

33



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN

“CONTROL DE ROBOTS  
MANIPULADORES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
P R E S E N T A N :  
AGUSTIN GALICIA SALAZAR  
ERIC HERNAN MORALES TLACATELPA  
CARLOS ERNESTO PINEDA GARCIA

ASESOR: ING. JUAN ALEJANDRO FLORES CAMPOS.

CUAUTITLAN IZCALLI, ESTADO DE MEXICO. 2000

280313



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

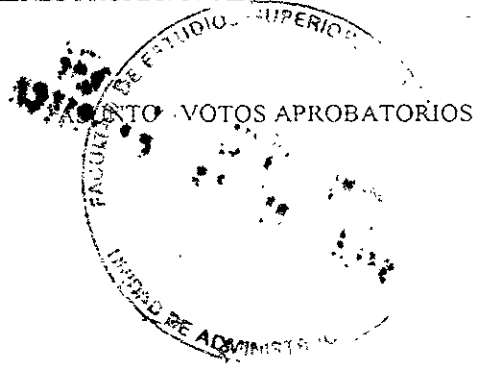
**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
 UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
 DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES



DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
 DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN  
 PRESENTE

ATN. Q. Ma. del Carmen García Mijares  
 Jefe del Departamento de Exámenes  
 Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Control de Robots Manipuladores"  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

que presenta el pasante: GALICIA SALAZAR AGUSTIN  
 con número de cuenta: 8916711-7 para obtener el TITULO de:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

ATENTAMENTE.  
 "POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo de Méx., a 5 de Abril de 199 9

PRESIDENTE ING. EDUARDO SALAS CORDOVA \_\_\_\_\_

VOCAL ING. NICOLAS CALVA TAPIA \_\_\_\_\_

SECRETARIO ING. JUAN ALEJANDRO FLORES CAMPOS \_\_\_\_\_

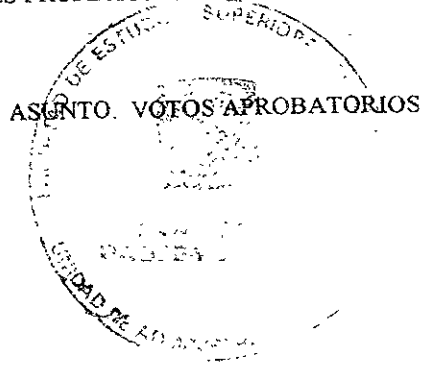
PRIMER SUPLENTE ING. AURELIO VELAQUEZ ROQUE \_\_\_\_\_

SEGUNDO SUPLENTE ING. JOSE LUIS BARBOSA BACHECO \_\_\_\_\_

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO



DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN  
PRESENTE

ATN. Q. Ma del Carmen Garcia Mijares  
Jefe del Departamento de Exámenes  
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Control de Robots Manipuladores"

que presenta el pasante MORALES TLACATELPA ERIC HERNAN  
con número de cuenta 9031622-9 para obtener el TITULO de  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo de Mex, a 5 de Abril de 199 9

PRESIDENTE ING. EDUARDO SALAS CORDOVA

VOCAL ING. NICOLAS CALVA TAPIA

SECRETARIO ING. JUAN ALEJANDRO FLORES CAMPOS

PRIMER SUPLENTE ING. AURELIO VELAZQUEZ ROQUE

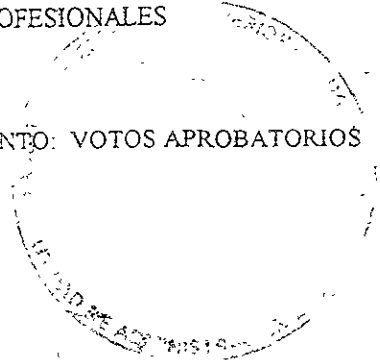
SEGUNDO SUPLENTE ING. JOSÉ LUIS BARRIOS



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
 UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
 DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

AGENCIAMIENTO NACIONAL  
 67100111  
 1971

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS



DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
 DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN  
 P R E S E N T E

ATN: Q. Ma. del Carmen Garcia Mijares  
 Jefe del Departamento de Exámenes  
 Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Control de Robots Manipuladores"  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

que presenta el pasante: PINEDA GARCIA CARLOS ERNESTO.  
 con número de cuenta: 8940709-3 para obtener el TITULO de:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

A T E N T A M E N T E.  
 "POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 5 de Abril de 1999

- |                  |  |  |
|------------------|--|--|
| PRESIDENTE       | <u>ING. EDUARDO SALAS CORDOVA</u>        |  |
| VOCAL            | <u>ING. NICOLAS CALVA TAPIA</u>          |  |
| SECRETARIO       | <u>ING. JUAN ALEJANDRO FLORES CAMPOS</u> |  |
| PRIMER SUPLENTE  | <u>ING. AURELIO VELAZQUEZ ROQUE</u>      |  |
| SEGUNDO SUPLENTE | <u>ING. JOSE LUIS BARBOSA PACHECO</u>    |  |

# CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES.

## OBJETIVOS:

- ✧ Comprobar experimentalmente que el álgebra de Cuaterniones puede ser utilizada para construir un modelo cinemático que permita controlar un robot manipulador de dos grados de libertad (2GDL).
  
- ✧ Construir el modelo cinemático de posicionamiento de un robot de 2GDL mediante el álgebra de Cuaterniones, y bajo este modelo, obtener los parámetros de desplazamiento angular de los eslabones con el objetivo de controlar una secuencia de movimientos asociada con el robot.
  
- ✧ Programar el modelo cinemático de posicionamiento del robot de 2GDL en el paquete de cálculo formal *Matemática®*, con el propósito de obtener las variables de control (desplazamientos angulares) que serán de utilidad para construir un software de control que mediante la utilización de uno de los puertos de la PC, sea capaz de generar las señales que den movimiento y control a los motores del manipulador.
  
- ✧ Utilizar la metodología de las Ecuaciones de Forma para diseñar conceptualmente las partes que integran al robot experimental de 2GDL.

# INTRODUCCIÓN.

Los robots industriales han atravesado por una infinidad de cambios desde la aparición de la primera máquina UNIMATION en 1962. Sus aplicaciones son cada vez más numerosas y extensas. Las ventajas que ofrecen los robots son:

- Pueden ser más fuertes (comparándolos con el ser humano), lo que le permite levantar pesos considerables y aplicar mayores fuerzas.
- No se cansan, pueden trabajar las 24 horas del día.
- Son consistentes, una vez realizado el trabajo pueden repetirlo un sinnúmero de veces.
- Pueden operar en medios ambientes hostiles.
- Son capaces de trabajar en la oscuridad.
- Se aumenta la productividad.
- Económicas: Se reducen los costos de mano de obra, existe un mayor rendimiento de la inversión de capital.
- Mejoramiento de la calidad.
- Flexibilidad.
- La capacidad para reprogramarlo.
- Resistencia.
- Seguridad.
- Etc.

Son cada vez más requeridas por los industriales e incluso, el hombre se ha dado cuenta que los robots industriales de la actualidad tienen un papel importante y útil que desempeñar.

Sin embargo, todavía el robot industrial no ha logrado dar todo su potencial, es por ello que está en gestación una tercera generación de robots, capaces de sentir y de reaccionar ante el ambiente extraño. Gran parte de los robots han sido y siguen siendo

## INTRODUCCIÓN

---

creados a imagen y semejanza del ser humano (a excepción de los robots paralelos) y esta tercera generación de robots parece seguir avanzando en esta dirección.

Ha llegado el momento de ver bajo una nueva luz los procesos de manufactura, en particular de ensamblaje, sin perder de vista el diseño de productos de acuerdo con las limitaciones del proceso.

Los sistemas de manufactura flexible que incorporan robots (la mayoría de ellos con 6 grados de libertad) y capacidades de 2ª generación interactuando con máquinas-herramienta, todo bajo el control de una computadora, ofrece un potencial ilimitado.

Conforme las capacidades de los robots vayan evolucionando para enfrentar los problemas que impondrán tareas industriales más difíciles y complicadas, será cada vez más factible que se usen fuera de las fábricas dando credibilidad a las actuales investigaciones sobre robots móviles capaces de operar en ambientes no estructurados como casas y hospitales.

La Robótica es una actividad multidisciplinaria: es un vehículo ideal para ilustrar un enfoque sistemático y, como tal ofrece un medio extremadamente útil para las perspectivas del estudiante.

En el presente trabajo se presenta la aplicación del álgebra de Cuaterniones como un medio para generar las ecuaciones que gobiernan la cinemática de posicionamiento de cuerpos rígidos, así como modelar las secuencias de los movimientos de los manipuladores, con la finalidad de realizar la simulación de un robot de dos grados de libertad. El objetivo principal es mostrar la practicidad del álgebra de Cuaterniones, así como la validez en las aplicaciones a los sistemas mecánicos en general.

Los siguientes conceptos nos serán de utilidad para nuestro desarrollo:



## INTRODUCCIÓN

---

1. La palabra "robot" proviene de la palabra Checa "ROBOTA", que significa monótona o trabajos forzados y la usó por primera vez el escritor Karel Capek en 1917, refiriéndose a máquinas de forma humanoide. La historia de los robots comienza en 1954 cuando un ingeniero norteamericano llamado George Deud registró una patente llamada *programmed articulated transfer* (Transferencia automática de artículos). Esta patente condujo al primer robot industrial, fabricado en 1962 por UNIMATION Inc.

Para el Instituto Norteamericano de Robots, el robot industrial es un manipulador reprogramable con funciones múltiples diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados variables para el desempeño de una gran diversidad de tareas.

Las palabras clave que distinguen a los robots de otras máquinas son:

- **Manipulador:** Es el que sujeta a un objeto y cambia su posición y orientación en el espacio.
- **Reprogramable:** Que tiene la capacidad de ser programado un sinnúmero de veces.

Muchos manipuladores son antropomórficos, es decir, parecen brazos humanos

Los robots han cobrado gran importancia al poder realizar tareas de forma muy eficiente, e incluso en ocasiones de forma más eficiente que el hombre, además de ser capaces de realizar labores en forma repetitiva y sin presentar fastidio o cansancio, pero lo que es aún más importante es que pueden actuar en medios en los que un humano arriesgaría su vida, por ejemplo el manejo de sustancias químicas o radioactivas.

La importancia generada por la necesidad de aumentar la productividad y mejorar la calidad, así como el tener células de fabricación más flexibles han dejado en desuso las

## INTRODUCCIÓN

---

herramientas de automatización rígidas<sup>1</sup> y le han abierto paso a la utilización de los robots quienes ya ocupan un lugar importante dentro de casi todas las industrias incluyendo la industria espacial y la farmacéutica.

Un manipulador, en principio, es un dispositivo de propósito general. en la práctica son normalmente diseñados pensando en cubrir al menos una amplia gama de aplicaciones, como lo puede ser; soldar, manejar materiales, ensamblar, etc.. La aplicación define algunos parámetros de diseño del manipulador, incluyendo su estructura cinemática.

El trabajo aquí presentado, consta de 5 capítulos, los cuales serán descritos brevemente a continuación:

- En el capítulo I se propone el marco teórico que será utilizado en el modelado de robots manipuladores.
- En el capítulo II se presentan las ecuaciones de la cinemática de un manipulador de 2 GDL, mostrando el modelo de Denavit-Hartenberg y el modelo de Cuaterniones.
- En el capítulo III es presentado el diseño conceptual y de forma de un manipulador de 2GDL.
- En el capítulo IV se muestra la parte teórica de los motores de pasos, ya que estos fueron usados en el prototipo del manipulador construido.
- Finalmente se presentan las conclusiones del presente trabajo, los apéndices y bibliografía.

---

<sup>1</sup> Se refiere a las herramientas de un proceso de automatización en el cual es difícil o nula una modificación al layout del proceso de automatización

# ÍNDICE

---

## ÍNDICE.

	PÁGINA
OBJETIVOS	I
INTRODUCCIÓN	II
ÍNDICE	VII
ÍNDICE DE ABREVIATURAS	XI
ÍNDICE DE TABLAS	XIII
ÍNDICE DE FIGURAS	XV
AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS	XIX

### Capítulo I

#### El marco teórico.

	PÁGINA	
1.1.1	El marco teórico.	1
1.1.2	Definiciones generales.	2
1.2.1	Espacios vectoriales y transformaciones lineales.	9
1.2.2	Estructuras algebraicas.	9
1.2.3	Espacios vectoriales.	10
1.2.4	Transformaciones lineales.	12
1.3.1	El álgebra de Quaterniones.	13
1.3.2	Representación paramétrica de rotaciones finitas.	18

### Capítulo II

#### Cinemática de un manipulador de 2 GDL.

	PÁGINA	
2	Cinemática de un manipulador de 2 GDL.	19
2.1	Introducción.	19
2.2	Algunas consideraciones sobre el problema cinemático directo.	21
2.2.1	Matrices de rotación.	21
2.2.2	Matriz de rotación compuesta.	26
2.2.3	Matriz de rotación respecto de un eje arbitrario.	27
2.2.4	Matriz de rotación con representación de ángulos de Euler.	29
2.2.5	Interpretación geométrica de las matrices de rotación.	32
2.2.6	Coordenadas homogéneas	34

# ÍNDICE

	PÁGINA	
2.2.7	Interpretación geométrica de las matrices de transformaciones homogéneas.	37
2.2.8	Matriz de transformación homogénea compuesta	39
2.2.9	Elementos, articulaciones y sus parámetros.	40
2.2.10	La representación de Denavit-Hartenberg.	43
2.2.10.1	Algoritmo 2.1: Asignación del sistema de coordenadas de los elementos	46
2.2.11	Ecuaciones cinemáticas para los manipuladores .	50
2.2.12	Especificaciones de la localización de efecto final	54
2.2.13	Clasificación de algunos manipuladores.	59
2.3	El problema cinemático inverso.	59
2.3.1	Técnica de la transformada inversa para la solución de ángulos de Euler.	61
2.3.2	Un método geométrico.	69
2.4	Cadenas cinemáticas abiertas.	88
2.4.1	Modelación cinemática de posicionamiento de un sistema mecánico de cadena abierta de 2GDL tipo RR	88
2.4.1.1	Análisis en la configuración no deformada de $R_0$ .	91
2.4.1.2	Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso.	92
2.4.1.2.1	Problema cinemático directo.	92
2.4.1.2.2	Problema cinemático inverso.	92
2.4.1.3	Análisis de la configuración deformada de $R_0$ .	93
2.4.1.4	Problema cinemático inverso en la configuración deformada.	95
2.4.1.5	Análisis de los movimientos de $R_0$ .	95
2.4.1.6	Análisis de las secuencias de rotación para interpretación de los ángulos.	98
2.5.1	Observaciones finales de los métodos presentados	102
2.5.2	Referencias.	102

## Capítulo III

### Diseño conceptual y de forma de un manipulador de dos grados de libertad (2GDL).

	PÁGINA	
3	Introducción.	105
3.1	Diseño de un manipulador de dos grados de libertad.	105
3.1.1	Definición del problema.	106
3.1.2	Restricciones ( $R_0$ ) del problema.	106
3.1.3	Definición del problema del diseño conceptual.	107
3.1.4	Descripción del diseño conceptual del robot de 2GDL.	108
3.2	Diseño de forma.	111

# ÍNDICE

---

	PÁGINA
3.2.1	Definición de los cuerpos primitivos base. 112
3.2.2	Geometrías básicas de cuerpos primitivos base. 113
3.2.3	Definición de los cuerpos primitivos unitarios estándar. 114
3.2.4	Operadores booleanos asociados a los procesos de manufactura. 115
3.2.5.1	Problema del diseño de forma. 116
3.2.5.2	Diseño de forma de los elementos que componen al robot "(eslabones, bases de unión y bases) ". 117
3.2.6	Diseño de forma de las bases 117
3.2.6.1	Formación de la base 1. 117
3.2.6.2	Formación de la base 2. 120
3.2.7	Diseño de forma de los eslabones que componen al robot. 121
3.2.8	Diseño de forma de los ejes de acoplamiento. 123
3.2.9	Consideraciones de forma de los elementos normalizados. 124
3.2.10	El problema inverso del diseño de forma de los elementos normalizados. 125
3.2.11	Descripción del conjunto S. 126
3.2.12	Axioma 1 del diseño de forma. 130
3.2.13	Corolario 1. 131
3.2.14	Consideraciones sobre las ecuaciones de forma. 131

## Capítulo IV Motores de pasos.

	PÁGINA
4.1	Definiciones generales. 133
4.1.1	Introducción. 133
4.1.2	Motor de pasos de reluctancia variable. 135
4.1.3	Motor de pasos de imán permanente. 137
4.2.1	Funcionamiento de un motor de pasos. 139
4.2.2	Sistema de control para motores de paso. 145
4.2.3	Operación de medio paso. 147
4.2.4	Micropasos. 148
4.2.5	Precisión del paso. 148
4.2.6	El motor de pasos elemental. 149
4.2.7	Efecto de la inercia. 150
4.2.8	Efecto de una carga mecánica. 153

# ÍNDICE

---

		PÁGINA
4.2.9	Torque contra corriente.	154
4.2.10	El torque mantenido.	155
4.2.11	Relación paro-arranque de pasos.	157
4.2.12	Velocidad de giro.	158
4.2.13	Desaceleración [Ramping].	159
4.3.1	Aspectos electromecánicos de los motores paso a paso.	160
4.4.1	Selección de motor paso a paso a utilizar.	161

## Capítulo V Control.

		PÁGINA
5	Control.	167
5.1	Introducción	167
5.1.1	Manejadores (drivers) para motores paso a paso.	168
5.1.2	Principios de operación de los manejadores (drivers) para motores de pasos.	169
5.2	Creación del hardware de control.	174
5.2.1	La computadora personal PC.	174
5.2.2	El bus de la computadora personal PC.	177
5.2.3	Interfase para el puerto paralelo de 24 bits para PC.	184
5.2.4	Tarjeta de interfase para PC de 24 bits.	185
5.2.5	Descripción de la tarjeta de interfase.	188
5.3	Programa de control del robot-manipulador de 2GDL.	192

## Conclusiones

		PÁGINA
6	Conclusiones.	199

## Apéndices y bibliografía

		PÁGINA
7	Apéndice " A "	201
7.1	Apéndice " B "	203
7.2	Apéndice " C "	207
7.3	Bibliografía.	217

## ÍNDICE DE ABREVIATURAS

---

### ÍNDICE DE ABREVIATURAS.

Actuador	(Ac)
Articulación Esférica-Rotación Esférica	(AS-RS)
Base-Brazo-Articulación	(ABB.)
Base ortonormal	(e)
Puerto con un número indefinido de pistas de comunicación	(BUS)
Computadora Personal	(PC)
Cuerpo	(C)
Distancia	(d)
Entrada	(IN)
Clavija o terminal	(Pin)
Grados de libertad	(GDL)
Longitud del eslabón	(L)
Matriz de transformación	(T)
Medio Paso	(Half)
Milnewtons-Metro	(mN-m)
Miliamperes	(mA)
Multicuerpo	(Ro)
Norma Internacional de Arquitectura	(ISA)
Núcleo de Transformación	(N <sub>T</sub> )
Par de Rotación (Revolución)	(R)
Par Prismático	(P)
Paso Completo	(Full)
Paso por Segundo	(PPS)
Quaterniones	(Q)
Rotación en sentido antihorario	(Cw)
Rotación en sentido horario	(CCw)
Rotación respecto al eje Z y un ángulo $\phi$	(R <sub>z,<math>\phi</math></sub> )
Rotación respecto al eje OV un ángulo $\theta$	(R <sub>y,<math>\theta</math></sub> )

## ÍNDICE DE ABREVIATURAS

---

Rotación respecto al eje OW un ángulo $\psi$	( $R_{w,\psi}$ )
Salida	(OUT)
Sistema de coordenadas giratorias	(OUVW)
Sistema de coordenadas Principales o Fijas	(OXYZ)
Vector Posición	(p)
Vector normal	(n)
Vector Desplazamiento	(s)
Vector de aproximación	(a)
Tarjeta de expansión	(SLOT)
Tierra	(GND)
Voltaje de corriente continua	(VCC)
Voltaje de diodo	(VD)
Voltaje de motor	(VM)
Unidad Central de Proceso	(CPU)



**ÍNDICE DE TABLAS**

		<b>PÁGINA</b>
Tabla 2.1	Ángulos de Euler.	29
Tabla 2.2	Posicionamiento/Orientación.	58
Tabla 2.3	Diversas Configuraciones de brazo para articulación.	76
Tabla 2.4	Diversas Configuraciones de brazo para articulación 3.	78
Tabla 2.5	Diversas orientaciones para la muñeca.	81
Tabla 2.6	Secuencias y valores de los ángulos de rotación.	98
Tabla 2.7	Valores de los ángulos de rotación para el seguimiento de cuatro puntos de una línea recta.	100
Tabla 3.1	Elementos que componen al robot (Ro).	110
Tabla 3.2	Número total de partes formadas.	124
Tabla 4.2.1A	Número total de pares de un motor de pasos.	143
Tabla 4.2.1B	Número total de pares de 2 bobinas de un motor de pasos.	143
Tabla 4.2.1C	Número total de pares alternando 1 y 2 bobinas (medio paso) en un motor de pasos.	143
Tabla 4.2.2A	Bobinas de paso como respuesta a impulsos de entrada en un embobinado.	145
Tabla 4.2.2B	Bobinas de paso como respuesta a impulsos de entrada en dos embobinados.	145
Tabla 4.2.2C	Bobinas de paso como respuesta a impulsos de entrada en un embobinado de medio paso.	145
Tabla 4.2.2D	Selección del motor paso a paso.	147
Tabla 4.3.1	Tipos de motores y características.	161
Tabla 4.4.1	Datos técnicos del motor tipo 103-771-1242 Step-Syn.	165
Tabla 5.1	Tipos de manejadores y características.	165
Tabla 5.2	Descripción de las señales del puerto paralelo de la PC.	177
Tabla 5.3	Descripción de las señales de la interfase 8255A-5.	180
Tabla 5.4	Descripción de los hilos de la tira doble de pines.	186
Tabla 5.5	Descripción de las funciones del programa de control.	192

ÍNDICE DE FIGURAS.

		PÁGINA
Figura 1.1a	Robot tipo PUMA.	8
Figura 1.1b	Robot paralelo tipo RRR.	8
Figura 2.1	Diagrama de bloques de los problemas cinemáticos directo e inverso.	20
Figura 2.2	Sistema de coordenadas de diferencia y ligado al cuerpo.	22
Figura 2.3a	Sistemas de coordenadas de rotación.	25
Figura 2.3b	Sistema de coordenadas en rotación.	25
Figura 2.3c	Sistemas de coordenadas en rotación.	26
Figura 2.4	Rotación respecto de un eje arbitrario.	28
Figura 2.5	Sistema de ángulos Eulerianos I.	30
Figura 2.6	Sistema de ángulos Eulerianos II.	31
Figura 2.7	Giro, elevación y desviación respecto de los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia y el sistema de coordenadas giratorio.	32
Figura 2.8	Un robot PUMA ilustrando articulaciones y elementos.	41
Figura 2.9	Tipos de articulaciones.	42
Figura 2.10	Sistema de coordenadas de elementos y sus parámetros.	42
Figura 2.11	Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot tipo PUMA.	45
Figura 2.12	Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot tipo Stanford.	46
Figura 2.13	Matrices de transformación de coordenadas de los elementos del robot tipo PUMA.	50
Figura 2.14	Sistema de coordenadas de la mano $[n, s, a]$ .	52
Figura 2.15	Representación del sistema de coordenadas cilíndricas.	56
Figura 2.16	Representación del sistema de coordenadas esféricas.	57
Figura 2.17	Definición de los ángulos de Euler $O, A$ y $T$ .	66
Figura 2.18	Alineación inicial de herramienta en un sistema de coordenadas	67

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

		PÁGINA
Figura 2.19	Definición de diversas configuraciones de brazo.	72
Figura 2.20	Solución para la articulación 1.	74
Figura 2.21	Solución para la articulación 2.	75
Figura 2.22a	Solución para la articulación 3. Brazo izquierdo y abajo.	77
Figura 2.22b	Solución para la articulación 3. Brazo izquierdo y abajo.	77
Figura 2.22c	Solución para la articulación 3. Brazo izquierdo y arriba.	77
Figura 2.23	Solución para la articulación 4.	81
Figura 2.24	Solución para la articulación 5.	83
Figura 2.25	Solución para la articulación 6.	84
Figura 2.26	Simulación en computadora de la solución de la articulación.	87
Figura 2.27	Caracterización del robot ( $R_0$ ).	89
Figura 2.28	Configuración no deformada de ( $R_0$ ).	90
Figura 2.29	Configuración deformada de ( $R_0$ ).	93
Figura 2.30	Secuencia 1.	96
Figura 2.31	Secuencia 2.	97
Figura 3.1	Robot de dos grados de libertad.	107
Figura 3.2	Configuración no deformada del robot.	108
Figura 3.3	El conjunto $P_{R1}$ .	109
Figura 3.4	Ubicación de los componentes del robot.	111
Figura 3.5	Forma de los cuerpos primitivos.	112
Figura 3.6	Cuerpos primitivos.	114
Figura 3.7	Forma de la base 1.	117
Figura 3.8	Geometría de forma del elemento $C_{E11}$ .	118
Figura 3.9	Forma geométrica.	119
Figura 3.10	Forma del cuerpo primitivo base.	120
Figura 3.11	Formato de geometría.	121
Figura 3.12	Formas básicas de los eslabones.	122
Figura 3.13	Cuerpo primitivo en forma de cuña.	122

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

	PÁGINA
Figura 3.14	Formas básicas de los eslabones. 123
Figura 3.15	Secuencia de forma. 124
Figura 3.16	Pieza normalizada de sujeción. 125
Figura 3.17	Diseño de forma de la tuerca. 128
Figura 3.18	Forma geométrica de la Ecuación de Forma. 130
Figura 4.1	Motor de pasos de reluctancia variable. 136
Figura 4.2	Motor de pasos de imán permanente. 137
Figura 4.3	Diagrama del circuito de un motor de pasos de imán permanente. 138
Figura 4.4	Motor de paso bifásico de seis polos salientes. 139
Figura 4.5	Momento de parada y momento de retención. 141
Figura 4.6	Motor de paso bifásico de dos embobinados. 142
Figura 4.7	Montaje del transistor y del interruptor mecánico. 144
Figura 4.8	Motor de paso bifásico de cuatro embobinados. 144
Figura 4.9	Motor de pasos de reluctancia variable. 148
Figura 4.10	Motor de pasos simple. 149
Figura 4.11	Gráfica de posición angular del rotor en función del tiempo. 151
Figura 4.12	Gráfica de posición angular del rotor en función del tiempo con una carga de inercia mayor donde el motor de pasos se reajusta. 152
Figura 4.13	Gráfica de posición angular del rotor en función del tiempo con un amortiguador viscoso. 152
Figura 4.14	Gráfica de posición angular del rotor en función del tiempo con una carga mecánica acoplada al rotor. 153
Figura 4.15	Gráfica de los pulsos de corriente, posición angular y velocidad instantánea del rotor en los primeros cuatro pasos. 154
Figura 4.16	Gráfica del torque de arranque vs corriente. 155
Figura 4.17	Posiciones del rotor que desarrolla el torque restaurado en un motor de pasos de reluctancia-variable. 155
Figura 4.18	Curva típica de torque-estático para un motor de pasos. 156

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

		PÁGINA
Figura 4.19	Características de paro-arranque de un motor de pasos.	157
Figura 4.20a	Curva de posición angular contra tiempo.	158
Figura 4.20b	Curva de velocidad instantánea contra tiempo.	158
Figura 4.21	Curvas de torque-velocidad.	160
Figura 4.22	Configuración del motor, banda y polea de la aplicación.	163
Figura 4.23	Curvas de comportamiento del motor tipo step-syn.	165
Figura 5.0	Esquema general de un Robot manipulador de 2GDL.	167
Figura 5.1	Asignación de los pines del driver SAA-1042.	169
Figura 5.2	Diagrama de bloques del driver SAA-1042.	170
Figura 5.3	Diagrama de tiempo del driver SAA-1042.	172
Figura 5.4	La aplicación típica del driver SAA-1042.	172
Figura 5.5	Gráfica de resistencia contra corriente del motor de pasos.	173
Figura 5.6	Gráfica de corriente contra voltaje directo.	174
Figura 5.7	Diagrama de bloques de una PC en forma simplificada.	175
Figura 5.8	Producto de comunicación del puerto paralelo de un CPU.	179
Figura 5.9	Configuración de la interfase 8255A-5.	182
Figura 5.10	Diagrama de bloques de la interfase 8255A-5.	182
Figura 5.11	Canal I/O de ISA de una PC-XT.	185
Figura 5.12	Tarjeta de interfase.	187
Figura 5.13	Tarjeta de interfase.	188
Figura 5.14	Fuente de poder para alimentar los motores del robot.	191
Figura 5.15	Diagrama que representa la aplicación para el motor M1.	191
Figura 5.16	Menú del programa de control.	193
Figura 5.17	Cuadro de diálogo para lectura y escritura de archivos.	194
Figura 5.27 <sup>∞</sup>	Documento de Microsoft Word. Introducción manual de datos en un archivo.	197
Figura 5.28	Cuadro de diálogo "Acerca de".	199

---

<sup>∞</sup> EL SALTO DE NUMERACIÓN DE FIGURAS ES PORQUE SE TOMAN EN CUENTA LAS FIGURAS INSERTADAS EN LA TABLA 5.5 (PÁGINAS 192-193).

## **DEDICATORIAS**

---

### **A mis Padres:**

Abel y Paulina que gracias a su apoyo, comprensión y motivación, hoy llego a la meta que me fijé en la vida.

### **A mis Hermanas y Hermanos:**

Patricia, Jacinto, Graciela, Rosalba, Lucía, Norma y Aracelí.

### **A mis sobrinos:**

Reynaldo, Abel, Arturo, Sara, Luis, Alfredo, Jacinto y Norma.

### **A Fabiola:**

Porque contigo conocí otra forma de ver la vida, ya que siempre me enseñaste que detrás de las cosas malas, vendrán cosas buenas y mejores, y que, por eso, hay que luchar cada día más para ser mejor en las metas que me proponga. De antemano te doy las gracias por todo lo que aprendí.

AGUSTÍN GALICIA SALAZAR.

## **DEDICATORIAS**

---

### **A MI MEJOR AMIGA:**

A LO LARGO DE MI VIDA HE CONTADO SIEMPRE CON EL APOYO, CARÍÑO, COMPRENSIÓN E INFINITO AMOR DE QUIEN PARA MÍ ES LA MÁS GRANDE AMIGA. TU APOYO Y CONSEJO ES EL MÁS GRANDE PILAR DE MI VIDA. **GRACIAS MAMA.**

### **A MIS MAESTROS:**

RECORDANDO LA FRASE: "MAESTRO ES EL QUE GUIA EN LA VIDA", Y AGRADECIENDO ETERNAMENTE LA ENSEÑANZA QUE ME DIERON CRISTIAN Y CÉSAR, FUNDAMENTADA EN MIS ERRORES Y EN ESPERA DE QUE ME SIGAN ENSEÑANDO EL BUEN CAMINO. "**GRACIAS HERMANOS**".

### **"CHARLY", -CALITOS-**

TU ENSEÑANZA AÚN DESPUÉS DE TU PARTIDA, TUS REPRIMENDAS Y ATINADOS CONSEJOS VIVEN JUNTO A MÍ, Y ME DAN EL CORAJE PARA CONTINUAR ESTE CAMINO.

### **A MI MEJOR AMIGO: CHARLY BROWN**

TU APOYO, CONFIANZA, ENTUSIASMO Y COLABORACIÓN, FUERON INDISPENSABLES EN ESTE PROYECTO Y UNA MEMORIA ACTIVA QUE ME AYUDARÁ SIEMPRE EN ESTA VIDA.

**ERIC HERNÁN MORALES TLACATELPA.**

## DEDICATORIAS

---

A **Dios**, por todo lo que me ha dado.

A mis **padres** Lindoro Pineda Moya (un ejemplo de honradez, disciplina, fuerza y cariño para todos sus hijos) y María de los Ángeles García Vargas (por toda la ternura y ahínco con que impulsó a sus hijos a ser cada día mejores).

A mis **hermanas**: Aleida Vietnam (por su ánimo en los momentos difíciles), Yoshia Zemlia (por su objetividad y por ponerme en mi lugar cuando fue necesario), Tashai, Claudia Doralyn y Dorian Angélica (por su jovialidad y bromas que arrancaron en mí sonrisas que nunca olvidaré).

A mis **tíos**: Raúl Pineda Moya † y Engracia Olmedo (por todo el cariño y generosidad).

A mis **Padrinos**: Emeterio Ortega † y Carmelita Robles †. Una muestra de increíble de ternura y bondad.

A mis **abuelos**: Pedro García Herrera † (un anarquista hasta de su propia vida, he aquí una victoria más de un aspirante a la anarquía) y Juliana Paulina Vargas Cruz. José Carmen Pineda Casas † y Antonia Moya Cruz.

A mis **Tíos y Tías**: Claudio †, Gudelia, Elvia, Hermenegilda †, Carmen y Yolanda Pineda Moya (a tí por todo ese apoyo invaluable y desinteresado). Raúl †, Jerónimo, Bertha, Marisela y Julia García Vargas y su esposo Gerardo Díaz.

A mis **primos**: Arturo, Olimpia y Raúl Pineda Olmedo (un gran ejemplo a seguir y un amigo como pocos); Nitzia Brizeida y Humberto Josué Gómez Pineda; Antonio Martínez Pineda (por ser un buen amigo y consejero); Leticia Minerva Cerón Pineda (Especialmente a tí por todo al apoyo y comprensión) y sus hijos León Federico y José Álvaro Casamadrid Cerón;



## DEDICATORIAS

---

A los **ingenieros**: Juan Alejandro Flores Campos (por su ayuda para el desarrollo de este trabajo), Casildo Rodríguez Arciniega (por esa confianza y amistad) y Soledad Alvarado Martínez, Alejandro Martínez Moncada (por esa amistad tan especial e invaluable), Enrique Cortés González, Gerardo Maya Gómez, Felipe Díaz del Castillo Rodríguez (por todos sus consejos y apoyo brindado durante la carrera), José Antonio Sánchez Gutiérrez (por esa amistad tan generosa), Agapito Rodríguez Nava, Emilio Juárez Martínez, Filiberto Leyva Piña (por toda esa espiritualidad y consejos bien atinados), José Guadalupe Alfonso Ramos Anastasio, José Antonio López González, Marco Antonio Hernández Rodríguez (por esa colaboración en los momentos más apremiantes), Eduardo Salas Córdova (Por su asistencia y comprensión), Aurelio Velázquez Roque, José Luis Barbosa Pacheco, Nicolás Calva Tapia (por esa amistad y confianza tan entrañables, especialmente a usted, que siempre es un buen amigo y tutor), Víctor Hugo Landa Orozco, Juan Alfonso Oaxaca Luna y David Alejo Torres.

A **Mis Amigos**: Ing. Guillermo Horeb García Cervantes (esa amistad e ironía tan exquisitas), Adolfo Zameza Hernández, Raúl Abad Casas, Oscar Guadalupe Barrientos Peña, Ramón Cortés Santibáñez (por enseñarme a comprender esos momentos tan difíciles que pasan en la vida), Juan Francisco Romero Rosas, Alfredo Varela Trejo, Ricardo Daniel Dorantes Fierro (por su apoyo incondicional en el desarrollo de este trabajo), Fernando López Mendoza, Jorge Jiménez Ortiz, Ing. Oswaldo Muñoz Díaz (por todo su apoyo y enseñanzas), Ing. Oscar Roberto Carmona Navarro (por su espíritu tan alegre y siempre tan generoso), Ing. Juan Francisco Tapia Reyes (esa magnanimidad e inteligencia tan apreciadas), Ing. Hugo Francisco Galván García (por su apoyo incondicional y comprensión en momentos difíciles), Ing. Albino Arteaga Escamilla, Ing. Mónica Sosa Gómez, Ignacio Raúl Bermúdez (esa confianza y amistad siempre acompañadas por el humo y la charla), Manuel de Jesús Montero Pérez, Efrén Flores Rangel (mi primer amigo de esta vida), Adrián y Alder, y con una mención especial al Sr. José Uribe Flores (por todo ese apoyo espiritual y amistad, ¡Gracias!).

A **mis compañeros de tesis**: Eric Hernán Morales Tlacatelpa (esa ironía, sencillez, amistad, comprensión y apoyo en los momentos difíciles, hacen que las penas no sean tantas) y Agustín Galicia Salazar.

A **El Escuadrón del SS**: Ing. Jorge Rayas Frutos (por ese apoyo moral, consejos, paciencia y amistad siempre desinteresada), José Luis Ibarra Martínez, Rufino Álvarez Guillén (por esa amistad tan sincera), Saúl Galván Villalobos, Ing. Alfredo Curio Nahón (por enseñarme esos detalles de la vida que hacen que la amistad siempre perdure pase lo que pase), Ing. Víctor Hugo Hernández Gómez (por esos consejos tan oportunos), Trinidad Ramírez Flores, Benjamín Montesinos, Walfred Elí Aldana García, Víctor Hugo Mondragón Fabián, Ernesto y Enrique Ramírez, Fernando Castillo Márquez, Mario Garduño Reynoso, José Alfredo Rivera Hernández (por su ayuda tan valiosa), Arturo Varela Vega.

## DEDICATORIAS

---

**Al escuadrón de Torques de Ford Motor Co:** Luisa Villalobos, Carlos Ochoa, Luis Madrigal, Fernando Bernal, Armando Ramírez, Norberto Aranda, Miguel Guzmán, José Antonio Páez, Giovanni Medel, Héctor, Pedro, Javier, Joel, José Morales, Alfredo Luján, Luis de la Rosa, Edgar, Jesús, Carlos Ramírez, Gabriel Bernal, Ricardo Rodríguez.

**A mis Amigas:** (A las que me apoyaron en los momentos en que me encontraba más hambriento de amor).

Ana Lilia Carmona Fuentes, Beatriz Ramírez Reyes, Zoila García Gómez (tu honestidad tan grande), Alejandra Torres Rivera (tu sarcasmo y buen humor siempre tan acertados, así como tu apoyo en los momentos difíciles), Sandra Ruiz Arellano (Tu espíritu joven y amistad que me ayudaron tanto... Nunca los olvidaré), Irma Martínez de la Riva, Agustina Jasso (gran amiga en todo momento), **Rosa María Ramírez Rodríguez** (toda tu comprensión y cariño son tan magníficos), Vanessa Laura, Lulú, Adriana Cruz Paz (esos momentos de charla surtieron en mí un efecto tan apacible) **y con mucho cariño y especialmente a ti** Jacqueline Consuelo Rodríguez García (Todo tu amor, honestidad, alegría, apoyo y pasión me condujeron al éxtasis de un triunfo y anhelo sin igual:... ¡**TÚ!**).

**A los Chavos de la Representación Estudiantil de IME:** ¡Gracias por su apoyo en los momentos de transición democrática e idealista de nuestra Universidad!

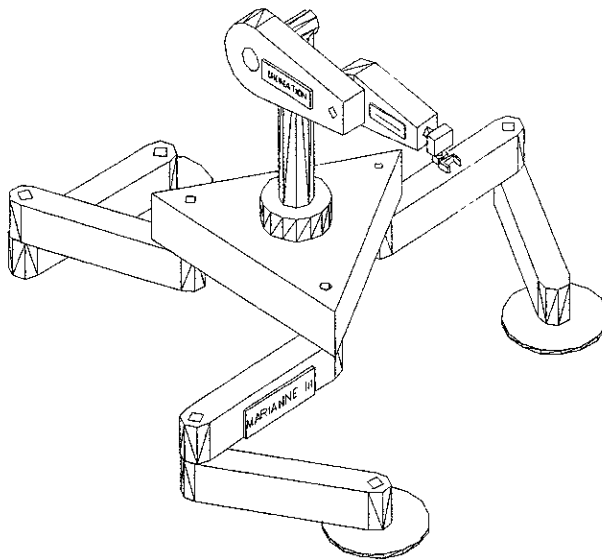
**A la Universidad Nacional Autónoma de México:** Siempre perdurará tu espíritu libre y soberano con el que forjaste a los profesionistas (¡No olvidemos que tenemos la obligación moral de retribuirte en todos los sentidos lo que nos diste: Educación y libertad por el conocimiento!) de este país.

**A la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán:** Sus instalaciones y lejanía del bullicio ciudadano tienen un efecto tan apacible que realmente es difícil hacerse a la idea de abandonarla.

CARLOS ERNESTO PINEDA GARCÍA.

# CAPÍTULO I

## 1.1 EL MARCO TEÓRICO



ROBOT COMPUESTO MARIANNE III

---

## 1.1 DEFINICIONES GENERALES

### INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se expone la aplicación del álgebra de Cuaterniones para generar las ecuaciones que gobiernan la cinemática de cuerpos rígidos, como cuerpos acoplados comúnmente llamados robots. Se plantea la identificación de las secuencias de movimientos de los manipuladores, con el propósito de establecer las bases para simular un robot de dos grados de libertad. El principal objetivo es mostrar la validez del álgebra de Cuaterniones, así como sus aplicaciones a los sistemas mecánicos que se encuentran en las máquinas en general. Para iniciar este trabajo, es necesario realizar una breve introducción al campo de la robótica y realizar las definiciones apropiadas en cuanto a los diversos tipos de robots industriales que se utilizan en la actualidad. El siguiente resumen de las definiciones fue consultado en [1].

**Definición I.1.1** La palabra "robot" proviene de la palabra Checa "ROBOTA" que significa monótona o trabajos forzados. Para el "Robot Institute of America", un robot es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas y dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para la realización de una diversidad de tareas.

Los robots son importantes porque pueden realizar tareas manipuladoras sencillas tanto o más eficientemente que el hombre, y son capaces de realizarlas en forma repetitiva y de manera incansable, pero lo que verdaderamente los hace útiles e importantes es el hecho de que pueden trabajar en medios ambientes en los que un ser humano puede poner en riesgo su persona y aún su vida, por ejemplo: en operaciones de manejo de materiales radioactivos; tareas con sustancias químicas; entre otras. Actualmente, los robots son utilizados también en la industria espacial, en simuladores de vuelo, en la industria farmacéutica y en general en la industria de la transformación.

**Definición I.1.2** Los robots son dispositivos mecánicos y electrónicos de alta precisión que se dañan fácilmente si no se manejan adecuadamente, además de ser herramientas de trabajo muy caras, por estos motivos es necesario proporcionar a las personas que van a trabajar con ellos un medio ambiente confiable que les permita familiarizarse con éstos sin arriesgar la estructura del robot y menos aún a las personas. De esta manera, es necesario capacitar al personal en simuladores computacionales que tienen la ventaja de ser baratos y seguros, ya que lo peor que le puede suceder a un simulador es dejar de interactuar con el usuario, pero este problema se puede resolver fácilmente reiniciando el simulador.

Las metodologías matemáticas para interpretar los movimientos particulares y globales de los robots, tuvieron sus principios en la década de los años 40, por esas fechas apareció el primer robot industrial fabricado por la empresa americana UNIMATION, sin embargo, desde que los investigadores Denavit-Hartenberg publicaron los llamados parámetros de Denavit-Hartenberg los cuales forman los componentes de una matriz de rotación y traslación, no se han desarrollado metodologías matemáticas que nos permitan interpretar los movimientos geométricos de los sistemas mecánicos dadas las exigencias de un desarrollo tecnológico que necesita de parámetros óptimos en la creación de prototipos más sofisticados. A la fecha se sigue empleando esta metodología, otra disciplina que interactúa con la robótica es la Inteligencia Artificial, se necesita en esta área seleccionar las secuencias de movimientos más elementales de los sistemas mecánicos para obtener criterios más acertados en la solución de un problema específico y así evitar programas muy complejos y extensos que en lugar de ser óptimos pierden la esencia física del problema.

Con el objetivo de desarrollar metodologías matemáticas más eficientes, se intentará realizar un análisis riguroso y sistemático de los movimientos geométricos de los sistemas mecánicos, evitando así el desarrollar prototipos con exagerada arquitectura mecánica y con un control muy caro, para lo cual se tratarán de obtener los parámetros de respuesta más óptimos.

Un robot posee dos características importantes:

- 1) Versatilidad, la cual puede definirse como la potencialidad estructural de ejecutar tareas diversas y/o ejecutar una misma tarea de forma diversificada.
- 2) La adaptabilidad al entorno. Esto es, el robot debe, por sí solo, alcanzar su objetivo (la ejecución de una tarea) a pesar de las perturbaciones imprevistas (pero limitadas) de su entorno, a lo largo de la ejecución de una tarea.

Un robot manipulador, en principio, es un dispositivo de propósito general. En la práctica los manipuladores son usualmente diseñados pensando en que cubran al menos una clase amplia de aplicaciones, como podría ser: soldar; manejar materiales; ensamblar; entre otras tareas. Estas aplicaciones en gran parte dictan la elección de varios parámetros de diseño del manipulador, incluyendo su estructura cinemática. Por ejemplo, el ensamblado de tarjetas de circuitos es realizada por un manipulador tipo SCARA<sup>1</sup>.

**Definición I.1.3** Los manipuladores pueden ser clasificados por muchos criterios, tales como su geometría, estructura cinemática, el tipo de aplicación para la cual fueron diseñados, la manera en que son controlados, etc.

En la actualidad, muchos manipuladores industriales tienen seis o menos grados de libertad, son usualmente clasificados cinemáticamente sobre la base del primer brazo o las primeras 3 juntas, describiendo por separado el órgano terminal o muñeca. La mayoría de estos manipuladores se clasifican en uno de los siguientes tipos de geometría.

- |   |              |   |              |
|---|--------------|---|--------------|
| 1 | Articulados. | 4 | Cilíndricos. |
| 2 | Esféricos.   | 5 | Cartesianos. |
| 3 | Tipo SCARA.  |   |              |

<sup>1</sup> Selective Compliance Assembly Robot Arm. (Brazo de Robot Selectivo de Ensamble para Agrupar)

Algunos de los robots industriales más usados son los tipo PUMA<sup>2</sup> y ABB System<sup>3</sup> de seis grados de libertad para transporte de piezas y ensamblado de partes, el tipo SCARA de cuatro grados de libertad para operaciones de inspección, robot tipo MotoMan de cinco grados de libertad para operaciones de soldadura y el tipo AS-RS<sup>4</sup> para trabajos de almacenaje de dos grados de libertad. Existen en la actualidad cadenas cinemáticas especiales llamadas plataformas o robots paralelos, que tiene ventajas sobre los manipuladores convencionales dada su alta precisión, sin embargo, su uso no está bien difundido por lo complicado de sus modelos matemáticos y altas redundancias, por lo que se encuentran en laboratorios de las universidades y su uso está restringido en la industria manufacturera; pero, en la industria aeronáutica y espacial son usados para construir simuladores complejos. De esta manera es necesario definir los robots paralelos de una forma correcta y estudiarlos para una aplicación más general, con el fin de un buen desarrollo de este trabajo se definirán los siguientes conceptos:

**Definición I.1.4** Un simulador de robot es un sistema que imita el funcionamiento o comportamiento del robot. Tiene el objetivo de enseñar a los futuros operadores las características y restricciones del robot que se va a manejar.

**Definición I.1.5** Las cadenas cinemáticas están constituidas por elementos llamados eslabones, el acoplamiento entre dos eslabones se realiza por medio de pares, los cuales pueden ser de dos clases: pares inferiores y pares superiores. Un par inferior existe cuando un elemento es acoplado a otro por medio de una acción envolvente y el contacto se realiza entre superficies. Si el contacto tiene lugar a lo largo de una línea o punto (un par de engranes), el acoplamiento se conoce como un par superior. En robótica se utilizan frecuentemente los pares inferiores.

---

<sup>2</sup> Programmable Universal Machine for Assembly. (Máquina Universal Programable para Ensamble)

<sup>3</sup> Sistema de Articulación-Base-Brazo.

<sup>4</sup> Articulation Spheric-Rotation Spheric. (Articulación Esférica Rotación-Esférica).

**Definición I.1.6** Los pares inferiores pueden clasificarse en seis tipos (ver Figura 2.9, Capítulo 2):

- I. Par de rotación (R), el cual permite un giro alrededor de un eje y evita traslaciones. Impone cinco restricciones, tres de traslación y dos de rotación.
- II. Par prismático (P), permite únicamente traslación a lo largo de una dirección. También impone cinco restricciones, evita traslación sobre dos direcciones y rotaciones con respecto a tres ejes.
- III. Par de tornillo (H), permite traslación a lo largo de un eje y rotación alrededor del mismo eje, existiendo una relación entre ellos. Por lo tanto, también impone cinco restricciones.
- IV. Par cilíndrico (C), permite dos movimientos independientes, traslación sobre un eje y rotación alrededor del mismo. Impone cuatro restricciones.
- V. Par esférico (S), permite rotación alrededor de tres ejes no coplanares e impide movimientos de traslación. Impone tres restricciones.
- VI. Par plano (E), permite traslación a lo largo de dos direcciones independientes y rotación alrededor de un eje perpendicular al plano de esas direcciones. Impone tres restricciones.

**Definición I.1.7** El grado de libertad<sup>5</sup> de un sistema mecánico se define como un número entero correspondiente al número mínimo de coordenadas requeridas para especificar una configuración geométrica de un sistema dado.

Para ubicar un cuerpo rígido en el espacio se necesitan seis grados de libertad, es decir, una traslación a lo largo de cada una de las tres direcciones del espacio y una rotación alrededor de un eje tridimensional.

**Definición I.1.8** Un multicuerpo es un conjunto de cuerpos rígidos en el cual estos pueden tener movimiento relativo unos con respecto a otros. La conexión de eslabones mediante pares cinemáticos constituye una cadena cinemática.

---

<sup>5</sup>Grados de libertad: Es una noción clave de la robótica y constituye un elemento obligado de su léxico. Técnicamente cada grado de libertad equivale a un eje de rotación que puede reproducir uno de los siguientes movimientos: adelante, atrás, derecha, izquierda, arriba y abajo.

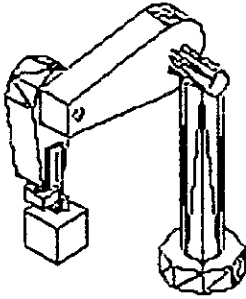


**Definición I.1.9** Los sistemas mecánicos se pueden clasificar de tres formas:

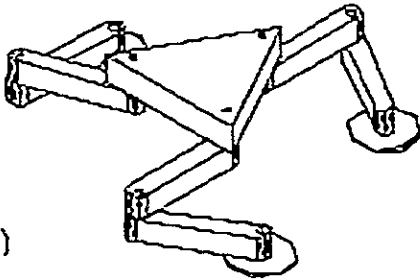
- 1) De cadena abierta. Es un conjunto de eslabones rígidos unidos por pares cinemáticos, donde uno de los extremos es fijado a una base, y el otro está libre, el cual es equipado con alguna herramienta que realiza una tarea específica, se les conoce comúnmente como manipuladores.
- 2) De cadena cerrada. Los eslabones ( $\geq 3$ ) forman lazos cerrados y el órgano terminal está conectado a una base fija, también se les llama mecanismos.
- 3) Plataformas (Robots paralelos). Son mecanismos de cadena cinemática cerrada, constituido por un órgano terminal de  $n$  grados de libertad y de una base fija unida entre sí por cadenas cinemáticas independientes, cada una de ellas cuenta a lo sumo de dos segmentos articulados, la articulación entre estos dos segmentos deberá tener un sólo grado de libertad. El movimiento de este mecanismo se efectúa por  $n$  actuadores simples, uno por cada cadena.

Con las definiciones anteriores se puede clasificar a los robots por medio de sus pares inferiores, por ejemplo:

El robot PUMA posee seis articulaciones del tipo revolución entonces es del tipo RRRRRR, el tipo SCARA se clasifica como RRRP (P es un par prismático), el MotoMan del tipo RRRRR, en tanto el AR-SR del tipo PP. Una plataforma de tres grados de libertad en el plano puede tener una configuración tipo RRR si posee articulaciones de revolución, (ver Figura 1:1).



a)



b)

Figura 1.1.

a) Robot PUMA.

b) Robot paralelo tipo RRR.

**Definición 1.1.10** Los robots se clasifican también en clases, por ejemplo los primeros robots que se construyeron son:

- a) Clase I, sus movimientos se restringen sólo a moverse en trayectorias puntuales, específicas y su interacción con el personal es directa, y no puede trabajar en medios ambientes desconocidos, es decir, no reconocen su entorno.
- b) Clase II, se refiere a una generación de robots dotados de sensores capaces de reconocer el entorno y pueden evitar obstáculos, sus lenguajes de programación son más sofisticados y pueden interactuar con medios ambientes hostiles.
- c) Clase III, son robots dotados de inteligencia artificial y con sistemas de visión capaces de reconocer objetos variados y tomar decisiones por ellos mismos, su comunicación es a través de lenguaje de hombre o por sistemas de realidad virtual.

Así, a través del tiempo se ha clasificado a los robots tanto por sus pares cinemáticos como por las clases de generaciones. Para el propósito de este trabajo sólo se trabajará

con cadenas cinemáticas que poseen pares de revolución y se realizará una simulación computacional de un robot de la clase II, es decir, de un robot tipo RR.

En este contexto utilizaremos Cuaterniones como una alternativa para construir el modelo cinemático de posicionamiento, para obtener los parámetros de desplazamiento angular de los eslabones con la finalidad de controlar una secuencia de movimientos asociada con el robot.

### 1.2.1 ESPACIOS VECTORIALES Y TRANSFORMACIONES LINEALES [3]

A continuación definiremos el marco teórico que será utilizado en este trabajo; se presenta en esta parte las bases conceptuales de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

#### 1.2.1 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

**Definición I.2.1.1** Sea  $X$  un conjunto y  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  una operación binaria. La pareja  $(X, *)$  es un grupo si:

- 1 Ley asociativa:  $x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall x, y, z \in X.$
- 2 Existencia de la identidad:  $\forall x \in X$ , existe  $1 \in X$ , tal que:  
 $x * 1 = x$
- 3  $\forall x \in X$  existe un  $x^{-1} \in X$  tal que:  
 $x * x^{-1} = 1$  [1.1]

**Definición I.2.1.2** El grupo  $(X, *)$  es un grupo conmutativo o abeliano si:

$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in X \quad [1.2]$$

**Definición I.2.1.3** Sea  $X$  un conjunto y  $\oplus$ :  $X \times X \rightarrow X$ ,  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  dos operaciones binarias. La terna  $(X, \oplus, *)$  es un campo si:

- I. La pareja  $(X, \oplus)$  es un grupo conmutativo,

II. La pareja  $(X, *)$  es un grupo conmutativo, excepto por la existencia del inverso con respecto a la operación  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  del elemento nulo de la operación  $\oplus$ :  $X \times X \rightarrow X$  además, las siguientes propiedades distributivas deben ser satisfechas:

$$\begin{aligned} x * (y \oplus z) &= (x * y) \oplus (x * z) \\ (x \oplus y) * z &= x * z + y * z. \end{aligned} \tag{1.3}$$

### 1.2.2 ESPACIOS VECTORIALES.

**Definición 1.2.2.1** Sea  $(X, \oplus)$  un grupo conmutativo y sea  $(\kappa, \oplus, *)$  un campo, la pareja  $(X, \oplus)$  es un espacio vectorial si existe una operación  $\bullet$ :  $\kappa \times X \rightarrow X$ , llamada multiplicación escalar tal que:

$$\begin{aligned} 1) \quad x \oplus (-1 \bullet x) &\equiv 0 & \forall x, 0 \in X \\ 2) \quad \alpha \bullet (x \oplus y) &\equiv \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y & \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \kappa \\ 3) \quad \alpha \bullet (x * y) &\equiv (\alpha \bullet x) * y & \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \kappa \\ 4) \quad \alpha \bullet (\beta \bullet x) &\equiv (\alpha \bullet \beta) \bullet x & \forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa \\ 5) \quad 1 \bullet x &\equiv x & \forall x \in X. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Donde -1 es el inverso con respecto a  $\oplus$ :  $X \times X \rightarrow X$  de la identidad con respecto a  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$

**Definición 1.2.2.2** Se llama base de un espacio n-dimensional  $X$  a cualquier conjunto  $B = \{e_k\} \subset X$  generador de vectores linealmente independientes.

**Definición 1.2.2.3** Si el número de elementos de una base  $B = \{e_k\}_{k=1}^m$  de un espacio vectorial tiene un número finito de elementos, entonces se dice que el espacio es de dimensión finita. El número de elementos de la base es llamado la dimensión del espacio vectorial.

**Definición 1.2.2.4** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\kappa$ . Un tensor de segundo orden es una transformación lineal  $T: X \rightarrow X$ .

**Definición 1.2.2.5** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo  $\kappa$ , el conjunto definido por:

$$L(X, X) \equiv \{ T: X \rightarrow X, T \text{ lineal} \}$$

dicho conjunto con la estructura algebraica definida por

- i)  $(S + W)x = Sx + Wx, \quad \forall S, W \in L(X, X), x \in X$  [1.5]
- ii)  $\alpha \bullet (S)x = \alpha \bullet (Sx) \quad \forall \alpha \in \kappa, S \in L(X, X), x \in X$

es un espacio vectorial real y es llamado el espacio de tensores de segundo orden.

**Definición 1.2.2.6** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\kappa$ . La transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle: X \times X \rightarrow \mathfrak{R}$  es un producto interno si:

- 1)  $\langle x, y \rangle \equiv \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in X$
- 2)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle \equiv \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa$
- 3)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  [1.6]  
 $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

**Definición 1.2.2.7** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\kappa$ . La función  $n: X \rightarrow \mathfrak{R}$  es una norma en  $X$  si:

- 1)  $n(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \text{y } n(x) = 0 \text{ si y sólo si } x = 0$
- 2)  $n(x \otimes y) \leq n(x) \otimes n(y) \quad \forall x, y \in X$  [1.7]
- 3)  $n(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet n(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$

### 1.2.3 TRANSFORMACIONES LINEALES.

**Definición 1.2.3.1** Sean  $(X, \oplus)$  y  $(Y, \oplus)$  dos espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\kappa$ . La transformación  $T: X \rightarrow Y$  es lineal si:

$$T(\alpha \bullet x \oplus \beta \bullet y) = \alpha \bullet T x \oplus \beta \bullet T y \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa. \quad [1.8]$$

**Definición 1.2.3.2** Sea  $T: X \rightarrow Y$  lineal, entonces el conjunto,

$$N_T = \{u \in X: Tu = 0\} \subset X \text{ es llamado el núcleo de } T: X \rightarrow Y. \quad [1.9]$$

El conjunto

$$R_T = \{v \in Y: \text{existe algún } u \in X, \text{ tal que } v = Tu\} \subset Y,$$

es llamado el rango de  $T: X \rightarrow Y$ .

**Definición 1.2.3.3** La transformación  $T: X \rightarrow Y$  es uno a uno si:

$$Tx = Ty \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X \quad [1.10]$$

**Definición 1.2.3.4** La transformación  $T: X \rightarrow Y$  es sobre si:

$$R_T = Y. \quad [1.11]$$

**Definición 1.2.3.5** La transformación  $T: X \rightarrow Y$  es un isomorfismo si  $T$  es lineal, uno a uno sobre  $Y$ .

**Definición 1.2.3.6** La transformación  $Q: X \rightarrow X$  es ortogonal si

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X \quad [1.12]$$

**Definición 1.2.3.7** Sea  $R: X \rightarrow X$  una transformación ortogonal. Se dice que  $R$  es una rotación si

$$\text{de } R > 1 \quad [1.13]$$

### 1.3 EL ÁLGEBRA DE QUATERNIONES [1] y [4].

En el siglo pasado el matemático inglés Sir William Hamilton desarrolló los llamados Cuaterniones desde un punto de vista geométrico pero no fue sino hasta principios de los años noventa de este siglo, cuando en Francia el Institute National de Recherche en Informatique et Automatique publicó un artículo llamado Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies Partie 1: Le Cadre Theorique. (Luis Reyes Ávila), donde se presenta una forma paramétrica de representar las rotaciones. Así, los cambios de base son representados mediante dos operaciones binarias y se plantea una transformación lineal que permite representar de forma adecuada la física de los sistemas mecánicos.

El presente capítulo es un resumen de este reporte (INRIA) que se ha realizado con el fin de mostrar la sistematización del álgebra de Cuaterniones, en la primera parte se presentará la estructura algebraica en  $\mathbb{R}^4$  que permitirá identificar la estructura de los Cuaterniones ( $\mathbb{Q}$ ) como un grupo multiplicativo no conmutativo, y se mostrará igualmente que "Q" es un espacio vectorial normado. En la segunda parte se definirá una transformación lineal  $\rho(p, \bullet): \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Q}$  fijo, que preserva el producto interno y en donde la representación matricial nos permite identificar un grupo de transformaciones ortogonales propias, que representan en la mecánica las rotaciones finitas de cuerpos rígidos. En la tercera parte se encontrarán algunos resultados importantes de la representación  $\rho(p, \bullet): \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Q}$  fijo concerniente a la composición de rotaciones. En la cuarta parte se introducirán la forma paramétrica de los valores característicos asociados a la matriz de rotación, y finalmente se estudiará las soluciones del problema cinemático inverso de cuerpos rígidos.

Se definen dos operaciones binarias en  $\mathbb{R}^4$ , una aditiva  $\oplus: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y una multiplicativa  $\ast: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , donde los conjuntos  $(\mathbb{R}^4, \oplus)$  y  $(\mathbb{R}^4, \ast)$  forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo. También se definirá una multiplicación escalar  $\bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  y un producto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante tal estructura el conjunto  $\mathbb{Q} = (\mathbb{R}^4, \oplus, \ast, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno llamado el espacio vectorial de Cuaterniones

Sea el conjunto en  $\mathfrak{R}^4$  el cual se definen dos operaciones binarias  $\oplus: \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  y  $*$ :  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ . Esto es,

- I.  $(a, b, c, d) \oplus (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a + \alpha, b + \beta, c + \gamma, d + \delta)$
- II.  $(a, b, c, d) * (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha), \forall (a, b, c, d), (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathfrak{R}^4. \quad [1.14]$

La operación  $\oplus: \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  es la suma usual en  $\mathfrak{R}^4$  y es conocido que el conjunto  $(\mathfrak{R}^4, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo. Además las operaciones anteriores satisfacen lo siguiente:

**Teorema 1.3.1** El conjunto  $Q \equiv (\mathfrak{R}^4, \oplus, *)$  es un cuerpo no conmutativo.

Demostración:

- 1) La operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  es asociativa, dado  $p, q, s \in Q$ , tal que

$$p = (a, b, c, d), q = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ y } s = (x, y, z, w), \text{ entonces}$$

$$p * (q * s) = (p * q) * s$$

En efecto,

$$p * (q * s) = ((a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)x - (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)y - (a\gamma - b\delta - c\alpha + d\beta)z - (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)w,$$

$$(a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)x + (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)y - (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)z - (a\gamma - b\delta - c\alpha + d\beta)w,$$

$$(a\gamma - b\delta + c\alpha - d\beta)x + (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)y + (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)z - (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)w,$$

$$(a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)x + (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)y + (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)z - (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)w) =$$

$$= (p * q) * s$$

- 2) El elemento  $I = (1, 0, 0, 0) \in Q$  es tal que:  $I * p = p * I = p, \forall p \in Q$ , esto es  $I$  es el elemento neutro de la multiplicación en  $Q$ .
- 3) Para toda  $p \in Q, p \neq (0, 0, 0, 0)$ , existe un  $p' \in Q$  tal que  $p * p' = I$ , donde  $p'$  es el inverso multiplicativo, dado  $p = (a, b, c, d), p' = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), p \text{ y } q \in Q$ , tal que  $p * p' = Y$ . En efecto si  $p * p^{-1} = I$ , entonces:

$$a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta = 0, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma = 1, a\gamma - b\delta - c\alpha + d\beta = 1, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha = 1,$$



resolviendo el sistema de ecuaciones se verifica que el elemento inverso es:

$$p^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \right)$$

- 4) La operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  no es conmutativa. Dado  $p = (0,1,0,0) \in Q$  y  $q = (0,0,1,0) \in Q$  entonces  $p * q = -q * p = (0,0,0,1)$ .
- 5) Dados  $p, q, s \in Q$  entonces son satisfechas las siguientes propiedades distributivas:
- $$(p \oplus q) * s = p * s \oplus q * s,$$
- $$p * (q \oplus s) = p * q \oplus p * s.$$
- 6) La operación  $\bullet$ :  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  definida por:

$$\alpha \bullet (a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d), \forall (a, b, c, d) \in \mathfrak{R}^4 \quad [1.15]$$

es una multiplicación escalar en  $Q$ . Por lo tanto la terna  $(\mathfrak{R}^4, \oplus, \bullet)$  es un espacio vectorial real.

La transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ :  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ , dada por:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^3 p_i q_i \in \mathfrak{R} \quad [1.16]$$

es un producto vectorial interno en  $\mathfrak{R}^4$  y la norma asociada es:

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{\frac{1}{2}} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad [1.17]$$

Por lo tanto  $Q = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, \|\bullet\|)$ , es un espacio vectorial normado el cual se llamará Espacio Vectorial de Cuaterniones y sus elementos Cuaterniones.

Ahora se considera los siguientes subespacios vectoriales de  $Q$

$$Q_R = (a, 0, 0, 0): a \in \mathfrak{R} \subset Q, \quad [1.18]$$

$$Q_V = ((0, b, c, d): b, c, d \in \mathfrak{R}^3),$$

donde  $Q_R$  y  $Q_V$  es un espacio vectorial real en  $\mathfrak{R}$ , luego entonces se puede representar el espacio  $Q$  como:

$$Q = Q_R \oplus Q_V \equiv \{ p \in Q: p = p_R \oplus p_V, p_R \in Q_R, p_V \in Q_V \}.$$

entonces, las transformaciones  $T_R : Q_R \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $T_V : Q_V \rightarrow \mathfrak{R}^3$ , definidas por:

$$T_R = (a, 0, 0, 0) = a$$

$$T_V = (0, b, c, d) = (b, c, d)$$

son isomorfismos, por lo tanto, si  $q = (a, b, c, d) \in Q$ , entonces se puede expresar a  $q$  como sigue:  $q = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b, c, d)$ . [1.19]

Se observa entonces que la estructura algebraica definida por el teorema 1.3.1 es una generalización a  $\mathfrak{R}^4$  del álgebra de los números complejos, entonces se puede introducir el concepto siguiente:

Un Quatémion conjugado  $\bar{p} \in Q$  de  $p = (a, b, c, d)$  esta definido por :

$$\bar{p} = (a, -b, -c, -d). \quad [1.20]$$

**Teorema 1.3.2** Dado  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in Q$ ,  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in Q$  entonces

- 1)  $\overline{p \oplus q} = \bar{p} \oplus \bar{q}$ ,
- 2)  $\overline{p * q} = \bar{q} * \bar{p}$ , [1.21]
- 3)  $p * \bar{p} = \bar{p} * p \in Q_{\mathfrak{R}}$ .

Demostración:

Utilizando las propiedades de la adición y la definición de Quatémiones conjugado se tiene:

- 1)  $\overline{p \oplus q} = (p_0 + q_0, -p_1 - q_1, -p_2 - q_2, -p_3 - q_3) = \bar{p} \oplus \bar{q}$ ,
- 2)  $\overline{p * q} = (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3, p_0 q_1 - p_1 q_0 - p_2 q_3 + p_3 q_2, -p_0 q_2 + p_1 q_3 - p_2 q_0 - p_3 q_1, -p_0 q_3 - p_1 q_2 + p_2 q_1 - p_3 q_0) = \bar{q} * \bar{p}$ ,
- 3)  $p * \bar{p} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 0, 0, 0) = p * \bar{p}$

La transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$  es definida por:

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \quad \forall p, q \in \mathfrak{R}^4 \quad [1.22]$$

La norma  $\| \bullet \| : Q \rightarrow \mathfrak{R}$  admite la siguiente representación:

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \{ \bar{p} * p \}^{1/2} \quad [1.23]$$

### 1.3.3 REPRESENTACIÓN PARÁMETRICA DE ROTACIONES FINITAS.

El objetivo de esta parte es unificar y por consecuencia simplificar las diferentes formas utilizadas en la mecánica para representar paramétricamente las rotaciones finitas de cuerpos rígidos.

Para este objetivo se define la siguiente transformación lineal:

Sea  $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$ ,  $p \in Q$ , entonces:

$$\rho(p, q) = p * q * p^{-1} = \frac{1}{\|p\|^2} * (p * q * \bar{p}), \quad \forall p, q \in Q, \quad [1.24]$$

Dicha transformación preserva el producto interno, la norma y el ángulo.

**Teorema 1.3.1.1** La transformación  $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$  es lineal, ortogonal y  $\rho(p, q) \in Q_v, \forall q \in Q_v$ .

Demostración: Utilizando las propiedades asociativas y distributivas de la estructura algebraica de  $Q$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(p, q \oplus s) &= \frac{1}{\|p\|^2} * \{p * ((q \oplus s) * \bar{p})\} = \frac{1}{\|p\|^2} * \{p * ((q * \bar{p} \oplus s * \bar{p}))\} = \\ &= \frac{1}{\|p\|^2} * \{p * (q * \bar{p}) \oplus p * (s * \bar{p})\} = \rho(p, q) \oplus \rho(p, s), \quad \forall p, q, s \in Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(p, \alpha * q) &= \frac{1}{\|p\|^2} * \{p * (\alpha * q) * \bar{p}\} = \frac{\alpha}{\|p\|^2} * \{p * q * \bar{p}\} = \\ &= \alpha * \rho(p, q), \quad \forall p, q, s \in Q. \quad \alpha \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Para probar la ortogonalidad se debe demostrar que:

$$\langle \rho(p, q), \rho(p, s) \rangle = \rho(q, s) \quad \forall q, s \in Q.$$

En efecto, utilizando los teoremas 1.3.1, y 1.3.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \rho(p, q), \rho(p, s) \rangle &= \frac{1}{2|p_1|^2} \{ (p^* q^* p)^* (p^* s^* p) \oplus (p^* s^* p)^* (p^* q^* p) \} \\ &= \frac{1}{2|p_1|^2} \{ p^* (q^* s \oplus s^* q)^* p \} = \rho(q, s) \end{aligned}$$

Se observa que si  $q = (0, q_1, q_2, q_3) \in Q_V$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(p, q) &= \frac{1}{2|p_1|^2} (0, (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)q_1 + 2(p_1 p_2 - p_0 p_3)q_2 + 2(p_0 p_2 + p_1 p_3)q_3, \\ &\quad 2(p_0 p_3 - p_1 p_2)q_1 + (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)q_2 + 2(p_2 p_3 - p_0 p_1)q_3, \quad [1.25] \\ &\quad 2(p_1 p_3 - p_0 p_2)q_1 + 2(p_0 p_1 + p_2 p_3)q_2, (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)q_3) \in H_V. \end{aligned}$$

Dado lo anterior, se puede construir la matriz  $M_{\rho(p, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$  asociada a la transformación [1.24]

**Teorema 1.3.1.2** La matriz  $M_{\rho(p, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$  asociada a la transformación  $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ , dada la base  $B = \{e_j\}_{j=1}^4$  es :

$$M_{\rho(p, \bullet)} = \frac{1}{|p_1|^2} = \begin{pmatrix} |p_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 2(p_1 p_2 - p_3 p_0) & 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \\ 0 & 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) & p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 & 2(p_2 p_3 - p_0 p_1) \\ 0 & 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) & 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{pmatrix} \quad [1.26]$$

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in Q$$

Demostración en [4]

Entonces la transformación  $\rho(p, \bullet) : Q_V \rightarrow Q_V$ , utiliza el isomorfismo entre  $Q_V$  y  $\mathbb{R}^3$  y se puede tener su representación en una matriz de orden  $3 \times 3$ . Para nuestro caso se construirá la matriz de  $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$  de orden  $4 \times 4$  respecto a la estructura algebraica de  $Q$ .

## CAPÍTULO II

## 2- CINEMÁTICA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. [2],[22], [30], [33]

## 2.1 INTRODUCCIÓN

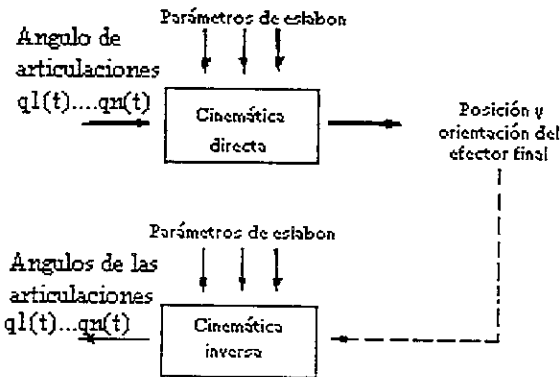
Un manipulador mecánico se puede modelar como una cadena articulada en lazo abierto con algunos cuerpos rígidos (elementos) conectados en serie por una articulación de revolución o prismática movida por actuadores. Un final de la cadena se une a una base soporte mientras que el otro extremo está libre y unido con una herramienta (el efecto final) para manipular objetos o realizar tareas de montaje. El movimiento relativo en las articulaciones resulta en el movimiento de los elementos que posicionan la mano en una posición deseada. En la mayoría de las aplicaciones de la robótica, el área de interés se encuentra en la descripción espacial del efecto final del manipulador con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fija.

La cinemática del brazo del robot trata con el estudio analítico de la geometría del movimiento de un robot con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo como una función del tiempo sin considerar las fuerzas/momentos que originan dicho movimiento. Así pues, trata con la descripción analítica del desplazamiento espacial del robot como función del tiempo, en particular las relaciones entre las variables espaciales de tipo articulación y la posición y orientación del efecto final del robot. Aquí se plantean dos preguntas básicas, ambas de interés teórico y práctico en la cinemática del robot:

1. Para un manipulador determinado, dado el vector de ángulos de las articulaciones  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \dots, \mathbf{q}_n(t))^T$  y los parámetros geométricos del elemento, donde  $n$  es el número de grados de libertad, ¿cuál es la orientación y la posición del efecto final del manipulador con respecto a un sistema de coordenadas de referencia?.
2. Dada una posición y orientación deseada del efecto final del manipulador y los parámetros geométricos de los elementos con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, ¿puede el manipulador alcanzar la posición y orientación de la mano que se desea? Y si puede, ¿cuántas configuraciones diferentes del manipulador satisfarán la misma condición?.

La primera pregunta suele conocerse como el problema *cinemático directo*, mientras que la segunda es el problema *cinemático inverso* (o *solución del brazo*). Como las variables independientes en un brazo de robot son las variables de articulación y se conocen los datos de la pieza u operación y lo demás se diseña, el problema cinemático inverso se utiliza de forma más frecuente. En la Figura 2.1 se muestra un simple diagrama de bloques que indica las relaciones entre estos dos problemas.

Como los elementos de un brazo pueden girar y/o trasladarse con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, el desplazamiento espacial total del efecto final se debe a las rotaciones angulares y traslaciones angulares de los elementos. Denavit y Hartenberg [1955] propusieron un método sistemático y generalizado de utilizar álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos de un brazo con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método utiliza una matriz de transformación homogénea de 4 X 4 equivalente que relaciona el desplazamiento espacial del "sistema de coordenadas" de la mano al sistema de coordenadas de referencia. Estas matrices de transformación homogéneas son también útiles para derivar las ecuaciones del movimiento dinámico de un brazo.



**Figura 2.1.**  
**Los problemas cinemáticos directo e inverso.**

En general, el problema cinemático inverso se puede resolver por algunas técnicas. Los métodos utilizados más comúnmente son la matriz algebraica, métodos iterativos o geométricos, Cuaterniones, Complejos y Octaniones. Se presentará un enfoque geométrico basado en el sistema de coordenadas de los elementos y la configuración del manipulador para obtener una solución de las articulaciones en forma cerrada para

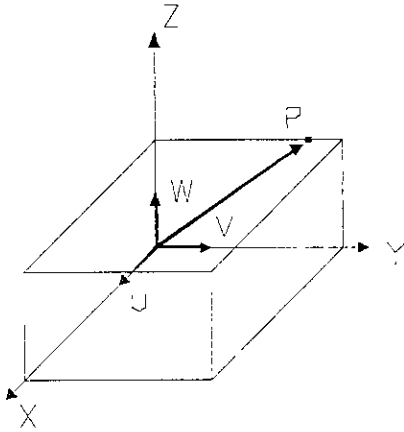
manipuladores simples con articulaciones giratorias. A continuación se estudiará un planteamiento más general utilizando matrices homogéneas  $4 \times 4$  para obtener una solución de la articulación para manipuladores simples.

**2.2 ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO.**

Se utiliza álgebra vectorial y matricial para desarrollar un método generalizado y sistemático para describir y representar la localización de los elementos de un brazo o robot de 2GDL con respecto a un sistema de referencia fijo. Como los elementos de un brazo pueden girar y/o trasladarse con respecto a un sistema de referencia, se establecerá un sistema de coordenadas ligado al cuerpo a lo largo del eje de la articulación para cada elemento. El problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación que relaciona el sistema de coordenadas ligado al cuerpo del sistema de coordenadas de referencia. Se utiliza una matriz de rotación de  $3 \times 3$  para describir las operaciones rotacionales del sistema ligado al cuerpo con respecto al sistema de referencia. Se utilizan entonces las coordenadas homogéneas para representar vectores de posición en un espacio tridimensional, y las matrices de rotación se ampliarán a matrices de transformación homogénea de  $4 \times 4$  para incluir las operaciones traslaciones del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Esta representación matricial de un elemento mecánico rígido para describir la geometría espacial de un brazo fue utilizada por vez primera por Denavit y Hartenberg [1955]. La ventaja de utilizar la representación de elementos de Denavit-Hartenberg es su totalidad de algoritmos para derivar las ecuaciones cinemática de un brazo.

**2.2.1 MATRICES DE ROTACIÓN.**

Una matriz de rotación de  $3 \times 3$  se puede definir como una matriz de transformación que opera sobre un vector de posición en un espacio euclídeo tridimensional y transforma sus coordenadas expresadas en un sistema de coordenadas rotado *OUVW* (sistema ligado al cuerpo) a un sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*.



**Figura 2.2.**  
**Sistema de coordenadas de diferencia y ligado al cuerpo.**

En la Figura 2.2 se dan dos sistemas de coordenadas rectangulares, uno el sistema de coordenadas OXYZ, con OX, OY y OZ como sus ejes de coordenadas, y el sistema de coordenadas OUVW, con OU, OV, OW como sus ejes de coordenadas. Ambos sistemas de coordenadas tienen sus orígenes coincidentes en el punto O. El sistema de coordenadas OXYZ está fijo en el espacio tridimensional y se considera que es el sistema de referencia. El sistema de coordenadas OUVW está girando con respecto al sistema de referencia OXYZ. Físicamente, uno puede considerar que el sistema de coordenadas OUVW es un sistema de coordenadas fijado al cuerpo. Esto es, está permanente y convenientemente unido al cuerpo rígido y se mueve junto con él. Sean  $(i_x, j_y, k_z)$  y  $(i_u, j_v, k_w)$  los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas de los sistemas OXYZ y OUVW, respectivamente. Un punto  $p$  en el espacio se puede representar por sus coordenadas con respecto a ambos sistemas de coordenadas. Para facilitar el análisis, supondremos que  $p$  está en reposo y fijo con respecto al sistema de coordenadas OUVW.

Entonces el punto  $p$  se puede representar por sus coordenadas con respecto al sistema de coordenadas OUVW y OXYZ, respectivamente, como:

$$P_{uvw} = (P_u, P_v, P_w)^T \quad \text{y} \quad P_{xyz} = (P_x, P_y, P_z)^T \quad [2.2-1]$$

Donde  $P_{uvw}$  y  $P_{xyz}$  representan el mismo punto  $p$  en el espacio con respecto a diferentes sistemas de coordenadas y el superíndice  $T$  en los vectores y en las matrices denota la operación transpuesta.



Es útil encontrar una matriz  $R$  de transformación  $3 \times 3$  que transforme las coordenadas de  $P_{uvw}$  a las coordenadas expresadas con respecto al sistema de coordenadas  $OXYZ$ , después de que el sistema de coordenadas  $OUVW$  ha sido girado. Representándola en forma simplificada queda de la siguiente manera, esto es:

$$P_{xyz} = RP_{uvw} \quad [2.2-2]$$

Nótese que físicamente el punto  $P_{uvw}$  ha sido girado junto con el sistema de coordenadas  $OUVW$ . Recordando la definición de las componentes de un vector se tiene:

$$P_{uvw} = P_u i_u + P_v j_v + P_w k_w \quad [2.2-3]$$

Donde,  $P_y$  y  $P_z$  representan las componentes de  $p$  a lo largo de los ejes  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ , respectivamente, o las proyecciones de  $p$  sobre los ejes respectivos. Así, utilizando la definición del producto escalar y la ecuación (2.2-3), se obtienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} P_x &= i_x \cdot p = i_x \cdot i_u P_u + i_x \cdot j_v P_v + i_x \cdot k_w P_w \\ P_y &= j_y \cdot p = j_y \cdot i_u P_u + j_y \cdot j_v P_v + j_y \cdot k_w P_w \\ P_z &= k_z \cdot p = k_z \cdot i_u P_u + k_z \cdot j_v P_v + k_z \cdot k_w P_w \end{aligned} \quad [2.2-4]$$

El sistema [2.2-4] también puede ser expresado en términos matriciales de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix} \quad [2.2-5]$$

Utilizando la matriz simplificada  $R$  en la ecuación (2.2-2) la cual estará dada como sigue:

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad [2.2-6]$$

Análogamente, se puede obtener las coordenadas de  $P_{uvw}$  con las coordenadas de  $P_{xyz}$ :

$$P_{uvw} = QP_{xyz} \quad [2.2-7]$$

ó

$$\begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{k}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad [2.2-8]$$

Como los productos escalares son conmutativos, se puede ver de las ecuaciones (2.2-6) a (2.2-8) que la matriz de rotación tiene las propiedades siguientes:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad [2.2-9]$$

y

$$\mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad [2.2-10]$$

Donde  $\mathbf{R}^{-1}$  y  $\mathbf{R}^T$  son las matrices inversa y transpuesta de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad 3X3. La transformación en la ecuación (2.2-2) ó (2.2-7) se llama una transformación *ortogonal*, y como los vectores en los productos escalares son todos vectores unitarios, se llama también una transformación *ortonormal*.

El interés principal en desarrollar la matriz de transformación anterior, es encontrar las matrices de rotación que representan rotaciones del sistema de coordenadas *OUVW* respecto a cada uno de los tres ejes principales del sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*. Si el sistema de coordenadas *OUVW* se gira un ángulo  $\alpha$  respecto al eje *OX* para llegar a una nueva posición en el espacio, entonces el punto  $\mathbf{P}_{uvw}$ , que tiene coordenadas  $(\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v, \mathbf{P}_w)^T$  con respecto al sistema *OUVW*, tendrá coordenadas diferentes  $(\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z)^T$  con respecto al sistema de referencia *OXYZ*.

La matriz de transformación necesaria  $\mathbf{R}_{x,\alpha}$  se llama la matriz de rotación respecto al *OX* con ángulo  $\alpha$  y eje de rotación *X*.  $\mathbf{R}_{x,\alpha}$  se puede derivar del concepto de matriz de transformación anterior, esto es,

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \mathbf{P}_{uvw} \quad [2.2-11]$$

con  $\mathbf{i}_x \equiv \mathbf{i}_u$ , y

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad [2.2-12]$$

Análogamente, las matrices de rotación 3 X 3 para rotaciones con respecto al eje OY con ángulo  $\phi$  y respecto al eje OZ con ángulo  $\theta$  son, respectivamente (véase Figura 2.3),

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-13]$$

Las matrices  $R_{x,\alpha}$ ,  $R_{y,\phi}$  y  $R_{z,\theta}$  se llaman las *matrices de rotación básicas*. Se pueden obtener otras matrices de rotación finitas a partir de estas matrices.

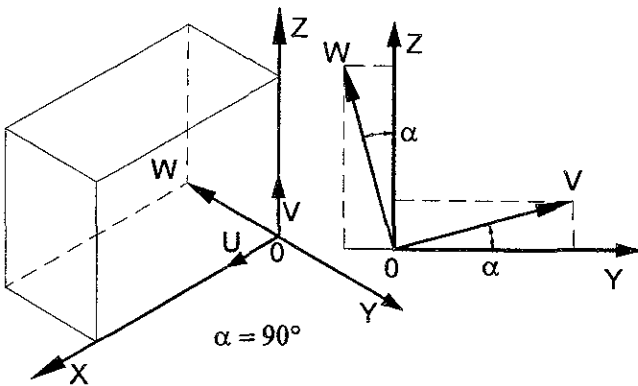


Figura 2.3a. Sistemas de coordenadas en rotación.

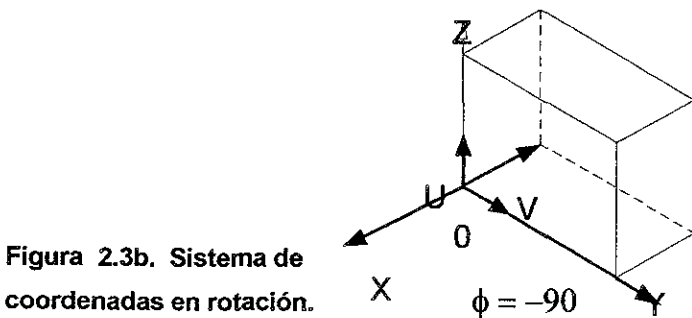


Figura 2.3b. Sistema de coordenadas en rotación.

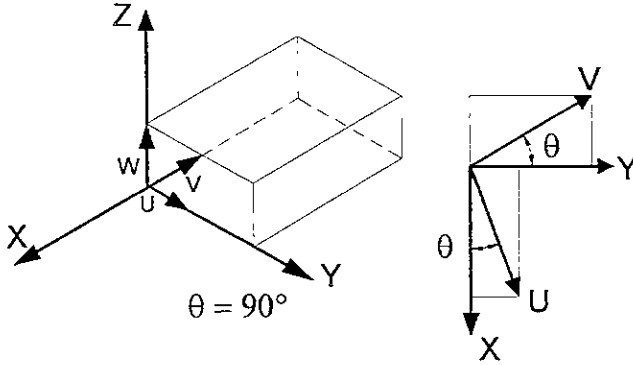


Figura 2.3c. Sistemas de coordenadas en rotación.

2.2.2 MATRIZ DE ROTACIÓN COMPUESTA.

Las matrices de rotación básicas se pueden multiplicar entre sí para representar una secuencia de rotación finita respecto del eje principal del sistema de coordenadas OXYZ. Como las multiplicaciones de matrices no conmutan, es importante el orden o la secuencia de realización de las rotaciones. Por ejemplo, para desarrollar una matriz de rotación que represente una rotación de ángulo  $\alpha$  respecto del eje OX seguida por una rotación del ángulo  $\theta$  respecto del eje OZ seguida por una rotación del ángulo  $\phi$  respecto del eje OY, la matriz de rotación resultante que representa estas rotaciones es:

$$R = R_{y,\phi} R_{z,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & S\phi S\alpha - C\phi S\theta C\alpha & C\phi S\theta S\alpha + S\phi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta C\alpha + C\phi S\alpha & C\phi C\alpha - S\phi S\theta S\alpha \end{bmatrix} \tag{2.2-14}$$

Donde:  $C\phi \equiv \cos\phi$ ;  $S\phi \equiv \sin\phi$ ;  $C\theta \equiv \cos\theta$ ;  $S\theta \equiv \sin\theta$ ;  $C\alpha \equiv \cos\alpha$ ;  $S\alpha \equiv \sin\alpha$ .

Esto es diferente de la matriz de rotación que representa una rotación de ángulo  $\phi$  respecto del eje OY seguida por una rotación de ángulo  $\theta$  respecto del eje OZ seguida por una rotación de ángulo  $\alpha$  respecto del eje OX. La matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{x,\alpha} R_{z,\theta} R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ C\alpha S\theta C\phi + S\alpha S\phi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta S\phi - S\alpha C\phi \\ S\alpha S\theta C\phi - C\alpha S\phi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta S\phi - C\alpha C\phi \end{bmatrix} \tag{2.2-15}$$

Además de girar respecto de los ejes principales del sistema de referencia  $OXYZ$ , el sistema de coordenadas giratorio  $OUVW$  puede también rotar respecto de su propio eje principal. En este caso, la matriz de rotación resultante o compuesta se puede obtener de las siguientes reglas simples:

1. Inicialmente ambos sistemas de coordenadas son coincidentes, de aquí que la matriz de rotación sea una matriz identidad  $I_3$  de  $3 \times 3$ .
2. Si el sistema de coordenadas giratorio  $OUVW$  está girando respecto de uno de los ejes principales del sistema  $OXYZ$ , entonces *premultiplicar* la matriz de rotación previa (resultante) por una matriz de rotación básica apropiada.
3. Si el sistema de coordenadas rotante  $OUVW$  está girando respecto de su propio eje principal, entonces *postmultiplicar* la matriz de rotación previa (resultante) por una matriz de rotación básica apropiada.

**2.2.3 MATRIZ DE ROTACIÓN RESPECTO DE UN EJE ARBITRARIO.**

Algunas veces el sistema de coordenadas rotante  $OUVW$  puede girar un ángulo  $\phi$  respecto de un eje arbitrario  $r$  que es un vector unitario que tiene de componentes  $r_x, r_y, r_z$  y que pasa a través del origen  $O$ . La ventaja es que para ciertos movimientos angulares el sistema  $OUVW$  puede realizar una rotación alrededor del eje  $r$  en lugar de algunas rotaciones respecto de los ejes principales de los sistemas de coordenadas  $OUVW$  y/o  $OXYZ$ . Para derivar esta matriz de rotación  $R_{r,\phi}$ , podemos primero realizar algunas rotaciones respecto de los ejes principales del sistema  $OXYZ$  para alinear el eje  $r$  con el eje  $OZ$ . Luego hacemos la rotación respecto de  $r$  con ángulo  $\phi$  y giramos el eje principal del sistema  $OXYZ$  para volver el eje  $r$  otra vez a su posición original. Con referencia a la figura 2.4, el alineamiento del eje  $OZ$  con el eje  $r$  se puede hacer girando respecto del eje  $OX$  con ángulo  $\alpha$  (el eje  $r$  está en el plano  $XZ$ ), seguido por una rotación de ángulo  $-\beta$  respecto del eje  $OY$  (el eje  $r$  ahora se alinea con el eje  $OZ$ ). Después de la rotación del ángulo  $\phi$  respecto del eje  $OZ$  o eje  $r$ , invertir las secuencias de rotaciones anteriores con sus respectivos ángulos opuestos. La matriz de rotación resultante es:

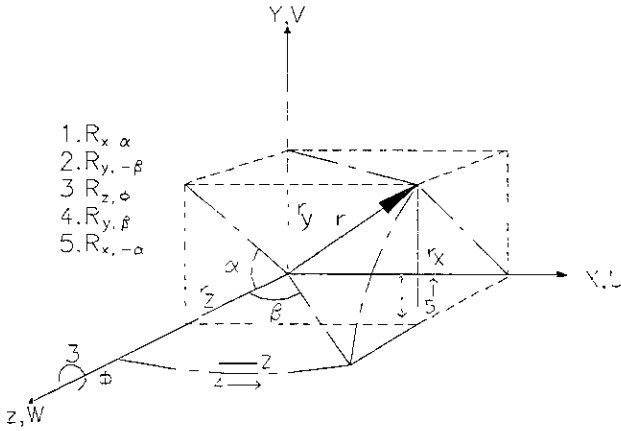


Figura 2.4. Rotación respecto de un eje arbitrario.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{r,\phi} &= \mathbf{R}_{x,-\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{x,\alpha} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De la figura 2.4 se encuentra fácilmente lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{sen}\alpha &= \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & \text{cos}\alpha &= \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \\
 \text{sen}\beta &= r_x & \text{cos}\beta &= \sqrt{r_y^2 + r_z^2}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + C\phi & r_x r_y V\phi - r_z S\phi & r_x r_z V\phi + r_y S\phi \\ r_x r_y V\phi + r_z S\phi & r_y^2 V\phi + C\phi & r_y r_z V\phi - r_x S\phi \\ r_x r_z V\phi - r_y S\phi & r_y r_z V\phi + r_x S\phi & r_z^2 V\phi + C\phi \end{bmatrix} \quad [2.2-16]$$

Donde  $V\phi = \text{vers } \phi = 1 - \cos\phi$ . Esta es una matriz de rotación.

2.2.4 Matriz de rotación con representación de ángulos de Euler.

La representación de los movimientos de un cuerpo rígido en forma matricial simplifica muchas operaciones, pero necesita nueve elementos para describir completamente la rotación de un cuerpo rígido. No conduce directamente un conjunto completo de coordenadas generalizadas. Tal conjunto de coordenadas generalizadas describe la orientación de un cuerpo rígido que rota con respecto a un sistema de coordenadas de referencia. Éste puede ser proporcionado por los llamados ángulos de Euler: ( $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ). Aunque los ángulos de Euler describen la orientación de un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia fijo, hay muchos tipos diferentes de representaciones de ángulos de Euler. Las tres representaciones más ampliamente utilizadas de los ángulos de Euler se tabulan en tabla 2.1.

Tabla 2.1. Tres tipos de representaciones de ángulos de Euler.			
	Sistema I de ángulos Eulerianos	Sistema II de ángulos de Euler	Sistema III elevación, desviación y giro
Secuencia de Rotaciones	$\phi$ respecto del eje OZ $\theta$ respecto del eje OU $\psi$ respecto del eje OW	$\phi$ respecto del eje OZ $\theta$ respecto del eje OV $\psi$ respecto del eje OW	$\psi$ respecto del eje OX $\theta$ respecto del eje OY $\phi$ respecto del eje OZ

La primera representación de ángulos de Euler en la Tabla 2.1 se suele asociar con el movimiento giroscopio. Esta representación se suele llamar los ángulos eulerianos, y corresponde a las siguientes secuencias de rotaciones (véase Figura 2.5):

1. Una rotación de ángulo  $\phi$  respecto del eje OZ ( $R_{z,\phi}$ ).
2. Una rotación de ángulo  $\theta$  respecto del eje OU rotado ( $R_{u,\theta}$ ).
3. Finalmente, una rotación de ángulo  $\psi$  respecto del eje rotado OW ( $R_{w,\psi}$ ).

La matriz de rotación euleriana resultante es:

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{u,\theta} R_{w,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad [2.2-17]$$

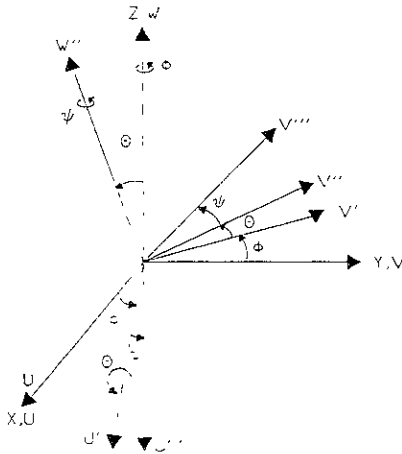


Figura 2.5.  
Sistema de ángulos eulerianos I.

La matriz de rotación de ángulos eulerianos anterior  $R_{\phi, \theta, \psi}$  se puede también especificar en términos de las rotaciones respecto de los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia: una rotación de ángulo  $\psi$  respecto del eje OZ seguida por una rotación de ángulo  $\theta$  respecto del eje OX y finalmente una rotación del ángulo  $\phi$  respecto del eje OZ. Con referencia a la Figura 2.6, otro conjunto de representación de ángulos de Euler  $\phi, \theta$  y  $\psi$  corresponde a la siguiente secuencia de rotaciones:

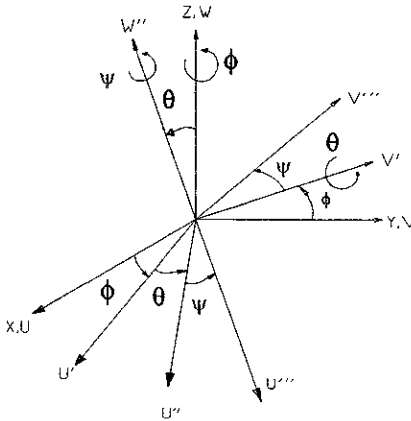
1. Una rotación del ángulo  $\phi$  respecto del eje OZ ( $R_{z, \phi}$ ).
2. Una rotación del ángulo  $\theta$  respecto del eje girado OV ( $R_{v, \theta}$ ).
3. Finalmente una rotación de ángulo  $\psi$  respecto del eje girado OW ( $R_{w, \psi}$ ).

La matriz de rotación resultante es:

$$R_{\phi, \theta, \psi} = R_{z, \phi} R_{v, \theta} R_{w, \psi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad [2.2-18]$$

La matriz de rotación de ángulos de Euler anterior  $R_{\phi, \theta, \psi}$  se puede también especificar en términos de las rotaciones respecto de los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia: una rotación de ángulo  $\phi$  respecto del eje OZ seguida por una rotación  $\theta$  respecto del eje OY y finalmente una rotación de ángulo  $\psi$  respecto del eje OZ.





**Figura 2.6.**  
**Sistema de ángulos eulerianos II.**

Otro conjunto de representación de ángulos de Euler para la rotación se llama *giro, elevación y desviación* (roll, pitch, yaw). Esta se utiliza principalmente en ingeniería aeronáutica en el análisis de vehículos espaciales. Corresponde a las siguientes rotaciones en secuencia:

1. Una rotación de  $\psi$  respecto del eje  $OX$  ( $R_{x,\psi}$ ) - desviación.
2. Una rotación de  $\theta$  respecto del eje  $OY$  ( $R_{y,\theta}$ ) - elevación.
3. Una rotación de  $\phi$  respecto del eje  $OZ$  ( $R_{z,\phi}$ ) - giro.

La matriz de rotación resultante es:

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}$$

[2.2-19]

La matriz de rotación anterior  $R_{\phi,\theta,\psi}$  para el giro, elevación y desviación se puede especificar en términos de la rotación respecto de los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia y del sistema de coordenadas giratorio: una rotación de ángulo  $\phi$  respecto del eje  $OZ$  seguida por una rotación de ángulo  $\theta$  respecto del eje girado  $OV$  y finalmente una rotación de ángulo  $\psi$  respecto del eje girado  $OU$  (véase Figura 2.7).

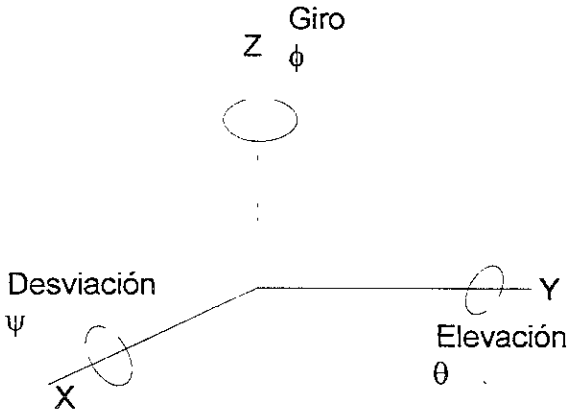


Figura 2.7.  
Giro, Elevación, y Desviación.

### 2.2.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN.

Es conveniente interpretar las matrices de rotación básica de forma geométrica. Escojamos un punto  $p$  fijo en el sistema de coordenadas  $OUVW$  que sea  $(1,0,0)^T$ , esto es,  $p_{uvw} = i_u$ . Entonces la primera columna de la matriz de rotación representa las coordenadas de este punto con respecto al sistema de coordenadas  $OXYZ$ . Análogamente, escogiendo  $p$  como  $(0,1,0)^T$  y  $(0,0,1)^T$ , se puede identificar que los elementos de la segunda y tercera columna de una matriz de rotación representan los ejes  $OV$  y  $OW$  respectivamente del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de coordenadas  $OXYZ$ . Así, dado un sistema de referencia  $OXYZ$  y una matriz de rotación, los vectores columna de la matriz de rotación representan los ejes principales del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de referencia y se puede deducir la localización de todos los ejes principales del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de referencia. En otras palabras, una matriz de rotación geoméricamente representa los ejes principales del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

Como la inversa de una matriz de rotación es equivalente a su transpuesta, los vectores fila de la matriz de rotación representan los ejes principales del sistema de referencia

OXYZ con respecto al sistema de coordenadas rotado OUVW. Esta interpretación geométrica de las matrices de rotación es un concepto importante que proporciona indicaciones en muchos problemas cinemáticos del brazo del robot. Se dan a continuación algunas propiedades útiles de las matrices de rotación:

1. Cada vector columna de la matriz de rotación es una representación del vector unitario del eje rotado expresado en términos de los vectores unitarios de los ejes del sistema de referencia, y cada vector fila es una representación del vector unitario de los ejes de referencia expresado en función de los vectores unitarios de los ejes rotados del sistema OUVW.
2. Como cada fila y columna es una representación de un vector unitario, la magnitud de cada una de ellas debería ser igual a 1. Esta es una propiedad directa de un sistema de coordenadas ortonormal. Más aún, el determinante de una matriz de rotación es +1 para un sistema de coordenadas dextrógiro y -1 para un sistema de coordenadas levógiro.
3. Como cada fila es una representación vectorial de vectores ortonormales, el producto interno (producto escalar) de cada fila por cualquier otra fila es igual a cero. Análogamente, el producto interno de cada columna por cualquier otra columna también es igual a cero.
4. La inversa de una matriz de rotación es la transpuesta de la matriz de rotación.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$$

Donde  $\mathbf{I}_3$  es una matriz identidad de 3 X 3.

Las propiedades 3 y 4 son especialmente útiles para comprobar los resultados de multiplicaciones de matrices de rotación y para determinar un vector columna erróneo.

2.2.6 COORDENADAS HOMOGÉNEAS.

Como una matriz de rotación de 3 X 3 no nos da ninguna posibilidad para la traslación y el escalado, se introduce una cuarta coordenada o componente al vector de posición  $\mathbf{p} = (P_x, P_y, P_z)^T$  en un espacio tridimensional que lo transforma en  $\hat{\mathbf{p}} = (w p_x, w p_y, w p_z, w)^T$ . Decimos que el vector de posición  $\hat{\mathbf{p}}$  se expresa en *coordenadas homogéneas*. En esta sección utilizamos un “circunflejo” (es decir,  $\hat{\mathbf{p}}$ ) para indicar la representación de un vector cartesiano en coordenadas homogéneas. Posteriormente, si no existe confusión, se eliminarán estos “circunflejos”. El concepto de una representación en coordenadas homogéneas en un espacio euclídeo tridimensional es útil para desarrollar transformaciones matriciales que incluyan rotación, traslación, escalado y transformación de perspectiva. En general, la representación de un vector de posición de  $N$  componentes por un vector de  $(N + 1)$  componentes se llama *representación en coordenadas homogéneas*. En una representación en coordenadas homogéneas, la representación de un vector  $N$ -dimensional se efectúa en el espacio  $(N + 1)$ -dimensional y el vector físico  $N$ -dimensional se obtiene dividiendo las coordenadas homogéneas por la coordenada  $N + 1$  que es  $w$ . Así, en un espacio tridimensional, un vector de posición  $\mathbf{p} = (P_x, P_y, P_z)^T$  se representa por un vector ampliado  $(w P_x, w P_y, w P_z)^T$  en la representación de coordenadas homogéneas. Las coordenadas físicas se relacionan a las coordenadas homogéneas como sigue:

$$p_x = \frac{w p_x}{w}, \quad p_y = \frac{w p_y}{w}, \quad p_z = \frac{w p_z}{w}$$

No existe una representación en coordenadas homogéneas única para una representación en un espacio tridimensional. Por ejemplo,  $\hat{\mathbf{p}}_1 = (w_1 p_x, w_1 p_y, w_1 p_z, w_1)^T$  y  $\hat{\mathbf{p}}_2 = (w_2 p_x, w_2 p_y, w_2 p_z, w_2)^T$  son todas las coordenadas homogéneas representando el mismo vector de posición  $\mathbf{p} = (P_x, P_y, P_z)^T$ . Así se puede ver a la cuarta componente de las coordenadas homogéneas  $w$  como un factor de escala. Si esta coordenada es la unidad ( $w = 1$ ), entonces las coordenadas homogéneas transformadas de un vector de posición son las mismas que las coordenadas físicas del vector. En aplicaciones de robótica, este factor de escala será siempre igual a 1, aunque se utiliza normalmente en informática gráfica como un factor de escala universal que toma cualquier valor positivo.

La matriz de transformación homogénea es una matriz de 4 X 4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Una matriz de transformación homogénea se puede considerar que consiste en cuatro submatrices:

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \hline \text{transformación de perspectiva} & \text{escalado} \end{array} \right] \quad [2.2-20]$$

La submatriz 3 X 3 superior izquierda representa la matriz de rotación; la submatriz superior derecha 3 X 1 representa el vector de posición del origen del sistema de coordenada rotado con respecto al sistema de referencia; la submatriz inferior izquierda 1 X 3 representa la transformación de perspectiva; y el cuarto elemento diagonal es el factor de escala global. La matriz de transformación homogénea se puede utilizar para explicar la relación geométrica entre el sistema ligado al cuerpo *OUVW* y el sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*. Si un vector de posición *p* en un espacio tridimensional se expresa en coordenadas homogéneas [es decir  $\hat{p} = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$ ], entonces, utilizando el concepto de matriz de transformación, una matriz de rotación 3 X 3 se puede ampliar a una matriz de rotación homogénea 4 X 4 *T<sub>rot</sub>* para operaciones de rotación pura. Así, las ecuaciones (2.2-12) y (2.2-13), expresadas como matrices de rotación homogénea, se hacen:

$$T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-21]$$

Estas matrices de rotación de 4 X 4 se llaman las *matrices de rotación homogéneas básicas*.

La submatriz superior derecha 3 X 1 de la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de trasladar el sistema de coordenadas *OUVW* que tiene ejes paralelos al sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*, pero cuyo origen está en (*dx, dy, dz*) del sistema de coordenadas de referencia:

$$T_{trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-22]$$

Esta matriz de transformación de 4 X 4 se llama *matriz de traslación básica*.

La submatriz inferior izquierda 1 X 3 de la matriz de transformación homogénea representa la transformación de perspectiva, que es útil para visión por computadora y la calibración de modelos de cámara. Por ahora, los elementos de esta matriz se fijan a cero para indicar la transformación de perspectiva nula.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz de transformación homogénea producen escalado local y global. Los primeros tres elementos diagonales producen un alargamiento o escalado local, como en:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-23]$$

Así, los valores de las coordenadas se alargan mediante los escalares *a*, *b* y *c*, respectivamente. Obsérvese que las matrices de rotación básicas,  $T_{rot}$ , no producen ningún efecto de escalado local.

El cuarto elemento diagonal produce escalado global como en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \quad [2.2-24]$$

Donde  $s > 0$ . Las coordenadas cartesianas físicas del vector son.

$$P_x = \frac{x}{s}, \quad P_y = \frac{y}{s}, \quad P_z = \frac{z}{s}, \quad w = \frac{s}{s} = 1 \quad [2.2-25]$$

Por tanto, el cuarto elemento diagonal en la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de reducir globalmente las coordenadas si  $s > 1$  y de alargar las coordenadas si  $0 < s < 1$ .

Una matriz de transformación homogénea 4 X 4 transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas *OUVW* en el sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*. Esto es, con  $w = 1$ :

$$\hat{\mathbf{p}}_{xyz} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{p}}_{uvw} \tag{2.2-26a}$$

y

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2-26b}$$

### 2.2.7 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEAS.

Una matriz de transformación homogénea para un espacio tridimensional se puede representar como en la ecuación (2.2-26b). Escojamos un punto  $\mathbf{p}$  fijo en el sistema de coordenadas *OUVW* y expresado en coordenadas homogéneas como  $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})^T$ ; esto es,  $\mathbf{P}_{uvw}$  es el origen del sistema de coordenadas *OUVW*. Entonces la submatriz superior derecha 3 X 1 indica la posición del origen del sistema *OUVW* con respecto al sistema de coordenadas de referencia *OXYZ*. Escojamos el punto  $\mathbf{p}$  como  $(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})^T$ ; esto es,  $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$ . Más aún, suponemos que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden en un punto *O*. Este tiene el efecto de hacer los elementos en la submatriz superior derecha 3 X 1 un vector nulo. Entonces la primera columna (o vector  $\mathbf{n}$ ) de la matriz de transformación homogénea representa las coordenadas del eje *OU* de *OUVW* con respecto al sistema de coordenadas *OXYZ*. Análogamente, tomando  $\mathbf{p}$  como  $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})^T$  y  $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})^T$ , se puede identificar que la segunda columna (o vector  $\mathbf{s}$ ) o la tercera columna (o vector  $\mathbf{a}$ ) de los elementos de la matriz homogénea representan respectivamente, los ejes *OV* y *OW* del sistema de coordenadas de referencia.

Así, dado un sistema de referencia  $OXYZ$  y una matriz de transformación homogénea  $T$ , los vectores columna de la submatriz rotación representan los ejes principales del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de coordenadas de referencia, y se puede dibujar la orientación de todos los ejes principales del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de coordenadas de referencia. El vector de la cuarta columna de la matriz de transformación homogénea representa la posición del origen del sistema de coordenadas  $OUVW$  con respecto al sistema de referencia. En otras palabras, una matriz de transformación homogénea geoméricamente representa la *localización* de un sistema de coordenadas rotado (posición y orientación) con respecto a un sistema de coordenadas de referencia.

Como la inversa de una submatriz de rotación es equivalente a su transpuesta, los vectores fila de una submatriz rotación representan los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia con respecto al sistema de coordenadas  $OUVW$ . Sin embargo, la inversa de una matriz de transformación homogénea no es equivalente a su transpuesta. La posición del origen en el sistema de coordenadas de referencia con respecto al sistema de coordenadas  $OUVW$  se puede deducir solamente después de que se determine la inversa de la matriz de transformación homogénea. En general, la inversa se una matriz de transformación homogénea se puede encontrar que es a través de la siguiente representación:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ s_x & s_y & s_z & -s^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -n^T p \\ & & & -s^T p \\ & & & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ R_{3 \times 3}^T \end{matrix} \quad [2.2-27]$$

Así, de la ecuación (2.2-27), los vectores columna de la inversa de una matriz de transformación homogénea representan los ejes principales de los ejes de referencia con respecto al sistema de coordenada rotado  $OUVW$ , y la submatriz 3 X 1 superior derecha representa la posición del origen del sistema de referencia con respecto al sistema  $OUVW$ .



## 2.2.8 MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA COMPUESTA.

Las matrices de rotación y traslación homogéneas se pueden multiplicar juntas para obtener una matriz de transformación homogénea compuesta (la llamaremos la matriz **T**). Sin embargo, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, se debe prestar una atención cuidadosa al orden en el cual se multiplican estas matrices. Las reglas que siguen son útiles para determinar una matriz de transformación homogénea compuesta:

1. Inicialmente, ambos sistemas de coordenadas son coincidentes, ya que la matriz de transformación homogénea es una matriz identidad de  $4 \times 4$ , ( $I_4$ ).
2. Si el sistema de coordenadas rotante **OUVW** está rotando/trasladándose respecto de los ejes principales del sistema **OXYZ**, entonces *premultiplicar*<sup>1</sup> la matriz de la transformación homogénea previa (resultante) por una matriz de traslación/rotación básica apropiada.
3. Si el sistema de coordenadas rotantes **OUVW** está rotando/trasladándose respecto de su propio eje principal, entonces *postmultiplicar*<sup>2</sup> la matriz de transformación homogénea (resultante) por una matriz de rotación/traslación. básica apropiada.

Hemos identificado dos sistemas de coordenadas, el sistema de coordenadas de referencia fijo **OXYZ** y el sistema de coordenadas móvil (traslación y rotación) **OUVW**.

Para describir la relación del desplazamiento espacial entre estos dos sistemas de coordenadas, se utiliza una matriz de transformación homogénea de  $4 \times 4$ . Las matrices de transformación homogénea tienen el efecto combinado de rotación, traslación, perspectiva y escalado global cuando operan sobre vectores de posición expresados en coordenadas homogéneas.

---

<sup>1</sup> **Premultiplicar:** Dícese de la multiplicación de una matriz de transformación homogénea previa por una matriz de rotación/traslación básica apropiada.

<sup>2</sup> **Postmultiplicar:** Dícese de la multiplicación de una matriz de transformación homogénea (resultante) por una matriz de rotación/traslación apropiada.

Si estos dos sistemas de coordenadas se asignan a cada elemento del brazo del robot, por ejemplo, el elemento  $i-1$  y el elemento  $i$ , respectivamente, entonces el sistema de coordenadas del elemento  $i-1$  es el sistema de coordenadas de referencia y el sistema de coordenadas del elemento  $i$  es el sistema de coordenadas móvil cuando se activa la articulación  $i$ . Utilizando la matriz  $T$ , podemos especificar un punto  $p_i$  en reposo en el elemento  $i$  y expresado en el sistema de coordenadas del elemento  $i$  (u **OUVW**) en términos del sistema de coordenadas del elemento  $i-1$  ( u **OXYZ**) como.

$$p_{i-1} = T p_i \tag{2.2-28}$$

Donde:

$T$  = Matriz de transformación homogénea 4X4 que relaciona los dos sistemas de coordenadas.

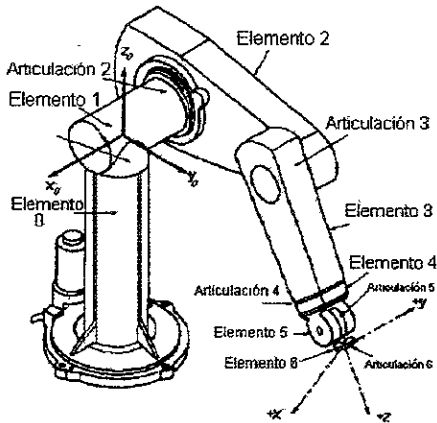
$P_i$  = Vector de posición ampliado 4X1  $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$  que representa un punto en el sistema de coordenadas del elemento  $i$  en coordenadas homogéneas.

$P_{i-1}$ = Es el vector de posición ampliado 4X1  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$  que representa el mismo punto  $P_i$  en términos del sistema de coordenadas del elemento  $i-1$

### 2.2.9 ELEMENTOS, ARTICULACIONES Y SUS PARÁMETROS.

Un manipulador mecánico consiste en una secuencia de cuerpos rígidos, llamados elementos, conectados por lo general mediante articulaciones prismáticas o de revolución (véase Figura 2.8). Cada par articulación–elemento constituye un grado de libertad.

De aquí que para un manipulador con  $N$  grados de libertad hay  $N$  pares-articulación–elemento con el enlace 0 (no considerado parte del robot) unido a una base soporte donde se suele establecer un sistema de coordenadas inercial para este sistema, y el último elemento está unido a la herramienta. Las articulaciones y elementos se enumeran hacia afuera desde la base; así la articulación 1 es el punto de conexión entre el elemento 1 y la base soporte. En este caso cada elemento se conecta, a lo más, a otros dos, así pues no se forman lazos cerrados.



**Figura 2.8.**  
Un robot PUMA ilustrando articulaciones y elementos.

En general, dos elementos se conectan mediante un tipo de articulación que tiene dos superficies deslizantes, una sobre la otra, mientras permanecen en contacto. Únicamente son posibles seis tipos diferentes de articulaciones: de revolución (giratoria), prismática (deslizante), cilíndrica, esférica, de tornillo y planar (véase Figura 2.9).

Un eje de articulación se establece (para la articulación  $i$ ) en la conexión de dos elementos (véase Figura 2.10). Este eje de articulación tendrá dos elementos normales conectados a él, una para cada uno de los elementos. La posición relativa de tales elementos conectados (elemento  $i-1$  y el elemento  $i$ ) viene dada por  $d_i$ , que es la distancia medida a lo largo del eje de la articulación entre las normales. El ángulo de articulación  $\theta_i$  entre las normales se mide en un plano normal al eje de la articulación. De aquí que  $d_i$  y  $\theta_i$  se puedan llamar la *distancia* y el *ángulo* entre los elementos adyacentes, respectivamente, los cuales determinan la posición relativa de los elementos vecinos.

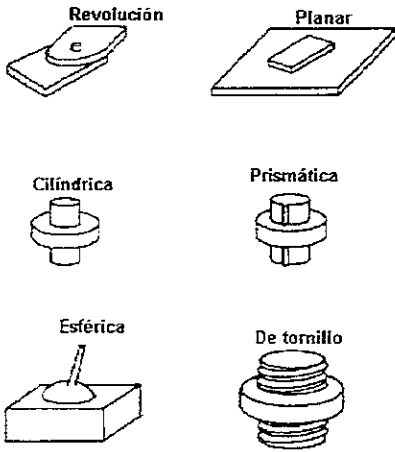


Figura 2.9. Tipos de articulaciones.

Un elemento  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) se conecta a lo más a otros dos elementos (por ejemplo el elemento  $i - 1$  y el elemento  $i + 1$ ); así se establecen dos ejes de articulación en ambos extremos de la conexión. El significado de los elementos, desde una perspectiva cinemática, es que mantienen una configuración fija entre sus articulaciones, que se pueden caracterizar por dos parámetros:  $a_i$  y  $\alpha_i$ . El parámetro  $a_i$  es la distancia más corta medida a lo largo de la normal común entre los dos ejes de la articulación (es decir, los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  para las articulaciones  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente), y  $\alpha_i$  es el ángulo entre los ejes de articulación medidos a en un plano perpendicular a  $a_i$ . Así,  $a_i$  y  $\alpha_i$  se pueden llamar la *longitud* y el *ángulo de torsión* del elemento  $i$ , respectivamente, determinan la estructura del elemento  $i$ .

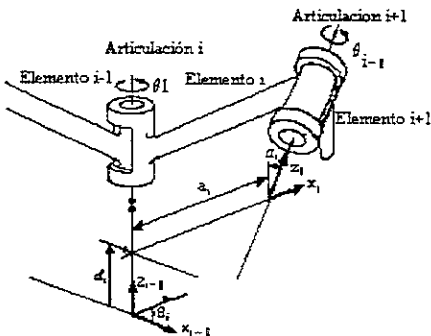


Figura 2.10. Sistema de coordenadas de elementos y sus parámetros.

En resumen, se asocian cuatro parámetros,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$  y  $\theta_i$ , con cada elemento de un manipulador. Sí se ha establecido un convenio de signo para cada uno de estos parámetros, entonces constituyen un conjunto suficiente para determinar completamente la configuración cinemática de cada elemento del brazo del robot. Obsérvese que estos cuatro parámetros van apareados: Los parámetros del elemento ( $a_i$ ,  $\alpha_i$ ) que determinan la estructura del elemento y los parámetros de la articulación ( $d_i$ ,  $\theta_i$ ) que determinan la posición relativa de los elementos vecinos.

**2.2.10 LA REPRESENTACIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG.**

Para describir la relación traslacional y rotacional entre elementos adyacentes, Denavit y Hartenberg [1955] propusieron un método matricial de establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas (sistema fijado al cuerpo) para cada elemento de una cadena articulada. La representación de Denavit-Hartenberg (D-H) resulta en una matriz homogénea de 4 X 4 que representa cada uno de los sistemas de coordenadas de los elementos en la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento previo. Así, mediante transformaciones secuenciales, el efector final expresado en las "coordenadas de la mano" se puede transformar y expresar en las "coordenadas de base" que constituyen el sistema inercial de este sistema.

Se puede establecer para cada elemento en sus ejes de articulación, un sistema de coordenadas cartesiano ortonormal  $(x_i, y_i, z_i)^1$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n =$  número de grados de libertad), más el sistema de coordenadas de la base. Como una articulación giratoria sólo tiene un grado de libertad, cada sistema de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  del brazo de un robot corresponde a la articulación  $i+1$  y está fija en el elemento  $i$ . Cuando el actuador de la articulación activa la articulación  $i$ , el elemento  $i$  se moverá con respecto al elemento  $i-1$ . Como el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo está fijo en el elemento  $i$ , se mueve junto con el elemento  $i$ . Así pues, el sistema de coordenadas  $n$ -ésimo se mueve con la mano (elemento  $n$ ).

---

<sup>1</sup>  $(x_i, y_i, z_i)$ : Realmente representan los vectores unitarios a lo largo de los ejes principales del sistema de coordenadas  $i$ , respectivamente, pero aquí se utilizan para denotar el sistema de coordenadas  $i$ .

Las coordenadas de la base se definen como el sistema de coordenadas número 0 ( $x_0, y_0, z_0$ ), que también es el sistema de coordenadas inercial del brazo. Así, para un brazo como el PUMA de seis ejes, tenemos siete sistemas de coordenadas, que representamos con  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_6, y_6, z_6)$ .

Cada sistema de coordenadas se determina y establece sobre la base de tres reglas:

1. El eje  $z_{i-1}$  yace a lo largo del eje de la articulación.
2. El eje  $x_i$  es normal al eje  $z_{i-1}$  y apunta hacia afuera de él.
3. El eje  $y_i$  completa el sistema de coordenadas dextrógiro según se requiera.

Mediante estas reglas, uno es libre de escoger la localización del sistema de coordenadas 0 en cualquier parte de la base soporte, mientras que el eje  $z_0$  esté a lo largo del eje de movimiento de la primera articulación. El último sistema de coordenadas (el  $n$ -ésimo) se puede colocar en cualquier parte de la mano, mientras que el eje  $x_n$  sea normal al eje  $z_{i-1}$ .

La representación de D-H de un elemento rígido depende de cuatro parámetros geométricos asociados con cada elemento. Estos cuatro parámetros describen completamente cualquier articulación prismática o de revolución. Refiriéndonos a la Figura 2.10, estos cuatro parámetros se definen como sigue:

- $\theta_i$ : Es el ángulo de la articulación del eje  $x_{i-1}$  al eje  $x_i$  respecto del eje  $z_{i-1}$  (utilizando la regla de la mano derecha).
- $d_i$ : Es la distancia desde el origen del sistema de coordenadas  $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$ .
- $a_i$ : Es la distancia de separación desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  hasta el origen del sistema  $i$ -ésimo a lo largo del eje  $x_i$  (o distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ ).
- $\alpha_i$ : Es el ángulo de separación del eje  $z_{i-1}$  al eje  $z_i$  respecto del eje  $x_i$  (utilizando la regla de la mano derecha)

Para una articulación giratoria,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son los parámetros de articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que  $\theta_i$  es la variable de la articulación que cambia cuando el elemento  $i$  se mueve (o gira) con respecto al elemento  $i-1$ . Para una articulación prismática,  $\theta_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son los parámetros de articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que  $d_i$  es la variable de la articulación.

La *variable de la articulación* se refiere a  $\theta_i$  (o  $d_i$ ), esto es, la cantidad que varía, y los *parámetros de articulación* se refieren a los restantes tres valores geométricos constantes ( $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ) para una articulación giratoria o ( $\theta_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ) para una articulación prismática.

Con las tres reglas básicas anteriores para establecer un sistema de coordenadas ortonormal en cada elemento y la interpretación geométrica de los parámetros de la articulación y del elemento, se presenta en el algoritmo 2.1 un procedimiento para establecer un sistema de coordenadas ortonormal *consistente* para un robot. Ejemplos de aplicación de esta algoritmo a un robot tipo PUMA de seis ejes y un brazo Stanford se dan, respectivamente, en las Figuras 2.11 y 2.12.

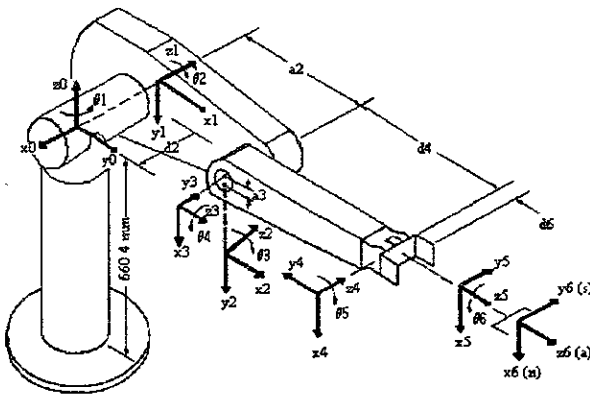


Figura 2.11. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot PUMA.

**Figura 2.11 (continuación). Parámetros de coordenadas de los elementos de un robot PUMA.**

Articulación $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Rango de la articulación
1	90	-90	0	0	-160 a + 160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 a 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 a 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 a 170
5	0	90	0	0	-100 a 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 a 266

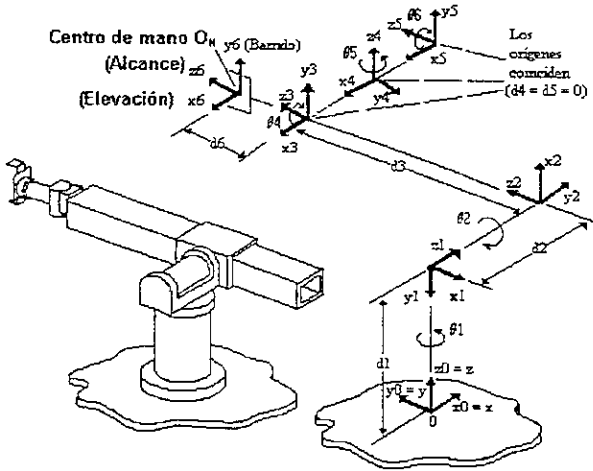


Figura 2.12. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot Stanford.

**Figura 2.12 (continuación). Parámetros de coordenadas de los elementos de un robot Stanford**

Articulación $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$\theta_1 = -90$	-90	0	$d_1$
2	$\theta_2 = -90$	90	0	$d_2$
3	-90	0	0	$d_3$
4	$\theta_4 = 0$	-90	0	0
5	$\theta_5 = 0$	90	0	0
6	$\theta_6 = 0$	0	0	$d_6$

**2.10.1 Algoritmo 2.1: Asignación del sistema de coordenadas de los elementos.**

Dado un brazo con  $n$  grados de libertad, este algoritmo asigna un sistema de coordenadas ortonormal a cada elemento del brazo de acuerdo a configuraciones de brazos similar a aquellas de la geometría del brazo humano. El etiquetado del sistema de coordenadas comienza desde la base soporte hasta el efector final del brazo. Las relaciones entre elementos adyacentes se pueden representar mediante una matriz de transformación homogénea 4 X 4. La importancia de esta asignación es que ayudará a desarrollo de un procedimiento consistente para derivar la solución de la articulación tal como se presenta en secciones posteriores. (Nótese que la asignación de los sistemas de coordenadas no es única).



- D1 *Establecer el sistema de coordenadas de la base.* Establecer un sistema de coordenadas dextrógiro  $(x_0, y_0, z_0)$  en la base del soporte con el eje  $z_0$  estando a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 y apuntando hacia afuera del hombro del brazo del robot. Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se pueden establecer convenientemente y son normales al eje  $z_0$ .
- D2 *Inicializar y repetir.* Para cada  $i, i=1, \dots, n-1$ , realizar los pasos D3 a D6.
- D3 *Establecer los ejes de la articulación.* Alinear el  $z_i$  con el eje de movimiento (giratorio o deslizante) de la articulación  $i+1$ . Para robots que tengan configuraciones del brazo levógiros<sup>2</sup>, los ejes  $z_1$  y  $z_2$  están apuntando hacia afuera del hombro y el "tronco" del brazo del robot.
- D4 *Establecer el origen del sistema de coordenadas i-ésimo.* localizar el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo en la intersección de los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  o en la intersección de las normales comunes entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  y el eje  $z_i$ .
- D5 *Establecer el eje  $x_i$ .* Establecer  $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$  o a lo largo de la normal común entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  cuando son paralelos.
- D6 *Establecer el eje  $y_i$ .* Asignar  $y_i = +(z_i \times x_i) / \|z_i \times x_i\|$  para completar el sistema de coordenadas dextrógiro. (Extender si es necesario los ejes  $z_i$  y  $x_i$  a los pasos D9 a D12).
- D7 *Establecer el sistema de coordenadas de la mano.* Normalmente la articulación  $n$ -ésima es de tipo giratorio. Establecer  $z_n$  a lo largo de la dirección del eje  $z_{i-1}$  y apuntando hacia afuera del robot. Establecer  $x_n$  tal que sea normal a ambos ejes  $z_{n-1}$  y  $z_n$ . Asignar  $y_n$  para completar el sistema de coordenadas dextrógiro. (Véase la sección 2.2.11 para más detalle).
- D8 *Encontrar los parámetros de la articulación y del elemento.* Para  $i, i = 1, \dots, n$ , realizar los pasos D9 a D12.
- D9 *Encontrar  $d_i$ .* Donde  $d_i$  es la distancia del origen del sistema de coordenadas  $(i - 1)$ -ésimo a la intersección del eje  $z_{i-1}$ . Es la variable de la articulación si  $i$  es prismática.
- D10 *Encontrar  $a_i$ .* Donde  $a_i$  es la distancia de la intersección del eje  $z_{i-1}$  y el eje  $z_{i-1}$  al origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo a lo largo del eje  $x_i$ .

<sup>2</sup> Levógiros: Que poseen giros en un perfil similar al de una leva.

D11 *Encontrar*  $\theta_i$ . Donde  $\theta_i$  es el ángulo de rotación desde el eje  $x_{i-1}$  hasta el eje  $x_i$  respecto del eje  $z_{i-1}$ . Es la variable de articulación si  $i$  es giratoria.

D12 *Encontrar*  $\alpha_i$ . Donde  $\alpha_i$  es el ángulo de rotación desde el eje  $z_{i-1}$  hasta el eje  $z_i$  respecto del eje  $x_i$ .

Una vez establecido el sistema de coordenadas D-H para cada elemento, se puede desarrollar una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo con el sistema de coordenadas  $(i-1)$ -ésimo. Observando la Figura 2.10, se nota que un punto  $r_i$  expresado en el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo se puede expresar en el sistema de coordenadas  $(i-1)$ -ésimo como  $r_{i-1}$  realizando las siguientes transformaciones sucesivas:

1. Girar respecto del eje  $z_{i-1}$  un ángulo de  $\theta_i$  para alinear el eje  $x_{i-1}$  con el eje  $x_i$  (el eje  $x_{i-1}$  es paralelo a  $x_i$  y apunta en la misma dirección).
2. Trasladar a lo largo del eje  $z_{i-1}$  una distancia de  $d_i$  para llevar en coincidencia los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$ .
3. Trasladar a lo largo del eje  $x_i$  una distancia de  $a_i$  para traer en coincidencia también los dos orígenes de los ejes  $x$ .
4. Girar respecto del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$  para traer en coincidencia a los sistemas de coordenadas.

Cada una de estas cuatro operaciones se puede expresar mediante una matriz rotación-traslación homogénea básica y el producto de estas cuatro matrices de transformación homogéneas básicas da una matriz de transformación homogénea compuesta,  ${}^{i-1}A_i$ , conocida como la matriz de transformación D-H para sistemas de coordenadas adyacentes  $i$  e  $i-1$ . Así:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} T_{z,\theta} T_{x,a} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \text{sen}\theta_i & \text{sen}\alpha_i \text{sen}\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\text{sen}\alpha_i \cos\theta_i & a_i \text{sen}\theta_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-29]$$

Utilizando la ecuación (2.2-27) se puede encontrar la inversa de esa transformación como:

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \text{sen}\theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos\alpha_i \text{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & \text{sen}\alpha_i & -d_i \text{sen}\alpha_i \\ \text{sen}\alpha_i \text{sen}\theta_i & -\text{sen}\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i & -d_i \cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-30]$$

donde  $\alpha_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$  son constantes mientras que  $\theta_i$  es la variable de la articulación para una articulación tipo revolución. Para una articulación prismática, la variable articulación es  $d_i$ , mientras que  $\alpha_i$ ,  $a_i$  y  $\theta_i$  son constantes. En este caso,  ${}^{i-1}A_i$  se hace:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,\theta} T_{z,d} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \text{sen}\theta_i & \text{sen}\alpha_i \text{sen}\theta_i & 0 \\ \text{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\text{sen}\alpha_i \cos\theta_i & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-31]$$

y su inversa es:

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \text{sen}\theta_i & 0 & 0 \\ -\cos\alpha_i \text{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & \text{sen}\alpha_i & -d_i \text{sen}\alpha_i \\ \cos\alpha_i \text{sen}\theta_i & -\text{sen}\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i & -d_i \cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-32]$$

Utilizando la matriz  ${}^{i-1}A_i$  se puede relacionar un punto  $p_i$  en reposo en el elemento  $i$  y expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas  $i$  y expresado en coordenadas homogéneas  $i$  en el sistema de coordenadas  $i-1$  establecido en el elemento  $i-1$  por:

$$p_{i-1} = {}^{i-1}A_i p_i \quad [2.2-33]$$

donde:  $p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$  y  $p_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ .

Las seis matrices de transformación  ${}^{i-1}A_i$  para el robot PUMA de seis ejes han sido determinadas sobre la base del sistema de coordenadas establecido en la Figura 2.11. Estas matrices  ${}^{i-1}A_i$  se dan en la Figura 2.13.

**2.2.11 ECUACIONES CINEMÁTICAS PARA LOS MANIPULADORES.**

La matriz homogénea  ${}^0T_i$  que especifica la localización del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base es el producto en cadena de matrices de transformación de coordenadas sucesivas  ${}^{i-1}A_i$  y se expresa como:

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, n) = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-34]$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 \equiv {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \equiv {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $C_i = \cos \theta_i$ ;  $S_i = \sin \theta_i$ ;  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ;  $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

**Figura 2.13. Matrices de transformación de coordenadas de los elementos del robot PUMA.**

Donde:

$[x_i, y_i, z_i]$  = matriz de orientación del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo establecido en el elemento  $i$  con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la matriz particionada superior izquierda  $3 \times 3$  de  ${}^0T_i$ .

$p_i$  = vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo. Es la matriz particionada superior derecha  $3 \times 1$  de  ${}^0T_i$ .

Específicamente, para  $i = 6$ , obtenemos la matriz  $T$ ,  $T = {}^0T_6$ , que especifica la posición y orientación del punto final del manipulador con respecto al sistema de coordenadas de la base. Esta matriz  $T$  se utiliza tan frecuentemente en la cinemática del brazo del robot que se llama la "matriz del brazo". Considere que la matriz  $T$  sea de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-35]$$

Donde:

- $n$  = vector normal de la mano. Suponiendo una mano del tipo de mordaza paralela que es ortogonal a los dedos del brazo del robot.
- $s$  = vector de deslizamiento de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.
- $a$  = vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano (es decir, normal a la placa de montaje de la herramienta del robot).
- $p$  = vector de posición de la mano. Apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas de la mano, que se suele localizar en el punto central de los dedos totalmente cerrados.

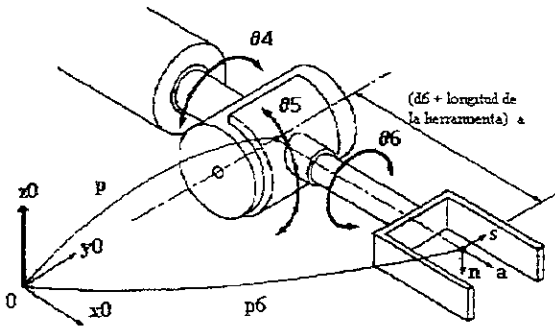


Figura 2.14. Sistema de coordenadas de la mano [n, s, a].

Si el manipulador se relaciona a un sistema de coordenadas de referencia mediante una transformación  $B$  y tiene una herramienta unida a la base de montaje de la última articulación descrita por  $H$ , entonces el punto final de la herramienta se puede relacionar por el sistema de coordenadas de referencia multiplicando las matrices  $B$ ,  ${}^0T_6$  y  $H$  juntas como:

$${}^{ref}T_{herr} = B {}^0T_6 H \tag{2.2-36}$$

Obsérvese que:

$$H \equiv {}^6A_{herr} \text{ y } B \equiv {}^{ref}A_0$$

La solución cinemática directa de un manipulador de seis elementos se obtiene calculando  $T = {}^0A_6$  mediante la multiplicación en cadena de las seis matrices  ${}^{i-1}A_i$  y evaluar cada elemento en la matriz  $T$ . Obsérvese que la solución de la cinemática directa da una única matriz  $T$  para un  $q = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$  y un conjunto de sistemas de coordenadas dados, donde  $q_i = \theta_i$  para una articulación giratoria  $q_i = d_i$  para una articulación prismática. Las únicas ligaduras son las acotaciones físicas de  $\theta_i$  para cada articulación del brazo del robot. La tabla en la Figura 2.11 da las ligaduras de articulación de un robot de la serie PUMA 560 basado en el sistema de coordenadas asignado en la Figura 2.11. Habiendo obtenido todas las matrices de transformación de coordenadas  ${}^{i-1}A_i$  para el brazo de un robot, la siguiente tarea es encontrar un método eficaz de calcular  $T$  utilizando una computadora digital de uso general.

El método más eficiente es multiplicar las seis matrices  ${}^{i-1}A_i$  juntas manualmente y, evaluando los elementos de la matriz T explícitamente en un programa de computadora.

Las desventajas de este método son:

- 1) Es complicado multiplicar juntas las seis matrices  ${}^{i-1}A_i$ .
- 2) La matriz del brazo es aplicable solamente a un robot particular para un conjunto específico del sistema de coordenadas (no es bastante flexible).

En el otro extremo se pueden meter las seis matrices  ${}^{i-1}A_i$  y permitir que la computadora realice la multiplicación. Este método es muy flexible, pero con el coste de tiempo del cálculo en cuanto que la cuarta fila de  ${}^{i-1}A_i$  consiste mayormente en elementos nulos.

Un método que tiene ambos, cálculo rápido y flexibilidad, es multiplicar a "mano" las tres primeras matrices  ${}^{i-1}A_i$  para formar  $T_1 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3$  y también las últimas tres matrices  ${}^{i-1}A_i$  para formar  $T_2 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6$ , que es una tarea relativamente directa<sup>3</sup>.

Se pueden expresar los elementos de  $T_1$  y  $T_2$  por medio de un programa de computadora y permitimos que la computadora los multiplique para formar la matriz del brazo resultante  $T = T_1 T_2$ . Para un robot de la serie PUMA 560,  $T_1$  se determina de las ecuaciones de la Figura 2.13 como:

$$T_1 = {}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-37]$$

y la matriz  $T_2$  se encuentra que es:

$$T_2 = {}^3A_6 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-38]$$

<sup>3</sup> Entiéndase por "relativamente directa", como la división del producto de las seis matrices en dos productos de tres matrices.

donde  $C_j \equiv \cos(\theta_1 + \theta_j)$  y  $S_j \equiv \sin(\theta_1 + \theta_j)$ .

La matriz del brazo T para el robot PUMA que se muestra en la Figura 2.11 se encuentra que es:

$$T = T_1 T_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-39]$$

donde:

$$\begin{aligned} n_x &= C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_y &= S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_z &= -S_{23} [C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6] - C_{23} S_5 C_6 \end{aligned} \quad [2.2-40]$$

$$\begin{aligned} s_x &= C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ s_y &= S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ s_z &= S_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6 \end{aligned} \quad [2.2-41]$$

$$\begin{aligned} a_x &= C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5 \\ a_y &= S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - C_1 S_4 S_5 \\ a_z &= -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5 \end{aligned} \quad [2.2-42]$$

$$\begin{aligned} p_x &= C_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] - S_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2) \\ p_y &= S_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] + C_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2) \\ p_z &= d_6 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + C_{23} d_4 - a_3 S_{23} - a_2 S_2 \end{aligned} \quad [2.2-43]$$

### 2.2.12 ESPECIFICACIONES DE LA LOCALIZACIÓN DE EFECTO FINAL.

En secciones anteriores analizamos las traslaciones y rotaciones de cuerpos rígidos (o elementos) e introdujimos la matriz de transformación homogénea para describir la posición y orientación de un sistema de coordenadas del elemento. De particular interés es la matriz del brazo  ${}^0T_6$  que describe la posición y orientación de la mano con respecto al sistema de coordenadas de la base. La submatriz superior izquierda 3 X 3 de  ${}^0T_6$  describe la orientación de la mano. Esta submatriz de rotación es equivalente a  ${}^0T_6$ . Hay otras especificaciones que se pueden utilizar para describir la localización del efecto final.



**Representación de los ángulos de Euler para la orientación.** Como se indicó en la sección 2.2.4, esta representación matricial para la rotación de un cuerpo rígido simplifica muchas operaciones, pero no conduce directamente a un conjunto completo de coordenadas generalizadas. Tal conjunto de coordenadas generalizadas se puede proporcionar mediante los tres ángulos de Euler ( $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ).

Utilizando la matriz de rotación con la representación de los ángulos eulerianos como en la ecuación (2.2-17), la matriz del brazo  ${}^0T_6$  se puede expresar de la manera siguiente:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta & P_x \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta & P_y \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-44]$$

Otra ventaja de utilizar la representación de ángulos de Euler para la orientación es que la memoria de la computadora necesaria para almacenar la posición y orientación de un objeto en un programa, se reduce a un vector de seis elementos  $XYZ\phi\theta\psi$ . A partir de este vector, se puede construir la matriz del brazo  ${}^0T_6$  mediante la ecuación (2.2-44).

**Representación de giro, elevación y desviación para la orientación.** Otro conjunto de representación de ángulos de Euler para la rotación es el giro, elevación y desviación (roll, pitch & yaw). Otra vez, utilizando la ecuación (2.2-19), la representación matricial de la rotación se puede utilizar para obtener la matriz del brazo  ${}^0T_6$  como:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} C\phi\phi C & C\phi\phi S\theta S & -S\phi\phi C & C\phi\phi S\theta C + S\theta\theta S & P_x \\ S\phi\phi C & S\phi\phi S\theta S + C\phi\phi C & S\phi\phi S\theta S - C\phi\phi S & -C\phi\phi S & P_y \\ -S\theta & C\theta\theta S & C\theta\theta C & & P_z \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-45]$$

Existen diferentes tipos de brazos de robot de acuerdo al movimiento de sus articulaciones ( $XYZ$ , cilíndricas, esféricas y de brazo articulado). Así se puede especificar la posición de la mano ( $P_u, P_v, P_w$ )<sup>T</sup> en otras coordenadas tales como cilíndricas o esféricas. La matriz de transformación del brazo resultante se puede obtener por:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-46]$$

donde  ${}^0R_6$  = matriz de rotación expresada en los ángulos de Euler ó  $[n, s, a]$

**Coordenadas cilíndricas para el subconjunto de posicionamiento.** En una representación de coordenadas cilíndricas, la posición del efecto final se puede especificar por las siguientes traslaciones / rotaciones (véase Figura 2.15):

1. Una traslación de “r” unidades a lo largo del eje OX ( $T_{x,r}$ ).
2. Una rotación de ángulo “ $\alpha$ ” alrededor del eje OZ ( $T_{z,\alpha}$ ).
3. Una rotación de “d” unidades a lo largo del eje OZ ( $T_{z,d}$ ).

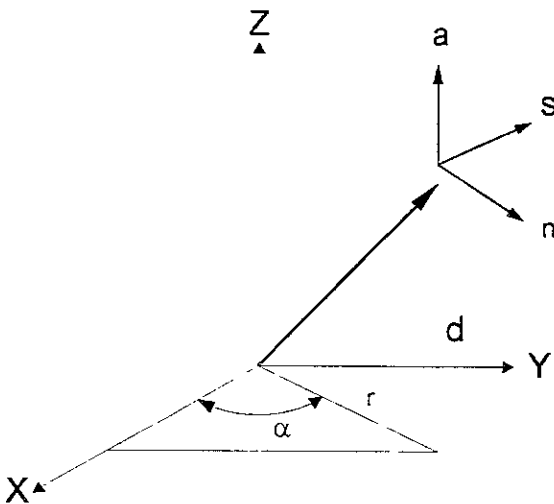


Figura 2.15. Representación del sistema de coordenadas cilíndricas.

La matriz de transformación homogénea que representa las operaciones anteriores se puede expresar como:

$$T_{cilindrica} = T_{z,d} T_{z,\alpha} T_{x,r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-47]$$

Como solo estamos interesados en los vectores de posición (es decir, la cuarta columna de  $T_{cilindrica}$ ), la matriz de brazo  ${}^0T_6$  se puede obtener utilizando la ecuación (2.2-46):

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-48]$$

y  $p_x \equiv rC\alpha$ ,  $p_y \equiv rS\alpha$ ,  $p_z \equiv d$

**Coordenadas esféricas para el subconjunto de posicionamiento.** Podemos utilizar también el sistema de coordenadas esféricas para especificar la posición del efecto final. Esto utiliza las siguientes traslaciones / rotaciones (véase Figura 2.16):

1. Una traslación de  $r$  unidades a lo largo del eje  $OZ$  ( $T_{z,r}$ ).
2. Una rotación de ángulo  $\beta$  respecto del eje  $OY$  ( $T_{y,\beta}$ ).
3. Una rotación de ángulo  $\alpha$  respecto del eje  $OZ$  ( $T_{z,\alpha}$ ).

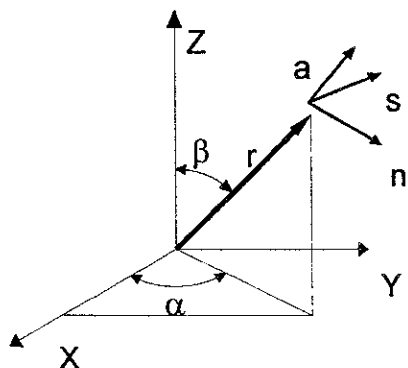


Figura 2.16. Representación del sistema de coordenadas esféricas.

La matriz de transformación para la operación anterior es:

$$T_{esférica} = T_{z,\alpha} R_{y,\beta} T_{z,r} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & -S\alpha & C\alpha S\beta & rC\alpha S\beta \\ S\alpha C\beta & C\alpha & S\alpha S\beta & rS\alpha S\beta \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-49]$$

Otra vez, nuestro interés es el vector de posición con respecto al sistema de coordenadas de la base; por tanto, la matriz del brazo  ${}^0T_6$  cuyo vector de posición se expresa en coordenadas esféricas y la matriz de orientación  $[n, s, a]$  o ángulos de Euler o (RPY) se puede obtener:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha S\beta \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha S\beta \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.2-50]$$

Donde:  $p_x \equiv rC\alpha S\beta, p_y \equiv rS\alpha S\beta, p_z \equiv rC\beta$ .

En resumen, existen diferentes métodos (o sistemas de coordenadas) que se pueden escoger para describir la posición y orientación del efecto final. Para posicionamiento, el vector de posición se puede expresar en coordenadas cartesianas  $(P_u, P_v, P_w)$ , cilíndrica  $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$ , o esférica  $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$ . Para describir la orientación del efecto final con respecto al sistema de coordenadas de la base, tenemos cartesianas  $[n, s, a]$ , ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  y (RPY). El resultado de todo esto se presenta en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Representaciones diversas de posicionamiento/orientación.		
Posicionamiento		Orientación
Cartesiana $(P_u, P_v, P_w)$		Cartesiana $[n, s, a]$
Cilíndrica $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$		Ángulos de Euler $(\phi, \theta, \psi)$
Esférica $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$		R, P, Y
$T_{posicion} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$T_{rot} = \begin{bmatrix} [n, s, a] & 0 \\ R_{\phi, \theta, \psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	${}^0T_6 = T_{posicion} T_{rot}$	

### 2.2.13 CLASIFICACIÓN DE ALGUNOS MANIPULADORES.

Se elaboró la hipótesis de que la conexión entre los elementos (las articulaciones) tienen solamente un grado de libertad. Con esta restricción, son de interés dos tipos de articulaciones: de revolución (o giratorias) y prismáticas. Una articulación de revolución sólo permite la rotación respecto de un eje, mientras que la articulación prismática permite el deslizamiento a lo largo de un eje con ninguna rotación (deslizamiento con rotación se denomina *articulación tipo tornillo*). Estos elementos se conectan y se accionan de forma tal que se fuerzan a moverse relativamente uno respecto de otro con el fin de poseer el efecto final (una mano o herramienta) en una *posición y orientación particular*.

Por tanto, un manipulador, considerado como una combinación de elementos y de articulaciones, con el primer elemento conectado a la base y el último conteniendo la "mano", se puede clasificar por el *tipo de articulaciones* y su *orden* (desde la base hasta la mano). Con este convenio, el robot PUMA se puede clasificar como 6R y el brazo de Stanford como 2R-P-3R, donde R es una articulación de revolución y P es una articulación prismática.

## 2.3 EL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO.

En esta sección se plantea el segundo problema de la cinemática del robot: la cinemática inversa o solución del brazo para un manipulador con seis articulaciones. Los robots cuyas simulaciones están basadas por computadora se suelen controlar en el espacio de las variables de articulación, mientras que los objetos que se manipulan se suelen expresar en el sistema de coordenadas mundial. Con el fin de controlar la posición y orientación del efecto final de un robot para alcanzar su objeto, debemos de dar una mayor prioridad a la solución cinemática inversa. En otras palabras, dada la posición y orientación del efecto final de un brazo de robot de seis ejes  ${}^0T_6$  y sus parámetros de articulación y elementos, debemos encontrar los ángulos de articulación correspondientes  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$  del robot de manera que pueda posicionar como se desee el efecto final

En general, el problema cinemático inverso se puede resolver por diversos métodos, tales como la transformación inversa (Paul y col. [1981]), el álgebra de tornillo (Kohli y Soni [1975]), matrices duales (Denavit [1956]), Cuaterniones duales (Yang y Freudestein [1964]), iterativo (Uicker y col. [1964]), y métodos geométricos (Lee y Ziegler [1984]). Pieper[1968] presentó la solución cinemática para cualquier manipulador con seis grados de libertad que tiene pares de revolución o prismáticos para las tres primeras articulaciones y los ejes de las articulaciones de las últimas otras tres se intersecan en un punto. La solución se puede expresar con un polinomio de cuarto grado en una incógnita y una solución en forma cerrada para las incógnitas restantes Paul y col. [1981] presentaron una técnica transformada inversa utilizando las matrices de transformaciones homogéneas  $4 \times 4$  para resolver la solución cinemática para la misma clase de manipuladores simples que analizaba Pieper. Aunque la resolución resultante es correcta, tiene el problema de que no da una indicación clara sobre cómo seleccionar una solución apropiada de las diversas soluciones posibles para una configuración de brazo particular. El usuario a menudo necesita recurrir a su juicio y experiencia para tomar la respuesta correcta.

Se presentará el método de Pieper para la solución inversa para ángulos de Euler. Uicker y col. [1964] y Milenkovic y Huang [1983] presentaron soluciones iterativas para la mayoría de los robots industriales. La solución iterativa a menudo requiere más cálculos y no garantiza la convergencia a la solución correcta especialmente en los casos singular y degenerado. Más aún, como con la técnica transformada inversa, no existe una indicación específica sobre cómo escoger la solución correcta para una configuración de brazo particular.

Es deseable encontrar una solución del brazo en forma cerrada para los manipuladores. Afortunadamente, la mayoría de los robots comerciales tienen una u otra de las siguientes condiciones suficientes que hacen posible la solución del brazo en forma cerrada:

1. Tres ejes de articulación adyacentes se intersecan en un punto
2. Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí

Ambos robots, el PUMA y Stanford, satisfacen la primera condición, mientras que los robots ASEA y MINIMOVER satisfacen la segunda solución para encontrar la solución en forma cerrada.

De la ecuación (2.2-39) tenemos la matriz de transformación de brazo dada como:

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \quad [2.3-1]$$

La ecuación anterior indica que la matriz de brazo T es una función de senos y cosenos de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ . Por ejemplo, para un robot PUMA, igualando los elementos de las ecuaciones matriciales como en las ecuaciones (2.2-40) a (2.2-43), tenemos dos ecuaciones con seis incógnitas (ángulos de las articulaciones) y estas ecuaciones tienen funciones trigonométricas complejas. Como tenemos más ecuaciones que incógnitas, se puede concluir inmediatamente que existen múltiples soluciones para un robot como el PUMA. Exploraremos dos métodos para encontrar la solución inversa: la técnica transformada inversa para encontrar la solución de los ángulos de Euler, que puede utilizarse para encontrar la solución de las articulaciones de un robot como el PUMA, y un método geométrico que proporciona más comprensión en resolver manipuladores simples con articulaciones giratorias.

### 2.3.1 Técnica de la transformada inversa para la solución de ángulos de Euler.

En esta sección demostraremos el concepto básico de la técnica transformada inversa aplicándola a resolver los ángulos de Euler. La matriz de rotación 3 X 3 se puede expresar en términos de los ángulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ) como en la ecuación (2.2-17), dada por:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,\phi} R_{u,\theta} R_{w,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad [2.3-2]$$

Se desea encontrar el valor correspondiente de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . Igualando los elementos de la ecuación matricial anterior, tenemos:

$$n_x = C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi \quad [2.3-3a]$$

$$n_y = S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi \quad [2.3-3b]$$

$$n_z = S\phi S\psi \quad [2.3-3c]$$

$$s_x = -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi \quad [2.3-3d]$$

$$s_y = -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi \quad [2.3-3e]$$

$$s_z = S\phi C\psi \quad [2.3-3f]$$

$$a_x = S\phi S\theta \quad [2.3-3g]$$

$$a_y = -C\phi S\theta \quad [2.3-3h]$$

$$a_z = C\theta \quad [2.3-3i]$$

Utilizando las ecuaciones (2.3-3i), (2.3-3f) y (2.3-3h), una solución a las nueve ecuaciones anteriores es:

$$\theta = \cos^{-1}(a_z) \quad [2.3-4]$$

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{s_z}{S\theta}\right) \quad [2.3-5]$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(-\frac{a_x}{S\theta}\right) \quad [2.3-6]$$

La solución anterior es inconsistente y mal condicionada porque:

1. La función arco coseno no se comporta bien en cuanto a su precisión en la determinación del ángulo ya que es dependiente del valor del ángulo. Esto es,  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ .
2. Cuando  $\sin(\theta)$  se aproxima a cero, esto es,  $\theta \approx 0^\circ$  ó  $\theta \approx \pm 180^\circ$ , las ecuaciones (2.3-5) y (2.3-6) dan soluciones imprecisas o están indefinidas.



Debemos, por tanto, encontrar un método más consistente para determinar correctamente la solución de los ángulos de Euler y una función trigonométrica más consistente para la solución del ángulo. Con el fin de evaluar  $\theta$  para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , se utilizará una función arco tangente,  $\text{arc tg2}(y, x)$ , que devuelve  $\text{tg}^{-1}(y/x)$  ajustada al cuadrante apropiado. Se define como:

$$\theta = \text{arc tg2}(y, x) = \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{para } +x \ y +y \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{para } -x \ y +y \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{para } -x \ y -y \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{para } +x \ y -y \end{cases} \quad [2.3-7]$$

Utilizando la función arco tangente ( $\text{arc tg2}$ ) con dos argumentos, tendremos una visión de la solución general propuesta por Paul y col. [1981]. En la ecuación matricial [ecuación (2.3-2)] se dan los elementos de la matriz en el lado izquierdo, mientras que los elementos de las tres matrices del lado derecho son incógnitas y dependientes de  $\phi, \theta, \psi$ . Paul y col. [1981] sugieren *premultiplicar* la ecuación matricial anterior por su transformada inversa desconocida sucesivamente y de los elementos de la ecuación matricial resultante determinan el ángulo incógnita. Esto es, se mueve una incógnita (por su transformada inversa) del lado derecho de la ecuación matricial al lado izquierdo y se resuelve para la incógnita, a continuación movemos la siguiente incógnita al lado izquierdo y repetimos el proceso hasta que se resuelven todas las incógnitas.

Premultiplicando la ecuación matricial anterior por  $\mathbf{R}_{z,\phi}^{-1}$  tenemos una incógnita ( $\phi$ ) en el lado izquierdo y dos incógnitas ( $\theta, \psi$ ) en el lado derecho de la ecuación matricial, así tenemos:

$$\begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 \\ -S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ó

$$\begin{bmatrix} C\phi n_x + S\phi n_y & C\phi s_x + S\phi s_y & C\phi a_x + S\phi a_y \\ -S\phi n_x + C\phi n_y & -S\phi s_x + C\phi s_y & -S\phi a_x + C\phi a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad [2.3-8]$$

Igualando los elementos (1, 3) de ambas matrices en la ecuación (2.3-8) tenemos:

$$C\phi a_x + S\phi a_y = 0 \quad [2.3-9]$$

que da:

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{a_x}{-a_y}\right) = \text{arctg}2(a_x - a_y) \quad [2.3-10]$$

Igualando los elementos (1, 1) y (1, 2) de ambas matrices tenemos:

$$C\psi = C\phi n_x + S\phi n_y \quad [2.3-11a]$$

$$S\psi = -C\phi s_x - S\phi s_y \quad [2.3-11b]$$

que conduce a la solución para  $\psi$ ,

$$\begin{aligned} \psi &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{S\psi}{C\psi}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-C\phi s_x - S\phi s_y}{C\phi n_x + S\phi n_y}\right) \\ &= \text{arctg}2(-C\phi s_x - S\phi s_y, C\phi n_x + S\phi n_y) \end{aligned} \quad [2.3-12]$$

Igualando los elementos (2, 3) y (3, 3) de ambas matrices tenemos:

$$\begin{aligned} S\theta &= S\phi a_x - C\phi a_y \\ C\theta &= a_z \end{aligned} \quad [2.3-13]$$

que nos da la solución para  $\theta$ ,

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{S\theta}{C\theta}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{S\phi a_x - C\phi a_y}{a_z}\right) = \text{arctg}2(S\phi a_x - C\phi a_y, a_z) \quad [2.3-14]$$

Como el concepto de la técnica transformada inversa es mover una incógnita al lado izquierdo de la ecuación matricial a un tiempo y resolver para la incógnita, podemos intentar resolver la ecuación matricial anterior para  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  por *postmultiplicar* dicha ecuación matricial por su transformada inversa  $\mathbf{R}_{x,\psi}^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & S\psi & 0 \\ -S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices tenemos:

$$\begin{bmatrix} n_x C\psi - s_x S\psi & n_x S\psi + s_x C\psi & a_x \\ n_y C\psi - s_y S\psi & n_y S\psi + s_y C\psi & a_y \\ n_z C\psi - s_z S\psi & n_z S\psi + s_z C\psi & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi C\theta & S\phi S\theta \\ S\phi & C\phi C\theta & -C\phi S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \quad [2.3-15]$$

Otra vez, igualando los elementos (3, 1) de ambas matrices en dicha ecuación matricial, tenemos:

$$n_z C\psi - s_z S\psi = 0 \quad [2.3-16]$$

que da:

$$\psi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{n_z}{s_z}\right) = \text{arctg}2(n_z, s_z) \quad [2.3-17]$$

Igualando los elementos (3, 2) y (3, 3) de ambas matrices tenemos:

$$S\theta = n_z S\psi + s_z C\psi \quad [2.3-18a]$$

$$C\theta = a_z \quad [2.3-18b]$$

que nos conduce a la solución para  $\theta$ ,

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{n_z S\psi + s_z C\psi}{a_z}\right) = \text{arctg}2(n_z S\psi + s_z C\psi, a_z) \quad [2.3-19]$$

Igualando los elementos (1, 1) y (2, 1) de ambas matrices tenemos:

$$C\phi = n_x C\psi - s_x S\psi \quad [2.3-20a]$$

$$S\phi = n_y C\psi - s_y S\psi \quad [2.3-20b]$$

que da:

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{n_y C\psi - s_y S\psi}{n_x C\psi - s_x S\psi}\right) = \text{arctg}2(n_y C\psi - s_y S\psi, n_x C\psi - s_x S\psi) \quad [2.3-21]$$

Corresponde al usuario la libertad de premultiplicar o postmultiplicar una ecuación matricial dada. Apliquemos esta técnica transformada inversa para resolver los ángulos de Euler para un robot tipo PUMA (solución OAT de un robot PUMA). Los robots PUMA utilizan los símbolos  $O$ ,  $A$ ,  $T$  para indicar los ángulos de Euler y sus definiciones se dan a continuación (con referencia a la Figura 2.17):

**O (orientación)** es el ángulo formado desde el eje  $Y_0$  hasta la proyección del eje  $a$  de la herramienta sobre el plano  $XY$  respecto del eje  $Z_0$ .

**A (altitud)** es el ángulo formado desde el plano  $XY$  hasta el eje  $a$  de la herramienta respecto del eje  $s$  de la herramienta.

**T (herramienta)** (tool) es el ángulo formado desde el plano  $XY$  hasta el eje  $s$  de la herramienta respecto del eje  $a$  de la herramienta.

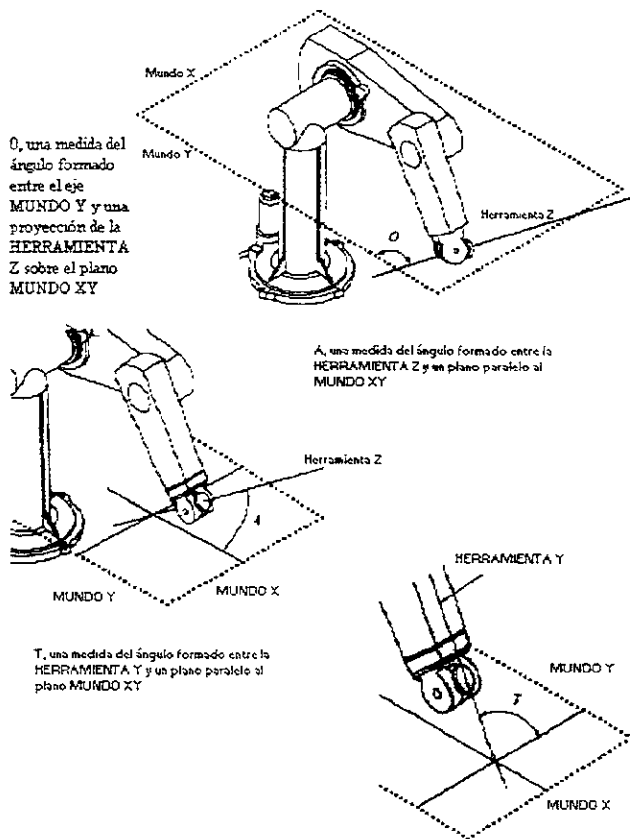


Figura 2.17. Definición de los ángulos de Euler  $O$ ,  $A$ , y  $T$ . (Tomado del manual del robot PUMA 398H).

Inicialmente el sistema de coordenadas de la herramienta (o el sistema de coordenadas de la mano) está alineado con el sistema de coordenadas de la base del robot, como se nos muestra en la Figura 2.18. Esto es, cuando  $O = A = T = 0^\circ$ , los puntos de la mano del eje  $y_0$  negativo con los dedos en un plano horizontal y el eje  $s$  están apuntando el eje  $y_0$  positivo. La transformación necesaria que describe la orientación del sistema de coordenadas de la mano ( $n, s, a$ ) con respecto al sistema de coordenadas de la base ( $x_0, y_0, z_0$ ) está dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [2.3-22]$$

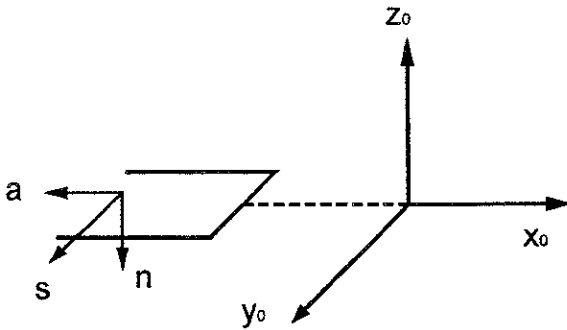


Figura 2.18. Alineamiento inicial de una herramienta en un sistema de coordenadas.

De la definición de los ángulos OAT y la matriz de alineación inicial [ecuación (2.3-22)], la relación entre la transformación de la mano y los ángulos OAT está dada por:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_{s,A} R_{a,T} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & -ST & 0 \\ ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postmultiplicando la ecuación matricial anterior por la transformación inversa  $R_{a,T}$ ,

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & ST & 0 \\ -ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix}$$

Y multiplicando las matrices tenemos:

$$\begin{bmatrix} n_x CT - s_x ST & n_x ST + s_x CT & a_x \\ n_y CT - s_y ST & n_y ST + s_y CT & a_y \\ n_z CT - s_z ST & n_z ST + s_z CT & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -SOSA & CO & SOCA \\ COSA & SO & -COCA \\ -CA & 0 & -SA \end{bmatrix} \quad [2.3-23]$$

Igualando los elementos (3, 2) de dicha ecuación matricial tenemos:

$$n_z ST + s_z CT = 0 \quad [2.3-24]$$

lo que da la solución de T,

$$T = \text{tg}^{-1} \left( \frac{s_z}{-n_z} \right) = \text{arctg}2(s_z, -n_z) \quad [2.3-25]$$

Igualando los elementos (3, 1) y (3, 3) de ambas matrices tenemos:

$$SA = -a_z \quad [2.3-26a]$$

$$CA = -n_z CT + s_z ST \quad [2.3-26b]$$

entonces las ecuaciones anteriores dan:

$$A = \text{tg}^{-1} \left( \frac{-a_x}{-n_z CT + s_z ST} \right) = \text{arctg}^2(-a_x, -n_z CT + s_z ST) \quad [2.3-27]$$

Igualando los elementos (1, 2) y (2, 2) de ambas matrices tenemos:

$$CO = n_x ST + s_x CT \quad [2.3-28a]$$

$$SO = n_y ST + s_y CT \quad [2.3-28b]$$

que dan la solución de O,

$$O = \text{tg}^{-1} \left( \frac{n_y ST + s_y CT}{n_x ST + s_x CT} \right) = \text{arctg}2(n_y ST + s_y CT, n_x ST + s_x CT) \quad [2.3-29]$$

La premultiplicación o postmultiplicación anterior de las transformadas inversas desconocidas se pueden también aplicar para encontrar la solución de las articulaciones de un robot PUMA. Los detalles respecto a la solución del robot PUMA se pueden encontrar en Paul y col. [1981].

Aunque la técnica de la transformada inversa proporciona un método general para determinar la solución de las articulaciones de un manipulador, no da una indicación clara sobre cómo seleccionar una solución apropiada de las diversas soluciones posibles para una configuración de brazo particular. Esto tiene que descansar sobre la intuición geométrica del usuario. Así, un método geométrico es más útil para derivar una solución de ángulos de articulación consistentes, dada la matriz del brazo como en la ecuación (2.2-39), y proporciona un medio para que el usuario pueda seleccionar una solución única para una configuración de brazo particular. Este método se presenta en la sección 2.3.2.

### 2.3.2 UN MÉTODO GEOMÉTRICO.

Esta sección presenta un método geométrico para la resolución del problema cinemático inverso de manipuladores de seis elementos con articulaciones giratorias. La discusión se enfoca sobre un manipulador tipo PUMA. Basado en el sistema de coordenadas del elemento y en la geometría del brazo humano, se pueden identificar diversas configuraciones de brazo de un robot tipo PUMA (Figura 2.11) con la ayuda de tres indicadores de configuración (BRAZO, CODO y MUÑECA) -dos asociados con la solución de las tres primeras articulaciones y el otro con las tres últimas-. Para un robot de seis ejes tipo PUMA, existen cuatro soluciones posibles para las tres primeras articulaciones y para cada una de las cuatro soluciones hay dos soluciones posibles para las tres últimas. Los dos primeros indicadores de configuración permiten determinar una solución de las cuatro soluciones posibles para las tres primeras articulaciones. Análogamente, el tercer indicador selecciona una solución de las dos posibles para las tres últimas articulaciones. Los indicadores de articulación del brazo se especifican por el usuario para encontrar la solución inversa. La solución se calcula en dos etapas. Primero, se deriva un vector de posición apuntando desde el hombro hasta la muñeca. Esto se utiliza para obtener la solución de cada articulación  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) para las tres primeras articulaciones examinando la proyección del vector de posición sobre el plano  $x_{i-1} y_{i-1}$ .

Las tres últimas articulaciones se resuelven utilizando la solución de la articulación calculada de las tres primeras articulaciones, las submatrices de orientación de  ${}^0T_6$  y  ${}^{i-1}A_i$ , y la proyección del sistema de coordenadas de los elementos sobre el plano  $x_{i-1} y_{i-1}$ . De la geometría se puede encontrar fácilmente la solución del brazo de forma consistente. Como una verificación de la solución de la articulación, se pueden determinar los indicadores de configuración del brazo de las ecuaciones de decisión correspondientes, las cuales son funciones de los ángulos de la articulación. Con modificaciones y ajustes apropiados se puede generalizar este método para resolver el problema cinemático inverso de la mayoría de los robots industriales actuales con articulaciones giratorias.

Si se dan  ${}^{ref}T_{herramienta}$ , entonces podemos encontrar  ${}^0T_6$  por premultiplicar y postmultiplicar  ${}^{ref}T_{herramienta}$  por  $B^{-1}$  y  $H^{-1}$ , respectivamente, y la solución del ángulo de articulación se puede aplicar a  ${}^0T_6$  como se desea:

$${}^0T_6 \equiv T = B^{-1} {}^{ref}T_{herramienta} H^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.3-30]$$

**Definición de las diversas configuraciones de brazo.** Para un robot PUMA mostrado en la Figura 2.11 (y otros robots giratorios), se definen diversas configuraciones de brazo de acuerdo con la geometría del brazo humano y el sistema de coordenadas de elementos que se estableció utilizando el algoritmo 2.1 como (Figura 2.19):

BRAZO DERECHO (hombro):  $\theta_2$  positivo mueve la muñeca en la dirección  $z_0$  *positivo* mientras que la 3ª articulación no se activa

BRAZO IZQUIERDO (hombro):  $\theta_2$  positivo mueve la muñeca en la dirección  $z_0$  *negativa* mientras la articulación tres no se activa.

BRAZO ARRIBA (codo por encima de la muñeca): Posición de la muñeca del brazo  $\left\{ \begin{matrix} \text{DERECHO} \\ \text{IZQUIERDO} \end{matrix} \right\}$  con respecto al sistema de coordenadas del hombro tiene valor de

coordenada  $\left\{ \begin{matrix} \text{negativo} \\ \text{positivo} \end{matrix} \right\}$  a lo largo del eje  $y_2$ .



BRAZO ABAJO (codo por debajo de la muñeca): Posición de la muñeca del brazo  $\begin{cases} \text{DERECHO} \\ \text{IZQUIERDO} \end{cases}$  con respecto al sistema de coordenadas del hombro tiene valor de coordenada  $\begin{cases} \text{negativo} \\ \text{positivo} \end{cases}$  a lo largo del eje  $y_2$ .

MUÑECA ABAJO: El vector unitario  $s$  del sistema de coordenadas de la mano y el vector unitario  $y_5$  del sistema de coordenadas  $(x_5, y_5, z_5)$  tienen un producto escalar positivo.

MUÑECA ARRIBA: El vector unitario  $s$  del sistema de coordenadas de la mano y el vector unitario  $y_5$  del sistema de coordenadas  $(x_5, y_5, z_5)$  tienen un producto escalar negativo.

(Obsérvese que la definición de las configuraciones del brazo con respecto al sistema de coordenadas del elemento tienen que ser ligeramente modificadas si se utilizan diferentes sistemas de coordenadas para los elementos). Con respecto a la definición anterior de las diversas configuraciones de brazo (BRAZO y CODO), se definen dos *indicadores* de configuraciones de brazo (BRAZO y CODO) para cada configuración. Estos dos indicadores se combinan para dar una solución de las cuatro posibles para las tres primeras articulaciones. Para cada una de las cuatro configuraciones del brazo (Figura 2.19) definidas por estos dos indicadores, el tercer indicador (MUÑECA) da una de las dos posibles soluciones de articulación para las tres últimas articulaciones. Estos tres indicadores se pueden definir como:

$$\text{BRAZO} \begin{cases} +1 \text{ brazo DERECHO} \\ -1 \text{ brazo IZQUIERDO} \end{cases} \quad [2.3-31]$$

$$\text{CODO} \begin{cases} +1 \text{ brazo ARRIBA} \\ -1 \text{ brazo ABAJO} \end{cases} \quad [2.3-32]$$

$$\text{MUÑECA} \begin{cases} +1 \text{ muñeca DERECHO} \\ -1 \text{ muñeca IZQUIERDO} \end{cases} \quad [2.3-33]$$

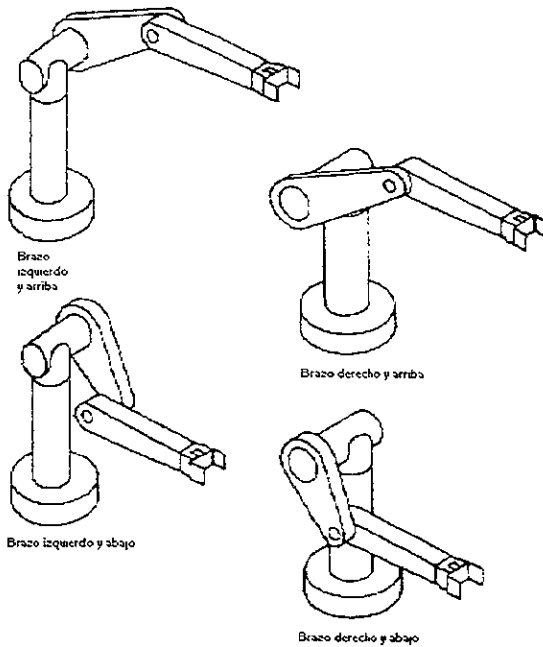


Figura 2.19. Definición de diversas configuraciones de brazo.

Además de estos indicadores, el usuario puede definir un conmutador "FLIP" como:

$$\text{FLIP} \begin{cases} +1 & \text{Cambiar la orientación de la muñeca} \\ -1 & \text{No cambiar la orientación de la muñeca} \end{cases} \quad [2.3-34]$$

Los valores señalados de estos indicadores y el conmutador se especifican por el usuario para encontrar la solución cinemática inversa. Estos indicadores se pueden también fijar a partir del conocimiento de los ángulos de la articulación del brazo del robot utilizando las correspondientes ecuaciones de decisión. Posteriormente daremos las ecuaciones de decisión que determinan estos valores de los indicadores. Las ecuaciones de decisión se pueden utilizar como una verificación de la solución cinemática inversa.

**Solución del brazo para las tres primeras articulaciones.** Del diagrama cinemático del robot PUMA mostrado en la Figura 2.11, definimos un vector de posición  $\mathbf{p}$  que apunta desde el origen del sistema de coordenadas del hombro  $(x_0, y_0, z_0)$  hasta el punto donde intersecta el último de los tres ejes de la articulación como (véase Figura 2.14):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_6 - d_6 \mathbf{a} = (p_x, p_y, p_z)^T \quad [2.3-35]$$

que corresponde al vector de posición de  ${}^0T_4$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) - d_2S_1 \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) + d_2C_1 \\ d_4C_{23} - a_3S_{23} - a_2S_2 \end{bmatrix} \quad [2.3-36]$$

*Solución de la articulación 1.* Si proyectamos el vector de posición  $\mathbf{p}$  sobre el plano  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$  como en la Figura 2.20, obtenemos las siguientes ecuaciones para obtener las siguientes ecuaciones para obtener  $\theta_1$ :

$$\theta_1^L = \phi - \alpha \quad \theta_1^R = \pi + \phi + \alpha \quad [2.3-37]$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad [2.3-38]$$

$$\text{sen}\phi = \frac{p_y}{R} \quad \text{cos}\phi = \frac{p_x}{R} \quad [2.3-39]$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{d_2}{R} \quad \text{cos}\alpha = \frac{r}{R} \quad [2.3-40]$$

donde los superíndices L y R sobre los ángulos de las articulaciones indican las configuraciones de brazo IZQUIERDO / DERECHO. De las ecuaciones (2.3-37) a (2.3-40) obtenemos las funciones seno y coseno de  $\theta_1$  para las configuraciones de brazo IZQUIERDO / DERECHO:

$$\text{sen}\theta_1^L = \text{sen}(\phi - \alpha) = \text{sen}\phi \text{cos}\alpha - \text{cos}\phi \text{sen}\alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad [2.3-41]$$

$$\text{cos}\theta_1^L = \text{cos}(\phi - \alpha) = \text{cos}\phi \text{cos}\alpha + \text{sen}\phi \text{sen}\alpha = \frac{p_x r - p_y d_2}{R^2} \quad [2.3-42]$$

$$\text{sen}\theta_1^R = \text{sen}(\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad [2.3-43]$$

$$\text{cos}\theta_1^R = \text{cos}(\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad [2.3-44]$$

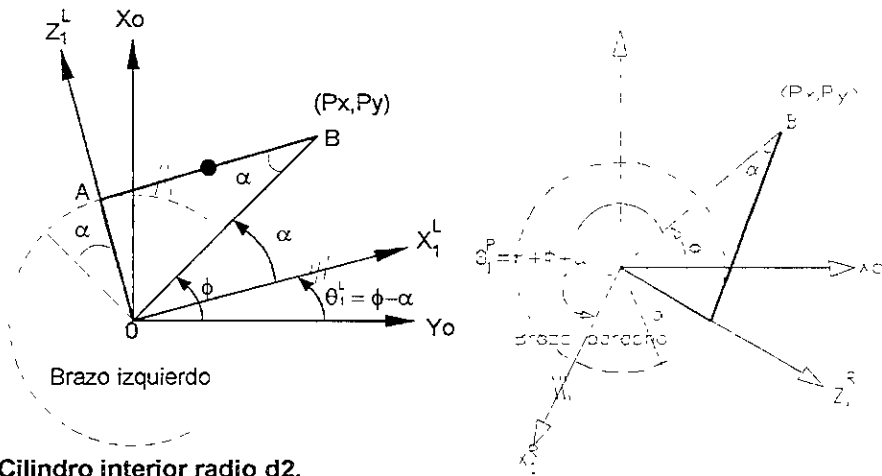


Figura 2.20.

Solución para la articulación 1.

Combinando las ecuaciones (2.3-41) a (2.3-44) y utilizando el indicador de BRAZO para indicar las configuraciones de brazo IZQUIERDO / DERECHO, obtenemos, respectivamente, las funciones seno y coseno de  $\theta_1$ :

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{-\text{BRAZO } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \tag{2.3-45}$$

$$\text{cos}\theta_1 = \frac{-\text{BRAZO } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \tag{2.3-46}$$

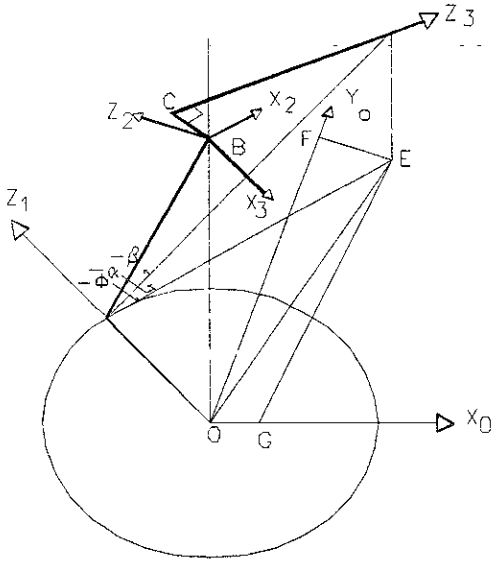


Figura 2.21. Solución para la articulación 2.

De donde se toma la raíz cuadrada positiva en estas ecuaciones y se define BRAZO como en la ecuación (2.3-31). Con el fin de evaluar  $\theta_1$  para  $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$ , se utilizará tal como se definió en la ecuación (2.3-7) una función arco tangente. De las ecuaciones (2.3-45) y (2.3-46), y utilizando la ecuación (2.3-7), se encuentra que  $\theta_1$  es:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\text{sen} \theta_1}{\text{cos} \theta_1} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{-\text{BRAZO} p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{-\text{BRAZO} p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y d_2} \right) \quad -\pi \leq \theta_1 \leq \pi \quad [2.3-47]$$

*Solución de la articulación 2.* Para encontrar la solución de la articulación 2, proyectamos el vector de posición  $\mathbf{p}$  sobre el plano  $x_1y_1$  tal como se muestra en la Figura 2.21. De esta Figura encontramos que tenemos cuatro configuraciones diferentes de brazo. Cada una corresponde a valores diferentes de la articulación 2 como se muestra en tabla 2.3 donde  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  y  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ .

**Tabla 2.3. Diversas configuraciones de brazo para articulación.**

Configuración de brazo	$\theta_2$	Brazo	Codo	Brazo • codo
Brazo Izquierdo y arriba	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
Brazo Izquierdo y Abajo	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
Brazo Derecho y arriba	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
Brazo Derecho y abajo	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

En la tabla anterior,  $\theta_2$  se puede expresar en una ecuación para diferentes configuraciones de brazo y codo utilizando los iniciadores de Brazo y Codo como:

$$\theta_2 = \alpha + (\text{BRAZO} \cdot \text{CODO})\beta + k \cdot \beta \tag{2.3-48}$$

Donde el indicador de configuración de brazo combinado  $K = \text{BRAZO} \cdot \text{CODO}$ , dará un valor de signo apropiado y el "punto" representa una operación de multiplicación sobre los indicadores. De la geometría del brazo en la Figura 2.21 obtenemos:

$$R = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_2^2} \quad r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2} \tag{2.3-49}$$

$$\text{sen} \alpha = - \left[ \frac{P_z}{R} \right] = - \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_2^2}} \tag{2.3-50}$$

$$\text{cos} \alpha = - \frac{\text{BRAZO} \cdot r}{R} = - \frac{\text{BRAZO} \cdot \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_2^2}} \tag{2.3-51}$$

$$\text{cos} \beta = \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + d_3^2)}{2a_2 R} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2 \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_2^2}} \tag{2.3-52}$$

$$\text{sen} \beta = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \beta} \tag{2.3-53}$$

De las ecuaciones (2.3-48) a (2.3-53) encontramos las funciones de seno y coseno de  $\theta_2$ :

$$\text{sen} \theta_2 = \text{sen}(\alpha + K \cdot \beta) = \text{sen} \alpha \text{cos}(k \cdot \beta) + (\text{BRAZO} \cdot \text{CODO}) \text{cos} \alpha \text{sen} \beta \tag{2.3-54}$$

$$\text{cos} \theta_2 = \text{cos}(\alpha + k \cdot \beta) = \text{cos} \alpha \text{cos} \beta - (\text{BRAZO} \cdot \text{CODO}) \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \tag{2.3-55}$$

De las ecuaciones (2.3-54) y (2.3-55) obtenemos la solución para  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{cos}\theta_2}\right) \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi \quad [2.3-56]$$

Plano  $X_2Y_2$

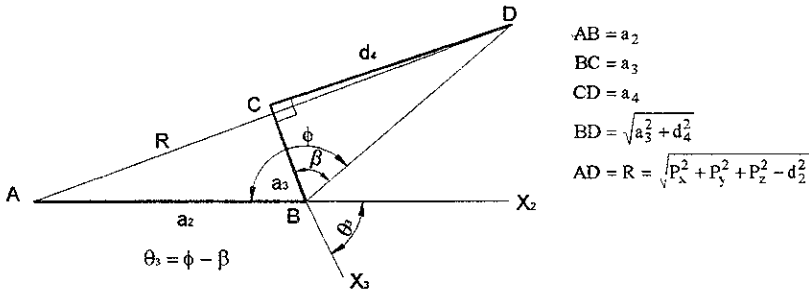


Figura 2.22a. Solución para la articulación 3. (Brazo izquierdo y abajo).

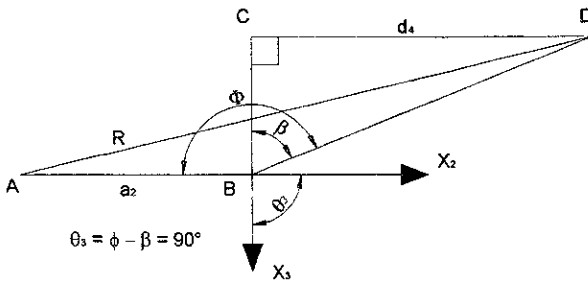


Figura 2.22b. Solución para la articulación 3. (Brazo izquierdo y abajo).

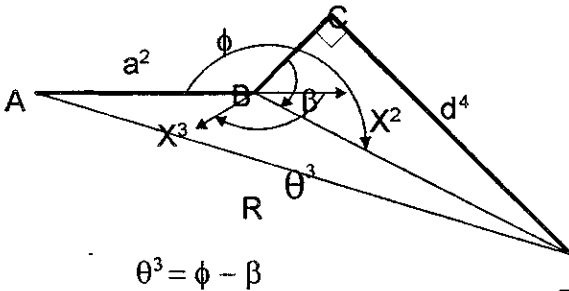


Figura 2.22c. Solución para la articulación 3. (Brazo izquierdo y arriba).

Solución para la articulación 3. Para la articulación 3, proyectamos el vector de posición  $\mathbf{p}$  sobre el plano  $\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2$  tal como se muestra en la Figura 2.22. De Esta Figura obtenemos cuatro configuraciones de brazo diferentes Cada configuración corresponde a valores diferentes de la articulación 3 como se muestra en la Figura 2.4 donde  $({}^2\mathbf{p}_4)_y$  es la componente  $y$  del vector de posición desde el origen de  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$  Hasta el punto donde se interceptan los últimos tres ejes de articulación.

De la geometría del brazo en la Figura 2.22 obtenemos las ecuaciones siguientes para encontrar la solución a  $\theta_3$ :

$$R = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - d_2^2} \tag{2.3-57}$$

$$\cos \phi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2 \sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \tag{2.3-58}$$

$$\begin{aligned} \text{sen} \phi &= \text{BRAZO} \cdot \text{CODO} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \\ \text{sen} \beta &= \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad \cos \beta = \frac{a_3}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \end{aligned} \tag{2.3-59}$$

**Tabla 2.4. Diversas configuraciones de brazo para la articulación 3**

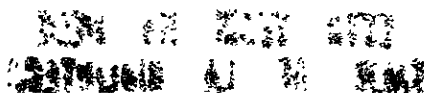
Configuración de brazo	$({}^2\mathbf{P}_4)_y$	$\theta_3$	Brazo	Codo	Brazo•Codo
Brazo izquierdo y Arriba	$\geq 0$	$\phi - \beta$	-1	+1	-1
Brazo izquierdo y Abajo	$\leq 0$	$\phi - \beta$	-1	-1	+1
Brazo Derecho y Arriba	$\leq 0$	$\phi - \beta$	+1	+1	+1
Brazo Derecho y Abajo	$\geq 0$	$\phi - \beta$	+1	-1	-1

De la tabla 2.4 podemos expresar  $\theta_3$  en una ecuación para configuraciones de brazos diferentes:

$$\theta_3 = \phi - \beta \tag{2.3-60}$$

De la ecuación (2.360) las funciones seno y coseno de son, respectivamente:

$$\text{sen} \theta_3 = \text{sen}(\phi - \beta) = \text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta \tag{2.3-61}$$





$$\cos \theta_3 = \cos(\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \beta \quad [2.3-62]$$

De las ecuaciones (2.3-61) y (2.3-62), y utilizando las ecuaciones (2.3-57) a (2.3-59), encontramos la solución para  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta_3}{\cos \theta_3} \right) \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi \quad [2.3-63]$$

Solución del brazo para las últimas tres articulaciones. conociendo las tres primeros ángulos de articulación. podemos evaluar la matriz  ${}^0T_3$  que se utiliza extensivamente para encontrar la solución de las tres últimas articulaciones.

La solución de las tres últimas articulaciones de un robot PUMA se pueden encontrar haciendo que estas articulaciones cumplan los criterios siguientes

1. Fijar la articulación 4 de forma tal que una rotación respecto de la rotación 5 alineará el eje de movimiento de la articulación 6 con el vector de aproximación dado ( $\mathbf{a}$  de T).
2. Fijar la articulación 5 para alinear el eje de movimiento de la articulación 6 con el vector de aproximación.
3. Fijar la articulación 6 para alinear el vector de orientación dado (o vector de deslizamiento o  $\mathbf{y}_6$ ) y el vector normal.

Matemáticamente, los criterios anteriores significan, respectivamente:

$$z_4 = \frac{\pm (z_3 \times \mathbf{a})}{\|z_3 \times \mathbf{a}\|} \quad [2.3-64]$$

$$\mathbf{a} = z_5 \quad \text{dado } \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T \quad [2.3-65]$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{y}_6 \quad \text{dado } \mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \text{ y } \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \quad [2.3-66]$$

En la ecuación (2.3-64) se puede tomar el vector producto vectorial como positivo o negativo. Como resultado de esto existen dos soluciones posibles para  $\theta_4$ . Si el vector

producto vectorial es cero (es decir,  $z_3$  es paralelo a  $a$ ), indica el caso degenerado. Esto sucede cuando los ejes de rotación son paralelos para las articulaciones 4 y 6. Indica que en esta configuración de brazo particular sería suficiente un robot de cinco ejes en lugar de uno que tenga seis.

*Solución de la articulación 4* Ambas orientaciones de la muñeca (Arriba y Abajo) se definen observando la orientación del sistema de coordenadas de la mano ( $n, s, a$ ) con respecto al sistema de coordenadas ( $x_5, y_5, z_5$ ). El signo del vector producto vectorial en la ecuación (2.3-64) no se puede determinar sin referirse a la orientación del vector unitario  $n$  ó  $s$  con respecto al vector unitario  $x_5$  ó  $y_5$ , que respectivamente, tienen una relación fija con respecto al vector unitario  $z_4$  a partir de la asignación del sistema de coordenadas del elemento. (de la Figura 2.11 tenemos el vector unitario  $z_4$  apuntando en la misma dirección que el vector unitario  $y_5$ ).

Comenzaremos con la hipótesis que el producto vectorial en la ecuación (2.3-64) tiene signo positivo. Esto se puede indicar mediante un indicador de orientación  $\Omega$  que se define como:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si se está en el caso degenerado} \\ s \cdot y_5 & \text{si } s \cdot y_5 \neq 0 \\ n \cdot y_5 & \text{si } s \cdot y_5 = 0 \end{cases} \quad [2.3-67]$$

De la Figura 2.11,  $y_5 = z_4$  y utilizando la ecuación (2.3-64), se puede reescribir el indicador de orientación  $\Omega$  como:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{Si se está en el caso degenerado} \\ s \cdot \frac{(z_3 \times a)}{|z_3 \times a|} & \text{si } s \cdot y_5 \neq 0 \\ n \cdot \frac{(z_3 \times a)}{|z_3 \times a|} & \text{si } s \cdot (z_3 \times a) = 0 \end{cases} \quad [2.3-68]$$

Si nuestra hipótesis del signo del producto vectorial en la ecuación (2.3-64) no es correcta, se cambiará posteriormente utilizando la combinación de Muñeca y el indicador de orientación  $\Omega$

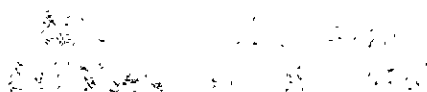


Tabla 2.5. Diversas orientaciones para la muñeca.			
Orientación de la muñeca	$\Omega = \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5$ ó $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5$	MUÑECA	$M = \text{MUÑECA sign}(\Omega)$
ABAJO	$\geq 0$	+1	+1
ABAJO	$< 0$	+1	-1
ARRIBA	$\geq 0$	-1	-1
ARRIBA	$< 0$	-1	+1

$\Omega$  se utiliza para indicar la orientación inicial del vector unitario  $\mathbf{z}_4$  (dirección positiva) a partir de la asignación de los sistemas de coordenadas de los elementos, mientras que el indicador MUÑECA especifica la preferencia del usuario en la orientación del subsistema MUÑECA de acuerdo con la definición dada en la ecuación (2.3-33). Si ambos indicadores tienen el mismo signo, entonces la hipótesis del signo del producto vectorial en la ecuación (2.3-64) es correcta. En la tabla 2.5 se tabulan diversas orientaciones de MUÑECA que resultan de la combinación de algunos valores de los indicadores de MUÑECA y su orientación.

Otra vez observando la proyección del sistema de coordenadas  $(\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_4, \mathbf{z}_4)$  sobre el plano  $\mathbf{x}_3\mathbf{y}_3$  y de la tabla 2.5 y la Figura 2.23, se puede demostrar que es cierto lo siguiente (véase Fig. 2.3):

$$\text{sen}\theta_4 = -M(z_4 \cdot x_3) \quad \text{cos}\theta_4 = M(z_4 \cdot y_3) \quad [2.3-69]$$

Donde:  $\mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{y}_3$  son los vectores columnas "x" e "y" de  ${}^0T_3$ , respectivamente,  $M = \text{MUÑECA sign}(\Omega)$ , y la función sign se define como:

$$\text{sign}(x) \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad [2.3-70]$$

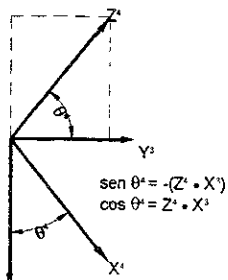


Figura 2.23. Solución para la articulación 4.

Así la solución para  $\theta_4$  con los indicadores de MUÑECA y orientación es:

$$\theta_4 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\theta_4}{\text{cos}\theta_4}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{M(C_1a_y - S_1a_x)}{M(C_1C_{23}a_x + S_1C_{23}a_y - S_{23}a_x)}\right) \quad -\pi \leq \theta_4 \leq \pi \quad [2.3-71]$$

Si ocurre el caso degenerado, se puede escoger para  $\theta_4$  cualquier valor conveniente mientras se satisfaga la orientación de la muñeca (Arriba/ Abajo). Esto se puede asegurar siempre fijando  $\theta_4$  igual al valor actual de  $\theta_4$ . Además de esto, el usuario puede activar el conmutador FLIP para obtener la otra solución de  $\theta_4$ , esto es,  $\theta_4 = \theta_4 + 180^\circ$ .

Solución de la articulación 5. Para encontrar  $\theta_5$ , utilizamos el criterio que alinea el eje de rotación de la articulación de la articulación 6 con el vector de aproximación (o  $\mathbf{a} = \mathbf{z}_5$ ) Mirándola proyección del sistema de coordenadas  $(x_5, y_5, z_5)$  sobre el plano  $\mathbf{x}_4\mathbf{y}_4$ , se puede demostrar que es cierto lo siguiente (véase Fig. 2.24) :

$$\text{sen}\theta_5 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_4 \quad \text{cos}\theta_5 = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}_4) \quad [2.3-72]$$

donde  $\mathbf{x}_4$  e  $\mathbf{y}_4$  son, respectivamente, los vectores columnas x e y de  ${}^0T_4$  y  $\mathbf{a}$  es el vector de aproximación. Así, la solución a  $\theta_5$  es :

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\theta_5}{\text{cos}\theta_5}\right) \quad -\pi \leq \theta_5 \leq \pi \\ &= \text{tg}^{-1}\left[\frac{(C_1C_{23} - S_1S_4)a_x + (S_1C_{23}C_4 + C_1S_4)a_y - C_4S_{23}a_x}{C_1S_{23}a_x + S_1S_{23}a_y + C_{23}a_2}\right] \end{aligned} \quad [2.3-73]$$

si  $\theta_5 \approx 0$ , Entonces ocurre el caso degenerado

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_5 &= a \times X_4 \\ \text{cos}\theta_5 &= -(a \times Y_4) \end{aligned}$$

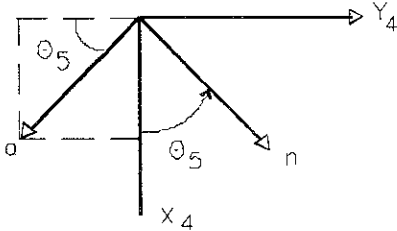


Figura 2.24.

Para la articulación 5

Solución de la articulación 6. Hasta ahora alineado el eje de la articulación 6 con el vector de aproximación. A continuación necesitamos alinear la orientación de la pinza para facilitar la recogida del objeto. el criterio para hacer es fijar  $s = y_6$ . Mirando la proyección del sistema de coordenadas de la mano  $(n, s, a)$  sobre el plano  $x_5y_5$ , se puede demostrar que se cumple (véase figura 2.25):

$$\text{sen}\theta_6 = n \cdot y_5 \qquad \text{cos}\theta_6 = s \cdot y_5 \qquad [2.3-74]$$

donde  $y_5$  es el vector columna de  ${}^0T_5$  y  $n$  y  $s$  son, respectivamente, los vectores normal y de deslizamiento. Así, la solución a  $\theta_6$  es:

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\theta_6}{\text{cos}\theta_6}\right) \qquad -\pi \leq \theta_6 \leq \pi \\ &= \text{tg}^{-1}\left[\frac{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)n_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)n_y + (S_4S_{23})n_z}{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)S_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)S_y + (S_4S_{23})S_z}\right] \end{aligned} \qquad [2.3-75]$$

La derivación anterior de la solución cinemática inversa de un robot Puma se basa en la interpretación geométrica de la posición del punto final del elemento 3 y de requisito de orientación de la mano (o Herramienta). Existen un inconveniente en la derivación anterior para  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$ . El Criterio para fijar el eje de movimiento de la articulación 5 que es igual al producto vectorial de  $\mathbf{z}_3$  y  $\mathbf{a}$  puede no ser válido cuando  $\sin\theta_5 \approx 0$ , lo que significa que  $\theta_5 \approx 0$ . En este caso, el manipulador se hace degenerado con los ejes de movimiento de las articulaciones 4 y 6 alineadas. En este estado, solamente es significativo la suma de  $\theta_4$  y  $\theta_6$ . Si ocurre el caso degenerado, entonces somos libres de es coger cualquier valor para  $\theta_4$ , y normalmente se utiliza su valor actual y a continuación nos gustaría tener  $\theta_4 + \theta_6$  igual al ángulo total necesitado para alinear el vector de deslizamiento  $\mathbf{s}$  y el vector normal  $\mathbf{n}$ . Si el conmutador FLIP está activado (es decir, FLIP = 1), entonces  $\theta_4 = \theta_4 + \pi$ ,  $\theta_5 = -\theta_5$  y  $\theta_6 = \theta_6 + \pi$ .

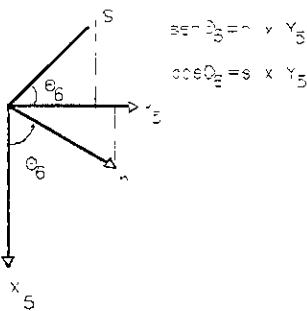


Figura 2.25.

**Solución para al articulación 6**

En resumen, existen ocho soluciones al problema cinemático inverso de un robot tipo PUMA de seis articulaciones. La solución de las tres primeras articulaciones ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ) posicionan el brazo mientras que las soluciones de las últimas tres articulaciones ( $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$ ) proporcionan la orientación apropiada de la mano. Hay cuatro soluciones para las tres primeras articulaciones. Dos para la configuración del brazo del hombro derecho y dos para la configuración del brazo del hombro izquierdo. Para cada configuración de brazo, las ecuaciones (2.3-47), (2.3-56), (2.3-63), (2.3-71), (2.3-73) y

(2.3-75) dan un conjunto de soluciones  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$  y  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 + \pi, -\theta_5, \theta_6 + \pi)$  (con el conmutador FLIP activado) da otro conjunto de soluciones.

**Ecuaciones de decisión para los indicadores de configuración de brazo.** La solución derivada para un brazo tipo PUMA en la sección anterior no es única depende de los indicadores de configuración de brazo especificados por el usuario. Estos indicadores (BRAZO, CODO y MUÑECA) se pueden determinar también a partir de los ángulos de las articulaciones. En este apartado deducimos las ecuaciones de decisión respectivas para cada indicador de configuración de brazo. El signo de la ecuación de decisión (positivo, cero ó negativo) proporciona una indicación de la configuración de brazo tal como se definieron en las ecuaciones (2.3-31) a (2.3-33).

Para el indicador BRAZO, siguiendo la definición del brazo DERECHO/IZQUIERDO, se puede encontrar una ecuación de decisión:

$$g(\theta, \mathbf{p}) = \mathbf{z}_0 \cdot \frac{\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} = \mathbf{z}_0 \cdot \begin{bmatrix} i & j & k \\ -\text{sen} \theta_1 & \text{cos} \theta_1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} = \frac{-p_y \text{sen} \theta_1 - p_x \text{cos} \theta_1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} \tag{2.3-76}$$

Donde  $\mathbf{p}' = (p_x, p_y, 0)^T$  es la proyección del vector de posición  $\mathbf{p}$  [Ecuación (2.3-36)] sobre el plano  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\text{sen} \theta_1, \text{cos} \theta_1, 0)^T$  del vector tercera columna de  ${}^0\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{z}_0 = (0,0,1)^T$ .

Tenemos las posibilidades siguientes:

1. Si  $g(\theta, \mathbf{p}) > 0$ , entonces el brazo está en la configuración del brazo DERECHO.
2. Si  $g(\theta, \mathbf{p}) < 0$ , entonces el brazo está en la configuración del brazo IZQUIERDO.
3. Si  $g(\theta, \mathbf{p}) = 0$ , entonces el brazo está en la configuración del brazo DERECHO/IZQUIERDO, no se puede determinar unívocamente. El brazo está dentro

del cilindro de radio  $d_2$  en el espacio de trabajo (véase Figura 2.19). En este caso se toma por defecto el brazo a la DERECHA (BRAZO = +1).

Como el denominador de las ecuaciones de decisión anteriores es siempre positivo, la determinación de la configuración del brazo IZQUIERDO/DERECHO se reduce a comprobar el signo del numerador de  $g(\theta, \mathbf{p})$ :

$$\text{BRAZO} = \text{signo}[g(\theta, \mathbf{p})] = \text{signo}(-p_x \cos \theta, -p_y \text{sen} \theta) \quad [2.3-77]$$

donde la función signo en la ecuación (2.3-70). Sustituyendo las componentes x e y de p de la ecuación (2.3-36), la ecuación (2.3-77) se hace:

$$\text{BRAZO} = \text{sign}[g(\theta, \mathbf{p})] = \text{sign}[g(\theta)] = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_3 C_{23}) \quad [2.3-78]$$

De aquí que a partir de la ecuación de decisión en la ecuación (2.3-78) se puede relacionar su signo con el indicador de BRAZO para la configuración DERECHO/IZQUIERDO como:

$$\text{BRAZO} = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{brazo DERECHO} \\ -1 \Rightarrow \text{brazo IZQUIERDO} \end{cases} \quad [2.3-79]$$

Para el indicador de brazo CODO, seguimos la definimos de brazo ARRIBA/ABAJO para formular la correspondiente ecuación la correspondiente ecuación de decisión.

Utilizando  $({}^2\mathbf{p}_4)_y$  y el indicador BRAZO en la tabla 2.4, la ecuación de decisión para el indicador CODO se basa en el signo de la componente y el vector de posición  ${}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4$  y el indicador de BRAZO:

$$\text{CODO} = \text{BRAZO} \text{ sign}(d_4 C_3 - a_3 S_3) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{codo encima muñeca} \\ -1 \Rightarrow \text{codo debajo muñeca} \end{cases} \quad [2.3-80]$$

Para el indicador MUÑECA, seguimos la definición de MUÑECA ARRIBA/ABAJO para obtener un producto escalar positivo de los vectores unitarios  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{y}_5$  ( ${}^0\mathbf{z}_4$ ):



$$\text{MUÑECA} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4 > 0 \\ +1 & \text{si } \mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4) \quad [2.3-81]$$

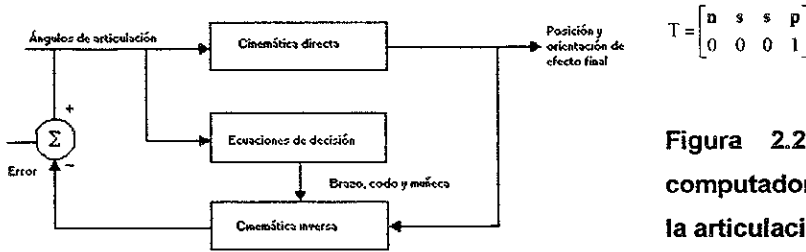


Figura 2.26. Simulación en computador de las solución de la articulación.

Si  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4 = 0$ , entonces el indicador MUÑECA se puede encontrar d

$$\text{MUÑECA} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4 > 0 \\ +1 & \text{si } \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4) \quad [2.3-82]$$

Combinando las ecuaciones (2.3-81) y (2.3-82) tenemos:

$$\text{MUÑECA} = \begin{cases} \text{sign}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4) & \text{si } \mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4 \neq 0 \\ \text{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4) & \text{si } \mathbf{s} \cdot \mathbf{z}_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{MUÑECAARRIBA} \\ -1 \Rightarrow \text{MUÑECAABAJO} \end{cases} \quad [2.3-83]$$

Estas ecuaciones de decisión proporcionan una verificación de la solución del brazo. Las utilizamos para fijar la configuración de brazo en el problema cinemático directo y a continuación utilizamos los indicadores de configuración de brazo para encontrar la solución cinemática inversa (véase Figura 2.26).

**Simulación en computador.** Se puede escribir un programa para verificar la validez de la solución inversa del robot PUMA mostrado en la Figura 2.11. El programa genera inicialmente todas las posiciones en el espacio de trabajo del robot dentro de los límites de ángulos de las articulaciones. Se introducen en la rutina cinemática directa para obtener la matriz de brazo **T**. Estos ángulos de las articulaciones se utilizan también para calcular las ecuaciones de decisión para obtener los tres indicadores de configuración de brazo. Estos indicadores, junto con la matriz de brazo **T**, se dan a la rutina de la solución inversa para obtener la solución de los ángulos de las articulaciones que deberían de estar de acuerdo con los deducidos previamente en la rutina cinemática directa en la Figura 2.26 se muestra un diagrama de bloques de la simulación del computador.

## 2.4 CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS. [1]

En esta parte del capítulo se modelarán las cadenas cinemáticas compuestas por cuerpos rígidos. Los marcos teóricos tratados en el capítulo I se usarán para modelar de forma sistemática las cadenas cinemáticas que componen a los robots y mecanismos. El objetivo de este capítulo es el de unificar las diferentes metodologías que existen para representar las rotaciones en base al marco teórico del álgebra de Cuaterniones[6]. Un aspecto importante en esta parte es la generalización del método para la modelación de las cadenas cinemáticas abiertas y cerradas, así como para cadenas cinemáticas compuestas.

Normalmente los manipuladores son modelados con la metodología de Denavit - Hartenberg, en tanto los mecanismos son tratados con el álgebra compleja, en su representación exponencial. La modelación con el álgebra de Cuaterniones permite las caracterizaciones cinemáticas de robots más complejos, además de ser útil en los sistemas de giroscopios y en general a los sistemas mecánicos que produzcan movimiento.

Para mostrar el uso del álgebra de Cuaterniones en las rotaciones finitas de cuerpos rígidos acoplados, se modela una cadena cinemática de dos grados de libertad tipo RR, que utilizaremos en nuestra aplicación.

### 2.4.1 MODELACIÓN CINEMÁTICA DE UN SISTEMA MECÁNICO DE CADENA ABIERTA TIPO RR.

El multicuerpo a analizar, en esta parte, es una cadena cinemática abierta formada por dos cuerpos rígidos acoplados por medio de juntas rotacionales y su campo de acción es el plano XZ.

El problema consiste en construir las ecuaciones que gobiernan la cinemática de la cadena mostrada en la Figura 2.27, el extremo final del segundo eslabón, está obligado, en este caso, a seguir una trayectoria específica descrita en el plano XZ, con el fin de colocar una herramienta de trabajo que simule una operación de un proceso determinado.

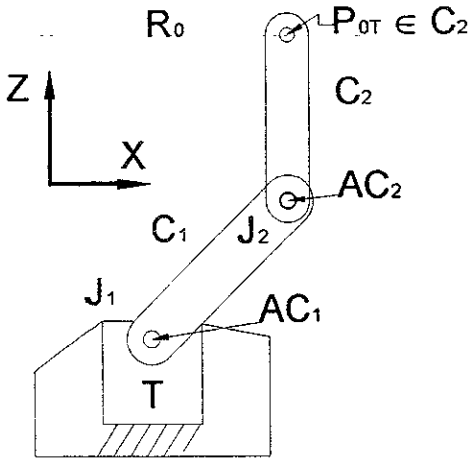


Figura 2.27. Caracterización del robot \$R\_0\$.

Consideremos el multicuerpo (\$R\_0\$), mostrado en 2.27, observemos que \$R\_0\$ puede ser representado por:

$$R_0 = C_1 \cup C_2 \quad [2.4-1]$$

El multicuerpo está montado en el cuerpo \$T\$, mostrado en la figura anterior, al cual llamaremos la tierra del sistema. Llamaremos la junta del sistema denotada por \$J\_1\$, al conjunto de puntos dados por la intersección siguiente:

$$J_1 = T \cap C_1 \quad [2.4-2]$$

En la tierra se montará un actuador, al cual llamaremos \$AC\_1\$ el cual se acoplará al cuerpo \$C\_1\$, a través de la junta \$J\_1\$ y del eje del actuador.

La junta que conecta al cuerpo \$C\_1\$ con el cuerpo \$C\_2\$ se define como:

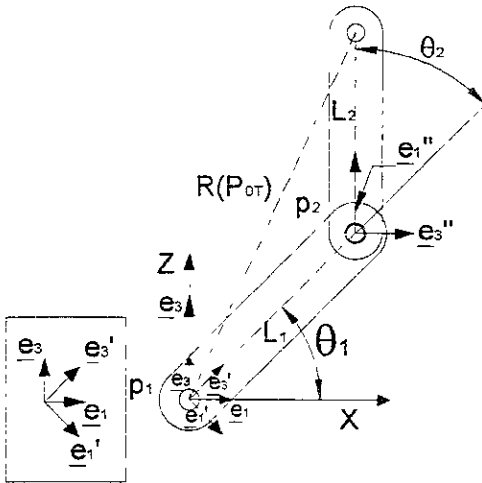
$$J_2 = C_1 \cap C_2 \quad [2.4-3]$$

En esta parte del cuerpo se localiza un segundo actuador al cual llamaremos \$AC\_2\$ y está acoplado a los cuerpos \$C\_1\$ y \$C\_2\$ a través de la junta \$J\_2\$. En este trabajo el multicuerpo \$R\_0\$ se considerará formado de la forma siguiente:

$$R_0 = C_2 \cup J_2 \cup AC_2 \cup C_1 \cup AC_1 \cup J_1 \cap T \quad [2.4-4]$$

Sobre la junta  $J_1$  se define un sistema cartesiano inercial, también sobre el eje de  $C_1$  se define un sistema local y sobre la junta  $J_2$  se define el sistema de referencia del cuerpo  $C_2$  como se muestra en la Figura 2.28. Los sistemas de referencia asociados a los cuerpos  $C_1$  y  $C_2$  serán llamados en este trabajo las bases móviles y están fijas en los cuerpos  $C_1$  y  $C_2$ . Las longitudes de los cuerpos  $C_1$  y  $C_2$  serán denotadas por  $L_1$  y  $L_2$  según se muestra en la Figura 2.28. Por tanto, los vectores de posición que unen el centro de la junta  $J_1$  con la junta  $J_2$  y de la junta  $J_2$  al punto  $p_{OT} \in C_2$  mostrado en la Figura 2.28, al cual llamaremos punto final de  $R_\alpha$ , están definidos con respecto a las bases locales. Esto es:

$$L_1 = l_1 \underline{e}'_1, L_2 = l_2 \underline{e}''_3 \tag{2.4-5}$$



**Figura 2.28.**  
**Configuración no deformada de  $R_\alpha$ .**

Observemos que dichos vectores,  $L_1, L_2$ , al fijar los puntos  $p_1 \in J_1, p_2 \in J_2, p_\alpha \in C_2$  pueden ser también expresados mediante la siguiente diferencia de puntos:

$$L_1 = p_2 - p_1, L_2 = p_\alpha - p_2 \tag{2.4-6}$$

También el vector de posición de  $p_\alpha \in C_2$  puede ser expresado como:

$$R(p_\alpha) = p_\alpha - p_1 \tag{2.4-7}$$

El vector  $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^2$  es representado a través de la siguiente ecuación:

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \tag{2.4-8}$$

### 2.4.1.1 ANÁLISIS EN LA CONFIGURACIÓN NO DEFORMADA DE $R_0$ .

Consideremos que el multicuerpo  $R_0$  ocupa la posición mostrada en la Figura 2.28. Entonces, el vector de posición de  $p_{ot} \in C_2$ , está dado por:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' \tag{2.4-9}$$

Donde  $l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+$  y  $\underline{e}_1', \underline{e}_1'' \in \mathfrak{R}^4$  son las bases móviles asociadas con las juntas de nuestro robot en estudio.

En este trabajo consideremos que las bases móviles son rotaciones rígidas de la base inercial fija, de acuerdo a [4], tales rotaciones pueden expresarse, en el caso de Cuaterniones unitarios por:

$$\begin{aligned} \underline{e}_1' &= \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_1 * \bar{p} \\ \underline{e}_1'' &= \rho(q, \rho(p, \underline{e}_1)) \equiv (q * p) * \underline{e}_1 * (\overline{q * p}) \end{aligned} \tag{2.4-10}$$

Donde  $\rho(p, \bullet): Q \rightarrow Q, p \in Q$ . Basándose en las expresiones [2.4-10] y [2.4-9] puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ (q * p) * \underline{e}_1 * (\overline{q * p}) \} \tag{2.4-11}$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| p \| = \| q \| = 1 \tag{2.4-12}$$

Obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración no deformada de  $R_0$ . Las componentes de los Cuaterniones asociados  $p, q \in \mathbb{R}^4$  son definidas por:

$$p \in \mathbb{R}^4, p = (p_0, \underline{p}_V), p_0 \in \mathbb{R}; p_0 = \pm \text{Cos } \frac{\theta_1}{2} \quad [2.4-13]$$

$$\underline{p}_V \in \mathbb{R}^3 \quad \underline{p}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_2,$$

$$q \in \mathbb{R}^4; q = (q_0, \underline{q}_V), q_0 \in \mathbb{R}; q_0 = \pm \text{Cos } \frac{\theta_2}{2}$$

$$\underline{q}_V \in \mathbb{R}^3 \quad \underline{q}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_2.$$

### 2.4.1.2 PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS CINEMÁTICOS DIRECTO E INVERSO.

En esta parte, definiremos dos problemas asociados al multicuerpo en estudio. El primero de ellos, será el problema de la cinemática directa y el segundo corresponde a la cinemática inversa. Tales problemas están asociados a la posición mostrada en la Figura 2.28, la cual, será para nosotros la configuración no deformada. Consideremos entonces el siguiente problema:

#### 2.4.1.2.1 PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO.

“Dados  $p = (p_0, 0, p_2, 0)$ ,  $q = (q_0, 0, q_2, 0)$  con  $\| p \| = \| q \| = 1$  y  $l_1 \in \mathbb{R}^+, l_2 \in \mathbb{R}^+$ , encuentre  $R(p_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que [2.4-11] sea satisfecha.”

#### 2.4.1.2.2 PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO.

Presentaremos ahora en esta parte el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el cuerpo en estudio. Esto es:

“Dado  $\mathbb{R}(p_{0i}) \in \mathfrak{R}^2$  y  $l_1 \in \mathfrak{R}^+$ ,  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $p = (p_0, 0, p_2, 0)$ ,  $q = (q_0, 0, q_2, 0)$  tal que [2.4-11] sea satisfecha” y:

$$p_0^2 + p_2^2 = 1 \tag{2.4-14}$$

$$q_0^2 + q_2^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa genera 4 ecuaciones algebraicas no lineales con 4 incógnitas del tipo polinomial.

### 2.4.1.3 ANÁLISIS DE LA CONFIGURACIÓN DEFORMADA DE $R_0$ .

En esta parte se supone que el robot ( $R_0$ ) ha sido movido de su posición inicial (configuración no deformada) a través de accionamientos de los actuadores  $AC_1$  y  $AC_2$  (ver Figura 2.29). El problema ahora consiste en determinar el lugar geométrico que ocupa el extremo final del multicuerpo. La configuración así obtenida se denominará configuración deformada.

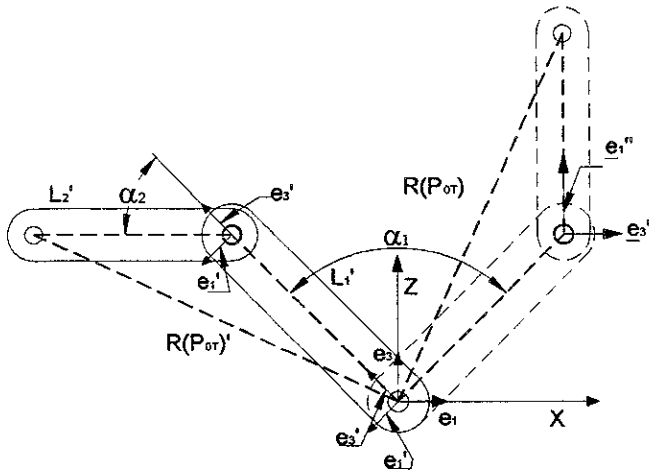


Figura 2.29. Configuración deformada de  $R_0$ .

Observemos que el vector de posición  $\underline{R}_{(p_{\alpha})''}$  correspondiente a la configuración deformada es expresado de la forma siguiente:

$$\underline{R}_{(p_{\alpha})''} = \underline{L}_1' + \underline{L}_2' \tag{2.4-15}$$

Los vectores de posición  $\underline{L}_1'$ ,  $\underline{L}_2'$  serán para nosotros los vectores deformados, los cuales también pueden ser escritos en términos de las bases locales. Esto es,

$\underline{L}_1' = l_1 \cdot \underline{a}_1'$ ,  $\underline{L}_2' = l_2 \cdot \underline{a}_1''$ . Las bases  $\underline{a}_1'$ ,  $\underline{a}_1''$  serán para nosotros las bases móviles deformadas. En términos de Cuaterniones las bases deformadas se expresan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1' &= \rho(P, \underline{e}_1') \equiv P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \\ \underline{a}_1'' &= \rho(Q, \rho(P, \underline{e}_1'')) \equiv Q * P * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * P * q * p}) \end{aligned} \tag{2.4-16}$$

Basándose en [2.4-11] el vector de posición  $\underline{R}_{(p_{\alpha})''} \in \mathfrak{R}^2$  puede ser representado de la forma siguiente:

$$\underline{R}_{(p_{\alpha})} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * P * q * p}) \} \tag{2.4-17}$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones  $P, Q \in \mathfrak{R}^2$ . Esto es,

$$\| P \| = \| Q \| = 1 \tag{2.4-18}$$

De esta forma obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración deformada del multicuerpo en estudio.



Al igual que en [1.13] los componentes de los Cuaterniones  $P, Q \in \mathfrak{R}^4$  son:

$$P \in \mathfrak{R}^4; P = (P_o, \underline{P}_v), P_o \in \mathfrak{R}; P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad [2.4-19]$$

$$\underline{P}_v \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{P}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_2,$$

$$Q \in \mathfrak{R}^4; Q = (Q_o, \underline{Q}_v), Q_o \in \mathfrak{R}; Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\underline{Q}_v \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{Q}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_2.$$

Ahora procederemos a plantear el problema cinemático inverso en la configuración deformada.

#### 2.4.1.4 PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO EN LA CONFIGURACIÓN DEFORMADA.

“Dado  $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^2$  y  $l_1 \in \mathfrak{R}^+, l_2 \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $p = (p_o, 0, p_2, 0), q = (q_o, 0, q_2, 0)$  con  $\|p\| = \|q\| = 1$  tal que [2.4-17] sea satisfecha” y:

$$p_o^2 + p_2^2 = 1 \quad [2.4-20]$$

$$Q_o^2 + Q_2^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa en la posición deformada genera 4 ecuaciones algebraicas no lineales con 4 incógnitas del tipo polinomial.

#### 2.4.1.5 ANÁLISIS DE LOS MOVIMIENTOS DE $R_o$ .

En esta parte analizaremos 2 posibles formas de movimiento del multicuerpo  $R_o$  para alcanzar la configuración deformada mostrada en la Figura 2.29.

**Secuencia 1.** La primer secuencia de movimientos mostrada en la Figura 2.30 corresponde a mover primero al cuerpo  $C_1$  a través del actuador  $AC_1$  y después al cuerpo  $C_2$  por medio del actuador  $AC_2$ .

Observemos entonces que la configuración b) mostrada en 2.30 es para nosotros la configuración intermedia del multicuerpo en estudio. La ecuación que gobierna el primer movimiento mostrado en 2.30 es la siguiente:

$$\mathbb{R}(p_{\alpha})'_{s1} = I_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{P * q * p}) \} \quad [2.4-21]$$

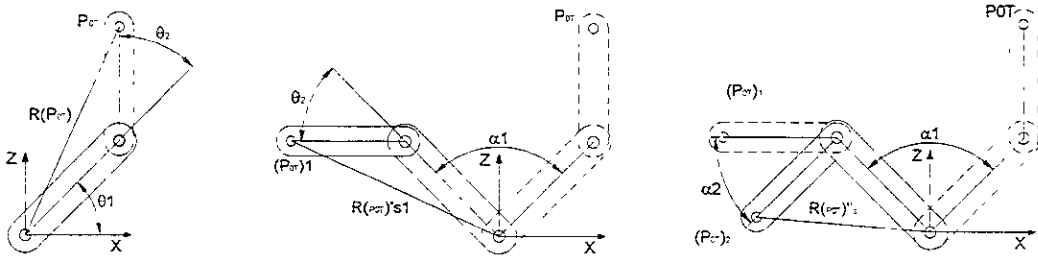


Figura 2.30. Secuencia 1.

La configuración c) es alcanzada mediante el movimiento del cuerpo  $C_2$  desde la posición intermedia  $\mathbb{R}(p_{\alpha})'_{s1}$ . Observemos que la ecuación que gobierna la posición deformada para la secuencia 1 es [2.4-17].

**Secuencia 2.** Una secuencia de especial interés es la mostrada en la Figura 2.31. La descripción de este movimiento es: mover al cuerpo  $C_1$  y al mismo tiempo mover también al cuerpo  $C_2$  con la misma cantidad de rotación que  $C_1$ , finalmente desde la posición intermedia  $\mathbb{R}(p_{\alpha})'_{s3}$  mover al cuerpo  $C_2$  hasta la configuración deformada. La posición intermedia de esta secuencia es dada por la ecuación siguiente:

$$\mathbb{R}(p_{\alpha})'_{s3} = I_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ r * \underline{e}_1 * \overline{r} \} \quad [2.4-22]$$

Siendo  $r = P * q * p$ .

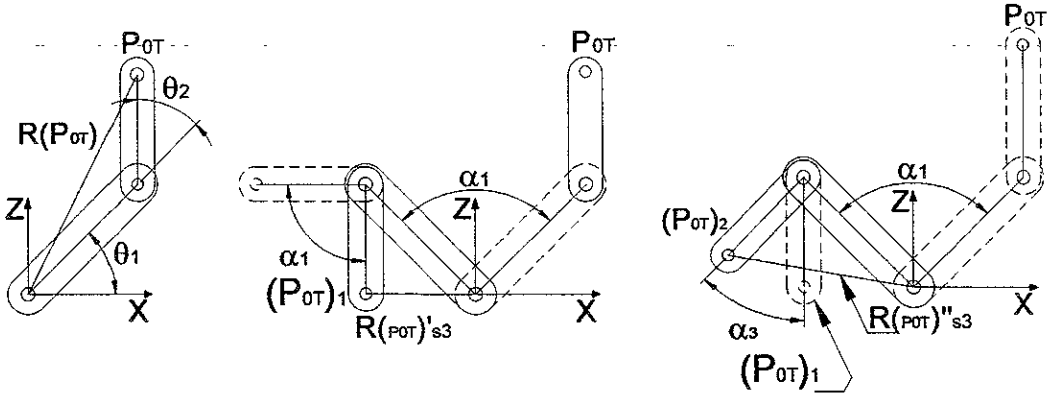


Figura 2.31. Secuencia 2.

La configuración deformada es alcanzada por el movimiento  $C_2$  desde la posición intermedia  $R(p_{\alpha})'_{s3}$  mostrada en configuración b) de la Figura 2.31. La ecuación asociada a la configuración deformada es la siguiente:

$$R_{(P_{0T})}''s3 = I_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ s * \underline{e}_1 * s \} \quad [2.4-23]$$

siendo  $s = Q * r$ .

Notemos también que las diferencias entre las dos secuencias se pueden caracterizar por dos formas, las cuales son:

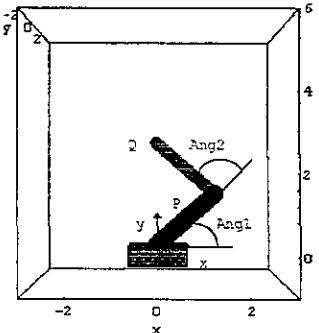
- 1 Por las configuraciones intermedias.
- 2 Por el número de accionamientos de los actuadores  $AC_1$  y  $AC_2$ .

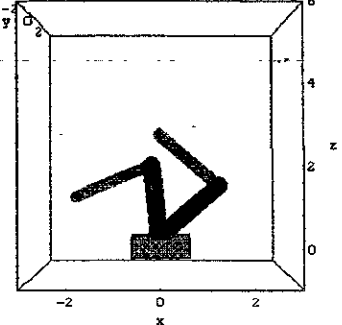
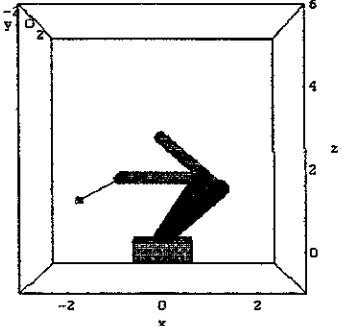
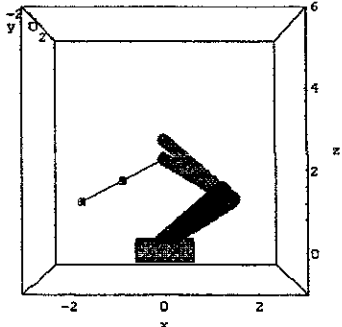
Observemos que la secuencia 2 necesita al menos tres accionamientos de los actuadores para alcanzar la configuración deformada, en tanto la secuencia 1 utiliza 2 accionamientos.

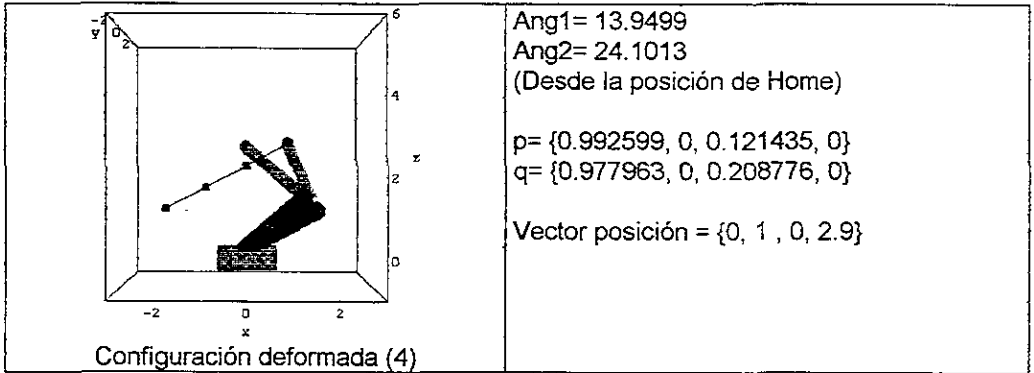
2.4.1.6 ANÁLISIS DE LAS SECUENCIAS DE ROTACIÓN PARA INTERPRETACIÓN DE LOS ÁNGULOS.

La Interpretación física de los ángulos de rotación es la siguiente. Los ángulos de la configuraciones deformadas 1,2,3 y 4 son tomados desde la configuración no deformada, sin embargo, para enviar esta información a los motores del robot es necesario tomar la configuración deformada 1 como la configuración no deformada para la configuración deformada 2, y después de haber realizado las rotaciones respectivas, tomar la configuración deformada 2, como la configuración no deformada hasta llegar a la configuración deformada 3, y así sucesivamente. Es decir, los ángulos se miden desde la posición inmediata anterior para llegar a la siguiente posición, según los puntos seleccionados de la recta. (Ver tabla 2.6).

Nota: Los ángulos están dados en grados.

Tabla 2.6 Secuencias de para el seguimiento de los puntos de una recta $px=-2+x$ $pz=1.1+(x*.6), \quad (0= x < 4)$	
 <p style="text-align: center;">Configuración no deformada (Home)</p>	<p>Ang1= -45.                      Ang2= -90.                      (Desde la base inercial fija)</p> <p>P={0.92388, 0, -0.382683, 0}                      Q={0.707107, 0, -0.707107, 0}</p> <p>Vector posición=                      -16                      {0, 4.44089 10 , 0, 2.82843}</p>

 <p>Configuración deformada (1)</p>	<p>Ang1= -50.9838                      Ang2= -71.3946                      (Desde la posición de Home)</p> <p><math>p = \{0.902646, 0, -0.430383, 0\}</math>  <math>q = \{0.812111, 0, -0.583503, 0\}</math></p> <p>Vector posición = <math>\{0, -2., 0, 1.1\}</math></p>
 <p>Configuración deformada (2)</p>	<p>Ang1= -15.0086                      Ang2= -45.9225                      (Desde la posición de Home)</p> <p><math>p = \{0.991435, 0, -0.1306, 0\}</math>  <math>q = \{0.920769, 0, -0.390109, 0\}</math></p> <p>Vector posición = <math>\{0, -1., 0, 1.7\}</math></p>
 <p>Configuración deformada (3)</p>	<p>Ang1= 9.90037                      Ang2= -9.90037                      (Desde la posición de Home)</p> <p><math>p = \{0.99627, 0, 0.0862896, 0\}</math>  <math>q = \{0.99627, 0, -0.0862896, 0\}</math></p> <p>Vector posición = <math>\{0, 0., 0, 2.3\}</math></p>



Las cantidades de rotación de los eslabones 1 y 2, están compuestas, es decir, cuando el eslabón 1 rota un ángulo  $\theta_1$  el eslabón 2 rota un ángulo  $\theta_1 + \alpha_1$ . Donde  $\alpha_1$  es la cantidad de rotación correspondiente al eslabón 2. Por ejemplo, considerando la configuración deformada (1) de la tabla 2.6. Tenemos que el eslabón 1 y 2 rotan un ángulo de  $Ang1 = -50.9838$  y el eslabón 2 rota un ángulo de  $Ang2 = -71.3946 - (-50.9838) = -20.4108$  grados. El signo (-) indica que rotarán en sentido contrario a las manecillas del reloj.

**Tabla 2.7. Valores de los ángulos de rotación para el seguimiento de 4 puntos de una línea recta**

Configuración	Compuestos		Individuales		Relativos c/Redondeo (Al programa de control)	
	Ang1	Ang2	Ang1	Ang2 -Ang1	Ang1	Ang2
No deformada	45	135	45	90	45	90
Deformada (1)	-50.9838	-71.3946	-50.9838	-20.4108	51.0	20.4
Deformada (2)	-15.0086	-45.9225	-15.0086	-30.9139	-36.0	10.5
Deformada (3)	9.90037	-9.90037	9.90037	-19.80074	-24.9	-11.1
Deformada (4)	13.9499	24.1013	13.9499	10.1514	-4.0	-30.0

Los valores mostrados en la tabla 2.6 representan un análisis de las configuraciones deformadas del robot siguiendo 4 puntos de una recta, se puede observar que desde la configuración 1 los valores de los ángulos se miden desde la configuración inmediata anterior con el fin de seguir una secuencia lógica, esto es debido a que en la modelación matemática todos los ángulos de las deformaciones se obtienen con respecto a la

configuración no deformada, y es necesario medir los ángulos de rotación desde las configuraciones deformadas ya que en la realidad el robot va tomando físicamente las configuraciones deformadas y no se puede regresar a la configuración no deformada cada vez que realice una deformación.

El Robot también intentará seguir los puntos mostrados en la Figura 2.31, se procede de igual forma que lo anteriormente expuesto.

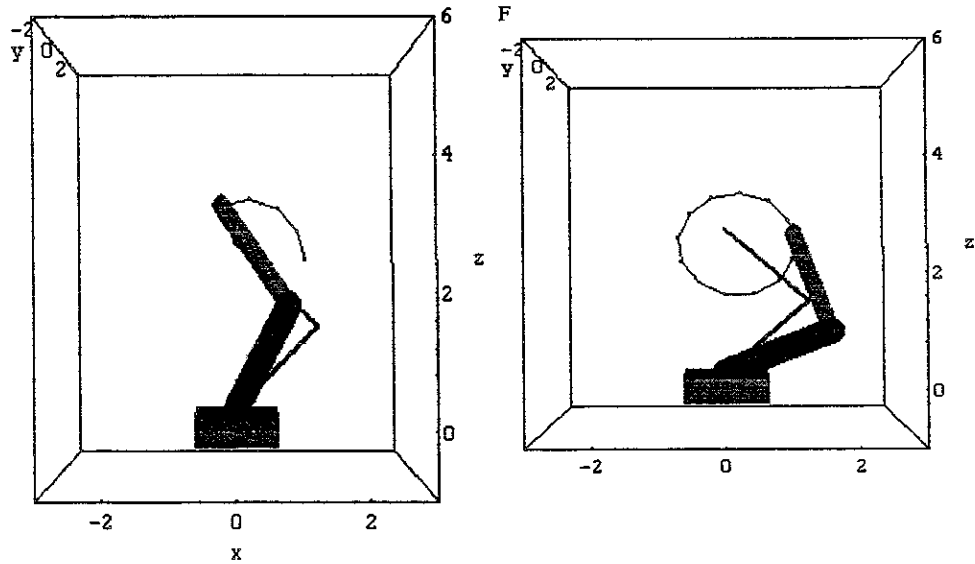


Figura 2.31.

Cinemática de una trayectoria circular.

La ecuación paramétrica es:

$$px = 0.2 + \text{Cos } [x],$$

$$py = 0,$$

$$pz = 2.5 + \text{Sin } [x];$$

para  $(0 < x < 14)$

[2.4-24]

### 2.5.1 OBSERVACIONES FINALES DE LOS MÉTODOS PRESENTADOS.

Hemos discutido en este capítulo el problema cinemático inverso. Se definieron los parámetros de los elementos de las articulaciones del brazo de un robot y se introdujo una matriz de transformación homogénea  $4 \times 4$  para describir la localización de un elemento con respecto a un sistema de coordenadas fijo. Se dedujeron las ecuaciones cinemáticas directas para un robot tipo PUMA de seis ejes.

Se introdujo el problema cinemático inverso y se utilizó la técnica de transformación de transformada inversa para determinar la solución de los ángulos de Euler. Esta técnica se puede utilizar también para encontrar la solución inversa de los robots simples, sin embargo, no proporciona una comprensión geométrica del problema. Así, se introdujo un método geométrico para encontrar la solución inversa de un robot con seis articulaciones de tipo giratorio. Se determinó la solución inversa con la ayuda de tres indicadores de configuración de brazo (BRAZO, CODO y MUÑECA). Hay ocho soluciones para un robot tipo PUMA cuatro soluciones las tres primeras articulaciones para la configuración del brazo, dos soluciones más para las últimas tres articulaciones. Se puede verificar mediante simulación en computadora la validez de las soluciones cinemática directa e inversa.

Con modificaciones y ajustes apropiados se puede generalizar el método geométrico a otros robots industriales simples con articulaciones de tipo giratorio.

### 2.5.2 REFERENCIAS.

Más información sobre matrices se pueden encontrar en Bellman [1970], Frazer y colaboradores [1960] y Gantmacher [1959].

La utilización de matrices para describir la posición de un elemento mecánico rígido se puede ver en el trabajo de Denavit y Hartenberg [1955] y en su libro (Hartenberg y Denavit [1964]).



Más información sobre coordenadas homogéneas se pueden ver en Duda y Hart [1973] y Newman y Sproull [1979]. La discusión sobre cinemática es una extensión sobre el trabajo de Lee [1982]. Una ampliación sobre cinemática se puede encontrar en Gerber y Denavit [1964] y Suh y Radcliffe [1978]. Aunque la representación matricial de los elementos presenta un enfoque cinemático para resolver el problema cinemático directo, el método vectorial para el problema cinemático presenta una presentación más concisa de los mismos. Esto se estudia en un trabajo por Chase [1963]. Otros libros de robótica que analizan el problema cinemático son el Paul [1981], Lee, González y Fu [1986] y Snyder [1985]. Pieper [1968] en su tesis doctoral utilizó el método geométrico para resolver el problema cinemático inverso. El estudio de la técnica transformada inversa para encontrar la solución del brazo se basó en el trabajo de Paul y col. [1981].

El método geométrico para resolver la cinemática inversa de un manipulador de seis elementos con articulaciones giratorias se basó en el trabajo de Lee y Ziegler [1984]. La solución de un brazo de robot tipo Stanford se puede ver en uniforme de Lewis [1974] otras técnicas para resolver la cinemática inversa se pueden ver en los artículos de Denavit [1956], Kohli y Soni [1975], Yang y Freudenstein [1964], Yang [1969], Yuan y Freudenstein [1971], Duffy y Rooney [1975], Uicker y col. [1964]. Finalmente el libro tutorial editado por Lee, González y Fu [1986] contiene numerosos trabajos recientes sobre robótica.

En cuanto a los Cuaterniones actualmente se están encontrando aplicaciones para el desarrollo de métodos de solución de forma paramétrica para representar las rotaciones de las trayectorias de un manipulador. Los Cuaterniones se definen como una estructura algebraica de  $R^4$  lo cual permite identificarlos como un grupo multiplicativo no conmutativo, además de que son un espacio vectorial normado. Con esto se define una transformación lineal, la cual preserva el producto interno y cuya representación matricial permite identificar un grupo de transformaciones ortogonales propias, que representan en la mecánica las rotaciones finitas de cuerpos rígidos.

## **CAPÍTULO III**

### **DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD (2GDL). [2], [4], [7], [6]**

#### **INTRODUCCIÓN:**

En este capítulo, se justifica desde un punto de vista general, la arquitectura del robot de 2 GDL motivo de nuestro estudio.

El objetivo en este capítulo es el de utilizar la teoría de conjuntos para fundamentar al diseño conceptual y de forma del robot. Las ecuaciones de forma serán utilizadas para caracterizar las diferentes etapas de construcción conceptual de algunas piezas o elementos que componen la estructura de nuestro manipulador.

#### **3. 1 DISEÑO DE UN MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.**

Una parte importante en la creación de prototipos es el proceso de Diseño Geométrico. El diseño permite objetivizar una idea, crear técnicas de integración de partes, caracterizar los elementos importantes de un prototipo y finalmente dimensionarlo para su manufactura. El proceso de Diseño Geométrico será dividido en tres partes, estas son:

1. Diseño conceptual.
2. Diseño de forma.
3. Diseño de detalle y dimensionamiento.

En la primera parte conceptualizaremos el problema a resolver, esto otorga una primera solución de la posible geometría del prototipo, con ella trabajaremos para construir nuestro robot experimental. La segunda parte otorga información en cuanto a como generar las partes y los procesos de manufactura asociados a ellos. Finalmente la tercera

parte prepara el llamado "plano de fabricación " para la manufactura del prototipo (En este trabajo no se realizarán consideraciones en cuanto a los planos de fabricación).

### **3.1.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.**

Necesitamos utilizar un Robot de dos grados de libertad tipo RR para la comprobación experimental de la modelación cinemática de posicionamiento de nuestro Robot. Las operaciones a realizar por este robot, son las de seguir trayectorias a través de puntos cuyas coordenadas son dadas por la solución de las ecuaciones que gobiernan la cinemática inversa de posicionamiento del Robot.

### **3.1.2 RESTRICCIONES ( $R_0$ ) DEL PROBLEMA.**

La fabricación del robot deberá cumplir con las siguientes restricciones generales:

- 1) El diseño de partes deberá permitir la fabricación en serie del Robot.
- 2) El volumen que ocupará el robot no deberá exceder de  $40 \text{ cm}^3$ .
- 3) El máximo radio de alcance (Reach) debe ser de 200 mm.
- 4) La velocidad máxima del órgano terminal debe ser de 0.5 m/s.
- 5) La temperatura de operación es de  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- 6) Las geometrías asociadas a los eslabones no deberán tener procesos de manufactura complicados.
- 7) Las partes importantes del robot deberán cumplir con restricciones de diseño por ensamble.
- 8) Las piezas normalizadas deberán encontrarse en el mercado de forma rápida.
- 9) Los materiales asignados deberán cumplir con la restricción (8).

Definido el problema a resolver y sus restricciones, ahora procederemos a caracterizar el Diseño Conceptual del prototipo.

### 3.1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO CONCEPTUAL.

Basándose en un proceso de discusión en cuanto a propuesta de la posible forma del robot, se ha llegado a la conclusión que la configuración adecuada del prototipo es la mostrada en la Figura 3.1.

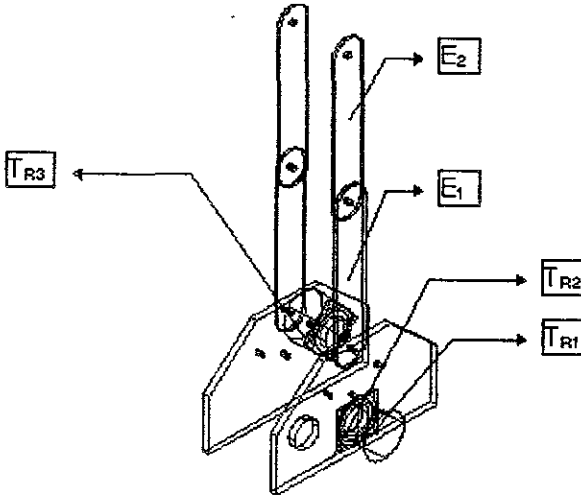


Figura 3.1.  
Robot de dos grados de libertad.

El prototipo consta de 2 eslabones articulados y una base que soporta la estructura del robot. En el proceso del Diseño Conceptual no se requiere analizar al prototipo siguiendo rigidamente las restricciones anteriores, sin embargo, algunas de ellas deberán ser incluidas, por ejemplo las restricciones (6) y (8).

Las consideraciones para realizar el Diseño Conceptual son abiertas, y se requiere de al menos 2 propuestas para discutir la posible configuración del robot. También debe de conocerse la posición de "home" o la configuración no deformada del robot, la cual se muestra en la Figura 3.2. En este trabajo las operaciones del robot serán en el plano euclidiano  $xz$  mostrado en la Figura 3.2.

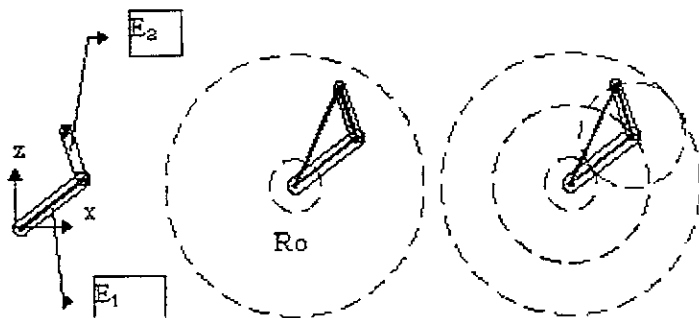


Figura 3.2.  
Configuración no deformada del robot.

Al caracterizar una forma determinada del prototipo ( $R_0$ ), el siguiente paso es la generación de los elementos que componen al robot, esto es en el sentido general, es decir, la forma de los eslabones, y las bases que son los elementos principales, además de los elementos de acoplamiento y transmisión de potencia.

### 3.1.4 DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO CONCEPTUAL DEL ROBOT DE 2 GDL.

*“El robot a diseñar está compuesto de 2 eslabones, cada eslabón está integrado por dos cuerpos unidos por acopladores y sistemas de sujeción por tornillo y tuerca, el movimiento de los eslabones se realiza por dos motores de pasos, uno para cada eslabón, la transmisión de movimiento es mediante engranes y sistemas polea-banda dentada. La ubicación de los motores estará en las bases 1 y 2 mostrada en las Figuras 3.1 y 3.3. Los sistemas de transmisión cuentan con 5 elementos, un piñón colocado en la flecha de cada motor y una corona con una polea acoplada mediante tornillos además de otra polea colocada en los acopladores y unida al eslabón 1, si es la transmisión 1”. Como se observa en 3.1.*

Las transmisiones 1 y 2 están asociadas a los eslabones 1 y 2 mediante poleas y bandas dentadas, colocadas en cada eje donde rotarán los eslabones. Utilizando la teoría de conjuntos, procederemos a definir a las transmisiones de potencia. El conjunto  $T_{R1}$  mostrado en la Figura 3.3, será para nosotros la transmisión 1 y contiene: La base 1, el motor 1 y al sistema de transmisión 1 por engranes y poleas, el conjunto  $T_{R1}$  contiene también al eslabón 1, al eje acoplador 1 y a los sistemas de sujeción.

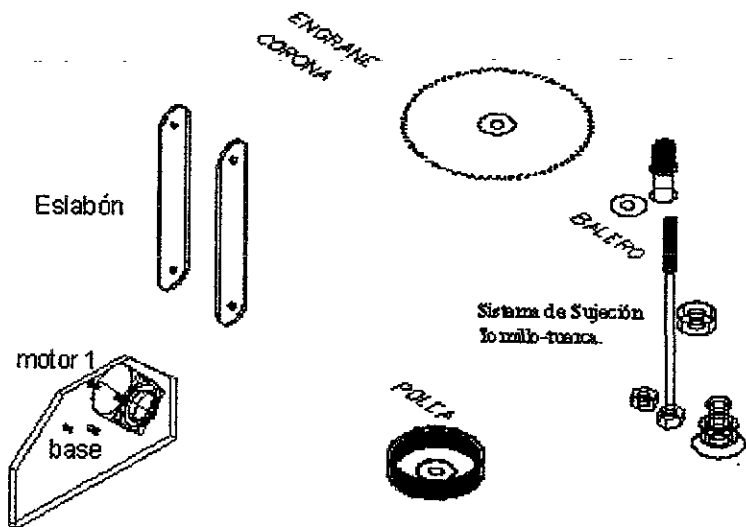


Figura 3.3.  
El conjunto P<sub>R1</sub>.

Por lo tanto definiremos al robot en este trabajo por medio de sus conjuntos de elementos a través de las transmisiones (ver Figura 3.1). Esto es,

$$R_0 = T_{R1} \cup T_{R2} \quad [3.1]$$

Siendo  $T_{R1}$  el conjunto asociado a la transmisión 1 y  $T_{R2}$  el conjunto de la transmisión 2. Observemos que dentro de los dos subconjuntos  $T_{R1}, T_{R2} \subset R$ , existen relaciones, por ejemplo: -

$$T_{R1} \cap T_{R2} = \beta_2 \quad [3.2]$$

Siendo  $\beta_2$  la base 2 a la cual están asociados 2 motores como se muestra en la Figura 3.1, la intersección anterior indica que la base  $\beta_2$  es común a ambos sistemas de transmisión. Otra relación de importancia es la siguiente:

$$T_{R1} \cap T_{R2} = A_{C1} \quad [3.3]$$

Con  $A_{C1}$  el acoplador 1.

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

Iguualmente el conjunto  $T_{R1} \subset R_0$  en este trabajo será escrito de la forma siguiente:

$$T_{R1} = \beta_1 \cup M_1 \cup T_E \cup T_{SPB} \cup A_{C1} \cup E_1 \quad [3.4]$$

Siendo  $M_1$  el motor 1,  $T_E$  el sistema de transmisión por engrane,  $T_{SPB}$  el sistema de transmisión polea-banda,  $A_{C1}$  el acoplador y  $E_1$  el eslabón 1.

La forma de representar al Robot mediante operadores booleanos, toma un sentido importante el Diseño Conceptual mediante el marco teórico de la teoría de conjuntos. Los operadores booleanos representan las operaciones básicas de generación de las geometrías asociadas a los elementos que componen al Robot. También los operadores booleanos son utilizados por los sistemas de diseño computarizado como un sistema CAD[6]. La parte de modelado de sólidos incluida en este software, es un herramienta de mucha utilidad sobre todo en la caracterización del Diseño Conceptual. La tabla 3.1 muestra los elementos importantes que componen al Robot( $R_0$ ).

Tabla 3.1. Elementos que componen al ( $R_0$ ).		
Elemento de trabajo.	Operación.	#
Base.	Soporte de estructura del robot.	2
Eslabones.	Cuerpos móviles.	2 (dos por cada eslabón)
Motores de pasos.	Movimiento de eslabones.	2
Sistemas de engranajes.	Transmisión de potencia.	2
Poleas dentadas.	Transmisión de potencia.	9
Acopladores.	Unión de bases.	4
Sujetadores.	Unión de eslabones.	2
Bandas dentadas.	Transmisión de potencia.	4
Baleros.	Ajuste y libre rotación.	10

La ubicación de estos elementos es mostrada en la Figura 3.4.

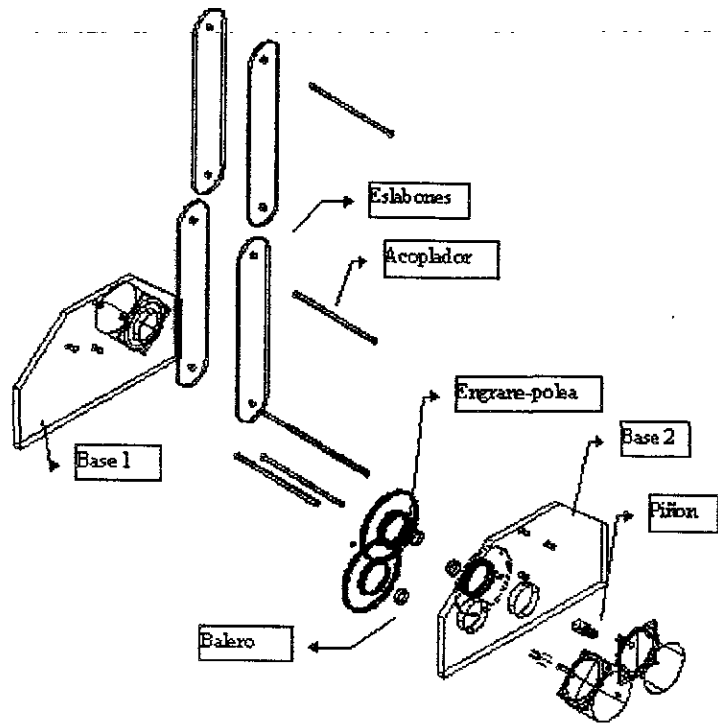


Figura 3.4. Ubicación de los componentes del robot.

Una vez caracterizados los elementos que componen al Robot, esto a través del Diseño Conceptual, ahora procederemos a formar las partes que componen al robot, mediante el Diseño de Forma.

### 3.2 DISEÑO DE FORMA.

El Diseño de forma involucra las geometrías primitivas base de las cuales se formarán las geometrías finales de los elementos que componen al Robot, el Diseño de Forma caracteriza los procesos de manufactura en un sentido general, sin llegar al detalle de los mismos.



## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

En el Diseño de Forma los materiales asociados a las partes del Robot no serán caracterizados, tampoco las dimensiones. Sin embargo las restricciones generales (2) y (8) son incluidas.

Para iniciar el Diseño de Forma definiremos los siguientes conceptos los cuales serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

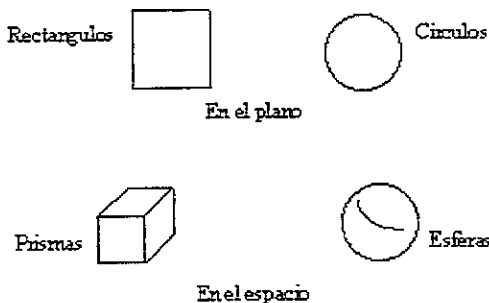
**Definición 4.2.1** Llamaremos cuerpos primitivos base aquellos cuerpos donde se realizará la forma de los elementos que componen al robot.

**Definición 4.2.2** Llamaremos cuerpos primitivos de forma fija al cubo unitario, cilindro unitario, etc.

**Definición 4.2.3** Los cuerpos ya formados los llamaremos en este trabajo los elementos base de forma.

### 3.2.1 DEFINICIÓN DE LOS CUERPOS PRIMITIVOS BASE.

Normalmente los cuerpos donde realizaremos la forma de los elementos que componen al robot, ya tienen una forma específica. Por ejemplo para realizar una flecha, se necesita disponer de una barra sólida, esto es, de un cilindro macizo, igualmente para formar las bases de una estructura se necesita una placa rectangular. Entonces caracterizaremos los cuerpos primitivos base por dos formas, normalizadas estándar o básicas, esto es, rectángulos y círculos si es en el plano, prismas rectangulares y cilindros si es en el espacio, ver Figura 3.5.



**Figura 3.5.**

**Forma de los cuerpos primitivos.**

### 3.2.2 GEOMETRÍAS BÁSICAS DE CUERPOS PRIMITIVOS BASE.

Los cuerpos primitivos base se pueden caracterizar en dos grandes grupos:

- 1) De forma prisma.
- 2) De forma cilíndrica.

Sea  $C_{PB}$  el conjunto de cuerpos primitivos base y  $C_{PB1} \subset C_{PB}$  el subconjunto de los cuerpos de forma de paralelepípedo regular, también  $C_{PB2} \subset C_{PB}$  el subconjunto de los cuerpos de forma cilíndrica mostrados en la Figura 3.5, entonces los grupos  $C_{PB1}$  y  $C_{PB2}$  serán para nosotros las dos formas básicas de la materia prima en la construcción de los elementos que componen al Robot.

Los cuerpos primitivos base deberán tener una restricción importante, esto es, el volumen asociado a ellos, deberá ser mayor que los cuerpos primitivos de la forma estándar, los cuales serán definidos más adelante. Por otro lado, los cuerpos primitivos base deben cumplir con la restricción (9), en el sentido de que dichas formas deben ser encontradas de forma rápida en el mercado. La cardinalidad de los conjuntos  $C_{PB1}$  y  $C_{PB2}$  es caracterizada del Diseño Conceptual, esto es, se debe conocer cuantos eslabones se necesitan, cuantas bases, ejes, etc.

Para este robot, el Diseño Conceptual indica: 2 piezas por cada eslabón, 2 bases unidas por 3 barras de acoplamiento, también se necesitan 2 barras sólidas en las articulaciones. Para un seguimiento adecuado de este trabajo en el Diseño de Forma, se caracterizarán las piezas asociadas a las bases, barras de conexión y eslabones, para posteriormente caracterizar los elementos normalizados como lo son bandas, poleas, motores, tornillos, etc.

De lo anterior la cardinalidad del conjunto  $C_{PB1}$  es de 8, en tanto el conjunto  $C_{PB2}$  tiene cardinalidad de 6.

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

Entonces se necesitan 2 placas rectangulares de dimensión  $A \times B \times C$  y 4 placas de dimensión  $D \times E \times F$  ( $A \times B \times C$  son especificaciones de mercado) para formar los eslabones, en tanto para formar las barras se necesitan 4 cuerpos de forma cilíndrica. (Se observa que no se incluyen las medidas).

La cardinalidad de los conjuntos  $C_{PB1}$  y  $C_{PB2}$  difiere del diseñador, por ejemplo si se tiene una placa rectangular que permitirá la formación de las bases y otra placa que permita la generación de las 6 partes que componen a los eslabones, la cardinalidad del  $C_{PB1}$  es 2, en tanto si se dispone de una sola barra para generar los acoplamientos, entonces la cardinalidad del conjunto  $C_{PB2}$  es de 1.

Sin embargo, la primera caracterización de la cardinalidad los conjuntos  $C_{PB1}$  y  $C_{PB2}$  cumple con las restricciones (2), (8) y (9), esta consideración será explicada más adelante. Ahora se procederá a caracterizar los cuerpos primitivos estándar.

### 3.2.3 DEFINICIÓN DE LOS CUERPOS PRIMITIVOS UNITARIOS ESTÁNDAR.

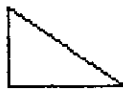
Los cuerpos primitivos estándar son aquellos que tienen una geometría también ya definida como lo son: Cubos, rectángulos prismales, cilindros, cuñas, esferas, etc. Estos cuerpos difieren de los primitivos base por que son cuerpos unitarios<sup>1</sup> (ver Figura 3.6) utilizados para formar las piezas y están normalmente asociados a los procesos de manufactura. Al igual que los cuerpos primitivos base, estos cuerpos unitarios serán caracterizados por conjuntos.



Círculo



Cuadrado



Cuña



Rectángulo

Figura 3.6.

Cuerpos primitivos.

<sup>1</sup> Tomaremos cuerpos unitarios en este trabajo, sin embargo en términos reales no lo son.

### **DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III**

Sea  $C_P$  el conjunto de cuerpos primitivos y  $C_{P1} \subset C_P$  el subconjunto de los cubos unitarios, también  $C_{P2} \subset C_P$  es el subconjunto de los cilindros en tanto  $C_{P3} \subset C_P$  el subconjunto de las cuñas y  $C_{P4}$  el subconjunto de los rectángulos (o prismas rectangulares). La cardinalidad asociada a estos subconjuntos es 1, esto es, los cuerpos primitivos en realidad no son cuerpos sino procesos de manufactura, sin embargo la cardinalidad de todo el conjunto  $C_P$  es de 4 para este caso.

Así entonces para formar una barra de unión tomaremos al elemento unitario  $C_{P1} \subset C_{P1}$  y en caso de que se requieran 2 primitivas, entonces se tomarán  $2C_{P1} \subset C_{P1}$ , aquí el 2 no es referido a la cardinalidad del subconjunto  $C_{P1}$  si no al número de primitivas que se necesitan.

Los cuerpos primitivos unitarios son muy importantes cuando se trata de generar geometría complicadas.

#### **3.2.4 OPERADORES BOLEANOS ASOCIADOS A LOS PROCESOS DE MANUFACTURA.**

Para realizar la formación de una pieza necesitamos asociar procesos de manufactura, esto es, las operaciones básicas de forma, por ejemplo para realizar una perforación se usa una máquina-herramienta llamada: Taladro, en procesos de desbaste se usa un torno o fresadora y para procesos de corte: Seguetas eléctricas, entre otras máquinas.

Las operaciones de forma pueden ser caracterizadas a través de operadores booleanos, esto es, la unión, la intersección y la diferencia pueden asociarse a un proceso de manufactura [7]. Por ejemplo la unión de uno a varios cuerpos realizada por un proceso de soldadura, puede caracterizarse con el operador booleano "Unión" (U) en tanto los procesos de corte con el operador "diferencia" (-) y con el operador "intersección" ( $\cap$ ).

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

---

Definiremos en esta parte 2 grandes grupos de procesos de manufactura los cuales son:

**Grupo 1.-** Aquellos procesos que necesitan operaciones de soldadura, unión de cuerpos a presión o ensambles, etc.

**Grupo 2.-** Los procesos asociados a las operaciones de corte, desbaste, rectificado, fresado, taladrado, etc.

Al grupo 1 le asociaremos el operador booleano unión ( $\cup$ ), en tanto al grupo 2 le asignaremos los operadores booleanos diferencia ( $-$ ) e intersección ( $\cap$ ).

Las estructuras booleanas, forman la base de los softwares de diseño de los sistemas CAD en lo que se refiere a modelado de sólidos.

*Nota: "Los grupos de maquinados se refieren a caracterizar formas de cuerpos, por lo tanto no es necesario incluir el material. Basándose en las caracterizaciones anteriores definiremos el problema asociado al Diseño de Forma esto es:*

### 3.2.5.1 PROBLEMA DEL DISEÑO DE FORMA [7].

*"Dado un Diseño Conceptual del prototipo, el conjunto de primitivas base, el conjunto de primitivas estándar y los operadores booleanos asociados a los procesos de manufactura, encuentre las geometrías asociadas a los elementos que componen al robot. De tal forma que las restricciones generales (2) y (8) sean satisfechas".*

**3.2.5.2 DISEÑO DE FORMA DE LOS ELEMENTOS QUE COMPONEN AL ROBOT “(ESLABONES, BARRAS DE UNIÓN Y BASES)”.**

En esta parte del diseño conviene agrupar los elementos ó piezas que componen al robot. Entonces sea  $C_E$  el conjunto de los elementos o cuerpos formados, también  $C_{E1} \subset C_E$  es el subconjunto de las bases,  $C_{E2} \subset C_E$  el subconjunto de los eslabones y  $C_{E3} \subset C_E$  el subconjunto de las barras unión. La cardinalidad de los subconjuntos es caracterizada del Diseño Conceptual. Entonces la cardinalidad del conjunto  $C_E$  es de 10 o sea 2 bases, 4 eslabones y 4 barras. Esto es:

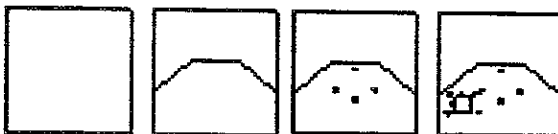
$$\begin{aligned}
 C_{E1} &\rightarrow 2 \\
 C_{E2} &\rightarrow 4 \\
 C_{E3} &\rightarrow 4
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

**3.2.6 DISEÑO DE FORMA DE LAS BASES.**

La forma general de las bases caracterizadas en el diseño conceptual se observa en la Figura 3.7.

**3.2.6.1 FORMACIÓN DE LA BASE 1.**

La forma de la base 1 es mostrada en la Figura 3.7 generada de la forma siguiente:



$C_{pp} 11$

**Figura 3.7.**  
**Forma de la base 1.**

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

Sea  $C_{PB11} \subset C_{P1}$ ,  $C_2 \subset C_P$  y  $C_{P3} \subset C_P$ , entonces:

$$C_{E11} = C_{PB11} - C_{P4} - 2C_{P3} - 9C_{P2} \quad [3.6]$$

$C_{E11}$  será para nosotros la forma de la base 1, se observa entonces que  $C_{PB11}$  corresponde al cuerpo primitivo base 1 y  $C_{P3}$  a la primitiva unitaria cuña, en tanto  $C_{P2}$  es la primitiva unitaria del círculo y  $C_{P4}$  la primitiva rectángulo.

La forma de la geometría del elemento  $C_{E''}$ , es mostrada en la Figura 3.8.

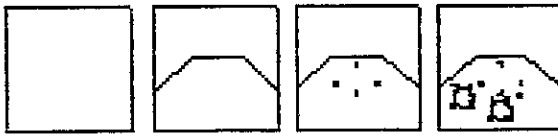


Figura 3.8.

Geometría de forma del elemento

$C_{E11}$ .

$C_{PB11}$

Definiremos cuerpos  $C_{E11}^I$ ,  $C_{E11}^{II}$ ,  $C_{E11}^{III}$ ,  $C_{E11}^{IV}$  y  $C_{E11}^V$  corresponden a una secuencia de operaciones de forma de la placa 1 y serán caracterizados por las siguientes ecuaciones:

$$C_{PB11} - C_{P4} = C_{E11}^I \quad [3.7]$$

$$C_{E11}^I - 2C_{P3} = C_{E11}^{II} \quad [3.8]$$

$$C_{E11}^{II} = C_{E11}^I - 5C_{P2} \quad [3.9]$$

$$C_{E11}^{III} = C_{E11}^{II} - C_{P2}^* \quad [3.10]$$

$$C_{E11}^{IV} = C_{E11}^{III} - 4C_{P2}^{**} \quad [3.11]$$

Aquí,  $C_{P2}^*$  se refiere al agrandamiento del barreno 5 mostrado en la Figura 3.9 y  $C_{P2}^{**}$  son los barrenos de sujeción del motor 1 en la forma geométrica. Al tomar las consideraciones anteriores, la forma de la ecuación 4.6 es la siguiente:

$$C_{E1} = C_{PB11} - C_{P4} - 2C_{P3} - 5C_{P2} - C_{P2}^* - 4C_{P2}^{**} \quad [3.12]$$

Las subformas del cuerpo  $C_{E11} \subset C_E$  son mostradas en la Figura 3.9.

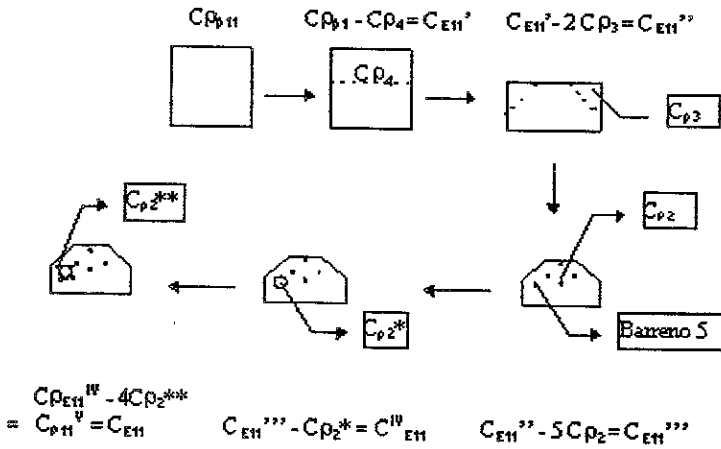


Figura 3.9.  
Forma geométrica.

La subforma  $C_{E11}^{II}$  es generada por un proceso de manufactura realizado por segueta eléctrica y caracterizado por el operador boleano diferencia (-).

También el cuerpo  $C_{E11}^{III}$  es formado por segueta, en tanto el cuerpo  $C_{E11}^{III}$ ,  $C_{E11}^{IV}$  y  $C_{E11}^V$  son formados por otros maquinados que pueden ser por taladro o por fresadora, sin embargo, dichos procesos están contenidos en el grupo 2 al cual el operador boleano diferencia le es asociado. Las  $C_{E11}^{III}$ ,  $C_{E11}^{IV}$  y  $C_{E11}^V$  son generadas con el conjunto de primitivas  $C_{PB2}$ , observemos que las primitivas estándar  $C_{P2}^*$  y  $C_{P2}^{**}$  corresponden a primitivas de mayor o menor tamaño que  $C_{P2}$ .

Las partes  $C_{E11}^I$ ,  $C_{E11}^{II}$ ,  $C_{E11}^{III}$ ,  $C_{E11}^{IV}$  y  $C_{E11}^V$  se forman por una secuencia lógica de procesos de manufactura donde la restricciones (2) y (9) están implícitas.



3.2.6.2 FORMACIÓN DE LA BASE 2.

En esta parte procederemos a encontrar la ecuación de forma de la base 2, mostrada en la Figura 3.1, siguiendo el mismo procedimiento de la base 1.

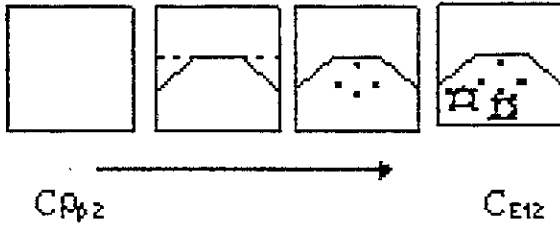


Figura 3.10. Forma del cuerpo primitivo base.

Observemos que para formar la base 2, se necesitan los procesos de corte por segueta, taladrado y desbaste. La ecuación de forma asociada al cuerpo  $C_{E12}$  que será para nosotros la base 2 es la siguiente:

$$C_{E12} = C_{PB2} - C_{P4} - 2C_{P3} - 16C_{P2} \tag{3.13}$$

En este caso,  $C_{PB2} \subset C_{PB}$ ,  $C_{P4}$ ,  $C_{P3}$ ,  $C_{P2} \subset C_{CP}$

El cuerpo  $C_{PB2}$  corresponde al cuerpo primitivo base del cual se forma el cuerpo  $C_{E12}$ . Las subformas asociadas al cuerpo  $C_{E12}$  son las siguientes:

$$C_{E12}^I = C_{PB2} - C_{P4} \tag{3.14}$$

$$C_{E12}^{II} = C_{E12}^I - 2C_{P3} \tag{3.15}$$

$$C_{E12}^{III} = C_{E12}^{II} - 6C_{P2} \tag{3.16}$$

$$C_{E12}^{IV} = C_{E12}^{III} - C_{P2} \tag{3.17}$$

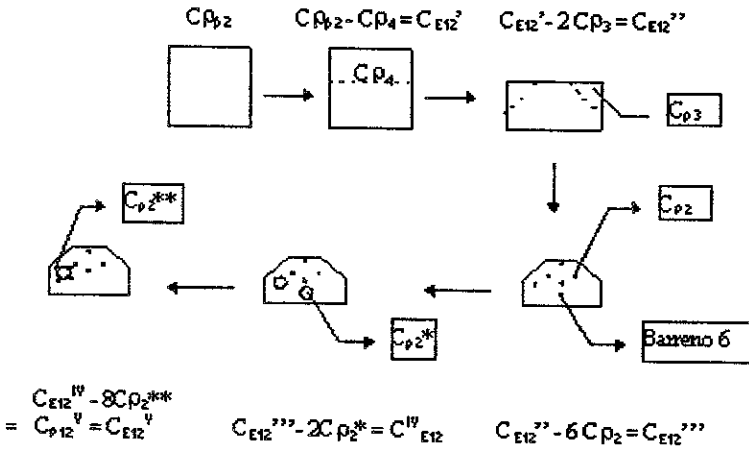
$$C_{E12}^V = C_{E12}^{IV} - 8C_{P2} \tag{3.18}$$

Observe que la ecuación de forma se expresa de la forma siguiente:

$$C_{E12} = C_{PB2} - C_{P4} - 2C_{P3} - 6C_{P2} - 2C_{P2}^* - 8C_{P2}^{**} \quad [3.19]$$

$$\forall C_{E12} \in C_E, C_{PB12} \in C_{PB1}, C_{P2}, C_{P3}, C_{P4} \in C_P.$$

La secuencia de forma se describe a continuación:



**Figura 3.11.**  
**Formato de geometría.**

Notemos que la placa 2 contiene un motor más, esto es debido a que se requiere montar otro eslabón más en trabajos futuros.

Hasta este momento se han caracterizado las formas de los cuerpos asociados a las bases, también con la información anterior es posible caracterizar las secuencias de operaciones para formación de las piezas.

### 3.2.7 DISEÑO DE FORMA DE LOS ESLABONES QUE COMPONEN AL ROBOT.

Del diseño conceptual se observa que existe una forma básica de los eslabones, ya que son diseñados de manera que las dimensiones del eslabón 1 sean igual a las dimensiones del eslabón 2

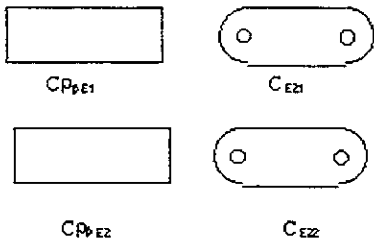


Figura 3.12. Formas básicas de los eslabones.

Antes de iniciar a construir las ecuaciones de forma se procederá a integrar un cuerpo primitivo al conjunto  $C_P$ , esto es, sea  $C_{P\beta} \subset C_P$  un cuerpo primitivo que tiene la forma siguiente:

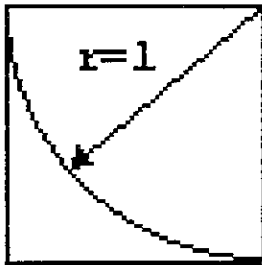


Figura 3.13. Cuerpo primitivo en forma de cuña.

Esto es, un cuerpo se forma de cuña, cuya curva asociada a los puntos extremos es una circunferencia de radio unitario:

**“Observación: Los cuerpos primitivos tienen la propiedad de escalamiento”.**

Bajo esta premisa se procederá a construir las ecuaciones de forma de los eslabones, entonces para el eslabón 1 ( $C_{E21}$ ) se tiene que:

$$C_{E21} = C_{P\beta E1} - C_{P4} - 2C_{P2} - 4C_{P3}^* \tag{3.20}$$

Se tiene que las ecuaciones de subforma son:

$$C_{E21}' = C_{P\beta E1} - C_{P4} \tag{3.21}$$

$$C_{E21}'' = C_{E21}' - 2C_{P2} \tag{3.22}$$

$$C_{E21}''' = C_{E21}'' - 4C_{P3}^* \tag{3.23}$$

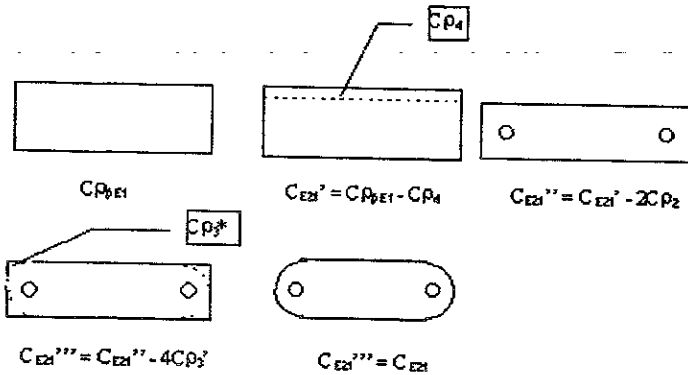


Figura 3.14.  
Formas básicas de los eslabones.

### 3.2.8 DISEÑO DE FORMA DE LOS EJES DE ACOPLAMIENTO.

Para diseñar la forma de las barras de acoplamiento se definirá lo siguiente:

**Condición 1.-** Los primitivos base son de volumen mayor que los primitivos, en términos de cilindros se dirá que el diámetro de los cilindros primitivos base son mayores que los primitivos.

**Condición 2.-** El diámetro asociado tanto a los primitivos base como a los primitivos es el mismo.

También la longitud de los cilindros primitivos base es tal que existan 3 y que sean suficientes para generar las 5 barras de acoplamiento. Entonces la cardinalidad del subconjunto  $C_{PB3} \subset C_{PB}$  es de 3. La ecuación de forma para la condición 1 es la siguiente:

$$2C_{E3} = C_{PB31} - C_{P6} - C_{P2} \quad [3.24]$$

y para la condición 2 la ecuación es:

$$2C_{E3} = C_{PB31} - C_{P2} \quad [3.25]$$

La primitiva  $C_{P6} \subset C_P$  es un cilindro unitario hueco al cual se le asocia un proceso de desbaste por torno y la primitiva  $C_{P2} \subset C_P$  está asociada a un proceso de corte en donde el cilindro asociado es tan pequeño como el espesor de una segueta, ver Figura 3.15.

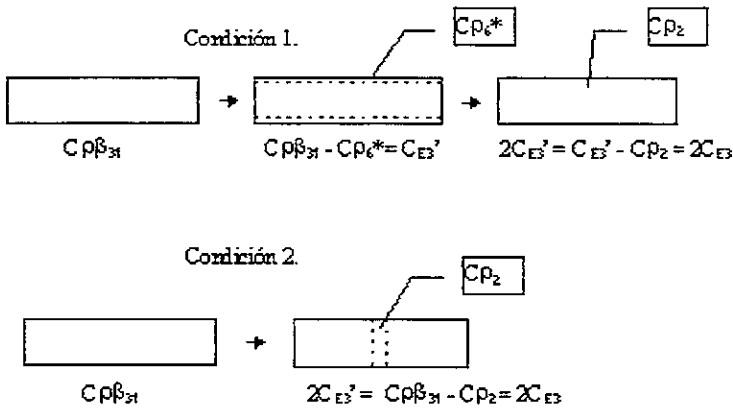


Figura 3.15. Secuencia de forma.

Hasta este momento se ha realizado el diseño de forma de las geometrías de las bases, eslabones y ejes de acoplamiento. Basándose en el diseño conceptual la Tabla 3.2 Muestra el número total de partes formadas.

Descripción	Cuerpo formado	N <sub>0</sub>	N <sub>0</sub> de secuencias de operaciones
Base 1	C <sub>E11</sub>	1	6
Base 2	C <sub>E12</sub>	1	6
Eslabones del tipo 1	C <sub>E21</sub>	4	2
Eslabones del tipo 1	C <sub>E22</sub>	2	2
Ejes (condición 2)	C <sub>E31</sub>	6	1

En el diseño de forma ya es posible obtener el volumen del cuerpo primitivo base y su forma de tal manera que basándose en el diseño conceptual las posibles piezas que se requieren en el robot otorgan información sobre la forma de las piezas primitivas base.

### 3.2.9 CONSIDERACIONES DE FORMA DE LOS ELEMENTOS NORMALIZADOS.

Un diseño conceptual debe marcar si no de una forma rigurosa si de alguna manera funcional, los elementos que servirán de sujeción, de transmisión, de ajuste, etc. Por ejemplo un elemento de sujeción como lo es un tornillo con tuerca ya ha sido formado mediante procesos de manufactura, estos elementos fueron procesados siguiendo alguna ecuación de forma. Si se caracterizarán los procesos de manufactura asociados a los elementos normalizados se tendría que enunciar el problema inverso relacionado con el diseño de forma.

### 3.2.10 EL PROBLEMA INVERSO DEL DISEÑO DE FORMA DE LOS ELEMENTOS NORMALIZADOS [7].

*“Dada la geometría de un cuerpo normalizado o terminado (ingeniería de reversa), las primitivas base, las primitivas y los operadores booleanos, encuentre las ecuaciones de forma asociadas a la geometría inicial, las secuencias de operaciones, ó de procesos de manufactura y las máquinas herramientas asociadas tal que se cumplan las restricciones siguientes”:*

1. *Las máquinas herramientas deberán contar con cabezal sencillo de operación.*
2. *Utilizar el operador “unión si la pieza normalizada (ó terminada) incluye otras piezas de operación”.*

En este caso la pieza normalizada es el sistema de sujeción tornillo–tuerca. Para realizar el problema inverso del diseño de forma, es conveniente primero dividir en dos conjuntos las operaciones tanto de la tuerca como del tornillo. Esto es:

Sea  $T_N$  la pieza normalizada tornillo y  $R_N$  la tuerca, entonces:

$$T_N \cap R_N = S \quad [3.26]$$

Siendo  $S$  el conjunto completo asociado al sistema de sujeción. En la Figura 3.16 se muestra a la pieza normalizada de sujeción.



Figura 3.16. Pieza normalizada de sujeción.

### 3.2.11 Descripción del conjunto S.

El sujetador está compuesto de un tornillo de cabeza hexagonal con rosca parcial en el vástago, y es completado por una tuerca hexagonal con orificio roscado de las mismas características de la rosca del tornillo. Así entonces empezaremos por caracterizar primero a la tuerca.

El cuerpo primitivo base puede ser de dos formas siguientes:

- 1) Una barra cuadrada ó cilíndrica.
- 2) Una barra hexagonal con dimensiones normalizadas (ver Figura 3.16).

Observemos entonces que si se elige la primera opción, entonces debemos formar la cabeza hexagonal, esto involucra un maquinado y por lo tanto desde el punto de vista de operaciones las barras cuadradas o cilíndricas no son la mejor de opción (siempre y cuando exista una barra hexagonal normalizada con las dimensiones requeridas, si esto no es posible, entonces automáticamente se debe optar por la primera opción).

Consideremos que en el mercado existen barras hexagonales que permitan no tomar la primera opción, entonces procederemos a encontrar las ecuaciones de forma del sistema de sujeción.

Con las consideraciones anteriores se ha caracterizado la geometría del cuerpo primitivo base. Entonces sea  $P_{BN}$  el conjunto de primitivas bases con  $P_{BN1} \subset P_{BN}$  el cuerpo hexagonal, en este caso la cardinalidad del conjunto  $P_{BN}$  es de 2, esto es, se utilizará la forma del cuerpo primitivo base para caracterizar el tornillo.

Para continuar con el diseño de forma se caracterizará un conjunto  $C_{EE}$  llamado cuerpos especiales, en el están incluidos las roscas, las formas de los engranes, de las levas, etc. Entonces los maquinados asociados a la forma del cuerpo  $R_N$  serán:

- 1 Corte por barra de torno.
- 2 Taladrado.
- 3 Machueleado o roscado por torno.

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

De lo anterior es posible interpretar la forma geométrica de cada maquinado sobre el cuerpo primitivo base  $C_{PBN1} \subset C_{PBN}$ . Sin embargo, antes de describir la forma de los maquinados asociados al cuerpo  $C_{PBN}$  tendremos que asociar las primitivas y los cuerpos especiales. Esto es:

1	Corte por barra	→	$C_{P2}^*$ .
2	Taladrado	→	$C_{P2}^{**}$ .
3	Machueleado	→	$C_{EE1} \in C_{EE}$ .

También las operaciones que se realizarán en el cuerpo primitivo base pertenecen al grupo 2 anteriormente el cual tiene asociado el operador "diferencia"(-).

Supongamos una secuencia de operaciones  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  como la anteriormente descrita, entonces la ecuación de forma sobre el cuerpo  $C_{PBN1}$  asociada a la secuencia 1 es dada por:

$$R_N = C_{PBN1} - C_{P2}^* - C_{P2}^{**} - C_{EE1} \quad [3.27]$$

$$\forall C_{PBN1} \in C_{PB}, C_{P2}^* \in C_P, C_{P2}^{**} \in C_P, C_{EE1} \in C_{EE}.$$

Aquí  $C_{P2}^*$  es una primitiva de corte asociada a la dimensión de una barra de corte, en tanto la primitiva  $C_{P2}^{**}$  esta asociada a la operación de taladrado. También  $C_{P2}^*$  existe siempre que:

$$V_{CBN1} > V_{CP2}^* \quad [3.28]$$

Siendo  $V_{PBN1}$  el volumen del cuerpo primitivo base.

La ecuación [3.30] en términos de los procesos asociados toma la forma siguiente:

$$R_N = R_N''' = R_N'' - C_{EE1} \quad [3.29]$$

donde:

$$R_N'' = R_N' - C_{P2}^{**} \quad [3.30]$$



$$R_N' = C_{BN1} - C_{P2}^* \quad [3.31]$$

De lo anterior se deduce la ecuación general de forma de la secuencia 1. Esto es,

$$R_N = \{ \{ C_{PBNI} - C_{P2}^* \} - C_{EEI} \} \quad [3.32]$$

Esto es, los paréntesis de la ecuación determinan cual es la secuencia de proceso. Por ejemplo, primero se corta la barra y se le asocia la letra A, después se barrena → B y finalmente se hace la rosca → C, entonces [3.31] toma la forma siguiente:

$$R_N = (A-B) - C \quad [3.33]$$

Y es llamada la ecuación general de proceso para la secuencia 1. La forma geométrica del diseño de forma de la tuerca se muestra en la Figura 3.17.

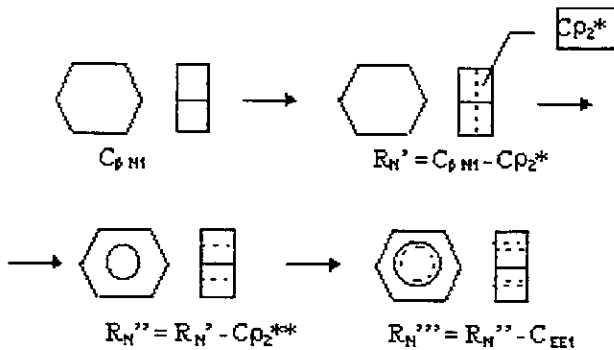


Figura 3.17.

Diseño de forma de la tuerca.

Igualmente se procederá a diseñar la forma del tornillo ahora sobre el cuerpo primitivo base  $C_{PB2}$ .

De la configuración del tornillo vista en la Figura 3.11. Se observa que existe los procesos siguientes:

1. Corte por barra de corte.
2. Desbaste por torno.
3. Rosca por terraja ó roscada por torno.

## DISEÑO CONCEPTUAL Y DE FORMA DE UN MANIPULADOR DE 2 GDL. CAPÍTULO III

Este grupo de operaciones pertenece al grupo 2 el cual tiene asociado el operador booleano (-), también se tomará la secuencia 1, 2, 3:

Los cuerpos primitivos asociados a los procesos de manufactura sobre el cuerpo  $C_{PBN2}$  son:

- 1) Corte  $\rightarrow C_{P2^{**}}$ .
- 2) Desbaste  $\rightarrow C_{P2^{**}}$ .
- 3) Roscado  $\rightarrow C_{EE2}$ .

Basándose en lo anterior, la ecuación de forma para la secuencia 1 es la siguiente:

$$T_N = C_{PBN2} - C_{P2^*} - C_{P2^{**}} - C_{EE2} \quad [3.35]$$
$$\forall C_{PBN2} \in C_{PB}, C_{P2^*}, C_{P2^{**}} \in C_P, C_{EE2} \in C_{EE}.$$

La ecuación [3.35] en términos de procesos es:

$$T_N = T_N^{III} = T_N^{II} - C_{EE2} \quad [3.36]$$

Aquí:

$$T_N^{II} = T_N^I - C_{P2^{**}} \quad [3.37]$$

$$T_N^I = C_{PBN2} - C_{P2^*} \quad [3.38]$$

La ecuación general de forma para la secuencia 1 es la siguiente:

$$T_N = \{[C_{PBN2} - C_{P2^*}] - C_{P2^{**}}\} - C_{EE2} \quad [3.39]$$

Si:

$$C_{PBN2} - C_{P2^*} \rightarrow D.$$

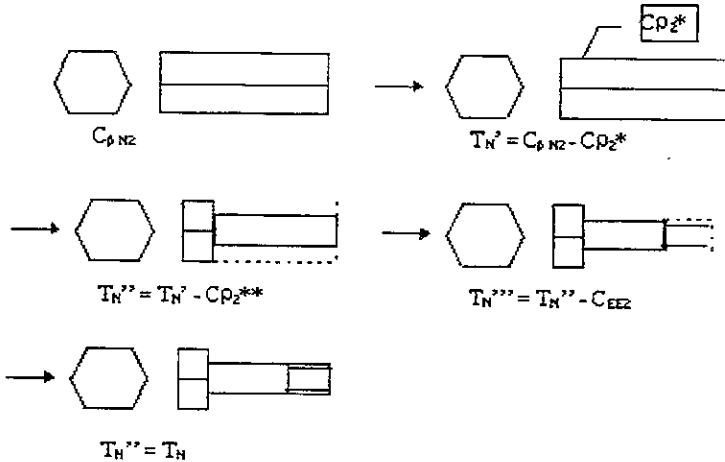
$$C_{P2^{**}} \rightarrow E.$$

$$C_{EE2} \rightarrow F.$$

Entonces [3.39] toma la forma siguiente:

$$T_N = (D - E) - F \quad [3.40]$$

La forma geométrica de las ecuaciones de forma es mostrada en la Figura 3.18.



**Figura 3.18. Forma geométrica de la ecuación deformada.**

Por otro lado el conjunto S es dado por:

$$S = T_N \cup R_N = ((A - B) - C) \cup ((D - E) - F) \quad [3.41]$$

Y representa la ecuación general de la sujeción completa en términos de maquinados y ensamble. Las conclusiones de los anteriormente se descrito pueden conducir a la postulación de un axioma. Esto es;

### 3.2.12 AXIOMA 1 DEL DISEÑO DE FORMA [7].

“Sea n un número finito de operaciones asociadas a procesos de manufactura, sea también  $C_{PB}$  un cuerpo primitivo base, entonces existirán  $n!$  ecuaciones de forma sobre el cuerpo primitivo base de forma única, siendo A una pieza formada”. También el número de secuencias es tal que:

$$N_s = E_c = n! \quad [3.42]$$

Aquí  $E_c$  el número de ecuaciones de forma y  $N_s$  el número de secuencia de operaciones.

### 3.2.13 COROLARIO 1.

“Existirán  $n$  subformas de  $A$  siempre que cada subforma le sea asociado uno y solo un maquinado con la condición de que la máquina-herramienta asociada a las operaciones ejecute una forma y solo una”. Entonces:

$$N_{TS} = n - 1 \quad [3.43]$$

Siendo  $N_{TS}$  el número total de subformas de  $A$ .

### 3.2.14 CONSIDERACIONES SOBRE LAS ECUACIONES DE FORMA.

En esta parte, caracterizaremos algunas consideraciones importantes sobre las ecuaciones de forma. Notemos que basándose en los procesos de manufactura asociados a las ecuaciones de forma existirán en el caso de que  $n = 3$  (Axioma 1) 6 diferentes ecuaciones para cualquier proceso (con tres operaciones básicas), sin embargo existirá una y solo una la cual deberá ser implementada tomando consideraciones de maquinaria, herramental y distribución de planta. Por otro lado las ecuaciones de forma no son asociativas ni conmutativas debido a que dependen de la secuencia de operaciones con la cual determinada pieza es manufacturada.

Basándose en las consideraciones anteriores describiremos las ecuaciones generales de forma de la base 1 y 2, así como la del eslabón 1. Esto es;

$$C_{E1} = [ [ [ [ C_{\rho\beta 1} - C_{\rho 4} ] - 2C_{\rho 3} ] - 5C_{\rho 2} ] - C_{\rho 2} ] - 4C_{\rho 2}^{**} \quad [3.44]$$

$$C_{E2} = [ [ [ [ C_{\rho\beta 2} - C_{\rho 4} ] - 2C_{\rho 3} ] - 6C_{\rho 2} ] - 2C_{\rho 2}^{*2} ] - 8C_{\rho 2}^{**} \quad [3.45]$$

$$C_{E21} = [ [ C_{\rho\beta E1} - C_{\rho 4} ] - 2C_{\rho 2} ] - 4C_{\rho 3}^{*} \quad [3.46]$$

Finalmente consideraremos que las demás piezas que conforman al robot son manufacturadas siguiendo las ecuaciones de forma propias de cada pieza.

**CAPÍTULO IV****4.1 MOTORES DE PASOS [15].**

Hasta ahora se han descrito los capítulos I y II, los principios que originan a la cinemática de los robots-manipuladores, en este caso uno de dos grados de libertad.

En el presente capítulo se pretende caracterizar el funcionamiento de un dispositivo electromecánico llamado motor de pasos, que es el actuador que inducirá el movimiento de los eslabones del robot-manipulador modelado en el capítulo II.

**4 . 1 DEFINICIONES GENERALES.****INTRODUCCIÓN.**

La mayor parte de los motores han sido diseñados para producir trabajo con un giro continuo de eje. Aunque, los motores de paso pueden ser empleados para este fin, un mejor uso es el posicionar el eje mediante incrementos controlados. Tiene una amplia gama de aplicaciones en sistemas de control industrial y militar y ahora empieza a tener una gran aceptación para un uso en productos electrónicos controlados por un microprocesador u ordenadores.

Los motores de paso se usan en este tipo de aplicaciones debido a su única característica de que el eje puede moverse con una gran precisión hasta una determinada posición, simplemente con un número determinado de pasos. Esta técnica es más simple y adaptable al control de un ordenador que al uso alternativo de un motor convencional que también necesitaría un sistema para medir la posición del eje y buen control amplificador para dar el mismo grado de precisión.

Los motores de paso pueden clasificarse en general, en motores de imanes permanentes y de reluctancia y en cada uno de estos tipos se pueden dar pasos de ángulos muy grandes (4-24 pasos por revolución) o pasos de ángulos muy pequeños (50-200 pasos por revolución). Para altos rendimientos el máximo de pasos que se pueden dar puede exceder a los 5000 pasos por segundo (es decir, 3000 r.p.m. en una máquina de 1000 pasos por revolución), pero es mucho más usual tener un número de pasos de unos pocos cientos por segundo, particularmente en diseño de pasos de grandes ángulos. Esto significa que los motores de paso son principalmente máquinas de baja velocidad con una potencia de salida muy modesta. Sin embargo, este es una pequeña desventaja comparada con el gran control que se tiene en cada movimiento.

El ángulo de paso por pulso introducido depende de la construcción de motor de pasos y del sistema de control usado. Pasos con un ángulo de paso de  $45^\circ$  proveen una *resolución* de  $360/45 = 8$  pasos por revolución; pasos con un ángulo de paso de  $1.8^\circ$  proveen  $360/1.8 = 200$  pasos por revolución; y así por el estilo. El ángulo total recorrido por el rotor es igual a las veces del paso angular de paso por el número de pasos. Expresado en la ecuación de la forma:

$$\text{resolución} = \frac{\text{pasos}}{\text{revolución}} = \frac{360^\circ}{\beta} \quad [4.1]$$

$$\theta = \beta \times \text{pasos} \quad [4.2]$$

Donde:  $\beta$  = ángulo de paso (grados/pulso).

$\theta$  = ángulo total recorrido por el rotor (grados).

La velocidad de un motor de pasos es una función del ángulo de paso y de la *frecuencia*

de pasos (llamada razón de pulsos). Así:  $n = \frac{\beta \times f_p}{360}$ , donde:

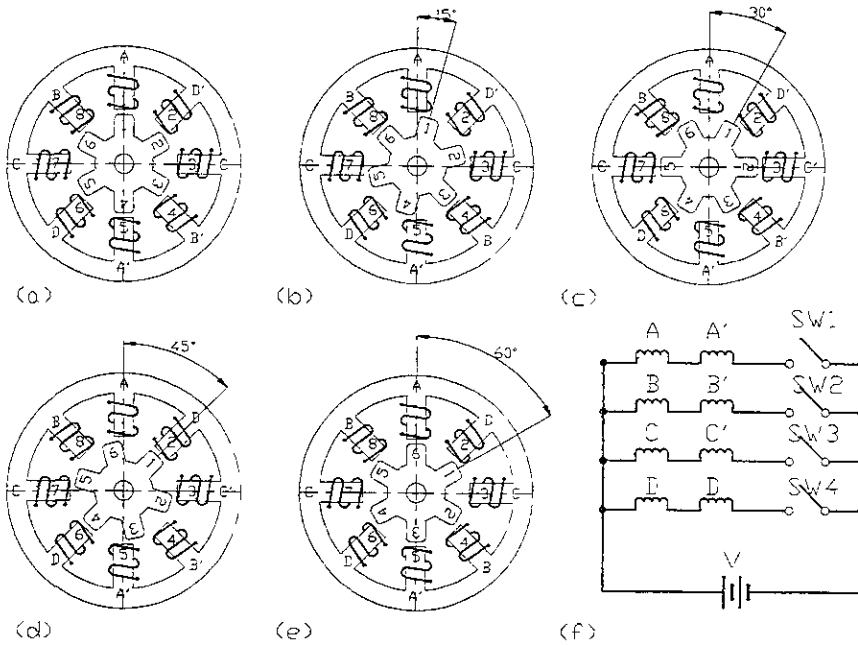
$$n = \text{velocidad del eje} \left( \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}} \right) \quad [4.3]$$

$$f_p = \text{frecuencia de pasos} \left( \frac{\text{pulsos}}{\text{segundo}} \right)$$

### 4.1.2 MOTOR DE PASOS DE RELUCTANCIA-VARIABLE. [35].

El motor de pasos de reluctancia-variable, mostrado en las Figura 4.1, será usado para ilustrar su construcción simple y sus principios generales de operación. El estator dentado y el rotor dentado son construidos de acero suave que retiene muy poco el magnetismo residual. Las bobinas enrolladas en el estator dentado proveen la atracción magnética la cual establece la posición del rotor. El motor mostrado en la figura 4.1 es llamado de *paso de reluctancia-variable* porque la reluctancia del circuito magnético formado por el rotor y el estator dentados varía con la posición angular del rotor. Energizando una o más de las bobinas del estator origina que el rotor dé un paso hacia adelante (o hacia atrás) a la posición que forma una ruta de la reluctancia menor con el estator dentado magnetizado.

Un simple arreglo de circuitos para la secuencia actual de las bobinas del estator es mostrado en la Figura 4.1(f). Las ocho bobinas del estator están conectadas en grupos de 2 bobinas para formar cuatro grupos separados llamados *fases*. Cada fase tiene su propio interruptor independiente. Aunque en la Figura 4.1(f) son mostrados como interruptores mecánicos, en la práctica actual, la interrupción de las fases es lograda con un **control estado-sólido**. La Figura 4.1(a) muestra la posición del rotor con un interruptor SW1 cerrado, energizando la fase A: El rotor está en una posición de reluctancia mínima con los dientes 1 y 4 del rotor alineados con los dientes del estator 1 y 5 respectivamente. Al cerrar el interruptor SW2 y abrir el SW1 energiza la fase B, ocasionando que los dientes 3 y 6 se alineen con los dientes del estator 4 y 8, respectivamente, como se muestra en la Figura 4.1(b), para un paso angular de  $15^\circ$ . Cerrando el interruptor SW3 y abriendo el interruptor SW2 energiza la fase C, ocasionando que los dientes del rotor 2 y 5 se alineen con los dientes del estator 3 y 7, como se muestra en la Figura 4.1(c). A medida de que cada interruptor es cerrado, y el siguiente precedente abierto, el rotor se mueve en un ángulo-de-paso adicional de  $15^\circ$ . La secuencia de pasos, mostrada en la Figura 4.1(a) hasta la Figura 4.1(e), sigue la secuencia de los interruptores repitiendo del 1 a través del 4, una y otra vez, hasta alcanzar el número de revoluciones o la fracción de una revolución deseado.



**Figura 4.1. Motor de pasos de reluctancia variable mostrando diferentes posiciones de paso que corresponden a la secuencia de encendido en (f).**

La dirección de rotación para la secuencia de interrupción de 1 a 4, mostrada en la Figura 4.1, resulta en sentido horario de los pasos del rotor (CW). Invertiendo la secuencia de pulsos cerrando los interruptores en el orden 4-3-2-1, ocasionará la rotación de pasos del rotor en sentido antihorario (CCW). La relación entre ángulo de paso y el número de dientes en el rotor y el número de dientes en el estator es:

$$\beta = \frac{|N_s - N_r|}{N_s \cdot N_r} \times 360 \tag{4.4}$$

Donde:  $\beta$  = Ángulo de paso en grados espaciales.

$N_s$  = Número de dientes en el núcleo del estator.

$N_r$  = Número de dientes en el núcleo del rotor.

Así el ángulo de paso para el motor de pasos en la Figura 4.1 es:

$$\beta = \frac{8 - 6}{8 \times 6} \times 360 = 15^\circ$$



4.1.3 MOTOR DE PASOS DE IMÁN PERMANENTE. [35].

Un diagrama simplificado de un motor de paso de imán permanente, mostrado en la Figura 4.2, es usado para ilustrar las características físicas comunes en este tipo de motor. El rotor, mostrado en la Figura 4.2(b), tiene dos secciones dentadas, separadas por un imán permanente. Las dos secciones son equidistantes una de otra por la mitad de un tiro de diente. El imán provee la polaridad opuesta a cada sección, desarrollando cinco polos negativos en una sección y cinco polos positivos en la otra sección.

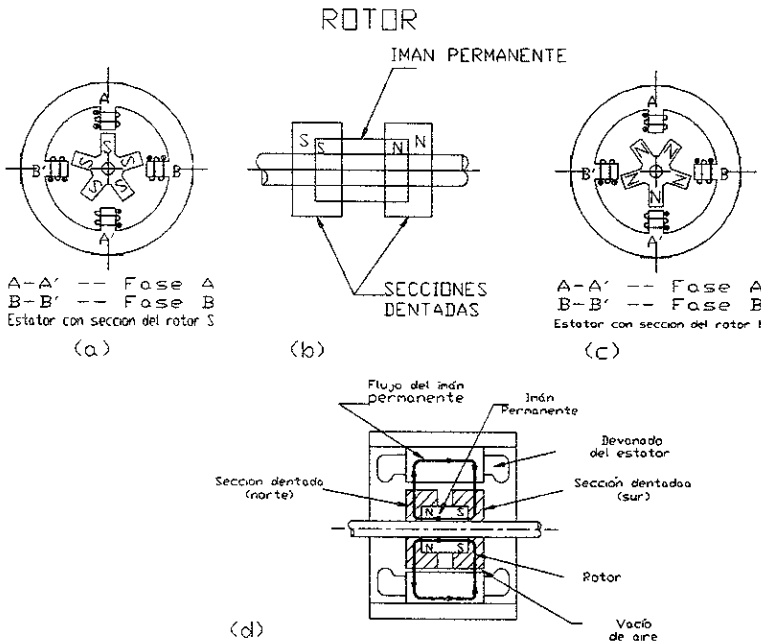


Figura 4-2. Motor de pasos de imán permanente: (a) Estator y sección negativa del rotor; (b) rotor; (c) estator y sección positiva del rotor; (d) vista axial del motor ensamblado.

Las Figuras 4.2(a) y (c) muestran las dos vistas finales de los rotores y estatores combinados. Una vista axial del motor de pasos ensamblado es mostrado en la Figura 4.2(d). Cada sección del rotor contribuye al desempeño del torque. En efecto, las secciones están en paralelo. El efecto neto es aquel de un rotor de cinco dientes con un estator de cuatro dientes. El ángulo de paso del motor de pasos de la Figura 7.11 es:

$$\beta = \frac{|N_s - N_r|}{N_s \times N_r} \times 360 = \frac{|4 - 5|}{4 \times 5} \times 360 = 18^\circ \quad [4.4]$$

El principio de operación del motor de pasos de imán permanente es desarrollado usando el diagrama de circuitos, tabla de interrupción y las correspondientes posiciones del rotor en la Figura 4.3. Para simplificar, solamente la sección sur del rotor es mostrada. Las posiciones del rotor son tecladas en la secuencia de encendido para una rotación en el sentido horario; la fase A es energizada por el interruptor SW1, y la fase B es energizada por el interruptor SW2. Las operaciones de medio-paso y micropasos deben ser logradas usando los métodos similares a los descritos anteriormente para los motores de pasos de reluctancia-variable.

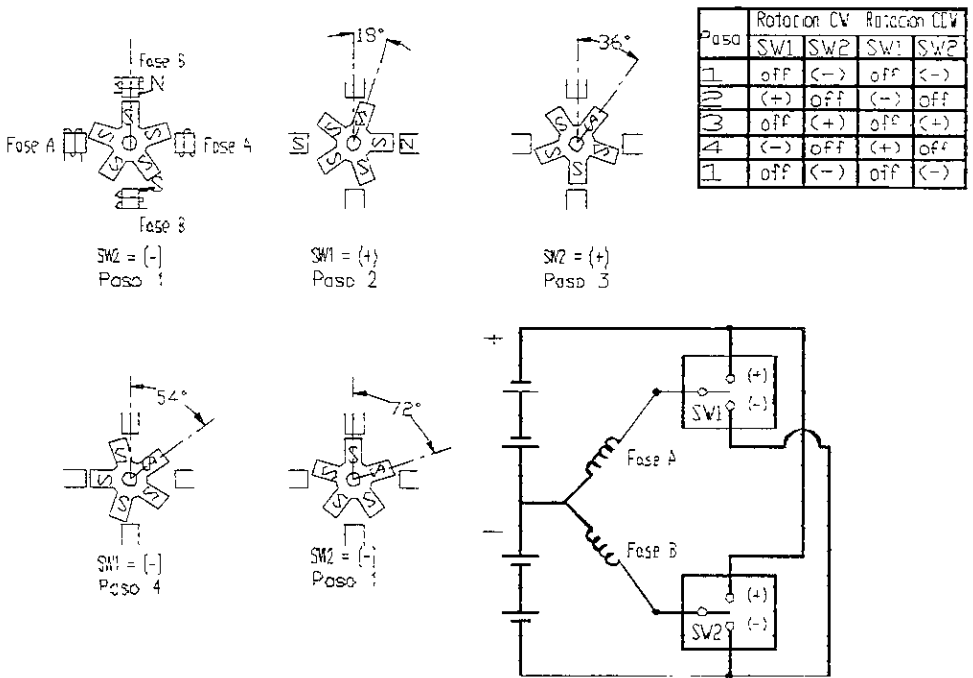
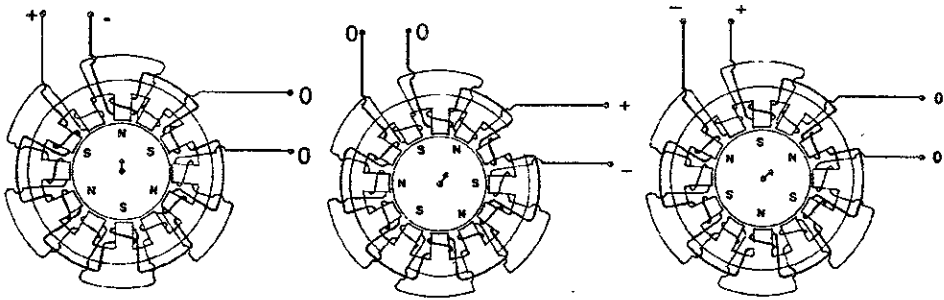


Figura 4.3. Diagrama del circuito de un motor de pasos de imán permanente con las posiciones del rotor posicionada con la secuencia de encendido para rotación en sentido horaria.

### 4.2.1 FUNCIONAMIENTO DE UN MOTOR DE PASOS. [15]

Todo el análisis que a continuación se describe se basa principalmente en motores de paso con imanes permanentes debido a que son la variedad más comúnmente usada. Los motores de paso con imanes permanentes son en verdad una variedad de motores síncronos, de hecho los motores de imanes permanentes síncronos pueden ser empleados como motores de paso y viceversa. La diferencia estiba en cómo el diseño lo optimiza para dos tipos diferentes de aplicaciones.

La mayor parte de los motores síncronos están optimizados para dar un frecuencia máxima de su tamaño. Excepto en los de tamaño pequeño, ya que se sobrecalientan sí al rotor no se le permite girar.



**Figura 4.4. Motor de paso bifásico de seis polos salientes.**

Los motores de paso están diseñados para trabajar de forma continua con el rotor estacionario y generar una gran fuerza restauradora (es decir, momento de retención) sí el rotor se mueve de su posición. Como cualidades importantes de los motores de paso podemos destacar:

1. La precisión en cada paso.
2. La gran capacidad en el número de pasos que puede dar.

Debido a que en un solo motor de paso se puede acelerar hasta lo que, en efecto, es la velocidad de sincronización, se necesita un gran momento de inercia si requiere una alta capacidad en el número de pasos.

Una de las características más resaltadas es el número de pasos posibles por revolución cuando se incrementa la velocidad y por eso los motores de paso se fabrican con más de 200 pasos/revolución. Este alto número de polos significa que, dado un tamaño fijo, la potencia de salida es bastante pequeña. Para obtener una mejor relación entre la potencia y el tamaño se utilizan motores con unos pocos pasos/rev. Para un uso de mayor precisión los motores más usados son los de 50, 60, 100 y 200 pasos. Cuando el factor importante es la potencia generada se utilizan motores con ángulos más pequeños, típicamente de 6, 8, 12 ó 24 pasos/rev.

La mayor parte de los motores de paso con imanes permanentes usan un motor multipolar de imán permanente situado dentro de la bobina bifásica del arranque. Se utiliza una bobina bifásica en el arranque ya que es el mínimo número de fases necesario que hace girar al rotor en la posición deseada. En la Figura 4.4 se muestra una bobina de arranque bifásico de 6 polos (12 pasos) en tres posiciones diferentes. En cada posición el rotor está en reposo con respecto a los polos adyacentes opuestos, ya que ésta es la posición de momento cero respecto al balance de las fuerzas magnéticas. Conforme el rotor se mueve de esta posición se genera un momento restaurador que se incrementa de forma sinusoidal (Figura 4.5) hasta llegar a un máximo que corresponde a otro de los bloques del arranque (es decir, un paso completo) que se ha desplazado medio ciclo respecto a los polos magnéticos del rotor. Si se sigue desplazando el rotor en la misma dirección, la fuerza restauradora caerá y perderá su signo. Si se deja libre en este punto se moverá hasta la siguiente posición de equilibrio cuatro pasos más allá de la posición inicial. El pico en la curva del momento da el máximo momento que se puede ejercer sobre el motor con una carga, dado un suministro de corriente y una velocidad, y no se puede observar el paso del motor y se le conoce como momento de retención. En la práctica se necesita cierto margen de seguridad y tan sólo un 70% de este valor se puede usar de forma totalmente segura. Con este valor el motor se atrasa respecto a su posición ideal casi medio paso.

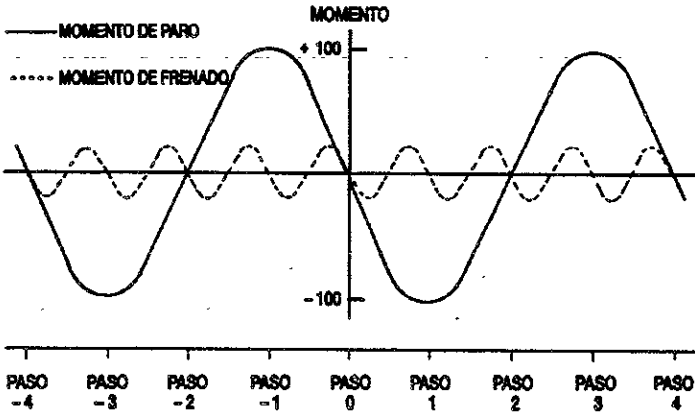


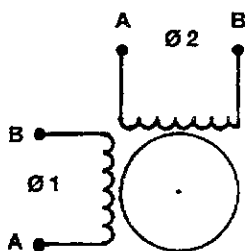
Figura 4.5.  
Momento de parada y  
momento de retención.

Si las bobinas están cargadas el rotor de imán permanente se moverá hasta la posición más cercana de más baja reluctancia donde los polos magnéticos del rotor están opuestos a los bloques de arranque. Debido a que no hay un bloque del arranque por cada paso, estas posiciones de parada tienen lugar cuatro veces más a menudo que las posiciones principales del momento de retención (véase Figura 4.5) el total del momento de parada es menor que el principal de los momentos de retención y tiene una gran dependencia del diseño del motor. Si se requiere, se puede reducir a una misma expresión utilizando arranques laminados con pequeñas reparaciones entre los extremos de los bloques de forma que la reluctancia magnética que ve el rotor es casi constante.

Los motores de paso utilizan en aplicaciones donde se necesita casi todo el momento que se pueda generar. En estos casos el error en la posición del eje se puede aproximar por medio paso ya que es el lugar donde se genera el máximo momento útil. Se puede utilizar también en aplicaciones donde la carga es muy pequeña, pero se necesita una gran precisión en la posición. En estos casos los criterios de error son diferentes. Los errores que se derivan de la construcción mecánica del arranque y del rotor pueden ser muy pequeños debido a la simetría de inherente en la fabricación y el hecho de que la dirección final del campo es la media del flujo magnético de todos los polos.

Algunos errores pueden darse por las pequeñas diferencias en las bobinas, o en las corrientes que se les aplica en cada paso, pero estos son bastante insignificantes, típicamente son menores de un 5% en cada paso (para un motor de 100 pasos es por lo menos de  $\frac{1}{4}$  de grado). No tan sólo el error no es acumulativo (es decir, el error de un paso no se suma al error del paso siguiente) sino que se puede cancelar cada cuatro pasos.

La razón para esto es la siguiente, con un motor de pasos bifásico, existen tan sólo cuatro tipos diferentes de corrientes aplicadas a las bobinas y éstas se repiten cada cuatro pasos. Esto se muestra en la figura 4.6, donde cada cuatro pasos se repite la posición. Para sacar algún provecho de esto, en las aplicaciones de precisión es común el uso de motores de paso en la posición de "4 pasos" en la cual todas las posiciones son múltiplos de los cuatro pasos.



**PARA SECUENCIAS INVERTIDAS  
INTERCAMBIAR LAS COLUMNAS  
A Y B EN Ø1 Ó Ø2**

Figura 4.6.

**Motor de paso bifásico de dos embobinados.**

También es posible el funcionamiento de los motores de paso en un modo frecuencial de pasos. Para un modo de los motores de paso en un modo frecuencial de pasos. Para un modo normal de operar cada bobina se alimenta con una secuencia completa de corriente. En pasos fraccionados, cada vez que se da un paso con una secuencia completa de corriente en el siguiente se divide la corriente entre dos bobinas consecutivas. Cualquier posición intermedia del rotor se puede alcanzar escogiendo de forma aproximada el cociente entre los dos cocientes pero es habitual escoger simplemente la razón 1:1 que resulta en una posición de medio paso, doblando así el número de pasos. Esto se conoce como el modo de "del medio paso".

La mayor parte de los motores de paso bifásicos se utilizan en máquinas de bajo voltaje (de 6 a 24 V nominales) diseñadas para ser conducidos por transistores o en algún circuito integrado de especial diseño para tal fin. En la figura 4.6 se muestra el tipo más simple de este motor con dos bobinas. Puede trabajar cargando secuencialmente cada una de las bobinas como se muestra en la tabla 4.2.1A ó por parejas como se muestra en la tabla 4.2.1B. La tabla 4.2.1B se utiliza normalmente ya que es un poco más eficiente que la tabla 4.2.1A debido a que hace un mejor uso del embobinado. En A para una posición de reposo en los polos del rotor le corresponde adyacentemente los polos cargados del arranque, en B la posición de reposo está a medio camino de los polos cargados, una diferencia de medio paso en A. En la tabla 4.2.1C se alternan los modos de una sola bobina y de una bobina doble y da como resultado medio paso. Tan sólo se muestran en la tabla cuatro y ocho pasos, ya que en cada caso todos los pasos siguientes son repetición de la serie inicial.

Tabla 4.2.1A Un embobinado

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	+	-	0	0
1	+	-	0	0
2	0	0	+	-
3	-	+	0	0
4	0	0	-	+
(5)	+	-	0	0

Tabla 4.2.1B Dos embobinados

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	+	-	+	-
1	+	-	+	-
2	-	+	+	-
3	-	+	-	+
4	+	-	-	+
(5)	+	-	+	-

Tabla 4.2.1C Medio paso

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	+	-	+	-
1	+	-	+	-
2	+	-	0	0
3	-	+	+	-
4	0	0	+	-
5	-	+	-	+
6	-	+	0	0
7	+	-	-	+
8	0	0	-	+
(9)	+	-	+	-

El motor mencionado anteriormente es llamado motor de pasos bipolar, ya que es necesario, pasar a través de cada bobina cuando se está produciendo el paso. Esto complica el montaje de encendido y si se utilizan transmisores como interruptores se necesitan cuatro de ellos formando un puente en H para cada una de las bobinas (Figura 4.7a).

Para simplificar el montaje de encendido se pueden montar bobinas de cuatro pasos. Cada una de las bobinas se divide en dos lo cual permite que el cambio en la dirección de la corriente se pueda conseguir con sólo dos interruptores (Figura 4.7b). Esto es más ventajoso y la mayoría de los motores bifásicos son de este tipo.

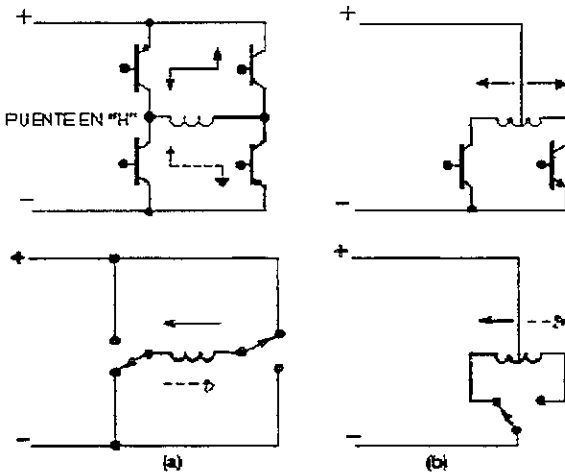


Figura 4.7 .  
Montaje del transistor y del interruptor mecánico.

Este tipo de motores se llaman cuadrifásicos o unipolares. La secuencia de encendido se muestra en la Figura 4.8.

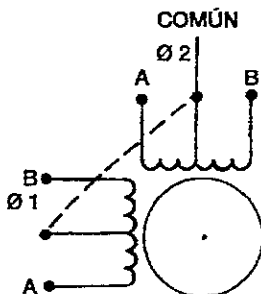


Figura 4.8.  
Motor de paso bifásico de cuatro embobinados.



### 4.2.2 SISTEMA DE CONTROL PARA MOTORES DE PASO. [15]

Aunque el sistema de encendido puede efectuarse por sistemas mecánicos de rotación o conmutadores (los viejos motores M de la Segunda Guerra Mundial eran de este tipo) ahora son universalmente usados para este propósito ciertos circuitos integrados, ya bien sea directamente, o para grandes motores, a través de transistores de potencia. Éstos realmente simplifican la tarea aplicando automáticamente la secuencia idónea de corriente a las bobinas de paso como respuesta a impulsos de entrada; existe un pulso por cada paso de salida. El sentido de la rotación se selecciona con el voltaje aplicado a la segunda entrada. Algunos de los suministros disponibles para este propósito se muestran en la siguiente tabla:

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	A	B	A	B
1	ON	-	-	-
2	-	-	ON	-
3	-	ON	-	-
4	-	-	-	ON
(5)	ON	-	-	-

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	A	B	A	B
1	ON	-	-	ON
2	ON	-	ON	-
3	-	ON	ON	-
4	-	ON	-	ON
(5)	ON	-	-	ON

	$\Phi_1$		$\Phi_2$	
	A	B	A	B
1	ON	-	-	ON
2	ON	-	-	-
3	ON	-	ON	-
4	-	-	ON	-
5	-	ON	ON	-
6	-	ON	-	-
7	-	ON	-	ON
8	-	-	-	ON
(9)	ON	-	-	ON

Tabla 4.2.2D

TIPO	FABRICADOR	OBSERVACIONES
SAA 1027	Signetics/Mullard	Generador de paso 350 mA 4 fases.
SAA 1042	Motorola	Generador de paso 500 mA 4 fases con modo completo y medio paso.
UCN-4204 B	Spreague	1.25 A 4 fases con modo completo y medio de pasos.
L 293 D	SGS	Generador de paso de 2 fases.
75 TEA 1012	Signetics/Mullard	Generador de modo completo y medio de pasos y control de corriente 50 mA 4 fases.
L 297	SGS-ATES	Generador de modo completo y medio de pasos y control al corriente 2/4 fase.
L298	SGS-ATES	Puente de potencia H para L 297.
UDN-28778/9	Sprague	Driver cuadrapolar de 4 A de potencia para motores de paso de 4 fases.
555	Motorola/National   Signetics/Texas	Generador estándar industrial tiempo/pulso.

Cada uno de los tres primeros aparatos es un completo motor de paso que genera la secuencia correcta de pulsos a un nivel de potencia suficientemente alto para manejar de forma directa a pequeños motores. El SAA 1027 es muy popular para manejar motores de peso completo. El SAA 1042 produce una corriente de salida ligeramente más alta y puede operar en un modo de paso completo y de medio paso. El UCN-4204 B es de alta potencia 15 V 1.25 A y también disponible en una reunión de 35 V (UCN-4205-B).

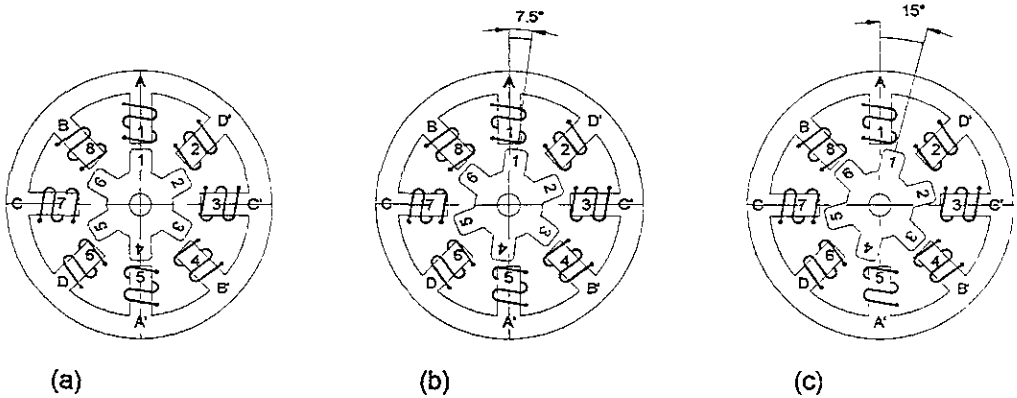
El TEA 1012 y el L 297 son más complejos, con una capacidad de salida menor (típicamente de 50 mA) y que se usa con un sistema de cuatro transistores de potencia o un puente de potencia H instalado en motores bifásicos. Para incorporar tanto la operación de paso completo como la de medio paso, debe instalarse un circuito especial para controlar la corriente que circula por el motor.

El rendimiento de un motor de paso para un gran número de pasos se degrada debido a que el voltaje de paso no se aplica a las bobinas durante el suficiente tiempo en cada uno de los pasos como para que la corriente de cada bobina llegue a un valor estacionario. Se puede mejorar bastante la corriente que se alcanza en las bobinas implementando el voltaje aplicado a éstas a un valor cercano al máximo que alcanza el rotor estacionario en funcionamiento continuo, lo que mejora la velocidad del momento.

El TEA 1012 y el L297 incluyen ambos el circuito "cuchillo" que interrumpe el suministro de corriente al motor con frecuencia supersónicas. El cociente entre el tiempo de "ON" y de "OFF" de este circuito de cuchillo se controla automáticamente de forma que se mantiene el valor medio constante sobre el rango de velocidades útiles del motor. Esto se conoce como operar el motor en corriente constante y es uno de los mejores métodos de extraer el máximo provecho de un motor de paso en particular. El L297 y el UDN-2879/9 son discos de potencia que pueden conducirse desde un generador de paso de baja potencia o directamente desde un mismo ordenador programado de manera adecuada. El último aparato es un popular generador de pulso de uso muy generalizado (va de menos de un pulso por segundo hasta cientos de miles de pulsos por segundo). Se utiliza para proveer el pulso de entrada al motor de paso como un conveniente método del control de la velocidad del motor.

### **4.2.3 OPERACIÓN DE MEDIO PASO. [35]**

La operación medio-paso es lograda usando la secuencia modificada de pulso: A, A & B, B, B & C, C y así sucesivamente. Esto es ilustrado en la Figura 4.9 para tres pulsos sucesivos. Energizando sólo la fase A ocasiona la posición del rotor mostrada en la figura 4.9(a); energizando la fase A y la fase B mueve el rotor a la posición mostrada en la Figura 4.9(b); y energizando sólo la fase B el rotor se mueve a la posición mostrada en la Figura 4.9(c). Con cada pulso el rotor se mueve 7.5° en la dirección horaria.



**Figura 4.9. Motor de pasos de reluctancia-variable sincronizado para una operación de medio-paso, mostrando tres pulsos sucesivos.**

#### 4.2.4 MICROPASOS. [35]

El micropaso utiliza dos fases con corrientes diferentes. Por ejemplo, en la Figura 4.9(b), en lugar de excitar las fases A y B equitativamente, la corriente en la fase A se mantiene constante mientras que la corriente en la fase B es aumentada en pequeños incrementos (pulsos) hasta que la corriente máxima es alcanzada. Entonces la corriente en la fase A es reducida hasta cero usando los mismos pequeños incrementos. Los pequeñísimos ángulos de paso resultantes, llamados micropasos, proveen una suave operación de baja-velocidad y alta resolución. Por ejemplo, un motor de pasos con una resolución de 200 pasos/revolución (ángulo de paso de  $1.80^\circ$ ), con micropasos puede tener una resolución de 20,000 pasos/rev (un ángulo de paso de  $0.0180^\circ$ ).

#### 4.2.5 PRECISIÓN DEL PASO. [35]

La precisión del paso, expresada en porcentaje, indica el error total introducido por un motor de paso con el movimiento de un solo paso. El error es no acumulativo, ya que no aumenta los pasos que son tomados como adicionales. El rango más común de precisión de los motores de pasos comerciales va de uno al 10 por ciento del tamaño del paso.

## 4.2.6 EL MOTOR DE PASOS ELEMENTAL. [34]

Un motor de pasos muy simple es mostrado en la Figura 4.10. Consiste en un estator teniendo 3 polos salientes y un rotor bipolar (2 polos) hecho de hierro suave. Los devanados pueden ser conectados sucesivamente a un suministrador de corriente continua (CD) mediante 3 interruptores A, B y C. Sin efectuar algunos otros cambios, suponemos que incrementamos la inercia del rotor montando una rueda volante [flywheel].

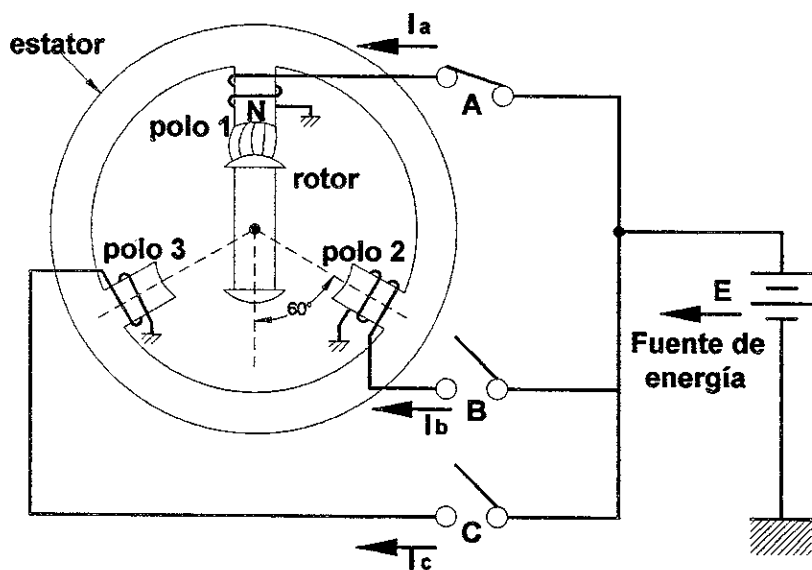


Figura 4.10.

**Motor de pasos simple en el cual cada paso mueve a el rotor en incrementos de 60°.**

Cuando los interruptores están abiertos, el rotor puede tomar cualquier posición. A pesar de esto, si el interruptor A está cerrado, el campo magnético resultante creado por el polo 1 atraerá a el rotor y se alinea como se muestra en la Figura 4.10. Si abrimos el interruptor A y simultáneamente cerramos el interruptor B, el rotor se alinearé con el polo 2. Haciendo esto, girará en el sentido opuesto de las manecillas del reloj 60°. Después, si abrimos el interruptor B y cerramos el interruptor C, el rotor girará en sentido antihorario 60° adicionales, alineándose esta vez con el polo 3.

Claramente podemos hacer que el rotor avance en sentido antihorario, en pasos de  $60^\circ$  abriendo y cerrando los interruptores en la secuencia A, B, C, A, B, C...

Más adelante, podemos invertir la rotación operando los interruptores en la secuencia invertida A, C, B, A, C, B,... Para arreglar la posición final del rotor en orden, el último interruptor que fue cerrado en una secuencia de apagado deberá permanecer cerrado. Esto mantiene al rotor en su última posición y lo previene de movimientos bajo la influencia de fuerzas externas. En este estado estacionario, el motor permanecerá "bloqueado", procurando que el torque no exceda el así llamado torque-mantenido del rotor.

En el movimiento de una posición a la siguiente, el movimiento del motor será influenciado por las fuerzas de inercia y fricción que actúan. Ahora examinaremos la naturaleza de dichas fuerzas.

#### 4.2.7 EFECTO DE LA INERCIA. [34]

Suponga que el motor funciona sin carga y que el rotor tiene poca inercia y una pequeña cantidad de fricción en los cojinetes. Esta inicialmente frente al polo 1. Esto a cero grados ( $0^\circ$ ) de la posición angular. En el momento que el interruptor A se abre y el interruptor B se cierra, el rotor comenzará acelerando hacia el polo 2 en sentido antihorario. Rápidamente gana (toma) velocidad y pronto alcanza la línea central del polo 2 donde debe descansar. Aunque el rotor está ahora moviéndose a una velocidad considerable, y sobrepasará la línea central.

Así, conforme lo hace el campo magnético del polo 2 lo moverá en la dirección opuesta, frenando a el rotor. El rotor llegará a la mitad y comenzará moviéndose en la dirección opuesta (sentido horario). Nuevamente ganando velocidad, sobrepasará la línea central del polo 2, con lo cual el campo magnético ejercerá un impulso en la dirección antihoraria.

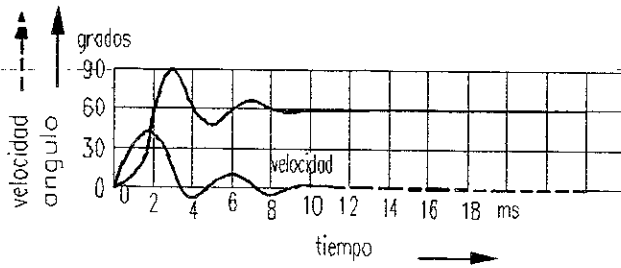


Figura 4.11. En el movimiento del polo 1 al polo 2, el rotor oscila alrededor de la posición de  $60^\circ$  antes de llegar al reposo. La velocidad es cero cada vez que el rotor alcanza el límite de su sobrecarga.

Por lo tanto el rotor oscilará como un péndulo alrededor de la línea central del polo 2. Las oscilaciones desaparecerán gradualmente, a causa de la fricción en los cojinetes. La Figura 4.11 muestra la posición angular del rotor como una función del tiempo. El rotor comienza en  $0^\circ$  y alcanza  $60^\circ$  (la línea central del polo 2) después de 2 ms (milisegundos) sobrepasa la línea central por  $30^\circ$  antes de llegar a la mitad (a 3 ms). El rotor se mueve ahora en reversa, y nuevamente cruza la línea en  $t = 4$  ms.

Las oscilaciones continúan de esta forma, disminuyendo gradualmente en amplitud hasta que el rotor llega al reposo en  $t > 10$  ms.

Nótese que se ha dibujado también la velocidad instantánea del rotor como una función del tiempo. La velocidad puede ser dada en revoluciones por segundo, pero para los motores de pasos es más significativo hablar de grados por segundo. La velocidad es momentáneamente cero en  $t = 3$  ms, 5 ms, 7 ms y permanentemente cero en  $t > 10$  ms. La velocidad es más grande cada vez que el rotor cruza la línea central del polo 2. Es claro que las oscilaciones tardan un tiempo relativamente largo antes que el rotor se ajuste abajo.

Sin efectuar algunos otros cambios, suponemos que incrementamos la inercia del rotor montando una rueda volante [flywheel]<sup>1</sup> en el eje. Descubrimos que ambos, el período y la amplitud de las oscilaciones se incrementan cuando la inercia se incrementa.

<sup>1</sup> FLYWHEEL: Se refiere al agregar al eje del rotor una "rueda volante" con la finalidad de incrementar la carga mecánica y así mismo incrementar la inercia del motor.

En la Figura 4.12, por ejemplo, el tiempo para alcanzar la posición de 60° se ha incrementado. El rotor también, toma un largo tiempo para reajustarse [settles down]<sup>2</sup> (18 ms en lugar de 10 ms).

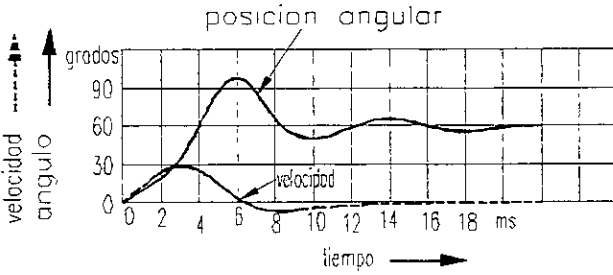


Figura 4.12. Las mismas condiciones que en la Figura 4.11 a excepción de que la inercia es más grande. La sobrecarga es más grande y el rotor toma más tiempo para reajustarse.

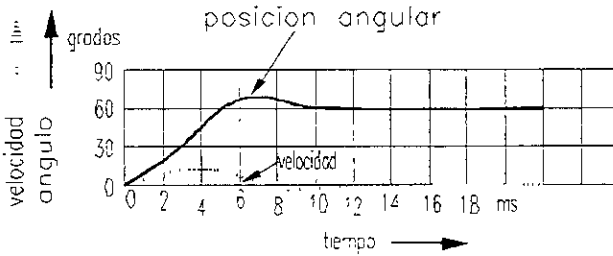


Figura 4.13. Las mismas condiciones que en la Figura 4.12 a excepción de que el amortiguador viscoso ha sido adicionado.

Las oscilaciones pueden ser amortiguadas incrementando la fricción. Por ejemplo, si la fricción de los cojinetes es alcanzada suficientemente, las oscilaciones mostradas en la Figura 4.12 pueden ser suprimidas tanto como al dar una sola sobrecarga, mostrada en la Figura 4.13. En práctica el amortiguamiento es logrado mediante el uso de un freno de corriente de Eddy o un amortiguamiento viscoso. Un amortiguador viscoso usa un fluido como aceite o aire para detener a el rotor cada vez que se mueva.

El amortiguamiento viscoso, significa que el efecto de frenado es proporcional a la velocidad; por lo tanto es cero cuando el rotor está en reposo.

<sup>2</sup> SETTLES DOWN: Se refiere al hecho de que el rotor se reajuste con respecto al estator, en un motor de pasos.



4.2.8 EFECTO DE UNA CARGA MECÁNICA. [34]

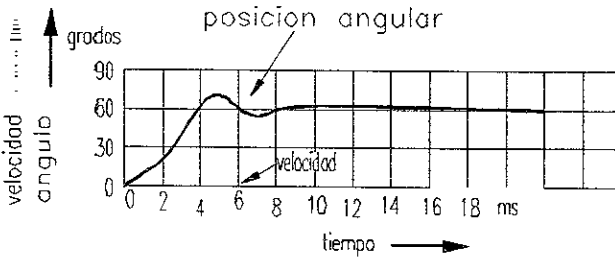


Figura 4.14. Las mismas condiciones que en la Figura 4.11 a excepción de que el rotor está acoplado a una carga mecánica.

Regresemos a la condición mostrada en la Figura 4.11 donde el rotor tiene poca inercia y sólo una pequeña cantidad de amortiguamiento viscoso, debido a la fricción de los cojinetes. Si el rotor está acoplado a una carga mecánica mientras se está moviendo, el efecto es mostrado en la Figura 4.14. Como podemos suponer, la posición de 60° (compare 2 ms en la Figura 4.11 con 4 ms en la Figura 4.14). Además, la sobrecarga es más pequeña y las oscilaciones son amortiguadas más rápido.

En resumen, ambas, la carga mecánica y la inercia incrementan el tiempo de pasos. Las oscilaciones también prolongan el tiempo antes de que el rotor se reajuste. Por lo tanto, para obtener una rápida respuesta de pasos, la inercia del rotor (y su carga) debe ser tan pequeña como sea posible y las oscilaciones deben ser suprimidas mediante el uso de un amortiguador viscoso. El tiempo para mover de una posición a la siguiente puede ser reducido también, incrementando la corriente en el devanado. Así, las limitaciones térmicas debidas a  $I^2 R$  las pérdidas determinan la corriente máxima que puede ser empleada.

Regresando a la Figura 4.10, excitando los devanados en serie para que así el motor gire. La Figura 4.15 muestra los pulsos de la corriente  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  y la posición instantánea del rotor (además de su velocidad) cuando el rotor realiza media revolución. Asumimos que el motor de pasos tiene alguna inercia y que maneja una carga mecánica. De la Figura 4.10 nótese que la velocidad del rotor es cero al principio y al fin de cada pulso. En esta figura, los pulsos tienen una duración de 8 ms. Consecuentemente la razón de pasos es de  $1000/8 = 125$  pps. Una revolución requiere 6 pasos y así toma  $6/125 = 0.048$  segundos para completar una vuelta.

La velocidad promedio es por lo tanto  $60/0.048 = 1250$  r.p.m. Así, el motor de pasos gira en saltos de arranque-paro y no suavemente como un motor ordinario lo haría.

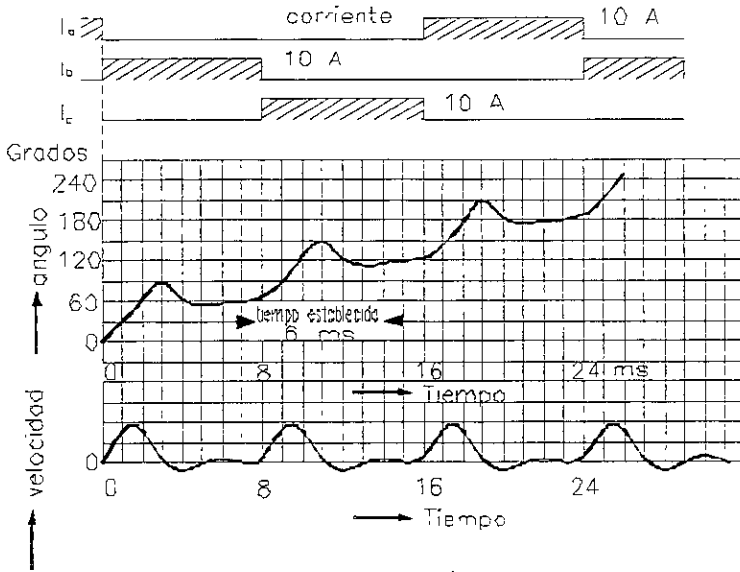


Figura 4.15. Gráfica de los pulsos de corriente, posición angular y velocidad instantánea del rotor durante los primeros 4 pasos. Tres pasos (24 ms) producen media revolución.

### 4.2.9 TORQUE VS. CORRIENTE. [34]

Como se mencionó previamente, el torque desarrollado por un motor de pasos depende de la corriente. La Figura 4.16 muestra la relación entre dos de los típicos motores de pasos. Cuando la corriente es de 8 A, el motor desarrolla un torque de 3 N-m. Este es el torque que el motor puede ejercer en movimiento de una posición a la siguiente es llamado "torque de arranque".

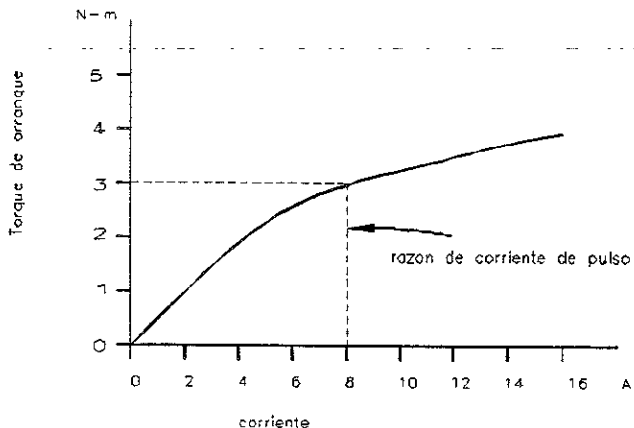


Figura 4.16. Gráfica del torque de arranque contra la corriente de un motor de pasos; diámetro 3.4 pulgadas; longitud 3.7 pulgadas; peso 5.2 libras (m).

Cuando el rotor está en reposo una corriente sostenida debe continuar circulando en el último devanado que fue excitado, para que así el rotor permanezca bloqueado en posición.

#### 4.2.10 EL TORQUE MANTENIDO. [34]

El torque mantenido llamado *torque estático*, es el torque de carga máximo que puede ser aplicado a un motor de pasos energizado sin tener una combinación de polos.<sup>4</sup>

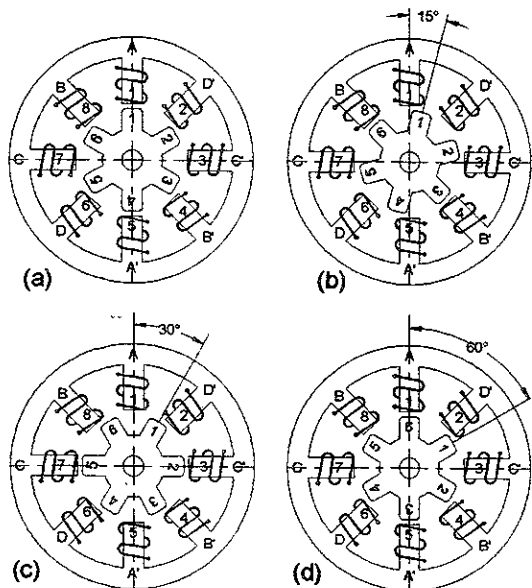


Figura 4-17. Posiciones del rotor que desarrollan el torque restaurado en un motor de reluctancia-variable con la fase A energizada: (a) rotor en reposo; (b) rotor forzado 15° en sentido horario; (c) rotor forzado 30° en sentido horario (inestable); (d) el rotor se desliza 60°.

Asumiendo que la fase A está energizada y el rotor está en reposo, como se indica en la Figura 4.17(a). Si la posición de reposo del rotor es forzada mecánicamente a un paso de  $15^\circ$  en el sentido horario, como se muestra en la Figura 4.17(b), la fuerza resultante de la atracción de los dientes del rotor 1 y 4, por los respectivos dientes magnetizados del estator 1 y 5, desempeña un torque de restablecimiento. La liberación del rotor ocasionará que regrese a su posición original mostrada en la Figura 4.17(a). Forzando a el rotor  $30^\circ$  en sentido horario (dos pasos), mientras que la fase A permanece energizada, esto resultará en las posiciones relativas de los dientes mostrada en la Figura 4.17(c). Esta es una posición de equilibrio inestable porque los dientes del rotor 1 y 6 tienen fuerzas de atracción iguales: el torque neto es cero. Cuando es liberado el rotor, puede ir en cualquier dirección: regresando dos pasos a la posición original mostrada en la Figura 4.17(d).

Una gráfica del torque restablecido contra el desplazamiento del paso forzado, llamado *curva de torque-estático*, es mostrada en la Figura 4.18. Observe que el torque de restablecimiento máximo es producido con un desplazamiento de un paso. Un desplazamiento de dos pasos tiene una fuerza de restablecimiento igual a cero, pero el rotor esta inestable cuando es liberado, y puede moverse hacia atrás hacia su posición original, o mover hacia adelante para un total de cuatro pasos desde su posición original.

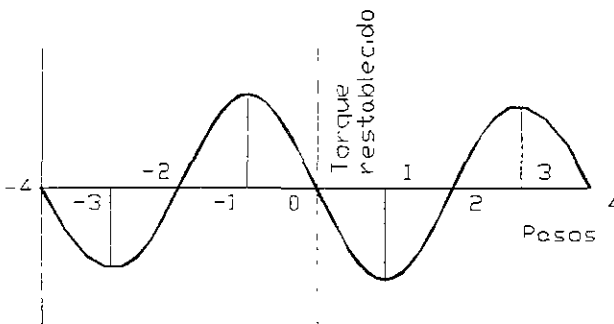


Figura 4.18. Curva típica de torque-estático para un motor de pasos.

4.2.11 RELACIÓN PARO-ARRANQUE DE PASOS. [34]

Cuando el motor de pasos se desplaza a través del modo de paro-arranque mostrado en la Figura 4.15, hay un límite superior permisible para la tasa de pasos. Si la tasa de pasos de la corriente en los devanados es muy rápida, el rotor es incapaz de seguir los pulsos con precisión, y los pasos serán perdidos. Esto vence todo el propósito del motor, el cual está correlacionado con su precisión instantánea (pasos) con el número de redes (+ y -) de pulsos. Para mantener sincronía, el rotor debe reajustarse antes de avanzar a la siguiente posición. Refiriéndonos a la Figura 4.16, esto significa que el intervalo entre pasos sucesivos debe ser al menos de 6 ms, el cual corresponde al máximo de  $1000/6 = 167$  pasos por segundo (pps). Teniendo en mente lo que fue dicho en la sección 4.2.7, es claro que el número máximo de pasos por segundo, depende sobre el torque de carga y la inercia del sistema, la carga mayor y la más grande inercia, la más baja será el número de pasos por segundo permitidos.

El modo de paro-arranque de pasos es referido algunas veces como "modo de arranque sin error". Una característica del "arranque sin error" es mostrada en la curva punteada 1 en la Figura 4.19. Muestra que si el torque de carga, es decir, 1.4 N-m, la máxima tasa de pasos posible, sin perder la cuenta, es de 500 pasos por segundo. Pero si la misma carga tiene también una inercia grande, la tasa de paro-arranque permisible cae alrededor de 400 pasos por segundo para el mismo torque de carga (curva 2).

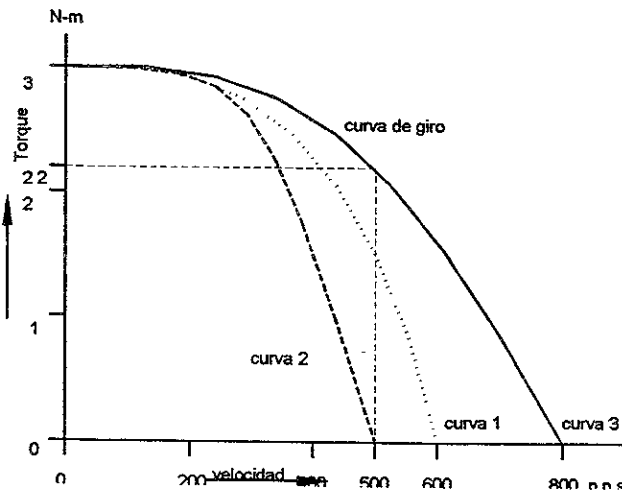
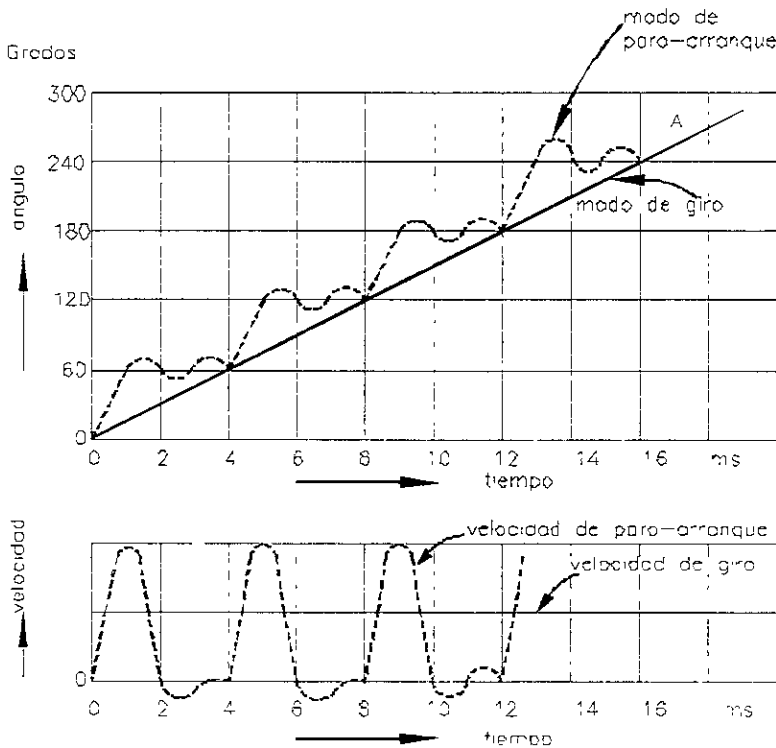


Figura 4.19. Características de paro-arranque y giro de un motor de pasos típico. Cada paso corresponde a un avance de 1.8°. Curva 1: Curva de paro-arranque sólo con la inercia del motor de pasos. Curva 2: Las mismas condiciones que en la curva 1 pero con una carga de inercia adicional de 2 kg-cm<sup>2</sup>. Curva 3: curva de giro.

4.2.12 VELOCIDAD DE GIRO. [34]

Un motor de pasos puede ser hecho para moverse a una velocidad uniforme, parar y arrancar a cada paso. Cuando el motor se mueve de esta forma se dice que esta girando. El efecto de inercia está ausente, porque el motor se mueve esencialmente a una velocidad uniforme. Consecuentemente, para una tasa de pasos dada, el motor puede llevar un gran torque de carga cuando esta girando. La curva sólida 3 en la Figura 4.19 muestra la relación entre el torque de carga y los pasos por segundo cuando el motor está girando. Por ejemplo, el motor puede desarrollar un torque de 2.2 N-m cuando se mueve a 500 pasos por segundo. Sin embargo, si el torque de carga debe exceder 2.2 N-m cuando la tasa de pasos es de 500 pps, el motor caerá fuera del paso y la posición (pasos) del rotor no corresponderá al número neto de pulsos suministrados en los devanados.



**Figura 4.20.**  
**(a)** Curva de posición angular contra el tiempo cuando el motor de pasos opera en el modo de paro-arranque y en el modo de giro. La tasa de pasos es la misma en ambos casos

**(b)** Curva de velocidad instantánea contra el tiempo cuando el motor de pasos opera en el paro-arranque y en el modo de giro.

La Figura 4.20 muestra la diferencia entre el modo de paro-arranque y giro. Suponga que el motor está girando en una velocidad promedio de 250 pps en ambos casos. El motor cubrirá el mismo número de pasos por segundo, ángulo (posición) se incrementa suavemente con el tiempo cuando el motor está girando y esto se muestra por la pendiente uniforme de la línea OA (Figura 4.20a). La velocidad de giro correspondiente es constante (Figura 4.20b).

De otra manera, el ángulo incrementa el sentido de pasos en el modo de paro-arranque. Por lo tanto, la velocidad varía continuamente entre un máximo y cero y su valor promedio es igual a la velocidad de giro (Figura 4.20b).

### 4.2.13 DESACELERACIÓN [RAMPING]<sup>3</sup>. [34]

Cuando un motor esta cargando un peso, no puede ir súbitamente de cero a una tasa de pasos, por decir, 500 pps. Del mismo modo, un motor que está girando a 500 pps no puede llegar a un paso muerto de un solo paso.

Así, para llevar un motor arriba de la velocidad debe ser acelerado gradualmente. De igual forma, para detener un motor que está girando a alta velocidad, debe ser desacelerado gradualmente, siempre sujeto a que la condición de la posición instantánea del rotor debe corresponder al número de pulsos. El proceso con el cual un motor es acelerado y desacelerado es llamado desaceleración [Ramping]. Durante la fase de aceleración, el frenado consiste en un incremento progresivo en el número de pulsos manejados por segundo.

La fase de desaceleración es usualmente completada en una fracción de segundo. El frenado es generado por la alimentación de energía que maneja el motor de pasos. Más adelante, se programa para mantener el control preciso de la posición sobre el motor y su carga.

---

<sup>3</sup> RAMPING: Se refiere a desacelerar un motor de pasos gradualmente.

**4.3.1 ASPECTOS ELECTROMECAÑICOS DE LOS MOTORES DE PASOS.**

El inciso g) de la Figura 5.0 (ver más adelante) muestra esquemáticamente un motor que convierte la información digital en un giro proporcional del eje del motor. Este dispositivo permite controlar el ángulo de giro del motor en forma discreta por medio de pulsos eléctricos, estos pulsos son enviados desde una PC por medio de un software de control.

Desde su aparición [10] los motores han aportado mejoras en los aspectos de precisión y rápido posicionamiento en máquinas, tales como; controladores de discos magnéticos; impresoras; máquinas de escribir; graficadores; robótica; control de flujo de combustible; tornos y fresadoras de control numérico entre otras aplicaciones. Además en los sistemas mecánicos ya sea de cadena abierta o cerrada el motor facilita un mejor posicionamiento, es confiable y preciso.

El eje del motor gira un ángulo determinado llamado ángulo de paso por cada pulso de control que recibe, el ángulo de paso puede ser desde 1.8° hasta 15° grados dependiendo del tipo de motor. Los pulsos pueden ser generados por un oscilador de frecuencia ajustable o de algún otro tipo de fuente que en este caso será el puerto paralelo de 8 bits de la computadora.

Las ventajas de los motores con respecto a los motores de corriente directa se observan en la tabla 4.3.1.

Características	
Motores de pasos.	Motores de corriente continua
<p><b>MECÁNICAS</b></p> <p>1.- Buen Torque 2.- Poca velocidad. 3.- Mucha precisión. 4.- Robustos.</p>	<p><b>MECÁNICAS</b></p> <p>1.- Bajo Torque. 2.- Mucha velocidad. 3.- Poca precisión. 4.- Ligeros.</p>
<p><b>ELÉCTRICAS</b></p> <p>1.- Mucha corriente de operación.</p>	<p><b>ELÉCTRICAS</b></p> <p>1.- Poca corriente de operación.</p>
<p><b>CONTROL</b></p> <p>1.- Poco Complejo.</p>	<p><b>CONTROL</b></p> <p>1.- Complejo.</p>
<p><b>COSTO</b></p> <p>1.- Alto.</p>	<p><b>COSTO</b></p> <p>1.- Bajo.</p>



4.4.1 SELECCIÓN DEL MOTOR DE PASOS A UTILIZAR.

Es necesario conocer el ángulo de giro de los motores entre otras características para hacer la selección adecuada de un motor. A continuación se presenta la ecuación para conocer el ángulo de giro de un motor.

$$\alpha = \frac{360}{f \times n} \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad [4.5]$$

Donde:  $\alpha \in \mathfrak{R}$ ; es el ángulo de giro por paso (en grados).

$f$  es el número de fases del motor.

$n$  es el número de dientes del rotor.

Una forma de seleccionar los motores es apoyarse en la curva característica llamada *Torque-velocidad (PPS)*<sup>4</sup> que se utiliza para seleccionar adecuadamente un motor. Las curvas que se muestran en la Figura 4.21 representan el comportamiento torque-velocidad de un motor controlado en forma a) *unipolar* b) *bipolar*. Se puede observar un considerable incremento en el torque permisible en la forma de control bipolar de un motor, sin embargo, el control es más complejo.

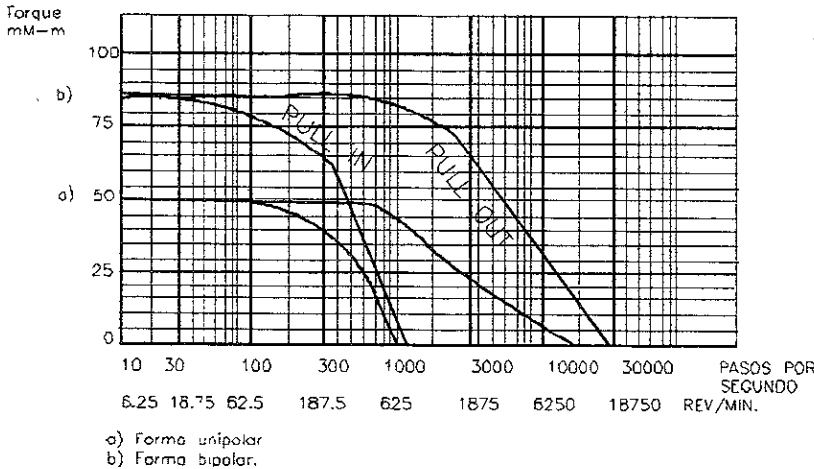


Figura 4.21. Curvas de Torque-velocidad de los motores de pasos controlados de forma unipolar y bipolar.

<sup>4</sup> PPS se refiere a pasos por segundo (Pasos/s).

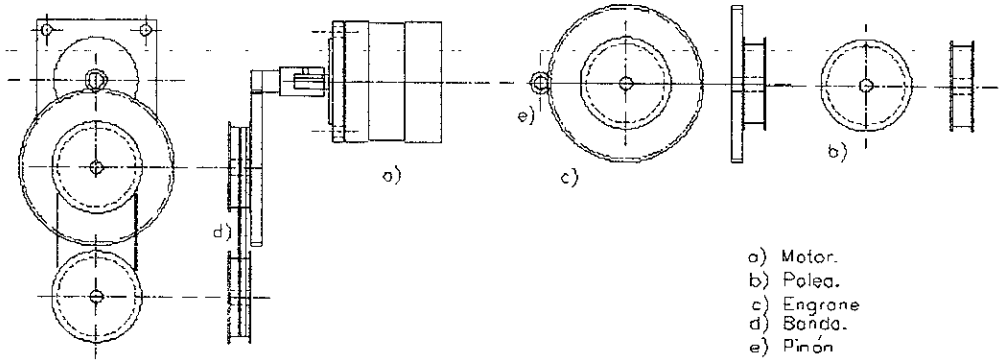
La curva de PULL IN (Momento torsional de ajuste a sincronismo); muestra cual es la carga a la cual el motor puede ser puesto en marcha o detenerse sin perder algún paso a velocidad constante PPS (Pasos por segundo), es decir; la velocidad del motor es constante.

La curva de PULL OUT (Par motor crítico o límite); es el torque permisible donde el motor es lentamente acelerado para trabajar a cierta velocidad PPS. La diferencia entre las curvas PULL IN y PULL OUT es el torque que se utiliza para acelerar la masa de inercia acoplada al rotor del motor incluyendo la masa inercial del rotor mismo.

El uso de la curva característica de *Torque-Velocidad PPS* permite seleccionar correctamente un motor según la aplicación a desarrollar, así como también la forma de control. Para seleccionar un motor que cumpla con los requerimientos del prototipo a controlar es necesario aplicar la siguiente metodología:

- a) Calcular la relación de engranaje necesaria para hacer que el torque del motor suministre y logre mover la carga prevista, en este caso será el peso del hombro y brazo del robot-manipulador, incluyendo el peso de las poleas, tornillos, separadores, etc. y fuerzas de fricción ejercidas sobre los acoplamientos polea-eje.

La Figura 4.22 muestra la configuración y distribución de los elementos que transmitirán movimiento a los eslabones del manipulador, donde el inciso c) representa a un piñón acoplado al eje del motor, el piñón transmitirá movimiento al engrane el cuál tiene acoplado una polea, inciso b). La banda y la polea son dentadas, esto es, con el fin de evitar deslizamiento entre banda y polea.



Acot. cm.  
Esc 1:1

Figura 4.22. Configuración del motor, banda y polea de la aplicación.

La siguiente ecuación determina la relación de engranaje. Entonces la relación  $R_e$ ; con el piñón de  $N_p = 8$  dientes y el engrane de  $N_e = 72$  dientes es de la ecuación 4.6 tenemos;

$$R_e = \frac{N_e}{N_p} \Rightarrow R_e = \frac{72}{8} = 9 \quad [4.6]$$

Donde:

$N_e$  = Número de dientes del engrane.

$N_p$  = Número de dientes del piñón.

La relación  $R_e = 9$  permite que por cada pulso que se envíe al motor el engrane girará  $0.1^\circ$  grados de ángulo de giro, recordando que el eje del motor girará  $1.8^\circ$  por pulso recibido, esto permite que la resolución obtenida dé mayor exactitud en el control de posicionamiento del Robot.

b) Proponer el tipo de motor a utilizar haciendo referencia a sus datos técnicos y a su curva característica Torque-velocidad.

Se propone la utilización del motor de cuatro fases tipo 103-771-1242 Step-Syn[11], cuya curva característica de *Torque-Velocidad PPS* se muestra en la Figura 4.23 y los datos técnicos en la tabla 4.4.1

Tensión de operación.	12 v. cd.
Resistencia por bobina.	6.3 ohms.
Inductancia por bobina.	4.5 mH.
Holding Torque*.	55 mNm
Momento de inercia del rotor.	$4 \times 10^4$ gr.m
Detent Torque*.	55 mNm.
Ángulo de Paso.	1.8° grados.
Tolerancia en el ángulo de Paso.	$\pm 1^\circ$ .
Pasos por una revolución del eje.	200 Pasos.
Temperatura máxima de operación.	100° C.
<i>Para mayor información referirse a [11].</i>	<i>* Para ver terminología Apéndice "A".</i>

Según la Figura 4.23 a una velocidad menor a 100 PPS inciso a) se tiene un torque de 55 mN-m en la curva de PULL IN. Se seleccionó esta curva ya que representa la máxima tasa de conmutación de los interruptores electrónicos (velocidad) en la cuál un motor con carga puede ponerse en marcha sin perder pasos. Es decir, el máximo torque que puede ser aplicado al eje del motor cuando es puesto en marcha.

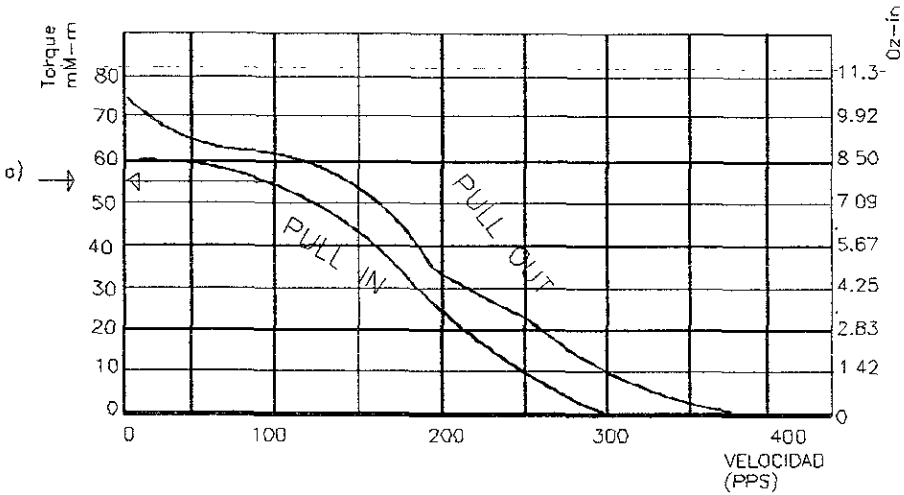


Figura 4.23.

**Curvas de comportamiento del motor tipo 103-771-1242 step-syn.**

El torque que se tiene disponible es aumentado 9 veces debido a la relación de engranaje  $Re=9$ , permitiendo un torque de 55 mN-m según a) de la Figura 4.23, se tiene entonces  $55 \times 9 = 495$  mN-m.

El torque es suficiente para poder otorgar movimiento a la carga (500 gr. aproximadamente) ejercida por los eslabones del prototipo pequeño de Robot-manipulador de 2 grados de libertad con una velocidad de operación de los motores menor a 100 PPS. Además, el tipo de control que se utilizará será en la forma Bipolar. Con está información se podrá llegar al objetivo de controlar el posicionamiento del robot.

## CAPÍTULO V

## 5.- CONTROL

## INTRODUCCIÓN

Se efectuará un análisis conceptual del sistema electromecánico a través de un diagrama de bloques general del prototipo mostrado en la figura 5.0 con el propósito de integrar en forma clara y ordenada la manera de como se realizará el control de la operación del prototipo esto en lo que se refiere a la parte de posicionamiento expuesto como objetivo en este trabajo.

En la figura 5.0 se muestra un diagrama de bloques el cual representa las etapas desde el modelo matemático hasta el control cada uno con un inciso, se realizará un análisis detallado de cada etapa, esto es; desde el principio de operación y funcionamiento hasta la aplicación integrada.

Cabe aclarar que las partes que corresponden a las etapas a) y b) de la figura 5.0 ya han sido desarrolladas en los capítulos anteriores.

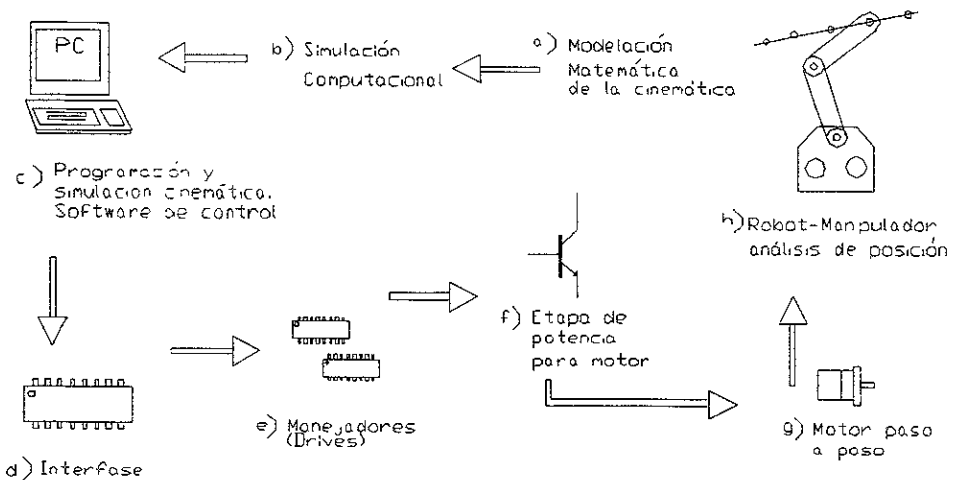


Figura 5.0. Esquema general que muestra el control de la posición de un Robot-Manipulador de 2GDL.

### 5.1.1 MANEJADORES (DRIVERS) PARA MOTORES PASO A PASO.

Del inciso e) de la figura 5.0 se puede observar que los manejadores (Drivers) son dispositivos que reciben información en forma de pulsos eléctricos y éstos generan una secuencia lógica creando un campo giratorio aparente que obliga a girar al eje del motor.

Aunque este campo puede generarse por medios mecánicos de rotación o conmutadores, ahora son usados para este propósito ciertos circuitos integrados, ya sea directamente o para grandes motores a través de transistores de potencia.

Estos circuitos integrados realmente simplifican la tarea aplicando automáticamente la secuencia lógica de corriente a las bobinas del motor el cuál responde a un pulso por cada Paso de salida. Algunos de estos manejadores (Drivers) se muestran en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1. Tipos de manejadores y características.**

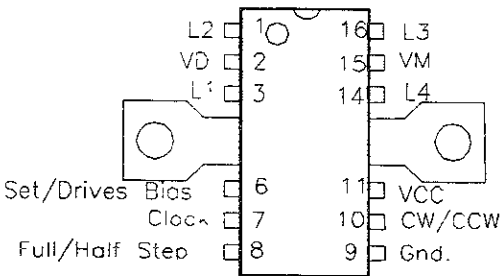
TIPO	FABRICANTE	OBSERVACIONES
SAAA 1027	Signetics/Mullard	Generador de paso a 350 mA, para motores de 4 fases.
SAA 1042	Motorola	Generador de paso a 500 mA, para motores de 4 fases con modo de paso completo y medio paso.
UCN-4204 B	Sprague	1.25 Amp para motores de 4 fases, con modo de paso completo y medio de paso.
L 293 D	SGS	Generador de paso, para motores de 2 fases.
75 TEA 1012	Signetics/Millard	Generador de paso, con modo de paso completo y medio paso, y control de corriente 50 mA para motores de 4 fases.
L 297	SGS-ATES	Generador de paso, con modo de paso completo y medio paso, y control de corriente para motores de 2 y 4 fases.
L 298	SGS-ATES	Puente de potencia H para el manejador (Driver) L297.
UDN-28778/9	Sprague	Driver cuadrupolar de 4 Amp de potencia para motores de 4 fases.
555	Motorola/National Signetics/Texas	Generador estándar industrial tiempo/pulso. Reloj de pulsos.

Esto permite darse una idea general de la gran gama de manejadores que existen en el mercado y la posibilidad de adecuarse al más conveniente para alguna aplicación en especial.

### 5.1.2 PRINCIPIOS DE OPERACIÓN DE LOS MANEJADORES (DRIVERS) PARA MOTORES DE PASOS.

De los manejadores (Drivers) mencionados en la tabla 5.1 el SAA 1042 será utilizado para el desarrollo de este trabajo ya que se utiliza para controlar motores de dos fases en forma bipolar.

En la Figura 5.1 se muestra la numeración de los pines los cuales tienen diferentes funciones L1, L2, L3, L4 son las salidas a las terminales del motor, VD, VM, VCC y Gnd los voltajes de alimentación, se tiene también los pines 6, 7, 8, 10 que reciben información para mover el motor, más adelante se dará una descripción más detallada de las funciones de los pines.



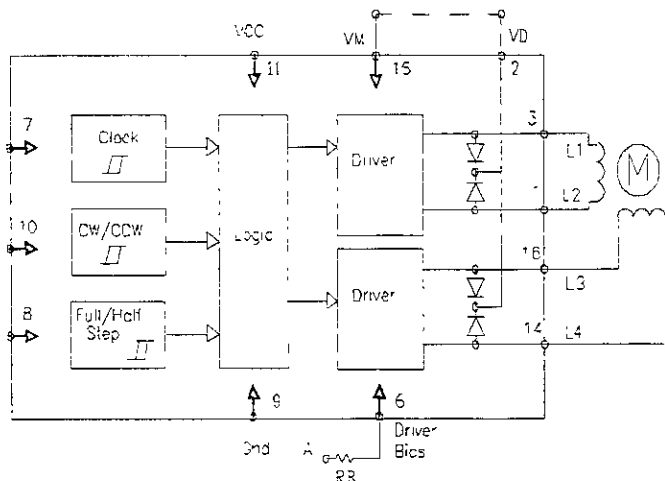
Vista superior.

**Figura 5.1. Asignación de los pines del driver SAA 1042.**

Las características del manejador del driver SAA1042; fue diseñado para controlar motores de 6 y 12 volts con corrientes de hasta 500 mA por fase, contiene también un juego de diodos internos para evitar sobrevoltajes también acepta comandos para controlar la dirección de giro CW/CCW (Sentido horario / Sentido antihorario) y operaciones de Half/Full Step (medio Paso / paso completo).



Con una entrada se puede definir el estado lógico de las salidas, además contiene un disipador de calor integrado para evitar sobrecalentamiento debido a las operaciones de carga imprevistas dando una alta eficiencia.



**Figura 5.2.**  
**Diagrama de bloques del driver SAA 1042.**

En la Figura 5.2 se presenta el diagrama de bloques del driver SAA 1042 en forma simplificada, se observa el funcionamiento interno y cómo es que se procesan las señales de entrada y salida. A continuación se presenta la descripción de los pines del driver y las características de sus bloques internos.

**CLOCK (Reloj).**- Pin<sup>1</sup> 7.- Esta entrada se activa con el borde positivo del pulso del reloj y acepta un "1" lógico como nivel de entrada dependiendo del voltaje e incluyendo la histéresis para la inmunidad de ruido.

**CW ClockWise / CCW Counter Clockwise (Sentido horario/Sentido antihorario).**- Pin 10. Esta entrada determina la dirección rotacional del motor. Es decir, cuando el nivel de entrada es "0" la dirección del motor paso a paso es CW ClockWise, cuando la entrada está en estado lógico "1" en dirección CCW Counter Clockwise, esto depende de las conexiones del motor.

<sup>1</sup> **Pin:** es una clavija o terminal de un circuito integrado que se inserta o ensamblada a algún circuito impreso.

Full/Half Step (medio Paso / Paso completo)- Pin 8.- Esta entrada determina el ángulo de rotación del motor por cada pulso del reloj. En el estado bajo rotará un paso completo por cada pulso aplicado mientras que en el estado alto rotará medio paso.

VD (voltaje diodo) - Pin 2.- Este pin es usado para proteger las salidas (1,3,14,16). Donde el brinco positivo más largo ocurre debido a los cambios de polaridad de la corriente sobre las fases. El máximo voltaje permitido sobre éstos pins es el voltaje  $V_{clam}$ , y éste se obtiene de la siguiente ecuación:

$$V_{clam} = V_M + 6v \quad [5.1]$$

Donde:

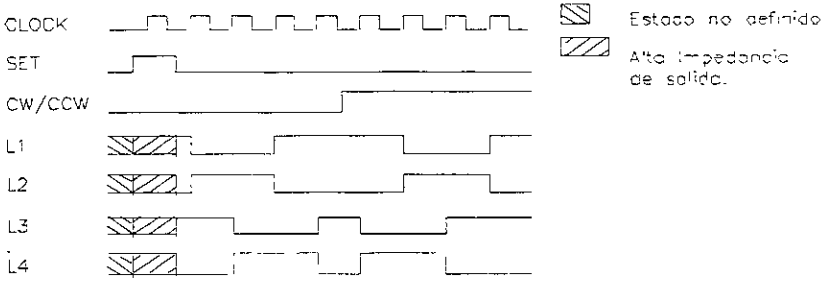
$V_{clam}$  = Voltaje máximo permitido para las bobinas de un motor.

$V_M$  = Voltaje de operación del motor de pasos.

Set/Bias Input (Fijar / entrada) Pin 6.- Esta entrada tiene dos funciones; en la primera la resistencia RB adapta el Driver SAA 1042 a la corriente del motor, y la segunda es que con un pulso a través de la resistencia RB las salidas (1,3,14,16) se fijan a un estado definido.

El valor de la resistencia RB se puede determinar con la Figura 5.3 de acuerdo a la corriente y al voltaje del motor. Valores pequeños de RB incrementarán el poder de disipación del circuito y para valores más altos de RB puede incrementarse el voltaje de saturación de los transistores del Driver SAA 1042. Cuando la función "set" (fijar) no es usada, la terminal A de la resistencia debe ser conectada a tierra. Cuando la función "set" es usada, la terminal A debe ser conectada a un circuito de colector abierto. La Figura 5.4 muestra esta configuración. El circuito off-state (estado de corte) tiene que sostener el voltaje  $V_M$  del motor cuando un pulso es aplicado a través de la resistencia RB.

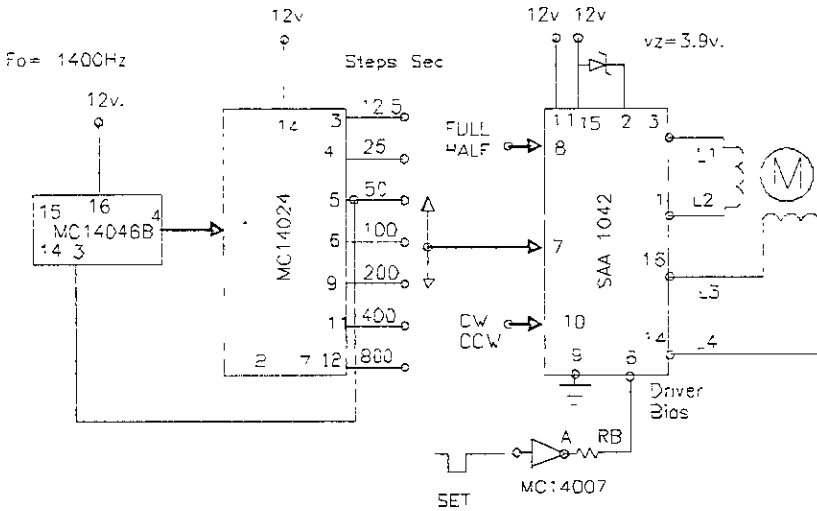
Durante el pulso los transistores del Driver SAA 1042 están en estado de corte después del cambio del pulso las salidas (1,3,14,16) se fijan a un estado definido, este estado se debe dar después de la transición negativa del pulso de la función "set", Pin 6, y hasta la transición positiva del pulso, las salidas serán  $L1 = L3 = "1"$  y  $L2 = L4 = "0"$ .



Manejador(Driver) en modo de Paso completo en sentido horario y antihorario.

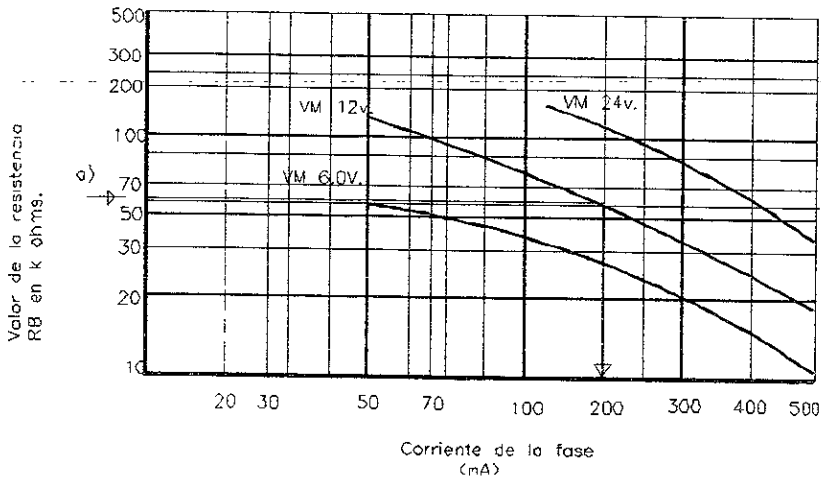
**Figura 5.3.**  
**Diagrama de tiempo del driver SAA 1042.**

La Figura 5.3 muestra el diagrama de tiempos que para cada pulso del Clock (reloj) las salidas L1, L2, L3, L4 se encuentran en un estado definido. La Figura 5.4 ilustra una aplicación típica en la cuál el Driver SAA 1042 controla un motor de 12 v. con un consumo de corriente de 200 mA por fase.



**Figura 5.4.**  
**La aplicación típica del driver SAA 1042.**

Una resistencia RB de 56 kΩ se seleccionó de la Figura 5.5 el máximo voltaje permitido a las salidas (1,3,14,16) es otorgado a través de aplicar la ecuación 5.4; en esta aplicación VM = 12 volts por lo tanto, el máximo voltaje permitido es de 18 v. Las salidas están protegidas por diodos internos y también por un diodo zener que se conecta a los pines (2,15).



**Figura 5.5.**  
**Resistencia vs.**  
**corriente del**  
**motor de**  
**pasos.**

Y su valor se calcula de la siguiente manera; de la Figura 5.5a. se obtiene el valor de  $V_f$  (voltaje directo) de caída en los diodos internos es de 1.7 v. a 200 mA. ésto da como resultado el voltaje que debe de existir entre los pines (2,15). Para calcular el valor del voltaje del diodo zener (regula el voltaje de entrada) se utiliza la siguiente ecuación:

$$V_z = 6v - V_f \quad [5.2]$$

Donde:

$V_z$  = Es el valor del diodo zener.

$V_f$  = Voltaje directa.

De la ecuación 5.2 con un valor  $V_f = 1.7$ ,  $V_z = 4.3$  v tomando en cuenta el margen de tolerancia y de productos comerciales en el mercado se tomó un valor de 3.9 volts para el diodo zener en este ejemplo. El reloj se deriva de la línea de frecuencias el cuál se controla por un MC14046B y el MC14024. El voltaje de la entrada del reloj, está normalmente en estado lógico bajo "0" el motor paso a paso avanza un paso cuando pasa al estado lógico alto "1" del pulso del reloj.

Un "0" lógico aplicado a la entrada Full/Half, Pin 8, opera el motor en el modo de Full Step y un "1" lo hará en el modo de Half Step si el Pin 10 recibe un "1", entonces el motor girará en sentido (CW) y si tiene "0" girará en sentido contrario (CCW) dependiendo de la configuración del motor.

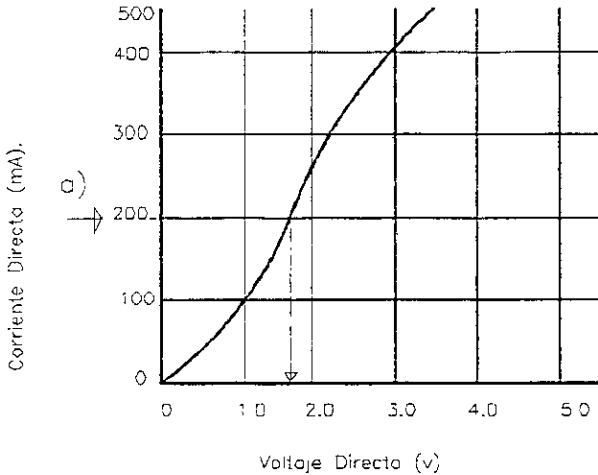


Figura 5.6. Gráfica corriente de diodos vs. voltaje directo.

## 5.2 CREACIÓN DEL HARDWARE DE CONTROL.

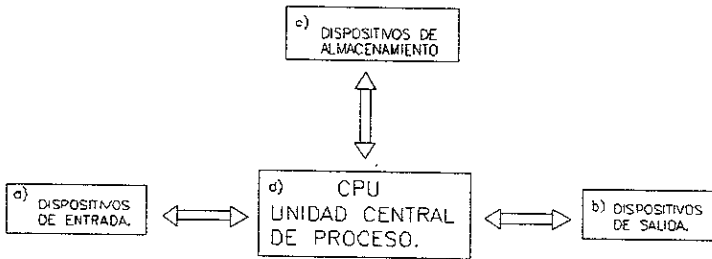
Haciendo referencia a la Figura 5.0 se empezará con una introducción breve de la computadora personal PC como herramienta de trabajo para el control del robot. El hardware de control abarca la electrónica del sistema que recibe la información desde la PC, además de los motores, la tarjeta de interfase de control se incluye.

### 5.2.1 LA COMPUTADORA PERSONAL PC.

Una computadora es un "Sistema de procesamiento de datos de propósito general"; es decir, permite la entrada de datos, éstos pueden ser gestionados por medio de programas, de forma tal, que los resultados obtenidos sean legibles y entendibles para los usuarios.

La potencia de una computadora esta en función de la velocidad, formalidad y facilidad de programación de las tareas a realizar. Contiene un sistema de reloj ("clock") para sincronizar todas sus acciones, realizando una acción en varios pulsos de reloj. Los componentes básicos de la electrónica de una computadora son los que se muestran en la Figura 5.7 las cuales son;

- a).- Los dispositivos de entrada.  
 b).- Los dispositivos de salida.  
 c).- Los dispositivos de almacenamiento.  
 d).- La unidad central de proceso (CPU).



**Figura 5.7.**  
**Diagrama de bloques de una PC en su forma simplificada.**

a).- Los dispositivos de entrada son: el teclado; él cual permite una entrada manual de datos, y los convertidores analógico-digital (A/D), los cuales transforman una señal analógica en una serie de valores digitales que pueden ser manipulados por la computadora (éstos son usados en sistemas de medición, control, etc.).

b).- Los dispositivos de salida; como el monitor, que a pesar de ser muy rápido, ( porque la información que presenta es volátil ), es también un dispositivo ideal para la comunicación con el usuario, la impresora para salida de textos impresos en papel, los graficadores ("plotters") los cuales ofrecen una alta calidad en gráficas de multicolores, y los convertidores digital-analógico (D/A) que transforman los valores digitales en señales analógicas que pueden ser usadas en sistemas de control.

c).- Los dispositivos de almacenamiento; son las memorias y sus respaldos de memoria, tales como: los discos flexibles con una capacidad media de almacenamiento, y los discos duros con una alta capacidad de almacenamiento, ambos de acceso aleatorio. Otros dispositivos son las cintas magnéticas de gran capacidad pero de acceso secuencial, lo cual, reduce la velocidad de procesamiento siendo usadas sólo para respaldo de discos duros.

d).- *La unidad central de proceso (CPU)*; que es la encargada de controlar la operación de la computadora. Esta unidad contiene un procesador, la memoria y la circuitería para comunicarse con los dispositivos de entrada / salida y de almacenamiento.

La mayoría de las computadoras están construidas en forma modular, es decir, en tarjetas electrónicas que implementan bloques funcionales y que están montadas en una tarjeta principal ("Motherboard"), la cual contiene las ranuras de expansión, unidas todas ellas por un bus (canales de comunicación desde el CPU hasta los periféricos de entrada / salida).

En una computadora la tarjeta principal controla el bus del sistema y manipula los datos, muchas funciones y componentes están contenidos en un chip (circuito integrado), el microprocesador es el corazón de la tarjeta principal.

La tarjeta principal contiene al microprocesador y toda la circuitería que el microprocesador necesita para operar (como el sistema de reloj que impulsa al microprocesador para que realice la próxima instrucción). El microprocesador actúa colocando instrucciones, diciendo exactamente como manipular los datos. Típicamente un microprocesador reconoce de 50 a 250 diferentes instrucciones, por tal razón, el microprocesador es el componente más importante dentro de la tarjeta principal.

Los programas consisten en listas de instrucciones, de decenas a miles de éstas, y son introducidas a la computadora mediante dispositivos de entrada y registrados por medio de los dispositivos de almacenamiento. Para realizar las tareas en forma eficiente el CPU está equipado con memoria volátil, la cual se perderá cuando la computadora se apague.

Por esta razón antes de la ejecución de los programas estos deben ser cargados por la computadora desde los dispositivos de almacenamiento a la memoria, entonces el microprocesador leerá las instrucciones una por una y actuará de acuerdo a ellas.

Estas instrucciones pueden ser para leer datos de un dispositivo de entrada (por ejemplo: la retroalimentación de la tarjeta de interés) y almacenarlos en memoria, otras manipulan los datos (comparan, suman, restan, etc.) y envían los resultados a un dispositivo de salida ( por ejemplo; a la interfase que conecta al motor ).

## 5.2.2 EL BUS DE LA COMPUTADORA PERSONAL (PC).

Cada una de las PC's trae internamente una serie de ranuras en las cuales se pueden insertar tarjetas de propósitos específicos. A éstas ranuras se les conoce como ("slots") y contiene 62 líneas paralelas. Estas líneas proporcionan todas las señales que son necesarias para algún equipo que pueda ser unido a la PC.

El bus de una computadora consiste de un gran número de pistas hechas de material conductor al se conectan todas las tarjetas para establecer comunicación entre ellas; para esto se utilizan algunas señales de control del flujo de la información. Sólo a una tarjeta le es permitido enviar datos al bus en un instante dado, mientras que al menos una de las demás debe estar recibiendo la información.

El bus de la computadora, está formado por líneas de datos con direcciones de control y de alimentación. Normalmente el bus de direcciones consiste de 16, 20, 24 o más líneas paralelas que llevan las señales de las direcciones, a través de estas líneas el CPU (Unidad Central de Proceso) envía en forma de señales las direcciones de las localidades de memoria a ser escritas o leídas. El número de localidades que el CPU puede direccionar está determinado por el número de direcciones. De acuerdo con reglas establecidas, si el CPU tiene  $n$  líneas entonces puede direccionar directamente  $2^n$  direcciones, por ejemplo:

Un CPU como el 6800 de 16 líneas de direcciones puede direccionar  $2^{16}$  direcciones diferentes o sea 65536 o 64k localidades de memoria (1 k = 1024 localidades de memoria y una localidad de memoria es un Byte, además, 1 byte = 8 bits), ya sea para la lectura o escritura. Así pues, un CPU de 20 líneas como los 8086 y 8088 pueden direccionar hasta  $2^{20}$  o sea 4096M de localidades (4 Gigabytes), ejemplos de éstos son los 80386 y el 68020, uno manufacturado por Intel y el otro por Motorola respectivamente.

El bus de datos consiste de 8, 16 o 32 líneas paralelas. Como puede verse en cualquier esquema o diagrama a bloques de un sistema computador, las líneas del bus de datos son bidireccionales; esto, debido a la necesidad del manejo de la información de y hacia el exterior por parte del sistema y el usuario.



El bus de datos es el encargado de transportar la información dentro del sistema, dependiendo del tamaño del bus es el tamaño de la unidad de información que acarrea en un tiempo.

Así, un bus de 8 pistas transporta sólo unidades de información de 8 bits, con lo cual alcanza a manejar hasta 256 caracteres codificados o sea  $2^8$ , por lo que entre mayor sea el bus de datos, mayor será el tamaño de la unidad de información a manejar en un lapso de tiempo.

La unidad básica de información es el Bit (Binary digit) un grupo de n bits genera  $2^n$  valores diferentes como el que se mencionó con 8 bits. La unidad básica de datos en una computadora es llamada palabra, ésta también define la longitud mínima de un código de instrucción.

Muchos dispositivos en una computadora tienen sus entradas y salidas conectadas a este bus de datos. Debido a que sólo un dispositivo puede acceder o ser accesado en un instante determinado por la computadora, los otros deben ser desconectados. La interacción de los dispositivos con este bus debe ser en forma de tres estados (parlante, escucha o desconectado).

El bus de alimentación es el encargado de hacer llegar la corriente de la fuente de alimentación a los distintos componentes del sistema y varía de acuerdo a las necesidades del sistema. En tiempos pasados los buses de alimentación tenían que suministrar hasta tres distintas tensiones de alimentación. Hoy en día estos buses se han reducido gracias a los avances en los desarrollos de los dispositivos con necesidades de suministro de tensiones de un sólo nivel y tierra, normalmente 5 volts. Hay otro nivel más alto de 12 volts el que puede ser utilizado para distintos propósitos.

El bus de control consiste de cuatro a diez líneas paralelas por las que circulan señales de control de la computadora, el bus de control lleva información sobre la temporización del sistema, o sea, las señales de reloj, información de órdenes como son accesos de memoria o puertos, también información acerca del sentido de los datos mediante las

señales de lectura y escritura, por este bus el CPU envía las señales de control para evitar conflictos entre todos los dispositivos unidos al sistema.

Entonces para comunicarse desde la computadora al medio exterior (Dispositivos E/S a controlar) se requiere de una Interfase de control que permita tal fin. La interfase paralela de una PC ofrece al usuario un método sencillo y de alta velocidad para comunicarse con el CPU. Operar con datos en paralelo en lugar de en serie ofrece varias ventajas, tales como:

- a).- Eliminación del Codificador y Decodificador.
- b).- No requiere de un Reloj para la velocidad de transmisión.
- c).- Sincronización inherente.

Los datos técnicos del puerto paralelo son:

Tipo de Transmisión: Paralelo (Bloques de 8 Bits).  
 Niveles de Señales **Bajo** 0.0 a + 0.4 v.  
**Alto** +2.4 a + 5.0 v.

Se presenta un diagrama de señales de tiempo en la Figura 5.8a. y la descripción de las terminales(clavijas) del conector macho DB25 Figura 5.8b se detallan en la tabla 5.2.

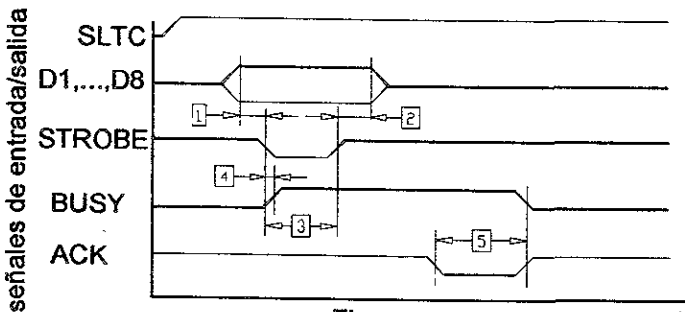


Figura a. t.

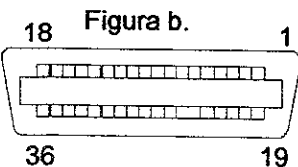


Figura b.

- 1  $\geq 0.5 \mu s.$
- 2  $\geq 0.5 \mu s.$
- 3  $\geq 0.5 \mu s.$
- 4 = 400 ns.
- 5 = 8 ns.
- $\mu s$  = microsegundos

Figura 5.8. Producto de comunicación del puerto paralelo de un CPU.

Tabla 5.2. Descripción de las señales del puerto paralelo de la PC.

No. de CLAVIJA	SEÑAL	E	S	DESCRIPCIÓN
1	STROBE		x	Es la señal que valora los datos, sincroniza la toma de las señales de datos D1...D8.
2	D1		x	Dato 1.
3	D2		x	Dato 2.
4	D3		x	Dato 3.
5	D4		x	Dato 4.
6	D5		x	Dato 5.
7	D6		x	Dato 6.
8	D7		x	Dato 7.
9	D8		x	Dato 8.
10	ACKNLG	x		Esta señal es enviada por la impresora para la confirmación de recepción de datos, y señala al ordenador la disposición de la impresora para la próxima recepción de datos.
11	BUSY	x		Esta señal indica si la impresora está lista para la recepción de datos, y no está lista cuando: ERROR =0, SLTCT=0. La impresora no está On Line.
12	PE	x		Es la señal de final de papel.
13	SLT	x		SLT =1, cuando la impresora está en On Line.
16	GND		x	Tierra. 0 v.
17	CHASIS		x	Tierra de chasis 0 v.
	GND			
18	+ 5 v.		x	Salida con +5v. cd.
19-30	GND		x	Tierra
31	INIT		x	Esta señal se utiliza para que inicie la impresora.
32	ERROR	x		Esta señal se activa en caso de avería, es decir, cuando no es posible la impresión debido a que el cabezal de impresión está obstaculizado.
33	GND		x	Tierra

Se puede observar que el número máximo de Bits que se puede usar con el puerto paralelo de la PC es de 8 Bits, y esto provoca muchas limitaciones a la hora de dar aplicaciones ya que por ejemplo; los motores necesitan 4 Bits para ser controlados directamente desde la PC.

Esta limitación obligó a incrementar el número de Bits, ya que la aplicación así lo requería. Por lo tanto, se ha utilizado la interfase de control de 24 Bits con el circuito integrado 8255A-5 de Intel para poder solventar ésta limitación.

### **5.2.3 INTERFASE PARA EL PUERTO PARALELO DE 24 BITS PARA PC.**

La Interfase 8255A-5. es una Interfase periférica programable, ésta fue hecha para trabajar con el microprocesador XT 8088, sin embargo, también se puede usar para las familias AT. El 8255A-5 cuenta con tres puertos de entrada y salida cada uno compatible con dispositivos de tecnología TTL (Lógica Transistor Transistor), y un puerto de control interno para programar el puerto para cualquiera de los dos modos diferentes de operación. Dependiendo del modo de trabajo en que se encuentre el 8255A-5 las líneas de cada puerto trabajan de manera diferente.

En el modo "0" el puerto A y el puerto B actúan como entradas de datos, y el puerto C es dividido en dos grupos de 4 bits (Nibble), en cambio en el modo "1" de operación, los puertos A y B actúan como salida de datos, pero los dos grupos de 4 Bits del puerto C son usados para propósitos de enlace y control en conjunto con los puertos A y B. Las líneas del puerto C son usadas para las señales de Strobe y Busy de la impresora entre otras aplicaciones.

A continuación en la Figura 5.8 se muestra la configuración de terminales de la interfase 8255A-5.

PA3	1	40	PA4
PA2	2	39	PA5
PA1	3	38	PA6
PA0	4	37	PA7
RD	5	36	WR
CS	6	35	RESET / REINICIAR
GND	7	34	D0
A1	8	33	D1
A0	9	32	D2
PC7	10	31	D3
PC6	11	30	D4
PC5	12	29	D5
PC4	13	28	D6
PC0	14	27	D7
PC1	15	26	Vcc
PC2	16	25	PB7
PC3	17	24	PB6
PB0	18	23	PB5
PB1	19	22	PB4
PB2	20	21	PB3

TERMINAL	DESCRIPCIÓN
D7-D0	BUS DATOS BIDIRECCIONAL
RESET	ENTRADA DE INICIALIZACIÓN
CS	SELECCIÓN DE CHIP
RD	ENTRADA DE LECTURA
WR	ENTRADA DE ESCRITURA
A0-A1	DIRECCIÓN DE PUERTO
PA7-PA0	BITS DEL PUERTO A
PB7-PB0	BITS DEL PUERTO B
PC7-PC0	BITS DEL PUERTO C
Vcc	+ 5 VOLTS DC
FND	0 VOLTS

a) Configuración de terminales.

b) Descripción de terminales.

Figura 5.9.  
El 8255A-5,  
configuración.

En la figura 5.10 se presenta el diagrama de bloques de la Interfase 8255A-5 de Intel, se puede observar la distribución y comunicación interna, además en la Tabla 5.3 se da una descripción detallada de las señales de entrada y salida que genera la interfase.

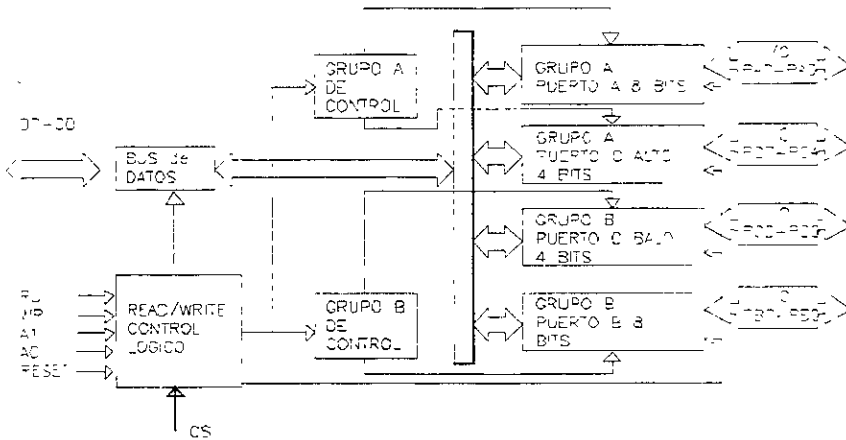


Figura 5.10.  
Diagrama de  
Bloques  
8255A-5

**Tabla 5.3. Descripción de las señales del 8255A-5**

Bus de Datos.	El Bus de Datos bidireccional de tres estados de 8 Bits es usado para comunicar el circuito con el Bus de datos de la computadora. Los datos son transmitidos o recibidos por el Bus de Datos dependiendo de las instrucciones del CPU., ya sean entradas o salidas . Las palabras de control y el nivel de información son transmitidos a través del Bus de Datos.
Read/Write y control lógico.	La función de este bloque es manipular todas las transferencias internas o externas de palabras de control o de datos que entran y salen del dispositivo. Este acepta entradas del CPU del bus de direcciones y del bus de control, y en su turno transmite comandos a ambos grupos de control.
cs	Chip Select. Una señal baja en esta terminal de entrada habilita la comunicación entre el 8255A-5 y el CPU.
RD	Read. Una nivel bajo en esta terminal de entrada habilita al 8255A-5. para mandar datos o comandos de control al CPU a través del Bus de Datos. En esencia esta señal permite al CPU leer del 8255A-5.
WR	Write. Una señal baja en esta terminal de entrada habilita al CPU a escribir una palabra de control o de datos en el 8255A-5.
A0 y A1	Selección de puerto "0" y selección de puerto "1". Estas señales de entrada junto con las señales de RD y WR (Entradas), controlan la selección de uno de los tres puertos o de el puerto de control (o registro de las palabras de control). Estos se encuentran por lo general conectado en los Bits mas significativos del Bus de Direcciones.
RESET	Reset. Un nivel alto en esta entrada limpia los registros de control y todos los puertos A, B y C son puestos en la forma de entrada de datos.
GRUPO A y GRUPO B de CONTROL	La configuración funcional de cada puerto es definida a través del programa de la computadora que se está usando, esto es, que el CPU manda palabras de control al 8255A-5. Estas palabras de control contienen información a cerca de el modo en que se utilizará el puerto.  Los bloques de control ( Grupo A y Grupo B ) aceptan las señales de Read, Write y Control lógico, y reciben las palabras de control del Bus interno de datos y emiten comandos a cada uno de sus puertos correspondientes.  El grupo de control A, contiene a el puerto A y la parte alta de el puerto C. (PC7-PC4).  El grupo de control B, contiene a el puerto B y a la parte baja de el puerto C. (PC3-PC0).  La palabra de control solo puede ser escrita en el interior del 8255A-5.

## 5.2.4 TARJETA DE INTERFASE PARA PC DE 24 BITS.

Para comunicarse con dispositivos periféricos el 8088 utiliza puertos. Los puertos son áreas de memoria que el 8088 puede acceder utilizando instrucciones especiales de ensamblador. El 8088 tiene la capacidad de direccionar 65 356 puertos de hardware utilizando 1k de direcciones de I/O las cuales van de 00h a 3ffh, estas direcciones o localidades de memoria son accesibles tanto al microprocesador como a los dispositivos de I/O. Las instrucciones de ensamblador IN y OUT manejan la transferencia de información entre el 8088 y los puertos. Generalmente un dispositivo utiliza más de un puerto, uno para entrada, uno para salida y uno para describir su estado (Status).

Ahora lo que se necesita saber es que direcciones de I/O se pueden utilizar, ya que el PC tiene definidas algunas direcciones para los puertos con funciones o usos específicos. Los primeros 256 puertos (0-Ffh) están reservados para uso del System Board, como son los Timers (Temporizadores), controladores de interrupciones, coprocesadores, etc.

El resto de los puertos son usados para propósitos generales, como controlador de video, controlador de teclado, etc. Para poder realizar la construcción de la tarjeta es necesario saber como están contruidos los Slots o Ranuras de Expansión de la PC.

El slot Input/Output (Canal Entrada/Salida) es una ranura en el tablero principal de la pc, consiste en un bus o canal bidireccional de datos de 8 Bits, 20 líneas de dirección, 6 niveles de interrupción, líneas de control para lectura y escritura, líneas de reloj, 3 canales de DMA, líneas de poder (+5 v. y tierra). La Figura 5.11 muestra un esquema del canal Entrada/Salida.

La comunicación entre el CPU y los puertos de I/O se realiza a través de direcciones, ya que cada puerto y dispositivo conectado al CPU cuenta con una dirección. Por ejemplo; el puerto serial Com1 está localizado en la dirección 03FH. El manual técnico de referencia de la IBM especifica las direcciones de cada uno de los dispositivos conectados al CPU.

GND	B1	A1	IO CH CK
RESET	B2	A2	SD7
+ 5V.	B3	A3	SD6
IRQ2/	B4	A4	SD5
- 5V.	B5	A5	SD4
DRQ2	B6	A6	SD3
- 12 V.	B7	A7	SD2
OWS	B8	A8	SD1
+ 12 V.	B9	A9	SD0
GND	B10	A10	- IO CH RDY
- SMEMW	B11	A11	AEN
- SMEMR	B12	A12	SA19
-IOW	B13	A13	SA18
-IOR	B14	A14	SA17
-DACK3	B15	A15	SA16
DRQ3	B16	A16	SA15
-DACK1	B17	A17	SA14
DRQ1	B18	A18	SA13
-REFRESH	B19	A19	SA12
CLOCK	B20	A20	SA11
IRQ7	B21	A21	SA10
IRQ6	B22	A22	SA9
IRQ5	B23	A23	SA8
IRQ4	B24	A24	SA7
IRQ3	B25	A25	SA6
-DACK2	B26	A26	SA5
T/C	B27	A27	SA4
BALE	B28	A28	SA3
+ 5 V.	B29	A29	SA2
OSC.	B30	A30	SA1
GND	B31	A31	SA0

Figura 5.11.  
Canal I/O de  
ISA de una PC  
XT.



Se tiene a continuación la una descripción de las líneas del slot de expansión ISA (International Standard Architecture) mostrada en la Figura 5.11.

**SD0...SD7** Líneas de datos bidireccionales usadas para transmitir datos entre el microprocesador, memoria, puertos, discos, etc. La dirección de los datos depende de las señales de la micro -IOR (leer) y -IOW (escribir).

**SA0...SA19** Son salidas del BUS de direcciones del microprocesador provistas para direccionar diferentes partes de las tarjetas conectadas al BUS.

**OSC** Es una salida de 14.31818 Mhz usada internamente para el reloj de tiempo real, interfases RS232, etc. No tiene relación con la señal de CLOCK.

**CLOCK** Es una salida de la frecuencia que usa el micro.

**RESET** Es una salida provista por el mecanismo interno de reset para resetear a las tarjetas conectadas al BUS.

**BALE** Es una salida del controlador del BUS (8088) usada para indicar cuando las señales A0..A19 son correctas. Esta señal se usa para sincronizar las direcciones con los datos.

**I/O CH CK** Es una entrada para reportar, al micro, una condición de error sobre el BUS que atañe a la interface conectada al BUS. Produce una interrupción del micro del más alto nivel (NMI).

**I/O CH RDY** Es una salida usada para extender el ciclo de espera del micro sobre una tarjeta conectada al BUS (Wait State 1,2,3,...).

**IRQ2...IRQ7** Entradas de interrupción al micro. Como el micro tiene una sola entrada de interrupción se le adiciona un controlador que posee 8 entradas, de las cuales 2 ya están usadas en la tarjeta madre (IRQ0 Y IRQ1). Se utilizan para informar al micro que requerimos su atención para pedirle o mandarle datos ejecutando un subprograma específico a cada IQR.

**IOR** Salida sincronizada con los datos SD0...SD7 para su ingreso al micro. Solo para puertos.

**IOW** Salida sincronizada con los datos SD0...SD7 para su egreso del micro. Sólo para puertos.

**SMEMW-SMEMR** Ídem anteriores, pero para direccionar memoria.

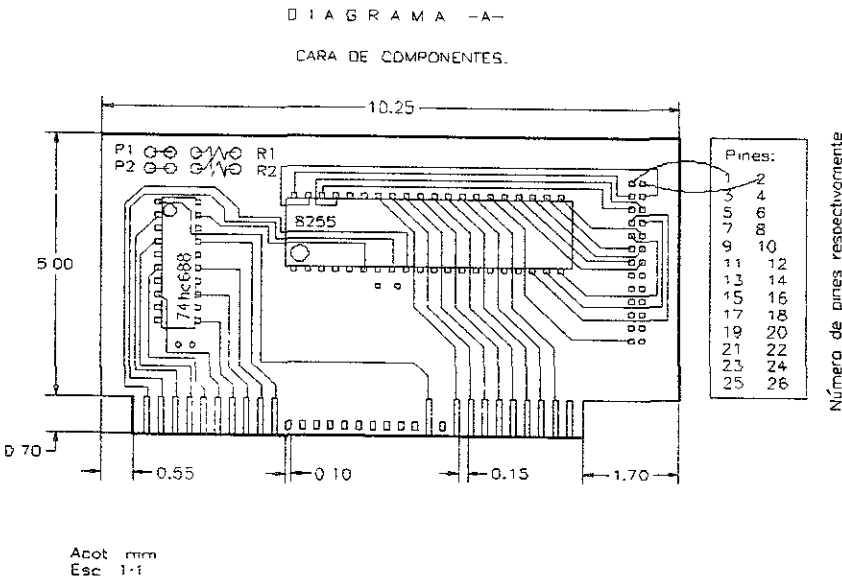
**DRQ1..DRQ3** Entradas para pedir un ciclo de DMA (Acceso directo a memoria), el método más rápido de acceso a memoria.

**DACK0..DACK3** Salida del 8253 (Controlador DMA) para el reconocimiento de un ciclo DMA.

**AEN** Señal de salida que indica, en nivel bajo (0 volts), la dirección válida de acceso a memoria o port a través del BUS. En nivel alto (5 volts), indica que se está realizando un ciclo DMA.

**TC** Salida que indica la terminación de un ciclo DMA; ya sea de un bloque o de un carácter.

La Figura 5.12 representa la distribución de los componentes en la Tarjeta de Interfase.



**Figura 5.12.**  
**Tarjeta de**  
**interfase.**



de Interfase se maneja a través de comandos de control enviado por medio de instrucciones en diversos lenguajes como: basic, pascal, c, prólog, entre otros. Estos comandos sirven para programar a los puertos en sus distintas modalidades (ver tabla 5.4), así como para la recepción y el envío de datos desde la computadora hacia los dispositivos externos. La tarjeta de Interfase debe ser insertada en una ranura de expansión o slot dentro del gabinete de la computadora para lo cual deben seguirse los siguientes pasos:

- 1.- Apagar y desconectar de la toma de corriente a la PC.
- 2.- Abrir el gabinete de la PC.
- 3.- Localizar una ranura o slot desocupado.
- 4.- Retirar la tira metálica que protege a la ranura del exterior.
- 5.- Conectar el cable plano de 26 vías en la tira de pines de la tarjeta de interfase.
- 6.- Insertar la tarjeta de interfase en la ranura seleccionada, con el lado de los componentes situado de modo similar a las demás tarjetas existentes.
- 7.- Introducir el extremo libre del cable plano hacia la parte posterior de la PC a través del hueco de la tira metálica anteriormente retirada.
- 8.- Colocar nuevamente la tira metálica citada, si es posible hacerlo sin maltratar el cable plano; de otro modo dejar el hueco.
- 9.- Cerrar el gabinete y probar la interfase.

**TABLA 5.4. Descripción de los hilos de la tira de doble de pines.**

PUERTO A.	Pines 1 a 8 Líneas	A0 a A7
PUERTO B.	Pines 9 a 16 Líneas	B0 a B7
PUERTO C.	Pines 17 a 24 Líneas	C0 a C7
+ 5 V.	Pin 25 (corriente de 100/200 mA)	
Tierra	Pin 26 (limitar corriente 100 mA)	

Para el manejo de circuitos de potencia es conveniente emplear optoacopladores para prevenir daños a la computadora o introducción de ruidos.

Ahora bien, desde Quick Basic (lenguaje de programación) se puede hacer uso de los puertos con las instrucciones OUT e INP (ver tabla 5.4). En el caso de la interfase estas

instrucciones se utilizan para programar su funcionamiento y además para enviar o recibir señales. Para aclarar más este punto se dan a continuación algunos ejemplos de programación de entrada y salida de datos.

Ejemplo 1.- Definir los puertos A y B como salidas; el puerto C como entrada.

OUT 771,137

En donde 771 es la dirección del registro de control, con Pte 1 y Pte 2 abiertos, y 137 es el valor que define las funciones de los puertos A,B,C

Ejemplo 2.- Definir al puerto A como salida; al puerto B como entrada; finalmente, al puerto C en su parte superior (bits 4 a 7) como entrada y en su parte inferior (bits 0 a 3) como salida.

OUT 775,138

En donde 775 es la dirección del registro del control con Pte 1 cerrado y Pte 2 abierto.

Ejemplo 3.- Enviar un dato a un puerto definido como salida.

OUT 768,63

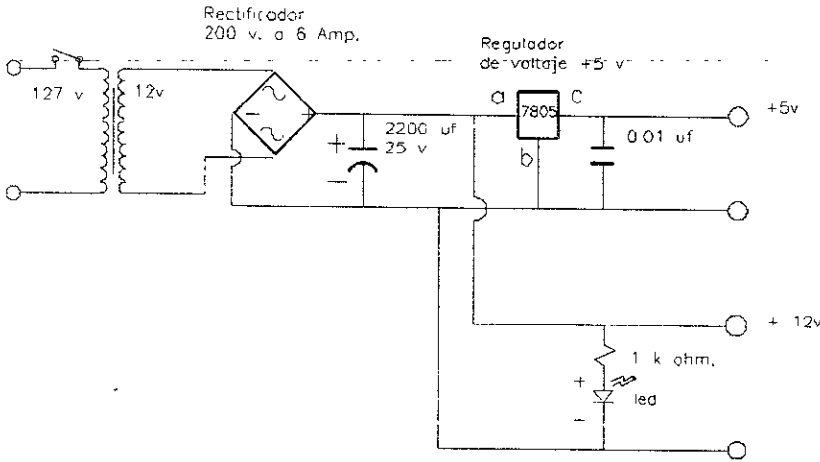
En donde 768 es la dirección del puerto A y 63 un valor que saldrá por las líneas A0 a A7 en forma de código binario Es decir 00111111.

Ejemplo 4.- Leer un dato de un puerto definido como entrada.

LET Z = INP(770)

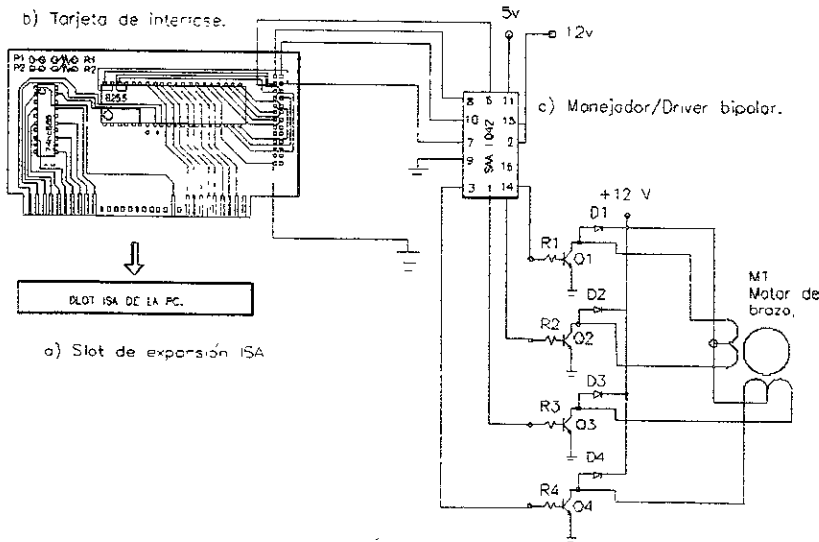
En donde INP es la instrucción de lectura de un puerto, 770 es la dirección del puerto c y LET Z es la instrucción que asigna a una variables el resultado de la lectura.

Después de que se trataron los principios de funcionamiento de los motores, drives, etc. Ahora se presenta la aplicación general en donde se logra integrar y describir la aplicación para controlar un motor, las partes que forman parte de la aplicación son: una fuente de poder, una tarjeta de interfase, dos manejadores(driver), dos motores, ocho transistores de potencia, se empezará por describir la fuente de poder.



**Figura 5.14.**  
Fuente de poder para alimentar los motores del robot manipulador.

La Figura 5.14 muestra esquemáticamente la fuente de poder que alimenta a los motores y etapas de potencia con un transformador de 5 Amp con tapa central. Debido a que cada motor consume 1.5 Amp. A 12 v. Son dos motores, por lo tanto se requieren de  $2 \times 1,5 \text{ Amp.} = 3.0 \text{ Amp}$  y se tiene un excedente de amperaje para la alimentación de las etapas de potencia. Se puede observar que la fuente suministra +5 v regulados que alimentará a los manejadores (Drives).



**Figura 5.15.**  
Diagrama que representa la aplicación completa para el motor M1.

En la Figura 5.15 se presenta la aplicación completa que permite el control de el motor M1 que es un motor Step-Syn. Type 103-771-1242. 12 v. A 1 5 Amp. Con un ángulo de paso de 1.8° grados/paso. Los transistores Q1,Q,2,Q3,Q4 alimentan las bobinas del motor con un amperaje de hasta 3 Amp estos son del tipo TIP 121. Las resistencias R1,R2,R3,R4 son de 4k7 ohms.

El manejador(driver) envía hasta 500 mA a sus salidas para excitar a los transistores y hacer que conduzcan. El otro manejador que controla el motor M2 debe tener una configuración similar al del motor M1. Con la finalidad de evitar sobrecalentamiento en los transistores TIP 121, éstos deben ir montados cada uno en un disipador de calor.

La tarjeta es comandada desde un programa de control que será el que le envíe la información ya procesada en forma de pulsos a los manejadores y éstos generarán el campo giratorio aparente necesario para dar movimiento a los motores.

### 5.3 PROGRAMA DE CONTROL DEL ROBOT-MANIPULADOR DE 2 GDL.

En este capítulo se desarrolló el programa que permitirá coordinar y enviar la información ya procesada en forma de pulsos a los manejadores, el programa fue hecho con el lenguaje de programación lenguaje C++<sup>®</sup>, este lenguaje ofrece mucha flexibilidad para acceder a los puertos de la PC, enviar y recibir información a través de sus líneas de comunicación (bus), así como también, la facilidad de ser modificado para futuras mejoras.

De la Figura 5.0c el software (programa) que coordina el número y la duración de los pulsos enviados a los manejadores que controlan los motores M1 y M2 se presenta en la figura 5.16. Las características del programa son;

- a) El cuadro de diálogo (ver Figura 5.2) permite enviar pulsos a los elementos manejadores y estos pulsos van registrándose en archivos.

- b) Otra característica importante es la capacidad de leer un archivo de texto en donde se han introducido manualmente los valores resultados de la solución de la ecuación que gobierna la cinemática del robot con Mathematica<sup>®</sup>, esto con el fin de alcanzar un punto de alguna trayectoria específica.
- c) También permite cambiar el ángulo de paso de  $1.8^\circ$  a  $0.9^\circ$  grados, es decir, de modo de Full step/paso completo a Half step/medio paso.
- d) El programa da la flexibilidad de operar en tiempo real los movimientos de los motores, modificar o editar antes de registrar la información.
- e) Envía al robot a una posición de "home" que representa la configuración no deformada.
- f) Se puede variar la velocidad de los motores en forma independiente permitiendo observar los movimientos lenta o rápidamente.



Figura 5.16.

#### Menú del programa de control

En la Figura 5.16 se muestra el menú desplegable "Control" que al ser oprimido permite seleccionar el submenú "cinemática Directa/Inversa." que despliega el cuadro de diálogo que se muestra en la Figura 5.17. El submenú "salir" termina una sesión y sale del programa, además el submenú de "Acerca" muestra los datos personales del creador del programa. El programa fue desarrollado en el ambiente de trabajo de windows 3.11.



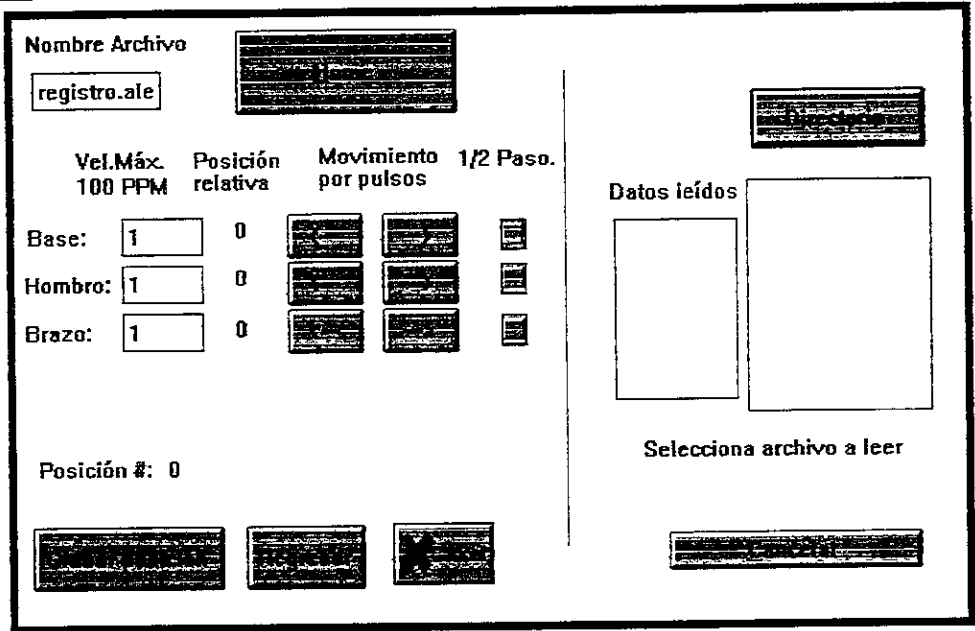



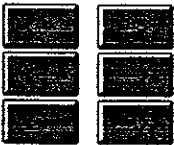

Figura 5.17.  
Cuadro de diálogo para la escritura y lectura de archivos.

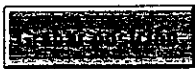
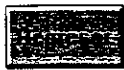



El cuadro de diálogo mostrado en la Figura 5.17 representa el módulo principal de operación del programa, este módulo se divide en dos partes; la primera parte está a la izquierda de la línea vertical, aquí se escriben los archivos con las secuencia de movimiento deseada. En la parte de la izquierda se leen los archivos y se ejecutan los movimientos del robot en forma secuencial.

Para dar una descripción más detallada de los controles que contiene el programa se creó la Tabla 5.5 la cual muestra la función y la forma de activar cada uno de los controles (botones, cuadro de edición, radio botón, etc.) del programa de control.

Tabla 5.5

Descripción de las funciones de los controles del programa de control.

Control	Descripción
<p><b>Nombre Archivo</b></p> <p><input type="text" value="registro.ale"/></p>	<p>Es importante teclear el nombre del archivo antes de iniciar una sesión de control de posición del robot.</p>
	<p>El botón de "Home" hace que el robot tome una posición predefinida que será la configuración no deformada, con el fin de poder aplicar la cinemática inversa y llevar al robot a una posición o punto de alguna trayectoria en particular.</p>
<p>Vel.Máx. Pc 100 PPM re</p> <p>Base: <input type="text" value="100"/></p> <p>Hombro: <input type="text" value="150"/></p> <p>Brazo: <input type="text" value="200"/></p>	<p>Los cuadros de edición que se presentan en la figura de la izquierda permiten teclear la velocidad deseada de rotación de cada motor por separado. Es decir, se pueden hacer mover los eslabones a velocidades diferentes.</p>
<p><b>Posición relativa</b></p> <p>1</p> <p>11</p> <p>15</p>	<p>Estas leyendas van registrando el número de pulsos enviados a los motores paso a paso que imprimen movimiento los eslabones de la base, hombro y brazo respectivamente.</p>
<p><b>Movimiento por pulsos</b></p> 	<p>Los pares de botones de arriba hacia abajo corresponden al control de pulsos de la base, hombro y brazo respectivamente, si se envía un pulso con algún botón de la columna derecha entonces el motor girará en sentido antihorario, y si se envía un pulso con alguno de los botones de la columna izquierda el motor girará en sentido horario al de las manecillas del reloj. Con esta implementación se puede ir controlando las posiciones del robot.</p>
<p><b>1/2 Paso.</b></p> 	<p>Los radio botones mostrados de arriba hacia abajo corresponden a la base, hombro y brazo respectivamente, el primero está encendido indicando que la base va ir avanzando a medio paso, es decir el ángulo de paso pasará de paso completo a medio paso, que es de 0.9° grados por cada pulso enviado. El segundo esta desactivado indicando que avanzará a paso completo en este caso 1.8° grados de rotación del eje del motor por cada pulso. El tercer radio botón hará que el motor paso a paso gire a medio</p>

<p>Posición #: 0</p> 	<p>Paso.</p> <p>El botón "Grabar posición" después de haber construido la secuencia deseada graba la secuencia en el archivo abierto, añadiendo cada secuencia posteriormente. La leyenda "Posición #." va indicando el número de posiciones registradas.</p>							
 	<p>El botón "regresar" cancela la posición anterior y permite rehacer la secuencia. El botón "Cancelar" ejecuta la salida del programa</p>							
 <p>Datos leídos</p> <table border="1" data-bbox="123 580 252 811"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>7</td></tr> </table> <p>registro.ale traye_2.ale traycc_1.ale</p> <p>Selecciona archivo a leer</p> 	1	0	0	1	5	5	7	<p>El botón con la leyenda de "Directorio" al ser oprimido despliega los nombres de los archivos existentes en el cuadro de lista de abajo, esto da la opción de elegir con el "mouse" el archivo deseado, posteriormente se despliegan los datos del archivo en el cuadro de lista de la izquierda ejecutándose el movimiento del robot al mismo tiempo. Es importante aclarar que los archivos pudieron ser grabados manualmente como se muestra en la Figura 5.25 desde algún procesador de textos, esto se hace con el fin de poder vaciar manualmente los datos provenientes de las soluciones arrojadas de la modelación matemática y simulación de la cinemática inversa realizada con el software de cálculo formal Mathematica®, que es en realidad el objetivo principal de este trabajo.</p> <p>El botón "Cancelar " cancela la opción anterior y sale del programa sin registrar cambio alguno</p>
1								
0								
0								
1								
5								
5								
7								

La parte de mayor importancia ahora es la de describir como se capturan los datos manualmente en los archivos

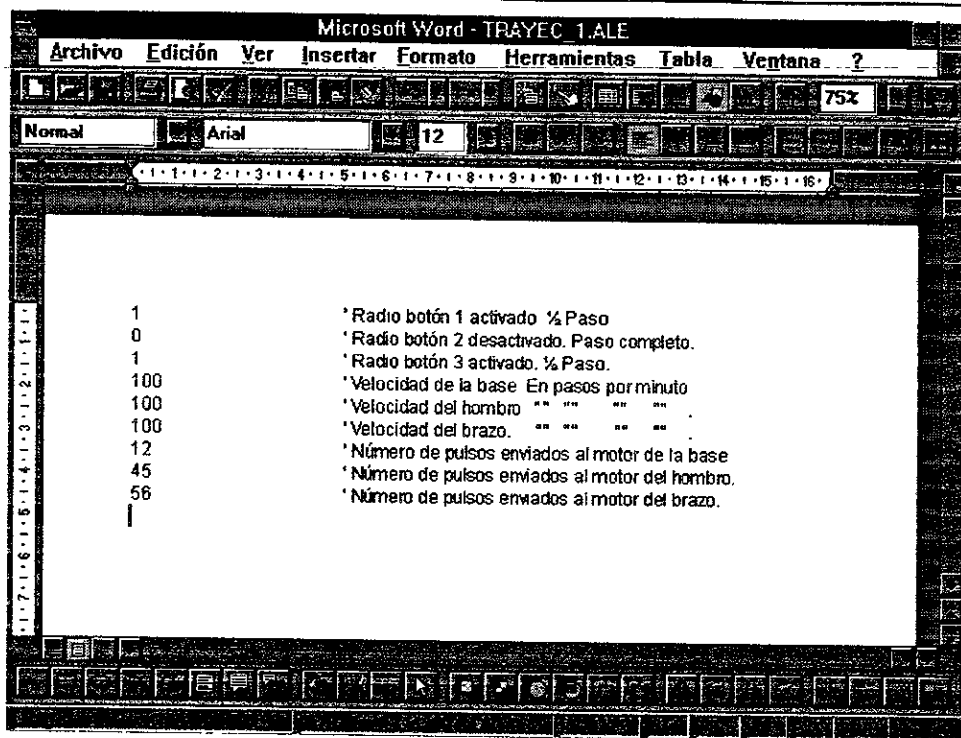


Figura 5.27.

Documento de Word. Introducción manual de datos en un archivo.

Se muestra en la Figura 5.27 el orden en que se deben introducir los datos que vienen de la solución de las ecuaciones con la ayuda del software de cálculo formal Mathematica®, que serán los datos del número de pulsos que recibirá cada motor. Los datos de paso completo y medio paso son dados por el usuario y también las velocidades. Sin embargo, cabe aclarar que los valores de las soluciones dados por Mathematica® están en forma de parámetros, y éstos deben ser convertidos a sus equivalentes en ángulos. Se logra la conversión utilizando la ecuación [5.3]. Cada grado representa 10 pulsos enviados a los motores correspondientes, Es decir, si tenemos  $\theta = 10^\circ$  entonces el programa de control enviará al motor correspondiente 100 pulsos, ya que la relación de engranaje es  $Re = 9$ , y la resolución por pulso es de  $0.1^\circ$  de rotación para el engrane que lleva acoplado el eslabón.

Sea  $P = (0, p_1, P_2, P_3) \in Q$ , está fijo en [1]

[5.3]

Donde:

$Q =$  Es el espacio vectorial de los Cuaterniones.

Sus componentes tienen la siguiente interpretación física:

$$P_o = \|P\| \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad [5.4]$$

$$P_v = \|P\| \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) v \quad [5.5]$$

Donde:

$\theta =$  Es el ángulo de rotación.

$v =$  Es un vector unitario del eje de rotación.

$P_v = T_v(0, p_1, P_2, P_3)$  Es la parte vectorial del Cuaternion  $P \in Q$ .

En las ecuaciones [4.7] y [4.8] se observa que si:

$$\|P\| = 1$$

entonces se obtienen los parámetros de Euler. Por lo tanto, de la ecuación [5.4] se puede obtener el ángulo de rotación;

$$\theta = \frac{(\cos^{-1} P_o)}{F.C} \quad [5.6]$$

Donde:

$F.C = \frac{\pi}{180^\circ}$  Es el factor de conversión de radianes a grados.

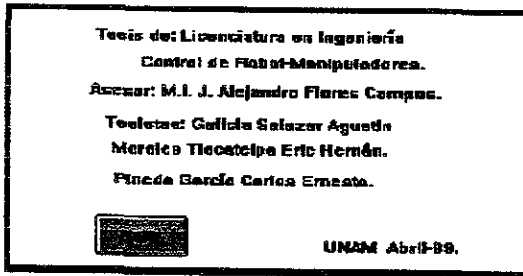


Figura 5.28.  
Cuadro de diálogo  
"Acerca".

El cuadro de diálogo de la Figura 5.28 muestra los datos del programador y hace referencia a los motivos de la creación del programa.

## VI. CONCLUSIONES.

---

### 6.- CONCLUSIONES

La culminación de este trabajo arrojó resultados satisfactorios con respecto a la Modelación Cinemática, sí se cumplió en la parte experimental. Además se concluyó lo siguiente:

**A)** Después de analizar los tres métodos ( Denavit-Hartenberg, Geométrico y Cuaterniones), para la resolución del problema de la Cinemática Inversa se optó por el método de Cuaterniones ya que simplificó los dos anteriores, con una mejor visualización de este problema [**Capítulo II**].

**B)** En lo que se refirió al seguimiento de rutas (Cinemática Inversa) como lo son las líneas rectas, arcos de circunferencia, etc., la trayectoria que realizó el órgano terminal del robot para llegar desde un punto a otro punto, fué poco fiable cuando se trató de distancias rectilíneas, ya que el órgano terminal del robot llegó al punto deseado, sin embargo la trayectoria que siguió no fue precisamente la de un segmento de rectilíneo, ya que realmente cuando siguió los puntos de dicha recta, el órgano terminal trazó rutas de picos para aproximarse al segmento de recta en cuestión.

**C)** Entre más lejanos fueron los puntos a alcanzar desde un punto de vista macroscópico, las trayectorias para llegar fueron diversas. Es necesario entonces que los puntos sean suficientemente cercanos para conseguir el efecto deseado, y esta cercanía estará en función de las actividades que el robot realice.

**Observación 1.** Una observación importante de la Modelación Cinemática es que todas las configuraciones deformadas parten de la configuración no deformada a la cual le hemos llamado "home", y el robot al alcanzar la configuración deformada (1) desde la configuración no deformada (home) físicamente tiene ahora la configuración deformada (1) y debe partir de ahí para poder llegar a la siguiente configuración. Por lo tanto, debemos realizar cálculos extras para determinar los ángulos relativos de los eslabones con respecto a la siguiente configuración a alcanzar.

## VI. CONCLUSIONES.

---

**Observación 2.** El control de el Robot se llevó a cabo a través de dispositivos electrónicos disponibles en el mercado. Los motores que se usaron son seminuevos y para la fabricación del robot algunas de sus piezas fueron partes de impresoras mecánicas. Se pueden seguir haciendo estudios experimentales que nos permitan llegar a un control más robusto, es decir, de mayor precisión y control.

**Observación 3.** El proyecto se deja preparado para las futuras modificaciones que surgieran. Para así poder tener un mejor desempeño profesional en la industria, investigación y docencia, creando grupos multidisciplinarios en primera instancia con los Ingenieros Eléctricos, Ingenieros Industriales, Biólogos, etc-; con la finalidad de desarrollar un tópico tan complejo y completo como es la Robótica, la cual como se mencionó en el capítulo 1, se encuentra en la 3ª generación de Robots. Es necesario mejorar en los siguientes aspectos:

- Más de dos grados de libertad (2 GDL).
- Planteamiento dinámico de las ecuaciones del movimiento debido a cargas de inercia, peso, etc.
- Evasión de obstáculos, visión artificial, inteligencia artificial, control difuso, etc.
- Elaborar prácticas para las asignaturas de Robótica, Instrumentación y Control, Sistemas de Manufactura Flexible, etc. , así como en las asignaturas afines.
- Definir una trayectoria real en base a polinomios.



## VII.- APÉNDICE "A".

### 7.- APÉNDICE "A"

#### TERMINOLOGÍA

**DETENT TORQUE.**- Es el máximo Torque que puede ser aplicado al eje del Motor paso a paso (PAP) cuando no se encuentra excitado, y sin causar un movimiento continuo de rotación. UNIDAD. mNm.

**DESVIACIÓN.**- El cambio en la posición del eje de un Motor paso a paso (PAP) desde una posición sin carga hasta cuando un cierto Torque es aplicado al eje, cuando el Motor paso a paso (PAP) se encuentra excitado, UNIDAD. grados.

**HOLDING TORQUE.**- El máximo Torque que puede ser aplicado al eje de un Motor paso a paso (PAP) cuando éste se encuentra excitado y sin causar un movimiento continuo de rotación. UNIDAD mNm.

**MÁXIMO PULL-IN RATE (Velocidad).** La máxima tasa de conmutación del interruptor electrónico a la cual el Motor paso a paso (PAP) descargado puede ser puesto en marcha sin perder un Paso. UNIDAD. Pasos/seg. o Rev/min.

**MÁXIMO PULL-OUT RATE (Velocidad).** La máxima tasa de conmutación del interruptor que un Motor paso a paso (PAP) sin carga puede seguir sin perder Pasos. UNIDAD. Pasos/seg o rpm.

**MÁXIMO TORQUE DE TRABAJO.**- El máximo Torque que puede ser obtenido del Motor paso a paso (PAP) UNIDAD. mNm.

**OVERSHOOT.** La máxima amplitud de oscilación alrededor de la última posición del Rotor después del último pulso de conmutación de interruptores electrónicos. UNIDAD. grados.

**PERMANENTE OVERSHOOT.** El número de Pasos que el Rotor se mueve después del último pulso de conmutación del interruptor electrónico. UNIDAD. grados.

**PHASE.**- Número de Fases del Motor paso a paso (PAP).

**PULL-IN RATE.** La máxima tasa de conmutación de interruptores en la cual un Motor paso a paso (PAP) con carga puede ponerse en marcha sin perder Pasos. UNIDAD. Pasos/seg. rpm.

**PULL-IN TORQUE.** El máximo Torque que puede ser aplicado al eje de un Motor paso a paso (PAP) cuando es puesto en marcha dentro de PULL-IN RATE. UNIDAD. mNm.

**PULL-OUT TORQUE .** El máximo Torque que puede ser aplicado al eje de un Motor paso a paso (PAP) cuando se mueve en dentro del PULL-OUT RATE. UNIDAD. mNm.

**STAR RANGE.**- Rango de tasas de conmutación de interruptores electrónicos entre las cuales el Motor paso a paso (PAP) puede ser puesto en marcha sin perder Pasos.

## VII.- APÉNDICE "A".

---

STEP ANGLE. El ángulo nominal que el eje del Motor paso a paso (PAP) da entre Pasos adyacentes. UNIDAD. grados.

SLEW RANGE. El rango de las tasas de conmutación de interruptores entre las cuales el Motor paso a paso (PAP) puede correr en una misma dirección y seguir esa tasa de conmutación de interruptores (Máxima cambio de velocidad), sin perder Pasos, pero no puede ser puesto en marcha, parar, o ir en sentido contrario.

*Nota: Temperaturas máximas de un Motor paso a paso (PAP).*

*- El incremento en la temperatura en un Motor paso a paso (PAP) depende de la potencia que éste consuma. Los Motor paso a paso (PAP) Unipolares operan por lo general con una tensión de alimentación baja y tiene una baja entrada de potencia, lo que limita el incremento de la temperatura en el Motor paso a paso (PAP). si los Motores paso a paso (PAP) con controles Unipolares funcionan con baja temperatura ambiental y una alta tensión de alimentación, puede ser permisible demandarles un alto Torque.*

*- Los Motores paso a paso (PAP) que utilizan un controlador Bipolar de corriente constante, funcionan con una baja tensión de alimentación y tienen una elevada demanda de potencia que causa un gran incremento de temperatura en el Motor paso a paso (PAP). Por lo que es recomendable montarlos en una base que funcione como disipador de calor o instalar un sistema de enfriamiento forzado.*

*A temperatura ambiente arriba de 25° C. el Torque del Motor paso a paso (PAP) Unipolar y Bipolar, decrece en un 2% por grado Kelvin, debido a cambios en la resistencia interna de las bobinas. También se da con bajas temperaturas ambientales.*

*La inestabilidad de los Motores paso a paso (PAP) puede ocurrir bajo ciertas circunstancias. El momento de inercia del Rotor y su carga, junto con el magnetismo remanente pueden provocar los siguientes comportamientos.*

*a.- Resonancia a bajas velocidades de Pasos.*

*b.- Variaciones alrededor de la velocidad requerida.*

*Las áreas inestables están indicadas por las líneas punteadas en las curvas de comportamiento que aparece en esta sección. La resonancia puede ser minimizada aplicando una correcta fuerza de fricción en el eje del rotor.*

VII.- APÉNDICE "B".

7.1.- APÉNDICE "B"

PROGRAMA DE MATEMÁTICA CINEMÁTICA INVERSA de un Manipulador de 2 GDL	
Comandos	Descripción
$\text{QuaterM}[P\_Q] := \{P[[1]] \ Q[[1]] - P[[2]] \ Q[[2]] - P[[3]] \ Q[[3]] - P[[4]] \ Q[[4]]\}$ $\text{QuaterCon}[P\_Q] := \{P[[1]] \ -P[[2]] \ -P[[3]] \ -P[[4]]\}$	<p>Ecuaciones paramétricas de rotaciones finitas. Operación multiplicación.</p> <p>El conjugado de <math>P \in Q</math>.</p>
$\text{Rotar}[P\_Q] := \text{QuaterM}[P, \text{QuaterM}[Q, \text{QuaterCon}[P]]]$	<p>La transformación de rotación.</p>
<b>--- CONFIGURACIÓN NO DEFORMADA ---</b>	
<pre> ClearAll[P,Q,rpnd]; e1 = {0,1,0,0}; l1 = 2; l2 = 2;  ang1=45; ang2=90;  P0=Cos[ang1/2 Degree]; P2=-Sin[ang1/2 Degree]; Q0=Cos[ang2/2 Degree]; Q2=-Sin[ang2/2 Degree]; P = {P0,0,P2,0}; Q = {Q0,0,Q2,0}; e11 =Rotar[P,e1]; e21 =Rotar[Q,e11]; b1 = l1*e11; b2 = l2*e21; rpnd = b1+b2;  gra=Graphics3D[ {Cuboid[{-7,-7,-5},{7,7,0]}}, {AbsoluteThickness[12.2],RGBColor[1,0,1], Line[{{0,0,0},{b1[[2]],b1[[3]],b1[[4]]}}]},  {AbsoluteThickness[8.2],RGBColor[0,1,1], Line[{{b1[[2]],b1[[3]],b1[[4]]},{rpnd[[2]],rpnd[[3]],rpnd[[4]]}}]}];  Show[gra, PlotRange-&gt;{{-3,3},{-3,3},{-1,6}}, Axes-&gt;True,AxesLabel-&gt;{"x","y","z"},AspectRatio-</pre>	<p>Limpiando variables. Definiendo la base global fija. Definición de las longitudes de los eslabones. Ángulos de la configuración no deformada. Definiendo los componentes de los parámetros P y Q.</p> <p>Rotando las bases locales con respecto a la base global fija.</p> <p>Generando la gráfica de la configuración no deformada. Línea del primer eslabón.</p> <p>Línea que representa al segundo eslabón.</p> <p>Mostrando la gráfica del robot de 2 grados de libertad. Atributos de la imagen.</p>

VII.- APÉNDICE "B".

<pre>&gt;1/1, ViewPoint-&gt;{0.008,-3.384,-0.041}];  Print ["CONFIGURACION NO DEFO R M A D A "]; Print["      "]; Print["          P= ",N[P],"      Ang1= ",N[ (360*ArcSin[ P[[3]] ])/Pi ] ]; Print["          Q= ",N[Q],"      Ang2= ",N[ (360*ArcSin[ Q[[3]] ])/Pi ] ]; Print["      Vector posición = " ,rpd//N];</pre>	<p>Imprimiendo texto con los valores de los ángulos, vector posición y parámetros.</p>
<p>----- CONFIGURACIÓN DEFORMADA -----</p>	
<pre>ClearAll[p0,p2,q0,q2]; p = {p0,0,p2,0}; q = {q0,0,q2,0}; a11 = Rotar[p,e11]; a21 = Rotar[q,e21]; d1=l1*a11; d2=l2*a21; rdd=Simplify[d1+d2]/N;</pre>	<p>Limpiando variables. Definiendo los parámetros p y q.</p> <p>Rotando las bases locales de las configuraciones deformadas. Construyendo la ecuación del vector posición.</p>
<p>----- GENERANDO TRAYECTORIA -----</p>	
<pre>ClearAll[sq1,sq2,raiz,x]; For[x=0,x&lt;4,x++, px=-2+x; pz=1.1+(x*.6); px1[x]=-2+x; pz1[x]=1.1+(x*0.6); raiz[x]=FindRoot[  {rdd[[2]]==px,rdd[[4]]==pz,p0^2+p2^2==1,q0^2+q2 ^2==1}, {p0,1},{p2,0},{q0,1},{q2,0}, MaxIterations-&gt;100]; sq1[x]={p0,p2}/.raiz[x]; sq2[x]={q0,q2}/.raiz[x]; ];</pre>	<p>Limpiando variables. Empezando ciclo for. Ecuación paramétrica de una recta.</p> <p>Comando para resolver los sistemas de ecuaciones no lineales del tipo polinomial.</p> <p>Cerrando el ciclo for.</p>
<p>----- RUTINA DE GRAFICACION -----</p>	
<pre>i=1; For[x=0,x&lt;4,x++, p0=sq1[x][1]; p2=sq1[x][2]; q0=sq2[x][1]; q2=sq2[x][2];</pre>	<p>inicializando i = 1. Abriendo ciclo for. Transfiriendo los valores de las soluciones a los componente de los parámetros de rotación</p>

## VII.- APÉNDICE "B".

<pre>punto[i]=Graphics3D[{   {PointSize[0.02],RGBColor[0,0,1],   Point[{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]}}, If[x&gt;0,{ AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,1],   Line[{{px1[x-1]/N,0,pz1[x-1]/N },{px1[x]/N ,0,pz1[x]/N }]},   {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,1],   Line[{{px1[x]/N,0,pz1[x]/N },{px1[x]/N ,0,pz1[x]/N }]} } ] }; gra2=Graphics3D[{ {AbsoluteThickness[12.2],RGBColor[1,0,1],   Line[{{0,0,0},{d1[[2]],d1[[3]],d1[[4]]}},   {AbsoluteThickness[8.2],RGBColor[0,1,1],   Line[{{d1[[2]],d1[[3]],d1[[4]]},{rdd[[2]],rdd[[3]], rdd[[4]]}},   {Cuboid[{-7,-7,-5},{7,7,0]} }, PlotRange-&gt;{{-3,3},{-3,3},{-1,6}},AspectRatio-&gt;1/1, Axes-&gt;True,AxesLabel-&gt;{"x","y","z"}, ViewPoint-&gt;{0.008,-3.384,-0.041} ]; Show[{gra2,gra,Table[punto[t],{t,1,i}]}(*,Parametric Plot3D[{-2+x,0,1.1+ x*0.6},{x, 0,4}]*) ]; Print[" CONFIGURACION DEFORM ADA --&gt; ",i]; Print["      "]; Print["      p= ",N[p],"      Ang1= ",N[ (360*ArcSin[ p[[3]] ])/Pi ]; Print["      q= ",N[q],"      Ang2= ",N[ (360*ArcSin[ q[[3]] ])/Pi ]; Print["      Vector posición = ",rdd//N ];i++;];</pre>	<p>Generando las gráficas de puntos. Graficando un arreglo de puntos. Bloque de condición.</p> <p>Generando las gráficas para la simulación de las configuraciones deformadas. Grafica una línea que representa al primer eslabón. Otra línea que representa al segundo eslabón.</p> <p>Dibuja la base del robot.</p> <p>Algunas opciones y argumentos para el despliegue de los gráficos.</p> <p>Muestra las gráficas en forma secuencial.</p> <p>Imprime texto con los valores de los ángulos rotados, parámetros y vectores posición de las configuraciones deformadas.</p> <p>Se cierra ciclo de Graficación. Termina el programa.</p>
---	--

## VII.- APÉNDICE "C".

### 7.2.- APÉNDICE "C"

#### PROGRAMA DE CONTROL.

<pre>#include &lt;dos.h&gt; #include &lt;owl.h&gt; #include &lt;dialog.h&gt; #include &lt;stdio.h&gt; #include &lt;string.h&gt; #include &lt;scrollba.h&gt; #include &lt;window.h&gt; #include &lt;windows.h&gt; #include &lt;edit.h&gt; #include &lt;static.h&gt; #include &lt;button.h&gt; #include &lt;iostream.h&gt; #include &lt;fstream.h&gt; #include "dialtest.h" #include "stdlib.h" #include "ctype.h" #include &lt;checkbox.h&gt; #include "tiempo.cpp"</pre>	<p>El siguiente listado que se muestra a la izquierda son todas las librerías necesarias para que el programa de control opere correctamente. En ellas se encuentran los comandos, directivas e instrucciones que permiten construir el programa ejecutable.</p> <p>Es importante mencionar que la programación es orientada a objetos, esta técnica de programación permite aplicar, construir e implementar con objetos (botones, ventanas, cuadro de listas, etc.) , y con ello la programación en ambiente windows fue desarrollada.</p>
<pre>const WORD ID_BUTTON1 = 109; const WORD MAX_TEXTLEN = 20;</pre>	<p>Se declara y define como WORD a las variables ID_BUTTON1=109 como constante; le da un número que identifica a el botón 1 y MAX_TEXLEN=20 que fija el número máximo de caracteres de 20.</p>
<pre>ofstream es; ifstream lec;</pre>	<p>Declaración de dos objetos para manipular archivos; "es" será el objeto de escritura de datos, y "lec" de lectura de datos desde un archivo.</p>
<pre>class TTestDialog : public Tdialog { public: int i,ii,iii,p1,p2,p3,nr,paso,Buf1,Buf2,Buf3; char</pre>	<p>Se declara una instancia llamada TTestDialog; y ésta nace heredando los atributos de la clase Tdialog que se encuentra en la librería de encabezado #include &lt;dialog.h&gt; para construir el objeto cuadro de diálogo, class es la instrucción para lograrlo.</p> <p>Public: permite declarar variables de carácter públicas.</p> <p>Prepara a variables de tipo entero; i,ii,iii,p1,p2,p3,nr,paso,Buf1,Buf2,Buf3;</p> <p>Prepara variables del tipo carácter.</p>

## VII.- APÉNDICE “C”.

<pre> Buffer1[5],Buffer2[5],Buffer3[5],Buffer11[5],Buff er22[5],Buffer33[5]; char Buffer44[20];  TTestDialog(PtWindowsObject AParent, LPSTR AName) TDialog(AParent, AName)  { i=0;ii=0;iii=0;p1=0;p2=0;p3=0;nr=0;paso=1;Buf 1=0;Buf2=0;Buf3=0;  outportb(771,128);  virtual void HandleButtonMsg(RTMessage Msg) = [ID_FIRST + ID_BUTTON];  virtual void HandleListBoxMsg(RTMessage Msg) = [ID_FIRST + ID_LISTBOX];  virtual void HandleButtonMsg31(RTMessage Msg) = [ID_FIRST + ID_BASE_IQZ];  virtual void HandleButtonMsg32(RTMessage Msg) = [ID_FIRST + ID_HOMBRO_IQZ]; </pre>	<pre> Buffer1[5],Buffer2[5],Buffer3[5], Buffer11[5],Buffer22[5],Buffer33[5]; char Buffer44[20];  Declara el constructor TTestDialog, éste se correrá cada vez que se ejecute el programa. Declarando las siguientes variables;  i=0;ii=0;iii=0;p1=0;p2=0;p3=0;nr=0;paso= 1;Buf1=0;Buf2=0;Buf3=0;  Esta instrucción programa la interfase para que sus tres puertos sean de salida de datos.  Declara la función virtual HandleButtonMsg(RTMessage Msg) con argumento que envía y recibe mensajes de windows (Cuando se oprime el botón izquierdo del ratón, cuando se redimensiona una ventana, cuando se actualiza algún datos, etc.) y procesa los mensajes del botón de “Home”.  Declara la función virtual HandleListBoxMsg(RTMessage Msg) maneja los mensajes del cuadro de lista de archivos.  Declara la función virtual HandleButtonMsg31(RTMessage Msg) que es la que se activa cuando es oprimido el botón de envío de señal al motor que mueve la base en sentido horario del manipulador. Nota: Es importante mencionar que el prototipo es de dos grados de libertad, y por lo tanto este botón quedará inhabilitado hasta aplicaciones futuras.  Declara la función virtual HandleButtonMsg32(RTMessage Msg) que procesa las señales enviadas al motor que mueve el hombro del robot- manipulador en sentido horario. </pre>
---	--

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> virtual void HandleButtonMsg33(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + ID_BRAZO_IZQ]; virtual void HandleButtonMsg41(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + ID_BASE_DER]; virtual void HandleButtonMsg42(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + ID_HOMBRO_DER]; virtual void HandleButtonMsg43(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + ID_BRAZO_DER]; virtual void HandleButtonGrabar(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + ID_GRABAR];  /* virtual void Checar1(RTMessage Msg)     = [ID_FIRST + 301]; */ }; </pre>	<p>Declara la función virtual HandleButtonMsg33(RTMessage Msg) que controla el envío de pulsos al motor que mueve el brazo en sentido horario del manipulador.</p>
<pre> class Tabout : public TDialog { public:     Tabout(PTWindowsObject AParent, LPSTR AName)     :TDialog(AParent, AName) {}; };  class TTestWindow : public TWindow { public:     // TEdit *Edit1, *Edit2;      TTestWindow(PTWindowsObject AParent, LPSTR ATitle);     virtual void CMTTest(RTMessage Msg)         = [CM_FIRST + CM_TEST];     virtual void CMTTest2(RTMessage Msg)         = [CM_FIRST + CM_TEST2];     virtual void CMTTest3(RTMessage Msg)         = [CM_FIRST + CM_TEST3] { CloseWindow(); }     virtual BOOL CanClose();     virtual void WMLButtonDown(RTMessage Msg)         = [WM_FIRST + WM_LBUTTONDOWN];     virtual void WMRButtonDown(RTMessage Msg)         = [WM_FIRST + WM_RBUTTONDOWN];     virtual void HandleButtonMsg(RTMessage Msg)         = [ID_FIRST + ID_BUTTON1];     /* virtual void HandleButtonMsg3(RTMessage Msg)         = [ID_FIRST + ID_BASE_IZQ]; */     virtual void Acerca(RTMessage Msg) </pre>	<p>Se define la clase Tabout como una clase derivada de Tdialog que permite construir los cuadros de diálogo necesarios para nuestra aplicación.</p> <p>Se declaran los procedimientos de los controles como son: los botones, los cuadros de lista, los radio botones, etc. Y estos controles se localizan en esta parte del programa.</p>



## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> = [CM_FIRST + CM_ACERCA]; };  class TTestApp : public TApplication { public:     TTestApp(LPSTR AName, HINSTANCE hInstance, HINSTANCE hPrevInstance,     LPSTR lpCmdLine, int nCmdShow) :     TApplication(AName, hInstance, hPrevInstance, lpCmdLine, nCmdShow) {};     virtual void InitMainWindow(), };  /*void TTestDialog::Checar1(RTMessage) {     if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 301)==1){         MessageBox(HWindow, "Checado", "RADIO BOTON 1.", MB_OK); } */  void TTestDialog::HandleButtonMsg(RTMessage) {      DlgDirList(HWindow,     "**.ale",ID_LISTBOX,NULL,NULL);      /* SendDlgItemMsg(ID_LISTBOX, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) nomm);     SendDlgItemMsg(ID_LISTBOX, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d1 );     SendDlgItemMsg(ID_LISTBOX, LB_ADDSTRING, 0, (LONG)"Item 7"); */ } </pre>	<p>Se construye la aplicación con una clase deriva de TApplication.</p> <p>Se define la tarea de la función HandleButtonMsg(RTMessage) que despliega en un cuadro de lista los nombres de los archivos existes con las secuencias de los movimientos registrados para el robot.</p>
<pre> /* void TTestDialog::HandleButtonMsg2(RTMessage) {     MessageBox(HWindow, "Salir", "SALIR...", MB_OK); } void TTestDialog::HandleButtonScroll(RTMessage){ char texto[15]; GetDlgItemText(HWindow, ID_SCROLL, texto, 15); MessageBox(HWindow, texto, "scroll", MB_OK); } */  void TTestDialog::HandleButtonMsg31(RTMessage) { p1=-i; SetDlgItemInt(HWindow, ID_BASE_POS, p1, True); GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL, Buffer1, 5); timer a(Buffer1); if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 301)==1){     outportb(768,7); </pre>	<p>Sin duda la parte más importante del programa es donde se generan todos los pulsos enviados a los motores del robot.</p> <p>El código del control de botón dirige cada vez que se pulsa, un pulso hacia el motor que mueve a la base del robot en sentido horario.</p>

## VII.- APÉNDICE "C".

```

outputb(768,0);          }
    outputb(768,255);
    a.run();
    outputb(768,0);
MessageBeep(0);
}

```

```

void TTestDialog::HandleButtonMsg32(RTMessage)
{
p2--ii;
SetDlgItemInt(HWindow, ID_HOMBRO_POS, p2,
True);
GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL,
Buffer2,5);
timer a(Buffer2);
if( IsDlgButtonChecked(HWindow,
302)==1){outputb(888,1);}
    outputb(768,255);
    a.run();
    outputb(768,0);
MessageBeep(0);          }

```

```

void TTestDialog::HandleButtonMsg33(RTMessage)
{
p3--iii;
SetDlgItemInt(HWindow, ID_BRAZO_POS, p3,
True);
GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL,
Buffer3,5);
timer a(Buffer3);
if( IsDlgButtonChecked(HWindow,
303)==1){outputb(888,1);}
    outputb(768,255);
    a.run();
    outputb(768,0);
MessageBeep(0);          }

```

```

void TTestDialog::HandleButtonMsg41(RTMessage)
{
p1=++i;
SetDlgItemInt(HWindow, ID_BASE_POS, p1, True);
GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL,
Buffer11,5);
timer a(Buffer11);
if( IsDlgButtonChecked(HWindow,
301)==1){outputb(888,1);}
    outputb(768,255);
    a.run();
    outputb(768,0);
MessageBeep(0);          }

```

```

void TTestDialog::HandleButtonMsg42(RTMessage)
{
~

```

Envía pulsos al motor que mueve al hombro del robot.

Envía información al motor que mueve el brazo del robot en sentido antihorario.

Envía información a la base del robot que girará en sentido horario al de las manecillas del reloj, cabe aclarar que por cada pulso enviado se actualizan los contadores que permiten tener un seguimiento de los pulsos dados. Además de un pitido por pulso, esto es con el fin de llamar la atención del usuario.

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> p2=++i; SetDlgItemInt(HWindow, ID_HOMBRO_POS, p2, True); GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL, Buffer22,5); timer a(Buffer22); if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 301)==1){outportb(888,1);}     outportb(768,255),     a.run();     outportb(768,0); MessageBeep(0);         }  void TTestDialog::HandleButtonMsg43(RTMessage) { p3=++iii; SetDlgItemInt(HWindow, ID_BRAZO_POS, p3, True); GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL, Buffer33,5); timer a(Buffer33); if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 301)==1){outportb(888,1);}     outportb(768,255);     a.run();     outportb(768,0); MessageBeep(0);         } </pre>	<p>Envía información al motor pero éste hace que gire en sentido horario al hombro del robot.</p> <p>Envía información al motor que imprime movimiento al brazo del robot, en sentido horario.</p>
<pre> void TTestDialog::HandleButtonGrabar(RTMessage) {     char BufferR[300];      if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 301)==1){Buf1=1;}     if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 302)==1){Buf2=1;}     if( IsDlgButtonChecked(HWindow, 303)==1){Buf3=1;}          GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE_VEL, Buffer1,5);         GetDlgItemText(HWindow, ID_HOMBRO_VEL, Buffer2,5);         GetDlgItemText(HWindow, ID_BRAZO_VEL, Buffer3,5);         GetDlgItemText(HWindow, ID_BASE POS, </pre>	<p>El código del botón grabar se muestra aquí, permite registrar en archivos las secuencias ejecutadas por el robot permitiendo ejecutarlas cuantas veces se desee. Esta característica da un amplia gama de posibilidades de repetición para estudios posteriores de los movimientos del robot.</p>

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> Buffer11,5);     GetDlgItemText(HWindow, ID_HOMBRO_POS,Buffer22,5);     GetDlgItemText(HWindow, ID_BRAZO_POS, Buffer33,5);     GetDlgItemText(HWindow, ID_NOMBRE_ARC,Buffer44,20);  strcpy(BufferR,"          Velocidad Posición"); strcat(BufferR,"\n"); strcat(BufferR,"BASE... "); strcat(BufferR,Buffer1); strcat(BufferR," "); strcat(BufferR,Buffer11); strcat(BufferR,"\n"); strcat(BufferR,"HOMBRO. "); strcat(BufferR,Buffer2); strcat(BufferR," "); strcat(BufferR,Buffer22); strcat(BufferR,"\n"); strcat(BufferR,"BRAZO.. "); strcat(BufferR,Buffer3); strcat(BufferR," "); strcat(BufferR,Buffer33); strcat(BufferR,"\n"); strcat(BufferR,Buffer44);  if(MessageBox(HWindow,BufferR,"Esta bien ? ", MB_YESNO MB_ICONQUESTION)==IDYES){  if(paso==1){     es.open(Buffer44,ios::out);     es &lt;&lt;Buf1;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buf2;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buf3;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer1;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer2;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer3;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer11;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer22;     es &lt;&lt;"\n";     es &lt;&lt;Buffer33;     es &lt;&lt;"\n";     es.close();     paso=0; </pre>	<p>Almacena los datos a grabar en un cuadro de mensaje.</p> <p>Este cuadro de mensaje aparece para la confirmación de que los datos a registrarse son correctos.</p> <p>Los datos son grabados en el disco duro.</p>
---	--

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> } else es.open(Buffer44,ios::app); es &lt;&lt;Buf1; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buf2; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buf3; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer1; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer2; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer3; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer11; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer22; es &lt;&lt;"\n"; es &lt;&lt;Buffer33; es &lt;&lt;"\n"; es.close();  Buf1=0;Buf2=0;Buf3=0; int pnr =++nr; SetDlgItemInt(HWindow,ID_POS_NUM, pnr, True); }  else MessageBox(HWindow,"NO","Selecciono", MB_OK); //MB_ICONEXCLAMATION); IDNO } </pre>	<p>El archivo se abre para el registro secuencial de datos.</p> <p>Se actualiza el número posiciones del robot.</p>
<pre> /*void TTestDialog::HandleButtonMsg51(RTMessage) { char Buffer1[10]; //strcpy(num1,num); GetDlgItemText (HWindow, ID_BASE_VEL, Buffer1, 80);  // SetDlgItemText(HWindow,ID_BASE_POS,Buffer); MessageBox(HWindow,Buffer1,"Velocidad actual", MB_OK);  // SetDlgItemInt(HWindow,ID_BASE_POS, -i, True); } */  void TTestDialog::HandleListBoxMsg(RTMessage Msg) </pre>	<p>Esta es la parte del programa para el botón leer. El archivo se encarga de dar lectura al archivo seleccionado, además ejecuta los movimientos del robot en tiempo real.</p>

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> { DWORD idx; char SelectedText[10]; char d1[5],d2[5],d3[5],d4[5],d5[5],d6[5],d7[5],d8[5],d9[5];  if( Msg.LP.Hi == LBN_DBLCLK ) {     idx = SendDlgItemMsg(ID_LISTBOX, LB_GETCURSEL, 0, 0L);     SendDlgItemMsg(ID_LISTBOX, LB_GETTEXT, (WORD)idx, (DWORD)SelectedText);     MessageBox(HWindow, SelectedText, "Seleccionaste ", MB_OK);      lec.open(SelectedText,ios::in);  if (lec.bad()){     MessageBox(HWindow, "Error", "De lectura..", MB_OK);     return; }  while(!lec.eof()){     lec &gt;&gt;d1;     lec &gt;&gt;d2;     lec &gt;&gt;d3;     lec &gt;&gt;d4;     lec &gt;&gt;d5;     lec &gt;&gt;d6;     lec &gt;&gt;d7;     lec &gt;&gt;d8;     lec &gt;&gt;d9;  for(int r=1;r&lt;=atoi(d7);r++){     timer a(d4),b(d4);     outportb(768,255);     a.run();     //for(long r=1;r&lt;=4500;r++){};     outportb(768,0);     b.run(); };  //MessageBox(HWindow, d1, "Datos leídos", MB_OK); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d1 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d2 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d3 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d4 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d5 ); </pre>	<p>Presenta también una actualización por display de los datos leídos al tiempo en que se van ejecutando los movimientos.</p> <p>Despliega los datos leídos en el cuadro de lista.</p> <p>Da lectura de los datos directa del disco.</p> <p>Envía la información a los motores.</p> <p>Despliega los datos leídos en el cuadro de lista.</p>
--	--

## VII.- APÉNDICE "C".

<pre> SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d6 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d7 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d8 ); SendDlgItemMsg(135, LB_ADDSTRING, 0, (LONG) d9 );  };     lec.close(); } } </pre>	<p>Se cierra el archivo.</p>
<pre> BOOL TTestWindow::CanClose() { return MessageBox(HWindow, "Desea salir", "Desea salir ? ", MB_YESNO   MB_ICONQUESTION) == IDYES; } </pre>	<p>Función que procesa la salida del programa sin realizar cambios.</p>
<pre> void TTestWindow::CMTest(RTMessage) { GetApplication()-&gt;ExecDialog(new TTestDialog(this,"DIAL_1")); }  void TTestWindow::CMTest2(RTMessage) { GetApplication()-&gt;ExecDialog(new TTestDialog(this,"TESTDIALOG")); }  void TTestWindow::Acerca(RTMessage) { GetApplication()-&gt;ExecDialog(new TTestDialog(this,"DIAL_2")); } </pre>	<p>Estas funciones son las que permiten el llamado de los cuadros de diálogo con que cuenta el programa. Se conectan recibiendo y enviando información al y desde los cuadro de diálogo al programa.</p>
<pre> void TTestApp :InitMainWindow() { MainWindow = new TTestWindow(NULL, Name); } </pre>	<p>Llama al constructor de la ventana principal y la despliega.</p>
<pre> int PASCAL WinMain(HINSTANCE hInstance, HINSTANCE hPrevInstance, LPSTR lpCmdLine, int nCmdShow) { TTestApp TestApp("CONTROL DE ROBOT- MANIPULADOR", hInstance, hPrevInstance, lpCmdLine, nCmdShow); TestApp.nCmdShow = SW_SHOWMAXIMIZED; TestApp.Run(); return (TestApp.Status); } </pre>	<p>El constructor de la aplicación total y que lleva el control global del recibo y despacho de señales a través de los canales de comunicación con el programa y windows.</p>

## VII.- BIBLIOGRAFÍA.

---

### 7.3.- BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Jiménez Eusebio. Simulación de un sistema de manufactura con obstáculo en línea de producción.  
Tesis de Grado de Maestría. DEPMI-UNAM. 1998.
- [2] Jiménez Eusebio, Reyes Avila Luis, Roberto Martínez. El Sistema CHEVOTRONIC IV. Reporte de Investigación 5. DEPMI-UNAM. Depto. De Mecánica. 1997. (Inédito).
- [3] Jiménez Eusebio, Reyes Avila Luis, Luciano Vela Martínez. Síntesis Analítica de un Mecanismo de 4 Barras. Reporte de la Materia Análisis y Síntesis de Mecanismos. DEPMI-UNAM. Depto. De Mecánica. 1997.
- [4] Reyes Ávila Luis. Quaternions: Une representation parametrique systematique des rotations finies. Rapports de Recherche, INRIA. Octubre 1990.
- [5] Jiménez Eusebio, Reyes Ávila Luis, Flores Campos J. Alejandro. Diseño Geométrico del Módulo de Ensamble. Reporte de Investigación # 20. DEPMI-UNAM. Depto. De Mecánica. 1998. (Inédito).
- [6] D. Raker y H. Rice. AutoCad versión 12. PPH Prentice Hall.
- [7] Jiménez Eusebio, Reyes Ávila Luis. Las Ecuaciones de Forma. Reporte de Investigación # 18. DEPMI-UNAM. Depto. De Mecánica. 1998. (Inédito).
- [8] Cameron Smith an Nacy Blachman. The Mathematica Graphics Guidebook.. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1995.
- [9] Ilan Vardi. Computational Recreations in Mathematica. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1991.
- [10] Jean-Pierre Merlet. Les robots parallèles. Hermes, Paris, 1990.



## VII.- BIBLIOGRAFÍA.

---

- [11] Jack C. K. Chou. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 8, No. 1, February 1992. "Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations".
- [12] Stephen Wolfram. Mathematica a system for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1988.
- [13] Stephen Wolfram. Mathematica Reference Guide. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1992.
- [14] Keit J. Devlin. Fundamentals of contemporary set theory. Springer-Verlag. 1979.
- [15] JIM COX. Motores eléctricos biblioteca práctica del taller. GG/México Editorial Gustavo Gili, S.A. de C.V. 1995.
- [16] Técnicas de automatización Ingeniería en movimiento. Superior electric Bulletin MD4-295 Printed in U.S.A
- [17] Warner electric. Linear motion and electronics division.
- [18] Revista saber electrónica no.9,10,13 año 6. Editorial: América s.a. de c.v. Lucio Blanco No. 435. Azcapotzalco, MÉXICO, D.F.
- [19] Revista: montajes electrónicos para pc. no. 9 editorial: F&G Editores, S.A de C.V. Plaza República del Ecuador 2, 28016 Madrid, España.
- [20] James L. Fuller. Robotics: Introduction, programming and projects. 1991.
- [21] Ángulo Usátegui Jose M<sup>a</sup>. Robótica práctica: Tecnología y aplicaciones. 1986.
- [22] Ángulo Usátegui Jose M<sup>a</sup>. Curso de robótica. 1985.
- [23] Kost Gerald j. & Welsh Judith. Handbook of clinical automation robotics and applications. 1996.

## VII.- BIBLIOGRAFÍA.

---

- [24] D. A. Bradley. Mechatronics: Electronics in product and processes. 1991.
- [25] Mc Cloy Don, Michael Harris. Robótica, una introducción. 1992.
- [26] Robert E. Parkin. Applied Robotic Analysis. 1984.
- [27] Cárdenas José Armando. Diseño de máquinas. 1980.
- [28] Pollone Guiseppe. Engranajes, 1985.
- [29] Hajine Saorayana. Una visión a la robótica (diseño de robots). 1990.
- [30] López Pierre. Introducción a la robótica I: Enseñanza, investigación y desarrollo. 1987.
- [31] López Pierre. Introducción a la robótica II: Comunicación hombre-máquina, programación y control.
- [32] Neil Shmitt M. A fondo: Robótica y sistemas automáticos. 1988.
- [33] Fu King S. Robótica: Control, detección, visión e inteligencia. Mc Graw Hill, España. 1988.