

01963



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE PSICOLOGIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACILITACION DE LA TRANSFERENCIA ANALOGICA A TRAVES DEL PROCESO DE MAPEO, EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN PSICOLOGIA EDUCATIVA
P R E S E N T A :
ALEJANDRA ZUÑIGA BOHIGAS

279713

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL LOPEZ OLIVAS

COMITE

- DR. JAVIER AGUILAR VILLALOBOS
DR. ARTURO BOUZAS RIAÑO
DR. GERMAN PALAFOX PALAFOX
DR. KEITH J. HOLYOAK



MEXICO, D.F.

MAYO DEL 2000



Universidad Nacional
Autónoma de México

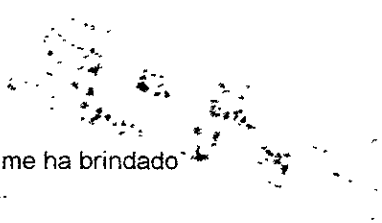


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



A Dios por todas las oportunidades que me ha brindado
y por alentarme cada día.

A mis padres Sergio y Alicia Martha,
que han sido mis asesores incondicionales y
me han brindado todo su cariño, apoyo y comprensión.

A mis hermanos Verónica y Sergio por todo su apoyo.

A la familia García Zúñiga que me ha brindado momentos gratos.

Agradecimientos

Expreso al Dr. Arturo Bouzas Riaño mi más profunda gratitud por todo el apoyo y asesoría que he recibido de su parte. Con él he aprendido a desenvolverme en el campo de la investigación.

De igual manera, le agradezco al Dr. Keith J. Holyoak el que me haya permitido trabajar en su laboratorio. Esa experiencia fue enriquecedora tanto en lo académico, como en lo personal.

Le agradezco al Dr. Miguel López todo el apoyo, paciencia y tiempo que me brindó durante mis estudios de maestría. Gracias a sus asesorías pude ampliar mis conocimientos y concluir este trabajo.

Les agradezco al Dr. Germán Palafox y al Dr. Javier Aguilar las recomendaciones oportunas que me brindaron para la realización de esta investigación.

Le agradezco al Dr. John Hummel la oportunidad que me brindó de aprender a su lado las implicaciones del modelo LISA. Sus asesorías siempre fueron pertinentes y su ayuda siempre facilitó mi trabajo.

No puedo dejar de agradecerles a Lucía y a Hideko todo lo que han hecho por mí. A su lado he aprendido muchas cosas que me han permitido ser mejor cada día. ¡Son ejemplo a seguir!.

Gracias a todos los maestros que han contribuido en mi formación, sin ellos no sería lo que soy en la actualidad.

Por último, quiero agradecerle a mis amigos, compañeros y a la gente de la Dirección todo el apoyo que me han brindado.

Índice

Resumen	3
I. Introducción	4
II. Razonamiento analógico.	7
III. Implicaciones educativas del razonamiento analógico.	7
IV. Pasos del razonamiento analógico.	9
IV.1 La selección.	9
IV.2 El mapeo	10
IV.3 La evaluación	11
IV.4 El aprendizaje	12
V. Factores que influyen el razonamiento analógico.	14
VI. El mapeo analógico.	16
VII. Modelo LISA	19
Experimento uno	25
Participantes	26
Diseño	26
Materiales	27
Procedimiento	29
Resultados	29
Experimento 2	31
Participantes	31
Diseño y materiales	31
Procedimiento	32
Resultados	32
Experimento 3	33
Participantes	36
Diseño	36
Materiales	36
Procedimiento	37
Resultados	38
Experimento 4	40
Participantes.	40
Diseño	40
Materiales	41
Procedimiento	42
Resultados	42

Experimento 5	43
Participantes	44
Diseño	44
Materiales	45
Procedimiento	45
Resultados	45
Experimento 6	47
Participantes	47
Diseño	47
Materiales	47
Procedimiento	48
Resultados	48
Discusión General	51
CONCLUSIONES	55
REFERENCIAS	57

Resumen

Este trabajo de investigación se enfocó al estudio de una implicación del modelo LISA sobre razonamiento analógico. Este modelo predice que las asimetrías en el contenido semántico causal pueden influenciar el proceso de transferencia. Una asimetría se refiere a los aspectos sobresalientes de una situación análoga sobre otra y como consecuencia, la gente prefiere una dirección de comparación. Es decir, un problema es más fácil de entender y resolver porque cuenta con elementos comprensibles para la persona que tiene que resolverlo, o porque proporciona algunas claves para encontrar su solución; por lo mismo se busca utilizarlo como modelo para la solución de problemas subsecuentes.

Kubose, Holyoak y Hummel, (1998) descubrieron asimetrías en el proceso de mapeo; siendo éste más preciso cuando un problema contaba con contenido semántico causal y su análogo carecía de éste. Con base en estos resultados, se elaboró el presente trabajo de investigación cuyo objetivo principal fue el de medir la dirección de mapeo en problemas de matemáticas equivalentes o isomórficos. Se predijo que cuando se tienen dos problemas matemáticos análogos, y uno de ellos cuenta con la explicación del método que permite llegar a la solución correcta, se espera que el proceso de mapeo sea más preciso cuando se compara el problema resuelto con el problema sin resolver, que viceversa.

Para evaluar esta predicción se llevaron a cabo 6 experimentos en los que se varió la dirección del mapeo entre problemas equivalentes de álgebra y probabilidad. Los participantes tenían que estudiar el procedimiento a seguir para solucionar uno de los problemas, leer un segundo problema, realizar el proceso de mapeo entre ambos y tratar de solucionar el segundo problema. Los cuatro primeros experimentos se desarrollaron en Estados Unidos y los dos últimos en la Ciudad de México.

En 5 de los 6 experimentos que se realizaron, no se encontraron diferencias significativas en la dirección del mapeo. En uno de ellos se corroboró la hipótesis planteada; este grupo se distinguió por estar conformado por personas que se encontraban en pleno proceso de aprendizaje del dominio evaluado, lo cual les facilitó comprender el material, aunque les hacía falta desarrollar habilidades para dominar las tareas evaluadas.

Por otra parte, se comprobó que el proceso de mapeo favorece la transferencia de dos problemas análogos; una vez que el participante compara el problema conocido con otro equivalente, la solución se facilita.

Se concluye que ante dos problemas de matemáticas equivalentes o isomórficos, el hecho de que se proporcione en uno de ellos la explicación del proceso que se debe seguir para su solución, no es suficiente para que un sujeto se percate de la conexión interna entre las proposiciones.

I. Introducción

Cuando una persona se enfrenta ante una problemática nueva puede aprender a solucionarla a través del ensayo y del error, o bien puede hacer uso de conocimientos previos que le permitan entender la problemática. Cuando se hace uso de esta última posibilidad, se incrementa la precisión en la solución de los problemas y se obtienen resultados eficientes. Bajo esta perspectiva, el presente trabajo tiene como objetivo explorar cómo el proceso de aprendizaje puede ser favorecido por el razonamiento analógico.

Varias investigaciones se han centrado en el estudio de este tópico (Gick y Holyoak, 1980; Reed, 1987; Basook y Holyoak, 1989, Novick, 1989), las cuales han dilucidado los pasos del razonamiento analógico y los factores que lo influyen. Uno de los pasos más importantes es el proceso de mapeo, que consiste en encontrar las correspondencias apropiadas entre dos problemas análogos. Estas correspondencias no se dan sólo entre objetos que tienen características en común, sino también entre estructuras complejas que involucran relaciones (Barnes y Thagard, 1997; Gentner, 1983, 1989; Holyoak y Thagard, 1997).

Dentro de estos estudios se han elaborado modelos computacionales que tienen como objetivo explicar la transferencia analógica. Uno de los más recientes e importantes es el modelo LISA (Learning and Inference with Schemas and Analogies) elaborado por Hummel y Holyoak (1997). Con base en este modelo se han realizado predicciones sobre la dirección del mapeo.

Una de las predicciones afirma que las asimetrías en el contenido semántico causal pueden influenciar el proceso de mapeo. Es decir, una analogía puede contar con una descripción más detallada y por lo mismo la mayoría de la gente prefiere una dirección de comparación más que otra. En particular, Kubose, Holyoak y Hummel (1998) han demostrado que al aumentar el contenido semántico de una analogía se puede facilitar el proceso de mapeo entre dos situaciones análogas estructuralmente isomórficas o que comparten el mismo procedimiento para su solución, aún cuando sus planteamientos sean totalmente distintos.

Estos descubrimientos tienen aplicaciones educativas. Se ha demostrado que los alumnos al aprender cómo resolver nuevos problemas, utilizan ejemplos como situaciones análogas base (Reed, 1985; Holyoak y Koh, 1987, Chen, 1996). Este proceso de transferencia requiere que se realicen mapeos entre el ejemplo y el problema a resolver. Cabe recalcar que esta práctica es muy común en la solución de problemas matemáticos (Reed, 1987; Ross, 1987; Anderson, 1995).

Ante estas circunstancias, el objetivo principal de este estudio consiste en investigar el efecto de la dirección del mapeo entre problemas matemáticos equivalentes. El modelo LISA predice que el mapeo será más preciso cuando se centra la atención en el problema análogo más coherente¹. Asimismo, cuando el razonamiento analógico se utiliza para resolver dos problemas, la dirección de la transferencia se da, por lo general, del ejemplo al problema sin resolver. Por tanto, cuando se aplica el procedimiento de solución de un ejemplo (problema conocido o base) a un problema desconocido (problema meta²), la dirección en que el aprendiz mapea un problema a otro es de suma importancia, es decir la transferencia del conocimiento se da mejor cuando este proceso se realiza de un problema conocido a uno desconocido que viceversa.

La tesis propiamente dicha consiste en estudiar una implicación del modelo LISA, asumiendo y sometiendo a prueba, que un problema resuelto será más coherente que un problema sin resolver; por tanto el proceso de mapeo (y por ende la transferencia) será más preciso si se manipula la atención del alumno en el ejemplo resuelto, más que en el problema por resolver.

Esta investigación consta de una descripción general del uso e importancia del razonamiento analógico, de sus pasos y factores haciendo hincapié en el proceso de mapeo. Asimismo, se hace una descripción global del modelo LISA (Learning and Inference with Schemas and Analogies) y de las investigaciones realizadas por Kubose, Holyoak y Hummel (en prensa), ya que son base del presente estudio.

¹ La coherencia se refiere a la mayor conexión interna entre las proposiciones

² La diferencia que existía entre ambos es que el problema base, hace explícito los pasos a seguir para la solución del problema y da a conocer el resultado. Mientras que el segundo, es el problema que se pretende solucionar.

Se procede después, con la explicación de los seis experimentos que se realizaron. Los cuatro primeros se desarrollaron en California - Estados Unidos y los dos últimos en la Ciudad de México.

En orden de evaluar las asimetrías en el proceso de mapeo se elaboraron dos juegos de materiales. Un juego está conformado por la adaptación de cuatro pares de problemas de probabilidad elaborados por Ross (1985). El otro comprende problemas de álgebra redactados bajo la asesoría de profesores de matemáticas de nivel medio-superior y superior.

La dirección del mapeo se evaluó manipulando la atención de los participantes en el problema "base" o en el problema "meta" y midiendo los cambios en las respuestas de las preguntas realizadas para evaluar las correspondencias entre ambos problemas análogos. Si a los alumnos se les pedía que compararan el ejemplo con el problema por resolver, se esperaba que se dieran relaciones más precisas en esta condición que en caso contrario.

Se les aplicaron los problemas de probabilidad a los alumnos de la carrera de psicología de la Universidad de California de Los Angeles (UCLA) y de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y los de álgebra a alumnos de bachillerato de una preparatoria del Este de los Ángeles y del Colegio de Ciencias y Humanidades – plantel Azcapotzalco.

Por último, se hace una exposición de los resultados obtenidos en cada uno de los seis experimentos y se discuten e interpretan sus implicaciones con respecto a la hipótesis planteada.

II. Razonamiento analógico.

El razonamiento analógico consiste en utilizar conocimientos previos para aplicarlos a situaciones nuevas. Se basa en transferir los datos de un problema familiar a uno nuevo. Al problema familiar se le conoce como problema "base" y al nuevo como problema "meta". Vosniadou y Ortony (1989) definen a la transferencia analógica como la transmisión de información de un dominio existente en la memoria, a otro dominio próximo a aplicar.

Tanto el problema base como el problema meta pueden compartir características superficiales, es decir ser similares los atributos de los sujetos u objetos involucrados en las dos situaciones. Igualmente, ambos problemas pueden compartir características estructurales, las cuales se refieren a las relaciones entre los elementos de un problema. Un ejemplo, es la comparación de un átomo con el sistema solar. Se compara el hecho de que los electrones de un átomo giran alrededor del núcleo, como los planetas giran alrededor del sol, y se hace énfasis en la relación de "girar" más que en los atributos de los objetos (Gentner y Markman, 1997)

Una vez que se aprendió a solucionar el problema "base", su procedimiento se emplea para facilitar la solución del problema "meta". Cabe recalcar que la persona que solucionará el problema debe enfocarse en las similitudes estructurales más que en las superficiales, ya que esto lo llevará a conocer la esencia del problema y la manera de solucionarlo.

III. Implicaciones educativas del razonamiento analógico.

Actualmente los psicólogos, educadores e investigadores son conscientes del poder del razonamiento analógico en el campo de la instrucción. Debido a que el material a enseñar es, por lo general, desconocido por los estudiantes el uso de analogías puede ser una herramienta eficaz para introducir dominios no conocidos (Holyoak, 1985).

El principal propósito del uso del razonamiento analógico en la educación es el de favorecer en los estudiantes una comprensión básica del material desconocido por ellos. Asimismo, los alumnos deben aprender a encontrar similitudes entre los problemas que

II. Razonamiento analógico.

El razonamiento analógico consiste en utilizar conocimientos previos para aplicarlos a situaciones nuevas. Se basa en transferir los datos de un problema familiar a uno nuevo. Al problema familiar se le conoce como problema "base" y al nuevo como problema "meta". Vosniadou y Ortony (1989) definen a la transferencia analógica como la transmisión de información de un dominio existente en la memoria, a otro dominio próximo a aplicar.

Tanto el problema base como el problema meta pueden compartir características superficiales, es decir ser similares los atributos de los sujetos u objetos involucrados en las dos situaciones. Igualmente, ambos problemas pueden compartir características estructurales, las cuales se refieren a las relaciones entre los elementos de un problema. Un ejemplo, es la comparación de un átomo con el sistema solar. Se compara el hecho de que los electrones de un átomo giran alrededor del núcleo, como los planetas giran alrededor del sol, y se hace énfasis en la relación de "girar" más que en los atributos de los objetos (Gentner y Markman, 1997).

Una vez que se aprendió a solucionar el problema "base", su procedimiento se emplea para facilitar la solución del problema "meta". Cabe recalcar que la persona que solucionará el problema debe enfocarse en las similitudes estructurales más que en las superficiales, ya que esto lo llevará a conocer la esencia del problema y la manera de solucionarlo.

III. Implicaciones educativas del razonamiento analógico.

Actualmente los psicólogos, educadores e investigadores son conscientes del poder del razonamiento analógico en el campo de la instrucción. Debido a que el material a enseñar es, por lo general, desconocido por los estudiantes el uso de analogías puede ser una herramienta eficaz para introducir dominios no conocidos (Holyoak, 1985).

El principal propósito del uso del razonamiento analógico en la educación es el de favorecer en los estudiantes una comprensión básica del material desconocido por ellos. Asimismo, los alumnos deben aprender a encontrar similitudes entre los problemas que

aprenden en clase y los problemas que tienen que resolver en la vida cotidiana. Por lo mismo, los investigadores deben determinar cómo maximizar la transferencia de los conocimientos a nuevas situaciones (Matlin, 1998).

Gentner (1983, 1989) encontró que cuando se comprende bien el funcionamiento de un sistema hidráulico, este conocimiento se puede emplear para promover el razonamiento de otro sistema, como por ejemplo el de los circuitos eléctricos. Aún cuando ambos sistemas cuentan con atributos diferentes, (e.g el tubo es diferente al cable; el agua es diferente a los electrones), también cuentan con relaciones similares (la relación de que el volumen de agua disminuye con la estrechez del tubo, es similar a que la corriente disminuye con la resistencia). Igualmente, Mayer (1989) ha demostrado que la instrucción explícita sobre un modelo análogo familiar, ayuda a los estudiantes a leer textos científicos y a resolver problemas basándose en esa información.

Los estudiantes hacen uso del razonamiento analógico cuando utilizan los ejemplos de los libros de texto para solucionar nuevos problemas. En este caso, hacen uso de analogías en un mismo dominio, ya que emplean problemas similares para encontrar la solución pertinente. Esta práctica es muy común en la solución de problemas matemáticos y se han hecho varias investigaciones relacionadas con dicho tema. Por ejemplo, Reed (1987) comprobó que cuando se le proporciona a los alumnos una descripción detallada de cómo resolver un problema algebraico, y posteriormente se les pide que resuelvan un problema idéntico. La mayoría de los sujetos es capaz de solucionar el problema meta.

En otra investigación, Ross (1987) le pidió a unos estudiantes que leyeran explicaciones sobre principios de probabilidad, que incluían ejemplos. Después, les pidió que solucionaran problemas de probabilidad. La mayoría de los participantes llegaban a la solución correcta cuando los problemas "meta" les recordaban los ejemplos que habían leído en la explicación. Sin embargo, fallaban cuando no encontraban ninguna similitud entre el problema meta y el ejemplo. Igualmente, cuando los alumnos están resolviendo un problema y cuentan con un ejemplo estructuralmente idéntico, tienen más éxito en llegar a la solución que cuando no cuentan con el ejemplo (Reed, Dempster y Ettinger, 1985).

El éxito o fracaso en la solución de un problema, depende de la forma en que se emplea el ejemplo. Novick (1988) encontró que los expertos en la solución de problemas matemáticos, hacen uso eficiente de la información relevante de los ejemplos, mientras que los novatos carecen de dicha habilidad.

Por último, los ejemplos son de gran utilidad cuando son estructuralmente similares a los problemas "meta" y cuando los alumnos trabajan activamente para comprenderlos (Chi, Bassok, Lewis, Riemann y Glaser, 1989). Desgraciadamente, existen fallas en el razonamiento analógico cuando no se enfoca la atención en las similitudes estructurales - tanto del problema base, como del problema meta - y se atienden únicamente las similitudes superficiales. Para evitar que el solucionador de problemas se enfrente ante esta situación, es indispensable que lleve a cabo con eficiencia, los pasos del razonamiento analógico.

IV. Pasos del razonamiento analógico.

Según Holyoak y Thagard (1995) existen 4 pasos involucrados en el razonamiento analógico:

1. la selección,
2. el mapeo,
3. la evaluación, y
4. el aprendizaje.

IV.1 La selección.

En el primer paso se selecciona un problema base, análogo al problema meta, cuya solución sea aplicable al resultado que se desea llegar. La selección del problema idóneo se hace a través de una búsqueda en la memoria, la cual, tiene que traer a la mente posibles problemas base que se puedan relacionar con los problemas meta. Es necesario recordar conocimientos previos relevantes que sean de gran utilidad para experiencias novedosas; aún cuando los objetos o eventos de las nuevas situaciones nunca se hayan asociado directamente con las que se recuerdan.

A pesar de que la selección puede ser espontánea, algunas investigaciones indican que este tipo de transferencia es muy difícil de lograr (Gick y Holyoak, 1983), a menos que el

El éxito o fracaso en la solución de un problema, depende de la forma en que se emplea el ejemplo. Novick (1988) encontró que los expertos en la solución de problemas matemáticos, hacen uso eficiente de la información relevante de los ejemplos, mientras que los novatos carecen de dicha habilidad.

Por último, los ejemplos son de gran utilidad cuando son estructuralmente similares a los problemas "meta" y cuando los alumnos trabajan activamente para comprenderlos (Chi, Bassok, Lewis, Riemann y Glaser, 1989). Desgraciadamente, existen fallas en el razonamiento analógico cuando no se enfoca la atención en las similitudes estructurales - tanto del problema base, como del problema meta - y se atienden únicamente las similitudes superficiales. Para evitar que el solucionador de problemas se enfrente ante esta situación, es indispensable que lleve a cabo con eficiencia, los pasos del razonamiento analógico.

IV. Pasos del razonamiento analógico.

Según Holyoak y Thagard (1995) existen 4 pasos involucrados en el razonamiento analógico:

1. la selección,
2. el mapeo,
3. la evaluación, y
4. el aprendizaje.

IV.1 La selección.

En el primer paso se selecciona un problema base, análogo al problema meta, cuya solución sea aplicable al resultado que se desea llegar. La selección del problema idóneo se hace a través de una búsqueda en la memoria, la cual, tiene que traer a la mente posibles problemas base que se puedan relacionar con los problemas meta. Es necesario recordar conocimientos previos relevantes que sean de gran utilidad para experiencias novedosas; aún cuando los objetos o eventos de las nuevas situaciones nunca se hayan asociado directamente con las que se recuerdan.

A pesar de que la selección puede ser espontánea, algunas investigaciones indican que este tipo de transferencia es muy difícil de lograr (Gick y Holyoak, 1983), a menos que el

problema base y el problema meta tengan contenidos idénticos o muy similares. Una solución a esta problemática, es proporcionar pistas para que las personas sean capaces de encontrar relaciones entre dos problemas análogos (Holyoak y Koh, 1987; Novick y Hmelo, 1994).

Para traer de la memoria un problema que sirva de base, es necesario que exista similitud en los conceptos, en las relaciones y en la correspondencia estructural entre éste y el problema meta. Es decir, los conceptos similares en significado son más fáciles de recordar, pero también se pueden evocar los objetivos a alcanzar, las restricciones o las conexiones causales que comparten dos situaciones análogas.

IV.2 El mapeo

El segundo paso se refiere al mapeo, el cual consiste en identificar los elementos o relaciones que son afines en dos problemas análogos. Esto es, los elementos del problema base se mapean con los elementos del problema meta, de tal manera que las relaciones de ambas situaciones también correspondan.

La validez del proceso del mapeo se define en dos principios:

1. El principio de mapeo único: Por lo general, un elemento o relación de la estructura "A" se relaciona, solamente con un elemento o relación de la estructura "B" (Gentner, 1983, Holyoak y Thagard, 1989).
2. El principio de correspondencia: Si la relación "R" en la estructura "A" es mapeada con la relación "R" de la estructura "B", los argumentos o atributos de la relación "R" son mapeados con los argumentos de la relación "R" y viceversa (Falkenhainer, et al. 1989).

Halford (1992) identifica varios niveles de mapeo según la complejidad de las relaciones:

- a) Mapeos elementales: Asignan elementos de la estructura "A" a elementos de la estructura "B" de acuerdo a su similitud o conocimientos previos. Por ejemplo, cuando se relaciona la palabra "bebé" con la imagen de una criatura de meses.
- b) Mapeos relacionales: Elementos de la estructura "A" se mapean con elementos de la estructura "B" según las relaciones que comparten ambas. Este tipo de mapeo es más flexible y abstracto que los elementales. Por ejemplo, cuando se tienen dos proposiciones como:
 - Martha es más grande que Alejandra, y
 - Verónica es más grande que Sergio.

Verónica se relaciona con Martha y Alejandra con Sergio, considerando la relación "más grande que".

c) Mapeos sistemáticos: Se basan en correspondencias estructurales, es decir, las relaciones de la estructura "A" son afines con las relaciones de la estructura "B". En este nivel se piensa explícitamente en las relaciones basadas en los objetivos y relaciones causales y son independientes de la similitud entre atributos y de los mapeos relacionales. Por ejemplo cuando se tienen las siguientes proposiciones:

- El vestido está más caro que la falda y la falda está más cara que la blusa, y
- Jorge es más grande que Marco y Marco es más grande que Paulina.

El vestido se relaciona con Jorge, ya que de los tres elementos el vestido es el más caro y Jorge es el más grande. La falda se relaciona con Marco, ya que ambos ocupan el lugar intermedio y la blusa se relaciona con Paulina ya que son los que ocupan el último lugar en la comparación, siendo la blusa la más barata y Paulina la más chica.

d) Mapeos multi-sistemáticos: son mapeos sistemáticos de tres o más relaciones que se ponen en correspondencia. Por ejemplo, cuando se tienen que encontrar las operaciones de una ecuación como: $(7 [] 3) [] 4 = 1$. Cada corchete se relaciona con una operación ya sea suma, resta, multiplicación o división. El problema, en este tipo de casos, es que se tienen que encontrar las dos respuestas al mismo tiempo, de otra forma no se puede determinar si la relación es correcta o no.

IV.3 La evaluación

El tercer paso del razonamiento analógico se refiere a la evaluación, la cual consiste en realizar inferencias basadas en las correspondencias establecidas por el proceso de mapeo, en unión con la estructura de los problemas análogos. Esta tarea es relativamente fácil de ejecutar, sin embargo elaborar inferencias útiles y precisas depende de que los problemas sean isomórficos, es decir que cumplan con los dos principios sobre la validez del mapeo (que sea de uno a uno y que sea estructuralmente consistente).

En ocasiones el problema base y el problema meta no comparten los mismos objetivos o sus elementos no tienen correspondencia unos con otros. En estos casos es fundamental adaptar la información y después realizar inferencias. Por ejemplo, cuando en un problema de matemáticas se está hablando de kilómetros mientras que en otro análogo se habla de metros; es necesario convertir los metros a kilómetros o viceversa, para que

de esta manera se trabaje con unidades iguales. Esta etapa del razonamiento analógico es complicada, ya que se debe emplear información adicional para alcanzar el resultado deseado (Holyoak, Novick y Melz, 1994).

IV.4 El aprendizaje

Una vez que se han realizado las inferencias, éstas son aceptadas, rechazadas o aceptadas con modificación y posteriormente se avanza al siguiente paso que es el de aprendizaje. Cuando se ha logrado solucionar el problema meta a través del problema base, se identifican semejanzas, diferencias y procedimientos que se aplican en ambos problemas. Con base en esta información se abstraen esquemas³, los cuales, facilitan la transferencia ya que la hacen más flexible en subsecuentes aplicaciones.

Los 4 pasos mencionados se pueden ilustrar claramente con la siguiente analogía (Holyoak y Thagard, 1995): A una niña de 4 años se le leyó una historia sobre un genio que vivía en una botella pero quería cambiarse a vivir a una más grande. El genio tiene que cambiar sus preciosas joyas de una botella a otra de manera segura. La solución a la que llega consiste en ordenarle a su alfombra mágica que se enrolle en forma de tubo para que sirva de puente y de esta manera las joyas rodarían de un lado a otro. Una vez que se le leyó la historia a la niña se le expuso una problemática semejante. Se le presentaron dos recipientes separados por una corta distancia. Un recipiente contenía una serie de canicas, mientras que el otro estaba vacío. La niña estaba sentada cerca del recipiente lleno y no podía alcanzar el otro con las manos. En la mesa se encontraban una serie de instrumentos extras como son una cinta adhesiva, tijeras, un pedazo de papel rectangular, clips y ligas. Su tarea consistía en encontrar la manera de trasladar las canicas de un recipiente a otro. La niña recordó la historia y la aplicó para resolver el problema (*selección*). Esta selección se hizo de manera espontánea ya que ella consideró a las canicas como joyas sin que nadie le ayudara. En este caso utilizó a la historia del genio como problema base y la tarea que tenía que desempeñar como problema meta. Una vez hecho esto, realizó los *mapeos* necesarios: relacionó las canicas con las joyas; el pedazo de papel con la alfombra mágica y a ella misma con el genio. En el proceso de *evaluación*, la niña hizo inferencias como la de manipular un objeto flexible (la alfombra: la hoja) para formar un tubo que le permitiera a las canicas (canicas:joyas) rodar de un lado

³ Un esquema se refiere a la estructura generalizada del conocimiento de una idea o concepto, que contiene información que considera las relaciones entre elementos (Mayer, 1992)

a otro como había sucedido en la historia de la alfombra mágica. Además utilizó la cinta adhesiva para formar el tubo con el papel. Por último, la niña elaboró un *esquema* del primer problema al darse cuenta de las funciones que ejercía cada uno de los elementos, lo cual le permitió transferir su solución al segundo problema.

Por otro lado, la solución de un problema y la transferencia del mismo a otro, requiere de la representación explícita del problema base y meta para poder comparar uno con otro y descubrir los aspectos similares y diferentes entre ambos. El razonamiento analógico, aplicado a dichas representaciones, ayuda a encontrar aspectos comunes entre problemas que en la superficie se perciben como diferentes (Holyoak y Thagard, 1989b). Adicionalmente, la representación de un problema favorece la realización de abstracciones, que permiten utilizar conocimientos previos para encontrar soluciones a situaciones novedosas.

En resumen, el conocimiento previo (*problema base*) se utiliza para comprender y solucionar problemas nuevos (*problema meta*). Para lograrlo, es indispensable hacer buenas representaciones de las situaciones que se van a estudiar. Una vez elaboradas éstas, se deben recordar problemas base que permitan realizar mapeos entre ambas situaciones análogas. Después se infieren aspectos del problema base que se puedan aplicar al problema meta, para que por último se abstraigan esquemas que faciliten y hagan más flexible la transferencia.

Cabe recalcar que los cuatro pasos del razonamiento analógico se llevan a cabo de forma paralela, y que cada uno juega un papel importante para lograr la transferencia del problema base al problema meta. Para tener éxito en esta tarea, es fundamental que el estudiante recuerde el problema base apropiado, establezca correctamente las correspondencias entre los elementos y relaciones de ambos problemas y elabore las inferencias adecuadas.

Es importante mencionar que estos pasos se pueden dar de manera espontánea en las personas que van a realizar analogías; sin embargo también pueden ser determinadas por alguien externo para que se preste atención en las relaciones y objetivos pertinentes para realizar buenas analogías. Es decir, un educador o investigador puede incidir en los

alumnos para que desarrollen las habilidades necesarias para hacer uso del razonamiento analógico.

V. Factores que influyen el razonamiento analógico.

Varios factores pueden afectar, positiva o negativamente, la transferencia (Mayer y Wittrock, 1997). A continuación se explican aquéllos que moderan el razonamiento analógico:

- La restricción semántica,
- La restricción estructural, y
- La restricción sobre centralidad pragmática.

La restricción semántica se refiere a la preferencia por realizar mapeos entre predicados que tengan el mismo significado. Algunos estudios confirman que algunas personas son influenciadas por la similitud entre objetos y predicados en la realización de mapeos (Gentner y Toupin 1986; Holyoak y Koh, 1987; Ross, 1987). Esta restricción es de gran utilidad para contrarrestar la ambigüedad entre relaciones; si una relación dentro de un grupo de relaciones de uno a varios, es más similar que las otras, entonces ésta será preferida sobre las demás.

La restricción estructural implica que si la proposición⁴ base se relaciona con una proposición meta, entonces los predicados y argumentos de ésta deben relacionarse con los elementos correspondientes de aquélla. Esta restricción se basa en los dos principios de un mapeo válido. el mapeo de uno a uno y, la consistencia estructural. La primera implica que cada elemento del problema base corresponde a un solo y único elemento del problema a resolver (ó meta) y viceversa. Esta restricción reduce el número de relaciones que deben considerarse. La segunda implica que cuando se mapean dos relaciones, sus atributos también se mapean. Esta restricción es de gran utilidad para eliminar relaciones de uno a muchos y de muchos a uno.

⁴ Las proposiciones son unidades pequeñas del conocimiento que pueden tener un valor de falso o verdadero. Se conforman de dos componentes los predicados y argumentos. Los predicados expresan una relación y pueden interpretarse como una acción. Los argumentos o atributos expresan las entidades de una relación. (Halford 1992)

alumnos para que desarrollen las habilidades necesarias para hacer uso del razonamiento analógico.

V. Factores que influyen el razonamiento analógico.

Varios factores pueden afectar, positiva o negativamente, la transferencia (Mayer y Wittrock, 1997). A continuación se explican aquéllos que moderan el razonamiento analógico:

- La restricción semántica,
- La restricción estructural, y
- La restricción sobre centralidad pragmática.

La restricción semántica se refiere a la preferencia por realizar mapeos entre predicados que tengan el mismo significado. Algunos estudios confirman que algunas personas son influenciadas por la similitud entre objetos y predicados en la realización de mapeos (Gentner y Toupin 1986; Holyoak y Koh, 1987; Ross, 1987). Esta restricción es de gran utilidad para contrarrestar la ambigüedad entre relaciones; si una relación dentro de un grupo de relaciones de uno a varios, es más similar que las otras, entonces ésta será preferida sobre las demás.

La restricción estructural implica que si la proposición⁴ base se relaciona con una proposición meta, entonces los predicados y argumentos de ésta deben relacionarse con los elementos correspondientes de aquélla. Esta restricción se basa en los dos principios de un mapeo válido: el mapeo de uno a uno y, la consistencia estructural. La primera implica que cada elemento del problema base corresponde a un solo y único elemento del problema a resolver (ó meta) y viceversa. Esta restricción reduce el número de relaciones que deben considerarse. La segunda implica que cuando se mapean dos relaciones, sus atributos también se mapean. Esta restricción es de gran utilidad para eliminar relaciones de uno a muchos y de muchos a uno.

⁴ Las proposiciones son unidades pequeñas del conocimiento que pueden tener un valor de falso o verdadero. Se conforman de dos componentes, los predicados y argumentos. Los predicados expresan una relación y pueden interpretarse como una acción. Los argumentos o atributos expresan las entidades de una relación (Halford, 1992)

Como un principio adicional, Gentner (1983) considera que es esencial favorecer una serie de relaciones sistemáticas. Es decir, si hay dos o más relaciones, entonces la relación que contenga mayor número de correspondencias deberá ser seleccionada. Cuando estas tres propiedades se satisfacen, entonces hay un mapeo isomórfico. Dos problemas análogos pueden ser isomórficos cuando comparten elementos idénticos tales como objetos y predicados. Sin embargo, también pueden ser isomórficos cuando comparten un sistema idéntico de correspondencias. Para algunos autores estas restricciones son esenciales para la realización del mapeo (Gentner, 1983; Falkenhainer et al. 1986), mientras que para otros (eg. Holyoak y Thagard, 1989; Spellman y Holyoak, 1996) estas restricciones son consideradas como restricciones suaves.

La restricción de centralidad pragmática (Holyoak y Thagard, 1989; Keane, 1985) está relacionada con los objetivos de cada mapeo lo que implica una preferencia por los mapeos que se relacionan con el objetivo planteado y que tratan de mantener las correspondencias que se pueden obtener con base en los conocimientos previos. De acuerdo al propósito que se tenga, se pueden elaborar diferentes mapeos (Spellman y Holyoak, 1992).

Retomando la analogía de la niña y el genio (Holyoak y Thagard, 1995) se pueden describir estas restricciones. Aún cuando en esta analogía las relaciones son de tipo estructural más que semánticas se puede decir que existen ciertas *semejanzas* entre las canicas que son redondas y pequeñas con las joyas; el pedazo de papel rectangular y flexible con la alfombra mágica. En cuanto a la *restricción estructural* se cumple con la propiedad del mapeo de uno a uno cuando se relacionan las canicas con las joyas, el papel con la alfombra y a la niña con el genio. Mientras que la segunda propiedad se refleja en las relaciones de alto orden que se realizan entre varios objetos del problema base (joyas, genio, botellas, alfombra mágica) con objetos del problema meta (las canicas, la niña, los recipientes, la hoja), las cuales, permiten formar correspondencias consistentes entre ambas. Por último, ambos problemas comparten el mismo objetivo (*centralidad pragmática*) ya que tanto la niña como el genio, buscan trasladar objetos de un lugar a otro sin que se caigan.

Las restricciones del razonamiento analógico, se pueden aplicar en los cuatro pasos de la transferencia analógica (selección, mapeo, evaluación y aprendizaje), sin embargo cada

una funge un papel distinto según la etapa en la que se encuentre. Por ejemplo, para recordar un problema que sirva como punto de comparación, es mejor que comparta elementos superficiales con el problema meta, lo cual, favorece la recuperación de información de la memoria. En estos casos la restricción sobre semejanzas semánticas es más útil que las otras dos.

Aunque para los procesos de mapeo e inferencia es mejor que los problemas análogos sean semejantes en aspectos superficiales, esta condición no es indispensable ya que se pueden mapear o inferir relaciones. En estos casos la restricción de estructura es la más importante.

Por otro lado, la centralidad pragmática juega un papel relevante en la evaluación. Una vez que los objetivos de ambos problemas “análogos” se conocen, entonces es necesario identificar si ambos contienen información que se pueda transferir o no. En sí, la transferencia analógica se lleva a cabo a través de la satisfacción de estas tres restricciones.

Cabe mencionar que estas restricciones no siempre actúan conjuntamente al contrario, por lo general se encuentran en conflicto. Por ejemplo, la restricción semántica y la estructural fluctúan constantemente: mientras que las relaciones estructurales entre los predicados de dos situaciones análogas, son similares, los objetos o atributos pueden diferir en sus características superficiales. Por tanto, las restricciones no son absolutas y se emplean de acuerdo a las circunstancias

VI. El mapeo analógico.

Aunque los cuatro pasos del razonamiento analógico (selección, mapeo, evaluación y aprendizaje) son indispensables; en la presente investigación se hará mayor énfasis en el proceso de mapeo, que consiste en encontrar las correspondencias apropiadas entre dos problemas análogos. Gracias al uso adecuado de este proceso, se pueden transferir conocimientos de gran utilidad.

Hummel y Holyoak (1997) consideran algunos fenómenos concernientes al mapeo analógico:

una funge un papel distinto según la etapa en la que se encuentre. Por ejemplo, para recordar un problema que sirva como punto de comparación, es mejor que comparta elementos superficiales con el problema meta, lo cual, favorece la recuperación de información de la memoria. En estos casos la restricción sobre semejanzas semánticas es más útil que las otras dos.

Aunque para los procesos de mapeo e inferencia es mejor que los problemas análogos sean semejantes en aspectos superficiales, esta condición no es indispensable ya que se pueden mapear o inferir relaciones. En estos casos la restricción de estructura es la más importante.

Por otro lado, la centralidad pragmática juega un papel relevante en la evaluación. Una vez que los objetivos de ambos problemas "análogos" se conocen, entonces es necesario identificar si ambos contienen información que se pueda transferir o no. En sí, la transferencia analógica se lleva a cabo a través de la satisfacción de estas tres restricciones.

Cabe mencionar que estas restricciones no siempre actúan conjuntamente al contrario, por lo general se encuentran en conflicto. Por ejemplo, la restricción semántica y la estructural fluctúan constantemente: mientras que las relaciones estructurales entre los predicados de dos situaciones análogas, son similares, los objetos o atributos pueden diferir en sus características superficiales. Por tanto, las restricciones no son absolutas y se emplean de acuerdo a las circunstancias.

VI. El mapeo analógico.

Aunque los cuatro pasos del razonamiento analógico (selección, mapeo, evaluación y aprendizaje) son indispensables; en la presente investigación se hará mayor énfasis en el proceso de mapeo, que consiste en encontrar las correspondencias apropiadas entre dos problemas análogos. Gracias al uso adecuado de este proceso, se pueden transferir conocimientos de gran utilidad.

Hummel y Holyoak (1997) consideran algunos fenómenos concernientes al mapeo analógico:

1. **Isomorfismo:** Este fenómeno se da en el proceso de mapeo cuando se encuentran relaciones o correspondencias aún en la ausencia de similitudes entre objetos mapeados. (Gentner y Toupin, 1986)
2. **Similitud semántica:** El proceso de mapeo es más efectivo cuando objetos similares comparten las mismas funciones (Gentner y Landers, 1985; Gick y Holyoak, 1980, 1983; Gilovich, 1981; Gentner y Toupin, 1986; Ratterman y Gentner, 1987; Ross, 1984, 1987, 1989) Por ejemplo, Holyoak y Koh, (1987) encontraron que un problema relacionado con el uso de rayos X para eliminar un tumor se relacionaba mejor con un problema que hacía uso de un rayo para fundir un filamento de focos que con un problema que hacía uso de un ultrasonido para el mismo hecho.
3. **Centralidad pragmática:** Cuando las restricciones semánticas y estructurales son ambiguas, entonces la restricción de centralidad pragmática funge un papel indispensable en el proceso de mapeo. En estos casos, se tienden a mapear los objetos y relaciones según el objetivo que se tenga. Spellman y Holyoak, (1992) realizaron una investigación donde se le pidió a un grupo de estudiantes que compararan el papel que desempeñó Estado Unidos en la Guerra del Golfo Pérsico con el que jugó en la Segunda Guerra Mundial. Antes de que realizaran la analogía se les repartieron dos resúmenes sobre la Segunda Guerra Mundial, los cuales diferían en el énfasis que se hacía de Churchill de la Gran Bretaña, o bien de Roosevelt de los Estados Unidos. Como resultado, dependiendo del resumen y del objetivo que se tenía en cada uno de ellos, se hicieron los mapeos pertinentes: los alumnos que leyeron la versión de Churchill relacionaron a la Gran Bretaña con los Estados Unidos y a Churchill con Bush; mientras que los que leyeron la otra versión mapearon a los Estados Unidos con ellos mismos y a Roosevelt con Bush.
4. **Múltiples posibilidades de mapeo:** Se ha comprobado que se pueden realizar diferentes mapeos consistentes para la misma situación análoga. (Burns, 1996; Spellman y Holyoak, 1996). Esto se ejemplifica retomando la investigación anterior (Spellman y Holyoak, 1992) considerando que de acuerdo a la historia que habían leído los alumnos (Roosevelt – Churchill) se realizaron dos tipos de mapeos, y ambos correctos.
5. **Facilitación de mapeos subsecuentes debido a correspondencias iniciales correctas:** En la medida que el proceso de mapeo inicial sea preciso y acertado, se tiene una alta probabilidad de que los mapeos posteriores sean correctos (Keane 1995; Keane et al, 1994).

Existen varios modelos computacionales que explican el proceso de mapeo enfocándose en las restricciones que lo gobiernan. En particular, la teoría de multirestricciones se implementó en el modelo ACME (Analogical Constraint Mapping Engine) de Holyoak y Thagard (1989), y la teoría de mapeo-estructural se implementó en el modelo SME (Structure Mapping Engine) de Falkenhainer et al. (1989).

Aunque ambos modelos han sido exitosos en la predicción de mapeos que la gente identifica, sus algoritmos difieren uno del otro. El modelo ACME utiliza un algoritmo para la *satisfacción de la restricción en paralelo*, en donde se consideran simultáneamente todas las posibles relaciones entre los elementos de los problemas base y meta, así como también las restricciones relevantes para la selección de dichas correspondencias. El modelo SME realiza el proceso de mapeo a través de una relación gráfica, la cual requiere de una formación y manipulación explícita de un número de estructuras gráficas proposicionales.

Tanto ACME como SME dejan de lado las limitaciones de la memoria de trabajo (Keane, Legeway y Duff, 1994; Hummel y Holyoak, 1997), por lo que se han elaborado otros modelos como:

- IAM - Incremental Analogy Machine (Keane, Legeway y Duff, 1994),
- I-SME Incremental - Structure Mapping Engine (Forbus, Ferguson y Gentner, 1994)

Los cuales procesan porciones pequeñas de las situaciones análogas de manera incremental.

Cabe mencionar que estos modelos representan los problemas análogos, ya sea como una colección de símbolos compuesta en proposiciones (e.g. SME, I-SME e IAM), o como unidades localistas dentro de una red conexionista (e.g. ACME).

Algunas diferencias entre estas dos aproximaciones se resumen en el siguiente cuadro:

Aproximación	Simbólica SME, FSME, IAM	Conexionista ACME
Control	Central Ejecutivo	Distribuido entre unidades
Conocimiento	Reglas condición-acción	Distribuido entre unidades
Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Aditivo (suma de nuevas producciones) • Depende de la capacidad de representar las funciones y vincularlas con los sujetos u objetos 	<ul style="list-style-type: none"> • Incremental (revisión de pesos a través de la retroalimentación y de la restricción interna de los pesos) • Recuerda las asociaciones que son fortalecidas por el aprendizaje.
Toma de decisión	Serial	Satisfacción de la restricción en paralelo
Problemas	Bien definidos con objetivos claros	No tan bien definidos. Se pueden comparar aspectos de diferentes dominios
Relaciones	idea sistemática de los símbolos, por tanto existen relaciones significativas	No hay relaciones significativas, sólo hay relaciones que activan las unidades

Retomando los aspectos positivos de ambas aproximaciones, Hummel y Holyoak (1997) implantaron un nuevo modelo llamado LISA (Learning and Inferences with Schemas and Analogies), el cual, representa situaciones análogas y realiza mapeos de acuerdo a una arquitectura simbólica - conexionista.

VII. Modelo LISA

En LISA, el mapeo se lleva a cabo a través del proceso de reconocimiento de patrones guiados entre situaciones análogas, las cuales se representan a través de unidades semánticas y de unidades estructurales. Las unidades semánticas codifican el contenido semántico o las características de los elementos, mientras que las estructurales codifican las relaciones entre los elementos de situaciones análogas. Por otro lado, las relaciones dinámicas, a través de una sincronía temporal, determinan qué características semánticas (predicados u objetos) corresponden a qué objetos o relaciones de las unidades estructurales (proposiciones y subproposiciones).

Por ejemplo, la proposición "María ama a Juan" se representa a través de una unidad proposicional (P), la cual, a su vez está conectada con unidades subproposicionales (SP)

Algunas diferencias entre estas dos aproximaciones se resumen en el siguiente cuadro:

Aproximación	Simbólica SME, F-SME, IAM	Conexionista ACME
Control	Central Ejecutivo	Distribuido entre unidades
Conocimiento	Reglas condición-acción	Distribuido entre unidades
Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Aditivo (suma de nuevas producciones) • Depende de la capacidad de representar las funciones y vincularlas con los sujetos u objetos 	<ul style="list-style-type: none"> • Incremental (revisión de pesos a través de la retroalimentación y de la restricción interna de los pesos) • Recuerda las asociaciones que son fortalecidas por el aprendizaje
Toma de decisión	Serial	Satisfacción de la restricción en paralelo
Problemas	Bien definidos con objetivos claros	No tan bien definidos. Se pueden comparar aspectos de diferentes dominios
Relaciones	Idea sistemática de los símbolos, por tanto existen relaciones significativas	No hay relaciones significativas, sólo hay relaciones que activan las unidades

Retomando los aspectos positivos de ambas aproximaciones, Hummel y Holyoak (1997) implantaron un nuevo modelo llamado LISA (Learning and Inferences with Schemas and Analogies), el cual, representa situaciones análogas y realiza mapeos de acuerdo a una arquitectura simbólica - conexionista.

VII. Modelo LISA

En LISA, el mapeo se lleva a cabo a través del proceso de reconocimiento de patrones guiados entre situaciones análogas, las cuales se representan a través de unidades semánticas y de unidades estructurales. Las unidades semánticas codifican el contenido semántico o las características de los elementos, mientras que las estructurales codifican las relaciones entre los elementos de situaciones análogas. Por otro lado, las relaciones dinámicas, a través de una sincronía temporal, determinan qué características semánticas (predicados u objetos) corresponden a qué objetos o relaciones de las unidades estructurales (proposiciones y subproposiciones).

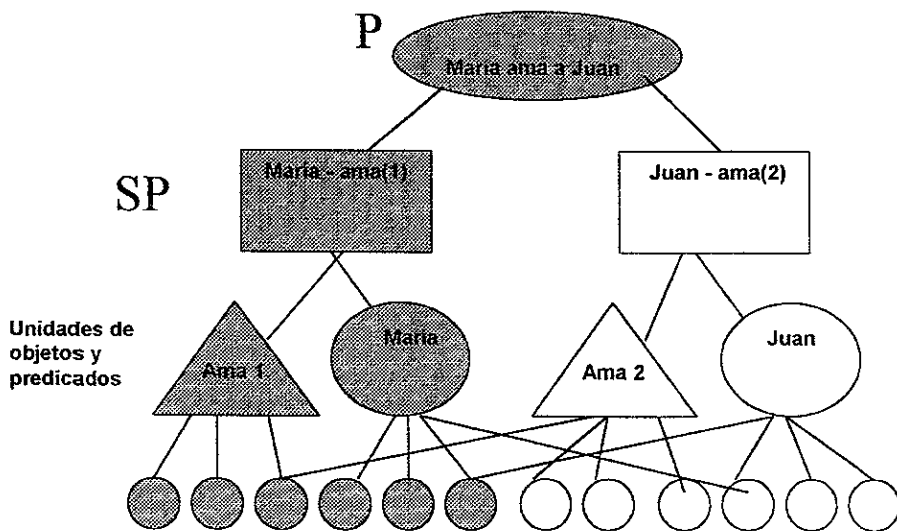
Por ejemplo, la proposición "María ama a Juan" se representa a través de una unidad proposicional (P), la cual, a su vez está conectada con unidades subproposicionales (SP)

que representan las relaciones de los argumentos con sus funciones ("María ama" y "Juan es amado").

Las unidades subproposicionales, por su parte, se conectan con unidades de objetos y predicados. Es decir, la unidad subproposicional "María ama" se conecta con la unidad objeto "María" y con la unidad predicado "amante"; mientras que la subproposición "Juan es amado" se conecta con la unidad objeto "Juan" y la unidad predicado "amado".

Las unidades de objetos y predicados están conectadas con unidades semánticas que representan atributos de los objetos y predicados. Por ejemplo la unidad objeto "María" puede estar conectada con unidades como "ser humano", "femenino"; y la unidad predicado "ama" con unidades como "sentimiento", "fuerte", etc. (ver figura 1)

Figura 1



Por otro lado, con base en el proceso de reconocimiento de patrones guiados - a través del cual se lleva a cabo el mapeo - se considera que una situación análoga calificada como "situación origen" genera un patrón de activación que es recibido en paralelo por la situación análoga considerada como "meta" Cuando una unidad proposicional "P" de la

situación origen es activada, sus unidades subproposicionales se activan de manera sincrónica entre ellas. Cada unidad subproposicional, a su vez, activa sus unidades de objetos y predicados, las cuales, activan sus unidades semánticas. De esta manera, cuando una unidad subproposicional es activada, solamente sus respectivas unidades de predicado y objeto son activadas. Esta sincronía temporal da como resultado una representación que captura tanto la estructura de la analogía, como sus características semánticas.

El patrón de activación generado por la situación origen se comunica con la situación meta por medio de las unidades semánticas, ya que éstas son compartidas por ambas situaciones análogas. Esto es, mientras que la situación origen y la situación meta mantienen una estructura de unidades y relaciones propias, ambas comparten unidades semánticas. Este evento es fundamental para el proceso de mapeo ya que la activación de la situación origen promueve la activación de elementos de la situación meta. Con base en esta información, se infiere una predicción del modelo LISA que considera al proceso de mapeo unidireccional, es decir, va "de la situación origen a la situación meta".

Por otro lado, los niveles de activación de las unidades de predicado y objeto, en la situación meta, se almacenan temporalmente en un "buffer" de la memoria. Los "buffers" acumulan evidencia, positiva o negativa, de la correspondencia entre dos elementos y gracias a su actualización se realiza el proceso de mapeo. Esta actualización consiste en la evaluación del nivel de activación de las unidades para definir la fuerza del mapeo entre ellas.

Después de la actualización, el "buffer" se limpia y se utiliza para monitorear la activación - en aumento o decremento- de las unidades de predicado u objeto de la situación meta, que recibe el patrón de activación de la siguiente unidad subproposicional. La frecuencia en que se actualizan los "buffers" depende del tamaño de la "fase establecida", que, se refiere al número de unidades subproposicionales que se pueden activar fuera de la sincronía temporal. Debido a los límites del número de unidades que se pueden mantener fuera de la sincronía temporal, la fase establecida no puede exceder de cuatro a seis unidades subproposicionales, ó de dos a tres proposiciones. Por tanto, si la situación base contiene más proposiciones que las que puede soportar la memoria de trabajo, entonces éstas se deben activar secuencialmente hasta que la analogía se termina de procesar.

El tamaño limitado de la "fase establecida" corresponde a la capacidad limitada de la memoria de trabajo. Con base en esto, el modelo LISA considera las limitaciones de la memoria de trabajo en la representación de analogías y en el algoritmo del mapeo. Aspecto, que no se había considerado en modelos anteriores.

El hecho de que el mapeo, en el modelo LISA, es direccional y limitado en capacidad; conlleva a algunas predicciones, como la existencia de asimetrías en los papeles que juegan la situación base y la situación meta.

Una asimetría se determina por los aspectos sobresalientes de un estímulo. Es decir, una situación análoga puede contar con una descripción más detallada y por lo mismo la mayoría de la gente prefiere una dirección de comparación más que la otra. Esto se puede ejemplificar a través de un experimento realizado por Gholson et al. (1988) quienes les presentaron a alumnos de tercero y cuarto grado, dos problemas, el denominado "misioneros y caníbales" y otro el "dilema del granjero".

En el primer problema es necesario cruzar a un número determinado de misioneros y caníbales a través de un río, pero esta acción se debe realizar de tal manera que no se puede quedar un misionero solo ya que si no se lo come un canibal.

Dilema del granjero, éste debe llevar a un zorro, a un ganso y a varios granos de maíz en una carreta a lo largo de la montaña. Sin embargo esta acción se debe llevar a cabo sin que el zorro se coma al ganso y el ganso se coma el maíz. En sí, ambos problemas se resuelven de la misma manera. Los alumnos que aprendieron primero a resolver el problema del granjero pudieron resolver el problema de los misioneros sin ninguna dificultad. Sin embargo, los alumnos que aprendieron a resolver primero el problema de los misioneros presentaron dificultad en resolver el problema del granjero. La diferencia en la transferencia entre ambos problemas se debe a que el ejemplo del granjero proporciona una guía clara de lo que se requiere hacer para solucionar el problema, mientras que el otro problema no cuenta con dicha estructura.

Asimismo, Bassok y Holyoak (1989) demostraron que la transferencia entre problemas de álgebra y física es asimétrica. Algunos alumnos con cierto entrenamiento en problemas

de álgebra fueron capaces de transferir sus conocimientos a problemas distintos pero isomórficos, de física. Aspecto que no sucedió con alumnos que aprendieron a resolver problemas de física y luego resolvieron problemas algebraicos. Estos resultados se deben a que el álgebra se considera como un dominio libre de contenido, mientras que la física es muy específica. Además, en la solución de problemas algebraicos se presta mayor atención a la estructura y a los métodos de solución, lo que contribuye a formar representaciones libres de contenido y por consiguiente aplicables a otros dominios.

Por otro lado, Bassok y Olseth (1995) encontraron asimetrías entre problemas que se refieren a cambios discretos y continuos. Un ejemplo de un cambio discreto es el incremento salarial por mes, y el de un cambio continuo es la velocidad (km/hr) de un carro. En esta investigación, se encontró que la transferencia en la dirección discreto-continuo es más directa y efectiva que en la dirección continuo-discreta. Los resultados que se obtuvieron reflejan la forma en que se enseñan las matemáticas, primero se estudian los problemas discretos y después los continuos. Conjuntamente, por lo general, los casos continuos se explican a través de su transformación en casos discretos, como en el caso del cálculo.

Cabe recalcar que las investigaciones arriba mencionadas y otras más (e.g. Burns, 1996; Bowdle y Gentner, 1997) se centran en el estudio de asimetrías en la solución de problemas o en el proceso de inferencia; sin embargo, ninguna hace referencia al efecto de las asimetrías en el proceso de mapeo. Kubose, Holyoak y Hummel (en prensa) fueron los primeros en estudiar este aspecto a través del modelo LISA.

Según las características de LISA el proceso de mapeo es direccional. Es decir, la situación base sirve como foco de atención, y va generando patrones de activación que permiten que la situación meta responda en paralelo. La esencia de las asimetrías en el proceso de mapeo recae en la diferencia de operación que existe entre la situación "base" y la situación "meta". La situación base puede estar influenciada por la agrupación de las proposiciones en la fase de establecimiento; y cualquier variable (como la coherencia del texto o el contenido causal) que incida en el agrupamiento puede generar asimetrías. Por ejemplo, si una situación análoga es más coherente que otra, las correspondencias entre ambas serán mejores si la situación con contenido coherente funge como problema "base" y no de "meta".

Kubose, et al.(1997), utilizando materiales semejantes a los de Kean (1991) realizaron simulaciones con el modelo LISA y experimentos con alumnos de psicología de la Universidad de California de Los Angeles, y comprobaron que el proceso de mapeo puede ser asimétrico dependiendo del contenido –causal o no causal- de la situación base y la situación meta. Es decir, el mapeo es más preciso cuando la situación base contiene mayor contenido causal que la situación meta, y es menos preciso cuando se presenta la condición contraria.

Para extender estos descubrimientos, Kubose et al. trabajaron con problemas isomórficos como el problema de los "rayos X" (Duncker, 1945) y el problema de "La Fortaleza" (Gick y Holyoak 1980). El primero, se refiere al dilema que enfrenta un médico ante la destrucción de un tumor maligno que presenta uno de sus pacientes. Se puede hacer uso de un rayo que permite la destrucción del tumor, sin embargo debido a la intensidad que se requiere para destruirlo también se perjudica la salud del paciente. La tarea consiste en buscar una solución para destruir el tumor sin dañar la salud del sujeto. El segundo problema, se refiere a la estrategia que debe llevar a cabo un general para derrotar a un dictador que se encuentra viviendo en una fortaleza. No se puede llegar a ésta por medio de un ataque masivo ya que los caminos se encuentran minados y explotarían por el peso de todo el ejército. El general debe buscar la manera de atacar la fortaleza. Ambos problemas, aunque en contenido son muy diferentes, se resuelven de la misma manera. La solución estriba en atacar de manera simultánea, por diferentes direcciones y en pequeñas cantidades tanto al tumor como a la fortaleza.

Cabe recalcar que el problema de la fortaleza, cuenta con mayor contenido semántico, lo cual permite que haya mayor precisión en el mapeo cuando juega el papel de "problema base" que cuando juega el papel de "problema meta". Es decir, el proceso de mapeo es mejor del problema de la Fortaleza al problema de los Rayos X, que viceversa. Asimismo, una vez conocida la solución del problema de la Fortaleza, se transfiere con mayor facilidad al problema de los rayos X; mientras que la transferencia es más difícil de lograr en el caso inverso.

Estos descubrimientos pueden tener aplicaciones educativas. Se ha demostrado que los alumnos al aprender cómo resolver nuevos problemas, utilizan ejemplos como situaciones análogas base (Reed, 1985; Holyoak y Koh,1987; Chen, 1996). Este proceso de

transferencia requiere que se realicen mapeos e inferencias entre el ejemplo y el problema a resolver. Ante estas circunstancias, la dirección del mapeo juega un papel importante en el éxito del mismo. Es decir, el alumno podrá tener mapeos más precisos si la dirección que se considere es del ejemplo al problema meta, que viceversa (Kubose et al., en prensa).

Para extender estos descubrimientos, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo medir la dirección del mapeo en la solución de problemas matemáticos. Se asume que la manipulación de la atención sobre una situación análoga, puede determinar cuál juega como base. Debido a la relación asimétrica entre la situación base y la situación meta, que el modelo LISA describe, se predice que las situaciones análogas con propiedades estructurales específicas conllevan precisión en el proceso de mapeo.

Considerando dicho objetivo, a continuación se explican 6 experimentos que se centran en el estudio de la influencia y utilidad de la dirección del mapeo en la solución de problemas matemáticos equivalentes; que cuentan con la misma solución y contenido similar; y problemas isomórficos; que tienen la misma solución, pero contenido diferente.

Experimento uno

Asumiendo que cualquier factor - como el contenido causal ó la proporción de pistas - que afecta la agrupación de las proposiciones en el problema base puede influenciar la precisión del mapeo, este experimento tuvo como finalidad comparar el proceso de mapeo entre dos problemas algebraicos equivalentes. Uno de ellos contaba con la explicación del procedimiento para llegar a la solución y con el resultado, por tanto las relaciones entre un problema y otro serían mejores cuando el problema con explicación fungiera como problema "base".

Debido a que en este experimento se emplearon problemas algebraicos, se identificaron y redactaron problemas análogos que fueran equivalentes. Para realizar dicha tarea se hizo una revisión de los problemas que se podían utilizar. Para lo mismo se empleó la clasificación que Mayer (1980) elaboró de problemas algebraicos; como también se consideraron algunos problemas utilizados por Reed (1987).

transferencia requiere que se realicen mapeos e inferencias entre el ejemplo y el problema a resolver. Ante estas circunstancias, la dirección del mapeo juega un papel importante en el éxito del mismo. Es decir, el alumno podrá tener mapeos más precisos si la dirección que se considere es del ejemplo al problema meta, que viceversa (Kubose et al., en prensa).

Para extender estos descubrimientos, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo medir la dirección del mapeo en la solución de problemas matemáticos. Se asume que la manipulación de la atención sobre una situación análoga, puede determinar cuál juega como base. Debido a la relación asimétrica entre la situación base y la situación meta, que el modelo LISA describe, se predice que las situaciones análogas con propiedades estructurales específicas conllevan precisión en el proceso de mapeo.

Considerando dicho objetivo, a continuación se explican 6 experimentos que se centran en el estudio de la influencia y utilidad de la dirección del mapeo en la solución de problemas matemáticos equivalentes; que cuentan con la misma solución y contenido similar; y problemas isomórficos; que tienen la misma solución, pero contenido diferente.

Experimento uno

Asumiendo que cualquier factor - como el contenido causal ó la proporción de pistas - que afecta la agrupación de las proposiciones en el problema base puede influenciar la precisión del mapeo, este experimento tuvo como finalidad comparar el proceso de mapeo entre dos problemas algebraicos equivalentes. Uno de ellos contaba con la explicación del procedimiento para llegar a la solución y con el resultado, por tanto las relaciones entre un problema y otro serían mejores cuando el problema con explicación fungiera como problema "base".

Debido a que en este experimento se emplearon problemas algebraicos, se identificaron y redactaron problemas análogos que fueran equivalentes. Para realizar dicha tarea se hizo una revisión de los problemas que se podían utilizar. Para lo mismo se empleó la clasificación que Mayer (1980) elaboró de problemas algebraicos; como también se consideraron algunos problemas utilizados por Reed (1987).

La dirección del mapeo se evaluó manipulando la atención de los participantes en el problema "base" –que estaba resuelto- o en el problema "meta" –que no estaba resuelto- y midiendo los cambios en las respuestas de las preguntas realizadas para evaluar las correspondencias entre ambos problemas análogos. Si a los alumnos se les pedía que compararan el problema base con el problema meta, se esperaba que se dieran relaciones más precisas en esta condición que en el caso contrario.

Asimismo, se evaluó el planteamiento de las ecuaciones y su solución. Se esperaba que un mayor número de alumnos contestara correctamente los problemas cuando se les pedía que compararan el problema base con el problema meta.

Participantes

Los participantes de este experimento fueron 20 estudiantes de la carrera de psicología de la Universidad de California de Los Angeles (UCLA), los cuales participaron en el experimento para obtener créditos en una materia introductoria.

Diseño

Todos los estudiantes recibieron cuatro pares de problemas algebraicos. En cada par el problema "base" contenía una explicación de cómo resolverlo y contaba con su resultado. Mientras que el problema "meta" tenía que ser resuelto según el procedimiento aprendido. Existían dos condiciones: en la mitad de los casos un problema ejercía la función de problema base y en la otra mitad desempeñaba el papel de problema meta.

Para realizar el proceso de mapeo se le pidió a los participantes que compararan a través de unas preguntas los problemas de cada par. En este caso también existían dos condiciones: En la primera los sujetos tenían que enunciar las semejanzas entre el problema resuelto y el problema sin resolver y en la segunda el proceso de comparación se invertía. Estas dos condiciones variaron entre sujetos.

Por último, los participantes tenían que resolver el problema meta, que en la mitad de las ocasiones era el problema a comparar y en la otra mitad jugaba el papel de punto de referencia.

Materiales

Se utilizaron cuatro pares de problemas algebraicos. Dos pares se resolvían aplicando ecuaciones con una incógnita y los otros dos se resolvían con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los problemas de cada par eran equivalentes (ver tabla 2).

Se crearon cuatro tipos diferentes de cuadernillos para considerar la dirección del mapeo y el orden de los problemas. En dos de ellos (A y B) se midieron los mapeos de los problemas resueltos a los problemas sin resolver; mientras que en los otros dos (C y D) se midió la dirección inversa. Los problemas que ejercían el papel de problema base en las condiciones A y C eran los problemas meta en las condiciones B y D; y viceversa. El orden los problemas se asignó al azar.

Cada cuadernillo constaba de las siguientes hojas:

- La primera hoja consistía en una serie de preguntas que permitían conocer una síntesis de la historia académica de cada sujeto en el área de matemáticas. En esta misma hoja se dieron a conocer las instrucciones generales, dónde se mencionaba que en cada par los problemas eran similares y se enfatizaba la dirección del mapeo. Es decir, si se buscaba que el alumno estableciera relaciones entre el problema base y el problema meta; las instrucciones recalcaban que los sujetos u objetos del primer problema correspondían a los sujetos u objetos del segundo. Sin embargo, si se buscaba el efecto contrario; las instrucciones señalaban que los elementos del problema meta se relacionaban con los del problema base.
- En la segunda hoja se encontraba el problema base con su explicación y solución.
- En la tercera hoja, se enunciaba el problema meta y se presentaron cinco preguntas que permitían realizar el mapeo de un problema a otro. Estas fueron elaboradas para enfatizar la dirección del mapeo ya fuera del problema resuelto al problema sin resolver, o viceversa.
- En la cuarta hoja se le pedía a los participantes que resolvieran el problema meta.

Y así sucesivamente para los cuatro pares de problemas.

Tabla 2

Problemas utilizados en el experimento 1

Primer par

EDADES	DINERO
<p>La suma de las edades de David, Tomás y Jaime es de 34. David es tres años mayor que Jaime y Tomás es cinco años menor que Jaime. ¿Cuál es la edad de los tres?</p>	<p>Halley tiene el doble de dinero de Nadine. Nadine tiene \$11.00 más que Sandra. Si entre todas tienen \$357.00, ¿Cuánto dinero tiene cada una?</p>

Segundo par

BOTE	AVIÓN
<p>Un bote que navega a favor de la corriente recorre 15 km en hora y media. El mismo bote navega contra corriente, y recorre 12 km en dos horas. ¿Cuál es la velocidad del bote cuando navega a favor y en contra de la corriente?</p>	<p>Una aerolínea vuela de Podunk a Swampville en 5 horas a favor del viento. El vuelo de regreso, en contra del viento, toma 6 horas. Podunk está a 5550 km de distancia de Swampville. ¿Cuál es la velocidad del avión y cuál es la velocidad del viento?</p>

Tercer par

ONZAS	PESO
<p>Una enfermera mezcla una solución de ácido bórico al 6%, con otra solución de ácido bórico al 12%. ¿Cuántas onzas de cada solución necesita para hacer 4.5 onzas de solución de ácido bórico al 8%?</p>	<p>Un abarrotero mezcla cacahuates que cuestan \$1.65 la libra y almendras que cuestan \$2.10 la libra. ¿Cuántas libras necesita de cada ingrediente para tener 30 libras de mezcla que cuesten \$1.83 la libra?</p>

Cuarto par

GRANJERO	VESTIDO
<p>Un granjero quiere construir una cerca para que sus pollos no se dispersen. La cerca tendría una forma rectangular. Planea utilizar dos tipos de materiales, para los lados más cortos utilizaría madera y para los más largos alambre. La madera le cuesta \$5 el metro y el alambre \$3 el metro. El perímetro de la cerca sería de 30 metros y piensa gastar \$100 en material. ¿Cuánto necesita de madera y cuánto necesita de alambre?</p>	<p>María fue a la tienda para comprar tela y hacerse un vestido. Ella quiere que el vestido tenga dos colores, azul y blanco. María solo quiere gastar \$50 en la tela. La tela blanca cuesta \$2 la yarda y la tela azul cuesta \$4 la yarda. María necesita 15 yardas en total para completar el vestido. ¿Cuánto necesita de tela blanca y cuánto necesita de tela azul?</p>

Procedimiento

Los participantes fueron evaluados en grupos pequeños (de uno a cuatro alumnos por grupo). Tenían una hora para resolver los cuatro pares de problemas. En cada par tenían que leer el problema base y prestar atención a la explicación. Posteriormente, los alumnos tenían que leer el problema meta, compararlo con el problema base y resolverlo. La comparación se hacía a través de las preguntas de mapeo. Se les permitía revisar el problema base las veces que consideraran necesarias para resolver las preguntas, sin embargo no se les permitía revisarlo para la solución del problema meta.

Resultados

Hubo 10 participantes en cada condición según la dirección del mapeo. La mitad de los sujetos comparó el problema resuelto con el problema sin resolver y la otra mitad relacionó el problema sin resolver con el problema resuelto

Para evaluar la dirección del mapeo se consideró el número de respuestas correctas concernientes a las preguntas de mapeo en cada par de problemas, el número máximo de aciertos era de 5. Para medir si hubo diferencias entre una condición y otra se empleó la técnica estadística prueba de hipótesis con muestras pequeñas, con un nivel de significación de 5%, por lo que la distribución de las medias se consideró "t de student" de una cola, para muestras independientes. En la tabla 3 se resumen los resultados.

Tabla 3
Resultados del experimento 1 en la dirección del mapeo

<i>Problemas</i>		<i>Condiciones de la dirección del mapeo</i>						<i>p</i>
		<i>Resuelto - sin resolver</i>			<i>Sin resolver - resuelto</i>			
	<i>No max respuestas</i>	<i>Medias</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>n</i>	<i>Medias</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>n</i>	
<i>dinero - edades</i>	5	3.5	2.461	10	3.9	1.792	10	0.34
<i>barco - avión</i>	5	4.5	1.080	10	4.2	1.619	10	0.32
<i>peso - onzas</i>	5	4.2	0.632	10	4.3	0.675	10	0.37
<i>vestido - granjero</i>	5	4.4	0.843	10	3.9	1.595	10	0.20

En ninguno de los cuatro pares de problemas hubo diferencias significativas en la dirección del mapeo.

Con relación a la solución de los problemas, se evaluó si el alumno había planteado correctamente la(s) ecuación(es) y si había llegado a la(s) solución(es); se le dio un puntaje de "1" por cada ecuación y por cada respuesta correcta. Por ejemplo, en el par de problemas "dinero – edades" debido a que se tenían que plantear tres ecuaciones y se esperaban tres respuestas, la puntuación máxima fue de 6 aciertos. Con relación al par de problemas "peso – onzas" la puntuación máxima fue de 3 aciertos y en los otros dos pares de problemas, la puntuación máxima fue de 4: dos puntos por el planteamiento correcto de las ecuaciones y los otros dos por sus soluciones.

Tabla 4
Resultados del Experimento 1 en el planteamiento y solución de los problemas

<i>Problemas</i>		<i>Dirección del mapeo</i>						
		<i>Resuelto - sin resolver</i>			<i>Sin resolver – resuelto</i>			
	No. Max. respuestas	Medias	Desviación Estándar	n	Medias	Desviación Estándar	N	p
dinero - edades	6	4.7	1.889	10	5.5	1.581	10	0.16
barco - avión	4	2.7	1.567	10	3.3	0.949	10	0.15
peso - onzas	3	2.0	1.155	10	0.8	0.919	10	0.01
vestido - granjero	4	3.6	1.200	10	3.8	0.600	10	0.32

En los pares de problemas "dinero – edades", "barco – avión" y "vestido – granjero" no hubo diferencias significativas. Solamente las hubo en el par de problemas "peso – onzas".

Con base en estos resultados, no se sostiene la hipótesis de que la dirección del mapeo es más precisa cuando se compara la situación base con relación a la meta, que viceversa. Es decir, no existen diferencias en la comparación del problema resuelto con el problema sin resolver y en la condición contraria. Tampoco hubo diferencias en la solución de los problemas, salvo en el par "peso – onzas".

Cabe recalcar que las medias que se obtuvieron en la dirección del mapeo fueron muy altas, lo que indica que se cometieron muy pocos errores en la realización de esta tarea. Lo mismo sucedió con las medias relacionadas con el planteamiento y solución de las ecuaciones, con excepción del par de problemas "pesos – onzas". Estos resultados implican que los problemas que se aplicaron fueron sencillos para los participantes que colaboraron.

Experimento 2

Considerando la situación académica de los participantes del experimento 1, los cuales, eran alumnos de licenciatura que habían tomado clases de álgebra en la preparatoria (High School) y por ende estaban familiarizados con el material evaluado, se decidió aplicar los mismos problemas a otro tipo de población: a personas que estuvieran aprendiendo álgebra.

Este experimento tuvo como objetivo estudiar la dirección del mapeo con problemas algebraicos equivalentes y con alumnos de preparatoria que estuvieran tomando algún curso de álgebra. Para lo cual, se contó con la participación de alumnos de una preparatoria ubicada en el Este de Los Angeles.

Participantes

Los participantes de este experimento fueron 36 estudiantes que estaban estudiando el primer año de preparatoria (High School), y colaboraron en la investigación como parte de una actividad escolar. No todos los alumnos solucionaron los cuatro problemas por falta de tiempo.

Diseño y materiales

El diseño y los materiales que se emplearon fueron similares a los utilizados en el experimento 1. Las modificaciones que se realizaron se explican a continuación: El problema del "dinero" fue sustituido por el de los "resultados" el cual se refiere a los puntajes de 3 estudiantes con relación a un examen. Este cambio se hizo considerando las observaciones de Basook (1989), Stigler (1988) y Alibali et. al (1995) con relación a los datos discretos y continuos. Estos investigadores descubrieron que el mapeo de una representación continua a una discreta es más ambigua y difícil que cuando se hace en la dirección contraria. Con base en estos hallazgos se decidió emplear dos problemas equivalentes que contaran con datos discretos.

Por otro lado, en la primera página de los cuadernillos no se les preguntaron a los estudiantes cuestiones relacionadas con sus antecedentes académicos. Esto con el fin de que los ejercicios parecieran una actividad de clase.

Procedimiento

El procedimiento fue el mismo que en el experimento 1, excepto que los participantes fueron evaluados durante su clase de matemáticas por lo que sólo contaban con el tiempo propio de cada sesión (50 minutos aproximadamente).

Resultados

Para evaluar la dirección del mapeo se consideró el número de respuestas correctas concernientes a las preguntas de mapeo en cada par de problemas, el número máximo de aciertos era de 5. Para medir si hubo diferencias entre una condición y otra se empleó la técnica estadística prueba de hipótesis con muestras pequeñas con un nivel de significación de 5%, por lo que la distribución de las medias se consideró "t de student" de una cola, para muestras independientes. Los resultados se resumen en la tabla 5:

Tabla 5
Resultados del experimento 2 en la dirección del mapeo

<i>Problemas</i>		Condiciones de la dirección del mapeo						
		Resuelto- sin resolver			Sin resolver –resuelto			
	No. Max. respuestas	Medias	Desviación Estándar	n	Medias	Desviación Estándar	n	p
resultados - edades	5	3.13	1.959	15	0.33	.577	3	.014
barco - avión	5	3.00	1.803	9	1.38	2.066	8	.050
peso - onzas	5	2.86	1.355	7	0.67	1.350	15	.001
vestido - granjero	5	3.08	2.353	12	1.00	1.500	9	.016

En los cuatro pares de problemas se obtuvo una diferencia significativa en la dirección del mapeo ($p \leq .05$). Teniendo un mayor número de aciertos la condición que compara el problema resuelto con el problema sin resolver que en la condición contraria.

El hecho de que la dirección del mapeo saliera significativamente mejor en la primera condición más que en la segunda, soporta la hipótesis de que el proceso de mapeo se da con mayor precisión cuando se compara el problema base con relación al problema meta, que viceversa.

Sin embargo, cabe recalcar que en el planteamiento de las ecuaciones y la solución de los problemas no hubo diferencias significativas en ninguna de las dos condiciones (problema resuelto a problema sin resolver o viceversa). Los resultados se muestran en la tabla 6

Tabla 6

Resultados del experimento 2 en el planteamiento y solución de los problemas

Problemas		Dirección del mapeo						p
		Resuelto- sin resolver			Sin resolver –resuelto			
	No. Max Respuestas	Medias	Desviación Estándar	n	Medias	Desviación Estándar	n	
resultados - edades	6	2.60	2.131	15	0.61	1.155	3	0.07
barco - avión	4	0.89	1.764	9	1.88	1.727	8	0.13
peso - onzas	3	0.00	0.000	7	0.60	0.986	15	0.10
vestido - granjero	4	0.92	0.996	12	0.78	1.394	9	0.39

Las medias del planteamiento y solución de los cuatro pares de problemas son muy bajas, lo cual indica que los alumnos no tuvieron muchos aciertos en el desempeño de esta tarea. Es decir, muy pocos alumnos pudieron transferir la solución de un problema a otro

Experimento 3

Por otra parte, se consideró conveniente aplicar otro tipo de material a estudiantes universitarios. Se decidió administrarles problemas con mayor dificultad en el contenido, por lo que este experimento tuvo como finalidad medir la dirección del mapeo con problemas de probabilidad que involucran mapeos cruzados, en otras palabras, los objetos y las funciones están invertidos de un problema a otro. Para llevar a cabo esta tarea, se emplearon los problemas elaborados por Ross (1987) Ver tabla 7

En el experimento de Ross a un grupo de participantes se les presentaron algunos ejemplos de problemas de probabilidad para que posteriormente resolvieran otros semejantes. Un ejemplo se refería a unos mecánicos que iban a escoger el auto con el que iban a trabajar. En los problemas a resolver, que compartían los mismos elementos que el ejemplo (mecánicos y carros), en algunas ocasiones los elementos jugaban el mismo papel (los mecánicos eran los que escogían a los carros) y en otras ocasiones el papel se invertía (los carros eran asignados a los mecánicos). Es decir, en el mapeo

Sin embargo, cabe recalcar que en el planteamiento de las ecuaciones y la solución de los problemas no hubo diferencias significativas en ninguna de las dos condiciones (problema resuelto a problema sin resolver o viceversa). Los resultados se muestran en la tabla 6.

Tabla 6

Resultados del experimento 2 en el planteamiento y solución de los problemas

Problemas		Dirección del mapeo						
		Resuelto- sin resolver			Sin resolver –resuelto			
	No. Max Respuestas	Medias	Desviación Estándar	n	Medias	Desviación Estándar	n	p
resultados - edades	6	2.60	2.131	15	0.61	1.155	3	0.07
barco - avión	4	0.89	1.764	9	1.88	1.727	8	0.13
peso - onzas	3	0.00	0.000	7	0.60	0.986	15	0.10
vestido - granjero	4	0.92	0.996	12	0.78	1.394	9	0.39

Las medias del planteamiento y solución de los cuatro pares de problemas son muy bajas, lo cual indica que los alumnos no tuvieron muchos aciertos en el desempeño de esta tarea. Es decir, muy pocos alumnos pudieron transferir la solución de un problema a otro.

Experimento 3

Por otra parte, se consideró conveniente aplicar otro tipo de material a estudiantes universitarios. Se decidió administrarles problemas con mayor dificultad en el contenido, por lo que este experimento tuvo como finalidad medir la dirección del mapeo con problemas de probabilidad que involucran mapeos cruzados, en otras palabras, los objetos y las funciones están invertidos de un problema a otro. Para llevar a cabo esta tarea, se emplearon los problemas elaborados por Ross (1987). Ver tabla 7

En el experimento de Ross a un grupo de participantes se les presentaron algunos ejemplos de problemas de probabilidad para que posteriormente resolvieran otros semejantes. Un ejemplo se refería a unos mecánicos que iban a escoger el auto con el que iban a trabajar. En los problemas a resolver, que compartían los mismos elementos que el ejemplo (mecánicos y carros), en algunas ocasiones los elementos jugaban el mismo papel (los mecánicos eran los que escogían a los carros) y en otras ocasiones el papel se invertía (los carros eran asignados a los mecánicos) Es decir en el mapeo

cruzado, en el ejemplo el mecánico escoge el carro con el que trabajará y en el problema a resolver los carros son asignados a los mecánicos por los dueños. Los mapeos más precisos fueron los directos y los menos precisos fueron los cruzados, lo que conlleva un mayor y un menor rendimiento por parte de los estudiantes respectivamente.

Para el experimento 3, la dirección del mapeo se evaluó manipulando la atención de los participantes en el problema “base” –que estaba resuelto- o en el problema “meta” –que no estaba resuelto- y midiendo los cambios en las respuestas de las preguntas realizadas para evaluar las correspondencias entre ambos problemas análogos. Si a los alumnos se les pedía que compararan el problema base con el problema meta, se esperaba que se dieran relaciones más precisas en esta condición que en el caso contrario.

Asimismo, se evaluó el planteamiento de las fórmulas de probabilidad. Se esperaba que un mayor número de alumnos contestara correctamente los problemas cuando se les pedía que compararan el problema base con el problema meta.

Tabla 7

Traducción de los problemas de Ross

Permutaciones	<p>a) El departamento de suministros de IBM tiene que asegurarse que cada científico tenga una computadora. En la actualidad, existen 11 computadoras y 8 científicos. Los científicos escogen al azar su computadora, pero lo hacen en orden alfabético. ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 primeros científicos por orden alfabético, obtengan el primero, el segundo y el tercer número seriado comenzando desde el más pequeño, respectivamente en sus computadoras?</p> <p>b) La preparatoria de Southside tiene una clase vocacional de mecánica, en donde los estudiantes aprenden a reparar carros. En una clase hay 15 estudiantes y 18 carros que requieren ser reparados. Los carros son asignados a los estudiantes en orden de la severidad de los daños (el carro en más mala condición va primero y así sucesivamente), pero el estudiante a trabajar en el carro es escogido al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 carros en la peor condición sean reparados por los 6 estudiantes con mayor calificación en su último examen de mecánica, de acuerdo a sus calificaciones (por ejemplo el alumno con la calificación mas alta con el carro en la peor condición, etc)?</p>
Combinaciones	<p>a) El equipo Nashville Gnats de béisbol cuenta con 20 jugadores que van a viajar en autobús para jugar en un pueblo cercano. El autobús cuenta con 25 asientos. Para evitar discusiones, el entrenador escogerá al azar el asiento para cada uno de los 20 jugadores. ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 pitchers se sienten en los primeros 6 asientos?</p> <p>b) La guardería "Happy House" cuenta con 21 ganchos en el pasillo para colgar los abrigos de sus 17 estudiantes, cada estudiante utiliza un gancho. Los ganchos se asignaron comenzando con el más cercano a la puerta del salón. ¿Cuál es la probabilidad de que los 7 ganchos más cercanos al salón de clases sean asignados a los 7 estudiantes más altos?</p>
Probabilidad	<p>a) La compañía Brite-Lite Bulb fabrica bulbos especiales. Los fósforos que se encienden con mayor rapidez son frágiles. Así es que 2/7 de ellos trabajan y 5/7 de ellos no. Juan necesita mostrar un bulbo a un próximo cliente, por lo que tiene que probar los bulbos hasta que encuentre uno que funcione. ¿Cuál es la probabilidad de que el bulbo que falle por primera vez sea el tercero que intente?</p> <p>b) La pizzería Guido es una de las más famosas en la fabricación de pan duro. Guido es muy quisquilloso en la elaboración del pan. De todas las pizzas que se fabrican 2/7 son aceptables y 5/7 no lo son. Una noche, un cliente estaba esperando una pizza pero no se la daban hasta que Guido encontrara una aceptable. ¿Cuál es la probabilidad de que la primer pizza aceptable sea la tercera que Guido examine?</p>
Al menos uno	<p>a) En respuesta a las quejas de los clientes, una compañía de teléfonos hace explícito que 7/9 de los teléfonos públicos funcionan en cualquier momento y que solo 2/9 no funcionan. Para checar esto, un grupo de consumidores escoge al azar 11 teléfonos públicos. Si la compañía de teléfonos está en lo correcto. ¿Cuál es la probabilidad de que uno o más de estos teléfonos esté descompuesto?</p> <p>b) Un nuevo restaurante polinesio está teniendo dificultades ya que no todas, de las tres hornillas, de su estufa están trabajando. Cada hornilla tiene una probabilidad de 3/8 de que funcione y 5/8 de que no lo haga. Ninguna de las 3 hornillas tienen un efecto en la probabilidad de que las otras hornillas funcionen. Una noche, un crítico de restaurantes visitará el lugar y los dueños están nerviosos de que ninguna hornilla trabaje. ¿Cuál es la probabilidad que al menos una de las hornillas trabaje?</p>

Participantes

Los participantes del experimento 3 fueron 30 alumnos de la carrera de psicología de la UCLA que participaron para obtener créditos en alguna materia introductoria.

Diseño

Cada alumno recibió cuatro pares de problemas de probabilidad, isomórficos entre sí. En cada par se definía un principio de probabilidad - permutaciones, combinaciones, probabilidad y al menos uno. Se explicaba su fórmula y se enunciaba un problema que el alumno tenía que resolver contestando algunas preguntas y aplicando lo que se le había explicado. Una vez hecho esto, se mostraban la solución del ejemplo y las respuestas de las preguntas. En este caso, el ejemplo desempeñaba el papel de problema "base"

Posteriormente, se presentaba un segundo problema (el problema meta) y se le pedía a los participantes que compararan ambos problemas a través de cinco preguntas, de las cuales tres se referían a mapeos cruzados y dos a mapeos directos. Para este proceso se establecieron 4 condiciones:

1. *el orden de presentación*, que consistía en considerar la condición de comparación que se presentaba: problema resuelto – problema sin resolver y problema sin resolver – problema resuelto o viceversa.
2. *el orden entre problemas*, primero se presentaban los problemas de "permutaciones" y "combinaciones" o los de "probabilidad" y "al menos uno", o en sentido opuesto.
3. *el orden intra problemas*, que consideraba el orden entre los problemas de cada par,
4. *la dirección*, la comparación entre los problemas iba del ejemplo al problema sin resolver o viceversa.

Por último se les pedía a los alumnos que aplicaran la fórmula aprendida en el problema meta. Cabe recalcar que sólo tenían que aplicar los valores pertinentes en cada fórmula para evitar que se llevaran a cabo operaciones aritméticas.

Materiales

Los problemas que se utilizaron son los de la tabla 7. Se elaboraron 8 tipos de cuadernillos para considerar la dirección del mapeo y el orden de los problemas base y meta. Los problemas de "permutaciones" y "combinaciones" se medían de manera conjunta, es decir, si las preguntas del mapeo en los problemas de "permutaciones" iban

del ejemplo al problema sin resolver, entonces se conservaba esta dirección en las preguntas de los problemas de “combinaciones” y esta restricción también se aplicó en los otros dos principios.

Su estructura era similar a la empleada por Ross (1987):

- Una primera hoja preguntaba información sobre los antecedentes académicos de los alumnos en el área de matemáticas y daba a conocer las instrucciones generales dónde se enfatizaba la dirección del mapeo. Es decir, sí se buscaba que el alumno estableciera relaciones entre el problema base y el problema meta; las instrucciones recalcan que los sujetos u objetos del ejemplo correspondían a los sujetos u objetos del problema sin resolver. Sin embargo, sí se buscaba el efecto contrario; las instrucciones señalaban que los elementos del problema meta se relacionaban con los del problema base. Asimismo, en las instrucciones se les proporcionaba a los alumnos un ejemplo de dos problemas isomórficos con algunas preguntas de mapeo. Esto se hizo con la finalidad de facilitar la comprensión de las tareas a realizar.
- Una segunda hoja explicaba de manera general algunos conceptos básicos de probabilidad, para que los alumnos se familiarizaran con ellos ya que se iban a utilizar en los cuatro pares de problemas.
- Posteriormente, para cada par de problemas se contaba con una hoja donde se explicaba el principio a estudiar, la fórmula a aplicar y el ejercicio a intentar.
- Otra hoja contaba con la respuesta del ejemplo y la explicación de cómo se había llegado a su solución.
- En la hoja subsecuente, se mostraba un segundo problema acompañado con una serie de preguntas que permitían establecer relaciones entre ambos problemas.
- En la última hoja se encontraba el problema meta, al cual se le debía aplicar la fórmula aprendida con el ejemplo.

Procedimiento

Los participantes fueron evaluados en grupos pequeños (de uno a cuatro alumnos por grupo). Tenían una hora para resolver los cuatro pares de problemas. Para cada par debían leer el problema “base” y prestar atención al procedimiento que se explicaba para llegar a su solución. Después se les presentaba un segundo problema análogo, el cual, tenían que leer, comparar con el ejemplo y por último resolverlo. La comparación se hacía a través de las preguntas de mapeo y se les permitía a los alumnos revisar el problema

resuelto para contestar dichas preguntas. Sin embargo esta acción no era permitida para resolver el problema meta. En dos pares de problemas la dirección del mapeo era del problema base al problema meta y en los otros dos pares se estudiaba la dirección contraria. La variable independiente del experimento fue la dirección del mapeo.

Resultados

Se realizó un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y dirección). Con base en los resultados, se obtuvo que no existe diferencia significativa en la dirección del mapeo $F(1,22)=0.195$ $MSE=4.27$, $p>0.05$. No hubo diferencia significativa en la interacción de los 4 efectos $F(1,22)=1.39$, $MSE=4.27$, $p>0.05$. Tampoco hubo en el orden de presentación $F(1,22)=0.165$ $MSE=5.13$, $p>0.05$, ni en el orden entre e intra problemas, $F(1,22)=1.66$ $MSE=5.13$, $p>0.05$ y $F(1,22)=0.38$ $MSE=5.13$, $p>0.05$ respectivamente.

Sin embargo, sí se encontró diferencia significativa en la interacción orden de presentación y orden intra problemas $F(1,22)=7.69$ $MSE=5.13$, $p=0.01$. También, se encontró diferencia en la interacción de las condiciones: orden de presentación, orden entre problemas y dirección $F(1,22)=36.29$ $MSE=4.27$, $p<0.05$.

Con relación al planteamiento de las ecuaciones, no se encontró diferencia entre las dos condiciones: del problema resuelto al problema sin resolver y viceversa, $F(1,22)=0.95$ $MSE=0.60$, $p>0.05$. Aunque sí se encontró diferencia significativa en la interacción orden de presentación y orden entre problemas $F(1,22)=7.10$ $MSE=0.50$, $p=0.01$. También, se encontró diferencia en la interacción de las condiciones: orden de presentación, orden entre problemas y dirección $F(1,22)=14.92$ $MSE=0.60$, $p<0.05$.

Haciendo un análisis minucioso de las medias (ver tablas 8 y 9) se observó que el rendimiento de los alumnos fue muy pobre. Las medias en la dirección del mapeo son bajas. Lo mismo sucede con la solución de los problemas.

Tabla 8
Medias del experimento 3 en la dirección del mapeo

No. de mapeos correctos según las condiciones de la dirección					
Prob. resuelto- sin resolver			Prob. sin resolver -resuelto		
Media	No. Max. respuestas	n	Media	No. Max. respuestas	n
4.36	10	30	4.6	10	30

Tabla 9
Medias del experimento 3 en el planteamiento de fórmulas

Planteamiento de fórmulas según las condiciones de la dirección del mapeo					
Prob. resuelto- sin resolver			Probl. sin resolver -resuelto		
Media	No. Max. respuestas	n	Media	No. Max. respuestas	n
0.66	10	30	0.83	10	30

Con base en estos resultados se observa que los participantes no entendían las tareas a realizar, ni cómo plantear las ecuaciones.

Por otro lado, para conocer con mayor detalle los resultados obtenidos en la solución de los problemas se empleó la prueba no paramétrica de McNemar, para probar los efectos de las condiciones de los problemas (comparación del problema resuelto al problema sin resolver o viceversa) en su solución. En el cuadro de cuatro entradas se obtuvo lo siguiente:

Respuestas en la condición de comparación problema resuelto – problema sin resolver	Respuestas en la condición de comparación problema sin resolver – problema resuelto			
	0		1	
0	14	a	9	b
1	7	c	0	d

0= respuesta incorrecta
1= respuesta correcta

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C, las cuales representan el número de personas que cambiaron su patrón de conducta en la solución de los problemas en alguna

de las dos direcciones evaluadas. $X^2 (1) = 0.06$ $p > 0.05$. Sin embargo, si hubo diferencias significativas en las clasificaciones A y D $X^2 (1) = 12.07$ $p < 0.05$, lo cual indica que hubo más personas ($n=14$) que no supieron solucionar los dos problemas, a personas que sí supieron como solucionar ambos ($n=0$).

Como consecuencia del bajo rendimiento de los alumnos en este experimento, se decidió hacer otro estudio dónde se explicara con mayor detalle las tareas a realizar y las explicaciones de los principios de probabilidad.

Experimento 4

Este experimento se hizo como una extensión del experimento 3. Para su elaboración se decidió reducir el número de problemas, en este caso se aplicaron los pares de problemas de "permutaciones" y los de "al menos uno".

Con base en lo planteado por Holyoak y Thagard (1985) los cuales, consideran que es indispensable hacer explícitas, las correspondencias estructurales de los mapeos sistemáticos, se consideró necesario ampliar el contenido informativo del material. Para facilitar la comprensión de los conceptos de probabilidad, se complementaron los materiales brindando mayor información explicativa de cada uno de los principios. Con lo cual se buscaba que los alumnos fijaran su atención en la información relevante. También se decidió proporcionarles a los sujetos un ejemplo sobre mapeos cruzados para que entendieran mejor la tarea a realizar.

Participantes.

Los participantes de este experimento fueron 72 alumnos de licenciatura de la UCLA que colaboraron en la investigación para obtener créditos en una materia de psicología.

Diseño

El diseño fue similar al del experimento 3. La diferencia recae en que sólo se utilizaron dos pares de problemas: "permutaciones" y "al menos uno". Asimismo, para ampliar la información que se les proporcionó a los alumnos se extendió la definición de cada uno de los principios, se presentó la fórmula a utilizar, se explicó paso a paso el proceso para la solución de un problema y se les presentaba un ejemplo, que cada uno de los alumnos

de las dos direcciones evaluadas. $X^2(1) = 0.06$ $p > 0.05$ Sin embargo, si hubo diferencias significativas en las clasificaciones A y D $X^2(1) = 12.07$ $p < 0.05$, lo cual indica que hubo más personas ($n=14$) que no supieron solucionar los dos problemas, a personas que sí supieron como solucionar ambos ($n=0$).

Como consecuencia del bajo rendimiento de los alumnos en este experimento, se decidió hacer otro estudio dónde se explicara con mayor detalle las tareas a realizar y las explicaciones de los principios de probabilidad.

Experimento 4

Este experimento se hizo como una extensión del experimento 3. Para su elaboración se decidió reducir el número de problemas, en este caso se aplicaron los pares de problemas de "permutaciones" y los de "al menos uno".

Con base en lo planteado por Holyoak y Thagard (1985) los cuales, consideran que es indispensable hacer explícitas, las correspondencias estructurales de los mapeos sistemáticos, se consideró necesario ampliar el contenido informativo del material. Para facilitar la comprensión de los conceptos de probabilidad, se complementaron los materiales brindando mayor información explicativa de cada uno de los principios. Con lo cual se buscaba que los alumnos fijaran su atención en la información relevante. También se decidió proporcionarles a los sujetos un ejemplo sobre mapeos cruzados para que entendieran mejor la tarea a realizar.

Participantes.

Los participantes de este experimento fueron 72 alumnos de licenciatura de la UCLA que colaboraron en la investigación para obtener créditos en una materia de psicología.

Diseño

El diseño fue similar al del experimento 3. La diferencia recae en que sólo se utilizaron dos pares de problemas: "permutaciones" y "al menos uno". Asimismo, para ampliar la información que se les proporcionó a los alumnos se extendió la definición de cada uno de los principios, se presentó la fórmula a utilizar, se explicó paso a paso el proceso para la solución de un problema y se les presentaba un ejemplo, que cada uno de los alumnos

tenía que resolver. Posteriormente, se les proporcionaba la solución del ejemplo y se les brindaba una explicación de cómo se había llegado a la solución.

Para la elaboración de este experimento se consideraron 4 condiciones:

5. *el orden de presentación*, que consistía en considerar la condición de comparación que se presentaba: problema resuelto – problema sin resolver y problema sin resolver – problema resuelto o viceversa.
6. *el orden entre problemas*, primero se presentaban los problemas de “permutaciones” o los de “al menos uno”, o en sentido opuesto.
7. *el orden intra problemas*, que consideraba el orden entre los problemas de cada par,
8. *la dirección*, la comparación entre los problemas iba del ejemplo al problema sin resolver o viceversa.

Materiales

Se elaboraron 8 tipos de cuadernillos para cumplir con las 4 condiciones arriba mencionadas. Cada uno de ellos contenía la siguiente información:

- La primera hoja contenía preguntas que reflejaban los antecedentes académicos en el área de matemáticas de los participantes. También, en esta hoja se daban a conocer las instrucciones generales en las que se presentaba un ejemplo que cada alumno tenía que resolver antes de continuar leyendo el resto del material. Este ejemplo mostraba cómo se llevaban a cabo los mapeos cruzados.
- En la segunda hoja se enunciaba el principio de probabilidad, se explicaba su fórmula y se presentaba un ejemplo que el alumno tenía que intentar resolver.
- La tercera hoja contenía la respuesta del problema que había servido de ejemplo y se explicaba paso a paso como se había llegado a su solución.
- La cuarta hoja solamente estaba conformada por un segundo problema que el participante tenía que leer.
- En la quinta hoja se presentaban los dos problemas (el ejemplo y el problema sin resolver) encerrados en un cuadro y se encontraban uno a lado del otro. Debajo de ellos se encontraban las preguntas de mapeo.
- En la sexta hoja se le pedía a los participantes que resolvieran el problema sin resolver, evitando ver el ejemplo.

Y se repetía el mismo procedimiento para el segundo par de problemas.

Procedimiento

El procedimiento fue similar al que se utilizó en el experimento 3. La única diferencia estriba en que sólo se utilizaron dos pares de problemas. Asimismo, se les presentó a los sujetos un ejemplo de mapeos cruzados en las instrucciones, el cual tenían que resolver antes de continuar el material. En caso de que no lo contestaran correctamente el experimentador les hacía preguntas que les permitieran prestar atención a las relaciones esenciales para la solución de los problemas y se dieran cuenta de sus errores

Resultados

Se realizó un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y dirección) Con base en los datos, se observó que no hubo diferencia significativa en la dirección del mapeo, $F(1,64)=1.19$ $MSE=1.70$, $p>.05$. No hubo diferencia significativa en la interacción de los 4 efectos $F(1,64)=1.4$. $MSE=1.50$ $p>.05$. Tampoco hubo diferencia significativa en el orden de la presentación, ni en el orden entre e intra problemas: $F(1,64)<1$ en los dos primeros efectos y $F(1,64)=1.4$, $MSE=3.77$, $p>.05$ en el último efecto.

Si se considera la precisión de las soluciones, tampoco hay diferencia significativa entre las dos condiciones: del problema resuelto al problema sin resolver (48%) y en el caso contrario (38%); $F(1,64)=1.67$, $MSE=.14$, $p>.05$.

En resumen, los resultados de este experimento reflejan que no hubo diferencias significativas en las dos condiciones que se midieron con respecto a la dirección del mapeo y en la solución de problemas.

Con relación a los resultados que se obtuvieron en la prueba no paramétrica de McNemar se observa lo siguiente.

Respuestas en la condición de comparación problema resuelto – problema sin resolver	Respuestas en la condición de comparación problema sin resolver – problema resuelto	
	0	1
0	29 a	9 b
1	15 c	19 d

0= respuesta incorrecta
1= respuesta correcta

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C, las cuales representan el número de personas que cambiaron su patrón de conducta en la solución de los problemas en alguna de las dos direcciones evaluadas $\chi^2(1) = 1.69$ $p > 0.05$. Ni tampoco las hubo en las clasificaciones A y D $\chi^2(1) = 1.04$ $p < 0.05$.

Sin embargo, cabe recalcar que el rendimiento de los alumnos fue mejor en este experimento que en el experimento anterior. Haciendo un análisis de varianza para comparar el número de respuestas correctas en las preguntas de mapeo, se observó que en los problemas de "permutaciones" sí existen diferencias significativas entre el experimento 3 y 4: $F(1,100) = 5.72$, $MSE = 2.65$ $p < 0.05$, así como también existen diferencias significativas en el par de problemas de "al menos uno" $F(1,100) = 5.58$, $MSE = 2.49$ $p < 0.05$. Estos resultados indican que el ejemplo que se les proporcionó a los alumnos en las instrucciones facilitó la comprensión de los mapeos cruzados, lo cual incrementó el rendimiento de los alumnos en la comparación de los dos problemas análogos.

Experimento 5

Para continuar con esta investigación se decidió hacer otros dos experimentos en la Ciudad de México. Atendiendo que en los experimentos 3 y 4 se explicaron los problemas utilizando el procedimiento empleado por Ross (1987), el cual consiste en definir los principios de probabilidad, explicar las fórmulas que se emplean y detallar paso a paso el método a seguir para la solución de las mismas; se consideró pertinente emplear en su lugar el procedimiento manejado en el experimento 2, en donde a través de un ejemplo se describe el método que se aplica en un problema en particular. Reed y Bolstad (1991) descubrieron que los alumnos tenían un mejor rendimiento cuando hacían uso de los ejemplos para aprender a solucionar problemas.

Con base en estas observaciones, se realizó el experimento 5 cuya finalidad fue medir la dirección del mapeo con dos pares de problemas de probabilidad, en donde cada problema base se explicaba a través de un ejemplo. Para lograr dicho objetivo se excluyó la explicación del principio pertinente y de su fórmula, para dar lugar a la descripción detallada de cómo llegar a la solución del problema.

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C, las cuales representan el número de personas que cambiaron su patrón de conducta en la solución de los problemas en alguna de las dos direcciones evaluadas $\chi^2 (1) = 1.69$ $p > 0.05$. Ni tampoco las hubo en las clasificaciones A y D $\chi^2 (1) = 1.04$ $p < 0.05$.

Sin embargo, cabe recalcar que el rendimiento de los alumnos fue mejor en este experimento que en el experimento anterior. Haciendo un análisis de varianza para comparar el número de respuestas correctas en las preguntas de mapeo, se observó que en los problemas de "permutaciones" sí existen diferencias significativas entre el experimento 3 y 4: $F(1,100) = 5.72$, $MSE = 2.65$ $p < 0.05$, así como también existen diferencias significativas en el par de problemas de "al menos uno" $F(1,100) = 5.58$, $MSE = 2.49$ $p < 0.05$. Estos resultados indican que el ejemplo que se les proporcionó a los alumnos en las instrucciones facilitó la comprensión de los mapeos cruzados, lo cual incrementó el rendimiento de los alumnos en la comparación de los dos problemas análogos

Experimento 5

Para continuar con esta investigación se decidió hacer otros dos experimentos en la Ciudad de México. Atendiendo que en los experimentos 3 y 4 se explicaron los problemas utilizando el procedimiento empleado por Ross (1987), el cual consiste en definir los principios de probabilidad, explicar las fórmulas que se emplean y detallar paso a paso el método a seguir para la solución de las mismas; se consideró pertinente emplear en su lugar el procedimiento manejado en el experimento 2, en donde a través de un ejemplo se describe el método que se aplica en un problema en particular. Reed y Bolstad (1991) descubrieron que los alumnos tenían un mejor rendimiento cuando hacían uso de los ejemplos para aprender a solucionar problemas.

Con base en estas observaciones, se realizó el experimento 5 cuya finalidad fue medir la dirección del mapeo con dos pares de problemas de probabilidad, en donde cada problema base se explicaba a través de un ejemplo. Para lograr dicho objetivo se excluyó la explicación del principio pertinente y de su fórmula, para dar lugar a la descripción detallada de cómo llegar a la solución del problema.

En este experimento se utilizaron dos pares de problemas de probabilidad elaborados por Ross (1987); los que se refieren al principio de "probabilidad" y al principio de "al menos uno" (ver tabla 7).

Como en los experimentos anteriores, la dirección del mapeo se evaluó manipulando la atención de los participantes en el problema "base" –que estaba resuelto- o en el problema "meta" –que no estaba resuelto- y midiendo los cambios en las respuestas de las preguntas realizadas para evaluar las correspondencias entre ambos problemas análogos. Si a los alumnos se les pedía que compararan el problema base con el problema meta, se esperaba que se dieran relaciones más precisas en esta condición que en el caso contrario.

Participantes

Los participantes de este experimento fueron 82 estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Psicología de la Universidad Nacional Autónoma de México, que colaboraron en la investigación como parte de una actividad de clase

Diseño

Dos pares de problemas de probabilidad se le presentaron a los participantes. En cada par el problema "base" estaba resuelto, mientras que el "meta" estaba sin resolver. A diferencia de los experimentos 3 y 4, en éste no se definía el principio a utilizar, ni se daba a conocer la fórmula; por el contrario únicamente se detallaba paso a paso el procedimiento a seguir para la solución del problema "base".

Los alumnos tenían que comparar ambos problemas a través de cinco preguntas, de las cuales tres se referían a mapeos cruzados y dos a mapeos directos. En la elaboración de las preguntas se consideraron dos condiciones: la comparación del problema "meta" con respecto al "base" y la comparación contraria. Estas condiciones variaron intra sujetos. Por último, los participantes tenían que resolver el problema "meta".

Cabe recalcar que para este experimento, como en el experimento 4, se consideraron el orden de presentación y el orden entre e intra problemas. Estas condiciones variaron entre e intra sujetos.

Materiales

Cada cuadernillo constaba de una primera hoja dónde se le pedía a cada participante que describiera sus antecedentes académicos. Asimismo, en esta hoja se encontraban las instrucciones generales. Para cada par de problemas se contaba con una hoja donde se enunciaba el problema “base” y se explicaba paso a paso su solución. Otra hoja contaba únicamente con el problema meta, que cada participante tenía que leer. En otra hoja se enunciaban ambos problemas y se daban a conocer las preguntas de mapeo y en una última hoja se le pedía a los alumnos que solucionaran el problema sin resolver.

Procedimiento

Los participantes fueron evaluados en grupos de 15-20 alumnos. Tenían una hora para resolver los dos pares de problemas. Para cada par debían leer el problema “base” y prestar atención al procedimiento que se explicaba para llegar a su solución. Después se les presentaba un segundo problema análogo, el cual, tenían que leer, comparar con el ejemplo y por último resolverlo. La comparación se hacía a través de las preguntas de mapeo y se les permitía a los alumnos revisar el problema resuelto para contestar dichas preguntas. Sin embargo, esta acción no era permitida para resolver el problema meta.

La variable independiente de este experimento era la dirección del mapeo.

Resultados

Un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y dirección) se realizó para evaluar la dirección del mapeo. No hubo diferencias significativas en la dirección del mapeo, $F(1,73) = 0.005$ $MSE = 0.42$, $p > .05$. Tampoco las hubo en el orden de presentación, $F(1,73) = 2.76$ $MSE = 2.70$, $p > .05$; ni en el orden entre e intra problemas $F(1,73) = 0.01$ $MSE = 2.70$, $p > .05$; $F(1,73) = 0.04$ $MSE = 2.70$ $p > .05$, respectivamente.

Sin embargo, si hubo diferencias significativas en la interacción del orden de presentación y el orden intra problemas $F(1,73) = 5.26$ $MSE = 2.69$, $p < .05$. Asimismo, las hubo en la interacción del orden intra problemas y la dirección del mapeo $F(1,73) = 16.86$ $MSE = 0.42$, $p < .05$. Estos resultados indican que cuando se tiene el siguiente orden entre los problemas de cada par: “teléfonos – restaurante” y “focos – pizza”, se obtienen un mayor número de contestaciones correctas cuando se presenta primero la comparación

"problema sin resolver → problema resuelto" ($x=2.88$) que cuando se presenta esta condición en segunda instancia ($x=1.85$).

Con relación a la solución de los problemas se hizo también un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y solución). No hubo diferencias significativas en la solución de los problemas, $F(1,73)=1.51$ $MSE=0.19$, $p>.05$. Tampoco las hubo en el orden de presentación, $F(1,73)=0.02$ $MSE=0.25$, $p>.05$; ni en el orden intra problemas $F(1,73)=1.48$ $MSE=0.25$, $p>.05$; pero sí las hubo en el orden entre problemas $F(1,73)=5.23$ $MSE=0.25$ $p<.05$. También hubo diferencias significativas en la interacción del orden de presentación y en la solución de los problemas según la condición en la que se encontraban - problema resuelto o problema sin resolver - $F(1,73)=4.17$ $MSE=0.19$, $p<.05$.

Con base en estos resultados se observó que cuando se pidió que en primera instancia se compara el problema resuelto con el problema sin resolver, se obtuvieron diferencias significativas en la solución de los problemas. Llegando más participantes a la solución correcta cuando la comparación se hacía del problema base al problema meta ($x=.45$) que cuando se hacía en el sentido opuesto ($x=.22$).

Para conocer con mayor detalle los resultados obtenidos en la solución de los problemas se empleó la prueba no paramétrica de McNemar, para probar los efectos de las condiciones de los problemas (comparación del problema resuelto al problema sin resolver o viceversa) en su solución. En el cuadro de cuatro entradas se obtuvo lo siguiente;

Respuestas en la condición de comparación problema resuelto – problema sin resolver	Respuestas en la condición de comparación problema sin resolver – problema resuelto	
	0	1
0	37 a	12 b
1	20 c	12 d

0= respuesta incorrecta
1= respuesta correcta

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C, las cuales representan el número de personas que cambiaron su patrón de conducta en la solución de los problemas en alguna de las dos direcciones evaluadas. $X^2(1) = 1.53, p > 0.05$.

Experimento 6

Para extender los resultados del experimento 2, dónde se trabajó con alumnos de preparatoria, se realizó este experimento en el Colegio de Ciencias y Humanidades de Azcapotzalco. Su finalidad, además de conocer la direccionalidad del proceso de mapeo, consistió en medir el proceso de transferencia en la solución de dos problemas análogos. Para lo cual, se le proporcionó a los alumnos dos problemas algebraicos equivalentes a los pares de problemas con los que iban a trabajar posteriormente. Dichos problemas tenían que ser resueltos por los alumnos sin ningún apoyo, y una vez desempeñada esta tarea tenían que seguir con el procedimiento utilizado en los experimentos anteriores.

Participantes

Los participantes del experimento fueron 40 estudiantes del segundo semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) Azcapotzalco, que participaron como parte de una actividad escolar.

Diseño

El diseño fue similar al del experimento 5. La única diferencia consiste en que en éste se les presentaron a los alumnos dos problemas que tenían que resolver por sí solos antes de seguir con el método del experimento anterior; es decir solamente se enunciaban los problemas sin ningún tipo de apoyo para que los resolvieran. Esto se hizo con la finalidad de conocer si había transferencia en la solución de dos problemas análogos.

Materiales

Los problemas que se utilizaron en este experimento fueron los de "avión - bote" y "peso - onzas" que se emplearon en los experimentos 1 y 2 (ver tabla 2).

Los cuadernillos que se elaboraron constaban de una primera hoja dónde se le pedía a cada participante que describiera sus antecedentes académicos. Asimismo en esta hoja se encontraban las instrucciones generales. Para cada par de problemas se contaba con

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C, las cuales representan el número de personas que cambiaron su patrón de conducta en la solución de los problemas en alguna de las dos direcciones evaluadas. $\chi^2 (1) = 1.53, p > 0.05$.

Experimento 6

Para extender los resultados del experimento 2, dónde se trabajó con alumnos de preparatoria, se realizó este experimento en el Colegio de Ciencias y Humanidades de Azcapotzalco. Su finalidad, además de conocer la direccionalidad del proceso de mapeo, consistió en medir el proceso de transferencia en la solución de dos problemas análogos. Para lo cual, se le proporcionó a los alumnos dos problemas algebraicos equivalentes a los pares de problemas con los que iban a trabajar posteriormente. Dichos problemas tenían que ser resueltos por los alumnos sin ningún apoyo, y una vez desempeñada esta tarea tenían que seguir con el procedimiento utilizado en los experimentos anteriores.

Participantes

Los participantes del experimento fueron 40 estudiantes del segundo semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) Azcapotzalco, que participaron como parte de una actividad escolar.

Diseño

El diseño fue similar al del experimento 5. La única diferencia consiste en que en éste se les presentaron a los alumnos dos problemas que tenían que resolver por sí solos antes de seguir con el método del experimento anterior; es decir solamente se enunciaban los problemas sin ningún tipo de apoyo para que los resolvieran. Esto se hizo con la finalidad de conocer si había transferencia en la solución de dos problemas análogos.

Materiales

Los problemas que se utilizaron en este experimento fueron los de "avión - bote" y "peso - onzas" que se emplearon en los experimentos 1 y 2 (ver tabla 2).

Los cuadernillos que se elaboraron constaban de una primera hoja dónde se le pedía a cada participante que describiera sus antecedentes académicos. Asimismo en esta hoja se encontraban las instrucciones generales. Para cada par de problemas se contaba con

una hoja donde se enunciaba el problema "base" y se explicaba paso a paso su solución. Otra hoja contaba únicamente con el problema meta, que cada participante tenía que leer. En otra hoja se enunciaban ambos problemas y se daban a conocer las preguntas de mapeo y en una última hoja se le pedía a los alumnos que solucionaran el problema sin resolver. Se hizo un contrabalanceo de cada uno de los cuadernillos.

Procedimiento

Los participantes fueron evaluados en grupos de 15-20 alumnos. Tenían una hora para resolver los dos pares de problemas. La primera tarea que tenían que desempeñar era la de resolver dos problemas algebraicos por sí solos. Tenían 15 minutos para hacerlo. Posteriormente se les presentaba un cuadernillo con dos pares de problemas algebraicos y en cada par debían leer el problema "base" y prestar atención al procedimiento que se explicaba para llegar a su solución. Después se les presentaba un segundo problema análogo, el cual, tenían que leer, comparar con el ejemplo y por último resolverlo. La comparación se hacía a través de las preguntas de mapeo y se les permitía a los alumnos revisar el problema resuelto para contestar dichas preguntas. Sin embargo, esta acción no se les permitía para resolver el problema meta. La variable independiente de este experimento fue la dirección del mapeo.

Resultados

En los dos primeros problemas que se les presentaron a los alumnos para que los solucionaran por sí solos, se obtuvo que únicamente dos de ellos pudieron desempeñar satisfactoriamente dicha tarea.

Para evaluar la dirección del mapeo se realizó un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y dirección) No hubo diferencias significativas en la dirección del mapeo, $F(1,36) = 0.49$ $MSE = 1.48$, $p > .05$. Tampoco las hubo en el orden de presentación, $F(1,36) = 1.43$ $MSE = 4.31$, $p > .05$; ni en el orden entre e intra problemas $F(1,36) = 0.67$ $MSE = 4.31$, $p > .05$; $F(1,36) = 1.87$ $MSE = 4.31$ $p > .05$, respectivamente.

Sin embargo, si hubo diferencias significativas en la interacción del orden de presentación y la dirección del mapeo $F(1,36) = 8.65$ $MSE = 1.48$, $p < .05$. Así como también en la interacción del orden entre e intra problemas y la dirección del mapeo $F(1,36) = 8.84$ $MSE = 1.48$, $p < .05$.

En la interacción del orden de presentación y dirección del mapeo se observó que en la comparación de los problemas resueltos con los problemas sin resolver, las medias del orden de presentación difieren significativamente entre sí $p < 0.05$, según el análisis de Tuckey, teniendo una media de respuestas mayor cuando se presenta primero el problema sin resolver y luego el problema resuelto ($x=3.5$) que en la condición contraria ($x=2.25$).

En la interacción del orden entre problemas, del orden intra problemas y la dirección del mapeo; un análisis de Tuckey reflejó que cuando se compararon primero los problemas sin resolver con los resueltos se tuvo un número mayor de respuestas correctas cuando el par de problemas "avión – bote" se presentaba en ese orden y era el primer par en resolverse ($x=3.86$) que cuando se presentaba en el orden "bote – avión" y era el segundo par en el cuadernillo ($x=1.91$).

Con relación a la solución de los problemas se hizo también un análisis de varianza de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (orden de presentación, orden entre problemas, orden intra problemas y solución). No hubo diferencias significativas en la solución de los problemas, $F(1,36) = 0.01$ $MSE = 0.68$, $p > .05$. Tampoco las hubo en el orden de presentación, $F(1,36) = 0.12$ $MSE = 1.33$, $p > .05$; ni en el orden entre e intra problemas $F(1,36) = 1.82$ $MSE = 1.33$, $p > .05$; $F(1,36) = 0.02$ $MSE = 1.33$ $p > .05$.

Para conocer con mayor detalle los resultados obtenidos en la solución de los problemas se empleó la prueba no paramétrica de McNemar. En el cuadro de cuatro entradas se obtuvo lo siguiente;

Respuestas en la condición de comparación problema resuelto – problema sin resolver	Respuestas en la condición de comparación problema sin resolver – problema resuelto	
	0	1
0	12 a	7 b
1	9 c	16 d

0= respuesta incorrecta
1= respuesta correcta

No hubo asociaciones en las clasificaciones B y C: $\chi^2 (1) = 0.60, p > 0.05$, lo cual indica que no hubo cambios importantes en las respuestas de los alumnos según la dirección de comparación entre ambos problemas.

Aún cuando no se encontraron diferencias significativas en la dirección del mapeo, ni tampoco en la solución de los problemas; los resultados reflejan que el proceso de mapeo sí permite la transferencia en la solución de dos problemas análogos. Esto se refleja en el hecho de que solamente dos estudiantes pudieron resolver dos problemas semejantes por sí mismos sin ningún tipo de ayuda. Mientras que el número de personas que pudieron resolver los dos pares de problemas análogos, a través del proceso de mapeo, incrementó considerablemente ($n=16$).

Discusión General

En 5 de 6 experimentos que se llevaron a cabo, se observó que no existen diferencias significativas en la dirección del mapeo. Es decir, cuando se tienen dos problemas matemáticos equivalentes o isomórficos, y uno cuenta con la explicación del método que permite llegar a la solución correcta; da lo mismo comparar el problema resuelto con el problema sin resolver, o comparar el problema sin resolver con el resuelto. Cualquier dirección permite realizar mapeos precisos.

Estos resultados son contrarios a los que encontraron Kubose et al (en prensa) en su investigación; en donde en la comparación de un par de problemas análogos, aquél que contaba con mayor coherencia en su contenido, favorecía la realización de mapeos más precisos. Todo parece indicar que el material de tipo narrativo, manejado por estos investigadores, promueve más las asimetrías en la dirección del mapeo, que los problemas equivalentes o isomórficos de álgebra y de probabilidad, utilizados en esta investigación. Hay que recalcar, que el razonamiento verbal es diferente al razonamiento matemático.

Sin embargo, cabe mencionar que los resultados del experimento 2 indicaron diferencias significativas entre las dos condiciones evaluadas, siendo mejor la comparación del problema resuelto con el problema sin resolver, que viceversa. Estos resultados, contrarios a los obtenidos en los otros 5 experimentos, sustentaron la hipótesis planteada en este trabajo de investigación. Esto propició un análisis minucioso de las muestras de participantes utilizados en cada uno de los experimentos.

La muestra del experimento 1 estaba conformado por personas que tenían una amplia experiencia en la solución de problemas algebraicos. Por esta razón, resolvieron los problemas con éxito y las preguntas del mapeo eran sencillas de responder. Este aspecto condujo a que no hubiera diferencias significativas en la dirección del mapeo.

Los participantes del experimento 2, eran personas que contaban con la información suficiente para comprender el material, sin embargo les hacía falta desarrollar algunas habilidades que les permitieran mejorar su rendimiento en esta área del saber humano

(álgebra). Con este grupo de personas si hubo diferencia en la dirección del mapeo. Fue mejor el mapeo del problema resuelto al problema sin resolver, que viceversa.

En el experimento 3 la actuación de los participantes fue muy pobre ya que el contenido a evaluar era desconocido para ellos. Asimismo, no entendieron la tarea a realizar lo cual tuvo repercusiones en el mapeo ya que los alumnos no sabían a qué prestarle atención para establecer las relaciones entre ambos problemas.

Los resultados del experimento 4 fueron similares a los del experimento 1. Debido a que se les proporcionó un ejemplo a los participantes para que entendieran la tarea a realizar, entonces los resultados fueron favorables ya que los sujetos sabían que tenían que hacer para la solución de los problemas. En este experimento no se presentaron diferencias significativas entre las dos condiciones del mapeo.

En los experimentos 5 y 6 los participantes eran personas que estaban cursando materias de estadística y álgebra en esos momentos. Los resultados reflejaron que en ninguno de los dos experimentos se presentaron diferencias significativas en la dirección del mapeo.

En resumen, cuando los participantes se encuentran en pleno proceso de aprendizaje de algún dominio específico y por lo tanto no tienen mucha experiencia en la solución de problemas, - como en el caso del experimento 2- la dirección del mapeo es más precisa cuando se compara el problema base con el problema meta, que viceversa.

Realizando otras observaciones de los experimentos hechos en este trabajo de investigación, se reconoce que cuando se presentan dos problemas equivalentes en donde los objetos y predicados además de ser similares conservan las mismas relaciones en ambos problemas, los participantes con conocimientos previos en álgebra, tienden a generar relaciones correctas sin importar la dirección del mapeo. Como es en el caso del experimento 1.

El bajo rendimiento de los participantes en el experimento 3 se atribuye a que los alumnos no comprendieron las relaciones existentes entre los objetos y predicados de los dos problemas análogos, por lo que se inclinaron a realizar el proceso de mapeo considerando solamente las similitudes entre los objetos y predicados (Gentner y

Markman, 1993) Estos resultados fueron similares a los que obtuvo Ross, (1987) en su experimento realizado con mapeos cruzados, en dónde los alumnos resolvieron los problemas considerando el contenido semántico, más que su estructura.

Uno de los problemas que se presentaron tanto en los experimentos 3, 4 y 5, dónde se utilizaron los pares de problemas que involucraban mapeos cruzados; fue que los alumnos en lugar de detectar las relaciones estructurales de los problemas, se enfocaron en la similitud entre objetos y predicados en la realización de los mapeos. En otras palabras, utilizaron la restricción semántica, más que la estructural en la elaboración de los mapeos, y por ende en la transferencia analógica.

Se puede decir que una característica de los alumnos que participaron en estos experimentos es la de ser novatos. Un novato en la solución de problemas de matemáticas análogos, tiende a fijarse más en los aspectos superficiales que sobresalen en dos problemas análogos, que en las características estructurales que permiten conocer como los objetos y predicados se relacionan entre sí. (Novick, 1988, 1992; Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Gholson et al., 1990; Silver, 1981, Stavy y Tisrosh, 1993). Asimismo, un novato se caracteriza por la carencia de conocimientos previos (Hunt, 1989; Reed, 1993, Chi, 1981) y por la falta de precisión en sus respuestas (Bedford y Chi, 1992), aspectos con los que muchos participantes se identificaban.

Se observó que no existen diferencias significativas en la dirección del mapeo, en el empleo de cualquiera de los dos métodos que se utilicen para la explicación de los problemas base; ya sea a través de un ejemplo (experimento 5) cuya ventaja estriba en ilustrar cómo se aplican los principios matemáticos en una situación particular; o a través de la descripción de reglas y procedimientos en abstracto (experimento 4), cuya utilidad consiste en especificar los pasos indispensables para la solución de un grupo de problemas. Con base en estos resultados se puede concluir que ninguno de los dos métodos hace que exista una asimetría en el proceso de mapeo.

En el experimento 6 se comprobó que el proceso de mapeo si permite la transferencia en la solución de dos problemas análogos. Esto se refleja en el hecho de que muy pocos participantes pudieron resolver dos problemas semejantes por sí solos sin ningún tipo de ayuda. Mientras que el número de personas con aciertos incrementó cuando se hizo uso

del proceso de mapeo. La solución de problemas matemáticos a través del uso de analogías promueve la comprensión de problemas meta, es por eso que a la transferencia analógica se le puede considerar una herramienta útil en la educación.

En las respuestas obtenidas con relación a las preguntas de mapeo realizadas en los 6 experimentos, se observó que la mayoría de los participantes contestaba acertadamente aquellas preguntas que se referían a sujetos u objetos; mientras que el número de contestaciones correctas disminuía en la medida que se hacían preguntas sobre relaciones. Esto permite corroborar que los mapeos son más precisos mientras las tareas son más sencillas (Halford, 1995; Holyoak y Thagard 1995).

Con lo que respecta a la solución de los problemas, en ninguno de los seis experimentos se presentaron diferencias significativas en los resultados al comprar el problema resuelto con el problema sin resolver, o utilizando la condición inversa. Estos resultados hacen manifiesto que los participantes evaluados carecían de las habilidades necesarias para transferir los resultados de un problema a otro. En otras palabras, no eran capaces de realizar inferencias basadas en las correspondencias establecidas por el proceso de mapeo. Aspecto que es indispensable promover en la enseñanza de problemas algebraicos y de probabilidad.

Por último, es indispensable realizar un análisis del material que se utilizó en esta investigación. Existe evidencia de que el estudio de las matemáticas es complejo y por lo mismo a mucha gente se le dificulta su comprensión (Gelman y Williams, 1997; Resnick, 1989). La solución de problemas de este tipo involucra dos procesos: la comprensión del enunciado y la aplicación de habilidades matemáticas (Hall, Kibler, Wenger y Truxaw, 1989; Kaput y Sims-Knight, 1984; Nathan, Knitsch y Young, 1992), si se carece o se presentan complicaciones en alguno de los dos, la tarea se ve obstaculizada.

Respecto a la comprensión, cabe recalcar que en general los problemas matemáticos -ya sean algebraicos o probabilísticos- implican relaciones, y mientras más complejas sean éstas se requiere de mayor capacidad para procesar la información. De ahí, que si no se entienden las relaciones se dificulta la comprensión y la solución correcta de los problemas, aspecto que se pudo observar en los seis experimentos elaborados.

La advertencia de relaciones complejas se va incrementando con la edad (Halford, 1993), ya que aumenta la capacidad de percibir varias asociaciones al mismo tiempo; lo cual, explica el que haya habido un mejor rendimiento en los alumnos de licenciatura, con respecto a los alumnos de bachillerato en la solución de problemas algebraicos (experimentos 1 y 2).

Para finalizar, es esencial subrayar la trascendencia de entender los objetivos y relaciones implícitos en los enunciados de los problemas de matemáticas, ya que esto permite que exista una mayor comprensión de las asociaciones existentes entre las proposiciones que deberán ser mapeadas. En otras palabras se debe hacer énfasis en la centralidad pragmática (Spellman y Holyoak, 1996)

Conclusiones

Este trabajo de investigación se enfocó al estudio de una implicación del modelo LISA sobre razonamiento analógico. Este modelo predice que bajo ciertas circunstancias los mapeos analógicos pueden ser asimétricos (las correspondencias de una situación "A" con respecto a otra situación análoga "B", pueden diferir con respecto a las correspondencias de "B" a "A"). Bajo esta predicción se buscó estudiar algunas implicaciones del uso de las analogías en la educación, sobretodo en el aprendizaje de problemas matemáticos resueltos.

Cuando se utilizan analogías para la solución de problemas, la dirección del mapeo juega un papel importante. El modelo LISA predice que el mapeo será más preciso si se enfoca la atención en el problema más coherente. Considerando que un problema de matemáticas resuelto sería más coherente que uno sin resolver; entonces el proceso de mapeo (y por ende la transferencia) sería más preciso si se manipula la atención del alumno en el ejemplo. Sin embargo, los resultados de esta investigación, indican que la asimetría predicha es difícil de obtener cuando se hace uso de problemas algebraicos y probabilísticos.

Los resultados del presente estudio ofrecieron evidencias de que ante dos problemas de matemáticas equivalentes o isomórficos, el hecho de que se proporcione en uno de ellos la explicación del proceso que se debe seguir para su solución, no es suficiente para que

La advertencia de relaciones complejas se va incrementando con la edad (Halford, 1993), ya que aumenta la capacidad de percibir varias asociaciones al mismo tiempo; lo cual, explica el que haya habido un mejor rendimiento en los alumnos de licenciatura, con respecto a los alumnos de bachillerato en la solución de problemas algebraicos (experimentos 1 y 2).

Para finalizar, es esencial subrayar la trascendencia de entender los objetivos y relaciones implícitos en los enunciados de los problemas de matemáticas, ya que esto permite que exista una mayor comprensión de las asociaciones existentes entre las proposiciones que deberán ser mapeadas. En otras palabras se debe hacer énfasis en la centralidad pragmática (Spellman y Holyoak, 1996)

Conclusiones

Este trabajo de investigación se enfocó al estudio de una implicación del modelo LISA sobre razonamiento analógico. Este modelo predice que bajo ciertas circunstancias los mapeos analógicos pueden ser asimétricos (las correspondencias de una situación "A" con respecto a otra situación análoga "B", pueden diferir con respecto a las correspondencias de "B" a "A"). Bajo esta predicción se buscó estudiar algunas implicaciones del uso de las analogías en la educación, sobretodo en el aprendizaje de problemas matemáticos resueltos.

Cuando se utilizan analogías para la solución de problemas, la dirección del mapeo juega un papel importante. El modelo LISA predice que el mapeo será más preciso si se enfoca la atención en el problema más coherente. Considerando que un problema de matemáticas resuelto sería más coherente que uno sin resolver; entonces el proceso de mapeo (y por ende la transferencia) sería más preciso si se manipula la atención del alumno en el ejemplo. Sin embargo, los resultados de esta investigación, indican que la asimetría predicha es difícil de obtener cuando se hace uso de problemas algebraicos y probabilísticos.

Los resultados del presente estudio ofrecieron evidencias de que ante dos problemas de matemáticas equivalentes o isomórficos, el hecho de que se proporcione en uno de ellos la explicación del proceso que se debe seguir para su solución, no es suficiente para que

un sujeto se percate de la conexión interna entre las proposiciones. Existen otros factores adicionales que deberían ser considerados, como por ejemplo el que un problema tenga mayor contenido semántico. Es decir, que el contenido sea familiar para el alumno de tal manera que pueda comprenderlo mejor y por ende realizar los mapeos pertinentes de una situación familiar a una nueva.

Una carencia de la mayoría de los participantes de este estudio, fue que no supieron realizar mapeos referentes a las relaciones entre los atributos, lo cual implica que muy pocos lograron entender la estructura de los problemas. Sería recomendable que en el proceso de instrucción, se haga énfasis en la comprensión de las relaciones existentes en los problemas de matemáticas

Por otra parte, es importante recalcar que la experiencia es lo que distingue a un experto de un novato; por lo que la ejercitación en la solución de problemas matemáticos incrementa el rendimiento de los alumnos. Es indispensable que los alumnos se ejerciten y pongan en práctica los pasos del proceso de transferencia para que realicen mapeos e inferencias precisas sobre el material que estén aprendiendo.

Aún cuando no se obtuvieron resultados favorables para afirmar la predicción del modelo LISA sobre las asimetrías, se proponen encontrar nuevas formas de evaluar la dirección del mapeo, que permitan corroborar con mayor precisión que el proceso de mapeo es mejor cuando se compara el problema base con el problema meta, que cuando se hace uso de la dirección contraria. Una sugerencia sería el hacer uso de material gráfico para evaluar dicha predicción.

Alentar investigaciones relacionadas con el estudio de analogías es de suma importancia, ya que éstas son una estrategia efectiva en la solución de problemas. Además de que son de gran utilidad en el proceso educativo.

Referencias

- Alibali, M.W., Bassok, M., Olseth, K.L., Syc, S., & Goldin-Meadow, S (1995) Gestures reveal mental models of discrete and continuous change. En J.D. Moore & J.F. Lehman (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, (pp.391-396). Hillsdale, NJ:Erlbaum.
- Anderson, J (1985) Knowledge development and memory performance . En M. Friedman, J.P Das, 7 N. O'Connor (Eds.), *Intelligence and learning* (pp.221-230).New York:Plenum.
- Barnes, A. Thagard, P. (1997) Empathy and Analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 20 (3), 522-533
- Bassok, M. (1990) Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 16(3), 522-533
- Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 15, 153-166.
- Bassok, M., & Olseth, K. L. (1995). Object-based representations: Transfer between cases of continuous and discrete models of change. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 21, 1522-1538.
- Bédard, J , & Chi, M.T. H. (1992) Expertise. *Current Directions in Psychology Science*, 1, 135-137.
- Bowdle, B. F., & Gentner, D. (1997). Informativity and asymmetry in comparisons. *Cognitive Psychology*, 34, 244-286.
- Burns, B. (1996). Meta-analogical transfer. Transfer between episodes of analogical reasoning *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 22, 1032-1048.
- Chen, Z (1996) Children's analogical problem solving: The effects of superficial, structural and procedural similarity. *Journal of Experimental Psychology*, 62 (3) 410-431.
- Chi, M.T (1981) Knowledge development and memory performance . En M. Friedman, J.P Das, 7 N. O'Connor (Eds.), *Intelligence and learning* (pp.221-230).New York:Plenum.
- Chi, M.T, Bassok, M., Lewis. M. W., Reiman, P. & Glaser. R (1989) Self explanations How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science* 18, 145-182
- Chi, M.T, Feltoovich, P J. & Glaser, R. (1981) Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 13, 145-182.

- Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs*, 58 (Whole No. 270)
- English L. D., & Halford, G.S.,(1997) *Mathematics Education Models and Processes* LEA. New Jersey.
- Falkenhainer, B., Forbus, K.D., & Gentner, D. (1989). The structure-mapping engine: Algorithm and examples. *Artificial Intelligence*, 41, 1-63.
- Forbus, K.D, Ferguson, R.W & Gentner, D (1994) Incremental structure-mapping. *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp.313-318). Hillsdale, NJ. Erlbaum.
- Gelman, R & Williams, E. (1997). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain-specificity and epigenesis. En D. Kuhn y R. Siegler, Eds., *Cognition, Perception and Language*, 5th Ed. Vol. 3 of W. Damon, Ed., *Handbook of Child Psychology*. New York:Wiley.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gentner, D. & Landers, R. (1985, November) Analogical reminding: A good match is hard to find. *Proceedings of the International Conference on Systems*, Tucson, AZ
- Gentner, D & Toupin, C. (1986) Systematicity and surface similarity in the development of analogy. *Cognitive Science*, 10, 277-300.
- Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou, & A. Ortony, (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). New York, NY: Cambridge University Press.
- Gentner, D., & Gentner, D. R. (1983). Flowing waters of teeming crowds: Mental models of electricity. En Gentner & A.L. Stevens (Eds.) *Mental Models*. Hillsdale, N.J.:Erlbaum
- Gentner, D., & Markman, A. B. (1997). Structural vs. syntactic matching: Analogy entails common relations. In M. G. Shafto & P. Langley (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (p. 927). Mahweh, NJ: Erlbaum.
- Gentner, D., & Wolff, P. (1997). Alignment in the processing of metaphor. *Journal of Memory and Language*, 37, 331-355.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 1980, 12, 306-355.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15 1-38.
- Gilovich, T., (1981). Seeing the past in the present. The effect of associations to familiar events on judgments and decisions. *Journal of Experimental Child Psychology* 13, 306-355.

- Gholson, B, Morgan, D., Dattel, A.R & Pierce, K.A. (1990) The development of analogical problem solving: Strategic processes in schema acquisition and transfer. In D.F Bjorklund (Ed.) *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp. 209-308). Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hall, R., Kibler D., Wenger, E, & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. *Cognition and Instruction*, 6(3), 223-283
- Halford, G. S. (1992). Analogical Reasoning and conceptual complexity in cognitive development. *Human Development*, 35(4), 193-217.
- Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Halford, G. S., Wilson, W. H., Guo, J., Gayler, R. W., Wiles, J., & Stewart, J. E. M. (1994). Connectionist implications for processing capacity limitations in analogies. In K. J. Holyoak & J. A. Barnden (Eds.), *Advances in connectionist and neural computation theory, Vol. 2: Analogical connections* (pp. 363-415). Norwood, NJ: Ablex.
- Halford, G. S., Wilson, W. H., & Phillips, S. (in press). Processing capacity defined by relational complexity: Implications for comparative, developmental, and cognitive psychology. *Brain and Behavioral Sciences*.
- Holyoak, K.J (1985) The pragmatics of analogical transfer. In G.H. bower (Ed.), *The Psychology of learning and motivation* (vol. 19). San Diego, CA: academic Press.
- Holyoak, K. J., & Hummel, J. E (in press). The proper treatment of symbols in a connectionist architecture. In E. Deitrich & A. Markman (Eds.), *Cognitive dynamics: Conceptual change in humans and machines*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Holyoak, K. J., Novick, L., & Melz, E. (1994). Component processes in analogical transfer. Mapping, pattern completion and adaptation. In K.J. Holyoak & J.A. Barnden (Eds.), *Connectionist approaches to analogy, metaphor, and case-based reasoning*. (Vol.2, pp.113-180). Norwood, NJ: Albex.
- Holyoak K.J., & Koh, K (1987) Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition* 15 (4) , 332-340
- Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1989). A computational model of analogical problems solving. In S. Vosniadou & A Ortony (Eds.) *Similarity and analogical reasoning*, (pp. 242-266). New York: Camb ridge University Press.
- Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1989b). Analogical mapping by constraint satisfaction *Cognitive Science*, 13, 295-355.
- Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1997). The analogical mind. *American Psychologist*, 31(5), 485-487.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- Hummel, J. E., & Biederman, I. (1992). Dynamic binding in a neural network for shape recognition. *Psychological Review*, 99, 480-517.
- Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1992). Indirect analogical mapping. In *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 516-521). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466.
- Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (in press). From analogy to schema induction in a structure-sensitive connectionist model. In T. Dartnall & D. Peterson (Eds.), *Creativity and computation*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Hunt, E. (1989) Cognitive Science: Definition, status, and questions. *Annual Review of Psychology* 40, 603-629.
- Kaput J.J., & Sims-Knight, J (1984). Errors in translations to algebraic equations: Roots and Implications. En M. Behr & G. Bright (Eds.), Special issue on mathematics learning problems of the postsecondary student. *Focus on Learning Problems in Mathematics*.
- Keane, M.T., (1985) On drawing analogies when solving problems:a Theory and test of solution generation in an analogical problem-solving task *British Journal of Psychology* 76, 449-458
- Keane, M.T., (1995) *Transfer between analogies: How solving one analogy problem helps to solve another*. (Tech. Rep. No. TCD-CS-TR-95-05). Dublin, Ireland: Trinity College Dublin.
- Keane, M T. (1997). What makes an analogy difficult? The effects of order and causal structure on analogical mapping. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 23, 946-967.
- Keane, M T , Ledgeway, T., & Duff, S. (1994). Constraints on analogical mapping: A comparison of three models. *Cognitive Science*, 18, 387-438
- Kubose, T.T., Holyoak, K. J., & Hummel J.E (1997) Asymmetries in analogical mapping A test of a process model. En M.G Shafto & P Langely (Eds).*Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society.*, (pg. 976) Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kubose, T.T., Holyoak, K. J., & Hummel J.E (1997b) Mapping asymmetries in analogical problem solvin. En M.G. Shafto & P. Langely (Eds).*Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society.*, (pg. 978). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kubose, T.T., Holyoak, K. J., & Hummel J.E (en prensa) Strategic Use of Working Memory in Analogical Mapping.
- Matlin, M.W. (1998) *Cognition* (4rd ed) Forth Worth, TX: Harcourt Brace

- Mayer, R. E., (1981). Frequency norms and structural analyses of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science*, 10, 135-175.
- Mayer, R. E., (1989) Models for understanding. *Review of Educational Research*. 59, 43-64.
- Mayer, R. E., (1992) *Thinking, problem solving, cognition (2nd de)* W.H. Freeman and Company, N.Y.
- Mayer, R. E. & Wittrock, M. C., (1997) *Problem solving transfer*. En. Handbook of Educational Psychology. Berliner y Calfee (Eds). MacMillan Library. N.Y.
- Nathan, M.J., Knitsch, W. & Young, E. (1992). A theory of algebra word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction* 9(4), 329-391.
- Novick, L. R. (1988) Analogical transfer, problem solving and expertise *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14(3), 510-520
- Novick, L. R. (1990) Representational transfer in problem solving. *Psychological Science* 1(2), 128-132
- Novick, L. R. (1992) The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy. In J.I.D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills* (pp.155-188). Amsterdam:Elsevier.
- Novick, L. R. & Hmelo, C. (1994) Transferring symbolic representation across non isomorphic problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 20(6), 1296-1321
- Novick, L. R. & Holyoak, K. J.(1991) Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition* 17, 398-415
- Ratterman, M & Gentner, D. (1987). Analogy and similarity: Determinants of accessibility and inferential soundness. *Proceedings Ninth Annual Meeting of the Cognitives Science Society*, pp.23-34. Seattle, WA.
- Reed, S. K., (1985) Effecto of computer graphics on improving estimates to algebra word problems *Journal of Educational Psychology*, 77, 285-298.
- Reed, S. K., (1987) A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13(16), 124-139
- Reed, S. K., (1989). Constranits on the abstracion of solutions. *Journal of Educational Psychology*, 81(4), 532-540.
- Reed, S. K., Ernst, G. W., & Banerji, R. (1974). The role of analogy in transfer between similar problem state. *Cognitive Psychology*, 6, 436-450.

- Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985) Usefulness of analogous solution for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 20, 106-125.
- Resnick, L (1989) Developing mathematical knowledge. *American Psychologist* 44, 162-169.
- Rosch, E. (1975). Cognitive reference points *Cognitive Psychology*, 7, 532-547.
- Ross, B (1984). Reminders and their effects in learning a cognitive skill *Cognitive Psychology* 16, 371-416.
- Ross, B. (1987) This is like that: The use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13(4), 629-639
- Ross, B. (1989) Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15(3), 456-468
- Siegler, R. S. (1989) Mechanisms of Cognitive development. *Annual Review of Psychology* 40, 353-379.
- Silver, E.A. (1981) Recall of mathematical problem formulation: Solving related problems. *Journal for Research in Mathematics Education* 12 (1) 54-64
- Spellman, B.A & Holyoak, K.J (1992). If Saddam is Hitler then who is George Bush? Analogical mapping between systems of social roles. *Journal of Personality and Social Psychology*, 62, 913-933.
- Spellman, B.A. & Holyoak, K.J (1996). Pragmatics in Analogical Mapping. *Cognitive psychology* 31, 307-306.
- Stavy, R., & Tirosh, D (1993). When analogy is perceived as such. *Journal of Research in Science Teaching*. 30(10), 1229-1239.
- Vosniadou, S & Ortony, A (1989). *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge, England: Cambridge University Press.