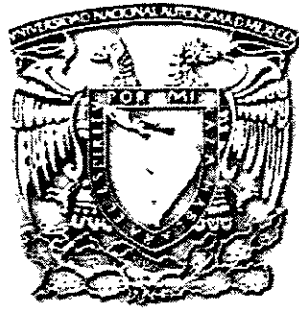


22
Universidad Nacional Autónoma de México



Facultad de Ingeniería

Refracción del oleaje en presencia de corrientes
y variaciones del fondo marino

T E S I S

Como requisito para obtener el título de

Ingeniero Civil

Presenta

Gabriel Díaz Hernández

Director de Tesis

Dr. Rodolfo Silva Casarín

México D.F.
Ciudad Universitaria

280213
Junio de 2000



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central

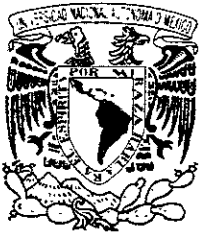


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTIT/202/99

Señor **GABRIEL DIAZ HERNANDEZ,**
Presente .

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. RODOLFO SILVA CASARIN**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

“REFRACCION DEL OLAJE EN PRESENCIA DE CORRIENTES Y VARIACIONES DEL FONDO MARINO”

Introducción

1. **Fundamentos.**
 2. **Teoría de ondas superficiales.**
 3. **Modelo y propiedades de la transformación del oleaje.**
 4. **Modelo de refracción del oleaje a través de análisis computacional.**
 5. **Aplicación del modelo refract.**
- Conclusiones y futuras líneas de trabajo.**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”

México, D.F., a 27 de agosto de 1999.

EL DIRECTOR


M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB/GMP/ser

*Dedico este trabajo a mi Madre,
Cecilia Díaz por mostrarme los valores de la vida y
por apoyarme en todo momento y circunstancia.*

*A mis Abuelos Carlos Díaz y Luz Hernández
por su cariño y por compartir su sabiduría y experiencias.*

*A mis Tíos; Carlos, César, Pedro y Roberto
por transmitirme su gran apoyo incondicional.*

*A mis Tías; Eva, Graciela, María Luisa y Silvia
por su enseñanza y amor.*

*A mis primos; Carlos, Roberto, Daniel, Marcos, Fernando, Rodrigo, Claudia
y Luisito por ser los mejores amigos.*

*A mis grandes amigos; Eduardo Veyán, Federico Robles, Gerardo Horta,
Jaime Romero y Víctor García por ser mi gran apoyo en las buenas y en las
malas (Hail!!).*

Agradecimientos

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, y a la Facultad de Ingeniería por las grandes experiencias y conocimientos transmitidos a través de sus excelentes maestros a lo largo de toda mi carrera.

Agradezco especialmente al Dr. Rodolfo Silva por haberme dado la oportunidad de colaborar dentro del Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM, apoyándome en la elaboración de esta Tesis y sobre todo por mostrarme el verdadero significado de ser un profesionalista en toda la extensión de la palabra.

Agradezco a mis compañeros y amigos de la Facultad de Ingeniería por su apoyo, compañía y espíritu de superación.

Agradezco al Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM; Adrián, Adolfo, Berenice, Edgar, Francisco, Georges, Juan Carlos, Juan Manuel, Martha, Porfirio y Roberto por su gran apoyo y amistad día a día.

Indice

INDICE	2
Lista de símbolos	6
Lista de figuras	8
INTRODUCCIÓN	11
Objetivos	12
Descripción y organización del estudio	13
Capítulo 1. Fundamentos	13
Capítulo 2. Teoría de ondas superficiales	13
Capítulo 3. Propiedades de la transformación del oleaje	13
Capítulo 4. Modelo de refracción del oleaje a través de análisis computacional	13
Capítulo 5. Aplicación del modelo REFRACT	13
CAPÍTULO 1.	14
FUNDAMENTOS	14
1.1 Introducción	15
1.2 Diferentes tipos de movimientos de un fluido	16
1.2.1 Movimiento de traslación	18
1.2.2 Movimiento de Rotación	18
1.2 Fuerzas aplicadas	18
1.2.1 Fuerzas internas y externas	18
1.2.2 Fuerzas de gravedad	19
1.2.3 Fuerzas de presión	19
1.2.4 Fuerzas cortantes	21
1.3 Las ecuaciones de movimiento de translación	22
1.4 Definición del potencial de velocidades	24
1.5 La ecuación de Bernoulli	25
1.6 La ecuación de Laplace	26
CAPÍTULO 2.	29
TEORÍA DE ONDAS SUPERFICIALES	29
2.1 Introducción	30

2.2 Características y terminología del oleaje	30
2.3 Ecuaciones del movimiento	32
2.4 Teorías de ondas	33
2.4.1 Teoría lineal o teoría de ondas de pequeña amplitud	33
2.4.2 Teoría de ondas de Stokes	33
2.4.3 Teoría Cnoidal de ondas	34
2.4.4 Teoría de ondas de función de corrientes	35
2.4.5 Teoría de onda estacionaria	35
2.4.6 Aplicación de las teorías de onda	36
2.5 Problemas de condiciones de frontera	38
2.5.1 La ecuación diferencial de gobierno	38
2.6 Condiciones de frontera	40
2.6.1 Condición cinemática de frontera	40
2.6.2 Condición de frontera del fondo (CFF)	40
2.6.3 Condición cinemática de frontera de superficie libre (CCFSL)	42
2.6.4 Condición dinámica de frontera de superficie libre (CDFSL)	42
2.6.5 Condiciones para fronteras "sensibles"	43
2.6.6 Condiciones de frontera laterales	45
2.7 Aplicación de las condiciones de frontera	46
2.7.1 Condición de periodicidad lateral	46
2.7.2 Condición de frontera para fondo horizontal	47
2.7.3 Condiciones de frontera dinámicas de superficie libre	47
2.7.4 Condición cinemática de frontera de superficie libre	48
2.7.5 Oleaje estacionario	49
2.7.6 Ondas progresivas	50
2.7.7 Las relaciones de dispersión en aguas someras y profundas	52
2.7.8 La función de corriente para ondas de amplitud pequeña	53
 CAPÍTULO 3.	 54
 MODELO Y PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACIÓN DEL OLEAJE	 54
3.1 Introducción	55
3.2 Descripción física de la transformación del oleaje	55
3.3 Características de las ondas de pequeña amplitud	56
3.3.1 Contorno de la superficie	57
3.3.2 Celeridad de onda	57
3.3.3 Clasificación del oleaje con base en su profundidad relativa	57
3.3.4 Velocidad de la partícula, aceleración, y geometría orbital.	59
3.3.5 Flujo de energía y celeridad de grupo	60
3.4 Transformación del oleaje entrante a aguas someras	61
3.4.1 Conservación de las ecuaciones de ondas	61
3.4.2 Cambio en la altura del oleaje	63
3.5 Refracción del oleaje	65
3.5.1 Ecuaciones básicas de refracción	66

3.5.2 Construcción manual de diagramas de refracción	68
3.5.3 Otras consideraciones para la refracción	71
3.5.4 Forma asimétrica de la ola	72
3.7 Rotura del oleaje	72
3.7.1 Reflexión del oleaje	75
3.7.2 Modelado de la disipación de energía	77
3.8 Difracción del oleaje	79
3.8.1 Difracción y Refracción combinadas	80
 CAPÍTULO 4.	 82
 MODELO DE REFRACCIÓN DEL OLAJE A TRAVÉS DE ANÁLISIS COMPUTACIONAL	 82
4.1 introducción	83
4.2 Utilización de los diferentes modelos computacionales para evaluar la transformación del oleaje	84
4.2.1 Clasificación de los modelos	84
4.2.2 Modelo delantero de seguimiento de rayos	85
4.2.3 Modelo trasero de seguimiento de rayos	85
4.2.4 Modelo hiperbólico de Refracción – Difracción.	85
4.2.5 Modelo Elíptico de Difracción – Refracción (modelo de pendiente suave)	86
4.2.6 Modelo parabólico de refracción difracción	86
4.2.7 Modelo de refracción	86
4.2.8 Modelo de Boussinesq	86
4.3 Alcances del Modelo de Refracción del oleaje, REFRACT	87
4.4 Planteamiento analítico del programa REFRACT	88
4.4.1 Modelo matemático	88
4.4.2 Obtención iterativa del número de onda k	90
4.5 Método de discretización en Diferencias Finitas	91
4.5.1 Malla numérica	93
4.5.2 Aproximaciones en diferencias finitas	95
4.5.3 Método de solución	96
4.5.4 Discretización de las ecuaciones diferenciales parciales	96
4.5.5 Derivación de los coeficientes elementales de diferencias finitas	97
4.5.6 Aspectos Básicos de las ecuaciones de diferencias finitas	103
4.6 Solución numérica del programa REFRACT	105
4.6.1 Acción del oleaje	107
4.6.2 Esquemas no iterados	107
4.6.3 El Método de Lax –Wendroff	108
 CAPÍTULO 5.	 112
 APLICACIÓN DEL MODELO REFRACT	 112

5.1 Introducción	113
5.2 Fenómenos de propagación con solución analítica conocida	113
5.2.1 Asomeramiento	113
5.2.2 Refracción por fondo	114
5.2.3 Rotura del oleaje	114
5.2 Caso 1. Batimetría recta y paralela	114
5.2.1 Resultados para los cinco diferentes ángulos de incidencia	115
5.3 Caso 2. Fenómeno de propagación en un ensayo físico, Modelo experimental de Berkhoff.	120
5.3.2 Resultados experimentales y numéricos para las secciones de control	123
5.4 Caso 3. Batimetría idealizada. Noda (1974)	129
5.4.1 Resultado del modelo REFRACT aplicado a la batimetría idealizada matemáticamente por Noda (1974).	130
CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO	132
Conclusiones	133
Futuras líneas de trabajo	134
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
Referencias bibliográficas	136

Lista de símbolos

<i>Símbolo</i>	<i>Descripción</i>
a	<i>Aceleración</i>
A	<i>Amplitud</i>
B_0	<i>Espaciamiento entre ortogonales de onda</i>
C	<i>Celeridad de onda</i>
C_0	<i>Celeridad de onda en aguas profundas</i>
C_g	<i>Celeridad de grupo</i>
Cr	<i>Coefficiente de reflexión</i>
Du/Dt	<i>Aceleración total</i>
E	<i>Energía de onda por unidad de superficie</i>
E/σ	<i>Acción de oleaje</i>
g	<i>Aceleración de la gravedad</i>
g_i	<i>Punto en la malla en el análisis de Lax.-Wendroff</i>
h	<i>Altura de ola</i>
H_b	<i>Altura de ola de rotura</i>
I	<i>Momento de inercia</i>
Ir	<i>Número de Iribarren</i>
k	<i>Número de onda</i>
k_r	<i>Coefficiente de refracción</i>
k_s	<i>Coefficiente de asomeramiento</i>
k_d	<i>Coefficiente de difracción</i>
K	<i>Coefficiente de rotura</i>
L_0	<i>Longitud de onda en aguas profundas</i>
L	<i>Longitud de onda</i>
m	<i>Pendiente de la playa</i>
M	<i>Momento</i>
n	<i>Dirección normal a la línea ortogonal de ondas</i>
$O(\Delta x)$	<i>Error truncado</i>
P	<i>Presión</i>
$P_{i,j}$	<i>Punto P en la malla computacional</i>
t	<i>Tiempo</i>
T	<i>Periodo de onda</i>
U_R	<i>Parámetro de Ursell</i>
u	<i>Velocidad en dirección x</i>
v	<i>Velocidad en dirección y</i>
$V(u,x,w)$	<i>Componente de velocidad</i>
w	<i>Frecuencia absoluta</i>
α	<i>Angulo entre una cresta y un eje</i>
β	<i>Factor de separación de ortogonales de onda</i>
Δ	<i>incremento</i>
$\delta(x)$	<i>Disipación de energía por unidad de área</i>
Φ	<i>Potencial de velocidades</i>
$\phi(x,z,t)$	<i>Función potencial de velocidades</i>

γ	<i>Peso volumétrico</i>
$\eta(x,t)$	<i>Desplazamiento vertical de la superficie sobre el nivel medio</i>
μ	<i>Viscosidad dinámica</i>
ν	<i>Viscosidad cinemática</i>
π	<i>Número PI</i>
θ	<i>Angulo de incidencia del oleaje</i>
ρ	<i>Densidad</i>
σ	<i>Frecuencia angular de onda</i>
ω	<i>vorticidad</i>
ξ	<i>Línea de la malla computacional transformada</i>
$\psi(x,z,t)$	<i>Función de corrientes</i>
∇	<i>Operador nabra</i>

Lista de figuras

<i>Figura</i>	<i>Descripción</i>
1.1	<i>Análisis elemental de diferentes tipos de movimiento en un fluido</i>
1.2	<i>Diferencia de presión en un volumen unitario</i>
1.3	<i>Fuerzas cortantes y normales en un cubo del fluido</i>
1.4	<i>Flujo que atraviesa el volumen diferencial</i>
2.1	<i>Perfil bidimensional del oleaje</i>
2.2	<i>Perfiles de diferentes tipos de ondas</i>
2.3	<i>Regiones de validez para diferentes teorías de oleaje</i>
2.4(a)	<i>Estructura general de un problema de condiciones de frontera bidimensional.</i>
2.4(b)	<i>Oleaje bidimensional como un problema de frontera</i>
2.5	<i>Condición de frontera del fondo para el caso bidimensional</i>
2.6	<i>Varios grados de la interacción aire-agua y la presión atmosférica: (a) unión aire-agua; (b) fuerzas debidas al movimiento del campo de presiones; (c) olas libres, no afectadas por ninguna variación de la interfase aire-agua.</i>
2.7	<i>Diagrama de un elemento de superficie</i>
2.8(a)	<i>(a) esquema de un generador de oleaje en un tanque.</i>
2.8(b)	<i>(b) condición de radiación para el problema del generador de oleaje en dirección x.</i>
2.9	<i>Desplazamiento de la superficie del agua asociada a una onda estacionaria</i>
2.10	<i>Características de una onda progresiva</i>
3.1	<i>Transformación de las órbitas de las partículas y la forma del oleaje en aguas profundas y someras</i>
3.2	<i>Desarrollo de grupos de ondas</i>
3.3	<i>Descomposición del número de onda k en sus componentes ortogonales</i>
3.4	<i>Perfil normal de una playa</i>
3.5	<i>Crestas de ola y patrón ortogonal para oleaje de aproximación a aguas someras.</i>
3.6	<i>Diagrama de líneas ortogonales y líneas de cresta</i>
3.7	<i>Plantilla para construir ortogonales de onda (Arthur et al. 1952)</i>
3.8	<i>Diagrama de refracción para una ola de 7 segundos de dirección SE 30</i>
3.9	<i>Refracción del oleaje con presencia de corriente</i>
3.10	<i>Forma asimétrica de la ola</i>
3.11	<i>Tipos de rotura de oleaje</i>
3.12	<i>Patrones del oleaje incidente y reflejado para una profundidad constante</i>
3.13	<i>Cresta de ola reflejada</i>
3.14	<i>Difracción del oleaje debido a una barrera impermeable</i>
4.1	<i>Ejemplo de una malla bidimensional aplicable al modelo de diferencias finitas</i>
4.2	<i>Definición de la derivada y sus aproximaciones</i>

- 4.3 *Ejemplo de una malla estructurada en 2D, no ortogonal y diseñada para el cálculo de un flujo dentro de una tubería.*
- 4.4 *Ejemplo de una malla estructurada en bloques bidimensional con coincidencia en las interfases*
- 4.5 *Ejemplo de una malla sin estructura en 2D*
- 4.6 *Puntos discretos de la malla*

- 5.1 *Batimetría recta y paralela*
- 5.2 *Batimetría recta y horizontal con opendiente del 5%*
- 5.3 *Resultados para oleaje incidente de 15°, las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio*
- 5.4 *Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 15°, se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo*
- 5.5 *Resultados para oleaje incidente de 30°, las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio*
- 5.6 *Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 30°, se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo*
- 5.7 *Resultados para oleaje incidente de 45°, las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio*
- 5.8 *Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 45°, se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo*
- 5.9 *Resultados para oleaje incidente de 50°, las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio*
- 5.10 *Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 50°, se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo*
- 5.11 *Resultados para oleaje incidente de 60°, las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio*
- 5.12 *Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 60°, se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo*
- 5.13 *Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 15°*
- 5.14 *Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 30°*
- 5.15 *Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 45°*
- 5.16 *Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 50°*
- 5.17 *Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 60°*
- 5.18 *Batimetría de ensayo utilizada por Berkhoff (1982). Perspectiva 3D*
- 5.19 *Vista en planta del dominio de cálculo para el experimento de Berkhoff y las secciones de medición*
- 5.20 *Zonas de dominio de los efectos principales de transformación del oleaje*
- 5.21 *Modelo de Berkhoff realizado con REFRACT*
- 5.22 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 1, comienza una fuerte influencia de difracción.*

- 5.23 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 2, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.24 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 3, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.25 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 4, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.26 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 5, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.27 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 6, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.28 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 7, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.29 *Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 8, comienza una fuerte influencia de difracción.*
- 5.30 *Batimetría propuesta por Noda (1974), 160x200 m*
- 5.31 *Resutados gráficos del experimento de Noda mopdeloado por el programa REFRACT*
- 5.32 *Representación gráfica de las líneas de iso altura de ola para los datos obtenidos por el programa REFRACT*
- 5.34 *Representación gráfica de las líneas de iso altura de ola para los datos obtenidos por Noda (1974).*

Introducción

Dentro de la Ingeniería Civil existe una rama muy importante que atiende y resuelve todo tipo de problemas relacionados con las costas, el mar y su entorno, conocida como Ingeniería Marítima y de Costas. En nuestro país se conoce poco sobre ésta disciplina y mucha de la infraestructura existente en los litorales mexicanos fue concebida inicialmente con base en parámetros preestablecidos por manuales extranjeros y experiencias ajenas a nuestro entorno. Por esto es de vital importancia establecer un estudio real de ésta rama de la Ingeniería aplicada cien por ciento a las necesidades y limitaciones de nuestro país, creando modelos y aplicaciones basados en estudios científicos universales.

En México, la Ingeniería Marítima y de Costas tiene relativamente poco tiempo de haber nacido y de haber sido aplicada por primera vez. A partir de 1960 se comenzó a adquirir un compromiso hacia el estudio de la Ingeniería Marítima y de Costas por medio de la Secretaría de Marina, la cual fundó el primer laboratorio en Latinoamérica que posteriormente pasó a formar parte de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, la cual se apoyó principalmente en los estudios realizados por el gobierno Japonés sobre la dinámica de playas y la Ingeniería de Puertos en los años 80s. En los años 60's la Comisión Federal de Electricidad comenzó a construir una serie de importantes termoeléctricas; seis en el Océano Pacífico y tres en el Golfo de México. La primera planta núcleo eléctrica fue construida en las costas de Veracruz, en la población de Laguna Verde, con un proceso de enfriamiento asistido por el agua de mar. Laguna Verde y las nueve termoeléctricas generan el 36% de la electricidad del país. En la actualidad existen organismos en México que se encargan del estudio y experimentación sobre temas directamente relacionados con la Ingeniería Marítima y de Costas, el Instituto de Ingeniería de la UNAM, la Comisión Federal de Electricidad y PEMEX son los más destacados ya que han reflejado su labor de investigación en proyectos de gran importancia como son los puertos de Salina Cruz, el puerto Lázaro Cárdenas en el Pacífico y el puerto de Tampico en el Golfo de México sólo por mencionar algunos, sin olvidar las impresionantes plataformas petroleras en la Sonda de Campeche y las termoeléctricas e hidroeléctricas del país.

Aunque se ha logrado un gran avance en la infraestructura costera y marítima del país, contando con más de 11,500 km de litoral, aguas territoriales con casi 3 millones de km² e innumerables lagunas a lo largo de las costas mexicanas que cubren un total de 15,000 km²; solamente se cuenta con 45 puertos de variados tamaños dentro de los cuales solo 21 son compatibles a un tráfico internacional de embarcaciones creando una ineficiencia terrible ya que el 80% de nuestras exportaciones debe de pasar por éste cuello de botella. Es imperante generar programas tecnológicos que involucren la creación de una infraestructura que compita activamente con las naciones y potencias con las cuales guardamos importantes relaciones de carácter tecnológico, científico y económico.

Un ejemplo a citar es España con sus impresionantes números que encabezan las listas europeas de tecnología de costas y puertos; cuenta con 8,000 km de litoral (3,500 menos que México), correspondiente a la península e islas contando con 300 puertos importantes con un promedio de 3.5 puertos a cada 100 km de costa y más de 180 km de rompeolas. España es comparativamente similar con México en muchos aspectos: idiosincrasia, cultura, idioma, y tecnología. Por esto es importante hacer esta comparación debido a que México es un país mucho más rico en recursos naturales sin mencionar las ventajas tecnológicas que asimilamos de los vecinos del norte y el ingenio que nos caracteriza.

La finalidad de esta Tesis es demostrar un fenómeno de transformación del oleaje que es relativamente poco estudiado y que ha sufrido un nuevo enfoque para su solución a partir de la creación de máquinas y computadoras más eficientes y poderosas, los métodos de obtención de resultados aquí expuestos dan pie a la creación de nuevas formas de dar salida a los problemas de la Hidráulica Marítima y de Puertos y de la Ingeniería Civil en general, con la finalidad primordial de dar una herramienta práctica y sencilla a ser utilizada directamente en los gabinetes de diseño para obras portuarias y marítimas sin mayor dificultad para el Ingeniero Civil Mexicano.

Objetivos

Los principales objetivos del presente trabajo son los siguientes:

- Estudiar las bases físicas que se aplican al la Ingeniería Marítima y de Costas, así como las ecuaciones fundamentales que se manejan dentro del análisis de las teorías de ondas.
- Estudiar el oleaje, su clasificación y teorías de onda aplicadas a éste.
- Estudiar el fenómeno de transformación del oleaje de refracción, rotura, disipación, asomeramiento y reconstitución a partir de la teoría lineal de Ayri.
- Estudiar las diferentes metodologías empleadas para dar solución a los problemas de transformación del oleaje aplicadas al análisis computacional con base en la discretización de mallas computacionales que ejemplifican los dominios físicos de zonas reales como playas y costas.
- Modelar y analizar el programa REFRACT, de refracción de oleaje y solucionar ejemplos idealizados y experimentales.
- Comparar los resultados obtenidos y concluir con base en éstos.

Descripción y organización del estudio

Para exponer de forma clara éste trabajo de Tesis, los temas de estudio se dividieron en los siguientes capítulos:

Capítulo 1. Fundamentos

Se presenta una definición de los diferentes movimientos que sufre un fluido y las fuerzas aplicadas. Además se incluye las ecuaciones básicas de Bernoulli, Laplace y las de movimiento como parte de las bases del estudio posterior.

Capítulo 2. Teoría de ondas superficiales

Se definen las características y terminologías del oleaje y las ecuaciones del movimiento de ondas. Se presentan las diferentes condiciones de frontera y sus aplicaciones para dar pie al estudio de la teoría lineal de Airy.

Capítulo 3. Propiedades de la transformación del oleaje

Se describe el concepto de transformación del oleaje, se identifican las diferentes características que tienen las diversas teorías de ondas y sus rangos de aplicación. Se estudian las características de las ondas de pequeña amplitud en especial y se explica el fenómeno de refracción del oleaje entrante a aguas someras, se define finalmente el fenómeno de rotura, asomeramiento, reflexión, reconstitución y difracción del oleaje.

Capítulo 4. Modelo de refracción del oleaje a través de análisis computacional

Se plantean los alcances del modelo computacional REFRACT, se definen las bases de su modelo matemático y la obtención iterativa del número de onda dentro del programa. Se propone el método de diferencias finitas como método de discretización y se explica que es una malla computacional, sus aplicaciones y tipos existentes. Se llega a la solución numérica del programa REFRACT y se explica su metodología de solución.

Capítulo 5. Aplicación del modelo REFRACT

Se aplica el modelo REFRACT a 3 ejemplos tipo propuestos: batimetría lineal y paralela, el modelo de Berkhoff y el modelo de Noda. Finalmente se comparan los resultados obtenidos con los resultados experimentales con los que se cuenta y se concluye.

1.1 Introducción

El Ingeniero Civil, al estudiar el área de la Hidráulica y más específicamente la rama de la Hidráulica Marítima, está obligado a familiarizarse con el comportamiento del oleaje sobre la superficie marina, así como con su observación, su estudio y predicción. La acción del oleaje sobre las estructuras artificiales y cuerpos naturales genera cambios morfológicos que en muchos de los casos afectan directamente al diseño, construcción, operación y al mantenimiento de cualquier obra portuaria; el cambio físico de las playas, los aprovechamientos energéticos (transformación del movimiento del oleaje a energía eléctrica) y puertos entre otros, son muestras prácticas de la importancia del estudio del oleaje que aunque es simple en su forma básica, se torna complejo al intentar modelarlo para la vida real.

Cualquier superficie de agua expuesta a la intemperie, está expuesta también a agentes externos que modifican su movimiento y distorsionan sus formas. El movimiento de un barco, la acción del viento o simplemente una roca que cae sobre la superficie libre del agua son ejemplos de los fenómenos que modifican directamente su estado original que también se encuentra en un constante movimiento por la acción de alguna fuerza externa previa, y simultáneamente la acción de la gravedad y las fuerzas de tensión del agua actúan a favor de restablecer la posición de equilibrio del cuerpo de agua. Sin embargo, la inercia de dicho cuerpo de agua sobrepasa su posición de equilibrio y mantiene un movimiento oscilatorio y finalmente ésta oscilación ocasiona la propagación de ondas en todo el cuerpo.

Se ha observado que la fuerza dominante que restablece el equilibrio en el cuerpo de agua es la gravedad y es mucho mayor comparada con la fuerza de tensión superficial que pudiese existir; por esto se ha convenido no considerar a la tensión para el estudio y análisis del fenómeno del oleaje. A lo largo del proceso de propagación de ondas, la interacción de la gravedad con la inercia hacen que éste movimiento continúe y genere también un gradiente de presiones sobre la superficie del agua que se superpone al gradiente de presiones ya existente y equivalente a la columna de agua.

Las ondas cuentan con energía potencial para su desplazamiento y de energía cinética para el movimiento de las partículas de agua, las ondas van transmitiendo esta energía conforme se van propagando, y también ceden un pequeño transporte relativo de masa en la dirección de su propagación.

La energía se disipa debido a esfuerzos cortantes en el fondo, en la superficie y en su interior. Los cambios morfológicos del fondo y sus diferentes características hacen que se presenten depresiones en la superficie del agua conforme se va propagando la onda. Si las ondas interactúan se topan con una estructura o una playa, parte de la energía se reflejará y puede ser disipada.

En la tabla (1.1) se muestra una clasificación de las fuerzas restauradoras que en ocasiones pueden actuar al mismo tiempo.

	Mecanismo mecánico	Período típico (segundos, minutos, horas, días)	Región de actividad
Sonido	Compresibilidad	$10^{-2} - 10^{-5}$ s	Interior del océano
Ondas capilares	Tensión superficial	$< 10^{-1}$ s	
Ondas por viento y oleaje distante (Swell)	Gravedad	1 - 25 s	} interfase aire - agua
Tsunami	Gravedad	10 min - 2 hrs	
Ondas internas	Gravedad y estratificación de densidades	2 min - 10 hrs	Cambio bien definido de densidades.
Oleaje de tormenta	Gravedad normal y por rotación de la tierra.	1 - 10 hrs	Cerca de la costa
Oleaje	Gravedad normal y por rotación de la tierra	12 - 14 hrs	} Toda la superficie del océano
Ondas planetarias	Gravedad, rotación de la tierra y la variación de latitud o profundidad del océano		

Tabla (1.1). Fuerzas restauradoras del oleaje

En éste primer capítulo, se estudiarán los conceptos básicos que dan pie a la teoría de ondas que se tratarán en puntos subsecuentes, y también se describirán los fundamentos matemáticos y físicos que permiten entender las teorías hidrodinámicas.

1.2 Diferentes tipos de movimientos de un fluido

En términos matemáticos, el movimiento de un fluido se considera como la superposición de distintos tipos de movimientos primitivos. La interpretación física de estos movimientos se puede considerar como un flujo laminar dentro de dos planos paralelos, donde las velocidades son paralelas al eje Ox y dependen solamente de y .

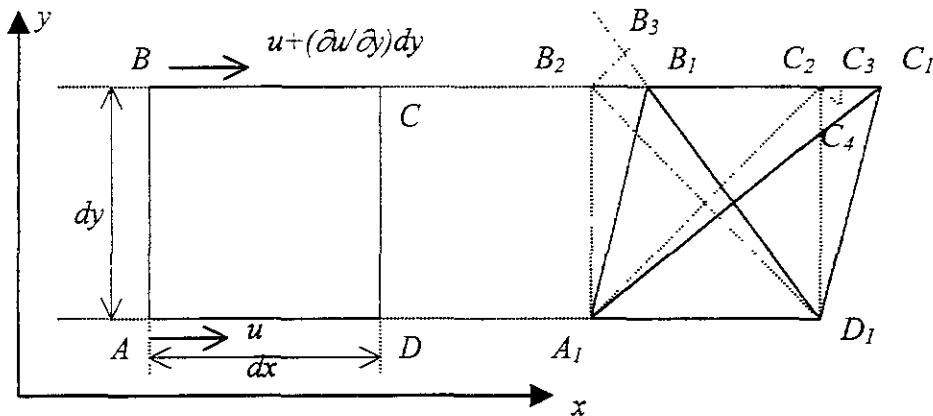


Figura (1.1). Análisis elemental de diferentes tipos de movimiento en un fluido.

Si se considera un cuadrado $ABCD$ de dimensiones infinitesimales de área $dx dy$ en un tiempo t , y el mismo elemento en el tiempo $t+dt$: $A_1B_1C_1D_1$ como el mostrado en la figura (1.1) y la velocidad de A y D es u y la velocidad de B y C es $u + du = u + (\partial u / \partial y)$, $AB = dy$, y u es función de y solamente.

El movimiento de la posición 1 de dicho cuadrado a la posición 2 se puede resumir en tres fases:

1. Un movimiento de traslación que da $A_1B_2C_2D_1$, con velocidad de traslación igual a u .
2. Un movimiento rotacional que cambia las diagonales A_1C_2 y D_1B_2 a A_1C_3 y D_1B_3 , respectivamente.
3. Una deformación que desplaza C_3 a C_1 y B_3 a B_1 .

Si el límite dt tiende a cero, C_1C_2 tiende a cero. Por lo tanto el ángulo descrito entre $C_2C_1C_3$ tenderá a 45° , y $dx = dy$. Se tiene:

$$C_2C_3 = \frac{C_1C_2}{\sqrt{2}} = \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{\sqrt{2}} \tag{1.1}$$

La proporción de cambio de la rotación angular es:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d \left\{ \frac{\text{segmento}}{\text{radio}} \right\}}{dt} \cong \frac{d \left\{ \frac{C_2C_3}{A_1C_2} \right\}}{dt} = \frac{d C_2C_3}{dt \sqrt{2} dy} \tag{1.2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$$

e igualmente, la tasa de deformación es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_3C_1}{A_1C_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$$

En general, existen tres constituyentes para el movimiento de las partículas y las deformaciones, que son:

1. Los componentes de velocidad $V(u, v, w)$: traslación
2. La variación de los componentes de velocidad en sus propias direcciones: dilatación
3. La variación de los componentes de velocidad con respecto a la dirección normal de su propia dirección: rotación y deformación angular.

1.2.1 Movimiento de traslación

Este movimiento se puede representar fácilmente con el movimiento de un elemento rectangular pequeño, tal que los ejes que lo describen se mantienen paralelos a los ejes coordenados x, y, z y también mantienen una longitud constante, teniéndose así un movimiento de traslación puro el cual se puede presentar a lo largo de una línea recta o curva y no tiene dependencia de los componentes de velocidades que se presentan.

Si se tiene un punto A en el espacio x, y, z en un tiempo determinado t , se tendrán $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, en un tiempo $t + \Delta t$. El movimiento de traslación se define por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta x &= u\Delta t & dx &= udt \\ \Delta y &= v\Delta t & dy &= vdt \\ \Delta z &= w\Delta t & dz &= wdt \end{aligned}$$

Un caso del movimiento de traslación puro es el denominado flujo uniforme y se presenta cuando el flujo de partículas es paralelo y recto en sentido de la corriente.

1.2.2 Movimiento de Rotación

Uno de los conceptos más importantes en la hidrodinámica es la rotacionalidad del flujo. Para un movimiento bidimensional, se ha demostrado que la velocidad de deformación angular es $\partial u / \partial y$ y $\partial v / \partial x$, la rotación de una partícula es proporcional a la diferencia que existe entre estas componentes. De hecho, si $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$ existe una deformación angular sin rotación. Pero si $\partial u / \partial y \neq \partial v / \partial x$ existe entonces rotación y deformación angular.

Por lo tanto, un cuerpo irrotacional se define matemáticamente como:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.3)$$

1.2 Fuerzas aplicadas

1.2.1 Fuerzas internas y externas

Las fuerzas elementales que actúan sobre una masa del fluido consisten básicamente en internas y externas.

Las fuerzas internas son un resultado de la interacción de puntos en el interior de la masa del fluido, dichas fuerzas deben de estar en equilibrio a partir de un balance en pares, obedeciendo al principio de igualdad de acción de fuerzas, de forma análoga que su

momento total. Sin embargo, el trabajo de dichas fuerzas internas no es nulo, por ejemplo las fuerzas viscosas internas del fluido dentro de una tubería.

Las fuerzas externas son las que no están balanceadas y actúan en la misma dirección del movimiento de la masa y sobre su superficie exterior. En especial, éste tipo de fuerzas se divide, principalmente en dos tipos de fuerzas, las fuerzas de superficie y las fuerzas de cuerpo. Las fuerzas de superficie resultan de fuerzas actuando sobre la parte externa del volumen de control elegido, son causadas por la atracción molecular y su acción está limitada a una frontera muy delgada. Ya que el fluido es un medio continuo, la frontera se puede considerar infinitesimalmente delgada y simultáneamente combinada con la superficie de la partícula. Dentro de las fuerzas de superficie se pueden considerar dos grandes grupos, el primero las fuerzas normales debidas a la presión y las segundas, las fuerzas cortantes debidas a la viscosidad. Éstos dos tipos de fuerzas también existen dentro de la partícula, pero como siempre se encuentran en pares, su suma es cero; característica previamente señalada. Las fuerzas de cuerpo se deben a un campo externo (tal como el magnético o el campo de gravedades) que actúan en cada elemento del volumen de control considerado en una dirección dada; por esto se les llaman fuerzas de cuerpo o de volumen. Es importante hacer notar que para estudios enfocados al oleaje y circulación oceánica, se debe considerar la aceleración de la gravedad de forma radial.

1.2.2 Fuerzas de gravedad

Al igual que las fuerzas de inercia, las fuerzas volumétricas son proporcionales a la masa del fluido y a la aceleración causada por un campo externo. En el caso de la aceleración de la gravedad, la fuerza volumétrica por unidad de volumen es simplemente equivalente al peso del fluido: $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza es independiente del movimiento y es la misma ya sea si el fluido es estático o cuenta con un movimiento viscoso o turbulento.

Los componentes de la gravedad expresados en forma diferencial en un espacio tridimensional son:

$$-\nabla(\rho g z) = -\frac{\partial(\rho g z)}{\partial z} \quad (1.7)$$

Ya que los términos a lo largo de los ejes x y y son iguales a cero, donde:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

1.2.3 Fuerzas de presión

Las fuerzas de presión resultan de la componente normal de las fuerzas moleculares cerca de la frontera del volumen de control considerado. Dicha magnitud se obtiene dividiendo la fuerza normal con un área infinitesimalmente pequeña.

La magnitud de la presión es una cantidad escalar que es independiente de la orientación del área en donde la fuerza está aplicada, por lo que la presión es la misma en cualquier dirección. ya sea en un flujo unidimensional, bidimensional o tridimensional. Sin embargo, es evidente que el gradiente de fuerzas de presiones (el cual es vectorial) cambia con la dirección.

Ahora, si se considera una partícula elemental del fluido ($dx dy dz$) (figura 1.2). La fuerza de presión debida a una partícula del fluido externa y adyacente actuando sobre el lado $ABCD$ es $p(ABCD) = p dy dz$. La fuerza de presión contra el otro lado, actúa es la dirección opuesta y se puede escribir:

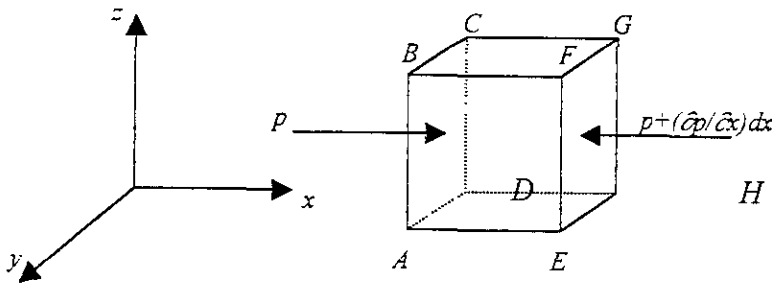


Figura (1.2). Diferencia de presión en un volumen unitario

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)(\text{areaEFGH}) = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \quad (1.8)$$

Por lo tanto, las fuerzas de presión actuando en direcciones opuestas son:

$$p dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dydz \quad (1.9)$$

Igualmente, las fuerzas de presión diferenciales actuando en las direcciones YO y OZ son $-(\partial p / \partial y) dx dy dz$ y $-(\partial p / \partial z) dx dy dz$.

Esto es, la tasa de cambio de la fuerza de presión por unidad de volumen está dada por los tres componentes $-\partial p / \partial x$, $-\partial p / \partial y$ y $-\partial p / \partial z$ las cuales se pueden reescribir vectorialmente como: $-\mathbf{grad}(p)$, es decir que:

$$\mathbf{grad} p = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

La fuerza total debida a las fuerzas de presión y a las fuerzas de gravedad es:

$$\mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \rho gz = \mathbf{grad} (p + \rho gz) \quad (1.9)$$

La suma de estas dos cantidades lineales ($p + \rho gz$) es una constante en la hidrostática ya que $p - p_a = -\rho gz$ donde p_a es una presión constante externa (atmosférica).

1.2.4 Fuerzas cortantes

Las fuerzas cortantes actúan también sobre la superficie del fluido, sin embargo, éstas difieren de la presión es que no cumplen con un comportamiento isotrópico. Las fuerzas cortantes son causadas por fuerzas que actúan de forma tangencial a la superficie; siempre se presentan en flujos reales, y como la presión, tiene las unidades de fuerza por unidades de área.

Si se examina un volumen pequeño, se puede ver que existen tres posibles tensiones para cada una de las seis caras del cubo; dos fuerzas cortantes y una fuerza normal perpendicular a la cara. En la cara x en $x + \Delta x/2$ en la cual se designará como positiva la cara x . Las tensiones son σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} .

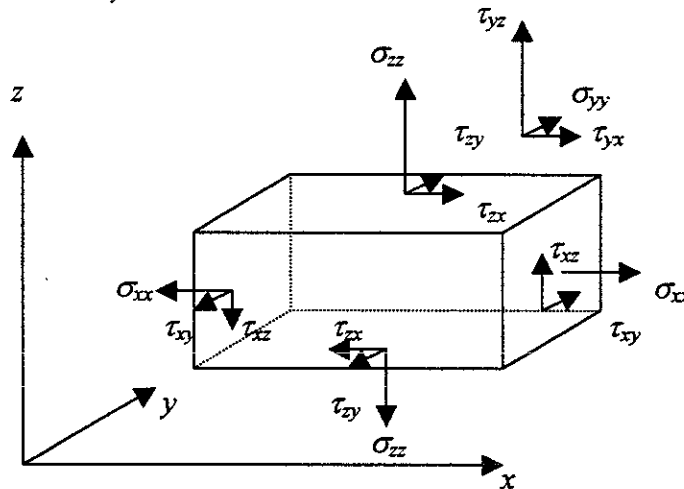


Figura (1.3). Fuerzas cortantes y normales en un cubo del fluido

Existen nueve tensiones que se encuentran aplicadas sobre las caras del cubo. Tres de éstas fuerzas incluyen a la presión; las fuerzas normales se escriben como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -p + \tau_x \\
 \sigma_y &= -p + \tau_y \\
 \sigma_z &= -p + \tau_z \\
 p &\equiv -\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Es posible demostrar que algunas de las fuerzas constantes son idénticas para fluidos móviles o estáticos. Se adaptará la segunda ley de Newton a momentos y momentos angulares.

$$M_z = I_z \omega_z$$

Donde M_z es la suma de momentos con respecto al eje z , I_z es el momento de inercia, y ω_z es la componente z de la aceleración angular del cuerpo. Los momentos con respecto al eje que cruza el centro del cubo, paralelo al eje z se pueden identificar si se toma una rebanada del cubo del fluido perpendicular al eje z . Esto se muestra en la figura (1.3). Considerando los momentos alrededor del centro del elemento y siendo positivo en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} = I_z \omega_z$$

Reduciendo la ecuación, queda:

$$\tau_{xz} \Delta x \Delta y \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{1}{12} \rho [\Delta x \Delta y \Delta z (\Delta x^2 + \Delta y^2)] \omega_z \quad (1.11)$$

De manera similar se repite el procedimiento para las otras caras del cubo y muestran que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

1.3 Las ecuaciones de movimiento de translación

Partiendo de la Segunda Ley de Newton, se sabe que a_x es la aceleración de la partícula en dirección x y por definición $a_x = du/dt$, donde u es la velocidad en dirección x . La velocidad sin embargo, es una función del espacio y tiempo, $u = u(x,y,z,t)$; y su derivada total es:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (1.12)$$

y se sabe que $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$, esto da:

$$\frac{du}{dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_1 + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_2 \quad (1.13)$$

Esta es la aceleración total y se denota como Du/Dt , dicha aceleración está compuesta por dos términos diferentes, el primero conocido por la aceleración local que es

simplemente el cambio de u en un punto en el tiempo, y el segundo conocido como la aceleración convectiva que muestra los cambios de u debidos al movimiento de la partícula.

Por desarrollos matemáticos utilizando la serie de Taylor truncada, se puede llegar a las siguientes ecuaciones de movimiento para los tres sentidos:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + X \quad (1.14)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + Y \quad (1.15)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + Z \quad (1.16)$$

Para aplicar las ecuaciones de movimiento antes descritas, es necesario conocer o tener información sobre las fuerzas cortantes del fluido, lo más conveniente y común es considerar a dichas fuerzas son iguales a cero, con lo cual se llega a las ecuaciones de Euler. Expresando la fuerza del cuerpo por unidad de masa como $-g$ en la dirección z y cero en las dos direcciones restantes. Las ecuaciones de Euler se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dy}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dz}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (1.16, 1.17, 1.18)$$

En muchos casos reales, el flujo es turbulento y las fuerzas cortantes son influenciadas por la turbulencia, esto arroja la necesidad de utilizar las fuerzas cortantes antes eliminadas. Si por el contrario, no existe turbulencia y el flujo se presenta laminar, las fuerzas cortantes serán gobernadas por la relación Newtoniana de fuerzas cortantes y la aceleración será:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z \end{aligned} \quad (1.19, 1.20, 1.21)$$

ν es la viscosidad cinemática del fluido que es igual a la viscosidad dinámica del fluido entre la densidad, μ/ρ .

1.4 Definición del potencial de velocidades

El concepto de movimiento irrotacional es de gran importancia en la hidrodinámica, ya que en la gran mayoría de los flujos reales son irrotacionales. Al hacer la consideración de irrotacionalidad de un flujo, se simplifica el análisis y los métodos que se utilizan en problemas de hidrodinámica. Muchos de éstos métodos resultan de la existencia de una función especial llamada el potencial de velocidades.

El potencial de velocidades se define como una función simplemente valuada ϕ tal que $u=(\partial\phi/\partial x)$, $v=(\partial\phi/\partial y)$, $w=(\partial\phi/\partial z)$. Si estas funciones son continuas, satisfarán la función de irrotacionalidad, que para dos dimensiones es, $\partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0$. Y substituyendo los términos u y v en dicha condición queda:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \equiv 0$$

(1.4)

El valor de la velocidad V en términos de la función del potencial de velocidades es mostrado a continuación:

$$V = \text{gra } d\phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.5)$$

así la magnitud de la velocidad se obtiene

$$V = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.6)$$

1.5 La ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es simplemente una forma integrada de las ecuaciones de movimiento de Euler y muestra la relación entre el campo de presiones y la cinemática. Considerando de nuevo la irrotacionalidad e incompresibilidad del fluido, las ecuaciones gobernantes del movimiento para el plana $x - z$ son las ecuaciones de Euler.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (1.7)$$

sustituyendo la condición de irrotacionalidad $\partial u / \partial z = \partial w / \partial x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (1.8)$$

Substituyendo el potencial de velocidades se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] &= -g \end{aligned} \quad (1.9)$$

Integrando las ecuaciones anteriores considerando que la densidad es constante en todo el fluido.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} &= C'(z, t) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} &= -gz + C(x, t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación de Bernoulli en su forma de estado estacionario:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz &= C(t) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz &= C(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

que relaciona a la presión del fluido con la elevación de la partícula y el potencial de velocidades. La función $C(t)$ se conoce como el termino de Bernoulli y se mantiene constante para flujos estacionarios.

1.6 La ecuación de Laplace

Como se ha tratado anteriormente, es necesario considerar que el flujo es irrotacional y continuo para así facilitar la deducción de la ecuación de Laplace. El principio de continuidad del flujo se basa en la conservación del volumen y se ejemplifica con un volumen diferencial que permite exista un flujo entrante en una de sus caras en un intervalo de tiempo Δt , equivalente a un flujo saliente en el mismo intervalo (figura (1.4)).

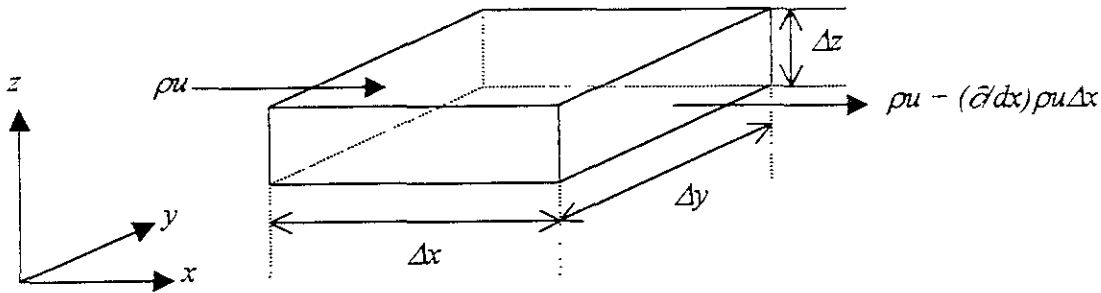


Figura (1.4). Flujo que atraviesa el volumen diferencial

El cambio de masa es igual a:

$$\rho dx dy dz - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz dt \tag{1.12}$$

El primer factor de la ecuación anterior es la cantidad de masa que entra a la ecuación diferencial por la cara anterior del volumen y a su vez, la cantidad de masa que sale por la cara posterior del volumen es:

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz dt \tag{1.13}$$

La diferencia en el eje x, es:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \tag{1.14}$$

Análogamente, el cambio de masa en las direcciones restantes queda:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dx dy dz dt \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dx dy dz dt \quad (1.16)$$

Por lo tanto el cambio total de masa en el intervalo de tiempo dt está dado por:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz dt \quad (1.17)$$

Ordenando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.18)$$

Se sabe que:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1.19)$$

Substituyendo la ec. (1.19) en (1.18) se obtiene.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} V + V \text{gra} d\rho = 0 \quad (1.20)$$

Como el fluido es incompresible, ρ es constante, por lo tanto $\partial \rho / \partial t = 0$ y $\text{grad} \rho = 0$.
Para fluido incompresible la ecuación de continuidad queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.21)$$

Recordando la consideración del flujo irrotacional, se asume la existencia de un potencial de velocidades Φ tal que:

$$u = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

$$v = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$w = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

Combinando la ec. (1.21) con las expresiones anteriores se obtiene la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.22)$$

2.1 Introducción

Las olas en el mar se propagan en un fluido viscoso sobre fondos irregulares de permeabilidad variable, sin embargo, un punto importante a hacer notar es que en muchos de los casos, su movimiento es cercanamente irrotacional; tal que la viscosidad que causa la rotación puede ser poco importante. Otro hecho importante es que el agua se puede considerar como un fluido incompresible y consecuentemente, un potencial de velocidades y una función de corrientes debe de existir para una propagación de oleaje en los océanos.

Los problemas asociados con la propagación de oleaje son difíciles de abordar debido a la complejidad natural del proceso. Dichas dificultades radican en la irregularidad del movimiento del oleaje, el fenómeno físico de la rotura y la disipación de energía debido a la fricción, turbulencia, etc. Los modelos matemáticos expresados en éste trabajo han requerido de ciertas simplificaciones. La aplicación de una descripción matemática depende regularmente del número de dimensiones espaciales involucradas en el problema. En el caso de un modelo uni-dimensional es posible introducir algunos efectos no lineales dentro de la solución del método. Sin embargo, en el caso de tener modelos de dos o tres dimensiones, la formulación matemática depende en la mayoría de los casos de la restricción de aquellos que se pueden resolver a través de la aplicación de la teoría de ondas armónicas y lineales.

Este capítulo presenta una descripción simple del movimiento del oleaje en un cuerpo de agua; desde el punto de vista físico y matemático.

2.2 Características y terminología del oleaje

Los parámetros más importantes para poder describir al oleaje son su longitud, altura y la profundidad en donde se propagan. Todos los demás parámetros, tales como las velocidades y aceleraciones de onda, se pueden determinar teóricamente de las cantidades mencionadas inicialmente. En la figura (2.1), se muestra una representación bidimensional de una ola propagándose en la dirección x . La longitud del oleaje L , es la distancia horizontal entre dos crestas sucesivas o los puntos más altos de la ola, o también se define como la distancia entre dos valles de ola. L también se relaciona con la profundidad h y el periodo T , que se define como el tiempo necesario que se requiere para que dos crestas sucesivas pasen por un punto de referencia en particular. La ola se mueve una distancia L en el tiempo T con una velocidad C denominada celeridad de onda y definida como, $C=L/T$.

La terminología del oleaje se define con base a un sistema coordenado x, z, y tal como se puede ver en la figura, una onda progresiva y armónica se mueve hacia la dirección positiva de x .

Los símbolos se definen como sigue:

h = profundidad del agua (desde el nivel medio del agua hasta el fondo del mar).

- $\eta(x,t)$ = desplazamiento vertical de la superficie del agua sobre el nivel medio.
- A = amplitud de onda
- H = Altura de ola ($2A$)
- L = longitud del oleaje
- T = periodo del oleaje
- c = velocidad de propagación de onda o velocidad de fase
- k = número de onda ($2\pi/L$)
- σ = frecuencia angular de onda ($2\pi/T$)

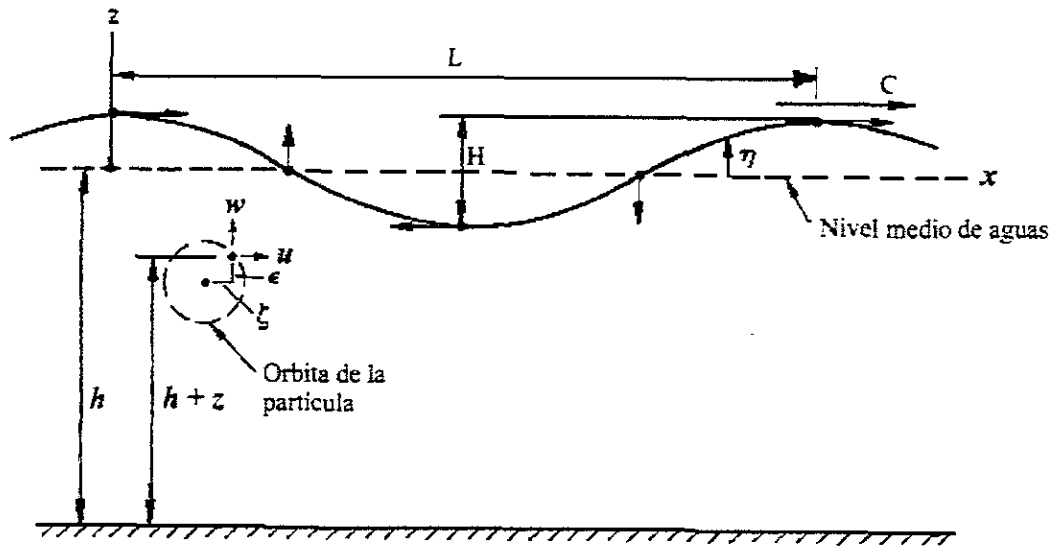


Figura 2.1 Perfil bidimensional del oleaje

La ecuación diferencial que satisface el fenómeno en la región $-h \leq z \leq \eta$ y $-\infty \leq x \leq \infty$ es la ecuación de Laplace, definida anteriormente en el capítulo anterior.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.1}$$

Las condiciones de frontera que se apliquen a la ecuación (2.1) deben de ser consistentes con el tipo de movimiento ilustrado en la figura (2.1). En este problema, no solamente la frontera de superficie se mueve, sino también su posición.

Queda claro que el fondo queda estimado como una frontera impermeable y horizontal así que la condición a hacer satisfacer en el fondo si este es horizontal es:

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

en

$$z = -h \tag{2.2}$$

La condición de frontera que se debe satisfacer en la superficie se puede obtener aplicando la ecuación de Bernoulli en la superficie, $z = \eta$ y tomando la presión P en la superficie como cero.

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} \quad (2.3)$$

Y por último se presenta la condición de frontera dinámica, para la cual se asume que la amplitud de las ondas es suficientemente pequeñas y por lo tanto será otra condición de frontera a ser tratada en éste capítulo.

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (2.4)$$

Es importante hacer notar que las soluciones físicas de las ecuaciones de frontera establecidas, deben de ser periódicas tanto en el tiempo t y en la dimensión espacial x .

2.3 Ecuaciones del movimiento

Para el estudio del movimiento de oleaje que se discute en este apartado, sólo se considerará un movimiento bidimensional donde la componente de la aceleración horizontal a lo largo del eje x y la componente de aceleración vertical a lo largo del eje z serán contempladas en la ecuación del movimiento. La componente horizontal de la aceleración a lo largo del eje y se asume que es muy pequeña en comparación de las otras dos, así que se desprecia.

Para un movimiento bidimensional e incompresible en el plano (x,z) la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

El flujo es irrotacional, por lo tanto existe un potencial de velocidades; el cual por definición es $V = \pm \text{grad}\phi$, tomando la convención del gradiente negativo se tiene:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Y substituyendo (3.2) en (3.1) se tiene:

$$\nabla^2\phi(x, z) = 0 \tag{2.7}$$

Que es la ecuación de Laplace. Esta es una ecuación diferencial parcial que se debe de resolver dentro de las condiciones de frontera apropiadas, a fin de investigar el comportamiento del oleaje.

2.4 Teorías de ondas

Existen diferentes teorías de ondas aplicables a distintos medios y parámetros, por ejemplo; la profundidad, la altura de onda y el periodo. La gran mayoría de las teorías de ondas se basan en los tres parámetros mencionados anteriormente, también existen otras condiciones como lo son las pendientes del fondo y sus características propias. Dichas teorías se explicarán en este apartado y serán atendidas con el fin de conocer sus características fundamentales y sus condiciones de aplicación dando pie al por que y cuando se debe de aplicar una u otra en especial.

Las teorías de ondas que se explicarán se limitan a un fondo horizontal teniéndose así una profundidad constante. Al desarrollar cualquier teoría de onda, se deben primero conocer y estudiar las condiciones de frontera que ayudan a resolver las ecuaciones diferenciales generales de cada teoría así como en su simplificación.

Existen dos tipos de aproximación para las teorías de ondas en general: el primero se desarrolla con base en la altura de onda como un parámetro de perturbación, mientras que el otro se desarrolla con base en la profundidad del agua. Para el desarrollo de las teorías de ondas es necesario asumir la continuidad e incompresibilidad del fluido. La ecuación de continuidad establece que el fluido se conserva y en el problema de ondas esto se traduce como la ecuación diferencial básica de movimiento descrita en el apartado anterior.

2.4.1 Teoría lineal o teoría de ondas de pequeña amplitud

Es la más simple de todas las teorías de onda, también es conocida como la Teoría de Airy, o la teoría sinusoidal. La teoría lineal asume que la altura de onda es mucho menor comparada con la longitud de onda o con la profundidad. Asumir esto permite una linearización de las condiciones de frontera que arrojan términos de primer orden, dicho artificio matemático permite también que las condiciones de frontera en la superficie libre se tengan que cumplir solamente para el nivel medio del agua en lugar de una superficie libre oscilante con mayor complejidad.

2.4.2 Teoría de ondas de Stokes

La teoría de ondas de pequeña amplitud es la aproximación más simple para el problema de condiciones de frontera, el desarrollo cuenta con solo componente de frecuencia descrito como una onda sinusoidal de frecuencia ω .

Stokes mostró en 1880 que para la teoría lineal, las soluciones de mayor orden disminuyen en comparación con la menor inmediata, para valores de $H/h \ll (kh)^2$, para $(kh) < 1$ y $H/L \ll 1$. Estas condiciones imponen restricciones en las alturas de las ondas en aguas someras y por esto la teoría de Stokes no es aplicable en aguas someras.

Los términos de desplazamiento, velocidad, aceleración y potencial de velocidades desarrollados en la teoría de Airy en forma lineal, se llevan al n -ésimo grado en la teoría de Stokes denominándose Stokes de segundo orden, tercer orden, etc. Y se aplican en diferentes zonas de aguas profundas e intermedias.

2.4.3 Teoría Cnoidal de ondas

La teoría de la amplitud finita de Stokes es de mayor utilidad cuando el valor de la profundidad relativa h/L es mayor que $1/8$ a $1/10$. Las olas largas con formas permanentes que se desplazan sobre aguas someras se representan con mayor precisión con la teoría Cnoidal de ondas.

Las onda Cnoidal es una onda periódica que normalmente tiene crestas más agudas separadas por valles más amplios y planos. La validez de ésta teoría se fundamenta en asumir que el cuadrado de la inclinación de la superficie del agua es pequeño en comparación con la unidad, según Keulegan en 1950. La teoría Cnoidal se aplica para un gran número de olas largas de amplitud finita. El rango aproximado de validez de la teoría Cnoidal es $h/L < 1/8$ y $U_R > 26$ conocido como el parámetro de Ursell definido como:

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3}$$

Los casos límite de la teoría Cnoidal de ondas son por un lado, la teoría de la onda solitaria cuando la longitud de ola se aproxima al infinito y por el otro lado la teoría de Airy cuando la altura de ola es muy pequeña comparada con la profundidad del agua.

Un sinnúmero de teorías de ondas se han desarrollado para aplicaciones físicas en aguas someras. Korteweg y De Vries iniciaron la teoría de ondas Cnoidales en 1895, Wiegel simplificó el estudio previo aplicándolo a la Ingeniería asentando las bases más importantes en 1960. Laitone en ese mismo año, desarrolló una segunda aproximación para la teoría Cnoidal, mientras que Chappellear en 1962 obtuvo la tercera aproximación para ésta teoría.

La teoría se describe con la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^3 F}{dX^3} + \alpha F \frac{dF}{dX} - \beta \frac{dF}{dX} = 0$$

Donde α y β son constantes, F es una función de $X=(x-ct)/l$, y l es una longitud en la dirección x cuya magnitud es la misma que la longitud de onda.

2.4.4 Teoría de ondas de función de corrientes

La teoría de función de corrientes fue desarrollada por Dean en 1965 y está relacionada directamente con la teoría no lineal de Stokes sólo que la teoría en cuestión se basa en una representación del flujo a base de una función de corrientes que se puede representar en dos formas principales:

- Una función de corrientes simétrica o regular que describe ondas periódicas, simétricas con forma permanente con un periodo, altura u profundidad preestablecidos.
- Una función de corrientes irregular que representa a una función con características cinemáticas de onda asociadas a un perfil determinado. Esta teoría es adecuada para modelar y analizar datos arrojados de tanques experimentales y datos obtenidos de campañas de campo.

En forma general al hacer la formulación de la función de corrientes en su forma irregular, no existen restricciones en la forma de la onda, ésta puede cambiar su forma mientras se propaga debido a la interacción de componentes para valores de velocidad de fase y de movimiento relativo.

El problema de valores de frontera se simplifica tomando un sistema coordenado que se mueve en la misma dirección que la velocidad c de la onda. La dependencia de tiempo relativamente desaparece ya que al hacer esta consideración el movimiento del sistema se torna estacionario. La velocidad horizontal con respecto al sistema coordenado en movimiento es $u-c$. La ecuación diferencial es descrita por la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2\Psi = 0$$

Existen las mismas tres condiciones de frontera que para el problema de la teoría de Airy. La primera es la condición de frontera horizontal que no permite flujo en el fondo, la segunda es la condición de frontera cinemática de superficie libre y la tercera es la ecuación dinámica de frontera de superficie libre.

2.4.5 Teoría de onda estacionaria

La teoría de onda estacionaria no tiene aplicación física en el diseño de estructuras marinas comparada con las teorías de onda antes mencionadas, sin embargo, es importante el estudio de ésta teoría para diseño de tanques experimentales, y en la entrada de cuerpos de agua.

La onda estacionaria es generalmente aplicable a cuerpos de agua cerrados y abiertos por ejemplo; puertos, lagos, tanques y contenedores. Una onda estacionaria se debe

considerar como una superposición de dos ondas progresivas con la misma amplitud y periodo viajando en direcciones contrarias tal y como se trató en el segundo capítulo de esta tesis.

La onda estacionaria tiene el doble de altura que la altura individual de las ondas estacionarias que la conforman. Un punto importante a hacer notar sobre las ondas estacionarias es el periodo natural de onda o su periodo de oscilación para un cuerpo de agua cerrado. Para un contenedor rectangular de longitud l , la longitud de onda oscilante L para el n -ésimo punto de oscilación está dado por:

$$L = \frac{2l}{n} \quad n=1,2,\dots$$

Una vez que la longitud L se obtiene, el periodo T se debe calcular directamente de la relación de dispersión.

2.4.6 Aplicación de las teorías de onda

Las diferentes ondas progresivas discutidas en los apartados anteriores se representan en la figura siguiente.

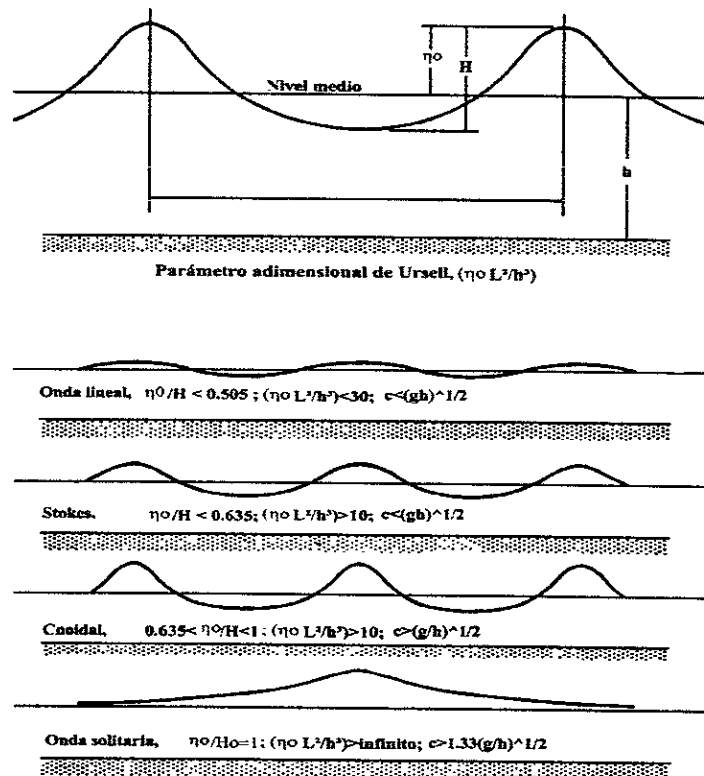


Figura (2.2). Perfiles de diferentes tipos de ondas.

Es importante hacer notar que cuando se trata de una teoría lineal, la onda mantiene una simetría con respecto al eje imaginario definido por el nivel de aguas media al contrario

de las teorías no lineales que muestran una configuración con crestas más altas en comparación con los valles de la onda. Dicho comportamiento se acentúa cuando las teorías se desarrollan para órdenes mayores.

La región de aplicación para las diversas teorías de ondas se puede determinar con base en el rango de validez de cada teoría en dos diferentes áreas, la analítica y la experimental. La validez analítica se basa en que tan bien están aplicadas las condiciones de frontera para cada teoría. Sin embargo, una buena validez analítica no implica una buena representación física del fenómeno. La gran mayoría de las teorías de ondas satisfacen perfectamente la condición de frontera de fondo, sin embargo las condiciones de frontera no lineales en la superficie libre no se satisfacen para ninguna de las teorías exceptuando para la función de corriente para la condición dinámica de frontera de superficie libre.

Le Mehaute (1969) presentó la figura (2.3) para ilustrar aproximadamente los límites de la validez para algunas teorías, se presentan traslapes entre las diferentes teorías de onda ya que existen diversos estudios que difieren sobre las condiciones límites uno de otro.

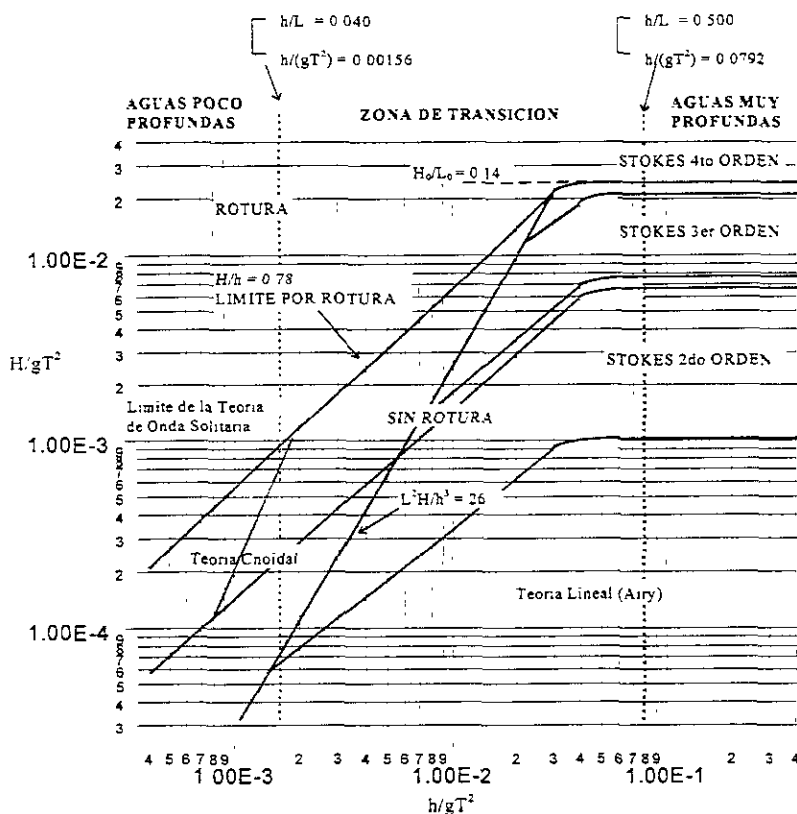


Figura (2.3). Regiones de validez para diferentes teorías de oleaje

2.5 Problemas de condiciones de frontera

Numerosos problemas de física y muchos problemas analíticos en Ingeniería se pueden tratar como problemas de valores de frontera; sin embargo, esto puede no ser aparente en algunos casos.

La formulación del problema del valor de frontera, es simplemente una extensión de la situación física en términos matemáticos tal que exista una única solución

Esto consiste generalmente en establecer una región de interés y especificar una ecuación diferencial que haga satisfacer a dicha región (ver figura (2.2)). Existe una infinidad de soluciones para la ecuación diferencial, por lo que la labor principal es la de seleccionar una solución única que sea relevante al problema físico bajo investigación.

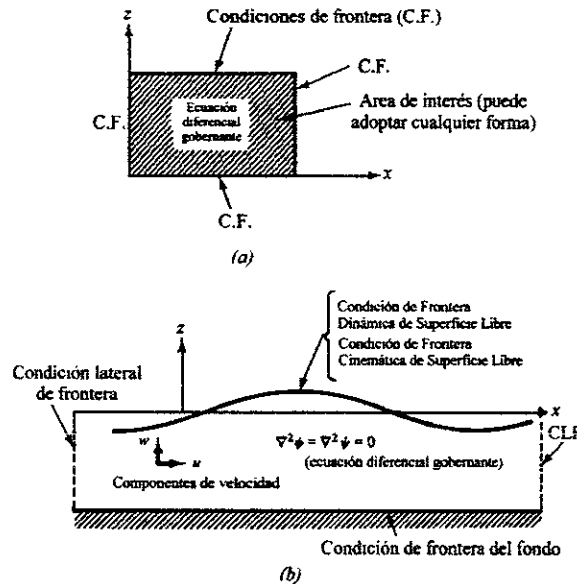


Figura (2.4). (a) estructura general de un problema de condiciones de frontera bidimensional. (b) oleaje bidimensional como un problema de frontera.

Las condiciones de frontera o espaciales son condiciones que especifican el estado de la variable en un cierto punto de interés específico en un tiempo dado. Esta condición temporal se toma como "condición inicial"

2.5.1 La ecuación diferencial de gobierno

Asumiendo que el flujo es irrotacional del fluido y un fluido incompresible, un potencial de velocidades debe de satisfacer la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2.19a}$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.19b)$$

La divergencia del gradiente arroja la ecuación de Laplace, que se debe de mantener en todo el fluido.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.20)$$

La ecuación de Laplace se presenta en numeroso campos de la física y la Ingeniería y existen muchas soluciones, así que es necesario seleccionar aquella que sea aplicable al movimiento del agua en particular.

En general, para flujos irrotacionales y no divergentes, la ecuación de Laplace también se aplica para la función de corrientes. La incompresibilidad o la no divergencia para dos dimensiones asegura la existencia de una función de corriente, por esto las velocidades por debajo de la onda se pueden determinar. Sustituyendo estas velocidades de nuevo dentro de la ecuación de Laplace, exceptuando la función de corriente, resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.21a)$$

o

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.21b)$$

Esta ecuación se debe de mantener en todo el fluido. Si el movimiento es rotacional, sin fricción, la ecuación gobernante será:

$$\nabla^2 \psi = \omega \quad (2.22)$$

Donde ω es la vorticidad.

El potencial de velocidades se puede definir para dos y tres dimensiones, la función de corriente solamente se puede definir en tres dimensiones si el flujo es simétrico con respecto a un eje y se considera matemáticamente bidimensional. La ecuación de Laplace es lineal, esto es, no involucra productos y entonces cuenta con la interesante propiedad de la superposición; esto es, ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la ecuación de Laplace ambas, entonces $\phi_3 = A\phi_1 + B\phi_2$ también resolverán la ecuación, donde A y B son constantes arbitrarias.

2.6 Condiciones de frontera

2.6.1 Condición cinemática de frontera

En cualquier frontera, sin importar en donde se establezca, libremente, en el fondo o en la superficie del agua; ciertas condiciones físicas deben ser satisfechas por las velocidades del fluido. Estas condiciones en la cinemática de la partícula se denominan condiciones cinemáticas de frontera. Es claro que debe de existir una interfase donde no debe de haber flujo que la cruce.

La expresión matemática de la condición cinemática de frontera se puede derivar de una ecuación que describe la superficie que constituye a la frontera. Cualquier superficie se puede definir en términos de $F(x,y,z,t) = 0$, y si nos movemos conjuntamente con ella, ésta no cambia.

$$\frac{DF(x,y,z,t)}{DT} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{F(x,y,z,t)=0} \tag{2.23a}$$

o

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = u \bullet \nabla F = u \bullet n |\nabla F| \tag{2.23b}$$

Donde el vector unitario normal a la superficie es

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \tag{2.24}$$

Por lo tanto:

$$u \bullet n = -\frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|} \quad \text{en } F(x,y,z,t) = 0 \tag{2.25}$$

Si la superficie no cambia con el tiempo entonces $u \bullet n = 0$ (la componente de velocidad es normal a la superficie), ya que la condición requiere que el componente de la velocidad del fluido normal a la superficie esté relacionado con la velocidad local de la misma.

2.6.2 Condición de frontera del fondo (CFF)

La condición de frontera para fondo impermeable se describe como $z = -h(x)$ para el caso bidimensional donde el origen está colocado en el nivel de aguas tranquilas y h

representa la profundidad. Si el fondo es impermeable, se espera que $u \cdot n = 0$ ya que el fondo no se mueve con respecto al tiempo.

La ecuación de superficie para el fondo es $F(x,z) = z + h(x) = 0$, consecuentemente:

$$u \cdot n = 0 \tag{2.26}$$

donde

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{dh}{dx}i + 1k}{\sqrt{(\frac{dh}{dx})^2 + 1}} \tag{2.27}$$

haciendo el producto punto y multiplicando por el término del denominador se tiene

$$u \frac{dh}{dx} + w = 0 \quad \text{en } z = -h(x) \tag{2.28a}$$

o

$$w = -u \frac{dh}{dx} \quad \text{en } z = -h(x) \tag{2.28b}$$

Para un fondo horizontal, se tiene, $w = 0$ en $z = -h$ y para fondo inclinado se tiene:

$$\frac{w}{u} = - \frac{dh}{dx} \tag{2.29}$$

En la figura (2.3) se puede observar que las condiciones cinemáticas establecen que el fluido en el fondo es tangente al mismo.

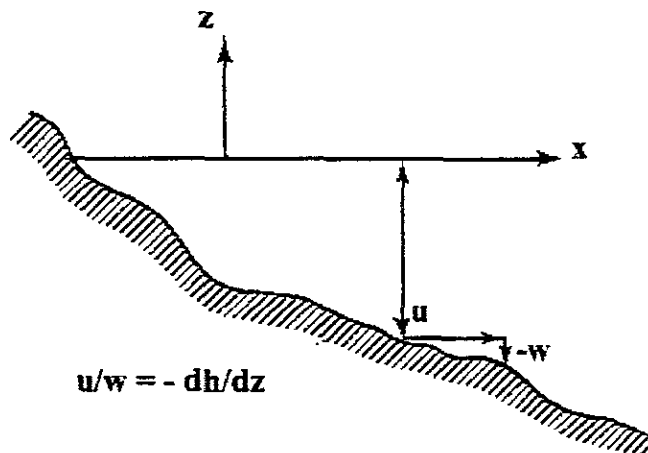


Figura (2.5). Condición de frontera del fondo para el caso bidimensional

2.6.3 Condición cinemática de frontera de superficie libre (CCFSL)

La superficie libre de una ola se puede describir como $F(x,y,z,t) = z - \eta(x,y,t) = 0$ Donde $\eta(x,y,t)$ es el desplazamiento de la superficie libre con respecto al plano horizontal, $z = 0$. La condición cinemática de frontera de superficie libre es:

$$u \cdot n = \frac{\partial \eta / \partial t}{\sqrt{(\partial \eta / \partial x)^2 + (\partial \eta / \partial y)^2 + 1}} \text{ en } z = \eta(x,t) \quad (2.30)$$

donde

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k}{\sqrt{(\partial \eta / \partial x)^2 + (\partial \eta / \partial y)^2 + 1}} \quad (2.31)$$

Haciendo uso del producto punto queda:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta(x,y,t)} \quad (2.32)$$

2.6.4 Condición dinámica de frontera de superficie libre (CDFSL)

Una característica que distingue a cualquier arreglo de superficies (en el espacio), es que pueden soportar variaciones de la presión actuante, sin embargo, las superficies que están en contacto con la atmósfera en una interfase aire – agua, no pueden soportar variaciones de presión a través de la interfase y por lo tanto deben de tener una respuesta a fin de mantener una presión uniforme. La condición de frontera dinámica, es requerida en cualquier superficie libre o interfase para describir la distribución de presiones en dicha frontera. Un interesante efecto del desplazamiento de la superficie libre es que la posición de la frontera superior no se conoce a priori en el problema del oleaje.

La presión debe de ser uniforme a lo largo de la forma de la ola, la ecuación de Bernoulli con la presión en cualquier punto constante se aplica a la superficie libre, $z = \eta(x,t)$,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P_\eta}{\rho} + gz = C(t) \tag{2.33}$$

donde P_η es una constante y usualmente se toma como una presión igual a cero.

2.6.5 Condiciones para fronteras “sensibles”

Si se conocen las relaciones de presión en un oleaje generado por la acción del viento sobre la superficie del agua, la ecuación de Bernoulli serviría para relacionar ese campo de viento con la cinemática de la ola. La ola y el viento pueden ser independientes y el movimiento de onda en lo que se denomina “interfase”. La figura (2.4) ejemplifica tres grados de interfase entre el viento y el oleaje.

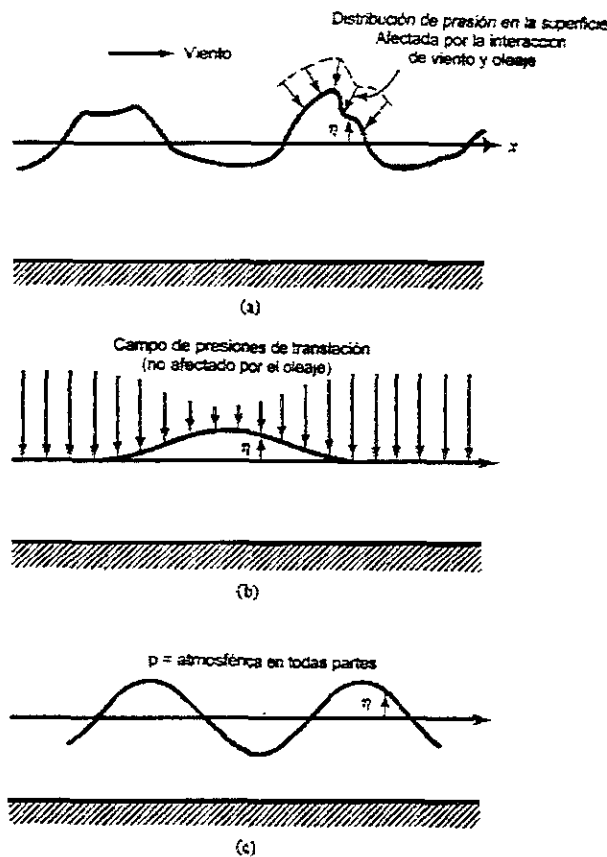


Figura (2.6). Varios grados de la interacción aire-agua y la presión atmosférica: (a) unión aire-agua; (b) fuerzas debidas al movimiento del campo de presiones; (c) olas libres, no afectadas por ninguna variación de la interfase aire-agua.

La CDFSL queda expresada a través de la ecuación de Bernoulli con una distribución de presiones uniforme en la superficie

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{P_\eta}{\rho} + gz = C(t) \quad z = \eta(x,t) \quad (2.34)$$

donde P_η es una constante y usualmente se toma con un valor igual a cero.

Si las longitudes de la onda son muy cortas (del orden de algunos centímetros), la superficie no sigue siendo libre, es decir, aunque la presión es uniforme sobre la superficie del agua, como resultado de una curvatura en la superficie, una presión no uniforme ocurrirá en una superficie inmediatamente debajo del espejo de agua. Denotando un coeficiente de tensión superficial σ' , la tensión por unidad de longitud es simplemente.

$$T = \sigma' \quad (2.35)$$

Ahora si se considera una superficie con una curvatura, tal y como se muestra en la figura (2.5), haciendo un análisis de fuerzas en un diagrama de cuerpo libre, y considerando p como la presión por debajo de la superficie libre, se obtiene que:

$$T \left[-\text{sen} \alpha|_x + \text{sen} \alpha|_{x+\Delta x} \right] + (p - p_\eta) \Delta x = 0 \quad (2.36)$$

Haciendo uso de la aproximación $\partial \eta / \partial x \cong \text{sen} \alpha$ y de una expansión en series de Taylor, permitiendo que dicha función se aproxime a cero, se tiene:

$$p = p_\eta - \sigma' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.37)$$

así para los casos en que la tensión superficial es importante, la condición dinámica de frontera se modifica a:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_\eta}{\rho} - \frac{\sigma'}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = C(t) \quad \text{en } z = \eta(x,t) \quad (2.38)$$

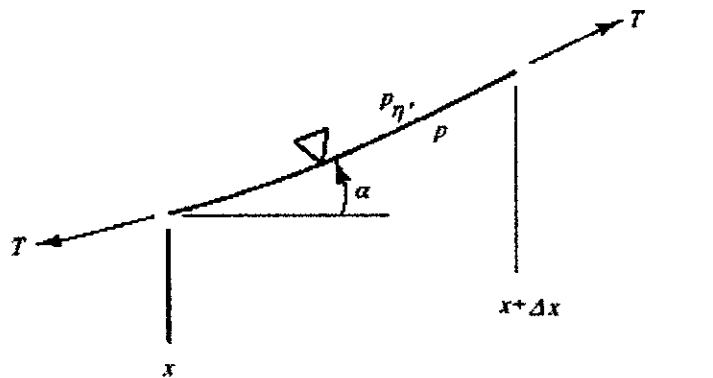


Figura (2.7). Diagrama de un elemento de superficie

2.6.6 Condiciones de frontera laterales

Las fronteras se deben también de definir para las condiciones laterales para tener perfectamente delimitado cualquier problema. Existen diversas situaciones que se deben de considerar.

Si las olas se están propagando en una dirección, las condiciones de no-existencia de flujo y definición bidimensional se aplican para la otra dirección. En la figura (2.6) se presentan dos ejemplos para este problema.

Considerando una barrera vertical actuando como una máquina de oleaje en un tanque de agua. El desplazamiento de dicha barrera se describe $x = S(z,t)$, la función cinemática de frontera es:

$$u \cdot n = \frac{\partial S(z,t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}} \tag{2.39}$$

donde

$$n = \frac{1i - \frac{\partial S}{\partial z} k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}} \tag{2.40}$$

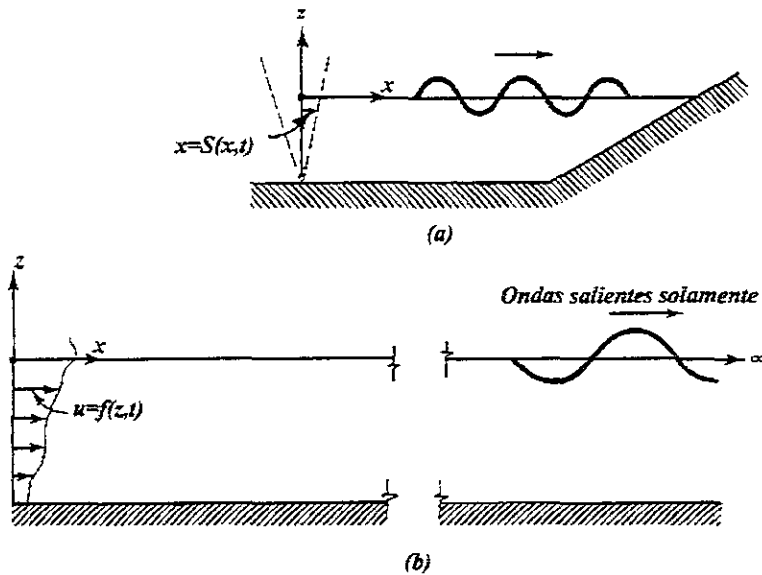


Figura (2.8). (a) esquema de un generador de oleaje en un tanque; (b) condición de radiación para el problema del generador de oleaje en dirección x .

Ejecutando el producto punto

$$u - w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{en } x=S(z,t) \tag{2.41}$$

Para ondas que son periódicas en tiempo y espacio, la condición de frontera es expresada como una condición periódica,

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \phi(x + L, t) \\ \phi(x,t) &= \phi(x, t + T) \end{aligned} \tag{2.42a, 2.42b}$$

2.7 Aplicación de las condiciones de frontera

Las condiciones de frontera sirven para seleccionar, de las soluciones propuestas para la ecuación de Laplace basadas en la separación de variables, aquellas aplicables al problema físico de interés. En general, el uso de las condiciones de frontera permite la determinación de algunas de las constantes desconocidas; por ejemplo: *A*, *B*, *C* y *D*.

2.7.1 Condición de periodicidad lateral

Todas las soluciones obtenidas por la separación de variables satisfacen a la ecuación de Laplace; sin embargo, algunas de ellas no son periódicas en *x*; de hecho, la solución se puede separar periódicamente solamente si *k* es real y diferente de cero. Además, se tiene como una solución de la ecuación de Laplace el siguiente potencial de velocidades:

$$\phi(x, z, t) = (A \cos kx + B \operatorname{sen} kx)(Ce^{kz} + De^{-kz}) \operatorname{sen} \sigma t \tag{2.43}$$

Para satisfacer el requerimiento de periodicidad.

$$\begin{aligned} A \cos kx + B \operatorname{sen} kx &= A \cos k(x + L) + B \operatorname{sen} k(x + L) \\ &= A(\cos kx \cos kL - \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kL) + B(\operatorname{sen} kx \cos kL + \cos kx \operatorname{sen} kL) \end{aligned}$$

Que se satisface para $\cos kL = 1$ y $\operatorname{sen} kL = 0$; significa que $k = 2\pi/L$ (conocido como el número de onda).

Usando el principio de superposición, se puede dividir ϕ en varias partes, para propósitos prácticos, se considerará:

$$\phi = A \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \operatorname{sen} \sigma t \tag{2.44}$$

El término relacionado con B se adicionará posteriormente.

2.7.2 Condición de frontera para fondo horizontal

Sustituyendo en la condición de frontera de fondo se obtiene:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = -A \cos kx (kC e^{kz} - D e^{-kz}) \sin \sigma t \\ z &= -h \\ -A \cos kx (kC e^{kh} - D e^{-kh}) \sin \sigma &= 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para que se cumpla en cualquier x y t , los términos que están dentro del paréntesis deben ser idénticos a cero, esto da:

$$C = D e^{2kh}$$

El potencial de velocidades queda expresado como:

$$\begin{aligned} \phi &= G \cos kx \cosh k(h + z) \sin \sigma t \\ G &= 2AD e^{kh} \end{aligned} \tag{2.46}$$

2.7.3 Condiciones de frontera dinámicas de superficie libre

La ecuación de Bernoulli se puede utilizar para especificar una presión constante en la superficie del agua. Dicha ecuación debe de satisfacerse en $z = \eta(x, t)$ lo cual es desconocido a priori. Esta condición se evalúa en $z = 0$ (conocido) a través de una serie de Taylor truncada.

$$\begin{aligned} (\text{Ecuación de Bernoulli})_{z=\eta} &= (\text{Ecuación de Bernoulli})_{z=0} \\ + \eta \partial \partial z (\text{Ecuación de Bernoulli})_{z=0} &+ \dots \end{aligned} \tag{2.47}$$

o

$$\left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} \right)_{z=\eta} = \left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} \right)_{z=0} + \eta \left(gz - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + w^2) \right)_{z=0} + \dots = C(t)$$

Donde $p=0$ en $z=\eta$.

Para olas infinitesimalmente pequeñas, η es pequeño, por lo tanto se asume que las velocidades y presiones son también pequeñas; entonces cualquier producto de estas variables es muy pequeño y si se desprecian dichos términos tan pequeños, la ecuación de Bernoulli se puede expresar como sigue:

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \right)_{z=0} = C(t)$$

Si se sustituye el valor del potencial de velocidades y se considera, por definición, que η tendrá un promedio espacial y temporal nulo; $C(t) = 0$

$$\eta = \left[\frac{G\sigma \cosh kh}{g} \right] \cos kh \cos \sigma$$

η está dado como una constante periódica en el tiempo y espacio como sigue:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma \quad (2.48)$$

Así finalmente el potencial de velocidades queda en términos de H , σ , y k .

$$\phi = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma \quad (2.49)$$

2.7.4 Condición cinemática de frontera de superficie libre

Esta condición se empleará para encontrar la relación entre los parámetros k y σ . Usando la serie de Taylor para relacionar la condición de frontera para una elevación cualquiera, $z = \eta(x, t)$ calculada en $z = 0$, se tiene:

$$\left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=\eta} = \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \dots = 0$$

Considerando que η no es una función de z , y conservando los parámetros pequeños, u , w y η , la condición cinemática de frontera linealizada resulta:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (2.50a)$$

o

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.50b)$$

Substituyendo para ϕ y η queda

$$\begin{aligned}
 & -\frac{H}{2} \frac{gk \operatorname{senh} k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \cos kx \operatorname{sen} \sigma t \Big|_{z=0} \\
 & = -\frac{H}{2} \sigma \cos kx \operatorname{sen} \sigma t \\
 & \sigma^2 = gk \operatorname{tanh} kh
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

También puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 & = g \frac{2\pi}{L} \operatorname{tanh} kh \\
 C^2 = \frac{L^2}{T^2} & = \frac{g}{k} \operatorname{tanh} kh \\
 L & = \frac{g}{2\pi} T^2 \operatorname{tanh} \frac{2\pi h}{L}
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores, que son realmente la misma ecuación expresada en términos de diferentes variables, están referidas a la ecuación de dispersión; ya que éstas describen la forma de cómo un campo de ondas constituidas por muchas frecuencias que se separan o dispersan debido a las diversas celeridades de los diversos componentes de frecuencia, se propagan.

La velocidad de onda, o celeridad se ha definido como $C=L/T$.

$$C = \frac{L\sigma}{T} \operatorname{tanh} kh = C \operatorname{tanh} kh \tag{2.52}$$

2.7.5 Oleaje estacionario

Una solución para un problema de frontera para ondas de pequeña amplitud es la siguiente:

$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kh \sin \sigma t$$

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma t \tag{2.53}$$

donde $\sigma^2 = gk \tanh kh$.

La forma del oleaje se muestra en la figura (2.7). Se puede observar que en el punto $\sigma t = \pi/2$. La onda vale cero para cualquier x , en $\sigma t = 0$, se tiene una forma coseno al igual que esa misma forma pero con diferentes magnitudes para los otros tiempos. A esta forma de onda se le conoce como “onda estacionaria” y no se propaga en ninguna dirección. Para las posiciones $kx = \pi/2$, y $3\pi/2$, y continuando dicha serie, existen los nodos, esto se traduce a que no existe ningún movimiento en estos puntos. Las olas estacionarias comúnmente se presentan cuando el oleaje se refleja completamente debido a paredes verticales.

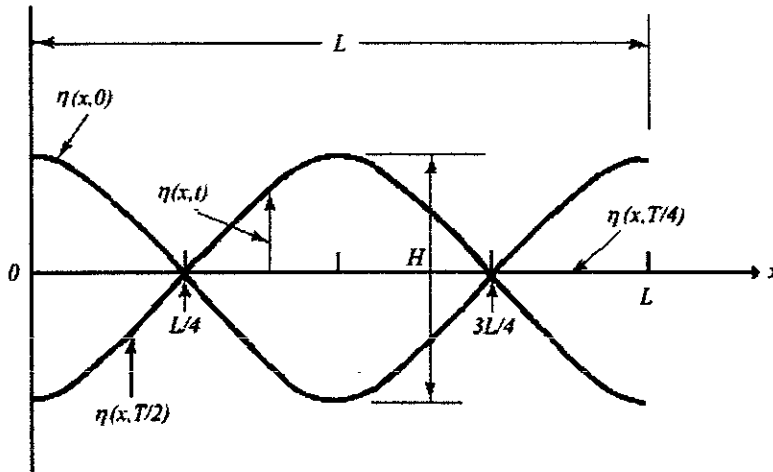


Figura (2.9). Desplazamiento de la superficie del agua asociada a una onda estacionaria

2.7.6 Ondas progresivas

Considerando otra onda estacionaria

$$\phi(x,z,t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin kh \cos \sigma t \tag{2.54}$$

Este potencial de velocidades es la solución de la ecuación de Laplace, así como de todas las condiciones de frontera. El desplazamiento asociado de la superficie del agua es:

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{H}{2} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \sigma t \quad (2.55)$$

Debido a que la ecuación de Laplace es lineal y por lo tanto su superposición es válida, si se resta el potencial de velocidades obtenido en la ecuación (2.54) al que previamente se tenía en la ecuación (2.43) se obtiene:

$$\phi = -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (2.56)$$

Este nuevo potencial de velocidades tiene una nueva función de elevación que da:

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) \quad (2.57)$$

se puede tener también:

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma t + \frac{H}{2} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \sigma t = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

Lo cual es el mismo resultado. La forma de la onda se mueve con el tiempo, para determinar la dirección de dicho movimiento, es necesario examinar un mismo punto sobre la onda en dos diferentes tiempos t_1 y t_2 . La localización del punto x también cambia con el tiempo; esta deducción se ejemplifica en la figura (2.8), la velocidad con la que ocurre dicho movimiento se calcula:

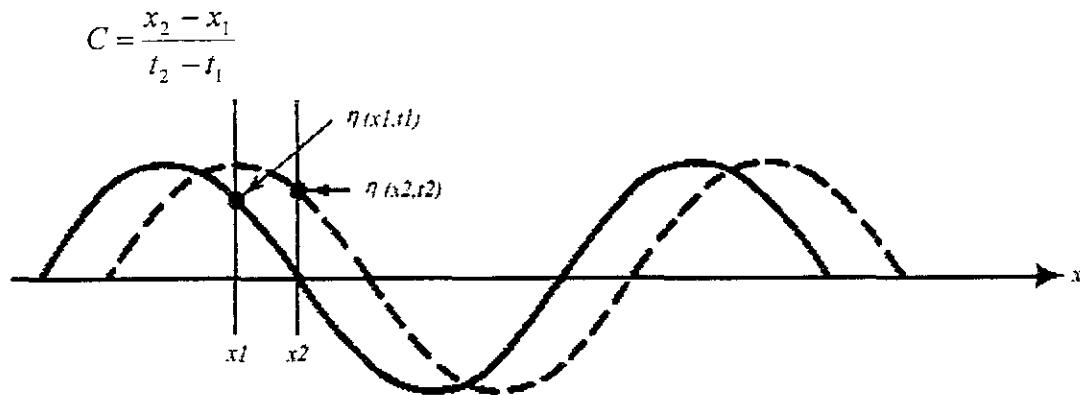


Figura (2.10). Características de una onda progresiva

Se presupone que el punto 1 conserva su elevación con respecto al nivel medio en ambos tiempos, es decir, $\eta(x_1, t_1) = \eta(x_2, t_2)$ de hecho se tiene:

$$kx_1 - \sigma t_1 = kx_2 - \sigma t_2$$

$$k(x_1 - x_2) = \sigma(t_1 - t_2)$$

o también

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{2\pi / T}{2\pi / L} = C = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

ya sea el movimiento de izquierda a derecha o en sentido contrario.

2.7.7 Las relaciones de dispersión en aguas someras y profundas

Dado que las funciones hiperbólicas son asintóticas para aguas someras y profundas, y casi todas las ecuaciones que describen el movimiento del oleaje. En la tabla (2.1) se muestran dichas simplificaciones con base en el valor del parámetro kh .

<i>Función</i>	<i>Kh largo</i>	<i>Kh corto</i>
<i>Cosh kh</i>	<i>ekh/2</i>	<i>1</i>
<i>Senh kh</i>	<i>ekh/2</i>	<i>kh</i>
<i>Tanh kh</i>	<i>1</i>	<i>kh</i>

Tabla (2.1). Formas asintóticas de funciones hiperbólicas

La relación de dispersión y la celeridad de la onda para aguas someras se reduce a lo siguiente:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \approx gk$$

$$L = L_0$$

La velocidad de onda en aguas someras se determina solamente por la profundidad del agua. Para aguas profundas, $kh > \pi$,

$$(2.60)$$

$$\sigma^2 = gk^2 h$$

o

$$\frac{\sigma^2}{k^2} = C^2 = gh$$

$$C = \sqrt{gh}$$

donde

$$Lo = \frac{g}{2\pi} T^2 = 1.56T^2$$

$$Co = \frac{g}{2\pi} T = 1.56T$$

2.7.8 La función de corriente para ondas de amplitud pequeña

El potencial de velocidades se ha utilizado para desarrollar la teoría de la amplitud pequeña, así como es conveniente utilizar las representaciones de la función de corrientes. Por esto podemos utilizar las ecuaciones de Cauchy – Riemann para desarrollar dichas teorías a partir del potencial de velocidades.

Para ondas progresivas:

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \\ \Psi(x, z, t) &= -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)\end{aligned}\tag{2.61}$$

Para ondas estacionarias:

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \operatorname{sen} \sigma t \\ \Psi(x, z, t) &= -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \sigma t\end{aligned}\tag{2.62}$$

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han desarrollado las bases para el estudio de las ondas lineales tanto estacionarias como progresivas, lo cual dan pie a la solución y aplicación a diversos problemas reales de la Ingeniería Civil, enfocada al área de la hidráulica marítima.

La teoría lineal de ondas vista anteriormente, describe algunas de las características básicas del oleaje en sus distintas regiones y para continuar con una descripción adecuada, ahora es necesario estudiar las transformaciones que ocurren cuando un tren de ondas se aproxima a aguas someras.

Las condiciones físicas que se conocen del oleaje, son el resultado de la observación y medición de las características de la superficie libre de un cuerpo de agua y que posteriormente se trabajan y depuran para una modelación posterior. Los resultados de dichos tratamientos, generalmente se resumen en la obtención de alturas de oleaje representativas, periodos, parámetros de diseño, modelación de fenómenos de tormentas, etc. Dados estos datos de oleaje, es necesario tener las herramientas para determinar los cambios eventuales que ocurren cuando las ondas se propagan del medio profundo hacia la playa llegando a su rotura y disipación de energía. También interesa conocer el cambio en el nivel medio del agua debido a la presencia de estructuras reflejantes del oleaje.

El oleaje, generalmente se aproxima a la playa en una forma oblicua y la batimetría de aguas someras es generalmente poco regular, por esto se requiere estudiar al fenómeno de transformación del oleaje como una aproximación tridimensional. Sin embargo, para fines de simplificación matemática se hace una aproximación inicial en dos dimensiones añadiendo los efectos tridimensionales posteriormente.

En éste capítulo se presenta primeramente una breve descripción física de los fenómenos de transformación del oleaje y posteriormente se enfocará el estudio al fenómeno de refracción particularmente, dándole así un tratamiento completo y detallado, definiendo las consideraciones que se considerarán al aplicar el modelo computacional que se describirá en el siguiente capítulo.

Las fuerzas que actúan sobre estructuras como diques, escolleras y rompeolas, se derivan y relacionan directamente con el campo de presiones del fluido en acción y con la cinemática de las partículas. Dichas fuerzas, se transforman y cambian mientras se propagan hacia la costa; el asomeramiento del oleaje y el estudio de las distintas condiciones batimétricas que influyan cualquier cambio en el mismo son puntos a tratar en éste capítulo que sustentará el objetivo de la Tesis que se presenta.

3.2 Descripción física de la transformación del oleaje

Conforme va disminuyendo la profundidad del fondo marino, la celeridad de onda y su longitud van disminuyendo, ambas con la misma relación ($L/C=T$). El periodo de onda se mantiene constante desde aguas profundas hasta el punto de rotura del oleaje.

Si la energía de una ola fuese constante al propagarse de aguas profundas a aguas someras, la disminución constante de la longitud de la ola ocasiona que su altura aumente conforme ésta se acerca a aguas poco profundas. Pero debido a la velocidad propia con la que se transmite el oleaje, éste primero disminuye suavemente en la zona de transición de aguas profundas a someras, y luego comienza a aumentar su altura rápidamente; sin embargo, cualquier interferencia del viento, corrientes o cualquier disipación o reflexión de energía ocasionan una alteración evidente en el recorrido del tren de oleaje, así como para olas muy agudas o peraltadas que alcanzan su límite y rompen disipando así su energía y por lo tanto su altura.

La gran mayoría de las olas poco peraltadas en aguas profundas tienen una conformación de su superficie muy aproximada a un comportamiento senoidal. En cambio, para olas muy peraltadas en aguas profundas, o también para olas que se aperaltan al viajar hacia aguas menos profundas, muestran una forma muy aguda en sus crestas y muy plana en sus valles. Y la duración de las crestas de la ola aumentan menos de la mitad del periodo de la misma. El movimiento de las partículas también se modifica pasando de una órbita cercanamente circular a una forma asimétrica con respecto a su eje horizontal; achatándose en la parte inferior y redondeándose en su parte superior.

La teoría de la pequeña amplitud indica que la componente de velocidad horizontal de una partícula, en cualquier punto por debajo de la superficie libre del agua, aumenta significativamente conforme va disminuyendo la batimetría de fondo, particularmente en aguas someras. La componente vertical de la velocidad de la partícula aumenta mientras el fondo ve aumentando. En aguas profundas, ambas componentes disminuyen exponencialmente con el aumento de la distancia al fondo. En aguas someras, la componente horizontal de velocidad es constante de la superficie al fondo.

Las características asimétricas de la superficie libre del agua ocasionan unas diferencias significantes entre las velocidades de las partículas en las crestas y valles. Duraciones mas cortas de crestas significan que la partícula cuenta con un tiempo significativamente más pequeño para tomar la parte superior de la cresta que para ir al punto mas bajo del valle.

En la zona de rompiente o rotura, el movimiento oscilatorio se transforma en movimiento de traslación de las partículas de agua, ocasionando un fenómeno que depende principalmente de la pendiente de la playa y las condiciones de la superficie, y de la agudeza de las olas incidentes.

3.3 Características de las ondas de pequeña amplitud

Conociendo el potencial de velocidades, se define también del campo del flujo para una onda pequeña y progresiva.

3.3.1 Contorno de la superficie

Insertando el potencial de velocidades dentro de la CDFSL y dando el valor $z=0$ se obtiene la ecuación de contorno de la superficie libre del fluido.

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right) \quad (3.1)$$

Se define al contorno de superficie como una forma de coseno, lo cual es razonable para ondas de baja amplitud. Pero cuando dicha amplitud aumenta, las formas de las ondas se hacen asimétricas verticalmente como se explicó anteriormente.

3.3.2 Celeridad de onda

Combinando la CDFSL y la CCFSL se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

e insertando el potencial de velocidades queda:

$$C = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh kh}{k}} \quad (3.2)$$

La ecuación anterior es la ecuación clásica de dispersión que relaciona a la celeridad de onda con la longitud de onda y la profundidad. Utilizando la relación $C=L/T$, la ecuación (4.2) se puede convertir en las siguientes fórmulas:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}$$

3.3.3 Clasificación del oleaje con base en su profundidad relativa

Existe una relación h/L que decrece mientras la profundidad decrece también. Dicho parámetro se le llama profundidad relativa y es importante para clasificar a las ondas. Existen una serie de simplificaciones de ciertas ecuaciones de ondas para ciertos rangos y valores de la profundidad relativa, estos rangos definen el límite de ciertos patrones únicos de comportamiento del oleaje.

Existen tres rangos de profundidad; profundo, intermedio o de transición y aguas poco profundas o someras. Cuando la profundidad relativa es aproximadamente 0.5 se

trabaja en aguas profundas. Y la simplificación que ocurre en la ecuación (3.2) es que el término \tanh es muy cercano a la unidad y por lo tanto queda:

$$C_0 = \frac{\sqrt{gL_0}}{2\pi}$$

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi}$$

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

El subíndice cero indica que se está trabajando sobre aguas profundas, y el periodo permanece invariable ya que éste no varía con la propagación de la onda.

Cuando el parámetro de profundidad relativa es menor a 0.5, las ondas entran a un rango intermedio o de transición. Y a partir de éste punto, el movimiento de las partículas y otras características dependen ahora del periodo de onda y de la batimetría de fondo y las ecuaciones originales se deberán utilizar.

El rango de transición continúa hasta que el valor de la profundidad relativa alcanza el valor aproximado de 0.05 donde entra en el dominio de aguas someras, el valor de $\tanh kh$ es muy similar al de kh solamente, así que las ecuaciones quedan:

$$C = \sqrt{gh}$$

$$L = \sqrt{gh}T$$

En algunos casos es conveniente expresar la profundidad relativa en términos de la profundidad y el periodo ya que si se maneja la relación anteriormente vista pueden darse casos de tener un oleaje con periodos extremadamente grandes dentro de aguas someras, lo cual es imposible. A partir de la ecuación de dispersión, los límites para aguas profundas y someras son:

$$\frac{d}{gT^2} > 0.08 \quad \text{aguas profundas} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{gT^2} < 0.0025 \quad \text{aguas someras} \quad (3.4)$$

3.3.4 Velocidad de la partícula, aceleración, y geometría orbital.

Añadiendo las componentes de velocidad horizontal y vertical en la ecuación de dispersión, se obtiene:

$$u = \frac{\pi H}{T} \left[\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right] \cos(kx - \sigma t)$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \left[\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \right] \sin(kx - \sigma t)$$
(3.5a; 3.5b)

Estas ecuaciones otorgan los componentes de velocidad en un punto $(x, -z)$ conforme el tiempo transcurre y distintas partículas alcanzan y pasan dicho punto.

Cada componente de velocidad está formado de tres partes: la primera es la partícula de la superficie en aguas someras ($\pi H/T$) que es físicamente la órbita circular de la partícula dividida entre el tiempo que tarda en completarla. La segunda es una función hiperbólica en z que causa una disminución exponencial en la velocidad de la partícula con relación a un aumento en la profundidad. La tercera, un término de fase que define la variación cíclica a través de una fase de onda. Hay que recordar que las ecuaciones de velocidad sólo son válidas entre la superficie libre del agua y el fondo.

Las componentes horizontales y verticales de la aceleración de una partícula son:

$$a_x = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

$$a_z = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t)$$
(3.6a; 3.6b)

Una representación gráfica típica de las geometrías de las órbitas para aguas profundas y someras se muestran en la figura (4.1). En aguas profundas, las órbitas son circulares con un diámetro en la superficie igual a la altura de ola y con diámetro decreciente a razón del 4% hacia el fondo. Las partículas en aguas someras describen una forma elíptica, éstas elipses se van achatando debido al contacto o encuentro con el fondo.

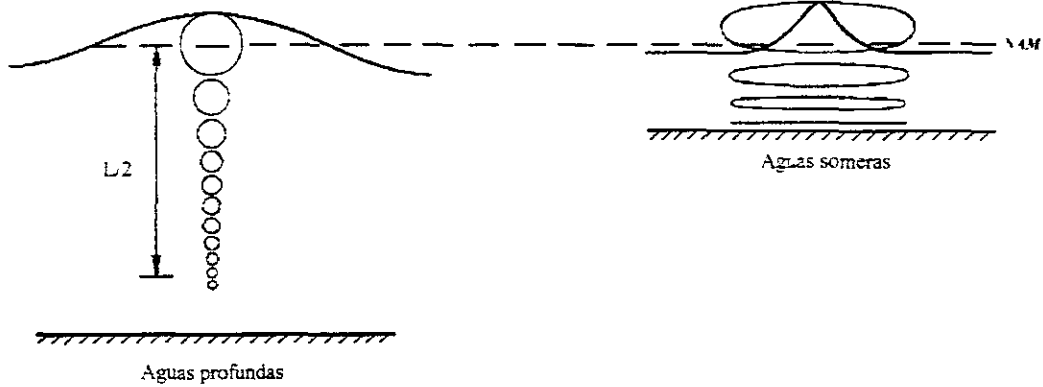


Figura (3.1). Transformación de las órbitas de las partículas y la forma del oleaje en aguas profundas y someras.

La teoría de la pequeña amplitud da como resultado una superficie cercanamente senoidal para ondas que se propagan en aguas profundas con una altura pequeña. Sin embargo, mientras la onda se va propagando hacia aguas de transición y aguas someras, la superficie se asemeja más a una forma trocoidal con valles largos y planos y crestas agudizadas.

Como se hizo para la ecuación de dispersión, es de mucha utilidad observar los límites alcanzados por la velocidad de la partícula y la aceleración en aguas someras y profundas.

$$\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \approx \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \approx e^{kz} \quad \text{aguas profundas} \quad (3.7)$$

$$\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \approx \frac{1}{kh} \quad \text{aguas someras} \quad (3.8)$$

$$\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \approx 1 + \frac{z}{h}$$

3.3.5 Flujo de energía y celeridad de grupo

Una propiedad importante de las ondas es que éstas transmiten energía. El flujo de energía o potencia P de una onda es el promedio de la energía por unidad de tiempo y por el ancho de cada cresta que es transmitida en la dirección de propagación de las ondas.

Un fenómeno relacionado con el flujo de energía es la celeridad de un grupo de ondas. La figura (3.2) muestra dos trenes de ondas, la primera muestra una celeridad mayor así como una longitud mayor que la otra, viajando en la misma dirección que la segunda. La configuración de superficie resultante, se muestra en la figura de abajo, es la suma de las elevaciones de superficie individuales en cada punto a lo largo del nivel medio. El resultado es un efecto en el cual, las dos ondas están alternativamente dentro y fuera de fase. Esto produce la onda más alta cuando las dos componentes están en fase y por el contrario, se

reducen a cero cuando ambas componentes están exactamente fuera de fase. Esto resulta un grupo de ondas propagándose con una celeridad C_g .

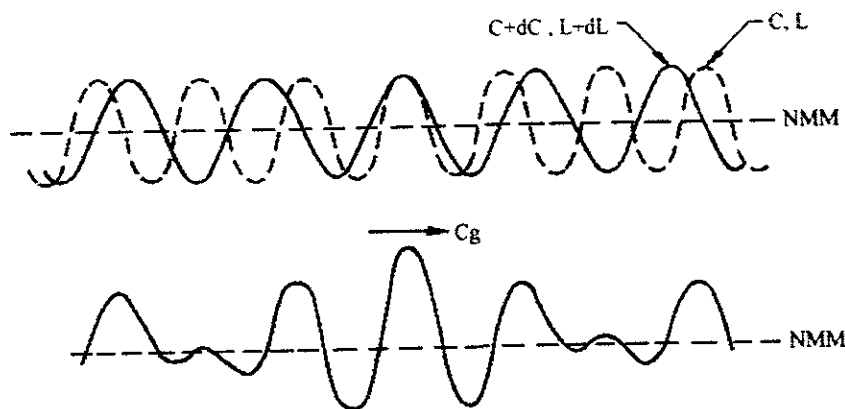


Figura (3.2). Desarrollo de grupos de ondas

Se puede demostrar que la celeridad de grupo está relacionada a la longitud y celeridad de ondas individuales en el grupo por:

$$C_g = C - L \frac{dC}{dL} \tag{3.9}$$

En aguas poco profundas, las ondas con pequeña amplitud son no-dispersivas ($dC/dL=0$) y la celeridad de grupo equivale a la celeridad de fase. En aguas profundas $dC/dL=C/2L$ mostrando que la celeridad de grupo es equivalente a la mitad de la celeridad de fase. Una relación general se puede obtener insertando la ecuación de celeridad de fase C en la ecuación anterior mostrando:

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \tag{3.10}$$

3.4 Transformación del oleaje entrante a aguas someras

Diversos son los cambios que ocurren cuando un tren de ondas se aproxima a aguas someras. Uno de los más obvios es el cambio de la altura del oleaje mientras éste se asomera, también la disminución en la longitud de onda y el cambio de la dirección son ejemplos de dichas transformaciones que en la mayoría de los casos su observación es más clara desde el aire.

3.4.1 Conservación de las ecuaciones de ondas

En todo el estudio y el análisis que se ha realizado en éste trabajo se ha asumido que las ondas se propagan en la dirección x , pero para poder estudiar a una línea de costa, es conveniente localizar un sistema coordenado tal que la dirección x sea en dirección perpendicular de la línea de costa y la dirección y sea paralela a la línea de costa para así poder describir la variación en el plano del oleaje.

Ya contando con un sistema coordenado es posible descomponer algunos parámetros importantes como lo es el número de onda k en dichas coordenadas. Si el número de onda se propaga en una dirección arbitraria x - y en el espacio se tiene:

$$k = k_x i + k_y j$$

y

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Si se tiene un ángulo de incidencia θ que se define como el ángulo existente entre la dirección normal a la playa (la dirección x) y la dirección de la onda, entonces:

$$k_x = k \cos \theta$$

$$k_y = k \sin \theta$$

La línea horizontal en la cual las ondas se mueven es conocida como rayo de onda, definido como una línea en la cual vector de onda es siempre tangente.

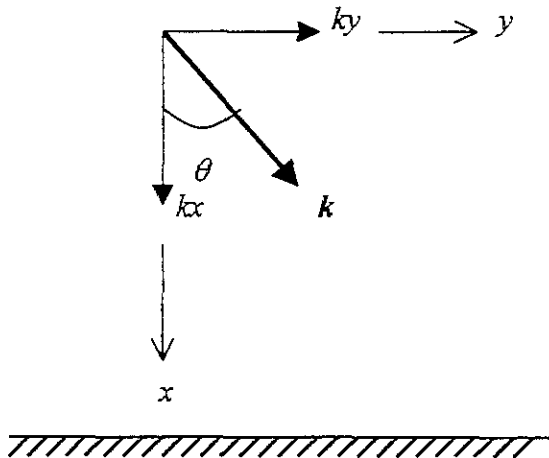


Figura (3.3). Descomposición del número de onda k en sus componentes ortogonales

El ángulo descrito entre la dirección x y el rayo de onda se obtiene mediante la relación siguiente:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{k_x}{k_y}$$

Para examinar la relación de conservación de ondas se plantea lo siguiente. Para una longitud pequeña dx en la dirección del movimiento de la onda, se hace un balance del número de ondas que entren y de las que salgan de la región de control con las que se acumulan dentro de la misma. La tasa de entrada a la región de control es $1/T$ o $\sigma/2\pi$. La tasa de salida en una distancia dx se puede encontrar utilizando la serie de Taylor de primer orden. La diferencia del flujo que entra al que sale debe de ser equivalente a la acumulación de ondas dentro de la región con respecto al tiempo, que es, la tasa de tiempo de cambio del número de ondas dentro de la región.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{L} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(k \frac{dx}{2\pi} \right) = \frac{dx}{2\pi} \frac{\partial k}{\partial t} \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4.2 Cambio en la altura del oleaje

La figura (3.4) representa el perfil de una sección orientada normal a la playa, con un tren de ondas propagándose de aguas profundas a aguas someras. Conforme la ola se propaga del punto 1 al punto 2, la tasa de celeridad de fase y la energía que se transmite en la ola aumenta debido a la disminución en la profundidad. También, el contenido de energía de las olas se puede ver aumentado o disminuido debido a la acción del viento que actúa sobre la superficie libre del líquido. La energía en el fluido también se disipa por la fricción existente en el fondo y por la percolación de agua entrante y saliente del medio poroso del fondo.

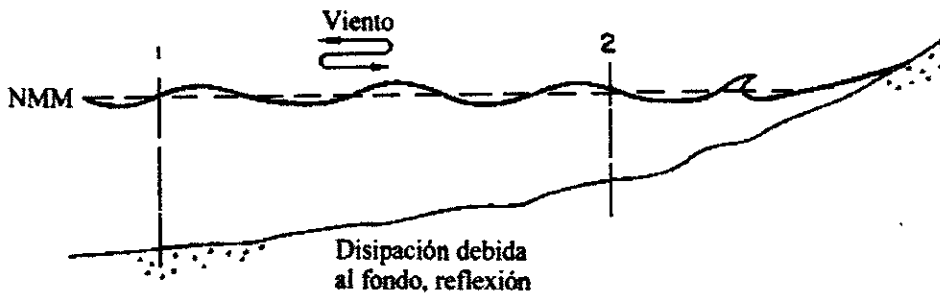


Figura (3.4) Perfil normal de una playa

Es apropiado hacer el cálculo del cambio de la altura de ola que se propaga hacia la playa despreciando la transferencia de energía debido a los efectos de superficie y del fondo así como las pérdidas de energía debidas a la reflexión del oleaje. Estas consideraciones

ocurren cuando la distancia entre las olas que se propagan es relativamente pequeña. Esto ocasiona que la energía de onda por unidad de tiempo que pasa por el punto 1 sea igual a la que pasa por el punto 2.

$$P_1 = P_2.$$

La potencia total de la ola entre dos crestas es equivalente a la energía por la distancia entre dichas crestas, si ésta distancia se denomina con la letra B , entonces la potencia total es BP .

$$BP = \left(\frac{BnE}{T} \right)_1 = \left(\frac{BnE}{T} \right)_2 \tag{3.12}$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

Sustituyendo el valor de E por su ecuación equivalente

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\overline{n_2 L_2}}{\overline{n_1 L_1}} \cdot \frac{\overline{B_2}}{\overline{B_1}} \tag{3.13}$$

El primer término de la derecha de la ecuación anterior representa el efecto del cambio de altura de ola de 1 a 2 normalmente llamado coeficiente de asomeramiento K_s , el segundo término de la derecha podría ser equivalente a la unidad para el caso bidimensional, pero cuando se aproximan olas tridimensionales, el efecto de refracción ocurre, las líneas ortogonales pueden converger o divergir, el valor de éste término puede ser mayor o menor que la unidad, éste término es conocido como el coeficiente de refracción K_r . Y queda $H_1/H_2 = K_s K_r$.

Para la propagación de oleaje bidimensional de aguas profundas a someras se tiene:

$$\frac{H}{H_0'} = \frac{\overline{L_0}}{2nL} = \frac{\overline{C_0}}{2Cg} \tag{3.14}$$

La prima en la H_0 denota asomeramiento sin refracción. La tabla (3.1) representa los parámetros relacionados unos con otros:

h/L	h/L_0	H/H_0'	$C/C_0, L/L_0$	C_g/C_0	n	$(H/L)/(H_0'/L_0)$
0.02	0.0025	2.005	0.1250	0.1244	0.9947	16.04
0.03	0.00559	1.648	0.1863	0.1841	0.9884	8.85
0.04	0.00985	1.440	0.2462	0.2411	0.9795	5.85
0.05	0.01521	1.303	0.3042	0.2947	0.9685	4.28
0.07	0.02895	1.134	0.4136	0.3891	0.9409	2.74
0.09	0.04608	1.037	0.5120	0.4646	0.9074	2.03
0.10	0.05569	1.005	0.5569	0.4952	0.8892	1.80
0.15	0.1105	0.9254	0.7367	0.5839	0.7930	1.26
0.20	0.1700	0.9134	0.8500	0.5993	0.7049	1.075
0.30	0.2865	0.9445	0.9550	0.5605	0.5870	0.989
0.40	0.3948	0.9749	0.9870	0.5260	0.5330	0.988
0.50	0.4981	0.9903	0.9962	0.5098	0.5117	0.994
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.5000	0.5000	1.000

Tabla (3.1). Parámetros del oleaje

El Término H_0' es conocido comúnmente como la altura de ola equivalente para aguas profundas.

3.5 Refracción del oleaje

El estudio del fenómeno de refracción del oleaje, normalmente considera olas que viajan de aguas profundas a aguas someras o hacia aguas intermedias así, reescribiendo la ecuación para la propagación de oleaje bidimensional de aguas profundas a someras:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{L_0}{2nL}} \sqrt{\frac{B_0}{B}} = K_s K_r$$

Recordando que B es la distancia entre dos ortogonales (algunas veces llamados rayos de ondas) y dichas líneas ortogonales son a su vez normales a las crestas de las olas a lo largo de la ortogonal. La ecuación anterior está diseñada para hacer equivalente el flujo de energía entre dos ortogonales en aguas profundas y en algunos casos en aguas intermedias y someras. Esto implica que no existe adición o pérdida de energía por ningún tipo de agente y que la energía no se difracta a través de las ortogonales.

Existe una infinidad de líneas ortogonales dentro de cualquier patrón de refracción, pero normalmente no se puede definir un número adecuado de líneas que logren definir al fenómeno de refracción en su totalidad. La figura (3.5) muestra un diagrama simple de refracción del oleaje para olas oblicuas que viajan de aguas profundas hacia la playa. Se muestran las líneas ortogonales y las crestas de las olas así como el contorno del fondo que ocasiona la desviación y refracción del oleaje; también se muestra el patrón de rotura de oleaje. Este diagrama se puede desarrollar para un periodo de ola dado y una orientación de las crestas del oleaje o mejor dicho, del oleaje incidente. Para un estudio ingenieril real se requiere de un diagrama como el anterior para cada caso que se tenga y para periodo y orientación en particular.

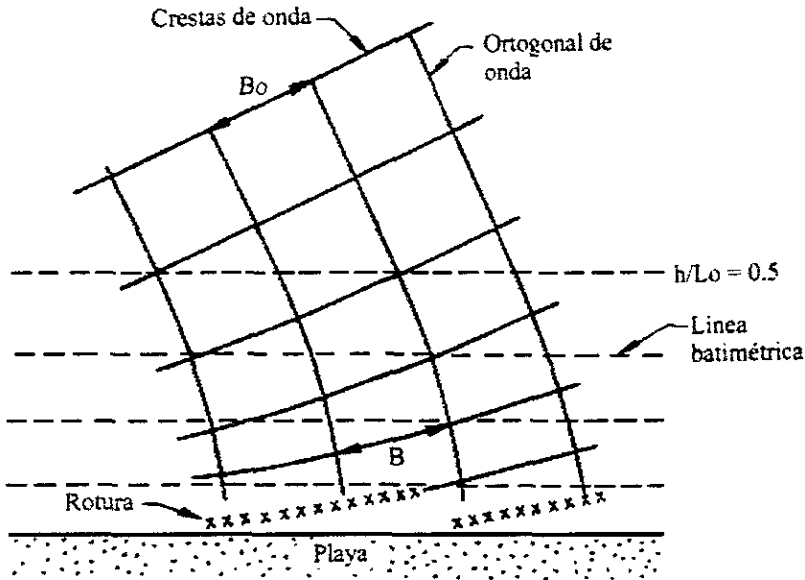


Figura (3.5). Crestas de ola y patrón ortogonal para oleaje de aproximación a aguas someras.

Para evaluar los efectos de refracción, se debe de diseñar el patrón de ortogonales de ola que se propagan, el espacio entre dos ortogonales de ola que se propagan en aguas profundas es B_0 y normalmente se selecciona de forma arbitraria y el valor de B se selecciona como el espaciamiento de se selecciona como la distancia entre ambas ortogonales en el punto de interés. Para el patrón de refracción mostrado en la figura anterior, la distancia entre ortogonales aumenta en la dirección hacia la playa resultando una disminución de las alturas de olas debidas a los efectos de refracción.

El cambio calculado en la altura de ola utilizando la ecuación estudiada arroja un valor de dicha altura que es un porcentaje sobre el espaciamiento ortogonal B . Puede ser necesario utilizar un espaciamiento más pequeño para así obtener una evaluación mas adecuada de la altura del oleaje en un punto determinado, particularmente para batimetrías complejas.

3.5.1 Ecuaciones básicas de refracción

Aunque es importante conocer el patrón de crestas de olas que se desarrolla conforme de refractan las olas, es de mayor utilidad poder predecir el patrón ortogonal de ondas. El patrón ortogonal de ondas arroja la dirección local de propagación y más importante, permite conocer el cambio de altura de ola debido al efecto de la refracción. El patrón de crestas de ondas se puede construir fácilmente del patrón ortogonal.

En la figura (3.6) se observa la ortogonal y la cresta de onda con respecto al plano x, y cruzando también una línea batimétrica. Se observa que s es una distancia arbitraria a lo largo de la ortogonal hacia algún punto cualquiera, entonces las ecuaciones que definen a la ortogonal son:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta$$

$$\frac{dy}{ds} = \text{sen } \theta$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{C} \frac{dC}{dn}$$

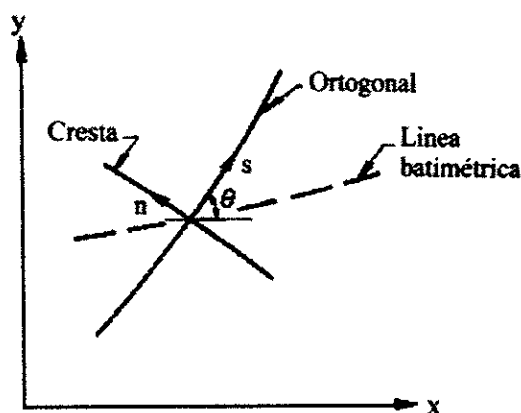


Figura (3.6). Diagrama de líneas ortogonales y líneas de cresta

En la tercer ecuación C es la celeridad y n es la dirección normal a la línea ortogonal. Dicha ecuación establece que la curvatura depende en el gradiente de celeridad de onda normal a la dirección de la misma y que la ortogonal a la ola se desvía en la dirección de menor celeridad de onda. Esta es una breve descripción del proceso de refracción del oleaje. Derivando la tercer ecuación con respecto a x y y se hace continua y queda:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{C} \left[\text{sen } \theta \frac{dC}{dx} - \cos \theta \frac{dC}{dy} \right] \tag{3.15}$$

Conociendo la dirección ortogonal incidente y determinando la celeridad de onda y su gradiente en las direcciones x y y en cualquier punto, se puede determinar el cambio de la dirección ortogonal en dicho punto.

Paso a paso la solución de esta ecuación determina numéricamente la variación secuencial de θ y el patrón de la ortogonal.

Para evaluar los cambios que ocurren conforme se refracta la ola desde un punto en aguas profundas hacia algún punto cerca de la playa, un par de ortogonales se pueden construir usando las ecuaciones. A partir de esto, el cambio en la altura de ola que se refracta se puede determinar utilizando la ecuación (3.15) con las distancias medidas entre las ortogonales en los dos puntos de interés. La ecuación que determina la intensidad en cualquier punto a lo largo de la línea orthogonal se desarrolla:

$$\beta = \frac{B}{B_0} = (Kr)^{-1/2} \quad (3.16)$$

Al factor β se conoce como el factor de separación. A partir de la geometría de un par de ortogonales adyacentes, se deriva una ecuación del factor de separación orthogonal en términos de la distancia s a lo largo de dicha orthogonal. El resultado es:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p \frac{d\beta}{ds} + q\beta = 0 \quad (3.17)$$

donde

$$p = \frac{\cos \theta}{C} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\sin \theta}{C} \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$q = \frac{\sin^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\cos^2 \theta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

3.5.2 Construcción manual de diagramas de refracción

Conocido el periodo de ola incidente, su dirección y teniendo una carta hidrográfica del área de interés, se puede construir manualmente un diagrama de refracción por el método de las crestas de oleaje (poco utilizado actualmente) o por el método de líneas ortogonales que involucra una construcción directa de olas ortogonales de las cuales, la dirección y la altura de ola que cambian se pueden determinar directamente.

El método de las crestas de ola es simplemente la construcción de un diagrama directamente sobre la carta hidrográfica que muestre las posiciones de las crestas de ola en uno o varios intervalos de longitud de onda conforme se propaga de aguas profundas a someras hasta alcanzar la playa. Es un proceso sucesivo de determinación de puntos en las crestas de olas calculando las longitudes de ola con base en la ecuación de dispersión dada una posición inicial de la cresta. Las ortogonales se adicionan posteriormente con la construcción de redes de flujo.

El método de las ortogonales se deriva de la ecuación (3.15), aplicada a un par de fronteras de fondo. Asumiendo que el eje x está orientado en la dirección central de ambas fronteras, también se asume que la profundidad varía uniformemente entre las dos fronteras así mismo con la celeridad de onda, la ecuación queda:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\cos\theta}{C} \frac{dC}{dy} \tag{3.18}$$

dC/dy es una constante (negativa cuando la ortogonal va de aguas profundas a aguas someras y viceversa), obteniendo la ecuación:

$$\frac{\cos\theta}{C} = cte = \frac{\cos\theta_1}{C_1} = \frac{\cos\theta_2}{C_2}$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones en las dos líneas de fronteras. Definiendo al ángulo α como el ángulo entre la cresta de ola y la dirección x . Esto es, $\alpha = \pi/2 - \theta$. Entonces las ecuaciones quedan:

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L_1}{L_2} \tag{3.19}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\text{sen}\alpha_1}{C_1} \frac{dC}{dy} = cte \tag{3.20}$$

La ecuación (3.19) es la clásica ecuación de Snell para refracción en una interfase

El procedimiento para diseñar diagramas de refracción se puede resumir como sigue:

- a) Localizar el contorno de fondo representado por h/L_0 en la carta hidrográfica. Después se debe de caracterizar los límites de aguas someras en la carta con base en la profundidad relativa. Las irregularidades que son más pequeñas que una longitud de onda no afectan apreciativamente el comportamiento de la ola y se deben de desechar.
- b) Para cada contorno se debe de calcular la tasa de celeridad de onda C_1/C_2 , donde C_1 es la celeridad en el par de contorno más profundo.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\tanh(2\pi h_1 / L_1)}{\tanh(2\pi h_2 / L_2)} \tag{3.21}$$

donde

$$\frac{h}{L} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) = \frac{d}{L_0} \tag{3.22}$$

- c) Comenzando desde las dos fronteras mar adentro, construyendo una frontera intermedia que equidiste de los dos contornos anteriores. Después, se extiende la ortogonal de aguas profundas que se aproxima hacia la frontera intermedia y finalmente se construye una línea tangente a la frontera intermedia en el punto de intersección con la ortogonal que se aproxima.
- d) Se superpone la plantilla para construir las ortogonales de ola, figura (3.7), con la línea marcada ortogonalmente sobre la ortogonal que se aproxima con $C_1/C_2=1.0$ en el mismo punto de intersección del inciso anterior.

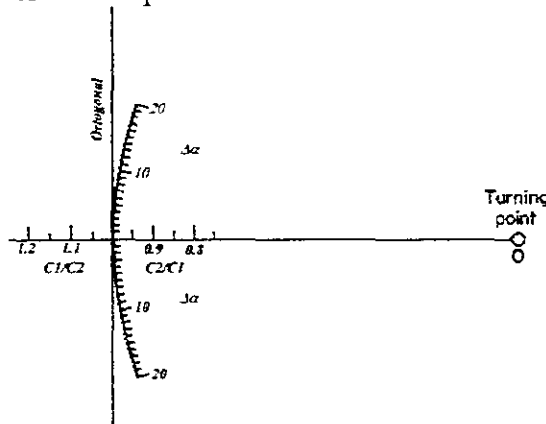


Figura (3.7). Plantilla para construir ortogonales de onda (Arthur et al. 1952)

- e) Luego, se hace girar la plantilla con centro en el punto de intersección, hasta que el valor de C_1/C_2 interseque a la tangente de la frontera media.
- f) Con un par de triángulos, se mueve la ortogonal de salida a una posición paralela tal que las ortogonales de aproximación y de salida se unan y las longitudes de ambas fronteras sean iguales.
- g) Se repite el procedimiento para intervalos de frontera para extender la ortogonal de aguas profundas al punto de la costa de interés.

Las ortogonales se pueden construir de aguas someras a aguas profundas usando el mismo procedimiento, exceptuando el valor de C_2/C_1 que mantiene a C_1 como el valor de la celeridad en aguas profundas.

En la figura (3.8) se muestra un diagrama de refracción para una ola de 7 segundos de periodo con una incidencia de 30° SE aproximándose a un pequeño puerto costero. Nótese que la refracción concentra a la energía cerca del cuerpo del rompeolas y disipa su energía en el morro del mismo. La ortogonal que se extiende en el morro del rompeolas es relativamente larga, así que líneas ortogonales adicionales se deben de construir entre las

dos ortogonales que encierran este punto para dar una determinación más precisa de las alturas de olas en la dirección del morro.

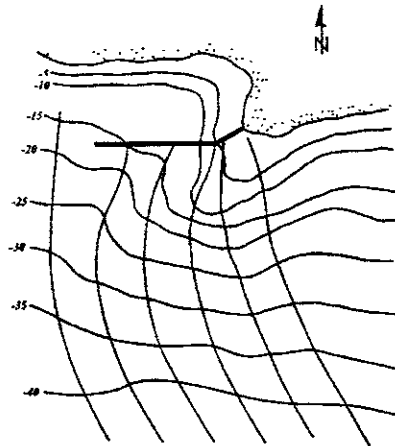


Figura (3.8). Diagrama de refracción para una ola de 7 segundos de dirección SE 30

3.5.3 Otras consideraciones para la refracción

Cuando una onda se propaga en forma oblicua y cruza de aguas quietas a aguas que cuentan con algún tipo de corriente o que se propagan a través de aguas con velocidades variables, la celeridad de onda relativa al fondo cambiará, y esto consecuentemente ocasiona que la ola se refracte. En la zona cercana a la costa la refracción debido a las corrientes debe de ser evidente en la cercanía de entradas de oleaje donde la fuerza relativa de las corrientes aumentan.

La refracción inducida o afectada por corrientes se puede demostrar por un simple caso de una ola que se propaga de aguas profundas quietas a aguas profundas que cuentan con corrientes con velocidad U . Los patrones de crestas y ortogonales cambian con la relación:

$$\text{sen } \alpha_c = \frac{\text{sen } \alpha}{\left(1 - \frac{U}{C} \text{sen } \alpha\right)^2} \tag{3.23}$$

Donde U/C puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección de la corriente. Para la situación ejemplificada en la figura (3.9), la refracción de corriente tiene dos efectos en la altura del oleaje. La longitud de oleaje se incrementa, lo cual causa una disminución en la altura de ola pero con un efecto contrario en la convergencia de las ondas ortogonales.

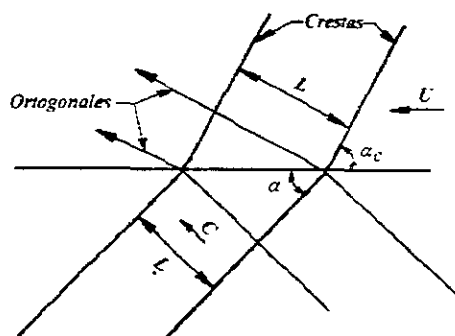


Figura (3.9). Refracción del oleaje con presencia de corriente

3.5.4 Forma asimétrica de la ola

Conforme la relación H_o/L_o en aguas profundas aumenta, la forma asimétrica de la ola aumenta. Primero solamente aparecen asimetrías con respecto a la línea vertical que divide por la mitad a la ola, pero pronto comienzan a observarse asimetrías del oleaje conforme se aproxima a la costa, dichas asimetrías se observan en planos paralelos al nivel medio del mar.

La amplitud de cresta ac excede la mitad de la altura de ola. La pendiente aumenta en cara frontal de la ola. Esta estabilidad lleva a la ola a un punto de inestabilidad y posteriormente rompe.

Se han definido cuatro asimetrías diferentes para fondos con pendientes de 1:18 a 1:4 (Adeyemo,1968).

$$\text{Asimetría vertical} = ac/H$$

$$\text{Asimetría horizontal (1)} = \text{distancia 1} / \text{distancia 2}$$

$$\text{Asimetría horizontal (2)} = \text{distancia 3} / \text{distancia 4}$$

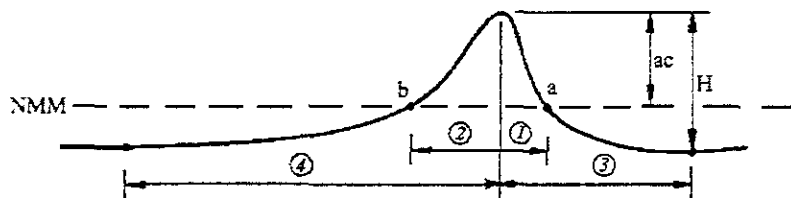


Figura (3.10). Forma asimétrica de la ola

3.7 Rotura del oleaje

Para una cierta profundidad y un cierto periodo de ola, una ola romperá cuando la altura de ola crezca y alcance una cierta altura límite. La altura de ola crece así como su asimetría horizontal, esto hace que la velocidad de la partícula de la cresta aumente y se iguale a la velocidad de fase de la ola y consecuentemente rompa.

Comúnmente, la rotura del oleaje se ha clasificado en cuatro formas diferentes con base en los cambios físicos que ocurren sobre la superficie libre del líquido en su proceso de rotura. Se han clasificado en: de descrestamiento, de voluta, de colapso y de oscilación.

Descrestamiento (Spilling). Aparece primeramente turbulencia y espuma en la cresta y la cara frontal de la ola se aplasta y propaga hacia delante. Pareciese que la ola "barre" a la espuma de la cresta conforme se va moviendo hacia delante. La turbulencia va disipando uniformemente a la energía de la ola, dando así como resultado un decrecimiento continuo en la altura del oleaje durante su movimiento hacia la orilla.

Voluta (Plunging). La cresta se agudiza y se curva hacia delante hasta envolverse en sí misma. El proceso de rotura y disipación de energía está más confinado y compacto comparado con el descrestamiento y además genera olas más pequeñas e irregulares que se propagan hacia la orilla.

Colapso (Collapsing). La cara frontal de la ola baja de nivel generando una rotura incipiente, la parte más baja de la cara se vuelca hacia delante y la ola se colapsa. La rotura de colapso es un punto intermedio entre el de descrestamiento y el de voluta y no se ha definido tan claramente como otros. (Algunos autores la excluyen de su clasificación).

Oscilación (Surging). La cresta y la cara frontal de la ola se mantienen una forma aparentemente estable y oscila hacia la playa y regresa. Esta es una progresión hacia oleaje reflexivo o estacionario.

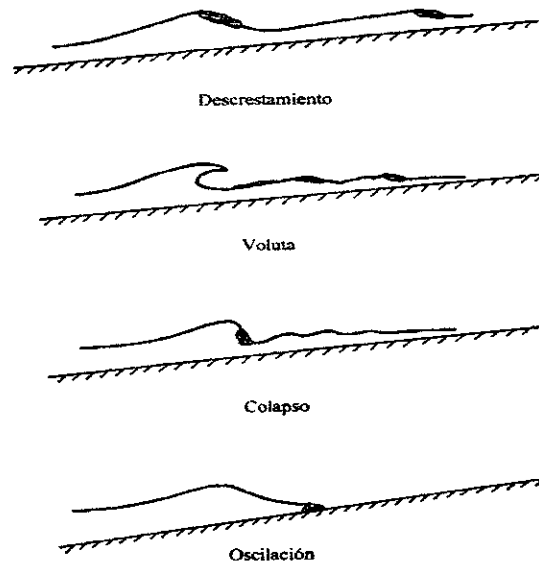


Figura (3.11). Tipos de rotura de oleaje

Estos cuatro tipos de rotura pueden aparecer en aguas someras o poco profundas, pero solamente el “descrestamiento” y la “voluta” pueden ocurrir en aguas profundas. El descrestamiento es más común en este tipo de aguas y más si se presenta un viento fuerte que lo induzca.

El tipo de rotura de ola que puede ocurrir puede tener consecuencias muy importantes. Por ejemplo, la estabilidad de las estructuras de depósitos de roca en las costas depende del tipo de rompeolas para la protección de dicha estructura.

El tipo de rotura que ocurre en aguas someras depende de las características de llegada del oleaje y de la pendiente del fondo de la playa. Para olas muy altas y fondos planos, la rotura tipo “descrestamiento” ocurre. Hay una progresión a través del proceso de “voluta” y el de “colapso” que va de una disminución de la altura de oleaje al aumento de la pendiente en el fondo.

La rotura del oleaje depende de la morfología del fondo y de las características de la ola principalmente. Para la mayoría de las playas que tienen una pendiente media, el tipo de rotura es de descrestamiento.

Diversos autores se han encargado de estudiar y cuantificar el fenómeno de rotura del oleaje, y diversos criterios se han formulado con los resultados obtenidos de dichos estudios. Uno de los primeros criterios y uno de los más utilizados es el de McCowan (1894), quien determinó la altura de rotura como una fracción de la profundidad en el sitio.

$$H_b = kh_b \quad (3.24)$$

Donde $k=0.78K$ y el subíndice b denota que se trata de rotura (*breaking*). Weggel (1972) hizo diversos experimentos en laboratorio e interpretó sus resultados mostrando una dependencia de la altura de oleaje de rotura con la pendiente del fondo. Su resultado fue:

$$k = b(m) - a(m) \frac{H_b}{gT^2} \quad (3.25)$$

donde

$$\begin{aligned} a(m) &= 43.8(1.0 - e^{-19m}) \\ b(m) &= 1.56(1.0 + e^{-19.5m})^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

El criterio de Weggel se aproxima al de McCowan cuando la pendiente de la playa se aproxima al valor de cero.

Como una primera aproximación, la profundidad de ola rompiente se puede determinar por las fórmulas de asomeramiento y de refracción para fronteras lineales y paralelas si las características iniciales de ola se conocen.

$$H = H_0 \left(\frac{C_0}{2nC} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right)^{1/2} \quad (3.27)$$

Y para aguas profundas, ésta aproximación es:

$$H = H_0 \left(\frac{C_0}{2\sqrt{nCgh}} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0}{1} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

Si se asume que el ángulo de rotura es pequeño. Utilizando el criterio de McCowan, se tiene:

$$kh_b = H_0 \left[\frac{C_0}{2\sqrt{gh_b}} (\cos \theta_0) \right]^{1/2} \quad (3.29)$$

y despejando h_b se tiene

$$h_b = \frac{1}{g^{1/5} k^{4/5}} \left(\frac{H_0^2 C_0 \cos \theta_0}{2} \right)^{2/5} \quad (3.30)$$

Y finalmente, la altura de ola rompiente se estima sea:

$$H_b = kmx_b = \left(\frac{k}{g} \right)^{1/5} \left(\frac{H_0^2 C_0 \cos \theta_0}{2} \right)^{2/5} \quad (3.31)$$

El valor de k en la ecuación anterior se acerca al valor de $k=0.8$ y es utilizado como criterio de rotura dentro del programa REFRACT.

3.7.1 Reflexión del oleaje

Cuando una ola pega con una pared vertical rígida e impermeable, la ola se refleja completamente y olas que se aproximan a una pendiente plana rompen. Ya sea que la ola rompa o se refleje, depende tanto de la longitud del oleaje y de la pendiente. Un parámetro muy útil para considerar cuando ocurre la rotura es mL/h . El numerador mL representa el cambio en la profundidad en una longitud de ola. Si es muy grande comparada con la profundidad, ocurrirá una reflexión y viceversa.

Para una longitud de ola dada, mientras la pendiente del fondo aumenta, la rotura del oleaje experimenta un cambio de rotura del descrestamiento al de voluta. Para un tipo de rotura de descrestamiento no se considerará el fenómeno de reflexión del oleaje debido a la pendiente del fondo. Para un tipo de rotura de voluta, existe una fuerte tendencia a presentarse reflexión en las olas que se aproximan.

Para una pendiente de playa dada, una ola relativamente pequeña romperá mientras que una mayor se reflejará y mientras sea más larga la ola, más grande será la reflexión.

Cuando una ola golpea a una pared rígida e impermeable se reflejará completamente. Pero las olas que se encuentren con una pendiente plana se romperán.

El coeficiente de reflexión está dado por:

$$Cr = \frac{Ir^2}{5.5 + Ir^2} \tag{3.32}$$

donde Ir es conocido como el número de Iribarren y se define como:

$$Ir = \frac{m}{H / L_0} \tag{3.33}$$

Cuando una ola se refleja de una pendiente, el nivel del agua aumenta provocando una presión que hace retroceder al oleaje. El aumento promedio del nivel del agua debido a la reflexión está dado por:

$$h' = \frac{\pi H^2}{4L} \coth 2kd \tag{3.33}$$

Por ejemplo, una ola reflejada de una pared vertical con 1m de altura, 5 seg. De periodo crece 0.03 m.

Cuando se tienen aproximaciones oblicuas a la pared impermeable, la ola tendrá una cresta reflejada con un ángulo igual al ángulo de incidencia. La altura de ola reflejada está en función del coeficiente de reflexión.

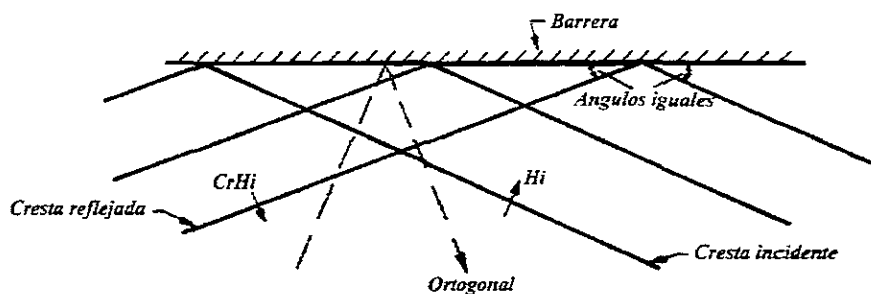


figura 3.12. Patrones del oleaje incidente y reflejado para una profundidad constante

El patrón de crestas de reflexión se puede construir colocando un espejo imaginario al otro lado de la barrera como se observa en la figura.

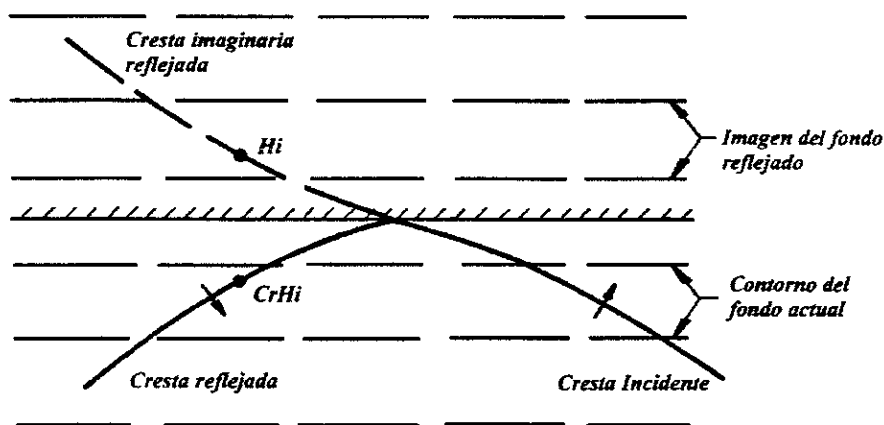


figura 3.13 Cresta de ola reflejada

Otro ejemplo es mostrado en la figura que muestra una difracción de oleaje que pasan una barrera impermeable y que luego se reflejan debido a una segunda barrera, la profundidad es constante.

3.7.2 Modelado de la disipación de energía

Una simulación que sea aceptablemente cercana a la realidad requiere la inclusión de efectos de disipación de energía, que introducen una ligera no linealidad en el estudio.

En un principio, Skovgård, Jonsson & Bertelsen en 1975, estudiaron la inclusión de un término de disipación de energía en una ecuación de propagación que incluye un modelo de disipación por fricción en el fondo. Posteriormente, Dalrymple, Kirby & Hwang en 1984 desarrollaron modelos parabólicos incluyendo dicho término de disipación.

La rotura de la ola, que principalmente se produce en la zona de surf al disminuir el calado; también puede producirse en aguas más profundas por peraltamiento de la ola, y es un fenómeno altamente disipativo y no lineal.

Existen tres principales modelos para el análisis de olas en la rotura:

- Modelos que limitan la altura de la onda
- Modelos de propagación de bores
- Modelos que determinan la variación espacial de la energía de las ondas o de la "wave action".

El modelo de transformación de oleaje REFRACT tratado en esta Tesis, utiliza un modelo del último tipo, desarrollado por Dally, Dean y Dalrymple en 1985. Dicho modelo no solo pretende describir la rotura sino también el proceso de recomposición de las ondas tal y como ocurre en oleaje real. La ecuación que gobierna el balance energético estacionario de las ondas avanzando hacia la costa es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_{Cg}) = -\delta(x) \quad (3.34)$$

Donde E es la energía de la onda por unidad de superficie, Cg es la celeridad de grupo y $\delta(x)$ es la tasa de disipación de energía por unidad de área.

El modelo de disipación considera una onda que se propaga a partir de aguas profundas sobre una pendiente, y que comienza a romper cuando el fondo se torna horizontal. La rotura continúa hasta que la ola alcanza una altura de ola estable. La función $\delta(x)$ es proporcional al exceso de flujo de energía con respecto a un valor estable, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_{Cg}) = -\frac{K}{h'} [E_{Cg} - (E_{Cg})_e] \quad (3.35)$$

Donde E_{Cg} es el flujo de energía integrado verticalmente y promediado en el tiempo, K es un coeficiente adimensional de decaimiento, h' es la profundidad en el fondo horizontal y $(E_{Cg})_e$ es el flujo de energía asociado a la ola estable.

Existe una relación para la altura de ola estable que se obtuvo experimentalmente en 1966 por Horikawa & Kuo:

$$H_e = \Gamma h' \quad \text{con } \Gamma = 0.35 - 0.40 \quad (3.36)$$

Sustituyendo el valor de la Energía E , Cg y H resulta:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8} \rho g H^2 \\ Cg &= (gh')^{1/2} \\ H &= \Gamma h' \\ \frac{\partial [H^2(h')^{1.2}]}{\partial x} &= -\frac{K}{h'} [H^2(h')^{1/2} - \Gamma^2(h')^{5/2}] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Que se puede escribir como una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} + P(x)G(x) = Q(x)$$

Cuya solución general es:

$$G.e^{\int P dx} = \int [Q.e^{\int P dx}] dx + C$$

Y las soluciones analíticas se obtienen tomando perfiles teóricos idealizados. tales como:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= CTE = h' && \text{Profundidad constante} \\
 h'(x) &= h'_b - mx && \text{Pendiente uniforme} \\
 h'(x) &= A(L-x)^{2/3} && \text{Perfil de equilibrio de Dean}
 \end{aligned}$$

Y finalmente, se impone que exista rotura en $x=0$ con la condición de contorno:

$$G(x=0) = H_b^2 (h'_b)^{1/2} \tag{3.38}$$

De acuerdo con el criterio de McCowan, el modelo REFRACT inicia la rotura cuando $Hb > 0.8 hb$ y comienza la disipación, La rotura continúa hasta $H < \Gamma h$ y a partir de este punto, la ola regenerada prosigue su avance.

3.8 Difracción del oleaje

Existe un fenómeno de transformación del oleaje muy importante conocido como difracción que para fines de ésta Tesis y para su objetivo no es trascendente ya que el modelo computacional de refracción de oleaje que se tratará en los siguientes capítulos, no considera la difracción debido a que se modela para aguas someras sin ningún tipo de estructura reflejante como son los rompeolas, los diques, espigones o escolleras que por su naturaleza y geometrías diversas ocasionan una transformación del oleaje traducida a difracción.

Simplemente se explicará en que consiste éste fenómeno, que condiciones considera y que relación guarda con el fenómeno de refracción del oleaje.

La figura (3.12) muestra un frente de oleaje que se propaga hacia una barrera semiinfinita y no trasmitiva,. El segmento de la ola que golpea a la barrera cede parte de su energía y una parte se disipa y la otra se refleja. El oleaje que libra el límite de la barrera cede parte de su energía y se comienza a propagar hacia la parte posterior de la barrera creando semicircunferencias de propagación hasta perder totalmente su energía al alcanzar a la barrera. Como un resultado de este comportamiento, la altura del oleaje de la región anterior de la barrera se verá reducida. La ola difractada continuará abatiéndose hasta alcanzar a la barrera. En la figura (3.12) se consideró una batimetría constante en la barrera, y en el caso de que se presente una batimetría variable como es en la realidad, se deberá considerar el efecto de refracción.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

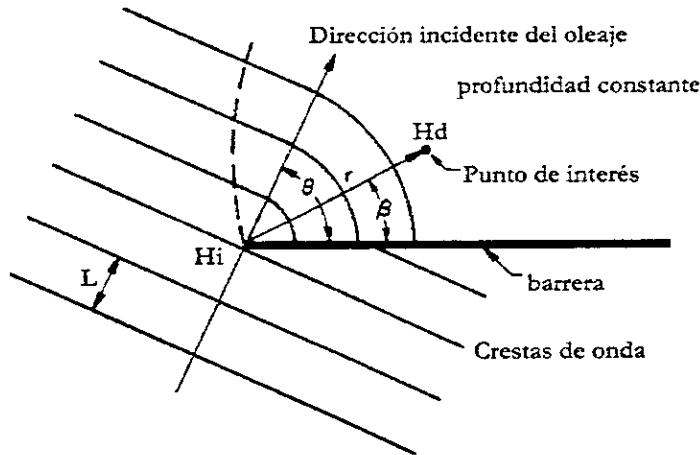


Figura 3.14. Difracción del oleaje debido a una barrera impermeable

Si H_i es la altura de oleaje incidente en el extremo de la barrera y H_d es la altura difractada en un punto de interés, se define $H_d/H_i = K_d$ como el coeficiente de difracción el cual es una función del periodo de onda incidente y de su dirección y los componentes del espectro de oleaje serán afectados directamente por el efecto de difracción.

3.8.1 Difracción y Refracción combinadas

Aunque el estudio y análisis de los fenómenos de difracción y Refracción del oleaje regularmente se tratan por separado, la presencia del efecto combinado es muy común en la naturaleza pero existe la consideración de despreciar alguno de los dos efectos en el análisis, ya que siempre alguno es dominante con respecto al otro.

En el modelo REFRACT ha ocurrido lo antes descrito, se desprecia el efecto de difracción debido a que el objetivo general de dicho modelo es determinar el asomeramiento del oleaje y el cambio de dirección y alturas de ola conforme el oleaje se aproxima a la costa sin incluir en ningún momento alguna estructura que indujese a la difracción.

Una solución analítica del efecto combinado de difracción – refracción, requiere resolver la ecuación tridimensional de Laplace con sus condiciones de frontera de fondo, superficie y laterales sobre una batimetría variable. Berkhoff desarrolló una solución práctica de la ecuación de la pendiente media en 1972. Es una ecuación diferencial parcial bidimensional que describe completamente la transformación de ondas de pequeña amplitud incluyendo a la difracción y a la refracción del oleaje. La solución de dicha ecuación requiere el conocimiento a priori de las condiciones de frontera existente. Berkhoff empleó la ecuación tridimensional de Laplace con la condición de frontera linealizada para la superficie libre y para el fondo considerando también, un fondo variable de pendiente media en lugar del fondo horizontal. En esta ecuación se asume que el potencial de velocidades tiene una variación $\cosh k(h+z)$ y a partir de una integración sobre la profundidad se tiene una ecuación bidimensional (x,y) de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(CCg \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CCg \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) + \sigma^2 \frac{Cg}{C} \phi_0 = 0 \quad (3.39)$$

Que se define como la ecuación de pendiente media en donde ϕ_0 es un potencial de velocidades complejo y bidimensional.

**Capítulo 4.
Modelo de refracción del oleaje
a través de análisis computacional**

4.1 introducción

En los 60's comenzó una fuerte tendencia a implementar los modelos matemáticos y numéricos hacia análisis computacionales debido al gran desarrollo tanto de hardware como de software sucedido en esas fechas. En un principio, diversos autores comenzaron a adecuar procedimientos de generación de mallas para el análisis del fenómeno de refracción hacia algoritmos computacionales con un sistema coordinado x, y, z . Dicho sistema de mallas debía de ser lo suficientemente fino para aproximar la hidrografía y lo suficientemente manejable para no exceder las capacidades propias del hardware con el que se contaba. Todas las aproximaciones requerían una selección de profundidades representativas para cada punto de la malla para posteriormente realizar una interpolación hacia puntos de la malla no conocidos a través de algoritmos especiales.

Griswold en 1963 trabajó con la ecuación de dispersión de pequeña amplitud para calcular la celeridad en cada punto de la malla que posteriormente daría pie al trabajo en conjunto de Wilson y Jen en 1969 que abordaron el problema tomando en cuenta primeramente la profundidad en cada punto de la malla y posteriormente una técnica de solución de profundidades y gradientes de profundidades para cada valor en cada punto de la malla, Jen implementó un paso constante de tiempo Δt para que la distancia en cada paso de la interpolación decreciera conforme el oleaje se aproximara a aguas someras ($\Delta s = C \Delta t$), y para mantener la exactitud del análisis, también calculó un espaciamiento entre ortogonales para así calcular los coeficientes de refracción en cada punto.

Keulegan y Harrison en 1970 se encargaron de construir diagramas de refracción de Tsunamis adaptando su malla de análisis a una proyección de Mercator, llegando a estimar los efectos de los Tsunamis en las costas. Skovgård en 1975 presentó un análisis más sofisticado para el cálculo de la refracción del oleaje utilizando técnicas de seguimiento de rayos de oleaje incluyendo efectos de agudización de las alturas del oleaje debido a la fricción del fondo. La desventaja de trabajar con una técnica de seguimiento de rayos de oleaje es que dichos rayos no se adecuan a una malla uniforme de alturas de oleaje y direcciones cerca de la costa.

Noda en 1974 desarrolló un modelo de refracción de oleaje a través de diferencias finitas incluyendo efectos de corriente considerando la irrotacionalidad del número de onda y la conservación de la energía del oleaje que arrojaba direcciones de oleaje y alturas dentro de una malla. Posteriormente, Dean en 1980 desarrolló una versión más simple del modelo de Noda simplificando los cálculos para obtener la dirección del oleaje e implementando la rotura, disipación de energía y reconstitución de la ola.

El modelo numérico estudiado en esta Tesis es el mencionado anteriormente que desarrolló Dean en 1980 sólo que modificado en algunos puntos como son la obtención iterativa del número de onda y la forma de desplegar los datos para una mejor visualización, dicho modelo es fácilmente utilizable y se puede correr en cualquier computadora personal lo cual es una herramienta muy útil para el Ingeniero Civil que trabaja con fenómenos de propagación de oleaje y con diseño de instalaciones portuarias.

Las ecuaciones de gobierno de la dinámica de fluidos pueden presentarse tanto en su forma integral como en su forma diferencial; ésta última forma es la que comúnmente se utiliza para modelación computacional. Sin embargo, es útil examinar algunas de las propiedades de las ecuaciones diferenciales parciales en sí antes de estudiar los métodos numéricos para solucionarlas, ya que cualquier solución que arrojen debe de obedecer las propiedades matemáticas generales de las ecuaciones de gobierno.

Al derivar las ecuaciones de gobierno de la dinámica de fluidos, se puede observar que las derivadas de orden superior se comportan linealmente, esto es; no hay productos o exponentes en dichas derivadas, éstos aparecen por sí solos multiplicados por coeficientes que son a su vez funciones de variables dependientes. Tales sistemas de ecuaciones se les denomina *sistemas cuasilineales*.

4.2 Utilización de los diferentes modelos computacionales para evaluar la transformación del oleaje

Existe una gran variedad de modelos computacionales para evaluar la transformación del oleaje. Este apartado describe las características principales de estos modelos, comentando sus puntos débiles y fuertes así como su aplicabilidad.

El oleaje requiere ser clasificado en función de cómo se transforma a medida que se propaga de aguas profundas al punto de interés en aguas someras. Generalmente, las áreas de interés son muy grandes para poder representar este fenómeno un modelo físico en una escala adecuada, por esto los modelos computacionales son utilizados para éste tipo de problemas

Existen tres requerimientos básicos que los modelos computacionales deben cumplir; primeramente se requiere una exactitud conveniente en las predicciones, en segundo lugar es en general conveniente que el modelo computacional se aplique a toda la zona de estudio con resultados precisos, aunque se sabe que esto es difícil de tener y que a veces es conveniente utilizar diferentes modelos combinados. Y la tercera consideración, es que se debe contar con una eficiencia computacional, lo cual es especialmente importante cuando el área de interés es grande y existen diversas condiciones en el comportamiento del modelo a ser estudiadas y cumplidas.

La modelación computacional en la Ingeniería de Costas comenzó hace 25 o 30 años con algoritmos diseñados para modelos basados en el trazo de rayos de onda. Se desarrollaron una gran variedad de modelos de muy fácil confusión, por esto dentro de éste apartado se señalarán los diferentes modelos disponibles en la actualidad y sus características propias.

4.2.1 Clasificación de los modelos

Existe un sinnúmero de formas en que los diferentes modelos computacionales se pueden clasificar. Generalmente, los diferentes modelos se aplican a diferentes condiciones costeras (especialmente hablando del área de interés del modelo), tipos de ondas

(frecuencia y direcciones simples, fondo friccionante, no linealidad, etc.), o incorporando procesos de oleaje (refracción, difracción, rotura, reflexión).

Una diferencia práctica de los modelos es que algunos de ellos han sido diseñados para el estudio del oleaje en áreas pequeñas, mientras que otros para áreas grandes. Los modelos de áreas pequeñas tienen la restricción de que el tamaño del elemento de la malla debe de ser al menos una fracción de la longitud de onda más pequeña considerada (generalmente un sexto o un quinto de la longitud de onda). Generalmente, estos modelos incorporan la gran mayoría de los fenómenos de transformación del oleaje. Tales modelos incluyen también el modelo elíptico de pendiente suave y los modelos parabólicos. Los modelos de áreas grandes no tiene esta restricción y pueden ser utilizados en áreas más grandes sin tanto esfuerzo computacional. En este tipo de métodos se incluyen el tipo de trazo de rayos (delantero y trasero) y métodos de difracción hiperbólicos.

4.2.2 Modelo delantero de seguimiento de rayos

Es un modelo de tipo estacionario que maneja dominios grandes, el cual involucra y soluciona las ecuaciones estándares de refracción (especialmente para el tipo hiperbólico), incluye un proceso de asomeramiento y refracción debido a variación de fondo que considera la interacción de corrientes así como los efectos de disipación y rotura. El método se basa en crear una serie de líneas características a partir de las condiciones en aguas profundas. Los datos de entrada son: altura, periodo y dirección del oleaje.

Este método es el más antiguo y en ocasiones ha sido sustituido por otros métodos más modernos. Las progresiones se hacen eventualmente muy grandes y con errores acumulados.

4.2.3 Modelo trasero de seguimiento de rayos

Es un modelo estacionario, que maneja dominios grandes y modela la transformación de ondas espectrales y se sustenta en el principio de conservación de la densidad espectral a lo largo de los rayos. Incluye procesos de refracción y asomeramiento por fondo y corrientes, la reflexión también es considerada aunque no incluye procesos disipativos ni de refracción. El método se crea con base en rayos en forma de abanicos con un espaciamiento pequeño desde un origen. Los datos iniciales son un espectro de ondas con frecuencia y dirección.

Debido a su representación espectral, éste método provee resultados más robustos que el método descrito anteriormente. La ausencia de los efectos disipativos significa que no se puede modelar a la rotura con exactitud.

4.2.4 Modelo hiperbólico de Refracción – Difracción.

Es un modelo estacionario, que maneja dominios grandes y resuelve las ecuaciones de difracción – refracción de la forma hiperbólica. Incluye interacción oleaje corriente, asomeramiento, difracción y los efectos disipativos debido a la fricción del fondo y rotura.

El rango direccional es limitado, cerca de 60° . El método incluye el cálculo de las variables del oleaje de cada punto y en cada línea. Las condiciones iniciales pueden ser monocromáticas o espectrales, y no requieren ser homogéneos a lo largo de las fronteras hacia la playa.

4.2.5 Modelo Elíptico de Difracción – Refracción (modelo de pendiente suave)

Es un modelo estacionario, que involucra dominios pequeños de cálculo y resuelve las ecuaciones de difracción – refracción en su forma elíptica (también conocido como la ecuación de pendiente suave). El proceso incluye el efecto de refracción/difracción por variaciones de corrientes y fondo, difracción, reflexión y los efectos disipativos debido a fondos friccionantes y rotura. El método incluye la especificación de las condiciones de frontera a lo largo de todo el contorno del dominio, y las ecuaciones de gobierno son resueltas de forma simultánea en cada punto de la malla computacional, por medio de una inversión de matrices y/o por medio del método equivalente.

Las condiciones iniciales son partir de un oleaje monocromático, pero los resultados espectrales se pueden obtener a partir de varias corridas en el programa. Los resultados se obtienen en cada punto sobre toda el área del modelo. El modelo se utiliza principalmente para áreas pequeñas y parcialmente cerradas, como bahías o puertos.

4.2.6 Modelo parabólico de refracción difracción

Es un modelo estacionario, que involucra dominios pequeños de cálculo y resuelve las ecuaciones de difracción – refracción en su forma parabólica. Los procesos de cálculo incluyen la refracción/asomeramiento a través del cambio en la profundidad y corrientes, difracción en la dirección lateral, y los efectos disipativos y rotura. El método involucra el cálculo de las variables del oleaje en cada punto a lo largo de cada línea. Los datos iniciales son: oleaje monocromático o espectral y no requieren ser homogéneos a lo largo de la frontera hacia la playa.

4.2.7 Modelo de refracción

Es un modelo estacionario, con un rango de aplicación muy amplio en áreas pequeñas. Este modelo resuelve las ecuaciones de refracción en una dimensión horizontal. El proceso de cálculo incluye el efecto de refracción/asomeramiento debido a variaciones de corrientes y profundidades, los efectos disipativos y rotura. El método requiere el cálculo de las variables del oleaje en una malla unidimensional. Los datos de entrada pueden ser a través de oleaje monocromático o espectral y se especifican desde el punto más alejado a la playa. Los resultados se pueden obtener para cada punto de la malla.

4.2.8 Modelo de Boussinesq

Es un modelo que depende del tiempo, con un dominio pequeño y resuelve las ecuaciones de flujo de Boussinesq o las ecuaciones de flujo en aguas poco profundas. El proceso de cálculo incluye los efectos de refracción/asomeramiento debido a variaciones en el fondo con interacción oleaje-corriente, difracción, reflexión, disipación por fondo

friccionante y rotura así como, las interacciones no lineales de onda-oleaje. Los datos de entrada son en forma de una historia de tiempo de las elevaciones de la superficie. Por esto nos requiere representar de forma espectral. Los resultados se pueden obtener para cada punto del dominio computacional. El método se torna inválido en aguas profundas y/o para aguas con ondas cortas.

4.3 Alcances del Modelo de Refracción del oleaje, REFRACT

REFRACT es un programa que calcula la altura del oleaje y la dirección en la que éste se propaga de aguas profundas a aguas someras hasta llegar a su rotura en la playa. El programa considera los efectos de someramiento, refracción, interacción oleaje-corriente y su no-linearidad. Las bases teóricas del programa fueron publicadas en el *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* en 1988 por Robert A. Dalrymple y fue titulado: "A Model for the Refraction of Water Waves". Los principios que utiliza el modelo de refracción del oleaje son dos; La irrotacionalidad del número de onda, que para batimetría plana se reduce a la ley de Snell y el principio de conservación de la acción de ondas, la cual se reduce al concepto de la conservación de la energía cuando no existen corrientes. El método diferencial que se utiliza para el cálculo e interpolación de datos sobre la malla es el de *Lax-Wendroff* en dos pasos.

El programa no considera el efecto de Difracción del oleaje como ya se comentó anteriormente debido a que el análisis y planteamiento del mismo es con base en un comportamiento de oleaje que se aproxima de aguas profundas - intermedias hacia aguas poco profundas o someras sobre una batimetría variable con una pendiente *suave* sin considerar ninguna estructura que refleje o absorba la energía que transmite el oleaje al propagarse. El efecto de la difracción de oleaje ocurre cuando éste choca o se transmite a través de alguna estructura impuesta en su camino natural y que hace cambiar y modifica su progreso y movimiento, dicha estructura repercute directamente en la altura del oleaje ya que se pierde energía al existir un choque o absorción con algún cuerpo extraño, también se ve afectada la dirección del oleaje y su propagación en la zona donde éste ya haya librado el obstáculo. El programa REFRACT no admite la imposición de ninguna estructura artificial que se derive en una difracción del oleaje, solamente se limita al planteamiento y solución de costas o playas naturales con una morfología alterada únicamente por efectos naturales (arrastre de sedimentos, factores climatológicos, etc.) y que para fines del análisis se elige una batimetría real medida en un cierto lugar y en una cierta época y simplemente se toma como un dato más que alimenta las ecuaciones necesarias para obtener los parámetros deseados traducidos en resultados finales. Se recalca que la difracción no tiene razón de ser atendida dentro de un análisis de transformación del oleaje que se maneja bajo parámetros y escenarios muy controlados y que se sabe a priori se presentará únicamente una refracción del oleaje muy marcada.

Ahora bien, en el capítulo anterior se habló del efecto de reflexión del oleaje que se aproxima a aguas someras y que sucede al igual que con la difracción; al encontrarse con estructuras artificiales o naturales se ve modificado tanto en su forma física como en su propagación. La reflexión del oleaje no es considerada dentro del desarrollo numérico del

programa REFRACT por las mismas razones expuestas para la difracción. se trabaja solamente sobre batimetrías “dato” sin permitir la opción de tener una estructura que propicie la reflexión de un tren de oleaje. Un punto de interés en donde se podría manifestar el efecto de reflexión del oleaje es cuando éste alcanza a la línea de playa y choca con el cuerpo arenoso y se refleja, en ésta línea de playa solamente se consideró el efecto de rotura del oleaje. disipación y reconstitución del mismo en donde si se considerara además algún efecto de reflexión, se tendría una complicación numérica poco práctica que acrecentaría el análisis y que finalmente representaría un cambio poco significativo en los resultados.

Finalmente, el alcance más importante del programa REFRACT es el de obtener resultados muy cercanos a la realidad con un análisis teórico y computacional muy breve y sencillo que simplifique el trabajo de las computadoras y el tiempo en obtención de resultados. Desde el punto de vista del Ingeniero Civil se busca tener una herramienta que facilite la rápida obtención de resultados aplicables al diseño de obras marítimas de contención y protección sin la necesidad de tener un conocimiento profundo en los temas de la Hidráulica Marítima y que a partir de los datos arrojados por el programa se pueda visualizar gráficamente dichos resultados en conjunto.

El programa REFRACT trabaja sobre una batimetría dada del área de estudio, que se habilita como una malla rectangular de dimensiones $M \times N$ en las direcciones x y y respectivamente donde la primera describe la dirección de mar a tierra, y la segunda la dirección paralela a la línea de costa. El programa requiere conocer también las características iniciales del oleaje como son el periodo y la amplitud y el ángulo de incidencia a lo largo de la primera línea de la malla en la dirección y . Así como, un mapa de corrientes (en su caso) relacionado con la batimetría proporcionada.

Algunos ejemplos de aplicación real son cuando se tienen playas con pendientes suaves y sin obstáculos intermedios o artificiales, playas rectas o pequeñas costas y bahías abiertas. En éstos casos es factible utilizar el modelo con la seguridad de que se tendrán resultados cercanamente reales y listos para utilizarse como parámetros de diseño.

4.4 Planteamiento analítico del programa REFRACT

4.4.1 Modelo matemático

El punto de partida para cualquier método matemático es la creación de un modelo matemático. Se debe de escoger un modelo matemático adecuado para cada tipo de problema, por ejemplo; tomando como bases un flujo incompresible, no viscoso, turbulento, bidimensional, etc. Además que dicho modelo debe incluir simplificaciones exactas de las leyes de conservación, un método de solución es normalmente diseñado para un paquete particular de ecuaciones. Es imposible tratar de generar una solución con propósitos universales o generales que se apliquen a todos los fluidos, es impráctico y en muchos de los casos es imposible.

El modelo matemático en el que se basa el programa REFRACT de refracción del oleaje es la teoría lineal de ondas (Airy) con sus condiciones de frontera aplicado al oleaje marino considerando asomeramiento, rotura, reconstitución y refracción, éste último se basa en la ley de Snell que relaciona el cambio del ángulo de incidencia del oleaje debido al cambio del fondo marino. También se adicionan términos no lineales derivados de llevar la teoría lineal de ondas a grados superiores de solución (Stokes).

Se adiciona en el análisis la interacción del oleaje con las corrientes a partir de la relación de dispersión que trabaja con el número de onda k , la profundidad h y la frecuencia absoluta w , definido como $2\pi/T$:

$$w = \sigma + k \cos \theta U + k \sin \theta V \tag{4.1}$$

Donde σ es la frecuencia intrínseca, U y V son los valores promedio de las corrientes en ambas direcciones. Estas corrientes se asumen como datos, y afectan a la longitud de la ola y su celeridad, la frecuencia intrínseca se define como:

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh + f_2 Ka) [(1 + f_1 (ka)^2 D)] \tag{4.2}$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y el parámetro D , f_1 , f_2 corresponden a los términos no lineales definidos por:

$$D = \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^4 kh}$$

$$f_1 = \tanh^5 kh$$

$$f_2 = \left[\frac{kh}{\sinh(kh)} \right]^4$$

La relación de dispersión relaciona el numero de onda con su frecuencia, la amplitud de onda a y la profundidad local h . Esto provee una corrección de un número de onda al tercer orden en aguas profundas, y para aguas someras, el valor del número de onda se aproxima al valor del que se obtuviese a través de una onda solitaria. Para ondas lineales, los términos f_1 y f_2 se omiten. Las funciones f_1 y f_2 pueden ser la unidad y el valor de cero respectivamente, para dar una relación de Stokes exacta, Sin embargo se sabe que es poco exacta en aguas someras.

Si se define A como $k \sin \theta$, la ecuación de Snell se puede reescribir como sigue:

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \tag{4.3}$$

$$B = k \cos \theta = \sqrt{k^2 - A^2}$$

Lo cual es una ecuación parcial de primer orden que se resuelve con el uso de una condición inicial $x=0$, correspondiente al valor de la dirección de la ola incidente. Debido a

que es una ecuación no lineal se debe de resolver por iteración o por medio de una discretización.

4.4.2 Obtención iterativa del número de onda k

El número de onda k definido como $2\pi/L$ se debe de obtener de una forma iterativa a través de cualquier tipo de método numérico conocido. Dentro del programa REFRACT se trabajó con una solución a través del método de Newton-Raphson y también a través del método de aproximaciones finitas y finalmente se conservaron como un par de subrutinas computacionales independientes libres de ser utilizadas.

Para una convergencia de valores de los resultados en el cálculo del número de onda se procedió de la siguiente forma:

- a) Se asigna el valor del número de onda a partir del valor conocido por la siguiente ecuación:

$$k = \frac{w^2}{g \frac{\tanh w^2 h}{g}} \quad (4.4)$$

- b) Se obtiene el valor de k y su primera derivada para aplicar el método de Newton-Raphson. A partir de la ecuación:

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh + f_2 Ka) [(1 + f_1 (ka)^2 D)] \quad (4.5)$$

- c) Se aplica el método de Newton-Raphson como sigue:

$$k(\text{nuevo}) = \frac{\sigma^2}{g \frac{\tanh w^2 h}{g}} - \frac{k(\sigma, h, a)}{\frac{d[k(\sigma, h, a)]}{dk}} \quad (4.6)$$

- d) El criterio de convergencia es el siguiente:

$$k(\text{nuevo}) - k(\text{original}) < 0.00001 \times k(\text{nuevo}) \quad (4.7)$$

Si se cumple la condición anterior se considera que el valor de k es el que se debe de utilizar.

- e) Finalmente se asigna el valor a σ y posteriormente se le asigna un valor de celeridad de grupo a cada punto de la malla computacional.

$$Cg = \left(1 + kh \frac{\sec h^2 kh}{\tanh kh} \frac{\sigma}{2k} \right) \quad (4.8)$$

Para llegar al valor de k por medio de aproximaciones sucesivas, simplemente se encuentra un valor inicial del número de onda y se va sustituyendo en la función de σ despejada para k hasta llegar a un valor que demuestre un error de comparación al quinto decimal.

4.5 Método de discretización en Diferencias Finitas

Después de seleccionar un método matemático correcto, se tiene que elegir un método de discretización adecuado, por ejemplo, un método para aproximar las ecuaciones diferenciales es por medio de un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en ciertas localidades discretas en el tiempo y en el espacio. Existen muchos tipos de aproximaciones, pero las más importantes son: el método de las diferencias finitas (DF), el método del volumen finito (VF) y el método del elemento finito (EF). Existen otros métodos como el de esquemas espectrales, los métodos de elementos de frontera, y el autómatas celular pero se aplican solamente a casos muy particulares.

Cada método arroja la misma solución siempre y cuando la malla sea lo suficientemente fina, sin embargo, algunos métodos son aplicables a ciertos tipos de problemas físicos.

Para discretizar las ecuaciones de gobierno de la dinámica de fluidos vistas en capítulos anteriores, se optó por utilizar el método de las diferencias finitas.

Este es el método más antiguo para dar solución numérica a problemas de ecuaciones diferenciales ya que fue implementado por Euler en el siglo XVIII. Es también el método más sencillo de utilizar por la geometría simple que maneja.

El punto de partida es la ecuación de conservación en forma diferencial. El dominio de solución se cubre a través de una malla. En cada punto de dicha malla, la ecuación diferencial es aproximada por la sustitución de las derivadas parciales por aproximaciones en términos de valores de cada nodo, en donde el valor de la variable está en función de los valores desconocidas de los nodos vecinos.

En un principio, el método de las diferencias finitas se puede aplicar en cualquier tipo de malla, sin embargo, en todas sus aplicaciones prácticas que se conocen se ha trabajado solamente a mallas estructuradas. Las líneas de la malla funcionan como líneas coordenadas locales.

La expansión de la serie de Taylor o adaptación polinomial se utiliza para encontrar las aproximaciones para las primeras y segundas derivadas de las variables con respecto a las coordenadas. Cuando es necesario, estos métodos se utilizan también para obtener los valores de las variables en otros puntos que no corresponden exactamente a los nodos (interpolación). Dentro de las mallas estructuradas, el método de diferencias finitas es muy simple y efectivo. Es especialmente fácil de obtener para esquemas de ordenes mayores en

mallas regulares, su desventaja de éste método es que no se aplica a geometrías de flujos más complejos.

Concepto básico - El primer paso para obtener la solución numérica consiste en discretizar el dominio geométrico, al elegir un tipo específico de malla. En el método de diferencias finitas como se mencionó anteriormente se recomienda la utilización de una malla estructurada; cada nodo se considera como el origen de un sistema coordenado. cuyos ejes coinciden con las líneas de la malla. Esto implica que dos líneas correspondientes a la misma familia, es decir ξ_1 no interseca con ningún tipo de líneas de otra familia. ξ_1 es constante y ξ_2 interseca solo una vez. La figura (4.1) muestra ejemplos de una malla cartesianas bidimensional que se utiliza en métodos de diferencias finitas.

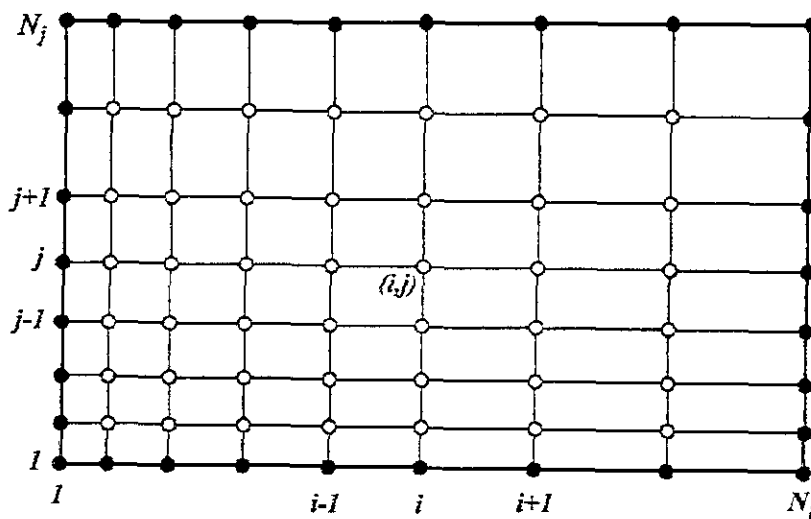


Figura 4.1 Ejemplo de una malla bidimensional aplicable al modelo de diferencias finitas

Cada nodo es identificado por un par de subíndices que define el punto de intersección de las líneas de la malla. Los nodos vecinos se definen implícitamente incrementando o disminuyendo dichos subíndices en una unidad.

Cada nodo cuenta con una variable desconocida que debe de proveer una ecuación algebraica. El número de ecuaciones y de incógnitas debe de ser igual y en los puntos de frontera se debe de conocer el valor sin necesidad de aplicar una ecuación discretizada.

Una interpretación geométrica se muestra en la figura (4.2). La primera derivada ($\partial u / \partial x$) en cada punto es la pendiente de la tangente a la curva $u(x)$, la línea marcada como *exacta* describe a esta primera derivada, dicha pendiente se puede aproximar por una línea que pase por dos puntos cercanos de la curva, la línea punteada muestra una aproximación a través de una diferencia delantera, la derivada en x_i se aproxima por la pendiente de una línea que pasa por el punto x_i y por otro punto $x_i + \Delta x$. La línea en segmentos ilustra una aproximación por medio de una diferencia *trasera*; el segundo punto es $x_i - \Delta x$. La línea con la etiqueta *central* representa una aproximación por medio de una diferencia *central*; ésta

utiliza la pendiente de una línea que pasa a través de dos puntos que se encuentran en los lados opuestos del punto en donde la derivada es aproximada.

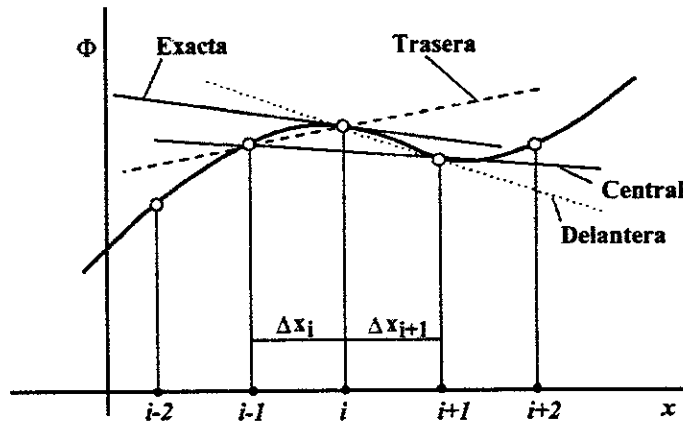


Figura 4.2 Definición de la derivada y sus aproximaciones

4.5.1 Malla numérica

Las locaciones discretas, donde las variables se han de calcular se definen por una malla numérica que es esencialmente una representación discretizada del dominio geométrico en donde se debe de resolver el problema. El dominio de soluciones se subdivide en un número finito de subdominios (elementos, volúmenes de control, etc.) Algunas de las soluciones con las que se puede trabajar son las siguientes:

Malla estructurada o regular – Consiste en una familia de líneas, con la sola propiedad que los miembros de una sola familia no se deben de cruzar entre ellos mismos y los otros miembros de otras familias sólo lo pueden hacer una vez. Esto permite a las líneas ser numeradas consecutivamente. La posición de un punto de la malla (o volumen de control) dentro del dominio es propiamente definido por la localización de índices, ya sean bidimensionales o tridimensionales.

Esta es la estructura más simple, ya que es equivalente a una malla cartesiana. Cada punto tiene cuatro puntos vecinos cercanos en dos dimensiones y seis en tres dimensiones. Cada uno de los índices de los puntos vecinos al punto P difiere ± 1 del índice correspondiente de P . Un ejemplo de una malla estructurada en dos dimensiones se muestra en la figura (4.3). La conectividad de los puntos vecinos simplifica el análisis y programación y la matriz de ecuaciones algebraicas guarda una estructura regular, lo cual se puede aprovechar al desarrollar la técnica de solución. De hecho, existe un gran número de métodos que dan solución a mallas estructuradas. La desventaja de las mallas estructuradas es que sólo se pueden utilizar para solucionar dominios muy simples geoméricamente hablando. Otra desventaja de las mallas estructuradas es que puede ser difícil el control de la distribución de los puntos de la malla, esto es, la concentración de puntos en una

región para obtener mayor exactitud produce un espaciamiento muy pequeño en otras regiones de menor interés creando un gasto de recursos innecesario. Además, una utilización de celdas muy delgadas puede afectar a la convergencia de forma adversa.

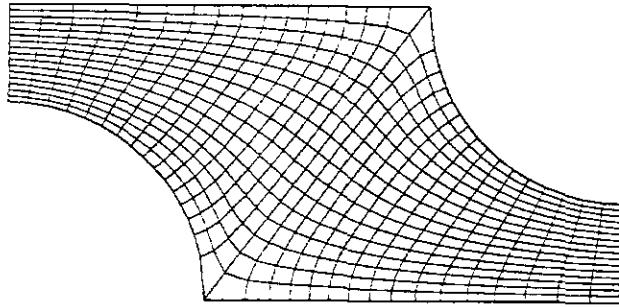


Figura 4.3 Ejemplo de una malla estructurada en 2D, no ortogonal y diseñada para el cálculo de un flujo dentro de una tubería.

Malla estructurada en bloques – Existen dos o más niveles subdivididos dentro del dominio. Desde el punto de vista general, existen bloques que se conforman de segmentos relativamente grandes dentro del dominio; su estructura puede ser irregular y ésta no se debe de traslapar con otros bloques. En el nivel más particular, una estructura se define de forma mas o menos regular. Se debe de dar un tratamiento especial en las interfases de los bloques para un adecuado comportamiento numérico. En la figura 4.4 se observa una malla estructurada en bloques diseñada para el cálculo de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro dentro de un canal que cuenta con tres bloques.

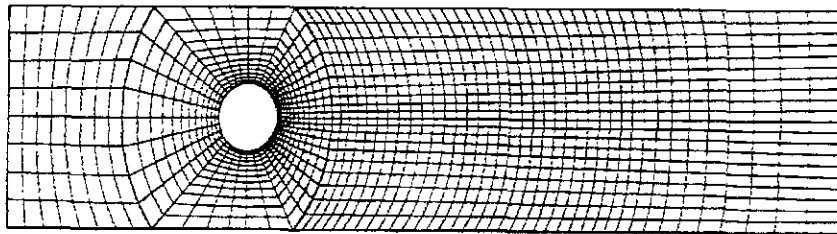


Figura 4.4 Ejemplo de una malla estructurada en bloques bidimensional con coincidencia en las interfases

En la figura 4.5 se observa una malla estructurada en bloques con una interfase no coincidente; se utilizó para calcular un fluido alrededor de una hidroala, consiste en cinco bloques cada uno con mallas de diferentes tamaños. Este tipo de malla es más flexible que las anteriores y permite utilizar mallas más finas en donde se requiere mayor precisión en los resultados.

La programación es más difícil que el de las mallas regulares pero se pueden solucionar problemas para fluidos cuyos comportamientos sean más complicados.

Mallas sin estructura – Se utilizan para geometrías muy complejas, es el tipo de malla más flexible es donde se pueden adaptar fronteras arbitrarias dentro del dominio. Dichas mallas se pueden utilizar con cualquier esquema de discretización, pero se adaptan mejor a modelos de volumen finito y elemento finito. Los elementos o volúmenes de control pueden adoptar cualquier forma; no existe una restricción del número de elementos o nodos. En la práctica, se utilizan comúnmente formas triangulares y cuadráticas en 2D y formas tetraédricas y hexaédricas en 3D. Dichas mallas se pueden generar a través de algoritmos ya establecidos, si se desea, la malla se puede fabricar de forma ortogonal, la escala se puede controlar fácilmente y su refinación local se hace de una forma muy sencilla. La ventaja de la flexibilidad de éste tipo de mallas se ve opacada por la irregularidad de la estructura de los datos. La localización de cada nodo y las conexiones vecinas se deben de especificar explícitamente y el proceso de cálculo es más lento que el de las mallas convencionales.

Las mallas sin estructura se emplean principalmente con códigos computacionales más flexibles, no se necesitan cambiar cuando se refina la malla localmente o cuando los volúmenes de control cambian de forma. Sin embargo, la generación de mallas y su pre-procesamiento es usualmente más complicado.

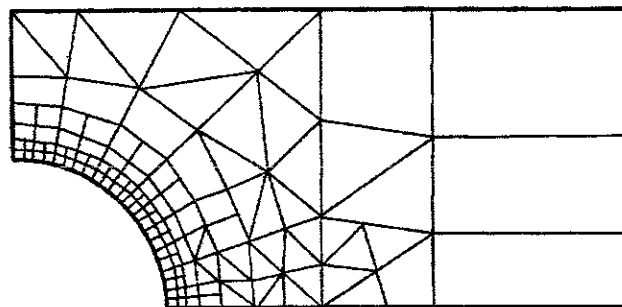


Figura 4.5 Ejemplo de una malla sin estructura en 2D

Para el programa REFRACT se optó por utilizar una malla del tipo rectangular con una separación entre cada nodo o punto de Δx en la dirección hacia la playa y una separación Δy en la dirección a lo largo de la playa.

4.5.2 Aproximaciones en diferencias finitas

Después de elegir la malla adecuada al problema físico a solucionar, se debe de elegir la aproximación que se utilizará en el proceso de discretización. En un método de diferencias finitas, la aproximación para las derivadas en los puntos se deben de seleccionar. Existen muchas posibilidades a elegir; dicha elección afecta en la calidad de los resultados en cuanto a su exactitud y también afecta en el desarrollo del método de solución, en su decodificación y en su velocidad de respuesta. Aproximaciones más exactas implican un mayor número de nodos y unas matrices más complejas, la memoria de

almacenamiento se debe de considerar hasta llegar a un equilibrio entre exactitud y capacidad de memoria de la máquina con la que se cuenta.

4.5.3 Método de solución

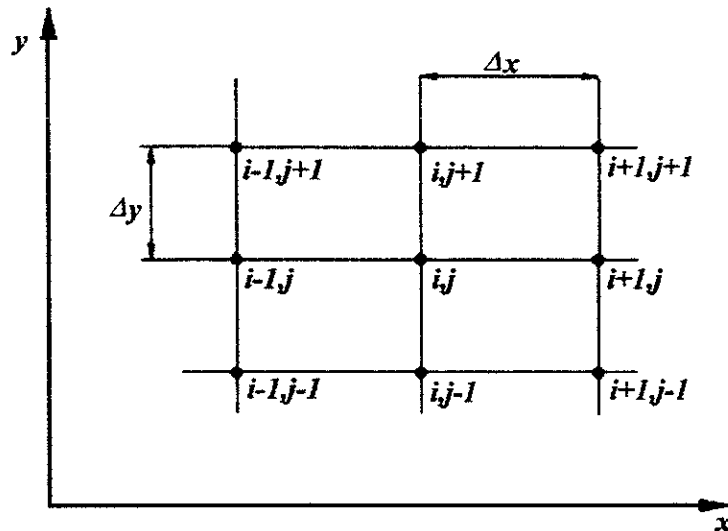
La discretización arroja un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, el método de solución depende del problema; para flujos dinámicos, se utilizan con frecuencia los métodos que se basan en valores o condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias. Para fluidos estáticos se utiliza comúnmente un esquema de iteración con lapsos de tiempo pseudo-dinámicos. Estos métodos utilizan una linearización sucesiva de las ecuaciones y resultan en sistemas lineales que se resuelven con técnicas iterativas. El tipo de técnica depende de la malla elegida y el número de nodos involucrados en cada ecuación algebraica.

4.5.4 Discretización de las ecuaciones diferenciales parciales

La solución analítica de las ecuaciones diferenciales involucra expresiones cerradas que muestran la variación de las variables dependientes en forma continua a través del dominio. En contraste, las soluciones numéricas solo arrojan respuestas en puntos discretos dentro del el dominio, denominados puntos de la malla. En la figura (4.6) se muestra una sección de una malla discreta en el plano x - y , se asume que el espaciamiento en la dirección x es uniforme y está dado por Δx , así como en el otro sentido por Δy . En forma general, dichos espaciamientos no son iguales y de hecho tampoco son necesariamente uniformes, sin embargo para la solución de problemas computacionales de dinámica de fluidos es mucho mas sencillo considerar igualdad y uniformidad en los espaciamientos y además simplifica la programación, el almacenamiento de datos y en mucho de los casos arroja resultados mas exactos.

Los puntos de la malla se identifican por un índice i que corre a lo largo del eje x y un índice j que corre a lo largo del eje y . Si (i,j) en un punto P , entonces el punto inmediatamente a la derecha es $(i+1,j)$, el punto inmediatamente a la izquierda es $(i-1,j)$, el punto inmediatamente arriba es $(i,j+1)$, y el punto inmediatamente abajo es $(i,j-1)$.

El método de las diferencias finitas es muy utilizado para resolver problemas computacionales de la dinámica de fluidos, la finalidad del método de las diferencias finitas es el de substituir las derivadas parciales que se presentan en las ecuaciones de gobierno de la dinámica de fluidos con coeficientes diferenciales algebraicos, dando así un sistema de ecuaciones algebraicas que fácilmente se puede resolver para las variables del flujo en cada punto discreto de la malla.



4.5.5 Derivación de los coeficientes elementales de diferencias finitas

La representación de los coeficientes de diferencias finitas se basa en la serie de Taylor. Por ejemplo, si $u_{i,j}$ es la componente de velocidad en el punto (i,j) , en la dirección x , entonces la velocidad en el punto $(i+1,j)$ se puede expresar en términos de la serie de Taylor extendida con base en el punto (i,j) , como se muestra:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \tag{4.9}$$

En la expresión anterior, se considera matemáticamente exacta para $u_{i+1,j}$ si el número de términos es infinito, si la serie converge y si Δx tiende a cero. Para el cálculo numérico computacional, es difícil trabajar con un número infinito de términos en la ecuación anterior. Es por esto que la ecuación anterior se trunca y los términos cúbicos y mayores no se tomen en cuenta, entonces la ecuación se reduce a:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} \tag{4.10}$$

Se dice que es una ecuación de segundo orden de exactitud, y al igual si no se toman en cuenta los términos cuadrados, se obtiene una ecuación de primer orden de exactitud:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x \tag{4.11}$$

Los términos de mayor orden que se descartan, representan un error truncado en la representación de las series finitas, el cual es para la ecuación (4.10):

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (4.12)$$

y para la ecuación (4.11) de:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (4.13)$$

Este error truncado se puede reducir ya sea a través de cargar términos superiores en la serie de Taylor para obtener mayor exactitud o reduciendo el valor de Δx . Si se resuelve la ecuación (4.1) para $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{\Delta x^2}{6} - \dots}_{\text{Error truncado}}$$

O lo que es lo mismo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (4.14)$$

El símbolo $0(\Delta x)$ es una notación matemática formal que representa los términos de orden Δx , la ecuación (4.14) cuenta con una notación más precisa que la ecuación (4.13) que cuenta con una notación aproximadamente equivalente, en la ecuación (4.14) el orden de magnitud del error truncado se muestra por la notación 0 , que es la ecuación diferencial de primer orden *delantera* para la derivada $(\partial u / \partial x)$ en el punto (i,j) .

La expansión de la serie de Taylor para $u_{i-1,j}$, con respecto a $u_{i,j}$. Se escribe:

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{6} + \dots$$

O lo que es lo mismo:

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (4.15)$$

Resolviendo para $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (4.16)$$

Que es la ecuación diferencial de primer orden *trasera* para la derivada $(\partial u/\partial x)$ en el punto (i,j) . Ahora si se restan las ecuaciones (4.15) y (4.9) se obtiene:

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3} + \dots \quad (4.17)$$

Resolviendo para $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + 0(\Delta x)^2 \quad (4.18)$$

La ecuación anterior es una ecuación de segundo orden *centrada* en el punto (i,j) . Para obtenerla expresión de diferencias finitas para la segunda derivada parcial $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ la ecuación (4.18) se escribe:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (4.19)$$

Y substituyendo la ecuación (4.19) en la ecuación (4.9) se obtiene:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \right] \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{24} + \dots \quad (4.20)$$

Resolviendo la ecuación para $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + 0(\Delta x)^2 \quad (4.21)$$

Que es la ecuación diferencial de segundo orden *centrada* en el punto (i,j) .

Las expresiones diferenciales para las derivadas en y se obtienen exactamente de la misma forma, estas son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta y} && \text{diferencia trasera} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\Delta y} + 0(\Delta y) && \text{diferencia delantera} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{2\Delta y} + 0(\Delta y)^2 && \text{diferencia central} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta y)^2} + 0(\Delta y)^2 && \text{segunda diferencia central} \end{aligned}$$

Es interesante hacer notar que la segunda diferencia central dada por la ecuación (4.21) se puede interpretar como una diferencia delantera de las primera derivada con una diferencia trasera utilizada en la primera diferencia. Despreciando la notación θ se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}\right)\right] \frac{1}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La misma filosofía se puede aplicar para generar rápidamente el coeficiente de diferencias finitas para la derivada mixta $(\partial^2 u / \partial x \partial y)$ en el punto de la malla (i,j) . Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4.23)$$

En la ecuación anterior, se escribe la derivada de x como una diferencia *centrada* de las derivadas de y , y luego se escriben las derivadas de y en términos de las diferencias centrales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \left[\left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \right) - \left(\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \frac{1}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (4.24)$$

Otras aproximaciones diferenciales se pueden obtener de la ecuación anterior, así como derivadas de ordenes superiores siguiendo una metodología similar. Ahora bien, cuando se presenta una frontera como la que se muestra en la figura (4.2) se puede observar que una porción de dicha frontera es perpendicular al eje y y el punto 1 está junto a la frontera y los puntos 2 y 3 a las distancias Δy y $2\Delta y$ respectivamente. Se construye una aproximación diferencial para $\partial u / \partial y$ en la frontera, lo cual se logra fácilmente construyendo una diferencia delantera como se muestra:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 = \frac{u_2 - u_1}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (4.25)$$

La aplicación de la ecuación (4.18) no sirve en éste caso ya que requiere de otro punto dentro de la frontera, lo que se ejemplifica como el punto 2' que queda fuera del dominio de cálculo y generalmente no se cuenta con información sobre u en ese punto. En un principio, la dinámica de fluidos computacional intentó dar solución a éste conflicto asumiendo que $u_2' = u_2$. Lo que se llamó una condición de frontera reflejante que en muchos casos no tiene ningún sentido físico y es también poco exacta. Así que la solución para el punto en la frontera se encuentra empleando otro método para derivar los coeficientes de diferencias finitas, se asume que el valor de u en la frontera se puede escribir como un polinomio:

$$u = a + by + cy^2 \tag{4.26}$$

Aplicando los puntos de la malla de la figura (4.2) queda:

$$\begin{aligned} u_1 &= a \\ u_2 &= a + b\Delta y + c(\Delta y)^2 \\ u_3 &= a + b(2\Delta y) + c(2\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para b :

$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \tag{4.27}$$

Diferenciando la ecuación (4.26) queda:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy \tag{4.28}$$

Evaluando la ecuación anterior cuando $y=0$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = b \tag{4.29}$$

Combinando la ecuación (4.27) y (4.29) queda:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \tag{4.30}$$

Ahora sólo queda saber que grado de exactitud es la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior. Esto se puede saber considerando la serie de Taylor en el punto 1.

$$u(y) = u_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_1 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_1 \frac{y^3}{6} + \dots \tag{4.31}$$

Se observa que utilizar la ecuación (4.26) es lo mismo que utilizar los primeros tres términos de la ecuación (4.31), es por esto que se utiliza un error truncado igual a $0(\Delta y)^3$ así que la ecuación (4.30) se puede reescribir como:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} + 0(\Delta y)^2 \tag{4.32}$$

Que es el coeficiente diferencial de segundo orden de precisión en la frontera. Las ecuaciones (4.25) y (4.32) se denominan diferencias de un solo lado ya que expresan derivadas en un punto en términos de variables dependientes en solamente un lado del punto. Se pueden formular muchas otras diferencias con mayores grados de exactitud, utilizando puntos adicionales de la malla hacia un lado del punto dado.

4.5.6 Aspectos Básicos de las ecuaciones de diferencias finitas

La esencia de la solución de para problemas de dinámica de fluidos computacionales por medio de diferencias finitas es utilizar los coeficientes derivados en la sección anterior para así substituir las derivadas parciales en las ecuaciones de gobierno del flujo, resultando en un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas para la variable dependiente en cada punto de la malla.

Se considera la siguiente ecuación en donde se asume que la variable dependiente es u y es función de x y t .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.33}$$

Se elige ésta ecuación simple por conveniencia, si se substituye la derivada de tiempo por una diferencia delantera, y la derivada espacial por una derivada central, el resultado es:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.34}$$

En la ecuación anterior se empleó el superíndice n para determinar las condiciones el tiempo t , $(n+1)$ denota las condiciones el tiempo $(t+\Delta t)$, y así sucesivamente, y como se ha tratado anteriormente, el subíndice denota la posición o localización de cada punto en la malla que para éste ejemplo se limita solamente al valor de i .

Ahora, escribiendo la combinación de las ecuaciones (4.33) y (4.34) dejando explícitos los términos de error truncado asociados a los diferentes coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \\ &+ \left[-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] \end{aligned} \tag{4.35}$$

Los primeros dos términos de la izquierda de la ecuación anterior son la representación en diferencias finitas de ésta ecuación, y los términos entre corchetes son los errores truncados para la ecuación completa. Se representan como:

$$O[\Delta t, (\Delta x)^2]$$

La ecuación diferencias finitas se reduce a la ecuación diferencial original conforme los puntos de la malla tienden a infinito, en la ecuación (4.35) se observa que el error truncado tiende a cero, y de hecho la ecuación diferencial se aproxima a la ecuación diferencial original, cuando ocurre esto, la representación de la ecuación diferencial parcial a través de su representación por diferencias finitas, se dice que la ecuación es consistente.

La solución de la ecuación (4.34) se asemeja a una solución que “marcha” en lapsos de tiempo, lo cual es una característica de las ecuaciones del tipo parabólico. Ahora se asume que se conoce el valor de la variable dependiente en todo x en un instante dado de tiempo, se dice entonces que son las condiciones iniciales. Examinando la ecuación (4.34), se observa que contiene solamente una incógnita, llamada u_j^{n-1} . De éste modo la variable dependiente en el tiempo $(t+\Delta t)$ se puede obtener explícitamente de los resultados conocidos en el tiempo, por ejemplo, u_j^{n-1} se obtiene de los valores conocidos u_{j-1}^n , u_j^n y u_{j+1}^n .

Ahora regresando a la ecuación diferencial (4.33) pero reescribiendo las diferenciales espaciales del lado derecho de la ecuación en términos de las propiedades promedio entre n y $(n-1)$ esto es:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^n - 2u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \tag{4.36}$$

La diferencia mostrada en la ecuación anterior se le conoce como la forma de Crank-Nicholson, la incógnita u_i^{n+1} no es expresada solamente en términos de cantidades conocidas en el tiempo n como son las cantidades u_{i-1}^n , u_i^n , y u_{i+1}^n . Las cantidades que están en términos de incógnitas en el tiempo $n-1$ son u_{i-1}^{n-1} y u_{i+1}^{n-1} . La aplicación de la ecuación en el punto i no puede ser la solución para u_i^{n-1} . Es preferible que la ecuación se escriba para todos los puntos de la malla, resultando así un sistema de ecuaciones algebraicas con una sola incógnita u_i^{n+1} para cada punto i se puede resolver simultáneamente. Lo que es una solución implícita por diferencias finitas, ya que manejan con la solución de sistemas muy grandes con ecuaciones algebraicas lineales, éstos métodos generalmente involucran la utilización de grandes matrices.

Las ventajas y desventajas de las dos aproximaciones se resumen a continuación:

1. Aproximación explícita.

- a) Ventajas – Es relativamente sencillo para trabajar y programarlas
- b) Desventajas – Para un valor de Δx dado, Δt debe de ser menor que algún límite de estabilidad impuesto. En muchos de los casos, Δt debe de ser muy pequeña para

llegar a la estabilidad; esto resulta en un tiempo computacional muy largo para dar los resultados sobre un intervalo de tiempo t dado.

2. Aproximación implícita.

- a) Ventajas – La estabilidad se puede mantener sobre valores de Δt mayores, dado esto, resulta en un tiempo computacional menor en general.
- b) Desventajas – Es más complicado de programar, la utilización de matrices para cada paso implica mayor tiempo computacional, y finalmente no es totalmente exacto ya que el error truncado se incrementa al utilizar los intervalos de tiempo Δt mayores.

Durante el periodo de 1969 a 1979, la práctica para modelos de dinámica de fluidos computacionales involucraron soluciones derivadas de métodos explícitos. Sin embargo, en la actualidad algunos modelos físicos requieren de mayor exactitud con un espaciamiento en la malla cada vez menor lo cual dá ventaja a los métodos de aproximación implícitos.

4.6 Solución numérica del programa REFRACT

Un modelo de diferencias finitas se puede escribir de muchas formas, dependiendo de la exactitud que se deseé, el programa REFRACT utiliza una diferencia delantera en y que provee un error truncado de $O(\Delta x, \Delta y^2)$. Aquí el punto de interés se localiza en un punto medio entre las locaciones x en la malla. Utilizando una diferencia central en x en el punto $(i+1/2)$ da un error truncado de $O(\Delta x^2)$. Para la dirección y y la derivada se escribe:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{i+1,j} \right] \tag{4.37}$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2\Delta y} (B_{i,j+1} - B_{i,j} + B_{i+1,j} - B_{i+1,j-1}) \tag{4.38}$$

La ecuación explícita para $A_{i,j}$ es:

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (B_{i,j+1} - B_{i,j} + B_{i+1,j} - B_{i+1,j-1}) \tag{4.39}$$

La solución y exactitud de la ecuación en diferencias finitas

La solución numérica se define inicialmente a partir de una malla en diferencias finitas del área de estudio. Las profundidades y los valores promedio de corrientes se deben de proporcionar como dato en cada punto, el procedimiento establece la altura de ola y su dirección, y la acción del oleaje en la línea de la malla en dirección x , de los datos de entrada o a partir de la ley de Snell en caso de existir datos para aguas profundas. Para la siguiente línea de profundidades, las condiciones de frontera en $j=l$ se determinan. Esto debe de ser iterativo para el caso que se trabajen con los términos no lineales debido al hecho de que es necesario conocer el valor de la altura del oleaje para calcular el número de

onda, sin embargo una altura de ola se asume en un principio, y el número de onda para el punto (i, I) se encuentra. El ángulo de incidencia se encuentra de la condición de que $A_{i, I}$ es constante en ésta línea, y luego la acción de oleaje se calcula para obtener la altura del mismo. Este procedimiento es iterado para obtener la convergencia para el punto (i, I) . Para los puntos $j=2, 3, \dots, N-1$ el esquema de diferencias finitas se utiliza. En cada punto j las ecuaciones de diferencias finitas y la relacionada con la ley de Snell se iteran hasta que se alcanza la convergencia, de nuevo debido a la dependencia del número de onda con la altura de ola y su dirección (en el caso de haber corrientes). Después de haberse encontrado la convergencia en el punto j , el siguiente punto se calculará. Cuando una línea se acabe de calcular, se tomará la línea siguiente hasta que se haga un barrido completo de la zona de estudio.

La rotura del oleaje se verifica en el modelo simplemente comparando el valor de la línea cercana a la playa contra el valor dado a partir de un índice de rotura, tal como $A=E_b$, $(U+Cg\cos\theta)$, donde el parámetro de rotura es:

$$E_b = \rho g (0.79h)^2 / 8 \quad (4.40)$$

Las condiciones de frontera laterales dentro del modelo, solamente se deben de especificar en ambos lados del dominio de la malla computacional. El lado superior de la malla se toma como $y=0$ ($j=1$), correspondiente a olas con ángulos, $0 < \theta < \pi/2$ (para oleaje con ángulos de incidencia negativos, simplemente se toma una proyección simétrica hacia el otro sentido de la malla).

En el punto $j=N$ en la frontera, una diferencia hacia atrás se utiliza. Esta ecuación es válida para fronteras de tipo transmisivas:

$$A_{i+1, j} = A_{i, j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (B_{i, j} - B_{i, j-1} + B_{i+1, j} - B_{i+1, j-1}) \quad (4.41)$$

El ángulo de incidencia de la ola se calcula con:

$$\theta_{i, j} = \tan^{-1} \left(\frac{A_{i, j}}{B_{i, j}} \right) \quad (4.42)$$

4.6.1 Acción del oleaje

Se define a la acción del oleaje como la relación que existe entre la energía de la onda y su frecuencia angular; E/σ . La conservación de la acción de oleaje en el caso estacionario en ausencia de disipación se puede expresar como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E(U + Cg \cos \theta)}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E(V + Cg \sin \theta)}{\sigma} \right) = 0 \quad (4.43)$$

Adicionando la disipación para la acción de oleaje (Christofferson y Jonsson, 1980):

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4.44)$$

y

$$Cg = nC$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (4.45)$$

En la ausencia de corrientes la ecuación de la acción de oleaje se reduce a la ecuación de conservación de la energía de onda, y el valor de σ se hace constante. Definiendo A como el flujo de la acción de oleaje en la dirección x y a B como la misma cantidad en la dirección y se puede reescribir:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (4.46)$$

La altura del oleaje se obtiene del flujo de la acción de oleaje de la siguiente manera:

$$H_{i,j} = \left(\frac{8A_{i,j} \sigma}{\sigma_g (U_{i,j} + C_{g,i,j} \cos \theta_{i,j})} \right)^{1/2} \quad (4.47)$$

4.6.2 Esquemas no iterados

Un método más rápido para la solución de las ecuaciones diferenciales es resolver para $A_{i+1,j}$, exactamente. Se puede obtener:

$$A_{i+1,j} = -b + \sqrt{b^2 - c} \quad (4.48)$$

donde

$$b = \frac{[r(B_{i+1,j-1} - B_{i,j+1} + B_{i,j}) - A_{i,j}]}{(1+r^2)} \quad (4.49)$$

$$c = \frac{\{(i+r^2)b\}^2 - r^2k_{i+1,j}^2}{(i+r^2)} \quad (4.50)$$

Para la acción del oleaje se utiliza:

$$\underline{A}_{i-1,j} = \frac{\underline{A}_{i,j} + r\underline{C}_1}{1+r \left(\frac{V_{i+1,j} + Cg_{i-1,j} \sin \theta_{i+1,j}}{U_{i+1,j} + Cg_{i-1,j} \cos \theta_{i+1,j}} \right)} \quad (4.51)$$

y

$$\underline{C}_1 = \underline{B}_{i+1,j-1} - \underline{B}_{i,j+1} + \underline{B}_{i,j} \quad (4.52)$$

Estos métodos son preferibles que un esquema iterativo que ciertamente alcanza una exactitud de segundo orden en las diferencias pero en éste método se procede de una forma cinco veces más rápido lo cual es importante para las computadoras personales.

4.6.3 El Método de Lax –Wendroff

En este apartado se discutirán las aplicaciones para métodos de diferencias finitas en su forma explícita que se aplican a la mecánica de fluidos, un método muy directo y popular dentro del análisis y estudio de los fenómenos de la dinámica de fluidos es el método de Lax- Wendroff que ha demostrado tener un comportamiento computacional estable y un bajo requerimiento de memoria de trabajo.

Dentro del programa REFRACT, razón de ésta Tesis, se optó por el manejo del método de Lax-Wendroff por que es el que más se adapta al problema físico de refracción del oleaje y hace extremadamente manejable a la malla computacional obtenida.

El método de Lax-Wendroff permite encontrar paquetes de valores en cada punto del dominio a través de una transformación de la malla física a una malla computacional. Este paquete de valores corresponde para el problema de refracción de oleaje; el valor de la altura de la ola y su ángulo de incidencia. Relacionados a cada punto y a una batimetría que se inserta como un archivo de datos conformables con las dimensiones de la malla computacional.

Se debe de establecer una línea de datos iniciales completa en alguna frontera de la malla de cálculo para así poder comenzar el proceso de solución para todos los puntos sobrantes haciendo un barrido y tomando en cuenta las otras tres fronteras y sus diferentes

comportamientos de acuerdo con el fenómeno físico (condiciones de frontera y rotura descritas en el capítulo 2).

Se considera un punto i de la malla. Se denota a g_i como una variable en el campo de flujo en ese punto (g_i puede ser, presión, densidad, ángulo, altura de ola, etc.). Esta variable g_i será una función del tiempo, sin embargo, se conoce el valor de dicha función en $t=0$, ya que como se explicó anteriormente se deben de asumir valores o condiciones iniciales en el tiempo $t=0$.

Ahora se calcula un nuevo valor para g_i en el tiempo $t+\Delta t$, comenzando desde los valores de las condiciones iniciales, el primer tiempo es $t+\Delta t = 0+\Delta t$. Aquí Δt es un pequeño incremento en el tiempo, el nuevo valor de g_i se obtiene de una expansión de la serie de Taylor en el tiempo.

$$g_i(t+\Delta t) = g_i(t) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_i \Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_i \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots$$

o utilizando la notación clásica en donde el tiempo se maneja como un superíndice:

$$g_i^{t+\Delta t} = g_i^t + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_i^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \tag{4.53}$$

Aquí $g_i^{t+\Delta t}$ es el valor del valor de g en el punto i y en el tiempo $t+\Delta t$. Las ecuaciones de gobierno para un flujo cuasilinear son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \tag{4.54}$$

Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{4.55}$$

Momentum

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left[p \frac{\partial u}{\partial x} + pu \frac{\partial(LnA)}{\partial x} + pu \frac{\partial e}{\partial x} \right] \tag{4.56}$$

Energía

Lax -Wendroff consideró un método en diferencias finitas basado en la ley de continuidad. Se planteó un sistema de ecuaciones:

$$w_i + [f(w)]_r = 0 \tag{4.57}$$

Donde w es un vector de función de r y t y el valor de f es un vector de función no lineal, con n componentes, del vector w . A todo, se le denomina un sistema que obedece a ley de continuidad.

En el sistema Euleriano, las ecuaciones de conservación son: masa, momentum y energía por unidad de volumen, representadas por: ρ , $m=\rho u$ y $E=\rho(e+1/2 u^2)$, respectivamente. Y las ecuaciones generales de Euler se expresan:

$$\begin{aligned} \rho_t &= -\nabla \cdot (\rho u) \\ (\rho u)_t &= -u \nabla \cdot (\rho u) - \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla p \\ (\rho E)_t &= -\nabla \cdot (\rho E u) - \nabla \cdot (p u) \end{aligned} \tag{4.58}$$

Haciendo un sistema de ecuaciones basadas en la ley de continuidad queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} m \\ (m^2 / \rho) + p \\ (E + p)m / \rho \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

La presión se calcula de la ecuación de estado:

$$p = p(e, \rho) = p\left(\frac{E}{\rho} - \frac{m^2}{2\rho^2}, \rho\right) \tag{4.60}$$

Si esto se aplica al esquema escalonado o por pasos visto anteriormente para una malla rectangular y lineal se obtiene:

$$k^{-1} \left[w_{i,j+1} - \frac{1}{2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \right] + (2h)^{-1} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) = 0 \tag{4.61}$$

donde $f_{i,j}$ es la abreviación para $f(U_{i,j})$.

Las ecuaciones de Lax Wendroff comienzan a partir de la serie de Taylor en t ($k=\Delta t$).

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \dots \tag{4.62}$$

Las derivadas con respecto al tiempo se cambian o sustituyen con derivadas espaciales

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial r} \tag{4.63}$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{\partial F}{\partial r} \right) \tag{4.64}$$

Donde la matriz $A = A(U)$ es el jacobiano de $F(U)$ con respecto a U ; esto es, $A = (A_{i,j})$ donde $A_{i,j} = \partial F_i / \partial U_j$. Las r derivadas se aproximan por medio de diferencias para así obtener el esquema de Lax-Wendroff de segundo orden de precisión.

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{1}{2} \frac{k}{h} (F_{i+1,j} - F_{i-1,j}) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{h} \right)^2 \left[A_{i+1/2,j} (F_{i+1,j} - F_{i,j}) - A_{i-1/2,j} (F_{i,j} - F_{i-1,j}) \right] \quad (4.65)$$

Donde $h = \Delta r$, y $A_{i+1/2,j} = A [1/2 (U_{i+1/2,j} + U_{i,j})]$.

El formato del esquema de Lax-Wendroff, se torna complicado por la presencia de la matriz Jacobiana A . Una modificación en dos pasos que reduce a la ecuación anterior y que además alcanza un segundo orden de exactitud:

$$U_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i,j}) - \frac{k}{2h} (F_{i+1,j} - F_{i,j}) \quad (4.66)$$

Y los valores finales corregidos son:

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{k}{h} (F_{i+1/2,j+1/2} - F_{i-1/2,j+1/2}) \quad (4.67)$$

5.1 Introducción

En éste capítulo se hace uso del modelo de refracción de oleaje, REFRACT, a casos con solución analítica. Inicialmente se aplica éste modelo a tres casos cuyas soluciones analíticas se conocen.

Caso 1 – Caso con batimetría recta y paralela, donde se comprueba la refracción por fondo, asomeramiento y rotura.

Caso 2 - Modelo REFRACT aplicado a un ensayo realizado por Berkhoff en 1982, comparando los resultados en las áreas donde la refracción es dominante.

Caso 3 - Se aplica el modelo a un ensayo idealizado propuesto por Noda en 1974 donde se produce la propagación del oleaje sobre una batimetría idealizada. Se compararán los resultados con los obtenidos del modelo original.

5.2 Fenómenos de propagación con solución analítica conocida

5.2.1 Asomeramiento

El fenómeno de asomeramiento ocurre cuando el oleaje incide sobre una playa con batimetría variable, los cambios en la morfología de la ola son ocasionados únicamente por la variación de los valores de la profundidad. La evolución del oleaje se manifiesta mediante los cambios en su longitud de onda y altura de ola.

El comportamiento típico del fenómeno de asomeramiento se produce inicialmente en una reducción en la altura de la ola hasta alcanzar un valor mínimo, donde comienza a aumentar dicha altura conforme va disminuyendo la profundidad.

La modelación del fenómeno de asomeramiento se realiza a través de una propagación de un tren de ondas en la dirección del eje x sobre la playa como se observa en la figura 5.1. El resultado numérico se compara con la solución analítica que se obtiene a partir de la hipótesis de conservación del flujo de energía $E_{Cg} = \text{constante}$, que dan lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

$$Cg = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$\frac{H_1}{H_0} = \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g1}}} = Ks$$

Dada la linealidad de las ecuaciones, los resultados no dependen de la altura de la ola inicial H_0 . Es muy importante considerar la influencia de la pendiente y del peralte de las olas H_0/L_0 , se observa que los resultados dependen ligeramente de dicho peralte.

5.2.2 Refracción por fondo

En ausencia de corrientes, considerando un periodo de onda constante ($T=cte$), la celeridad de onda depende principalmente de la profundidad local, mientras que el efecto de la altura de ola en dicha celeridad es mucho menor. La existencia de un gradiente de la celeridad de la onda a lo largo de un frente provoca un cambio en la dirección de propagación, lo cual es conocido como refracción por fondo o refracción.

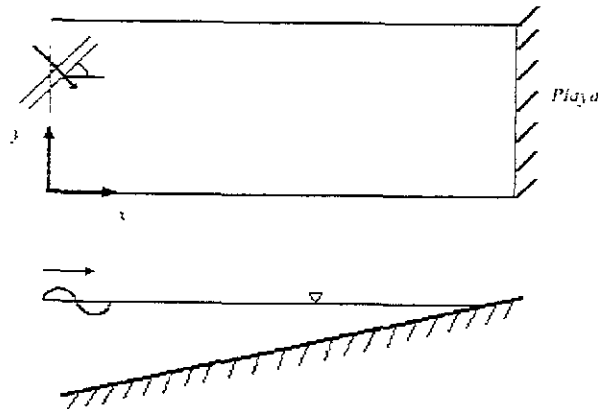


Figura 5.1 Batimetría recta y paralela

5.2.3 Rotura del oleaje

La rotura del oleaje es uno de los fenómenos más significativo de la hidrodinámica costera, la cual se produce cuando la altura de ola es aproximadamente igual a la profundidad. Durante la rotura del oleaje, tienen lugar complejos fenómenos físicos y la transformación de energía del oleaje se manifiesta en una turbulencia.

El estudio de la rotura del oleaje no se limita al cálculo de la altura de ola y la profundidad a la que rompe, sino también al cálculo de la energía disipada y a la descripción del fenómeno de recomposición.

5.2 Caso 1. Batimetría recta y paralela

En este apartado se muestra un ejemplo clásico de una modelación para observar el fenómeno de refracción y asomeramiento a través del modelo computacional REFRACT.

Se trabajó con una batimetría recta y paralela con una pendiente de 5% sobre un dominio de 200 metros de longitud por 120 metros de anchura con una profundidad máxima de 10 metros en la zona de llegada del oleaje que para fines de comparación se tomaron cinco casos principales: ángulos de incidencia de 15°, 30°, 45°, 50° y 60° cada uno con un periodo $T=12$ seg, amplitud del oleaje incidente $a=2.1$ m, sin la presencia de marea y con un análisis lineal.

5.2.1 Resultados para los cinco diferentes ángulos de incidencia

En la figura 5.2 se presenta un esquema de la batimetría recta y horizontal propuesta. En las figuras 5.3 y 5.4 se representan las direcciones y alturas del oleaje a través de flechas, isoaltura del oleaje dentro del dominio de cálculo respectivamente para el caso de incidencia oblicua igual a 15°. De manera similar, en las figuras 5.5 a 5.12, se representan mapas de vectores, direcciones de altura de olas y un mapa de isoalturas de ola, para los casos de incidencia del oleaje igual a 30°, 45°, 50° y 60°, respectivamente.

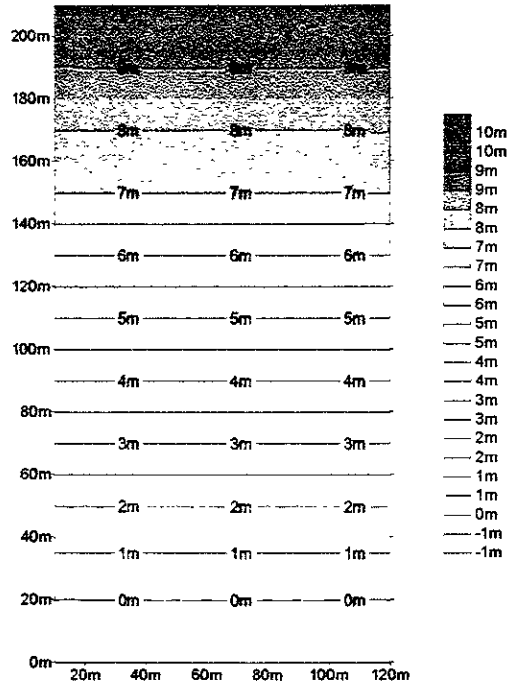


figura 5.2 Batimetría recta y horizontal con opendiente del 5%

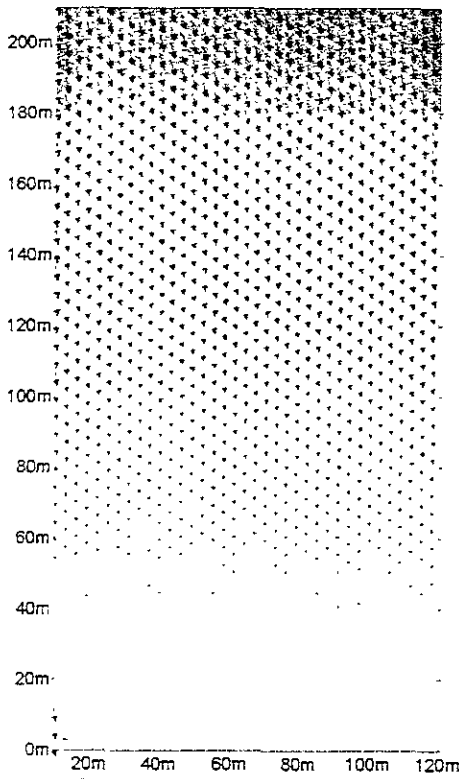


figura 5.3 Resultados para oleaje incidente de 15° , las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio

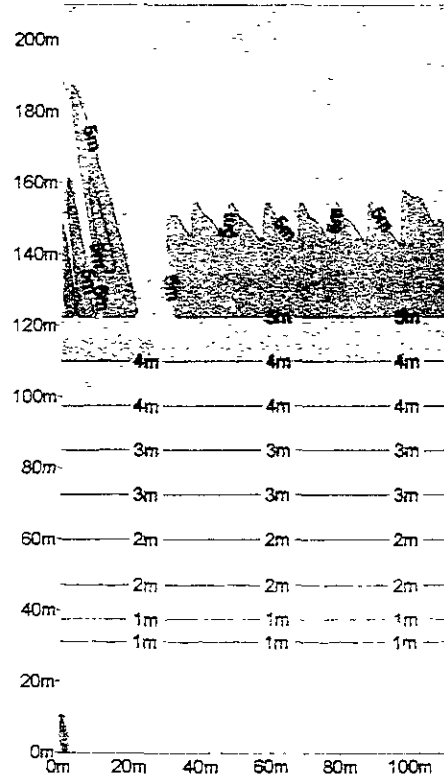


figura 5.4 Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 15° , se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo.

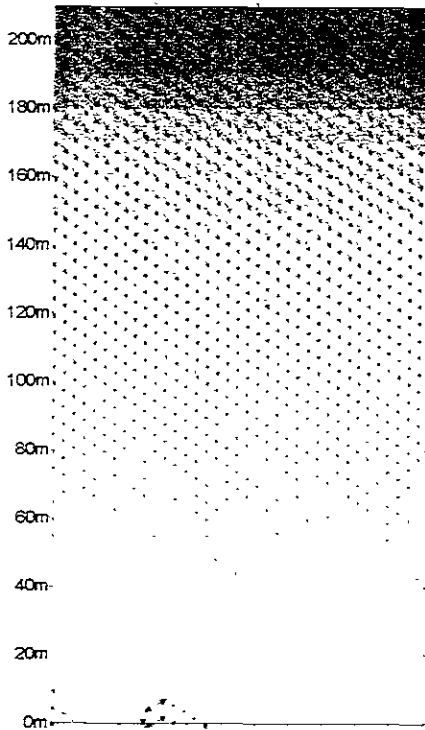


figura 5.5 Resultados para oleaje incidente de 30° , las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio

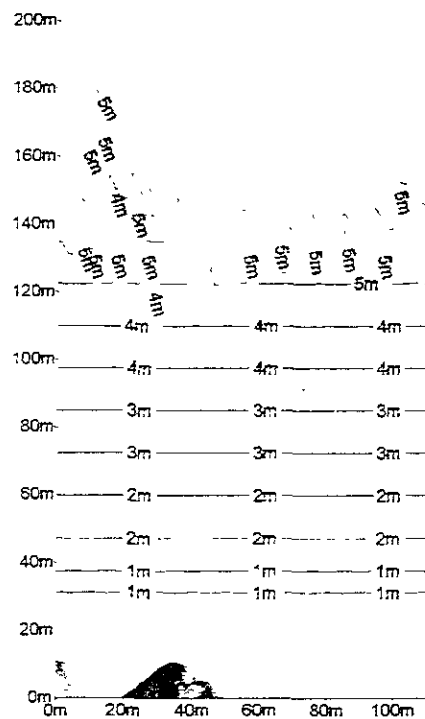


figura 5.6 Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 30° , se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo

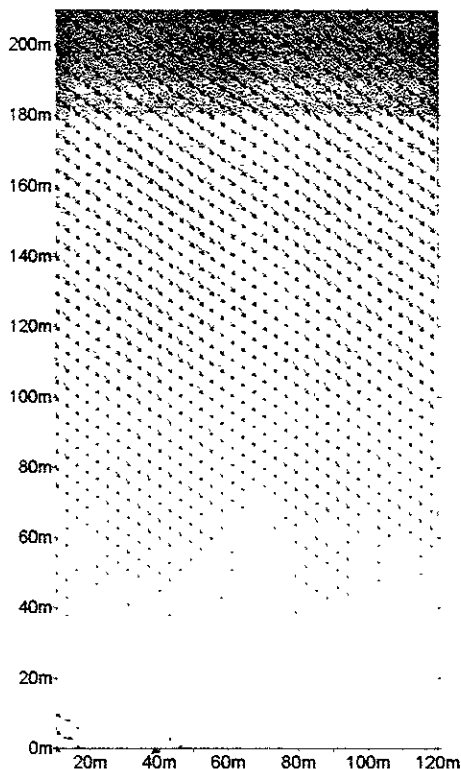


figura 5.7 Resultados para oleaje incidente de 45° , las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio

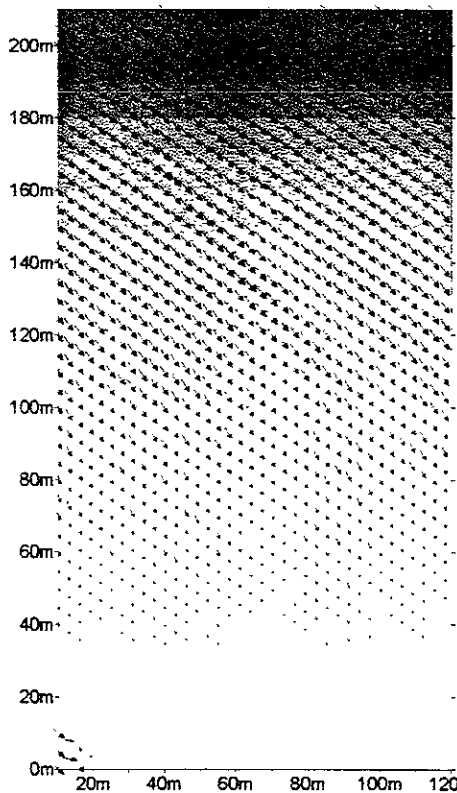


figura 5.9 Resultados para oleaje incidente de 50° , las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio

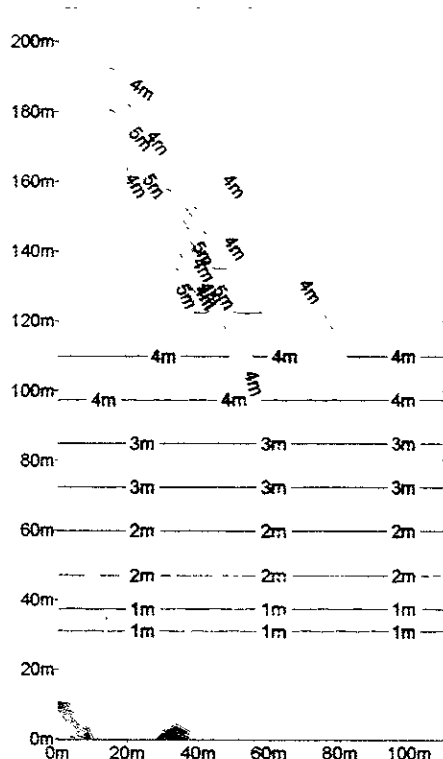


figura 5.8 Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 45° , se muestra el asomamiento y la disipación de energía por fondo

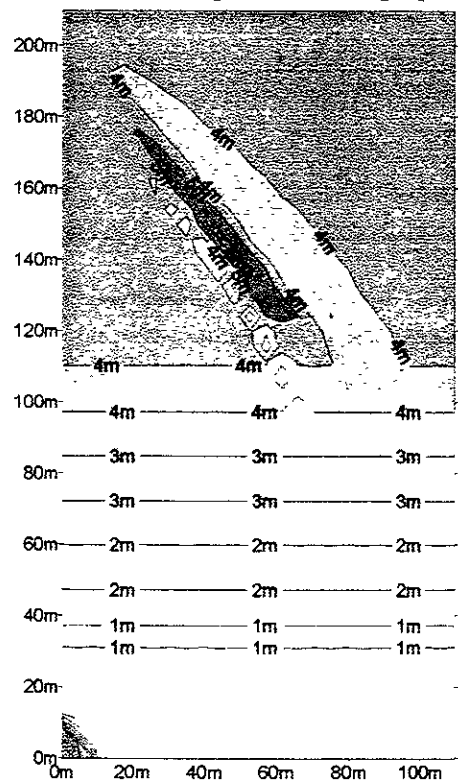


figura 5.10 Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 50° , se muestra el asomamiento y la disipación de energía por fondo

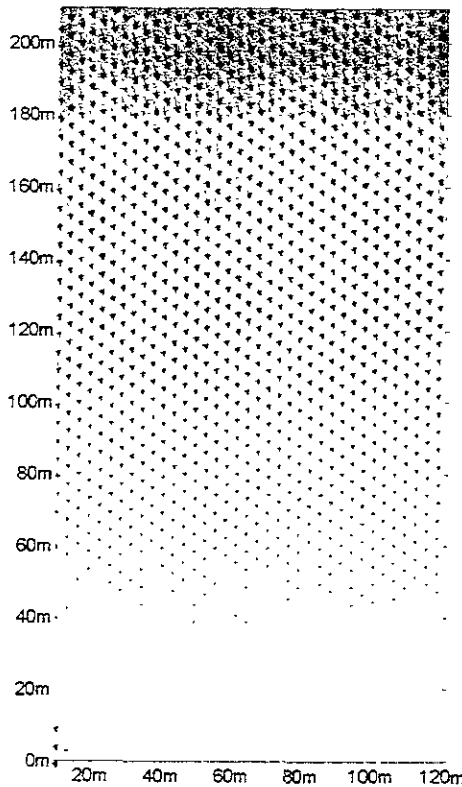


figura 5.11 Resultados para oleaje incidente de 60° , las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto del dominio

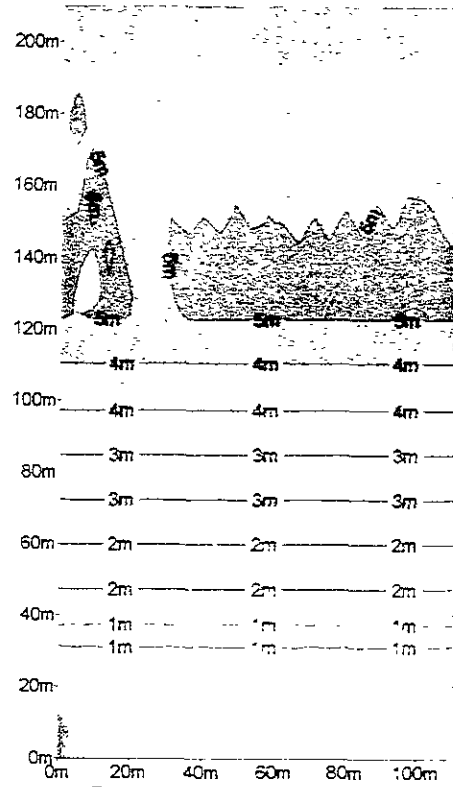


figura 5.12 Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de 60° . se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo

En las figuras anteriores se puede observar perfectamente el fenómeno de asomeramiento y refracción, el cual se manifiesta en una agudización en la altura del oleaje a medida que el ángulo de incidencia aumenta. Para ángulos de incidencia muy pequeños, se presenta un aumento significativo en la altura del oleaje en la parte del lado izquierdo del dominio de cálculo, éste aumento se mueve hacia el centro conforme el ángulo tiende a normalizarse siendo su agudización menos brusca. El ángulo comienza a cambiar y tiende a llegar normal debido al fondo y rompe eventualmente conforme el tren de olas se mueve hacia la playa y la batimetría disminuye.

El fenómeno de refracción se puede observar mejor a través de una representación gráfica de un corte longitudinal a la batimetría exactamente en el centro del dominio de cálculo, éste perfil del oleaje muestra un aumento en la altura del oleaje en el primer tercio del dominio hasta llegar al punto en donde sufre una disminución lineal hasta romper y perder la energía en su totalidad. A continuación se muestran éstas figuras gráficas (5.13 a 5.17), dando así como concluido el primer ejemplo de aplicación para el modelo REFRACT.

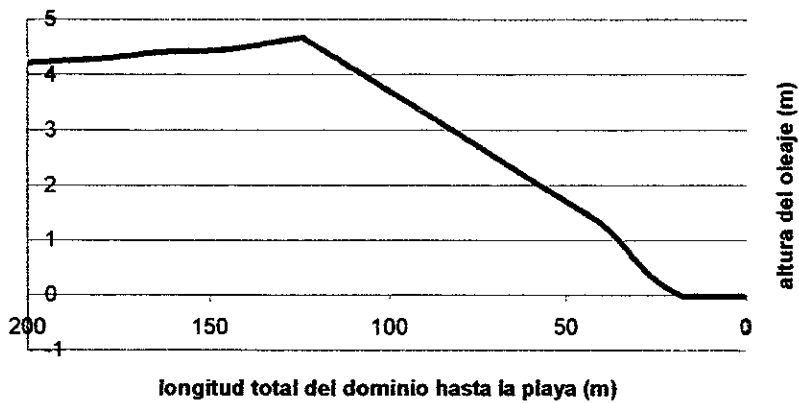


figura 5.13 Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 15°

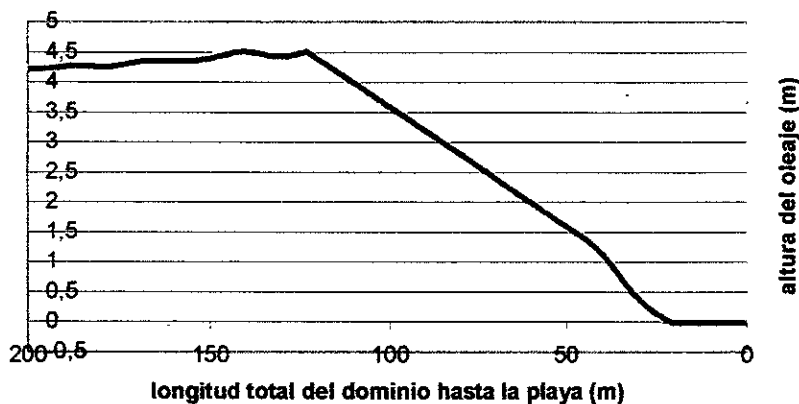


figura 5.14 Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 30°

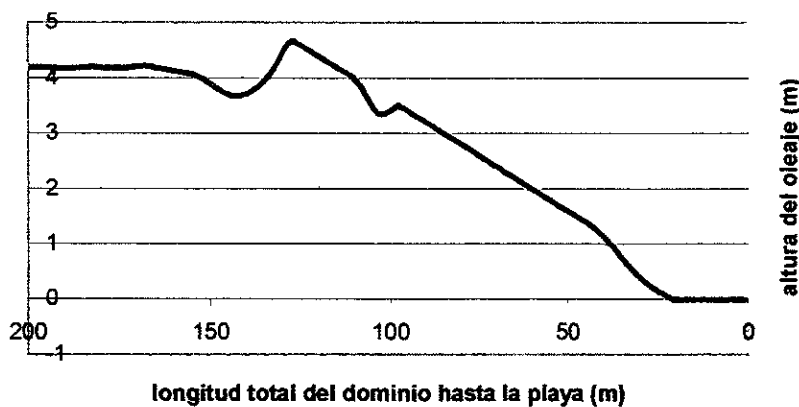


figura 5.15 Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 45°

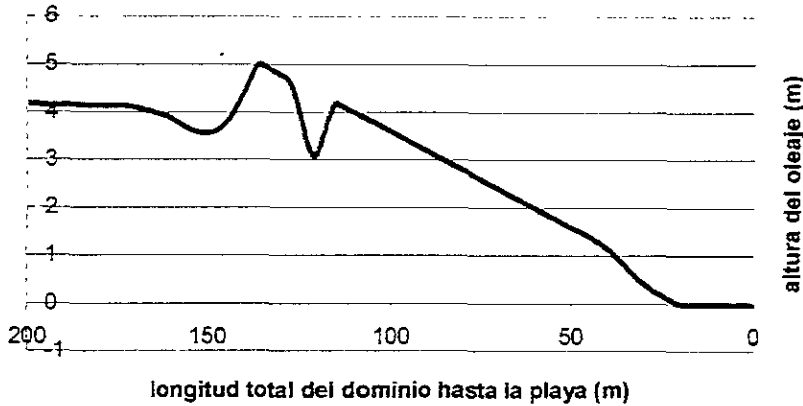


figura 5.16 Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 50°

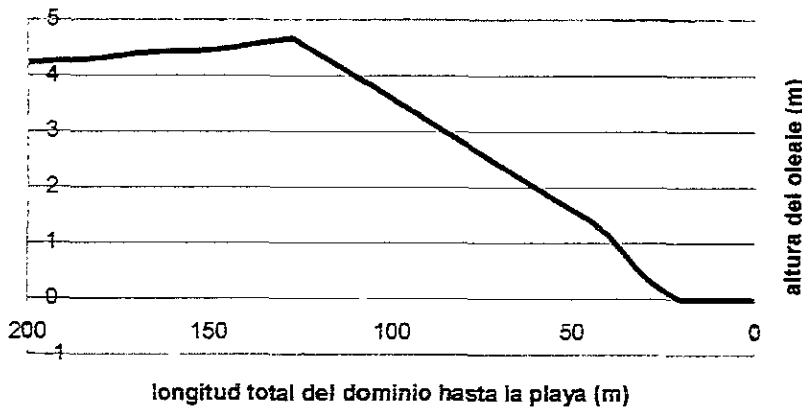


figura 5.17 Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de 60°

5.3 Caso 2. Fenómeno de propagación en un ensayo físico, Modelo experimental de Berkhoff.

En éste apartado se comparan los resultados experimentales obtenidos a partir de un modelo reducido con los resultados numéricos del modelo de propagación. Las medidas experimentales se obtuvieron de un ensayo realizado por Berkhoff en 1982.

El modelo a escala consta de una batimetría con un bajo o shoal elíptico situado en el fondo plano con pendiente del 2% (escala 1:50). En el contorno inicial, donde proviene el oleaje, la profundidad es de 0.45 m y el contorno final de ensayo existe una playa, de modo que la energía propagada se disipa casi en su totalidad por el proceso de rotura del oleaje. En la figura 5.16 se puede observar un esquema de la batimetría y la localización de cada una de las secciones donde se tomaron las medidas.

Esta prueba descrita anteriormente, se eligió por las siguientes razones:

- a) Se cuenta con un completo conjunto de medidas experimentales rigurosamente controladas en el laboratorio, Berkhoff (1982).
- b) No obstante que el modelo de Berkhoff fue diseñado para estudiar los efectos de difracción, en zonas donde este fenómeno no es tan importante, sus resultados pueden servir para estudiar los efectos de refracción.
- c) Se puede observar y analizar la bondad del modelo REFRACT para fines de diseño ingenieril en casos reales con una batimetría más compleja considerando su sencillez y rapidez de cálculo, comparado con otros modelos más complejos desde el punto de vista que simulan interacciones de fenómenos de transformación del oleaje, por ejemplo refracción - difracción.

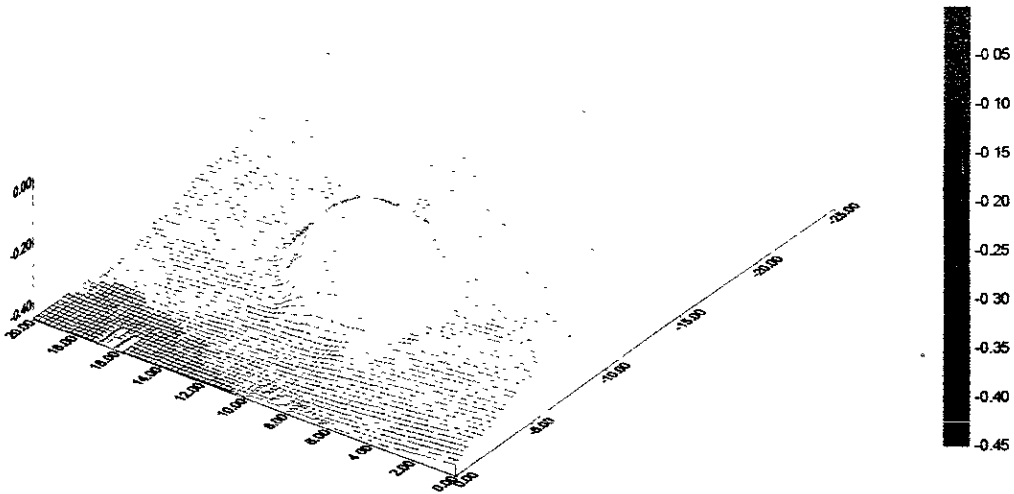


figura 5.18 Batimetría de ensayo utilizada por Berkhoff (1982). Perspectiva 3D.

Las secciones de comparación del modelo de Berkhoff contra el modelo REFRACT, después de un análisis y observación minuciosa, son las mostradas en la figura 5.19 y en la figura 5.20 se representa las áreas donde la refracción del oleaje es dominante.

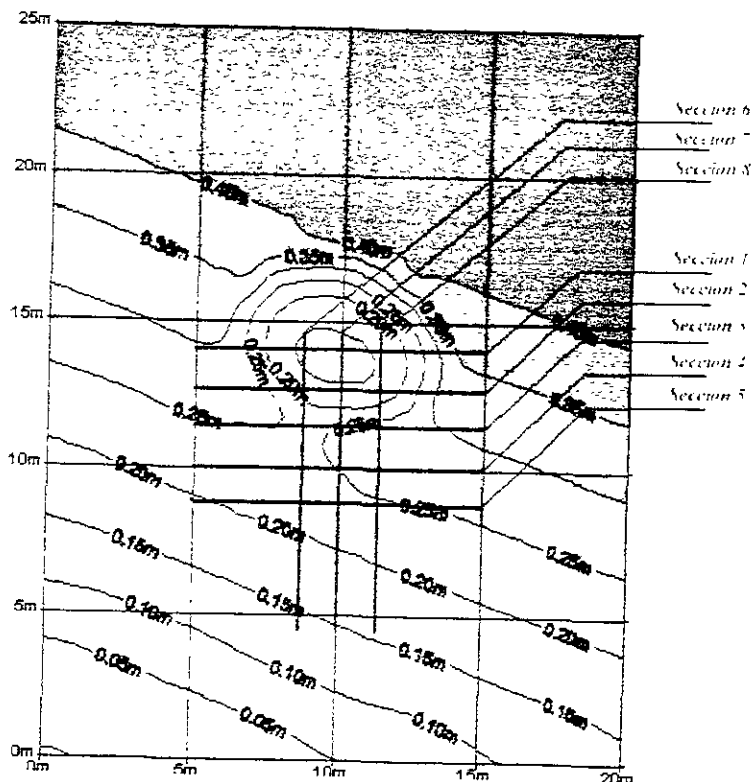


Figura 5.19 Vista en planta del dominio de cálculo para el experimento de Berkhoff y las secciones de medición

El dominio numérico consistió en una malla rectangular de dimensiones 25m x 20 m según el eje x y el eje y respectivamente. La línea máxima pendiente del plano inclinado forma un ángulo de 20° con el eje x . Los espaciamientos Δx y Δy se tomaron iguales $\Delta x = \Delta y = 0.25$ m con 101×81 nodos de cálculo en x y y respectivamente. Las condiciones iniciales del oleaje incidente fueron las mismas que en el ensayo de Berkhoff; $H_0 = 0.0464$ m, $T = 1$ s y $\theta = 0^\circ$ respecto al eje x de la malla de cálculo.

Las condiciones laterales de contorno elegidas fueron las correspondientes a contornos abiertos, que permiten la transmisión parcial del oleaje a través del contorno. La localización de las medidas experimentales fueron las siguientes:

Sección	x	Rango
1	14	$5 < y < 15$
2	12	$5 < y < 15$
3	10	$5 < y < 15$
4	8	$5 < y < 15$
5	6	$5 < y < 15$
6	Y=12	$10.5 < x < 20.5$
7	Y=10	$10.5 < x < 20.5$
8	Y=8	$10.5 < x < 20.5$

Tabla 5.1 Localización de las mediciones experimentales

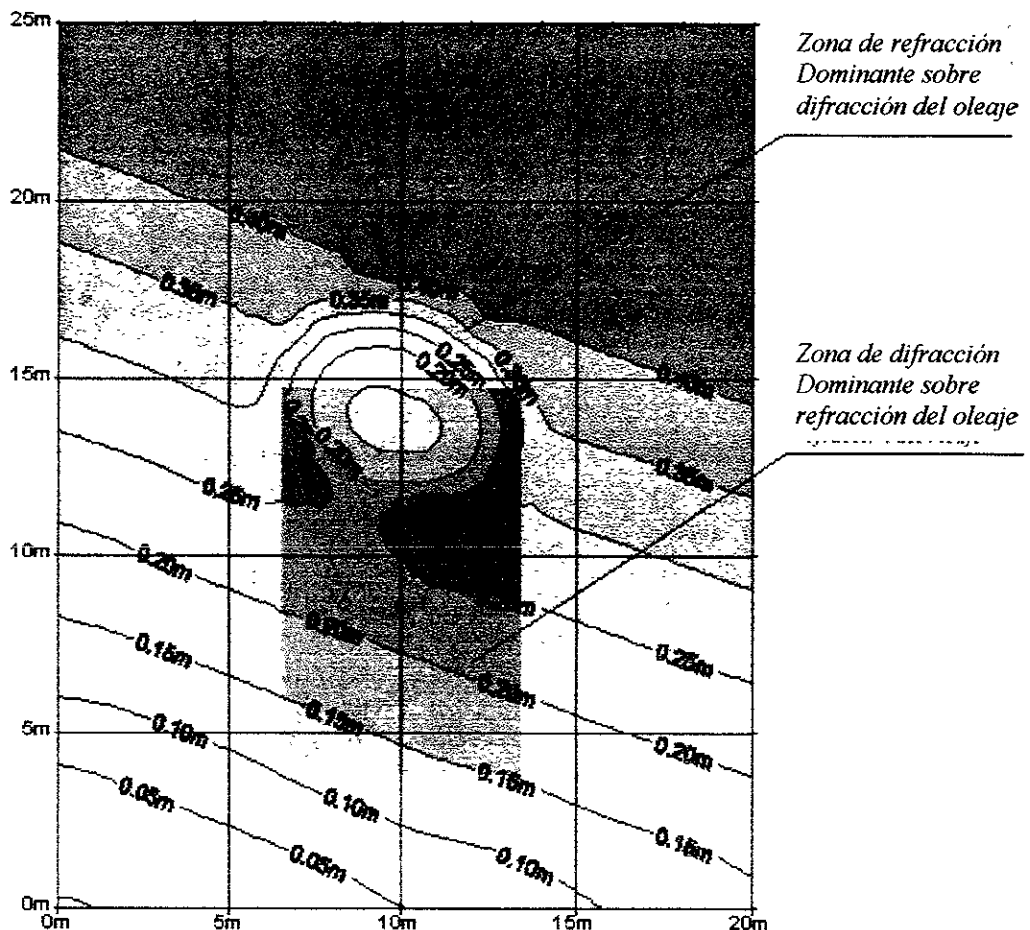


Figura 5.20 Zonas de dominio de los efectos principales de transformación del oleaje

5.3.2 Resultados experimentales y numéricos para las secciones de control

En las figuras 5.22 a la 5.29 se presentan los resultados del modelo REFRACT para las ocho diferentes secciones, se observa que los resultados numéricos y experimentales, del modelo de Berkhoff, no es posible estimar la altura de ola por detrás del bajo o "shoal" ya que en ésta zona el oleaje se concentra debido al efecto de difracción, apareciendo así

una zona de rayos cruzados. Es por esto que en las gráficas siguientes (5.22 a 5.23) se observa que la altura de ola en la zona de difracción dominante (detrás del shoal), se agudiza dramáticamente y se crea un exceso de picos, así se puede concluir que el modelo REFRACT es aplicable a las zonas libres de obstáculos o formaciones submarinas que induzcan el fenómeno de difracción del oleaje.

Los resultados de la modelación numérica muestran gráficamente en la figura 5.19. En esta figura se puede observar como se agudiza la ola en el área difractada, mientras que en toda la zona restante se tiene un comportamiento normal al que se tendría con un oleaje refractado en su totalidad.

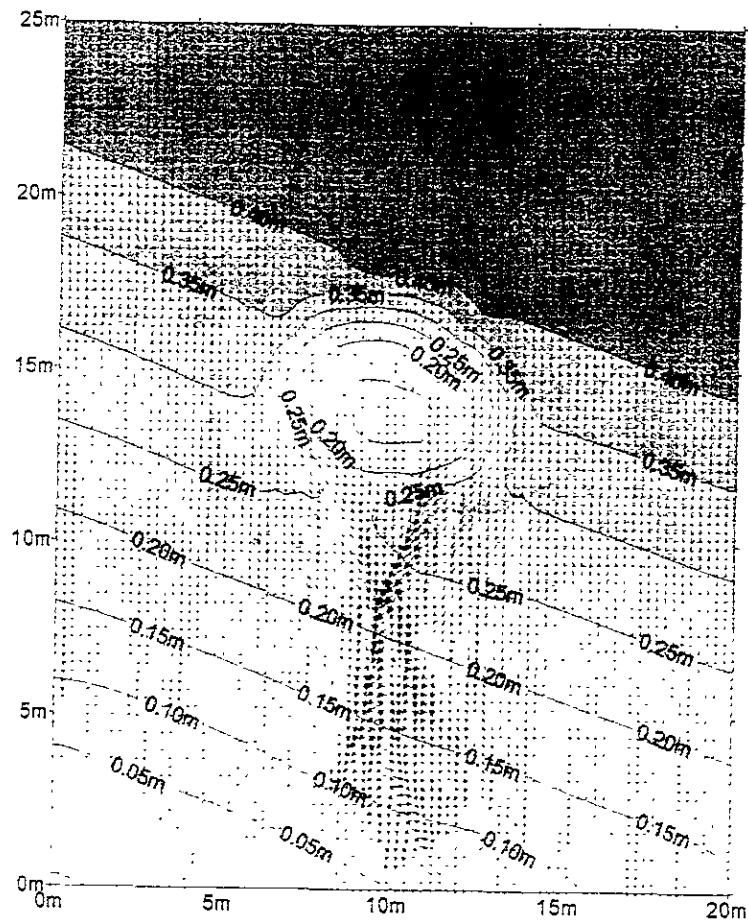


figura 5.21 Modelo de Berkhoff realizado con REFRACT

A continuación se presentan las gráficas para las ocho zonas medidas experimentalmente, comparadas con los resultados del programa REFRACT. El área sombreada representa la zona donde el modelo REFRACT no se aplica, ya que se trata del área de difracción dominante.:

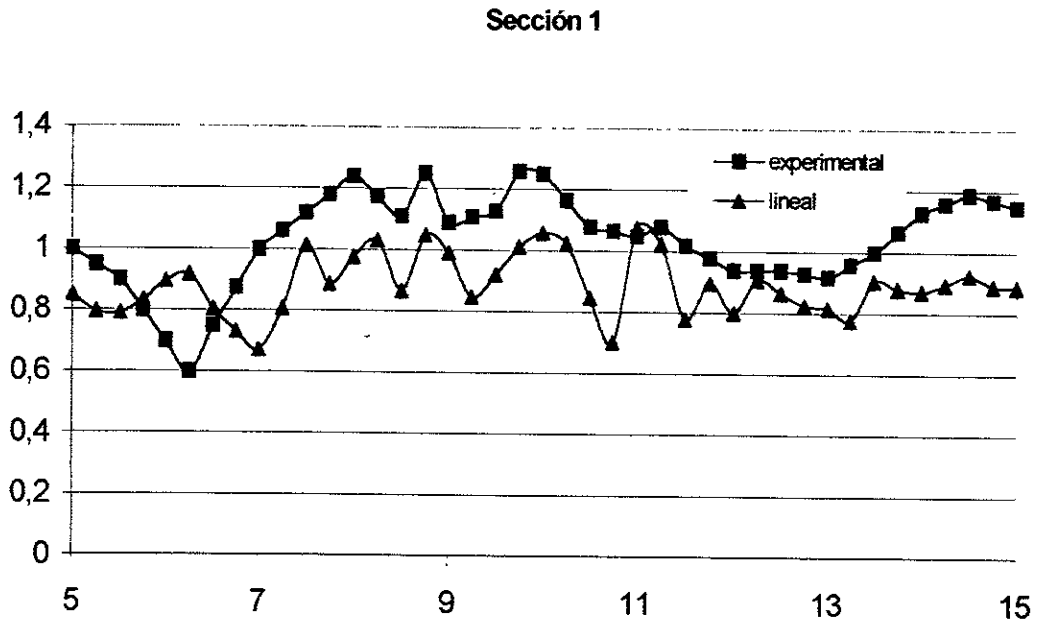


Figura 5.22 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 1, comienza una fuerte influencia de difracción.

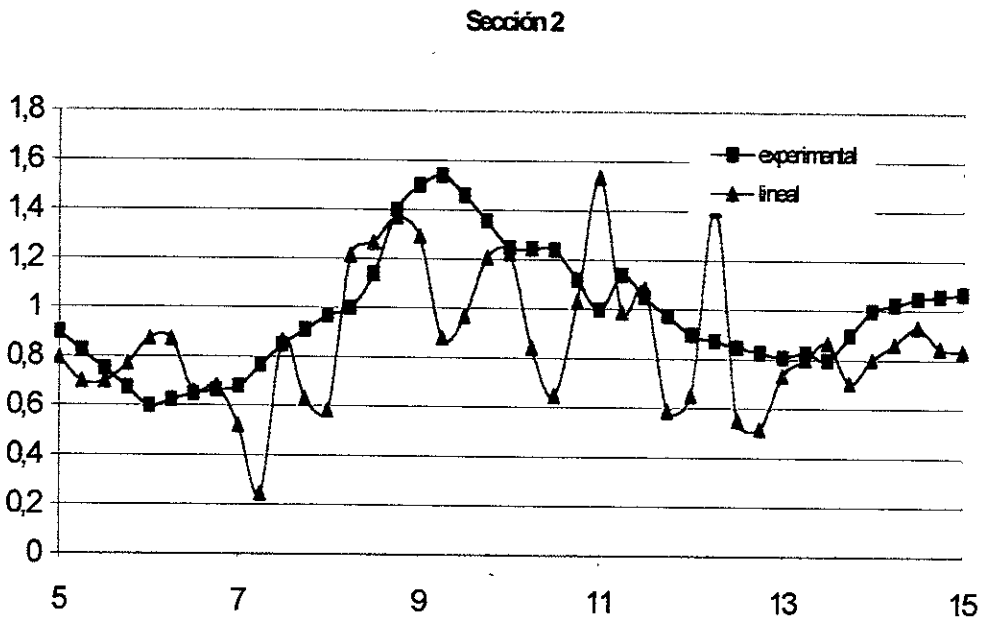


Figura 5.23 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 2, zona de alta turbulencia inmediatamente después del bajo.

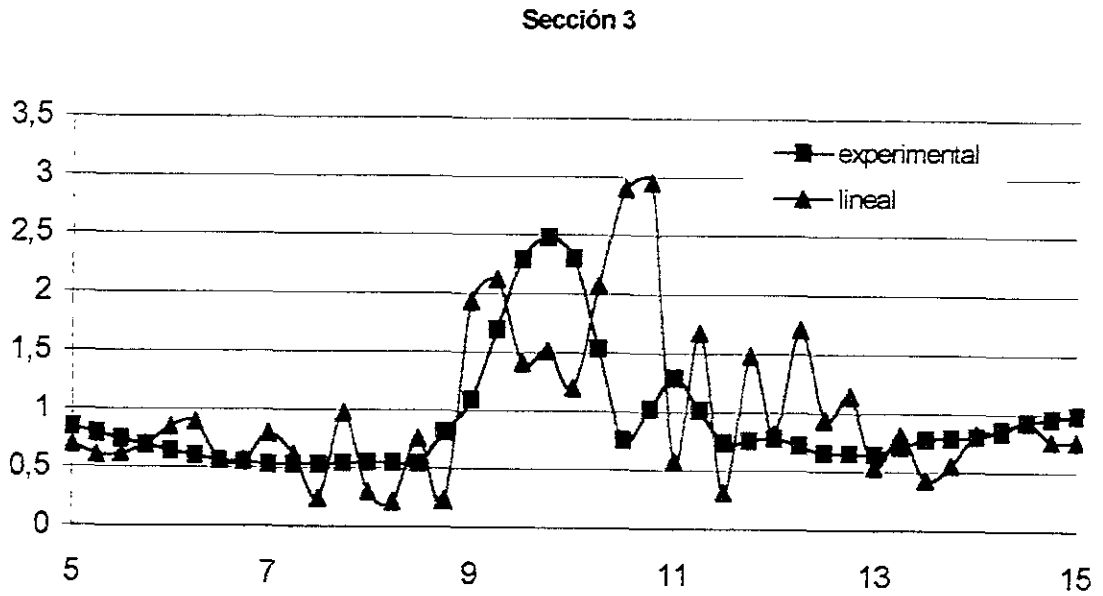


Figura 5.24 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 3, se comienza a estabilizar a los lados pero se presenta una agudización extrema del oleaje en la zona de difracción dominante.

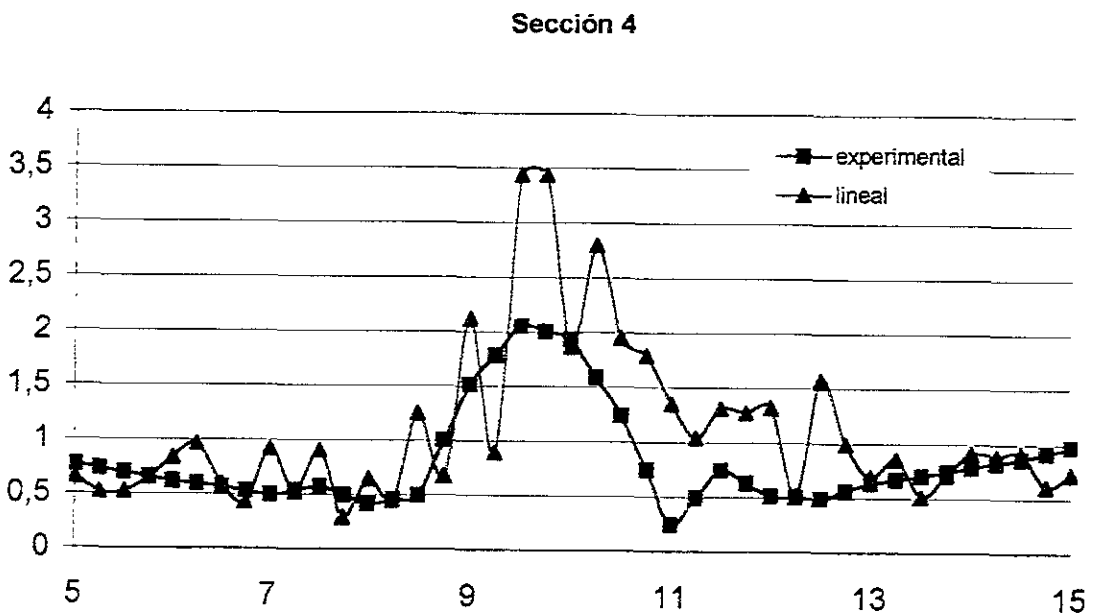


Figura 5.25 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 4, comienzan a existir un cruce de rayos en la zona media lo cual origina un incremento dramático en la altura del oleaje presente.

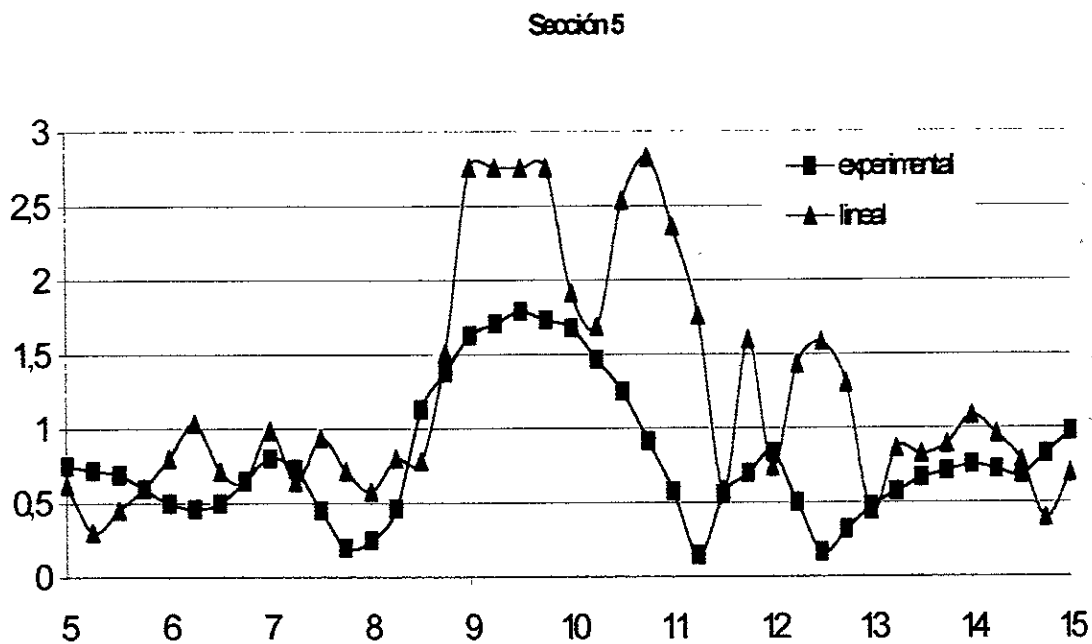


Figura 5.26 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 5, el modelo REFRACT se comporta aceptablemente en la zona de refracción dominante.

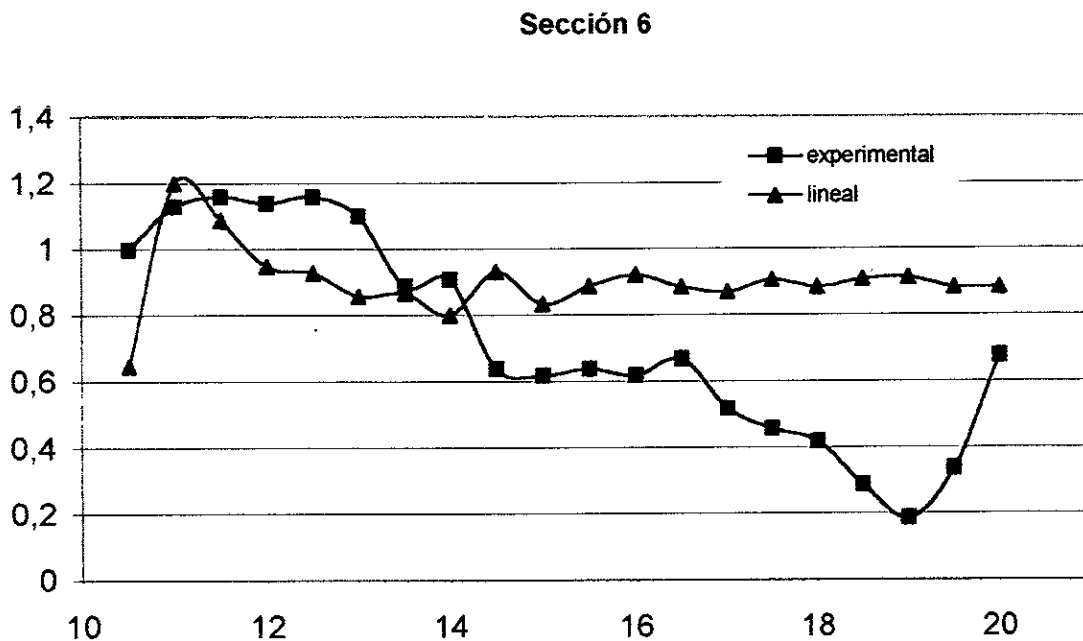


Figura 5.27 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 6, es una zona totalmente difractada que presenta solamente una pequeña región de refracción casi pura

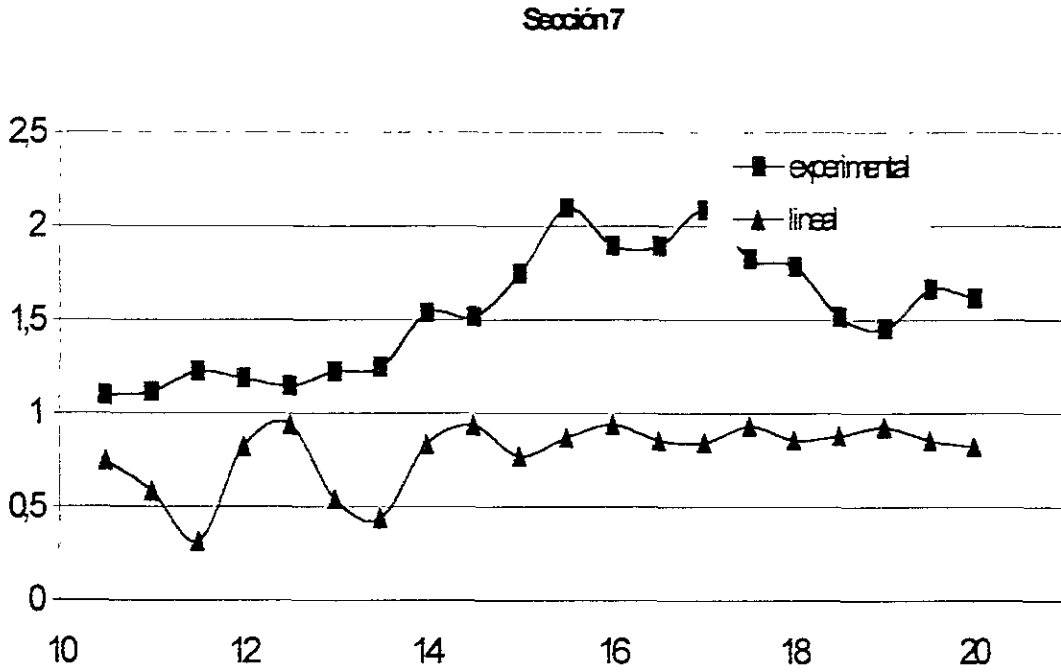


Figura 5.28 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 7, zona totalmente difractada, no existe similitud

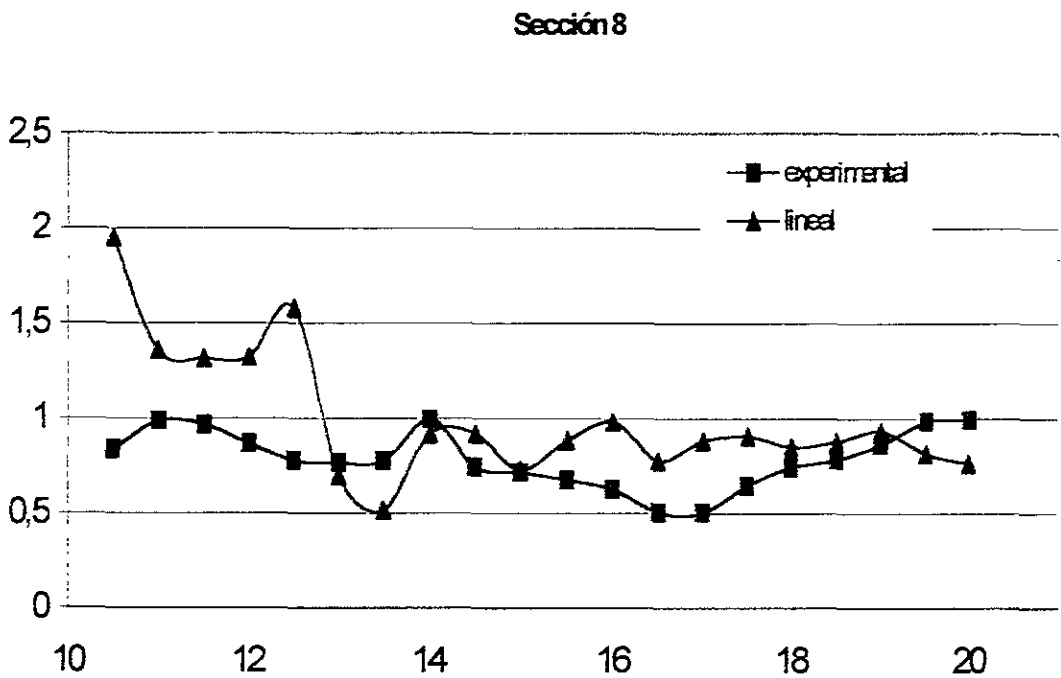


Figura 5.29 Comparación del resultado experimental y numérico para la sección 8, una zona un poco menos abrupta ya que la difracción se sesga hacia las secciones 6 y 7.

Analizando las diferentes zonas, puede apreciarse que en la sección 1, los efectos de concentración de energía aún no son aparentes, aunque existe una ganancia de altura de oleaje inicial debida al efecto de difracción que apenas comienza en ésta sección.

Para el caso de aplicación 2, se puede concluir que no es recomendable utilizar el modelo REFRACT para resolver comportamientos del oleaje sobre batimetrías abruptas ni con dominios incluyendo estructuras reflejantes como se mencionó anteriormente.

5.4 Caso 3. Batimetría idealizada. Noda (1974)

En el año de 1974, Noda utilizó una batimetría matemáticamente idealizada para examinar el fenómeno de refracción del oleaje con un análisis lineal. El modelo matemático es:

$$h(x, y) = 0.025 \left\{ 1 + 20 \exp \left[-3 \left(\frac{x}{20} \right)^{1/3} \sin^{10} \left(\frac{\pi y}{80} \right) \right] \right\} \quad (5.1)$$

La ecuación anterior representa una playa plana, con la presencia de dos canales localizados a 80 metros uno de otro. El periodo de ola para la prueba es de $T=4s$, el ángulo de incidencia para aguas profundas es de -37° , y la altura de ola en aguas profundas es de 1.0 m. Noda mostró el resultado de éste análisis. En cada punto, la longitud de las flechas muestran su magnitud y la inclinación muestra la dirección de la ola.

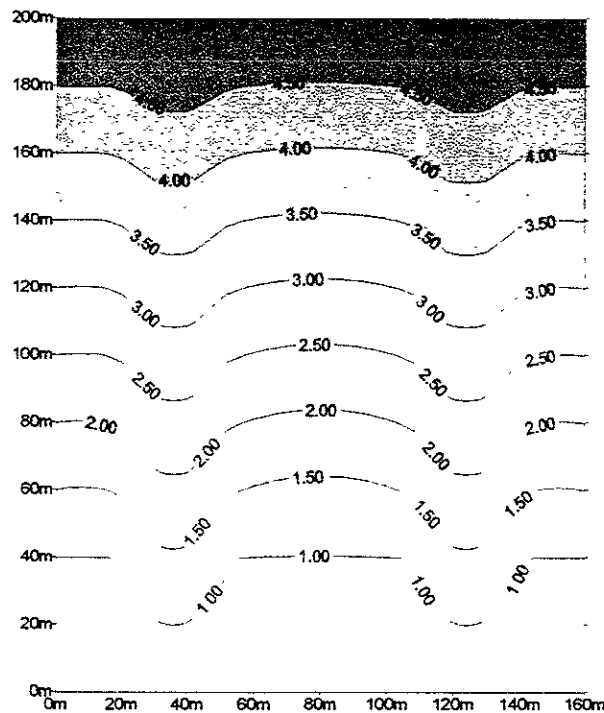


figura 5.30 Batimetría propuesta por Noda (1974), 160x200 m

5.4.1 Resultado del modelo REFRACT aplicado a la batimetría idealizada matemáticamente por Noda (1974).

A continuación se presenta, la figura 5.31 el cual se ilustra la transformación del oleaje que se propaga sobre la batimetría en cuestión. Se observa que existe una fuerte tendencia a aumentar la altura del oleaje en las áreas en donde se encuentran los canales de la batimetría. La longitud de las flechas muestran su magnitud y la inclinación muestra la dirección de la ola. Existe una gran divergencia de la energía del oleaje lejos de los canales como era de esperarse.



figura 5.31 Resultados gráficos del experimento de Noda modelado por el programa REFRACT

Finalmente se muestra en las siguientes figuras una comparación del resultado original de Noda con el obtenido por el programa REFRACT, éste arrojó resultados muy parecidos, de hecho, las diferencias que se obtuvieron son debido a la técnica de interpolación utilizada por el programa que se utilizó para éste fin. Los puntos en la malla de la batimetría son levemente alterados al utilizar una interpolación específica comparada con otra.

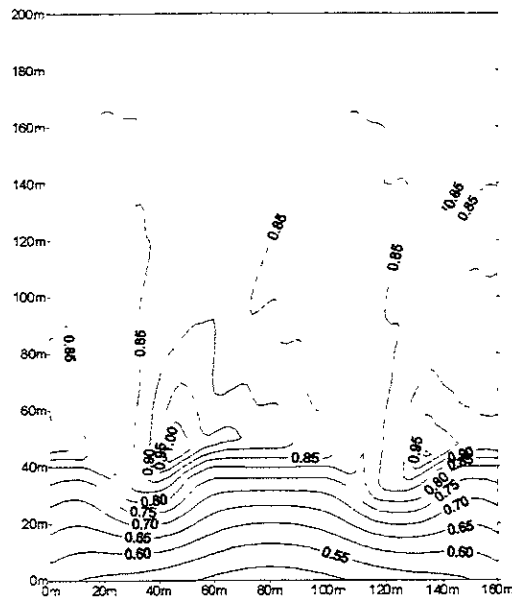


figura 5.32 Representación gráfica de las líneas de iso altura de ola para los datos obtenidos por el programa REFRACT

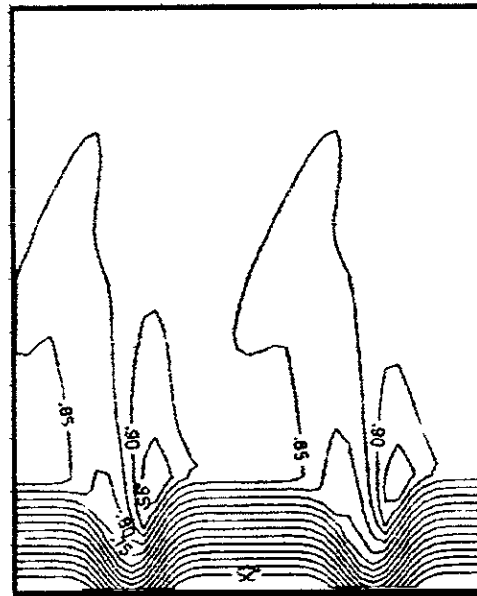


figura 5.33 Representación gráfica de las líneas de iso altura de ola para los datos obtenidos por Noda (1974).

**Conclusiones
y futuras líneas de trabajo**

Conclusiones

Dentro de éste trabajo de Tesis, se estudiaron a fondo los temas relacionados con la propagación y transformación del oleaje enfocados a un modelo computacional que resuelve específicamente el fenómeno de refracción, asomeramiento, rotura y reconstitución del oleaje con la presencia de corrientes; basados en leyes físicas y algoritmos matemáticos que demuestran y facilitan la obtención de los resultados finales y determinantes para establecer conclusiones acertadas.

Se encontró que la teoría lineal de ondas o teoría de Airy es la que se adecua o acerca mas al oleaje que incide y se propaga de aguas profundas a aguas someras, dicha teoría se utilizó para el análisis de la refracción debida al fondo, al ángulo de incidencia y a corrientes.

Se encontró que al modelar con una misma batimetría y mismas condiciones iniciales, pero en un caso con un modelo lineal y en otro con modelo no lineal, se presentaban resultados muy similares que para fines prácticos no significan un cambio trascendente. Esto es debido a que las zonas en las que el modelo REFRACT se aplica, son zonas de aguas intermedias a someras sin tocar mucho la zona de aguas profundas mas que para establecer las condiciones iniciales y además, las batimetrías con las que el modelo trabaja son batimetrías simples e intentando una similitud a las que se encuentran en forma natural.

Quedo bien establecido qué limitantes rigen sobre del modelo computacional REFRACT, se concluye que para batimetrías, ya sean reales o propuestas, que presentan algún tipo de estructura reflejante o que se interponga en el camino natural del tren de olas, no es posible aplicar el modelo ya que se crea una zona de difracción dominante la cual no se puede solucionar por sus características y ecuaciones de programación preestablecidas.

Para los tres casos de aplicación se concluye que el modelo se comportó adecuadamente y presento sus bondades y limitaciones. Desde una batimetría idealizada hasta un modelo experimental como el de Berkhoff, presentó resultados esperados en general; pero a su vez mostró en ocasiones comportamientos poco usuales en las zonas de máxima difracción pero que al trascender de dicha zona crítica, se noto una recuperación en su comportamiento natural.

El modelo se comporta tal y como se esperaba al momento de su concepción, refracta adecuadamente el tren de olas y crea un cambio en su morfología debido al fenómeno de asomeramiento hasta llegar a un rompimiento y disipación total de la energía.

La conclusión final es que se logró la creación de un modelo computacional que resuelve los fenómenos de transformación del oleaje antes mencionados con herramientas simples y que no exigen de procesos de cálculo ni computacionales muy complicados y además se llegó a un modelo sencillo de utilizar y que puede ser fácilmente adaptado a otros programas similares como una opción mas de cálculo para ejemplos específicos.

Futuras líneas de trabajo

- Implementación y adaptación del programa REFRACT a un paquete computacional como una opción más entre otros modelos similares pero con otras finalidades y fundamentos, para obtener resultados enfocados especialmente al fenómeno de refracción del oleaje
- Implementación del programa REFRACT al programa HURAK que se dedica a la predicción de huracanes, en la parte relacionada con cálculo de alturas de ola inducidas por viento y transformación de oleaje propiamente de aguas intermedias a aguas poco profundas, ya que el programa HURAK solamente permite el cálculo de aguas profundas a aguas intermedias.
- Implementación dentro del programa REFRACT de un mayor número de parámetros y condiciones como lo son la difracción, la reflexión y la interacción refracción-difracción.
- Permitir que el programa calcule parámetros de diseño con base en estructuras costeras artificiales inducidas al programa, a fin de tener una herramienta práctica para el cálculo de estructuras marinas.

Referencias bibliográficas

Referencias bibliográficas

- Adeyemo, M.D. (1968) "Effect of beach Slope and Shoaling on Wave Asimmetry", Proceedings, 11th Conference on coastal Engineering, American society of Civil Engineers, London.
- Arthur, R.S. (1950). "Refraction of Shallow Water Waves: The combined effects of currents and underwater topography", Transactions American geophysical Union, vol. 31, no 4.
- Berkhoff, J.C. W., Booij. N and Radder. A.C. (1972). "Computation of Combined Refraction - diffraction", Proceedings of the 13th international Conference on Coastal Engineering, ASCE, Vancouver
- Berkhoff, J.C. W., Booij. N and Radder. A.C. (1982). "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves", Coastal Engineering.
- Chakrabarti S.K., (1987) "Hydrodynamics of offshore structures" Computational mechanics publications & Springer-Verlag.
- Chappellear, J.E. "Direct Numerical calculation of nonlinear Ocean Waves", J. Geophys. Res, Vol 66, No. 2.
- Dally, W. R., R.G. "Wave Height Variation Across Beaches of arbitrary profile", Journal Geophysical Research, 90, C6.
- Dean, R. y Dalrymple R. 1991. "Water wave mechanics for engineers and scientists." Advanced Series on Ocean Engineering, volume 2, World Scientific, pp 353.
- Ferziger J., Milovan O. "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer, 1997, Stanford University, USA.
- Fuentes O. A. "Propagación del oleaje en la proximidad de la costa", UNAM, 1996, tesis doctoral, México
- G.I.O.C. "OLUCA/RD, manual de referencia", 1996, Universidad de Cantabria
- Goveare G. 1997. "Acción del oleaje sobre estructuras marítimas no rebasables" Tesis de Maestría, UNAM. México.
- Goda Y. 1983. "Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell" Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 22, No. 1, pp 3-41.
- Griswold, G.M. (1963). "Numerical calculation of wave refraction", J. Geophys. Res., 68(6).

- Horikawa, K. And C.T. Kuo (1966). "A study of wave transformation inside surf zone", Proceedings to the 10th international Conference on Coastal Engineering, ASCE, vol 1, New York.
- Jen, Y. (1969) "Wave refraction near san Pedro Bay, California., J Water harbors, Coastal Eng. Div., ASCE, Vol 95, No. WW3.
- Jonsson, I.G. (1979). "A mild-slope wave equation and its application to tsunami calculations", Mar. Geodesy.
- Keulegan, G.H. and L.H. Carpenter, "Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid" J. Res. Nat. Bur. Stand. Vol 60, No. 5, may 1958.
- Korteweg, D.J. and De Vries, "On the change of form of long waves Advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves", Philos, Mag., 5th ser, Vol 39.
- Kraus Nicholas, (1996) "History and heritage of Coastal Engineering", American Society of Civil Engineers.
- L. Edge B "Coastal Engineering", Volume Three, 1998, ASCE, Copenhagen, Denmark.
- L. Edge B. "Coastal Engineering", Volume two, 1996, ASCE, Copenhagen Denmark.
- Le Méahuté B, (1976) "An introduction to hydrodynamics and water waves" Springer-Verlag.
- Mc Cowan i., "On the highest Wave of permanent Type", philos. Mag. J. Sci, Vol 38, 1984.
- Noda, E. Et al (1974). "Nearshore circulation under sea breeze conditions and wave current in the surf zone" Tetra tech. Rep. TC-149-4, Tetra tech, Pasadena, CA, USA.
- Noda, E. K. (1974) "Wave - induced nearshore circulation". J. Geophys Res., 79(27), 4097-4106.
- Prandle D. "Dynamics and Exchanges in Estuaries and the coastal Zone", Coastal and Estuarine Studies, American Geophysical Union, 1992, USA.
- Rahman M. "Water Waves, Relating Modern Theory to Advanced Engineering Practice" , Oxford Science Publications, 1995, Oxford
- Richard S., John R C Hsu. "Coastal Stabilization". World Scientific, vol 14, advanced series on ocean Engineering.

- Silva R, (1998) "Apuntes del curso: Hidráulica marítima", División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería UNAM.
- Silva R, (1998) "Apuntes del curso: Análisis y predicción de oleaje", División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería UNAM.
- Silva R., Govaere G., Mora J.M., Mendoza J.A. 1997. "Desarrollo de un sistema para el análisis y diseño de playas" Elaborado para Comisión Federal de Electricidad Instituto de Ingeniería, UNAM. Proyecto 7324.
- Skovgård, O, Johnsson, I. And Bertelsen, J. (1975) . "Computation of wave heights due to refraction and friction", j. Waterw. Harbours, Coastal Eng. Div., ASCE, Vol 101. No. WW1.
- Southgate H. "The use of wave transformation models to evaluate inshore wave energy resource", HR Wallingford, HR published paper No. 98, UK.
- Sorensen R.. "Basic wave mechanics for coastal and ocean engineerins", Wiley Inter science, 1993, Canada
- SPM, 1984. "Shore Protection Manual" Coastal Engineering Research Center. US Army Corps of Engineers.
- Weggel, J.R. (1972) "Maximum Breaker Height", Journal Waterways, port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, vol, 98, no. WW4.
- Wendt J. "And introduction for Computational Fluid Dynamics", 2nd edition, Springer, Belgium.
- Wiegel, R.L., "Transmission of Waves Past a Rigid Vertical Thin Barrier", J. Waterways Harbors Div. ASCE, Vol 86, No WW1, mar 1960.
- Wilson, W.S. "A Method for Calculating and Plotting Surface Wave Rays", Tech. Memo 17, U.S. Army, Coastal Research Center, 1966.
- Zwillinger D. "Handbook of Differential Equations", Academic press, third edition, 1998, USA.