



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS GEOMETRICOS DE LOS GRUPOS FUCHSIANOS

T E S I S
Que para obtener el título de
MATEMATICA

p r e s e n t a

RITA XOCHITL VAZQUEZ PADILLA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis: M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

2000

279473



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis.

"ASPECTOS GEOMETRICOS DE LOS GRUPOS FUCHSIANOS"

realizado por RITA XOCHITL VAZQUEZ PADILLA

con número de cuenta 9561923-3 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Propietario DR. SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO
Propietario DR. JAVIER PAEZ CARDENAS
Suplente MAT. EDNA FANNY JASSO HERNANDEZ
Suplente M. en C. DIANA MAYA PADILLA

JCG.
[Signature]
[Signature]
[Signature]
Diana Maya Padilla

Consejo Departamental de Matemáticas

[Signature]
DR. HECTOR MENDEZ ZOBANO

A mi mamá, a mi papá
a mis hermanos Paty y Rubén
a mi Tita,

a Joseantonio

a todos los amigos que
he encontrado en la carrera,
gracias.

Contenido

Introducción	1
1 Transformaciones de Möbius	7
1.1 Esfera de Riemann	7
1.2 Transformaciones de Möbius	13
1.3 Generadores para $PGL(2, \mathbb{C})$	16
1.4 Círculos en Σ	17
1.5 Razón cruzada	19
1.6 Inversión	21
1.7 Conjugación y clasificación de transformaciones	25
2 Geometría hiperbólica	33
2.1 Automorfismos de \mathbb{D} y de \mathcal{U}	33
2.1.1 La transformación de Cayley	33
2.1.2 Automorfismos de \mathcal{U}	34
2.1.3 Automorfismos de \mathbb{D}	36
2.2 La métrica hiperbólica	38
2.3 Geodésicas y segmentos hiperbólicos	40
2.4 Cálculo de $\rho(z_1, z_2)$	43
2.5 Isometrías	47
2.6 Área hiperbólica	48
2.6.1 Fórmula de Gauss-Bonnet	48
2.7 Métrica hiperbólica en el modelo del disco	54
2.7.1 Segmentos hiperbólicos en \mathbb{D}	54
2.7.2 Longitud y área hiperbólicas	55
2.8 Trigonometría hiperbólica	58

3	Grupos Fuchsianos	63
3.1	Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$	63
3.1.1	Transformaciones parabólicas	63
3.1.2	Transformaciones hiperbólicas.	64
3.1.3	Transformaciones elípticas.	64
3.2	Grupos discretos	65
3.3	Grupos propiamente discontinuos	66
3.4	Acción propiamente discontinua en \mathcal{U}	67
3.5	Propiedades algebraicas de los grupos Fuchsianos	71
3.5.1	El centralizador de un automorfismo de \mathcal{U}	71
3.5.2	Otros ejemplos de grupos Fuchsianos	73
3.5.3	El normalizador de un grupo Fuchsiano	75
3.6	Grupos Elementales.	76
3.6.1	Grupos Fuchsianos elementales	77
4	Regiones Fundamentales	87
4.1	Región fundamental	87
4.2	La región de Dirichlet	90
4.3	Círculos Isométricos	95
4.4	Región de Ford	101
4.5	El conjunto límite de un grupo Fuchsiano	103
4.6	Estructura de una Región de Dirichlet	107
4.6.1	Vértices y ciclos elípticos	108
4.6.2	Congruencia de lados	110
4.7	El cociente \mathcal{U}/Γ como superficie de Riemann	112
5	Geometría de Grupos Fuchsianos	119
5.1	Grupos Fuchsianos geoméricamente finitos	119
5.2	Grupos Fuchsianos cocompactos.	123
5.3	La signatura de un grupo Fuchsiano.	127
5.4	Grupos Fuchsianos generados por reflexiones.	132
5.5	Grupos Fuchsianos del primer tipo	135
5.6	Grupos Fuchsianos finitamente generados	137
	Indice	144

Introducción

Durante dos mil años los matemáticos intentaron deducir el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro; el famoso "Postulado de las Paralelas" establece en su forma original, "*que si una recta corta a dos rectas (en un mismo plano) y la suma de los ángulos interiores es menor que la suma de dos ángulos rectos, esas rectas, prolongadas indefinidamente, se intersecan*" y, en una interpretación (equivalente) más común que "*dada una recta en un plano y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la recta original*".

La historia del Postulado V está llena de tropiezos y de grandes descubrimientos. Casi ninguno de los grandes matemáticos posteriores a Euclides se resistió a explorar el problema de demostrar que podía obtenerse de los otros cuatro, lo que dió lugar a un sinnúmero de intentos de prueba (varias de ellas ingeniosísimas) cuya validez caía al cabo de algún tiempo: el error común se debió a la enorme variedad de formas equivalentes que tiene el postulado, y que llegaban a veces a alejarse de la expresión que formuló Euclides.

Algunos matemáticos del siglo XVII establecieron ideas interesantes. En particular, Girolamo Saccheri formuló ideas que quizás fueron las primeras a las que se les podría llamar "no euclidianas": aventuró algunas consecuencias de que el resultado no fuera cierto, y en esta línea trabajaron otros más, sin embargo, todo el pensamiento matemático era aún (y lo fué hasta dos siglos más tarde) desarrollado en torno a los principios euclidianos.

Comenzaba empero a estudiarse con más seriedad la posibilidad de que los *Elementos* de Euclides no fueran un sistema de geometría necesario y único. El mismo Gauss adopta un punto de vista más firme:

la concepción de la geometría no euclidiana ya es para él clara, sin embargo, se resiste a publicar sus resultados, inseguro muy probablemente de que sus ideas fueran lo suficientemente razonables, a pesar de la posición privilegiada de autoridad que gozaba el genio alemán.

En 1829 un matemático ruso de nombre Nicolai Ivanovitch Lobatchewsky, rector de la Universidad de Kazán en Moscú, presentó el trabajo "*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*" que no era otra tentativa en la demostración, sino una nueva presentación rigurosa de toda la teoría de las paralelas. En su trabajo expone quince proposiciones fundamentales de la geometría "absoluta" (la que es independiente del quinto postulado) y define un plano en el que una recta puede tener una infinidad de paralelas; luego establece los razonamientos que lo conducen a la geometría no euclidiana.

No fueron pocos los que criticaron su trabajo, tachándolo incluso de absurdo e incomprensible. Al crear su nueva geometría, el matemático ruso debía probar de algún modo que no existían contradicciones en los resultados obtenidos con la teoría descubierta. El trabajo posterior de Beltrami resultó fundamental en este sentido.

Eugenio Beltrami descubrió que en el espacio euclidiano existen superficies en las cuales funciona la geometría de Lobatchewsky, a las que llamó *seuoesféricas* y que en ahora conocemos como aquellas de curvatura constante negativa. El problema de no contradicción consistió entonces en encontrar una superficie adecuada para realizar un modelo completo de la geometría de Lobatchewsky, es decir, una seuoesfera donde los resultados que el ruso fundamentó se representaran por completo. La solución a este problema se realizó gracias a las ideas de tres grandes geómetras: Beltrami, Riemann y Klein. Bernhard Riemann estableció los fundamentos para definir geometrías en cualquier conjunto dotado de una métrica (lo que ahora conocemos como variedades riemannianas). Tales espacios según su curvatura producían tres tipos de geometrías: *elípticas* (con curvatura positiva), *hiperbólicas* (curvatura negativa) y *parabólicas* (curvatura cero). Esta última es precisamente, la geometría euclidiana, y la hiperbólica, es la de Lobatchewsky.

Beltrami inventó una interpretación del plano hiperbólico en un círculo euclidiano; el trabajo lo concluyó Felix Klein, y más tarde, Henri

Poincaré construyó un modelo que funciona igual que el plano euclidiano. Una parte importante en el estudio de las geometrías son los movimientos del espacio en el que se definen, es decir el conjunto de transformaciones del espacio que forman un grupo y en relación a estas, los elementos de la geometría que resultan invariantes. Klein fué el primero en resaltar este punto de vista: en su "Programa de Erlangen" señala que lo esencial para construir una geometría es determinar el conjunto de puntos de la geometría y el grupo de transformaciones geométricas (isometrías) del conjunto; éstas definirán la geometría propiamente dicha, es decir, la caracterizarán para diferenciarla de cualquier otra geometría susceptible de construirse en el mismo conjunto. La geometría deberá concentrarse en el estudio de los objetos invariantes del grupo de transformaciones. En este sentido, Sophus Lie mostró que sólo tres grupos de transformaciones cumplen ser transitivas (es decir, que cada punto del espacio puede transformarse bajo algún elemento del grupo en cualquier otro punto del mismo), y dejar invariante la métrica. Estos grupos conducen a los sistemas métricos de Euclides, Lobatchewsky y Riemann, de modo que solo son posibles tres sistemas de geometría métrica fundados en el movimiento: la euclidana, la hiperbólica y la elíptica.

La geometría hiperbólica permitió la creación, entre 1881 y 1884 de la teoría de funciones automorfas construida por Poincaré. Inspirado en un artículo de L. Fuchs sobre ecuaciones diferenciales, definió las *funciones de Fuchs* como aquellas de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y descubrió que dichas funciones coincidían con los movimientos de la geometría no euclidiana, y es así como se inició el estudio de las isometrías del espacio hiperbólico que trataremos en este trabajo, a partir de las cuales definiremos los grupos Fuchsianos, que son los subgrupos discretos de dichas isometrías.

Sobre estas bases históricas iniciamos la tesis. Lo que hasta ahora hemos referido corresponde apenas a la primera mitad del trabajo. El desarrollo de las geometrías no euclidianas ha crecido enormemente, pero no queremos exponer algunos de esos resultados sin dar a la creación de la geometría hiperbólica el lugar que merece; sin duda uno de los capítulos más emocionantes del pensamiento matemático.

A continuación resumimos el contenido del trabajo.

El objetivo del primer capítulo es dar un panorama general de los automorfismos (biyecciones holomorfas) del plano complejo extendido, aunque en el trabajo posterior nos restringiremos a los automorfismos del semiplano superior. Iniciamos definiendo la esfera de Riemann $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vía la proyección estereográfica de la esfera \mathbb{S}^2 en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y enunciamos algunos resultados básicos sobre funciones analíticas definidas en Σ . Para describir a los automorfismos de Σ , los identificaremos con el grupo cociente de matrices de $PSL(2, \mathbb{C})$ o grupo de Möbius, observando brevemente su acción geométrica (en particular sobre círculos de Σ) y finalmente haremos una clasificación de dichas transformaciones en relación a la traza de la matriz que tienen asociada.

El capítulo 2 se basa en resultados sobre geometría hiperbólica. Utilizaremos dos modelos de ésta geometría: el modelo de Poincaré del disco unitario (\mathbb{D}) y el modelo del semiplano superior (\mathcal{U}). En el estudio de los grupos Fuchsianos que viene después requerimos usar ambos, de modo que en este capítulo fundamentamos la transición de un modelo a otro mediante la transformación de Cayley. De manera análoga a la primera parte obtendremos la forma de los automorfismos de \mathcal{U} identificándolos con el grupo de matrices $PSL(2, \mathbb{R})$.

La parte medular de este capítulo es utilizar la métrica hiperbólica para definir líneas, y luego área de figuras (polígonos en particular) y obtener algunas de las propiedades más útiles para después estudiar la acción de grupos de transformaciones en regiones parecidas a estos polígonos. Veremos que el área hiperbólica es invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ y $Aut\mathbb{D}$. Incluimos una parte sobre trigonometría hiperbólica en donde definimos el ángulo de paralelismo, que es uno de los puntos de partida en el trabajo de Lobatchewsky al desarrollar la geometría no euclidiana.

En el tercer capítulo definiremos a un grupo Fuchsiano como un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Los grupos Fuchsianos actúan propiamente discontinuamente en \mathcal{U} , lo que resulta una propiedad más débil que la acción discontinua. Además hay una caracterización muy útil: un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si la órbita de cualquier punto en el espacio bajo el grupo es un conjunto discreto en el espacio. Esto permitirá más adelante estudiar a las regiones fundamentales. El

capítulo contiene estos resultados y otras propiedades algebraicas de los grupos Fuchsianos, por ejemplo, identificaremos sus centralizadores y sus normalizadores, y a partir de estos obtendremos resultados sobre grupos Fuchsianos cíclicos. Finalmente analizaremos los grupos elementales, que son aquellos que tienen una órbita finita. La parte central del capítulo es demostrar la desigualdad de Jorgensen, que nos llevará a otra caracterización de los grupos Fuchsianos en términos del conmutador de dos transformaciones del grupo.

Nos referimos a las regiones fundamentales en el capítulo 3. Estas se definen como regiones de \mathcal{U} o \mathbb{D} con la propiedad de que sus imágenes bajo la acción de un grupo Fuchsiano Γ producen una teselación del espacio.(ver Figura 1)

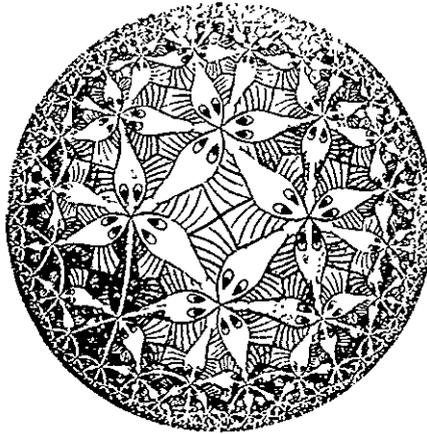


FIGURA 1. En el siglo XX el artista alemán M.C.Escher utilizó el modelo de Poincaré en una serie de dibujos. Uno en particular, el "Círculo límite III" muestra a peces que nadan a través de arcos circulares similares a líneas hiperbólicas. Aunque no son estrictamente líneas (pues no intersectan a la frontera ortogonalmente) ésta lámina es similar también a la teselación que se produce con un triángulo hiperbólico como región fundamental.

Estudiaremos dos tipos particulares: las regiones de Dirichlet (descritas como el conjunto de puntos que están más cercanos a un punto fijo que cualquiera de sus imágenes) y las regiones de Ford definidas a partir de los círculos isométricos de las transformaciones del grupo. En el último capítulo obtendremos una interesante fórmula que calcula el área de una región fundamental a partir de ciertos elementos.

Para construir el camino que lleva a dicha fórmula demostraremos que el espacio cociente \mathcal{U}/Γ es una superficie de Riemann, de forma que podemos asociarle a Γ el género de la superficie. Veremos también que los vértices de una región de Dirichlet se identifican formando clases de congruencia a las que llamaremos ciclos. El orden de los ciclos y el género de la superficie son los elementos que se requieren para la fórmula que mencionamos. Finalmente, demostramos que las superficies \mathcal{U}/Γ y F/Γ son homeomorfas, donde F es una región fundamental de Γ .

El capítulo cinco trata sobre algunos grupos Fuchsianos especiales. Los grupos geoméricamente finitos son aquellos que tienen una región fundamental con un número finito de lados. Veremos que es suficiente que Γ tenga una región fundamental de área finita para que esta condición se cumpla. Cuando la superficie \mathcal{U}/Γ es compacta, a Γ se le llama un grupo cocompacto. Estudiaremos estos grupos en la segunda sección. Al conjunto $\{g, m_1, m_2, \dots, m_r\}$ donde g es el género de \mathcal{U}/Γ y los m_i son los órdenes de los ciclos de Γ se le llama *signatura* del grupo Γ . Demostraremos que si F es región fundamental de Γ y el área de su frontera es cero, entonces

$$\text{área}(F) = 2\pi \left[2(g-1) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right]$$

Aún más, bajo ciertas condiciones para g, r y m_i se puede probar la existencia de un grupo Fuchsiano con *signatura* $\{g, m_1, m_2, \dots, m_r\}$. Una clase de grupos Fuchsianos cuya geometría resulta muy atractiva son los generados por reflexiones (en polígonos); en particular estudiaremos los grupos triangulares. Obtendremos una cota para el área de F si \mathcal{U}/Γ es compacta y veremos que el caso cuando el área es igual a esta cota implica que Γ es triangular. Definiremos también los grupos Fuchsianos del Primer Tipo como aquellos cuyo conjunto límite (el conjunto de puntos límites de sucesiones $T_n(z)$ que convergen) es precisamente $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. El resultado importante es que un grupo geoméricamente finito y del Primer Tipo tiene una región fundamental de área finita. Finalmente revisaremos los grupos finitamente generados mostrando que éstos grupos son también geoméricamente finitos.

1 Transformaciones de Möbius

1.1 Esfera de Riemann

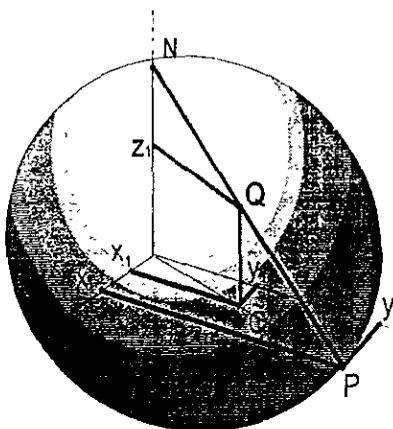
Consideremos la esfera unitaria de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

y el plano $x_3 = 0$ al que identificamos con \mathbb{C} .

El centro de \mathbb{S}^2 coincide con el origen en \mathbb{C} . Al punto $N = (0, 0, 1)$ lo llamamos el *polo norte* de \mathbb{S}^2 .

Para cada punto $Q = (x_1, x_2, x_3) \neq N$ tomemos la recta que une Q con N y sea P la intersección de esta recta con el plano \mathbb{C} .



A la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\mapsto \mathbb{C} \\ Q &\mapsto P \end{aligned}$$

le llamamos la *proyección estereográfica* desde N . La función π es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y \mathbb{C} . Para ello, sea $P = (x, y, 0)$ donde $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Como N, Q y P son colineales, tenemos por la semejanza de los triángulos

$$\triangle O x P \simeq \triangle O x_1 \tilde{Q}$$

$$\triangle O P y \simeq \triangle O \tilde{Q} x_2$$

$$\triangle O P N \simeq \triangle x_3 Q N$$

las relaciones :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}$$

De donde:

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Así, π está definida por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}$$

Además como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, tenemos que:

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{2}{1 - x_3}$$

así que la inversa $\pi^{-1} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ queda definida por

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad (1.1)$$

Ambas expresiones muestran que π y π^{-1} son continuas, de tal forma que π es un homeomorfismo. Ahora podemos introducir el símbolo ∞ para el punto que le correspondería a la proyección estereográfica evaluada en el punto N . Así definimos $\pi(N) = \infty$. Entonces, hay una biyección:

$$\pi : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Una ventaja al introducir este símbolo es que nos permite tener un mayor número de sucesiones convergentes: por ejemplo las sucesiones no

acotadas de \mathbb{C} . A $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lo denotamos también como Σ y le llamamos el *plano complejo extendido*. Este nuevo concepto nos permitirá tratar indistintamente las propiedades topológicas de Σ en \mathbb{S}^2 . A ello se debe que Σ también reciba el nombre de Esfera de Riemann.

Definimos una topología en Σ de forma natural: un conjunto abierto en Σ es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto abierto en \mathbb{S}^2 (con la topología heredada de \mathbb{R}^3). Así que los puntos distintos de ∞ tienen vecindades idénticas a las que tienen vistos como puntos de \mathbb{C} , y sólo debemos ver que pasa con las vecindades de ∞ . Como decíamos el ∞ es el límite de sucesiones de \mathbb{C} que no están acotadas, lo que se traduce en que una vecindad de ∞ debe ser el complemento de un compacto. Es decir, los abiertos de Σ pueden ser de dos tipos, los abiertos usuales de \mathbb{C} y los conjuntos de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ donde K es cualquier compacto de \mathbb{C} . Definiendo ésta topología en Σ resulta que π es un homeomorfismo y que Σ es un espacio topológico compacto. Una propiedad que caracteriza a los compactos en un espacio métrico es que toda sucesión tiene una subsucesión que converge en él. Para que este resultado sea válido en Σ necesitamos ver a Σ como un espacio métrico. Para ello, introducimos la *métrica cordal* definida para $z_1, z_2 \in \Sigma$ por:

$$d_c(z_1, z_2) = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$$

donde $\vec{x}_i = \pi^{-1}(z_i)$ y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 . Es fácil comprobar que

$$d_c(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty \end{cases}$$

La topología que induce esta métrica coincide con la topología que hemos definido en Σ . De esta forma, por la propiedad que mencionamos anteriormente, toda sucesión en Σ contiene una subsucesión convergente. Se sigue que, la topología inducida en \mathbb{C} (por medio de la inclusión en Σ) coincide con la topología usual de \mathbb{C} .

Para hacer análisis y cálculo complejo en Σ es decir, hablar de funciones analíticas o meromorfas en ∞ nos auxiliaremos de la función $J: \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $J(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y por $J(0) = \infty$ y

$J(\infty) = 0$, resulta que J es una biyección con $J^{-1} = J$. En la esfera \mathbb{S}^2 , J tiene una interpretación geométrica interesante, vía la proyección estereográfica π , J induce en \mathbb{S}^2 la transformación $\tilde{J} = \pi^{-1} \circ J \circ \pi : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{S}^2$ dada por $\tilde{J}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$ que es una rotación de la esfera de un ángulo de 180 grados alrededor del eje x_1 .

1.1. Definición. Decimos que una función $f : D \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida en una vecindad D del ∞ es continua, analítica, meromorfa, etcétera en ∞ , si la función $f \circ J$ tiene la propiedad correspondiente en cero.

1.2. Teorema. (*Teorema de continuidad analítica*). Sea f analítica en una región (es decir, un conjunto abierto y conexo) R de Σ . Si f tiene una sucesión de ceros $\{z_n\}$ en R , cuyo límite $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ está en R entonces $f \equiv 0$ en R .

Demostración:

El teorema de continuación analítica desde luego funciona para regiones en \mathbb{C} , así el caso en que $z^* \neq \infty$ y el $\infty \notin R$ asumiremos ¹ que está probado. Si $z^* \neq \infty$, y $\infty \in R$ entonces f se anula en una vecindad de ∞ . Por continuidad, $f(\infty) = 0$ y entonces $f \equiv 0$ en R .

Supongamos entonces que $z^* = \infty$ y que para un número infinito de z_n , $f(z_n) \neq 0$. Sea $\tilde{R} = R \setminus \{0\}$. Entonces f es analítica en \tilde{R} , luego $f \circ J$ es analítica en $R^* = \{\frac{1}{z} : z \in \tilde{R}\}$ y se anula en los $\frac{1}{z_n}$. Como $\frac{1}{z_n} \rightarrow 0 \in R^*$ entonces

$$(f \circ J)(z) \equiv 0 \quad \forall z \in R^*$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \forall z \in R^*$$

$$\Leftrightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in \tilde{R}$$

Como $\tilde{R} = R \setminus \{0\}$ entonces si $0 \notin R$ tenemos que $\tilde{R} = R$ y queda demostrado, si $0 \in R$ entonces $f \equiv 0$ en una vecindad de 0, y por continuidad, $f \equiv 0$ en R .

□

1.3. Corolario. Una función meromorfa no constante $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ toma un valor $c \in \Sigma$ sólo un número finito de veces, contando multiplicidades.

¹Ver por ejemplo Marsden, J. 1973 *Basic complex analysis*. pg. 307.

Demostración:

Sea $z \in \Sigma$ con $f(z) = c$. Entonces existe una vecindad V de z tal que para $w \in V \setminus \{z\}$, $f(w) \neq c$. En efecto si $c = \infty$, z es un polo de f si y sólo si z es cero de $J \circ f$, esta función no es constante y es meromorfa, luego tiene ceros aislados y entonces z es un polo aislado de f . Si $c \neq \infty$, la función $f(z) - c$ tiene ceros aislados. Por ser Σ compacto, solamente podemos encontrar un número finito $V_{z_1}, V_{z_2}, \dots, V_{z_k}$ de tales vecindades de Σ de tal forma que $f^{-1}(c) = \{z_1, \dots, z_k\}$. Como f es meromorfa, la solución $f(z) = c$ tiene multiplicidad finita, de donde se concluye el resultado. \square

1.4. Definición. Una función f es *racional* si es de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde p y q son polinomios coprimos con coeficientes complejos y q no es la función cero. En este caso, f define una función de Σ en Σ al tomar $f(z) = \lim_{w \rightarrow z} f(w)$ cuando z es un cero de $q(z)$ o $z = \infty$.

1.5. Teorema. Una función $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es racional si y sólo si es meromorfa en Σ .

Demostración:

Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional entonces f es claramente analítica en $z \neq \infty$ y cuando $q(z) \neq 0$. En un cero de $q(z)$, f tendrá un polo de orden igual a la multiplicidad del cero de $q(z)$ y en $z = \infty$, f será analítica si $\text{grad}(p) \leq \text{grad}(q)$ y tendrá un polo si $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$. En cualquier caso, f es meromorfa en Σ .

Recíprocamente si f es meromorfa en Σ por el corolario anterior, f tendrá un número finito de polos en \mathbb{C} , digamos que estos son β_1, \dots, β_s con órdenes k_1, \dots, k_s . Entonces,

$$g(z) = (z - \beta_1)^{k_1} (z - \beta_2)^{k_2} \dots (z - \beta_s)^{k_s} f(z)$$

es analítica en \mathbb{C} por lo que tiene un desarrollo de Taylor alrededor del cero:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como g es meromorfa en ∞ (ya que f lo es) tenemos que

$$(g \circ J)(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$$

es meromorfa en 0 ; así, $a_j = 0$ para $j \geq m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ por lo que g es un polinomio y entonces,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \beta_1)^{k_1}(z - \beta_2)^{k_2} \dots (z - \beta_s)^{k_s}}$$

es una función racional. □

1.6. Definición. Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional con p, q polinomios coprimos, se define el *grado de f* como,

$$\text{grad}(f) = \max\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\}.$$

1.7. Teorema. Si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es una función racional con $\text{grad}(f) = d > 0$ entonces f toma cada valor $c \in \Sigma$ exactamente d veces, contando multiplicidades.

Demostración:

Supongamos que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con p, q coprimos. Primero tomemos $c = \infty$. Entonces, para $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $f(z) = \infty$ si y sólo si $q(z) = 0$. Por el Teorema fundamental del álgebra esta ecuación tiene $\text{grad}(q)$ soluciones contando multiplicidades. Si $\text{grad}(p) \leq \text{grad}(q)$ entonces estas raíces son los únicos polos de f . Si $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$ entonces f tiene adicionalmente un polo en ∞ de orden $\text{grad}(p) - \text{grad}(q)$. En cualquier caso el número de soluciones de $f(z) = \infty$ es $\text{grad}(f) = \max\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\}$.

Ahora supongamos que $c \neq \infty$. Como $\text{grad}(f) = d > 0$ tenemos que f no es idénticamente igual a c , por lo que

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - cq(z)}$$

es una función racional, además las soluciones de $f(z) = c$, son exactamente los polos de $g(z)$ que por el argumento anterior son $\text{grad}(g)$ contando multiplicidades. Desde luego $q(z)$ y $p(z) - cq(z)$ son coprimos (dado que p y q lo son), y como sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{grad}(g) &= \max\{\text{grad}(q), \text{grad}(p - cq)\} = \\ &= \max\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\} = \text{grad}(f) \end{aligned}$$

tenemos completa la demostración. □

1.2 Transformaciones de Möbius

Ahora estudiaremos los automorfismos de la Esfera de Riemann; daremos la forma de estas transformaciones y algunas propiedades importantes. Identificaremos a un grupo de matrices con los automorfismos de Σ , lo que nos permitirá manejar más fácilmente estos elementos.

1.8. Definición. Un automorfismo de Σ es un biyección meromorfa de Σ en sí mismo. Denotamos a los automorfismos de Σ por $\mathbf{Aut}(\Sigma)$.

1.9. Teorema. $\mathbf{Aut}(\Sigma)$ consiste de las funciones

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d, \in \mathbb{C}, \quad \text{y } ad - bc \neq 0$$

Demostración:

Sea T automorfismo de Σ , entonces, $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es una biyección meromorfa, de donde T es una función racional $T(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios coprimos. Como T es biyectiva, entonces los polinomios $p(z), q(z)$ son de grado uno. Es decir,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

La condición de que $p(z) = az + b, q(z) = cz + d$ son coprimos nos lleva a $ad - bc \neq 0$. Concluimos que

$$\mathbf{Aut}(\Sigma) \subseteq \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Recíprocamente una función $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ es una biyección con inversa $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. □

A los automorfismos de la esfera de Riemann se les llama también transformaciones de Möbius y denotamos

$$\mathbf{Möb}(\Sigma) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Resumiendo, $\mathbf{Aut}(\Sigma) = \mathbf{Möb}(\Sigma)$.

Notemos que T no determina los coeficientes $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$ de forma única. En efecto, para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ las transformaciones

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{y} \quad z \mapsto \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \quad \text{son iguales.}$$

1.10. Teorema. $M\ddot{o}b(\Sigma)$ es un grupo bajo la composición.

Demostración:

Sean $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \in M\ddot{o}b(\Sigma)$. Entonces,

$$(S \circ T)(z) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \in M\ddot{o}b(\Sigma).$$

ya que:

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (c'a + d'c)(a'b + b'd) = (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0.$$

Naturalmente, el elemento identidad es $id(z) = z$ y para $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, la inversa está dada por $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. □

Por la forma que tienen las transformaciones $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, parece razonable asociar a T la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}; \det A \neq 0\}$. Por la observación anterior al teorema, se puede asociar a T la matriz M o cualquiera de λM con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; esto quedará formalmente establecido en el siguiente:

1.11. Teorema. $Aut(\Sigma) \cong GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda Id : \lambda \neq 0\}$.

Demostración:

Sea $\Theta : GL(2, \mathbb{C}) \mapsto Aut(\Sigma)$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Un cálculo directo muestra que $\Theta(NM) = \Theta(N)\Theta(M)$, es decir, Θ es un homomorfismo de grupos, de hecho, es por el teorema 1.9 un

epimorfismo.

Calculemos el núcleo de Θ :

$$K = \text{Ker}(\Theta) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : \frac{az + b}{cz + d} = z, \quad \forall z \in \Sigma \right\}$$

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad \forall z \in \Sigma \quad \Leftrightarrow a = d \neq 0, b = c = 0$$

de donde

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda Id; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Entonces, por el primer teorema de isomorfismo aplicado a Θ tenemos

$$\text{Aut}(\Sigma) \cong GL(2, \mathbb{C})/K = GL(2, \mathbb{C})/\{\lambda Id : \lambda \neq 0\} =: PGL(2, \mathbb{C}) \quad \square$$

Recordamos del álgebra, al grupo lineal especial, definido por

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d, \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

Probaremos el resultado más fuerte:

$$PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\pm Id.$$

Para ello, consideremos $\det : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la función determinante que cumple

$$\det(NM) = \det(N)\det(M) \quad \forall M, N \in GL(2, \mathbb{C}).$$

De esta forma, la función \det es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo está dado por

$$\text{Ker}(\det) = \{M \in GL(2, \mathbb{C}) : \det M = 1\} =: SL(2, \mathbb{C})$$

La función \det es suprayectiva: en efecto, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces,

$$\alpha = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo el primer teorema de isomorfismo asegura que

$$GL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Así, para $N \in GL(2, \mathbb{C})$ podemos escribir $N = \lambda M$, con $\lambda^2 = \det N$ y $M \in SL(2, \mathbb{C})$. Como $\Theta(N) = \Theta(M)$ vemos que todo automorfismo tiene la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

por lo tanto, $\Theta : SL(2, \mathbb{C}) \mapsto Aut(\Sigma)$ es un epimorfismo, por lo que:

$$Aut(\Sigma) \cong PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id\}$$

1.3 Generadores para $PGL(2, \mathbb{C})$

Toda transformación de Möbius puede descomponerse como la composición de cuatro tipos de transformaciones sencillas: rotaciones, la inversión, homotecias y traslaciones que están descritas como sigue:

1. La transformación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ para $\theta \in \mathbb{R}$ representa una *rotación* de la esfera Σ de un ángulo θ con respecto al eje vertical por 0 e ∞ y cuando se restringe a \mathbb{C} coincide con una rotación del plano.
2. La transformación $J(z) = \frac{1}{z}$ es una rotación de Σ un ángulo π respecto al eje por 1 y -1 , se conoce como *inversión*.
3. La transformación $S_r(z) = rz$ con $r \in \mathbb{R}^+$ conocida como *homotecia* fija 0 e ∞ , expandiendo (si $r \geq 1$) o contrayendo (si $r \leq 1$) distancias por un múltiplo r .
4. La transformación $T_t(z) = z + t$, $t \in \mathbb{C}$ fija ∞ y actúa en el plano como una *traslación*.

Antes de estudiar con detalle la acción geométrica de los cuatro tipos de transformaciones veamos un teorema fundamental para el análisis de los automorfismos de Σ .

1.12. Teorema. *Toda transformación de Möbius es la composición de un número finito de transformaciones de los tipos (1), (2), (3) y (4).*

Demostración:

Si $c \neq 0$, entonces:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} =$$

$= T_{\frac{a}{c}} \circ S_r \circ R_\theta \circ J \circ T_{\frac{a}{c}}(z)$, donde r y θ son tales que $re^{i\theta} = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Si $c = 0$, entonces: $T(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = T_{\frac{b}{a}} \circ S_r \circ R_\theta(z)$, donde r y θ satisfacen $re^{i\theta} = \frac{a}{d}$. □

1.4 Círculos en Σ

1.13. Definición. Un *círculo en \mathbb{S}^2* es la intersección de un plano $\mathcal{P} : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ con la esfera \mathbb{S}^2 . La condición $|\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{P}| > 1$ nos permite asegurar que la intersección sea un círculo (si es igual a uno, el plano resulta tangente a la esfera).

Vía la proyección estereográfica definimos un *círculo en Σ* , como la imagen bajo π de un círculo en \mathbb{S}^2 . Veamos las condiciones analíticas que cumple un círculo en Σ .

Sean $\mathcal{C} = \pi(\mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2)$ y $Q = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P} \cap \mathbb{S}^2$. Por la ecuación 1.1 tenemos para $P = \pi(Q) = (x, y) = z$, las relaciones:

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow 2\alpha x + 2\beta y + \gamma(|z|^2 - 1) = \delta(|z|^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow \alpha(z - \bar{z}) + \frac{1}{i}\beta(z - \bar{z}) + z\bar{z}(\gamma - \delta) - (\gamma - \delta) = 0 \end{aligned}$$

Escribiendo $a = \gamma - \delta$, $b = \alpha - i\beta$, $c = -(\gamma + \delta)$, la ecuación anterior equivale a:

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \tag{1.2}$$

La condición $|\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{P}| > 1$ es cierta si y sólo si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \delta^2$ o equivalentemente que $|b|^2 > ac$.

Si $a \neq 0$, la ecuación se puede escribir como

$$z\bar{z} + \frac{b}{a}z + \frac{\bar{b}}{a}\bar{z} + \frac{|b|^2}{a^2} = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

que nos lleva a:

$$\left|z + \frac{\bar{b}}{a}\right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2} \quad (1.3)$$

La ecuación anterior corresponde a la de un círculo euclidiano con centro en $-\frac{\bar{b}}{a}$ y radio $\sqrt{\frac{|b|^2 - ac}{a^2}}$.

Si $a = 0$, la ecuación que resulta es $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, que corresponde a una recta con vector normal \bar{b} .

En resumen, la imagen bajo π de círculos en \mathbb{S}^2 son círculos o rectas euclidianas en Σ , a las que indistintamente llamamos *círculos*.

1.14. Teorema. *Si C es un círculo en Σ y $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ entonces $T(C)$ es un círculo en Σ .*

Demostración:

Basta ver, por el teorema 1.12 que las transformaciones de los tipos (1) a (4) transforman los círculos de Σ en círculos. Veremos más adelante (sección 1.6) que dichas transformaciones son composiciones de inversiones o reflexiones euclidianas, de donde se sigue el resultado. \square

En lo que resta de la sección mostraremos aún más, que dados dos círculos C, C' en Σ , existe una transformación de $PGL(2, \mathbb{C})$ que satisfice $T(C) = C'$.

1.15. Proposición. *Si $z_1, z_2, z_3 \in \Sigma$ son diferentes entonces existe una única $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$.*

Demostración:

Supongamos que $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$, y sea $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$, entonces, dado que $\det T = (z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1) \neq 0$, T es una transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$. Si $z_1 = \infty$, tomemos $T(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$; si $z_2 = \infty$, entonces $T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}$, y si $z_3 = \infty$, tomemos $T(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_3}$. En cualquier caso, $T \in PGL(2, \mathbb{R})$ y $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$. Para comprobar que es única supongamos que $S \in PGL(2, \mathbb{C})$ cumple el resultado. Entonces, la transformación $ST^{-1} \in PGL(2, \mathbb{C})$ fija $0, 1, \infty$. Si hacemos $S^{-1}T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tenemos que si $S^{-1}T(0) = 0$ entonces $b = 0$, si $S^{-1}T(\infty) = \infty$ entonces $c = 0$ y si $S^{-1}T(1) = 1$ entonces $a = d$, luego $S^{-1}T = id$ y por lo tanto $S = T$. \square

1.16. Corolario. Si $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ son puntos distintos en Σ , existe una única $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$.

Demostración:

Sean $T_1, T_2 \in PGL(2, \mathbb{C})$ tales que $T_1(z_1) = T_2(w_1) = 0, T_1(z_2) = T_2(w_2) = 1, T_1(z_3) = T_2(w_3) = \infty$. Entonces, $T = T_2^{-1}T_1$ cumple que $T(z_j) = w_j$. Si $U \in PGL(2, \mathbb{C})$ satisface $U(z_j) = w_j$ entonces $T_1(z_1) = T_2U(z_1) = 0, T_1(z_2) = T_2U(z_2) = 1, T_1(z_3) = T_2U(z_3) = \infty$. Luego $T_1 = T_2U$ que equivale a $U = T_2^{-1}T_1 = T$. □

1.17. Corolario. Si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ es tal que T fija tres puntos distintos de Σ entonces $T = id$.

Demostración:

La identidad fija esos tres puntos y por la unicidad de T en el corolario anterior, $T = id$. □

Ahora podemos demostrar el teorema:

1.18. Teorema. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ círculos de Σ . Entonces, existe una transformación de $PGL(2, \mathbb{C})$ que satisface $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Demostración:

Sean z_1, z_2, z_3 cualesquiera tres puntos en \mathcal{C} y $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{C}'$. Por el corolario 1.16 existe $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = w_j$. Además, $T(\mathcal{C})$ es un círculo, entonces $T(\mathcal{C})$ y \mathcal{C}' son círculos que contienen a w_1, w_2, w_3 , luego son iguales. □

1.5 Razón cruzada

El concepto de razón cruzada nos permitirá caracterizar los círculos en Σ .

1.19. Definición. Sean z_0, z_1, z_2, z_3 cuatro puntos distintos en Σ . La razón cruzada de ellos,

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

se define como $\lambda = T(z_0)$, donde T es la única transformación en $PGL(2, \mathbb{C})$ que cumple $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$.

Observemos que $\lambda \neq 0, 1, \infty$. Entonces, haciendo $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_0)}$ tenemos $T(z_0) = \lambda = \frac{(z_0-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_0)}$.

Si alguno de z_1, z_2, z_3 es ∞ , $T(z)$ se define como en la proposición 1.15.

1.20. Teorema. Sean $(z_0, z_1, z_2, z_3), (w_0, w_1, w_2, w_3)$ cuartetos de elementos distintos en Σ . Entonces, existe $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ con $T(z_j) = w_j, j = 0, 1, 2, 3$ si y sólo si

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$$

Demostración:

Supongamos que $T(z_j) = w_j$. Sea S el elemento único de $PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $S(w_1) = 0, S(w_2) = 1, S(w_3) = \infty$, por la definición de razón cruzada, $S(w_0) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$. Entonces $ST \in PGL(2, \mathbb{C})$ cumple con $ST(z_1) = 0, ST(z_2) = 1, ST(z_3) = \infty$, y ésta es única, de forma que $(z_0, z_1; z_2, z_3) = ST(z_0) = S(w_0) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$. Inversamente, si $(z_0, z_1; z_2, z_3) = \lambda = (w_0, w_1; w_2, w_3)$, entonces existen $U, V \in PGL(2, \mathbb{C})$ con $U(w_0) = V(z_0) = \lambda, U(w_1) = V(z_1) = 0, U(w_2) = V(z_2) = 1, U(w_3) = V(z_3) = \infty$, de donde $U^{-1}V(z_j) = w_j$ y haciendo $T = U^{-1}V$ concluimos la prueba. \square

Notemos que la razón cruzada $(z, z_1; z_2, z_3)$ está definida para todo $z \neq z_j$, con $j = 1, 2, 3$. Podemos también definirla en los z_j de la siguiente manera:

$$\lambda = (z_j, z_1; z_2, z_3) = \lim_{z \rightarrow z_j} (z, z_1; z_2, z_3).$$

De esta forma, λ es $0, 1, \infty$ para $j = 1, 2, 3$ respectivamente.

1.21. Teorema. Sea \mathcal{C} el círculo por z_1, z_2, z_3 en Σ . Entonces $\mathcal{C} = \{z \in \Sigma : (z, z_1; z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$.

Demostración:

Elegimos $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = 0, 1, \infty$ para $j = 1, 2, 3$, luego $T(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$. Así que, $z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (z, z_1; z_2, z_3) \in T(\mathcal{C})$. Pero $T(\mathcal{C})$ es el círculo que pasa por $0, 1, \infty$, luego $T(\mathcal{C}) = \mathbb{R} \cup \infty$, que es lo que se quería demostrar. \square

1.6 Inversión

Sea \mathcal{C} un círculo en Σ con ecuación

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad a, c, \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Si $a \neq 0$, entonces \mathcal{C} es la ecuación de un círculo euclidiano en \mathbb{C} con centro en $p = -\frac{\bar{b}}{a}$ y radio $r = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$.

Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$ consideremos el único punto w que se encuentra sobre el el rayo que sale de p y pasa por z y que cumple la ecuación:

$$|z - p| \cdot |w - p| = r^2$$

Definimos la función $I_{\mathcal{C}} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ como $I_{\mathcal{C}}(z) = w$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$, y $I_{\mathcal{C}}(p) = \infty$, $I_{\mathcal{C}}(\infty) = p$.

Es fácil ver que $I_{\mathcal{C}}^2(z) = z \quad \forall z \in \Sigma$, y que $I_{\mathcal{C}}(z) = z$ si y sólo si $z \in \mathcal{C}$.

La función $I_{\mathcal{C}}$ se llamará la *inversión con respecto a \mathcal{C}* .

Para tener una fórmula explícita de $I_{\mathcal{C}}$, observemos lo siguiente, para $z \neq p, \infty$ tenemos que:

$$|\bar{z} - \bar{p}||w - p| = |z - p||w - p| = r^2$$

además, como p, z, w están alineados y z, w de un mismo lado con respecto a p sobre la línea que determinan, tenemos que: $\arg(z - p) = \arg(w - p)$ luego $\arg(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = 0$ es decir, $(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = r^2$ y entonces

$$w = I_{\mathcal{C}}(z) = p + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{p}}.$$

Si sustituimos los valores $p = -\frac{\bar{b}}{a}$ y $r^2 = \frac{|b|^2 - ac}{|a|^2}$ en la ecuación anterior tenemos:

$$w = I_{\mathcal{C}}(z) = -\frac{\bar{b}\bar{z} + c}{a\bar{z} + b} \quad (1.5)$$

la fórmula también es válida para $z = -\frac{\bar{b}}{a}$ y $z = \infty$.

Esta ecuación muestra que $I_{\mathcal{C}}(z)$ es un antiautomorfismo de Σ . (Un *antiautomorfismo* es un automorfismo que invierte la orientación de

los ángulos). Cuando $a = 0$, la ecuación 1.4 define una recta (con el punto al infinito):

$$bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

Utilizando la identidad en 1.5, la inversión en la recta está descrita por

$$w = I_C(z) = -\frac{\bar{b}\bar{z} + c}{b}$$

En este caso, tenemos que $I_C(z)$ es una reflexión en la recta $C \setminus \{\infty\}$. En efecto, se puede ver que para $q \in C \setminus \{\infty\}$ se tiene $|I_C(z) - q| = |z - q|$ lo que prueba el resultado. En particular, si $C = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la inversión en C resulta la conjugación compleja.

1.22. Lema. *Sea C un círculo en Σ , $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ y $C' = T(C)$. Entonces $I_{C'}(z) = TI_C T^{-1}$.*

Demostración:

Si $z \in C'$, entonces $I_{C'}(z) = z$; aún más, como $T^{-1}(z) \in C$, tenemos que $I_C T^{-1}(z) = T^{-1}(z)$. Definiendo $S = TI_C T^{-1} I_{C'}$, tenemos que:

$$S(z) = TI_C T^{-1} I_{C'}(z) = TI_C T^{-1}(z) = TT^{-1}(z) = z$$

para toda $z \in C'$. S es automorfismo de Σ , (es composición de dos antiautomorfismos) luego $S \in PGL(2, \mathbb{C})$. Como S fija C' entonces fija muchos más de tres puntos, luego es la identidad y finalmente se tiene

$$TI_C T^{-1} = I_{C'}^{-1} = I_{C'}.$$

□

De igual forma, podemos probar el siguiente:

1.23. Teorema. *Sea C un círculo en Σ , $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ y $C' = T(C)$. Si $w = I_C(z)$ entonces $T(w) = I_{C'}(T(z))$.*

Demostración:

Si $w = I_C(z)$ entonces $I_{C'}(T(z)) = TI_C T^{-1} T(z) = TI_C(z) = T(w)$.

□

Veremos ahora que las transformaciones de los tipos (1) a (4) pueden descomponerse como composición de inversiones o reflexiones en rectas. La ecuación $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ representa a una línea recta, observemos que si $b = \alpha + i\beta$ y $z = x + iy$, ésta se reescribe como $2(\alpha x + \beta y) + c = 0$, por lo que $\bar{b} = \alpha + i\beta$ resulta ser un vector normal a la línea. Además si éste es unitario, $\frac{|c|}{2}$ es la distancia al origen.

1.24. Lema. La traslación $T(z) = z + b$ es la composición de dos reflexiones en líneas rectas.

Demostración:

Consideremos las líneas paralelas:

$$l_1 : \bar{b}z + b\bar{z} = 0$$

$$l_2 : \bar{b}z + b\bar{z} = |b|^2$$

Ambas tienen a b como vector normal; l_1 pasa por el origen y como $\frac{\bar{b}}{b}z + \frac{b}{\bar{b}}\bar{z} = |b|^2$ se tiene que l_2 pasa por $\frac{b}{2}$.

Si R_1 y R_2 son las reflexiones en l_1, l_2 tenemos por 1.6 que

$$R_1(z) = -\frac{b}{\bar{b}}\bar{z} \quad \text{y} \quad R_2(z) = \frac{|b|^2 - b\bar{z}}{\bar{b}} = b - \frac{b}{\bar{b}}\bar{z}$$

Luego $R_2R_1(z) = R_2(-\frac{b}{\bar{b}}\bar{z}) = b - \frac{b}{\bar{b}}(-\frac{\bar{b}}{b}z) = b + z = T(z)$. □

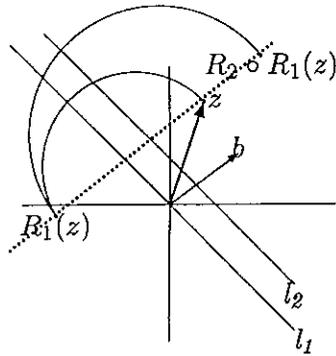


FIGURA 1.1. Descomposición de la traslación en dos reflexiones

1.25. Lema. La homotecia $S_r(z) = rz$ con $r > 0$ es la composición de dos inversiones.

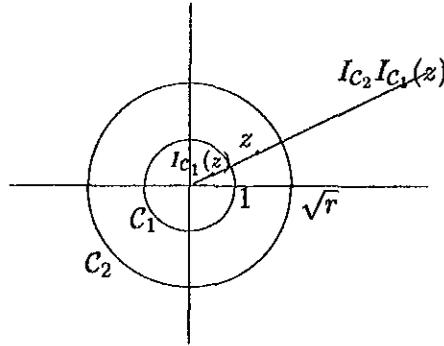


FIGURA 1.2. Descomposición de la rotación en dos inversiones

Demostración:

Consideremos los círculos C_1 y C_2 de centro en el origen y de radios 1 y \sqrt{r} respectivamente. Sus ecuaciones son:

$$C_1 : z\bar{z} = 1$$

$$C_2 : z\bar{z} = r$$

Sean I_{C_1} y I_{C_2} las inversiones en estos, que por 1.6 tienen la forma

$$I_{C_1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad I_{C_2}(z) = \frac{r}{\bar{z}}$$

luego

$$I_{C_2}I_{C_1}(z) = I_{C_2}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = rz = S_r(z).$$

□

1.26. Lema. *La rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ es la composición de dos reflexiones en líneas.*

Demostración:

Consideremos las líneas l_1, l_2 que scan el eje real y la línea por el origen con un ángulo de inclinación con respecto al eje real igual a $\frac{\theta}{2}$. Estas tienen ecuaciones:

$$l_1 : z - \bar{z} = 0, \quad l_2 : -e^{-\frac{i\theta}{2}}z + e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{z} = 0$$

y sean $R_1(z) = \bar{z}$ y $R_2(z) = e^{i\theta} \bar{z}$ las reflexiones en ellas, entonces,

$$R_2 R_1(z) = R_2(\bar{z}) = e^{i\theta} z = R_\theta(z).$$

□

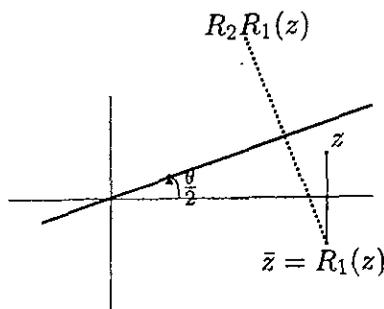


FIGURA 1.3. Descomposición de la rotación en dos inversiones

1.27. Lema. La función inversión $J(z) = \frac{1}{z}$ es la composición de la reflexión en el eje real seguida de la inversión en el círculo unitario.

Demostración:

Como $R_1(z) = \bar{z}$ es la reflexión en el eje real y $R_2(z) = \frac{1}{z}$ es la inversión en el círculo unitario y como $R_2 R_1(z) = R_2(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}}$, tenemos el resultado.

□

1.7 Conjugación y clasificación de transformaciones

1.28. Definición. Sean $S, T \in PGL(2, \mathbb{C})$. Decimos que S, T son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$ si existe $U \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $S = UTU^{-1}$.

La conjugación es una relación de equivalencia. Como siempre, se buscará tener representantes de las clases de equivalencia que tengan una forma sencilla, para esto no apoyaremos en los puntos fijos de las transformaciones.

Denotamos al conjunto de puntos fijos de T por $\text{fix}T$.

Observación: Si S, T son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$ por U (es decir, $S = UTU^{-1}$), entonces z es un punto fijo de T si y sólo si $U(z)$ es un punto fijo de S .

Como un punto fijo de T cumple la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad (1.6)$$

tenemos que T tendrá a lo más dos puntos fijos en Σ .

Como $T(z) = \frac{a+b}{c+\frac{d}{z}}$, $z = \infty$ es un punto fijo de T si y sólo si $c = 0$.

Para analizar los puntos fijos de $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ nos resultará conveniente pedir que $ad - bc = 1$.

1.29. Teorema. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$. Si $(a + d)^2 \neq 4$ entonces T tiene dos puntos fijos en Σ . Si $(a + d)^2 = 4$ y $T \neq id$ entonces T tiene un punto fijo en Σ .

Demostración:

Como las soluciones de 1.6 son $z_1 = \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$ y $z_2 = \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$, tenemos que si $(a + d)^2 - 4 \neq 0$, 1.6 tiene dos soluciones y T tiene dos puntos fijos en Σ . Y si $(a + d)^2 - 4 = 0$, T tiene un solo punto fijo en Σ .

Si $c = 0$, $z = \infty$ es un punto fijo. En este caso, $ad = 1$ y $z = \frac{ab}{1-a^2}$ es otro punto fijo, distinto de ∞ si y sólo si $a^2 \neq 1 \Leftrightarrow (a + d)^2 \neq 4$. Si $a^2 = 1$, tenemos $T(z) = z \pm b$, de forma que T es la identidad para $b = 0$, y T tiene un único punto fijo para $b \neq 0$. □

Definimos ahora la traza de una matriz, ésta nos permite clasificar de otra forma a las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$.

1.30. Definición. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, definimos la traza de A como

$$Tr(A) = a + d.$$

Observación: Con cálculos directos se puede probar que $Tr(A)$ cumple las siguientes propiedades:

1. $Tr(AB) = Tr(BA)$

2. $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$

3. $Tr(-A) = -Tr(A)$

1.31. Definición. La traza cuadrada de $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ se define por $tr^2(T) = tr^2(A) = (a + d)^2$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ representa a T .

Observación: Por las propiedad 3 de la observación anterior, $Tr^2(T)$ está bien definida para $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, y es un invariante de las clases de conjugación por la propiedad 2.

Sea $U(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Las matrices que representan a U con $detU = 1$ son:

$$\pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

Para obtener los representantes de las clases de conjugación definimos, para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z, & \text{si } \lambda \neq 1 \\ z + 1, & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

1.32. Teorema. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \in PGL(2, \mathbb{C})$ con $ad - bc = 1$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que T es conjugada a U_λ .

Demostración:

Supongamos que T tiene un solo punto fijo z_0 . Entonces $S(z) = \frac{1}{z-z_0} \in PGL(2, \mathbb{C})$ es tal que $S(z_0) = \infty$, entonces, STS^{-1} tiene como único punto fijo $z = \infty$, así que $STS^{-1}(z) = z + t$ para alguna $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $V(z) = \frac{z}{t}$. Entonces, $(VS)T(SV)^{-1} = U_1$ es decir, T es conjugada a U_1 .

Ahora, si T tiene dos puntos fijos z_1, z_2 , la función $W(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ cumple que $W(z_1) = 0, W(z_2) = \infty$. Entonces, WTW^{-1} fija $0, \infty$ de donde es fácil ver que $WTW^{-1} = U_\lambda$, para alguna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. □

1.33. Teorema. U_k es conjugada a U_λ si y sólo si $k = \lambda$ o $k = \lambda^{-1}$.

Demostración:

Primero consideremos el caso en el que $k = 1$. U_1 fija solo ∞ , y si la conjugamos con $S \in PGL(2, \mathbb{C})$ entonces $S(\infty)$ es el unico punto

fijo de $S^{-1}U_1S$. Como las U_λ fijan $0, \infty$, U_1 no puede ser conjugada a ninguna $U_\lambda, \lambda \neq 1$. Ahora, supongamos que U_λ, U_k son conjugadas, donde $k, \lambda \neq 1$. Entonces, $\text{tr}^2(U_\lambda) = \text{tr}^2(U_k)$ de donde

$$k + \frac{1}{k} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

que nos lleva a $k = \lambda$ o $k = \lambda^{-1}$.

El recíproco es inmediato observando que la conjugación con $J(z) = \frac{1}{z}$, implica que $J^{-1}U_kJ = U_{\frac{1}{k}}$. □

1.34. Corolario. *Dos elementos $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{C}) \setminus \{id\}$ son conjugados si y sólo si $\text{tr}^2(T_1) = \text{tr}^2(T_2)$.*

Demostración:

Por el teorema anterior, sean U_k, U_λ conjugadas a T_1, T_2 respectivamente. Entonces: $\text{tr}^2(T_1) = \text{tr}^2(T_2) \Leftrightarrow \text{tr}^2(U_k) = \text{tr}^2(U_\lambda) \Leftrightarrow k = \lambda$ o $k = \lambda^{-1} \Leftrightarrow U_k, U_\lambda$ son conjugadas $\Leftrightarrow T_1, T_2$ son conjugadas. □

Clasificaremos las transformaciones de Möbius de acuerdo a su traza: hemos visto que para T conjugada a U_λ , $\text{tr}^2(T) = \text{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$, así que λ, λ^{-1} son las raíces de la ecuación

$$z^2 + (2 - \text{tr}^2(T))z + 1 = 0$$

1.35. Definición. 1. T es *elíptica* si y sólo si $0 \leq \text{tr}^2(T) < 4$,

2. T es *parabólica* si y sólo si $\text{tr}^2(T) = 4$,

3. T es *hiperbólica* si y sólo si $\text{tr}^2(T) > 4$,

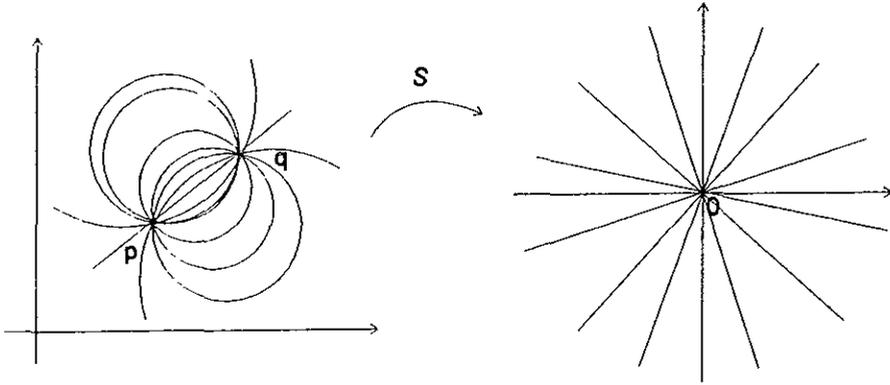
4. T es *loxodrómica* si y sólo si $\text{tr}^2(T) < 0$ ó $\text{tr}^2(T) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Es posible estudiar la acción geométrica de las transformaciones de Möbius haciendo uso de un sistema de coordenadas particular: los círculos de Steiner.

Primero consideremos una transformación $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ con puntos fijos p y q . Según la clasificación que hemos hecho anteriormente, T es elíptica, hiperbólica o loxodrómica.

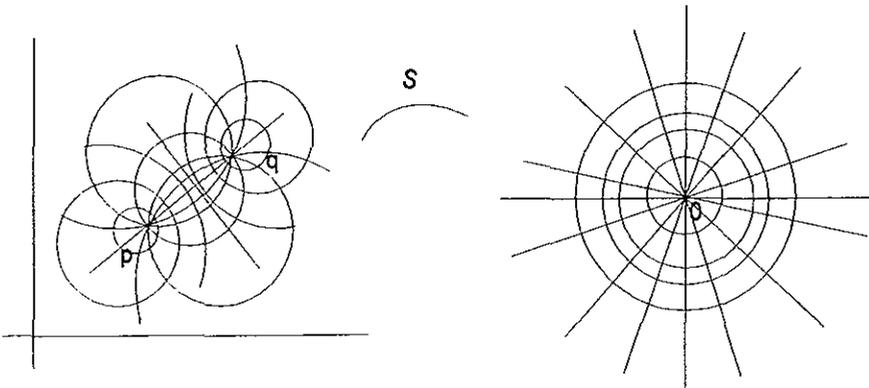
Los *círculos de Steiner del Primer Tipo* respecto a p y q son todos los círculos de Σ que pasan por p y q .

Consideremos ahora la transformación $S(z) = \frac{z-p}{z-q} \in PSL(2, \mathbb{C})$. Bajo S , los círculos de Steiner se transforman en círculos que pasan por $0 = S(p)$ e $\infty = S(q)$, es decir, en rectas por el origen:



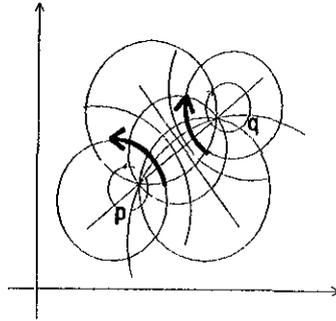
El sistema de coordenadas polares consiste de un conjunto de rectas por el origen y círculos concéntricos $|z| = k, k > 0$. Estos círculos son ortogonales a las rectas por el origen, de forma que su imagen inversa bajo S consiste de círculos ortogonales a los círculos de Steiner del Primer Tipo. Notemos que la nueva familia (que llamaremos del Segundo Tipo) contiene a la mediatriz del segmento \overline{pq} . Veremos ahora la dinámica de ambas familias bajo $T \in PSL(2, \mathbb{C})$.

En adelante llamaremos *plano w* al plano dotado del sistema de coordenadas polares, y *plano z* al de los círculos de Steiner.

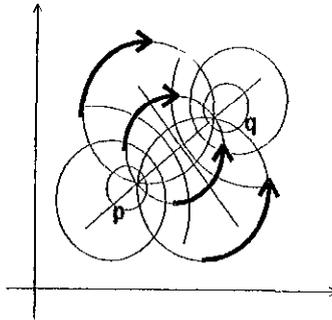


Caso 1. T es elíptica. Hemos visto que T es conjugada a una transformación $U(z) = \lambda z$, donde $|\lambda| = 1$. En el sistema de coordenadas

polares, U es una rotación. En efecto, cada punto $z = re^{i\theta}$ en el plano w se a través del círculo $|z| = r$ por un ángulo $\phi = \arg(\lambda)$. Entonces, en el plano z , cada punto se recorre a través de los círculos de Steiner del Primer Tipo, con la orientación que se hereda de la proyección estereográfica:



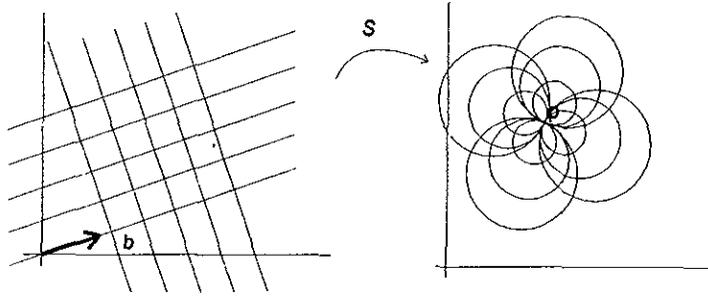
Caso 2. T es hiperbólica. T es conjugada a $R(z) = kz, k > 0$. En el plano w , R actúa como una homotecia, es decir cada punto $z = re^{i\theta}$ se mueve "hacia afuera" (es decir, de 0 a ∞) a través de la recta $l = \{ke^{i\theta}, k \in \mathbb{R}\}$. En el plano z el movimiento se traduce en recorrer los círculos de Steiner del segundo Tipo, en dirección de p hacia q :



Caso 3. T es loxodrómica. Cuando en general, T es conjugada a $U(z) = ke^{i\theta}z$ con $k \neq 1, \theta \neq 0$, la transformación actúa como una combinación de las anteriores.

El único caso que resta es cuando T tiene un sólo punto fijo p , es decir T es parabólica. En este caso, T es conjugada a una traslación $R(z) = z+b$. Usando la transformación $S(z) = \frac{1}{z-p}$, vemos que la acción de R en el plano w es trasladar cada punto $z = re^{i\theta}$ en dirección b . El

sistema de coordenadas en el plano w es entonces una latiz formada por las rectas con dirección b , y las rectas ortogonales a éstas. Al regresar al plano z a través de S^{-1} , las primeras se transforman en círculos que pasan todos por $p = S^{-1}(\infty)$, y las segundas, en círculos ortogonales a éstos que también pasan por p :



A los círculos en el plano z les llamamos *Círculos de Steiner degenerados* respecto a p .

2 Geometría hiperbólica

2.1 Automorfismos de \mathbb{D} y de \mathcal{U}

En esta sección daremos una caracterización completa de los automorfismos del disco unitario \mathbb{D} , así como de los automorfismos del semiplano superior \mathcal{U} . También haremos la observación de que estos grupos de automorfismos son conjugados en $PSL(2, \mathbb{C})$.

2.1.1 LA TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY

2.1. Teorema. *La transformación de Cayley $h_c : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ definida por $h_c(z) = \frac{z-i}{z+i}$ es una biyección holomorfa con inversa $h_c^{-1} = i \frac{1+z}{1-z}$.*

Demostración:

Un cálculo elemental muestra que :

$$1 - |h_c(z)|^2 = \frac{4\Im z}{|z+i|^2} \quad \text{para } z \neq -i$$

$$\Im(h_c^{-1}(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2} \quad \text{para } z \neq 1$$

Por lo que $\Im z > 0$ implica que $h_c(z) \in \mathbb{D}$ y $|z| < 1$ implica que $h_c^{-1}(z) \in \mathcal{U}$, de esta forma $h_c(z), h_c^{-1}(z)$ están bien definidas. Desde luego son holomorfas ya que los puntos donde son discontinuas ($-i$ y 1 respectivamente) no se encuentran en sus dominios.

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = 2iId$$

tenemos que efectivamente, $i \frac{1+z}{1-z}$ es la inversa de h_c . □

2.2. Teorema. *$Aut(\mathbb{D})$ y $Aut(\mathcal{U})$ son conjugados en $PSL(2, \mathbb{C})$.*

Demostración:

En efecto, $h_c^{-1}\Phi h_c \in Aut(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \Phi \in Aut(\mathbb{D})$. □

2.1.2 AUTOMORFISMOS DE \mathcal{U}

Consideremos los grupos de transformaciones

$$GL^+(2, \mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det M > 0\}$$

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{M \in GL^+(2, \mathbb{R}) : \det M = 1\}$$

Para cada $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL^+(2, \mathbb{R})$ la función $T_M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definida por $T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es un automorfismo con inversa $T_M^{-1} = T_{M^{-1}}$, esto se sigue de la igualdad siguiente:

$$\Im T_M(z) = \frac{\det M}{|cz+d|^2} \Im z$$

que se justifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2i\Im T_M(z) &= T_M(z) - \overline{T_M(z)} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}} = \\ &= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} (z - \bar{z}) = 2i \frac{\det A}{|cz+d|^2} \Im z. \end{aligned}$$

2.3. Proposición.

La función $\Phi : GL^+(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{U})$ dada por $\Phi(M) = T_M(z)$, es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es

$$\text{Ker} \Phi = \{M \in GL^+(2, \mathbb{R}) : M = \lambda Id, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La función $\Phi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{U})$ dada por $\Phi(M) = T_M(z)$, es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es $\text{Ker} \Phi = \{\pm Id\}$.

Demostración:

Es análoga a la del teorema 1.11. □

2.4. Lema. Sean $\mathcal{A} = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}); \det A = 1\}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ y $C' = \begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces,

1. \mathcal{A} es un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$
2. $f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}$ definida por $f(A) = \frac{1}{2i}CAC'$, es un isomorfismo de grupos.
3. $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}\mathbb{D}$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto T_A(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ es un homomorfismo de grupos con núcleo $\ker\Phi = \{\pm Id\}$.

Demostración:

Las partes (1) y (3) se verifican de manera ya conocida, por lo que veremos solamente la parte (2). Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} CAC' &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \alpha + \delta + i(\beta - \gamma) & \alpha - \delta - i(\beta + \gamma) \\ \alpha - \delta + i(\beta + \gamma) & \alpha + \delta - i(\beta - \gamma) \end{pmatrix} \\ &= 2i \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $a = \frac{1}{2}((\alpha + \delta) + i(\beta - \gamma))$ y $b = \frac{1}{2}((\alpha - \delta) - i(\beta + \gamma))$.

Como $\det C = \det C' = 2i$ entonces $\det(\frac{1}{2i}CAC') = 1$ por lo que $f(A) \in \mathcal{A}$ y entonces f está bien definida; claramente es un homomorfismo de grupos y como $CC' = C'C = 2iId$ tenemos que

$$\frac{1}{2i}CAC' = Id \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(2i)^2 A = C'C \Leftrightarrow A = Id$$

así f es inyectiva. Y es suprayectiva, pues si

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{entonces} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

con $\alpha = \Re(a + b)$, $\beta = \Im(a - b)$, $\gamma = -\Im(a + b)$, $\delta = \Re(a - b)$ cumple que $f(A) = B$.

□

2.5. Lema. *Son iguales los siguientes conjuntos de $\text{Aut}(\mathbb{D})$:*

$$\left\{ f(z) = e^{i\theta} \frac{z-w}{\bar{w}z-1}; w \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ T(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

Demostración:

Para $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$, el determinante $d = \det \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -e^{i\theta}w \\ \bar{w} & -1 \end{pmatrix} = e^{i\theta}(|w|^2 - 1)$ es distinto de cero, luego

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}(z-w)}{\bar{w}z-1} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{d}}z - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{d}}w}{\frac{\bar{w}}{\sqrt{d}}z - \frac{1}{\sqrt{d}}}$$

si observamos que: $\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{d}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}i\sqrt{1-|w|^2}} = \frac{1}{-ie^{\frac{i\theta}{2}}\sqrt{1-|w|^2}} = -\frac{1}{\sqrt{d}}$

al tomar $a = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{d}}$ y $b = -\frac{we^{i\theta}}{\sqrt{d}}$, tenemos que $f(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.

Recíprocamente, $f(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} = \frac{a(z - (-\frac{b}{a}))}{-\bar{a}(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}z - 1)} = e^{i\theta} \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$, donde

$$e^{i\theta} = -\frac{a}{\bar{a}} \quad \text{y} \quad w = \frac{-b}{\bar{a}}.$$

□

2.1.3 AUTOMORFISMOS DE \mathbb{D}

El siguiente es un resultado conocido del análisis complejo: ¹

2.6. Lema. (*Lema de Schwarz*)

Si $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa con $f(0) = 0$ entonces:

1. $|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{D}$
2. $|f'(0)| \leq 1$

¹Para su demostración ver por ejemplo, Remmert, R. Theory of Complex functions. Cap. 9 Secc.2

Además, si para algún $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se tiene que $|f(z_0)| = |z_0|$ o si $|f'(0)| = 1$ entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para alguna $\theta \in \mathbb{R}$.

2.7. Lema. Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ con $f(0) = 0$ entonces f es una rotación.

Demostración:

Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es un automorfismo con $f(0) = 0$ se tiene que $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ también es holomorfa en \mathbb{D} y $f^{-1}(0) = 0$, aplicando el lema de Schwarz a f y f^{-1} tenemos

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

lo que implica que $|f(z)| = |z| \forall z \in \mathbb{D}$, por la segunda parte del lema de Schwarz tenemos que $f(z)$ es una rotación. \square

2.8. Teorema. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}; a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Demostración:

Las funciones de la forma $h_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ son automorfismos del disco \mathbb{D} . Esto se sigue de que $|z| = 1$ implica que

$$|h_a(z)| = \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-z\bar{z}} \right| = \frac{1}{|z|} \left| \frac{z-a}{\bar{a}-z} \right| = 1$$

y que h_a es su propia inversa. Luego cada $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Recíprocamente, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ sea $a \in \mathbb{D}$ el único punto con $f(a) = 0$.

Entonces, $g = f \circ h_a(z)$ con $h_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ es un automorfismo del disco y cumple que $g(0) = 0$. Por el lema, g es una rotación, luego $f \circ h_a(z) = e^{i\theta}z$, por lo que $f(z) = e^{i\theta}h_a(z)$ como se quería ver. \square

2.9. Corolario. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}/\{\pm Id\}$.

Demostración:

Se sigue de que $SL(2, \mathbb{R})$ y \mathcal{A} son isomorfos. \square

2.10. Corolario. $\text{Aut}(\mathcal{U}) = PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$.

2.11. Definición. Sea G un grupo que actúa en un conjunto Ω . Decimos que G actúa k -transitivamente en Ω si para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \Omega^k$ tales que $\alpha_i \neq \alpha_j \forall i \neq j$, $\exists g \in G$ tal que $g(\alpha_i) = \beta_i$.

2.12. Teorema. 1. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en \mathbb{D} .

2. $\text{Aut}(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en \mathcal{U}

3. $\text{Aut}(\mathcal{U})$ actúa 2-transitivamente en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Demostración:

En (1) y (2) bastará ver que hay un punto (que son 0 e i respectivamente) cuya órbita es todo el espacio. Para $w \in \mathbb{D}$ la función $g(z) = \frac{z-w}{\bar{w}z-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ cumple que $g(0) = w$. Para $a + ib \in \mathcal{U}$ la función $h(z) = bz + a \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ cumple que $h(i) = a + ib$.

En (3), sean $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Consideremos las transformaciones $S(z) = \frac{z-a'}{z-b'}$, $T(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Estas cumplen con $S(a') = 0, S(b') = \infty, T(a) = 0, T(b) = \infty$. Tomemos ahora $U = S^{-1} \circ T$, ésta satisface $U(a) = a', U(b) = b'$.

Con esto hemos probado que $PSL(2, \mathbb{R})$ es dos-transitivo en \mathbb{R} .

Extendemos el caso a $\widehat{\mathbb{R}}$ considerando la modificación adecuada de U . Por ejemplo, si $a = \infty$, $T(z) = \frac{z-a}{z-b}$ se cambia por $T(z) = \frac{1}{z-b}$, y en los otros casos es análogo.

□

2.13. Teorema. Si $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ (respectivamente $h \in \text{Aut}(\mathcal{U})$) tiene dos puntos fijos en \mathbb{D} (respectivamente en \mathcal{U}) entonces h es la identidad.

Demostración:

Dado que ambos grupos son isomorfos, basta probar el resultado para \mathbb{D} . Como $\text{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en \mathbb{D} , podemos suponer que uno de los puntos fijos es 0. En este caso por el lema de Schwarz, sabemos que $h(z) = e^{i\theta}z$ para alguna θ , si hay otro punto fijo $p \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces $h(p) = e^{i\theta}p = p$, lo que implica que $e^{i\theta} = 1$ y entonces $h = id$.

□

2.2 La métrica hiperbólica

La teoría de la geometría hiperbólica puede desarrollarse en un único modelo, sin embargo el disponer de varios modelos nos permite llevar un objeto (hiperbólico) de un modelo a otro y así estudiarlo desde varios ángulos aprovechando las ventajas (geométricas, algebraicas) que cada modelo proporciona. Se han desarrollado al menos cinco modelos básicos, cada uno con sus propias métricas, geodésicas, isometrías, etc. entre los que se encuentran los dos que estudiamos ahora. Cada modelo

consiste de un dominio al que se el asocia una métrica riemanniana. En nuestro caso tendremos:

§ El modelo del semiplano superior, $\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C} : x_2 > 0\}$, con la métrica $ds^2 = \frac{dx_1^2}{x_2^2}$;

§ El modelo del disco unitario, $\mathbb{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C} : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, con la métrica $ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Dada una curva γ de clase \mathcal{C}^1 por tramos en \mathbb{R}^2 , parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$ la longitud (euclidiana) de γ está dada por:

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2.14. Definición. Definimos la longitud hiperbólica en \mathcal{U} de una curva de clase \mathcal{C}^1 por tramos $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ donde $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, como

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

2.15. Teorema. La longitud hiperbólica de una curva γ es invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración:

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Como $\Im T(z) = \frac{\Im z}{|cz+d|^2}$ y $T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} h(T \circ \gamma) &= \int_0^1 \frac{|(T \circ \gamma)'(t)|}{\Im(T \circ \gamma)(t)} dt = \int_0^1 \frac{|T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{\Im(T(\gamma(t)))} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{|T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} |c(\gamma(t)) + d|^2 dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} dt = h(\gamma). \end{aligned}$$

□

El concepto de longitud hiperbólica nos permite definir una métrica en \mathcal{U} de la siguiente forma:

2.16. Definición. Sean $z, w \in \mathcal{U}$ y A el conjunto de las curvas contenidas en el semiplano superior que unen a z con w . Definimos la *distancia hiperbólica* entre z y w por:

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma \in A} \{h(\gamma)\}.$$

Mostraremos más tarde que $\rho(z, w)$ define una métrica y en consecuencia, que (\mathcal{U}, ρ) es un espacio métrico. Supondremos por ahora éstos resultados y estudiaremos las geodésicas (las curvas de h-longitud mínima) en (\mathcal{U}, ρ) .

2.3 Geodésicas y segmentos hiperbólicos

Queremos estudiar la trayectoria de longitud hiperbólica mínima que une dos puntos cualesquiera $u, w \in \mathcal{U}$. Naturalmente, si dicha trayectoria existe y es única, la llamaremos el *segmento hiperbólico* que une a u con w . Consideremos primero el caso en que $u, w \in i\mathbb{R}$.

Sean $u = ia, w = ib$, y supongamos que $0 < a < b$. La trayectoria mínima de ia a ib está dada por el segmento del eje imaginario que los une y que puede parametrizarse por

$$\gamma(t) = (0, y(t)), \quad \text{con } y(0) = a, y(1) = b \text{ y } y'(t) > 0.$$

Primero calculemos la longitud hiperbólica de este segmento:

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y} dt = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que esta longitud es menor que cualquiera de las longitudes de las curvas que unen ia con ib .

Sea $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ una de éstas curvas, entonces:

$$\begin{aligned} h(\tilde{\gamma}) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(\tilde{x}'(t))^2 + \tilde{y}'(t)^2}}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\tilde{y}'(t)|}{\tilde{y}(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\tilde{y}'(t)}{\tilde{y}(t)} dt = \log \frac{b}{a} = h(\gamma). \end{aligned}$$

Además tenemos que $h(\tilde{\gamma}) = h(\gamma)$ si y sólo si $\tilde{x}'(t) \equiv 0, \tilde{y}'(t) \geq 0$, ecuaciones que caracterizan al segmento euclidiano que une ia con ib .

El mismo razonamiento se puede aplicar cuando los puntos u y w tienen la misma parte real y concluir que el segmento geodésico hiperbólico que los une es el segmento euclidiano que los une, y que por cierto se encuentra en la línea vertical $x = \Re u = \Re w$.

Ahora determinaremos las geodésicas para cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ con $\Re z_1 \neq \Re z_2$. El razonamiento que usaremos es un método muy útil en las demostraciones en $PSL(2, \mathbb{R})$.

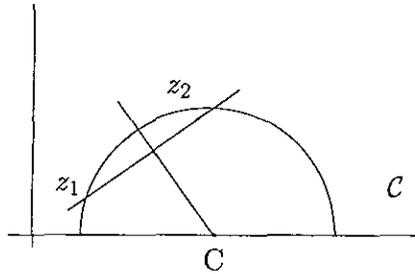


FIGURA 2.1. Construcción del h-segmento

Consideremos la mediatriz del segmento $\overline{z_1 z_2}$ y sea C la intersección de ésta con \mathbb{R} . Entonces, queremos demostrar que el h -segmento que une z_1 y z_2 pertenece al círculo C euclidiano con centro en C y radio $d(C, z_1) = d(C, z_2)$.

Sean w_1 y w_2 los puntos de intersección de \mathcal{C} y \mathbb{R} de forma que $w_1 < w_2$. Por el teorema 2.12, existe una única transformación $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(w_1) = 0, T(w_2) = \infty$. Además como T transforma círculos en círculos, como conserva ángulos y como a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lo deja invariante, $T(\mathcal{C})$ debería ser un círculo ortogonal a \mathbb{R} que pase por 0 y ∞ . Entonces, $T(\mathcal{C}) = i\mathbb{R}$. Se sigue que $T(z_1) = ia, T(z_2) = ib$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. También hemos visto que el h -segmento que une ia e ib es el segmento en $i\mathbb{R}$ determinado por estos puntos. El resultado se concluye por ser la longitud hiperbólica invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$. Resumiendo tenemos el siguiente

2.17. Teorema. *El h -segmento en \mathcal{U} determinado por $u, w \in \mathcal{U}$ es: El segmento de línea euclidiano que une u con w si $\Re u = \Re w$. El arco de círculo con centro en \mathbb{R} que pasa por u, w si $\Re u \neq \Re w$.*

Un resultado elemental de geometría nos permite dados z_1, z_2 determinar de forma única el semicírculo \mathcal{C} ó la semilínea vertical cuando $\Re z_1 = \Re z_2$. Entonces, podemos formular la siguiente definición:

2.18. Definición. El semicírculo o la semilínea vertical \mathcal{C} que contiene al h -segmento que une z_1 con z_2 se llama la h -línea por z_1 y z_2 .

Los semicírculos y las semilíneas tienen dos puntos de intersección con $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; en el caso de una semilínea $x = x_0$ los puntos son x_0, ∞ . A estos puntos les llamaremos los *puntos extremos de la h -línea*. Un par de puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ determinan en forma única una h -línea. Ahora, si Q, Q' son h -líneas con puntos extremos $\{s, t\}$ y $\{s', t'\}$ respectivamente, tenemos por actuar $PSL(2, \mathbb{R})$ en forma 2-transitiva en $\mathbb{R} \cup \infty$, que existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $T(s) = s', T(t) = t'$ y entonces $T(Q) = Q'$, luego tenemos el siguiente:

2.19. Teorema. *$PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en el conjunto de h -líneas.*

Observemos que si γ es una curva en \mathcal{U} que conecta a $u, w \in \mathcal{U}$ y si $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces $T(\gamma)$ es una curva en \mathcal{U} que une $T(u)$ y $T(w)$; y recíprocamente para cada curva $\tilde{\gamma}$ que conecte $T(u)$ con $T(w)$ existe una curva, de hecho, $\gamma = T^{-1}(\tilde{\gamma})$, que conecta u con w . Como la longitud hiperbólica de γ y $T(\gamma)$ es la misma, tenemos:

2.20. Teorema. Para cada par $u, w \in \mathcal{U}$ y para cada $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene:

$$\rho(T(u), T(w)) = \rho(u, w).$$

Demostramos ahora que $\rho(z, w)$ define una métrica.

2.21. Teorema. La función ρ definida en 2.16 es una métrica en \mathcal{U} .

Demostración:

La no negatividad y la simetría se siguen directamente de la definición de longitud hiperbólica. Probaremos que

$$(i) \rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

$$(ii) \rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

(i) Por el teorema anterior y considerando $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $T(z_1) = ia$ y $T(z_2) = ib$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_1 = ia$ y $z_2 = ib$, con $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Luego $\rho(ia, ib) = \log \frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow a = b$.

(ii) Sea γ la h-línea que une z_1 y z_2 , y $\tilde{\gamma}$ la que une z_2 y z_3 entonces $\gamma + \tilde{\gamma}$ es una curva que une z_1 con z_3 , luego

$$\rho(z_1, z_3) = \inf\{h(\sigma) : \sigma \text{ es una curva que une } z_1 \text{ y } z_3\}$$

$$\leq h(\gamma + \tilde{\gamma}) = h(\gamma) + h(\tilde{\gamma}) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

□

Una observación: la igualdad en la desigualdad del triángulo se tendrá cuando $\gamma + \tilde{\gamma}$ resulte el segmento geodésico que une z_1 con z_3 , y entonces, $\gamma + \tilde{\gamma}$ será parte de una h-línea que contiene también a γ y $\tilde{\gamma}$, luego z_1, z_2, z_3 deberán estar en la misma h-línea y z_2 entre z_1 y z_3 .

2.4 Cálculo de $\rho(z_1, z_2)$

En la sección anterior hallamos un método para calcular la distancia hiperbólica entre un par de puntos en \mathcal{U} que consiste en encontrar

la transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ que envíe estos al eje imaginario, en donde es fácil calcular la distancia. En ésta sección mostramos una fórmula para calcular directamente $\rho(z, w)$ cuando z, w no están en una semilínea.

2.22. Teorema. Sean $z, w \in \mathcal{U}$, Q la h -línea que los une y z^*, w^* los puntos extremos de Q en $\mathbb{R} \cup \infty$ eligiendo z^*, w^* de forma tal que $z^* < \Re z < w^*$. Entonces, existe un único elemento $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(z^*) = 0, T(w^*) = \infty, T(z) = i, T(w) = ri$, para algún $r > 1$, y además, $\rho(z, w) = \log r$.

Demostración:

Si $z^*, w^* \neq \infty$, como estamos suponiendo que $z^* < w^*$, sea

$$S(\zeta) = \frac{\zeta - z^*}{\zeta - w^*}$$

entonces $S \in PSL(2, \mathbb{R})$ y cumple $S(z^*) = 0, S(w^*) = \infty$, luego $S(Q) = i\mathbb{R}^+$. Así, $S(z) = ki$ para alguna $k \in \mathbb{R}^+$. Entonces, la transformación

$$T(\zeta) = U_{\frac{1}{k}} \circ S(\zeta)$$

cumple $T(z^*) = 0, T(w^*) = \infty, T(z) = i$. Además como en Q , z está entre z^* y w , entonces $T(z) = i$ está entre $T(z^*) = 0$ y $T(w)$ de forma que $T(w) = ri, r > 1$. Por el teorema 2.20 tenemos:

$$\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(i, ri) = \log r.$$

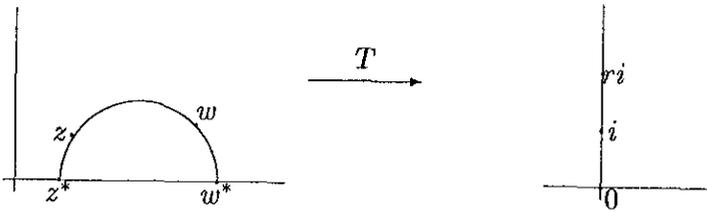


FIGURA 2.2. Teorema 2.22

Si alguno de z^*, w^* es ∞ -supongamos que $w^* = \infty$ - entonces Q es una semilínea. En este caso, la traslación $S_1(\zeta) = \zeta - \Re z^*$, seguida de una homotecia $S_2(\zeta) = \frac{1}{\Im z} \zeta$ funciona.

□

2.23. Lema. Si z, w, z^*, w^* son como en el lema anterior, entonces $\eta(z, w) = (w, z^*; z, w^*)$ es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$. Además, para todo par $z, w \in \mathcal{U}$, se tiene que $\tau(z, w) = |z - w||z - \bar{w}|^{-1}$ es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración:

Recordemos que $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en las h-líneas y la h-línea que une $T(z)$ y $T(w)$ tiene puntos finales $T(z^*)$ y $T(w^*)$. Lo demás se sigue de la invarianza de la razón cruzada. Por otro lado, un cálculo elemental muestra que

$$\frac{|T(z) - T(w)|}{|z - w|} = |T'(z)T'(w)|^{\frac{1}{2}}.$$

Utilizando también que $\overline{T(w)} = T(\bar{w}) \forall T \in PSL(2, \mathbb{R})$ se concluye fácilmente el segundo resultado. □

A partir de las relaciones anteriores podemos dar una fórmula explícita para calcular $\rho(z, w)$. Se verá que:

$$sh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\Im z \Im w} \tag{2.1}$$

Sean $z, w \in \mathcal{U}$ y $z^*, w^*, T \in PSL(2, \mathbb{R})$ y r como en el teorema 2.22, entonces, $\eta(z, w) = (ri, 0; i, \infty) = r$, por lo que $\rho(z, w) = \log r = \log \eta(z, w)$.

También $\tau(z, w) = \tau(i, ri) = \frac{r-1}{r+1} = \frac{e^{\rho(z,w)}-1}{e^{\rho(z,w)}+1}$, de donde

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \tag{2.2}$$

Finalmente, utilizando las identidades trigonométricas $\tanh \frac{u}{2} = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}$ y $sh^2(\frac{u}{2}) = \frac{\tanh^2(\frac{u}{2})}{1 - \tanh^2(\frac{u}{2})}$ llegamos a la fórmula deseada, pues

$$sh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{\tau(z, w)^2}{1 - \tau(z, w)^2} = \frac{|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{y } |z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= (z - \bar{w})(\bar{z} - w) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = \\ &= -(z - \bar{z})(w - \bar{w}) = 4\Im z \Im w. \end{aligned}$$

A partir de este momento utilizaremos frecuentemente esta fórmula y el hecho de que,

$$\rho(z, w) \leq \rho(z', w') \Leftrightarrow \frac{|z - w|^2}{4\Im z \Im w} \leq \frac{|z' - w'|^2}{4\Im z' \Im w'}$$

que se sigue por ser $sh(x)$ una función creciente.

Algunas fórmulas derivadas de 2.1 son:

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\Im z \Im w} \quad (2.3)$$

$$\cosh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{4\Im z \Im w} \quad (2.4)$$

2.24. Ejemplo. El círculo hiperbólico con centro en ri y radio δ es el círculo euclidiano con centro en $ir \cosh \delta$ y radio $rsh\delta$.

Sea $C_h^\delta(ri)$ el círculo hiperbólico de centro en ri y radio δ ,

$$\begin{aligned} C_h^\delta(ri) &= \{z \in \mathcal{U} : \rho(z, ri) = \delta\} = \left\{z \in \mathcal{U} : sh^2 \frac{1}{2} \rho(z, ri) = sh^2 \frac{1}{2} \delta\right\} \\ &= \left\{z \in \mathcal{U} : \frac{|z - ri|^2}{4\Im(z)\Im(ri)} = sh^2 \frac{1}{2} \delta\right\} \end{aligned}$$

Sea $z = x + iy$. Entonces

$$\begin{aligned} z \in C_h^\delta(ri) &\Leftrightarrow x^2 + (y - r)^2 = 4yrsh^2 \frac{\delta}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + r^2 = 2yr(2sh^2 \frac{\delta}{2} + 1) = 2yr \cosh \delta \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yr \cosh \delta + r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 2yr \cosh \delta + y^2 r^2 \cosh^2 \delta) + r^2 - y^2 r^2 \cosh^2 \delta = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - r \cosh \delta)^2 = -r^2 + r^2 \cosh^2 \delta = r^2 sh^2 \delta \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z \in C_h^\delta(ri) \Leftrightarrow z \in C^{rsh\delta}(0, r \cosh \delta)$.

En general todo círculo hiperbólico es un círculo euclidiano, por lo que el siguiente teorema es inmediato:

2.25. Teorema. *La topología inducida por ρ en \mathcal{U} coincide con la inducida por la métrica euclídeana.*

2.5 Isometrías

2.26. Definición. Una transformación $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es una *isometría* si conserva la distancia hiperbólica, es decir,

$$\rho(Tz, Tw) = \rho(z, w) \quad \forall z, w \in \mathcal{U}.$$

Al conjunto de isometrías de \mathcal{U} lo denotamos por $\mathbf{Isom}(\mathcal{U})$.

El teorema 2.20 afirma que toda transformación $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ es una isometría, sin embargo, los elementos de este grupo no son todas las isometrías. Por ejemplo $g(z) = -\bar{z}$ es una isometría de \mathcal{U} porque:

$$sh^2 \frac{1}{2} \rho(-\bar{z}, -\bar{w}) = \frac{|-\bar{z} - (-\bar{w})|^2}{4\Im z \Im w} = sh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w)$$

Desde luego las isometrías forman un grupo bajo la composición y resulta que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo de índice 2 como muestra el siguiente teorema que caracteriza a todas las isometrías.

2.27. Teorema. *Isom(\mathcal{U}) está generado por las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con la función $g(z) = -\bar{z}$.*

En consecuencia una isometría es de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ ó } T(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Las primeras son *conformes* (conservan los ángulos orientados) y las segundas, *anticonformes* (invierten los ángulos).

Demostración:

Sea σ una isometría de \mathcal{U} . Entonces, σ transforma geodésicas en geodésicas, en particular $\sigma(i\mathbb{R}^+)$ es una de ellas. Por otro lado existe una transformación g en $PSL(2, \mathbb{R})$ distinta de σ^{-1} que envía $\sigma(i\mathbb{R}^+)$ en $i\mathbb{R}^+$. Podemos suponer que $g \circ \sigma$ fija i y $2i$ (aplicando homotecias si es

necesario). Entonces, fija el semieje imaginario.

Sean $z = x + iy$, y $\sigma(z) = u + iv$. Para todo $t \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\rho(z, it) = \rho(g\sigma(z), g\sigma(it)) = \rho(u + iv, it)$$

Por la fórmula (2.1) llegamos a :

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{y} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{v} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

al tomar límites cuando $t \rightarrow \infty$ y cuando $t \rightarrow 0$, se tiene $v = y, x^2 = u^2$, luego

$$g\sigma(z) = z \quad \text{o} \quad g\sigma(z) = -\bar{z}.$$

□

2.6 Area hiperbólica

2.6.1 FÓRMULA DE GAUSS-BONNET

Definiremos ahora algunos conceptos de la geometría en \mathcal{U} ; entre otros, el de *área*. Nos interesa en forma particular la del triángulo hiperbólico (o h -triángulo). Se mostrará una fórmula que nos permite obtener el área de un h -triángulo y un importante teorema que demuestra que el área es un invariante de $PSL(2, \mathbb{R})$.

2.28. Definición. Un *polígono hiperbólico de n lados* es un conjunto cerrado en $\bar{\mathcal{U}}$ acotado por n segmentos hiperbólicos a los que llamamos *lados del polígono*.

Observemos que dos h -lados (distintos) pueden intersectarse en un solo punto (que puede ser un punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

2.29. Definición. El punto de intersección de dos h -segmentos es un *vértice del polígono hiperbólico*.

Llamamos un *triángulo hiperbólico* a un polígono de tres lados. El número de vértices en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ determina los siete tipos de h -triángulos que se muestran en la figura 2.3.

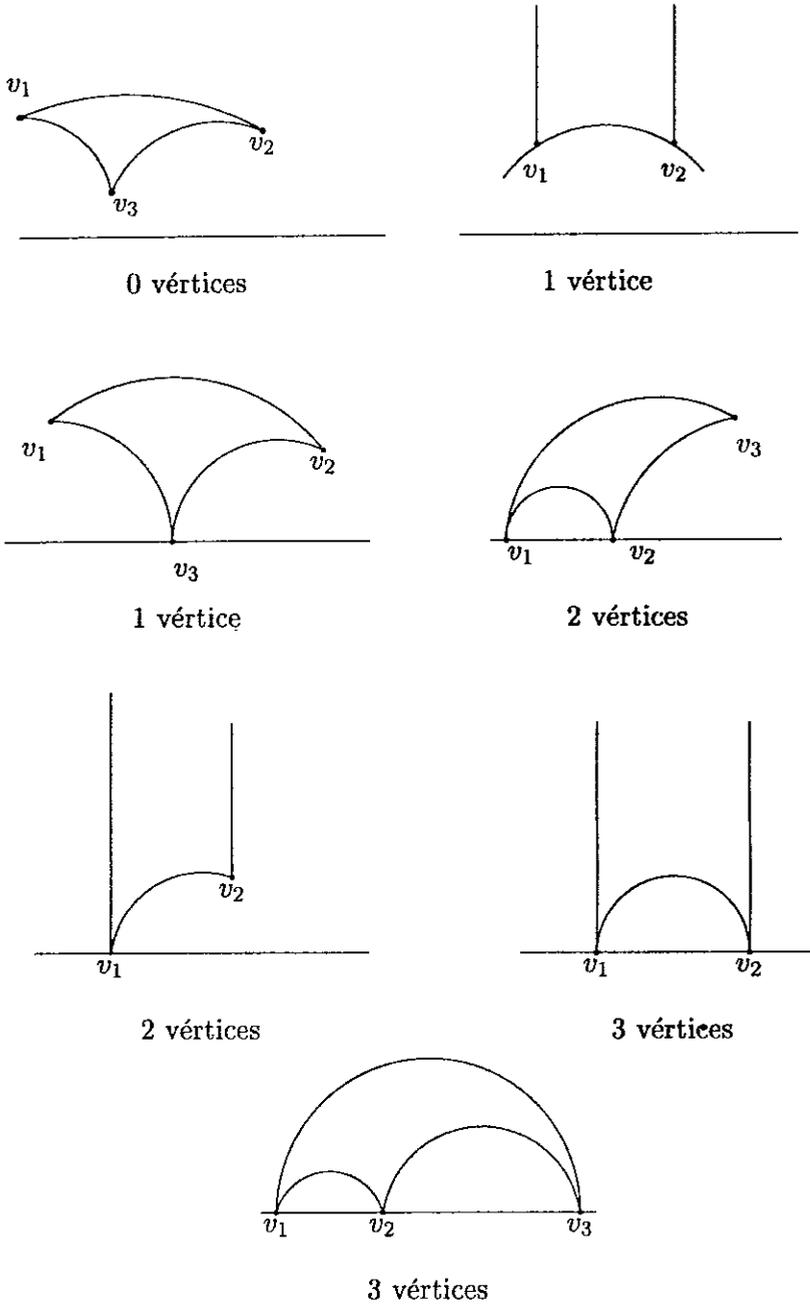


FIGURA 2.3. Triángulos con 0,1,2 y 3 vértices en $\mathbb{R}U\{\infty\}$.

2.30. Definición. Sea $E \subseteq \mathcal{U}$. Definimos el área hiperbólica de E como

$$\mu(E) = \int \int_E \frac{1}{y^2} dx dy.$$

si la doble integral existe.

2.31. Teorema. El área hiperbólica permanece invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$. Es decir, $\mu(T(E)) = \mu(E)$ para toda $T \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración:

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = u + iv$ para $z = x + iy$.

Sabemos que $\Im T(z) = \frac{\Im z}{|cz+d|^2}$ (*)

Entonces,

$$\mu(T(E)) = \int \int_{T(E)} \frac{1}{v^2} du dv = \int \int_E \frac{1}{v^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy.$$

Calculamos el jacobiano

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

(la última igualdad se obtiene a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.)

Por otro lado, como la derivada de T es: $T'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

Tenemos que, $|T'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$

luego $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = |T'(z)|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4}$.

Sustituyendo en la integral, y utilizando la igualdad en (*) tenemos

$$\begin{aligned} \mu(T(E)) &= \int \int_E \frac{1}{v^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = \\ &= \int \int_E \frac{|cz + d|^2}{y^2} \frac{1}{|cz + d|^4} dx dy = \mu(E). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu(T(E)) = \mu(E) \quad \forall \quad T \in PSL(2, \mathbb{R})$.

□

Definimos el ángulo en un vértice de un polígono como el ángulo entre las tangentes a los h -segmentos o lados en el vértice. Notemos que el ángulo en vértices que están en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es cero. Utilizamos la transformación $T(z) = \frac{1}{z}$ para calcular el ángulo en ∞ , que es precisamente el ángulo en el cero al tomar las imágenes de las rectas por a y b , que son círculos tangentes en cero.

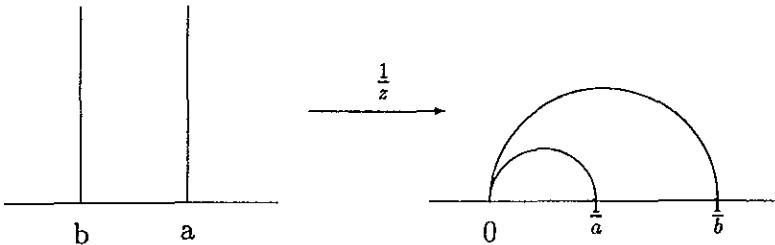


FIGURA 2.4. ángulo en ∞

El siguiente teorema muestra que el área de un h -triángulo depende solo del valor de sus ángulos.

2.32. Teorema. (Fórmula de Gauss-Bonnet).

Sea Δ un h -triángulo con ángulos α, β, γ . Entonces,

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Demostración:

Primero consideremos el caso en el que Δ tiene dos lados verticales, es decir, con uno de los vértices en ∞ .

Aplicando transformaciones de la forma $z \mapsto z + \mu$, $u \in \mathbb{R}$ y $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$, podemos suponer que un lado del triángulo está sobre el círculo unitario que por el teorema anterior, el área no cambia así que basta calcular el área del último triángulo. En la siguiente figura sean α, β los ángulos en los vértices A y B de lados $x = a$ y $x = b$ respectivamente. Entonces, como $\angle aOA = \alpha$, $\angle bOB = \beta$ tenemos que $a = \cos \alpha$ y $b = \cos \beta$. Ahora podemos hacer los cálculos:

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \int \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \left[-\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx = \\ &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

La igualdad de las dos últimas integrales se logró con el cambio de variable $x = \cos \theta$.

Según el triángulo c) de la figura 2.3, el triángulo Δ tiene un vértice en \mathbb{R} . Como $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existe una transformación $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(z_3) = \infty$. Así T transforma Δ en un h-triángulo como el del primer caso y el área permanece invariante y es igual a $\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta)$.

Si ningún vértice de Δ está en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como en el triángulo a), consideramos el punto en que un lado (en este caso el lado que determinan v_1, v_2) intersecta al eje real. En la siguiente figura, sean

$$\Delta_1 = \text{triángulo } ACD$$

$$\Delta_2 = \text{triángulo } BCD$$

$$\text{Entonces, } \mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2).$$

Pero ambos Δ_1, Δ_2 tienen un vértice en \mathbb{R} o sea que son como los del caso anterior, por lo que

$$\mu(\Delta_1) = \pi - (\alpha + \gamma + \theta), \quad \text{y} \quad \mu(\Delta_2) = \pi - [(\pi - \beta) + \theta].$$

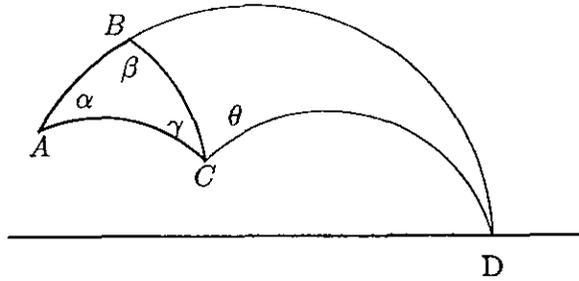


FIGURA 2.5. Caso c): un vértice en ∞

luego $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \gamma - \pi + \pi - \beta + \theta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Veamos en la figura 2.3 el caso f). Aquí, $\alpha = \beta = 0$. La integral $\int \int_E \frac{1}{y^2} dx dy$, para estos valores de α y β es igual a

$$\int_0^\pi d\theta = \pi = \pi - (\alpha + \beta).$$

El caso d) se sigue del anterior con un argumento de transitividad (v_3 va a dar a ∞). Para el triángulo e), la integral se evalúa igual a $\pi - \beta$.

Por último, el triángulo g) con tres vértices en \mathbb{R} es análogo al f), pues $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. □

La fórmula de Gauss-Bonnet puede extenderse a ciertos polígonos hiperbólicos que se denominan “de forma de estrella”.

2.33. Definición. Sea $C \subset \mathcal{U}$ un polígono hiperbólico cerrado, C es un polígono hiperbólico en forma de estrella si existe un punto $p \in \text{int}(C)$ tal que para toda $z \in C$ el h-segmento que une z y p está contenido en C .

Con esta definición tenemos el siguiente

2.34. Corolario. Sea H un polígono en forma de estrella, con vértices z_1, \dots, z_n y ángulos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en cada z_i . Entonces,

$$\mu(H) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

2.7 Métrica hiperbólica en el modelo del disco

2.7.1 SEGMENTOS HIPERBÓLICOS EN \mathbb{D}

2.35. Definición. Una h-línea en el disco unitario es un círculo (o una línea euclidiana) que intersecta a \mathbb{D} ortogonalmente.

hiperparalelas a λ

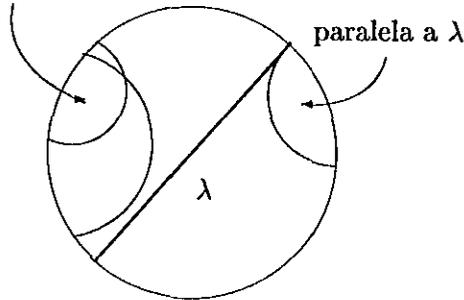


FIGURA 2.6. Líneas hiperbólicas en el modelo del disco

2.36. Teorema. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en el conjunto de h-líneas.

Los puntos en la frontera de \mathbb{D} son llamados *puntos ideales*. Decimos que dos h-líneas son *paralelas* si no se intersectan en \mathbb{D} pero tienen un punto ideal en común. Dos h-líneas no se intersectan en \mathbb{D} ni tienen puntos ideales en común, se llaman *hiperparalelas* (ver figura 2.7.1).

Consideremos la línea λ por los puntos s, q, r y un punto $p \notin \lambda$; sin perder generalidad podemos suponer que p está en el origen. Tracemos una perpendicular a la línea srq . Observemos que hay dos líneas paralelas a srq que pasan por p : ps y pq . Sea θ el ángulo entre pr y

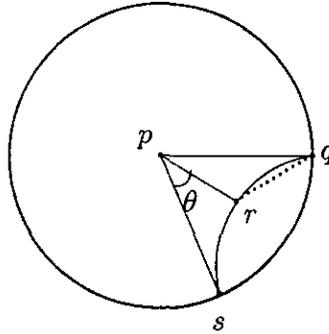


FIGURA 2.7. El ángulo de paralelismo

alguna de éstas líneas, digamos, ps . Al ángulo θ le llamamos el *ángulo de paralelismo*. La razón del término es que si tomamos un rayo que pase por p y cuyo ángulo con pr sea θ , entonces será paralelo a la línea srq . Es claro que si el ángulo es mayor que θ , entonces la línea es hiperparalela a srq y si es menor, entonces intersecta a srq .

En la figura podemos ver que el ángulo de paralelismo siempre es menor que $\frac{\pi}{2}$. Este hecho prueba la invalidez del Postulado de las Paralelas, pues la línea hiperbólica pr intersecta a las líneas pq y srq de manera tal que la suma de los ángulos interiores es menor que π .

2.7.2 LONGITUD Y ÁREA HIPERBÓLICAS

La longitud hiperbólica de una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de clase C^1 por tramos contenida en \mathbb{D} se define como el valor

$$l(\gamma) = 2 \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

El denominador de la integral anterior nos permite ver que las distancias se hacen infinitamente grandes al acercarnos al círculo $|z| = 1$.

2.37. Teorema. *La longitud hiperbólica $l(\gamma)$ es invariante bajo transformaciones de $\text{Aut}(\mathbb{D})$.*

De nuevo, definimos la distancia entre dos puntos en \mathbb{D} , z_1 y z_2 -que denotaremos por $d(z_1, z_2)$ - como la longitud del h-segmento que une a z_1 y z_2 . Para calcularla consideremos la transformación $T(z) = e^{i\theta} \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$ eligiendo θ de forma que $r = T(z_2) \in \mathbb{R}$. Entonces, como

$$d(0, r) = \int_0^r \frac{2dt}{1-t^2} = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

tenemos que:

$$d(z_1, z_2) = d(T(z_1), T(z_2)) = d(0, r) = \log \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} \quad (2.5)$$

Observación: A partir de 2.5 obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \quad (2.6)$$

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \quad (2.7)$$

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} \quad (2.8)$$

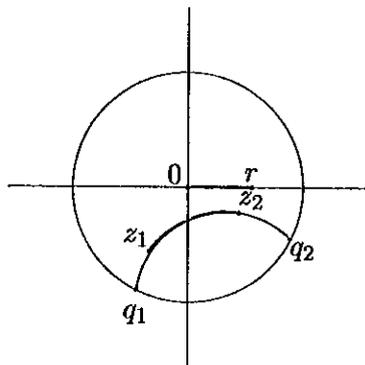


FIGURA 2.8. Razón cruzada en \mathbb{D}

También es posible dar una fórmula para $d(z_1, z_2)$ en términos de la razón cruzada:

$$d(z_1, z_2) = \log(z_1, z_2; q_2, q_1)$$

donde q_1, q_2 son los puntos en $\partial\mathbb{D}$ que están sobre la h -línea (en orden en el sentido de las manecillas del reloj) que une a z_1 y z_2 , como se ve en la figura anterior.

2.38. Teorema. Sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{D}$. Entonces, el h -segmento que une a z_1 y z_2 es un círculo euclidiano ortogonal a $\partial\mathbb{D}$ o una línea recta que pasa por el origen.

Para obtener el área de una región en \mathbb{D} resulta más sencillo trabajar con coordenadas polares. Haciendo $z = re^{i\theta}$, del diferencial de longitud hiperbólica $ds = 2 \frac{|z'(t)|dt}{1-|z(t)|^2}$, obtenemos:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{2|e^{i\theta}|dr}{1-r^2} = \frac{2dr}{1-r^2}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{2|re^{i\theta}|d\theta}{1-r^2} = \frac{2rd\theta}{1-r^2}$$

lo que motiva la siguiente:

2.39. Definición. Sea R un conjunto cerrado en \mathbb{D} . Definimos el área de E por:

$$A = \int_R \int \frac{4rdrd\theta}{(1-r^2)^2}.$$

Veremos ahora una fórmula que relaciona las medidas de ángulo y distancia, lo que resulta una propiedad particular de la geometría hiperbólica.

2.40. Teorema. (Fórmula de Lobatchewsky)

Sean $p \in \mathbb{D}$ y l una línea hiperbólica en \mathbb{D} con distancia a p igual a d . Sea θ el ángulo de paralelismo de p con respecto a esta línea. Entonces

$$e^{-d} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Demostración:

Aplicando una transformación adecuada podemos llevar a p al origen y al punto medio de l al eje real positivo. Renombrando de esta forma tenemos que l es simétrica respecto a \mathbb{R} . Sean q y s los puntos extremos de

l , y r su punto medio. Por 2.5 se sigue que $d(p, l) = d(0, r) = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = d$. (*) Sea t el punto donde la tangente en q al círculo unitario intersecta a \mathbb{R} .

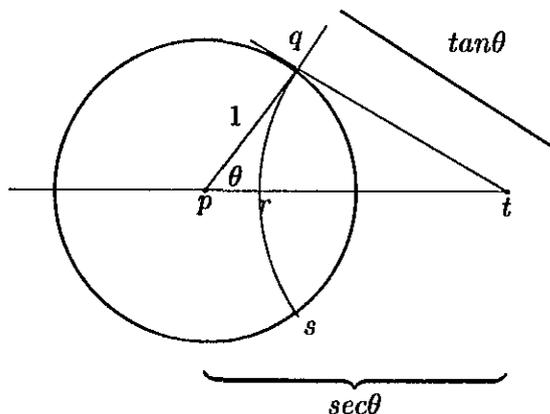


FIGURA 2.9. Fórmula de Lobatchewsky.

Entonces en términos de distancias euclidianas tenemos: $\tan\theta = |q - t|$ y como la línea qrs es ortogonal a $\partial\mathbb{D}$, entonces $|q - t| = |r - t|$ y también $\cos\theta = \frac{1}{|p-t|}$ de donde $\sec\theta = |p - t|$. Concluimos que $|p - r| = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1 - \sec\theta}{\cos\theta} = r$. Sustituyendo en (*) se tiene

$$e^{-d} = \frac{\cos\theta + \sec\theta - 1}{\cos\theta - \sec\theta + 1} = \frac{2\cos\theta\sec\theta}{2\cos^2\theta + 2\cos\theta} = \frac{\sec\theta}{\cos\theta + 1} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

□

2.8 Trigonometría hiperbólica

En esta sección obtendremos algunas fórmulas que relacionan los ángulos de triángulos hiperbólicos con la longitud de sus lados. En la primera parte resultará más conveniente trabajar en el modelo del semiplano, por lo que definiremos el ángulo de paralelismo en \mathcal{U} a partir de la definición en el modelo del disco.

Consideremos la figura 2.9 de la sección anterior. Podemos suponer que $p = 0$ y $q = 1$ haciendo una rotación de la figura si es necesario. Al aplicar la inversa de la transformación de Cayley al triángulo con vértices en $p = 0$, $q = 1$ y r observamos lo siguiente:

- (i) el segmento de $p = 0$ a $q = 1$ se transforma en el rayo (i, ∞) .
- (ii) la línea por $q = 1$ y r se transforma en una línea l que pasa por $h_c^{-1}(q) = \infty$, y dado que $r \notin \mathbb{R}$, dicha línea es una recta (euclidiana) ortogonal al eje real, distinta de $i\mathbb{R}$ como se ve en la figura.
- (iii) por último, el segmento de $p = 0$ a r es ortogonal a la línea por q y r , y hace un ángulo igual a θ con el segmento de $p = 0$ a $q = 1$ luego su imagen es una línea ortogonal a l en $h_c^{-1}(r)$ y que intersecta a $i\mathbb{R}$ en i con ángulo θ .

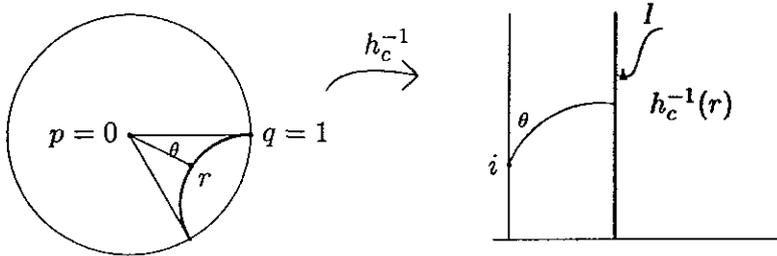


FIGURA 2.10. El ángulo de paralelismo en \mathcal{U}

En resumen, obtenemos un triángulo con ángulos $\theta, 0, \frac{\pi}{2}$, que tiene un sólo lado finito, digamos de longitud a . Observemos que el ángulo de paralelismo θ es función de a . En relación a éste ángulo se tiene el siguiente:

2.41. Teorema. *Sea Δ un triángulo con ángulos $0, \frac{\pi}{2}$ y un lado finito de longitud a . Entonces, para el tercer ángulo $\theta = \Pi(a)$ se tienen las siguientes relaciones:*

1. $\tan \Pi(a) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}$,
2. $\operatorname{sen} \Pi(a) = \frac{1}{\operatorname{cosh} a}$,

$$3. \operatorname{sec} \Pi(a) = \frac{1}{\tanh a}.$$

Demostración:

(2) Podemos suponer que el vértice con ángulo $\frac{\pi}{2}$ es i . Por 2.3 se tiene

$$\cosh a = 1 + \frac{|z - i|^2}{2\Im z \Im i} = 1 + \frac{|z - i|}{2\operatorname{sen}\theta}$$

pero $z = e^{i\theta}$, de donde $|z - i|^2 = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$, luego

$$\cosh a = 1 + \frac{2(1 - \operatorname{sen}\theta)}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

De un forma análoga pueden probarse los incisos (1) y (3). □

2.42. Teorema. Consideremos ahora un triángulo en \mathbb{D} con lados de longitudes a, b, c y ángulos opuestos $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Entonces,

$$1. \text{ Ley de los senos: } \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

$$2. \text{ Ley de los cosenos I: } \cosh c = \cosh a \cosh b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma.$$

$$3. \text{ Ley de los cosenos II: } \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

Demostración:

Utilizaremos el modelo del disco.

(2) Sean v_a, v_b, v_c los vértices opuestos a los lados a, b, c . Podemos suponer que $v_c = 0$, $\Im v_a = 0$, $\Re v_a > 0$. Por 2.7 tenemos:

$$\cosh c = 2\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}d(v_a, v_b)\right) + 1 = \frac{2|v_a - v_b|^2}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)} + 1. \quad (2.9)$$

Además, por 2.8, $v_a = \tanh \frac{1}{2}(d(0, v_a)) = \tanh \frac{1}{2}b$, y $v_b = e^{i\gamma} \tanh \frac{1}{2}b$. Utilizando la igualdad $\tanh \frac{u}{2} = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}$ y sustituyendo en 2.9, obtenemos el resultado.

(1) A partir de (2) obtenemos

$$\left(\frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sen} \gamma}\right)^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}\right)^2}.$$

La ley de los senos será válida si probamos que el lado derecho de la expresión anterior es simétrico en a, b y c . Eso se sigue de la simetría de

$$(sh(a)sh(a)b)^2 - (cosh(a)cosh(b) - cosh(c))^2$$

que se obtiene con un cálculo directo.

(3) Reescribimos $A = cosha, B = coshb, C = coshc$. Por (2) llegamos a

$$cosA = \frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(B^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

que implica

$$sen^2\gamma = \frac{D}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}$$

donde $D = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)$ que es simétrico en A, B y C . Obteniendo expresiones análogas para $cos\alpha, sen\alpha, cos\beta, sen\beta$ y multiplicando el numerador y el denominador de la expresión

$$\frac{cos\alpha cos\beta + cos\gamma}{sen\alpha sen\beta}$$

por el valor $(A^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(B^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(C^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$\frac{cos\alpha cos\beta + cos\gamma}{sen\alpha sen\beta} = \frac{(BC - A)(CA - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{D} = C.$$

□

3 Grupos Fuchsianos

3.1 Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$

En esta sección daremos una clasificación de las clases de conjugación de los automorfismos de \mathcal{U} donde las clases de conjugación son tomadas en $PSL(2, \mathbb{R})$. Esto es, diremos que $T, S \in PSL(2, \mathbb{R})$ son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{R})$ si existe $U \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $S = U^{-1}TU$. Esta relación de equivalencia divide $PSL(2, \mathbb{R})$ en clases de equivalencia como en $PSL(2, \mathbb{C})$; un ingrediente para la clasificación son los puntos fijos de T . Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$, tenemos que los puntos fijos son las soluciones de la cuadrática:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad (3.1)$$

que son

$$z_1 = \frac{(a - d) + \sqrt{tr^2T - 4}}{2c} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{(a - d) - \sqrt{tr^2T - 4}}{2c}$$

donde $tr^2T = (a + d)^2$, por lo que T tendrá un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cuando $tr^2T = 4$; dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si $tr^2T > 4$ y un par de puntos fijos conjugados cuando $tr^2T < 4$. Tenemos entonces la siguiente clasificación de los automorfismos de \mathcal{U} :

3.1.1 TRANSFORMACIONES PARABÓLICAS

Tienen un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es decir, corresponden al caso en que $tr^2T = 4$. Como en $PSL(2, \mathbb{C})$, estas transformaciones son conjugadas a traslaciones de la forma $R(z) = z + t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En efecto, para T parabólica con punto fijo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $S(z) = \frac{1}{z - \alpha} \in PSL(2, \mathbb{R})$ es tal que $S(\alpha) = \infty$ de donde $R = S^{-1}TS$ es una transformación que fija ∞ por lo que su matriz asociada es

$$U_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para alguna } t \in \mathbb{R}.$$

Con la ayuda de $V(z) = \frac{z}{t}$ si $t > 0$, o con $V(z) = -\frac{z}{t}$ si $t < 0$, podemos concluir que existen dos clases de conjugación determinadas por las transformaciones $U_1(z) = z + 1$ y $U_{-1}(z) = z - 1$.

3.1.2 TRANSFORMACIONES HIPERBÓLICAS.

Una transformación hiperbólica tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que corresponden a las soluciones de 3.1 cuando $tr^2T > 4$.

Sea $T(z)$ hiperbólica con puntos fijos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces,

$$S(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

es tal que $S(\alpha) = 0$, $S(\beta) = \infty$. Así, $STS^{-1}(0) = 0$ y $STS^{-1}(\infty) = \infty$, luego $STS^{-1}(z) = \lambda z$, para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Luego toda transformación hiperbólica es conjugada a una de la forma $U_\lambda(z) = \lambda z$. Además como en 1.7, cada $U_\lambda(z)$ define una clase de equivalencia para $\lambda > 1$.

3.1.3 TRANSFORMACIONES ELÍPTICAS.

Este es el caso en el que $tr^2T < 4$. La ecuación $T(z) = z$ tiene dos soluciones que son conjugadas (complejas) entre sí. Entonces, una transformación elíptica tiene un único punto fijo en \mathcal{U} . Es importante hacer notar que éstos son los únicos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ con puntos fijos en \mathcal{U} . No es posible expresar explícitamente la clase de conjugación de los elementos elípticos; sin embargo, la siguiente es una caracterización que resulta útil:

Sea α el punto fijo de T en \mathcal{U} . Por 1.1.33 existe $S \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $S(\alpha) = i$. Además tenemos que $S(\bar{\alpha}) = \overline{S(\alpha)} = -i$ entonces $W = S^{-1}TS$ fija $i, -i$. Si consideramos $R(z) = \frac{z-i}{z+i} \in PGL(2, \mathbb{C})$ tenemos que RWR^{-1} es elíptica y fija 0 e ∞ , luego $RWR^{-1}(z) = e^{i\theta}z$ para alguna θ . Por lo que $R \circ W(z) = e^{i\theta}R(z)$, esto es,

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}.$$

En esta relación, W no tiene una forma explícita. Sin embargo, notemos que

$$z' = \frac{z - i}{z + i}, \quad w' = \frac{W(\alpha) - i}{W(\alpha) + i}$$

son puntos en \mathbb{D} . De esta forma, en el modelo del disco unitario, T es conjugada -pero en $PSL(2, \mathbb{C})$ - a una rotación de ángulo θ alrededor del cero.

Una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ sólo puede ser elíptica, hiperbólica o parabólica, a diferencia del caso en $PSL(2, \mathbb{C})$ donde existen transformaciones loxodrómicas.

Una herramienta para describir las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son los círculos fijos. Decimos que \mathcal{C} es un *círculo fijo* de $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ si es un círculo hiperbólico (es decir, un círculo euclidiano ortogonal a \mathbb{R} ó una recta vertical en el modelo de \mathcal{U} , o un círculo ortogonal a $\partial\mathbb{D}$, o una recta por el origen en el modelo del disco) tal que $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. De esta forma, en el modelo del disco unitario, si T es elíptica entonces es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una rotación, y para las rotaciones los círculos fijos son aquellos con centro en el origen. Si T es hiperbólica, es conjugada a alguna homotecia $S(z) = kz, k > 0$, y los círculos fijos para las homotecias son las rectas por el origen. Finalmente, si T es parabólica, es conjugada a una traslación y el único círculo fijo es el eje real.

3.2 Grupos discretos

En el trabajo previo a esta sección analizamos algunas propiedades de $PSL(2, \mathbb{R})$ como grupo de automorfismos; también es posible verlo como un espacio topológico. Para dar una topología, parece natural que a la transformación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ la identifiquemos con el vector $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, lo que si es claro es que $SL(2, \mathbb{R})$ quedará identificado con el conjunto $X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\}$. Como se vió en el capítulo 2, $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\pm\{id\}$ así que $PSL(2, \mathbb{R})$ tiene la topología del espacio cociente y en términos de X , $PSL(2, \mathbb{R})$ es X/\sim donde la identificación es $u = (a, b, c, d) \sim (a', b', c', d') = v \Leftrightarrow u = \pm v$. Ahora podemos formular la siguiente

3.1. Definición. A un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ se le llamará un *grupo Fuchsiano*.

Observación 1:

Sea $q : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la proyección canónica. Entonces, Γ es Fuchsiano si y sólo si $q^{-1}(\Gamma)$ es un subconjunto discreto de $SL(2, \mathbb{R})$.

Observación 2:

$\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ es discreto

$\Leftrightarrow \forall \{A_n\} \subset \Gamma$ con $A_n \rightarrow A, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = A \forall n \geq N$.

$\Leftrightarrow \forall \{A_n\} \subset \Gamma$ con $A_n \rightarrow I, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = I \forall n \geq N$.

$\Leftrightarrow \forall k > 0, \{A \in \Gamma : \|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq k\}$ es finito.

Observación 3:

Los siguientes resultados son válidos para Γ un subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$:

1. Si Γ es discreto, entonces es numerable.
2. Si Γ es discreto, entonces todo subconjunto G de Γ es discreto.
3. Si Γ es discreto entonces $B^{-1}\Gamma B$ es discreto, para todo $B \in SL(2, \mathbb{R})$.

3.2. Ejemplo. El grupo cíclico generado por un elemento parabólico es Fuchsiano.

3.3. Ejemplo. El grupo cíclico generado por un elemento hiperbólico es Fuchsiano.

3.4. Ejemplo. El grupo cíclico generado por un elemento elíptico es Fuchsiano si y sólo si el elemento elíptico tiene orden finito.

3.3 Grupos propiamente discontinuos

Los subgrupos discretos de Lie son llamados algunas veces “latices” por analogía con las latices en \mathbb{R}^n que son subgrupos discretos de isometrías de \mathbb{R}^n . Estas tienen la siguiente propiedad: la acción en \mathbb{R}^n es “discontinua” en el sentido de que todo punto de \mathbb{R}^n tiene una vecindad que al transformarse por elementos diferentes de la identidad, la imagen cae fuera de la vecindad. En general, los grupos Fuchsianos no tienen este comportamiento discontinuo porque si el grupo tiene elementos elípticos entonces habrá puntos fijos en \mathcal{U} y estos puntos fijos no podrán tener un vecindad como la que se requiere, sin embargo, veremos que los grupos Fuchsianos tendrán una condición más débil de discontinuidad.

3.5. Definición. Sea Y un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de Y en sí mismo. Diremos que G actúa discontinuamente en Y si todo elemento $y \in Y$ tiene una vecindad V tal que $g(V) \cap V = \emptyset$ para cada $g \in G \setminus \{id\}$.

La siguiente es una versión más débil de acción discontinua.

3.6. Definición. Sea Y un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de Y en sí mismo. Diremos que G actúa *propriadamente discontinuamente* si todo elemento $y \in Y$ tiene una vecindad V tal que si $g(V) \cap V \neq \emptyset$ para algún $g \in G$ entonces $g(y) = y$.

Notemos que la primera condición implica la segunda, es decir, todo grupo que actúe discontinuamente, lo hace propriadamente discontinuamente.

3.7. Ejemplo. El grupo G generado por la rotación $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{3}} z$ actúa propriadamente discontinuamente en \mathbb{C} : dividamos \mathbb{C} en tres regiones definidas por $A_j = \{z \in \mathbb{C} : \text{arg} z \in [\frac{2\pi}{3}j, \frac{2\pi}{3}(j+1))\}$ para $j = 1, 2, 3$. Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos V_z como la región abierta $A_{j(z)}^\circ$ que lo contiene. Desde luego, si $g(V_z) \cap V_z \neq \emptyset$ entonces $g(z) = z$. Más adelante se verá que G es discreto en $\text{Aut}(\mathbb{D})$ y entonces actúa propriadamente discontinuamente en \mathbb{D} , sin embargo, G no actúa discontinuamente pues para cualquier vecindad V de $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $g = f \circ f \circ f$ cumple que $g(V) \cap V = V \neq \emptyset$.

3.4 Acción propriadamente discontinua en \mathcal{U}

En esta sección caracterizaremos a los grupos Fuchsianos como aquellos que actúan propriadamente discontinuamente. Necesitaremos algunos resultados que aportan, por sí mismos, importantes herramientas para el estudio de los grupos Fuchsianos.

3.8. Lema. Sea $w \in \mathcal{U}$ y K un subconjunto compacto de \mathcal{U} . Entonces, el conjunto

$$E_w = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : T(w) \in K\} \text{ es compacto.}$$

Demostración:

Consideremos las transformaciones

$$q : SL(2, \mathbb{R}) \mapsto PSL(2, \mathbb{R}) \quad (\text{la proyección canónica}) \text{ y}$$

$$\beta_w : SL(2, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{U} \quad \text{definida por} \quad \beta_w\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{aw + b}{cw + d}$$

La proyección q es continua ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ tiene la topología cociente inducida por q . Entonces, para ver que E_w es compacto, es suficiente ver que el conjunto

$$E_w^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : \frac{aw+b}{cw+d} \in K \right\} \text{ es compacto.}$$

Identificando cada matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con el vector $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, bastará probar que E_w^* es cerrado y acotado. Observemos que la función definida por $\beta_w(A) = q(A)(w)$ es continua y abierta ya que la evaluación lo es, además $E_w^* = \beta_w^{-1}(K)$ porque si $A \in \beta_w^{-1}(K)$ entonces existe $w' \in K$ tal que $\beta_w(A) = w'$ de donde $\frac{aw+b}{cw+d} = w' \in K$, luego $A \in E_w^*$. Recíprocamente, si $A \in E_w^*$ entonces $Aw \in K$ y existe $w' \in K$ tal que $\beta_w(A) = w'$. Ahora podemos concluir que E_w^* es cerrado, por ser la imagen inversa bajo β_w de un compacto en \mathcal{U} .

Como K es acotado existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\left| \frac{aw+b}{cw+d} \right| < M_1$ para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_w^*$. También existe $M_2 > 0$ tal que

$$\Im \left(\frac{aw+b}{cw+d} \right) \geq M_2$$

Como $ad - bc = 1$, entonces $\Im \left(\frac{aw+b}{cw+d} \right) = \frac{\Im(w)}{|cw+d|^2}$ luego

$$|cw+d| \leq \sqrt{\left(\frac{\Im(w)}{M_2} \right)}$$

de donde

$$|aw+b| \leq M_1 \sqrt{\left(\frac{\Im(w)}{M_2} \right)},$$

por lo tanto a, b, c, d están acotados. □

Utilizaremos el siguiente resultado de topología: ¹

¹Jones, G. 1987. *Complex Functions*. pg.61

3.9. Proposición. *Si H es un subgrupo discreto de un grupo topológico G y $K \subset G$ es compacto entonces $H \cap K$ es finito.*

3.10. Corolario. *Sean $w \in \mathcal{U}$, $K \subset \mathcal{U}$ un compacto y $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo Fuchsiano. Entonces,*

$$\{T \in \Gamma : T(w) \in K\} \text{ es finito.}$$

Demostración:

Por el lema anterior el conjunto $\{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : T(w) \in K\}$ es compacto. Además,

$$\{T \in \Gamma : T(w) \in K\} = \Gamma \cap \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : T(w) \in K\}$$

y como Γ es discreto, el resultado se sigue de la proposición anterior. \square

A continuación veremos un teorema que caracteriza a los grupos Fuchsianos.

3.11. Teorema. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces,*

1. Γ es Fuchsiano si y sólo si Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} .

2. Si Γ es Fuchsiano y p es punto fijo de algún elemento de Γ , entonces existe una vecindad W de p tal que ningún punto de $W \setminus \{p\}$ es un punto fijo de alguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$.

Demostración:

1. \Rightarrow) Sea Γ Fuchsiano y $z_0 \in \mathcal{U}$. Consideremos $\overline{B_\epsilon(z_0)}$ el disco hiperbólico cerrado de radio ϵ y centro en z_0 . Como ρ induce la misma topología que la métrica euclidiana en \mathcal{U} entonces $\overline{B_\epsilon(z_0)}$ es compacto, entonces por el corolario 3.10, el conjunto

$$\{T \in \Gamma : T(z_0) \in \overline{B_\epsilon(z_0)}\} \text{ es finito.}$$

Luego existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\overline{B_\delta(z_0)}$ no contiene otro punto de la órbita de z_0 . Sea $V = \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(z_0)}$, entonces tenemos que si $T \cap T(V) \neq \emptyset$ para alguna $T \in \Gamma$, existe un punto $z \in V$ tal que $T(z) \in V$, así, $\rho(z, z_0) < \frac{\delta}{2}$ y $\rho(T(z), z_0) < \frac{\delta}{2}$, por tanto, $\rho(z_0, T(z_0)) \leq \rho(z_0, T(z)) + \rho(T(z), T(z_0)) = \rho(z_0, T(z)) + \rho(z, z_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, pero como elegimos δ de manera que la Γ -órbita de z_0 intersecta a $\overline{B_\delta(z_0)}$ sólo en z_0 tenemos

que $T(z_0) = z_0$. Por lo tanto, Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} .

\Leftarrow) Supongamos que es cierto el resultado de (2). Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ que actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} y supongamos que Γ no es discreto. Por (2), existe $s \in \mathcal{U}$ tal que s no es fijo por ningún elemento en $\Gamma \setminus \{id\}$. Como Γ no es discreto, existe una sucesión $\{T_k\} \subset \Gamma$ tal que $T_k \rightarrow id$, cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces, $T_k(s) \rightarrow s$. Así, para cualquier vecindad U de s tenemos que $\Gamma(s) \cap U \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que Γ actúa propiamente discontinuamente.

2. Sea p un punto fijo de $S \in \Gamma \setminus \{id\}$. Por 1), y el hecho de que Γ es Fuchsiano, existe W vecindad de p tal que $W \cap S(W) \neq \emptyset \Rightarrow S(p) = p$. Si $q \in W$ es punto fijo de alguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$, (i.e. $T(q) = q$) se tiene $T(W) \cap W \neq \emptyset$ y entonces $T(p) = p$, pero T tiene a los más un punto fijo en \mathcal{U} , luego $p = q$, por lo tanto, ningún punto de $W \setminus \{p\}$ es fijo bajo alguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$.

□

Denotamos la órbita de z bajo el grupo Γ con el símbolo Γz . Es decir,

$$\Gamma z = \{T(z) : T \in \Gamma\}$$

A partir de los resultados anteriores obtenemos la siguiente caracterización de un grupo Fuchsiano:

3.12. Corolario. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces, Γ es Fuchsiano si y sólo si la órbita de cualquier punto $z \in \mathcal{U}$ es un conjunto discreto en \mathcal{U} .*

Demostración:

\Rightarrow) Sea Γ Fuchsiano. Por el teorema anterior Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} y entonces, para cada $z \in \mathcal{U}$ existe una vecindad V de z con $g(V) \cap V \neq \emptyset$ para alguna $g \in \Gamma$. Entonces $g(z) = z$ luego $V \cap (\Gamma z \setminus \{z\}) = \emptyset$ y entonces Γz es discreto.

\Leftarrow) Para ver que Γ es Fuchsiano, por el teorema anterior bastará ver que Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} : como Γz es discreta en \mathcal{U} existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z)$ no contiene otro punto de la órbita de z , es decir, $B_\epsilon(z) \cap (\Gamma z \setminus \{z\}) = \emptyset$. Si $V \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$ y $V \cap S(V) \neq \emptyset$

para alguna $S \in \Gamma$ entonces existe $w \in V$ con $S(w) \in V$, de donde $\rho(w, z) < \frac{\epsilon}{2}$; $\rho(S(w), z) < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto $\rho(z, S(z)) \leq \rho(z, S(w)) + \rho(S(w), S(z)) = \rho(z, S(w)) + \rho(w, z) < \epsilon$. Pero en $B_\epsilon(z)$ no hay otro punto de la órbita de z , luego $S(z) = z$. □

Sea τ un triángulo hiperbólico con ángulos $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ y lados opuestos M_1, M_2 y M_3 . Sean R_1, R_2 y R_3 las reflexiones en los lados M_1, M_2 y M_3 respectivamente. Si Γ es el grupo generado por R_1, R_2 y R_3 , entonces $\Gamma^* = \Gamma \cap PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo que actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{U} y lo llamaremos un *grupo triangular*. En el Capítulo 5 estudiaremos estos grupos generados por reflexiones con detalle.

3.5 Propiedades algebraicas de los grupos Fuchsianos

3.5.1 EL CENTRALIZADOR DE UN AUTOMORFISMO DE \mathcal{U}

Analizaremos en esta sección el centralizador de un elemento del grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ a partir de un teorema sobre los puntos fijos. Recordamos la definición:

3.13. Definición. Sea G un grupo y $g \in G$. Definimos el *centralizador de g en G* como el conjunto

$$C_G(g) = \{h \in G : hgh^{-1} = g\}$$

Es conocido que $C_G(g)$ es un subgrupo de G .

3.14. Proposición. Sea $k \in G$. Entonces, $C_G(kgk^{-1}) = kC_G(g)k^{-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} h \in C_G(kgk^{-1}) &\Leftrightarrow h(kgk^{-1}) = (kgk^{-1})h \\ &\Leftrightarrow k^{-1}hkg = gk^{-1}hk \\ &\Leftrightarrow k^{-1}hk \in C_G(g) \\ &\Leftrightarrow h \in kC_G(g)k^{-1}. \end{aligned}$$

□

De esta forma podemos conocer el centralizador de cualquier elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ a partir de conocer aquellos de los representantes de las clases de conjugación.

3.15. Lema. Sean $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$. Si $TS = ST$ entonces S transforma el conjunto de puntos fijos de T en sí mismo.

Demostración:

Sea $p \in \text{fix}(T) = \{z : T(z) = z\}$ un punto fijo de T . Entonces, $S(p) = S(T(p)) = T(S(p))$ implica que $S(p) \in \text{fix}(T)$. Así, $S(\text{fix}(T)) \subset \text{fix}(T)$. Ahora bien, dado $p \in \text{fix}(T)$, $S^{-1}(p) \in \text{fix}(T)$ ya que $TS^{-1}(p) = S^{-1}T(p) = S^{-1}(p)$, luego $p \in S(\text{fix}(T))$. □

3.16. Ejemplo. El centralizador de $T(z) = z + 1$.

Sea $S \in C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T)$. Como $ST = TS$ se tiene que $\infty \in \text{fix}(S)$, por lo que S es de la forma $S(z) = az + b$. Las matrices asociadas a S y T son :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $TS = ST$ tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La última igualdad, y la condición $ad - bc = 1$ implican que $a = 1$. Luego $C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T) = \{S(z) = z + b : b \in \mathbb{R}\}$

3.17. Ejemplo. El centralizador de la transformación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ en $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Si $S \in C_{\text{Aut}(\mathbb{D})}(R_\theta)$, como $S(0) \in \{0, \infty\} = \text{fix}(R_\theta)$ y como $S(0) \in \mathbb{D}$ no queda otra opción que $S(0) = 0$, luego $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ y $S(0) = 0$. Entonces $S(z) = e^{i\phi}z$ y luego $C_{\text{Aut}(\mathbb{D})}(R_\theta) = \{S \in \text{Aut}(\mathbb{D}) : S \text{ es rotación}\}$.

3.18. Ejemplo. El centralizador de la transformación $T(z) = \lambda z$, con $\lambda > 1$.

Si $S \in C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T)$, entonces $\{S(0), S(\infty)\} \subset \{0, \infty\}$ y como S también es hiperbólica y las hiperbólicas no tiene órbitas finitas; S no puede

intercambiar 0 e ∞ , luego $S(0) = 0$ y $S(\infty) = \infty$, por lo que $S(z) = \mu z$ para alguna $\mu > 0$ y entonces $C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T) = \{S(z) = \mu z, \mu > 0\}$.

3.19. Teorema. $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$ conmutan si y sólo si tienen el mismo conjunto de puntos fijos.

Demostración:

Es inmediato de los tres ejemplos anteriores y de la proposición 3.14 \square

A partir del resultado anterior, el siguiente teorema queda demostrado:

3.20. Teorema. El centralizador en $PSL(2, \mathbb{R})$ de un elemento hiperbólico (resp. parabólico, elíptico) consiste únicamente de transformaciones hiperbólicas (resp. parabólicas, elípticas) con el mismo conjunto de puntos fijos.

Definimos el eje de una transformación hiperbólica como la geodésica que une sus puntos fijos. El siguiente corolario es una consecuencia del teorema anterior:

3.21. Corolario. Dos elementos hiperbólicos en $PSL(2, \mathbb{R})$ conmutan si y sólo si tienen el mismo eje.

3.5.2 OTROS EJEMPLOS DE GRUPOS FUCHSIANOS

3.22. Lema. Si $0 \neq G \subset (\mathbb{R}, +)$ es discreto entonces G es cíclico infinito. Si $G \subset (\mathbb{S}^1, \cdot)$ es discreto entonces G es cíclico finito.

Demostración:

1. Primero veremos que existe un $g_1 \in G \setminus \{0\}$ de valor absoluto mínimo, para esto como G es discreto entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \cap (G \setminus \{0\}) = \emptyset$, luego también para todo $g \in G$, se tiene que $B_\epsilon(g) \cap (G \setminus \{g\}) = \emptyset$ ya que en caso de que exista $h \in B_\epsilon(g) \cap (G \setminus \{g\})$ tendríamos que $(h - g) \in B_\epsilon(0) \cap (G \setminus \{0\})$ lo que contradice la elección de $\epsilon > 0$. Luego los abiertos $B_{\frac{\epsilon}{2}}(g)$ son ajenos y no tienen elementos de G distintos del g . Tomemos ahora una $r > 0$ suficientemente grande para que exista $g \in B_r(0) \cap (G \setminus \{0\})$ y con $B_{\frac{\epsilon}{2}}(g) \subset B_r(0)$. Solamente un número finito de g con esta propiedad pueden estar en $B_r(0)$ ya que la longitud de $B_{\frac{\epsilon}{2}}(g)$ es $\epsilon > 0$ y como las $B_{\frac{\epsilon}{2}}(g)$ son ajenas, sólo caben un número finito en $B_r(0)$. De este número finito de g elegimos a g_1 de

valor absoluto mínimo. Observemos que si $g_1 \in G$, también $-g_1 \in G$, por lo que podemos suponer que $g_1 > 0$.

Veremos ahora que G es el grupo generado por el elemento g_1 . En efecto, supongamos que existe $g \in G \setminus \langle g_1 \rangle$, para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $ng_1 < g < (n+1)g_1$, luego $0 < g - ng_1 < g_1$, y además $g - ng_1 \in G$ lo que contradice que g_1 fuera mínimo. Luego $G = \langle g_1 \rangle$.

2. De nuevo, existe $g_1 = e^{i\theta} \in G$ con $\theta > 0$ mínimo. Entonces, $G = \langle e^{i\theta} \rangle$ ya que si existe algún $g = e^{i\phi} \in G$ tal que ϕ no es múltiplo de θ , entonces podemos encontrar un entero m tal que $m\theta < \phi < (m+1)\theta$, que implica $0 < \phi - m\theta < \theta$; luego el elemento $e^{i(\phi - m\theta)} \in G$, lo que contradice el hecho de que θ sea mínimo. Además como \mathbb{S}^1 es compacto, si G fuera infinito entonces tendría un punto de acumulación, lo cual es imposible pues G es discreto, luego G es cíclico finito. □

3.23. Lema. *Si $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano que fija los mismos puntos entonces es cíclico.*

Demostración:

(i) Sea $S \in \Gamma$ y supongamos que S es hiperbólica, entonces, S es conjugada a una transformación que fija $0, \infty$. Como todos los elementos de Γ fijan 0 e ∞ , entonces Γ consiste de transformaciones hiperbólicas que fijan $0, \infty$. Así, Γ es subgrupo del conjunto $H = \{T(z) = \lambda z : \lambda > 0\}$. Ahora, H es un grupo isomorfo como grupo topológico al grupo multiplicativo de los reales positivos (\mathbb{R}^*, \cdot) vía el isomorfismo $\phi : T(z) \rightarrow \lambda$, si $T(z) = \lambda z$. Así, Γ es isomorfo a un subgrupo discreto de \mathbb{R}^* . Entonces, por el lema anterior Γ cíclico infinito.

(ii) Sea $S \in \Gamma$ elíptica. Esta es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una rotación que fija a 0 e ∞ , y entonces Γ es conjugado a un grupo de transformaciones elípticas que fijan a 0 e ∞ , luego a un subgrupo del conjunto $H = \{R_\theta(z) = e^{i\theta}z\}$ que es isomorfo al subgrupo (\mathbb{S}^1, \cdot) ; por lo tanto, por el lema anterior Γ es cíclico finito.

(iii) Sea $S \in \Gamma$ parabólica, podemos suponer sin perder generalidad que fija ∞ . Entonces, $\Gamma < \{T(z) = z + \lambda\} = H$, pero H es isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$ a través del isomorfismo $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}^*$ dado por $\phi(T_\lambda) = \lambda$, luego H es cíclico infinito y entonces Γ es cíclico. □

3.24. Teorema. (i) *Un subgrupo cíclico parabólico de $PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano.*

(ii) *Un subgrupo cíclico hiperbólico de $PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano.*

(iii) *Un subgrupo cíclico elíptico de $PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si es finito.*

Demostración:

Se sigue de los dos lemas anteriores. □

3.25. Teorema. *Una transformación elíptica de un grupo Fuchsiano Γ tiene orden finito.*

Demostración:

Sea $T \in \Gamma$ elíptica y $\Gamma' = \langle T \rangle$. Por el teorema anterior, Γ' es cíclico finito y entonces tiene orden finito. □

3.26. Corolario. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, el conjunto de puntos fijos de elementos elípticos no se acumula en \mathcal{U} .*

Demostración:

Sea $z \in \mathcal{U}$ y K un compacto que contiene a z . Supongamos que $z = T(z)$ para alguna $T \in \Gamma$, entonces $K \cap T(K) \neq \emptyset$. Pero como Γ actúa propiamente discontinuamente, esto sólo puede darse para un número finito de $T \in \Gamma$, así que existen sólo un número finito de puntos fijos elípticos en K , de donde se sigue el resultado. □

3.27. Teorema. *Un grupo Fuchsiano abeliano es cíclico.*

Demostración:

Si Γ es abeliano entonces $ST = TS$ para $S, T \in \Gamma$. Luego las $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ tienen los mismos puntos fijos, luego por el lema 3.23 Γ es cíclico. □

3.28. Corolario. *Ningún grupo Fuchsiano es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

3.5.3 EL NORMALIZADOR DE UN GRUPO FUCHSIANO

3.29. Definición. Sea H un subgrupo de G . Definimos el *normalizador de H en G* como el conjunto

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

que es el subgrupo más grande de G donde H es normal.

3.30. Teorema. *Sea Γ un grupo Fuchsiano no cíclico. Entonces, el normalizador de Γ en $PSL(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano.*

Demostración:

Supongamos que no es Fuchsiano. Entonces podemos encontrar una sucesión $T_n \in N_{PSL(2, \mathbb{R})}(\Gamma)$ de elementos diferentes tal que $T_n \rightarrow id$. Como $T_n \in N_{PSL(2, \mathbb{R})}(\Gamma)$, dado $S \in \Gamma$ se tiene $T_n S T_n^{-1} \in \Gamma$, $\forall n$ y haciendo $n \rightarrow \infty$, $T_n S T_n^{-1} \rightarrow S$, pero Γ es discreto, entonces a partir de cierta m , $T_n S T_n^{-1} = S \forall n \geq m$. Entonces para $n \geq m$ S y T_n conmutan, de donde T_n y S fijan el mismo conjunto de puntos. Por otro lado, si Γ no es cíclico entonces no es abeliano. Así, $\exists S' \in \Gamma$ tal que S' fija un conjunto de puntos distinto, pero haciendo el mismo razonamiento, como $T_n \in N_{PSL(2, \mathbb{R})}(\Gamma)$ se tiene que $T_n S' T_n^{-1} \in \Gamma$, de donde S' y S fijan el mismo conjunto, lo que es una contradicción. \square

3.6 Grupos Elementales.

La acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathcal{U} se puede extender a $\partial\mathcal{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, de manera natural y entonces se puede pensar que $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en $\bar{\mathcal{U}}$.

3.31. Definición. Un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ se dirá *elemental* si existe una Γ -órbita finita en $\bar{\mathcal{U}}$.

Observación. Como $PSL(2, \mathbb{R})$ deja invariante tanto a \mathcal{U} como a $\partial\mathcal{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, una Γ -órbita de un punto de $\bar{\mathcal{U}}$ siempre pertenece a \mathcal{U} o siempre a $\partial\mathcal{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3.32. Definición. Para $g, h \in PSL(2, \mathbb{R})$ se define el *conmutador* de g y h como: $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Como $Tr[g, h]$ no depende de la elección de las matrices que representa a g y h , tenemos que $Tr[g, h]$ está bien definida como función de g y h .

3.33. Teorema. *Si $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo no trivial de elementos elípticos entonces los elementos de Γ tienen los mismos puntos fijos. Además Γ es cíclico, abeliano y elemental.*

Demostración:

Primero veremos que los elementos elípticos de Γ tienen el mismo punto fijo en \mathcal{U} (el otro será conjugado a este punto).

Trabajaremos en el modelo del disco unitario y conjugamos a Γ para que tenga un elemento $g \in \Gamma \setminus \{id\}$, que fije al 0, así en este caso

$$g = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{bmatrix}, |u| = 1 \text{ sea } h = \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} \in \Gamma \text{ con } h \neq g.$$

Como:

$$\begin{aligned} [g, h] &= ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |u|^2|a|^2 - u^2|c|^2 & -|u|^2a\bar{c} + u^2\bar{c}a \\ \bar{u}^2\bar{a}c - |u|^2\bar{a}c & -\bar{u}^2|c|^2 + |u|^2|a|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} Tr[g, h] &= 2|a|^2 + |c|^2(-u^2 - \bar{u}^2) \\ &= 2(|a|^2 - |c|^2) + |c|^2[2 - u^2 - \frac{1}{\bar{u}^2}] \\ &= 2 - |c|^2(u - \frac{1}{\bar{u}})^2 \\ &= 2 - |c|^2(2i\Im u)^2 \\ &= 2 + 4|c|^2\Im^2 u \end{aligned}$$

Como Γ no tiene elementos hiperbólicos, $|Tr[g, h]| \leq 2$, por lo que $\Im u = 0$ ó $c = 0$.

Si $\Im u = 0$, entonces $u = \bar{u}$ por lo que $g = id$, lo que es una contradicción. Luego $c = 0$ y entonces $h = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix}$ también fija al 0.

Entonces todos los elementos de Γ fijan a un mismo punto, y por el lema 3.23 Γ es cíclico, luego abeliano y como $\{0\}$ es una Γ -órbita, es también elemental. □

3.6.1 GRUPOS FUCHSIANOS ELEMENTALES

3.34. Teorema. *Un grupo Fuchsiano elemental es cíclico o conjugado en $PSL(2, \mathbb{R})$ a un grupo generado por $g(z) = kz$ ($k > 1$) y $h(z) = -\frac{1}{z}$.*

Demostración:

Caso 1. Supongamos que Γ fija a un punto $\alpha \in \overline{\mathcal{U}}$.

Si $\alpha \in \mathcal{U}$, los elementos de Γ son elípticos y por los teoremas 3.23 y 3.24, Γ es cíclico finito.

Si $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, Γ no puede tener elementos elípticos (estos sólo tienen puntos fijos en \mathcal{U}). Veamos primero que Γ sólo puede tener elementos hiperbólicos o elementos parabólicos, pero no ambos. Supongamos lo contrario, es decir que Γ tiene un elemento hiperbólico g y un parabólico h , y sin pérdida de generalidad digamos que el punto fijo es $\alpha = \infty$ y entonces $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 1$ y $h(z) = z + k$, luego $g^{-n}hg^n(z) = z + \lambda^{-n}k$. Como $\lambda > 1$, la sucesión $\{ \|g^{-n}hg^n\| \}$ es acotada, entonces $\{g^{-n}hg^n\}$ tiene una subsucesión convergente de términos diferentes, lo que contradice el hecho de que Γ es discreto. Si Γ contiene sólo elementos parabólicos, por 3.23, Γ es cíclico infinito. Si Γ contiene sólo elementos hiperbólicos, entonces el segundo punto fijo de ellos es también común; en efecto, supongamos que $f(z) = \lambda z$ ($\lambda > 1$) (que fija 0 y ∞) y que $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ fija 0 pero no al ∞ . Entonces $b = 0$ y $c \neq 0$, $a \neq 0$ y $d = \frac{1}{a}$.

Luego

$$\begin{aligned} fgf^{-1}g^{-1} &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -c & a \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \frac{c}{a} - \frac{c}{a}\lambda & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a}(\frac{1}{\lambda} - 1) & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dado que $\frac{c}{a}(\frac{1}{\lambda} - 1) \neq 0$ este elemento es parabólico, pero esto es una contradicción. También por 3.23 tenemos que Γ es cíclico.

Caso 2. Γ tiene una órbita en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de orden 2.

Un elemento de Γ fija a cada elemento de la órbita o bien intercambia a estos puntos. Un elemento parabólico no puede fijar a 2 elementos. Dado que cada órbita (excepto para cuando es un sólo punto fijo de una parábola) es infinita, una parábola no puede intercambiar estos puntos, luego Γ no contiene parabólicas. Así todos los elementos hiperbólicos deben tener el mismo conjunto de puntos fijos. Si Γ contiene puras hiperbólicas, se tiene que Γ es cíclico.

Si Γ contiene puras elípticas, entonces Γ es cíclico finito y finalmente, si Γ contiene elípticas e hiperbólicas entonces deberá tener una elíptica de orden 2 que intercambie los puntos fijos comunes de las hiperbólicas

y entonces Γ es conjugado a un grupo generado por $g(z) = \lambda z$ $\lambda > 1$ y $h(z) = -\frac{1}{z}$.

Caso 3. Γ tiene una órbita en \mathcal{U} de orden 2 o una órbita en $\bar{\mathcal{U}}$ de orden $k \geq 3$.

Como las parabólicas y las hiperbólicas sólo pueden tener puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ u órbitas infinitas, Γ debe contener sólo elementos elípticos, así Γ es cíclico finito, por lo que es conjugado a un grupo generado por una rotación $R(z) = e^{\frac{2\pi}{k}} z$. □

3.35. Teorema. *Un subgrupo no elemental Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ contiene elementos hiperbólicos.*

Demostración:

Supongamos que Γ no tiene elementos hiperbólicos.

Si Γ contiene solamente elípticas (además de la identidad) tenemos que Γ es elemental, luego Γ contiene a un elemento f que es parabólico; digamos con ∞ como punto fijo. Así podemos suponer que $f(z) = z + 1$. Sea $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma$.

Entonces $(f^n g)(z) = \frac{(a+nc)z+(b+nd)}{cz+d}$ y $Tr[f^n g] = (a + d + nc)$. Como los elementos del grupo son elípticos o parabólicos, tenemos que $0 \leq Tr^2(f^n g) = (a + d + nc)^2 \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Así $c = 0$, luego g fija ∞ , y entonces ∞ es punto fijo de todos los elementos de Γ , de donde Γ es elemental, lo que es una contradicción. □

3.36. Teorema. *Si $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$, no tiene elementos elípticos entonces Γ es elemental o discreto.*

Demostración:

Supongamos que Γ es no-elemental, por el teorema anterior, Γ tiene un elemento hiperbólico h . Supongamos que h tiene asociada la matriz:

$$\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \quad \text{con } u > 0$$

Para demostrar que Γ es discreto, debemos mostrar que si $g_n \rightarrow id$ entonces $g_n = id$ a partir de alguna n .

UNIVERSIDAD DE LA BUENOS AIRES
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA
 CÁTEDRA DE GEOMETRÍA

Sean $g_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ con $a_n d_n - b_n c_n = 1$, y con $g_n \rightarrow id$.

Como

$$\begin{aligned} h g_n h^{-1} g_n^{-1} &= \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_n d_n - u^2 b_n c_n & -a_n b_n + u^2 a_n b_n \\ \frac{c_n d_n}{u^2} - d_n c_n & -\frac{b_n c_n}{u^2} + a_n d_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} Tr(h g_n h^{-1} g_n^{-1}) &= 2a_n d_n - b_n c_n \left[u^2 + \frac{1}{u^2} \right] \\ &= 2(a_n d_n - b_n c_n) - b_n c_n \left[u^2 - 2 + \frac{1}{u^2} \right] \\ &= 2 - b_n c_n \left(u - \frac{1}{u} \right)^2. \end{aligned}$$

Si $g_n \rightarrow id$, entonces $2 - b_n c_n \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \rightarrow 2$.

Como Γ no tiene elementos elípticos, $|Tr[h, g_n]| \geq 2$, por lo que para n suficientemente grande $b_n c_n \leq 0$.

Sean $f_n = [h, g_n] = h g_n h^{-1} g_n^{-1}$ y $\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}$ una matriz asociada con $A_n D_n - B_n C_n = 1$. Como $g_n \rightarrow id$ tenemos que $f_n \rightarrow id$ y por un argumento similar al anterior, para n suficientemente grande tenemos que $B_n C_n \leq 0$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Tr[h, f_n] &= 2 - B_n C_n \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 = \\ &= 2 - (a_n b_n (u^2 - 1)) (c_n d_n \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right)) \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \\ &= 2 - b_n c_n (1 + b_n c_n) (u^2 - 1) \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \\ &= 2 + b_n c_n (1 + b_n c_n) \left(u - \frac{1}{u} \right)^4 \end{aligned}$$

y como $Tr[h, f_n] \geq 2$, tenemos también que $b_n c_n \geq 0$ a partir de alguna n .

Luego debemos tener que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $b_n c_n = 0$, así para $n \geq N$ tendremos que h y g_n tienen un punto fijo común: al 0 si $b_n = 0$ ó al ∞ , si $c_n = 0$.

□

Denotaremos por $\langle S, T \rangle$ al grupo generado por las transformaciones T y S .

3.37. Lema. Sean $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$, con $T \neq id$. Definimos $S_0 = S$, $S_1 = S_0 T S_0^{-1}$, ..., $S_{r+1} = S_r T S_r^{-1}$, ... Si para alguna n , $S_n = T$ entonces $\langle S, T \rangle$ es elemental y $S_2 = T$.

Demostración:

Supongamos primero que T tiene un único punto fijo α en \bar{U} (es decir T debe ser parabólica o elíptica). Como para $r \geq 1$, S_r es conjugada a T , tenemos que S_r tendrá un único punto fijo en \bar{U} . Como $S_{r+1}(S_r(\alpha)) = (S_r T S_r^{-1})(S_r(\alpha)) = S_r(\alpha)$, es decir $S_r(\alpha)$ es punto fijo de S_{r+1} , tenemos que si S_{r+1} fija a α , entonces S_j fija α para $0 \leq j \leq n$ y por tanto todos los elementos de $\langle S, T \rangle$ fijan α , por lo que la órbita de α es $\{\alpha\}$ y entonces $\langle S, T \rangle$ es elemental, ya que S_1 y T tienen los mismos puntos fijos (α solamente si T es parabólica y si T es elíptica α y $\bar{\alpha}$), tenemos que S_1 y T conmutan por lo que $T = S_1 T S_1^{-1} = S_2$.

Ahora supongamos que T tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R}U \cup \{\infty\}$ (digamos, 0 e ∞). Entonces $T(z) = kz$ para alguna $k > 0$. Al igual que en la primera parte tenemos que S_1, S_2, \dots , tienen también dos puntos fijos y como $S_n = T$, debemos tener que: $\{S_r(0), S_r(\infty)\} = \{0, \infty\}$ para $0 \leq r \leq n$.

Para $r \geq 1$, S_r es conjugada a T y como no pueden intercambiar los dos puntos fijos (las órbitas de las transformaciones hiperbólicas son infinitas con la excepción de los 2 puntos fijos), tenemos que S_1, \dots, S_n fijan al 0 y al ∞ y entonces $S = S_0$ y T dejan al conjunto $\{0, \infty\}$ invariante, por lo que la órbita del 0, Γ_0 pertenece a $\{0, \infty\}$ y entonces $\langle S, T \rangle$ es elemental. De la misma manera en que se justificó el caso elíptico se demuestra que $S_2 = T$. □

El siguiente teorema demuestra que dos transformaciones que generan un grupo discreto no-elemental no pueden aproximarse a la identidad.

3.38. Teorema. (Desigualdad de Jørgensen). Sean $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tales que $\langle S, T \rangle$ es un grupo Fuchsiano no-elemental. Entonces:

$$|tr^2(T) - 4| + |tr(TST^{-1}S^{-1}) - 2| \geq 1$$

Demostración:

Si T es orden 2 entonces la ecuación anterior se cumple porque $Tr(T) = 0$. Supongamos ahora que T no es de orden 2. Definimos S_0, S_1, \dots como en el lema anterior. Mostraremos que si (3.38) no es cierta entonces para alguna n se tiene que $S_n = T$, lo cual por el lema anterior se tendrá que $\langle S, T \rangle$ es elemental, que resulta una contradicción.

Dado que la expresión (3.38) no depende de las matrices en $SL(2, \mathbb{R})$ que representen a S y T , trabajaremos en $SL(2, \mathbb{R})$.

Caso 1. T es parabólica.

Como la traza es invariante bajo conjugación, podemos suponer que $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$ (el caso $c = 0$ no es posible pues resulta que S es parabólica también y $\langle S, T \rangle$ es elemental, una contradicción).

Si suponemos que 3.38 es falsa, como

$tr^2(T) = 4$ y $tr(TST^{-1}S^{-1}) = c^2 + 2$, tenemos que:

$$|tr^2(T) - 4| + |tr(TST^{-1}S^{-1}) - 2| < 1 \Leftrightarrow c^2 < 1 \Leftrightarrow |c| < 1$$

Si escribimos $S_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$, obtenemos de la ecuación $S_{n+1} = S_n T S_n^{-1}$ que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego $c_{n+1} = -c_n^2 = -(-c)^{2n} = -c^{2n}$, como $|c| < 1$, tenemos que $c_n \rightarrow 0$. Esto nos permite asegurar que para $n \geq N$, $|c_n| < 1$, luego de $a_{n+1} = 1 - a_n c_n$ y de $|c_n| < 1$ y por inducción podemos probar que $|a_n| \leq n + |a| \forall n \geq N$, luego $|a_n c_n| \leq (n + |a|) |c|^{2n}$ y entonces $a_n c_n \rightarrow 0$ por lo que $a_{n+1} \rightarrow 1$ y entonces $S_n \rightarrow T$ pero $\langle S, T \rangle$ es discreto luego $S_n = T$ a partir de alguna n .

Caso 2. T es hiperbólica.

Podemos suponer que $T = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix}$ $u > 1$ y $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $ad - bc = 1$ y además $bc \neq 0$, pues en caso contrario, si $b = 0$ (o $c = 0$), el ∞ (ó el 0) es punto fijo de los elementos de $\langle S, T \rangle$ y entonces éste grupo sería elemental.

Entonces:

$$|\operatorname{tr}^2(T) - 4| = \left| \left(u + \frac{1}{u} \right)^2 - 4 \right| = \left(u - \frac{1}{u} \right)^2$$

y

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(TST^{-1}S^{-1}) - 2| &= \left| -bc \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) - 2 \right| = \\ &= \left| -bc \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 + 2ad - 2bc - 2 \right| = |bc| \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \end{aligned}$$

Luego, si (3.38) es falsa tenemos:

$$\mu = |\operatorname{tr}^2(T) - 4| + |\operatorname{tr}(TST^{-1}S^{-1})| = (1 + |bc|) \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 < 1$$

Por otro lado $S_{n+1} = S_n T S_n^{-1}$ se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n d_n u - \frac{b_n c_n}{u} & a_n b_n \left(\frac{1}{u} - u \right) \\ c_n d_n \left(u - \frac{1}{u} \right) & \frac{a_n d_n}{u} - b_n c_n u \end{bmatrix}$$

por lo que:

$b_{n+1} c_{n+1} = -a_n b_n c_n d_n \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 = -b_n c_n (1 + b_n c_n) \left(u - \frac{1}{u} \right)^2$ y por inducción tenemos que: $|b_n c_n| \leq \mu^n |bc| < |bc|$, en particular $b_n c_n \rightarrow 0$, $a_n d_n = 1 + b_n c_n \rightarrow 1$, $a_{n+1} \rightarrow u$ y $d_{n+1} \rightarrow \frac{1}{u}$.

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{a_n b_n \left(\frac{1}{u} - u \right)}{b_n} \right| = \left| a_n \left(\frac{1}{u} - u \right) \right| \rightarrow \left| u \left(\frac{1}{u} - u \right) \right| \leq |u| \mu^{\frac{1}{2}}$$

Luego $\left| \frac{b_{n+1}}{u^{n+1}} \right| < \mu^{\frac{1}{2}} \left| \frac{b_n}{u^n} \right|$ para n suficientemente grande, luego $\frac{b_n}{u^n} \rightarrow 0$. Análogamente se puede ver que $c_n u^n \rightarrow 0$. Luego

$$\begin{aligned} T^{-n}S_{2n}T^n &= \begin{bmatrix} \frac{1}{u^n} & 0 \\ 0 & u^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n} & b_{2n} \\ c_{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^n} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{2n} & b_{2n} \frac{1}{u^{2n}} \\ c_{2n} u^{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} \rightarrow T \end{aligned}$$

pero como $\langle S, T \rangle$ es discreto, tenemos que para a partir de alguna n , $T^{-n}S_{2n}T^n = T$ y entonces $S_{2n} = T$ como queríamos probar.

Caso 3. T es elíptica

Usando el modelo del disco, podemos suponer que la matriz asociada a T es $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix}$ con $u \in \mathbb{C}$ y $|u| = 1$ y la demostración es análoga a la del caso hiperbólico.

Sólo falta ver que la cota en 3.38 es la mejor posible. Para ello, consideremos el grupo generado por $S(z) = -\frac{1}{z}$ y $T(z) = z + 1$. En este caso $\langle S, T \rangle = PSL(2, \mathbb{Z})$ que es discreto y no-elemental, además tenemos que: $TST^{-1}S^{-1}(z) = \frac{2z+1}{z+1}$, luego $tr^2(T) = 4$ y $tr(TST^{-1}S^{-1}) = 3$ y entonces tenemos la igualdad en (3.38).

□

El siguiente teorema da un criterio para determinar si un grupo es discreto:

3.39. Teorema. *Un subgrupo no-elemental Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ es discreto si y sólo si para cada $S, T \in \Gamma$ el subgrupo $\langle S, T \rangle$ es discreto.*

Demostración:

Desde luego si Γ es discreto cualquier subgrupo es discreto, por lo que solamente veremos el recíproco del teorema. Supongamos entonces que cada subgrupo $\langle S, T \rangle$ es discreto pero que Γ no lo es. Así podemos encontrar una sucesión de elementos diferentes $\{T_n\} \subset \Gamma \setminus \{id\}$, con $T_n \rightarrow id$. Como $T^2 = id$ si y sólo si $tr(T) = 0$ y por ser $tr(T)$ una función continua en $PSL(2, \mathbb{R})$ podemos pedir que la sucesión no tenga elementos de orden 2.

Para cada $S \in \Gamma$ tenemos que:

$$|tr^2(T_n) - 4| + |tr(T_n S T_n^{-1} S^{-1}) - 2| \rightarrow 0$$

luego por el teorema de Jørgensen, para $n \geq N(S)$ se deberá tener que el grupo $\langle S, T_n \rangle$ es elemental.

Por otro lado como Γ es no-elemental, este deberá contener dos elementos hiperbólicos S_1 y S_2 sin puntos fijos comunes. Para $n \geq \max \{N(S_1), N(S_2)\}$ se tiene que los grupos $\langle S_1, T_n \rangle$ y $\langle S_2, T_n \rangle$ son elementales y discretos.

Por el segundo teorema de esta sección $\langle S_1, T_n \rangle$ y $\langle S_2, T_n \rangle$ son conjugados a grupos generados por elementos de la forma $g(z) = \lambda z$ con $\lambda > 1$ y $h(z) = -\frac{1}{z}$, luego T_n deberá dejar invariante a los puntos fijos de S_1 y a los puntos fijos de S_2 . Como T_n no es elíptica de orden 2, T_n no puede intercambiar el par de puntos fijos de S_1 (ni de S_2), luego T_n los debe fijar pero los puntos fijos de S_1 y S_2 no coinciden, luego T_n fija a cuatro puntos; esto es posible sólo si $T_n = id$ lo cual es una contradicción.

□

4 Regiones Fundamentales

4.1 Región fundamental

4.1. Definición. Sea Γ un grupo Fuchsiano no trivial. Decimos que $F \subset \mathcal{U}$ es una *región fundamental para Γ* , si:

- (i) F es cerrado,
- (ii) $F^\circ \cap T(F^\circ) = \emptyset$, $\forall T \in \Gamma \setminus \{id\}$, donde F° denota el interior de F .
- (iii) $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathcal{U}$.

El concepto de región fundamental es en realidad mucho más general: se define respecto a cualquier grupo de homeomorfismos que actúen propiamente discontinuamente en un espacio métrico. Por supuesto, el caso que nos interesa es con subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$.

4.2. Ejemplo. Sea Γ el grupo cíclico generado por la transformación $T(z) = 2z$. La región

$$R_1(z) = \{z \in \mathcal{U} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$$

es una región fundamental para Γ . (ver figura)

Notemos que F no es la única región fundamental para Γ : de hecho, si $A \subset F$ y $S \in \Gamma$ entonces el conjunto $(F \setminus A) \cup S(A)$ (si resulta cerrado) es también una región fundamental de Γ .

4.3. Ejemplo. Sea Γ_1 el grupo generado por la transformación $T(z) = z + \lambda$. Entonces, el conjunto $R = \{z \in \mathcal{U} : 0 \leq \Re z \leq \lambda\}$ es una región fundamental para Γ_1 .

Observación: Un conjunto cerrado F es una región fundamental de Γ si:

- (i) Ningún par de puntos de F° están en la misma Γ -órbita.
- (ii) Dado $z \in \mathcal{U}$, z pertenece a la Γ -órbita de un punto de F .

El siguiente teorema muestra que el área de una región fundamental es invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$. Denotaremos por ∂F a la frontera de F ; así, $F = \partial F \cup F^\circ$.

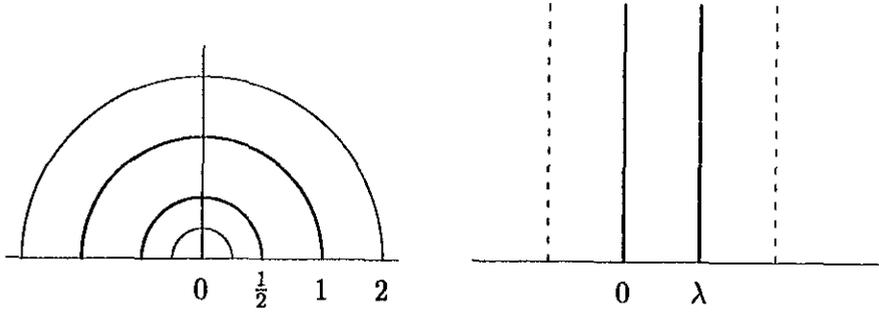


FIGURA 4.1. Regiones fundamentales para $\Gamma = \langle 2z \rangle$ y $\Gamma_1 = \langle z + \lambda \rangle$.

4.4. Teorema. Sean F_1, F_2 dos regiones fundamentales para un grupo Fuchsiano Γ . Si $\mu(\partial F_1) = \mu(\partial F_2) = 0$ entonces $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

Demostración:

Es claro que $\mu(F) = \mu(F^\circ)$. Sean $Q_1 = F_1^\circ, Q_2 = F_2^\circ$. Se tiene que $F_1 \supseteq F_1 \cap \cup_{T \in \Gamma} T(Q_2) = \cup_{T \in \Gamma} (F_1 \cap T(Q_2))$. Como F_2 es región fundamental, entonces $T(Q_2) \cap S(Q_2) = \emptyset$ para $S, T \in \Gamma$ distintas. Luego los conjuntos $F_1 \cap T(Q_2)$ son ajenos cuando T varía en Γ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(F_1) &\geq \sum_{T \in \Gamma} \mu(F_1 \cap T(Q_2)) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(F_1) \cap Q_2) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(F_1) \cap Q_2) \geq \\ &\geq \mu\left(\bigcup_{T \in \Gamma} T(F_1) \cap Q_2\right) = \mu\left(Q_2 \cap \bigcup_{T \in \Gamma} T(F_1)\right) = \mu(Q_2) = \mu(F_2). \end{aligned}$$

Luego $\mu(F_1) \geq \mu(F_2)$. Intercambiando los papeles de F_1 y F_2 tendremos la otra desigualdad para garantizar que $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. □

Observación: El área de una región fundamental compacta es finita. Sin embargo, una región fundamental no compacta puede tener área finita, por ejemplo, si F es el triángulo con ángulos $\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. Por el teorema de Gauss-Bonnet $\mu(F) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} < \infty$, y claramente, F no es compacto. Más adelante veremos que F es una región fundamental.

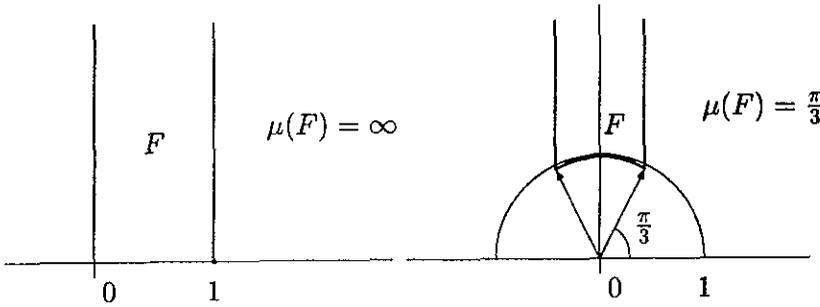


FIGURA 4.2. Regiones fundamentales no compactas con áreas infinita y finita respectivamente.

4.5. Teorema. Sea Γ un grupo Fuchsiano y Λ un subgrupo de Γ de índice n . Entonces, si $\Gamma = \Lambda T_1 \cup \Lambda T_2 \cup \dots \cup \Lambda T_n$ es una descomposición de Γ en Λ -clases, y F es una región fundamental para Γ se tiene:

1. $F_1 = T_1(F) \cup T_2(F) \cup \dots \cup T_n(F)$ es una región fundamental para Λ .
2. Si $\mu(\partial F) = 0$ entonces $\mu(F_1) = n\mu(F)$.

Demostación:

1) Sea $z \in \mathcal{U}$. Por ser F región fundamental, existen $w \in \mathcal{U}$, $T \in \Gamma$ tales que $T(w) = z$. Además, $T \in \Gamma$ implica que para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$, y alguna $S \in \Lambda$ se tiene $T = ST_j$ de donde $z = T(w) = ST_j(w)$. Entonces, z está en la Λ -órbita de algún punto en F_1 . Así, $\mathcal{U} = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F_1)$.

Ahora, para ver que F_1° no contiene puntos Λ -equivalentes supongamos que $z, S(z) \in F_1^\circ$ para alguna $S \in \Lambda$. Veremos que $S = id$. Por ser F_1° un conjunto abierto, podemos encontrar un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que $B_\epsilon(z) \subset F_1^\circ$. Entonces, $B_\epsilon(z)$ intersecciona a lo más a n imágenes de F° , digamos, $T_{i_1}(F^\circ), T_{i_2}(F^\circ), \dots, T_{i_k}(F^\circ)$, con $k \leq n$. Haciendo lo mismo para $B_\epsilon(S(z)) = S(B_\epsilon(z))$, digamos que esta intersecciona a $T_j(F)$. Entonces, $B_\epsilon(z) \cap (S^{-1}T_j(F^\circ)) \neq \emptyset$ de donde $S^{-1}T_j(F^\circ) = T_{i_m}(F^\circ)$ para alguna $m \in \{1, \dots, k\}$. De donde concluimos que $\Lambda T_j = \Lambda S^{-1}T_j = \Lambda T_{i_m}$ y finalmente, $T_j = T_{i_m}$ que ocurre si y sólo si $S = id$.

2) Se sigue de que $\mu(T_i(F) \cap T_j(F)) = 0 \forall i \neq j$ y de la invarianza de μ bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$.

□

4.2 La región de Dirichlet

Sea Γ un grupo Fuchsiano y $p \in \mathcal{U}$ que no sea punto fijo de alguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$. Estos puntos existen pues cada T tiene a lo más dos puntos fijos y Γ es a lo más numerable, luego hay solamente una cantidad a lo más numerable de puntos fijos. Definimos la *Región de Dirichlet con centro en p* como el conjunto:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{U} : \rho(p, z) \leq \rho(Tp, z) \forall T \in \Gamma\}.$$

Observemos que

$$\rho(Tp, z) = \rho(T^{-1}(Tp), T^{-1}(z)) = \rho(p, T^{-1}(z)), \forall T \in \Gamma.$$

Entonces,

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{U} : \rho(z, p) \leq \rho(Tz, p) \forall T \in \Gamma\}$$

La idea es que una *región de Dirichlet*, “es el conjunto de puntos z que están más cercanos a p que cualquiera de sus imágenes $T(p)$ ”. Formalizaremos ésta idea a partir del concepto de “mediatriz hiperbólica” que motiva una caracterización más de la *región de Dirichlet*.

4.6. Definición. La *mediatriz hiperbólica* del segmento hiperbólico determinado por los puntos z_1, z_2 es la (única) h-línea que corta ortogonalmente a la h-línea por z_1 y z_2 , en el punto medio del segmento $[z_1, z_2]$.

4.7. Teorema. La *mediatriz hiperbólica* del segmento $[z_1, z_2]$ es el lugar geométrico de los puntos en \mathcal{U} equidistantes a z_1 y z_2 .

Demostración:

Sea w el punto medio (según la métrica hiperbólica) del segmento $[z_1, z_2]$. Bajo alguna transformación T de $PSL(2, \mathbb{R})$, i es la imagen de w bajo T , y por ser w punto medio entre z_1 y z_2 , estos se transforman en puntos que son simétricos con respecto al eje imaginario $i\mathbb{R}$ que a

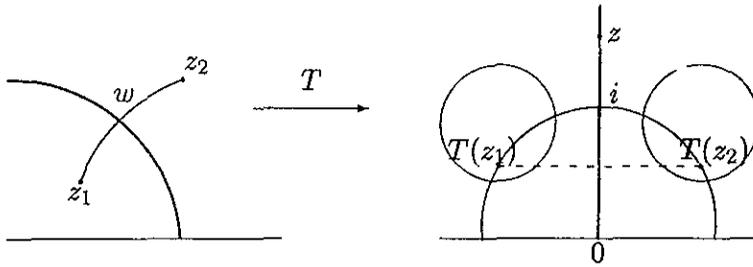


FIGURA 4.3. Demostración del teorema 4.7.

su vez, es la imagen de la geodésica por w ortogonal al segmento. Entonces, bastará demostrar que los puntos de $i\mathbb{R}$ equidistan de z_1 y z_2 .

Sea $z \in i\mathbb{R}$, y sea r la distancia de z a z_1 . Sea C_1 el círculo con centro en z_1 y radio r . Como la reflexión en $i\mathbb{R}$ dada por $S(z) = -\bar{z}$, deja a cada $z \in i\mathbb{R}$ fija, $S(z_1) = z_2$ y como es isometría, se tiene que $\rho(z, z_2) = \rho(S(z), S(z_1)) = \rho(z, z_1) = r$, lo que demuestra el resultado. \square

De esta forma, la mediatriz hiperbólica del segmento $[p, T(p)]$ es el conjunto

$$L_p(T) = \{z \in \mathcal{U} : \rho(z, p) = \rho(z, T(p))\}$$

que divide a \mathcal{U} en dos semiplanos, uno de los cuales contiene al punto p . A esta región la denotaremos por $H_p(T)$. Así, se tiene que $\overline{H_p(T)} = \{z \in \mathcal{U} : \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\}$ y

$$D_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma} \overline{H_p(T)}.$$

4.8. Teorema. *Si p no es fijo por algún elemento en $\Gamma \setminus \{id\}$, entonces $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental conexa para Γ .*

Demostración:

Al ser intersección de convexos y cerrados, $D_p(\Gamma)$ es convexo y cerrado,

luego es conexo y cerrado. Veremos que es región fundamental para Γ . Primero veremos que cada $z \in \mathcal{U}$ tiene un elemento de su órbita Γz en $D_p(\Gamma)$. Como Γz es discreto, existe $S \in \Gamma$ tal que:

$\rho(S(z), p) = \min\{\rho(T(z), p) : T \in \Gamma\}$, luego

$\rho(S(z), p) \leq \rho(T(z), p) = \rho(z, T^{-1}(p)) = \rho(S(z), ST^{-1}(p)) \forall T \in \Gamma$
pero T varía en todo Γ si y sólo si ST^{-1} varía en todo Γ , por lo tanto $S(z) \in D_p(\Gamma)$.

Ahora probaremos que $D_p(\Gamma)^\circ$ y $T(D_p(\Gamma)^\circ)$ son ajenos para toda $T \in \Gamma \setminus \{id\}$. Observemos primero que: $z \in D_p(\Gamma)^\circ$ si y sólo si $\rho(z, p) < \rho(z, T(p)) \forall T \in \Gamma \setminus \{id\}$. Ahora, dos puntos z_1 y $z_2 \in D_p(\Gamma)^\circ$ no pueden estar en la misma órbita: si $z_1 \in D_p(\Gamma)^\circ$ entonces $\rho(z_1, p) < \rho(z_1, T(p))$, para toda $T \in \Gamma \setminus \{id\}$. Supongamos que $z_2 = S(z_1)$. Entonces, $\rho(z_1, T(p)) = \rho(S(z_2), T(p)) = \rho(z_2, S^{-1}T(p)) \forall T \in \Gamma \setminus \{id\}$ en particular, para $T = S$ se tiene $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$. Análogamente $z_2 \in D_p(\Gamma)^\circ$ y $z_2 = S(z_1)$ implica que $\rho(z_2, p) < \rho(z_1, p)$, que resulta una contradicción.

Por lo tanto, $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental para Γ . □

Observación: si $D_p(\Gamma)$ está determinado por un número finito de semiplanos (que son conjuntos h-convexos), entonces será un polígono h-convexo.

En términos de la métrica euclidiana podemos definir el polígono de Dirichlet como

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &= \{z \in \mathcal{U} : \frac{|z-p|^2}{\Im z} \leq \frac{|T(z)-p|^2}{\Im T(z)} \forall T \in \Gamma\} \\ &= \{z \in \mathcal{U} : \frac{|T(z)-p|}{|z-p|} \geq \frac{1}{|cz+d|} \forall T \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

4.9. Ejemplo. Para el grupo modular $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ tenemos que

$$F = \{z \in \mathcal{U} : |z| \geq 1 \text{ y } |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$$

es una región fundamental para Γ . De hecho veremos que F es la región de Dirichlet $D_{ik}(\Gamma)$.

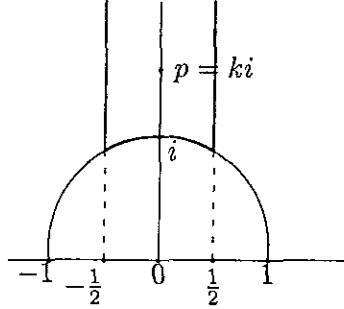


FIGURA 4.4. Una región de Dirichlet para el grupo modular.

Primero, veremos que $D_{ik}(\Gamma) \subset F$. Desde luego, ki con $k > 1$ no es fijo bajo ningún $T \in \Gamma$. En efecto ki es punto fijo de $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{Z})$ si y sólo si k es solución de $ck^2 + (a-d)ik + b = 0$ si y sólo si $k = \frac{(d-a)i \pm \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2c} = \frac{(d-a)i \pm \sqrt{4-(a+d)^2}}{2c}$. Para que k sea real debemos tener que $a = d$ y entonces $k = \frac{\pm\sqrt{1-a^2}}{c}$. Como $a, c \in \mathbb{Z}$, $|k| \leq 1$ por lo que ki con $k > 1$ no es punto fijo.

Consideremos las transformaciones $T_1(z) = z + 1$ y $T_{-1}(z) = z - 1$ de Γ . Si $z \in D_{ik}(\Gamma)$ entonces la ecuación $\frac{|T(z)-p|}{|z-p|} \geq \frac{1}{|cz+d|}$ para las transformaciones $T_1(z) = z + 1, T_{-1}z = z - 1$ nos da:

$$|z + 1 - ki| \geq |z - ki| \text{ y } |z - (1 + ki)| \geq |z - ki| \text{ respectivamente.}$$

Esto significa que z está más cercano a ki que a $\pm 1 + ki$, luego $z \in \{z \in \mathcal{U} : -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\}$.

Ahora, como $T(z) = -\frac{1}{z} \in \Gamma$, entonces, $\frac{|-\frac{1}{z}-ki|}{|z-ki|} \geq \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |1 + zki|^2 \geq |z - ki|^2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (1 + zki)(1 - \bar{z}ki) \geq (z - ki)(\bar{z} + ki) \\ &\Leftrightarrow 1 - \bar{z}ki + zki + |z|^2 k^2 \geq |z|^2 + zki - \bar{z}ki + k^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 (k^2 - 1) \geq k^2 - 1 \Leftrightarrow |z| \geq 1, \text{ luego } z \text{ está en la región } F. \end{aligned}$$

Veamos la otra contención ($F \subset D_{ki}(\Gamma)$). Para ello, necesitamos el siguiente resultado:

4.10. Proposición. 1) $D_{ki}(\Gamma)$ es simétrico con respecto al eje imaginario. Esto es, $z \in D_{ki}(\Gamma)$ si y sólo si $-\bar{z} \in D_{ki}(\Gamma)$.

2) Sean $z \in F$, $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ y supóngase que $w = T(z) \in F$. Entonces $z = w$ ó z y w son simétricos respecto a $i\mathbb{R}$, y en cualquier caso, $z, w \in \partial F$.

Demostración:

1) Primero observemos que si $z, S(z) \in D_{ki}(\Gamma)$ entonces, por ser $D_{ki}(\Gamma)$ región fundamental, ambos pertenecen a $\partial D_{ki}(\Gamma)$. Sea $A(z) = -\bar{z}$, claramente, A es isometría en \mathbb{C} , al igual que ATA^{-1} donde $T \in \Gamma$. Veremos que dado $z \in D_{ki}(\Gamma)$, se tiene que $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$, es decir, veremos que $\rho(A(z), ki) \leq \rho(A(z), T(ki))$ para toda $T \in \Gamma$, pero

$$\begin{aligned} \rho(A(z), ki) &= \rho(A(z), A(ki)) = \rho(z, ki) \leq \rho(z, A^{-1}TA(ki)) = \\ &= \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki)). \end{aligned}$$

2) Supongamos que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$ y que z y $w = T(z)$ están en F .

$$|cz + d|^2 = (cz + d)(c\bar{z} + d) = c^2|z|^2 + 2cd\Re z + d^2 \geq c^2 - cd + d^2 \geq 1.$$

La última desigualdad es inmediata si $cd \leq 0$ y si $cd \geq 1$, entonces se sigue de la igualdad $c^2 - cd + d^2 = (c - d)^2 + cd$. Luego $\Im w = \Im T(z) = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} \leq \Im z$.

Intercambiando los papeles de z y w y usando T^{-1} en lugar de T , obtenemos también que $\Im w \geq \Im z$, luego entonces $\Im w = \Im z$ y $|cz + d| = 1$ y entonces tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} (c - d)^2 + cd &= 1, \\ c^2(|z|^2 - 1) + cd(2\Re z + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Que para estudiarlas las dividimos en tres casos:

(i) $c = 0, d = \pm 1$. En éste caso $T(z) = z \pm b$, como $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, la condición $z, T(z) \in F$ nos lleva a que $b = 1$, es decir, los puntos que satisfacen éste caso son los de la forma $z = \pm \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}^+$ y como $\Im z = \Im w, z, w$, son simétricos respecto al eje imaginario.

(ii) $d = 0, c = \pm 1$. Aquí la segunda ecuación del sistema 4.2 nos dice que $|z| = 1$ y entonces $T(z) = \frac{az+1}{\pm z} = \pm a - \frac{1}{z} = \pm a - \bar{z}$ para $|z| = 1$. Como z y $T(z) \in F$ se debe tener que $a = 0, \pm 1$. En el primer caso, $T(z) = -\frac{1}{z}$ y los puntos z y $T(z)$ son de módulo 1 y simétricos respecto a $i\mathbb{R}$ ó bien coinciden y son iguales a i . Si $a = \pm 1$ entonces como z y $T(z) = \pm 1 - \frac{1}{z}$ deben estar en $|z| = 1$ entonces $z = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

(iii) $c = d = \pm 1$, la segunda ecuación del sistema implica que $|z| = 1$ y $\Re z = -\frac{1}{2}$, por lo que $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, como $T(z) \in F$ y como $T(z)$ tiene la misma parte imaginaria que z tenemos que $T(z) = z$ o $T(z) = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Para terminar de ver que F es región fundamental, sea $z \in F$. Entonces, como $D_{ki}(\Gamma)$ es región fundamental, existe $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ tal que $T(z) \in D_{ki}(\Gamma) \subset F$. Luego por la segunda parte de la proposición anterior, $T(z) = z$ ó z y $T(z)$ son simétricos, pero $T(z) \in D_{ki}$ implica que $z \in D_{ki}(\Gamma)$, por lo tanto $F \subset D_{ki}(\Gamma)$ y $D_{ki}(\Gamma) = F$.

□

Si dos de las h-líneas que acotan a una región de Dirichlet se intersectan, el punto de intersección es llamado un **vértice** de la región de Dirichlet.

Mostraremos más tarde que los vértices son aislados, de forma que la región de Dirichlet está acotada por quizás un número infinito de geodésicas, y posiblemente también por segmentos del eje real.

4.3 Círculos Isométricos

Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$. Dado que $T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$, las longitudes euclidianas cuando son transformadas bajo T se modifican por el factor $|T'(z)| = \frac{1}{|cz+d|^2}$.

En particular una región infinitesimal es transformada en otra región similar bajo T y sus longitudes y áreas euclidianas se multiplican por $\frac{1}{|cz+d|^2}$ y $\frac{1}{|cz+d|^4}$ respectivamente, por lo que las longitudes y el área euclidiana quedan inalteradas en magnitud si y sólo si $|cz+d| = 1$.

Si $c \neq 0$, el conjunto de puntos z que cumplen lo anterior es el círculo $|z + \frac{d}{c}| = \frac{1}{|c|}$, de centro $-\frac{d}{c}$ y radio $\frac{1}{|c|}$. Esto motiva la siguiente:

4.11. Definición. El círculo isométrico de $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $c \neq 0$ es:

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C}; |cz+d| = 1\}.$$

Observación. Como para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$|T(z) - T(w)|^2 = |T'(z)| |T'(w)| |z - w|^2,$$

luego si $z, w \in I(T)$ entonces su distancia euclidiana se conserva ya que $|T'(z)| = |T'(w)| = 1$. Así T actúa como una isometría euclidiana en $I(T)$.

Observación. Si $c = 0$, el círculo isométrico no existe, y en este caso sucede que la propiedad isométrica se puede tener en regiones más grandes que un círculo o bien no se tiene. En este caso el ∞ es punto fijo y se tiene que $T(z) = a^2z + \frac{b}{a}$ y $|T'(z)| = a^2$ con $a \in \mathbb{R}$. Entonces todas las longitudes euclidianas se alteran por un factor a^2 y las áreas, por a^4 y sólo cuando $a = 1$ éstas no cambian. Si la transformación T es parabólica, por ejemplo $T(z) = z + 1$, todas las longitudes euclidianas se conservan; por el contrario si la transformación es hiperbólica, como $T(z) = \lambda z$ ($\lambda \neq 1$), todas las longitudes euclidianas se alteran.

La definición tiene también sentido en el modelo del disco, en este caso las isometrías hiperbólicas que conservan orientación son de la forma $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ con $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$. El que $c = 0$, nos da que $T(z) = e^{i\theta}z$, que es elíptica, fija al origen y todas las longitudes euclidianas permanecen iguales.

Observación. En el modelo del semiplano \mathcal{U} , los círculos isométricos son ortogonales a $\partial\mathcal{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En efecto, si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces $I(T)$ es: $|cz + d| = 1$ que tiene centro en $-\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$, luego es ortogonal a \mathbb{R} .

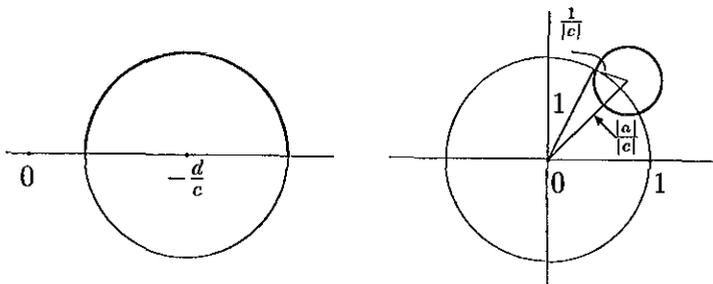


FIGURA 4.5. Círculos isométricos en \mathcal{U} y en \mathbb{D} .

En el modelo del disco \mathbb{D} , también los círculos isométricos son ortogonales a $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$, en efecto, si $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \in Aut(\mathbb{D})$, su círculo isométrico $|cz + \bar{a}| = 1$, tiene centro en $-\frac{\bar{a}}{c}$, como $|a|^2 - |c|^2 = 1$,

tenemos que $\left|\frac{-\bar{a}}{c}\right|^2 = \frac{1}{|c|^2} + 1^2$ lo que implica que los círculos \mathbb{S}^1 y $|cz + \bar{a}| = 1$ son ortogonales. Notemos que el centro $\frac{-\bar{a}}{c}$ no está sobre \mathbb{S}^1 , pues $\left|\frac{-\bar{a}}{c}\right| > 1$, luego tenemos el siguiente:

4.12. Teorema. *Los círculos isométricos son geodésicas del espacio hiperbólico.*

4.13. Definición. El interior del círculo isométrico de $T(z)$ se define por

$$\text{int}I(T) = \{z : |cz + d| < 1\}.$$

El exterior del círculo isométrico de $T(z)$ se define por

$$\text{ext}I(T) = \{z : |cz + d| > 1\}$$

De la definición observamos que:

$$\begin{aligned} z \in \text{int}I(T) &\Leftrightarrow |cz + d| < 1 \Leftrightarrow |T'(z)| < 1 \\ z \in \text{ext}I(T) &\Leftrightarrow |cz + d| > 1 \Leftrightarrow |T'(z)| > 1 \end{aligned}$$

lo que demuestra el siguiente:

4.14. Teorema. *T incrementa longitudes y áreas euclidianas en el interior de $I(T)$ y decrece longitudes y áreas euclidianas fuera del círculo $I(T)$.*

Una propiedad interesante que relaciona los círculos isométricos de T y T^{-1} es la siguiente:

4.15. Teorema. *Los círculos isométricos $I(T)$ y $I(T^{-1})$ tienen el mismo radio, además T transforma $I(T)$ en $I(T^{-1})$, y $T(\text{int}I(T)) = \text{ext}I(T^{-1})$.*

Demostración:

Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ entonces $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ por lo que $I(T^{-1})$ tiene ecuación $|-cz + a| = 1$, luego su centro es $\frac{a}{c}$ y su radio $\frac{1}{|c|}$ que es igual al de $I(T)$. También tenemos que:

$$T(z) \in I(T^{-1}) \Leftrightarrow |-cT(z) + a| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{ad - bc}{cz + d} \right| = 1 \Leftrightarrow z \in I(T)$$

por lo tanto $T(I(T)) = I(T^{-1})$.

Ahora como $T(-\frac{\bar{a}}{c}) = \infty, T(\infty) = \frac{a}{c}$ y por ser $intI(T), extI(T)$ conexos, T transforma el interior del círculo $I(T)$ en el exterior del círculo de $I(T^{-1})$.

□

4.16. Teorema. *Cualquier automorfismo T del disco \mathbb{D} se descompone como una inversión en $I(T)$ seguida de una reflexión en la mediatriz L del segmento que une los centros de los círculos isométricos $I(T)$ y $I(T^{-1})$.*

Demostración:

Sea h el segmento de línea euclidiana que une los centros de los círculos $I(T)$ e $I(T^{-1})$, donde $T^2 \neq id$.

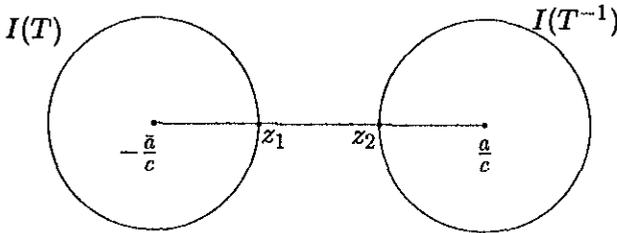


FIGURA 4.6. Demostración del teorema 4.16.

Sean z_1, z_2 los puntos de intersección de h con $I(T)$ e $I(T^{-1})$. Claramente,

$$z_1 = -\frac{\bar{a}}{c} + \frac{1}{c} \frac{(a + \bar{a})}{|a + \bar{a}|} = -\frac{\bar{a}}{c} + \frac{1}{c} \operatorname{sgn}(\Re a)$$

$$\text{y } z_2 = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \frac{(a + \bar{a})}{|a + \bar{a}|} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \operatorname{sgn}(\Re a)$$

Podemos suponer, sin perder generalidad que $\operatorname{sgn}(\Re a) = 1$. Entonces,

$$T(z_1) = \frac{a(-\frac{\bar{a}}{c} + \frac{1}{c}) + \bar{c}}{c(-\frac{\bar{a}}{c} + \frac{1}{c}) + \bar{a}} = \frac{-|a|^2 + a + |c|^2}{c[-\bar{a} + 1 + \bar{a}]} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \operatorname{sgn}(\Re a) = z_2.$$

Luego tenemos que la transformación $T(z)$ cumple que $T(z_1) = z_2$,

$T(-\frac{\bar{a}}{c}) = \infty$ y $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Por otro lado si consideramos a J la inversión en $I(T)$ y a R la reflexión en la mediatriz de h tenemos que $S = RJ$ es una transformación de Möbius que satisface

$$S(z_1) = RJ(z_1) = R(z_1) = z_2$$

$$S(-\frac{\bar{a}}{c}) = RJ(-\frac{\bar{a}}{c}) = R(\infty) = \infty$$

$$S(\infty) = RJ(\infty) = R(-\frac{\bar{a}}{c}) = \frac{a}{c}$$

luego, S coincide con T en tres puntos, por tanto S y T son iguales y entonces $T = RJ$ como se deseaba ver. \square

Esta demostración se puede copiar para ver más generalmente en $PGL(2, \mathbb{C})$, que cualquier transformación T que no sea loxodrómica y que cumpla $T^2 \neq id$, se puede descomponer en la forma $T = RJ$ donde J es la inversión en el círculo isométrico $I(T)$ y R la reflexión en la mediatriz del segmento que une los centros de $I(T)$ e $I(T^{-1})$.

4.17. Lema. Sea $T \in Aut(\mathbb{D})$. La mediatriz del segmento $[0, T(0)]$ es el círculo isométrico $I(T^{-1})$.

Demostración:

Sea $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$, entonces como $T^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z - \bar{c}}{-cz + a}$ se tiene que su círculo isométrico es $I(T^{-1}) = \{z \in \mathbb{C} : |-cz + a| = 1\}$. Por otro lado, la mediatriz de $[0, T(0)]$ es $\{z \in \mathbb{C} : \rho(z, 0) = \rho(z, T(0))\}$ donde ρ es la métrica hiperbólica en \mathbb{D} .

$$\text{Se sabe que : } sh^2(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

$$\text{Luego : } \rho(z, 0) = \rho(z, T(0)) \Leftrightarrow sh^2(\frac{1}{2}\rho(z, 0)) = sh^2(\frac{1}{2}\rho(z, T(0)))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|^2}{1 - |z|^2} = \frac{|z - \frac{\bar{c}}{a}|^2}{(1 - |z|^2)^2 \left(1 - \left|\frac{\bar{c}}{a}\right|^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |\bar{a}z - \bar{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |a|^2 |z|^2 - c\bar{a}z - \bar{c}a\bar{z} + |c|^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = (|a|^2 - 1) |z|^2 - c\bar{a}z - \bar{c}a\bar{z} + |a|^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = |c|^2 |z|^2 - c\bar{a}z - \bar{c}a\bar{z} + |a|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = |-cz + a|^2$$

□

El resultado anterior tiene sentido cuando el grupo Γ no contiene rotaciones, que son las que fijan al 0. En éste caso, los puntos donde se da la igualdad $\rho(z, 0) = \rho(z, T(0))$ son exactamente los de la mediatriz hiperbólica del segmento $[0, T(0)]$ que por el teorema anterior es el círculo isométrico $I(T^{-1})$. Entonces, para cada $T \in \Gamma$ (donde Γ es un grupo Fuchsiano sin rotaciones) se tiene

$$\{z : \rho(z, 0) \leq \rho(z, T(0))\} = \text{ext}I(T^{-1})$$

de donde

$$\begin{aligned} D_0(\Gamma) &= T \in \Gamma \cap \{z : \rho(z, 0) \leq \rho(z, T(0))\} = \\ &= T \in \Gamma \cap \text{ext}I(T^{-1}) = T \in \Gamma \cap \text{ext}I(T). \end{aligned}$$

4.18. Teorema. *Sea $\{T_n\}$ una sucesión en Γ de manera que sus círculos isométricos $I_n = I(T_n)$ sean diferentes y con radios r_n , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.*

Demostración:

Supongamos que $T_n(z) = \frac{a_n z + \bar{c}_n}{c_n z + \bar{a}_n}$, primero observemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$, en caso contrario como $|a_n|^2 - |c_n|^2 = 1$ se tendría que $T_n \rightarrow I$ pero Γ es Fuchsiano, luego $T_n = I$ a partir de alguna $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción pues por hipótesis los $I(T_n)$ son diferentes. Ahora, sea $\varepsilon > 0$, recordemos que $r_n = \frac{1}{|c_n|}$, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| \neq 0$ solamente un número finito de $|c_n|$ cumple que $|c_n| < \frac{1}{\varepsilon}$ es decir, para n suficientemente grande $r_n = \frac{1}{|c_n|} \leq \varepsilon$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

□

Observación: Se concluye del teorema anterior que los radios de los círculos isométricos para un grupo Fuchsiano Γ están acotados.

4.4 Región de Ford

Sea Γ un grupo Fuchsiano que contiene traslaciones. El *estabilizador de ∞* definido por $\Gamma_\infty = \{T \in \Gamma : T(\infty) = \infty\}$ es cíclico infinito y está generado por una traslación $U_\lambda(z) = z + \lambda, \lambda > 0$. Entonces, el conjunto

$$R_\infty = \{z \in \mathcal{U} : \sigma \leq \Re z \leq \sigma + \lambda\}$$

es claramente una región fundamental para Γ_∞ , donde σ es cualquier real. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$, entonces $c \neq 0$, luego el círculo isométrico de T existe para toda $T \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$.

4.19. Definición. Sea Γ un grupo Fuchsiano con traslaciones. Definimos la *región fundamental de Ford* para Γ como

$$R_0 = \{R_\infty \cap \overline{\text{ext}I(T)}\}_{T \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty}$$

4.20. Teorema. R_0 es una región fundamental para Γ .

Demostración:

Probaremos primero que en R_0° no hay dos puntos Γ -equivalentes. Sea $z \in R_0^\circ$ y $T \in \Gamma \setminus \{id\}$. Si $T \in \Gamma_\infty$ entonces $T(z)$ no es un punto de R_0° . En efecto, si $\Gamma_\infty = \langle T(z) = z + \lambda \rangle$ entonces $T(z) = z + n\lambda$ para alguna $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y z y $T(z)$ no pueden pertenecer a R_0° pues $|\Re(T(z) - z)| = |n\lambda| > |\lambda|$.

Supongamos ahora que $T \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$. Se tiene por 4.15 que $z \in \text{ext}I(T)$ si y sólo si $T(z) \in \text{int}(I(T^{-1}))$, pero como T^{-1} también es un elemento de $\Gamma \setminus \Gamma_\infty$, entonces $T(z)$ no puede estar en R_0° . Resta probar que todo punto $z \in \mathcal{U}$ es equivalente a algún punto de R_0 .

Sea $z \in \mathcal{U}$. Con alguna traslación $T \in \Gamma$ llevamos $T(z)$ a R_∞ . Si $T(z) \in R_0$ hemos terminado. Si no, entonces $T(z)$ está en el interior de algún círculo isométrico y entonces $|cz + d| < 1$, lo que implica que: $\Im(T(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} > \Im(z)$. En general, si $z_n = T^n(z)$,

$$\Im z_n = \Im(T^n(z)) = \frac{\Im T^{n-1}(z)}{|cz+d|^2} > \Im T^{n-1}(z).$$

Al aplicar $T(z)$ puede ocurrir que $\Re(T(z)) \notin [\sigma, \sigma + \lambda]$, en este caso aplicamos otra traslación $T^*(z)$ que lleve z_1 a R_∞ , es decir, $T^*(z_1) = z_1^* \in R_\infty$.

Así construimos una sucesión de puntos $z_1, z_1^*, z_2, z_2^*, \dots$ que cumple $\Im z_i = \Im z_i^*, \Im z_i < \Im z_{i+1}$ y $z_i^* \in R_\infty$ para toda i . Veremos que en realidad, la sucesión es finita. En efecto, se vió que los radios de los círculos isométricos están acotados, es decir, existe $B > 0$ tal que si $w \in R_0$ entonces $\Im w \geq B$, así que si para alguna n tenemos que $\Im z_n^* \geq B$ ya terminamos. Si no, entonces hay una sucesión infinita $\{z_i^*\}$ en la órbita de z que pertenece a R_∞ , lo que contradice el hecho de que Γ sea discreto.

Concluimos que todo punto en \mathcal{U} es equivalente a uno en R , así que R es región fundamental. □

4.21. Ejemplo. La región de Ford para el grupo para el grupo modular $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ es:

$$R_0 = \{z \in \mathcal{U} : |z| \geq 1, |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}.$$

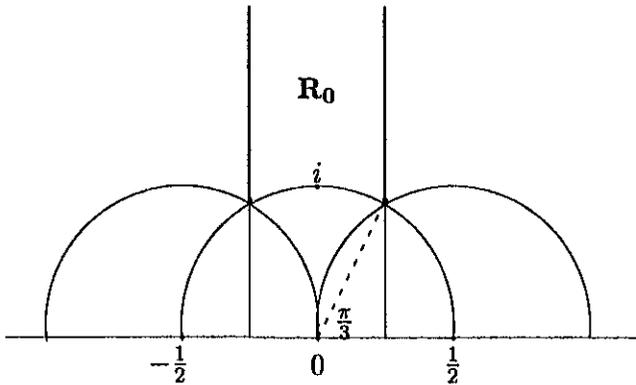
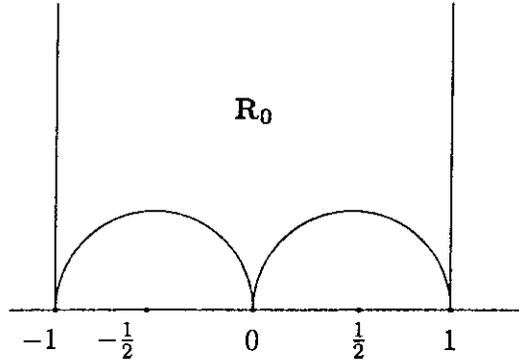


FIGURA 4.7. Región de Ford para el grupo modular.

4.22. Ejemplo. La región de Ford para el grupo

$\Gamma(2) = \{T \in PSL(2, \mathbb{Z}) : a, d \text{ son impares y } b, c \text{ son pares}\}$ es:

$$R_0 = \{z \in \mathcal{U} : |\Re z| \leq 1, |z - \frac{1}{2}|^2 \geq \frac{1}{2} \text{ y } |z + \frac{1}{2}|^2 \geq \frac{1}{2}\}.$$

FIGURA 4.8. Región de Ford para el grupo $\Gamma(2)$.

4.5 El conjunto límite de un grupo Fuchsiano

Si Γ es un grupo Fuchsiano, tenemos que la órbita para cada $z \in \mathcal{U}$, es un conjunto discreto en \mathcal{U} , luego si $\{T_n\}$ es una sucesión de elementos distintos en Γ y si $\{T_n(z)\}$ forma una sucesión convergente a un punto $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, este punto deberá estar en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.23. Definición. El conjunto de todos los puntos límites de órbitas Γz con $z \in \mathcal{U}$ es llamado el *conjunto límite* de Γ y es denotado por $\Lambda(\Gamma)$. Es decir, $\Lambda(\Gamma) = \left\{ \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z); \{T_n\} \subset \Gamma \text{ y } z \in \mathcal{U} \right\}$.

Desde luego por la observación anterior, $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Los puntos de $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \setminus \Lambda(\Gamma)$ se llaman *puntos ordinarios*.

4.24. Ejemplo. Si Γ es el grupo cíclico generado por $T(z) = 2z$, entonces $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$.

4.25. Ejemplo. Si $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ es el grupo modular, la órbita del 0 claramente es $\Gamma_0 = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, por lo que $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Más adelante veremos que $\Lambda(\Gamma)$ es todo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Consideremos los centros de los círculos isométricos de los elementos de Γ y denotemos al conjunto de puntos límites por $\Lambda_0(\Gamma)$. Si el grupo Γ no es finito entonces $\Lambda_0(\Gamma) \neq \emptyset$.

En el modelo del disco unitario claramente $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^1$, y también se tiene que $\Lambda_0(\Gamma) \subset \mathbb{S}^1$ que no es un hecho evidente, pues los centros de los círculos isométricos están fuera de \mathbb{D} , veamos esto último:

4.26. Teorema. *En el modelo del disco unitario, $\Lambda_0(\Gamma) \subset \mathbb{S}^1$.*

Demostración:

Como los círculos isométricos son ortogonales a $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$, los centros de estos quedan fuera de $\overline{\mathbb{D}}$. Supongamos que existe $z_0 \in \Lambda_0 \setminus \overline{\mathbb{D}}$, luego existe un círculo C de centro en z_0 con $C \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Como $z_0 \in \Lambda_0(\Gamma)$ existe una sucesión de círculos isométricos I_n de radios r_n y centros z_n tales que $z_n \rightarrow z_0$. Por el teorema 4.18, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, luego a partir de alguna n , I_n queda dentro de C y entonces no interseca a \mathbb{S}^1 , lo cual es una contradicción pues todos los círculos isométricos intersecan a \mathbb{S}^1 . \square

4.27. Teorema. $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_0(\Gamma)$.

Demostración:

Primero demostraremos que $\Lambda_0(\Gamma) \subset \Lambda(\Gamma)$. Sea $z_0 \in \Lambda_0(\Gamma)$ y sea $\{T_n\} \subset \Gamma$ una sucesión de transformaciones donde el centro p_n del círculo isométrico $I(T_n^{-1})$ cumpla que $p_n \rightarrow z_0$. Sea $\varepsilon > 0$, por el teorema 4.18 tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ y $\forall z \in \text{int}I(T_n^{-1})$, $d(z_0, z) < \varepsilon$. Sea $B = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq 1 - \varepsilon\}$ y sean q_n los centros de $I(T_n)$. Esta sucesión de centros está acotada en \mathbb{C} por el teorema 4.18 y entonces (tomando subsucesiones si es necesario) podemos suponer que $q_n \rightarrow \tilde{z}_0$. Como $\tilde{z}_0 \in \mathbb{S}^1$ por el teorema anterior y usando de nuevo el teorema 4.18 concluimos que existe $M > 0$ tal que $\forall n \geq M$ y $\forall z \in \text{int}I(T_n)$, $d(z_1, z) < \varepsilon$, luego $\bigcup_{n > M} I(T_n) \cap B = \emptyset$.

Sea $z \in B$, entonces z está fuera de $I(T_n) \forall n \geq M$, luego $T_n(z) \in \text{Int}I(T_n^{-1})$, así para $n \geq \max(N, M)$, tenemos que $d(T_n(z), z_0) < \varepsilon$ y entonces $T_n(z) \rightarrow z_0$, luego $z_0 \in \Lambda(\Gamma)$.

Ahora mostraremos que $\Lambda(\Gamma) \subseteq \Lambda_0(\Gamma)$. Sea $z_0 \in \Lambda(\Gamma)$ luego existen $z \in \mathbb{D}$ y $\{T_n\} \subset \Gamma$ sucesión de transformaciones diferentes con $T_n(z) \rightarrow z_0$. La sucesión $\{q_n\}$ de centros de los círculos isométricos $I(T_n)$, tiene una subsucesión convergente a un punto $\beta \in \Lambda_0(\Gamma) \subset \mathbb{S}^1$, podemos suponer, tomando subsucesiones si es necesario, que z está fuera de todos los círculos $I(T_n)$, luego $T_n(z) \in \text{int}I(T_n^{-1})$.

Supongamos que los centros y los radios de $I(T_n^{-1})$ son respectivamente p_n y r_n , por 4.18, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(T_n(z), z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego:

$$d(p_n, z_0) \leq d(p_n, T^n(z)) + d(T_n(z), z_0) \leq \varepsilon \text{ para toda } n \geq N,$$

y entonces $p_n \rightarrow z_0$, por lo que $z_0 \in \Lambda_0(\Gamma)$. □

4.28. Teorema. *El conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado y Γ -invariante.*

Demostración:

De la definición se sigue que $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, ya que cada punto $\alpha \in \Lambda(\Gamma)$ cumple que cualquier vecindad de él tiene una infinidad de centros de círculos isométricos, y los puntos de la cerradura también lo cumplen. Para ver la Γ -invarianza, sea $\alpha \in \Lambda(\Gamma)$ entonces $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n z$ para alguna $z \in \mathcal{U}$ y $\{T_n\} \subset \Gamma$ una sucesión de transformaciones diferentes. Sea $S \in T$ entonces como $S(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ST_n S^{-1})(S(z))$ y como la sucesión $\{ST_n S^{-1}\}$ es de transformaciones diferentes, tenemos que $S(\alpha) \in \Lambda(\Gamma)$. □

4.29. Lema. *Sean $\alpha, \beta, \delta \in \partial\mathcal{U}$ (resp. $\partial\mathbb{D}$). Entonces α es un punto límite de la órbita $\Gamma\beta$ o de la órbita $\Gamma\delta$.*

Demostración:

Como $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_0(\Gamma)$ tenemos que existe una sucesión de transformaciones $\{T_n\} \subset \Gamma$, tales que los centros $\{p_n\}$ de los círculos isométricos $I(T_n^{-1})$ cumplen $p_n \rightarrow \alpha$.

Sean $\{q_n\}$ los centros de los círculos isométricos $I(T_n)$. Podemos suponer (usando subsucesiones si es necesario) que $q_n \rightarrow \gamma \in \Lambda(\Gamma)$. Quizás γ coincide con β o con δ pero no con ambos, luego podemos suponer que $\gamma \neq \delta$. Dado que los radios de los círculos isométricos $I(T_n)$ tienden a cero, δ está fuera de una infinidad de estos círculos, y entonces $T_n(\delta) \in \text{Int } I(T_n^{-1})$ por lo que $T_n(\delta) \rightarrow \alpha$ y entonces α es un punto límite de la órbita $\Gamma\delta$. □

4.30. Teorema. *Si $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de un punto, entonces coincide con la cerradura del conjunto de puntos fijos de las transformaciones hiperbólicas de Γ .*

Demostración:

Primero veamos que Γ debe contener al menos un elemento hiperbólico. Supongamos que no, es decir, que Γ sólo tiene elementos elípticos y parabólicos. Desde luego no pueden ser todos elípticos pues en tal caso Γ es cíclico finito y $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$. Sea entonces $T \in \Gamma$ una transformación parabólica, que podemos suponer fija al ∞ y entonces es de la forma $T(z) = z + k$ para alguna $k \in \mathbb{R}$. El grupo Γ deberá contener un elemento $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que no fije al ∞ , pues de otra manera Γ resultaría ser un grupo cíclico generado por una parabólica en cuyo caso $\Lambda(\Gamma) = \{\infty\}$, luego $c \neq 0$ y $|\text{tr}T^n S| = |a + d + nkc| > 2$, si n es suficientemente grande, por lo que $T^n S$ es hiperbólica, lo cual es una contradicción. Desde luego en $\Lambda(\Gamma)$ están todos los puntos fijos de los elementos hiperbólicos de Γ y entonces como $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, entonces contiene a la cerradura del conjunto de puntos fijos hiperbólicos.

Supongamos ahora que $\alpha \in \Lambda(\Gamma)$ y que α no es un punto fijo hiperbólico, veamos que α es un punto límite de los puntos fijos hiperbólicos. Sean μ_1 y μ_2 dos puntos fijos hiperbólicos (existen por que al menos hay una hiperbólica en Γ). Por el lema anterior α es punto límite de la órbita $\Gamma\mu_1$ o de la órbita $\Gamma\mu_2$, y como la imagen de puntos fijos hiperbólicos es un punto fijo hiperbólico tenemos que α es punto límite de puntos fijos hiperbólicos. □

4.31. Teorema. *Si $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de dos puntos entonces $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o bien $\Lambda(\Gamma)$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \cup \{0\}$ perfecto y denso en ninguna parte.*

Demostración:

Sabemos ya que $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado. Ahora para garantizar que es perfecto, veremos que cada punto de $\Lambda(\Gamma)$ es un punto límite de $\Lambda(\Gamma)$. Sea $\alpha \in \Lambda(\Gamma)$ y tomemos $\beta, \gamma \in \Lambda(\Gamma)$ (que existen por hipótesis). Por el lema 4.29, α es punto límite de alguna de las órbitas $\Gamma\beta$ o $\Gamma\gamma$, pero si $\beta, \gamma \in \Lambda(\Gamma)$ entonces $\Gamma\beta \cup \Gamma\gamma \subset \Lambda(\Gamma)$, luego α es punto límite de $\Lambda(\Gamma)$ y así $\Lambda(\Gamma)$ es perfecto.

Ahora veremos que a menos que cada punto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pertenezca a $\Lambda(\Gamma)$, $\Lambda(\Gamma)$ es denso en ninguna parte. Sea $z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con $z_0 \notin \Lambda(\Gamma)$. Como $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, existe una vecindad V de z_0 en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con $V \subset (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \setminus \Lambda(\Gamma)$, luego hay un segmento h que contiene a z_0 y formado de puntos ordinarios únicamente. Sea $\alpha \in \Lambda(\Gamma)$, por el lema 4.29 aplicado a dos puntos $\beta_1, \beta_2 \in h$ podemos concluir que existe $\beta \in h$

y una sucesión de transformaciones distintas con $T_n\beta \rightarrow \alpha$. Como cada $T_n\beta$ es un punto ordinario, concluimos que en cada vecindad de α en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ hay puntos ordinarios, luego $\Lambda(\Gamma)$ es denso en ningún lado en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

□

En base al teorema anterior podemos dividir a los grupos Fuchsianos como sigue:

- (a) Un grupo Fuchsiano es del primer tipo si $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- (b) Un grupo Fuchsiano es del segundo tipo si $\Lambda(\Gamma)$ es denso en ningún lado en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Observación. Para grupos del segundo tipo, tenemos por el teorema anterior que $\Lambda(\Gamma)$ puede ser vacío, constar de uno o dos puntos o ser un conjunto perfecto (por tanto infinito) que es denso en ningún lado.

4.6 Estructura de una Región de Dirichlet

4.32. Definición. Sea Γ un grupo Fuchsiano y F una región fundamental para Γ . Diremos que F es *localmente finita* si para toda $a \in F$ existe una vecindad V de a tal que $V \cap T(F) \neq \emptyset$ solamente para un número finito de $T \in \Gamma$.

4.33. Teorema. Una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ es localmente finita.

Demostración:

Supongamos que no. Entonces, existen $a \in D_p(\Gamma)$, K una vecindad compacta de a y una sucesión $\{T_n\}$ de elementos distintos de Γ tales que $T_n(F) \cap K \neq \emptyset \forall n$. Sea $d = \sup_{z \in K} \rho(p, z)$. Por ser K compacto, d es finita. Para cada $w_j \in K \cap T_j(F)$ se tiene $w_j = T_j(z_j)$, con $z_j \in F$, de donde

$$\begin{aligned} \rho(p, T_j(p)) &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) = \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \\ &\leq \rho(p, w_j) + \rho(p, w_j) = 2\rho(p, w_j) \leq 2d \end{aligned}$$

Entonces, los $T_j(p)$ están en la bola hiperbólica compacta $B = B_{2d}(p)$, luego $\{T_j(p)\}$ tiene un punto de acumulación en $B \subset \mathcal{U}$, lo que contradice el hecho de que Γ sea Fuchsiano.

□

4.6.1 VÉRTICES Y CICLOS ELÍPTICOS

4.34. Definición. Sea $F = D_p(\Gamma)$ una región de Dirichlet para Γ un grupo Fuchsiano y sean u y v vértices de F . Decimos que u y v son *vértices congruentes* si existe $T \in \Gamma$ tal que $T(u) = v$.

Notemos que si u y v son congruentes, entonces por la segunda propiedad que define una región de Dirichlet, $u, v \in \partial F$. Es inmediata la siguiente

4.35. Proposición. *La congruencia es una relación de equivalencia. A las clases de equivalencia les llamaremos ciclos.*

Recordemos que sólo las transformaciones elípticas tienen puntos fijos en \mathcal{U} . Así, si un vértice $u \in \mathcal{U}$ es punto fijo de una transformación (elíptica) S , y si $T(u) = v$ para alguna $T \in \Gamma$, se tiene que el elemento elíptico TST^{-1} fija a v , luego todos los vértices del ciclo elíptico de v son puntos fijos elípticos. A una clase de equivalencia de este tipo se llamamos *ciclo elíptico*, y los vértices son llamados *vértices elípticos*.

Observación. El número de ciclos elípticos es igual al número de puntos elípticos no congruentes en F .

Por ser F región de Dirichlet, todo punto $w \in \mathcal{U}$ fijo por una transformación $S' \in \Gamma$ elíptica, cae en la frontera de $T(F)$, para algún $T \in \Gamma$, luego $u = T^{-1}(w) \in \partial F$ y está fijo por la elíptica $S = T^{-1}S'T$. Sabemos que S tiene orden finito, digamos k . Supongamos primero que $k \geq 3$. Como $u \in \partial F$, está en al menos un h-línea l que acota a F , además S es isometría que transforma *h-líneas* en *h-líneas* y deja fijo u , luego u es un vértice de F cuyo ángulo es a lo más $\frac{2\pi}{k}$.

La región F está acotada por h-líneas, así que su intersección con éstas es un punto o bien un segmento de una h-línea. En este caso, el segmento se llama un *lado* de F . Si S tiene orden 2, entonces u está en el interior de un lado de F , y en éste caso S intercambia los dos segmentos del lado que determina u ; y podemos incluir a tales puntos u como vértices que tienen ángulo igual a π . Así, la noción de vértice elíptico se extiende a este tipo de puntos. Resumiendo, un vértice de F es un punto de intersección de dos h-líneas del borde de F o es un punto fijo de un elemento elíptico de orden dos.

Los únicos subgrupos cíclicos finitos de $PSL(2, \mathbb{R})$ son los generados por elementos elípticos; por otro lado, todo elemento elíptico tiene un único punto fijo en \mathcal{U} (así, a cada punto fijo elíptico, lo identificamos con el elemento elíptico).

También si un punto en u tiene un estabilizador no trivial en Γ , entonces éste es un subgrupo cíclico finito de Γ , además es un subgrupo cíclico finito maximal. Recíprocamente, todo subgrupo cíclico finito maximal de Γ es el estabilizador del punto fijo común $u \in \mathcal{U}$. Resumiendo tenemos el siguiente

4.36. Teorema. *Hay una biyección entre los ciclos elípticos de F y las clases de conjugación de subgrupos finitos cíclicos maximales.*

4.37. Ejemplo. Sea $F = \{z \in \mathcal{U} : |z| \geq 1 \text{ y } |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$ la región fundamental para Γ el grupo modular. Sean

$$T_3(z) = \frac{-z-1}{z}, \quad T_2(z) = \frac{z-1}{z} \text{ y } T_1(z) = -\frac{1}{z}$$

entonces

$$T_3(z_3) = z_3 = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad T_2(z_2) = z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ y } T_1(i) = i$$

es decir, el estabilizador de z_3 es el subgrupo $\langle T_3 \rangle$; el de z_2 es el subgrupo $\langle T_2 \rangle$, y el de i es el subgrupo $\langle T_1 \rangle$. Los tres subgrupos son cíclicos finitos.

Ahora bien z_2 y z_3 son vértices conjugados (por $T(z) = z + 1$) y por lo tanto, pertenecen al mismo ciclo elíptico, que sólo los contiene a ellos, puesto que ningún otro vértice tiene ángulos menor que $2\pi/3$. Por otro lado i es punto fijo de una elíptica de orden dos y ningún otro punto en la frontera de F lo es, luego $PSL(2, \mathbb{Z})$ tiene dos clases de conjugación de subgrupos cíclicos maximales, uno que consiste en grupos de orden 2 y otro de orden 3.

4.38. Definición. Los órdenes de los subgrupos maximales finitos de Γ se llaman *periodos* de Γ .

Un periodo se repite tantas veces como clases de conjugación de subgrupos maximales finitos de ese orden tenga Γ .

4.39. Ejemplo. El grupo modular tiene periodos 2 y 3.

El grupo triangular (que definiremos en el Capítulo 5) generado por un triángulo de ángulos $\pi/m, \pi/l, \pi/n$ tiene periodos l, m, n .

Un elemento parabólico puede ser considerado como un elíptico de orden infinito. Luego si un punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tiene un estabilizador no trivial, éste estabilizador es un subgrupo (cíclico) parabólico maximal de Γ y todo subgrupo parabólico maximal de Γ es el estabilizador de un punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Una región de Dirichlet F de un grupo Fuchsiano que tiene elementos parabólicos será (lo veremos en el Capítulo 5) una región no compacta y si F cumple que $\mu(F) < \infty$ entonces F tendrá al menos un vértice en el infinito. Además veremos que cada vértice en el infinito es un punto fijo parabólico de un subgrupo parabólico maximal de Γ y los vértices de F en el infinito que no son congruentes están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugación de subgrupos parabólicos maximales de Γ .

Luego si aceptamos periodos infinitos, el periodo infinito ocurrirá tantas veces como clases de conjugación de subgrupos parabólicos maximales existan. Este número será llamado el número de clases parabólicas de Γ . Por ejemplo, es fácil ver que en el grupo modular $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ todo elemento parabólico es conjugado a $T_n(z) = z + n$ con $n \in \mathbb{Z}$, por lo que el grupo modular tiene periodos 2, 3, ∞ . El ángulo en un vértice en el infinito es 0. Con ésta convención, la región de Dirichlet de $PSL(2, \mathbb{Z})$ tiene un vértice en ∞ con ángulo $\frac{\pi}{\infty} = 0$, por lo que veremos en la sección 5.4 que $PSL(2, \mathbb{Z})$ será un grupo triangular generado por un triángulo hiperbólico de ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{\infty}$.

Por último veremos un resultado que relaciona la suma de los ángulos en vértices elípticos que pertenecen a un ciclo, con el orden de éste.

4.6.2 CONGRUENCIA DE LADOS

4.40. Definición. Dos lados s y w de una región de Dirichlet $D_\Gamma(p)$ se llamarán *congruentes* si existe $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ tal que $T(s) = w$.

Notemos que $w = T(s)$ es también un lado de $T(F)$, por lo tanto $T(s) \subset F \cap T(F)$. De hecho, se verá más tarde que los conjuntos son iguales.

No puede haber dos lados congruentes a un lado s . En efecto, si existe $T_1 \in \Gamma \setminus \{id\}$ con $T_1(s) = F \cap T_1(F)$ y $T(s) = F \cap T(F)$ se tendría que $S = F \cap T_1^{-1}(F) = T^{-1}(F) \cap F$ por lo tanto, $T = T_1$. Entonces, hemos probado la siguiente

Observación. Los lados de $D_\Gamma(p)$ son congruentes por pares.

Cuando s tiene un punto fijo de una elíptica T de orden 2, el punto fijo divide a s en dos segmentos que son intercambiados por T ; también en este caso ambos segmentos son lados congruentes.

4.41. Ejemplo. La región fundamental para $PSL(2, \mathbb{Z})$ tiene los siguientes conjuntos de pares conjugados:

$$l_1 = \left\{ z : \Re z = -\frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

$$l_2 = \left\{ z : \Re z = \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

que son congruentes vía la transformación $T(z) = z + 1 \in PSL(2, \mathbb{Z})$,
y

$$l_3 = \{ z : |z| = 1, \Re z > 0 \}$$

$$l_4 = \{ z : |z| = 1, \Re z < 0 \}$$

que lo son vía $R(z) = -1/z$.

4.42. Teorema. Sea F un dominio fundamental localmente finito de un grupo Fuchsiano Γ . Entonces Γ está generado por $H = \{ h \in \Gamma : h(F) \cap F \neq \emptyset \}$.

Demostración:

Sea Γ_0 el grupo generado por H . Consideremos la función $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \Gamma/\Gamma_0$ definida por $\phi(u) = \Gamma_0 g$ donde $g \in \Gamma$ es tal que $g(u) \in F$. La función ϕ está bien definida, pues si existe otra $h \in \Gamma$ con $h(u) \in F$ tenemos que $g(u) \in F \cap gh^{-1}(F)$, luego $gh^{-1} \in \Gamma_0$ y entonces $\Gamma_0 g = \Gamma_0 h$. Como F es localmente finito, existe una vecindad abierta B de u que interseca a un número finito de imágenes de F , digamos $g_1(F), g_2(F), \dots, g_m(F)$, supongamos además que $u \in g_i(F)$ para cada $i = 1, \dots, m$; más aún, que $B \subset g_1(F) \cup \dots \cup g_m(F)$. Ahora, si $y \in B$ entonces $y \in g_i(F)$ para alguna i y entonces $\phi(y) = Hg_i^{-1} = \phi(u)$, por lo que ϕ es constante en B y por tanto las fibras de ϕ son abiertas y ϕ es constante en ellas, y como \mathcal{U} es conexo, tenemos que ϕ es constante en \mathcal{U} . Finalmente si $g \in \Gamma, u \in F$ y $v \in g^{-1}(F)$, tenemos que $\Gamma_0 = \phi(u) = \phi(v) = \Gamma_0 g$, luego $g \in \Gamma_0$ de donde $\Gamma_0 = \Gamma$.

□

4.43. Teorema. Sea $\{T_i\} \subset \Gamma$, tal que para toda i , T_i aparece dos lados de F . Entonces $\{T_i\}$ es un conjunto de generadores para Γ .

Demostración:

El teorema anterior muestra que Γ está generado por $H = \{g \in \Gamma : g(F) \cap F \neq \emptyset\}$, donde F es una región fundamental localmente finita de Γ . Desde luego una función T_i que aparee dos lados está en H , por lo que bastará ver que si $g(F) \cap F \neq \emptyset$ entonces g está en el grupo que generan las funciones que aparean dos lados. Supongamos que $u \in g(F) \cap F$, entonces por ser F localmente finito existe B un disco abierto con centro en u y $h_0 = id, h_1, \dots, h_t \in \Gamma$ (con $h_{j_0} = g$ para alguna j_0) con $u \in \bigcap_{j=0}^t h_j(F)$ y $B \subset \bigcup_{j=0}^t h_j(F)$. Si es necesario se puede hacer más pequeño el radio de B para garantizar que B no tenga vértices de ningún $H_j(F)$, excepto u y ningún otro lado de $h_j(F)$ excepto los que contienen a u . Como ∂F es la unión de los lados de F , la frontera de F que se encuentra en B es parte de un lado o de dos lados con vértice común u . Esto es también cierto para cada uno de los $h_j(F)$, y reordenando los índices podemos suponer que $h_0(F), \dots, h_t(F)$ son polígonos consecutivos con un lado común, por lo que $F \cap h_j^{-1}h_{j+1}(F)$ es un segmento geodésico, luego un lado, para toda j y entonces $h_j^{-1}h_{j+1} = T_s$ para alguna T_s que aparee dos lados, luego $(h_0^{-1}h_1)(h_1^{-1}h_2)\dots(h_{j_0-1}^{-1}h_{j_0}) = h_{j_0} = g$ está en el grupo que generan las funciones T_j que aparean lados.

□

4.44. Ejemplo. El grupo modular está generado por $T(z) = z + 1$, $R(z) = -1/z$.

4.7 El cociente \mathcal{U}/Γ como superficie de Riemann

Iniciamos esta sección con el concepto de *superficie*. Una *superficie* S es un espacio topológico de Hausdorff tal que todo punto $s \in S$ tiene una vecindad abierta que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{C} . De esta forma S tiene propiedades topológicas equivalentes a las del plano. Toda superficie puede cubrirse con una familia de abiertos U_i tal que para cada i , existe un homeomorfismo $\Phi_i : U_i \rightarrow W_i$ donde W_i es un abierto de \mathbb{C} . Al conjunto $\mathcal{A} = \{(U_i, \Phi_i)\}$ le llamamos un *atlas* para S . Si $s \in U_i$ entonces (U_i, Φ_i) es una *carta en* s y $z_i = \Phi_i(s)$ es una *coordenada local* para s . De forma natural expresamos el cambio de coordenadas como $z_i = (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(z_j)$ para s donde $(U_i, \Phi_i), (U_j, \Phi_j)$ son cartas para $s \in S$.

Las funciones

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j)$$

se llaman las *funciones de cambio de coordenadas* y están definidas siempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Por último, un atlas \mathcal{A} se llama *analítico* si todas las funciones de cambio de coordenadas son analíticas. A una superficie que tiene un atlas analítico le llamaremos *superficie de Riemann*.

Denotaremos por $[z]$ a la órbita de z , esto es $[z] = \Gamma z = \{T(z); T \in \Gamma\}$ para Γ un grupo Fuchsiano, y por \mathcal{U}/Γ al conjunto de órbitas. Como siempre \mathcal{U}/Γ es un espacio cociente con la siguiente identificación: u y $v \in \mathcal{U}$ son equivalentes si existe $T \in \Gamma$ con $T(u) = v$, es decir si u y v pertenecen a la misma órbita. Tenemos también la proyección canónica $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$ definida por $\pi(z) = [z]$. A \mathcal{U}/Γ se le puede dar la siguiente topología: $V \subset \mathcal{U}/\Gamma$ es abierto si $\pi^{-1}(V) = \{z \in \mathcal{U}; [z] \in V\}$ es abierto en \mathcal{U} , con esta topología es claro que π es continua y abierta.

4.45. Teorema. *Sea Γ un grupo Fuchsiano. Entonces \mathcal{U}/Γ es una superficie de Riemann conexa y $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$ es holomorfa.*

Demostración:

Sean $w \in \mathcal{U}$ y $\delta(w) = \min\{\rho(w, g(w)) : g \in \Gamma \setminus id\}$. Como la órbita de todo punto es discreta, $\delta(w) > 0$. Sea W_w el disco hiperbólico de centro en w y radio $\frac{\delta(w)}{2}$, entonces por la acción propiamente discontinua de Γ en \mathcal{U} tenemos que si para alguna $T \in \Gamma$ se tiene $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$ entonces T deberá fijar a w ; además para cualquier isometría $S \in \Gamma$ y para $y = S(w)$ es claro que $W_y = S(W_w)$. Entonces, si $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$ para alguna $T \in \Gamma$, tenemos que $T(w) = w$, por lo que $T = id$ o bien w es punto fijo elíptico de Γ y entonces W_w no contiene puntos fijos elípticos diferentes de w . Consideremos ahora π_w la restricción de π a W_w . Como π es continua y W_w es abierto, π_w es continua y abierta. Sea $m(w)$ el orden del estabilizador de $w \in \Gamma$, entonces, si w no es punto fijo elíptico de Γ , $m(w) = 1$. Definamos ahora la función

$$f_w : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f_w(z) = \left(\frac{z - w}{z - \bar{w}} \right)^{m(w)}$$

que es analítica y abierta y cumple $f_w(w) = 0$, por lo que $f_w(W_w)$ es un abierto del disco unitario y contiene al 0.

Sea T una transformación elíptica con punto fijo $w \in \mathcal{U}$ y sea $\phi(z) = \frac{1}{2} \frac{z-q}{z-\bar{q}} \in PSL(2, \mathbb{C})$. Entonces $\phi T \phi^{-1}$ es una transformación elíptica que fija 0 e ∞ , luego $\phi T \phi^{-1} = U_\alpha(z) = \alpha z$ con $\alpha^{m(w)} = 1$, de donde

$$\frac{T(z) - w}{T(z) - \bar{w}} = \alpha \frac{z - w}{z - \bar{w}} \quad \text{con } \alpha^{m(w)} = 1.$$

Observemos que la igualdad $f_w(z_1) = f_w(z_2)$ se da si y sólo si

$$\frac{z_2 - w}{z_2 - \bar{w}} = \alpha \frac{z_1 - w}{z_1 - \bar{w}} = \frac{V(z_1) - w}{V(z_1) - \bar{w}}$$

con $V(w) = w$ es decir, cuando $V(z_1) = z_2$.

Construiremos ahora el atlas para \mathcal{U}/Γ . Para cada $w \in \mathcal{U}$ sea W_w el disco hiperbólico de centro w y radio $\frac{\delta(w)}{2}$. Proponemos como las cartas del atlas a $\{\pi_w(W_w), \Phi_w = f_w \circ \pi_w^{-1}\}$. Los conjuntos $\pi_w(W_w)$ son abiertos y sólo falta ver que las funciones $\phi_w : \pi(W_w) \rightarrow f_w(W_w)$ son homeomorfismos para cada $w \in \mathcal{U}$. Si suponemos que w es un punto fijo elíptico de Γ y $T \in \Gamma$ tal que $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$ entonces $T(w) = w$ luego $\pi_w(z_1) = \pi_w(z_2)$, que ocurre si y sólo si $z_2 = V_1(z_1)$ para algún elemento $V_1 \in \Gamma$ con $V_1(w) = w$, que equivale a $F_w(z_1) = f_w(z_2)$, de donde se tiene que la función $\Phi_w = f_w \pi_w^{-1}$ está bien definida ya que $\Phi_w[z] = f_w \pi_w^{-1}[z] = f_w(z)$. Veremos ahora que Φ_w es inyectiva. Si $\Phi_w[z_1] = \Phi_w[z_2]$, entonces $f_w(z_1) = f_w(z_2)$, es decir, $z_1 = V_1(z_2)$ con $V_1 \in \Gamma$ que fija a w un elemento elíptico, entonces $[z_2] = [V_1(z_1)] = [z_1]$ de donde Φ_w es inyectiva. Además, como π_w y f_w son abiertas y continuas, tenemos que $\Phi_w : \pi_w(W_w) \rightarrow f_w(W_w)$ es un homeomorfismo. Si w no es un punto fijo elíptico tenemos que $\pi_w^{-1} : \pi_w(W_w) \rightarrow W_w$ es un homeomorfismo ya que la restricción π_w es inyectiva, pues si $x, y \in W_w$ con $\Gamma x = \Gamma y$ implica que existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $\sigma(x) = y$, por lo que $\sigma(W_w) \cap W_w \neq \emptyset$ entonces $\sigma(w) = w$ y esto ocurre si y sólo si $\sigma = id$. Ahora, como $m(w) = 1$ entonces f_w es también un homeomorfismo, luego la composición Φ_w lo es también. Así, \mathcal{U}/Γ es una superficie y $\{\pi_w(W_w), \Phi_w\}$ es un atlas definido en \mathcal{U}/Γ .

Para ver que es analítico, supongamos que $\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r) \neq \emptyset$ y consideremos el homeomorfismo

$$\Phi_r \Phi_q^{-1} : \Phi_q(\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r)) \rightarrow \Phi_r(\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r))$$

$$\Phi_r \Phi_q^{-1} = (f_r \pi_r^{-1} \pi_q) f_q^{-1}$$

entonces

$$(f_r \pi_r^{-1} \pi_q)(z) = f_r \pi_r^{-1}[z] = f_r T(z)$$

para alguna $T \in \Gamma$, así $f_r \pi_r^{-1} \pi_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ es analítica. Ahora, f_q^{-1} es analítica excepto en 0 cuando $m(q) > 1$. Entonces la función es analítica excepto en un punto (el 0) que así resulta una singularidad removible, por lo que también es analítica en este punto. \square

Una *superficie cubriente* de una superficie S es una pareja (\tilde{S}, p) donde \tilde{S} es una superficie y p es una función continua de \tilde{S} en S con la siguiente propiedad: cada $s \in S$ tiene un vecindad abierta U homeomorfa a \mathbb{D} , tal que cada componente conexa V de $p^{-1}(U)$ es transformada homeomórficamente por p en U . A p lo llamamos una *transformación cubriente*. Decimos que (\tilde{S}, p) es un *espacio cubriente* de S si para cada $s \in S$ el grupo G de transformaciones cubrientes actúa transitivamente en la fibra $p^{-1}(s)$.

Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un homeomorfismo holomorfo entre superficies de Riemann, también lo es su inversa, así que las coordenadas locales de S_1 y S_2 son transformadas conformemente vía las funciones de cambio de coordenadas. En éste caso decimos que f es un *equivalencia conforme* entre superficies de Riemann y que S_1 y S_2 son *conformemente equivalentes*.

El espacio cubriente universal de una superficie de Riemann R que no sea homeomorfa a la esfera, el plano o el toro es \mathcal{U} y en este caso $R = \mathcal{U}/\Lambda$ donde Λ es un grupo de automorfismos de \mathcal{U} que actúa propiamente discontinuamente y sin puntos fijos en \mathcal{U} , luego Λ deberá ser un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos. Si incluimos a grupos Fuchsianos Λ que contienen elementos elípticos, entonces toda superficie de Riemann puede ser representada como el espacio cociente de \mathcal{U} y un grupo Fuchsiano. Por ejemplo, el espacio cociente de un grupo triangular es una esfera, y toda superficie de Riemann homeomorfa a la esfera, es conformemente equivalente a \mathcal{U}/Γ donde Γ es un grupo triangular.

4.46. Teorema. Sean Γ_1, Γ_2 dos grupos Fuchsianos sin elementos elípticos. Entonces las superficies \mathcal{U}/Γ_1 y \mathcal{U}/Γ_2 son conformemente equivalentes si y sólo si existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T\Gamma_1 T^{-1} = \Gamma_2$.

Demostración:

Como Γ_1 y Γ_2 actúan sin puntos fijos, resulta que \mathcal{U} es un espacio

cubriente universal de \mathcal{U}/Γ_1 y \mathcal{U}/Γ_2 , luego si $g : \mathcal{U}/\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es un homeomorfismo conforme, entonces existe $\tilde{g} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ automorfismo que hace conmutativo al siguiente diagrama, donde $\pi_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma_i$ son las proyecciones naturales:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{U} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{U}/\Gamma_1 & \xrightarrow{g} & \mathcal{U}/\Gamma_2 \end{array}$$

Como $\tilde{g} \in \text{Aut}(\mathcal{U}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, denotemos por T a tal \tilde{g} , así el hecho de que conmute el digrama, se reescribe como $g([z]_{\Gamma_1}) = [Tz]_{\Gamma_2}$.

Ahora si $S \in \Gamma_1$, tenemos que $[z]_{\Gamma_1} = [Sz]_{\Gamma_1}$ y entonces $[TS(z)]_{\Gamma_2} = [T(z)]_{\Gamma_2}$, por lo que existe $V \in \Gamma_2$ tal que: $TS(z) = VT(z) \quad \forall z \in \mathcal{U}$ y entonces $TST^{-1} = V \in \Gamma_2$, así $T\Gamma_1T^{-1} \subseteq \Gamma_2$, un argumento análogo al anterior usando $g^{-1}([z]_{\Gamma_2}) = [T^{-1}(z)]_{\Gamma_1}$ muestra que $T^{-1}\Gamma_2T \subseteq \Gamma_1$, luego $T\Gamma_1T^{-1} = \Gamma_2$.

Recíprocamente, si $T\Gamma_1T^{-1} = \Gamma_2$ entonces la función $h : \mathcal{U}/\Gamma_1 \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma_2$ definida por $h([z]_{\Gamma_1}) = [Tz]_{\Gamma_2}$ es un homeomorfismo conforme entre \mathcal{U}/Γ_1 y \mathcal{U}/Γ_2 .

□

El teorema anterior es falso para grupos Fuchsianos arbitrarios, por ejemplo para dos grupos triangulares con periodos diferentes sucede que estos grupos no son isomorfos y entonces no son conjugados en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Sin embargo el espacio cociente de cada grupo es la esfera. La afirmación recíproca que dice que los espacios cocientes de grupos Fuchsianos conjugados son superficies de Riemann conformemente equivalentes es siempre cierta.

4.47. Teorema. *Para un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos Γ se tiene que $\text{Aut}(\mathcal{U}/\Gamma) \simeq N(\Gamma)/\Gamma$ donde $N(\Gamma)$ es el normalizador de Γ en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Demostración:

Al igual que en el teorema anterior tenemos que si $f : \mathcal{U}/\Gamma \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$ es un automorfismo de \mathcal{U}/Γ entonces $f([z]_{\Gamma}) = [Tz]_{\Gamma}$ para alguna $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, y entonces $TTT^{-1} = \Gamma$, por lo que $T \in N(\Gamma)$.

Recíprocamente dado $T \in N(\Gamma)$, la función $f : \mathcal{U}/\Gamma \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$ dada por $f([z]_{\Gamma}) = [Tz]_{\Gamma}$ es un automorfismo de \mathcal{U}/Γ .

Luego $\varphi : N(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{U}/\Gamma)$ dada por $\varphi(T) = f$ es un homomorfismo de grupos, que es suprayectivo y como $\varphi(T) = id$ si y sólo si $T \in \Gamma$, tenemos que su núcleo es Γ , luego por el primer teorema de isomorfismos tenemos que $\text{Aut}(\mathcal{U}/\Gamma) \simeq N(\Gamma)/\Gamma$. \square

Sea F una región de Dirichlet de un grupo Fuchsiano Γ . Como las aristas de F son apareadas por elementos de Γ nos preguntamos si podemos obtener el espacio cociente \mathcal{U}/Γ , identificando los lados que se aparean en la misma forma en que se obtiene el toro al identificar los lados opuestos de un paralelogramo. Como los únicos puntos de F que se identifican bajo Γ son los que corresponden a puntos de lados apareados, el espacio que se obtiene por identificar lados que se aparean es F/Γ .

4.48. Teorema. *Si F es una región de Dirichlet de un grupo Fuchsiano Γ entonces F/Γ es homeomorfa a \mathcal{U}/Γ .*

Demostración:

Sea $i : F \hookrightarrow \mathcal{U}$ la función inclusión y $\psi : F \rightarrow F/\Gamma$, $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$ las proyecciones naturales. Definamos $\theta : F/\Gamma \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$, la función que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & \mathcal{U} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \pi \\ F/\Gamma & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{U}/\Gamma \end{array}$$

Esto es, si $z \in F$ entonces $\theta(\psi(z)) = \pi[z]$.

Si $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ entonces $z_2 = S(z_1)$ para alguna $S \in \Gamma$ que aparee lados de F , además $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ y entonces θ está bien definida y es biyectiva. Veamos que ella es continua y abierta.

Si $V \subset \mathcal{U}/\Gamma$ es un abierto, tenemos que $\psi^{-1}(\theta^{-1}(V)) = F \cap \pi^{-1}(V)$ es abierto en F luego $\theta^{-1}(V)$ es abierto en F/Γ y entonces θ es continua. Veamos ahora que θ es abierta.

Sea $A \subset F/\Gamma$ un abierto y sea $\langle z \rangle = \psi(z) \in A$, como F es localmente finita se tiene que la fibra $F^{-1}(\langle z \rangle)$ es finita, digamos que: $\psi^{-1}(\langle z \rangle) = \{z = T_0(z), T_1(z), \dots, T_s(z)\}$.

Por la forma en que se define la topología en F/Γ , $\psi^{-1}(A) = \tilde{A}$ es un abierto relativo en F , luego existe un disco hiperbólico B con centro

en z tal que $T_j(B) \cap F \subset \tilde{A}$ y $T(B) \cap F \neq \phi$ lo que implica que $T = T_j$ para alguna $j = 1, \dots, s$ (*).

Ahora $\theta(\langle z \rangle) = \pi(z) \in \pi(B)$ y $\pi(B)$ es abierto, veamos que $\pi(B) \subset \theta(A)$, lo que mostrará que $\theta(A)$ es una vecindad abierta de $\theta(\langle z \rangle)$.

Si $[w] \in \pi(B)$ con $w \in B$, tenemos que existe $T \in \Gamma$ tal que $T(w) \in F$ por lo que $T(B) \cap F \neq \phi$ entonces por (*) $T = T_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, s\}$ luego $T_j(w) = T(w) \in T_j(B) \cap F \subset \tilde{A}$, luego

$$[w] = \pi(w) = \pi(T_j(w)) \in \pi(\tilde{A}) = \pi(i(\tilde{A})) = \theta(A).$$

□

Hemos visto que el área de una región fundamental si es finita, es un invariante numérico del grupo Γ . Como el área en el espacio cociente \mathcal{U}/Γ esta inducida por el área hiperbólica en \mathcal{U} , podemos definir el área hiperbólica de \mathcal{U}/Γ y denotarla por $\mu(\mathcal{U}/\Gamma)$ como $\mu(F)$ donde F es una región fundamental.

Si Γ tiene una región de Dirichlet compacta F , entonces F tiene un número finito de vértices y de lados y entonces su espacio cociente \mathcal{U}/Γ es compacto. En la sección 5.2 probaremos este resultado.

Veremos más adelante que si una región de Dirichlet de Γ es compacta entonces todas las regiones de Dirichlet son compactas. Si además Γ actúa en \mathcal{U} sin puntos fijos entonces \mathcal{U}/Γ es una superficie de Riemann y su grupo fundamental es isomorfo a Γ .

En muchos aspectos los grupos Fuchsianos son similares a los lattices en \mathbb{R}^2 que son grupos discretos de isometrías euclidianas que conservan orientación. Además los cocientes de estos últimos son siempre superficies compactas homeomorfas a toros, sin embargo el espacio cociente de un grupo Fuchsiano Γ que actúa en \mathcal{U} sin puntos fijos no puede ser un toro, ya que el grupo fundamental del toro es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y entonces resultaría que Γ debe ser isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y hemos visto que esto es imposible.

5 Geometría de Grupos Fuchsianos

5.1 Grupos Fuchsianos geoméricamente finitos

Sabemos que una región de Dirichlet en \mathcal{U} de un grupo Fuchsiano Γ está acotada por un número (quizás numerable) de segmentos geodésicos en \mathcal{U} y posiblemente algunos segmentos del eje real. Recordamos que los segmentos geodésicos en \mathcal{U} , del borde de la región F , se llaman los *lados* y forman la frontera de F que se denota por ∂F ; si un punto fijo elíptico de orden 2 pertenece a un segmento geodésico, incluiremos a éste punto en el conjunto de vértices de F y a los dos segmentos en que éste divide a la geodésica los veremos como dos lados. En esta sección estudiaremos los grupos que tiene reiones fundamentales con un número finito de lados. Resaltamos también que F es un subconjunto cerrado de \mathcal{U} y puede ser que no sea cerrado en $\bar{\mathcal{U}}$, llamaremos a la cerradura de F en $\bar{\mathcal{U}}$, la *cerradura euclidiana* de F y la denotamos por \bar{F} .

Definimos la *frontera euclidiana* de F por $\partial_0 F = \bar{F} \setminus F$, la cual obviamente pertenece al conjunto de puntos al infinito $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Desde luego $\partial_0 F$ puede tener una cantidad no numerable de componentes, pero sólo puede tener una cantidad numerable de componentes de longitud (euclidiana) positiva.

5.1. Definición. Un grupo Fuchsiano Γ se dirá *geoméricamente finito* si existe una región fundamental convexa de Γ con un número finito de lados.

5.2. Teorema. (de Siegel). Si Γ es un grupo Fuchsiano que tiene una región fundamental F con $\mu(F) < +\infty$ entonces Γ es geoméricamente finito.

Demostración:

Se demostrará que una región de Dirichlet $F = D_p(\Gamma)$ tiene un número finito de lados.

Como los vértices de $D_p(\Gamma)$ son aislados (esto se debe a que la región de Dirichlet es localmente finita, así que cada vértice tiene una vecindad que interseca a un número finito de lados, luego esta vecindad tiene sólo

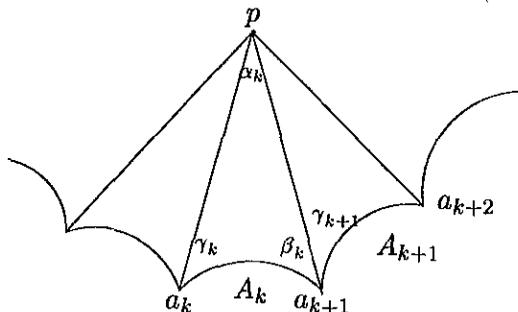


FIGURA 5.1. División de la región de Dirichlet en triángulos

un número finito de vértices), cualquier compacto $K \subset \mathcal{U}$ contiene sólo un número finito de vértices. Así, el caso cuando F es compacto está completamente resuelto pues F tendrá sólo un número finito de vértices y entonces un número finito de lados. Supongamos ahora que F no es compacto.

El ingrediente principal de la demostración es dar una estimación de la suma de los ángulos w en los vértices de la región F . Concretamente, mostraremos que:

$$\sum_w (\pi - w) \leq \mu(F) + 2\pi$$

donde la suma se toma sobre todos los vértices de F que están en \mathcal{U} .

Recordemos que la región de Dirichlet $F = D_p(\Gamma)$, es una región en forma de estrella desde p , por lo que podemos conectar todos los vértices de F al punto p por geodésicas que quedan dentro de F , y entonces F queda dividido en triángulos con un vértice común p . Sean $\dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n, \dots$ los vértices de F y $\dots A_m, A_{m+1}, \dots, A_n, \dots$ los segmentos geodésicos en ∂F que conectan a los vértices, supondremos que tales conjuntos no están acotados en ambas direcciones. (Ver figura 5.1.)

Denotemos por Δ_k al triángulo de vértices p, a_k, a_{k+1} y por A_k al lado $a_k a_{k+1}$, llamemos α_k, β_k y γ_k a sus ángulos y al ángulo entre A_k y A_{k+1} lo denotamos por ω_k , así $\omega_k = \beta_k + \gamma_{k+1}$.

Por la Fórmula de Gauss-Bonnet, tenemos que:

$$\mu(\Delta_k) = \pi - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k,$$

$$\text{Luego: } \sum_{k=m}^n \alpha_k + \sum_{k=m}^n \mu(\Delta_k) = \pi - \gamma_m - \beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k),$$

Como el lado izquierdo de esta igualdad está acotado, ya que $\sum \alpha_k \leq 2\pi$ y $\sum \mu(\Delta_k) \leq \mu(F)$, tenemos que el lado derecho también está acotado, por lo que $\sum (\pi - \omega_k)$ converge. Observemos que esta serie converge cuando $n \rightarrow \infty$, cuando $m \rightarrow -\infty$ y también cuando $n \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow -\infty$; por lo que una consecuencia de la convergencia de la serie $\sum (\pi - \omega_k)$, es que existen los siguientes límites:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = \gamma_{-\infty}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_{-\infty}$$

Ahora demostremos que: $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_{-\infty} \geq 0$.

Como sólo un número finito de segmentos $\{A_k\}$ pueden estar a una distancia finita del punto p , tenemos que $a_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Luego para un número infinito de valores k , se tiene que: $\rho(p, a_{k+1}) > \rho(p, a_k)$, para estos valores se tiene por la ley de los senos en el triángulo hiperbólico Δ_k que $\gamma_k > \beta_k$. Como $\beta_k + \gamma_k \leq \pi$, tenemos entonces que $\beta_k \leq \frac{\pi}{2}$ y entonces $\beta_{-\infty} \leq \frac{\pi}{2}$. Análogamente se puede comprobar que $\gamma_{-\infty} \leq \frac{\pi}{2}$ y entonces $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_{-\infty} \geq 0$.

Tomando los límites $m \rightarrow -\infty$ y $n \rightarrow \infty$, en la ecuación:

$$\sum_{k=m}^n \alpha_k + \sum_{k=m}^n \mu(\Delta_k) = \pi - \gamma_m - \beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k),$$

y usando que $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_{-\infty} \geq 0$, tenemos que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Delta_k) \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi - \omega_k).$$

Esta desigualdad se obtuvo bajo la suposición de que el conjunto de segmentos $\{A_k\}$ no está acotado en ambas direcciones. Podemos usar argumentos semejantes para el caso en que el conjunto de segmentos $\{A_k\}$ esté acotado en una de las direcciones. Así en cualquier caso tenemos:

$$2\pi + \mu(F) \geq \sum_{\omega} (\pi - \omega)$$

donde la suma se toma sobre todos los vértices de F que se encuentran a una distancia hiperbólica finita del punto p , es decir en \mathcal{U} .

Utilizando la estimación anterior, demostramos que el número de vértices de F en \mathcal{U} es finito. Sea $a \in F$ un vértice y sean $a_1 = a, a_2, \dots, a_n$ los vértices congruentes a a . Sea ω_i el ángulo en el vértice a_i , vimos en el teorema 4.40 que si a no es punto fijo de ninguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$, entonces $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 2\pi$ y si a es punto fijo de orden m de alguna T se tiene $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \frac{2\pi}{m}$.

Como cada $\omega_i < \pi$, tenemos en el primer caso que $n \geq 3$ y entonces:

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \omega_i) = (n - 2)\pi > \pi.$$

Teniendo en cuenta esta estimación y la relación anterior concluimos que el número de ciclos donde a no es punto fijo de alguna $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ es finito.

Para un ciclo de un punto fijo a de orden m , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \omega_i) = \left(n - \frac{2}{m}\right)\pi > \frac{\pi}{3}$$

por lo que el número de ciclos elípticos de orden ≥ 3 también es finito. Finalmente un punto fijo elíptico de orden 2 pertenece a un segmento de ∂F con extremos 2 vértices que no son vértices elípticos de orden 2, luego el número de vértices elípticos de orden 2 es también finito. En resumen hemos visto que hay solo un número finito de vértices de F en \mathcal{U} .

Resta mostrar que el número de vértices de F en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es también finito. Tomemos N de estos vértices en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, b_1, \dots, b_N . Consideremos el polígono F_1 acotado por un número finito de geodésicas contenidas dentro de F y tales que sus vértices en el infinito sean b_1, \dots, b_N . Un argumento similar al de la demostración del caso donde los vértices están en \mathcal{U} , muestra que el área de F_1 satisface: $2\pi + \mu(F_1) \geq \sum_{\omega} (\pi - \omega)$, donde ω son los ángulos en los vértices de F_1 y la suma sobre todos los vértices de F_1 . Como $\omega = 0$ para los vértices en el infinito, tenemos que:

$$\pi N \leq 2\pi + \mu(F_1) \leq 2\pi + \mu(F)$$

luego N está acotada y ahora el teorema está completo. □

5.2 Grupos Fuchsianos cocompactos.

En el capítulo cuatro vimos que el espacio cociente \mathcal{U}/Γ es una superficie de Riemann. Veremos ahora cuáles son las condiciones que se requieren para que esta superficie sea compacta.

5.3. Definición. Un grupo Fuchsiano es *cocompacto* si el espacio cociente \mathcal{U}/Γ es compacto.

5.4. Teorema. *Si un grupo Fuchsiano Γ tiene una región de Dirichlet compacta, entonces Γ no contiene elementos parabólicos.*

Demostración:

Supongamos que F es una región de Dirichlet compacta del grupo Γ . Sea $\eta(z) = \inf \{ \rho(z, T(z)) ; T \in \Gamma \setminus \{id\}, T \text{ no elíptica} \}$.

Como en un disco hiperbólico cerrado $B_\varepsilon(z)$ sólo puede haber un número finito de $T(z)$, se tiene que $\eta(z) > 0$. Para cada $T \in \Gamma$ la función $\rho(z, T(z))$ es continua en z , luego $\eta(z)$ es una función continua de z .

Por ser F compacto existe $z_0 \in F$ tal que: $\eta = \inf \{ \eta(z) ; z \in F \} = \eta(z_0) > 0$.

Pero como F es una región fundamental, dado $z \in \mathcal{U}$, existe $S \in \Gamma$ tal que $\omega = S(z) \in F$, luego para toda $T_0 \in \Gamma \setminus \{id\}$ no es elíptica, $\rho(z, T_0(z)) = \rho(S(z), ST_0S^{-1}(\omega)) \geq \eta$, así,

$$\inf \{ \rho(z, T_0(z)) ; z \in \mathcal{U}, T_0 \text{ no elíptica} \} = \eta > 0.$$

Ahora supongamos que Γ contiene un elemento parabólico T_1 . Para cualquier $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, el grupo conjugado $\Gamma_1 = T\Gamma T^{-1}$ tiene a $T(F)$ como región de Dirichlet, que es también compacta. Luego por conjugación de Γ en $PSL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que $T_1(z)$ o $T_1^{-1}(z)$ es la transformación $z \mapsto z+1$. Recordemos que $sh^{2\frac{1}{2}}\rho(z, w) = \frac{|z-w|^2}{4\Im z \Im w}$, así tenemos que: $sh^{2\frac{1}{2}}\rho(z, z+1) = \frac{1}{4\Im^2 z} \rightarrow 0$ si $\Im z \rightarrow \infty$ lo que contradice el hecho de que $\eta > 0$. □

5.5. Teorema. *Sea F una región de Dirichlet para Γ un grupo Fuchsiano. Entonces, \mathcal{U}/Γ es compacta si y sólo si F es compacto.*

Demostración:

Si F es compacto, F/Γ es compacto por la continuidad de la proyección natural. Por el teorema 4.48, \mathcal{U}/Γ es compacto. Supongamos ahora que \mathcal{U}/Γ es compacto. Si $[z] \in \mathcal{U}/\Gamma$, por ser F localmente finito, existen solo un número finito de puntos $z' \in F$ tales que $\Pi(z') = [z]$ (donde $\Pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$). Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos distintos de F , entonces para ver que F es compacto basta ver que $\{z_n\}$ converge en F . La sucesión de órbitas $[z_1], [z_2], \dots$ converge a un punto $[l] \in \mathcal{U}/\Gamma$; y existen sólo un número finito de preimágenes de $[l]$ en F digamos, l_1, \dots, l_r . Afirmamos que al menos una l_j es límite de la sucesión z_n . Supongamos que no, entonces cada l_j tiene una vecindad V_j que contiene solamente un número finito de puntos de la sucesión z_n , pero como los l_j pertenecen a la misma Γ -órbita, entonces cada V_j contiene un número finito de puntos de la forma $S(z_j)$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^r \Pi(V_i)$ es una vecindad abierta de $[l]$ que contiene únicamente a un número finito de puntos de la sucesión $\{[z_i]\}$, lo que contradice el hecho de que $\{[z_i]\} \rightarrow [l]$.

□

Sea $p \in \mathcal{U}$ y $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U}$ un rayo geodésico que sale de p . Sea $B_t(p) = \{z \in \mathcal{U}; \rho(z, \gamma(t)) \leq \rho(p, \gamma(t))\}$. Tomando el límite $t \rightarrow \infty$, $B_t(p)$ se aproxima a un círculo euclidiano que pasa por p y por el extremo de la geodésica $\gamma(t)$ correspondiente a $t = \infty$ y el círculo es ortogonal a la geodésica $\gamma(t)$.

Como el rayo geodésico por p está determinado por su dirección \bar{v} el círculo límite depende de p y \bar{v} . A éste círculo le llamamos un *horociclo* y lo denotaremos por $w(p, \bar{v})$. (Ver la figura 5.2, a). Notemos que los horociclos no son círculos hiperbólicos, aunque podemos considerarlos como círculos hiperbólicos de radio infinito.

Sea $s \in \mathbb{R}$. Un círculo euclidiano tangente al eje real en s , es un horociclo de alguna geodésica en \mathcal{U} representada por un semicírculo euclidiano que pasa por s (y ortogonal desde luego al eje real). (Ver la figura 5.2, b)).

Si $s = \infty$, las geodésicas por ∞ son semilíneas verticales y los horociclos son líneas rectas euclidianas paralelas al eje real. (Ver la figura 5.2, c)).

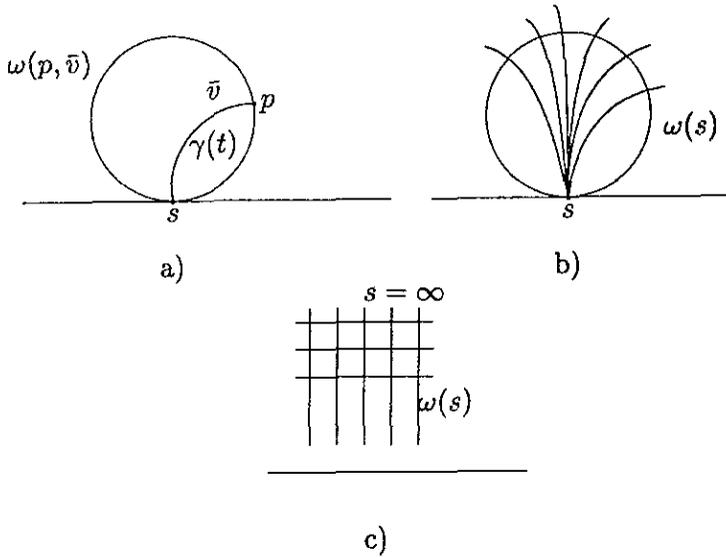


FIGURA 5.2.

5.6. Teorema. *Sea $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ que fija a un punto $s \in \mathbb{R}$. Entonces T es parabólica si y sólo si para cada horociclo $w(s)$ que pasa por s , se tiene que $T(w(s)) = w(s)$.*

Demostración:

Supongamos primero que T es parabólica, sea $R \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $R(s) = \infty$, luego $S = RTR^{-1}$ es una parabólica que fija ∞ y entonces $S(z) = z + \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que S transforma cada línea horizontal (horociclo para s) en sí misma. Luego, como las transformaciones de Möbius son conformes y transforman círculos y líneas en círculos y líneas, tenemos que los horociclos para T son transformados por T en sí mismos.

Recíprocamente, supongamos que T transforma cada horociclo $w(s)$ en sí mismo. Tomando $R \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $R(s) = \infty$, se tiene que $S = RTR^{-1}$ tiene a ∞ como punto fijo, luego $S(z) = az + b$. Como los horociclos para S son ahora líneas horizontales que quedan invariantes bajo S tenemos que $a = 1$, por lo que S es parabólica y entonces T también es parabólica.

□

5.7. Teorema. *Supongamos que Γ tiene una región de Dirichlet no-compacta F con $\mu(F) < \infty$. Entonces cada vértice de F en el infinito es un punto fijo de alguna parábola $T \in \Gamma$.*

Demostración:

Sea b un vértice en el infinito de la región F . Consideremos todas las imágenes $S(F)$ de F con $S \in \Gamma$ tales que b es un vértice de $S(F)$. Claramente hay una infinidad de ellas. Sean $b = b_1, b_2, \dots, b_n$ los vértices de F congruentes a b (es decir $b_k = T_k(b)$ $k = 1, \dots, n$). Hemos visto que el número de tales vértices es finito. Una imagen de F en la cual b es un vértice, tiene la forma $TT_i^{-1}(F)$ $i = 1, \dots, n$ donde T es un elemento de Γ que fija al punto b . Dado que hay una infinidad de tales imágenes $TT_i^{-1}(F)$ y como T_i pertenece a un conjunto finito de elementos, concluimos que hay una infinidad de $T \in \Gamma$ que fijan b .

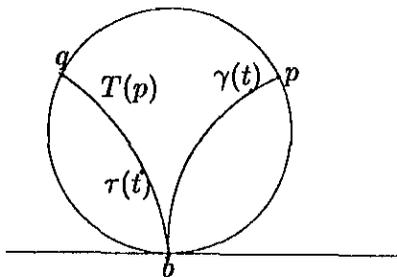


FIGURA 5.3.

Demostraremos que cualquiera de estas T es parabólica. Supongamos que T no es parabólica. Consideremos la geodésica $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq \infty$ parametrizada por longitud de arco que conecta a los puntos p y b , ($\gamma(0) = p$, $\gamma(\infty) = b$). (Ver la figura 5.3).

Dado que F es una región de Dirichlet, tenemos que $\gamma(t) \subset F$ y $\rho(p, \gamma(t)) \leq \rho(T(p), \gamma(t))$ para $0 \leq t \leq \infty$.

Consideremos el horociclo $w(b)$ que contiene al punto p . Como estamos suponiendo que T no es parabólica, $T(p)$ no pertenece a $w(b)$, podemos suponer que $T(p)$ está dentro de $w(p)$, (en caso contrario $T^{-1}(p)$ lo está y trabajamos con T^{-1} en lugar de T).

Sea $\tau(t)$ la geodésica que pasa por $T(p)$ y b . Sea q el segundo punto de intersección de $w(b)$ y $\tau(t)$. Podemos suponer que $\tau(t)$ está para-

metrizada por longitud de arco y que $\tau(0) = q$. Notemos primero que $\rho(\gamma(t), \tau(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para ver esto conjugamos a Γ de manera que $b = \infty$, $\gamma(t) = a + it$, $\tau(t) = c + it$, entonces

$$\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \rho(\gamma(t), \tau(t)) \right] = \frac{|a - c|}{2t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} t = \rho(p, \gamma(t)) &= \rho(q, \tau(t)) = \rho(q, T(p)) + \rho(T(p), \tau(t)) \\ &\geq \rho(q, T(p)) + \rho(T(p), \gamma(t)) - \rho(\gamma(t), \tau(t)) \end{aligned}$$

y entonces para t suficientemente grande, $\rho(p, \gamma(t)) > \rho(T(p), \gamma(t))$, lo cual es una contradicción. □

5.3 La signatura de un grupo Fuchsiano.

Sean $[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ un ciclo de vértices de una región fundamental F de Γ y $\Gamma_{u_j} = \{g \in \Gamma : g(u_j) = u_j\}$ los estabilizadores de los vértices que, como hemos visto (en el teorema 3.25) son grupos cíclicos finitos. Los estabilizadores Γ_{u_j} son conjugados; en efecto, si $u_j = T(u_i)$ y $g(u_i) = u_i$, tenemos $TgT^{-1}(u_j) = u_j$ luego $\Gamma_{u_j} = T\Gamma_{u_i}T^{-1}$. Es claro entonces que todos los estabilizadores tienen el mismo orden, al que llamamos el orden del ciclo.

5.8. Teorema. *Sea Γ un grupo Fuchsiano y F una región de Dirichlet para Γ . Sea $[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ un ciclo de vértices de F y sean $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t\}$ los ángulos internos en los vértices. Sea m el orden del ciclo $[u]$. Entonces,*

$$m(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_t) = 2\pi.$$

Demostración:

Sea $[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ un ciclo y $\Gamma_{u_1} = \{id, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ el estabilizador de u_1 . Las regiones $g^j(F)$ para $0 \leq j \leq m-1$ tienen a u_1 como un vértice común, y el ángulo en u_1 es θ_1 . Sean $T_1 = id, T_2, \dots, T_t \in \Gamma$ las transformaciones de Γ que cumplen $T_j(u_j) = u_1$. $T_j(F)$ tiene a u_1 como vértice y el ángulo de $T_j(F)$ en u_1 es θ_j . Queremos ver cuáles otras imágenes de F bajo Γ tienen a u_1 como vértice: u_1 es vértice

de la región $h(F)$ si y sólo si $h^{-1}(u_1) \in F$ es vértice de F , es decir, $h^{-1}(u_1) = u_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Entonces $h^{-1}(u_1) = T_j^{-1}(u_1)$, de donde hT_j^{-1} fija a u_1 , es decir, $hT_j^{-1} \in \Gamma_{u_1}$. Concluimos que las regiones $h(F)$ que tienen a u_1 como vértice son únicamente las regiones que son imágenes de F bajo transformaciones del conjunto $\Gamma_{u_1}T_1 \cup \Gamma_{u_1}T_2 \cup \dots \cup \Gamma_{u_1}T_t$ que son exactamente mt regiones alrededor de u_1 y que cubren una vecindad alrededor de éste vértice en forma ajena: en efecto, si $g^rT_k(F) = g^qT_l(F)$ entonces u_1 es al mismo tiempo, imagen de los vértices u_k y u_l y ésto ocurre solo cuando $k = l$, en cuyo caso $r = q$. Así, las regiones son ajenas y se tiene $2\pi = m(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_t)$ como deseábamos. \square

Si Γ es un grupo Fuchsiano con una región de Dirichlet F de manera que \mathcal{U}/Γ es compacto, entonces por el teorema 5.2, F es compacto, luego tiene un número finito de lados y vértices. Un número finito de vértices solo podrá generar un número finito de ciclos $[u_1], [u_2], \dots, [u_r]$ digamos de periodos m_1, m_2, \dots, m_r . Por otro lado, al ser la superficie de Riemann \mathcal{U}/Γ compacta, es homeomorfa a un toro con asas. Con estas observaciones damos la siguiente:

5.9. Definición. Sea Γ un grupo Fuchsiano y F una región de Dirichlet para Γ tal que \mathcal{U}/Γ es compacto; sean m_1, \dots, m_r los periodos de Γ y g el género de la superficie \mathcal{U}/Γ . Al conjunto $(g, m_1, m_2, \dots, m_r)$ lo llamamos la *signatura* de Γ .

5.10. Teorema. *Sea*

Sea $(g, m_1, m_2, \dots, m_r)$ la signature de un grupo Fuchsiano Γ y F una región fundamental de Γ con $\mu(\partial F) = 0$, entonces

$$\mu(F) = 2\pi \left\{ 2(g-1) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right\}$$

Demostración:

Podemos suponer (por el teorema 4.4) que F es una región de Dirichlet. La signatura $(g, m_1, m_2, \dots, m_r)$ nos dice que F tiene r ciclos (elípticos) de vértices y por el teorema 5.8, la suma de los ángulos en los vértices es igual a $2\pi \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i}$. Si además consideramos los vértices no elípticos cuyo estabilizador es (como se vió en el Capítulo 4) el único elemento

$\{id\}$ y existen s clases de conjugación de estos vértices, entonces la suma de los ángulos en los vértices no elípticos es $2\pi s$. Por lo tanto, la suma de los ángulos de F es igual a $2\pi \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} + s \right\}$. Para formar la superficie \mathcal{U}/Γ , los lados de F son apareados (ver la sección 4.6.2) y los vértices se identifican. Si hay n de tales apareamientos, entonces las imágenes de los vértices, las aristas y el interior de F en \mathcal{U}/Γ dan una descomposición de la superficie en $r+s$ vértices, n aristas, y 1 cara. Por la fórmula de Euler - Poincaré ¹ tenemos $2 - 2g = (r+s) - n + 1$. Por otro lado, como F tiene un número finito de vértices, es un polígono en forma de estrella con $2n$ lados. Luego, por el Teorema de Gauss-Bonnet tenemos

$$\begin{aligned} \mu(F) &= (2n - 2)\pi - 2\pi \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} + s \right\} \\ &= (4g - 4 + 2r + 2s)\pi - 2\pi \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} - 2\pi s \\ &= 2\pi \left\{ (2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Un hecho sorprendente es que el recíproco del teorema anterior es cierto. No es fácil de demostrar, pero damos un bosquejo de la prueba:

5.11. Teorema. (de Poincaré). Si $g \geq 0$, $r \geq 0$, $m_i \geq 2$ ($1 \leq i \leq r$) son enteros y si

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0,$$

entonces existe un grupo Fuchsiano con signatura $(g; m_1, m_2, \dots, m_r)$.

Demostración:

Trabajaremos en el modelo del disco. Partiendo del origen, tracemos $4g+r$ radios con el mismo ángulo entre cada par de radios consecutivos. Sea $0 < t < 1$ y elijamos puntos sobre los radios a distancia hiperbólica t desde 0.

¹Para una superficie cerrada S de género g , dividida en F caras, con V vértices y E aristas se tiene $V - E + F = 2 - 2g = \chi(S)$. Al número $\chi(S)$ se le conoce como característica de Euler de la superficie.

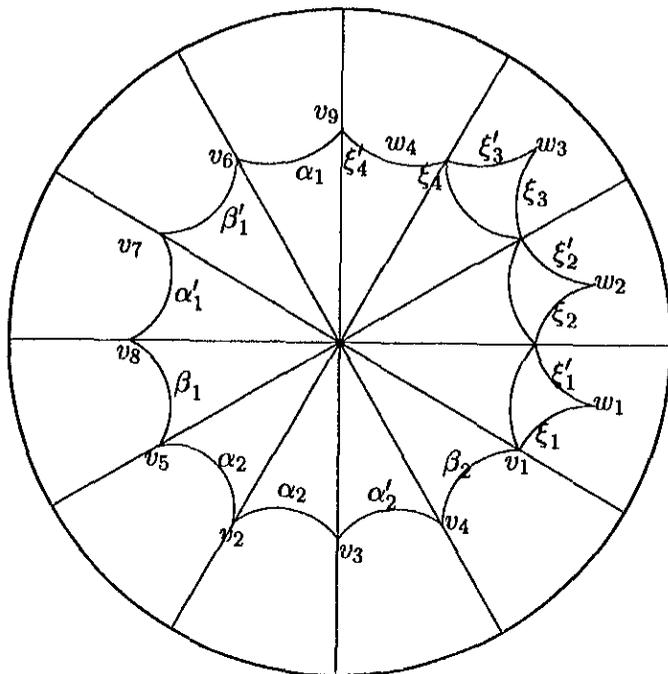


FIGURA 5.4. Polígono $M(t)$ para $g = 2, r = 4$.

Unamos estos puntos con h-segmentos para formar un polígono hiperbólico $M(t)$. Sobre los primeros r lados tracemos triángulos hiperbólicos isósceles con ángulos entre los lados iguales de medidas $\frac{2\pi}{m_1}, \frac{2\pi}{m_2}, \dots, \frac{2\pi}{m_r}$. Uniendo estos triángulos con $M(t)$ obtenemos un polígono hiperbólico $N(t)$ en forma de estrella, con $4g + 2r$ radios.

Nombremos a los lados $\alpha_1, \beta'_1, \alpha'_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta'_g, \alpha'_g, \beta_g, \xi_1, \xi'_1, \dots, \xi_r, \xi'_r$ y orientémoslos según se ve en la figura 5.4. De ésta forma se cumple que $\mu(N(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, y $\mu(N(t)) \rightarrow (4g + 2r - 2)\pi - \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i}$ cuando $t \rightarrow 1$. Entonces, por el teorema del valor intermedio y por la continuidad de $\mu(N(t))$ se tiene, para alguna t_0 entre 0 y 1 que el área

$$\text{de } N(t_0) \text{ es exactamente } 2\pi \left\{ (2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right\}. (*)$$

Por construcción, α_i y α'_i tienen la misma longitud hiperbólica, así

como β_j y β'_j y también ξ_k y ξ'_k , luego existen isometrías hiperbólicas A_i, B_j y X_k que cumplen $A_i(\alpha'_i) = \alpha_i$, $B_j(\beta'_j) = \beta_j$ y $X_k(\xi'_k) = \xi_k$. Calcularemos ahora las clases de congruencia de los vértices. Nombremos al punto inicial de β_g el vértice v_1 ; éste es congruente, vía B_1^{-1} , al punto final de β'_g , que será v_2 ; a su vez éste es el punto final de α_g que es congruente, vía A_g^{-1} , al punto final de α'_g al que llamaremos v_3 . De nuevo, éste es el extremo final de β'_g , cuya imagen bajo B_g es el punto inicial de α'_g al que llamaremos v_4 que es congruente bajo A_g , al punto inicial de β_{g-1} . Continuando este proceso vemos que todos los vértices del polígono $M(t_0)$ son congruentes. Aún más, tenemos que $X_1 X_2 \dots X_r A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}(v_1) = v_1$.

Los vértices restantes w_1, \dots, w_r forman r conjuntos congruentes con un elemento cada uno. Sea S la suma de los ángulos en los vértices congruentes v_1, \dots, v_{4g+r} . El área de $M(t_0)$ es $\pi(4g+r-2) - \sum$ (ángulos) por la fórmula de Gauss-Bonnet, y también es igual a (*), de donde concluimos que $S = 2\pi$. Sea $\Gamma = \langle A_i, B_j, X_k \rangle$. Este grupo satisface las condiciones del teorema: en efecto, hemos visto que la suma de los ángulos en los vértices es 2π , y el ángulo en w_k es $\frac{2\pi}{m_k}$ para $k = 1, 2, \dots, r$. Puede verse también ² que las imágenes bajo Γ de $N(t_0)$ cubren a \mathbb{D} sin traslapes, luego $N(t_0)$ es una región fundamental para Γ , así que la Γ -órbita de cada punto es un conjunto discreto. Por el Corolario 3.12, Γ es un grupo de isometrías de que actúa propiamente discontinuamente en \mathbb{D} (o bien un grupo Fuchsiano en \mathcal{U} a través de la transformación de Cayley).

El espacio cociente \mathbb{D}/Γ se descompone en $(r+1)$ vértices (que corresponden a los $(r+1)$ conjuntos congruentes de vértices de $N(t_0)$), $(2g+r)$ aristas y una cara. Por la fórmula de Euler-Poincaré, el género h de la superficie \mathbb{D}/Γ satisface $2 - 2h = (r+1) - (2g+r) + 1 = 2 - 2g$, y entonces, $h = g$. Hay r ciclos elípticos: $\{w_1\}, \{w_2\}, \dots, \{w_r\}$ cuyos estabilizadores tienen órdenes m_1, m_2, \dots, m_r , por lo tanto, la signatura de Γ es $(g; m_1, m_2, \dots, m_r)$. □

Si $r = 0$ se tiene el siguiente

²Magnus, W. 1974. *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*, pg.81

5.12. Corolario. *Para todo entero $g > 1$ existe un grupo Fuchsiano que actúa sin puntos fijos sobre \mathcal{U} , tal que el género de \mathcal{U}/Γ es g .*

5.4 Grupos Fuchsianos generados por reflexiones.

En esta sección daremos un método para construir grupos triangulares con una signatura dada.

5.13. Definición. Sea Q una h -línea. Una h -reflexión o reflexión hiperbólica en Q es una isometría de \mathcal{U} en \mathcal{U} que fija cada punto de Q .

Por ejemplo, la reflexión euclídana en el eje imaginario $i\mathbb{R}$ dada por $R_0(z) = -\bar{z}$ es una h -reflexión. En efecto, si $z, w \in \mathcal{U}$, tenemos que

$$sh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\Im z \Im w} = \frac{|-\bar{z} + \bar{w}|^2}{4\Im(-\bar{z})\Im(-\bar{w})} = sh^2 \frac{1}{2} \rho(-\bar{z}, -\bar{w}).$$

Además, R_0 fija el eje imaginario: si $z = iy \in i\mathbb{R}$ entonces $-\bar{z} = -(-iy) = iy = z$.

Ahora, sea Q cualquier otra h -línea, entonces, existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(Q) = i\mathbb{R}$, entonces $T^{-1}R_0T$ es una isometría que fija Q y es una h -reflexión. Notemos que toda h -reflexión es de orden 2.

5.14. Teorema. *Una reflexión en Q es la restricción al semiplano superior de una inversión euclídana en Q .*

Demostración:

Denotemos a $i\mathbb{R}$ por Q_0 . Como Q_0 y Q son círculos en \mathcal{U} , por el teorema 2.19 existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $T(Q) = Q_0$ y por el Lema 1.22 tenemos $I_{Q_0}(z) = TI_QT^{-1}(z)$ donde I_Q e I_{Q_0} son las inversiones en Q y Q_0 . Claramente I_{Q_0} es una h -reflexión y por la observación anterior se concluye el resultado. □

Observemos que las h -reflexiones son isometrías anticonformes. A partir de esta propiedad obtendremos la forma de las h -reflexiones:

Dado B un homomorfismo de \mathcal{U} anticonforme se tiene que $T = R_0B$ es conforme. Luego, $T \in PSL(2, \mathbb{R})$. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, como $R_0(z) = -\bar{z}$

entonces $B = R_0^{-1}T = -\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. Así B nos da la forma de los automorfismos anticonformes de \mathcal{U} y en particular, de las h -reflexiones.

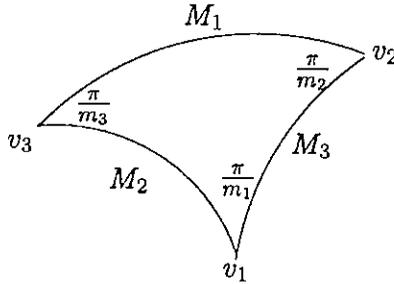


FIGURA 5.5.

Construyamos ahora el triángulo τ de vértices v_1, v_2, v_3 ; con lados M_1, M_2, M_3 y ángulos $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$, con $m_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ que cumplen $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$ como se ve en la figura 5.5.

Sean R_1, R_2, R_3 las reflexiones en M_1, M_2, M_3 respectivamente y sea $\Gamma^* = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle$. Como $R_i \notin PSL(2, \mathbb{R})$, el grupo Γ^* no es Fuchsiano. Consideremos el conjunto $\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2, \mathbb{R})$. Observamos que Γ es la unión de dos clases $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_1$, ya que si $S \in \Gamma^* \setminus \Gamma$ entonces SR_1 es la composición de dos homeomorfismos anticonformes, luego es conforme y $SR_1 \in PSL(2, \mathbb{R})$. Pero también $SR_1 \in \Gamma^*$ luego $SR_1 \in \Gamma$ y $S = (SR_1)R_1 \in \Gamma R_1$. El conjunto $\{T(\tau) : T \in \Gamma^*\}$ es una teselación de \mathcal{U} y τ es una región fundamental para Γ^* . Sea p un punto en τ . Las imágenes bajo Γ^* de p son puntos en triángulos de la teselación, luego forman un conjunto discreto, así que Γ es un grupo Fuchsiano, y se sigue del teorema 4.5 que $\tau \cup R_1(\tau)$ es una región fundamental para Γ . La imagen bajo R_1 de τ es otro triángulo con vértices $v_3, v_2, v'_1 = R_1(v_1)$ como se ve en la figura 5.6. A Γ le llamamos el grupo triangular generado por τ .

Usaremos ahora la fórmula de Euler-Poincaré (ver 5.10) para calcular el género de \mathcal{U}/Γ donde Γ es el grupo triangular anterior. En este caso, los lados v_2v_1 y $v_2v'_1$ son apareados por R_1R_3 y los lados v_3v_1 y $v_3v'_1$ son apareados por R_1R_2 , luego la región fundamental $v_3v'_1v_2v_1$ tiene dos pares de lados que se aparean y en éste caso $n = 2$. Por otro

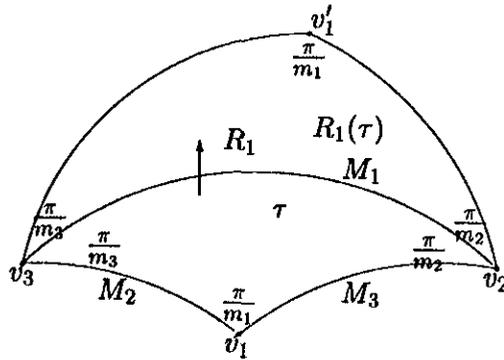


FIGURA 5.6. Reflexión del triángulo τ en R_1

lado $\{v_3, v_3'\}$ es un ciclo (elíptico) de vértices y $\Gamma_{v_3}, \Gamma_{v_3'}$ son cíclicos de orden m_3 , $\{v_2\}$ es un ciclo elíptico y Γ_{v_2} es cíclico de orden m_2 . Por último, $\{v_1\}$ también el cíclico y el orden del estabilizador Γ_{v_1} es m_1 . Por lo tanto, según la fórmula de Euler tenemos $r = 3$ y $s = 0$ y así: $2 - 2g = 3 - 2 + 1 = 2$ es decir, $g = 0$ y concluimos que \mathcal{U}/Γ ¡es un esférico!. Además la signatura de Γ es $(0; m_1, m_2, m_3)$ y el área hiperbólica de la región fundamental es $2\pi\{1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\}$.

5.15. Teorema. *Sea F una región de Dirichlet para un grupo Fuchsiano Γ con \mathcal{U}/Γ compacta. Entonces $\mu(F) \geq \frac{\pi}{21}$. Además, si $\mu(F) = \frac{\pi}{21}$ entonces Γ es un grupo triangular con signatura $(0; 2, 3, 7)$.*

Demostración:

Sabemos que $\mu(F) = 2\pi\{(2g - 2) + \sum_{i=1}^r(1 - \frac{1}{m_i})\}$ si la signatura del grupo es $(g; m_1, m_2, \dots, m_r)$, luego si $g \geq 2$ entonces $\mu(F) \geq 4\pi$. Si $g = 1$ entonces como $\mu(F) > 0$ tenemos que Γ deberá tener elementos elípticos, y en consecuencia ciclos elípticos con periodos $m_i \geq 2$, así que $\mu(F) \geq \pi$. En este caso basta tener un grupo con signatura $(1; 2)$ para alcanzar la cota.

Si $g = 0$ entonces $\mu(F) = 2\pi\{-2 + \sum_{i=1}^r(1 - \frac{1}{m_i})\}$. Como $1 - \frac{1}{m_i} \geq \frac{1}{2}$ tenemos $\mu(F) \geq 2\pi(-2 + \frac{r}{2}) = \pi(r - 4)$ por lo que si $r \geq 5$, entonces

$\mu(F) \geq \pi$ y basta un grupo con signatura $(0; 2, 2, 2, 2, 2)$ para alcanzar la cota. Si $r = 4$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$ entonces $\mu(F) = 0$, lo cual es imposible. Si $r = 4$ y $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ y $m_4 = 3$ entonces $\mu(F) = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto, para $r = 4$, $\mu(F) \geq \frac{\pi}{3}$. Solo falta ver los casos en que $r \leq 3$: si $r \leq 2$ entonces $\mu(F) = 2\pi(-2+1-\frac{1}{m_i}+1-\frac{1}{m_2}) < 0$ que no es posible y por último, si $r = 3$ tenemos $\mu(F) = 2\pi(1-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3})$. Sin perder generalidad supongamos que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq 3$. El primer caso, $4 \leq m_1$, implica que $\mu(F) = 2\pi(1-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3}) \geq 2\pi(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$. Si $m_1 = 3$ entonces un grupo con signatura $(0; 3, 3, 3)$ tiene $\mu(F) = 0$ y el mínimo para $m_1 = 3$ es uno con signatura $(0; 3, 3, 4)$ que tiene área $\mu(F) \geq 2\pi(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$. Si $m_1 = 2$ entonces $m_2 > 2$ (el caso $m_2 = 2$ no es posible pues $\mu(F) < 0$). Si $m_2 \geq 4$ entonces $\mu(F) \geq \frac{\pi}{10}$ y se tiene la cota para una signatura $(0; 2, 4, 5)$. Por último, si $m_2 = 3$ entonces para $(0; 2, 3, 6)$ tenemos $\mu(F) = 0$, luego el mínimo se alcanza para un grupo con signatura $(0; 2, 3, 7)$ que cumple $\mu(F) \geq \frac{\pi}{21}$. □

5.5 Grupos Fuchsianos del primer tipo

Recordamos que un grupo Fuchsiano Γ es del primer tipo cuando su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ coincide con el conjunto de puntos al infinito $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en el modelo del semiplano \mathcal{U} , o con $\partial\mathbb{D}$ en el modelo del disco \mathbb{D} .

5.16. Teorema. *Si Γ es un grupo Fuchsiano geoméricamente finito y del primer tipo entonces Γ tiene una región fundamental de área hiperbólica finita.*

Demostración:

Sea F una región fundamental de Γ con un número finito de lados. Un lado de F no puede constar de puntos al infinito pues en este caso los puntos de tal lado no pueden pertenecer al conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$, ya que Γ no sería del primer tipo. Luego F puede tener en común con $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ solamente un número finito de vértices, estos vértices los podemos separar con geodésicas y entonces podemos dividir a F en un polígono compacto contenido en \mathcal{U} y en un número finito de triángulos hiperbólicos que tienen un vértice en el infinito, y como el polígono

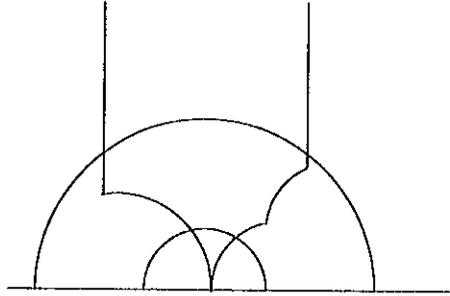


FIGURA 5.7.

compacto y los triángulos hiperbólicos son de área hiperbólica finita, tenemos el resultado. (Ver la figura 5.7). \square

El recíproco de este resultado también es cierto. Antes, requerimos del siguiente

5.17. Lema. *Sea $\Gamma = \{id, g_1, g_2, \dots\}$ un grupo Fuchsiano de automorfismos en \mathbb{D} y F una región fundamental de Γ localmente finita, entonces los diámetros euclidianos cumplen que $\text{diam}(g_n(F)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración:

Si no fuera este el caso, existen una subsucesión $\{n_k\}$ y puntos $z_k, w_k \in g_{n_k}(F)$ con $z_k \rightarrow z, w_k \rightarrow w$ y $z \neq w$. Ninguno de z, w está fuera de \mathbb{D} , dado que esto contradice el hecho de que F es localmente finita, luego $|z| = |w| = 1$, y entonces $g_{n_k}(F)$ se acumula en la geodésica que pasa por z y por w , pero esto contradice que F sea localmente finita. \square

5.18. Teorema. *Si un grupo Fuchsiano Γ tiene una región fundamental de área hiperbólica finita entonces Γ es del primer tipo.*

Demostración:

Usaremos el modelo del disco unitario \mathbb{D} para mostrar que cada punto de \mathbb{S}^1 es un punto límite de Γ . Sea F una región fundamental de Dirichlet de Γ , entonces $\mu(F) < \infty$ y por el teorema 4.33 sabemos que F es una región fundamental localmente finita.

Sean $z_0 \in \mathbb{S}^1$ y $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{D}; |z - z_0| < \varepsilon\}$, por el lema anterior podemos elegir $S_1 \in \Gamma$ con $S_1(F) \subset U_\varepsilon(z_0)$, ya que el área hiperbólica

de $U_\varepsilon(z_0)$ es infinita y F es una región fundamental de área finita. Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos elegir transformaciones diferentes $\{T_n\}$ tales que $T_n(z) \rightarrow z_0$ para cualquier $z \in F$ y entonces $z_0 \in \Lambda(\Gamma)$. □

5.6 Grupos Fuchsianos finitamente generados

La parte principal de esta sección es mostrar que los grupos Fuchsianos finitamente generados son geoméricamente finitos. El recíproco de esta afirmación es el teorema 4.43 que afirma que las funciones que aparean los lados de una región fundamental F de un grupo Fuchsiano Γ , generan al grupo. Luego si el número de lados de F es finito, entonces Γ es finitamente generado.

5.19. Teorema. *Si Γ es finitamente generado entonces es geoméricamente finito.*

Demostración:

Usaremos el modelo del disco de Poincaré para demostrar el teorema. Supongamos que el 0 no es punto fijo de algún elemento de Γ y sea $F = D_0(\Gamma)$ la región de Dirichlet centrada en 0. Sabemos que las funciones que aparean los lados de F generan a Γ , luego cada elemento de un conjunto finito de generadores de Γ es una composición finita de las transformaciones que aparean los lados. Como hay solamente un número finito de funciones que aparean los lados, hay solo un número finito de funciones apareadoras que generan a Γ , llamemos a éstas g_1, \dots, g_t .

Sea $0 < r < 1$ tal que el disco $\{z \in \mathbb{D}; |z| \leq r\}$ contenga arcos de longitud positiva de cada uno de los lados que aparean g_1, \dots, g_t . Podemos elegir r tal que el círculo $|z| = r$ no interseca a un vértice de F y tal que no sea tangente a algún lado de F . Sea $K = F \cap \{z \in \mathbb{D}; |z| < r\}$. Los dos pasos principales de la demostración son ver que:

- (1) F puede expresarse en la forma: $F = K \cup F_1 \cup \dots \cup F_n$, donde K es el definido líneas arriba con \overline{K} compacto y cada $\partial_0 F_i$ conexo.
- (2) solamente un número finito de lados de F interseca a cada F_i .

Dado que los vértices de F son aislados en \mathbb{D} , tenemos que solamente un número finito de lados de F interseca a K , con esto la demostración estaría completa. Veamos que F se puede expresar como se dice en (1).

Notemos primero que:

$$F \cap \{z \in \mathbb{D}; |z| = r\} = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s,$$

donde los σ_j son arcos cerrados de $\{z \in \mathbb{D}; |z| = r\}$, ajenos por parejas que se encuentran dentro de F y con extremos en $\partial_0 F$. Sea

$$\Gamma(K) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(K)$$

Observemos que según la construcción de la región K , el conjunto $K \cup g_j(K)$ es conexo para cada j , pues K es conexo y entonces también es conexo cada uno de los conjuntos:

$$K \cup g_{j_1}(K) \cup g_{j_1}g_{j_2}(K) \cup \dots \cup g_{j_1} \dots g_{j_q}(K) \text{ donde } 1 \leq j_i \leq t.$$

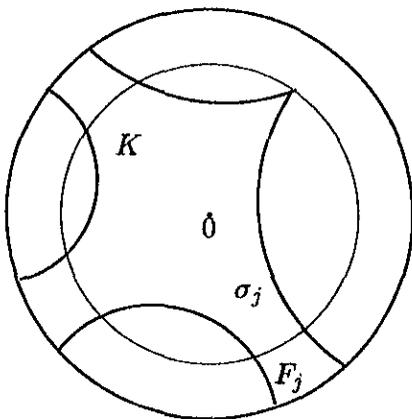


FIGURA 5.8.

Como las g_j generan a Γ , tenemos que $\Gamma(K)$ es conexo.

Recordemos que $F = D_0(\Gamma)$ coincide con la región fundamental de Ford R_0 del grupo Γ , (ver la sección 4.4). Si dos lados de F son apareados por un elemento $g_i \in \Gamma$, con $1 \leq i \leq t$, entonces estos pertenecen a los círculos isométricos $I(g_i)$ y $I(g_i^{-1})$, y si $z \in I(g_i)$ y $w = g_i(z)$ entonces $|w| = |z|$. Es inmediato que la colección de puntos extremos de los arcos σ_j son también apareados por las funciones que aparean los lados. Esto implica que cada punto extremo de σ_j es punto extremo de alguna $h(\sigma_i)$ para una única h y una única σ_i , y entonces deducimos que cada σ_j esta en un arco simple G_j compuesto de imágenes de la

σ_i . Como solamente hay un número finito de σ_i , el arco G_j contiene imágenes de la misma σ_i ; y la unicidad de la construcción de la G_j implica que G_j es invariante bajo algún elemento no trivial h_j de Γ . Notemos que G_j consta de imágenes de un arco compacto bajo iteraciones de h_j . Observemos que un punto de K no puede ser congruente a un punto de alguna σ_j dado que éstos pertenecen a la misma región fundamental, luego $\Gamma(K)$ no interseca a alguna G_j . (Ver la figura 5.8).

Ahora sea F_j la unión de σ_j y la componente de $F \setminus \sigma_j$ que no contiene al origen. Notemos que G_j separa F_j y $\Gamma(K)$ en \mathbb{D} .

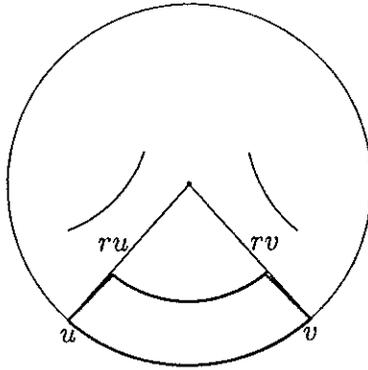


FIGURA 5.9.

Es fácil ver que $\partial_0 F_j$ es conexo. Supongamos que u y v son dos puntos distintos de este conjunto. Tenemos que $ru, rv \in \sigma_j$. Dado que F es conexo podemos construir una curva τ_j que conecte a u con ru radialmente, luego a ru con rv en σ_j y finalmente rv con r radialmente. Esta curva se encuentra completamente en F_j y entonces no interseca a $\Gamma(K)$. Si $h \neq id$ está en Γ , entonces $h(F)$ no interseca a τ_j (dado que τ_j esta dentro de $F_j \subset F$) y entonces está en el mismo lado de τ_j donde se encuentra $\Gamma(K)$. Luego la región Σ_j ilustrada en la figura 5.9 no interseca a algún $h(F)$, $h \neq id$, y entonces se encuentra en F . Esto demuestra que cada $\partial_0 F_j$ es conexo, y entonces (1) queda demostrado.

Ahora regresemos a la clasificación de las h_j que estabilizan a G_j para terminar la demostración. Si h_j es elíptica, entonces G_j es una curva cerrada de Jordan en \mathbb{D} como se muestra en la figura 5.10 a), por

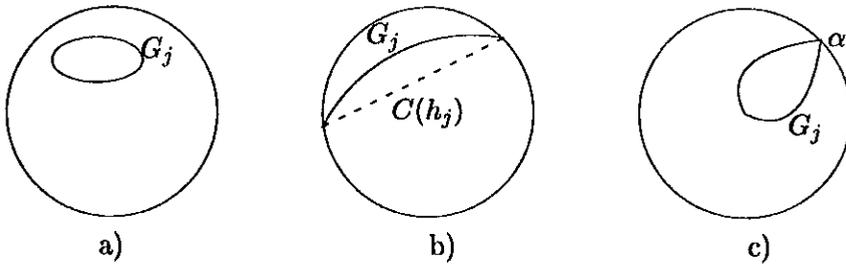


FIGURA 5.10.

lo que una de las componentes de $\mathbb{D} \setminus G_j$ tiene cerradura compacta en \mathbb{D} . Si esta componente contiene a F_j , entonces sólo un número finito de lados de F intersecan a F_j . Si esta componente no contiene a F_j , ésta entonces contiene a $\Gamma(K)$ y entonces Γ es finito: luego el polígono de Dirichlet para Γ tiene sólo un número finito de lados.

Si h_j es hiperbólica, entonces G_j es una curva que divide a \mathbb{D} y donde sus puntos extremos son los puntos fijos de h_j , ver figura 5.10 b).

Una de las componentes de $\mathbb{D} \setminus G_j$ contiene a $\Gamma(K)$ (y también a la órbita del origen) y entonces a todo punto límite de Γ_0 y entonces por el lema 4.5.3, todo punto límite de Γ está en la cerradura de esta componente. La otra componente de $\mathbb{D} \setminus G_j$ contiene a F_j y no hay puntos límites en el arco abierto de $\partial\mathbb{D}$ que acota a esta componente. Luego, F_j esta en F y entonces se encuentra entre la mediatriz del segmento $[0, h_j(0)]$ y la mediatriz del segmento $[0, h_j^{-1}(0)]$.

Por el lema 4.18 las mediatrices de $[0, h_j(0)]$ y de $[0, h_j^{-1}(0)]$ son los círculos isométricos $I(h_j^{-1})$ y $I(h_j)$ respectivamente. Observemos que los puntos fijos de h_j están dentro del círculo isométrico $I(h_j)$ y $I(h_j^{-1})$ (dado que los puntos exteriores de $I(h_j)$ son transformados dentro de $I(h_j^{-1})$, y por ser h_j hiperbólica estos círculos no se intersecan). Deducimos entonces que estos círculos isométricos separan a F_j de los puntos

fijos de h_j , y que $\partial_0 F_j$ se encuentra en el conjunto de puntos ordinarios de Γ . Como los diámetros euclidianos de la imágenes de F tienden a 0, tenemos que F_j puede intersecar solamente a un número finito de imágenes de F y entonces sólo a un número finito de lados de F .

Finalmente supongamos que h_j es parabólica. En este caso G_j es una curva cerrada de Jordan en \mathbb{D} (salvo su punto inicial y final α que es el punto fijo de h_j el cual se encuentra en $\partial\mathbb{D}$, ver la figura 5.10 c).

En este caso una de las componentes de $\mathbb{D} \setminus G_j$ tiene cerradura euclidiana formada por un solo punto el α . Si esta componente contiene a $\Gamma(K)$, entonces podemos repetir el argumento del caso hiperbólico y concluir que $\Lambda(\Gamma)$ consta de un solo punto el α . Esto implica que Γ es elemental, y entonces es un subgrupo cíclico parabólico cuya región fundamental tiene dos lados. Si esta componente contiene a F_j , entonces tenemos o bien que $\partial_0 F_j = \emptyset$, en cuyo caso solamente un número finito de lados de F intersecan a F_j , o bien $\partial_0 F_j$ consiste del punto α que es el punto fijo de la parabólica h_j . Recordemos que $F = R_0$, y que los círculos isométricos $I(h_j)$ y $I(h_j^{-1})$ son tangentes en el punto α . Luego en este caso, los dos lados de F se intersecan en α , y también solamente un número finito de lados de F intersecan a F_j .

□

FIN

Bibliografía

- [J] Jones, Gareth. *Complex Functions*.
Cambridge University Press. 1987.
- [H] Henle, Michael. *Modern Geometries*.
Prentice Hall, Inc. 1987.
- [K] Katok, Svetlana. *Fuchsian Groups*.
The University of Chicago Press. 1987.
- [L] Lundsgaard, Vagn Hansen. *Shadows of the circle*.
World Scientific. 1998.
- [C] Cannon, James. et.al. *Hyperbolic Geometry*. Flavors of Geometry.
MSRI. 31 1997.
- [K] Kagán, V.F. *La geometría no euclidiana de Lobatchewsky*.
Limusa, 1998.
- [V] Valdez, Rogelio. *Geometría de Grupos Fuchsianos*.
Facultad de Ciencias, 1997.
- [M] Magnus, W. *Noneuclidean tessellations and their groups*.
Academic Press, N.Y. 1974.

Índice

- ángulo
 - de paralelismo, 51
 - en un vértice, 47
- área hiperbólica
 - en \mathbb{D} , 53
 - en \mathcal{U} , 46
- acción
 - k - transitiva, 33
 - discontinua, 62
 - propriadamente discontinua, 63
- atlas, 109
- automorfismo
 - de la esfera de Riemann, 13
 - del disco unitario, 33
 - del semiplano superior, 30
- círculo
 - en la esfera de Riemann, 17
 - fijo, 61
 - hiperbólico, 42
 - isométrico, 92
 - exterior del, 93
 - interior del, 93
- cambio de coordenadas, 109
- carta, 109
- centralizador, 67
- cerradura euclidiana, 117
- ciclo elíptico, 104
- clases parabólicas, 107
- conjunto
 - compacto, 63
 - denso en ninguna parte, 103
 - límite, 100
 - perfecto, 103
- conmutador, 72
- Continuación analítica, 10
- coordenada local, 109
- distancia hiperbólica
 - en \mathbb{D} , 52
 - en \mathcal{U} , 36
 - fórmulas en \mathbb{D} , 52
 - fórmulas en \mathcal{U} , 42
- eje de una transformación, 69
- equivalencia conforme, 112
- Esfera de Riemann, 9
- espacio cubriente, 112
- estabilizador de ∞ , 97
- Euler-Poincaré, fórmula de, 127
- frontera euclidiana, 117
- función racional, 11
- Gauss-Bonnet, fórmula de, 47
- grado de una función, 12
- Grupo
 - cocompacto, 121
 - elemental, 72
 - Fuchsiano, 61
 - del Primer tipo, 103, 134
 - del Segundo tipo, 103
 - finitamente generado, 136
 - geoméricamente finito, 117, 136
 - generado por, 76
 - lineal, 30
 - lineal especial, 30
 - modular, 88

- triangular, 67, 131
- hiperparalelas en \mathbb{D} , 50
- horociclo, 123
- inversión, 10
- isometrías
 - de \mathcal{U} , 43
- Jørgensen, desigualdad de, 77
- línea hiperbólica
 - en \mathbb{D} , 50
 - en \mathcal{U} , 38
- lado, 105
 - congruente, 107
- Ley de los cosenos I, 56
- Ley de los cosenos II, 56
- Ley de los senos, 56
- Lobatchewsky, fórmula de, 53
- longitud hiperbólica
 - en \mathbb{D} , 51
 - en \mathcal{U} , 35
- métrica
 - cordal, 9
 - hiperbólica en \mathcal{U} , 36
- mediatriz hiperbólica, 86
- normalizador, 71
- órbita, 66
- orden de un ciclo, 126
- paralelas en \mathbb{D} , 50
- periodo, 106
- plano complejo extendido, 9
- Poincaré, Teorema de, 128
- polígono hiperbólico, 44
 - en forma de estrella, 49
- proyección estereográfica, 7
- puntos ideales, 50
- puntos ordinarios, 100
- razón cruzada, 19
- reflexión hiperbólica, 130
- región fundamental, 83
 - área de, 83
 - de Dirichlet, 86
 - de Ford, 97
 - frontera de, 83
- Schwarz, Lema de, 32
- segmento hiperbólico, 36
- Siegel, Teorema de, 117
- signatura, 127
- superficie, 109
 - cubriente, 111
 - de Riemann, 109
- teselación, 131
- transformación
 - cubriente, 112
 - de Cayley, 29
 - elíptica, 28, 60
 - hiperbólica, 28
 - loxodrómica, 28
 - parabólica, 28, 59
- transformación hiperbólica, 60
- traza
 - de una matriz, 26
- traza cuadrada, 27
- triángulo hiperbólico, 44, 67
- vértice, 44, 91
 - congruente, 104
 - elíptico, 105