UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"NUCLEOS Y CONCEPTOS RELACIONADOS EN UNA DIGRAFICA D Y EN SU DIGRAFICA DE LINEAS L(D)".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A

JUANA MARTINEZ MARTINEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

MEXICO, D. F. MAYO DE 2000.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNMA DE MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis.

"Núcleos y conceptos relacionados en una digráfica D y en su digráfica de líneas L(D)"

realizado por

Martínez Martínez Juana

con número de cuenta 9216106-3, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Hortensia Galeana Sánchez	H. Galeana
Propietario	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Propietario	M. en C. Virginia Abrin Batule	Virginia Abrín Batule
Suplente	MAT. Laura Pastrana Ramírez	Laura Pastrana R.
Suplente	M. en C. Patricia Cortes Flores	

Consejo Departamental de Matemáticas.

Mat. Julio César Guevara Bravo

D E D I C A T O R I A:

A las cuatro personas que a lo largo de toda mi vida han brindado parte de su vida a la mia.

A mi padre Alfonso, que con todo cariño depositó su confianza y esperanza en sus hijos.

A mi madre Eva, que con su apoyo y dedicación a la familia ha sido un gran ejemplo.

A mi hermano Ignacio, que siempre me ha dedicado la paciencia y el tiempo cuando lo he necesitado, por ser más que un hermano, un amigo.

A mi hermano Armando por ser una pequeña gran compañia.

A G R A D E C I M I E N T O S:

A la Doctora Hortensia por su apoyo, paciencia y dedicación, por hacer posible la realización de esta tesis.

A los demás integrantes del jurado:

Dr. Hugo Rincón
M. en C. Virginia Abrín
Mat. Laura Pastrana
M. en C. Patricia Cortés

Por el tiempo dedicado a la revisión del presente trabajo.

A Ivonne, por su amistad y apoyo en todo momento, porque su compañía ha sido de gran ayuda.

A Lupita, por dedicarme su compañía, su tiempo, pero sobre todo por brindarme su amistad y confianza.

A HACSJF, por llegar a mi vida y permanecer en ella de una manera diferente, por sus palabras de aliento y su amistad.

A Miguel, por permitirme entrar y participar en su vida.

A Isela, porque a pesar del tiempo las verdaderas amistades siguen presentes.

A Pedro, David, Cristina, Alejandro y Aravid, porque la facultad no sería la misma sin ustedes.

A Toño, Marti, Liliana, Bety y Ale por hacer del museo un lugar más agradable.

A Roxana, Norma, Nancy, Maritza, Lilia, Judith y Francisco por todas sus atenciones.

INDICE

INTRODUCIÓN

El presente trabajo se basa en el análisis de los núcleos en las digráficas y la relación que mantienen con su respectiva digráfica de líneas. Así como hacer un estudio con otros conceptos como el de seminúcleo, cuasinúcleo, función de Grundy, (k,l) – *núcleo y* m – *coloraciones.*

Cabe mencionar que la definición que se utiliza no es única, hay definiciones alternativas (por ejemplo la dada por Hemminger y Klerleyn (5) fijándose en todas las adyacencias posibles). La definición de digráfica que utilizamos fue introducida en 1960 por Harary y Norman (9), de quienes también es la definición de digráfica de líneas.

El concepto de núcleo fue introducido por John Von Neumann (12) (1944) en la teoría de juegos, los demás conceptos son el resultado de la investigación y generalización de este concepto.

En el capítulo 1 partimos de las definiciones y resultados elementales acerca de las digráficas y digráficas de líneas, un resultado que es importante señalar es el presentado en el teorema 1.4, que nos da la caracterización de las digráficas de líneas.

En el capítulo dos y tres presentamos resultados que relacionan la cardinalidad entre el conjunto de todos los núcleos (así como de otros conceptos más) en una digráfica y en su digráfica de líneas, las cuales deben tener todos sus vértices *con ingrado al menos uno.*

Finalmente en el capítulo 4 presentamos como resultado principal el teorema que plantea la igualdad en la cantidad de núcleos por trayectorias monocromáticas en una digráfica m – coloreada y en su digráfica de líneas con su respectiva m – coloración interior. La m – coloración es una función, la cuál nos restringe al estudio de digráficas sin ciclos dirigidos monocromáticos (que bajo la función tengan el mismo color).

CAPITULO I
DIGRÁFICAS Y DIGRAFICAS DE LÍNEAS

Definición No. 1.1

Una ***digráfica*** D consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados vértices, denotados por V(D), junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de V(D), llamados flechas (aristas dirigidas), denotados por F(D).

Si $h = (u , v) \in$ F(D) diremos que u es adyacente a v o que h incide en v.

Notación : D = (V(D), F(D)) = (V , F) donde V es abreviatura de V(D) y F abreviatura de F(D).

Definición No. 1.2

El ***ingrado*** de un vértice v en la digráfica D, denotado por $\delta^{-}_{D}(v)$ es el número de vértices adyacentes hacia v, es decir, el número de flechas que inciden en v.

Definición No. 1.3

El ***exgrado*** de un vértice v en la digráfica D, denotado por $\delta^{+}_{D}(v)$ es el número de vértices adyacentes desde v, es decir, el número de flechas que salen de v.

Definición No. 1.4

El ***grado*** de un vértice v en la digráfica D, denotado por $\delta_D(v)$ es la suma del exgrado y el ingrado de v en D.

Definición No. 1.5

Los ***vecinos exteriores*** de un vértice x en la digráfica D es el conjunto $\Gamma^+_D(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in F(D)\}$.

Definición No. 1.6

Los ***vecinos interiores*** de un vértice x en la digráfica D es el conjunto $\Gamma^-_D(x) = \{y \in V(D) \mid (y, x) \in F(D)\}$.

Definición No. 1.7

Sean D y H digráficas, diremos que D es ***isomorfa*** a H ($D \cong H$), si existe una función $\sigma: V(D) \longrightarrow V(H)$ biyectiva tal que:

$$(u, v) \in F(D) \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in F(H).$$

Definición No. 1.8

Una digráfica H es ***subdigráfica*** de la digráfica D, si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición No. 1.9

Una digráfica H es una ***subdigráfica inducida*** de la digráfica D, si $V(H) \subseteq V(D)$ y $(u, v) \in F(H)$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ con $\{u,v\} \subseteq V(H)$.

Definición No. 1.10

Un ***camino*** C de la digráfica D es una sucesión C = $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ de vértices tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$, para $0 \leq i \leq n-1$. Si C empieza en u y termina en v diremos que C es un uv - camino.

Definición No. 1.11

Un ***camino dirigido*** $\overrightarrow{C}$ de la digráfica D, es una sucesión de vértices $\overrightarrow{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Definición No. 1.12

Una ***trayectoria*** T de la digráfica D es un camino en el que no se repiten vértices.

Definición No. 1.13

Una ***trayectoria dirigida*** $\overrightarrow{T}$ de la digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

Definición No. 1.14

Un ***camino cerrado*** de la digráfica D es un camino en el que el primero y el último vértice son iguales.

Definición No. 1.15

Un ***camino cerrado dirigido*** es un camino dirigido en el que el primero y el último vértices son iguales.

Definición No. 1.16

Un *ciclo* C es un camino cerrado en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Definición No. 1.17

Un ***ciclo dirigido*** $\overrightarrow{C}$ es un camino cerrado dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Definición No. 1.18

Una digráfica D es ***conexa*** si para cualesquiera dos vértices u, v en V(D) existe un uv - camino y por lo tanto un vu - camino en D .

Definición No. 1.19

Una digráfica D es ***fuertemente conexa*** si para cualesquiera dos vértices u, v en V(D) existe un uv - camino dirigido en D .

Definición No. 1.20

La ***matríz de adyacencia*** $A = (a_{ij})$ de la digráfica D esta definida como sigue :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in F(D) \\ 0 \text{ si } (v_i, v_j) \notin F(D) \end{cases}$$

Definición No. 1.21

Si D es una digráfica y $\vec{C}$ un ciclo dirigido contenido en D, decimos que $h = (u, v) \in F(D)$ es una ***diagonal*** de $\vec{C}$ si :

$h \in (F(D)- F(\vec{C}))$ y $\{ u , v \} \subseteq V(\vec{C})$.

Definición No. 1.22

La ***digráfica de líneas*** de $D = (V , F)$ es la digráfica $L(D) = (F , W)$ donde el conjunto de vértices es el conjunto de flechas de D y (h , k) es una flecha de L(D) si y sólo si el vértice final de h es el vértice inicial de k .

Definición No. 1.23

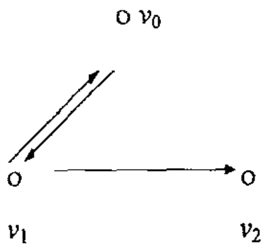
La ***longitud*** de un camino C es el número de flechas contenidas en la sucesión, es decir, el número de vértices menos uno.

Notación : Si $C = (v_0 , v_1 , \ldots , v_n)$ es un camino con n+1 vértices su longitud es n y lo denotaremos por C_n

Definición No. 1.24

Una ***digráfica nula*** D es una digráfica tal que el conjunto de flechas es vacío, es decir, $F(D) = \varnothing$.

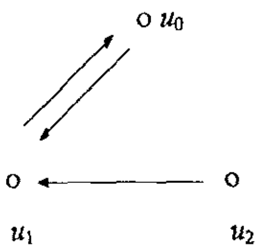
Los ejemplos siguientes son de **digráficas** y de algunos conceptos más.



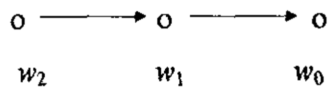
$D_1 = (V(D_1)\,,F(D_1))$ donde :

$V(D_1) = \{ v_0, v_1, v_2\}$

$F(D_1)=\{(v_0, v_1),(v_1, v_0),(v_1, v_2)\}$



D_2



D_3

$D_2 = (V(D_2)\,,F(D_2))$ donde :

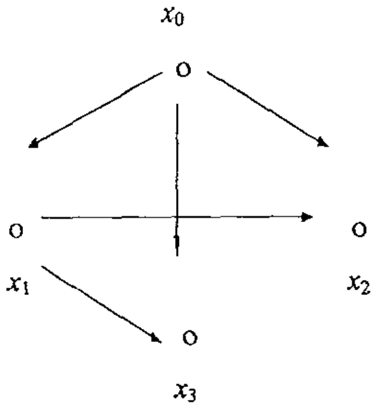
$V(D_2) = \{ u_0, u_1, u_2\}$

$F(D_2) = \{(u_0, u_1),(u_1, u_0),(u_2, u_1)\}$

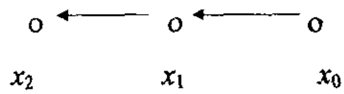
$D_3 = (V(D_3)\,,F(D_3))$ donde:

$V(D_3) = \{w_0, w_1, w_2\}$

$F(D_3) = \{(w_2, w_1),(w_1, w_0)\}$



D_4



D_5

$D_5 = (V(D_5)\,,F(D_5))$, donde:

$V(D_5) =\{x_0, x_1, x_2\}$

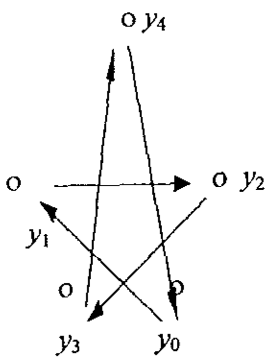
$F(D_5) = \{(x_0, x_1),(x_1, x_2)\}$

$D_4 = (V(D_4), F(D_4))$ donde :

$V(D_4) = \{ x_0, x_1, x_2, x_3\}$

$F(D_4) = \{(x_0, x_1), (x_0, x_2),$

$(x_1, x_2), (x_0, x_3), (x_1, x_3).$



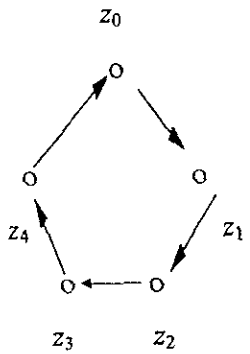
D_6

$D_6 = (V(D_6), F(D_6))$, donde :

$V(D_6) = \{y_0, y_1, y_2, y_4\}$

$F(D_6) = \{(y_0, y_1), (y_1, y_2),$

$(y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_4, y_0)\}$



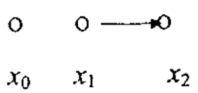
D_7

$D_7 = (V(D_7), F(D_7))$, donde :

$V(D_7) = \{z_0, z_1, z_2, z_4\}$

$F(D_7) = \{(z_0, z_1), (z_1, z_2),$

$(z_2, z_3), (z_3, z_4), (z_4, z_0)\}$



D_8

$D_8 = (V(D_8), F(D_8))$, donde

$V(D_8) = \{x_0, x_1, x_2\}$

$F(D_8) = \{(x_1, x_2)\}$

Vértice	**Ingrado**	**Exgrado**	**Grado**
$v_2 \in V(D_1)$	$\delta^-_D\ (v_2)= 1$	$\delta^+_D\ (v_2)= 0$	$\delta_D\ (v_2)= 1$
$w_1 \in V(D_3)$	$\delta^-_D\ (w_1)= 1$	$\delta^+_D\ (w_1)= 2$	$\delta_D\ (w_1)=3$
$u_1 \in V(D_2)$	$\delta^-_D\ (u_1)= 2$	$\delta^+_D\ (u_1)= 1$	$\delta_D\ (w_1)=3$
$x_0 \in V(D_4)$	$\delta^-_D\ (x_0)= 0$	$\delta^+_D\ (x_0)= 3$	$\delta_D\ (x_0)=3$

Vértice	**Vecinos Exteriores**	**Vecinos Interiores**
$v_2 \in V(D_1)$	$\Gamma^+_D\ (v_2)= \varnothing$	$\Gamma^-_D\ (v_2)= \{\ v_1\}$
$w_1 \in V(D_3)$	$\Gamma^+_D\ (w_1)= \{w_0\}$	$\Gamma^-_D\ (w_1)= \{\ w_1\}$
$u_1 \in V(D_2)$	$\Gamma^+_D\ (u_1)= \{u_0\}$	$\Gamma^-_D\ (u_1)= \{\ u_0\ ,\ u_2\}$
$x_0 \in V(D_4)$	$\Gamma^+_D\ (x_0)= \{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\}$	$\Gamma^-_D\ (x_0)= \varnothing$.

Digráficas isomorfas:

$D_3 \cong D_5$, pues la función $\sigma_1 : V(D_3) \longrightarrow V(D_5)$ es biyectiva.

Donde : $\sigma_1\ (w_0) = x_2$

$\sigma_1\ (w_1) = x_1$

$\sigma_1\ (w_2) = x_0$

$D_6 \cong D7$, pues la función $\sigma_2 : V(D_6) \longrightarrow V(D_7)$ es biyectiva.

Donde : $\sigma_2(y_0) = z_0$

$\sigma_2(y_1) = z_1$

$\sigma_2(y_2) = z_2$

$\sigma_2(y_3) = z_3$

$\sigma_2(y_4) = z_4$

La digráfica D_8 es **subdigráfica** de la digráfica D_4.

La digráfica D_5 es **subdigráfica inducida** de la digráfica D4.

$(x_3, x_0, x_2, x_1, x_0)$	es un **camino** en D_4.
(x_0, x_1, x_2)	es un **camino dirigido** en D4.
(x_2, x_1, x_0)	es una **trayectoria** en D5.
(x_0, x_1, x_2)	es una **trayectoria dirigida** en D5.
$(v_1, v_0, v_1, v_2, v_1)$	es un **camino cerrado** en D1.
$(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_0)$	es un **camino cerrado dirigido** en D_7.
$(z_0, z_4, z_3, z_2, z_1, z_0)$	es **un ciclo** en D_7.
$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_0)$	es **un ciclo dirigido** en D_6.

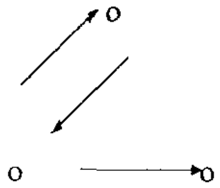
Las digráficas $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ y D_7 son **conexas,** D_8 es no conexa y sólo D_6 y D_7 son **fuertemente conexas**. Sus matrices de adyacencia son:

$$M_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad M_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad M_3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

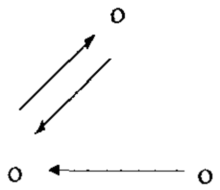
$$M_4 = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad M_5 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad M_6 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$M_7 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad M_8 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

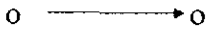
Sus respectivas **digráficas de líneas** son:



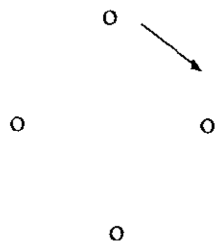
$L(D_1)$



$L(D_2)$

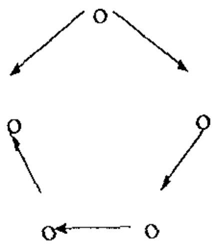


$L(D_3)$

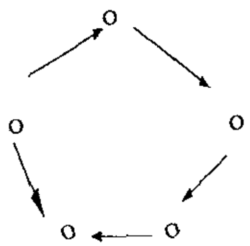


$L(D_4)$

L(D_5)



L(D_6)



L(D_7)

L(D_8)

Esta es una digráfica nula.

Teorema 1.1.

Si D es una digráfica con p vértices (ninguno es aislado) y q flechas entonces:

1) L(D) tiene q vértices.
2) El número de flechas de L(D) es $\Sigma_{v \in V(D)} \delta^{+}_{D}(v)\, \delta^{-}_{D}(v)$.
3) El exgrado en L(D) de $h = (u, v)$ es $\delta^{+}_{D}(v)$ y el ingrado es $\delta^{-}_{D}(u)$.

4) $L(\overrightarrow{T_n}) \cong \overrightarrow{T_{n-1}}$ para $n \geq 1$.

5) $L(C_p) \cong \overrightarrow{C_p}$ para $p \geq 2$.

Demostración :

Sea $D = (V, F)$ una digráfica y $L(D) = (F, W)$ su correspondiente digráfica de líneas.

1) De acuerdo con la definición 1.22. sabemos que $V(L(D)) = F(D)$ de aquí que $|V(L(D))| = |F(D)| = q$.

2) Sea $v \in V(D)$, de v salen $\delta^+_D(v)$ flechas, por cada una de éstas tenemos que su vértice inicial coincide con el vértice final de $\delta^-_D(v)$ flechas. Así, por la definición de flecha en L(D), cada vértice $v \in V(D)$ tenemos $\delta^+_D(v)\,\delta^-_D(v)$ flechas en L(D), por lo que el número total de flechas en L(D) es:

$$\Sigma_{v \in V(D)}\, \delta^+_D(v)\, \delta^-_D(v) .$$

3) Sea $h = (u, v) \in F(D)$, u es el vértice final de $\delta^-_D(u)$ flechas, por lo tanto en L(D), $\delta^-_D(u)$ vértices son adyacentes a h, es decir, $\delta^-_{L(D)}(h) = \delta^-_D(u)$. En D, v es el vértice inicial de $\delta^+_D(v)$ flechas, en consecuencia en L(D) h es adyacente a $\delta^+_D(v)$ flechas, es decir, $\delta^+_{L(D)}(h) = \delta^+_D(v)$.

4) Sea D una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ de longitud n (con $n \geq 1$), $\overrightarrow{T} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ donde $a_i = (u_{i-1}, u_i) \in F(D)$, con $1 \leq i \leq n$. En L(D) cada flecha es un vértice, en consecuencia, L(D) tiene n vértices y como D es una trayectoria dirigida tal que para cualquier $a_j \in F(D)$, a_j

es adyacente a a_{j+1}, es decir, el vértice final de a_j es el vértice inicial de a_{j+1} entonces por definición de digráfica de líneas $(a_j, a_{j+1}) \in W$ con $1 \leq j \leq n-1$.

$\{a_i, a_{i+1}\} \subseteq F$, lo que implica que en L(D) obtenemos la siguiente trayectoria dirigida:

$$\overrightarrow{T}^* = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

y como $\overrightarrow{T^*}$ tiene n vértices, entonces su longitud es n-1.

$$\therefore L(\overrightarrow{T_n}) \cong \overrightarrow{T_{n-1}}.$$

5) Sea D un ciclo dirigido de longitud p con $p \geq 2$ tal que:

$$\overrightarrow{C_p} = (v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p)$$

donde $a_i = (v_{i-1}, v_i) \in F(D)$, $1 \leq i \leq p$, además $v_0 = v_p$. El número de flechas de $\overrightarrow{C_p}$ es p por lo que $L(\overrightarrow{C_p})$ tiene p vértices. Además para cualquier $a_i \in F(\overrightarrow{C_p})$, a_i es adyacente a a_{i+1}, es decir, el vértice final de a_i es el vértice inicial de a_{i+1} y como $\overrightarrow{C_p}$ es un ciclo dirigido, el vértice final de a_p es el vértice inicial de a_1 (pues $v_p = v_0$). De lo que se deduce que $L(\overrightarrow{C_p})$ es un ciclo dirigido con p vértices.

$$\therefore L(\overrightarrow{C_p}) \cong \overrightarrow{C_p}.$$

Un ejemplo de lo que expone el teorema 1.1 se muestra en la figura 1.1 y en la figura 1.2 (incisos 3 y 4).

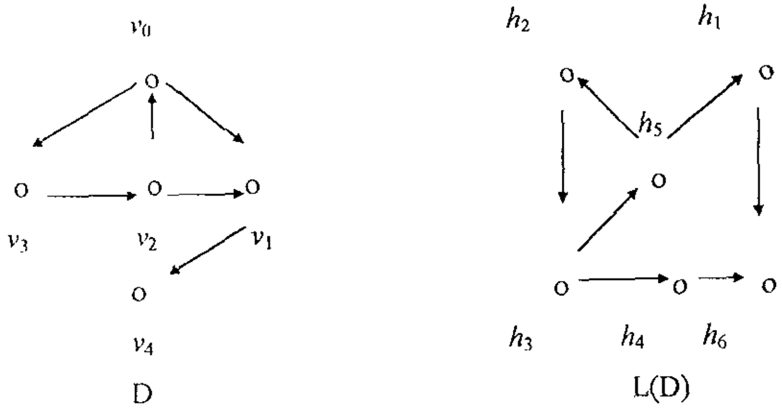


FIG 1 1

Donde :

$D = (V , F)$

$|V| = 5$

$|F| = 6$

$|V(L(D))| = |F| = 6$

$L(D) = (F , W)$

$|F| = 6$

$|W| = 7$

$$\sum_i \delta^-_D(v_i)\,\delta^+_D(v_i) = (1)(2) + (2)(1) + (1)(2) + (1)(1) + (1)(0)$$

$$= 2 + 2 + 2 + 1 = 7 = |W|.$$

Con $h_1 = (v_0 , v_1)$, $h_2 = (v_0 , v_3)$, $h_3 = (v_3 , v_2)$, $h_4 = (v_2 , v_1)$, $h_5 = (v_2 , v_0)$ y $h_6 = (v_1 , v_4)$.

$\delta^-_{L(D)}(h_1) = 1 = \delta^-_D(v_0)$ y $\delta^+_{L(D)}(h_1) = 1 = \delta^+_D(v_1)$

$\delta^-_{L(D)}(h_2) = 1 = \delta^-_D(v_0)$ y $\delta^+_{L(D)}(h_2) = 1 = \delta^+_D(v_3)$

$\delta^-_{L(D)}(h_3) = 1 = \delta^-_D(v_3)$ y $\delta^+_{L(D)}(h_3) = 2 = \delta^+_D(v_2)$

$\delta^-_{L(D)}(h_4) = 1 = \delta^-_D(v_2)$ y $\delta^+_{L(D)}(h_4) = 1 = \delta^+_D(v_1)$

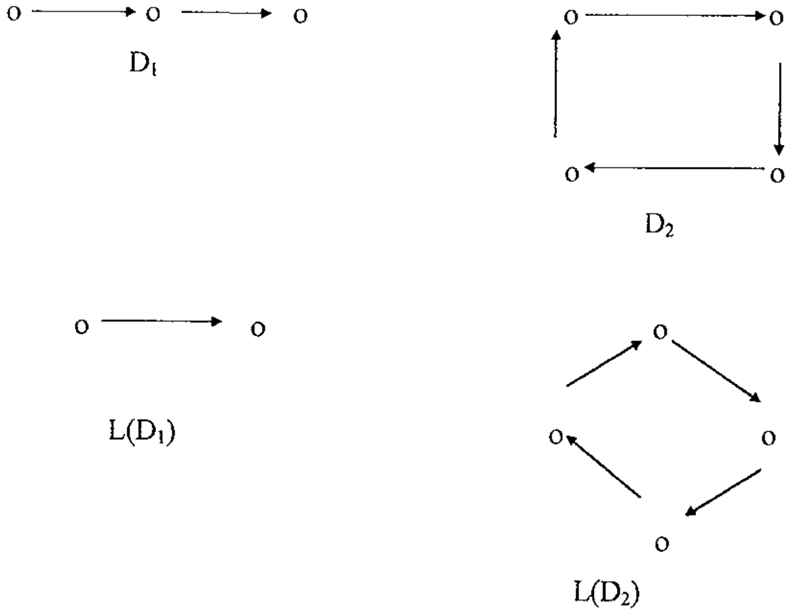


FIG 1.2

Definición No. 1. 25

A $L^n(D)$ la llamamos ***digráfica de líneas n - iterada*** y la definimos como sigue:

$$L^0(D) \cong D,\ L^1(D) \cong L(D) \text{ y } L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D)) \text{ para } n > 1.$$

Lema **1. 1**

Sea D una digráfica, todo uv - camino dirigido $\overrightarrow{C}$ en D de longitud m contiene una uv - trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ de longitud a lo más m.

Demostración :

La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino dirigido $\overrightarrow{C}$

Sea D una digráfica y C un camino dirigido contenido en D.

a) Con $m = 1$, la longitud de $\overrightarrow{C}$ es uno, por lo que $\overrightarrow{C} = (v_0 , v_1)$ y como $\overrightarrow{C}$ no tiene lazos $(v_0 \neq v_1)$ entonces $\overrightarrow{C} \cong \overrightarrow{T_1}$.

b) Hipótesis de inducción: En una digráfica D todo camino dirigido $\overrightarrow{C}$ de longitud $n < m$ contiene una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ de longitud a lo más n.

c) Por demostrar que en la digráfica D todo camino dirigido de longitud m contiene una trayectoria dirigida de longitud a lo más m.

Sea $\overrightarrow{C} = (v_0 , \dots , v_s , v_{s+1} , \dots , v_t , \dots , v_m)$ un camino dirigido en D de longitud m, tenemos dos casos :

1er Caso.- No hay vértices repetidos en $\overrightarrow{C}$. En este caso $\overrightarrow{C} \cong \overrightarrow{T_m}$.

2° Caso.- Hay al menos un vértice que se repite en $\overrightarrow{C}$. Sea $v_s = v_t$ un par de vértices en $\overrightarrow{C}$ con $s \neq t$ y $s < t$.

Tomemos el camino dirigido $\overrightarrow{C'} = (v_0 , \dots , v_s , v_{t+1} , \dots , v_m)$ donde $\overrightarrow{C'}$ es un camino dirigido en D de longitud $m - (t - s)$ y como $s < t$, la longitud de $\overrightarrow{C'}$ es menor que m. Por hipótesis de inducción $\overrightarrow{C'}$ contiene una trayectoria de longitud a lo más $m - (t - s) < m$.

$\therefore$ $\overrightarrow{C}$ contiene una trayectoria dirigida de longitud menor que m.

Teorema No. 1.2

Si D es una digráfica entonces:

1) $L^n(D)$ es una digráfica nula, para alguna n, si y sólo si D no tiene ciclos dirigidos .

2) Si D tiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida (posiblemente de longitud cero) entonces :

$\lim_{n \to \infty} P_n = \infty$, donde P_n es el número de vértices en $L^n(D)$.

Demostración :

1)

$\Rightarrow$] Demostraremos por contrapositiva que si D es una digráfica que contiene al menos un ciclo dirigido, $L^n(D)$ es no nula para toda n.

Sea D una digráfica tal que contiene al menos un ciclo dirigido. Probaremos por inducción sobre n que $L^n(D)$ es no nula para n en el conjunto de los números naturales.

a) Con n= 0.

$L^0(D) \cong D$ que por hipótesis tiene un ciclo dirigido y por lo tanto no es nula.

Con n = 1.

$L^1(D) \cong L(D)$.

Como D tiene al menos un ciclo dirigido por el teorema 1.1. 5) $L^1(D)$ contiene también un ciclo dirigido.

$\therefore$ $L^1(D)$ es no nula y contiene un ciclo dirigido.

b) Hipótesis de inducción: Si D es una digráfica que contiene al menos un ciclo dirigido entonces $L^{n-1}(D)$ es no nula para $n > 1$ y contiene al menos un ciclo dirigido.

c) Sea D una digráfica tal que contiene al menos un ciclo dirigido por demostrar que $L^n(D)$ es no nula.

Sabemos por la definición 1.25. que $L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D))$, además por hipótesis de inducción $L^{n-1}(D)$ es no nula y contiene al menos un ciclo dirigido, entonces por el primer paso de inducción aplicado a $L^{n-1}(D)$, $L^n(D)$ es no nula.

$\Leftarrow$] Supongamos que D es una digráfica que no contiene ciclos dirigidos. Por demostrar que $L^n(D)$ es una digráfica nula para alguna n.

La demostración se hará por inducción sobre la longitud de una trayectoria dirigida en D de longitud máxima.

1° Sea D una digráfica tal que la máxima longitud de una trayectoria dirigida en D es 1. Por demostrar que L(D) es una digráfica nula.

Supongamos por reducción al absurdo que existe $h = (a_1, a_2) \in W$ con a_1, a_2 en F(D) donde el vértice final de a_1 es el vértice inicial de a_2 en D. Dichas flechas inducen en L(D) una trayectoria dirigida de longitud 1, pero si esto ocurre, entonces existe en D una trayectoria dirigida de longitud 2, a saber la que inducen los vértices de las flechas a_1 y a_2 Lo cual contradice la hipótesis de que en D la máxima longitud de una trayectoria dirigida es 1.

2^o Hipótesis de inducción: Si D^1 es una digráfica tal que la máxima longitud de una trayectoria dirigida en ella es $n \geq 2$ entonces $L^n(D^1)$ es nula

3^o Sea D una digráfica tal que la máxima longitud de una trayectoria dirigida en ella es n+1. Por demostrar que $L^{n+1}(D)$ es nula.

Observación :

$L^{n+1}(D) \cong L(L^n(D)) \cong L^n(L(D))$. Claramente estas igualdades son ciertas si partimos de la definición de digráfica de líneas n - iterada .

La máxima longitud de una trayectoria dirigida en L(D) es n. Por reducción al absurdo supongamos que existe una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ en L(D) de longitud mayor que n.

$\overrightarrow{T} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ con $m > n$.

Por el teorema 1.1. 5), tenemos en D una trayectoria dirigida de longitud m+1, donde m+1 > n+1, lo que contradice que la trayectoria dirigida de longitud máxima en D es de longitud n+1.

Por otra parte si $\overrightarrow{T} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})$ es una trayectoria dirigida en D de longitud n+1 y $a_i = (u_i, u_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n$ entonces $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida de longitud n contenida en L(D).

Así la máxima longitud de una trayectoria dirigida en L(D) es n.

$\therefore$ Por hipótesis de inducción aplicada a L(D) tenemos que

$L^n(L(D))$ es nula, esto es, $L^{n+1}(D)$ es nula.

2) Demostraremos la siguiente proposición:

Sea D una digráfica que contiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida (posiblemente de longitud cero) entonces $L^n(D)$ tiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida de longitud al menos n.

La demostración se hará por indución sobre n.

a) Para $n = 0$, $L^0(D) \cong D$ que por hipótesis cumple.

Afirmación .(1)

Si en D existen dos ciclos dirigidos $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ unidos por una trayectoria dirigida de longitud K (que tienen en común con $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ solamente los extremos)* entonces en L(D) existen ciclos dirigidos $\overrightarrow{C_1}°$ y $\overrightarrow{C_2}°$ de la misma longitud unidos por una trayectoria dirigida de longitud K+1 que sólo tienen en común con los ciclos los extremos.

* Sea $\overrightarrow{T_1}$ una trayectoria dirigida en D de $\overrightarrow{C_1}$ a $\overrightarrow{C_2}$. Sea x el último vértice de $\overrightarrow{T_1}$ que esta en $\overrightarrow{C_1}$ y sea y el primer vértice de $\overrightarrow{T_1}$ posterior a x que está en $\overrightarrow{C_2}$ entonces la trayectoria dirigida de x a y en D contenida en $\overrightarrow{T_1}$, llamémosla $\overrightarrow{T}$, es una trayectoria dirigida de $\overrightarrow{C_1}$ a $\overrightarrow{C_2}$ que intersecta a $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ solo en los extremos.

Demostración :

Sea D una digráfica tal que contiene dos ciclos dirigidos $\overrightarrow{C_1} = (u_0 ,\dots , u_m , u_0)$ y $\overrightarrow{C_2} = (v_0 ,\dots ,v_s , v_0)$unidos por una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T} = (w_0 ,\dots , w_k)$ de longitud K que va de $\overrightarrow{C_1}$ a $\overrightarrow{C_2}$ y cuyos puntos en común solo son los extremos de la trayectoria dirigida, es decir, $u_0 = w_0$ y $v_0 = w_k$. Entonces L(D) contiene un ciclo dirigido $\overrightarrow{C_1}^*$ por el teorema 1.1.5) y por la misma razón contiene también un ciclo dirigido $\overrightarrow{C_2}^*$ con $\overrightarrow{C_1}^* \cong \overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}^* \cong \overrightarrow{C_2}$ además de una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}^*$ de longitud K−1 (esta trayectoria dirigida la obtenemos de $\overrightarrow{T}$ como en la demostración del teorama 1.1 4)).

Así $((u_m , u_0) , (u_0 , w_1), \overrightarrow{T}^*, (w_{k-1} , w_k), (w_k , v_1))$ es una trayectoria dirigida en L(D) de longitud k+1 que une a los ciclos $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ en L(D) y tiene en común con ellos solamente los extremos, con $K \geq 0$.

b) Hipótesis de inducción: Sea D una digráfica que tiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida (posiblemente de longitud cero), entonces $L^n(D)$ tiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida de longitud $K \geq n$ que tiene en común con los ciclos únicamente los extremos .

c) Sea D una digráfica tal que contiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida posiblemente de longitud cero. Por demostrar que $L^{n+1}(D)$ contiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida de longitud mayor o igual a n+1 que tiene en común con los ciclos únicamente los extremos .

Sabemos que $L^{n+1}(D) = L(L^n(D))$, además por hipótesis de inducción y *Aff. (1)* aplicadas a D y $L^n(D)$ respectivamente tenemos que $L^{n+1}(D)$ contiene dos ciclos dirigidos unidos por una trayectoria dirigida de longitud K+1, y como $K \geq n$, $K+1 \geq n+1$.

$$\therefore \lim_{n \to \infty} P_n = \infty$$

En la figura 1.3 se ilustra el resultado del teorema anterior.

Corolario No. 1.2.1

Sea D una digráfica fuertemente conexa y $L^n(D) \cong D$ para alguna $n \geq 1$ entonces $L(D) \cong D$ y D es un ciclo dirigido.

Demostración :

Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que $L^n(D) \cong D$ para alguna $n \geq 1$.

Como D es fuertemente conexa y por el lema 1.1, se sigue que D tiene por lo menos un ciclo dirigido. Supongamos que al menos tiene dos ciclos dirigidos $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ entonces como D es fuertemente conexa existe una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ de $\overrightarrow{C_1}$ a $\overrightarrow{C_2}$ (posiblemente de longitud cero), y por el teorema 1.2 $L^n(D) \cong D$.

$\therefore$ D sólo tiene un ciclo dirigido $\overrightarrow{C_1}$.

Ahora demostraremos que D es un ciclo dirigido. Probaremos que todo vértice y toda flecha de D están contenidos en $\overrightarrow{C_1}$. La demostración se hará por reducción al absurdo.

a) Supongamos que $a_1 = (v_0, x) \in F(D)$ pero $a_1 = (v_0, x) \notin F(\overrightarrow{C_1})$. Como D es fuertemente conexa, existe un $x\,v_0$ -camino dirigido C que claramente no contiene a a_1, entonces si $C = (x, u_1, u_2, \dots, u_m, v_0)$ tenemos que

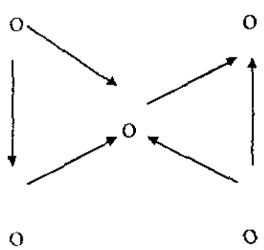
$(x, u_1, u_2, \dots, u_m, v_0, x)$ es un ciclo dirigido $\overrightarrow{C_2}$ distinto de $\overrightarrow{C_1}$ contenido en D, contradiciendo que D sólo tiene un ciclo dirigido.

$\therefore$ Toda flecha de D está contenida en $\overrightarrow{C_1}$.

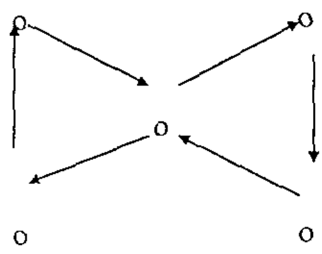
b) Supongamos que $x \in V(D)$ pero $x \notin V(\overrightarrow{C_1})$. Como D es fuertemente conexa, en particular D es conexa, entonces existe

$a = (x, y) \in F(D)$ tal que $y \in V(\overrightarrow{C_1})$ y $a \notin F(\overrightarrow{C_1})$, por otro lado existe un yx - camino dirigido $\overrightarrow{C}^* = (y, \dots, x)$ contenido en D tal que $(y, \dots, x, y)$ es un ciclo diferente a $\overrightarrow{C_1}$ contenido en D. Contradiciendo que en la digráfica D sólo hay un ciclo dirigido.

$\therefore$ $D \cong \overrightarrow{C_1}$ y $D \cong L(D)$ por el teorema 1.1.5).



D_1



D_2

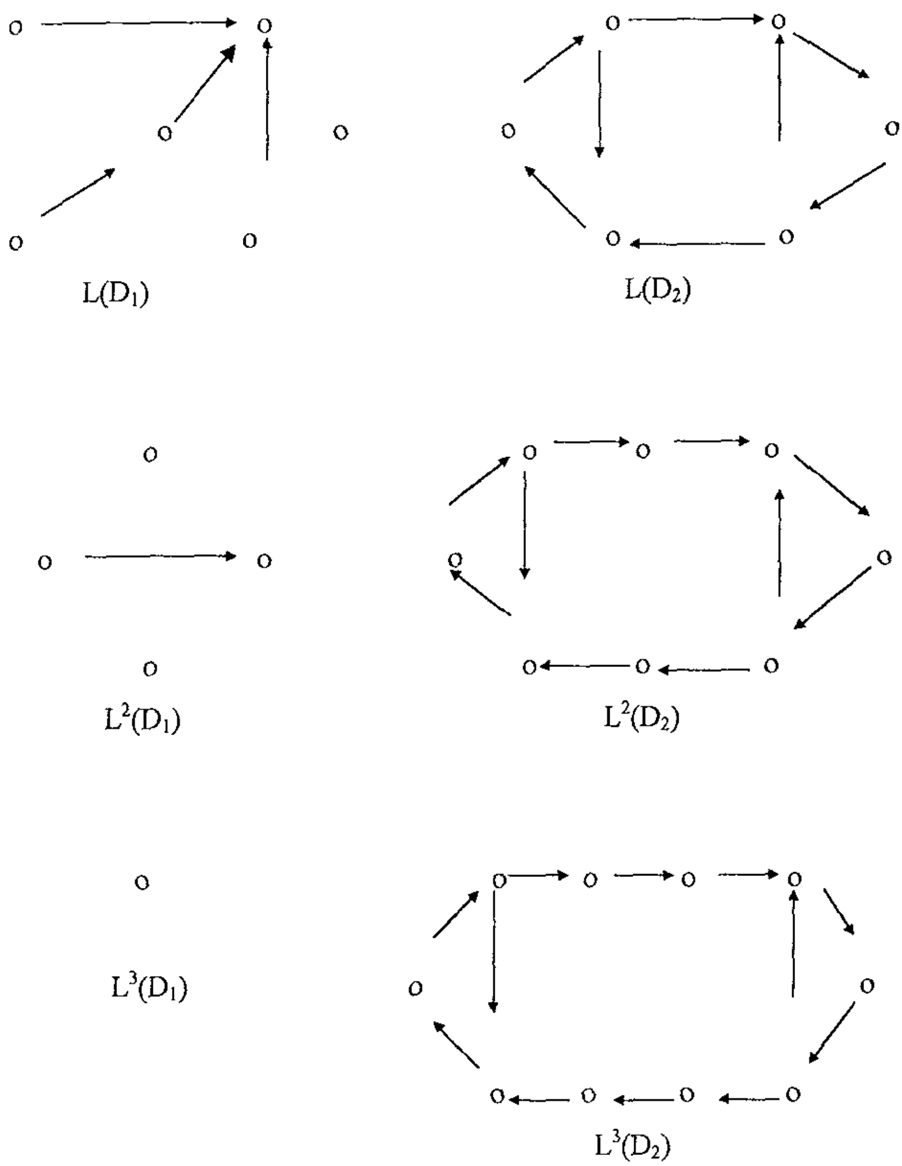


FIG 1.3

Teorema No. 1.3.

Si D es una digráfica con al menos tres vértices (ninguno aislado) entonces:

L(D) es fuertemente conexa si y sólo si D es fuertemente conexa.

<u>*Demostración*</u> :

$\Rightarrow$] Sea D una digráfica con al menos tres vértices, ninguno aislado y L(D) su correspondiente digrafica de líneas con L(D) fuertemente conexa.

Sean $\{u, v\} \subseteq$ V(D), como D no tiene vértices aislados entonces existe una flecha $h \in$ F(D) que entra o sale de u y también existe una flecha $k \in$F(D) que entra o sale de v. Tenemos entonces los siguientes casos :

a) u y v son los vértices finales de su flecha correspondiente en D.

b) u y v son los vértices iniciales de su flecha correspondiente en D.

c) u vértice final de h y v vértice inicial de k en D.

d) u vértice inicial de h y v vértice final de k en D.

Analicemos el caso a) Como L(D) es fuertemente conexa existe un camino dirigido $\vec{C}$ en L(D) de h a k. $\vec{C} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ con $a_0 = h$ y $a_m = k$ además $a_i = (u_i, u_{i+1})$, por lo cual $u_1 = u$ y $u_{m+1} = v$. Este camino dirigido en L(D) induce un camino dirigido $\vec{C}^*$ en D utilizando los vértices de las flechas del camino $\vec{C}$, así $\vec{C}^* = (u_0, u_1, \dots, u_m, u_{m+1})$ es un camino dirigido contenido en D y $(u_1 = u, \dots, u_m, u_{m+1} = v)$ es un uv - camino dirigido contenido en D.

Análogamente para los casos restantes.

$\therefore$ D es fuertemente conexa.

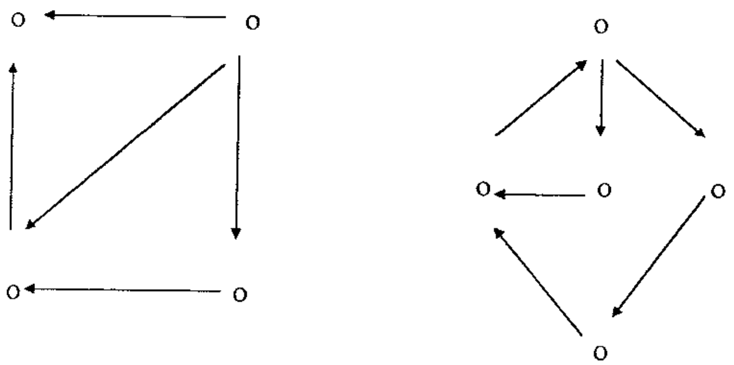
$\Leftarrow]$ Sean $h = (u_0 \ , u_1 \ )$ y $k = (v_0 \ , v_1 \ )$ en F(D), por la definición de L(D), $\{h \, , k\} \subseteq F$ (el conjunto de vértices en L(D)) y u_0 , u_1, v_0 , v_1 son vértices en D .

Por ser D una digráfica fuertemente conexa existe un camino dirigido $\overrightarrow{C}$ en D de u_1 a v_0, $\overrightarrow{C} = (x_0 = u_1 \ , x_1 \ , \ldots , x_n = v_0 \ )$ así este camino induce en L(D) un camino dirigido utilizando las flechas correspondientes $t_i = (x_{i+1} \ , x_i \ )$ para $1 \leq i \leq n$.

Finalmente el camino dirigido $\overrightarrow{C}^* = (t_0 = h \, , t_1 \ , \ldots , t_n \ , t_{m+1} = k)$ en L(D) es el camino dirigido buscado.

$\therefore$ L(D) es fuertemente conexa.

Un ejemplo claro del resultado de este teorema es un ciclo dirigido, otro ejemplo es la digráfica de la figura 1.4



D FIG 1 4 L(D)

Definición No. 1.26.

Una colección $\{ S_i \}_{i \in I}$ de subconjuntos (posiblemente vacíos) de un conjunto S es llamada una ***partición general*** de S sí $S = \cup_{i \in I} S_i$ y si $S_i \cap S_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

Definición No. 1.27.

Sean A y B dos conjuntos de vértices (no necesariamente ajenos, pero no ambos vacíos). Entonces la ***digráfica*** $\overrightarrow{K}(A, B)$ es aquella tal que el conjunto de vértices es $A \cup B$ y el conjunto de flechas es $A \times B$. A esta digráfica la llamaremos ***digráfica bipartita completa*** .

Teorema No. 1.4.

Sea H una digráfica y M su matriz de adyacencia entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

a) H es una digráfica de líneas;
b) Existen dos particiones generales $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{ B_i \}_{i \in I}$ de V(H) tal que $F(H) = \cup_{i \in I} \overrightarrow{K}(A_i, B_i)$;
c) Si $(v, w), (u, w)$ y (u, x) son flechas de H entonces (v, x) también,
d) Cualesquiera dos filas de M son idénticas o son ortogonales.
e) Cualesquiera dos columnas de M son idénticas o son ortogonales.

Demostración :

a $\Rightarrow$ b]

Sea $H \cong L(D)$, para alguna digráfica D. Para cada $v_i \in V(D)$ definimos los siguientes conjuntos: A_i el conjunto de flechas que entran a v_i y B_i el conjunto de flechas que salen de v_i. Toda flecha de D esta contenida en algún conjunto de los anteriores, por lo que todos los vértices de H están contenidos en $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcup_{i \in I} B_i$.

Claramente por la definición de los conjuntos A_i y B_i, $A_i \cap A_j = \varnothing$ y $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Así $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son dos particiones generales de los vértices de H.

Falta demostrar que $F(H) = \bigcup_{i \in I} \overrightarrow{K}(A_i, B_i)$ donde $\overrightarrow{K}(A_i, B_i)$ es la subdigráfica de L(D) inducida por $A_i \cup B_i$.

$\subseteq$] Sea $h = (a_j, a_{j+1}) \in F(H)$ entonces $a_j = (v_j, v_{j+1})$, $a_{j+1} = (v_{j+1}, v_{j+2})$ son flechas en D donde a_j es adyacente a a_{j+1}, es decir, el vértice final de a_j es el vértice inicial de a_{j+1}. Como la flecha $a_j \in A_{j+1}$ y $a_{j+1} \in B_{j+1}$ entonces $h \in \overrightarrow{K}(A_{j+1}, B_{j+1})$.

$\supseteq$] Sea $(a_i, b_i) \in \overrightarrow{K}(A_i, B_i)$ para alguna $i \in I$, entonces $a_i \in A_i$ y $b_i \in B_i$ por lo que $\{a_i, b_i\} \subseteq V(H)$, de donde $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ y $b_i = (v_i, v_{i+1})$, el vértice final de la flecha a_i es el vértice inicial de la flecha b_i, entonces por la definición 1.22 tenemos que a_i es adyacente a b_i, es decir, $(a_i, b_i) \in W = F(H)$.

Por lo tanto $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{ B_i \}_{i \in I}$ son dos particiones generales de V(H) tal que $F(H) = \bigcup_{i \in I} \overrightarrow{K}(A_i, B_i)$.

b) $\Rightarrow$ c)]

Supongamos que existen dos particiones generales de los vértices de V(D) $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{ B_i \}_{i \in I}$ tal que $F(H) = \bigcup_{i \in I} \overrightarrow{K}(A_i , B_i)$ y sean (v , w), (u ,w) y (u, x) en F(H) entonces por definición de A_i y B_i existen i, j,l tales que:

$(v , w) \in \overrightarrow{K}(A_i , B_i)$

$(u , w) \in \overrightarrow{K}(A_j , B_j)$

$(u , x) \in \overrightarrow{K}(A_l , B_l)$.

Como $B_i \cap B_j = \emptyset$ con $i \neq j$, pues $\{ B_i \}_{i \in I}$ es partición general de los vértices de H, $w \in B_i$ y $w \in B_j$ de aquí se sigue que $i = j$. Así tenemos que $\{v ,u \} \subseteq A_i$, pero $u \in A_l$ y puesto que $\{ A_i \}_{i \in I}$ es una partición general de los vértices de H, i = k.

$\therefore$ $v \in A_i$ y $x \in B_i$, así $(v , x) \in \overrightarrow{K}(A_i ,B_i)$ y por lo tanto

$(v , x) \in F(H)$.

c) $\Rightarrow$ d)]

Sea μ_i la i-ésima fila de $M = (m_{ij})$ y supongamos por contradicción que existen dos filas μ_i y μ_j tales que no son idénticas y no son ortogonales. Por lo que existen h y k tales que $m_{ih} = 1$ y $m_{jk} = 1$. Pero eso significa que (v_i , v_h), (v_i , v_k) y (v_j , v_k) son flechas de H mientras que (v_j , v_h) no lo es . Contradiciendo la hipótesis c).

$\therefore$ Cualesquiera dos filas o son idénticas o son ortogonales.

d) $\Leftrightarrow$ e)]

Basta señalar que el siguiente enunciado es equivalente:

Para cualesquiera i, j, h, k si $m_{ih} = m_{ik} = m_{jk} = 1$ entonces $m_{jh} = 1$.

d) $\Rightarrow$ c)]

Sean (v, w), (u, w) y (u, x) flechas de H, lo cual implica que existen las filas i,j y las columnas h, k tales que $m_{ih} = m_{ih} = m_{ik} = 1$. Como cualesquiera dos filas de M son iguales o son ortogonales y puesto que $m_{ih} = m_{jh} = 1$ entonces la fila i es igual a la fila j.

Por lo tanto $m_{ik} = 1$, es decir $(v, x) \in F(H)$.

c) $\Rightarrow$ b)]

Para cada i y j con $m_{ij} = 1$, sea $A_{ij} = \{ v_h \in V(H) \mid m_{hj} = 1 \}$ y sea $B_{ij} = \{ v_k \in V(H) \mid m_{ik} = 1 \}$. Entonces por c) A_{ij} es el conjunto de vértices cuyo vector fila en la matriz M es idéntico al i-ésimo vector fila, de igual manera para B_{ij} es el conjunto de vértices cuyos vectores columna en M son idénticos al vector fila j-ésimo.

A continuación demostraremos que sí $m_{ij} = m_{kj}$ entonces $A_{ij} = A_{kj}$ y $B_{ij} = B_{kj}$. Por otro lado si $m_{ij} = m_{ih}$ entonces $A_{ij} = A_{ih}$ y $B_{ij} = B_{ih}$.

Tomemos el caso $m_{ij} = m_{kj}$ entonces por la definición de nuestros conjuntos A_{ij} y A_{kj} tenemos que $A_{ij} = A_{kj} = \{ v_h \in V(H) \mid m_{ij} = 1 \}$ y por la definición de los conjuntos B_{ij} y B_{kj} tenemos $B_{ij} = \{ v_t \in V(H) \mid m_{it} = 1 \}$ y $B_{kj} = \{ v_r \in V(H) \mid m_{kr} = 1 \}$.

Falta demostrar que $B_{ij} = B_{kj}$.

Sea $v_s \in B_{ij}$, tenemos dos posibilidades :

a) si $v_s = v_j$, entonces $v_s \in B_{kj}$ puesto que $v_j \in B_{kj}$.

b) si $v_s \neq v_j$, $v_s \in B_{ij} \Leftrightarrow \exists\, m_{is} = 1$ (y como los renglones i y k son iguales) $\Leftrightarrow \exists\, m_{ks} = 1 \Leftrightarrow v_s \in B_{kj}$.

En el caso $m_{ij} = m_{ih}$, por la definición de nuestros conjuntos B_{ij} y B_{ih} tenemos que $B_{ij} = B_{ih} = \{ v_p \in V(H) |\, m_{ip} = 1 \}$ y por la definición de los conjuntos A_{ij} y A_{ih} tenemos

$A_{ij} = \{ v_s \in V(H) |\, m_{sj} = 1 \}$ y $A_{ih} = \{ v_l \in V(H) |\, m_{lh} = 1 \}$.

Falta demostrar que $A_{ij} = A_{ih}$.

Sea $v_r \in A_{ij}$, tenemos dos posibilidades:

a) si $v_r = v_i$, entonces $v_r \in A_{ij}$ puesto que $v_i \in B_{ij}$.

b) si $v_r \neq v_i$, $v_r \in A_{ih} \Leftrightarrow \exists\, m_{rh} = 1$ (y como las columnas i y h son iguales) $\Leftrightarrow \exists\, m_{rj} = 1 \Leftrightarrow v_r \in B_{ih}$.

De aquí concluimos que los conjuntos $A_{ij} = A_{ih} = A_{kj} = A_{kh}$ y también $B_{ij} = B_{ih} = B_{kj} = B_{kh}$ por lo que de el conjunto total de $m_{ij} = 1$ podemos hacer una selección para tomar solo los conjuntos distintos (pues por la condición de ortogonalidad A_{ij} y A_{hk} o son iguales o son ajenos, lo mismo sucede para B_{ij} y B_{hk}).

A continuación se describe el procedimiento para poder determinar los conjuntos que nos darán las particiones que necesitamos.

Primero tomaremos todo el conjunto de $m_{ij} = 1$.

Hacemos una primera revisión durante la cual eliminaremos aquellos elementos, los cuales coinciden en renglones y posteriormente una segunda revisión descartaremos aquellos elementos los cuales coinciden en columnas. Finalmente el conjunto que obtenemos es tal que si $m_{ij} = 1 = m_{hk}$ no fueron eliminados es porque $i \neq h$ y $j \neq k$.

Cabe mencionar que durante la segunda revisión tomamos en cuenta todos los m_{ij}, aún los ya eliminados.

Finalmente podemos concluir que los conjuntos A_{ij} y A_{hk} son ajenos si los subíndices son distintos y son iguales si alguno de los subíndices coinciden (con base en la aclaración anterior). Por lo cuál podemos tomar sólo un subíndice, en este caso tomaremos el primero.

Así A_{ij} X $B_{ij} \subseteq F(H)$ y $F(H) = U_{ij}$ A_{ij} X B_{ij}. Si existe un vector fila cero en M, sea A_i el conjunto de vértices cuyo vector fila en M es el vector cero y sea $B_i = \varnothing$. Haciendo lo mismo con los vectores cero columna de M obtenemos la partición requerida.

b) $\Rightarrow$ a)]

Sea D una digráfica tal que sus vértices son los pares ordenados (A_i, B_i) y con $|B_i \cap A_j|$ flechas de (A_i, B_i) a (A_j, B_j) para cada i,j (incluyendo i=j). Sea σ_{ij} una función uno a uno de $B_i \cap A_j$ sobre el conjunto de flechas de D, por ejemplo si $B_i \cap A_j = \{ a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ entonces por definición por cada elemento a_e ponemos una flecha f_e

Entonces la función σ definida en los vértices de H tomando σ de σ_{ij} es una función bien definida de V(H) sobre V(L(D)) ya que $\{ B_i \cap A_j\}_{i,j \in I}$ es una partición de los vértices de H (la intersección $[(B_i \cap A_j) \cap (B_h \cap A_k)] = \varnothing$ con $(B_i \cap A_j) \neq (B_h \cap A_k)$

puesto que tenemos tres posibles casos:

caso 1) $i \neq h,\ j \neq k$

$(B_i \cap A_j) \cap (B_h \cap A_k) = (B_i \cap B_h) \cap (A_j \cap A_k) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset.$

caso 2) $i \neq h$, $j = k$

$(B_i \cap A_j) \cap (B_h \cap A_k) = (B_i \cap B_h) \cap (A_j \cap A_k) = \emptyset \cap (A_j \cap A_k)$
$= \emptyset$

caso 3) $i = h$, $j \neq k$

$(B_i \cap A_j) \cap (B_h \cap A_k) = (B_i \cap B_h) \cap (A_j \cap A_k) = (B_i \cap B_h) \cap \emptyset$
$= \emptyset$, y además $U_{ij} (B_i \cap A_j) = V(H)$ pues:

$\supseteq$] $h \in V(H)$ entonces existe $i \in I$ tal que $h \in \{B_i\}_{i \in I}$ es partición de V(H) y existe $j \in I$ tal que $h \in A_j$ pues $\{A_i\}_{i \in I}$ es partición de V(H) . Por lo tanto $h \in B_i \cap A_j$.

$\subseteq$] Sea $a \in B_i \cap A_j$ entonces $a \in B_i$ y $a \in A_j$ y como $\{B_i\}_{i \in I}$ es partición de V(H). Por lo tanto $a \in V(H))$. Además σ es uno a uno y sobre ya que cada σ_{ij} lo es. Podemos ver que σ es un isomorfismo de H sobre L(D), si $(a , b) \in F(H)$ entonces existen i, j, k tales que $a \in B_i \cap A_j$ y $b \in B_j \cap A_k$ pues $(a , b) \in K\ (A_j\ ,B_j\ )$. De este modo $\sigma (a)$ es una flecha de D de (A_i ,B_i) a (A_j ,B_j) y $\sigma (b)$ es una flecha de D de (A_j,B_j) a (A_k,B_k).

Por lo tanto $(\sigma (a) , \sigma (b)) \in F(L(D))$.

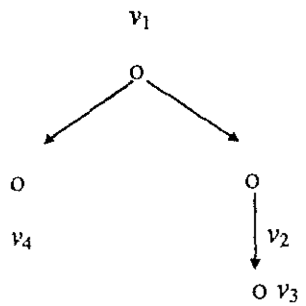
Observación:

$$|B_i \cap A_j| = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si $i = j$ y si $|B_i \cap A_j| > 0$ entonces D tendría al menos un lazo, lo cual no es posible por la definición 1.1.

Si $i \neq j$ $|B_i \cap A_j| = 1$ pues la función es uno a uno y D es una digráfica.

Para ejemplificar el resultado del teorema tomaremos dos digráficas que resultan ser a su vez una digráfica de líneas figura 1.5, este teorema nos da la caracterización de las digráficas de líneas.



H$_1$

$$M = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

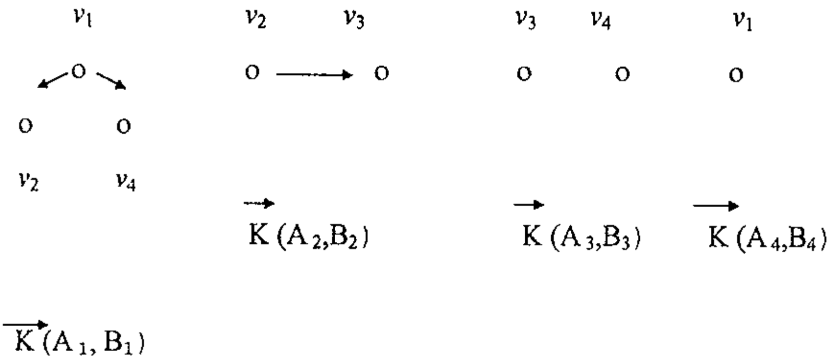
FIG 1.5

Según la demostración del teorema 1.4, para llegar a la digráfica D_1 (con $L(D_1) \cong H$).

Tomemos el conjunto $\{m_{12}, m_{14}, m_{23}\}$, al hacer la primera eliminación, tenemos que el conjunto se ha reducido a : $\{ m_{12}, m_{23} \}$ donde los subíndices de cada m_{ij} son distintos coordenada a coordenada .

Tomemos entonces el subíndice i para los conjuntos a formar, $A_1 = \{ v_0 \}$, $B_1 = \{v_2 , v_4\}$, $A_2 = \{ v_1 \}$ y $B_2 = \{v_2 \}$. Como en este caso tenemos filas y columnas iguales a cero, procederemos a formar los conjuntos $A_3 = \{ v_3 , v_4 \}$, $B_3 = \varnothing$, $A_4 = \varnothing$ y $B_4 = \{v_1 \}$.

Así obtenemos que $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{B_i \}_{i \in I}$ son particiones generales de los vértices de H y las digráficas bipartitas completas $\overrightarrow{K}(A_i, B_i)$ para $1 \leq i \leq 4$.



Finalmente tenemos que nuestra digráfica D_1 es la que ilustramos en la figura 1.6, esta digráfica la obtenemos a partir de la digráfica H_1 por medio de la función σ .

CAPÍTULO II
NÚCLEOS, SEMINÚCLEOS, CUASINÚCLEOS Y FUNCIONES DE GRUNDY EN DIGRÁFICAS Y DIGRÁFICAS DE LÍNEAS.

Definición No. 2. 1

Sea D una digráfica, $N \subseteq V(D)$ es un ***núcleo*** en D si y sólo si:

1) N es independiente, es decir, $\forall \{x, y\} \subseteq N$ x no es adyacente a y en D.

2) N es absorbente, es decir, $\forall\, x \in (V(D) \setminus N)\ \exists\, y \in N \ni (x, y) \in F(D)$.

Definición No. 2. 2

Sea D una digráfica, $S \subseteq V(D)$ es un ***seminúcleo*** en D sí y sólo sí:

1) S es independiente.

2) Si existe $(x, y) \in F(D)$ con $x \in S$ entonces existe $(x, z) \in F(D)$ con $z \in S$.

Definición No. 2. 3

Sea D una digráfica, un ***cuasinúcleo*** en D es un conjunto independiente de vértices $C \subseteq V(D)$ tal que:

$V(D) = C \cup \Gamma^{-}_{D}(C) \cup \Gamma^{-}_{D}(\Gamma^{-}_{D}(C))$, es decir, $\forall\, x \in (V(D) \setminus C)$ existe una trayectoria de longitud a lo más dos hacia el cuasinúcleo.

Definición No. 2. 4

Una función entera no negativa ***g(x)*** es llamada ***función de Grundy*** en una digráfica D si para todo vértice $x \in V(D)$, ***g (x)*** es el mínimo número entero no negativo tal que no pertenece al conjunto $\{ g(y) \mid y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)\}$.

Lema No. 2. 1

Sea D una digráfica, y ***g(x)*** una función entera no negativa, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) ***g(x)*** es función de Grundy.

2) ***g(x)*** cumple las siguientes propiedades:

i) Si $g(x) = k > 0$ entonces $\forall\ 0 \le j < k\ \exists\, y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ con $g(y) = j$.

ii) $g(x) = k$ implica que todo $y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ satisface que $g(y) \neq k$.

Demostración :

Sea D una digráfica y ***g(x)*** una función entera no negativa.

$1 \Rightarrow 2\,]$ Sea $x \in V(D)$ tal que $g(x) = k > 0$.

a) Por demostrar que $\forall\ 0 \le j < k\ \exists\, y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ con $g(y) = j$.

Sea $0 \le j < k$ y supongamos que no existe $y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ con $g(y) = j$, es decir, $\forall\, y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ $g(y) \neq j$, lo cual contradice que k sea el menor entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{ g(y) \mid y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)\}$.

$\therefore\ \exists\, y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$ con $g(y) = j$.

b) Por demostrar que si $g(x) = k$ entonces $\forall\ y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$, $g(y) \neq k$.

Sea $x \in V(D)$ tal que $g(x) = k$, por definición de función de Grundy $g(x) \notin \{ g(y) \mid y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)\}$ por lo tanto $g(x) \neq k$ para todo $y \in \Gamma^{+}{}_{D}(x)$.

$2 \Rightarrow 1$] Por demostrar que $\forall x \in V(D)$,

$g(x)$ = mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto

$\{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$.

Sea $x \in V(D)$ y $g(x) = k$.

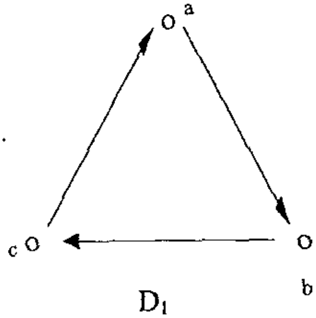
1° $g(x) \notin \{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$ por ii).

2° $g(x)$ es el mínimo que cumple $g(x) \notin \{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$, puesto que si no lo fuera, existiría $z \in V(D)$ tal que $g(z) = L$ que el mínimo entero no negativo tal que no esta en $\{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$, por lo tanto $0 \leq L < k$.

Por otro lado sabemos por i) que $\exists\, y \in \Gamma^+{}_D(x)$ con $g(y) = L$, contradiciendo que $L \notin \{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$.

$\therefore$ $g(x) = k$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece a $\{ g(y) \mid y \in \Gamma^+{}_D(x)\}$.

En la figura 2.1 se muestran algunas digráficas ejemplificando Núcleos, Seminúcleos, Cuasinúcleos y Funciones de Grundy.



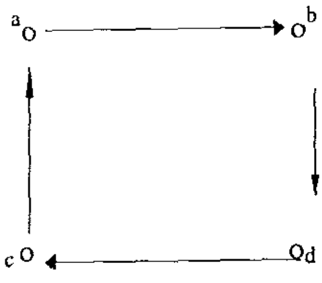
D_1

D_1 Tiene 3 cuasinúcleos :

$C_1 = \{a\}$

$C_2 = \{b\}$

$C_3 = \{c\}$



D_2

D_2 Tiene 2 núcleos :

$N_1 = \{a, d\}$ y $N_2 = \{b, c\}$

Tiene 2 cuasinúcleos :

$\mathbf{C_1} = \{a, d\}$ y $\mathbf{C_2} = \{b, c\}$

Tiene dos funciones de Grundy:

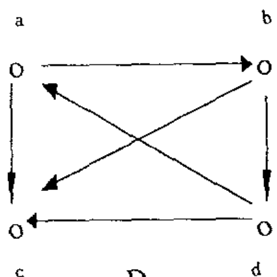
g_1: V(D) —— $N \cup \{0\}$ donde: y g_2: V(D) —— $N \cup \{0\}$ donde:

$g_1(a) = 0 = g_1(d)$

$g_1(b) = 1 = g_1(c)$

$g_2(a) = 1 = g_2(d)$

$g_2(b) = 0 = g_2(c)$.



D_3

D_3 Tiene un núcleo $N_1 = \{c\}$

Tiene un cuasinúcleo $\mathbf{C_1} = \{c\}$

FIG 2.1

Definición No. 2. 5

Sea D una digráfica y sea $f : P(V) \longrightarrow P(F)$ una función tal que para cada $Z \subseteq V(D)$, $f(Z) = \{ (u,x) \in F(D) | x \in Z \}$.

Notación : Utilizaremos el símbolo H_L cuando $H \subseteq F(H)$ juegue el papel de vértices en L(D).

Denotaremos con P(X) el conjunto de todos los subconjuntos de X y por Card (X) la cardinalidad del conjunto X .

Lema No. 2. 2.

Sea D una digráfica y si $Z \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente en $D = (V,F)$ entonces $f(Z)_L$ es un conjunto independiente en $L(D) = (F,W)$.

Demostración :

Sea $Z \subseteq V(D)$ un conjunto independiente. Sea $\{ h,k \} \subseteq f(Z)_L$, por demostrar que $(h,k) \notin W$, es decir $f(Z)_L$ es independiente.

Como $\{ h,k \} \subseteq f(Z)_L$, en D h y k son flechas cuyo vértice final esta en Z. Supongamos por reducción al absurdo que $(h,k) \in W$, por lo tanto el vértice final de h es el vértice inicial de k es decir son de la forma $h = (v_0, v_1)$ y $k = (v_1, v_2)$. Con $\{ v_0, v_1, v_2 \} \subseteq V(D)$, tenemos que v_1 es adyacente a v_2 pero $\{ v_1, v_2 \} \subseteq Z$ lo cual contradice que Z es independiente.

Por lo tanto $f(Z)_L$ es independiente.

Teorema No 2.1

Sea $D = (V,F)$ una digráfica, entonces el número de núcleos en D es igual al número de núcleos en su digráfica de líneas $L(D) = (F, W)$.

Demostración :

Sea K el conjunto de todos los núcleos en la digráfica D y sea K^* el conjunto de todos los núcleos en $L(D)$.

Observación $_1$:

Si $N \in K$ entonces $f(N)_L \in K^*$.

Demostración :

Sea N un núcleo en D, por el lema 2.2 $f(N)_L$ es independiente.

Sea $k = (a_1, a_2) \in F_L$ tal que $k \in (F_L \setminus f(N)_L)$, por demostrar que $(k,h) \in W$ para alguna $h \in F(N)_L$.

Por definición de $f(N)_L$, en D el vértice final de k no esta en N. Como N es un núcleo en D, en particular es absorbente, es decir, existe $a_3 \in N$ tal que $(a_2, a_3) \in F$. Llamemos $h = (a_2, a_3)$ como $a_3 \in N$, entonces $h \in f(N)_L$ y además $(h,k) \in W$, $f(N)_L$ es absorbente.

Por lo tanto $f(N)_L$ es un núcleo de $L(D)$.

Observación $_2$:

El mapeo $f' : K \longrightarrow K^*$ es inyectivo, donde f' es la restricción de f a K.

Demostración :

Sean $\{N_1, N_2\} \subseteq K$ tal que $N_1 \neq N_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(N_1 \setminus N_2) \neq \varnothing$. Sea $u \in (N_1 \setminus N_2)$, como N_2 es núcleo en

D, es absorbente, es decir, existe $v \in N_2$ tal que $(u, v) \in F$ por lo que $(u, v) \in f'(N_2)_L$. Por la independencia de N_1, $v \notin N_1$, así que $(u, v) \notin f'(N_1)_L$

Por lo tanto $f'(N_1)_L \neq f'(N_2)_L$, la función f' es inyectiva.

Observación $_3$:

Si $H_L \in K^*$ entonces $g(H) \in K$. Donde $g : P(F) \longrightarrow P(V)$ es una función tal que si $H_L \subseteq F_L$ entonces $g(H_L) = X(H_L) \cup Y(H_L)$ donde :

$X(H_L) = \{v \mid (u, v) \in H_L\}$ y

$Y(H_L) = \{u \mid \delta^-_D(u) = 0$ y u no es adyacente a ningún vértice de $X(H)\}$.

<u>*Demostración*</u>:

Sea H_L un núcleo en L(D), por demostrar que $g(H_L)$ es núcleo en D.

a) $g(H_L)$ es un conjunto independiente en D.

Sean $\{u, v\} \subseteq g(H_L)$, $\{u, v\} \subseteq V(D)$, entonces tenemos tres casos:

1) $\{u, v\} \subseteq X(H_L)$.

2) $u \in X(H_L)$ y $v \in Y(H_L)$.

3) $\{u,v\} \subseteq Y(H_L)$.

Caso 1) u es un vértice final de una flecha $h \in H_L$ y v es el vértice final de una flecha $k \in H_L$. Supongamos por reducción al absurdo que u y v son adyacentes, es decir, que $(u,v) \in F(D)$, tenemos dos casos:

1º Si $k = (u,v)$ entonces $(h,k) \in W$, lo cual contradice que H_L es independiente.

2º Si $k = (w,v) \neq (u,v) = d$ entonces como H_L es independiente , $d \notin H_L$ y como H_L es absorbente sabemos que existe $b = (v,z) \in H_L$ tal que

$(d,b) \in W$ puesto que el vértice final de k coincide con el vértice inicial de b, por lo que por la definición 1.22 $(k,b) \in W$ con $\{k,b\} \subseteq H_L$ contradiciendo que H_L es independiente. En consecuencia $(u,v) \notin F(D)$.

Caso 2) Por definición de Y(H), sí $v \in Y(H_L)$, v no es adyacente a ningún vértice de $X(H_L)$, $(v,u) \notin F(H_L)$ y como $\delta^-_D(v) = 0$, $(u, v) \notin F(H_L)$.

Caso 3) $\delta^-_D(u) = 0 = \delta^-_D(v)$, ninguno de ellos es vértice final de alguna flecha de D, por lo tanto no pueden ser adyacentes.

Por lo tanto $g(H_L)$ es un conjunto independiente en D.

b) $g(H_L)$ es un conjunto absorbente en D.

Sean $u \in (V(D) \setminus g(H_L)) = (V(D) \setminus (X(H_L) \cup Y(H_L)))$, entonces existen dos posibilidades:

i) $\delta^-_D(u) \neq 0$, u es vértice final de alguna flecha en D. En este caso existe $t = (y,u) \in F(D)$. Como $u \notin F(H_L)$ entonces $t \notin H_L$. Por ser absorbente H_L en $L(D)$ existe $k = (u,v) \in H_L$, con lo que implica que $v \in X(H_L)$, $v \in g(H_L)$.

ii) $\delta^-_D(u) = 0$ y es adyacente a algún vértice de $X(H_L)$, sea $v \in X(H_L)$ dicho vértice, entonces $(u,v) \in F(D)$ con $v \in g(H_L)$.

Observación 4:

La función $g' : K' \longrightarrow K$ es inyectiva, donde g' es la restricción de g a K'.

<u>*Demostración:*</u>

Sean $\{N_L, P_L\} \subseteq K'$ tales que $N_L \neq P_L$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(N_L \setminus P_L)$ es no vacío. Sea $h \in (N_L \setminus P_L)$, sea u el vértice final de h, por lo que $u \in g'(N)$. Como P_L es absorbente en L(D) y $h \notin P_L$, existe $k \in P_L$ tal que $(h, k) \in W$ y $k \in F(D)$. Sea v el vértice final de k, como $(h,k) \in W$, esto quiere decir que $v \in g'(P_L)$ y puesto que P_L es independiente en L(D), $u \notin g'(P_L)$, por lo tanto $g'(N_L) \neq g'(P_L)$.

Por lo tanto g' es una función inyectiva.

Finalmente por la observación 2 tenemos que $Card(K) \leq Card(K')$ y por la observación 4 tenemos que $Card(K') \leq Card(K)$. De lo que concluimos que $Card(K) = Card(K')$.

Corolario No. 2.1.1

Sea D una digráfica, D tiene núcleo si y solo si su digráfica de líneas L(D) tiene núcleo.

<u>*Demostración*</u> :

Se sigue inmediatamente del teorema 2.1

Teorema No. 2.2.

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno entonces el número de seminúcleos en D es menor o igual al número de seminúcleos en su digráfica de líneas L(D).

<u>*Demostración*</u> :

Sea ϖ el conjunto de todos los seminúcleos en D y ϖ' el conjunto de todos los seminúcleos en L(D).

Probaremos dos cosas, primero probaremos que un seminúcleo en D bajo la función f va a un seminúcleo en L(D) y segundo que la función f restringida a ϖ es inyentiva.

1° Sea S un seminúcleo en D. Por el lema 2.2 $f(S)_L$ es independiente en L(D). Sea $(s,h) \in W$ con $s \in f(S)_L$ entonces en D tenemos que $\{s=(s_1,s_2),\ h=(s_2,t)\} \subseteq F(D)$ con $s_2 \in S$, como S es seminúcleo en D y puesto que $h \notin f(H)_L$ (ya que S es independiente), $t \notin S$ y existe $s_3 \in S$ tal que $y=(t,s_3) \in F(D)$, con lo que $y=(t,s_3) \in f(S)_L$ $(h,y) \in W$.

Por lo tanto $f(S)_L$ es seminúcleo en L(D).

2° $f' : \varpi \longrightarrow \varpi'$ es una función inyectiva donde f' es la restricción de f a ϖ.

Sean $\{S_1,S_2\} \subseteq \varpi$ tal que $S_1 \neq S_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(S_1 \setminus S_2)$ es no vacío. Sea $v \in (S_1 \setminus S_2)$, ya que el ingrado de v es al menos uno, existe $(u,v) \in F(D)$, por la definición de f', $(u,v) \in (f'(S_1)_L \setminus f'(S_2)_L)$ (pues de lo contrario $v \in S_2$).

Por lo tanto $\text{card}(\varpi) \leq \text{card}(\varpi')$.

Definición No. 2.6.

Sea D una digráfica, y sea f la función definida en 2.5, denotaremos por f* a la función definida como sigue:

$$f^* : P(F) \longrightarrow P(V)$$

$$\forall\ A \subseteq F(D) \quad f^*(A) = \{x \in V(D) \mid (u,x) \in A\}.$$

Corolario No. **2. 2. 1**

Si D es una digáfica tal que para todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces D tiene un seminúcleo sí y sólo sí su digráfica de líneas L (D) tiene un seminúcleo.

Demostración :

$\Rightarrow$] Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno y supongamos que D tiene un seminúcleo S, por la demostración del teorema 2. 2 sabemos que $f(S)_L$ es un seminúcleo de L(D).

$\Leftarrow$] Si L(D) tiene un seminúcleo S entonces probaremos que $f^*(S)$ es un seminúcleo de D.

a) Demostraremos que $f^*(S)$ es independiente.

Por reducción al absurdo, supongamos que $f^*(S)$ no es independiente, entonces existen $\{x, y\} \subseteq f^*(S)$ tales que $(x, y) \in F(D)$. Como $x \in f^*(S)$, existe $u \in V(D)$ tal que $(u, x) \in S$. Entonces $((u, x), (x, y)) \in W$, además $(x, y) \notin S$ pues S es independiente. Así, como S es seminúcleo en L(D), existe una flecha $(y,v) \in F(D)$ con $v \in V$ tal que $(y,v) \in S$ y $((x, y), (y,v)) \in W$.

Como también $y \in f^*(S)$, entonces existe $t \in V(D)$ tal que $(t,y) \in S$. Entonces $((t,y), (y,v)) \in W$ y $\{(y,v), (t,y)\} \subseteq S$, lo que contradice que S sea independiente .

Por lo tanto $f^*(S)$ es independiente.

b) Demostraremos que si $y \in V(D)$ tal que tenemos una $f^*(S)\,y$ - flecha entonces existe $x \in f^*(S)$ tal que $(y,x) \in F(D)$.

Sea $y \in V(D)$ tal que existe una $f^*(S)\,y$ - flecha en D, es decir, existe $z \in f^*(S)$ tal que $(z,y) \in F(D)$. Como $z \in f^*(S)$ entonces existe $u \in V(D)$ tal que $(u,z) \in S$, por lo que $((u,z), (z,y)) \in W$ (claramente $(z, y) \notin S$ pues S es independiente en L(D)) es una $S\,(z,y)$ - flecha en L(D). Como S es un seminúcleo en L(D) entonces existe una (z,y) S - flecha en L(D), sea $(y,x) \in S$ tal que $((z,y), (y,x)) \in W$ donde por definición de f^*, $x \in f^*(S)$. Por lo tanto (y,x) es una $yf^*(S)$ - flecha en D.

$\therefore f^*(S)$ es seminúcleo de D.

Teorema No 2.3

Sea D una digráfica tal que cada vértice en D tiene ingrado mayor o igual a uno entonces el número de cuasinúcleos en D es menor o igual al número de cuasinúcleos en su digráfica de líneas L(D).

<u>*Demostración:*</u>

Sea Θ el conjunto de todos los cuasinúcleos en D y Θ' el conjunto de todos los cuasinúcleos en L(D).

Primero demostraremos que si Q es un cuasinúcleo en Θ, $f(Q)_L$ es cuasinúcleo en L(D).

Sea Q un cuasinúcleo en D, en particular Q es independiente y por el lema 2.2 $f(Q)_L$ es independiente.

Sea $h = (x,y) \in F_L$, de tal manera que $h \notin Q_L$, por esta razón $y \notin Q$. Como Q es un cuasinúcleo en D, existe una trayectoria dirigida de longitud a lo más dos hacia Q. Consideremos los dos casos posibles:

a) Si la longitud de la trayectoria de y hacia Q es uno, entonces existe $\overrightarrow{T} = (y,u)$ una trayectoria de longitud uno donde $u \in Q$. Llamemos $k = (y,u) \in f(Q)_L$, así h es adyacente a k en L(D).

Por lo tanto $(h, k) \in W$.

b) Si la longitud de la trayectoria de y hacia Q es dos, entonces existe $\overrightarrow{T} = (y, u, w)$ una trayectoria de longitud dos donde $w \in Q$. Sea $k = (u,w)$ en $f(Q)_L$ y denotamos por $b = (y,u)$, tenemos entonces que $\overrightarrow{T} = (h, b, k)$ es una trayectoria dirigida de longitud dos en L(D) con $k \in f(Q)_L$ (las flechas h, b, k son distintas pues $y \neq w \in Q$, D no tiene lazos y la trayectoria de y hacia Q es de longitud 2).

Ahora demostraremos que $f' : \Theta \longrightarrow \Theta'$ es una función inyectiva, donde f' es la restricción de f a Θ.

Sea $\{Q_1, Q_2\} \subseteq \Theta$, tales que $Q_1 \neq Q_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(Q_1 \setminus Q_2)$ es no vacío, sea $v \in (Q_1 \setminus Q_2)$. Por hipótesis sabemos que el ingrado de v es al menos uno, así que existe (x,v) en F(D) y como $v \notin Q_2$ entonces $(x,v) \in (f(Q_1)_L \setminus f(Q)_{2})_L)$. Por lo tanto $f(Q_1)_L \neq f(Q)_2)_L$.

Lema No. 2. 3.

Sea D una digráfica y $x_0 \in V(D)$. Si f_1 y f_2 son funciones de Grundy en D tal que para todo $y \in \Gamma^+_D(x_0)$ $f_1(y) = f_2(y)$, entonces $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Demostración :

La prueba se sigue inmediatamente de la definición de función de Grundy. Sea $x_0 \in V(D)$ y f_1, f_2 funciones de Grundy, $f_1(x_0)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{f_1(y) \mid y \in \Gamma^+_D(x_0)\}$, pero por hipótesis $\{f_1(y) \mid y \in \Gamma^+_D(x_0)\} = \{f_2(y) \mid y \in \Gamma^+_D(x_0)$, por lo tanto $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Teorema No 2.4

Sea D una digráfica tal que cada vértice tiene ingrado al menos uno entonces el número de funciones de Grundy en D es igual al número de funciones de Grundy en su digráfica de líneas L(D).

Demostración :

Supongamos que $f : V(D) \longrightarrow N \cup \{0\}$ es una función de Grundy en D. Denotamos por $f_L : V(L(D)) \longrightarrow N \cup \{0\}$ la función definida como sigue:

$$f_L(h) = f(x_2) \text{ para toda } h = (x_1, x_2) \in F(D).$$

Observación $_1$:

f_L es una función de Grundy en L(D).

Demostración :

Por el lema 2.1 basta demostrar que f_L cumple las dos siguientes propiedades:

(1) $f_L(h) = k > 0$ implica que para cada $0 \leq j < k$ existe $t \in \Gamma^+_{L(D)}(h)$ tal que $f_L(t) = j$.

Supongamos que $f_L(h) = k > 0$ y $0 \leq j < k$, entonces por definición de f_L, $h = (x_1, x_2) \in F(D)$ y $f(x_2) = k > 0$. Ya que f es una función de Grundy en D y $0 \leq j < k$ existe $x_3 \in \Gamma^+_D(x_2)$ tal que $f(x_3) = j$. Con lo que obtenemos que $t = (x_2, x_3) \in F(D)$ con $(h, t) \in W$ y $f_L(t) = j$, es decir, existe $t \in \Gamma^+_{L(D)}(h)$ tal que $f_L(t) = j$.

(2) $f_L(h) = k$ implica que para cada $t \in \Gamma^+_{L(D)}(h)$, $f_L(t) \neq k$.

Supongamos que $f_L(h) = k$ y $t \in \Gamma^+_{L(D)}(h)$, entonces por definición de f_L y de L(D), $h = (x_1, x_2)$ y $t = (x_2, x_3)$ ambos en F(D), $f(x_2) = k$ y $x_3 \in \Gamma^+_D(x_2)$, como f es una función de Grundy en D, se sigue que $f(x_3) \neq k$..

Por lo tanto $f_L(t) = f(x_3) \neq k$.

Observación 2.

Si f^1 y f^2 son funciones de Grundy en D tales que $f^1 \neq f^2$ entonces $f^1{}_L \neq f^2{}_L$.

Demostración :

Supongamos por contrapositiva que $f^1{}_L = f^2{}_L$ y $x_0 \in V(D)$, dado que el ingrado de x_0 es al menos uno, existe una flecha $(z, x_0) \in F(D)$. Por hipótesis tenemos que $f^1{}_L(z, x_0) = f^2{}_L(z, x_0)$, es decir $f^1(x_0) = f^2(x_0)$.

Sea $g: V(L(D)) \longrightarrow N \cup \{0\}$ una función de Grundy en L(D). Definamos $g_D: V(D) \longrightarrow N \cup \{0\}$ una función tal que para cada $x_0 \in V(D)$ y $t = (y, x_0) \in F(D)$ cualquier flecha de D, donde x_0 es su vértice final (el cual existe por hipótesis), $g_D(x_0) = g(t)$.

Observación 3.

g_D esta bien definida.

<u>*Demostración* :</u>

Sea $x_0 \in V(D)$, supongamos que $t_1 = (y_1, x_0)$ y $t_2 = (y_2, x_0)$ están en F(D).

Si $\Gamma^+_D(x_0) = \varnothing$ entonces $\Gamma^+_{L(D)}(t_1) = \Gamma^+_{L(D)}(t_2) = \varnothing$. Se sigue por la definición de función de Grundy que $g(t_1) = g(t_2) = 0$.

Si $\Gamma^+_D(x_0) \neq \varnothing$ entonces cada vecino exterior en D de x_0 será el vértice final de una flecha en L(D) por lo que dicha flecha es un vecino exterior de t_1 y t_2 en L(D), es decir, $\Gamma^+_{L(D)}(t_1) = \Gamma^+_{L(D)}(t_2)$, por la definición de función de Grundy tenemos que $g(t_1) = g(t_2)$.

Observación 4.

g_D es una función de Grundy en D.

<u>*Demostración* :</u>

a) $g_D(x) = k > 0$ implica que para cada $0 \leq j < k$ existe y $\Gamma^+_D(x)$ tal que $g_D(y) = j$.

Supongamos que $g_D(x) = k > 0$ y $0 \leq j < k$, por la definición de g_D y por hipótesis (cada vértice tiene ingrado al menos uno) tenemos que existe $t = (z, x) \in F(D)$ con $g(t) = k > 0$ y como g es una función de Grundy en L(D) existe t' en $\Gamma^+_{L(D)}(t)$ tal que $g(t') = j$ y $t' = (x, w)$ para algún $w \in V(D)$, $g_D(w) = g(t') = j$. Claramente $w \in \Gamma^+_D(x)$, hagamos $w = y$.

b) $g_D(x) = k$ implica que para cada $y \in \Gamma^+_D(x)$ $g_D(y) \neq k$.

Supongamos que $g_D(x) = k$, entonces existe $t = (z, x) \in F(D)$ tal que

$g(t) = k$. Sea $y \in \Gamma^{+}_{D}(x)$, por consiguiente $(x, y) \in \Gamma^{+}_{L(D)}(t)$. Ya que g es una función de Grundy en L(D), se sigue que $g(x,y) \neq k$. Por lo tanto $g_D(y) = g(x, y) \neq k$.

Observación 5.

Si g^1 y g^2 son funciones de Grundy en L(D) tales que $g^1 \neq g^2$ entonces $g^1{}_D \neq g^2{}_D$.

Demostración :

Supongamos que $g^1{}_D = g^2{}_D$. Sea $t = (x, y) \in F(D)$ entonces $g^1{}_D(y) = g^2{}_D(y)$. Por la definición de $g^1{}_D$ y $g^2{}_D$ tenemos que $g^1(t) = g^2(t)$ (pues $g^1(t) = g^1{}_D(y) = g^2{}_D(y) = g^2(t)$).

Finalmente por las observaciones 2 y 5 tenemos que el número de funciones de Grundy en D es igual al número de funciones de Grundy en L(D).

Corolario No 2.4.1

Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado mayor o igual a uno entonces, D tiene función de Grundy sí y sólo sí su digráfica de líneas L(D) tiene función de Grundy.

Demostración :

Se sigue inmediatamente del teorema 2.4.

Corolario No 2.4.2

Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado mayor o igual a uno entonces el número de funciones de Grundy en D es igual al número de funciones de Grundy en su digráfica de líneas n-iterada $L^n(D)$.

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre n.

Observación 1:

Por el teorema 1.1 inciso 3) el grado interior de (v,w) en F(D) es $\delta^{-}_{D}(v)$, por lo tanto por la hipótesis del corolario (de que todos los vértices de D tienen ingrado al menos uno), al iterar, en L(D) tenemos que el grado interior de cada vértice es mayor o igual a uno.

a) Por el teorema 2.4, es inmediato que se cumple para $n = 1$.

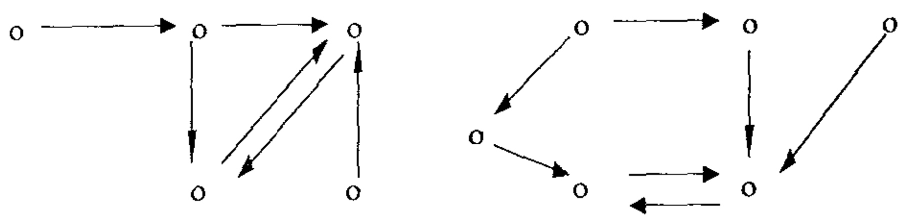
Para $n = 2$. Sea D una digráfica tal que tiene m funciones de Grundy, entonces L(D) tiene m funciones de Grundy. Sea $D_1 \cong L(D)$, por lo cual L(D) tiene m funciones de Grundy. Por la observación 1 y por el teorema 2.4 $L(D_1)$ contiene m funciones de Grundy. Por lo tanto $L^2(D) \cong L(D_1)$ tiene m funciones de Grundy.

b) Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para n-1, es decir, si D es una digráfica que tiene m funciones de Grundy entonces $L^{n-1}(D)$ tiene m funciones de Grundy.

c) Por demostrar que se cumple para n.

Sea D una digráfica tal que contiene m funciones de Grundy entonces por hipótesis de inducción L^{n-1} (D) tiene m funciones de Grundy. Tenemos que $L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D))$, por lo tanto, por la base de la inducción aplicada a $L^{n-1}(D)$ tenemos que $L^n(D)$ tiene m funciones de Grundy.

En la figura numero 2.2, mostramos algunas digráficas con sus respectivas digráficas de líneas. También ejemplificamos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo: 2.2 a) teorema 2.1, 2.2 b) teorema 2.2, 2.2 c) teorema 2.3, 2.2 d) teorema 2.4.



2.2 (a)

$N_1 = \{a, c\}$

$f(N_1) = \{2, 3, 4\}$

$N_2 = \{a, d, e\}$

$f(N_2) = \{6, 5\}$

$H_1 = \{2, 4, 3\}$

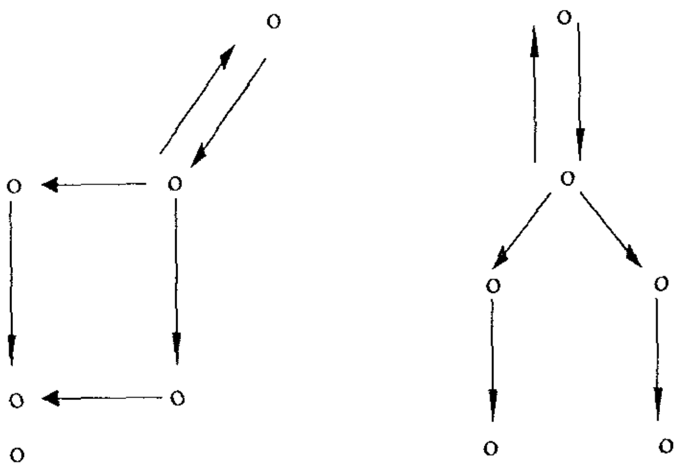
$X(H_1) = \{c\}$, $Y(H_1) = \{a\}$

$g(H_1) = \{a, c\}$

$H_2 = \{6, 5\}$

$X(H_2) = \{d\}$, $Y(H_2) = \{a, e\}$

$g(H_2) = \{a, d, e\}$



2.2 (b)

$S_1 = \{a\}$ $f(S_1) = \{5\}$

$S_2 = \{b , d\}$ $f(S_2) = \{6 ,2 , 3\}$

$S_3 = \{d\}$ $f(S_3) = \{3 , 2\}$ ademas :

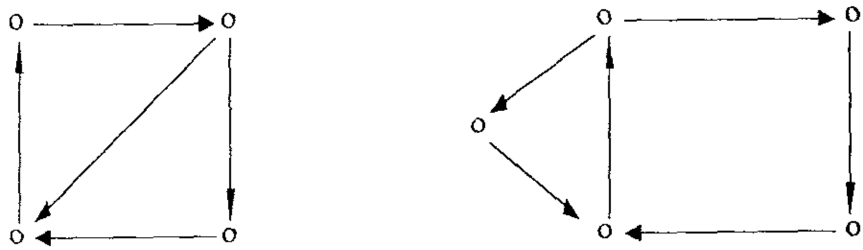
$S = \{2\}$

$S' = \{3\}$

$S_4 = \{a , d\}$ $f(S_4) = \{5 , 3 , 2\}$ ademas :

$S^* = \{5 , 2\}$

$S^{**} = \{5 ,3\}$



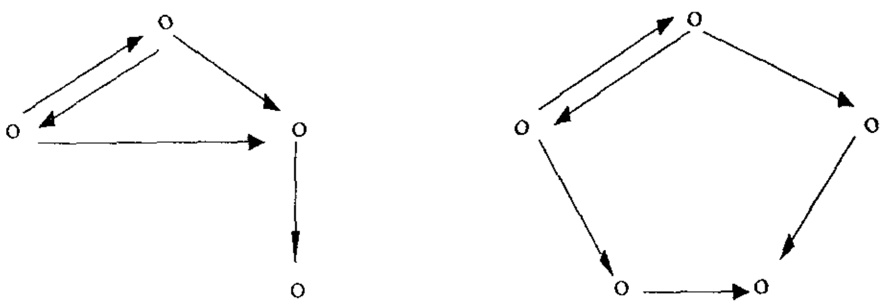
2.2 (c)

$C_1 = \{a , c\}$ $\qquad$ $f(C_1) = \{2 , 4\}$

$C_2 = \{a\}$ $\qquad$ $f(C_2) = \{4\}$

$C_3 = \{d\}$ $\qquad$ $f(C_3) = \{3 , 5\}$ además

$C' = \{1 , 3\}$



2 .2 (d)

Dadas las funciones f^1 y f^2 en la digráfica D_4, con los resultados obtenidos anteriormente podemos verificar que $f^1{}_L$ y $f^2{}_L$ definen una función de Grundy en $L(D_4)$; así como también g^1 y g^2 funciones de Grundy en $L(D_4)$ definen una función de Grundy en D_4.

$$f^1{}_L(a_1) = f^1(b) = 0$$
$$f^1{}_L(a_2) = f^1(a) = 2$$
$$f^1{}_L(a_3) = f^1(c) = 1$$
$$f^1{}_L(a_4) = f^1(c) = 1$$
$$f^1{}_L(a_5) = f^1(d) = 0$$

$$g^1(a) = g^1{}_D(a_2) = 2$$
$$g^1(b) = g^1{}_D(a_1) = 0$$
$$g^1(c) = g^1{}_D(a_3) = 1 = g^1{}_D(a_4)$$
$$g^1(d) = g^1{}_D(a_5) = 0$$

$$f^2{}_L(a_1) = f^2(b) = 2$$
$$f^2{}_L(a_2) = f^2(a) = 0$$
$$f^2{}_L(a_3) = f^2(c) = 1$$
$$f^2{}_L(a_4) = f^2(c) = 1$$
$$f^2{}_L(a_5) = f^2(d) = 0$$

$$g^2(a) = g^2{}_D(a_2) = 0$$
$$g^2(b) = g^2{}_D(a_1) = 2$$
$$g^2(c) = g^2{}_D(a_3) = 1 = g^2{}_D(a_4)$$
$$g^2(d) = g^2{}_D(a_5) = 0$$

CAPITULO III.
SEMINÚCLEOS Y (k, l) – NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS

Definición No. 3. 1

Sea D una digráfica y $\{x, y\} \subseteq$ F(D). La ***distancia dirigida*** de x a y en D, denotada por $d_D(x, y)$ es la longitud de la trayectoria dirigida más corta de x a y en D. Si en D existen $\{x, y\} \subseteq$ V(D) tales que no hay una xy - trayectoria dirigida, diremos que $d_D(x,y)$ es infinita.

Definición No. 3. 2

Sean k, l números naturales, con $k \geq 2$, $l \geq 1$. Un conjunto $J \subseteq$ V(D) es llamado **(k, l) - núcleo** si:

1) $\forall \{x, x'\} \subseteq J$ con $x' \neq x$ cumplen que $d_D(x, x') \geq k$.
2) $\forall y \in (V(D) \setminus J)$, existe $x \in J$ tal que $d_D(y, x) \leq l$.

Nótese que para $k = 2$, $l = 1$, tenemos que un $(2, 1)$ - núcleo es un núcleo y para $k = 2$, $l = 2$, un $(2, 2)$ - núcleo es un cuasinúcleo.

Teorema No. 3 . 1

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces el número de $(k, 1)$ - núcleos en su digráfica de líneas L(D) es menor o igual al número de $(k, 1)$ - núcleos en D, con $k \geq 2$.

Demostración :

1. Probaremos que si K^* es un $(k,1)$ -núcleo en L(D), entonces $f^*(K^*)$ es un $(k,1)$ - núcleo en D.

Sea K^* un $(k,1)$ - núcleo en L(D).

a) Por demostrar que: Si $\{x, x'\} \subseteq f^*(K^*)$ con $x \neq x'$, entonces $d_D(x, x') \geq k$.

Por reducción al absurdo supongamos que $d_D(x, x') = n < k$ ($k \geq 2$, por la definición de distancia dirigida $n \geq 1$). Sea $(x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n = x')$ una trayectoria dirigida (de longitud mínima n) de x a x' contenida en D, denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ para $1 \leq i \leq n$ y por el teorema 1.1. iv) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida en L(D) de longitud n-1.

Como $x \in f^*(K^*)$ entonces existe $a_0 = (u, x = x_0) \in K^*$ con $u \in V(D)$, además $(a_0, a_1) \in W$ por lo que $\overrightarrow{T} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida de longitud n en L(D) .

Tenemos las siguientes posibilidades:

i) Si $a_n = (x_{n-1}, x_n = x') \in K^*$, entonces $\overrightarrow{T}$ es una trayectoria dirigida de a_0 a a_n en D de longitud $n < k$ por lo que $d_D(a_0, a_n) \leq n < k$ con $\{a_0, a_n\} \subseteq K^*$ y $a_0 \neq a_n$, pues sus vértices finales (x y x' respectivamente) son distintos, lo cual contradice que K^* sea un $(k,1)$ - núcleo en L(D).

ii) Si $a_n = (x_{n-1}, x_n = x') \notin K^*$, como K^* es un $(k,1)$ - núcleo en L(D) existe $(x_n, z) \in K^*$ con $z \in V(D)$ ($z \in f^*(K^*)$) tal que $(a_n, (x_n, z)) \in W$.

Por otro lado $x_n = x' \in f^*(K^*)$ lo que nos implica la existencia de $(u,x_n) \in K^*$ con $u \in V(D)$, así $((u,x_n),(x_n,z)) \in W$ con $\{(x,x_n),(x_n,z)\} \subseteq K^*$, lo cual contradice que K^* sea $(k,1)$ - núcleo en L(D).

b) Si $y \in (V(D) \setminus f^*(K^*))$, entonces existe $x \in f^*(k^*)$ tal que $(y,x) \in F(D)$.

Sea $y \in (V(D) \setminus f^*(K^*))$, como $y \in V(D)$ entonces tiene ingrado al menos uno, es decir, existe $u \in V(D)$ tal que $(u,y) \in F(D)$, además como $y \notin f^*(k^*)$ entonces $(u,y) \notin K^*$. Así por la parte 2) de la definición 3.2 existe $(y,x) \in K^*$ con $x \in V(D)$ tal que $((u,y),(y,x)) \in W$ (pues K^* es un $(k,1)$ - núcleo en L(D)), entonces $(y,x) \in K^*$ con $x \in f^*(K^*)$.

$\therefore$ $f^*(K^*)$ es un (k,1) - núcleo en D.

2. Sea K_1 el conjunto de todos los $(k,1)$ - núcleos en L(D) y K el conjunto de todos los $(k,1)$ - núcleos en D. Probemos que la función $f^{*\prime}: K_1 \longrightarrow K$ es inyectiva, donde $f^{*\prime}$ es f^* restringida a K_1. Si K_1^*, K_2^* están en K_1 con $K_1^* \neq K_2^*$ entonces $f^{*\prime}(K_1) \neq f^{*\prime}(K_2)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $(K_1^* \setminus K_2^*) \neq \varnothing$ y sea $(u,v) \in (K_1^* \setminus K_2^*)$, por la definición 3.3 sabemos que $v \in f^{*\prime}(K_1^*)$ además de que $v \notin f^{*\prime}(K_2^*)$ (pues si lo estuviera entonces existiría $w \in V(D)$ tal que $(w,v) \in K_2^*$ y como $(u,v) \notin K_2^*$ y K_2^* es un $(k,1)$ - núcleo en L(D) entonces existe $(v,x) \in K_2^*$ tal que $((u,v),(v,x)) \in W$, pero $\{(w,v),(v,x)\} \subseteq K_2^*$, lo cual contradice la parte 1) de la definición 3.2).

$\therefore$ La función f*' es inyectiva.

Observación $_1$.

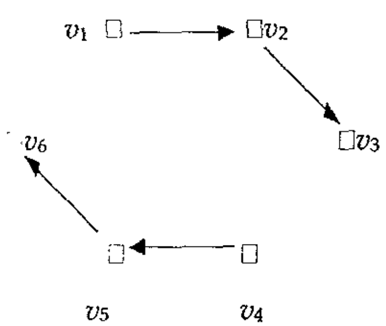
La hipótesis de que cada vértice debe ser de ingrado al menos uno, no puede ser omitida en el teorema. Porque para $k \geq 3$ es suficiente considerar la digráfica D con las siguientes características:

$V(D) = \{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6 \}$ y

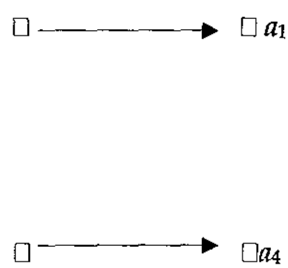
$F(D) = \{ (u_1 , u_2) , (u_2 , u_3) , (u_4 , u_5) , (u_5 , u_6) \}$.

D no tiene $(k,1)$ - núcleo mientras que L(D) tiene un $(k,1)$ - núcleo para $k \geq 3$.

D :



L(D):



D no tiene $(k ,1)$ - núcleos.

$J = \{ a_1 , a_4 \}$ es un $(k , 1)$ - núcleo en L(D).

Observación $_2$.

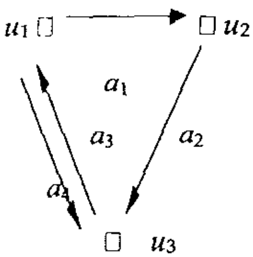
La desigualdad enunciada en el teorema puede ser estricta para $k \geq 3$.

Considere una digráfica D con las siguientes características:

$V(D) = \{ u_1 , u_2 , u_3 \}$ y

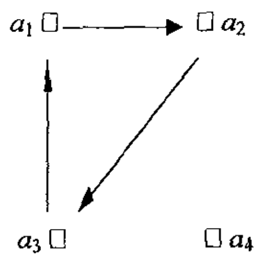
$F(D)=\{ (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_1), (u_1, u_3) \}$. Entonces D tiene un (k,1) - núcleo y L(D) no tiene (k,1) - núcleos para $k \geq 3$.

D:



$J = \{ u_3 \}$ es un (3,1) - núcleo.

L(D):



L(D) no tiene (3,1) - núcleo.

Teorema No. 3.2

Sea D una digráfica tal que todo vértice tenga ingrado al menos uno. Entonces el número de (k, l) - núcleos en D es menor o igual al número de $(2,l)$ - núcleos en L(D).

<u>*Demostración*</u> :

Primero probaremos que si K es un (k,l) - núcleo en D, con $k \geq 2$, entonces $f(K)$ es un $(2,l)$ - núcleo en L(D).

Sea K un (k,l) - núcleo en D.

a) Sean $\{ a, a' \} \subseteq f(K)$ con $a \neq a'$, por reducción al absurdo supongamos que $d_{L(D)}(a,a') < 2$, es decir, $d_{L(D)}(a,a') = 1$. Por la definición de distancia dirigida tenemos que el vértice final de a es el vértice inicial de a'. Sea $a = (x, y)$, $a' = (y,z)$ por la definición de la función **f** y como $\{ a, a' \} \subseteq f(K)$ entonces $\{ y, z \} \subseteq K$, pero $(y,z) \in F(D)$ contradiciendo que k ≥ 2 pues la distancia entre dos vértices distintos pertenecientes a un (k,l) - núcleo en L(D) es al menos dos, por lo tanto $d_{L(D)}(a,a') \geq 2$.

b) Sea $b = (u,v) \in (F(D) \setminus f(K))$, por la definición de la función **f** y como $b \notin f(K)$ entonces $v \notin K$, por ser K un (k,l) - núcleo en D, esto implica que existe $w \in K$ tal que $d_D(v,w) = n \leq l$.

Sea ($x_0 = v, x_1, \ldots, x_n = w$) la trayectoria dirigida en D de longitud mínima **n** que va de v a w y denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Dicha trayectoria dirigida nos determina la trayectoria dirigida $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en L(D) de longitud n-1 y finalmente $(b, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida en L(D) de longitud **n** que va de b a a_n, además como $a_n = (x_{n-1}, x_n = w)$ y $w \in K$ entonces $a_n \in f(K)$, sea entonces $a = a_n$. Por lo que $d_{L(D)}(b,a) \leq n < l$ con $a \in f(K)$.

$\therefore f(K)$ es un $(2, l)$ - núcleo de L(D).

Ahora probaremos que dado ***K*** el conjunto de todos los (k, l) - núcleos en D, para k $\geq$ 2, y $\boldsymbol{K}_2$ el conjunto de todos los $(2,l)$ - núcleos en L(D), la función $f' : \boldsymbol{K} \longrightarrow \boldsymbol{K}_2$ es inyectiva. Donde f ' es la restricción de f a K.

Sean $\{K_1, K_2\} \subseteq$ **K**, con $K_1 \neq K_2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $(K_1 \setminus K_2) \neq \varnothing$, entonces sea $v \in (K_1 \setminus K_2)$. Por hipótesis, todo vértice tiene ingrado al menos uno, por lo cuál existe $u \in V(D)$ tal que $(u,v) \in F(D)$ y por la definición de f, $(u,v) \notin f'(K_2)$, pero $(u,v) \in f'(K_1)$.

$\therefore f'(K_1) \neq f'(K_2)$.

Observación 1.

La hipótesis de que cada vértice tiene ingrado al menos uno no puede ser omitida en el teorema 3. 3 para $l \geq 2$. Consideremos la digráfica $D \cong \overrightarrow{T_2}$ una trayectoria dirigida de longitud 2; $L(D) \cong \overrightarrow{T_1}$ una trayectoria dirigida de longitud uno, D tiene dos $(2,l)$ - núcleos para $l \geq 2$ y L(D) tiene un sólo $(2,l)$ - núcleo para $l \geq 2$.

D :

$$x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} x_2$$

Los $(2,l)$ - núcleos son:

$J_1 = \{x_0, x_2\}$

$J_2 = \{x_2\}$

L(D) :

$$a_1 \longrightarrow a_2$$

$K = \{a_3\}$

Es el único $(2,l)$ - núcleo en L(D)

Observación 2.

La desigualdad que señala el teorema 3. 3 puede ser estricta, para $l \geq 2$. Consideremos $k > l+1$ y sea D una trayectoria dirigida de longitud k-1, la cual no tiene (k, l) - núcleo pero, $L(D) \cong \overrightarrow{T_{k-2}}$ tiene un (k,l) - núcleo, para alguna $l \geq 2$.

Observación 3.

Una consecuencia directa del teorema 3.2 y 3.3 es que si en la digráfica D tenemos que cada vértice tiene ingrado al menos uno, un núcleo es un (2,1) - núcleo. Y el teorema 2.3 es consecuencia directa del teorema 3.3, un cuasinúcleo es un (2,2) - núcleo.

Corolario No. 3. 2.1

Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno entonces el número de (2,l) - núcleos en D es menor o igual al número de (2,l) - núcleos en L(D).

Demostración :

Es una consecuencia inmediata del teorema 3. 2.

Teorema No. 3 .3

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si L(D) tiene un (k,l) - núcleo, entonces D tiene un (k',l') - núcleo, para $k'+l \leq k$ y $l \leq l'$.

Demostración :

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno y L(D) su digráfica de líneas. Sea K* un (k,l) - núcleo en L(D), demostraremos que f *(K*) es un (k',l') - núcleo en D, con $k'+l \leq k$ y $l \leq l'$.

a) Por contradicción, supongamos que la distancia entre dos elementos distintos de f *(K*) es menor que k', es decir, existen $\{x,y\} \subseteq$ f *(K*) con $x \neq y$ tales que $d_D(x,y) = n < k'$ y sea $\overrightarrow{T} = (x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima que va de x a y en D. Denotamos $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $\overrightarrow{T}$ nos induce una trayectoria dirigida $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de longitud n-1 en L(D). Como $x \in$ f *(K*), (y el ingrado de x en D es al menos uno), existe $u \in V(D)$ tal que $a = (u, x) \in K^*$. Así tenemos que $(a, a_1) \in W$ por lo tanto $(a, a_1, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida en L(D) de longitud **n**. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $a_n \in K^*$ entonces $\{a, a_n\} \subseteq K^*$ y $d_{L(D)}(a, a_n) \leq n < k' < k$ ($k' \leq k + l$, $l \geq 1$), contradiciendo que K^* es un (k, l) - núcleo en L(D).

2. Si $a_n \notin K^*$ entonces, como K^* es un (k, l) - núcleo en L(D), existe $b \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a_n, b) \leq l$, sea $\overrightarrow{T^*} = (b_0 = a_n, b_1, \ldots, b_m = b)$ una trayectoria de longitud $m \leq l$ que va de a_n a b en L(D), como $x_n = y \in f^*(K^*)$, entonces existe $c = (v, y) \in K^*$ así tenemos dos casos posibles:

i) Si $c \neq b$, y como c y $a_n = (x_{n-1}, x_n = y)$ tienen el mismo vértice final podemos sustituir en $\overrightarrow{T^*}$ b_0 por c, obteniendo así la trayectoria dirigida $(c, b_1, \ldots, b_m = b)$ de longitud m en L(D). Lo cual implica que $d_{L(D)}(c, b) \leq m \leq l < k$ (pues $k' + l \leq k$) y como $\{c, b\} \subseteq K^*$ esto contradice el hecho de que K^* es un (k, l) - núcleo en L(D).

ii) Si $c = b$, entonces $(a, a_1, \ldots, a_n = b_0, b_1, \ldots, b_m = c)$ es un camino dirigido que va de a a c en L(D) de longitud $n + m \leq k' + l$, lo cual implica que $d_{L(D)}(a, c) \leq k$ con $\{a, c\} \subseteq K^*$ y $a \neq c$ (esto es porque sus vértices finales x, y respectivamente son distintos), lo que contradice que K^* es un (k, l) - núcleo en L(D).

b) Sea $x \in V(D)$ tal que $x \notin f^*(K^*)$ por hipótesis sabemos que todo vértice en D tiene ingrado al menos uno, por lo que existe $u \in V(D)$ tal que $a = (u, x) \in F(D)$. Por la definición de la función f^*, $a \notin K^*$ y como K^*

es un (k, l) - núcleo en L(D), existe $a' \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a, a') = n \leq l$, es decir, existe una trayectoria dirigida $(a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = a')$ de longitud mínima n en L(D) sea $a' = (v, y)$. Así $y \in K^*$ y dicha trayectoria dirigida induce un camino dirigido en D de longitud n que va de x a y en D, por lo tanto $d_D(x, y) \leq n \leq l \leq l'$.

$\therefore$ D tiene un (k', l') - núcleo

con $k' + l \leq k$ y $l \leq l'$.

Teorema No 3.4

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si L(D) tiene un $(k., l)$ - núcleo K^* con la propiedad de que $l < k$ y $\forall\ a \in K^*\ \exists\ b \in K^*$ con $b \neq a$ tal que el vértice final de b es igual al vértice final de a entonces $f^*(K^*)$ es un (k, l) - núcleo en D.

Demostración :

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno y L(D) su digráfica de líneas, sea K^* un (k, l) - núcleo en L(D) con $l < k$ y donde todos los elementos en K^* tienen distintos vértices finales .

a) Sean $\{x, y\} \in f^*(K^*)$ con $x \neq y$, y por reducción al absurdo supongamos que $d_{L(D)}(x, y) = n < k$, entonces sea $\overrightarrow{T^1}(x_0 = x, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima n en D. Denotemos por $a = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ para $1 \leq i \leq n$, como $x \in f^*(K^*)$ entonces existe $a = (u, x) \in K^*$ con $u \in V(D)$, así la trayectoria dirigida $\overrightarrow{T^1}$ induce en L(D) una trayectoria dirigida $(a_1, \ldots, a_n)$ de longitud n-1 en L(D).

Como $(a, a_1) \in W$ entonces $\overrightarrow{T} = (a, a_1, \dots, a_n)$ es una trayectoria dirigida en L(D) de longitud n que va de a a a_n, debemos considerar dos casos :

Caso 1) **Si** $a_n \in K^*$, sabemos que $\{a, a_n\} \subseteq K^*$ y $d_{L(D)}(a, a_n) \leq n < k$ contradiciendo que dos elementos distintos (los vértices finales de a y a_n respectivamente son distintos por hipótesis) en K^* tienen distancia mayor o igual a k.

Caso 2) **Si** $a_n \notin K^*$, puesto que $y \in f^*(K^*)$ existe una flecha $b = (z, y) \in K^*$ cuyo vértice final es y. Como K^* es un (k, l) - núcleo en L(D) existe un elemento $c \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a_n, c) = m \leq l$. Hay dos posibilidades:

i) Si $c \neq b$.

Sabemos que $d_{L(D)}(a_n, c) = m \leq l$, es decir, hay una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T} = (c_0 = a_n, c_1, \dots, c_m = c)$ de longitud mínima m en L(D) y donde el vértice final de a_n es igual al vértice final de b. Así tenemos que en la trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ podemos sustituir a_n por b y $(b, c_1, \dots, c_m = c)$ es una trayectoria dirigida de longitud m en L(D), por lo tanto $d_{L(D)}(b, c) \leq m \leq l < k$ donde $\{b, c\} \subseteq K^*$ lo cual contradice que K^* sea un (k, l) – núcleo en L(D).

ii) Si $c = b$, entonces por hipótesis sabemos que existe $d \in K^*$ tal que el vértice final de b es igual al vértice final de d y $d \neq b$. Sabemos que $d_{L(D)}(a_n, c) = m < l$, es decir existe una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T} = (c_0 = a_n, c_1, \dots, c_m = c)$ de longitud mínima m en L(D), el vértice final de a_n es y que es también el vértice final de d (pues por hipótesis el vértice final de $b = c$ es el vértice final de d). Sustituyamos en la trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ el vértice a_n por el vértice d en L(D).

Finalmente tenemos que $(d , c_1 , \ldots , c_m = c)$ es una trayectoria dirigida de longitud m en L(D), lo cual implica que $d_{L(D)} (d , c) \leq m < l < k$ con $\{d,c\} \subseteq K^*$, contradiciendo que K^* es un (k, l) - núcleo en L(D).

b) Sea $x \in V(D)$ tal que $x \notin f^*(K^*)$, por hipótesis sabemos que $\delta^-_D(x) \geq 1$ por lo que existe una flecha $a = (y , x) \in F(D)$. Por la definición de f^* $a \notin K^*$ y puesto que K^* es un (k ,l) - núcleo en L(D), existe $b \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a , b) = n \leq l$.

Sea $\overrightarrow{T} = (a_0 = a , a_1 , \ldots , a_n = b)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima m en L(D) con $a_i = (x_i , x_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n$. Dicha trayectoria induce un camino dirigido $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , x_{n+1})$ en D de longitud $n \leq l$. Por lo tanto $d_{L(D)} (x_1 = x , x_{n+1}) \leq n \leq l$ con $x_{n+1} \in f^*(K^*)$.

$\therefore f^*(K^*)$ es un (k , l) - núcleo en D.

Corolario No. 3. 4 .1

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno y sea $1 \leq l < k$. Si cada (k , l) - núcleo K^* en L(D) satisface que para cada flecha $a \in K^*$, existe una flecha $b \in K^*$ tal que el vértice terminal de a y b son el mismo, entonces el número de (k , l) - núcleos en L(D) es menor o igual al número de (k , l) - núcleos en D.

<u>*Demostración* :</u>

Sean $1 \leq l < k$, K_1 en conjunto de todos los (k, l) - núcleos en L(D) sea K el conjunto de todos los (k, l) - núcleos en D, y sea

$f^{*'} : K_1 \longrightarrow K$ la función f^* restringida a K_1. Por el teorema 3.4 es suficiente probar que la función $f^{*'}$ es inyectiva.

Sean $\{K_1^*, K_2^*\} \subseteq K_1$ con $K_1^* \neq K_2^*$, supongamos sin pérdida de generalidad que $(K_1^* \setminus K_2^*) \neq \varnothing$. Sea $a = (u, v) \in (K_1^* \setminus K_2^*)$, por definición de f^*, $v \in f^{*'}(K_1^*)$ y $v \notin f^{*'}(K_2^*)$.

Pues si $v \in f^{*'}(K_2^*)$, existiría $b = (x, v) \in K_2^*$. Como $a \notin K_2^*$ y K_2^* es un (k, l) - núcleo en L(D), existe $c \in K_2^*$ tal que $d_{L(D)}(a, c) \leq l$ sea $\overrightarrow{T} = (a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = c)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima n en L(D) $(n \leq l)$. Tenemos dos posibilidades:

Si $b \neq c$, entonces como a y b tienen el mismo punto terminal, podemos sustituir en $\overrightarrow{T}$ a por b. Siendo $(b, a_1, \ldots, a_n = c)$ una trayectoria dirigida de longitud n en L(D). Por lo tanto $d_{L(D)}(b, c) \leq n \leq l$ con $\{b, c\} \subseteq K_2^*$ contradiciendo que K_2^* sea un (k, l) - núcleo en L(D).

Si $b = c$, por hipótesis, sabemos que existe una flecha $d \neq b$ tal que sus vértices finales coinciden (son el mismo), por lo cual el vértice final de d es v que es también el vértice final de a. Podemos sustituir a por b en $\overrightarrow{T}$ por lo cual $(d, a_1, \ldots, a_n = c = b)$ es una trayectoria dirigida de longitud n en L(D), es decir $d_{L(D)}(d, b) \leq n \leq l < k$ con $\{d, b\} \subseteq K_2^*$. Lo cual contradice que K_2^* sea un (k, l) - núcleo en L(D).

$\therefore f^{*'}(K_1^*) \neq f^{*'}(K_2^*)$, la función $f^{*'}$ es inyectiva.

Teorema No. 3. 5

Toda digráfica tiene un $(k, 2k-2)$ - núcleo.

<u>*Demostración*</u> :

La demostración se hará por inducción sobre la cardinalidad de V(D).

1° Sea D una digráfica con $|V(D)| = 1$, para esta digráfica el resultado es obvio.

2° Supongamos que si D' es una digráfica con $|V(D')| < n$, entonces D' tiene un $(k, 2k-2)$ - núcleo, y sea D una digráfica con $|V(D)| = n$.

Sea $x_0 \in V(D)$ y $D^* = D\,[V(D) \setminus \{x \in V(D) \mid d_D(x, x_0) \le k-1\}]$.

Claramente $|V(D^*)| < n$, y D^* tiene un $(k, 2k-2)$ - núcleo llamémoslo S^*.

Debemos considerar las dos siguientes posibilidades:

a) Si existe una trayectoria dirigida en D de longitud menor o igual que $k-1$, entonces S^* es un $(k, 2k-2)$ - núcleo en D.

b) Si no existe una trayectoria dirigida en D de x_0 y teniendo como vértice final un elemento de S^* de longitud menor o igual que $k-1$, entonces $S^* \cup \{x_0\}$ es un $(k, 2k-2)$ - núcleo en D.

Corolario No. 3.5 .1

Toda digráfica tiene un (k, l) - núcleo, para $l \ge 2k-2$.

<u>*Demostración*</u> :

Es una consecuencia directa del teorema 3. 5 y la definición 3. 2.

Corolario No. 3.5.2

Toda digráfica tiene un cuasinúcleo.

<u>*Demostración*</u> :

La prueba es una consecuencia directa del teorema 3.5, con $k = 2$, un cuasinúcleo es un $(2, 2)$ - núcleo.

CAPITULO IV.
NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS M – COLOREADAS.

Definición No. 4.1

Sea D una digráfica, una ***m-coloración*** de las flechas de D es una función suprayectiva $g: F(D) \longrightarrow M = \{ c_1, c_2, \ldots, c_m \}$ donde M es un conjunto de m colores distintos.

Si D tiene una m - coloración, diremos que D es una digráfica m - coloreada.

Definición No. 4.2

Sea D una digràfica m - coloreada y L(D) su digráfica de líneas; la ***m - coloración interior*** de L(D) es una función $g' : W \longrightarrow M$ que define una m - coloración de las flechas de L(D) y M es el conjunto de colores de la m - coloración de la digráfica D, g' esta definida como sigue:

$h \in F(D)$ y $g(h) = \mathbf{c}$ entonces $\forall (k, h) \in W$ $g'((k, h)) = \mathbf{c}$, es decir, si $h \in F(D)$ es de color $\mathbf{c}$ entonces toda flecha de la forma $(k, h) \in W$ es de color $\mathbf{c}$ en L(D).

Definición No. 4.3

Sea D una digráfica m - coloreada, un ***camino dirigido monocromático*** en D es un camino dirigido $\overrightarrow{C} = (v_0, \ldots, v_n)$ cuyas flechas $a_i = (v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ con $0 \leq i \leq n\text{-}1$, corresponden a un mismo color $\mathbf{c}$.

Definición No. 4.4

Sea D una digráfica m - coloreada, una ***trayectoria dirigida monocromática*** en D es una trayectoria dirigida $\overrightarrow{T} = (v_0, \ldots, v_n)$ cuyas flechas $a_i = (v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ con $0 \leq i \leq n\text{-}1$, corresponden a un mismo color c.

Definición No. 4.5

Sea D una digráfica m - coloreada, un subconjunto $N \subseteq V(D)$ es llamado ***independiente por trayectorias monocromáticas*** si $\forall \{u, v\} \in N$ con $u \neq v$, no existe una uv - trayectoria dirigida monocromática en D.

Definición No. 4. 6

Sea D una digráfica m - coloreada, un subconjunto $N \subseteq V(D)$ es llamado ***absorbente por trayectorias monocromáticas*** si $\forall\ x \in (V(D) \setminus N)$ existe $y \in N$ tal que hay una xy - trayectoria dirigida monocromática en D.

Definición No. 4.7

Sea D una digráfica m - coloreada y $N \subseteq V(D)$, decimos que el conjunto N es un ***núcleo por trayectorias monocromáticas*** en D si es independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas en D.

Lema No. 4.1

Sea D una digráfica m - coloreada, sean $\{x_0, x_n\} \subseteq V(D)$, $\overrightarrow{T} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ una trayectoria dirigida monocromática en D y $a_0 = (x, x_0) \in F(D)$ cuyo vértice final es x_0. Existe un $a_0 a_n$ - trayectoria dirigida monocromática en la m - coloración interior de L(D), donde $a_n = (x_{n-1}, x_n)$.

<u>*Demostración*</u> :

Sea D una digráfica m - coloreada, $\overrightarrow{T} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ una trayectoria dirigida monocromática de color **c** en D y $a_0 = (x, x_0)$ una flecha en F(D).

Denotamos por $a_i = (x_{i-1}, x_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Como $\overrightarrow{T}$ es una trayectoria dirigida de longitud n en D, entonces por el teorema 1.1 iv) $L(\overrightarrow{T}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida de longitud n - 1 en L(D). Además $(a_0, a_1) \in W$ puesto que el vértice final de $a_0 = (x, x_0)$ coincide con el vértice inicial de $a_1 = (x_0, x_1)$, lo que implica que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida en L(D).

Por otro lado sabemos que $\overrightarrow{T}$ es una trayectoria dirigida monocromática de color **c** en D y por la definición de la m - coloración interior de L(D), cada flecha (a_i, a_{i+1}) de la trayectoria dirigida $L(\overrightarrow{T})$ es de color **c**, además la flecha $(a_0, a_1) \in W$ tiene el mismo color que $a_1 \in F(D)$ dado por la m - coloración en D, entonces (a_0, a_1) es una flecha en L(D) de color **c**.

$\therefore$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida monocromática de color **c** en L(D).

Definición No. 4.8

Sea D una digráfica m - coloreada, un ***ciclo dirigido monocromático*** en D es un ciclo dirigido $\overrightarrow{C} = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$ cuyas flechas $a_i = (v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ con $0 \leq i \leq n-1$, corresponden a un mismo color **c**.

Lema No. 4.2

Sea D una digráfica m - coloreada sin ciclos dirigidos monocromáticos, $\{a_0, a_n\} \subseteq F(D)$. Si existe una $a_0 a_n$ - trayectoria dirigida monocromática en la m - coloración interior de L(D), entonces el punto terminal de a_0 es diferente al punto terminal de a_n y existe una trayectoria dirigida monocromática del punto terminal de a_0 al punto terminal de a_n en la m - coloración de D.

Demostración :

Sea $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ una trayectoria dirigida monocromática de color **c** en la m - coloración interior de L(D) y sean $a_i = (x_i, x_{i+1})$ con $0 \leq i \leq n$.
Así la trayectoria dirigida monocromática $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ describe un camino dirigido $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ en D.

Demostraremos que este camino dirigido contiene una trayectoria dirigida monocromática. Sabemos que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ es un camino dirigido monocromático (pues la coloración de todas las flechas a_i es **c**) y como D no contiene ciclos dirigidos monocromáticos, por lo tanto $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ con $1 \leq i \leq n+1$ y $1 \leq j \leq n+1$, en particular $x_1 \neq x_{n+1}$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ es una $x_1 x_{n+1}$ - trayectoria dirigida monocromática en D.

Lema No. 4.3

Sea D una digráfica m - coloreada sin ciclos dirigidos monocromáticos; si $Z \subseteq V(D)$ es independiente por trayectorias monocromáticas en D, entonces $f(Z)_L$ es independiente por trayectorias monocromáticas en la coloración interior de L(D).

<u>*Demostración*</u> :

Sea D una digráfica m - coloreada y $Z \subseteq V(D)$ un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D. Supongamos por reducción al absurdo que $f(Z)_L$ no es independiente por trrayectorias monocromáticas en la m - coloración interior de L(D).

Entonces existe $\{h=(u, v), k=(x, y)\} \subseteq f(Z)$ con $h \neq k$ tales que hay una hk - trayectoria dirigida monocromática en la m - coloración interior de L(D). Por el lema 2.2 el vértice final de h es distinto al vértice final de k y existe una vy - trayectoria dirigida monocromática en la m - coloración de D, donde por definición de la función f, $\{v, y\} \subseteq Z$. Lo cual contradice que Z sea independiente.

$\therefore$ $f(Z)_L$ es independiente por trayectorias monocromáticas.

Teorema No. 4.1

Sea D una digráfica m- coloreada sin ciclos dirigidos monocromáticos. El número de núcleos por trayectorias monocromáticas en D es igual al número de núcleos por trayectorias monocromáticas en la m- coloración interior de L(D).

<u>*Demostración*</u> :

Sea D una digráfica m - coloreada, denotamos por $\mathcal{K}$ al conjunto de todos los núcleos por trayectorias monocromáticas en D y por $\mathcal{K}^*$ al conjunto de todos los núcleos por trayectorias monocromáticas en la m - coloración interior de L(D).

a) Sea $Z \in \mathcal{K}$, por demostrar que $f(Z)_L \in \mathcal{K}^*$.

1) Probaremos que $f(Z)_L$ es independiente por trayectorias monocromáticas en la m - coloración interior de L(D).

Sabemos que Z es independiente por trayectorias monocromáticas y por el lema 4.3, $f(Z)_L$ es independiente por trayectorias monocromáticas en la m - coloración interior de L(D).

2) Por demostrar que $f(Z)_L$ es absorbente por trayectorias monocromáticas en la m - coloración interior de L(D).

Sea $h=(u,v) \in (W \setminus f(Z)_L)$, entonces por la definición de la función f, $v \in (V(D) \setminus Z)$. Por otro lado Z es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D, entonces existe $y \in Z$ tal que hay una vy - trayectoria dirigida monocromática en D.

Sea $\overrightarrow{T} = (x_0 = v, x_1, \ldots, x_n = y)$ una vy - trayectoria dirigida monocromática en D de color **c**, denotamos por $a_i = (a_{i-1}, a_i) \in W$ para $1 \leq i \leq n$, nótese que $a_n \in f(Z)_L$. Así la trayectoria dirigida $\overrightarrow{T}$ induce la trayectoria dirigida $\overrightarrow{T^*} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en la m - coloración interior de L(D) y como $\overrightarrow{T}$ es monocromática de color **c** entonces, cada flecha a_i es de color **c**. Como el vértice final de h es el vértice inicial de a_1, $(h, a_1) \in W$ y es de color **c**, por la definición 4.2.

Por lo tanto $(h, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una trayectoria dirigida monocromática (pues los vértices finales de h y a_n son v y y respectivamente con $v \neq y$, pues de lo contrario, $h \in f(Z)_L$) de color **c** con $a_n \in f(Z)_L$.

$\therefore$ $f(Z)_L$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas.

b) Demostraremos que $f' : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^*$ es una función inyectiva, donde f' es la restricción de la función f a $\mathcal{K}$.

Sean $\{Z_1, Z_2\} \subseteq \mathcal{K}$, con $Z_1 \neq Z_2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $(Z_1 \setminus Z_2) \neq \varnothing$. Sea $v \in (Z_1 \setminus Z_2)$, como $v \notin Z_2$ y Z_2 es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D, entonces existe $u \in Z_2$ tal que hay una vu - trayectoria dirigida monocromática en D.

Sea $\overrightarrow{T} = (x_0 = v, x_1, x_2, \ldots, x_n = u)$ una uv - trayectoria dirigida monocromática de color **c** en D, llamemos $h = \overrightarrow{(x_{n-1}, x_n = u)}$ a la última flecha de la trayectoria dirigida monocromática T, como Z_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en D, entonces $u \notin Z_1$ por lo que $h \notin f'(Z_1)$ y $h \in f'(Z_2)$ (pues $u \in Z_2$).

$\therefore$ f' es una función inyectiva.

Definimos a la función $g : P(F) \longrightarrow P(V)$ como sigue:

Si $H \subseteq P(F)$ entonces $g(H) = C(H) \cup D(H)$ donde:

$C(H) = \{ x \in V(D) \mid \exists (z, x) \in H \}$ y

$D(H) = \{ x \in V(D) \mid \delta^-_D(x) = 0$ y no existe $y \in C(H)$ tal que hay una xy - trayectoria dirigida monocromática en D$\}$.

c) Por demostrar que si $H_L \in \mathcal{K}^*$ entonces $g(H_L) \in \mathcal{K}$.

i) Sea $H_L \in K^*$ y sean $\{u, v\} \subseteq g(H_L)$ tales que $u \neq v$, por demostrar que $g(H_L)$ es independiente por trayectorias monocromáticas en D. Debemos considerar los diferentes casos:

Caso 1) $\{u, v\} \subseteq C(H_L)$.

Supongamos por reducción al absurdo que existe una uv - trayectoria dirigida monocromática $\overrightarrow{T} = (x_0 = u, x_1, \ldots, x_n = v)$ de color **c** en D, denotemos por $a_i = (x_i, x_{i+1})$ a las flechas de $\overrightarrow{T}$ para $0 \leq i \leq n-1$. Como $\{u, v\} \in C(H)$ entonces existe $\{h, k\} \in H$ tales que u es vértice final de h y v es vértice final de k, tenemos entonces dos posibilidades:

1) Si $a_{n-1} = k \in H$, entonces por el lema 4.1 sabemos que existe una hk - trayectoria dirigida monocromática en la m - coloración interior de L(D), contradiciendo que H es independiente por trayectorias monocromáticas en L(D) (pues $\{h, k\} \subseteq H$).

2) Si $k \neq a_{n-1}$, entonces $a_{n-1} \notin H$ (porque si lo estuviera, h tiene como vértice final a u que es vértice inicial de a_0, entonces $(h, a_0) \in W$, por lo que en la trayectoria dirigida monocromática $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de color **c** en la m - coloración interior de L(D) inducida por la trayectoria dirigida monocromática $\overrightarrow{T}$ en D, podemos agregar la flecha (h, a_0); por lo tanto $(h, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ es una trayectoria dirigida monocromática (por la definición 4.2 (h, a_0) es de color **c**) de color **c** en la m - coloración interior de L(D) donde $\{h, a_{n-1}\} \subseteq H_L$ con $h \neq a_{n-1}$ (pues los vértices finales son u y v respectivamente y por hipótesis $u \neq v$), contradiciendo que H sea independiente por trayectorias monocromáticas en L(D)).

Como H_L es absorbente por trayectorias monocromáticas y puesto que $a_{n-1} \notin H_L$, existe $b \in H$ tal que hay una $a_{n-1}b$ - trayectoria dirigida monocromática $\overrightarrow{T^*} = (b_0 = a_{n-1}, b_1, \ldots, b_m = b)$ de color c_1. Además sabemos que la flecha k tiene como vértice final a v que es el vértice inicial de a_{n-1}, por lo que en podemos sustituir a $a_{n-1} = b$ por k en la trayectoria $\overrightarrow{T^*}$.

Así $(k, b_1, \ldots, b_m = b)$ es una trayectoria dirigida en L(D) y por la definición 4.2 sabemos que (k, b_1) es de color c_1. Por lo tanto $(k, b_1, \ldots, b_m = b)$ es una trayectoria dirigida monocromática de color c_1 en la m - coloración interior de L(D), donde $\{k, b\} \subseteq H$ con $k \neq b$ (por el lema 4.2, sus vértices finales son distintos). Lo cual contradice que H sea independiente por trayectorias monocromáticas en L(D).

Caso 2) $u \in C(H)$ y $v \in D(H)$.

Como $v \in D(H)$, entonces $\delta_D^-(v) = 0$, por lo que no existe uv - trayectoria dirigida monocromática en D.

Caso 3) $u \in D(H)$ y $v \in C(H)$.

Como $u \in D(H)$ entonces no hay trayectorias dirigidas monocromáticas hacia C(H), en particular no hay una uv - trayectoria dirigida monocromática en D.

Caso 4) $\{u, v\} \subseteq D(H)$.

En este caso tenemos que $\delta_D^-(u) = 0$ y $\delta_D^-(v) = 0$, por lo que no existe una uv - trayectoria dirigida monocromática en D.

ii) Demostraremos que $g(H_L)$ es absorbente por trayectorias monocromáticas en D.

Sea $u \in (V(D) \setminus g(H_L))$ entonces $u \notin (C(H) \cup D(H))$, es decir, u no es el vértice final de alguna flecha en H y además, $\delta^{-}_{D}(u) > 0$ o existe una trayectoria dirigida monocromática de u hacia algún vértice en C(H). Tenemos entonces que considerar los dos casos siguientes:

Caso 1) Si u no es el vértice final de alguna flecha en H y $\delta^{-}_{D}(u) > 0$. Como $\delta^{-}_{D}(u) > 0$ entonces existe $v \in V(D)$ tal que $a_0 = (v, u) \in (F \setminus H)$. Puesto que H es un núcleo por trayectorias monocromáticas en L(D) entonces existe $a = (r, s) \in H$ tal que hay una $a_0\, a$ - trayectoria dirigida monocromática en L(D). Por el lema 4.2 $u \neq s$ y existe una us - trayectoria dirigida monocromática en D y como $a = (r, s) \in H$, $s \in g(H)$ por lo que g(H) es absorbente por trayectorias monocromáticas en D.

Caso 2) Si u no es el vértice final de alguna flecha en H y existe una trayectoria dirigida monocromática de u hacia algún vértice en C(H).

En este caso tenemos que existe $w \in C(H)$ tal que hay una uw - trayectoria dirigida monocromática en D, lo cual implica que hay una trayectoria dirigida monocromática de u hacia g(H).

$\therefore$ g(H) es absorbente

por trayectorias monocromáticas en D.

d) Finalmente demostraremos que la función $g' : \mathcal{K}^{*} \longrightarrow \mathcal{K}$ es inyectiva, donde g' es la restricción de g a $\mathcal{K}^{*}$.

Sean $\{N, P\} \subseteq \mathcal{K}^{*}$ con $N \neq P$, supongamos sin pérdida de generalidad que $(N \setminus P) \neq \varnothing$. Sea entonces $h = (t, u) \in (N \setminus P)$, $u \in g(N)$ y $u \notin g(P)$, como $P \in \mathcal{K}$ entonces es absorbente por trayectorias monocromáticas en D, existe

$k=(s\,,\,v)\in$ P tal que hay una hk - trayectoria dirigida monocromática de color **c** en la coloración interior de L(D).

Como $k=(s\,,\,v)\in$ P entonces $v\in$ g(P), por el lema 4.2, $u\neq v$ y existe una uv - trayectoria dirigida monocromática en D. g(P) es independiente por trayectorias monocromáticas en D, por lo que $u\notin$ g(P).

Por lo tanto $u\in$ (g(N)\g(P)), la función g es inyectiva.

$\therefore$ Por b) y d) tenemos:

$$\text{Card}\,K \leq \text{Card}\,K^{*} \leq \text{Card}\,K\,,\ \ \text{Card}\,K = \text{Card}\,K^{*}.$$

REFERENCIAS

1. G. Chartrand and L. Lesniak. Graphs and digraphs.The wadsworth & Brooks / Cole mathematics series. Second edition 1986. pp. 14 – 60.
2. G. Chartrand. Introductory graph theory. Dover publications (1985). pp. 147 – 155.
3. H. Galeana Sánchez and L. Pastrana Ramírez. Kernels in edge coloured line digraph. Discussiones Mathematicae, Graph theory 18 (1998). pp. 91 – 98.
4. C. Berge. La function de Grundy d' un graphe infini. C. R. Acad. Sciences, Paris 242 (1956). pp. 1404 – 1405.
5. R. L. Hemminger and J. b. Klerlein. Line pseudodigraphs. Graphs theory 1 (1977). pp. 365 – 377.
6. P. M. Grundy. Mathematics and Games. Eureka, 2 (1939). pp. 6-8.
7. P. I. Richards. Precedence constrants and arrow diagrams. SIAM Rev. 9 (1967). pp. 548 – 553.
8. H. Galeana Sánchez and Xueliang. Semikernels and (k , l) – kernels in digraphs. SIAM J. Discrete math. Vol 11 No. 2 (1998). pp. 340 – 346.
9. F. Harary and R. Z. Norman. Some Properties of line digraphs. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) (1960). pp.161- 168.
10. C. Heuchenne. Sur une certaine correspondance entre graphs. Bull. Soc. Roy Liege 33 (1964). pp. 743 – 753.
11. L. Pastrana Ramírez. Tesis: Gráficas y digráficas de líneas. México 1990. pp. 6 – 113.
12. J. Von Neumann and O. Morgenstern. Theory of games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press Princeton (1944).