tau_1, 0) = x(t; \tau_2, 0) > 0$  en el intervalo  $(\tau_2, t_0)$  y tenemos las siguientes alternativas para la solución  $x(t)$ :

- i)  $\tau_1$  o  $\tau_2$  son puntos extremos (mínimos locales) de la solución  $x(t)$ ,
- ii) ni  $\tau_1$  ni  $\tau_2$  son puntos extremos.

En el primer caso, el lema 21 implica que existe  $\tau \in \text{int}(D_a)$  tal que  $F(\tau, 0) < 0$ , lo cual es contradictorio. En el segundo caso, en un intervalo de la forma  $(\tau_1 - r, \tau_1]$  tenemos la dicotomía mostrada en la proposición 18 del apéndice: la solución  $x(t)$  alcanza en  $\tau_1$  o bien un máximo o bien un mínimo, restringido al intervalo  $(\tau_1 - r, \tau_1]$ . Si la solución alcanza un máximo en  $\tau_1$ , restringido al intervalo  $(\tau_1 - r, \tau_1]$ , como  $\tau_1$  no es un punto extremo, entonces  $x(t) > 0$  en el intervalo  $(\tau_1, \tau_2)$  y esto implicaría que  $x(t)$  alcanza un mínimo local en  $\tau_2$ , lo cual contradice la suposición ii). Entonces  $x(t)$  debe alcanzar un mínimo en  $\tau_1$ ,

restringido al intervalo  $(\tau_1 - r, \tau_1]$  y el lema 21 implica el hecho contradictorio de que  $F(\tau, 0) < 0$  para  $\tau$  arbitrariamente cercana a  $\tau_1$  (y por tanto en  $\text{int}(D_a)$ ).

Así,  $F(\tau, 0) \geq 0$  implica que la función de disparo es inyectiva. ■

**Observación 7.** Cuando  $D_a$  contiene puntos aislados, la condición  $F(\tau, 0) \geq 0$ , para toda  $\tau \in D_a$  no implica necesariamente que la función de disparo,  $a$ , es inyectiva.

### 4.3.2. Teorema de Continuidad

Algunos hechos que serán usados en la demostración son interesantes por sí mismos y serán establecidos primero en forma de proposiciones y lemas.

**Proposición 11.** Sea  $\tau_0 \in D_a$ .

i) Si existe  $r > 0$  tal que para  $\tau_0 - r < \tau \leq \tau_0$ ,  $F(\tau, 0) \geq 0$ , entonces  $a$  es continua por la izquierda en  $\tau_0$ .

ii) Si existe  $r > 0$  tal que para  $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + r$ ,  $F(\tau, 0) \leq 0$ , entonces  $a$  es continua por la derecha en  $\tau_0$ .

*Demostración.* Discutiremos únicamente el primer caso, siendo el otro completamente análogo. Supongamos que  $r > 0$  es tal que el intervalo  $[\tau_0 - r, \tau_0]$  está contenido en el intervalo de definición de la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  y tal que  $x(t; \tau_0, 0) < 0$  para  $t \in [\tau_0 - r, \tau_0]$  (cf. lema 20 del apéndice). Entonces, por unicidad, para cualquier  $\tau \in [\tau_0 - r, \tau_0]$  dada, tenemos que  $x(t; \tau, 0) \geq x(t; \tau_0, 0)$  para toda  $t \in [\tau, a(\tau_0)]$ , entonces  $\tau \in D_a$  y  $a(\tau) \leq a(\tau_0)$ , para  $\tau \in [\tau_0 - r, \tau_0]$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  y sea

$$\varepsilon' = \inf_{t \in [\tau_0 - r, a(\tau_0) - \varepsilon]} \{1 - x(t; \tau_0, 0)\}.$$

Aplicando el lema 24 del apéndice del apéndice, con  $J = [\tau_0 - r, \tau_0]$  e  $I = [\tau_0 - r, a(\tau_0) - \varepsilon]$ , existe  $\delta' > 0$  tal que si  $|\tau - \tau_0| < \delta'$  entonces

$$|x(t; \tau, 0) - x(t; \tau_0, 0)| < \varepsilon',$$

para toda  $t \in [\tau_0 - r, a(\tau_0) - \varepsilon]$ . Esto implica que  $x(t; \tau, 0) < 1$  para toda  $t \in I$  y por lo tanto el sistema no dispara durante el lapso  $I$ . Sea ahora  $\delta = \min\{\delta', r\}$ , entonces, si  $\tau_0 - \delta < \tau \leq \tau_0$ ,

$$a(\tau_0) - \varepsilon < a(\tau) \leq a(\tau_0).$$

y la proposición está completamente demostrada ■

**Proposición 12.** *Supongamos que  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$ , y que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en algún punto  $(t, 1)$ , con  $t \geq a(\tau_0)$ , entonces*

i) *Si existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, 0) \geq 0$ , para  $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + r$ ,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0^+} a(\tau) = t^*.$$

ii) *Si existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, 0) \leq 0$ , para  $\tau_0 - r \leq \tau < \tau_0$ ,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0^-} a(\tau) = t^*.$$

Donde  $t^*$  es el mínimo tiempo  $t \geq a(\tau_0)$  tal que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t, 1)$ .

**Observación 8.** *El valor mínimo  $t^*$  existe como consecuencia del lema 17 del apéndice (cf demostración del teorema de inyectividad).*

Demostración. Caso (i):

Si  $t^*$  es el mínimo tiempo  $t \geq a(\tau_0)$  tal que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$  en  $(t, 1)$ , existe  $s > 0$  tal que  $F(t, 1) > 0$  si  $0 < |t - t^*| < s$ . Por el lema 23 la función

$$h : (t^* - s, t^* + s) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(t) = x(t^*; t, 1).$$

es un homeomorfismo y  $h(t^*) = 1$ . Tenemos también que  $x(t; \tau_0, 0) \leq 1$  para toda  $t \in [\tau_0, t^*]$ , de otro modo, si existe  $\tau_0 < t \leq t^*$  tal que  $x(t; \tau_0, 0) > 1$ , el corolario 22 implica que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$ , en algún punto  $(t', 1)$  con  $\tau_0 < t' < t^*$ , lo cual es imposible pues  $t^*$  es mínimo con esa propiedad.

Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $\lambda = \min\{\varepsilon, s\}$  y  $\varepsilon'$  tal que  $(1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon') \subset h(t^* - \lambda, t^* + \lambda)$  (véase figura (4.3)). Por continuidad de soluciones con respecto a condiciones iniciales, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|\tau - \tau_0| < \delta$ , entonces

$$|x(t^*; \tau, 0) - x(t^*; \tau_0, 0)| < \varepsilon'.$$

Supongamos también que  $\delta$  es tal que  $x(t; \tau_0, 0) > 0$  si  $\tau_0 \leq t < \tau_0 + \delta$ . Entonces, para  $\tau \in D_a$ , con  $\tau_0 < \tau < \tau_0 + \delta$ , por unicidad, tenemos  $x(t; \tau, 0) < x(t; \tau_0, 0) \leq 1$  para toda  $t \in [\tau, t^*]$ , por lo tanto necesariamente  $a(\tau) > t^*$ .

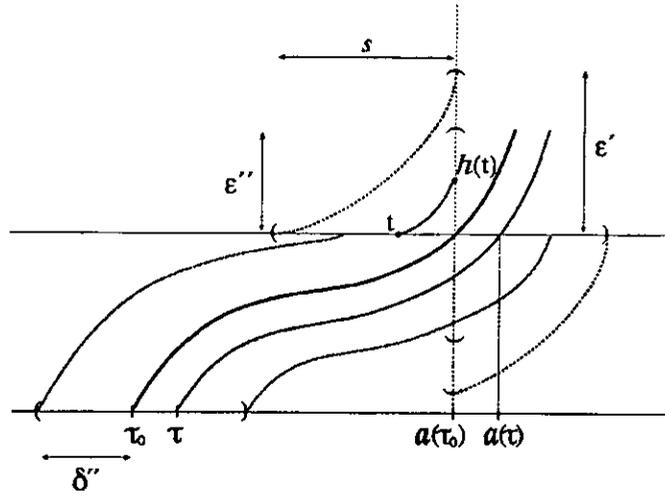


Figura 4.3:

Como  $x(t^*; \tau, 0) = x(t^*; h^{-1}(x(t^*; \tau, 0)), 0)$  por unicidad de las soluciones tenemos

$$a(\tau) = h^{-1}(x(t^*; \tau, 0))$$

y por tanto  $|a(\tau) - t^*| < \varepsilon$  si  $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + \delta$ . Esto demuestra (i); la demostración de (ii) es análoga. ■

**Lema 13.** *Supongamos que  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$  y que la solución  $x(t; \tau_0, 0)$  es tal que existe  $\alpha > 0$  tal que  $F(t, 1) < 0$  para  $t \in (a(\tau_0), a(\tau_0) + \alpha)$ . Entonces*

i) *Si existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, 0) \geq 0$ , para  $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + r$ , entonces*

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0^+} a(\tau) \neq a(\tau_0).$$

ii) *Si existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, 0) \leq 0$ , para  $\tau_0 - r \leq \tau < \tau_0$ , entonces*

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0^-} a(\tau) \neq a(\tau_0).$$

*Demostración.* En una vecindad a la derecha de  $a(\tau_0)$  tenemos tres posibilidades para la solución  $x(t, \tau_0, 0)$ , o bien es constante, o alcanza un máximo o un mínimo en  $a(\tau_0)$ . Por el lema 21 tenemos que debe de ser un máximo. Por

lo tanto existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x(t; \tau_0, 0) < 1$ , para toda  $t \in (a(\tau_0), a(\tau_0) + \varepsilon)$ . Supongamos ahora las hipótesis de (i), la demostración de (ii) es semejante. La unicidad de soluciones implica que, para  $\tau$  suficientemente cercana a y mayor que  $\tau_0$ ,  $x(t; \tau, 0) < x(t; \tau_0, 0) \leq 1$ , para toda  $t \in (\tau, a(\tau_0) + \varepsilon)$ . Entonces, para esos tiempos  $\tau$  a la derecha de  $\tau_0$ , el tiempo de disparo  $a(\tau)$  no puede estar en la vecindad  $(a(\tau_0), a(\tau_0) + \varepsilon)$  de  $a(\tau_0)$ . Esto es,

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0^+} a(\tau) \neq a(\tau_0). \blacksquare$$

**Teorema 14. (Teorema de Continuidad).** *La función de disparo  $a$  es continua en  $\text{int}(D_a)$  si y solo si  $F(t, 1) \geq 0$ , para toda  $t$  tal que  $x(t; \tau, 0) = 1$  para alguna  $\tau \in \text{int}(D_a)$ .*

*Demostración.* Sea  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$  tal que  $F(t, 1) \geq 0$ , para toda  $t$  en una vecindad de  $a(\tau_0)$ . Bajo esta condición aseguramos que, para cualquier  $t$  en tal vecindad, el cruce de la solución  $x(\cdot; t, 1)$  con la recta  $x = 1$ , es ascendente: si  $F(t, 1) > 0$ , la afirmación se sigue por continuidad. Si  $F(t, 1) = 0$ , como  $F$  es analítica, existe una vecindad  $N$  de  $t$  tal que  $F(s, 1) \neq 0$  para toda  $s \in N$ ,  $s \neq t$ . Entonces, en una vecindad suficientemente pequeña de  $t$ ,  $F(s, 1) > 0$ , así la solución con condición inicial  $(t, 1)$  cruza ascendentemente en  $(t, 1)$ . En particular, la solución  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$ , en  $(a(\tau_0), 1)$ .

Como la solución  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  es analítica y no es constante, por el corolario 19 del apéndice tenemos la siguiente alternativa en una vecindad de  $\tau_0$ : (i) alcanza un máximo local; (ii) alcanza un mínimo local; (iii) es estrictamente creciente; (iv) es estrictamente decreciente. En el caso (i) el lema 21 y la proposición 11 nos da que  $a$  es, a la vez, continua por la derecha y por la izquierda en  $\tau_0$ . En el caso (ii) el lema 21 y la proposición 12 nos da que los límites laterales por la izquierda y por la derecha de  $a$ , en  $\tau_0$ , coinciden y son  $a(\tau_0)$ .

En el caso (iii) el lema 21 y la proposición 11 nos dan que  $a$  es continua por la izquierda en  $\tau_0$ . Por el otro lado, el lema 21 y la proposición 12 garantizan que el límite por la derecha de  $a$ , en  $\tau_0$ , es el primer cruce ascendente (para  $t \geq a(\tau_0)$ ) de la solución  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  con la recta  $x = 1$ , pero, como hemos probado que la solución  $x(\cdot; a(\tau_0), 0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = 1$ , en  $(a(\tau_0), 1)$ , tenemos que  $a(t) \rightarrow a(\tau_0)$  por la derecha. El caso (iv) es análogo. Por lo tanto  $a$  es continua en  $\tau_0$ .

Para probar el recíproco tomemos  $\tau_0 \in \text{int}(D_a)$  y supongamos que  $a$  es continua en  $\tau_0$ . Del lema 21 tenemos solamente dos opciones para el comportamiento

local de la solución  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  a la derecha de  $a(\tau_0)$ : o bien alcanza un máximo, o bien alcanza un mínimo en  $a(\tau_0)$ . Si  $x(\cdot; \tau_0, 0)$  alcanza un máximo en  $a(\tau_0)$ , ese mismo lema nos da que, para una  $r$  suficientemente pequeña,  $F(\cdot, 1) < 0$  en una vecindad de la forma  $(a(\tau_0), a(\tau_0) + r)$ . Entonces, por el lema 13 se contradice la continuidad de  $a$  en  $\tau_0$ . Si alcanza un mínimo, el mismo lema implica que  $F(\cdot, 1) > 0$  en una vecindad de la forma  $(a(\tau_0), a(\tau_0) + r)$ , con  $r$  suficientemente pequeño, lo cual prueba el teorema. ■

## 4.4. Diferenciabilidad

En esta sección estudiaremos condiciones para asegurar la diferenciabilidad de la función de disparo. Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $I \times \{0\}$  está contenido en el dominio de  $F$  y sea  $\Phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\Phi(t, \tau) = x(t; \tau, 0)$ . Por definición

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = F(t, \Phi(t, \tau)).$$

Si  $\Phi$  es continuamente diferenciable en  $\tau$ , escribiremos

$$\Phi_2(t, \tau) = \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Supongamos que  $D_a = \mathbb{R}$ ; las suposiciones habituales sobre la función  $F$  implican que  $\Phi$  es continuamente diferenciable en ambas variables (vease ([22])). Por definición de la función de disparo

$$\Phi(a(\tau), \tau) = 1, \tag{4.3}$$

es decir, la función de disparo vive en la curva de nivel 1 de la función  $\Phi$ . Si  $a$  es una función diferenciable, derivando (4.3) con respecto a  $\tau$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \Phi(a(\tau), \tau) = \frac{\partial \Phi(a(\tau), \tau)}{\partial t} a'(\tau) + \frac{\partial \Phi(a(\tau), \tau)}{\partial \tau} \\ &= F(a(\tau), \Phi(a(\tau), \tau)) a'(\tau) + \Phi_2(a(\tau), \tau) \\ &= F(a(\tau), 1) a'(\tau) + \Phi_2(a(\tau), \tau). \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente

**Lema 15.** *Supongamos que  $F$  es de clase  $C^2$ . Si existe  $\tau_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $F(a(\tau_1), 1) \neq 0$ , entonces  $a$  satisface la ecuación diferencial*

$$y' = -\frac{\Phi_2(y, \tau)}{F(y, 1)}$$

en algún intervalo  $M$  que contiene a  $\tau_1$ :  $\tau_1 \in M \subseteq \mathbb{R}$ .

En virtud de la condición  $F(a(\tau_1), 1) \neq 0$ , la diferenciabilidad de la función  $a$  queda garantizada por el teorema de la función implícita. Como consecuencia de este lema se sigue el siguiente teorema

**Teorema 16.** *Supongamos que  $F$  es de clase  $C^2$ . Si para toda  $t$  en la imagen de  $a$ ,  $F(t, 1) > 0$ , entonces  $a$  es diferenciable*

## 4.5. Aplicación al Modelo KHR

Con el fin de ilustrar el uso de los teoremas de regularidad, en esta sección los aplicaremos al análisis de las regiones de regularidad del modelo KHR. Para éste modelo  $F(t, x, \lambda) = -\sigma x + S + H \cos(2\pi t)$ , con  $\lambda = (\sigma, S, H)$  un vector de parámetros (véase el capítulo 3). Para éste modelo,  $F(t, 0) \geq 0$ , para toda  $t$ , si y sólo si  $S - H \geq 0$  y  $F(t, 1) \geq 0$ , para toda  $t$ , si y sólo si  $\sigma + S - H \geq 0$ . Por otro lado, la solución periódica asintóticamente estable del modelo KHR es

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{S}{\sigma} + \frac{H\sigma}{\sigma^2 + 4\pi^2} \cos 2\pi t + \frac{2\pi H}{\sigma^2 + 4\pi^2} \sin 2\pi t \\ &= \frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} \sin(2\pi t + \beta)\end{aligned}$$

donde  $\sin \beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}}$ .

De acuerdo con el teorema 3, tenemos la siguiente dicotomía:

Si

$$\text{Máx } \varphi > 1, \quad (4.4)$$

el sistema dispara una vez que ha sido establecida cualquier condición inicial ( $D_a = \mathbb{R}$ ), mientras que si

$$\text{Máx } [\varphi(t)] \leq 1, \quad (4.5)$$

para algunas condiciones, el sistema no dispara o produce secuencias finitas de disparos.

Para el modelo KHR

$$\text{Máx } [\varphi(t)] = \frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}}.$$

La condición

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} = 1 \quad (4.6)$$

define una superficie contenida en el espacio de parámetros.

De acuerdo al teorema 14 (teorema de continuidad) y al teorema 3, la región del espacio de parámetros donde la función de disparos  $a$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  queda delimitada por las condiciones:

$$\begin{aligned} i') S - H &\geq \sigma \\ ii') \frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} &> 1 \end{aligned}$$

La igualdad

$$S - H = \sigma \tag{4.7}$$

determina un plano en el espacio de parámetros  $(\sigma, S, H)$  que cruza el plano  $\sigma = 0$  a lo largo de la recta  $S = H$  y el plano  $H = 0$  a lo largo de la recta  $S = \sigma$ .

Para el modelo KHR, si  $H > 0$ , entonces la condición  $S - H \geq \sigma$  implica que  $\text{Máx}[\varphi(t)] > 1$ . Así, si  $H > 0$ , la condición  $S - H \geq \sigma$  es suficiente para tener la continuidad de la función de disparos  $a(t)$  en todo  $\mathbb{R}$ .

Como  $F(t, 0) \geq 0$ , para toda  $t$ , si y solo si

$$S \geq H. \tag{4.8}$$

entonces los puntos  $(\sigma, S, H)$  que están sobre, o bajo, el plano  $S = H$ , determinan, de acuerdo al teorema de inyectividad (teorema 10), sistemas con  $a(t)$  inyectiva.

#### 4.5.1. Partición del Espacio de Parámetros

Como hemos visto, el espacio de parámetros puede ser dividido en regiones que se encuentran arriba o abajo de las superficies descritas anteriormente. Estas superficies, al intersectarse, determinan regiones en el espacio  $(\sigma, S, H)$ , en donde la función de disparos tiene características cualitativamente diferentes.

En la figura (4.4) se muestran cinco regiones  $I, II, III, IV, V$  determinadas por las superficies discutidas anteriormente. En esta regiones el sistema tienen las siguientes propiedades (para más detalles vease la referencia [11]):

*I.*  $a$  es un homeomorfismo en  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} \geq 1 \text{ y } S - \sigma \geq H$$

II.  $a$  es discontinua e inyectiva en  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} \geq 1 \text{ y } S \geq H$$

III.  $a$  es discontinua y no inyectiva en  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} \geq 1 \text{ y } S < H$$

IV.  $D_a$  es un subconjunto propio de  $\mathbb{R}$  (vacío o unión de intervalos).

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} < 1 \text{ y } S < H$$

V.  $D_a = \emptyset$ .

$$\frac{S}{\sigma} + \frac{H}{\sqrt{\sigma^2 + 4\pi^2}} < 1 \text{ y } S \geq H.$$

Esto último se sigue puesto que estas condiciones implican que el mínimo del atractor periódico  $\varphi(t)$  es mayor que cero, lo que hace imposible a las soluciones con condición inicial igual a cero alcanzar el valor umbral uno.

## 4.6. Apéndice

Aquí se prueban resultados generales sobre funciones analíticas y algunas otras propiedades de las soluciones de la ecuación diferencial (4.1) que se utilizan en las demostraciones de los teoremas de regularidad.

**Lema 17.** *Supóngase que  $f$  es una función analítica en un intervalo abierto  $I$  y que se anula en una sucesión convergente, cuyo límite está contenido en  $I$ . Entonces  $f \equiv 0$  en  $I$ .*

*Demostración.* Sea  $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$  la sucesión en la que se anula la función  $f$  y, sin pérdida de generalidad, supondremos que  $\tau_n < \tau_{n+1}$  y  $\tau_n \rightarrow \tau^*$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Concluiremos que  $f \equiv 0$  en  $I$ , demostrando que  $f(\tau)$  y todas sus derivadas se anulan en  $\tau = \tau^*$ . Para esto inductivamente mostraremos que, para cada  $k = 0, 1, \dots$ , existe una sucesión creciente  $\{\tau_n^k\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ , convergente a  $\tau^*$  y satisfaciendo  $f^{(k)}(\tau_n^k) = 0$ . Entonces, por la continuidad de  $f$  y de todas sus derivadas, se seguirá que  $f^{(k)}(\tau^*) = 0$ , para toda  $k$ .

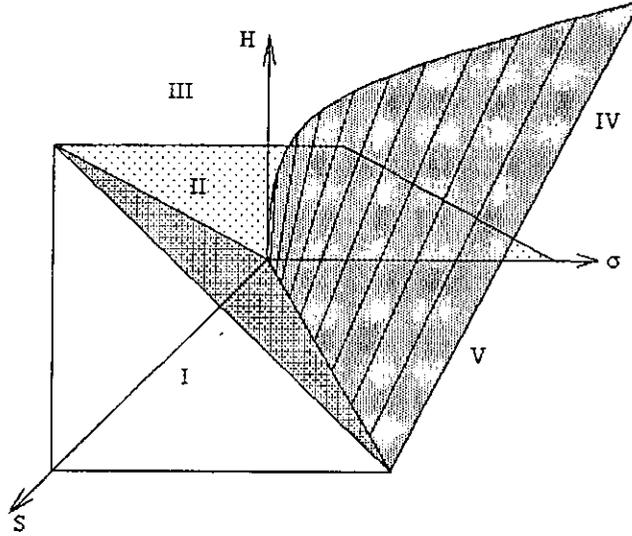


Figura 4.4: Partición del espacio de parámetros del modelo KHR. (Tomado de[11])

La hipótesis válida el caso  $k = 0$ . Si para alguna  $k \geq 0$  la hipótesis de inducción es satisfecha, el Teorema del Valor Medio implica que existe  $\tau_n^{k+1}$ , con  $\tau_n^k < \tau_n^{k+1} < \tau_{n+1}^k$ , tal que

$$f^{(k)}(\tau_{n+1}^k) - f^{(k)}(\tau_n^k) = f^{(k+1)}(\tau_n^{k+1})(\tau_{n+1}^k - \tau_n^k).$$

Entonces  $f^{(k+1)}(\tau_n^{k+1}) = 0$  y obviamente  $\tau_n^{k+1} \rightarrow \tau^*$ . ■

Diremos que una función analítica  $f$  es *estrictamente monótona* en  $\tau$ , si  $f'(\tau) \neq 0$ .

**Proposición 18.** *Si  $f$  es una función analítica no constante en una vecindad de  $\tau_0$ , y  $f(\tau_0) = c$ , entonces,  $f(\tau) \neq c$  en una vecindad agujerada de  $\tau_0$ . Además, para  $r$  suficientemente pequeña,  $f$  se aproxima de manera estrictamente monótona, por la derecha (para  $t \in (\tau_0 - r, \tau_0]$ ) y por la izquierda (para  $t \in [\tau_0, \tau_0 + r)$ ), al valor  $c$ .*

*Demostración.* El lema 17 implica que  $f(\tau) - c$  no puede anularse arbitrariamente cerca de (pero no en)  $\tau_0$ , por lo tanto  $f$  asume el valor  $c$  aisladamente. Para la segunda parte de la proposición, la función  $f'$  no puede anularse arbitrariamente cerca (por la izquierda) de  $\tau_0$ , de otro modo, para toda  $r > 0$  existe

$\tau_r \in (\tau_0 - r, \tau_0)$  tal que  $f'(\tau_r) = 0$ , y entonces, por el lema 17,  $f'$  se anularía en un intervalo que contiene a  $\tau_0$  lo cual implica que  $f$  es constante, contradiciendo nuestra hipótesis. ■

**Corolario 19.** *En una vecindad de un punto  $\tau_0$ , donde la función  $f$  es analítica, tenemos las siguientes alternativas:*

- i)  $f$  es constante,
- ii)  $f$  es estrictamente creciente
- iii)  $f$  es estrictamente decreciente
- iv)  $f$  alcanza un mínimo local en  $\tau_0$ , o
- v)  $f$  alcanza un máximo local en  $\tau_0$ .

Recordemos que  $\Omega$  es el dominio de definición de la función analítica  $F$ , la cual es una región que contiene la franja

$$\{-\infty < t < +\infty, 0 \leq x \leq 1\}.$$

**Lema 20.** *Si  $(\tau_0, \eta) \in \Omega$  es tal que  $F(\tau_0, \eta) > 0$  ( $< 0$ ) entonces existe  $r_1 > 0$  tal que  $x(t; \tau_0, \eta) < \eta$  ( $> \eta$ ) en el intervalo  $[\tau_0 - r_1, \tau_0)$ , y, de modo semejante, existe  $r_2 > 0$  tal que  $x(t; \tau_0, \eta) > \eta$  ( $< \eta$ ) en el intervalo  $(\tau_0, \tau_0 + r_2)$ .*

Demostración. Para la solución  $x(t) \equiv x(t; \tau_0, \eta)$  tenemos que

$$\dot{x}(\tau_0) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{x(\tau) - \eta}{\tau - \tau_0} = F(\tau_0, 0)$$

Por lo tanto, si  $\tau < \tau_0$ , suficientemente cercano a  $\tau_0$  y  $F(\tau_0, 0) > 0$ , entonces  $x(\tau) < \eta$ . El otro caso es completamente análogo. ■

**Lema 21.** *Sea  $(\tau_0, \eta)$  un punto interior de  $\Omega$ . Si la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$  no es constante, existe  $r > 0$  tal que  $F(\cdot, \eta) \neq 0$  y  $F(\cdot, \eta)$  no cambia su signo en ninguno de los intervalos  $(\tau_0 - r, \tau_0)$  y  $(\tau_0, \tau_0 + r)$ . Además, en virtud del corolario 19, las siguientes alternativas cubren todos los posibles casos:*

- i) *si la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$  tiene un mínimo (para  $t \in (\xi, \tau_0]$ ) en  $\tau_0$ , existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, \eta) < 0$  para toda  $\tau \in (\tau_0 - r, \tau_0)$ .*
- ii) *si la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$  tiene un máximo (para  $t \in (\xi, \tau_0]$ ) en  $\tau_0$ , existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, \eta) > 0$  para toda  $\tau \in (\tau_0 - r, \tau_0)$ .*
- iii) *si la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$  tiene un mínimo (para  $t \in [\tau_0, \xi)$ ) en  $\tau_0$ , existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, \eta) > 0$  para toda  $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + r)$ .*
- iv) *si la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$  tiene un máximo (para  $t \in [\tau_0, \xi)$ ) en  $\tau_0$ , existe  $r > 0$  tal que  $F(\tau, \eta) < 0$  para toda  $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + r)$ .*

Demostración. Si  $F(\cdot, \eta) = 0$  en un intervalo  $I$  alrededor de  $\tau_0$ , la función  $\tilde{x}(t) \equiv \eta$ , en  $I$ , es una solución de  $\dot{x} = F(t, x)$ ; por la unicidad de las soluciones,  $\tilde{x}(t) = x(t; \tau_0, \eta)$ , para toda  $t \in I$ , contradiciendo la hipótesis. Entonces  $F(\cdot, \eta)$  no es constante y, por la proposición 18, es diferente de cero en una vecindad agujerada de  $\tau_0$ . Por lo tanto, por continuidad, existe  $r$  tal que  $F(\cdot, \eta)$  no cambia de signo en el intervalo  $(\tau_0 - r, \tau_0)$ .

Únicamente demostraremos el inciso i), siendo los otros semejantes. Consideremos el intervalo  $(\tau_0 - r, \tau_0)$  donde  $F(\cdot, \eta)$  no cambia su signo y, contradiciendo la tesis del teorema, supongamos que  $F(\cdot, \eta) > 0$  en él. Denotaremos por  $\Delta$ , la región del plano  $(t, x)$  acotada por las rectas  $x = \eta$ ,  $t = \tau_0 - r$  y la curva  $y = x(t; \tau_0, \eta)$  (véase la figura (4.5))

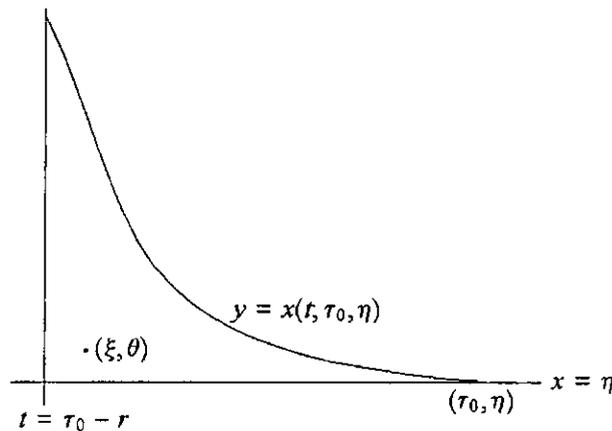


Figura 4.5:

Podemos elegir  $r$  tal que  $\Delta$  esté completamente contenida en  $\Omega$ . Si  $(\xi, \theta) \in \text{int}(\Delta)$ , para  $t > \xi$  la solución  $x(t; \xi, \theta)$  no puede intersectar la solución  $x(t; \tau_0, \eta)$ ; tampoco puede alcanzar la recta  $x = \eta$ , porque si lo hiciera, podríamos usar el lema 20 para demostrar que habría un punto con pendiente no positiva. Como la gráfica de la solución  $x(\cdot; \tau_0, \eta)$  tiene que estar confinada a la región acotada  $\Delta \subset \Omega$ , el intervalo  $[\xi, \tau_0]$  tiene que estar contenido en el dominio de definición de esta solución y  $x(t; \xi, \theta) \rightarrow (\tau_0, \eta)$ , conforme  $t \rightarrow \tau_0$ . Por lo tanto, por unicidad  $x(\cdot; \xi, \theta) = x(\cdot; \tau_0, \eta)$  en  $[\xi, \tau_0]$ , contradiciendo que el punto  $(\xi, \theta)$  es interior a  $\Delta$ . Entonces  $F(\tau, \eta) < 0$  para toda  $\tau \in (\tau_0 - r, \tau_0)$ . ■

**Corolario 22.** Sea  $(\tau, \eta)$  un punto interior de  $\Omega$ , la solución  $x(\cdot; \tau, \eta)$  de la ecuación (4.1) cruza ascendentemente la recta  $x = \eta$  en  $(\tau, \eta)$  (definición [ref]) si y sólo si existe  $r > 0$  tal que  $x(t; \tau, \eta) < \eta$  para toda  $t \in (\tau - r, \tau]$  y  $x(t; \tau, \eta) > \eta$  para toda  $t \in [\tau, \tau + r)$

Demostración. Como  $x(\cdot; \tau, \eta)$  cruza ascendentemente en  $(\tau, \eta)$ , no es constante. Supongamos que  $x(t; \tau, \eta) < \eta$  para toda  $t \in [\tau, \tau + r)$ , para alguna  $r > 0$ . Por la proposición 21  $F(t, \eta) < 0$  a la derecha de  $\tau$ , contradiciendo que  $x(\cdot; \tau, \eta)$  cruza ascendentemente en  $(\tau, \eta)$ . Para el recíproco, si la hipótesis es satisfecha, entonces la proposición 21 implica que  $F(t, \eta) > 0$  en una vecindad agujerada de  $\tau$ , por lo tanto  $x(\cdot; \tau, \eta)$  cruza ascendentemente la recta  $x = \eta$  en  $(\tau, \eta)$  ■

**Lema 23.** Let  $(\tau_0, \eta_0)$  a punto in the domain,  $\Omega$ , de  $F$ . si  $x(t; \tau_0, \eta_0)$  cruza ascendentemente la recta  $x = \eta_0$ , at  $(\tau_0, \eta_0)$ , entonces para suficientemente pequeña  $\varepsilon$ , la función  $h$

$$h : (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $h(\tau) = x(\tau_0; \tau, \eta_0)$  es un homeomorfismo sobre su imagen (véase la figura 4.3) y  $x(t; \tau, \eta_0) = x(t; \tau_0, h(\tau))$ , for all  $\tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ .

Demostración. Por la continuidad con respecto a condiciones iniciales ([23]) existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $h(\tau)$  esta bien definida y es continua. Como existe un cruce ascendente, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $F(\tau, \eta_0) > 0$ , para  $\tau \neq \tau_0$  y  $\tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ . si  $h(\tau)$  no fuera inyectiva, por unicidad, existiría una solución con varios cruces (al menos dos) con la recta  $x = \eta_0$ , en la vecindad de radio  $\varepsilon$  de  $\tau_0$ . De la continuidad de las soluciones, se sigue que alguno de esos cruces debe ocurrir con pendiente negativa, lo cual contradice que  $F(\tau, \eta_0) > 0$ , para  $\tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ . Finalmente, como  $x(\tau_0; \tau, \eta_0) = h(\tau) = x(\tau_0; \tau_0, h(\tau))$ , por unicidad, tenemos que  $x(t; \tau, \eta_0) = x(t; \tau_0, h(\tau))$ , para toda  $\tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ . ■

**Lema 24.** Sea  $J \subset I = [a, b]$  un intervalo cerrado y supóngase que para toda  $\tau \in J$ ,  $I$  está contenida en el intervalo de definición de la solución  $x(t; \tau, 0)$ . Entonces la función de  $J$  al espacio de funciones continuas  $C(I)$ , dado por

$$\tau \longmapsto x(\cdot; \tau, 0),$$

es continua con la norma uniforme en  $C(I)$ .

Demostración. Para cada  $\tau \in J$ ,

$$x(t; \tau, 0) = \int_{\tau}^t F(s, x(s; \tau, 0)) ds.$$

Sean  $\tau, \tau_0$  fijas en  $J$ , para toda  $t \in I$

$$\begin{aligned} |x(t; \tau, 0) - x(t; \tau_0, 0)| &= \left| \int_{\tau}^t F(s, x(s; \tau, 0)) ds - \int_{\tau_0}^t F(s, x(s; \tau_0, 0)) ds \right| \\ &= \left| \int_{\tau}^{\tau_0} F(s, x(s; \tau, 0)) ds + \right. \\ &\quad \left. \int_{\tau_0}^t (F(s, x(s; \tau, 0)) - F(s, x(s; \tau_0, 0))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau}^{\tau_0} F(s, x(s; \tau, 0)) ds \right| + \\ &\quad \left| \int_a^b (F(s, x(s; \tau, 0)) - F(s, x(s; \tau_0, 0))) ds \right| \\ &< \int_a^b |F(s, x(s; \tau, 0)) - F(s, x(s; \tau_0, 0))| ds + \\ &\quad M |\tau - \tau_0| \end{aligned}$$

donde  $M = \max_{(s, \tau)} |F(s, x(s; \tau, 0))|$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\delta_1$  tal que si  $|\tau - \tau_0| < \delta_1$ , entonces

$$|F(s, x(s; \tau, 0)) - F(s, x(s; \tau_0, 0))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sea  $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M}, \delta_1 \right\}$ . Por tanto, si  $|\tau - \tau_0| < \delta$ , entonces  $M |\tau - \tau_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  y

$$\int_a^b |F(s, x(s; \tau, 0)) - F(s, x(s; \tau_0, 0))| ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego, para toda  $t \in I$ ,

$$|x(t; \tau, 0) - x(t; \tau_0, 0)| < \varepsilon$$

si  $|\tau - \tau_0| < \delta$ . ■

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] B. van der Pol, On Relaxation Oscillations, *Philos. Mag.*, (7), 2, No. 11 (1926) 978-992.
- [2] M. L. Cartwright, Non-linear vibrations: a chapter in mathematical history, *Math. Gazette*, 36 (1952) 80-88.
- [3] S. M. Baer, J. Rinzel, H. Carrillo, Analysis of an autonomous phase model for neuronal parabolic bursting, *J. Math. Biol.* 33 (1995) 309-333.
- [4] H. Carrillo, *La Neurona Mecánica* (en preparación).
- [5] H. Carrillo, Tesis Doctoral, UNAM, 1984.
- [6] R. Pérez and L Glass, Bistability, Period Doubling Bifurcations and Chaos in a Periodically Forced Oscillator, *Phys. Lett. A* 90 (1982) 441-443.
- [7] V. I. Arnold, Cardiac Arrhythmias and Circle Maps, *Chaos* 1 (1991) 20-24. *Biol.* 33 (1995) 309-333.
- [8] L. Glass, Arrhythmias and Circle Maps. A classical problem, *Chaos* 1 (1991) 13-19.
- [9] L. Glass, M. Mackey, A simple model for phase locking of biological oscillators, *J. Math. Biol.*, 7 (1979), 58-64.
- [10] B. W. Knight, Dynamics of encoding in a population of neurons, *J. Gen. Phys.*, 59 (1972), 734-766.
- [11] M.A. Mendoza, H. Carrillo y F. Ongay, Dinámica de las Neuronas de Integración y Disparo, Reporte Técnico 98-I, Laboratorio de Dinámica no Lineal, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 1998.763-775.

- [12] Z. Nitecki, *Differentiable Dynamics, An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*, MIT Press, 1971
- [13] S. NewHouse, J. Palis and F. Takens, *Bifurcations and Stability of Families of Diffeomorphisms*, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 57 (1983) 5-71.
- [14] R. Ito, *Rotation Sets are Closed*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 889 (1981) 107-111.
- [15] M. Misiurewicz, *Periodic Points of Maps of Degree One of a Circle*, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 2 (1982) 221-227.
- [16] P.L. Boyland, *Bifurcations of Circle Maps: Arnold Tongues, Bistability and Rotation Intervals*, *Commun. Math. Phys.* 106 (1986) 353-381.
- [17] G. C. Martínez-Meckler, R. Mondragón, R. Pérez, *Basin structure invariance of circle maps with bistable dynamics*, *Phis. Review A* 3, 33 (1986), 2143-2145.
- [18] J.P. Keener, *Chaotic Behavior in Piecewise Continuous Difference Equations*, *Trans. AMS* 26 (1980) 589-604.
- [19] J. R. Guzmán Tesis de Maestría, UNAM, 1994.
- [20] J.P. Keener, F.C. Hoppensteadt, J. Rinzel. *Integrate and Fire Models of Nerve Membrane Response to Oscillatory Input*, *SIAM J. Appl. Math.* 41 3 (1981) 503-517.
- [21] A. Rescigno, R.B. Stein, R.L. Purple, R.E. Poppele. *A Neuronal Model for the Discharge Patterns Produced by Cyclic Inputs*, *Bulletin of Mathematical Biophysics*. Vol. 32, 1970.
- [22] E. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [23] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.