

2  
2 ej.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## PRODUCTOS DE CARACTERES DEL GRUPO SIMETRICO

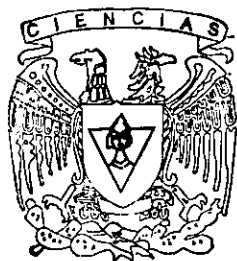
T E S I S

Que para obtener el título de

MATEMATICA

p r e s e n t a

DIANA AVELLA ALAMINOS



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

Nombre del Director de Tesis: DR. ERNESTO VALLEJO RUIZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

**PRODUCTOS DE CARACTERES DEL GRUPO SIMETRICO**

realizado por **DIANA AVELLA ALAMINOS**

con número de cuenta 9550458-2 , pasante de la carrera de **MATEMATICAS**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis

Propietario **DR. ERNESTO VALLERJO RUIZ**

Propietario **DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS**

Propietario **DR. JUAN MORALES RODRIGUEZ**

Suplente **DRA. MARIA ALICIA AVIÑO DIAZ**

Suplente **M en C JESUS EFREN PEREZ** *José Honoré Pérez Terraza*  
**TERRAZAS**



Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

**MAT. JULIO CESAR GONZALEZ BRAVO**

**MATEMATICAS**

*A mi familia  
y a todas aquellas personas  
que he tenido la suerte de conocer  
y que siempre han estado a mi lado,  
por enseñarme las pequeñas cosas maravillosas  
que existen en la vida.*

---

*Mathematics...  
posseses not only truth,  
but supreme beauty...  
such as only  
the greatest art can show.*

*B. Russell.*

---

## Contenido

Capítulo 0. Introducción	ix
Capítulo 1. Nociones preliminares	1
1. Particiones	1
2. Diagramas y tablas de Young	2
3. El grupo simétrico	8
4. Caracteres	10
Capítulo 2. Caracteres en el grupo simétrico	23
1. Caracteres asociados a una partición	23
2. Reglas de Young y de Littlewood-Richardson	26
3. Consecuencias de la Regla de Littlewood-Richardson	32
Capítulo 3. Algunos resultados importantes	37
1. Cálculos clásicos	37
2. Primeros resultados	43
Capítulo 4. Condiciones para que $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$	49
1. Ancho y altura	49
2. Profundidad	53
3. Fórmulas recursivas para $c(\lambda, \mu, \nu)$	58
Capítulo 5. Escuadras y escuadras dobles	63
Capítulo 6. Fórmulas	71
Bibliografía	79
Lista de símbolos e índice analítico	81



## CAPÍTULO 0

### Introducción

El producto de Kronecker  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  de dos caracteres irreducibles del grupo simétrico  $S(n)$  es en general un carácter reducible de  $S(n)$ . El problema central de esta tesis es describir la descomposición de dicho producto en caracteres irreducibles, o equivalentemente, para cada carácter irreducible  $\chi^\nu$  de  $S(n)$ , calcular la multiplicidad  $c(\lambda, \mu, \nu)$  de  $\chi^\nu$  en  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ .

Este es un problema clásico de interés tanto para la teoría de representaciones del grupo simétrico, como para la del grupo general lineal complejo. Dados un espacio vectorial complejo  $V$  de dimensión finita y una partición  $\lambda$ , mediante el producto tensorial se construye un  $GL(V)$ -módulo conocido como la potencia de Schur del espacio vectorial complejo  $V$ , denotado por  $S_\lambda(V)$ . Con ello obtenemos una manera de generar nuevas representaciones del grupo general lineal complejo con aplicaciones en el estudio de los grupos de Lie. La multiplicidad del  $GL(V) \times GL(W)$ -módulo  $S_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} S_\mu(W)$  en  $S_\nu(V \otimes W)$  es igual a  $c(\lambda, \mu, \nu)$  ([FH91, p.80]).

Estos números aparecen también en otros problemas matemáticos como el estudio de caracteres múltiplemente transitivos ([JS75]), la descripción de los caracteres irreducibles del grupo simétrico  $S(n)$  que permanecen irreducibles al restringirlos a subgrupos de permutaciones ([JS87]) y el estudio de los números cubrientes de caracteres de los grupos alternantes ([IZ92]).

Los grupos de permutaciones y los productos tensoriales también tienen importantes aplicaciones en la física, en particular, el producto de Kronecker de dos caracteres juega un papel fundamental en la teoría de sistemas acoplados y en la derivación de reglas de selección ([MH89, p.128,147]).

Aunque existen fórmulas y algoritmos para calcular  $c(\lambda, \mu, \nu)$ , ninguna de ellas es completamente satisfactoria, por lo cual este problema se considera abierto.

El presente trabajo es una revisión de los resultados conocidos más importantes sobre el tema, incluidos varios encontrados en la última



década, presentados de manera unificada y con demostraciones nuevas de algunos de ellos.

Debido a que la teoría de representaciones de grupos no se imparte de modo generalizado en la licenciatura, fue necesario dedicar los dos primeros capítulos de la tesis para desarrollar las ideas básicas de la misma. Así, en el primer capítulo se establecen nociones preliminares y se sintetizan los resultados sobre caracteres de un grupo.

El segundo, se enfoca en la teoría de caracteres en el grupo simétrico  $S(n)$ . En él compilamos los elementos que, pese a ser esenciales para dicha teoría, se encuentran dispersos en diversos libros y artículos. Además, incluimos resultados manejados por los especialistas en el tema, pero que en la bibliografía clásica sobre el mismo no se desarrollan, como por ejemplo, la generalización de la Regla de Littlewood-Richardson.

En suma, con el objeto de no dejar cabos sueltos, en estos primeros capítulos se presentan todos los resultados que fueron utilizados posteriormente para abordar el problema antes planteado. Se incluyen sólo las demostraciones de algunos de ellos, pero se buscó remitir al lector a las fuentes adecuadas para justificar cualquier afirmación no probada a lo largo de este trabajo.

Los capítulos siguientes se refieren al problema central de la tesis. En el capítulo tres se definen los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  y se presentan algunas de sus propiedades básicas. Asimismo, se explican ciertos métodos y fórmulas para descomponer un producto de Kronecker que se derivan de la Regla de Littlewood-Richardson; destaca, en especial, la descripción de los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en función de multitablas, tomada de [EV97, p.4], la cual es utilizada posteriormente para obtener las fórmulas del capítulo seis.

En el capítulo cuatro reunimos las condiciones necesarias para que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  establecidas por diversos autores en términos del ancho, la altura o la profundidad de estas particiones. La recopilación de dichos resultados muestra que existen planteamientos diferentes sobre las condiciones mencionadas que, sin embargo, mantienen una estrecha relación. Por otro lado, se buscaron ejemplos para ilustrar que estas condiciones son necesarias, pero no suficientes, así como para realizar el análisis comparativo de los distintos planteamientos. También se establecen fórmulas recursivas para  $c(\lambda, \mu, \nu)$ .

En el capítulo cinco se describen los productos de Kronecker en los que las particiones involucradas son escuadras. Se da una prueba distinta de un resultado de Remmel [JR89, p.108] a partir de una nueva aplicación de las fórmulas recursivas de Dvir presentadas en el capítulo anterior.

En el último capítulo se incluyen fórmulas para calcular los números  $lr(\lambda, \mu; \nu)$  y  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en el caso en que  $\lambda = \mu$  y la profundidad de  $\nu$  es menor que cinco. Cabe destacar que las fórmulas para profundidad cuatro son aportaciones de la autora de esta tesis e implicaron la realización de cálculos laboriosos.

Para concluir se anexa una bibliografía básica sobre el tema.



## CAPÍTULO 1

### Nociones preliminares

En este primer capítulo se establecen los conceptos preliminares necesarios para el presente trabajo, relacionados con particiones, diagramas y tablas de Young, grupos de permutaciones y caracteres de un grupo finito  $G$ .

#### 1. Particiones

Una *partición* es una sucesión  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$  de enteros no negativos tales que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r, \dots$ , que contiene sólo un número finito de términos no cero; las  $\lambda_i$  son las *partes* de  $\lambda$ . Por convención abreviaremos la escritura de una partición del siguiente modo:  $\lambda = (a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \dots)$ , donde  $m_i$  es el número de partes de  $\lambda$  que son iguales a  $a_i$  y omitiremos las partes iguales a cero; por ejemplo,  $(5, 3, 3, 1) = (5, 3^2, 1)$ . La partición  $(0, 0, \dots)$  se conoce como la *partición vacía*.

El *peso* de una partición  $\lambda$ , denotado por  $|\lambda|$  es la suma de sus partes, es decir,  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ . Si  $|\lambda| = n$  decimos que  $\lambda$  es una partición de  $n$  y lo denotamos por  $\lambda \vdash n$ .<sup>1</sup>

A base de particiones dadas podemos construir otras nuevas como las que se mencionan a continuación. Dada la partición  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  la *partición conjugada* de  $\lambda$  se define como  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r, \dots)$  donde  $\lambda'_i = \text{card}\{j | \lambda_j \geq i\}$ .

Sean  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  y  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  particiones. La intersección de  $\lambda$  y  $\mu$ , que denotaremos por  $\lambda \cap \mu$ , es la partición tal que  $\lambda \cap \mu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$  con  $\nu_i = \text{mín}\{\lambda_i, \mu_i\}$ . Por ejemplo, si tomamos  $\lambda = (7, 4, 2, 1)$  partición de 14 entonces  $\lambda' = (4, 3, 2^2, 1^3)$  y por tanto  $\lambda \cap \lambda' = (4, 3, 2, 1)$ . Sea  $|\lambda - \mu| := \sum_{i \geq 1} |\lambda_i - \mu_i|$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda| + |\mu| - 2|\lambda \cap \mu| &= \sum_{i \geq 1} [(\lambda_i + \mu_i - \text{mín}\{\lambda_i, \mu_i\}) - \text{mín}\{\lambda_i, \mu_i\}] \\ &= \sum_{i \geq 1} [\text{máx}\{\lambda_i, \mu_i\} - \text{mín}\{\lambda_i, \mu_i\}] = \sum_{i \geq 1} |\lambda_i - \mu_i| = |\lambda - \mu| \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En este trabajo  $n, m$  y  $l$  denotarán números naturales.

en el caso en que  $\lambda$  y  $\mu$  son particiones de  $n$ ,  $2|\lambda \cap \mu| + |\lambda - \mu| = |\lambda| + |\mu| = 2n$ , o enunciado de otro modo:

**Observación 1.1.** Dadas  $\lambda, \mu \vdash n$ ,  $|\lambda \cap \mu| = n - \frac{|\lambda - \mu|}{2}$ .

Diremos que una partición  $\lambda$  es una *escuadra* si es de la forma  $(a, 1^b)$  con  $a$  y  $b$  enteros  $a \geq 1$  y  $b \geq 0$ , una *escuadra doble* si es de la forma  $(c, d, 2^e, 1^f)$ , con  $c, d, e, f$  enteros no negativos y  $2 \leq d \leq c$ .

Dadas  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  y  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  particiones se dice que  $\mu$  *está contenida en*  $\lambda$ ,  $\mu \subseteq \lambda$ , si  $\mu_i \leq \lambda_i$  para toda  $i$ . Esto da pie a buscar formas de comparar las particiones en la medida de lo posible; una manera de hacerlo es la que se da a continuación. Consideremos el conjunto de todas las particiones de un natural  $n$ . Podemos definir en él un orden parcial de la siguiente forma: dadas  $\lambda, \mu \vdash n$  decimos que  $\lambda$  *domina a*  $\mu$  cuando  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$  para toda  $i$  y lo denotamos por  $\lambda \supseteq \mu$ . Al conjunto de todas las particiones de  $n$  junto con este orden de dominación lo llamaremos  $\mathcal{P}(n)$ .

**Observación 1.2.** El orden antes definido no es total, por ejemplo, las particiones  $(3, 1^3)$  y  $(2^3)$  no son comparables.

**Observación 1.3.**  $\lambda \supseteq \mu$  si y sólo si  $\mu' \supseteq \lambda'$ , ver el libro de Macdonald [IM95, p.8].

Requeriremos también del llamado *orden lexicográfico* en el conjunto de todas las particiones de un natural  $n$ , que resulta ser un orden total. Diremos que  $\lambda \geq \mu$  si  $\lambda = \mu$  o bien si la primera diferencia no cero  $\lambda_i - \mu_i$  es positiva.

**Observación 1.4.** Si  $\mu \subseteq \lambda$  entonces  $\mu \leq \lambda$ . El recíproco es falso.

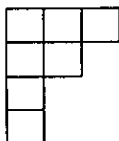
Por último mencionaremos algunos conceptos asociados a una partición que se requerirán posteriormente.

Dada  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  una partición, definimos el *ancho* de  $\lambda$ ,  $w(\lambda)$ , como  $\lambda_1$ , y su *altura*,  $h(\lambda)$ , como el número de partes distintas de cero de  $\lambda$  o equivalentemente  $h(\lambda) = w(\lambda')$ . La profundidad de  $\lambda$ ,  $d(\lambda)$  es la suma de sus partes excluyendo la primera, es decir,  $d(\lambda) = \sum_{i \geq 2} \lambda_i$ ; denotaremos por  $\bar{\lambda}$  a la partición de  $d(\lambda)$  que se obtiene quitando a  $\lambda$  su primera parte, esto es,  $\bar{\lambda} = (\lambda_2, \lambda_3, \dots)$ . Por ejemplo, si  $\lambda = (4, 2^2, 1^2)$  tenemos que  $w(\lambda) = 4$ ,  $h(\lambda) = 5$ ,  $d(\lambda) = 6$  y  $\bar{\lambda} = (2^2, 1^2)$ .

## 2. Diagramas y tablas de Young

Hay una manera natural de visualizar las particiones de un número mediante diagramas.

El *diagrama de Young de una partición*  $\lambda$  es una colección de cuadros o celdas acomodados en renglones alineados a la izquierda de modo que el renglón  $i$  tiene  $\lambda_i$  cuadros, por ejemplo, el diagrama de Young asociado a la partición  $(3, 2, 1^2)$  es el siguiente:



Podemos formalizar este concepto definiendo el *diagrama de Young asociado a*  $\lambda$ , denotado por  $D^\lambda$ , como el conjunto

$$D^\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\};$$

al dibujarlo se adopta la convención, como en las matrices, de que la primera coordenada  $i$  (que indica el renglón) crece conforme bajamos y la segunda coordenada  $j$  (que indica la columna) aumenta al movernos de izquierda a derecha.

Le llamaremos *tabla* a cualquier llenado de las celdas de un diagrama de Young con enteros positivos;  $\lambda$  será entonces la forma de la tabla. Una *tabla semiestándar* es una tabla tal que:

1. Sus renglones son débilmente crecientes.
2. Sus columnas son estrictamente crecientes.

Una *tabla estándar* es una tabla semiestándar cuyas entradas son los números de 1 a  $n$  (siendo  $n$  el peso de la partición en cuestión) presentes una sola vez.<sup>2</sup> Por ejemplo, dada  $\lambda = (6, 4, 3, 2)$ ,

1	2	3	3	4	5
2	3	4	5		
4	4	5			
5	7				

1	3	7	12	13	15
2	5	10	14		
4	8	11			
6	9				

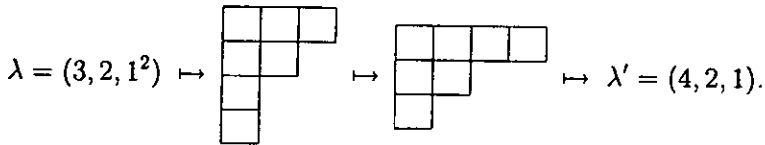
son tablas semiestándar y estándar respectivamente, de forma  $\lambda$ .

El *llenado canónico* de un diagrama se da colocando los números de 1 a  $n$  de manera creciente, de izquierda a derecha y comenzando por el primer renglón. El llenado canónico del diagrama del ejemplo anterior es:

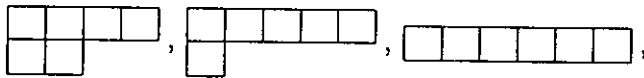
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10		
11	12	13			
14	15				

<sup>2</sup>El nombre genérico para todos estos llenados es el de tablas de Young, aunque a veces el término tabla de Young denota lo que en este texto se define como tabla semiestándar [WF97, p.2].

La descripción de estos datos combinatorios en el plano permite tener construcciones simples y útiles con las cuales se pueden visualizar ciertas propiedades de las particiones. Por ejemplo, podemos obtener  $\lambda'$  girando el diagrama asociado a  $\lambda$  sobre su diagonal principal<sup>3</sup> y tomando la partición correspondiente a este nuevo diagrama:

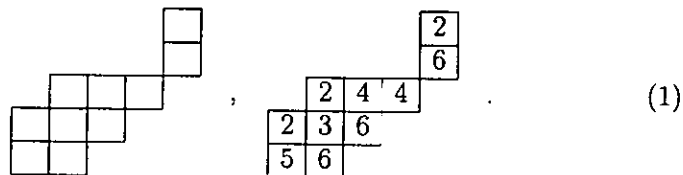


También es posible determinar cuándo una partición domina a otra analizando sus correspondientes diagramas:  $\lambda \supseteq \mu$  si y sólo si  $\lambda = \mu$  o bien  $D^\lambda$  puede obtenerse de  $D^\mu$  moviendo cuadros que se encuentran en el extremo derecho de algún renglón y colocándolos en el extremo derecho de renglones superiores. Por ejemplo, dada  $\mu = (4, 1^2)$  se tiene que:



son todos los diagramas que se obtienen de  $D^\mu$  mediante el procedimiento antes descrito; así,  $\{\lambda \vdash 6 \mid \lambda \supseteq \mu\} = \{(4, 1^2), (4, 2), (5, 1), (6)\}$ .

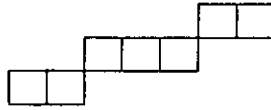
Dadas  $\lambda$  y  $\mu$  particiones tales que  $\mu \subseteq \lambda$  el *diagrama sesgado de forma  $\lambda/\mu$*  es el diagrama que se obtiene de remover el diagrama de  $\mu$  del diagrama de  $\lambda$  que lo contiene. Una *tabla sesgada semiestándar* es un llenado de un diagrama sesgado con enteros positivos de forma que se cumplan las propiedades 1 y 2 antes mencionadas. Por ejemplo, si  $\lambda = (5^2, 4, 3, 2)$  y  $\mu = (4^2, 1)$  el diagrama sesgado de forma  $\lambda/\mu$  y una tabla sesgada semiestándar de forma  $\lambda/\mu$  se muestran a continuación:



Observamos que al tomar  $\mu$  como la partición vacía,  $\lambda/\mu = \lambda$  así que hemos generalizado la definición de tabla semiestándar mencionada anteriormente.

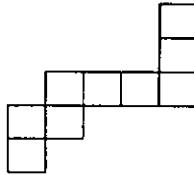
<sup>3</sup>Este diagrama se conoce como el diagrama transpuesto de  $D^\lambda$ .

Un diagrama sesgado de forma  $\lambda/\mu$  es una *tira horizontal* si  $\lambda'_i - \mu'_i \leq 1$  para toda  $i$ . Por ejemplo:



Diremos que un diagrama sesgado  $E$  es *conexo* si dos cuadros cualesquiera en  $E$  pueden ser conectados por una sucesión  $x_0, x_1, \dots, x_m$  de cuadros en  $E$  donde  $x_{i-1}$  y  $x_i$  tienen un lado en común para toda  $i$ .

A  $E$  se le llama una *escuadra sesgada* cuando es un diagrama conexo y no contiene bloques de  $2 \times 2$ , por ejemplo:



A un subconjunto  $E$  de un diagrama de Young  $D$  se le llama una *escuadra sesgada especial* si es una escuadra sesgada que tiene al menos un cuadro de la primera columna de  $D$ . Diremos que una tabla  $T$  es una *tabla de escuadras sesgadas especiales* cuando:

1. Sus columnas y renglones son débilmente crecientes, y
2. Todas las  $i$  en  $T$  forman una escuadra sesgada especial.<sup>4</sup>

Por ejemplo,

1	1	3	3	3
2	3	3	4	4
3	3	4	4	
3	4	4		
4	4			

es una tabla de escuadras sesgadas especiales.

El *signo* de una tabla  $T$  de escuadras sesgadas especiales con escuadras sesgadas  $E$  se define como:

$$\text{sgn}(T) := \prod_{E \in T} (-1)^{h(E)-1}.$$

con  $h(E)$  el número de renglones de  $E$ . En el ejemplo anterior tenemos

$$\text{sgn}(T) = (-1)^0(-1)^0(-1)^3(-1)^3 = 1.$$

Fijémonos ahora en los números que llenan un diagrama para formar una tabla. Dado  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  un vector de enteros no negativos diremos que una tabla  $T$  de forma  $\lambda/\mu$  tiene *contenido*  $\pi$  si

<sup>4</sup>Esta definición es la que presenta Sagan en [BS91, p.181].



$i$  aparece  $\pi_i$  veces en el llenado de  $T$ . El contenido de la tabla del ejemplo (1) es  $(0, 3, 1, 2, 1, 3)$ .

A cada tabla sesgada  $T$  se le puede asociar una palabra  $w(T)$  leyendo los números que aparecen en  $T$  de derecha a izquierda comenzando por el primer renglón. En el ejemplo (1) tenemos que

$$w(T) = 2644263265.$$

A una palabra  $w(T) = w_1 w_2 \dots w_s$  se le llama una *permutación de celosía*<sup>5</sup> cuando la cantidad de veces que aparece el número  $j$  hasta un momento arbitrario de la palabra es mayor o igual al número de ocasiones que aparece  $j + 1$  hasta dicho momento, es decir, si  $m_j(w_{\leq r})$  denota el número de veces que ocurre el símbolo  $j$  en la palabra  $w_1 w_2 \dots w_r$ ,  $w(T)$  será una permutación de celosía cuando

$$m_j(w_{\leq r}) \leq m_{j-1}(w_{\leq r}) \text{ para toda } 1 \leq r \leq s \text{ y para toda } j \geq 2.$$

Por ejemplo, la palabra 11232 es una permutación de celosía.

Sea  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  un vector de enteros positivos tales que  $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r = n$  y  $\rho(i) \vdash \pi_i$  para toda  $i$ . Una sucesión  $T = (T_1, T_2, \dots, T_r)$  de tablas es una *multitabla de Littlewood-Richardson de forma  $\lambda/\mu$ , contenido  $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))$  y tipo  $\pi$*  (ver [EV97, p.3]), si:

1. Existe una sucesión de particiones

$$\mu = \lambda(0) \subset \lambda(1) \subset \dots \subset \lambda(r) = \lambda$$

tal que  $|\lambda(i)/\lambda(i-1)| = \pi_i$  para toda  $1 \leq i \leq r$  y

2. Para toda  $1 \leq i \leq r$ ,  $T_i$  es una tabla semiestándar de forma  $\lambda(i)/\lambda(i-1)$  y contenido  $\rho(i)$ , tal que  $w(T_i)$  es una permutación de celosía.

Por ejemplo,

$$\left( \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

es una multitabla de Littlewood-Richardson de forma  $(5^2, 4, 3, 2)$ , contenido  $((3, 2), (2, 1^2), (5, 2^2, 1))$  y tipo  $(5, 4, 10)$ . Es común representar

<sup>5</sup>En inglés el nombre usado es lattice permutation, dado que desconozco si existe ya alguna traducción de este término utilizaré lo que me ha parecido la traducción más apropiada al español.

la multitabla del siguiente modo:

1	1	1	1	1
2	2	3	2	2
1	1	1	1	
1	2	3		
3	4			

Estamos ahora en condiciones de definir los llamados *coeficientes de Littlewood-Richardson* que son básicos en el desarrollo del problema a tratar:

**Definición 1.5.** Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$  con  $m \leq n$ ,  $\rho(i)$  una partición para toda  $1 \leq i \leq r$ , con  $|\rho(1)| + |\rho(2)| + \dots + |\rho(r)| = n - m$ . Denotaremos por  $c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\mu}$  al número de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $\lambda/\mu$  y contenido  $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))$ . Si  $\mu \not\subseteq \lambda$  definiremos  $c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\mu}$  como cero.

**Observación 1.6.** El caso más usado se da cuando  $\mu$  es la partición vacía y  $r = 2$ . En éste, para que  $c_{(\rho(1), \rho(2))}^{\lambda}$  (que por comodidad se escribirá como  $c_{\rho(1)\rho(2)}^{\lambda}$ ) sea distinto de cero se requiere que  $\rho(1) \subseteq \lambda$ . La contrapuesta de dicha afirmación es falsa.

**Observación 1.7.**  $c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\mu} = c_{(\mu, \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r))}^{\lambda}$ .

Otros números importantes que se requerirán en el desarrollo de este trabajo son los denominados *números de Kostka*:

**Definición 1.8.** Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$  con  $m \leq n$ ,  $\nu \vdash n - m$ . Si  $\mu \subseteq \lambda$  denotaremos por  $K_{\lambda/\mu\nu}$  al número de tablas semiestándar de forma  $\lambda/\mu$  y contenido  $\nu$ ; en caso de que  $\mu \not\subseteq \lambda$  definiremos  $K_{\lambda/\mu\nu}$  como cero.<sup>6</sup>

En general se usan estos números en el caso en que  $\mu$  es la partición vacía.

**Observación 1.9.**  $K_{\lambda\lambda} = 1$  para toda  $\lambda \vdash n$ .

Además, si  $K_{\lambda\nu} \neq 0$  entonces existe una tabla semiestándar  $T$  de forma  $\lambda$  y contenido  $\nu$ , por lo cual para cada  $r \geq 1$  hay  $\nu_1 + \dots + \nu_r$  símbolos menores o iguales a  $r$  en  $T$  que deben estar en los primeros  $r$  renglones. Entonces  $\nu_1 + \dots + \nu_r \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_r$  para toda  $r$ , es decir,  $\nu \leq \lambda$ . Esto se resume en el siguiente enunciado:

**Observación 1.10.** Si  $K_{\lambda\nu} \neq 0$  entonces  $\lambda \supseteq \nu$ .

<sup>6</sup>Esta es la definición que presenta Macdonald en [IM95, p.73].

Usando lo anterior y la observación 1.4 se tiene también lo siguiente:

**Observación 1.11.** Si  $\lambda < \nu$  entonces  $K_{\lambda\nu} = 0$ .

La matriz de tamaño  $n \times n$  que tiene por entradas a los números  $K_{\lambda\nu}$  con  $\lambda$  y  $\nu$  particiones de  $n$ , con columnas y renglones arreglados en orden lexicográfico decreciente se llama la *matriz de Kostka* y la denotaremos como  $K := (K_{\lambda\nu})$ . Por las observaciones 1.9 y 1.11 sabemos que  $K$  es una matriz unitriangular superior. Denotaremos por  $K^{-1}$  a su inversa y por  $K_{\lambda\nu}^{(-1)}$  a las entradas de ésta. Existe una fórmula explícita para calcular estos coeficientes dada por Egecioglu y Remmel en [ER90]:

**Teorema 1.12.** Sea  $C$  el conjunto formado por todas las tablas de escuadras sesgadas especiales de forma  $\nu$  y cuyo contenido es un reordenamiento de  $\lambda$ . Entonces:

$$K_{\lambda\nu}^{(-1)} = \sum_{T \in C} \text{sgn}(T).$$

### 3. El grupo simétrico

Una permutación de un conjunto  $A$  es una función biyectiva de  $A$  en  $A$ . Si  $A$  es no vacío denotaremos por  $S_A$  al grupo formado por todas las permutaciones de  $A$ , con la composición de funciones como operación binaria. Cuando  $A$  es el conjunto finito  $\{1, 2, \dots, n\}$ , el grupo de todas las permutaciones de  $A$  es el *grupo simétrico de  $n$  letras* y se denota por  $S(n)$ .

Como es costumbre, denotaremos por  $(a_1 a_2 \cdots a_t)$ , con  $a_i \in A$  para toda  $i$  y  $a_i \neq a_j$  para toda  $i \neq j$ , al elemento de  $S(n)$  que manda a  $a_i$  en  $a_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq t-1$ , a  $a_t$  en  $a_1$  y deja fijos a los demás elementos de  $A$ . La composición de tales elementos, llamados *ciclos*, se hará de derecha a izquierda<sup>7</sup>, por ejemplo, en  $S(8)$  :

$$(1456)(215) = (16)(245).$$

Toda permutación en  $S(n)$  tiene una descomposición en ciclos ajenos, como se prueba en el libro [JF87, p.50] podemos entonces escribir a cualquier  $\sigma \in S(n)$  como

$$\sigma = (a_1^1 \cdots a_{k_1}^1)(a_1^2 \cdots a_{k_2}^2) \cdots (a_1^s \cdots a_{k_s}^s)$$

con  $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$ ,  $a_i^j \in A \forall i, j$  y  $\{a_1^i, \dots, a_{k_i}^i\} \cap \{a_1^j, \dots, a_{k_j}^j\} = \emptyset \forall i \neq j$ . A  $(k_1, \dots, k_s)$  se le llama la *forma cíclica de  $\sigma$* .

<sup>7</sup>Existen muchos autores que manejan la composición de izquierda a derecha, en cuyo caso  $(1456)(215) = (142)(56)$ .

Un ciclo  $(a_1 a_2)$  con  $a_1 \neq a_2$  es una *transposición*. Como observa Fraleigh en [JF87, p.53], toda permutación puede expresarse como producto de transposiciones. Definimos entonces el *signo de*  $\sigma \in S(n)$ ,  $sgn(\sigma)$ , como 1 si  $\sigma$  puede expresarse como producto de un número par de transposiciones y como  $-1$  en caso contrario.

La *clase de conjugación de*  $\sigma$  en  $S(n)$ , denotada por  $conj_{S(n)}(\sigma)$ , es el conjunto de todos los elementos de la forma  $\rho\sigma\rho^{-1}$  con  $\rho \in S(n)$ , y consiste de todas las permutaciones en  $S(n)$  que tienen la misma forma cíclica que  $\sigma$  como se prueba en [JL93, p.110]. Por ejemplo, las clases de conjugación de  $S(4)$  son:

$$\{1\}, \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\},$$

$$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\},$$

$$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \text{ y}$$

$$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

cuyas formas cíclicas asociadas son  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(4)$  respectivamente.

Dada una tabla de Young  $T$  donde el llenado se realiza con números menores o iguales a  $n$  y  $\sigma \in S(n)$  podemos construir una nueva tabla  $\sigma T$  poniendo el número  $\sigma i$  en el cuadro de  $T$  donde aparecía  $i$ , por ejemplo,

$$\text{si } T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 7 & 8 & \\ \hline 2 & & \\ \hline 9 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{entonces } (123)(76)T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 6 & 8 & \\ \hline 3 & & \\ \hline 9 & & \\ \hline \end{array}.$$

Lo anterior define una acción de  $S(n)$  en el conjunto de tablas de Young. Dada una tabla de forma  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  podemos preguntarnos qué elementos del grupo simétrico preservan los renglones de la tabla, es decir, actúan en ella sin intercambiar números de distintos renglones. La respuesta es que este conjunto resulta ser isomorfo a un producto de grupos simétricos de la forma  $S(\lambda_1) \times S(\lambda_2) \times \dots \times S(\lambda_r)$ . De modo más general, dado un vector  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$ , con  $\pi_1 + \dots + \pi_r = n$ , el *correspondiente subgrupo de Young de*  $S(n)$  es el conjunto de todas las permutaciones en el grupo simétrico que preservan la partición

$$\{1, \dots, \pi_1\} \sqcup \{\pi_1 + 1, \dots, \pi_1 + \pi_2\} \sqcup \dots \sqcup \{n - \pi_r + 1, \dots, n\}.$$

El subgrupo de Young asociado a  $\pi$ , denotado por  $S(\pi) = S(\pi_1, \dots, \pi_r)$  es entonces

$$\begin{aligned} S(\pi) &= S_{\{1, \dots, \pi_1\}} \times S_{\{\pi_1+1, \dots, \pi_1+\pi_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\pi_r+1, \dots, n\}} \\ &\cong S(\pi_1) \times S(\pi_2) \times \dots \times S(\pi_r) \end{aligned}$$

Por último mencionaremos una propiedad del grupo simétrico conocida como ambivalencia. Consideremos  $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$  un ciclo en  $S(n)$  (con  $k \leq n$ ). Mediante un cálculo directo podemos ver que

$$(a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1)(a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2 \dots a_k)(a_k a_{k-1} \dots a_1) = 1,$$

de donde  $\sigma^{-1} = (a_k a_{k-1} \dots a_1)$ . Probemos ahora que  $\sigma$  y  $\sigma^{-1}$  son conjugados en  $S(n)$ . Si  $k$  es par tomemos  $\rho = (a_1 a_k)(a_2 a_{k-1}) \dots (a_{\frac{k}{2}} a_{\frac{k}{2}+1})$  y si  $k$  es impar definamos  $\rho = (a_1 a_k)(a_2 a_{k-1}) \dots (a_{\frac{k-1}{2}} a_{\frac{k+3}{2}})$ . En cualquier caso se tiene que

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(a_1) \rho(a_2) \dots \rho(a_k)) = (a_k a_{k-1} \dots a_1) = \sigma^{-1},$$

donde la primera igualdad se obtiene de un resultado que se puede revisar en [JL93, p.109].

Sabemos que cada  $\sigma$  en  $S(n)$  se descompone como producto de ciclos ajenos,  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ . Por lo anterior existen  $\rho_1, \dots, \rho_t \in S(n)$  tales que  $\rho_i \sigma_i \rho_i^{-1} = \sigma_i^{-1}$  para toda  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Usando el hecho de que ciclos ajenos conmutan y observando en la construcción del párrafo anterior que las  $\rho_i$  son ajenas, tenemos lo siguiente:

$$(\rho_1 \dots \rho_t) \sigma (\rho_t^{-1} \dots \rho_1^{-1}) = \rho_1 \sigma_1 \rho_1^{-1} \dots \rho_t \sigma_t \rho_t^{-1} = \sigma_1^{-1} \dots \sigma_t^{-1} = \sigma^{-1}.$$

Todo elemento de  $S(n)$  es por tanto conjugado de su inverso en el grupo simétrico. Se dice entonces que  $S(n)$  es un grupo *ambivalente*. Como consecuencia se tiene lo siguiente:

**Observación 1.13.** Sea  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$  un vector de entradas enteras positivas. El subgrupo de Young asociado,  $S(\gamma)$ , es ambivalente.

#### 4. Caracteres

**Definición 1.14.** Se dice que  $\rho$  es una *representación por matrices del grupo finito*  $G$  si es un homomorfismo del grupo en el grupo de matrices invertibles de tamaño  $n \times n$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(n, C)$  (en este caso trabajaremos con el campo de los números complejos *i.e.*  $C = \mathbb{C}$ ).

La importancia de las representaciones radica en la posibilidad de estudiar al grupo  $G$  a partir de su imagen bajo el homomorfismo  $\rho$ .

Existe un concepto íntimamente ligado a las representaciones que constituye de hecho una forma alternativa de estudiar los homomorfismos antes mencionados:

**Definición 1.15.** Sea  $M$  un grupo abeliano con notación aditiva y  $R$  un anillo. Diremos que  $M$  es un  $R$ -módulo izquierdo si es posible definir un producto  $rm$  de manera que la aplicación de  $R \times M$  en  $M$  dada por  $(r, m) \mapsto rm$  cumpla las siguientes propiedades:

1.  $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
2.  $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$
3.  $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$
4.  $1m = m$

para toda  $m, m_1, m_2 \in M$ ,  $r, r_1, r_2 \in R$ , siendo 1 el elemento identidad del anillo  $R$ .<sup>8</sup>

Análogamente  $M$  es un  $R$ -módulo derecho si es posible definir un producto  $mr$  de manera que la aplicación de  $M \times R$  en  $M$  dada por  $(m, r) \mapsto mr$  cumpla las siguientes propiedades:

1.  $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$
2.  $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$
3.  $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$
4.  $m1 = m$

para toda  $m, m_1, m_2 \in M$ ,  $r, r_1, r_2 \in R$ , siendo 1 el elemento identidad del anillo  $R$ .

Cuando no se especifica si un módulo es derecho o izquierdo entenderemos que se trata de un módulo izquierdo.

**Observación 1.16.** Cuando  $R$  es un álgebra sobre un campo  $C$  y  $M$  es un  $R$ -módulo izquierdo,  $M$  tiene una estructura de espacio vectorial si definimos un producto por escalar del siguiente modo:  $\alpha m = (\alpha 1)m$ , donde  $\alpha \in C$ ,  $m \in M$  y 1 es el elemento identidad del álgebra  $R$ . Lo mismo ocurre para los  $R$ -módulos derechos.

En este escrito se trabajará con módulos sobre un anillo muy particular, construido a partir de un grupo  $G$  al tomar todas las sumas formales del tipo  $\sum_{g \in G} a_g g$  con  $a_g \in \mathbb{C}$ , donde la suma y el producto están dados por:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

<sup>8</sup>Observamos que si  $R$  es además un grupo multiplicativo, el producto  $rm$  define una acción de este grupo en  $M$ .

$$\sum_{g \in G} a_g g \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{\substack{h, \bar{h} \in G \\ h\bar{h} = g}} a_h b_{\bar{h}} g$$

con  $a_g, b_g \in \mathbb{C}$  para toda  $g \in G$ . Esta estructura es de hecho un álgebra asociativa, conocida como el *álgebra de grupo* y denotada por  $\mathbb{C}[G]$ .

A partir de este momento trabajaremos sólo con  $\mathbb{C}[G]$ -módulos que sean espacios vectoriales de dimensión finita. Los  $\mathbb{C}[G]$ -módulos juegan un papel primordial debido a que se encuentran en correspondencia con las representaciones de  $G$  sobre  $\mathbb{C}$ . Veamos ahora cómo es tal correspondencia:

i) Dada  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  una representación de  $G$  sobre  $\mathbb{C}$ ,  $V = \mathbb{C}^n$  puede ser visto como un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo si definimos  $gv := \rho(g)v$ .

ii) A la inversa, si tenemos  $V$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo de dimensión  $n$ , tomamos  $\mathfrak{B}$  una base de  $V$ ,  $T_g : V \rightarrow V$  tal que  $T_g(v) = gv$  y definimos  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  como  $\rho(g) := [T_g]_{\mathfrak{B}}$ . De este modo  $\rho$  resulta ser una representación del grupo  $G$ .

Como señalamos antes, dada una representación  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  es posible estudiar al grupo a partir de un subgrupo de matrices (su imagen bajo el homomorfismo  $\rho$ ); más aún, es posible estudiarlo en términos de la traza de dichas matrices. Esto da lugar a lo siguiente:

**Definición 1.17.** Dada  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  una representación de  $G$ , el *carácter asociado a  $\rho$*  es la aplicación  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\chi(g) = \text{tr} [\rho(g)]$ .

De acuerdo a lo que se observó anteriormente el correspondiente enunciado para módulos es:

**Definición 1.18.** Dado  $V$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo se define  $\chi$  el *carácter de  $V$*  como la aplicación  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $\chi(g) = \text{tr} [T_g]_{\mathfrak{B}}$  siendo  $\mathfrak{B}$  una base de  $V$ .

**Observación 1.19.**  $\chi(g)$  no depende de la base de  $V$  elegida.

La posibilidad de trabajar con caracteres en vez de hacerlo directamente con módulos radica en la estrecha relación que existe entre estos dos conceptos como se puede apreciar en el siguiente resultado cuya prueba aparece en [JL93, p. 143]:

**Teorema 1.20.** Sean  $U$  y  $V$  dos  $\mathbb{C}[G]$ -módulos con caracteres  $\chi_U$  y  $\chi_V$  respectivamente. Entonces  $U$  y  $V$  son isomorfos como  $\mathbb{C}[G]$ -módulos si y sólo si  $\chi_U = \chi_V$ .

El estudiar un objeto en términos de ciertos elementos que no puedan descomponerse a su vez en estructuras más pequeñas es un

procedimiento muy usado en matemáticas. Siguiendo esta idea tenemos:

**Definición 1.21.** Un subgrupo  $W$  de  $V$  se llama un  $\mathbb{C}[G]$ -submódulo de  $V$  cuando  $gw \in W$  para toda  $w \in W$  y  $g \in G$ , esto es, es un subgrupo de  $V$  donde la multiplicación por elementos del grupo es cerrada.

**Definición 1.22.** Se dice que un módulo  $V \neq \{0\}$  es *irreducible* o *simple* si sus únicos submódulos son  $\{0\}$  y  $V$ ; una representación  $\rho$  es *irreducible* si su correspondiente módulo lo es. Análogamente el carácter  $\chi$  de un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo es *irreducible* si dicho módulo lo es.

Uno de los resultados más importantes en la teoría de las representaciones es el llamado Teorema de Maschke, ya que reduce dicha teoría al estudio de los  $\mathbb{C}[G]$ -módulos irreducibles. A continuación explicaremos sus consecuencias y enunciaremos sin prueba este resultado, el cual puede revisarse en [JL93, p.70-75].

**Teorema 1.23.** Sea  $G$  un grupo finito y  $V$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo.<sup>9</sup> Si  $U$  es un  $\mathbb{C}[G]$ -submódulo de  $V$  entonces existe un  $\mathbb{C}[G]$ -submódulo de  $V$ ,  $W$ , tal que

$$V = U \oplus W.$$

Para trabajar en condiciones en que podamos aplicar el teorema anterior, de aquí en adelante consideraremos sólo grupos finitos.

**Definición 1.24.** Se dice que un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $V$  es *completamente reducible* si se puede descomponer como suma directa de  $\mathbb{C}[G]$ -submódulos irreducibles, es decir, si  $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ , donde cada  $U_i$  es un  $\mathbb{C}[G]$ -submódulo irreducible de  $V$ .

Como consecuencia del Teorema de Maschke tenemos que todo  $\mathbb{C}[G]$ -módulo no cero es completamente reducible.

El álgebra de grupo  $\mathbb{C}[G]$  es en sí misma un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo; por lo anterior se descompone como la suma de  $\mathbb{C}[G]$ -submódulos irreducibles

$$\mathbb{C}[G] = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

y resulta ser que todo  $\mathbb{C}[G]$ -módulo irreducible es isomorfo a alguno de los  $U_i$ , ver [JL93, p.91]. Tenemos así que hay solamente un número finito de  $\mathbb{C}[G]$ -módulos irreducibles no isomorfos. Entonces, dado  $G$  siempre es posible hallar  $\mathbb{C}[G]$ -módulos  $U_1, \dots, U_k$  tales que  $U_i \not\cong U_j$ ,  $\forall i \neq j$  y todo  $\mathbb{C}[G]$ -módulo irreducible es isomorfo a algún  $U_i$ . Se dice

<sup>9</sup>El resultado puede escribirse de manera más general, ya que es válido si en vez de trabajar con  $\mathbb{C}$  se toma cualquier campo  $C$  tal que su característica no divida al orden del grupo.



en tal caso que  $\{U_1, \dots, U_k\}$  es un *conjunto completo de  $\mathbb{C}[G]$ -módulos irreducibles no isomorfos* [JL93, p. 101]. Agrupando los módulos que aparecen repetidos, cualquier  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $V$  se puede escribir del siguiente modo:

$$V = d_1 U_1 \oplus d_2 U_2 \oplus \dots \oplus d_k U_k, \text{ con } d_i \in \mathbb{N} \text{ para toda } 1 \leq i \leq k.$$

Podemos considerar  $\chi_1, \dots, \chi_k$  los caracteres correspondientes a dichos módulos que son todos los posibles caracteres irreducibles del grupo  $G$ . Entonces, si  $\chi_V$  es el carácter asociado al  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $V$  tenemos que

$$\chi_V = d_1 \chi_1 + d_2 \chi_2 + \dots + d_k \chi_k, \text{ con } d_i \in \mathbb{N} \text{ para toda } 1 \leq i \leq k$$

por lo que  $\{\chi_i\}_{i=1}^k$  genera al conjunto de todos los caracteres asociados a un grupo  $G$ .

Se puede probar que un carácter es una función de clase, es decir, constante en clases de conjugación, ver [JL93, p.119]. Podemos definir además un producto interno de caracteres como sigue:

**Definición 1.25.** Dados  $\phi$  y  $\psi$  caracteres de  $G$ , el *producto interno de  $\phi$  y  $\psi$*  está dado por

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

El producto interno de dos caracteres puede darnos mucha información como se aprecia en el resultado enunciado a continuación cuya demostración se encuentra en [JL93, pp.141,143]:

**Teorema 1.26.** Si  $\phi$  y  $\psi$  son caracteres irreducibles de  $G$  entonces

$$\langle \phi, \psi \rangle = \delta_{\phi\psi},$$

más aún, un carácter  $\phi$  en  $G$  es irreducible si y sólo si  $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ .

Con lo anterior obtenemos que  $\{\chi_i\}_{i=1}^k$  es un conjunto ortonormal que genera al conjunto de todos los caracteres de  $G$ . La cardinalidad de este conjunto,  $k$ , es precisamente el número de clases de conjugación de  $G$  [JL93, pp. 119,152].

**Observación 1.27.** Si  $\chi_V = d_1 \chi_1 + d_2 \chi_2 + \dots + d_k \chi_k$  es el carácter asociado al  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $V$  entonces  $\langle \chi_V, \chi_i \rangle = d_i$  para toda  $1 \leq i \leq k$ .

**Observación 1.28.**  $\chi_1$  corresponderá a la llamada representación trivial de  $G$ , i.e.  $\rho_1 : G \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$  con  $\rho_1(g) = (1) \forall g \in G$ , por lo cual  $\chi_1 : G \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\chi_1(g) = tr(1) = 1 \forall g \in G$ .

Dados dos caracteres de  $G$ ,  $\chi_U$  y  $\chi_V$ , asociados a  $\mathbb{C}[G]$ -módulos  $U$  y  $V$  respectivamente, es natural considerar la función  $\chi_U \chi_V$  definida como  $\chi_U \chi_V(g) := \chi_U(g) \chi_V(g)$ ; con esta construcción obtenemos una

función de clase pero no es evidente ver que se trata en realidad de un carácter. En este punto es necesario introducir un nuevo concepto, el producto tensorial, para formar a partir de  $U$  y  $V$  el  $\mathbb{C}[G]$ -módulo cuyo carácter sea precisamente dicha función de clase.

**4.1. Producto tensorial.** Daremos a continuación una construcción general del llamado producto tensorial. Sean  $R$  un anillo,  $U$  un  $R$ -módulo derecho y  $V$  un  $R$ -módulo izquierdo. Obtendremos a partir de ellos un grupo abeliano denotado por  $U \otimes_R V$  al que llamaremos el producto tensorial de  $U$  y  $V$  sobre  $R$ . Requeriremos del siguiente concepto:

**Definición 1.29.** Dados  $R$  un anillo,  $U$  un  $R$ -módulo derecho,  $V$  un  $R$ -módulo izquierdo y  $P$  un grupo abeliano con notación aditiva, diremos que  $f : U \times V \rightarrow P$  es una *aplicación  $R$ -balanceada* si ocurre que:

1.  $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$ ,
2.  $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ ,
3.  $f(u, rv) = f(ur, v)$ ,

para toda  $r \in R$ ,  $u_1, u_2 \in U$ ,  $v_1, v_2 \in V$ .

Definamos  $F$  como el grupo abeliano con notación aditiva que consiste de todas las sumas formales finitas  $\sum_{i,j} z_{ij}(u_i, v_j)$  con  $z_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,

$(u_i, v_j) \in U \times V$ .

Sea  $H$  el subgrupo de  $F$  generado por las sumas formales

$$\begin{aligned} &(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v), \\ &(u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2), \\ &(u, rv) - (ur, v) \end{aligned} \tag{2}$$

para toda  $r \in R$ ,  $u_1, u_2 \in U$ ,  $v_1, v_2 \in V$ . El cociente  $F/H$  es el *producto tensorial de  $U$  y  $V$  sobre  $R$*  y lo denotaremos como  $U \otimes_R V$ . La demostración detallada de este hecho y las propiedades que se mencionarán a continuación aparecen en [CR62, pp.59-73].

El producto tensorial está determinado de modo único por las siguientes propiedades:

1.  $U \otimes_R V$  es un grupo abeliano.
2. Existe  $t : U \times V \rightarrow U \otimes_R V$  una aplicación balanceada tal que

todo elemento de  $U \otimes_R V$  es de la forma  $\sum_{i,j} t(u_i, v_j)$  con  $u_i \in U$

y  $v_j \in V$ .

3. Dado  $P$  un grupo abeliano con notación aditiva, toda aplicación  $R$  balanceada  $f : U \times V \rightarrow P$  puede ser factorizada a través de  $U \otimes_R V$ , es decir, existe un homomorfismo  $f^* : U \otimes_R V \rightarrow P$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{f} & P \\ & \searrow t & \uparrow f^* \\ & & U \otimes_R V \end{array}$$

Denotaremos por  $u \otimes v$  a la clase lateral  $(u, v) + H$ . Se sigue de las relaciones dadas en (2) que

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2) \otimes v &= u_1 \otimes v + u_2 \otimes v, \\ u \otimes (v_1 + v_2) &= u \otimes v_1 + u \otimes v_2, \\ u \otimes rv &= ur \otimes v \end{aligned}$$

para toda  $r \in R$ ,  $u_1, u_2 \in U$ ,  $v_1, v_2 \in V$ .

Tomemos ahora  $U$  y  $V$   $\mathbb{C}[G]$ -módulos y consideremos su producto tensorial sobre el campo  $\mathbb{C}$ ,  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$ . Bajo la acción definida por

$$g(u \otimes v) := gu \otimes gv,$$

extendida linealmente a elementos en el álgebra de grupo, tenemos que  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$  es un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo.<sup>10</sup>

Retomemos ahora la idea que motivó la construcción del producto tensorial en el presente trabajo. Siendo  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo como se observó líneas arriba, tiene sentido considerar su carácter asociado:

**Definición 1.30.** Dados  $U$  y  $V$   $\mathbb{C}[G]$ -módulos,  $\chi_U$  y  $\chi_V$  sus caracteres correspondientes, el *producto de Kronecker de  $\chi_U$  y  $\chi_V$* , denotado por  $\chi_U \otimes \chi_V$  es el carácter del  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$ .

Estudiando cómo son la representación  $\rho$  asociada al  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$  y la estructura y traza de la matriz  $\rho(g)$  para  $g \in G$ , podemos saber cómo es el carácter previamente definido. Se tiene así el siguiente resultado, probado en [JL93, p.192]:

<sup>10</sup>Esta definición no implica que  $a(u \otimes v) = au \otimes av$  para toda  $a \in \mathbb{C}[G]$ , de hecho esto último no da a  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$  estructura de  $\mathbb{C}[G]$ -módulo ya que no es una aplicación bien definida; es por ello que se define primero la acción del grupo y después se extiende al álgebra de grupo.

**Teorema 1.31.** Sean  $U$  y  $V$   $\mathbb{C}[G]$ -módulos,  $\chi_U$  y  $\chi_V$  sus caracteres correspondientes, el producto de Kronecker de  $\chi_U$  y  $\chi_V$ , se comporta del siguiente modo:  $(\chi_U \otimes \chi_V)(g) = \chi_U(g)\chi_V(g)$  para toda  $g \in G$ .

Algunas propiedades del producto de Kronecker que se desprenden del teorema anterior son las siguientes:

**Teorema 1.32.** Sean  $\varphi, \psi, \xi$  caracteres de  $G$  y  $\alpha$  un natural. Entonces:

1.  $(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi)$ ,
2.  $\varphi \otimes \psi = \psi \otimes \varphi$ ,
3.  $\varphi \otimes (\psi + \xi) = \varphi \otimes \psi + \varphi \otimes \xi$ ,
4.  $\varphi \otimes (\alpha\psi) = (\alpha\varphi) \otimes \psi = \alpha(\varphi \otimes \psi)$ .

Hemos definido así un producto de caracteres asociados a un mismo grupo. Si ahora tomamos otro grupo  $H$ ,  $U$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo y  $V$  un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo, el producto tensorial  $U \otimes_{\mathbb{C}} V$  puede ser visto como un  $\mathbb{C}[G \times H]$  módulo mediante la llamada acción diagonal:  $(g, h)u \otimes v := gu \otimes hv$ .

**Definición 1.33.** Dados  $U$  un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo y  $V$  un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo,  $\chi_U$  y  $\chi_V$  sus caracteres correspondientes, el producto  $\chi_U \times \chi_V$  es el carácter de  $U \otimes V$  visto como  $\mathbb{C}[G \times H]$ -módulo a través de la acción diagonal.

El comportamiento de dicho producto queda descrito con el siguiente resultado (ver [DK73, p.97]):

**Teorema 1.34.** Si  $U$  es un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo y  $V$  un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo, se tiene que  $(\chi_U \times \chi_V)(g, h) = \chi_U(g)\chi_V(h)$  para toda pareja  $(g, h) \in G \times H$ .

De aquí que:

**Teorema 1.35.** Sean  $G$  y  $H$  grupos,  $\varphi, \psi$  caracteres de  $G$ ,  $\xi, \zeta$  caracteres de  $H$  y  $\alpha$  un natural. Entonces:

1.  $\varphi \times (\xi + \zeta) = \varphi \times \xi + \varphi \times \zeta$ ,
2.  $(\varphi + \psi) \times \xi = \varphi \times \xi + \psi \times \xi$ ,
3.  $\varphi \times (\alpha\xi) = (\alpha\varphi) \times \xi = \alpha(\varphi \times \xi)$ ,

De la definición del producto interno de caracteres y el Teorema 1.34 tenemos lo siguiente.

**Teorema 1.36.** Dados  $G$  y  $H$  grupos,  $\phi$  y  $\psi$  caracteres de  $G$ ,  $\xi$  y  $\zeta$  caracteres de  $H$ , se tiene que

$$\langle \phi \times \xi, \psi \times \zeta \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \langle \xi, \zeta \rangle.$$

Finalmente enunciaremos un resultado que involucra a los dos productos de caracteres que se han definido hasta el momento, consecuencia de los Teoremas 1.31 y 1.34:

**Teorema 1.37.** Sean  $G_1, G_2, \dots, G_p$  grupos, con  $\varphi_i, \psi_i$  caracteres en  $G_i$  para  $1 \leq i \leq p$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_p) \otimes (\psi_1 \times \cdots \times \psi_p) \\ = (\varphi_1 \otimes \psi_1) \times \cdots \times (\varphi_p \otimes \psi_p) \end{aligned}$$

En el siguiente capítulo se trabajará con estos dos productos de caracteres aplicados al grupo simétrico y se introducirá un tercer producto para este caso particular.

**4.2. Módulos inducidos y restringidos.** Consideremos a  $H$  como un subgrupo de un grupo  $G$ . Si  $W$  es un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo podemos restringir la acción de  $G$  a los elementos que pertenecen a  $H$  para ver a  $W$  como un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo.

**Definición 1.38.** Dados  $W$ , un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo, y  $H$  un subgrupo de  $G$ , la *restricción de  $W$  de  $G$  a  $H$* ,  $\text{Res}_H^G(W)$ , es el  $\mathbb{C}[H]$ -módulo que se obtiene al restringir la acción de  $G$  en  $W$  al subgrupo  $H$ . Si  $\chi_W$  es el carácter del  $\mathbb{C}[G]$ -módulo  $W$ , entonces  $\text{Res}_H^G(\chi_W)$  denotará al carácter de la restricción de  $W$  de  $G$  a  $H$ .

**Observación 1.39.**  $\text{Res}_H^G(\chi_W)(h) = \chi_W(h)$  para toda  $h \in H$ .

Si ahora tenemos  $V$  un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo, es posible construir un  $\mathbb{C}[G]$ -módulo utilizando el producto tensorial:

**Definición 1.40.** Dados  $V$ , un  $\mathbb{C}[H]$ -módulo, y  $H$  un subgrupo de  $G$ , la *inducción de  $V$  de  $H$  a  $G$*  designada por  $\text{Ind}_H^G(V)$  se define como el  $\mathbb{C}[G]$ -módulo dado por:

$$\text{Ind}_H^G(V) := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$$

con la acción  $g(a \otimes v) := ga \otimes v$  para todo  $g \in G$ ,  $a \in \mathbb{C}[G]$ ,  $v \in V$ . Si  $\chi_V$  es el carácter del  $\mathbb{C}[H]$ -módulo  $V$ , entonces  $\text{Ind}_H^G(\chi_V)$  denotará al carácter de la inducción de  $V$  de  $G$  a  $H$ .

Existe una fórmula para la evaluación de este carácter en un determinado elemento del grupo  $G$ ; como no se ocupará para el desarrollo del presente trabajo remitiremos al lector interesado en ella al libro de James y Liebeck [JL93, p.232].

Hasta ahora hemos trabajado con caracteres asociados a un determinado grupo, pero es factible tomar combinaciones lineales enteras

de caracteres para trabajar en un marco más general; aunque dichas combinaciones son también funciones de clase (*i.e.* constantes en clases de conjugación) no son necesariamente caracteres asociados a un cierto módulo.<sup>11</sup> El conjunto de todas estas combinaciones lineales es un anillo como consecuencia del Teorema 1.32.

**Definición 1.41.** Sea  $\{\chi_i\}_{i=1}^k$  un conjunto completo de caracteres irreducibles de un grupo  $G$ . Al conjunto

$$R(G) := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

junto con las operaciones

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i \right) + \left( \sum_{i=1}^k \beta_i \chi_i \right) &:= \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) \chi_i \\ \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i \right) \otimes \left( \sum_{i=1}^k \beta_i \chi_i \right) &:= \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j) \chi_i \otimes \chi_j \end{aligned}$$

se le conoce como el *anillo de caracteres del grupo  $G$* .

El producto interno de caracteres se extiende de manera natural a elementos de  $R(G)$ .

**Observación 1.42.**  $\{\chi_i\}_{i=1}^k$  es una  $\mathbb{Z}$ -base ortonormal del anillo de caracteres del grupo  $G$ .

Debido a la observación anterior tenemos que:

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i, \sum_{i=1}^k \beta_i \chi_i \right\rangle := \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i. \quad (3)$$

**Observación 1.43.** Si  $\phi$  y  $\psi$  son caracteres entonces  $\langle \phi, \psi \rangle \geq 0$ .

Extendemos también de modo lineal la inducción y la restricción de caracteres<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Res}_H^G \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i \right) &:= \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{Res}_H^G(\chi_i) \\ \text{Ind}_H^G \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i \right) &:= \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{Ind}_H^G(\chi_i). \end{aligned}$$

<sup>11</sup>A una combinación lineal entera de caracteres se le llama un *carácter virtual*.

<sup>12</sup>Esta extensión es posible ya que para  $V_1$  y  $V_2$   $\mathbb{C}[H]$ -módulos se tiene que  $\text{Ind}_H^G(V_1 \oplus V_2)$  y  $\text{Ind}_H^G(V_1) \oplus \text{Ind}_H^G(V_2)$  son isomorfos como  $\mathbb{C}[G]$ -módulos debido a las propiedades del producto tensorial probadas en [CR62, p.64]; esto es análogo para la restricción de módulos.

Terminaremos este capítulo con algunos resultados que se requerirán posteriormente, el primero es un resultado clásico de caracteres conocido como el Teorema de reciprocidad de Frobenius que relaciona los conceptos de inducción y restricción.

**Teorema 1.44.** Sean  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ ,  $\phi \in R(H)$  y  $\psi \in R(G)$  se tiene que<sup>13</sup>:

$$\langle \text{Ind}_H^G(\phi), \psi \rangle = \langle \phi, \text{Res}_H^G(\psi) \rangle.$$

Otro resultado obtenido por Frobenius, cuya prueba aparece en [CR62, p.268], es:

**Teorema 1.45.** Sean  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ ,  $\phi \in R(H)$  y  $\psi \in R(G)$ . Entonces:

$$\text{Ind}_H^G(\phi) \otimes \psi = \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\psi) \otimes \phi).$$

A continuación se presenta una aplicación del Teorema 1.44 que resultará útil posteriormente al aplicarlo al grupo simétrico.

**Teorema 1.46.** Sean  $H$  y  $G$  grupos con  $H$  un subgrupo de  $G$ . Supongamos que cada elemento de  $H$  es conjugado en  $H$  a su inverso (i.e.  $H$  es ambivalente). Sean  $\phi$  y  $\psi$  caracteres de  $G$  y  $1_H$  el carácter trivial de  $H$ . Entonces:

$$\langle \text{Ind}_H^G(1_H), \phi \otimes \psi \rangle = \sum_{\substack{\chi \text{ carácter} \\ \text{irreducible de } H}} \langle \text{Res}_H^G(\phi), \chi \rangle \langle \text{Res}_H^G(\psi), \chi \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN:

Utilizando el Teorema de reciprocidad de Frobenius 1.44 y la definición del producto de caracteres 1.25 tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \text{Ind}_H^G(1_H), \phi \otimes \psi \rangle &= \langle 1_H, \text{Res}_H^G(\phi \otimes \psi) \rangle = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\phi(h)\psi(h)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi(h^{-1})\psi(h^{-1}), \end{aligned}$$

donde esta última igualdad se da ya que  $\overline{\xi(g)} = \xi(g^{-1})$  para todo carácter de un grupo y para todo elemento  $g$  del mismo (ver [JL93, p.123]). Por hipótesis,  $H$  es ambivalente y sabemos que los caracteres

<sup>13</sup>La demostración de este resultado no se incluye en este trabajo pero puede encontrarse en la mayoría de los libros de teoría de caracteres, por ejemplo en [JL93, pp.230-231].

son constantes en clases de conjugación entonces  $\phi(h^{-1}) = \phi(h)$  para toda  $h \in H$  y así esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi(h) \psi(h^{-1}) &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \text{Res}_H^G(\phi(h)) \overline{\text{Res}_H^G(\psi(h))} \\ &= \langle \text{Res}_H^G(\phi), \text{Res}_H^G(\psi) \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado sabemos que  $\text{Res}_H^G(\phi)$  y  $\text{Res}_H^G(\psi)$  se descomponen en términos de los caracteres irreducibles de  $H$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{Res}_H^G(\phi) &= \sum_{\substack{\chi \text{ carácter} \\ \text{irreducible de } H}} \langle \text{Res}_H^G(\phi), \chi \rangle \chi \\ \text{Res}_H^G(\psi) &= \sum_{\substack{\chi \text{ carácter} \\ \text{irreducible de } H}} \langle \text{Res}_H^G(\psi), \chi \rangle \chi \end{aligned}$$

y por la ecuación (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} &\langle \text{Res}_H^G(\phi), \text{Res}_H^G(\psi) \rangle \\ &= \sum_{\substack{\chi \text{ carácter} \\ \text{irreducible de } H}} \langle \text{Res}_H^G(\phi), \chi \rangle \langle \text{Res}_H^G(\psi), \chi \rangle, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\langle \text{Ind}_H^G(1_H), \phi \otimes \psi \rangle = \sum_{\substack{\chi \text{ carácter} \\ \text{irreducible de } H}} \langle \text{Res}_H^G(\phi), \chi \rangle \langle \text{Res}_H^G(\psi), \chi \rangle.$$

□

Finalmente concluiremos con un resultado que aplicado al grupo simétrico nos permitirá obtener una cota para los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  a estudiar en esta tesis.

**Lema 1.47.** *Dado  $\phi$  un carácter de un grupo  $G$ , se tiene que*

$$|\phi(g)| \leq \phi(1).$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $\rho$  la representación asociada al carácter  $\phi$ . Necesariamente  $\rho(1) = I_n$ , y por tanto  $\phi(1) = \text{tr}(I_n) = n$ . Sea  $g \in G$ , es posible pensar que  $\rho(g)$  es una matriz diagonal ya que en caso de no serlo podemos hallar  $M \in GL(n, \mathbb{C})$  tal que  $\rho(g) = M^{-1}DM$  con  $D$  una matriz diagonal (ver [JL93, p.83]), así que  $\phi(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(D) = d_1 + \dots + d_n$ , donde los  $d_i$  son las entradas en la diagonal de  $D$ . Además



$g^{|G|} = 1$  y  $\rho$  es un homomorfismo, por lo que  $D^{|G|} = I_n$ ; esto implica que las  $d_i$  son raíces de la unidad y por tanto  $|d_i| = 1$  para toda  $i$ . Entonces:

$$|\phi(g)| = |d_1 + \cdots + d_n| \leq |d_1| + \cdots + |d_n| = n = \phi(1).$$

El enunciado que se presenta a continuación aparece como ejercicio en el libro de Isaacs, [MI94, p.61]:

**Teorema 1.48.** *Sean  $\xi$ ,  $\psi$  y  $\phi$  caracteres de un grupo  $G$ , los dos primeros irreducibles, entonces*

$$\langle \xi \otimes \phi, \psi \rangle \leq \phi(1).$$

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos primero que por el Teorema 1.26, como  $\xi$  y  $\psi$  son caracteres irreducibles, entonces  $\langle \xi, \xi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$ .

Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la observación 1.43 y la definición del producto interior de caracteres 1.25 tenemos

$$\begin{aligned} \langle \xi \otimes \phi, \psi \rangle^2 &\leq \langle \xi \otimes \phi, \xi \otimes \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle = \langle \xi \otimes \phi, \xi \otimes \phi \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \phi(g) \overline{\xi(g) \phi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 |\phi(g)|^2 \end{aligned}$$

usando el Lema 1.47 resulta que

$$\langle \xi \otimes \phi, \psi \rangle^2 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 \phi(1)^2 = \phi(1)^2 \langle \xi, \xi \rangle = \phi(1)^2,$$

de donde se concluye el resultado. □

## CAPÍTULO 2

### Caracteres en el grupo simétrico

En el presente capítulo se establecerán las definiciones, propiedades y resultados básicos de caracteres del grupo simétrico. Se enunciará la Regla de Young y se esbozará una prueba de la Regla de Littlewood-Richardson, mencionaremos consecuencias de este resultado que se requerirán en capítulos posteriores.

#### 1. Caracteres asociados a una partición

A partir de este momento concentraremos nuestra atención en el grupo simétrico. En el capítulo precedente se mencionó que es posible hallar un conjunto completo de caracteres irreducibles de un grupo. En el caso del grupo simétrico  $S(n)$  tal conjunto se construye a través de tablas asociadas a las distintas particiones de  $n$ , de la siguiente manera:

Dada  $\lambda \vdash n$ , sea  $T^\lambda$  la tabla estándar de forma  $\lambda$  con llenado canónico. Consideremos el elemento de  $\mathbb{C}[S(n)]$

$$e(T^\lambda) := \sum_{\substack{\sigma \in R(T^\lambda) \\ \rho \in C(T^\lambda)}} \text{sgn}(\rho)\sigma\rho$$

conocido como *simetrizador de Young*, donde

$$R(T^\lambda) := \{\sigma \in S(n) \mid \sigma \text{ preserva los renglones de } T^\lambda\}$$

$$C(T^\lambda) := \{\rho \in S(n) \mid \rho \text{ preserva las columnas de } T^\lambda\}.$$

$\mathbb{C}[S(n)]e(T^\lambda)$  es un  $S(n)$ -módulo con el producto  $\sigma(\rho e(T^\lambda)) = (\sigma\rho)e(T^\lambda)$  para  $\sigma \in S(n)$  y  $\rho \in \mathbb{C}[S(n)]$ . Tiene sentido entonces hablar del carácter asociado.

**Definición 2.1.** Dada  $\lambda \vdash n$ , denotaremos por  $\chi^\lambda$  al carácter de  $S(n)$  asociado al  $S(n)$ -módulo  $\mathbb{C}[S(n)]e(T^\lambda)$  con el producto  $\sigma(\rho e(T^\lambda)) := (\sigma\rho)e(T^\lambda)$  para toda  $\rho \in \mathbb{C}[S(n)]$ ,  $\sigma \in S(n)$ .

Las propiedades de esta construcción pueden revisarse en [CR62, p. 197].

En los casos en que  $\lambda = (n)$  o  $\lambda = (1^n)$  la evaluación del carácter  $\chi^\lambda$  resulta bastante sencilla como prueba Fulton en [FH91, p.46-47]:

**Teorema 2.2.** Sea  $\sigma \in S(n)$ . Entonces:

1.  $\chi^{(n)}(\sigma) = 1$ ,
2.  $\chi^{(1^n)}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ .

Los caracteres  $\chi^{(n)}$  y  $\chi^{(1^n)}$  se conocen como los caracteres trivial y alternante de  $S(n)$  respectivamente.

A continuación estableceremos cómo se comportan estos dos caracteres como factores en un producto de Kronecker:

**Teorema 2.3.** Sea  $\lambda \vdash n$ . Entonces:

1.  $\chi^{(n)} \otimes \chi^\lambda = \chi^\lambda$ ,
2.  $\chi^{(1^n)} \otimes \chi^\lambda = \chi^{\lambda'}$ .

El primer inciso se verifica usando el teorema previo y el Teorema 1.31. El segundo inciso, que establece la relación existente entre el carácter asociado a una partición y el correspondiente a su conjugada, puede revisarse en [FH91, p.47]. Este resultado nos lleva a lo siguiente:

**Definición 2.4.** Dado  $\xi \in R(S(n))$ ,  $\xi' := \xi \otimes \chi^{(1^n)}$ .

Se prueba que  $\chi^\lambda$  es un carácter irreducible de  $S(n)$  para toda  $\lambda \vdash n$ , que  $\chi^\lambda \neq \chi^\mu$  para toda  $\mu$  partición de  $n$  distinta de  $\lambda$  y que todo carácter irreducible en  $S(n)$  es de esta forma (ver [CR62, p.197]), entonces:

**Teorema 2.5.**  $\{\chi^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  es el conjunto completo de caracteres irreducibles de  $S(n)$ .

De acuerdo con ello el anillo de caracteres del grupo simétrico queda descrito del siguiente modo:

$$R(S(n)) = \left\{ \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda \chi^\lambda \mid a_\lambda \in \mathbb{Z} \right\}$$

siendo  $\{\chi^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  una base ortonormal de  $R(S(n))$ . Dado un carácter  $\xi$  en  $S(n)$ , podemos escribirlo en términos de esta base como  $\xi = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda \chi^\lambda$ , donde los  $a_\lambda \in \mathbb{Z}$  son enteros no negativos.

**Observación 2.6.** Los caracteres de los grupos simétricos toman siempre valores enteros (ver [JL93, p.251]).

Posteriormente requeriremos la siguiente versión generalizada del Teorema 2.5 probada en [MI94, p.59]:

**Teorema 2.7.** Dado  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t)$  un vector de enteros positivos,  $\mathfrak{B} = \{\chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(t)} \mid \rho(1) \vdash \pi_1, \dots, \rho(t) \vdash \pi_t\}$  es el conjunto completo de módulos irreducibles de  $S(\pi)$ .

Es posible hablar del ancho y la altura de un carácter en el grupo simétrico; se entiende por ellos al ancho y la altura máximos de las particiones involucradas en la descomposición de  $\xi$  en caracteres irreducibles; dicho de otro modo:

**Definición 2.8.** Sea  $\xi \in R(S(n))$ , denotaremos por  $w(\xi)$  y por  $h(\xi)$  al *ancho* y a la *altura* de  $\xi$ , respectivamente donde

$$w(\xi) = \text{máx}\{w(\beta) \mid \langle \xi, \chi^\beta \rangle \neq 0\},$$

$$h(\xi) = \text{máx}\{h(\beta) \mid \langle \xi, \chi^\beta \rangle \neq 0\}.$$

Consideremos ahora una estructura más amplia dada por

$$R := \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(S(n)).$$

En el capítulo anterior se definieron dos productos de caracteres y se mencionaron algunas de sus propiedades. A continuación definiremos un producto en  $R$ . Dados  $\varphi$  y  $\xi$ , caracteres en  $S(i)$  y  $S(j)$  respectivamente, sabemos que  $\varphi \times \xi$  es un carácter en  $S(i) \times S(j) \cong S(i, j)$ , grupo que puede pensarse como un subgrupo de  $S(i+j)$ . Podemos entonces considerar el carácter que se obtiene al inducir  $\varphi \times \xi$  a  $S(i+j)$ .

**Definición 2.9.** Sean  $\varphi$  y  $\xi$  caracteres en  $S(i)$  y  $S(j)$  respectivamente; el *producto externo* de  $\varphi$  y  $\xi$ , denotado por  $\varphi \bullet \xi$ , está dado por

$$\varphi \bullet \xi := \text{Ind}_{S(i,j)}^{S(i+j)}(\varphi \times \xi).$$

Este producto se extiende a elementos de  $R$ : dados  $(a_n), (b_n) \in R$  definimos

$$(a_n) \bullet (b_n) := \left( \sum_{i+j=n} a_i \bullet b_j \right)_{n=0}^{\infty}.$$

Bajo este producto, y con la suma coordenada a coordenada  $R$  es un anillo conmutativo con uno, ya que:

**Teorema 2.10.** Sean  $\varphi \in R(S(l)), \xi, \zeta \in R(S(m)), \psi \in R(S(n))$  y  $\alpha$  un entero. Entonces:

1.  $(\varphi \bullet \xi) \bullet \psi = \varphi \bullet (\xi \bullet \psi)$ ,
2.  $\varphi \bullet \xi = \xi \bullet \varphi$ ,
3.  $\varphi \bullet (\xi + \zeta) = \varphi \bullet \xi + \varphi \bullet \zeta$ ,
4.  $\varphi \bullet (\alpha \xi) = (\alpha \varphi) \bullet \xi = \alpha(\varphi \bullet \xi)$ .

La prueba puede revisarse en [DK73, p.128].

Con este producto definiremos un nuevo carácter:

**Definición 2.11.** Sean  $n \geq m$ ,  $\lambda \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$ . El carácter  $\chi^{\lambda/\mu}$  es aquél tal que

$$\langle \chi^\nu, \chi^{\lambda/\mu} \rangle = \langle \chi^\nu \bullet \chi^\mu, \chi^\lambda \rangle$$

para toda  $\nu \vdash n - m$ .

**Observación 2.12.** Dado que  $\{\chi^\lambda | \lambda \vdash n - m\}$  es una base de  $R(S(n - m))$  y el producto externo de caracteres distribuye la suma se tiene que

$$\langle \xi, \chi^{\lambda/\mu} \rangle = \langle \xi \bullet \chi^\mu, \chi^\lambda \rangle$$

para todo  $\xi \in R(S(n - m))$ .

Denotemos por  $1_\pi$  al carácter trivial del subgrupo de Young  $S(\pi)$ . Introduciremos ahora otros caracteres importantes del grupo simétrico y analizaremos su relación con los  $\chi^\lambda$ .

**Definición 2.13.** Dado  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$  un vector con entradas no negativas tales que  $\pi_1 + \dots + \pi_r = n$ . Sea  $\phi^\pi := \text{Ind}_{S(\pi)}^{S(n)}(1_\pi)$ ; a este carácter se le conoce como el *carácter de permutaciones asociado a  $\pi$* .

Por el inciso 1 del Teorema 2.2 tenemos que:

**Observación 2.14.** Dado  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$  un vector de entradas no negativas tales que  $\pi_1 + \dots + \pi_r = n$  tenemos que

$$\phi^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)} = \chi^{(\pi_1)} \bullet \chi^{(\pi_2)} \bullet \dots \bullet \chi^{(\pi_r)}.$$

De aquí que al usar la conmutatividad del producto externo de caracteres se tenga que:

**Observación 2.15.** Si  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$  tiene las mismas entradas que  $\pi$  salvo por su orden entonces  $\phi^\gamma = \phi^\pi$ .

Estos caracteres son importantes ya que forman también una  $\mathbb{Z}$ -base del anillo de caracteres de  $S(n)$ , ver [JL93, p.39]. Un resultado muy útil en la teoría de caracteres, conocido como la Regla de Young, establece la relación entre estas dos bases y se enunciará en la siguiente sección.

## 2. Reglas de Young y de Littlewood-Richardson

A continuación enunciamos dos versiones de la Regla de Young, que como se mencionó anteriormente establece la relación entre las  $\mathbb{Z}$ -bases  $\{\chi^\lambda | \lambda \vdash n\}$  y  $\{\phi^\lambda | \lambda \vdash n\}$ . Las demostraciones de estos resultados se encuentran en los principales libros sobre el tema, por ejemplo en [JK81, 2.8].

**Teorema 2.16.** Sean  $\nu$  y  $\tau$  particiones de  $n$ . La multiplicidad de  $\chi^\tau$  en  $\phi^\nu$  es igual al número de tablas semiestándar de forma  $\tau$  y contenido  $\nu$ , es decir,

$$\phi^\nu = \sum_{\tau \supseteq \nu} K_{\tau\nu} \chi^\tau.$$

A la inversa,

$$\chi^\tau = \sum_{\nu \supseteq \tau} K_{\nu\tau}^{(-1)} \phi^\nu.$$

Una segunda versión de este resultado, más general que la anterior es la siguiente:

**Teorema 2.17.** Sean  $m \leq n$ ,  $\tau \vdash n$ ,  $\rho \vdash m$  y  $\nu \vdash n-m$ . Entonces:

$$\langle \phi^\nu, \chi^{\tau/\rho} \rangle = K_{\tau/\rho\nu}.$$

**Observación 2.18.** Cuando  $\rho$  es la partición vacía, recuperamos la información de la primera versión de este teorema.

Es posible calcular la descomposición de un carácter irreducible  $\chi^\tau$  en términos de caracteres de permutaciones con ayuda de un determinante, y a veces este método, conocido como la Regla del determinante [JK81, p.53], resulta más sencillo que el uso de la Regla de Young:

**Teorema 2.19.** Sea  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$  una partición de  $n$ . Entonces:

$$\chi^\tau = \begin{vmatrix} \chi^{(\tau_1)} & \chi^{(\tau_1+1)} & \dots & \chi^{(\tau_1+(r-1))} \\ \chi^{(\tau_2-1)} & \chi^{(\tau_2)} & \dots & \chi^{(\tau_2+(r-2))} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \chi^{(\tau_{r-1}-(r-2))} & & & \chi^{(\tau_{r-1}+1)} \\ \chi^{(\tau_r-(r-1))} & \dots & \chi^{(\tau_r-1)} & \chi^{(\tau_r)} \end{vmatrix},$$

donde se aplicarán las reglas usuales para el cálculo de un determinante y el producto de las entradas del mismo será el producto externo de caracteres. Se hará la siguiente convención:  $\chi^{(m)}$  es uno si  $m = 0$  y cero si  $m < 0$ .

Escrito de otro modo

$$\begin{aligned} \chi^\tau &= \sum_{\sigma \in S(r)} \text{sgn}(\sigma) \chi^{\tau_1+\sigma(1)-1} \cdot \chi^{\tau_2+\sigma(2)-2} \cdot \dots \cdot \chi^{\tau_r+\sigma(r)-r} \\ &= \sum_{\sigma \in S(r)} \text{sgn}(\sigma) \phi^{(\tau_1+\sigma(1)-1, \tau_2+\sigma(2)-2, \dots, \tau_r+\sigma(r)-r)}. \end{aligned}$$

esta última igualdad gracias a la observación 2.14.

**Ejemplo 2.20.**

$$\begin{aligned}
\chi^{(5,3,1)} &= \begin{vmatrix} \chi^{(5)} & \chi^{(6)} & \chi^{(7)} \\ \chi^{(2)} & \chi^{(3)} & \chi^{(4)} \\ \chi^{(-1)} & \chi^{(0)} & \chi^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi^{(5)} & \chi^{(6)} & \chi^{(7)} \\ \chi^{(2)} & \chi^{(3)} & \chi^{(4)} \\ 0 & 1 & \chi^{(1)} \end{vmatrix} \\
&= \chi^{(2)} \cdot \chi^{(7)} - \chi^{(5)} \cdot \chi^{(4)} + \chi^{(1)} \cdot (\chi^{(5)} \cdot \chi^{(3)} - \chi^{(6)} \cdot \chi^{(2)}) \\
&= \chi^{(2)} \cdot \chi^{(7)} - \chi^{(5)} \cdot \chi^{(4)} + \chi^{(1)} \cdot \chi^{(5)} \cdot \chi^{(3)} - \chi^{(1)} \cdot \chi^{(2)} \cdot \chi^{(6)} \\
&= \phi^{(7,2)} - \phi^{(5,4)} + \phi^{(5,3,1)} - \phi^{(6,2,1)}.
\end{aligned}$$

Ahora enunciaremos un resultado que aparece en [IM95, pp.143-148] que será esencial para la demostración de uno de los resultados más importantes en la teoría de los caracteres del grupo simétrico. Sólo se dará un esbozo de su prueba:

**Teorema 2.21.** Sean  $m \leq n$ ,  $\tau \vdash n$ ,  $\nu \vdash m$  y  $\rho \vdash n-m$ . Entonces:

$$\sum_{\mu \supseteq \nu} c_{\rho\mu}^{\tau} K_{\mu\nu} = K_{\tau/\rho\nu}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Por las definiciones 1.5 y 1.8, basta dar una biyección entre los siguientes conjuntos

$A := \{T \mid T \text{ es una tabla semiestándar de forma } \tau/\rho \text{ y contenido } \nu\}$

$B := \{(P, Q) \mid P \text{ es una tabla de Littlewood-Richardson de forma } \tau/\rho \text{ y contenido } \mu \text{ y } Q \text{ una tabla semiestándar de forma } \mu \text{ y contenido } \nu \text{ para alguna } \mu \vdash m\}.$

Para ello se toma una tabla  $T \in A$  y se va modificando hasta que se llega a una tabla  $P$  de la misma forma, tal que  $w(P)$  es una permutación de celosía. Simultáneamente se construye una tabla semiestándar  $Q$  que registra la secuencia de movimientos hecha en  $T$ .

Recordemos que a una palabra  $w(T) = w_1 w_2 \dots w_s$  se le llama una permutación de celosía cuando  $m_j(w_{\leq r}) \leq m_{j-1}(w_{\leq r})$  para toda  $1 \leq r \leq s$  y para toda  $j \geq 2$ , donde  $m_j(w_{\leq r})$  denota el número de veces que ocurre el símbolo  $j$  en la palabra  $w_1 w_2 \dots w_r$ . Para seguir la notación de Macdonald a  $m_j(w_{\leq r}) - m_{j-1}(w_{\leq r})$  le llamaremos el  $j$ -índice de  $w_{\leq r}$  así que la condición para que una palabra sea una permutación de celosía es que todos los índices sean menores o iguales a cero.

Definamos dos operaciones:

1.  $S_{j-1, j}$ ,  $j > 1$ .

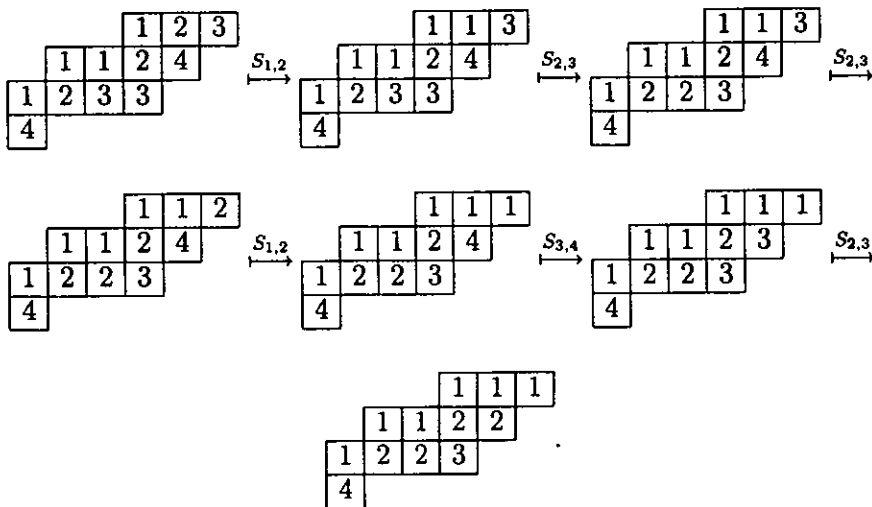
Dada  $\bar{T}$  una tabla semiestándar, sea  $m$  el máximo valor de los  $j$ -índices en  $w(\bar{T})$  y supongamos que  $m > 0$ . Tomamos el

primer elemento de la tabla en que se alcanza este máximo (que debe ser igual  $j$ ) y lo sustituimos por  $j - 1$ .

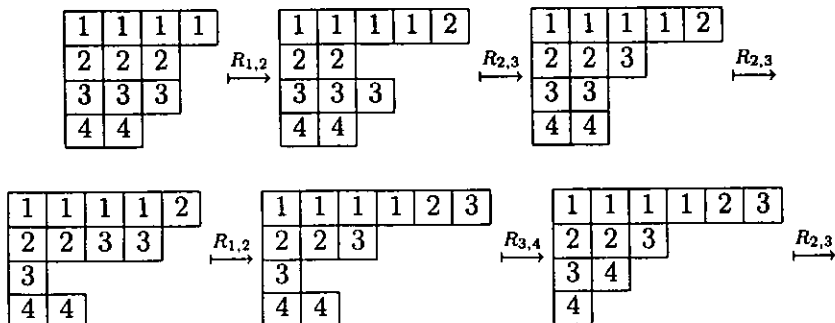
2.  $R_{j-1,j}; j > 1$ .

Dado un arreglo  $M$ ,  $R_{j,j-1}(M)$  denota al resultado de colocar al elemento que se encuentra en el extremo derecho del renglón  $j$ , en el extremo derecho del renglón  $j - 1$ .

Dada  $T \in A$ , se le aplica la función  $S_{1,2}$  hasta obtener una tabla  $T_1$  donde no haya 2-índices positivos; simultáneamente se le aplica la función  $R_{1,2}$  al arreglo  $M$  que consta de  $\rho_i$  números  $i$  en el renglón  $i \forall i$ , construyendo así un arreglo  $M_1$ . A continuación se aplican las funciones  $S_{2,3}$  y  $S_{1,2}$  a  $T_1$  hasta obtener una tabla  $T_2$  donde no existan 1-índices ni 2-índices positivos; al mismo tiempo se aplican a  $M_1$  las funciones  $R$  correspondientes, obteniendo un arreglo  $M_2$ . Al continuar con este proceso se obtiene una pareja de tablas  $(T_i, M_i) \in B$ . Ejemplifiquemos este algoritmo:



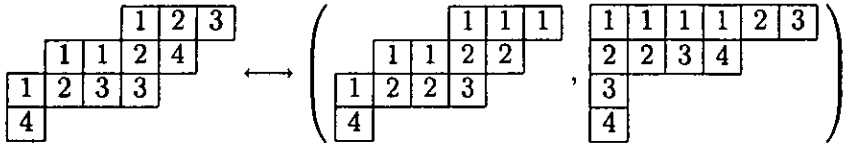
La correspondiente secuencia que contabiliza estos cambios es:





1	1	1	1	2	3
2	2	3	4		
3					
4					

Así podemos hacer la siguiente asociación:



Se prueba en [IM95, pp.143-148] que este algoritmo define una biyección entre los conjuntos  $A$  y  $B$ .

□

Tenemos ahora las herramientas necesarias para probar uno de los resultados más importantes de la teoría de caracteres del grupo simétrico, conocido como la Regla de Littlewood-Richardson. Existen numerosas pruebas de este resultado; la que aquí se presenta fue obtenida del libro [JK81, p.93].

**Teorema 2.22.** *Sean  $m \leq n$ ,  $\tau \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$  y  $\rho \vdash n-m$ . Entonces:*

$$c_{\rho\mu}^{\tau} = \langle \chi^{\mu}, \chi^{\tau/\rho} \rangle,$$

o, de modo equivalente,

$$\chi^{\rho} \bullet \chi^{\mu} = \sum_{\tau \vdash n} c_{\rho\mu}^{\tau} \chi^{\tau}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $\nu$  una partición de  $m$ . A partir de los Teoremas 2.17 y 2.21 se obtiene que

$$\sum_{\mu \supseteq \nu} c_{\rho\mu}^{\tau} K_{\mu\nu} = K_{\tau/\rho\nu} = \langle \phi^{\nu}, \chi^{\tau/\rho} \rangle,$$

además por 2.16 y la linealidad del producto interno:

$$\langle \phi^{\nu}, \chi^{\tau/\rho} \rangle = \sum_{\mu \supseteq \nu} K_{\mu\nu} \langle \chi^{\mu}, \chi^{\tau/\rho} \rangle.$$

Juntando estos hechos tenemos

$$\sum_{\mu \supseteq \nu} c_{\rho\mu}^{\tau} K_{\mu\nu} = \sum_{\mu \supseteq \nu} K_{\mu\nu} \langle \chi^{\mu}, \chi^{\tau/\rho} \rangle.$$

Como esto ocurre para toda  $\nu \vdash m$  podemos escribir la condición anterior del modo

$$DK = EK,$$

donde  $K$  es la matriz de Kostka,  $D$  es la matriz cuyo único renglón consta de los números  $c_{\rho\mu}^\tau$  con  $\mu \vdash m$  arreglados en orden lexicográfico decreciente y  $E$  es la matriz cuyo único renglón consta de los números  $\langle \chi^\mu, \chi^{\tau/\rho} \rangle$  con  $\mu \vdash m$  arreglados en orden lexicográfico decreciente. Como  $K$  es una matriz invertible entonces  $D = E$ , i.e.,  $c_{\rho\mu}^\tau = \langle \chi^\mu, \chi^{\tau/\rho} \rangle$  para toda  $\mu \vdash m$ .

□

Un resultado importante obtenido de la Regla de Littlewood-Richardson es:

**Corolario 2.23.** *Dadas  $m \leq n$ ,  $\pi \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$  y  $\rho \vdash n - m$  se tiene que*

$$c_{\rho\mu}^\pi = c_{\mu\rho}^\pi.$$

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema 2.22 tenemos que

$$c_{\rho\mu}^\pi = \left\langle \sum_{\tau \vdash n} c_{\rho\mu}^\tau \chi^\tau, \chi^\pi \right\rangle = \langle \chi^\rho \bullet \chi^\mu, \chi^\pi \rangle,$$

y por la conmutatividad del producto externo de caracteres, Teorema 1.32, podemos intercambiar los papeles de  $\mu$  y  $\rho$ .

□

Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $\nu \vdash l$ ,  $\alpha \vdash m$  con  $n = l + m$  y  $\rho(i) \vdash \pi_i$  para toda  $1 \leq i \leq t$  y  $\pi_1 + \dots + \pi_t = l$ . De la observación 1.7 tenemos que  $c_{(\rho(1), \dots, \rho(t))}^{\nu\alpha} = c_{(\rho(1), \dots, \rho(t))}^\nu c_\alpha^{\lambda/\nu}$ . Esta última cifra es el número de parejas  $(S, T)$  de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\nu, \lambda/\nu)$ ,  $S$  de contenido  $(\rho(1), \dots, \rho(t))$  y  $T$  de contenido  $\alpha$ . Al hacer correr  $\nu$  sobre todas las posibles particiones de  $l$  obtenemos el número de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $\lambda$  y contenido  $(\rho(1), \dots, \rho(t), \alpha)$  es decir,  $c_{(\rho(1), \dots, \rho(t), \alpha)}^\lambda$ . Lo anterior queda resumido en la siguiente igualdad:

**Observación 2.24.** 
$$\sum_{\nu \vdash l} c_{(\rho(1), \dots, \rho(t))}^\nu c_{\nu\alpha}^\lambda = c_{(\rho(1), \dots, \rho(t), \alpha)}^\lambda.$$

Generalicemos ahora la Regla de Littlewood-Richardson.

**Teorema 2.25.** *Sean  $t \geq 2$ ,  $n, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$  enteros positivos tales que  $n = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_t$  y  $\rho(i) \vdash \pi_i$  para toda  $0 < i \leq t$ . Entonces:*

$$\chi^{\rho(1)} \bullet \chi^{\rho(2)} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho(t)} = \sum_{\lambda \vdash n} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t))}^\lambda \chi^\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN:

La prueba se hará por inducción sobre  $t$ . Para  $t = 2$  el resultado es precisamente el Teorema 2.22.

Tomemos ahora  $t > 2$  y supongamos que

$$\chi^{\rho(1)} \bullet \chi^{\rho(2)} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho(t-1)} = \sum_{\mu \vdash n - \pi_t} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} \chi^{\mu},$$

entonces

$$\begin{aligned} \chi^{\rho(1)} \bullet \chi^{\rho(2)} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho(t)} &= \left( \sum_{\mu \vdash n - \pi_t} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} \chi^{\mu} \right) \bullet \chi^{\rho(t)} \\ &= \sum_{\mu \vdash n - \pi_t} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} \chi^{\mu} \bullet \chi^{\rho(t)}. \end{aligned}$$

Por el caso  $t = 2$  se tiene que esta última expresión es igual a

$$\sum_{\mu \vdash n - \pi_t} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} \left( \sum_{\lambda \vdash n} c_{\mu \rho(t)}^{\lambda} \chi^{\lambda} \right) = \sum_{\substack{\mu \vdash n - \pi_t \\ \lambda \vdash n}} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} c_{\mu \rho(t)}^{\lambda} \chi^{\lambda}$$

y por la observación 2.24 sabemos que

$$\sum_{\mu \vdash n - \pi_t} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1))}^{\mu} c_{\mu \rho(t)}^{\lambda} = c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t-1), \rho(t))}^{\lambda}.$$

Al juntar todos estos hechos se tiene que

$$\chi^{\rho(1)} \bullet \chi^{\rho(2)} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho(t)} = \sum_{\lambda \vdash n} c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t))}^{\lambda} \chi^{\lambda}.$$

□

**Corolario 2.26.** Sean  $t \geq 2$ ,  $n, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$  enteros positivos tales que  $n = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_t$  y  $\rho(i) \vdash \pi_i$  para toda  $0 < i \leq t$ , no importa el orden en que aparezcan las particiones  $\rho(i)$  en el coeficiente de Littlewood-Richardson  $c_{(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(t))}^{\lambda}$ .

Existen también pruebas combinatorias del resultado anterior como la que presentan Benkart, Sottile y Stroomer en [BS96, p.31].

### 3. Consecuencias de la Regla de Littlewood-Richardson

A continuación mostraremos algunos resultados que se desprenden de la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 que serán usados en el siguiente capítulo para calcular la descomposición de un producto de Kronecker en caracteres irreducibles.

**Lema 2.27.** Sean  $\lambda \vdash n$  y  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t)$  un vector de enteros positivos tales que  $\pi_1 + \dots + \pi_t = n$ . Tenemos que:

$$\text{Res}_{S(\pi)}^{S(n)}(\chi^\lambda) = \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^\lambda (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos por el Teorema 2.7 que  $\mathfrak{B} = \{\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}} \mid \rho^{(1)} \vdash \pi_1, \dots, \rho^{(t)} \vdash \pi_t\}$  es el conjunto completo de caracteres irreducibles de  $S(\pi)$ . Por tanto, podemos escribir a  $\text{Res}_{S(\pi)}^{S(n)}(\chi^\lambda)$  como combinación de los elementos de  $\mathfrak{B}$ ; más aún, el coeficiente que multiplica a  $\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}} \in \mathfrak{B}$  en dicha combinación lineal es  $\langle \chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}, \text{Res}_{S(\pi)}^{S(n)}(\chi^\lambda) \rangle$ . Con el Teorema de reciprocidad de Frobenius 1.44, la Definición 2.9 y la Regla de Littlewood-Richardson 2.25, tenemos que éste es igual a

$$\begin{aligned} \langle \text{Ind}_{S(\pi)}^{S(n)}(\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}), \chi^\lambda \rangle &= \langle \chi^{\rho^{(1)}} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho^{(t)}}, \chi^\lambda \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\nu \vdash n} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^\nu \chi^\nu, \chi^\lambda \right\rangle = c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^\lambda. \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } \text{Res}_{S(\pi)}^{S(n)}(\chi^\lambda) = \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^\lambda (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}).$$

□

Con base en este resultado podemos obtener una versión más general, para caracteres sesgados:

**Lema 2.28.** Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $\alpha \vdash m$  con  $m \leq n$  y  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t)$  un vector de enteros positivos tales que  $\pi_1 + \dots + \pi_t = n - m$ . Tenemos que:

$$\text{Res}_{S(\pi)}^{S(n-m)}(\chi^{\lambda/\alpha}) = \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\lambda/\alpha} (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}).$$

DEMOSTRACIÓN:

A partir del Teorema 2.22 y del Lema 2.27 concluimos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}_{S(\pi)}^{S(n-m)}(\chi^{\lambda/\alpha}) &= \text{Res}_{S(\pi)}^{S(n-m)} \left( \sum_{\nu \vdash n-m} c_{\alpha\nu}^{\lambda} \chi^{\nu} \right) = \sum_{\nu \vdash n-m} c_{\alpha\nu}^{\lambda} \text{Res}_{S(\pi)}^{S(n-m)}(\chi^{\nu}) \\
 &= \sum_{\nu \vdash n-m} c_{\alpha\nu}^{\lambda} \left( \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\nu} (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\nu \vdash n-m \\ \rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{\alpha\nu}^{\lambda} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\nu} (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Asimismo, las observaciones 1.7 y 2.24, junto con el Corolario 2.26 nos indican que  $\sum_{\nu \vdash n-m} c_{\alpha\nu}^{\lambda} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\nu} = c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\lambda/\alpha}$ . La ecuación (4) se convierte entonces en

$$\text{Res}_{S(\pi)}^{S(n-m)}(\chi^{\lambda/\alpha}) = \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \pi_i \\ 1 \leq i \leq t}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(t)})}^{\lambda/\alpha} (\chi^{\rho^{(1)}} \times \dots \times \chi^{\rho^{(t)}}).$$

□

Ocuparemos lo anterior y el Teorema de reciprocidad de Frobenius 1.44 para describir parcialmente cómo se comporta el producto de Kronecker al combinarse con el producto externo de caracteres. El resultado es una especie de propiedad distributiva que aparece en el artículo de Littlewood [DL56, p.91], enunciada a continuación.

**Teorema 2.29.** Sean  $\lambda \vdash l$ ,  $\mu \vdash m$  y  $\nu \vdash n$  con  $n = l + m$ . Entonces:

$$(\chi^{\lambda} \bullet \chi^{\mu}) \otimes \chi^{\nu} = \sum_{\substack{\rho \vdash l \\ \sigma \vdash m}} c_{\rho\sigma}^{\nu} (\chi^{\lambda} \otimes \chi^{\rho}) \bullet (\chi^{\mu} \otimes \chi^{\sigma}).$$

DEMOSTRACIÓN:

El Teorema 1.45 nos dice que

$$(\chi^{\lambda} \bullet \chi^{\mu}) \otimes \chi^{\nu} = \text{Ind}_{S(l,m)}^{S(n)} \left( \text{Res}_{S(l,m)}^{S(n)}(\chi^{\nu}) \otimes (\chi^{\lambda} \times \chi^{\mu}) \right). \quad (5)$$

Aplicamos el Lema 2.27 al lado derecho de la igualdad anterior y utilizamos la linealidad de la inducción:

$$\begin{aligned}
 & \text{Ind}_{S(t,m)}^{S(n)} \left( \text{Res}_{S(t,m)}^{S(n)} (\chi^\nu) \otimes (\chi^\lambda \times \chi^\mu) \right) \\
 &= \text{Ind}_{S(t,m)}^{S(n)} \left( \sum_{\substack{\rho \vdash l \\ \sigma \vdash m}} c_{\rho\sigma}^\nu (\chi^\rho \times \chi^\sigma) \otimes (\chi^\lambda \times \chi^\mu) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\rho \vdash l \\ \sigma \vdash m}} c_{\rho\sigma}^\nu \text{Ind}_{S(t,m)}^{S(n)} \left( (\chi^\rho \times \chi^\sigma) \otimes (\chi^\lambda \times \chi^\mu) \right).
 \end{aligned}$$

Gracias al Teorema 1.37 inciso 3 para el caso  $p = 2$  sabemos que este último sumando es igual a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\rho \vdash l \\ \sigma \vdash m}} c_{\rho\sigma}^\nu \text{Ind}_{S(t,m)}^{S(n)} \left( (\chi^\lambda \otimes \chi^\rho) \times (\chi^\mu \otimes \chi^\sigma) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\rho \vdash l \\ \sigma \vdash m}} c_{\rho\sigma}^\nu (\chi^\lambda \otimes \chi^\rho) \bullet (\chi^\mu \otimes \chi^\sigma). \tag{6}
 \end{aligned}$$

Al substituir (6) en la ecuación (5) obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Podemos generalizar este hecho:

**Corolario 2.30.** Sean  $\lambda(i) \vdash l_i$  para  $1 \leq i \leq p$  con  $\sum_{i=1}^p l_i = n$  y

$\nu \vdash n$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 & (\chi^{\lambda(1)} \bullet \dots \bullet \chi^{\lambda(p)}) \otimes \chi^\nu \\
 &= \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash l_i \\ 1 \leq i \leq p}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(p)})}^\nu (\chi^{\lambda(1)} \otimes \chi^{\rho^{(1)}}) \bullet \dots \bullet (\chi^{\lambda(p)} \otimes \chi^{\rho^{(p)}}).
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

La prueba es análoga a la del caso  $p = 2$ .  $\square$

Como se verá a continuación, en el caso particular en que  $\lambda(i) = (l_i)$  para  $1 \leq i \leq p$ , la ecuación del Corolario 2.30 se simplifica de modo notable.

**Corolario 2.31.** *Dada  $\nu \vdash n$  con  $n = l_1 + l_2 + \dots + l_p$ , se cumple que*

$$\begin{aligned} \phi^{(l_1, l_2, \dots, l_p)} \otimes \chi^\nu &= (\chi^{(l_1)} \bullet \dots \bullet \chi^{(l_p)}) \otimes \chi^\nu \\ &= \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash l_i \\ 1 \leq i \leq p}} c_{(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(p)})}^\nu (\chi^{\rho^{(1)}} \bullet \dots \bullet \chi^{\rho^{(p)}}). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

La primera igualdad se sigue de la observación 2.14. La segunda se sigue directamente del Corolario 2.30 y del siguiente hecho:

$$\chi^{(l_i)} \otimes \chi^{\rho^{(i)}} = \chi^{\rho^{(i)}}, \quad \forall 1 \leq i \leq p,$$

que se estableció en el inciso 1 del Teorema 2.3. □

Otra proposición importante que se deduce de este último teorema y que nos ayudará en el manejo de los coeficientes de Littlewood-Richardson es:

**Corolario 2.32.** *Sean  $n \geq m$ ,  $\mu \vdash n$ ,  $\xi \vdash m$  y  $\nu \vdash n - m$ . Entonces:*

1.  $c_{\xi', \nu'}^{\mu'} = c_{\xi, \nu}^{\mu}$  y
2.  $\chi^{\mu'/\xi'} = (\chi^{\mu/\xi})'$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por la Regla de Littlewood-Richardson 2.22, el Teorema 2.3 y la simetría de las entradas de  $c(\lambda, \mu, \nu)$  se tiene que

$$c_{\xi', \nu'}^{\mu'} = \langle \chi^{\xi'} \bullet \chi^{\nu'}, \chi^{\mu'} \rangle = \langle \chi^{\xi'} \bullet \chi^{\nu'}, \chi^\mu \otimes \chi^{(1^n)} \rangle = \langle (\chi^{\xi'} \bullet \chi^{\nu'}) \otimes \chi^{(1^n)}, \chi^\mu \rangle$$

y por el Teorema 2.29

$$\begin{aligned} (\chi^{\xi'} \bullet \chi^{\nu'}) \otimes \chi^{(1^n)} &= \sum_{\substack{\rho \vdash n \\ \sigma \vdash n-m}} c_{\rho \sigma}^{(1^n)} (\chi^{\xi'} \otimes \chi^\rho) \bullet (\chi^{\nu'} \otimes \chi^\sigma) \\ &= (\chi^{\xi'} \otimes \chi^{(1^m)}) \bullet (\chi^{\nu'} \otimes \chi^{(1^{n-m})}) = \chi^\xi \bullet \chi^\nu, \end{aligned}$$

por lo que

$$c_{\xi', \nu'}^{\mu'} = \langle \chi^\xi \bullet \chi^\nu, \chi^\mu \rangle = c_{\xi, \nu}^{\mu}.$$

Por la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 se sigue de lo anterior que  $\chi^{\mu'/\xi'} = (\chi^{\mu/\xi})'$ . □

## CAPÍTULO 3

### Algunos resultados importantes

En este capítulo se definirán los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  y se darán propiedades básicas de los mismos. Con los resultados del capítulo anterior se desarrollarán métodos para calcular la descomposición de un producto de Kronecker en términos de caracteres irreducibles, los cuales se ejemplificarán con el cálculo de los productos  $\chi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)}$ , el más difícil de peso 6,  $\chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda$  y  $\chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda$  para  $\lambda$  arbitraria. También se presentará una fórmula que describe a los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en términos de multitablas de Littlewood-Richardson.

#### 1. Cálculos clásicos

Pensemos en el producto de Kronecker  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  de dos caracteres irreducibles del grupo  $S(n)$ . Éste es en general un carácter reducible del grupo simétrico, lo cual da lugar a la siguiente definición:

**Definición 3.1.** Sean  $\lambda, \mu$  y  $\nu \vdash n$ . Denotaremos por  $c(\lambda, \mu, \nu)$  a la multiplicidad del carácter  $\chi^\nu$  en el producto de Kronecker  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ , es decir,  $c(\lambda, \mu, \nu) := \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$ .

Estos números pueden ser descritos con la fórmula

$$c(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S(n)} \chi^\lambda(\sigma) \chi^\mu(\sigma) \chi^\nu(\sigma),$$

consecuencia del modo en que se definió el producto interno de caracteres 1.25 y de la observación 2.6. La fórmula, que aparece en el libro de Murnaghan [FM38, p.765], tiene la virtud de mostrar la simetría de  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en las tres entradas pero no es muy eficiente para calcular  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en casos particulares de  $\lambda, \mu$  y  $\nu$ .

Como consecuencia del Teorema 2.3 y las propiedades del producto tensorial 1.32 tenemos que:

$$\begin{aligned} \chi^{\lambda'} \otimes \chi^{\mu'} &= (\chi^\lambda \otimes \chi^{(1^n)}) \otimes (\chi^\mu \otimes \chi^{(1^n)}) = (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) \otimes (\chi^{(1^n)} \otimes \chi^{(1^n)}) \\ &= (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) \otimes \chi^{(n)} = \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \end{aligned}$$

por lo cual:

**Observación 3.2.**  $c(\lambda', \mu', \nu) = c(\lambda, \mu, \nu)$ .



Debido a las relaciones de ortogonalidad entre caracteres 1.26 y al Teorema 2.3 tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle \chi^\lambda \otimes \chi^{(n)}, \chi^\mu \rangle &= \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \\ \langle \chi^\lambda \otimes \chi^{(1^n)}, \chi^\mu \rangle &= \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \rangle = \delta_{\lambda'\mu}.\end{aligned}$$

Escrito de otro modo:

**Observación 3.3.**  $c(\lambda, \mu, (n)) = \delta_{\lambda\mu}$ .

**Observación 3.4.**  $c(\lambda, \mu, (1^n)) = \delta_{\lambda'\mu}$ .

Antes de iniciar con cálculos explícitos daremos una cota para los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  que aparece en [RS99, ej.7.83].

**Teorema 3.5.** Sean  $\lambda, \mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$ . Entonces<sup>1</sup>:

$$c(\lambda, \mu, \nu) \leq \min\{\chi^\lambda(1), \chi^\mu(1), \chi^\nu(1)\}.$$

DEMOSTRACIÓN:

El resultado se sigue del Teorema 1.48, de la observación 2.6 y de la simetría de los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$ . □

Realicemos ahora algunos cálculos. Mostraremos con el siguiente ejemplo un método para calcular la descomposición de un producto de Kronecker; aplicaremos para ello los resultados de la Sección 3 del capítulo anterior. La importancia de este método recae en que puede ser usado para cualquier producto de Kronecker, puede decirse incluso que se trata del cálculo clásico de tal descomposición. Sin embargo, esto no puede considerarse como una respuesta satisfactoria al problema a tratar en esta tesis ya que incluso para ejemplos sencillos los cálculos necesarios para desarrollar el método suelen ser largos y tediosos.

**Ejemplo 3.6.** A continuación calcularemos la descomposición del producto  $\chi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)}$  en caracteres irreducibles<sup>2</sup>. Con dicho objetivo expresaremos a  $\chi^{(3,2,1)}$  como combinación lineal de elementos

<sup>1</sup>Dada  $\rho \vdash n$ ,  $\chi^\rho(1)$  es igual a la dimensión del módulo asociado a  $\rho$  y también es igual al número de tablas estándar de forma  $\rho$ , denotado por  $f^\rho$  (ver [BS91, p.73]). Así,  $c(\lambda, \mu, \nu) \leq \min\{f^\lambda, f^\mu, f^\nu\}$ .

<sup>2</sup>Parte del desarrollo de este ejemplo fue tomado del libro de James y Kerber [JK81, p.96]. En este trabajo se desglosan los cálculos correspondientes y para ello se hace uso del Corolario 2.31.

de  $\{\phi^\lambda | \lambda \vdash n\}$ ; recordemos que este conjunto forma una  $\mathbb{Z}$ -base de  $R(S(n))$ . Aplicando la fórmula del determinante 2.19 tenemos que:

$$\begin{aligned} \chi^{(3,2,1)} &= \begin{vmatrix} \chi^{(3)} & \chi^{(4)} & \chi^{(5)} \\ \chi^{(1)} & \chi^{(2)} & \chi^{(3)} \\ 0 & \chi^{(0)} & \chi^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi^{(3)} & \chi^{(4)} & \chi^{(5)} \\ \chi^{(1)} & \chi^{(2)} & \chi^{(3)} \\ 0 & 1 & \chi^{(1)} \end{vmatrix} \\ &= \chi^{(1)} \bullet \chi^{(5)} - \chi^{(3)} \bullet \chi^{(3)} + \chi^{(1)} \bullet (\chi^{(3)} \bullet \chi^{(2)} - \chi^{(1)} \bullet \chi^{(4)}) \\ &= \chi^{(1)} \bullet \chi^{(5)} - \chi^{(3)} \bullet \chi^{(3)} + \chi^{(1)} \bullet \chi^{(3)} \bullet \chi^{(2)} - \chi^{(1)} \bullet \chi^{(1)} \bullet \chi^{(4)} \\ &= \phi^{(5,1)} - \phi^{(3^2)} + \phi^{(3,2,1)} - \phi^{(4,1^2)}. \end{aligned}$$

También es posible calcular la descomposición anterior mediante la Regla de Young 2.16 y la descripción combinatoria de los coeficientes de  $K^{-1}$  dada por Egecioglu y Remmel 1.12.

Tenemos así que

$$\begin{aligned} \chi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} &= \left( \phi^{(5,1)} - \phi^{(3^2)} + \phi^{(3,2,1)} - \phi^{(4,1^2)} \right) \otimes \chi^{(3,2,1)} \\ &= \phi^{(5,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} - \phi^{(3^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)} + \phi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} - \phi^{(4,1^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Es factible usar ahora el Corolario 2.31 para desarrollar cada sumando como una combinación lineal de productos externos:

$$\begin{aligned} \phi^{(5,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} &= \chi^{(3,2)} \bullet \chi^{(1)} + \chi^{(3,1^2)} \bullet \chi^{(1)} + \chi^{(2^2,1)} \bullet \chi^{(1)} \\ \phi^{(3^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)} &= 2\chi^{(2,1)} \bullet \chi^{(3)} + 2\chi^{(2,1)} \bullet \chi^{(2,1)} + 2\chi^{(2,1)} \bullet \chi^{(1^3)} \\ \phi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} &= \chi^{(3)} \bullet \chi^{(2)} \bullet \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \bullet \chi^{(1^2)} \bullet \chi^{(1)} + 3\chi^{(2,1)} \bullet \chi^{(2)} \bullet \chi^{(1)} \\ &\quad + 3\chi^{(2,1)} \bullet \chi^{(1^2)} \bullet \chi^{(1)} + \chi^{(1^3)} \bullet \chi^{(2)} \bullet \chi^{(1)} + \chi^{(1^3)} \bullet \chi^{(1^2)} \bullet \chi^{(1)} \\ \phi^{(4,1^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)} &= 2\chi^{(3,1)} \bullet \chi^{(1)} \bullet \chi^{(1)} + 2\chi^{(2^2)} \bullet \chi^{(1)} \bullet \chi^{(1)} + 2\chi^{(2,1^2)} \bullet \chi^{(1)} \bullet \chi^{(1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Con ayuda de la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 es posible expresar cada uno de estos productos externos a partir de caracteres irreducibles. En el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned} \chi^{(3,2)} \bullet \chi^{(1)} &= \sum_{\lambda \vdash 6} c_{(3,2)(1)}^\lambda \chi^\lambda = \chi^{(4,2)} + \chi^{(3^2)} + \chi^{(3,2,1)} \\ \chi^{(3,1^2)} \bullet \chi^{(1)} &= \sum_{\lambda \vdash 6} c_{(3,1^2)(1)}^\lambda \chi^\lambda = \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} \\ \chi^{(2^2,1)} \bullet \chi^{(1)} &= \sum_{\lambda \vdash 6} c_{(2^2,1)(1)}^\lambda \chi^\lambda = \chi^{(3,2,1)} + \chi^{(2^3)} + \chi^{(2^2,1^2)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\phi^{(5,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} = \chi^{(4,2)} + \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + 3\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + \chi^{(2^2,1^2)}.$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned} \phi^{(3^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)} = & \\ & 2(\chi^{(5,1)} + \chi^{(4,2)} + \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3,2,1)}) \\ & + 2(\chi^{(4,2)} + \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + 2\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + \chi^{(2^2,1^2)}) \\ & + 2(\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^2,1^2)} + \chi^{(2,1^4)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} = & \\ & (\chi^{(6)} + 2\chi^{(5,1)} + 2\chi^{(4,2)} + \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + \chi^{(3,2,1)}) \\ & + (\chi^{(5,1)} + \chi^{(4,2)} + 2\chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)}) \\ & + 3(\chi^{(5,1)} + 2\chi^{(4,2)} + 2\chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + 3\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + \chi^{(2^2,1^2)}) \\ & + 3(\chi^{(4,2)} + \chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + 3\chi^{(3,2,1)} + 2\chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + 2\chi^{(2^2,1^2)} + \chi^{(2,1^4)}) \\ & + (\chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3,2,1)} + 2\chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^2,1^2)} + \chi^{(2,1^4)}) \\ & + (\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + 2\chi^{(2^2,1^2)} + 2\chi^{(2,1^4)} + \chi^{(1^6)}) \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(4,1^2)} \otimes \chi^{(3,2,1)} = & \\ & 2(\chi^{(5,1)} + 2\chi^{(4,2)} + 2\chi^{(4,1^2)} + \chi^{(3^2)} + 2\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(3,1^3)}) \\ & + 2(\chi^{(4,2)} + \chi^{(3^2)} + 2\chi^{(3,2,1)} + \chi^{(2^3)} + \chi^{(2^2,1^2)}) \\ & + 2(\chi^{(4,1^2)} + 2\chi^{(3,2,1)} + 2\chi^{(3,1^3)} + \chi^{(2^3)} + 2\chi^{(2^2,1^2)} + \chi^{(2,1^4)}). \end{aligned}$$

Al substituir todos estos resultados en las ecuaciones (8), reemplazarlos a su vez en la ecuación (7) y asociar términos comunes obtenemos que

$$\begin{aligned} \chi^{(3,2,1)} \otimes \chi^{(3,2,1)} = & \chi^{(6)} + 2\chi^{(5,1)} + 3\chi^{(4,2)} + 4\chi^{(4,1^2)} + 2\chi^{(3^2)} + 5\chi^{(3,2,1)} \\ & + 4\chi^{(3,1^3)} + 2\chi^{(2^3)} + 3\chi^{(2^2,1^2)} + 2\chi^{(2,1^4)} + \chi^{(1^6)}. \end{aligned}$$

Observamos que en esta descomposición aparecen como sumandos los caracteres asociados a todas las posibles particiones de 6. Es por eso que se trata del producto más difícil de peso 6.

Como ya se mencionó, el método descrito en el ejemplo anterior funciona en todos los casos pero no siempre es el más conveniente, porque de acuerdo al producto de Kronecker con el cual estemos trabajando, podemos valernos de ciertos elementos para acortar el camino que nos lleve al resultado deseado. Con esta idea en mente vamos ahora a calcular la descomposición de los productos de Kronecker del tipo  $\chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda$  y  $\chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda$  para cualquier  $n$ , con  $\lambda$  una partición

de  $n$ , de acuerdo al planteamiento que establece Littlewood-Richardson en [DL56, p.92].

Gracias a la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 sabemos que

$$\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)} = \chi^{(n-1,1)} + \chi^{(n)},$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda &= (\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)} - \chi^{(n)}) \otimes \chi^\lambda \\ &= (\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)}) \otimes \chi^\lambda - \chi^{(n)} \otimes \chi^\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

El primer sumando se descompone como combinación lineal de caracteres irreducibles con la ayuda del Corolario 2.31 y de la Regla de Littlewood-Richardson 2.22; cabe recordar también que por la observación 1.6  $c_{\rho\sigma}^\lambda = 0$  si  $\rho \not\subseteq \lambda$  por lo que:

$$\begin{aligned} (\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)}) \otimes \chi^\lambda &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \sigma \vdash 1}} c_{\rho\sigma}^\lambda (\chi^\rho \bullet \chi^\sigma) = \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \rho \subseteq \lambda}} c_{\rho(1)}^\lambda (\chi^\rho \bullet \chi^{(1)}) \\ &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \rho \subseteq \lambda}} (\chi^\rho \bullet \chi^{(1)}) = \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \rho \subseteq \lambda}} \left( \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ \nu \supseteq \rho}} c_{\rho(1)}^\nu \chi^\nu \right). \end{aligned}$$

Observamos que si  $\rho \vdash n-1$ ,  $\lambda, \nu \vdash n$  y  $\rho \subseteq \lambda \cap \nu$ , entonces  $\rho = \lambda \cap \nu$  o bien  $\lambda = \nu$ . Así, podemos separar esta última suma y reescribir la ecuación anterior como:

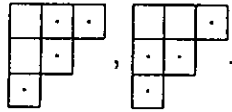
$$\begin{aligned} (\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)}) \otimes \chi^\lambda &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \rho \subseteq \lambda}} c_{\rho(1)}^\lambda \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} c_{\lambda \cap \nu(1)}^\nu \chi^\nu \\ &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-1 \\ \rho \subseteq \lambda}} \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} \chi^\nu. \end{aligned}$$

Introduzcamos nueva notación que nos permita visualizar la fórmula anterior a través de diagramas de Young:

**Definición 3.7.** Dada  $\lambda$  partición de  $n$  para cada unión disjunta  $D = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k$  de diagramas sesgados,  $n(\lambda, D)$  denotará el número de maneras en que el diagrama asociado a  $\lambda$ ,  $D^\lambda$ , contiene al diagrama  $D$  de forma que al quitárselo a  $D^\lambda$  se obtiene un diagrama de Young.

Por ejemplo, si  $\lambda = (3, 2, 1)$  tenemos que  $n(\lambda, \boxplus \sqcup \square) = 2$ . Los dos modos en que  $D^\lambda$  contiene al diagrama  $\boxplus \sqcup \square$  de forma que al quitárselo a  $D^\lambda$  se obtiene un diagrama de Young están indicados a

continuación de manera punteada:



En estos términos

$$(\chi^{(n-1)} \bullet \chi^{(1)}) \otimes \chi^\lambda = n(\lambda, \square) \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} \chi^\nu.$$

Además  $\chi^{(n)}$  es el carácter trivial de  $S(n)$ , como se estableció en el Teorema 2.3. Al juntar estos hechos y substituirlos en la ecuación (9) tenemos que:

$$\begin{aligned} \chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda &= n(\lambda, \square) \chi^\lambda + \left( \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} \chi^\nu \right) - \chi^\lambda \\ &= (n(\lambda, \square) - 1) \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} \chi^\nu. \end{aligned}$$

Hagamos un desarrollo análogo para  $\chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda$ . Por la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 sabemos que

$$\chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)} = \chi^{(n-1,1)} + \chi^{(n-2,1^2)}, \quad (10)$$

así que

$$\begin{aligned} \chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda &= (\chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)} - \chi^{(n-1,1)}) \otimes \chi^\lambda \\ &= (\chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)}) \otimes \chi^\lambda - \chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

El segundo sumando es el que acabamos de analizar algunas líneas arriba y el primero se desarrolla con ayuda del Teorema 2.29 :

$$\begin{aligned} (\chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)}) \otimes \chi^\lambda &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-2 \\ \sigma \vdash 2}} c_{\rho\sigma}^\lambda (\chi^{(n-2)} \otimes \chi^\rho) \bullet (\chi^{(1^2)} \otimes \chi^\sigma) \\ &= \sum_{\substack{\rho \vdash n-2 \\ \sigma \vdash 2}} c_{\rho\sigma}^\lambda (\chi^\rho \bullet \chi^\sigma), \end{aligned}$$

donde esta última igualdad se justifica con el Teorema 2.3. Las únicas particiones de 2 son  $(2)$  y  $(1^2)$ , así que es factible separar esta última suma del siguiente modo:

$$(\chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)}) \otimes \chi^\lambda = \sum_{\rho \vdash n-2} \left[ c_{\rho(2)}^\lambda (\chi^\rho \bullet \chi^{(1^2)}) + c_{\rho(1^2)}^\lambda (\chi^\rho \bullet \chi^{(2)}) \right].$$

Nuevamente con la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 tenemos:

$$\left( \chi^{(n-2)} \bullet \chi^{(1^2)} \right) \otimes \chi^\lambda = \sum_{\rho \vdash n-2} \left[ c_{\rho(2)}^\lambda \left( \sum_{\nu \vdash n} c_{\rho(1^2)}^\nu \chi^\nu \right) + c_{\rho(1^2)}^\lambda \left( \sum_{\nu \vdash n} c_{\rho(2)}^\nu \chi^\nu \right) \right];$$

al substituir en (11) y asociar de otra manera obtenemos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} & \chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda \\ &= \sum_{\nu \vdash n} \left[ \sum_{\rho \vdash n-2} c_{\rho(2)}^\lambda c_{\rho(1^2)}^\nu + c_{\rho(1^2)}^\lambda c_{\rho(2)}^\nu \right] \chi^\nu - \chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda. \end{aligned}$$

Para que  $\chi^\nu$  aparezca en la suma anterior necesitamos que  $c_{\rho(2)}^\lambda c_{\rho(1^2)}^\nu \neq 0$  o bien que  $c_{\rho(1^2)}^\lambda c_{\rho(2)}^\nu \neq 0$ ; en cualquier caso  $\rho \subseteq \lambda \cap \nu$ . Además  $\rho \vdash n-2$ , entonces  $n-2 \leq |\lambda \cap \nu|$ . A partir de este hecho y al asociar adecuadamente es posible expresar dicha suma como:

$$\begin{aligned} & [2n(\lambda, \square \square \square) - n(\lambda, \square) + 1] \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| \in \\ \{n-1, n-2\}}} \sum_{\rho \vdash n-2} \left[ c_{\rho(2)}^\lambda c_{\rho(1^2)}^\nu + c_{\rho(1^2)}^\lambda c_{\rho(2)}^\nu \right] \chi^\nu \\ & - \sum_{|\lambda \cap \nu| = n-1} \chi^\nu \end{aligned}$$

Observemos que  $n(\lambda, \square \square \square) = \binom{n(\lambda, \square)}{2} = \frac{1}{2} n(\lambda, \square) [n(\lambda, \square) - 1]$ . Así, los resultados anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:

**Teorema 3.8.** *Dada  $\lambda$  una partición de  $n$  se tienen:*

$$1. \chi^{(n-1,1)} \otimes \chi^\lambda = (n(\lambda, \square) - 1) \chi^\lambda + \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| = n-1}} \chi^\nu.$$

$$2. \chi^{(n-2,1^2)} \otimes \chi^\lambda = (n(\lambda, \square) - 1)^2 \chi^\lambda$$

$$+ \sum_{\substack{\nu \vdash n \\ |\lambda \cap \nu| \in \\ \{n-1, n-2\}}} \sum_{\rho \vdash n-2} \left[ c_{\rho(2)}^\lambda c_{\rho(1^2)}^\nu + c_{\rho(1^2)}^\lambda c_{\rho(2)}^\nu \right] \chi^\nu - \sum_{|\lambda \cap \nu| = n-1} \chi^\nu.$$

## 2. Primeros resultados

A continuación aplicaremos el Teorema 1.46 al grupo simétrico, lo que dará la pauta para obtener resultados que nos ayudarán a describir en cierta medida el comportamiento de los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en términos de multitablas de Littlewood-Richardson.

**Teorema 3.9.** Sean  $n \geq m$ ,  $\lambda, \mu \vdash n$ ,  $\alpha, \beta \vdash m$  y  $\nu \vdash n - m$  con  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ . Tenemos que:

$$\langle \phi^\nu, \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\beta} \rangle = \sum_{\substack{\rho(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\alpha} c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\mu/\beta}.$$

Observemos que en el caso particular en que  $\alpha$  y  $\beta$  son la partici3n vac3a, el resultado anterior nos dice que

$$\langle \phi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\substack{\rho(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^\lambda c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^\mu.$$

DEMOSTRACI3N:

Tenemos  $S(\nu) \leq S(n - m)$  con  $S(\nu)$  ambivalente por la observaci3n 1.13; consideremos  $\chi^{\lambda/\alpha}, \chi^{\mu/\beta} \in R(S(n - m))$ . Mediante la aplicaci3n del Teorema 1.46 obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \text{Ind}_{S(\nu)}^{S(n-m)} (1_{S(\nu)}), \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\beta} \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{\psi \text{ car3cter} \\ \text{irreducible de } S(\nu)}} \left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)} (\chi^{\lambda/\alpha}), \psi \right\rangle \left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)} (\chi^{\mu/\beta}), \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.7,  $\{\chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)} \mid \rho(i) \vdash \nu_i, 1 \leq i \leq r\}$  es el conjunto de todos los caracteres irreducibles de  $S(\nu)$  y adem3s  $\text{Ind}_{S(\nu)}^{S(n)} (1_{S(\nu)}) = \phi^\nu$  por definici3n, as3 que

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi^\nu, \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\beta} \right\rangle = \\ & \sum_{\substack{\rho(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} \left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)} (\chi^{\lambda/\alpha}), \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)} \right\rangle \left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)} (\chi^{\mu/\beta}), \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)} \right\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

Al usar el Lema 2.28 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)}(\chi^{\lambda/\alpha}, \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)}) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{\substack{\tau(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} c_{(\tau(1), \dots, \tau(r))}^{\lambda/\alpha} \chi^{\tau(1)} \times \dots \times \chi^{\tau(r)}, \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)} \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{\tau(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} c_{(\tau(1), \dots, \tau(r))}^{\lambda/\alpha} \langle \chi^{\tau(1)} \times \dots \times \chi^{\tau(r)}, \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)} \rangle \\
&= c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\alpha}.
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\left\langle \text{Res}_{S(\nu)}^{S(n-m)}(\chi^{\mu/\beta}, \chi^{\rho(1)} \times \dots \times \chi^{\rho(r)}) \right\rangle = c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\mu/\beta}.$$

Al substituir estos resultados en (12) obtenemos lo deseado.  $\square$

El teorema anterior nos lleva de manera natural a lo establecido por Vallejo en [EV98, p.3]:

**Definición 3.10.** Sean  $n \geq m$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  particiones de  $n$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  particiones de  $m$ , y  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$  partición de  $n - m$ , entonces

$$lr(\lambda/\alpha, \mu/\beta; \nu) := \sum_{\substack{\rho(i) \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq r}} c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\lambda/\alpha} c_{(\rho(1), \dots, \rho(r))}^{\mu/\beta}.$$

**Observación 3.11.** Se sigue de la definición anterior y del Teorema 3.9 que

$$lr(\lambda/\alpha, \mu/\beta; \nu) = \langle \phi^\nu, \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\beta} \rangle.$$

Es importante tener siempre presente la interpretación de los coeficientes de Littlewood-Richardson en relación con las tablas de Young. Recordemos que  $c_{(\rho(1), \dots, \rho(t))}^{\lambda/\alpha}$  cuenta la cantidad de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $\lambda/\alpha$  y contenido  $(\rho(1), \dots, \rho(t))$ . En estos términos  $lr(\lambda/\alpha, \mu/\beta; \nu)$  denotará el número de parejas  $(S, T)$  de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda/\alpha, \mu/\beta)$ , igual contenido y tipo  $\nu$ .

**Observación 3.12.**  $lr(\lambda/\alpha, \mu/\beta; \nu)$  es simétrico únicamente en las primeras dos entradas, de ahí el uso del punto y coma para separar la tercera entrada de las dos primeras.



**Ejemplo 3.13.** Consideremos  $n = 5$ ,  $\lambda = (3, 1^2)$ ,  $\mu = (2^2, 1)$ ,  $\nu = (3, 2)$  particiones de 5. Asimismo tomaremos  $\alpha$  y  $\beta$  como la partición vacía. En este caso

$$\langle \phi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\substack{\rho^{(i)} \vdash \nu_i \\ 1 \leq i \leq 2}} c_{\rho^{(1)}\rho^{(2)}}^\lambda c_{\rho^{(1)}\rho^{(2)}}^\mu = 2.$$

Esto se debe a que las únicas parejas  $(S, T)$  de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda, \mu)$ , igual contenido y tipo  $\nu$  son las

siguientes:  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right), \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right).$

La primera pareja de tablas tiene contenido  $((2, 1), (2))$  y en la segunda el contenido es  $((2, 1), (1^2))$ .

Finalmente reescribiremos el resultado del Teorema 3.9 para obtener una versión del mismo en la cual se relacionan los números de Kostka, la multiplicidad  $c(\lambda, \mu, \nu)$  del carácter irreducible de  $\chi^\nu$  del grupo simétrico  $S(n)$  en el producto de Kronecker  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  y los números  $lr(\lambda, \mu; \nu)$  definidos con anterioridad. Este resultado se encuentra en el artículo de Vallejo [EV97, p.4].

**Teorema 3.14.** Sean  $\nu, \lambda, \mu \vdash n$  con  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ . Tenemos que:

1.  $\sum_{\tau \triangleright \nu} K_{\tau\nu} c(\lambda, \mu, \tau) = lr(\lambda, \mu; \nu),$
2.  $c(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\tau \triangleright \nu} K_{\tau\nu}^{(-1)} lr(\lambda, \mu; \tau).$

**DEMOSTRACIÓN:**

Expresemos a  $\phi^\nu$  en términos de los caracteres irreducibles  $\chi^\tau$  con  $\tau \vdash n$  utilizando la Regla de Young 2.16:

$$\phi^\nu = \sum_{\tau \triangleright \nu} K_{\tau\nu} \chi^\tau.$$

Tenemos entonces que

$$\langle \phi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\tau \triangleright \nu} K_{\tau\nu} \langle \chi^\tau, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle,$$

pero  $\langle \chi^\tau, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle$  es por definición  $c(\lambda, \mu, \tau)$ , por tanto

$$\langle \phi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\tau \triangleright \nu} K_{\tau\nu} c(\lambda, \mu, \tau). \quad (13)$$

Por otro lado, la observación 3.11 indica que

$$\langle \phi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = lr(\lambda, \mu; \nu). \quad (14)$$

Al juntar los resultados de (13) y (14) se tiene probado el primer inciso del teorema. La demostración de la segunda parte se realiza de manera análoga, partiendo del siguiente hecho:

$$\chi^\nu = \sum_{\tau \supseteq \nu} K_{\tau\nu}^{(-1)} \phi^\tau.$$

establecido en el Teorema 2.16. □

Un caso útil del teorema anterior se da cuando  $\nu$  consta de dos partes, ya que en estas circunstancias la ecuación para expresar a  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en términos de los números  $lr(\lambda, \mu; \tau)$  con  $\tau \supseteq \nu$  se simplifica de manera notable (ver [EV97, p.5]).

**Corolario 3.15.** *Para  $1 \leq b \leq \frac{n}{2}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ,*

$$c(\lambda, \mu, (n-b, b)) = lr(\lambda, \mu; (n-b, b)) - lr(\lambda, \mu; (n-b+1, b-1)).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos por el Teorema 3.14, inciso 1 que

$$\sum_{\tau \supseteq (n-b, b)} K_{\tau(n-b, b)} c(\lambda, \mu, \tau) = lr(\lambda, \mu; (n-b, b)). \quad (15)$$

Observamos que para  $0 \leq i \leq b$ ,  $(n-i, i) \supseteq (n-b, b)$ . Además, si  $\tau \supseteq (n-b, b)$ , con  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_t)$  se tiene que  $\tau_1 + \tau_2 \geq (n-b) + b = n$ , lo cual obliga a que  $t \leq 2$  es decir,  $\tau = (n-i, i)$  para algún  $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ; más aún, como  $n-i = \tau_1 \geq n-b$ , entonces  $i \leq b$ . Recordemos que  $K_{(n-i, i)(n-b, b)}$  es el número de tablas semiestándar de forma  $(n-i, i)$  y contenido  $(n-b, b)$ , por lo cual  $K_{(n-i, i)(n-b, b)} = 1$  para  $0 \leq i \leq b$ . De aquí que

$$\sum_{\tau \supseteq (n-b, b)} K_{\tau(n-b, b)} c(\lambda, \mu, \tau) = \sum_{i=0}^b c(\lambda, \mu, (n-i, i)).$$

Al reemplazarlo en (15) tenemos

$$lr(\lambda, \mu; (n-b, b)) = \sum_{i=0}^b c(\lambda, \mu, (n-i, i)). \quad (16)$$

Si procedemos de manera análoga para la partición  $(n - b + 1, b - 1)$ , resulta que

$$lr(\lambda, \mu; (n - b + 1, b - 1)) = \sum_{i=0}^{b-1} c(\lambda, \mu, (n - i, i)). \quad (17)$$

Una vez que resolvemos el sistema de ecuaciones anterior, al restar a la ecuación (16) la ecuación (17) obtenemos

$$\begin{aligned} lr(\lambda, \mu; (n - b, b)) - lr(\lambda, \mu; (n - b + 1, b - 1)) \\ = \sum_{i=0}^b c(\lambda, \mu, (n - i, i)) - \sum_{i=0}^{b-1} c(\lambda, \mu, (n - i, i)); \end{aligned}$$

el único sumando que no se cancela es  $c(\lambda, \mu, (n - b, b))$ , por tanto

$$c(\lambda, \mu, (n - b, b)) = lr(\lambda, \mu; (n - b, b)) - lr(\lambda, \mu; (n - b + 1, b - 1)). \quad \square$$

**Comentario 3.16.** Otra manera de demostrar este último resultado se da mediante la segunda parte del Teorema 3.14 y la descripción combinatoria de los coeficientes de  $K^{-1}$  1.12.

**Comentario 3.17.** Durante el trabajo de tesis se buscó una función inyectiva del conjunto de parejas de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda, \mu)$ , igual contenido y tipo  $(n - b + 1, b - 1)$ , en el conjunto de parejas de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda, \mu)$ , igual contenido y tipo  $(n - b, b)$ . Al hallar una función inyectiva con tales dominio y codominio, el problema de calcular la diferencia  $lr(\lambda, \mu; (n - b, b)) - lr(\lambda, \mu; (n - b + 1, b - 1))$  queda reducido a contar el número de elementos del codominio que no pertenezcan a la imagen de dicha función. La utilidad de este procedimiento radicaría entonces en que la descripción combinatoria de estos elementos fuera sencilla. El problema queda abierto ya que no se encontró un modo natural de dar tal inyección.

## CAPÍTULO 4

### Condiciones para que $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$

A lo largo de este capítulo se establecerán condiciones necesarias sobre  $\nu$  para que  $c(\lambda, \mu, \nu)$  sea distinto de cero, es decir, para que  $\chi^\nu$  aparezca en la descomposición de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  como combinación lineal de caracteres irreducibles. Tales restricciones se expresarán en función de la altura, el ancho y la profundidad de dichas particiones. Incluiremos también fórmulas recursivas para  $c(\lambda, \mu, \nu)$  que servirán para calcular tales números en términos de particiones de peso menor que  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ .

#### 1. Ancho y altura

**Definición 4.1.** Sean  $\lambda \vdash n$  y  $\rho \vdash k$ . Si  $\rho \subseteq \lambda$  denotaremos por  $f^{\lambda/\rho}$  al número de tablas estándar de forma  $\lambda/\rho$ , o equivalentemente el número de tablas semiestándar de forma  $\lambda/\rho$  y contenido  $(1^{n-k})$ . Si  $\rho \not\subseteq \lambda$  definiremos  $f^{\lambda/\rho}$  como cero. En resumen,

$$f^{\lambda/\rho} := K_{\lambda/\rho(1^{n-k})}.$$

Esta definición es la que utiliza Vallejo en [EV97, p.5].

**Observación 4.2.**  $f^{\lambda/\rho} > 0$  si y sólo si  $\rho \subseteq \lambda$ .

Otra forma de escribir lo anterior es:

$$f^{\lambda/\rho} = c_{((1),(1),\dots,(1))}^{\lambda/\rho} = c_{(\rho,(1),(1),\dots,(1))}^\lambda, \quad (18)$$

donde la partición (1) aparece  $n - k$  veces.

Si identificamos a  $S(k)$  con  $S(k, 1^{n-k})$ , a  $\chi^\rho$  con  $\chi^\rho \times \overbrace{\chi^{(1)} \times \dots \times \chi^{(1)}}^{n-k \text{ veces}}$  y usamos el Lema 2.27 tenemos que  $\chi^\rho$  aparece con multiplicidad  $c_{(\rho,(1),(1),\dots,(1))}^\lambda$  en la descomposición en irreducibles de  $\text{Res}_{S(k)}^{S(n)}(\chi^\lambda)$ , es decir,

$$\left\langle \text{Res}_{S(k)}^{S(n)}(\chi^\lambda), \chi^\rho \right\rangle = f^{\lambda/\rho}, \quad (19)$$

la cual es una forma equivalente de definir  $f^{\lambda/\rho}$  utilizada por Dvir en [YD93, p.128].

La siguiente es una reformulación de un resultado de Dvir [YD93, p.129], realizada por Vallejo en [EV97, p.5].

**Proposición 4.3.** *Dadas  $\lambda, \mu \vdash n$  y  $k \leq n$ , se tiene que*

$$\sum_{\substack{\beta \vdash n \\ (k) \subseteq \beta}} f^{\beta/(k)} \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\substack{\rho \vdash k \\ \rho \subseteq \lambda \cap \mu}} f^{\lambda/\rho} f^{\mu/\rho}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Observemos primero que dada  $\beta \vdash n$  se tiene que  $(k) \subseteq \beta$  si y sólo si  $\beta \supseteq (k, (1^{n-k}))$ . Además hemos dicho que  $f^{\beta/(k)}$  denotará al número de tablas semiestándar de forma  $\beta/(k)$  y contenido  $(1^{n-k})$  o equivalentemente al número de tablas semiestándar de forma  $\beta$  y contenido  $(k, (1^{n-k}))$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\beta \vdash n \\ (k) \subseteq \beta}} f^{\beta/(k)} \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle &= \sum_{\substack{\beta \vdash n \\ \beta \supseteq (k, 1^{n-k})}} K_{\beta(k, 1^{n-k})} \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle \\ &= \sum_{\substack{\beta \vdash n \\ \beta \supseteq (k, 1^{n-k})}} K_{\beta(k, 1^{n-k})} c(\beta, \lambda, \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

Por otro lado, mediante la ecuación (18) y la Definición 3.10 concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \vdash k \\ \rho \subseteq \lambda \cap \mu}} f^{\lambda/\rho} f^{\mu/\rho} &= \sum_{\substack{\rho \vdash k \\ \rho \subseteq \lambda \cap \mu}} c_{(\rho, (1), (1), \dots, (1))}^{\lambda} c_{(\rho, (1), (1), \dots, (1))}^{\mu} \\ &= lr(\lambda, \mu; (k, 1^{n-k})). \end{aligned} \quad (21)$$

Finalmente, a través del Teorema 3.14 se tiene

$$\sum_{\substack{\beta \vdash n \\ \beta \supseteq (k, 1^{n-k})}} K_{\beta(k, 1^{n-k})} c(\beta, \lambda, \mu) = lr(\lambda, \mu; (k, 1^{n-k}));$$

obtenemos entonces el resultado deseado a partir de las ecuaciones (20) y (21). □

Recurriremos a la proposición anterior para describir el ancho y la altura de un producto de Kronecker, lo que impondrá ciertas restricciones sobre el ancho y la altura de un carácter irreducible  $\chi^\rho$  para que aparezca en la descomposición de dicho producto. Lo enunciado a continuación aparece en el artículo [YD93, p.130] y con una formulación distinta en [EV97, p.5]

**Teorema 4.4.** *Sean  $\lambda$  y  $\mu$  particiones de  $n$ . Entonces:*

1.  $w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) = |\lambda \cap \mu|$ ,
2.  $h(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) = |\lambda \cap \mu'|$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si  $\lambda = \mu$  entonces, por la observación 3.3 se tiene que:

$$c(\lambda, \mu, (n)) = \delta_{\lambda\mu} = 1,$$

esto es,  $\chi^{(n)}$  aparece con coeficiente distinto de cero en la descomposición del producto  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  en irreducibles, de donde

$$w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) = n = |\lambda \cap \mu|.$$

Cuando  $\lambda \neq \mu$ , sabemos que  $|\lambda \cap \mu| < n$ ; consideremos  $k := |\lambda \cap \mu| + 1$ , entonces  $k \leq n$ . Observamos que para  $\rho \vdash k$  se tiene que  $\rho \not\subseteq \lambda \cap \mu$ , ya que  $|\lambda \cap \mu| = k - 1 < k = |\rho|$ . De aquí que al aplicar la Proposición 4.3 obtengamos:

$$\sum_{\substack{\beta \vdash n \\ (k) \subseteq \beta}} f^{\beta/(k)} \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\substack{\rho \vdash k \\ \rho \subseteq \lambda \cap \mu}} f^{\lambda/\rho} f^{\mu/\rho} = 0.$$

Sabemos también por la observación 4.2 que  $f^{\beta/(k)} > 0$  si  $(k) \subseteq \beta$ , por lo cual  $\langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = 0$  para toda  $\beta \supseteq (k)$ , o equivalentemente para toda  $\beta$  tal que  $w(\beta) \geq k$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) &= \max\{w(\beta) \mid \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle \neq 0\} < k \\ &\Rightarrow w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) \leq k - 1 = |\lambda \cap \mu|. \end{aligned}$$

Tomemos ahora  $\tilde{k} := |\lambda \cap \mu|$ , la única partición posible de  $\tilde{k}$  que contiene a  $\lambda \cap \mu$  es  $\lambda \cap \mu$  misma, así que al utilizar nuevamente la Proposición 4.3 encontramos que

$$\sum_{\substack{\beta \vdash n \\ (\tilde{k}) \subseteq \beta}} f^{\beta/(\tilde{k})} \langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle = \sum_{\substack{\rho \vdash \tilde{k} \\ \rho \subseteq \lambda \cap \mu}} f^{\lambda/\rho} f^{\mu/\rho} = f^{\lambda/\lambda \cap \mu} f^{\mu/\lambda \cap \mu} \underset{\text{Obs 4.2}}{>} 0.$$

Existe entonces  $\beta \vdash n$  con  $(\tilde{k}) \subseteq \beta$ , es decir, con  $w(\beta) \geq \tilde{k} = |\lambda \cap \mu|$ , tal que  $\langle \chi^\beta, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle \neq 0$ , de lo cual se desprende que

$$\begin{aligned} w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) &= \max\{w(\nu) \mid \langle \chi^\nu, \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \rangle \neq 0\} \geq w(\beta) \geq |\lambda \cap \mu|; \\ &\text{por lo tanto } w(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) = |\lambda \cap \mu|. \end{aligned}$$

La prueba de 2 se deduce de 1 al aplicar la Definición 2.4, la asociatividad del producto tensorial y el Teorema 2.3:

$$h(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) = w((\chi^\lambda \otimes \chi^\mu)') = w(\chi^\lambda \otimes \chi^{\mu'}) = |\lambda \cap \mu'|.$$

□

**Comentario 4.5.** Es posible invertir el orden de la demostración anterior, probar primero el inciso 2 y deducir de él el inciso 1.

Como consecuencia del Teorema 4.4 se tienen condiciones necesarias para que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$ :

**Corolario 4.6.** Sean  $\lambda, \mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$ . Si  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  entonces

1.  $w(\nu) \leq |\lambda \cap \mu|$ ,
2.  $h(\nu) \leq |\lambda \cap \mu'|$ .

Las condiciones anteriores son necesarias para que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  pero no suficientes:

**Ejemplo 4.7.** Sean  $\lambda = \mu = (2^2)$  y  $\nu = (3, 1)$ , entonces:

$$w(\lambda) = w(\mu) = 2 \leq 3 = |(2, 1)| = |\mu \cap \nu| = |\lambda \cap \nu|,$$

$$w(\nu) = 3 \leq 4 = |(2^2)| = |\lambda \cap \mu|,$$

$$h(\lambda) = h(\mu) = 2 \leq 3 = |(2, 1)| = |\mu \cap \nu'| = |\lambda \cap \nu'|,$$

$$h(\nu) = 2 \leq 4 = |\lambda \cap \mu|.$$

Sin embargo,  $c(\lambda, \mu, \nu) = 0$  como se puede comprobar con las fórmulas presentadas en el último capítulo de este trabajo.

Este corolario es muy útil en la práctica pero hay que resaltar que el Teorema 4.4 proporciona más información, pues no sólo indica que todas las particiones que aparecen en la descomposición de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  tienen ancho menor o igual a  $|\lambda \cap \mu|$ , sino que asegura que existe una partición donde este ancho máximo se alcanza. Análogamente para la altura.

Es importante hacer notar que el Teorema 4.4 establece una forma exacta para expresar a  $h(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu)$  como el área de la intersección de los diagramas de Young de  $\lambda$  y del conjugado de  $\mu$ . Yoav Dvir probó este resultado motivado por la desigualdad  $h(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) \leq h(\chi^\lambda)h(\chi^\mu)$  encontrada previamente por su asesor de tesis doctoral, Amitai Regev [AR80]. El teorema de Dvir convierte esta estimación en una fórmula precisa y del mismo se concluye fácilmente la afirmación de Regev que estableceremos a continuación:

**Corolario 4.8.** Sean  $\lambda, \mu$  particiones de  $n$ . Entonces:

$$h(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu) \leq h(\chi^\lambda)h(\chi^\mu).$$

DEMOSTRACIÓN:

Como  $\lambda \cap \mu' \subseteq \lambda, \mu'$ , entonces  $h(\lambda \cap \mu') \leq h(\lambda)$  y  $w(\lambda \cap \mu') \leq w(\mu') = h(\mu)$ , por lo cual  $|\lambda \cap \mu'| \leq h(\lambda)h(\mu) = h(\chi^\lambda)h(\chi^\mu)$ . Así, llegamos al resultado mediante el Teorema 4.4.

□

Como se mostrará enseguida, al tratar de generalizar el Teorema 4.4 al producto de caracteres sesgados la precisión se pierde y obtenemos únicamente cotas del ancho y la altura de dichos caracteres:

**Corolario 4.9.** Sean  $m_1, m_2, l \geq 0$ ,  $n_1 = m_1 + l$ ,  $n_2 = m_2 + l$ ,  $\lambda \vdash n_1$ ,  $\eta \vdash m_1$ ,  $\mu \vdash n_2$ ,  $\xi \vdash m_2$ . Entonces:

1.  $w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}) \leq |\lambda \cap \mu|$ ,
2.  $h(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}) \leq |\lambda \cap \mu'|$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 tenemos que .

$$\begin{aligned} w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}) &= \text{máx}\{w(\sigma) \mid \langle \chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}, \chi^\sigma \rangle \neq 0\} \\ &= \text{máx}\{w(\sigma) \mid \left\langle \left( \sum_{\nu \vdash l} c_{\eta\nu}^\lambda \chi^\nu \right) \otimes \left( \sum_{\rho \vdash l} c_{\xi\rho}^\mu \chi^\rho \right), \chi^\sigma \right\rangle \neq 0\} \\ &= \text{máx}\{w(\sigma) \mid \sum_{\nu, \rho \vdash l} c_{\eta\nu}^\lambda c_{\xi\rho}^\mu \langle \chi^\nu \otimes \chi^\rho, \chi^\sigma \rangle \neq 0\}. \end{aligned}$$

Sea  $\bar{\sigma}$  una partición de  $l$  donde se alcanza ese máximo, y  $\tau, \phi \vdash l$  tales que

$$\begin{aligned} c_{\eta\tau}^\lambda c_{\xi\phi}^\mu \langle \chi^\tau \otimes \chi^\phi, \chi^{\bar{\sigma}} \rangle &\neq 0 \\ \Rightarrow \tau \subseteq \lambda, \phi \subseteq \mu \text{ y } \langle \chi^\tau \otimes \chi^\phi, \chi^{\bar{\sigma}} \rangle &\neq 0, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que

$$w(\chi^\tau \otimes \chi^\phi) = \text{máx}\{w(\psi) \mid \langle \chi^\tau \otimes \chi^\phi, \chi^\psi \rangle \neq 0\} \geq w(\bar{\sigma}) = w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}).$$

Por el Teorema 4.4 sabemos que  $w(\chi^\tau \otimes \chi^\phi) = |\tau \cap \phi|$ ; además  $\tau \subseteq \lambda$  y  $\phi \subseteq \mu$ , entonces  $|\tau \cap \phi| \leq |\lambda \cap \mu|$ . Por lo tanto  $w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}) \leq |\lambda \cap \mu|$ .

La prueba del segundo inciso se obtiene del primero y del Corolario 2.32 del siguiente modo:

$$\begin{aligned} h(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi}) &= w((\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu/\xi})') = w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes (\chi^{\mu/\xi})') \\ &= w(\chi^{\lambda/\eta} \otimes \chi^{\mu'/\xi'}) \leq |\lambda \cap \mu'|. \end{aligned}$$

□

## 2. Profundidad

Los siguientes resultados aparecen en [JK81, 2.9]; como se menciona en este texto, Klemm los probó con anterioridad en [MK77, p.457]. Se darán pruebas distintas a las que ahí se presentan ya que se verán como consecuencias del Teorema 4.4.



**Lema 4.10.** Sean  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$ . Entonces  $w(\nu) \leq |\lambda \cap \mu|$  si y sólo si  $|\lambda - \mu| \leq 2d(\nu)$ .<sup>1</sup>

DEMOSTRACIÓN:

$w(\nu) = \nu_1 \leq |\lambda \cap \mu|$  si y sólo si  $n - d(\nu) \leq |\lambda \cap \mu|$ . La aplicación de la observación 1.1 nos indica que esto ocurre siempre y cuando:

$$n - d(\nu) \leq n - \frac{|\lambda - \mu|}{2}, \text{ o bien } |\lambda - \mu| \leq 2d(\nu).$$

□

Podemos entonces reformular el Corolario 4.6 en términos de la profundidad de una partición:

**Corolario 4.11.** Sean  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$ . Si  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$ , entonces

$$|\lambda - \mu| := \sum_{i \geq 1} |\lambda_i - \mu_i| \leq 2d(\nu).$$

Cabe notar que el recíproco de la afirmación anterior es falso:

**Ejemplo 4.12.** Sean  $\lambda = (2^3)$ ,  $\mu = (3, 2, 1)$  y  $\nu = (1^6)$  particiones de 6. Sabemos que:

$$|\lambda - \mu| = 2 \leq 10 = 2d(\nu),$$

$$|\lambda - \nu| = 6 \leq 6 = 2d(\mu),$$

$$|\mu - \nu| = 6 \leq 8 = 2d(\lambda);$$

sin embargo,  $c(\lambda, \mu, \nu) = 0$  por la observación 3.4, ya que  $\lambda \neq \mu'$ .

Como consecuencia del Corolario 4.11 hallamos:

**Corolario 4.13.** Sean  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$  particiones de  $n$ . Si  $lr(\lambda, \mu; \nu) \neq 0$  entonces

$$|\lambda - \mu| := \sum_{i \geq 1} |\lambda_i - \mu_i| \leq 2d(\nu).$$

DEMOSTRACIÓN:

Como  $lr(\lambda, \mu; \nu) = \sum_{\tau \geq \nu} K_{\tau\nu} c(\lambda, \mu, \tau)$  por el Teorema 2.16, entonces el hecho de que  $lr(\lambda, \mu; \nu) \neq 0$  implica que existe  $\tau \geq \nu$  tal que  $c(\lambda, \mu, \tau) \neq 0$ . Gracias al Corolario 4.11 sabemos que  $|\lambda - \mu| \leq 2d(\tau)$ ,

<sup>1</sup>Recordemos que al principio de esta tesis se definió  $d(\gamma)$  como el número de nodos de  $\gamma$  que no pertenecen al primer renglón.

pero  $\tau \supseteq \nu$ , en particular  $\tau_1 \geq \nu_1$ ; entonces  $d(\tau) \leq d(\nu)$ , lo que nos conduce al resultado buscado.  $\square$

En la anterior demostración observamos que  $|\lambda - \mu|$  se encuentra acotado superiormente por la profundidad de alguna  $\tau \supseteq \nu$ , y  $\tau_1$  puede superar por mucho a  $\nu_1$ , lo cual implicaría que  $d(\tau)$  es mucho más pequeña que  $d(\nu)$ . En este caso la cota dada en el corolario anterior no es muy buena.<sup>2</sup>

Mediante los resultados previos es posible estimar las componentes irreducibles  $\chi^\nu$  que aparecen en la descomposición de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  en términos del número de nodos de  $\nu$  que no pertenecen al primer renglón, es decir, en términos de la profundidad de  $\nu$ ,  $d(\nu)$ .

**Teorema 4.14.** *Sean  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$ . La profundidad  $d(\nu)$  de cada componente irreducible  $\chi^\nu$  de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  satisface las siguientes desigualdades:*

$$|d(\lambda) - d(\mu)| \leq d(\nu) \leq d(\lambda) + d(\mu).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $\chi^\nu$  una componente irreducible de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ , entonces  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  y por el corolario anterior  $|\lambda - \mu| \leq 2 d(\nu)$ . Por otro lado:

$$\begin{aligned} |\lambda - \mu| &= |\lambda_1 - \mu_1| + \sum_{i \geq 2} |\lambda_i - \mu_i| \geq |\lambda_1 - \mu_1| + \left| \sum_{i \geq 2} (\lambda_i - \mu_i) \right| \\ &= |(n - \lambda_1) - (n - \mu_1)| + \left| \sum_{i \geq 2} \lambda_i - \sum_{i \geq 2} \mu_i \right| = 2|d(\lambda) - d(\mu)|. \end{aligned}$$

Al juntar estos hechos observamos que  $2|d(\lambda) - d(\mu)| \leq |\lambda - \mu| \leq 2 d(\nu)$ , de donde  $|d(\lambda) - d(\mu)| \leq d(\nu)$ .

Para probar la segunda parte de la desigualdad recordemos que  $c(\lambda, \mu, \nu)$  es simétrico en  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  por lo cual del razonamiento previo podemos concluir que  $|d(\nu) - d(\mu)| \leq d(\lambda)$ ; entonces

$$d(\nu) - d(\mu) \leq |d(\nu) - d(\mu)| \leq d(\lambda) \quad \Rightarrow \quad d(\nu) \leq d(\lambda) + d(\mu). \quad \square$$

Es importante notar que el resultado anterior se probó a partir del Corolario 4.11 (que es una reformulación del Corolario 4.6), pero se requiere además la simetría de  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en sus tres entradas para

<sup>2</sup>Es posible probar el Corolario 4.13 usando únicamente la interpretación de los números  $lr(\lambda, \mu, \nu)$  en términos de tablas de Littlewood-Richardson y la observación 1.1; entonces el Corolario 4.11 se sigue como consecuencia ya que el hecho de que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  implica que  $lr(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$ , invirtiendo así el orden de la presentación.

verificar la segunda desigualdad. Si nos olvidamos de esta simetría, es posible encontrar particiones  $n$  tales que  $w(\nu) \leq |\lambda \cap \mu|$  (condición necesaria para que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  por el Teorema 4.4), pero que no cumplen con la segunda desigualdad del Teorema 4.14 y por tanto tales que  $\chi^\nu$  no aparece en la descomposición en irreducibles de  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ .

**Ejemplo 4.15.** Sean  $n \geq 8$  y  $\lambda = (n-1, 1)$ , entonces

$$w(\chi^{(n-4,4)}) = n-4 \leq n = |\lambda \cap \lambda| = w(\chi^\lambda \otimes \chi^\lambda)$$

$$h(\chi^{(n-4,4)}) = 2 \leq 3 = |\lambda \cap \lambda'| = h(\chi^\lambda \otimes \chi^{\lambda'}).$$

Sin embargo,  $d((n-4, 4)) = 4 > d(\lambda) + d(\lambda) = 2$ ; por el Teorema 4.14 se tiene que  $c(\lambda, \lambda, (n-4, 4)) = 0$ .

El Teorema 4.14, que presentaron Klemm en [MK77, p.457-458], y James y Kerber en [JK81, p.99] establece condiciones necesarias para que  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  en términos de la profundidad de dichas particiones. Sin embargo, es un resultado más débil que el Corolario 4.6, o bien su reformulación, el Corolario 4.11, como se verá a continuación:

**Ejemplo 4.16.** Sean  $\lambda = (3^2)$ ,  $\mu = (3, 1^3)$  y  $\nu = (5, 1)$  particiones de 6. Entonces:

$$|d(\lambda) - d(\mu)| = 0 \leq d(\nu) = 1 \leq 6 = d(\lambda) + d(\mu),$$

$$|d(\lambda) - d(\nu)| = 2 \leq d(\mu) = 3 \leq 4 = d(\lambda) + d(\nu),$$

$$|d(\mu) - d(\nu)| = 2 \leq d(\lambda) = 3 \leq 4 = d(\mu) + d(\nu);$$

sin embargo  $w(\nu) = 5 > 4 = |(3, 1)| = |\lambda \cap \mu|$  y por el Teorema 4.4 se tiene que  $c(\lambda, \mu, \nu) = 0$ .

Con miras a estudiar el caso en que se da la igualdad  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$ , estableceremos a continuación dos lemas técnicos que aparecen en [YD93, pp.134-135] y que serán usados en la siguiente sección:

**Lema 4.17.** Dadas  $\lambda, \mu$  y  $\nu$  particiones de  $n$  se tiene que<sup>3</sup>:

1.  $n - |\lambda_1 - \nu_1| \geq |\lambda \cap \nu|$
2. Si  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$  entonces
  - (a)  $\mu_1 = n - \lambda_1 + \nu_1$
  - (b)  $\lambda_1 \geq \nu_1$
  - (c)  $|\lambda \cap \nu| = \mu_1$  si y sólo si  $\bar{\lambda} \subseteq \bar{\nu}$ .

<sup>3</sup>Recordemos que  $\bar{\rho} := (\rho_2, \rho_3, \dots)$  como se definió en la primera sección de esta tesis.

DEMOSTRACIÓN:

1. Como  $\lambda$  y  $\nu$  juegan papeles simétricos podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\lambda_1 \geq \nu_1$ , entonces

$$\begin{aligned} n - |\lambda_1 - \nu_1| &= \nu_1 - \lambda_1 + n = \nu_1 - \lambda_1 + \sum_{i \geq 1} \lambda_i = \nu_1 + \sum_{i \geq 2} \lambda_i \\ &\geq \sum_{i \geq 1} \min\{\lambda_i, \nu_i\} = |\lambda \cap \nu|. \end{aligned}$$

2.(a) Por hipótesis  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$ , es decir,

$$n - \nu_1 = n - \lambda_1 + n - \mu_1 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = n - \lambda_1 + \nu_1.$$

2.(b) Por lo anterior  $n - \lambda_1 + \nu_1 = \mu_1 \leq n$ ; entonces  $\nu_1 - \lambda_1 \leq 0$ , es decir  $\lambda_1 \geq \nu_1$ .

2.(c) Usando 2.(a) y la definición de  $\lambda \cap \nu$  tenemos que  $|\lambda \cap \nu| = \mu_1$  si y sólo si

$$\sum_{i \geq 1} \min\{\lambda_i, \nu_i\} = \left( \sum_{i \geq 2} \lambda_i \right) + \nu_1$$

como  $\lambda_1 \geq \nu_1$  por 2.(b) la igualdad anterior se da si y sólo si  $\min\{\lambda_i, \nu_i\} = \lambda_i$  para toda  $i \geq 2$ , es decir,  $\lambda_i \leq \nu_i$  para toda  $i \geq 2$ , lo cual ocurre si y sólo si  $\bar{\lambda} \subseteq \bar{\nu}$ . □

**Lema 4.18.** Dadas  $\lambda, \mu$  y  $\nu \vdash n$  tales que  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$  y  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  Entonces:

$$\mu_1 = |\lambda \cap \nu|.$$

DEMOSTRACIÓN:

Como  $c(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$  entonces  $\mu_1 = w(\mu) \leq w(\chi^\lambda \otimes \chi^\nu)$  y por el Teorema 4.4 sabemos que  $w(\chi^\lambda \otimes \chi^\nu) = |\lambda \cap \nu|$  así que  $\mu_1 \leq |\lambda \cap \nu|$ . Además por el Lema 4.17 se tiene que

$$|\lambda \cap \nu| \stackrel{1.}{\leq} n - |\lambda_1 - \nu_1| \stackrel{2.(b)}{=} n - \lambda_1 + \nu_1 \stackrel{2.(a)}{=} \mu_1$$

con lo cual  $\mu_1 = |\lambda \cap \nu|$ . □

El recíproco de la afirmación anterior es falso:

**Ejemplo 4.19.** Sean  $\lambda = (5, 2, 1)$ ,  $\mu = (3, 2, 1^3)$  y  $\nu = (6, 2)$  particiones de 8. Tenemos que  $\mu_1 = 6 = |(3, 2, 1)| = |\lambda \cap \mu|$ . Sin embargo  $c(\lambda, \mu, \nu) = 0$ .<sup>4</sup>

### 3. Fórmulas recursivas para $c(\lambda, \mu, \nu)$

Enunciaremos ahora un teorema que aparece en el artículo [YD93, p.133], dando una prueba distinta a la que se presenta en ese trabajo. Requerimos para ello de un resultado previo:

**Lema 4.20.** Sean  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$  y  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$  particiones de  $n$  con  $\gamma_1 = \rho_1$ . Entonces  $K_{\gamma\rho}^{(-1)} = K_{\bar{\gamma}\bar{\rho}}^{(-1)}$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sean  $C := \{T|T \text{ es una tabla de escuadras sesgadas especiales de forma } \rho \text{ y cuyo contenido es un reordenamiento de } \gamma\}$  y  $D := \{T|T \text{ es una tabla de escuadras sesgadas especiales de forma } \bar{\rho} \text{ y cuyo contenido es un reordenamiento de } \bar{\gamma}\}$ , sabemos por el Teorema 1.12 que

$$K_{\gamma\rho}^{(-1)} = \sum_{T \in C} \text{sgn}(T), \quad K_{\bar{\gamma}\bar{\rho}}^{(-1)} = \sum_{S \in D} \text{sgn}(S).$$

Si  $T \in C$ , su contenido es un reordenamiento de  $\gamma = (\rho_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$  y tiene forma  $\rho$ , así que la escuadra sesgada de longitud  $\rho_1$  debe estar a lo largo de todo el primer renglón de  $T$ . Removiendo este primer renglón, obtenemos una tabla  $\hat{T} \in D$ . La aplicación  $T \mapsto \hat{T}$  es una biyección de  $C$  en  $D$  tal que  $\text{sgn}(T) = \text{sgn}(\hat{T})$ , de lo cual se concluye que  $K_{\gamma\rho}^{(-1)} = K_{\bar{\gamma}\bar{\rho}}^{(-1)}$ . □

**Teorema 4.21.** Sean  $\lambda, \mu$  y  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_t)$  particiones de  $n$ , con  $w(\rho) = \rho_1 = |\lambda \cap \mu|$ . Entonces:

$$c(\lambda, \mu, \rho) = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\rho \rangle = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu} \otimes \chi^{\mu/\lambda \cap \mu}, \chi^{\bar{\rho}} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN:

El Teorema 3.14 nos indica que

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\rho \rangle = \sum_{\gamma \triangleright \rho} K_{\gamma\rho}^{(-1)} \text{lr}(\lambda, \mu; \gamma).$$

Si  $\gamma \triangleright \rho$  tenemos que  $\gamma_1 \geq \rho_1 = |\lambda \cap \mu|$ . Observamos además que si  $\text{lr}(\lambda, \mu; \gamma) \neq 0$ , con  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , debe existir una pareja de tablas

<sup>4</sup>Esto puede revisarse en las tablas que se encuentran al final del libro [JK81, p.457] o bien, con el Teorema 4.23 que se presentará en esta misma sección se tendrá que  $c(\lambda, \mu, \nu) = c_{\lambda\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} = 0$ .

de Littlewood-Richardson  $(S, T)$  de forma  $(\lambda, \mu)$  e igual contenido (ver la Definición 3.10), digamos  $(\phi(1), \dots, \phi(s))$  con  $\phi(i) \vdash \gamma_i \forall 1 \leq i \leq s$ . Entonces necesariamente  $\phi(1) \subseteq \lambda \cap \mu$ , por lo cual  $\gamma_1 = |\phi(1)| \leq |\lambda \cap \mu| = \rho_1$ ; al juntar estos hechos concluimos que  $\phi(1) = \lambda \cap \mu$  y  $\gamma_1 = \rho_1$ . Así,

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\rho \rangle = \sum_{\substack{\gamma \supseteq \rho \\ \gamma_1 = \rho_1}} K_{\gamma\rho}^{(-1)} lr(\lambda, \mu; \gamma). \quad (22)$$

Por otro lado, al expresar a  $\chi^\beta$  en términos de la base  $\{\phi^\nu | \nu \vdash d(\rho)\}$  y usar la observación 3.11 obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu} \otimes \chi^{\mu/\lambda \cap \mu}, \chi^\beta \rangle &= \left\langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu} \otimes \chi^{\mu/\lambda \cap \mu}, \sum_{\tau \supseteq \beta} K_{\tau\beta}^{(-1)} \phi^\tau \right\rangle \\ &= \sum_{\tau \supseteq \beta} K_{\tau\beta}^{(-1)} \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu} \otimes \chi^{\mu/\lambda \cap \mu}, \phi^\tau \rangle = \sum_{\tau \supseteq \beta} K_{\tau\beta}^{(-1)} lr(\lambda/\lambda \cap \mu, \mu/\lambda \cap \mu; \tau). \end{aligned} \quad (23)$$

Notemos que existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos  $A := \{\gamma \vdash n | \gamma \supseteq \rho, \gamma_1 = \rho_1\}$  y  $B := \{\tau \vdash d(\rho) | \tau \supseteq \bar{\rho}\}$  sobre los cuales corren las sumas en (22) y (23), dada por  $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ . Por el Lema 4.20 sabemos que  $K_{\gamma\rho}^{(-1)} = K_{\bar{\gamma}\bar{\rho}}^{(-1)}$  y se probará también que  $lr(\lambda, \mu; \gamma) = lr(\lambda/\lambda \cap \mu, \mu/\lambda \cap \mu; \bar{\gamma})$ , lo cual completará el resultado, pues entonces podremos igualar las ecuaciones (22) y (23).

Sabemos que  $lr(\lambda, \mu; \gamma)$  es el número de parejas  $(S, T)$  de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda, \mu)$ , tipo  $\gamma$  e igual contenido, pero como se mencionó al inicio de la prueba, si  $S = (S_1, \dots, S_s)$  y  $T = (T_1, \dots, T_s)$ , entonces  $S_1$  y  $T_1$  tienen forma  $\lambda \cap \mu$ , por lo cual  $lr(\lambda, \mu; \gamma)$  es igual al número de parejas de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda/\lambda \cap \mu, \mu/\lambda \cap \mu)$ , tipo  $\bar{\gamma}$  e igual contenido, es decir,  $lr(\lambda, \mu; \gamma) = lr(\lambda/\lambda \cap \mu, \mu/\lambda \cap \mu; \bar{\gamma})$ .  $\square$

Mencionaremos a continuación una versión del teorema anterior que involucra a las particiones conjugadas que presenta también Dvir en [YD93, p.134]:

**Teorema 4.22.** Sean  $\lambda, \mu, \rho \vdash m + l$ , con  $h(\rho) = |\lambda \cap \mu'| = m$  y sea  $\xi \vdash l$  tal que  $\xi' = \bar{\rho}'$ . Entonces<sup>5</sup>:

$$c(\lambda, \mu, \rho) = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\rho \rangle = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes \chi^{\mu/\lambda \cap \mu'}, \chi^\xi \rangle.$$

<sup>5</sup>La partición  $\xi$  se obtiene de  $\rho$  eliminando la primera columna del diagrama asociado a  $\rho$ .

DEMOSTRACIÓN:

La prueba se sigue del Teorema 4.21, y la aplicación del Teorema 2.3 y el Corolario 2.32:

$$\begin{aligned} c(\lambda, \mu, \rho) &= c(\lambda, \mu', \rho') = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes \chi^{\mu'/\lambda \cap \mu'}, \chi^{\rho'} \rangle \\ &= \langle (\chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes \chi^{\mu'/\lambda \cap \mu'})', (\chi^{\rho'})' \rangle = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes (\chi^{\mu'/\lambda \cap \mu'})', \chi^\xi \rangle \\ &= \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes \chi^{\mu/(\lambda \cap \mu')'}, \chi^\xi \rangle = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \mu'} \otimes \chi^{\mu/\lambda' \cap \mu'}, \chi^\xi \rangle. \end{aligned}$$

□

En la sección anterior, con el Teorema 4.14 se probó que cada componente irreducible  $\chi^\nu$  del producto  $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$  satisface las desigualdades  $|d(\lambda) - d(\mu)| \leq d(\nu) \leq d(\lambda) + d(\mu)$ . A continuación analizaremos qué ocurre cuando se da la igualdad  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$ ; en este caso  $c(\lambda, \mu, \nu)$  queda descrito como un coeficiente de Littlewood-Richardson que involucra a las particiones que se obtienen de  $\lambda, \mu$  y  $\nu$  al quitarles el primer renglón. El teorema que presentamos a continuación está contenido en el artículo [YD93, p.136].

**Teorema 4.23.** Sean  $\lambda, \mu$  y  $\nu \vdash n$  tales que  $d(\nu) = d(\lambda) + d(\mu)$ . Entonces:

$$c(\lambda, \mu, \nu) = c_{\lambda\bar{\mu}}^{\bar{\nu}}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Caso 1.-  $\mu_1 = |\lambda \cap \nu|$ .

Por el Teorema 4.21 sabemos que

$$c(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^{\lambda/\lambda \cap \nu} \otimes \chi^{\nu/\lambda \cap \nu}, \chi^{\bar{\mu}} \rangle. \quad (24)$$

Asimismo por el Lema 4.17, incisos 2 (b) y (c) tenemos que

$$\lambda \cap \nu = (\min\{\lambda_i, \nu_i\})_{i \geq 1} = (\nu_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots).$$

De aquí que  $\lambda/\lambda \cap \nu = (\lambda_1 - \nu_1)$  y  $\overline{\lambda \cap \nu} = \bar{\lambda}$ , por lo que

$$\nu/\lambda \cap \nu = \bar{\nu}/\overline{\lambda \cap \nu} = \bar{\nu}/\bar{\lambda}.$$

Entonces, al usar el Teorema 2.3 y la Regla de Littlewood-Richardson, la ecuación (24) se convierte en:

$$c(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^{(\lambda_1 - \nu_1)} \otimes \chi^{\bar{\nu}/\bar{\lambda}}, \chi^{\bar{\mu}} \rangle = \langle \chi^{\bar{\nu}/\bar{\lambda}}, \chi^{\bar{\mu}} \rangle = c_{\lambda\bar{\mu}}^{\bar{\nu}}.$$

Caso 2.-  $\mu_1 \neq |\lambda \cap \nu|$ .

Del Lema 4.18 podemos concluir que  $c(\lambda, \mu, \nu) = 0$  y del Lema 4.17 inciso 2 (c)  $\bar{\lambda} \not\subseteq \bar{\nu}$ , por lo cual  $c_{\lambda\bar{\mu}}^{\bar{\nu}}$  es también igual a cero.

□

El siguiente resultado aparece en el artículo [YD93, p.132] y se usará para dar nuevas pruebas de algunos resultados de Remmel.

**Proposición 4.24.** *Sean  $m \leq n$ ,  $\lambda, \mu \vdash n$ ,  $\theta \vdash n - m$ . Entonces:*

1.  $\left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle = \sum_{\nu \in Y(\theta, m)} c(\lambda, \mu, \nu),$
2.  $\left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle = \sum_{\alpha \vdash m} \langle \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\alpha}, \chi^\theta \rangle,$

donde  $Y(\theta, m) = \{\rho \vdash n \mid \rho/\theta \text{ es una tira horizontal}\}.$

DEMOSTRACIÓN:

1. Por linealidad se tiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle &= \left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} \left( \sum_{\nu \vdash n} c(\lambda, \mu, \nu) \chi^\nu \right), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \sum_{\nu \vdash n} c(\lambda, \mu, \nu) \left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\nu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle; \end{aligned} \quad (25)$$

sabemos por el Lema 2.27 que  $\text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\nu) = \sum_{\substack{\alpha \vdash m \\ \beta \vdash n-m}} c_{\alpha\beta}^\nu (\chi^\alpha \times \chi^\beta).$

Como  $\mathfrak{B} = \{\chi^\alpha \times \chi^\beta \mid \alpha \vdash m, \beta \vdash n - m\}$  es el conjunto completo de caracteres irreducibles de  $S(m, n - m)$  por el Teorema 2.7, entonces

$$\sum_{\nu \vdash n} c(\lambda, \mu, \nu) \left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\nu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle = \sum_{\nu \vdash n} c(\lambda, \mu, \nu) c_{(m)\theta}^\nu \quad (26)$$

y  $c_{(m)\theta}^\nu \neq 0$  siempre y cuando  $\nu/\theta$  pueda ser llenado con  $m$  unos de modo que se obtenga una tabla de Littlewood-Richardson, lo cual ocurre sólo cuando  $\nu/\theta$  es una tira horizontal. Por ello, de las ecuaciones (25) y (26) se concluye que

$$\left\langle \text{Res}_{S(n-m, m)}^{S(n)} (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle = \sum_{\nu \in Y(\theta, m)} c(\lambda, \mu, \nu).$$

2. Por propiedades de la restricción se tiene que

$$\begin{aligned} &\left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\lambda) \otimes \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)} (\chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \end{aligned}$$



pero por Lema 2.27 y la Regla de Littlewood-Richardson 2.22 se deduce que

$$\begin{aligned} \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)}(\chi^\lambda) &= \sum_{\substack{\alpha \vdash m \\ \beta \vdash n-m}} c_{\alpha\beta}^\lambda (\chi^\alpha \times \chi^\beta) = \sum_{\alpha \vdash m} \chi^\alpha \times \left( \sum_{\beta \vdash n-m} c_{\alpha\beta}^\lambda \chi^\beta \right) = \sum_{\alpha \vdash m} \chi^\alpha \times \chi^{\lambda/\alpha}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)}(\chi^\mu) = \sum_{\pi \vdash m} \chi^\pi \times \chi^{\mu/\pi}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} &\left\langle \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)}(\chi^\lambda) \otimes \text{Res}_{S(m, n-m)}^{S(n)}(\chi^\mu), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \sum_{\alpha \vdash m} \chi^\alpha \times \chi^{\lambda/\alpha} \right) \otimes \left( \sum_{\pi \vdash m} \chi^\pi \times \chi^{\mu/\pi} \right), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \pi \vdash m} \left\langle (\chi^\alpha \times \chi^{\lambda/\alpha}) \otimes (\chi^\pi \times \chi^{\mu/\pi}), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, por los Teoremas 2.3, 1.37 y 1.36 sabemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha, \pi \vdash m} \left\langle (\chi^\alpha \times \chi^{\lambda/\alpha}) \otimes (\chi^\pi \times \chi^{\mu/\pi}), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \pi \vdash m} \left\langle (\chi^\alpha \otimes \chi^\pi) \times (\chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\pi}), \chi^{(m)} \times \chi^\theta \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \pi \vdash m} \left\langle \chi^\alpha \otimes \chi^\pi, \chi^{(m)} \right\rangle \left\langle \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\pi}, \chi^\theta \right\rangle = \sum_{\alpha \vdash m} \left\langle \chi^{\lambda/\alpha} \otimes \chi^{\mu/\alpha}, \chi^\theta \right\rangle. \end{aligned}$$

A partir de este desarrollo llegamos al resultado. □

Al igualar los incisos 1 y 2 y usar la Definición 2.11 tenemos:

**Corolario 4.25.** Sean  $m \leq n$ ,  $\lambda, \mu \vdash n$ ,  $\theta \vdash n-m$ . Entonces:

$$\sum_{\nu \in Y(\theta, m)} c(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\alpha \vdash m} \sum_{\sigma, \tau \vdash n-m} c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\alpha\tau}^\mu c(\sigma, \tau, \theta)$$

donde  $Y(\theta, m) = \{\rho \vdash n \mid \rho/\theta \text{ es una tira horizontal}\}$ .

## CAPÍTULO 5

### Escuadras y escuadras dobles

En este capítulo se describe a los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  cuando las particiones involucradas son escuadras.

Para comenzar utilicemos el Corolario 4.25 para obtener un sistema de ecuaciones que nos permita describir a los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en el caso particular en que  $\nu$  es una escuadra. Recordemos que el corolario nos indica que si  $m \leq n$ ,  $\lambda, \mu \vdash n$  y  $\theta \vdash n - m$  entonces:

$$\sum_{\nu \in Y(\theta, m)} c(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\alpha \vdash m} \sum_{\sigma, \tau \vdash n-m} c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\tau}^{\mu} c(\sigma, \tau, \theta)$$

con  $Y(\theta, m) = \{\rho \vdash n \mid \rho/\theta \text{ es una tira horizontal}\}$ . Analicemos qué ocurre al tomar  $\theta = (1^{n-m})$ :

Sea  $\theta = (1^{n-m})$  con  $m \neq 0, n$ ; en este caso

$$Y(\theta, m) = \{(m+1, 1^{n-m-1}), (m, 1^{n-m})\}.$$

Además, si  $\sigma, \tau \vdash n - m$  son tales que  $c(\sigma, \tau, \theta) \neq 0$ , sabemos por la observación 3.4 que  $\sigma = \tau'$ , en cuyo caso  $c(\sigma, \sigma', (1^{n-m})) = 1$ . En consecuencia:

$$\begin{aligned} c(\lambda, \mu, (m, 1^{n-m})) + c(\lambda, \mu, (m+1, 1^{n-m-1})) &= \sum_{\alpha \vdash m} \sum_{\sigma \vdash n-m} c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \\ &= \sum_{\substack{\alpha \vdash m \\ \alpha \subseteq \lambda \cap \mu}} \sum_{\sigma \vdash n-m} c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu}. \end{aligned}$$

Para abreviar esta fórmula denotaremos por  $D(\lambda, \mu, m)$  a esta última suma de manera que

$$c(\lambda, \mu, (m, 1^{n-m})) + c(\lambda, \mu, (m+1, 1^{n-m-1})) = D(\lambda, \mu, m). \quad (27)$$

Al definir  $D(\lambda, \mu, n) := c(\lambda, \mu, (n)) = \delta_{\lambda\mu}$  y hacer variar  $m$  podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c(\lambda, \mu, (1^n)) + c(\lambda, \mu, (2, 1^{n-2})) &= D(\lambda, \mu, 1) \\ c(\lambda, \mu, (2, 1^{n-2})) + c(\lambda, \mu, (3, 1^{n-3})) &= D(\lambda, \mu, 2) \\ &\vdots \\ c(\lambda, \mu, (n-2, 1^2)) + c(\lambda, \mu, (n-1, 1)) &= D(\lambda, \mu, n-2) \\ c(\lambda, \mu, (n-1, 1)) + c(\lambda, \mu, (n)) &= D(\lambda, \mu, n-1) \\ c(\lambda, \mu, (n)) &= D(\lambda, \mu, n). \end{aligned} \quad (28)$$

La matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones anterior es

$$\left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & D(\lambda, \mu, 1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & D(\lambda, \mu, 2) \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & D(\lambda, \mu, n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & D(\lambda, \mu, n) \end{array} \right).$$

A través de la resolución de este sistema obtenemos que

$$c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = \sum_{i=t}^n (-1)^{i-t} D(\lambda, \mu, i) \quad (29)$$

para toda  $0 < t \leq n$ .

Simplifiquemos esta fórmula con ayuda del Teorema 4.4.

Si  $|\lambda \cap \mu| < t \leq n$  el teorema nos indica que  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = 0$  por lo cual

$$0 = c(\lambda, \mu, (n)) = c(\lambda, \mu, (n-1, 1)) = \cdots = c(\lambda, \mu, (|\lambda \cap \mu| + 1, 1^{n-|\lambda \cap \mu|-1}));$$

por el sistema (28) esto implica que

$$0 = D(\lambda, \mu, n) = D(\lambda, \mu, n-1) = \cdots = D(\lambda, \mu, |\lambda \cap \mu| + 1),$$

y también que  $c(\lambda, \mu, (|\lambda \cap \mu|, 1^{n-|\lambda \cap \mu|})) = D(\lambda, \mu, |\lambda \cap \mu|)$ .

Por el mismo teorema sabemos que si  $|\lambda \cap \mu'| < n - t + 1$ , o equivalentemente si  $t \leq n - |\lambda \cap \mu'|$ , entonces  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = 0$ , de donde

$$0 = c(\lambda, \mu, (1^n)) = c(\lambda, \mu, (2, 1^{n-2})) = \cdots = c(\lambda, \mu, (n - |\lambda \cap \mu'|, 1^{|\lambda \cap \mu'|}))$$

gracias entonces al sistema (28) sabemos que

$$0 = D(\lambda, \mu, 1) = D(\lambda, \mu, 2) = \cdots = D(\lambda, \mu, n - |\lambda \cap \mu'| - 1).$$

y que  $c(\lambda, \mu, (n - |\lambda \cap \mu'| + 1, 1^{|\lambda \cap \mu'| - 1})) = D(\lambda, \mu, n - |\lambda \cap \mu'|)$ .

Al usar lo anterior y la fórmula (29) obtenemos lo siguiente:

**Proposición 5.1.** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$  y  $0 < t \leq n$

$$c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq n - |\lambda \cap \mu'|, \\ \sum_{i=t}^{|\lambda \cap \mu|} (-1)^{i-t} D(\lambda, \mu, i) & \text{si } n - |\lambda \cap \mu'| < t \leq |\lambda \cap \mu|, \\ 0 & \text{si } t > |\lambda \cap \mu|. \end{cases}$$

**Observación 5.2.**  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = D(\lambda, \mu, n - |\lambda \cap \mu'|)$  si  $t = n - |\lambda \cap \mu'| + 1$  y  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = D(\lambda, \mu, |\lambda \cap \mu|)$  si  $t = |\lambda \cap \mu|$ .

**Observación 5.3.** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$ . Si  $n - |\lambda \cap \mu'| \geq |\lambda \cap \mu|$  entonces  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = 0$  para toda  $0 < t \leq n$ .

Al estudiar el comportamiento de los  $D(\lambda, \mu, i)$  con  $n - |\lambda \cap \mu'| \leq i \leq |\lambda \cap \mu|$ , podemos sacar conclusiones sobre los números  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t}))$ . Estamos ahora en condiciones de dar otra prueba de algunos resultados presentes en [JR89, p.108]:

**Teorema 5.4.** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$ ,  $0 < t, c, e \leq n$

1. Si  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) \neq 0$  y  $\lambda$  es una escuadra, entonces  $\mu$  es una escuadra o una escuadra doble.
2. Sean  $\lambda = (c, 1^{n-c})$ ,  $\mu = (e, 1^{n-e})$ , entonces

$$c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = \begin{cases} 1 & \text{si } n - |\lambda \cap \mu'| < t \leq |\lambda \cap \mu|, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

1.

Si  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) \neq 0$ , en donde  $\lambda$  es una escuadra, tenemos por la ecuación (27) que  $D(\lambda, \mu, t) \neq 0$  y por la definición de  $D(\lambda, \mu, t)$  deben existir  $\alpha$ , una partición de  $t$  contenida en  $\lambda \cap \mu$ , y  $\sigma$ , partición de  $n - t$ , tales que  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \neq 0$ . Por la interpretación con tablas de los coeficientes de Littlewood-Richardson se tiene que  $\alpha$  y  $\sigma$  deben estar contenidas en la escuadra  $\lambda$ , así que también deben ser escuadras. Como  $c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \neq 0$  entonces el diagrama sesgado que se obtiene al remover la escuadra  $\alpha$  del diagrama  $\mu$  debe poder llenarse con un contenido  $\sigma'$  (que es a su vez una escuadra) de modo que se obtenga una tabla de Littlewood-Richardson. Entonces necesariamente  $\mu$  es una escuadra o una escuadra doble.

2.

Caso i)

Si  $c = n$  sabemos por la observación 3.3 que  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = 1$  si  $\mu = (t, 1^{n-t})$  y cero en caso contrario. Pero esta condición se da si y sólo si  $e - 1 < t \leq e$ , o de modo equivalente si y sólo si  $n - |\lambda \cap \mu'| <$

$t \leq |\lambda \cap \mu|$ , pues  $|\lambda \cap \mu| = e$  y  $|\lambda \cap \mu'| = n - e + 1$ . El caso  $e = n$  se trabaja de modo análogo.

Caso ii)

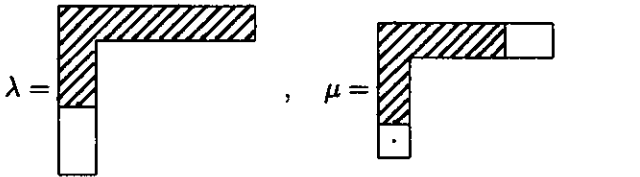
Supongamos que  $0 < c, e < n$ . Analicemos cómo son los números  $D(\lambda, \mu, m)$  con  $n - |\lambda \cap \mu'| \leq m \leq |\lambda \cap \mu|$  (fuera de este rango hemos visto que estos números son cero) para saber qué ocurre con  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t}))$ .

Como  $\lambda$  y  $\mu$  juegan papeles simétricos podemos suponer que  $c \leq e$ . Observamos que  $2(n + 1) = (c + e) + (n - c + 1 + n - e + 1)$ , así que  $w(\lambda) + w(\mu) = c + e \geq n + 1$  o bien  $w(\lambda') + w(\mu') = n - c + 1 + n - e + 1 \geq n + 1$ . Además,  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = c(\lambda', \mu', (t, 1^{n-t}))$ , por lo cual no se pierde generalidad al suponer que  $c + e \geq n + 1$ . Bajo estas hipótesis  $\lambda \cap \mu = (c, 1^{n-e})$  y  $\lambda \cap \mu' = (n - e + 1, 1^{n-c})$ .

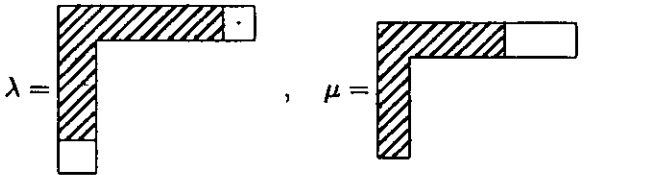
Si  $D(\lambda, \mu, m) \neq 0$ , por la definición de estos números tenemos que deben existir  $\alpha$ , una partición de  $m$  contenida en  $\lambda \cap \mu$  y  $\sigma$ , partición de  $n - m$ , tales que  $c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\alpha\sigma'}^\mu \neq 0$ . Entonces  $\alpha$  debe estar contenida en  $\lambda$ , que es una escuadra y por tanto es de la forma  $(k, 1^{m-k})$ .

Cuando  $m = |\lambda \cap \mu|$ , la única posibilidad es que  $\alpha = \lambda \cap \mu = (c, 1^{n-e})$ , por lo cual la única opción para  $\sigma$  es  $(1^{e-c})$  y entonces se tiene que  $D(\lambda, \mu, m) = 1$ .

Si  $m = |\lambda \cap \mu| - 1$  ocurre que  $\alpha = (c, 1^{n-e-1})$ , marcada de manera sombreada en la siguiente figura<sup>1</sup>:



por lo cual necesariamente  $\sigma = (1^{n-m})$  y  $\sigma' = (n - m)$ , o bien,  $\alpha = (c - 1, 1^{n-e})$ ,



en cuyo caso requerimos que  $\sigma = (1^{n-m})$  y  $\sigma' = (n - m)$ . Tenemos entonces dos posibilidades para  $\alpha$ , cada una con una sola opción para  $\sigma$  y en ambos casos se tiene que  $c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\alpha\sigma'}^\mu = 1$ , así que  $D(\lambda, \mu, m) = 2$ .

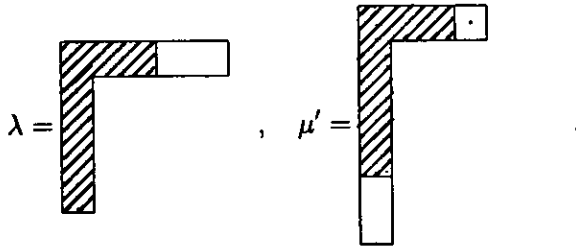
<sup>1</sup>En los siguientes diagramas, el punto representa un solo un cuadro.

Si  $m = n - |\lambda \cap \mu'|$ , es decir, si  $n - m = |\lambda \cap \mu'|$ , observemos que al usar el Teorema 2.32 se tiene que

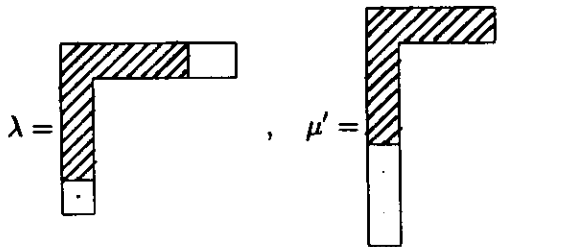
$$D(\lambda, \mu, m) = \sum_{\sigma \vdash n-m} \sum_{\substack{\alpha \vdash m \\ \alpha \subseteq \lambda \cap \mu}} c_{\sigma\alpha}^{\lambda} c_{\sigma'\alpha}^{\mu} = \sum_{\sigma \vdash n-m} \sum_{\substack{\alpha \vdash m \\ \alpha \subseteq \lambda \cap \mu}} c_{\sigma\alpha}^{\lambda} c_{\sigma\alpha'}^{\mu'}, \quad (30)$$

así que  $\sigma$  sólo puede tomar el valor de  $\lambda \cap \mu' = (n - e + 1, 1^{n-c})$  y  $\alpha$  el de  $(c - (n - e + 1))$ , por lo cual  $D(\lambda, \mu, m) = 1$ .

Cuando  $m = n - |\lambda \cap \mu'| + 1$ , esto es, cuando  $n - m = |\lambda \cap \mu'| - 1$  usamos nuevamente la ecuación (30) para describir a  $D(\lambda, \mu, m)$ . En este caso sucede que  $\sigma = (n - e, 1^{n-c})$ , marcada de modo sombreado en la figura,



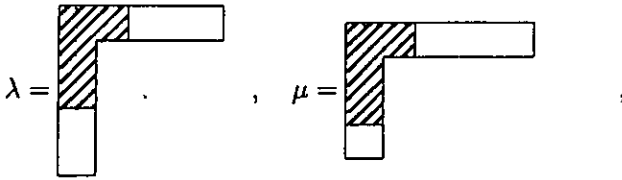
entonces  $\alpha = (m)$  y  $\alpha' = (1^m)$ , o bien,  $\sigma = (n - e + 1, 1^{n-c-1})$ ,



y necesariamente  $\alpha = (m)$  y  $\alpha' = (1^m)$ . Tenemos entonces dos posibles valores de  $\sigma$ , cada uno con una única opción para  $\alpha$  y en ambos ocurre que  $c_{\sigma\alpha}^{\lambda} c_{\sigma\alpha'}^{\mu} = 1$ . En consecuencia  $D(\lambda, \mu, m) = 2$ .

Estudiemos ahora qué ocurre si  $n - |\lambda \cap \mu'| + 1 < m < |\lambda \cap \mu| - 1$ . Como se mencionó antes, si  $D(\lambda, \mu, m) \neq 0$ , deben existir  $\alpha \vdash m$  y  $\sigma \vdash n - m$  tales que  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \neq 0$  con  $\alpha$  de la forma  $(k, 1^{m-k})$ . Existe entonces una pareja de multitablas de Littlewood-Richardson de forma  $(\lambda, \mu)$  con contenido  $(\alpha, \sigma)$  y  $(\alpha, \sigma')$ , respectivamente. Visualicemos

este hecho con el siguiente diagrama:



donde la zona sombreada corresponde a la partición  $\alpha$ . Hay en consecuencia dos opciones:

$$a) \sigma = (c - k, 1^{n-m-(c-k)}).$$

Esto implica que  $\sigma' = (n - m - (c - k) + 1, 1^{c-k-1})$ ; mediante la observación de la figura anterior, necesariamente

$$e = k + n - m - (c - k) + 1 \quad \text{o} \quad e = k + n - m - (c - k),$$

o de modo equivalente

$$k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1) \quad \text{o} \quad k = \frac{1}{2}(e + m - n + c).$$

$$b) \sigma = (c - k + 1, 1^{n-m-(c-k)-1}).$$

Lo cual implica que  $\sigma' = (n - m - (c - k), 1^{c-k})$ . Observando de nuevo la figura anterior, necesariamente

$$e = k + n - m - (c - k) \quad \text{o} \quad e = k + n - m - (c - k) - 1,$$

o de modo equivalente

$$k = \frac{1}{2}(e + m - n + c) \quad \text{o} \quad k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1).$$

Por todo ello si  $e + m - n + c$  es par, la única  $\alpha$  que contribuye a la suma que define a  $D(\lambda, \mu, m)$  es  $(k, 1^{m-k})$  con  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c)$ , siendo dos los posibles valores para  $\sigma$ ,  $(c - k, 1^{n-m-(c-k)})$  y  $(c - k + 1, 1^{n-m-(c-k)-1})$ . Para cualquiera de ellos  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} = 1$ . Así  $D(\lambda, \mu, m) \leq 2$ .

Si  $e + m - n + c$  es impar, hay dos posibles valores para  $\alpha = (k, 1^{m-k})$ , aquéllos tales que  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$  y  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$ . Cuando  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$ , la única  $\sigma$  tal que  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \neq 0$  es  $(c - k, 1^{n-m-(c-k)})$ , y además  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} = 1$ ; cuando  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$  la única  $\sigma$  tal que  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} \neq 0$  es  $(c - k + 1, 1^{n-m-(c-k)-1})$ , y también  $c_{\alpha\sigma}^{\lambda} c_{\alpha\sigma'}^{\mu} = 1$ . Se tiene nuevamente que  $D(\lambda, \mu, m) \leq 2$ .

Para probar que  $D(\lambda, \mu, m) \geq 2$  es necesario verificar que la construcción anterior es factible para lo cual basta observar que  $0 < k < c$  y que  $0 \leq m - k < n - e$ , condiciones que se cumplen ya

que  $n - |\lambda \cap \mu'| + 1 < m < |\lambda \cap \mu| - 1$  o de modo equivalente  $c - (n - e) < m < c + n - e - 1$ , como se verá a continuación:

i)  $0 < k$ .

Como  $n + 1 \leq c + e$  y  $0 < m$  entonces

$$\begin{aligned} n + 1 &< c + e + m && \text{es decir,} \\ 0 &< e - n + c - 1 + m \end{aligned}$$

lo cual indica que  $0 < k$  para  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$ ,  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c)$  o bien  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$ .

ii)  $k < c$ .

Sabemos que

$$\begin{aligned} m &< c + n - e - 1 && \text{entonces} \\ m + e - n + 1 &< c && \text{lo cual implica que} \\ e + m - n + c + 1 &< 2c. \end{aligned}$$

Con ello tenemos que  $k < c$  para  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$ ,  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c)$  o bien  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$ .

iii)  $0 \leq m - k$ .

Por hipótesis

$$\begin{aligned} c - n + e &< m && \text{así,} \\ e + m - n + c &< 2m && \text{por lo cual} \\ e + m - n + c + 1 &\leq 2m. \end{aligned}$$

Por este desarrollo  $0 \leq m - k$  para  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$ ,  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c)$  o bien  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$ .

iv)  $m - k < n - e$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} m &< c + n - e - 1 && \text{i.e.,} \\ m - 2n + 2e &< c - n + e - 1 && \text{en consecuencia,} \\ 2(m - n + e) &< e + m - n + c - 1. \end{aligned}$$

Esto implica que  $m - n + e < k$ , o de modo equivalente que  $m - k < n - e$ , para  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c - 1)$ ,  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c)$  o bien  $k = \frac{1}{2}(e + m - n + c + 1)$ .



En resumen:

$$D(\lambda, \mu, m) = \begin{cases} 2 & \text{si } n - |\lambda \cap \mu'| < m < |\lambda \cap \mu|, \\ 1 & \text{si } m = n - |\lambda \cap \mu'| \text{ o } m = |\lambda \cap \mu|, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así:

Si  $n - |\lambda \cap \mu'| < t < |\lambda \cap \mu|$  la Proposición 5.1 nos indica que

$$c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = \sum_{i=t}^{|\lambda \cap \mu|} (-1)^{i-t} D(\lambda, \mu, i)$$

y por lo observado acerca de los números  $D(\lambda, \mu, m)$  se tiene que  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t}))$  es una suma del tipo

$$2 - 2 + \cdots + 2 - 1 \quad \text{o} \quad 2 - 2 + \cdots - 2 + 1$$

(la primera expresión con un número impar de doses y la segunda con un número par) y el total es uno, si  $t = |\lambda \cap \mu|$ ,  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = D(\lambda, \mu, |\lambda \cap \mu|) = 1$  por la Proposición 5.1 y las observaciones anteriores, y finalmente si  $t \leq n - |\lambda \cap \mu'|$  o bien  $|\lambda \cap \mu| < t$ ,  $c(\lambda, \mu, (t, 1^{n-t})) = 0$  por la Proposición 5.1.

Esto concluye la prueba.

□

## CAPÍTULO 6

### Fórmulas

En este capítulo se establecerán fórmulas para calcular explícitamente los números  $c(\lambda, \mu, \nu)$  en el caso en que  $\lambda = \mu$  y  $d(\nu) \leq 4$  con  $\lambda$  una partición arbitraria de  $n$ . Ocuparemos para ello la Definición 3.7 que nos permitirá dar dichas fórmulas en términos del número de maneras en que podemos quitarle a  $D^\lambda$  una unión disjunta de diagramas y obtener un diagrama de Young.

Los resultados presentados a continuación son consecuencia de la definición de los números  $lr(\lambda, \mu; \nu)$  3.10 y de la definición de los coeficientes de Littlewood-Richardson 1.5.

**Proposición 6.1.** *Dada  $\lambda$  una partición de  $n$  se tiene que:*

- i)  $lr(\lambda, \lambda; (n)) = 1,$
- ii)  $lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) = n(\lambda, \square),$
- iii)  $lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) = n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \text{B}) + 2\binom{n(\lambda, \square)}{2},$
- iv)  $lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) = n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \text{B}) + 4\binom{n(\lambda, \square)}{2},$
- v)  $lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) = n(\lambda, \square\square\square) + n(\lambda, \text{B}\text{B}) + n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B}) + n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B})$   
 $+ 2[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \text{B})] + 6\binom{n(\lambda, \square)}{3},$
- vi)  $lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) = n(\lambda, \square\square\square) + n(\lambda, \text{B}\text{B}) + 2[n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B}) + n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B})]$   
 $+ 5[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \text{B})] + 18\binom{n(\lambda, \square)}{3},$
- vii)  $lr(\lambda, \lambda; (n-3, 1^3)) = n(\lambda, \square\square\square) + n(\lambda, \text{B}\text{B}) + 4[n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B}) + n(\lambda, \text{B}\text{B}\text{B})]$   
 $+ 9[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \text{B})] + 36\binom{n(\lambda, \square)}{3},$



$$\begin{aligned}
xi) \quad lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2, 1^2)) &= n(\lambda, \square\square\square) + n\left(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}\right) + 13[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 5[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] + 2n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ 10(n(\lambda, \square) - 1)[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \square\square)] + 32(n(\lambda, \square) - 1)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ 32(n(\lambda, \square) - 2)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + 10[n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})(n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) - 1)] \\
&+ 18[n(\lambda, \square)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) - n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] + 74\left[\binom{n(\lambda, \square)}{2} - (n(\lambda, \square) - 1)\right][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 288\binom{n(\lambda, \square)}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xii) \quad lr(\lambda, \lambda; (n-4, 1^4)) &= n(\lambda, \square\square\square) + n\left(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}\right) + 25[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 9[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] + 4n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ 16(n(\lambda, \square) - 1)[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \square\square)] + 64(n(\lambda, \square) - 1)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ 64(n(\lambda, \square) - 2)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + 18[n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})(n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) - 1)] \\
&+ 36[n(\lambda, \square)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) - n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] + 144\left[\binom{n(\lambda, \square)}{2} - (n(\lambda, \square) - 1)\right][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 576\binom{n(\lambda, \square)}{4}.
\end{aligned}$$

Usando la proposición anterior, el Teorema 3.14 y el Corolario 3.15 podemos calcular ahora los correspondientes números  $c(\lambda, \lambda, \nu)$ .

**Teorema 6.2.** *Sea  $\lambda$  partición de  $n$ . Entonces:*

$$i) \quad c(\lambda, \lambda, (n)) = lr(\lambda, \lambda; (n)) = 1,$$

$$ii) \quad c(\lambda, \lambda, (n-1, 1)) = lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) - lr(\lambda, \lambda; (n)) = n(\lambda, \square) - 1,$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad c(\lambda, \lambda, (n-2, 2)) &= lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) - lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) \\
&= n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \square)[n(\lambda, \square) - 2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv) \quad c(\lambda, \lambda, (n-2, 1^2)) &= lr(\lambda, \lambda; (n)) - lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) \\
&- lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) = [n(\lambda, \square) - 1]^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v) \quad c(\lambda, \lambda, (n-3, 3)) &= lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4)) \\
&= n(\lambda, \square\square\square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ [2n(\lambda, \square) - 3][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array})] + n(\lambda, \square)[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square) - 3],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vi) \quad c(\lambda, \lambda, (n-3, 2, 1)) &= lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) - lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) \\
&- lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) + lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) \\
&= n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + [3n(\lambda, \square) - 4][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 2n(\lambda, \square)[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square) - 3] + n(\lambda, \square),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vii) \quad c(\lambda, \lambda, (n-3, 1^3)) &= -lr(\lambda, \lambda; (n)) + lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) \\
&+ lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) - lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) \\
&- 2lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) + lr(\lambda, \lambda; (n-3, 1^3)) \\
&= n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + [n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) + 1] \\
&+ n(\lambda, \square)[n(\lambda, \square) - 1][n(\lambda, \square) - 3],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
viii) \quad c(\lambda, \lambda, (n-4, 4)) &= lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4)) - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) \\
&= n(\lambda, \square\square\square\square) + n\left(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) + 2[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ (2n(\lambda, \square) - 3)[n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + n(\lambda, \square)] + (3n(\lambda, \square) - 6)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \\
&+ (3n(\lambda, \square) - 7)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + \frac{3}{2}[n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})(n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) - 1)] \\
&+ 2n(\lambda, \square)n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) + \left[7\binom{n(\lambda, \square)}{2} - 9(n(\lambda, \square) - 1)\right][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array})] \\
&+ 24\binom{n(\lambda, \square)}{4} - 6\binom{n(\lambda, \square)}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ix) \quad & c(\lambda, \lambda, (n-4, 3, 1)) = lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) \\
& + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 3, 1)) - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4)) \\
& = 3[n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) \\
& + (3n(\lambda, \square) - 4)[n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + (8n(\lambda, \square) - 14)n(\lambda, \boxplus) + (8n(\lambda, \square) - 18)n(\lambda, \boxplus) \\
& + \frac{5}{2}[n(\lambda, \boxplus)(n(\lambda, \boxplus) - 1) + n(\lambda, \boxplus)(n(\lambda, \boxplus) - 1)] \\
& + 4n(\lambda, \boxplus)n(\lambda, \boxplus) \\
& + \left[19\binom{n(\lambda, \square)}{2} - 24n(\lambda, \square) + 25\right][n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + 72\binom{n(\lambda, \square)}{4} - 18\binom{n(\lambda, \square)}{3} + 2\binom{n(\lambda, \square)}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x) \quad & c(\lambda, \lambda, (n-4, 2^2)) \\
& = -lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) \\
& - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 3, 1)) + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2^2)) \\
& = 2[n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus) \\
& + (n(\lambda, \square) - 1)[n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + (5n(\lambda, \square) - 10)n(\lambda, \boxplus) + (5n(\lambda, \square) - 11)n(\lambda, \boxplus) \\
& + 2[n(\lambda, \boxplus)(n(\lambda, \boxplus) - 1) + n(\lambda, \boxplus)(n(\lambda, \boxplus) - 1)] \\
& + 4n(\lambda, \boxplus)n(\lambda, \boxplus) \\
& + \left[12\binom{n(\lambda, \square)}{2} - 15(n(\lambda, \square) - 1)\right][n(\lambda, \boxplus) + n(\lambda, \boxplus)] \\
& + 48\binom{n(\lambda, \square)}{4} - 12\binom{n(\lambda, \square)}{3} + 2\binom{n(\lambda, \square)}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xi) \quad & c(\lambda, \lambda, (n-4, 2, 1^2)) \\
& = -lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) + lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) \\
& - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 1^3)) + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4)) - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 3, 1)) \\
& - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2^2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2, 1^2)) \\
& = 3[n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square\square)] + n(\lambda, \square\square\square) + n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square\square\square) \\
& + (n(\lambda, \square) - 1)[n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square\square)] + (8n(\lambda, \square) - 14)n(\lambda, \square\square) \\
& + (8n(\lambda, \square) - 18)n(\lambda, \square\square) + \frac{3}{2}[n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1) + n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1)] \\
& + 4n(\lambda, \square)n(\lambda, \square) + \left[17\binom{n(\lambda, \square)}{2} - 21n(\lambda, \square) + 22\right][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square)] \\
& + 72\binom{n(\lambda, \square)}{4} - 18\binom{n(\lambda, \square)}{3} + 4\binom{n(\lambda, \square)}{2} - n(\lambda, \square),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xii) \quad & c(\lambda, \lambda, (n-4, 1^4)) = lr(\lambda, \lambda; (n)) - lr(\lambda, \lambda; (n-1, 1)) - lr(\lambda, \lambda; (n-2, 2)) \\
& + lr(\lambda, \lambda; (n-2, 1^2)) - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 3)) + 2lr(\lambda, \lambda; (n-3, 2, 1)) \\
& - lr(\lambda, \lambda; (n-3, 1^3)) - lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4)) + 2lr(\lambda, \lambda; (n-4, 3, 1)) \\
& + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2^2)) - 3lr(\lambda, \lambda; (n-4, 2, 1^2)) + lr(\lambda, \lambda; (n-4, 1^4)) \\
& = n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square\square) + n(\lambda, \square\square) + (3n(\lambda, \square) - 6)n(\lambda, \square\square) \\
& + (3n(\lambda, \square) - 7)n(\lambda, \square\square) + \frac{1}{2}[n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1) + n(\lambda, \square)(n(\lambda, \square) - 1)] \\
& + 2n(\lambda, \square)n(\lambda, \square) + \left[5\binom{n(\lambda, \square)}{2} - 6(n(\lambda, \square) - 1)\right][n(\lambda, \square) + n(\lambda, \square)] \\
& + 24\binom{n(\lambda, \square)}{4} - 6\binom{n(\lambda, \square)}{3} + 2\binom{n(\lambda, \square)}{2} - n(\lambda, \square) + 1.
\end{aligned}$$

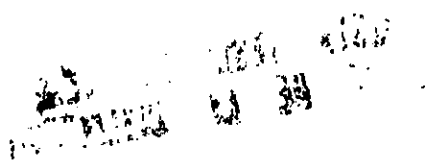
**Observación 6.3.** La complejidad de las fórmulas anteriores se incrementa de manera notable a medida que la profundidad de  $\nu$  aumenta.

En  $lr(\lambda, \lambda; (n-b, b))$  aparecen siempre los sumandos  $n(\lambda, D^\rho)$  con coeficiente uno, para toda  $\rho \vdash b$ . En consecuencia todos ellos aparecen en  $c(\lambda, \lambda, (n-b, b))$ . Se sabe que el número de particiones de  $b$ , i.e.  $|\mathcal{P}(b)|$ , crece exponencialmente en función de  $b$  (ver [FH91, pp.44-45]),

por lo cual, si  $\lambda$  es tal que para toda  $\rho$  partición de  $b$ ,  $n(\lambda, D^\rho) > 0$ ,  $lr(\lambda, \lambda, (n-b, b)) \geq |\mathcal{P}(b)|$  creciendo así de modo considerable.

**Comentario 6.4.** En los trabajos de Zisser [IZ92, pp.361-363] y de Vallejo [EV97, pp.12-17] aparecen los cálculos anteriores de  $lr(\lambda, \lambda; \nu)$  y  $c(\lambda, \lambda, \nu)$  para  $d(\nu) < 4$ . Saxl presenta en [JS87, pp.214-215] cotas inferiores para  $lr(\lambda, \lambda; (n-4, 4))$  y  $c(\lambda, \lambda, (n-4, 4))$  sin dar una fórmula exacta para los mismos.





ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## Bibliografía

- [BS96] Benkart, Georgia, Frank Sottile and Jeffrey Stroomer, Tableau Switching: Algorithms and Applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **76** (1996), 11-43.
- [CR62] Curtis, Charles W., Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, N.Y. Interscience, Publishers. John Wiley and Sons I.N.(1962) 685 p.
- [YD93] Dvir, Y., On the Kronecker product of  $S_n$  characters, *J. Algebra* **154**(1993), 125-140.
- [ER90] Egecioglu, O. y Remmel, J.B., A combinatorial interpretation of the inverse Kostka matrix, *Linear and Multilinear Algebra* **26** (1990), 59-84.
- [JF87] Fraleigh, John B., *Álgebra abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, 485 p.
- [WF97] Fulton, William, *Young tableaux with applications to representation theory and geometry*, J. London Math. Soc. Students Text 35, Cambridge University Press, 1997, 258 p.
- [FH91] Fulton, William, Joe Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer-Verlag, New York, 1991, 551p.
- [VG98] Gasharov, Vasselin, A short proof of the Littlewood-Richardson Rule, *Europ. J. Combinatorics* **19** (1998), 451-453.
- [MH89] Hammermesh, Morton, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover edition, 1989, 509 p.
- [MI94] Isaacs, I. Martin, *Character theory of finite groups*. Corrected reprint of the 1976 original, Academic Press, Dover Publications, Inc., New York, 1994, xii+303 p.
- [JL93] James, Gordon Douglas, Martin W. Liebeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, 1994, 419 p.
- [JK81] James, Gordon, and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981, 510 p.

- [MK77] Klemm, Michael, Tensor produkte von Charakteren der symmetrischen Gruppe, *Archiv der Mathematik*, vol. 28, (1977) 455-459.
- [DK73] Knutson, Donald,  *$\lambda$ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 203 p.
- [DL56] Littlewood, D.E., The Kronecker product of symmetric group representations, *J. London Math. Soc.* **31** (1956), 89-93.
- [IM95] Macdonald, I.G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd. edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [FM38] Murnaghan, F.D., The analysis of the Kronecker product of irreducible representations of the symmetric group, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 761-784.
- [AR80] Regev, A., The Kronecker product of  $S_n$  characters and an  $A \otimes B$  theorem for Capelli identities, *Journal of Algebra* **66** (1980), 505-510.
- [JR89] Remmel, Jeffrey B., A formula for the Kronecker Products of Schur Functions of Hook shapes. *Journal of Algebra* **120** (1989), 100-118.
- [BS91] Sagan, Bruce E., *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series, California, 1991, 197 p.
- [JS75] Saxl, Jan, Characters of Multiply Transitive Permutation Groups, *Journal of Algebra* **34**, (1975) 528-539.
- [JS87] Saxl, Jan, The Complex Characters of Symmetric Groups that Remain Irreducible in Subgroups, *Journal of Algebra* **111**, (1987) 210-219.
- [RS99] Stanley, Richard P., *Enumerative combinatorics. Volumen 2*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [EV97] Vallejo, Ernesto, On the Kronecker product of irreducible characters of the symmetric group. Instituto de Matemáticas, México UNAM, (1997). (Publicaciones preliminares 526), 18 p.
- [EV98] Vallejo, Ernesto, Stability of Kronecker Products of Irreducible Characters of the Symmetric Group. Instituto de Matemáticas, México UNAM, (1998), (Publicaciones preliminares 614).
- [IZ92] Zisser, Ilan, The Character Covering Numbers of the Alternating Groups, *Journal of Algebra*, **153**, (1992) 357-372.

## Lista de símbolos e índice analítico

- |  |  |
|--|--|
| $1\pi$ , 26<br>$C(T^\lambda)$ , 23<br>$D(\lambda, \mu, m)$ , 63<br>$D^\lambda$ , 3<br>$K$ , 8<br>$K^{-1}$ , 8<br>$K_{\lambda/\mu\nu}$ , 7<br>$K_{\lambda\nu}^{(-1)}$ , 8<br>$R(T^\lambda)$ , 23<br>$R(S(n))$ , 24<br>$R_{j-1,j}$ , 29<br>$S(\pi)$ , 10<br>$S_{j-1,j}$ , 28<br>$T^\lambda$ , 23<br>$U \otimes_R V$ , 15<br>$Y(\theta, m)$ , 62<br>$\bar{\lambda}$ , 2<br>$\chi$ , 12<br>$\chi^{\lambda/\mu}$ , 26<br>$\chi^\lambda$ , 23<br>$\chi_U \otimes \chi_V$ , 16<br>$\chi_U \times \chi_V$ , 17<br>$\chi_U$ , 12<br>$\chi'$ , 1<br>$\lambda/\mu$ , 4<br>$\lambda \geq \mu$ , 2<br>$\lambda \vdash n$ , 1<br>$\lambda \cap \mu$ , 1<br>$\lambda \supseteq \mu$ , 2 | $\langle \phi, \psi \rangle$ , 14<br>$\mathbb{C}[G]$ , 12<br>$\mu \subseteq \lambda$ , 2<br>$\phi^\pi$ , 26<br>$\sigma T$ , 9<br>$\varphi \bullet \xi$ , 25<br>$c(\lambda, \mu, \nu)$ , 37<br>$c_{\{\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(r)\}}^{\lambda/\mu}$ , 7<br>$conj_{S(n)}(\sigma)$ , 9<br>$d(\lambda)$ , 2<br>$e(T^\lambda)$ , 23<br>$f^{\lambda/\rho}$ , 49<br>$h(E)$ , 5<br>$h(\lambda)$ , 2<br>$h(\xi)$ , 25<br>$lr(\lambda/\alpha, \mu/\beta; \nu)$ , 45<br>$m_j(w_{\leq r})$ , 6<br>$n(\lambda, D)$ , 41<br>$sgn(T)$ , 5<br>$sgn(\sigma)$ , 9<br>$u \otimes v$ , 16<br>$w(T)$ , 6<br>$w(\lambda)$ , 2<br>$w(\xi)$ , 25<br>$\mathcal{P}(n)$ , 2<br>$\text{Ind}_H^G(V)$ , 18<br>$\text{Ind}_H^G(\chi_V)$ , 18<br>$\text{Res}_H^G(W)$ , 18<br>$\text{Res}_H^G(\chi_W)$ , 18 |
|--|--|

- Algebra de grupo, 12  
 altura  
   de un carácter, 25, 50  
   de una partición, 2  
 ancho  
   de un carácter, 25, 50  
   de una partición, 2  
 anillo de caracteres  
   de un grupo, 19  
   del grupo simétrico, 24  
 aplicación R-balanceada, 15  
  
 carácter, 12  
   alternante, 24  
   altura de un, 25, 50  
   ancho de un, 25, 50  
   asociado a una forma sesgada, 26  
   asociado a una partición, 23  
   de la inducción de un módulo, 18,  
   19  
   de la restricción de un módulo, 18,  
   19  
   de permutaciones asociado a una  
   partición, 26  
   irreducible, 13  
   producto externo de caracteres, 25  
   propiedades del, 25  
   producto interno de caracteres, 14,  
   19  
   trivial, 24  
   virtual, 19  
 ciclos, 8  
 clase de conjugación de una permutación,  
   9  
 coeficientes de Littlewood-Richardson,  
   7  
 conjugada de una partición, 1, 4  
 conjunto completo de  $\mathbb{C}[G]$ -módulos  
   irreducibles no isomorfos, 14  
 contención de particiones, 2  
 contenido de una tabla, 5  
  
 diagrama de Young, 3  
   llenado canónico de un, 3  
   sesgado, 4  
   conexo, 5  
 Dvir, 52, 59  
 Egecioğlu, 8  
  
 escuadra, 2, 63  
   doble, 2, 63  
   sesgada, 5  
   especial, 5  
  
 forma cíclica de una permutación, 8  
 Frobenius  
   teorema de reciprocidad de, 20  
  
 grupo  
   álgebra de, 12  
   ambivalente, 10  
   anillo de caracteres de un, 19  
   representación por matrices de un,  
   10  
   simétrico, 8  
  
 inducción de un módulo, 18  
 intersección de particiones, 1  
  
 James, 56  
  
 Kerber, 56  
 Klemm, 53, 56  
 Kostka  
   matriz de, 8  
   números de, 7  
 Kronecker  
   producto de, 16, 17  
  
 Littlewood-Richardson  
   coeficientes de, 7  
   multitabla de, 6  
 Littlewood-Richardson  
   regla de, 30, 31  
  
 módulos, 11  
    $\mathbb{C}[G]$ -módulos, 12  
    $\mathbb{C}[G]$ -submódulo, 13  
   completamente reducibles, 13  
   conjunto completo de  $\mathbb{C}[G]$ -módulos  
   irreducibles no isomorfos, 14  
   inducidos, 18  
   irreducibles o simples, 13  
   R-módulo derecho, 11  
   R-módulo izquierdo, 11  
   restringidos, 18  
 Maschke  
   teorema de, 13  
 matriz de Kostka, 8

- multitabla de Littlewood-Richardson, 6
- números de Kostka, 7
- orden
  - de dominación, 2
  - lexicográfico, 2
- palabra asociada a una tabla, 6
- partición, 1
  - altura de una, 2
  - ancho de una, 2
  - carácter asociado a una, 23
  - carácter de permutaciones asociado a una, 26
  - conjugada, 1, 4
  - contención de particiones, 2
  - intersección de particiones, 1
  - peso de una, 1
  - profundidad de una, 2, 53, 55
- permutación, 8
  - clase de conjugación de una, 9
  - forma cíclica de una, 8
  - signo de una, 9
- permutación de celosía, 6
- peso de una partición, 1
- producto
  - de Kronecker, 16
  - propiedades del, 17
  - externo de caracteres, 25
  - interno de caracteres, 14, 19
  - tensorial, 15
- profundidad de una, 53, 55
- profundidad de una partición, 2
- $R(G)$ , 19
- Regev, 52
- regla
  - de Littlewood-Richardson, 30, 31
  - de Young, 26
  - del determinante, 27
- Remmel, 8
- representación
  - irreducible, 13
  - por matrices de un grupo, 10
  - trivial, 14
- restricción de un módulo, 18
- signo
  - de una permutación, 9
  - de una tabla, 5
- simetrizador de Young, 23
- subgrupo de Young asociado a una partición, 10
- tabla, 3
  - contenido de una, 5
  - de escuadras sesgadas especiales, 5
  - estándar, 3
  - palabra asociada a una, 6
  - semiestándar, 3
  - sesgada semiestándar, 4
  - signo de una, 5
- teorema
  - de Maschke, 13
  - de reciprocidad de Frobenius, 20
- tira horizontal, 5
- transposición, 9
- Young
  - diagrama de, 3
  - regla de, 26
  - simetrizador de, 23
  - subgrupo de, 10