01083

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Filosofía y Letras

17

LA PREHISTORIA DEL LOGICISMO

T E S I S

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN FILOSOFIA

p r e s e n t a

LUIS FELIPE SEGURA MARTINEZ

México, D. F. Mayo 2000

La Prehistoria del logicismo

Luis Felipe Segura Martínez

Agradecimientos

El presente trabajo no habría sido posible sin la concurrencia de una serie de circunstancias favorables y la ayuda generosa y bienintencionada de muchas personas que evitaron que los errores en él se multiplicaran más allá de lo que inclusive a mí mismo me hubiera parecido razonable. Deseo mencionar aquí sólo a algunas de las segundas y ofrecer mis disculpas por la omisión -que no por el olvido- al resto de ellas, pero una lista comprensiva habría sido demasiado extensa y, en última instancia, seguramente aún defectuosa.

En primer lugar, a mi excelente amigo José Antonio Robles, cuya actitud y permanente buen ánimo constituyeron para mí un estímulo constante. Los comentarios de Carlos Alvarez y Raúl Orayen fueron, asimismo, de gran valía y creo que permitieron la reparación, por lo menos parcial, de importantes limitaciones y errores en el análisis y la exposición del material que aquí se presenta. Marco Panza, Eckehardt Köhler y el profesor David Miller tuvieron la paciencia no sólo de leer, sino también, todavía, la de discutir conmigo diversas partes y problemas del escrito. Ojalá que sus esfuerzos no hayan sido completamente en vano. En especial, debo al penúltimo de ellos el acceso a ciertas fuentes que de otro modo difícilmente habrían llegado a mis manos.

Debo mencionar también a los estudiantes y amigos de la Maestría de Filosofía de la Universidad de Guadalajara, con quienes tuve oportunidad de trabajar en 1997 en un curso sobre las ideas lógicas de Bolzano que me permitió tanto un estudio en detalle de la *Wissenschaftslehre* como revisar, desde esa perspectiva, la primera gran *Crítica* de Kant. Estoy en deuda, asimismo, con dos ignotos dictaminadores de un artículo acerca de Frege, escrito en 1998 para la revista *Signos* de la Universidad Autónoma Metropolitana, por una buena cantidad de sugerencias y críticas a propósito del tema, la mayoría de las cuales espero haber considerado en el capítulo III.

La Sra. Teresa Luna, del Departamento de Filosofía de la UAM-Iztapalapa, tuvo la paciencia de imprimir y mejorar la presentación gráfica de las numerosas versiones de cada uno de las secciones del escrito.

Finalmente, quisiera mencionar a mi amigo Wolf y, con muy especial cariño, a Bibi y a Wisin y manifestarles mi agradecimiento por todos los buenos momentos.

A todos, con sinceridad y afecto muchas gracias.

Luis Felipe Segura
Enero del año 2000

Resumen de la tesis *La Prehistoria del logicismo* de Luis Felipe Segura Martínez

En esta tesis de doctorado se aborda críticamente el problema general de la relación entre lógica y matemáticas desde el punto de vista de los desarrollos, tanto en matemáticas como en la lógica filosófica, que desembocarían en el *logicismo*, esto es, en la tesis de que una parte sustantiva de las matemáticas (por lo menos la aritmética) es una parte de la lógica y que, en consecuencia, la validez y necesidad de las verdades de las matemáticas derivan de la validez lógica. En el primer capítulo se estudian las ideas lógicas y lingüísticas de Leibniz, haciéndose especial énfasis en su teoría de un lenguaje universal. Viene luego un capítulo –tal vez el más original de todo el escrito- dedicado a las ideas matemáticas y filosóficas de Bernard Bolzano, con respecto al cual se sostiene que su pensamiento influye decisivamente no sólo en el logicismo de Frege, sino en las teorías conjuntistas de Cantor. El primer sistema fregeano de lógica es después analizado en detalle, demostrándose que los problemas que plantea son el punto de partida de los desarrollos del logicismo maduro de Frege, lo mismo que de sus ideas acerca de la filosofía del lenguaje. El último capítulo se refiere a Dedekind y a Peano. Se hace ver allí que Dedekind representa un tipo de logicismo esencialmente diferente del de Frege o Russell, si bien con alguna conexión con ellos; por lo tanto, que existen al menos dos tipos diferentes de logicismo a evaluarse de manera diferenciada. En relación a Peano se establece la gran influencia lingüística que representa para el logicismo de Russell.

Résumé of the Ph.D thesis *The Prehistory of Logicism* by Luis Felipe Segura Martínez

In this Ph.D. thesis the problem of the relationship between logic and mathematics is critically examined from the point of view of that developments both in mathematics and philosophical logic which resulted in the position known as logicism, that is, in the view that mathematics or at least a esential part of it is a part of logic and hence that mathematical truths and necessity is derived from universal logical truth and logical validity. In the first, the logical and linguistical ideas of Leibniz are studied. It comes inmediately thereafter a chapter –surely the most original of the whole writing- on the mathematical and philosophical theories Bernard Bolzano's, in respect to whom the thesis is defended that his thought decisively influenced both Cantor and Frege. The first Fregean system of logic is then analyzed in detail, and it is shown that the problems it poses represent the point of daparture of Frege's major achievements in logic and in the philosophy of language. The last part of this investigation refers to Dedekind and Peano and it is argued that the first represents a substantially different kind of logicism that the one defended by Frege and Russell, whereas the second is an important antecedent of Russell's ideas concerning logical language. It is concluded that, even if conections between all of them exist, there are at least two radical different types of logicism, which, in view of other developments (like Gödel's theorems) are to be judged now in a very differentiated way.

Índice

Introducción 4

Capítulo 1: Lenguaje y Lógica en Leibniz 17

Capítulo 2: Bolzano: Los Fundamentos de la Lógica y las Matemáticas 35

Capítulo 3: La Lógica de la primera *Begriffsschrift* fregeana 78

Capítulo 4: Acerca del Concepto de Número 103

Parte 1: La teoría dedekindiana de sistemas y los fundamentos de la aritmética 104

Parte 2: Lenguaje y lógica en la teoría peaniana de los números naturales 121

Bibliografía 136

INTRODUCCCIÓN

I

Es difícil hoy en día pensar en una relación más estrecha entre dos disciplinas científicas que la que parecería existir entre la lógica y las matemáticas. En la actualidad, en efecto, el vínculo entre ellas se considera casi siempre como algo esencial, indisoluble y cuyo origen se remontaría a los inicios sistemáticos de ambas en la cultura griega. Sin embargo, esto, que hoy es tenido, en general, como evidente, supone la identificación íntegra de cada una de estas ciencias con su aspecto puramente expositivo, proposicional y conceptual, y pasa por alto o relega a un plano secundario cualquier elemento activo de creación o descubrimiento en ellas, además de no hacer justicia, en rigor, al curso histórico seguido por tales nexos.

Es falso, por ejemplo, aun aceptando la primera suposición, que lógica y matemáticas hayan mantenido siempre una relación tan estrecha como la que suele darse por sentada, si por ellas se entiende el conjunto de teorías y sistemas matemáticos y de lógica realmente existente en ciertos momentos -los más- de sus respectivas historias. Puede hablarse, por ejemplo, en relación a la Antigüedad griega, de, por lo menos, tres enfoques lógicos distintos: el de la silogística de Aristóteles, el de la lógica proposicional de los estoicos y el de la lógica implícita, digamos, en los modos argumentativos de la geometría euclidiana. Sólo las dos primeras forman parte de lo que en esa época se considera como lógica y es claro que ambas resultan del todo insuficientes como elementos de justificación de la tercera. Por su parte, el único aspecto de las teorías lógicas oficiales de este período que las aproxima un poco a las matemáticas es el recurso implícito o explícito a variables como elementos expresivos. En ese sentido, entonces, la afirmación de que la fuerza de las demostraciones de las matemáticas se basa en un uso estricto de la inferencia lógica es inexacta. Existe una lógica práctica, por así decirlo, una «lógica empírica» que se manifiesta, entre otros sitios, en las teorías matemáticas de la época y que es explicada de manera sumamente precaria por las teorías lógicas que entonces se proponen. En particular, entonces, en este período y durante mucho tiempo, la lógica va a la zaga de la argumentación matemática. El equivocado aserto kantiano, 20 siglos más tarde, de que la lógica no había dado un solo paso adelante desde Aristóteles, por lo que podía considerarse perfecta, no es, en realidad, otra cosa que la confirmación de la magnitud de tal atraso.

El primero en intentar salvar este abismo es Leibniz en el siglo XVIII. Sin embargo, la lógica leibniziana se inserta en un proyecto metafísico y epistemológico omnicomprensivo, esto es, en un programa que rebasa con mucho el ámbito normal de problemas tanto de la lógica misma como de las matemáticas. De todos modos, entre otras cosas, la teoría lógica de Leibniz intenta ofrecer una explicación de la naturaleza de la verdad matemática y, sin lugar a dudas, con ello, igualmente, de lo esencial de la actividad matemática como tal, en la que la lógica. una nueva lógica que Leibniz sólo logra presentar en rasgos muy generales, tiene un papel destacado.

Explicar algo es siempre interpretarlo en términos de algo más, es siempre referirlo a otras cosas y hacer ver que es una consecuencia de ellas. La explicación se encuentra, por lo tanto, estrechamente emparentada con la idea de una *reducción*, de algún tipo de *reducción*, de una disolución -así sea puramente conceptual- de lo explicado en favor de aquello en términos de lo cual se explica. A causa de ello, todo intento explicativo supone, de una u otra manera, un ordenamiento conceptual, una jerarquía de conceptos y proposiciones.

Una forma importante de la explicación sería, de acuerdo con lo anterior, la *fundamentación*. El concepto posee evidentes connotaciones lógico-filosóficas, pero ha sido frecuente recurrir a él también en las ciencias, en especial en las matemáticas, y parecería indicar una pretensión de rigor lógico, sistemático y constructivo en el sentido de un paso de lo menos elemental a lo más elemental, no necesariamente presente en la explicación en general. A diferencia de ésta, los proyectos de fundamentación aparecen, sobre todo, en la filosofía, mientras que en las ciencias particulares sólo surgen en tiempos más modernos - específicamente desde la época de la Ilustración.

Los siglos XVII y XVIII, por un lado, y el racionalismo y, muy especialmente, la Ilustración, por el otro, parecerían ser la época y las actitudes filosóficas que se encuentran en el origen de las tentativas de explicar y, de hecho, reducir, en su totalidad, ciertas ramas del saber a otras. Es evidente, además, en particular, en relación al segundo de estos enfoques, que el supuesto básico subyacente a todas ellas es el de la existencia de un «orden de las cosas», del que el orden de las verdades que constituye a las ciencias tendría que ser, por lo menos como ideal, un reflejo. No es casual, por lo tanto, que sea precisamente en este período de ordenación global de ideas que la investigación científica y filosófica se aboquen no sólo al estudio de problemas metodológicos, tanto específicos como generales, que hicieran posible el avance del conocimiento, sino también que se analice a fondo y en conexión con los resultados de las ciencias una serie de dificultades, como la del papel del lenguaje en la ciencia, la de la naturaleza de la verdad matemática y los criterios al respecto. Lo primero y lo segundo son el contexto en el que deben ubicarse las teorías del lenguaje y la lógica de Leibniz; lo segundo y lo tercero, el marco en el que se insertan las importantes e influyentes tesis kantianas acerca de la aritmética y los principios de las matemáticas.

Si con Leibniz la lógica y las matemáticas se aproximan hasta la disolución en teoría de éstas en aquélla, con Kant se alejan tanto que la lógica se convierte, prácticamente, en algo que resulta, en primera instancia, del todo prescindible para las matemáticas. Es decir, si para Leibniz es la lógica la que constituye el fundamento último de la verdad matemática y de su metodología, para Kant resulta enteramente ajena al mismo, y si para aquél tales verdades son algo objetivo y autónomo, para éste consisten, más bien, en el resultado de la actividad de un sujeto, de la que, por lo tanto, depende.

La siguiente figura importante en la historia del pensamiento acerca de estas relaciones es Bolzano, cuyo sistema lógico puede considerarse como el primer intento verdaderamente moderno y sistemático de acercar a las matemáticas y a la lógica.

En la tradición leibniziana y en una línea de pensamiento fuertemente influida por la Ilustración, concretamente, por el modelo de pensamiento que para ésta representa la física de Newton, Bolzano sostiene la necesidad de una fundamentación lógica de las matemáticas a partir (1) de una recreación de la lógica misma y (2) de la preservación de la especificidad de ambas disciplinas. Es decir, Bolzano asume una posición intermedia -aunque, por supuesto, no equidistante- en relación a Leibniz y Kant. Con Kant, Bolzano piensa que las matemáticas *constituyen una ciencia, cuyo fundamento* último es completamente independiente de la lógica. A semejanza de Leibniz, no obstante, Bolzano es también de la idea de que no existe, en realidad, ninguna otra ciencia más cercana ni más afín a la lógica que las matemáticas y que éstas requieren, además, esencialmente de la misma para su constitución científica propiamente dicha. Es decir, en cuanto ciencia constituida, las matemáticas suponen la lógica, como lo hacen la física, la biología, etc. Pero, exactamente como ellas, las matemáticas son algo más que lógica. Al igual que Leibniz, Bolzano que las matemáticas se encuentran indisolublemente ligadas al lenguaje, que, en cierto sentido, no son sino un lenguaje particular en el que también la lógica estaría substancialmente incorporada. En otras palabras, las matemáticas serían un conjunto de teorías, de resultados y problemas obtenidos y planteados por éstas y, como tales, el producto *lógico* de una serie principios fundamentales.

De esta manera, a pesar de no identificar a las matemáticas, como hace Leibniz, con una parte de la lógica, Bolzano, como éste, contribuye no sólo a la vinculación creativa de estas disciplinas, sino también a su consideración como *teorías* en un sentido próximo a Carnap, es decir, como un *lenguaje*.

Un paso adicional en esa misma dirección sería dado por Frege. La lógica puede concebirse, en efecto, de acuerdo con él, como un lenguaje *especial*, formal y simbólico, sintácticamente preciso, en el que se hable exclusivamente de conceptos y proposiciones. Su *Begriffsschrift* de 1879 constituye la primera realización concreta de estas ideas. La tesis central de Frege en este gran escrito es la de que un lenguaje conceptográfico como el expuesto por él en ese sitio, que no recoja otra cosa que el contenido lógico de las proposiciones, permitiría el análisis conceptual, lógico, de las mismas, haciendo posible también, en su caso, la justificación no sólo de los modos de argumentación ya aceptados en las matemáticas, sino de cualquier argumentación válida *posible* en ellas. La capacidad analítica del nuevo lenguaje haría, además, explícita la totalidad de las razones que sirven de fundamento a una proposición, permitiendo, en consecuencia, la determinación de la naturaleza última de la misma. La lógica se convierte, así, en una herramienta imprescindible para la *investigación de los fundamentos de las matemáticas*.

El desarrollo de estas ideas llevaría a Frege a sostener, a partir de la década de los ochenta del siglo pasado, el carácter estrictamente lógico de las matemáticas con excepción de la geometría, es decir, a negar la existencia de una esfera autónoma de objetos aritméticos -en el sentido amplio que él da a este término (aritmética, álgebra, análisis, teoría del infinito)-, a cancelar la existencia misma de una verdad aritmética diferenciada y a considerar a ésta como un caso especial de la analiticidad lógica.

Frege es, en consecuencia, el primer representante del *logicismo* en la filosofía de las matemáticas. Si bien la tesis de que las matemáticas en general no son sino una rama particular de la lógica había sido enunciada ya claramente, más de un siglo antes, por

Leibniz y éste había expuesto también, en relación a tales problemas, una serie de ideas esencialmente vinculadas a esta postura, sus planteamientos no van, en general, más allá de la mera descripción de un proyecto amplio y un conjunto de intentos muy fragmentarios de construcción de un sistema que sirviera a tales fines. Es importante tener presente, no obstante, que son dos, en realidad, las etapas que pueden identificarse en Frege y que a cada una de ellas corresponde, en realidad, un objetivo diferente. En la primera, en la que Frege sostiene lo que podemos llamar la *tesis formalista* del logicismo, lo que se pretende es exclusivamente la codificación *completa* de la argumentación lícita en matemáticas. La meta que la segunda se plantea es la *reducción* de la totalidad de la aritmética a la lógica. Extendiendo, como hará Russell, la tesis a la totalidad de las matemáticas, el segundo de estos objetivos implica al primero, pero es también independiente de él. Es decir, la tesis formalista es neutral en relación a la tesis logicista propiamente dicha.

Ahora bien, tanto la lógica de Bolzano como la de Frege, en la que aquélla influye decisiva, aunque no reconocidamente, surgen en el contexto de los esfuerzos de fundamentación del análisis. La pretensión primaria de ambas es, por lo tanto, aunque en distintas perspectivas y momentos históricos, la restricción al máximo del papel justificativo de la intuición en las matemáticas -de la intuición geométrica y argumentativa, en el caso del primero, y de la puramente argumentativa, en el de Frege. La tesis de la segunda lógica fregeana, esto es, la tesis propiamente logicista -en oposición a la formalista- supone históricamente, sin embargo, la llamada *aritmetización del análisis*, un proceso al que Bolzano mismo da inicio en 1817 y que tiene como resultado general más importante la definición precisa, en términos aritméticos y conjuntistas, sin recurso alguno a la intuición, particularmente a la intuición geométrica, de los números reales. En otras palabras, la tesis logicista de Frege se plantea, históricamente, sobre la base del establecimiento previo de un fundamento conceptualmente claro del cálculo infinitesimal, la aritmética de los números naturales y lo que ésta pueda suponer.

II

El acercamiento entre matemáticas y lógica tiene, según se deriva del párrafo anterior, al menos dos vertientes. Por una parte, del lado de la lógica, se trataría, como hemos dicho, de renovar o reconstruir la lógica y de ponerla a la altura de las matemáticas de su tiempo. Este sería, claramente, el punto de partida tanto de Leibniz como de Frege.

Por la otra, sin embargo, desde el lado de las matemáticas, el proceso de fundamentación del análisis implica no sólo una conciencia cada vez mayor de los principios generales de argumentación implícitos en ellas, sino que coloca, asimismo, de manera creciente, en un lugar central, consideraciones relativas a totalidades. La naturaleza de estos principios conjuntistas no es clara en la época, pero sí lo es el que en ella se piensa, debido a su generalidad, que o bien formarían parte de la lógica o bien, por lo menos, estarían estrechamente ligados a ésta. Bolzano y Dedekind serían las dos figuras emblemáticas al respecto. No obstante, mientras que el primero sostiene el carácter tanto lógico como matemático de estos principios y de los nuevos objetos, Dedekind los considera como parte constitutiva de la lógica.

El carácter absolutamente primitivo de los «nuevos» objetos y un uso implícito y explícito[1] de los mismos, parecía rebasar con mucho la esfera del análisis propiamente dicho -y aun de las matemáticas- y planteaba la necesidad de una investigación sistemática y general, esto es, abstracta de los mismos. En particular, en el caso de la fundamentación del análisis, tiene lugar entonces, junto con los primeros intentos de ordenación axiomática de los principios de la aritmética de los números naturales, la tentativa de basar a ésta misma en algo en apariencia aún más elemental que ella; concretamente, de interpretarla como una teoría general de los conjuntos *finitos*, es decir, como una teoría particular, cuya complementación natural *sería una teoría* abstracta de conjuntos, esto es, una teoría abstracta tanto de los conjuntos finitos como de los no finitos. Las axiomatizaciones de la aritmética llevadas a cabo por Grassmann y Peano, ilustrarían la primera de estas perspectivas, al tiempo que la teoría de sistemas, que Dedekind desarrolla en 1888 y que permite no sólo obtener como teoremas los principios axiomáticos de Peano, sino justificar, además, procedimientos de definición elementales -como las definiciones recursivas-, sería el ejemplo más importante del segundo tipo de aproximación matemática a la lógica. Dedekind piensa, entonces, que hay algo todavía más elemental y general que los números naturales, los conjuntos o sistemas, y que los principios acerca de éstos -inclusive el de la existencia del infinito- tendrían un carácter fundamentalmente lógico; que, por lo tanto, el análisis en su totalidad, al poder obtenerse genéticamente sobre esta base, no puede ser, en última instancia, al igual que la totalidad de las matemáticas históricas mismas, sino un caso específico *de la lógica. De acuerdo* con esto, Dedekind es también, como Frege, aunque en una perspectiva substancialmente distinta a la de éste, un representante del logicismo.

Lo anterior parecería avalar la existencia de al menos dos tipos diferentes de logicismo. Uno, al que podemos llamar *linguístico*, que partiendo de la lógica busca la aproximación a las matemáticas, la reconstrucción de éstas sobre esas bases y que organiza o reorganiza sus sistemas con este expreso fin, y otro, de índole m bien *matemática*, que permanece casi siempre (aunque *no* siempre) en el plano de la matemáticas, que de la fundamentación del análisis en la aritmética pasa a la fundamentación de la aritmética misma en una teoría general de totalidades, a la que se estudia e investiga como una teoría matemática *más*, si bien absolutamente básica y general.

Mientras que Frege *y también*, aproximadamente veinte años más tarde, Russell serían exponentes típicos de un logicismo del primer género, Dedekind sobre todo y, tal vez. en una primera etapa, Zermelo[2] y otros lo serían de uno del segundo.

Por lo demás, vale la pena notar, en este mismo orden de ideas, que, aunque sin compartir la tesis central del logicismo, Bolzano se encuentra cerca de ambos enfoques y contribuye activa, si bien, como hemos dicho, no siempre reconocidamente, a ambos. El carácter intermedio y verdaderamente notable en su perspicacia de su postura es puesto de manifiesto de manera clara por el hecho mismo de que, para él, las totalidades formarían parte tanto de la lógica como de las matemáticas, esto es, constituyan *el* elemento de articulación entre ambas.

---

[1] Piénsese solamente, por ejemplo, en el axioma euclidiano del todo y la parte.

[2] Véase Cap. IV, Parte II El problema tiene que ver con el *status* de los principios de la teoría de conjuntos Cfr también el apartado VII de esta introducción.

Pero resulta también de gran importancia tener presente que, sin dejar de haber algunas coincidencias,

(1) los supuestos que subyacen a cada una de estas concepciones logicistas son distintos, por lo que

(2) la plausibilidad de cada una de ellas debe juzgarse, a la luz de los desarrollos históricos habidos desde su aparición, de manera diferente.

El carácter radicalmente diverso -aunque no incompatible-, de estas posturas sólo puede aclararse del todo, sin embargo, si se entiende el curso que sigue la evolución de las investigaciones que conducen a la, en apariencia, misma tesis fundamental, esto es, si se tiene una idea clara de lo que podría llamarse *la prehistoria del logicismo*. Las figuras principales de ella serían, de acuerdo con lo dicho, Bolzano, el Frege de la *Conceptografía* de 1879, Dedekind y también, por otra parte, Peano, con quien a menudo se asocia también al logicismo. Como, además, con excepción de Dedekind, cada uno de ellos considera expresamente como modelo, en lo que a su concepción de la lógica se refiere, a Leibniz, un recuento de tal tesis tendría que incluir también un análisis mínimo de las concepciones de éste acerca de las relaciones entre lógica y matemáticas.

III

El logicismo constituye una visión acerca de las relaciones que la lógica y las matemáticas mantienen entre sí, pero, asimismo, representa una concepción acerca de la naturaleza no sólo de las matemáticas, sino también *de la lógica misma.*

Ahora bien, la tesis logicista general de que las matemáticas pueden reducirse a una parte de la lógica se compone, en realidad, de acuerdo con lo anterior, de *varias* reducciones. La primera de ellas es la que convierte a las matemáticas en un conjunto de teorías axiomáticas o de verdades que pueden obtenerse genéticamente a partir de un número reducido de principios (tesis 1). La segunda es la que hace de toda noción matemática una que puede obtenerse a partir de una cadena de definiciones basadas, en última instancia, en conceptos puramente lógicos (tesis 2). Otra es la concepción de todo teorema matemático como un teorema de la lógica (tesis 3).[3] Habría, también, por otra parte, la identificación, por lo demás históricamente comprensible, de las matemáticas con las matemáticas clásicas (aritmética, geometría, álgebra, análisis y teoría de conjuntos -o algo esencialmente equivalente a ella) (tesis 4).

Pero también, en el caso de la lógica, se procede, de una u otra manera, reductivamente, al suponerse, por ejemplo, que la validez de una serie de principios argumentativos -como el principio del tercero excluido- es irrestricta y ahistórica (tesis 5).

Estas cinco tesis serían supuestos compartidos por los dos tipos de logicismo a los que nos hemos referido antes. A ellas se añaden, en el logicismo lingüístico, la suposición de que la argumentación matemática puede, en su totalidad, ser codificada como un sistema cerrado, justificado a partir del sistema lógico tomado como base (tesis 6) y, con respecto a la lógica, que la lógica misma puede concebirse como un *lenguaje* o como una clase de lenguajes sintácticamente precisos (tesis 7). Una importante consecuencia de esta última identificación es la de que, en el caso de que las matemáticas puedan obtenerse, como se pretende, a partir de la lógica, ellas mismas deben ser vistas también como un lenguaje

---

[3] En Leibniz, la tesis 3 se reduce, además, a la tesis 2.

(tesis 8). De acuerdo con esto, entonces, la tesis general del logicismo lingüístico puede formularse en los siguientes términos:

Existe un lenguaje puramente lógico ***L*** con la propiedad de que

a) todo término matemático puede definirse a partir de los términos primitivos de ***L***

y

b) todo teorema -digamos de la aritmética- es, en realidad, un teorema de ***L***.

Entre los supuestos más importantes de la tesis logicista, tal y como ésta se expresa, por ejemplo, en Dedekind, Frege y también, aunque de otra manera, en Russell, se cuenta igualmente, por otra parte, el de la postulación de un campo de objetos del que justamente las teorías matemáticas darían cuenta. Los objetos abstractos de las matemáticas serían, de acuerdo con esto, algo que existe independientemente del ser humano. La actividad matemática consistiría, por lo tanto, en su fundamento, no en la invención, sino en el descubrimiento. Este platonismo no es, sin embargo, privativo del logicismo, sino una suposición que, conscientemente o no, es hecha por la absoluta mayoría de los matemáticos. Puede pensarse, inclusive, por ejemplo, que la suposición de la existencia de esta esfera autónoma objetiva constituye una condición tan necesaria para una explicación plausible de la actividad matemática como lo es la de una realidad física independiente para la de las ciencias naturales. De ello se desprenden, en particular, dos consecuencias que importa subrayar aquí.

1) Dado el planteamiento anterior, la tesis logicista puede interpretarse -y, de hecho, ha sido interpretada así por sus principales representantes históricos- como una tesis *ontológica*, esto es, como una aplicación del principio occamista de no multiplicar innecesariamente los objetos del mundo. No hay, sostiene el logicismo, objetos propiamente matemáticos, sino que éstos son, en realidad, objetos lógicos (tesis 9).

De acuerdo con esto, a las reducciones que el logicismo pretende someter a las matemáticas se añade ahora otra de carácter metafísico que la despoja de una naturaleza propia. Esta última tesis es, por supuesto, equivalente a la pretensión notada más arriba de una reducción de la verdad matemática a la validez universal.

2) Uno de las consecuencias de la combinación de las tesis lingüística y ontológica del logicismo es, sin embargo, la siguiente:

(*) Existe un lenguaje ***L*** de carácter estrictamente lógico, adecuado para la investigación del ámbito de las matemáticas.

Es decir, la realidad abstracta, postulada por el logicismo en general como substrato de las matemáticas, es considerada por el logicismo lingüístico como una esfera ontológica cubierta *enteramente* por el (o un) lenguaje lógico ***L***.

La concepción logicista de las matemáticas, en cualquier de sus formas, contiene, en consecuencia, una visión *unitaria* de esta ciencia que puede pensarse, asimismo, como una aplicación de segundo grado, por así decirlo, ya sea del método axiomático o, también, del genético, que tan fecundo había resultado en el análisis. Se trataría, en efecto, de ordenar la totalidad, ya no de un conjunto de resultados, *i.e.* proposiciones, relativas a determinado ámbito particular, sino de ordenar un conjunto de teorías en una teoría básica de orden superior de generalidad, de la que las mismas pudieran obtenerse.

Pero, también, por otro lado, de manera importante, del análisis específico de las formas concretas que el logicismo asume en las figuras más significativas asociadas a él resulta que la idea de la lógica que prevalece en cada una de las dos formas básicas de este enfoque es radicalmente *diversa* de la que se tiene de esta disciplina en la otra. De esto podemos concluir que la designación misma de *logicismo* para referirse a un mismo proceso de reducción de las matemáticas a la lógica que, partiendo de Leibniz, pasaría a Frege y Dedekind y que desembocaría más tarde en Russell y al que habrían contribuido esencialmente Bolzano, por una parte, y, en el caso de Russell, Peano, por la otra, es esencialmente errónea. Las reducciones logicistas entrañan una concepción específica de las matemáticas que, por supuesto, requiere ser confrontada con la historia de esa disciplina. No todas ellas son igualmente aceptables. A la luz de la misma, es claro que el logicismo matemático sale mucho mejor librado, *en términos de sus pretensiones originales*, que el logicismo lingüístico, si bien esto no menoscaba en forma alguna la gran importancia de las contribuciones de este último al desarrollo de la lógica, la filosofía de las matemáticas y aun de las matemáticas mismas. Sin embargo, también, es justamente a la luz de esa historia, que un logicismo de este tipo, a diferencia de aquél, debe considerarse como definitivamente refutado.

IV

Ahora bien, ¿qué entiende exactamente el logicismo matemático por *lógica*? Básicamente dos cosas: teoría de conjuntos y una serie de principios no especificados a los que podemos llamar lógica informal y que, tal vez, puedan explicarse como una lógica de primer orden con identidad. La tesis logicista en este caso pretende reducir la aritmética a la teoría de conjuntos -o a algo esencialmente equivalente a ella. Como ésta se estudia y analiza como cualquier otra teoría matemática, esto es, genética o axiomáticamente, puede afirmarse que, en cierto sentido, el tipo de fundamentación que aquí se pretende es, en realidad, *interna*. Las diferencias entre una lógica así entendida y la aritmética no son mayores, por ejemplo, que las que existen entre el sistema de los números naturales y el de los racionales. De hecho, aunque el uso mismo del término *lógica* para un sistema básico de este género parecería ser bastante arbitrario, puesto que el vínculo con el ámbito de problemas tradicionalmente abarcados bajo este rubro es más bien laxo, puede argumentarse con ciertas bases en favor de su naturalidad (véase más abajo). En nuestra opinión, sin embargo, la razón de fondo del mismo, mucho más que en esto, debe buscarse, en el carácter *a priori* de los principios, esto es, en la consideración de que los nuevos principios conjuntistas, al igual que los de la lógica tradicional, son absolutamente generales, es decir, que forman parte, como éstos, de lo que en la terminología del siglo XIX se denomina *principios del pensamiento puro*, en la identificación de este apriorismo con un apriorismo lógico y, muy especialmente, en la ausencia, implicada por todo ello, de *suposiciones existenciales particulares* entre sus supuestos básicos.

Como sea, el descubrimiento de contradicciones tanto en la lógica misma como en la teoría de conjuntos, en las que los principios fundamentales de formación de totalidades se encontraban esencialmente implicados, parecería poner fin, de manera definitiva, a las pretensiones logicistas de esta índole, aunque no, por supuesto, a las de la necesidad y justificación de una teoría fundamental de este tipo. Es decir, en relación a lo primero, señalarían, en especial en lo referente al infinito, un posible punto de diferenciación entre matemáticas y lógica, a la vez que el momento de transición histórica de un enfoque *esencialista*, que se proponía no sólo construir la aritmética y asentar el análisis sobre una base rigurosa, sino también explicar la naturaleza última de la verdad matemática, a uno más pragmático, cuya preocupación principal es la de dar una base axiomática *segura* a la nueva teoría y en el que, aunque los aspectos filosóficos de la misma pasan a segundo término, se opera también con una mucho mayor conciencia que antes de la argumentación que la sustenta, esto es, de la lógica implícita en ella.[4] En este sentido, entonces, si bien su tesis principal acerca de las relaciones entre lógica y matemáticas resulta fallida, el *logicismo conjuntista* contribuye, en última instancia, de manera significativa, a una aproximación entre ellas.

Que una investigación que se proponga dar un fundamento verdaderamente seguro a las matemáticas requiere esencialmente también de una investigación lógica será puesto en evidencia por la *teoría de la demostración*, que Hilbert y sus colaboradores desarrollan en las primeras décadas de este siglo.

V

Tal vez la más grande de las contribuciones históricas del logicismo lingüístico a la historia *de las matemáticas* sea la invención de los lenguajes formales. Sin ellos, no sólo la lógica contemporánea, en cualquiera de sus formas, como poderosa herramienta de investigación, resultaría impensable, sino que también nuestra comprensión de la naturaleza misma de las matemáticas y, en general, de la racionalidad científica se vería mermada seriamente. La lógica de la que se habla en este tipo de logicismo es una lógica ligada -en la práctica, de hecho, identificada- con tal tipo de lenguajes.

Entre los rasgos esenciales de estos lenguajes se encuentra el de hacer posible el planteamiento de problemas globales acerca de ellos mismos; por ejemplo, acerca de su capacidad expresiva, de su fuerza demostrativa, de su compatibilidad deductiva con otras suposiciones, etc. Las llamadas pruebas de imposibilidad, tan comunes hoy en día cuando se analiza un sistema deductivo o la comparación precisa de teorías enteras, son ejemplos claros de esta importante característica.

Estas propiedades se basan, primordialmente, en la precisión algorítimica de los lenguajes mismos y permiten formular con toda exactitud y, a veces, responder de la misma manera problemas que de otro modo serían excesivamente complejos o no tendrían sino una respuesta casi empírica o relativa, como el de si el sistema deductivo es consistente, etc En otras palabras, sin una demostración al respecto, lo único que podría decirse de un sistema sería, por ejemplo, que *hasta ahora* no se ha llegado a una contradicción o bien su consistencia dependería, siguiendo el método clásico, de la consistencia de otra teoría en términos de la que ha sido interpretada. En particular, la formalización de una teoría permite no sólo hacer explícitos los modos inferenciales y los supuestos implícitos que en ella se hacen, sino, por ejemplo, un análisis preciso de si la misma es adecuada o no en relación a cierto ámbito de verdades.

En el caso particular del logicismo, su planteamiento como (*) y la consideración de que el lenguaje L es un lenguaje formal de esta índole permite una evaluación rigurosa de su tesis central. Es decir, y este sería, sin lugar a dudas, uno de sus logros más importantes, el logicismo lingüístico sienta las bases para una decisión en lo referente a sus pretensiones. El problema que aquí se plantea sería, por lo tanto, más precisamente dicho, el de

[4] Este sería el curso seguido por la absoluta mayoría de los matemáticos. El intuicionismo representa, sin embargo, una perspectiva disonante en relación a estos problemas y, por lo tanto, a pesar de su gran interés filosófico y matemático, en última instancia, también marginal con respecto a ellos.

determinar si los lenguajes que este logicismo propone son, en efecto, adecuados para la investigación del ámbito de la verdad matemática.

Aunque Frege inventa los primeros lenguajes formales lógicos importantes, ni él ni Russell se plantean nunca, en realidad, ningún tipo de problema metalingüístico, a no ser obligados por las deficiencias concretas de sus respectivos sistemas. Frege, por ejemplo, modifica su *Begriffsschrift* de 1879 debido al insatisfactorio tratamiento que allí se hace de la identidad, que implica, entre otras cosas, la introducción de nombres de signos del lenguaje en el lenguaje mismo. En 1902-1903, al final del segundo volumen de sus *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege intenta alterar, nuevamente, a partir de consideraciones sobre el aparato deductivo de la *Conceptografía* presentada en esa obra, el sistema, esta vez a raíz de la aparición de contradicciones en éste. El procedimiento seguido es limitado: lo que se busca evitar es simplemente la deducción de un tipo de proposiciones parecido al de las proposiciones problemáticas, dándose por supuesto que el sistema es, por lo demás, adecuado y, que con ello se ha restablecido su consistencia. Por su parte, Russell da igualmente por sentado, en general, que el sistema expuesto en los *Principia Mathematica* es adecuado al evitar los argumentos «insanos». En esta misma obra, Russell ofrece también, en el caso del axioma de reducibilidad, una justificación empírica («inductiva») [1910, 59] de este principio que ilustra claramente no sólo su posición y la de la inmensa mayoría de los matemáticos, sino las posibilidades de que hasta las primeras décadas del siglo XX se disponía para llevar a cabo consideraciones de carácter global respecto a la construcción de un sistema deductivo: «Las razones para aceptar un axioma, lo mismo que para aceptar cualquier otra proposición, son siempre, en una gran medida, inductivas, es decir: muchas proposiciones de las que prácticamente no es posible dudar pueden deducirse de él, no se conoce ninguna otra vía igualmente plausible que permitiera mostrar que las proposiciones son verdaderas, si es que el axioma es falso, aparte de que nada que tenga la apariencia de ser falso puede ser deducido del mismo... En la lógica formal, el elemento de duda es menor que en la mayoría de las ciencias, pero que no está del todo ausente es claro a partir de la deducción de las paradojas de premisas que anteriormente no se pensaba que requirieran ningún tipo de limitaciones».

Hay algo extraño -y generalizable a todo el logicismo lingüístico- en las razones aducidas aquí por Russell para justificar la aceptación de un axioma en una teoría. La actitud es, por una parte, evidentemente *empírica* y sería la misma de la que echara mano un científico natural para justificar una hipótesis que le permitiera la explicación de un conjunto muy grande de hechos observables. Por la otra, sin embargo, al fijarse *definitivamente*, *a priori*, la lógica que se utiliza en las matemáticas, es decir, al pretenderse el carácter totalmente adecuado del sistema, se niega precisamente el elemento abierto a las modificaciones por parte de la experiencia matemática misma. Un poco más abajo volveremos sobre este punto.

En rigor, es Hilbert quien se plantea por primera ocasión, en 1904, problemas claramente metalingüísticos en relación a la lógica, aunque, en realidad, es A. Padoa, el primero, en 1900, en abordar problemas relativos a la definibilidad y deducibilidad en un sistema deductivo en general. Más adelante, debe mencionarse, sobre todo, a. Löwenheim, quien es el primero en estudiar sistemáticamente problemas de validez en relación al cálculo de predicados y a Post quien es el primero en probar la completud del cálculo de enunciados. Con todo ello se inauguraba, inclusive *antes* de la publicación misma de la teoría de los tipos o de los *Principia Mathematica*, una nueva fase de la investigación lógica que culminaría en los teoremas de Gödel y que se alejaba del enfoque prevaleciente en Frege y Russell.

No carece de interés ni de un dejo de ironía el que en 1910, precisamente el año de aparición del primer volumen de esta obra, esto es, de la exposición última y aparentemente más desarrollada del logicismo lingüístico, los problemas que interesaban a los matemáticos no fueran ya, en forma alguna, los de una reducción de las matemáticas, esto es, los de la explicación de ellas a partir de *otra instancia*, sino los de una fundamentación segura y *natural*, interna, de las matemáticas, y que se aceptara ya como un hecho, en este orden de ideas, que la misma sólo podía darse rigurosamente a partir de la fundamentación simultánea de la lógica y las matemáticas, es decir, que los límites entre ambas comenzaran a borrarse y a dejar de ser importantes.[5]

En 1931, en dos breves artículos que bien pueden considerarse como los escritos más importantes de la lógica en este siglo, K. Gödel demuestra una serie de resultados que marcan el inicio de lo que puede llamarse la tercera etapa de la lógica contemporánea (después de los trabajos pioneros de Bolzano, Frege y Russell, por una parte, y como continuación crítica de la investigación metamatemática de Hilbert y sus colaboradores, por la otra). Los resultados allí expuestos por Gödel ponen de manifiesto la existencia de una disparidad esencial entre los lenguajes formales *del tipo axiomático* utilizados por Frege, Russell y Hilbert[6] y las matemáticas intuitivas, reales, que se pretende formalizar con ellos. El teorema más importante para los problemas que aquí nos ocupan es el Teorema VI de 1931a, que establece que, dado un sistema formal **P** que satisfaga ciertas condiciones precisas -entre ellas que permita tener los axiomas peanianos para la aritmética- existe una fórmula A con la propiedad de que ni A ni su negación es deducible en el sistema. Esto significa que **P** es necesaria y esencialmente incompleto.[7]

VI

Las consecuencias que lo anterior tiene para el logicismo lingüístico son obvias. La tesis de un lenguaje formal, ya no digamos de carácter lógico, adecuado para las matemáticas no sólo es falsa en relación a la *Begriffsschrift*, *Principia Mathematica* o, en otro orden de cosas, para los *Grundlagen* de Hilbert y Bernays, sino de plano *irrealizable*. En otras palabras, la verdad matemática, el ámbito de las matemáticas no puede agotarse con un sistema formal como alguno de los mencionados, si es que se ha de preservar la consistencia. Esta limitación interna de los sistemas formales demuestra, asimismo, que la racionalidad matemática no es, en un sentido fundamental, distinta a la de las ciencias naturales, que sólo podemos acercamos gradualmente a la realidad matemática; que los mecanismos que utilizamos para ello son limitados; que, en todo caso, no pueden explicarse sin residuos con el recurso de la formalización. O también: que el campo de la verdad

---

[5] Esta es la postura enunciada por primera vez por Hilbert en 1904. Él mismo, en 1900, plantea por vez primera la necesidad de dar una prueba de consistencia de la aritmética, promoviendo activamente también, con Zermelo, el desarrollo axiomático de la Teoría de Conjuntos como *la* disciplina matemática fundamental.

[6] En un sentido general. Los patrones de rigor establecidos por Hilbert son, por supuesto, mucho más rigurosos y precisos que los de Frege y Russell.

[7] En otras palabras, el teorema se establece para una *clase* entera de sistemas axiomáticos similares, en lo esencial, a *Principia Mathematica*, al no estar basado en la naturaleza de los signos de ese sistema.

matemática no se reduce al de la validez de un sistema de lógica clásico como el inventado por Frege y Russell.

La lógica de este logicismo es, como quedó dicho, ahistórica, absoluta y, además, lingüística. Una consecuencia directa de tal posición es la de que la racionalidad matemática sea vista como algo *cerrado*, pudiendo ser caracterizada adecuadamente desde un principio, por así decirlo. La lógica matemática, es decir, la lógica que las matemáticas usan, sería, de acuerdo con esto, desde ya, algo predeterminado y fijo, *a priori*. La pretensión logicista es, entonces, en este caso, como dijimos, no sólo la de dar cuenta de todos los modos argumentativos habidos hasta ahora en las matemáticas, sino, también, de todos los modos *posibles* en ellas.

En 1925, en su profunda reflexión sobre la historia de la lógica y la naturaleza de las matemáticas, Brouwer [1925, 247-9] escribe que «la arraigada confianza en la posibilidad de aplicación de la lógica tradicional a las matemáticas tiene su origen histórico en el hecho *específico de que, primero*, la lógica clásica es el resultado de una abstracción de las matemáticas de los subconjuntos de un conjunto finito definido; segundo, en la atribución de una existencia *a priori* e independiente respecto a las matemáticas -y, podemos agregar, en relación a cualquier dominio de objetos- de tal lógica y, tercero, en que con base en este supuesto carácter apriorístico se aplica injustificadamente a las matemáticas de los conjuntos infinitos». Es decir, Brouwer interpreta la historia de la lógica por medio de la vinculación directa de la misma con la historia de las matematicas, concluyendo 1) que en algún momento temprano del desarrollo de las matemáticas, posiblemente en Grecia, las matemáticas elementales se convierten en una disciplina deductiva; 2) que en una segunda etapa, la lógica clásica se obtiene de ella por abstracción; 3) que a partir de *allí*, se ven convertidas, por una extrapolación injustificada, en algo *a priori* y de validez absoluta, aplicable a la *totalidad* de la argumentación correcta.

Independientemente del problema específico que preocupa a Brouwer -la exclusión de principios argumentativos ilegítimamente aplicados a ciertos objetos, como el infinito, y una especie de terapia de las matemáticas a partir de ello- podemos hacer nuestra la reivindicación de la *experiencia* y de la historicidad de las matemáticas y la lógica que resultan de su análisis e interpretar en este mismo sentido los resultados de incompletud de Gödel. Las matemáticas son algo histórico y, en consecuencia, algo esencialmente inconcluso, no sólo en relación a los problemas abiertos en ella y a desarrollos ulteriores, sino también en lo que concierne a sus modos argumentativos, *a su lógica*. Las matemáticas son una actividad, algo en proceso, por lo que la racionalidad matemática es también a ese respecto, como no podía ser de otra manera, una racionalidad abierta.

VII

Tanto la tesis central del logicismo lingüístico como la del matemático resultan, en última instancia, según acabamos de ver, fallidas. Las matemáticas requieren de suposiciones existenciales específicas que no pueden tener un carácter lógico y son más que un lenguaje. Hoy en día, el problema de una demarcación entre las matemáticas y la lógica y, por lo tanto, el de cuál de ellas sea más básica ha perdido actualidad. La postura logicista de un reduccionismo que pretende la disolución a lo simple de lo complejo supone la *anterioridad ontológica* de lo primero con relación a lo segundo. Mucho menos comprometedor y, tal vez, más conveniente sería hablar, según nos parece, de una *traducción* de partes o de la totalidad de un dominio de objetos dado a otro o, inclusive, en relación a teorías globalmente consideradas. Con ello se adoptaría una actitud relativamente neutral y más fructífera que la esencialista. Un enfoque de este tipo contribuiría, además, a la elucidación de los objetos o teorías en cuestión, al hacer posible un enfoque y análisis de los mismos desde diferentes perspectivas.

Los límites entre la lógica y las matemáticas se han hecho difusos y, en realidad, tal vez, no existan, con tal de que no se identifique a la primera con un lenguaje formal. De hecho, la circunstancia de que la sintaxis misma de un sistema formal pueda considerarse como algo perteneciente a la aritmética y, en consecuencia, que cualquier consideración lógico-formal pueda interpretarse en tales términos, haría patente, por ejemplo, que aun la lógica puede concebirse como una parte de las matemáticas. Por otra parte, si bien es claro que la teoría de conjuntos rebasa el ámbito de problemas de lo que tradicionalmente se ha entendido por lógica, puede pensarse en una extensión natural de ésta que la incluya. Es decir, si admitimos que una proposición como

$$P \vee \sim P$$

es válida de manera irrestricta, difícilmente, en aras de lo que Church [1960, 233] llama el «espíritu de generalidad en la lógica y las matemáticas», podemos no aceptar la generalización

$$(\forall P)\,(P \vee \sim P)$$

Pero ésta nos coloca ya, inevitablemente, en el terreno de la lógica superior o, equivalentemente, de la teoría de conjuntos.

Lógica y matemáticas son diversas, aunque no fácilmente diferenciables. La cuestión de una división precisa entre ambas es un pseudoproblema. Que esta sea nuestra actitud presente es, sin embargo, producto de un desarrollo histórico dentro del cual el logicismo ocupa, sin lugar a dudas, un lugar preeminente.

CAPÍTULO 1

LENGUAJE Y LÓGICA EN LEIBNIZ

La idea leibniziana de la lógica suele identificarse con el utópico proyecto de construcción de un lenguaje universal, de una *caracteristica universalis* que sirviera como lenguaje de la razón en general, es decir. en particular, como lenguaje de todas las ciencias. Sin embargo, en este proyecto es posible distinguir una dimensión propiamente lingüística y concreta de otras, una más bien enciclopédica y otra de orden metafísico. Leibniz aborda, en relación al primero de estos aspectos, la investigación de tal lenguaje desde dos perspectivas enteramente distintas. El presente capítulo se ocupa de examinar los aspectos esenciales de su planteamiento general en lo que se refiere a la lógica, las matemáticas y al lenguaje de las ciencias, centrándose en el análisis de una de sus dos estrategias de conjunto, la abstracta, aunque sin dejar de señalar algunas implicaciones que la otra, la empírica, de interés sobre todo para la lingüística comparada o histórica, tiene para su proyecto filosófico, ni desatender, en especial, por supuesto, la concepción de las relaciones entre lógica y matemáticas que de todo ello se derivan.

I

El programa leibniziano de fundamentación de la ciencia tiene una base netamente lógica, con un componente lingüístico y algebraico esencial. El principio metodológico de toda actividad intelectiva y racional consiste en la ordenación y elucidación fundamentales de las ideas y los argumentos que en ella concurren. Por lo tanto, en particular, el sustento de toda actividad científica se encuentra en la lógica. Pero entre ésta y el lenguaje existe una relación absolutamente indisoluble. De hecho, la lógica misma puede identificarse, en cierto sentido, de acuerdo con Leibniz, con un tipo específico de lenguajes. En consecuencia, todo intento de fundamentación de la ciencia y del conocimiento racional debe ser precedido por consideraciones de carácter *lingüístico*. La filosofía misma necesita, entonces, ocuparse, en primer término, de éstas.[1]

Ahora bien, de ser esto así, es decir, si verdaderamente existe una conexión esencial entre la lógica, el conocimiento, la racionalidad y el lenguaje[2], debe existir, también, una

---

[1] En el prefacio a su libro sobre Leibniz (1937, v), Russell afirma que «prácticamente la filosofía de Leibniz se deduce, en su totalidad, de la lógica.» Si lo que acabamos de escribir es correcto, la lógica misma se derivaría de una reflexión lingüística básica previa al respecto

[2] Esta parece ser la postura general de Leibniz, sobre todo en lo que se refiere a formas no elementales del pensamiento Un pensamiento no lingüístico sería, sin embargo, también, posible, aunque su alcance muy primitivo esto es, sumamente limitado [Cfr Heinekamp 1976, 524]

vinculación profunda entre la realidad o el mundo fenoménico y el lenguaje, particularmente en su aspecto de lenguaje de la ciencia. El concepto básico que subyace a la idea leibniziana de lenguaje es el de *signo*, en su sentido primigenio de «señal de algo» [1679b, p.181], de «representante verbal» o «expresión de».[3] Un lenguaje es un sistema de signos.[4] El lenguaje natural no es, sin embargo, sino un sistema de signos entre otros. La palabra, el lenguaje en general es la herramienta imprescindible del pensamiento, la herramienta primaria de nuestra razón en su conexión con el mundo. El fenómeno del lenguaje se nos presenta como algo inmediato y diverso en la forma de lenguajes naturales. Los lenguajes de este tipo obedecen, sin embargo, una normatividad propia e histórica, pero poseen también una característica *sui generis*: poseen la capacidad de reflexionar sobre sí mismos y, en esa medida, hacen posible una toma de conciencia de lo que en ellos es esencial y de lo que tiene sólo un carácter accidental.

Implícito en toda esta preocupación de Leibniz por el lenguaje se encuentra también, por supuesto, por otra parte, un afán de rigor, claridad y fundamentación, similar al que Descartes había manifestado algunos años antes, aunque esta vez proseguido con mayores elementos.[5]

Existen en Leibniz tres supuestos básicos en relación al lenguaje. En primer término, uno *epistemológico en un sentido débil*, por así decirlo, que establece que una conexión indisoluble entre el lenguaje, la razón y el conocimiento. En otras palabras: La actividad en la que el pensamiento discursivo consiste se encuentra determinada de manera esencial por la operación de signos, esto es, por el lenguaje, como lo ilustra de manera ejemplar el caso de las matemáticas. En segundo lugar, uno *epistemológico en un sentido fuerte*. Leibniz rechaza la idea del pensamiento como una capacidad pasiva. Para él, una parte de las verdades que conforman el conocimiento -en realidad, aquellas que constituyen un conocimiento pleno, las verdades necesarias-, es producida por el pensamiento a partir de sí mismo [Cfr 1951, 39] y estas verdades poseen una contraparte exacta en cierto tipo de expresiones lingüísticas que, por análisis, revelan la estructura íntima de aquéllas.[6] En

---

[3] La economía expresiva y la operatividad del pensamiento, los «pensamientos ciegos», constituyen las funciones primordiales del signo. Los signos tienen niveles de expresividad, es decir, pueden expresar más o expresar menos algo [1679b, p 181]. El maximo nivel expresivo se alcanza cuando tenemos una relación deductiva transparente, en el sentido de que todo lo predicable de algo puede deducirse del concepto de esa cosa. Por lo demás, que una cosa «exprese» otra significa en que entre ellas existe un isomorfismo estructural En consecuencia, en un lenguaje perfecto se alcanzaría el máximo nivel expresivo Como la deducción supone algo dado a partir de lo cual se deduce, es evidente que tal lenguaje tendría que tener una forma que hoy identificaríamos como axiomática.

[4] Es claro aquí, sin embargo, que la expresion «sistema de signos» no tiene un sentido puramente sintáctico: los signos son siempre signos de *algo*, esto es, tienen siempre un referente.

[5] Es interesante observar aquí que, aun si el argumento cartesiano que instituye la existencia del yo como indubitable y como fundamento epistemológico resultara conclusivo, se trataría de un yo que piensa logicamente y, por lo tanto de un yo que requiere antes que nada de un lenguaje

[6] El caso de las matematicas resulta también aquí paradigmatico

tercer lugar, un supuesto *ontológico*. Existe una correspondencia estrecha entre lenguaje y realidad. Todas estas suposiciones de Leibniz en relación al lenguaje representan anticipaciones o antecedentes importantes de concepciones de gran influencia en el pensamiento filosófico posterior y constituyen, por supuesto, no sólo un elemento imprescindible para la comprensión de sus propias teorías epistemológicas y ontológicas, sino, asimismo, el sustento filosófico de sus ideas sobre la lógica y las matemáticas.

Como hemos dicho antes, el enfoque leibniziano del problema del lenguaje sigue dos estrategias completamente diferentes, aunque paralelas y, en última instancia, complementarias. Por un lado y como no podía ser de otra manera, Leibniz parte del lenguaje natural, de los lenguajes realmente existentes, con sus diferentes capacidades expresivas y su aparente diversidad estructural. Su aproximación consiste, en este caso, en una investigación *empírica*, por ejemplo, de carácter etimológico de los mismos y en la suposición de la existencia de una *matriz primigenia*, común a todas las lenguas históricas, es decir, de una estructura lingüística primitiva, subyacente a todas ellas [1703-1705, III, ii, 1]. La diversidad de lenguajes se explica, entonces, a partir de los diferentes *accidentes* geográficos, históricos, etc. a que tales lenguas se han visto expuestas en el curso de su desarrollo. La labor que aquí se impone es múltiple y se ubica, más bien, en la esfera de la lingüística y la filología, esto es, en la de una ciencia particular. El supuesto fundamental que Leibniz intenta justificar inductivamente [*ibid.*], es, sin embargo, de interés filosófico: Existe un lenguaje prístino, presente, en mayor o menor medida, en todo lenguaje natural y que responde, según parece, a una estructura humana esencial.[7] Esto supone que un lenguaje que recogiera tal núcleo original es, por fuerza, único. Este lenguaje puro y arquetípico tendría, por lo demás, una relación inmediata con la realidad [Rutherford 1994, 241-2].[8] Parece poder concluirse, entonces, a partir de esto, que si bien los lenguajes naturales se encuentran íntimamente ligados al mundo de los sentidos, al mundo de la experiencia sensible y cambiante, su consideración racional pone de manifiesto una estructura constante, en última instancia, inmutable, una infraestructura que sirve de base a esa experiencia y es modificada de manera externa precisamente por ella.

Existe, sin embargo, un segundo enfoque del problema del lenguaje en Leibniz, un enfoque basado en la *plausibilidad* de la idea de *construir* un lenguaje unificador y totalizador en la ciencia, un lenguaje vinculado, también, de manera inmediata, con la realidad, pero cuyo nexo con ésta es *estrictamente racional*, un lenguaje que es rigurosamente lógico y preciso y que, una vez caracterizado, puede servir de punto de

---

[7] «Era ya claro para mi en aquel entonces -escribe Leibniz [1679b, p.182], refiriéndose a su obra de 1666- que todos los pensamientos humanos pueden resolverse en un número muy pequeño de nociones primitivas.»

referencia para la resolución (algebraica) de cualquier disputa teórica. Ésta es la tesis leibniziana de un *lenguaje universal de la razón*.

II

En realidad, la idea no es nueva. El siglo XVII presencia, en diversas ocasiones y contextos, la aparición de varias tentativas de construcción de lenguajes universales (Dalgarno, Wilkings, etc.). La expansión cultural y económica europea y la necesidad subsecuente de comunicación y uniformidad en la ciencia, la técnica y el comercio parecen haber sido -y son- elementos que contribuyen decisivamente a crear las condiciones propicias para el surgimiento de una idea de este tipo.

Es común resumir las ideas lógicas de Leibniz hablando de su proyecto de elaboración de una *lingua characteristica*, de una *lingua rationalis*, de una *lingua philosophica*, de una *characteristica universalis*, etc. que dirimiera cualquier tipo de controversia científica. Leibniz mismo se refiere a este programa en los siguientes términos [Cit. en Fisher 1920, 39]:

Habiendo descubierto un principio de ordenación en las matemáticas y considerando que algo similar podía ocurrir también en otras disciplinas, particularmente en la filosofía, «llegué a la conclusión de que debía ser, en principio, posible encontrar un alfabeto del pensamiento humano que, al combinar sus letras, permitiera analizar las palabras compuestas, de tal modo que con este procedimiento se pudiera deducir y reflexionar sobre cualquier tipo de conclusiones y argumentos».

Por una parte, entonces, la intención es construir un lenguaje *racional* y *universal*, una especie de esperanto científico y filosófico, capaz de dar expresión a todo tipo de ideas. Se trataría, también, sin embargo, de un «alfabeto del pensamiento», es decir, los objetos a los que este lenguaje se referiría, serían, en segundo lugar, ideas, proposiciones y *argumentos, que serían* representados en forma tal que exista, además, un isomorfismo o una correspondencia natural entre el conjunto de estos signos y los conceptos, las proposiciones y los argumentos. En otras palabras, Leibniz supone que el pensamiento procede por combinación y análisis de formas conceptuales reducibles todas ellas, en última instancia, a una serie de elementos básicos [1686, 4], en un proceso que sería aparentemente recursivo. El modelo a seguir sería, por otra parte, el álgebra; es decir, se trataría de un lenguaje algebraico de contenidos, no simplemente formal o sintáctico, con el que, no obstante, puede operarse haciendo prácticamente un uso «ciego» de los signos, esto

---

[3] Aunque puede pensarse que no es necesario que ésta constituya una correspondencia biunívoca entre ambos *en vista de que en la matriz primigenia pueden* estar incorporadas emociones, *por ejemplo* -esto es, elementos no racionales

es, haciendo caso omiso de su referencia. Por lo demás, el lenguaje que Leibniz tiene en mente es, estrictamente hablando, un lenguaje *ideal*, un sistema de operación de ideas, similar al chino, un lenguaje ideográfico que anticipa, por lo menos parcialmente, la conceptografía de Frege[9] y supone una coextensionalidad entre el lenguaje y el pensamiento conceptual. Esto último parecería implicar, asimismo, la unicidad de ese lenguaje o, por lo menos, su carácter único módulo equivalencia.

Sin embargo, El proyecto lógico-lingüístico de Leibniz tiene, también, por otra parte, un aspecto mucho más concreto y práctico, al que su autor restringe, en los últimos años de su vida, su atención [cfr. Rutherford 1995, 239]. El énfasis, aquí, se pone en la parte puramente notacional y combinatoria. Se trataría, en efecto, de desarrollar un sistema simbólico, aplicable a todo tipo de argumentos y susceptible de ser utilizado para llevar a cabo un análisis de los contenidos de las ideas en sus componentes básicos. Lo interesante ahora no es tanto la aplicación, sino el sistema sintáctico mismo. Así considerado, el sistema adquiere un carácter algorítimico y *formal*, un carácter abstracto que permite abarcar a la vez múltiples realizaciones concretas del mismo y puede considerarse, en realidad, como una teoría general de estructuras. Tendríamos, así, según Leibniz, un lenguaje perfecto que reflejaría todas las combinaciones correctas posibles de ideas, excluyendo al mismo tiempo todas aquellas que den lugar a absurdos. Con ello, Leibniz formula, por primera ocasión, la idea de un cálculo lógico, un sistema que, de acuerdo con las dos últimas exigencias, tendría que ser correcto y semánticamente completo.

Ésta sería una descripción general de las ideas leibnizianas acerca de un lenguaje universal. Ahora bien, ¿en qué consiste su especificidad? Es decir, ¿qué es lo que diferencia el proyecto de Leibniz de los otros intentos similares habidos en su época? Son, en realidad, dos, según nos parece, las características que lo hacen peculiar.[10] En primer lugar, su inserción en un marco filosófico general, concretamente, como elemento constitutivo del conocimiento científico, en oposición a su papel como un mero instrumento de comunicación en el que parecen haberse agotado otros proyectos de la época. En segundo lugar, la vinculación que en Leibniz se hace de esa idea general con la lógica y las matemáticas. De hecho, es precisamente esta combinación sistemática de lenguaje y lógica, como elementos necesarios del pensamiento, aunada a su interés por las matemáticas, lo que distingue a Leibniz no sólo de sus contemporáneos en los siglos XVII y XVIII, sino, con excepción de Bolzano y Frege, de la casi totalidad de los filósofos anteriores al siglo XX.

---

[9] Frege mismo ve en su *Conceptografía* [1879,xi-xii] una realización parcial del proyecto leibniziano, aceptando igualmente como traducción de la denominación del mismo «ideografía» [Cfr. Jourdain 1912, 278] Vease más adelante, cap.3.

[10] «Como pocos -escribe Heinekamp [1976, 520]- Leibniz se sirve de ideas y descubrimientos de otros. No resulta nada facil, sin embargo, distinguir en él lo propio de lo que se ha tomado en préstamo, debido a la asimilacion que de todo ello se hace.»

Existe un elemento adicional que parece haber reforzado en Leibniz la convicción del carácter viable de su proyecto. A diferencia de Descartes, que opone explícitamente a la tradición, particularmente a la tradición escolática[11], sus ideas, Leibniz adopta, como norma general de procedimiento, el plantear los problemas ubicándolos precisamente en el marco de esa tradición filosófica secular amplia, de la que, por supuesto, él mismo se considera a la vez receptor y continuador.[12] Sin duda, a alguien que, como Leibniz, había estado inmerso a fondo en este ámbito de cultura, en el que el latín tiene tanta importancia como *lingua franca* intelectual. debia resultarle más bien natural la idea de la existencia de una lengua que unificase y permitiera abarcar la diversidad cultural, sobre todo, la diversidad *científica creciente* que los descubrimientos geográficos y el incipiente desarrollo de la técnica impulsaban en la época. La idea de un lenguaje universal puede verse, por lo tanto, también, como un intento de asimilación y comprensión humanista de una realidad cada vez más compleja. a la vez que un elemento pedagógico que contribuiría al entendimiento entre los hombres y, en ese sentido, a la paz y la armonía entre ellos, al permitir pensar claramente.[13] Como sea, la enseñanza que Leibniz parece derivar de todo ello es que el lenguaje es un instrumento intelectual de primer orden, un instrumento similar al microscopio en biología, una lente que conviene perfeccionar.[14] «Nadie podría, con razón, temer que la consideración de signos lingüísticos nos aparte de las cosas; más bien, nos permiten, precisamente, penetrar sus secretos.» [Leibniz 1678b, 193]

III

El lenguaje que Leibniz *tiene en mente es un* lenguaje racional, de extrema precisión y de la máxima sencillez compatible con este objetivo, un lenguaje apto para la resolución de problemas científicos. Como Descartes, Leibniz piensa que la ciencia es una en cuanto a método, es decir, que existe un procedimiento de fundamentación de los conocimientos ya disponibles y de obtención de otros, cuya clave se encontraría ahora, justamente, en el *lenguaje*. Es claro, por lo tanto, puesto que el lenguaje natural no posee estas características, o, por lo menos, no siempre, al estar sujeto a múltiples irregularidades históricas. que el lenguaje requerido es, en todo caso, de un tipo diferente al del lenguaje natural Como el lenguaje natural es, sin embargo, esencialmente el único a nuestra

[11] «A finales del siglo XVI. en parte debido a las críticas del humanismo. la escolástica cobra renovada vida, logrando establecerse, otra vez, durante todo el siglo XVII. como la forma dominante de la filosofía en las universidades europeas » [Brown 1995, 4]

[12] Se pone aquí de manifiesto una peculiaridad que parece poder extenderse a la obra entera de Leibniz: su aguda conciencia del carácter histórico de la ciencia y las instituciones y la actitud conciliadora, en apego a este marco general, que de todo ello parece razonable derivar

[13] A pesar de su amplio interés por diversas culturas y por la historia y el derecho, Leibniz se encuentra alejado de cualquier forma de relativismo, si bien es, a partir de sus concepciones unitarias, un consecuente igualitarista

disposición, el lenguaje ideal que Leibniz tiene en mente debe obtenerse *a partir de él*. Ahora bien, hay dos posibilidades a este respecto:

a) por *construcción* específica. Se trataría, en otras palabras, de servirse de aquél para la explicación de su estructura y funcionamiento. El lenguaje natural o una parte de él jugaría aquí el papel de metalenguaje e implícita, aunque, por supuesto, no enteramente, de modelo. El problema sería, entonces, cómo llevar a cabo esto;

b) por *abstracción*, a partir del lenguaje natural, a la manera en la que el álgebra se obtiene por abstracción de la aritmética.

Estas líneas de investigación no son ajenas entre sí y en Leibniz se da una combinación de ambas En las dos se requiere un lenguaje natural o, en otras palabras, de intuición y significados; en los dos casos resulta necesario un *análisis* de las estructuras lingüísticas a nuestra disposición. esto es, según Leibniz, de una consideración conceptual. A este respecto, Leibniz es de la idea [Cfr. Parkinson 1966, xvii] de que la elaboración de un diccionario sería un expediente útil para esa tarea [15]

Como fuere, según vemos aquí, un análisis informal resulta necesario para poder obtener el lenguaje ideal. Como, por otra parte, entre los objetivos centrales de la *característica universal* se encuentra justamente la realización de un análisis del discurso, esto es, de los conceptos en sus elementos constitutivos primitivos, parecería haber un círculo vicioso en todo el planteamiento. El dilema parece referirse, esencialmente, al papel que el lenguaje natural haya de jugar en todo esto, es decir, a la posibilidad o imposibilidad de prescindir del todo de él. Puede pensarse, por ejemplo, a este respecto, que si bien tal lenguaje resulta necesario para la estructuración del lenguaje universal, puede renunciarse al mismo una vez que éste se encuentre disponible. Pero, entonces, ¿cómo saber, sin incurrir en una petición de principio, que nuestro análisis ha sido correcto? Una alternativa aquí sería, sin duda, la consideración del lenguaje natural como el metalenguaje del lenguaje racional y de este último como estructurado a partir de supuestos que deben ser justificados de manera metalingüística, es decir, pensar en la *Característica* como un instrumento, posiblemente no único y ciertamente no absoluto, para la solución de problemas discursivos. Independientemente de esto, las ideas de Leibniz plantean, por

---

[14] Resulta notable aquí, inclusive en la analogía, la coincidencia con Frege Cfr. nota 33, cap. 3.

[15] La tarea de elaboración de un lenguaje universal sería, de acuerdo con esto, doble· una propiamente lingüística, parecida a la elaboración de un diccionario, con definiciones, analogías, etc y otra, más bien, enciclopédica, en cuanto a que el lenguaje universal serviría para resolver cualquier problema científico Desde este punto de vista, la «dispersión» que frecuentemente se observa en Leibniz, esto es la gran diversidad de sus intereses científicos resulta completamente necesaria. En este mismo contexto es interesante recordar que la *Preussische Akademie der Wissenschaften* es creada en 1700, siguiendo un proyecto elaborado por Leibniz y teniéndolo a él como director vitalicio; que la creación de instituciones de este tipo es común en la época (la *Académie Française*, por ejemplo, se funda en 1635 y la *Royal Society* inglesa en 1663)y, por último, que en 1694 la segunda de ellas publica el primer diccionario, el *Gran Diccionario Europeo* de la lengua francesa [Cfr DBG-Handlexikon. Ullstein. Berlin. 1964. p.24]. lo que parece sugerir que todas estas ideas forman parte del bagaje intelectual de la epoca

primera ocasión en la historia, aunque en referencia exclusiva al lenguaje natural, uno de los problemas que terminaría por adquirir una significación básica en la filosofía de las matemáticas y la lógica, el del papel que en ellas juega la intuición, el de los límites de una restricción de la misma y, de paso, también, el de las posibilidades de convertirlas o no en un procedimiento reglado para el que sería, en principio, posible la construcción de una máquina [Cfr. 1675, p.166].[16] Es claro que Leibniz está a favor de una restricción de tal papel y, en cierto sentido, la empresa de construir un lenguaje racional tiene también eso como uno de sus objetivos centrales.

IV

Desde una perspectiva puramente simbólica, el lenguaje leibniziano constituye una combinatoria. «Para mí -escribe Leibniz [1678b, p.192]- el *ars combinatoria* es la ciencia o, como también podemos decir, la característica o arte notacional que trata de las formas o fórmulas de las cosas en general, esto es, de sus cualidades en general o de la relación de semejanza o desemejanza entre ellas... El álgebra se encuentra sujeta a la combinatoria y se sirve de sus reglas. Pero las reglas de la combinatoria son mucho más generales y encuentran aplicación no sólo en el álgebra, sino en la traducción, en varios tipos de juegos,... y, en resumen, en todos aquellos casos en los que la relación de semejanza sea objeto de consideración».[17]

La idea de este arte combinatorio parecería referirse, según esto, tanto a objetos extralingüísticos como a objetos lingüísticos. Es decir, se pone aquí de manifiesto el doble carácter que la lógica de Leibniz tiene: como lenguaje y como una ontología formal. Según él [1714,p.671], «la característica universal o ciencia de las formas abstractas forma parte de la metafísica». La suma de *a* y *b*, por ejemplo, no sería sólo una operación entre números, sino la totalidad de las combinaciones posibles de dos *objetos* en general. Entre otras cosas, es evidente, que Leibniz no tiene clara -como, en realidad, no la tiene nadie en la filosofía hasta Bolzano-, la distinción entre signo, objeto y significado. Aparte de ello, resalta, en la segunda parte de esta cita, la dimensión sintáctica, computacional y abstracta del sistema propuesto por Leibniz, lo mismo que una idea bastante precisa de la distinción entre un sistema simbólico y sus realizaciones particulares.

Leibniz usa con frecuencia[18] las expresiones *speciéuse générale* y *speciosa generalis*, para referirse al aspecto puramente simbólico y computacional de su proyecto.

---

[16] Por supuesto. Leibniz plantea el problema en términos mucho mas generales El procedimiento de cálculo podria darse, en su visión, para cualquier tipo de disputa racional. Su proyecto es, en este sentido, el de la estructuración de un *calculo ratiocinator*.

[17] La idea de Leibniz aquí parece similar a la de un álgebra booleana, si bien sus ejemplos [cfr. 1695, 143] no son del todo claros.

[18] Por ejemplo en [1690, pp.380 y 382 n 6]

Se trata, entonces, de un álgebra generalizada [19] El sufijo *generalis* alude aquí, entonces, tanto al hecho de que se trata de un álgebra de álgebras, de la que ella misma sería uno de los modelos, como a la circunstancia de que su interpretación principal, como hoy diríamos, sería el pensamiento que se expresa en forma discursiva y específicamente en la forma de ciencia [cfr. 1690, p.142]

La lógica y el lenguaje constituyen, entonces, de acuerdo con Leibniz, dos aspectos *esenciales y prácticamente* indisolubles de la racionalidad. Leibniz intenta poner en práctica una especie de reduccionismo lógico-lingüístico. Los elementos mínimos, pero absolutamente necesarios de cualquier forma de la racionalidad tendrían que hallar expresión en el lenguaje filosófico que Leibniz se propone construir. Pero una vez estructurado, éste puede manejarse con independencia de aquella pretensión totalizadora; de hecho, puede manejarse con independencia de cualquier significado, a la manera de un juego reglado y mecánico El proyecto de un *lingua* racional o filosófica y el de un cálculo combinatorio son, por lo tanto, diferentes. Ambos se presentan en forma simultánea en Leibniz Sin embargo, la realización del segundo proyecto es independiente de la del primero, aunque la de *éste sí depende de la de aquél*. Esta circunstancia coincide, por lo demás, con la observación que hemos hecho al principio de este escrito, en relación a que la lógica misma requiere de un lenguaje y con una transición terminológica que puede observarse en Leibniz mismo.[20] «He logrado entender -dice Leibniz en [1675, p.166]- que todo lo que el álgebra prueba y que es calculatorio se deriva de una ciencia superior, que llamo la *combinatoria_característica*... No puede concebirse nada más eficaz que esto para el perfeccionamiento de la mente humana...»

Ahora bien, la generalidad y la operatividad algebraicas del cálculo lógico de Leibniz tienen lugar sobre la base de su carácter puramente *formal*. El lenguaje combinatorio que Leibniz tiene en mente es, por lo tanto, un lenguaje formal. La noción de forma, de tan larga y obscura historia en la filosofía, adquiere en él, por primera ocasión, un rango lingüístico -aunque no exclusivamente lingüístico[21]. Más aún, la consideración de que la intepretación principal de este lenguaje bastaría para los fines de las ciencias parece aproximar éstas a su concepción como teorías en un sentido carnapiano, es decir, como

---

[19] La denominación *speciéuse générale* es utilizada ya por Viète en el siglo XVI. En el siglo XVIII [Cfr. Kneebone 1963, 152], la expresión se utiliza corrientemente en el sentido de álgebra, hablándose particularmente de una *arithmétique_speciéuse*.

[20] Segun Loemke [1969, p 166 n.2], la expresión *característica_combinatoria* ilustra la transición de un *arte combinatoria* (1666) a un *arte característica* (desde 1678), es decir, el cambio de énfasis del aspecto notacional y calculatorio al aspecto de *característica* racional, filosófica y ontologica

[21] Como hemos observado antes, «forma» tiene, también, en Leibniz una connotacion ontológica [cfr., *v gr.* 1714, 671]

conjunto de enunciados[22] Pero esto confirma, también, la apreciación hecha anteriormente en relación al reduccionismo leibniziano: el lenguaje filosófico opera sobre una base lógico-lingüística (y ontológica) de la que las ciencias resultarían por determinaciones adicionales.

En estrecha relación con esto último se encuentra el problema de la relación entre lógica y ciencia y, de particular interés para el problema general que nos preocupa aquí, el de la relación que pueda existir entre la lógica y las matemáticas.

Las matemáticas, en particular el álgebra y el análisis, tienen, para Leibniz, un carácter lógico. La lógica puede considerarse, en él, como una teoría de las relaciones en general. De acuerdo con la concepción de la época, las matemáticas son la ciencia de la cantidad, es decir, del número o cantidad discreta, por una parte, y de la magnitud o cantidad continua, por la otra. A ellas se asocian las operaciones de contar y medir, respectivamente. Leibniz parece concebir ahora a las diferentes teorías matemáticas, en especial, el álgebra como un caso particular de su *álgebra general* o *teoría general de las relaciones* Por su parte, la lógica deriva su generalidad de la índole puramente formal de sus consideraciones. Es esto lo que la hace susceptible de un tratamiento calculatorio y algebraico.

Ahora bien, que las matemáticas sean, en mayor o menor medida, lógica -por ejemplo, el resultado *lógico* de la suposición de ciertos objetos y ciertas relaciones entre ellos-, no es, probablemente, una idea que aparezca, por primera ocasión, con Leibniz. Sí lo es, sin embargo, la de que la lógica misma sea matemática, lo mismo que la de que el carácter lógico de las matemáticas, por lo menos, el del álgebra, consista en ser un caso específico de un álgebra lógica y la de que ambas, lógica y matemáticas, constituyan, en realidad, *lenguajes formales*. Con ello, se introduce en la filosofía, concretamente en la historia de la lógica, esta noción, vinculándosela, desde un inicio, a problemas de calculabilidad[23]. Es también evidente, por otra parte, que Leibniz se encuentra cerca de la consideración de teorías matemáticas como *estructuras* relacionales; una concepción que no habría de fructificar plenamente sino hasta pleno siglo XX.

La idea leibniziana de la lógica como un *Órganon*, es decir, como un instrumento operativo, en oposición a su aspecto como visión ontologicista, presente también en él, consiste de tres partes complementarias:

i) Un lenguaje perfecto, obtenido ya sea por abstracción o por construcción;

ii) un procedimiento reduccionista o, mejor dicho, de traducción de argumentos en

---

[22] Carnap ha distinguido [1958, cap A,1] entre teoría y lenguaje. La primera sería un sistema de enunciados acerca de objetos; el segundo sería un sistema de signos y reglas para el uso de los mismo En Leibniz están presentes ambos aspectos.

[23] Es interesante recordar a este respecto, que, en 1673 [Kneale 1962, 337], Leibniz al igual que Pascal dos decadas antes inventa una máquina de calcular

general a los términos del lenguaje perfecto;

iii) la definición como operación fundamental.

Mientras que en i) tendríamos consideraciones puramente formales, sintácticas, ii) permitiría llevar a cabo, metalingüísticamente, el *análisis* conceptual y proposicional que haría posible la operación racional sobre las ideas resultantes en términos de i). iii) representaría, entonces, el vínculo formal entre i) y ii).

Por otra parte, ii) se encuentra estrechamente relacionada con la idea leibniziana de la verdad de una proposición. Para Leibniz, la estructura fundamental de una proposición obedece la norma: substantivo+cópula+adjetivos+partículas adverbiales [véase, por ejemplo, 1678a, p.16]. Estas últimas tienen como función principal modificar y relacionar las proposiciones simples y expresar pensamientos complejos. Una proposición simple carece, por lo tanto, de partículas adverbiales y puede verse, en realidad, como una expresión en la que se combinan únicamente un substantivo, el verbo ser y un adjetivo o participio.

Ahora bien, las proposiciones verdaderas son siempre también, en última instancia, *proposiciones analíticas* [1686, p.35]. Éste debe ser también, por supuesto, el caso de las principios de la ciencias y, en particular, el de las diferentes ramas de las matemáticas. «Analiticidad» tiene, aquí, para Leibniz, además, el mismo sentido restringido que esta expresión tiene para Kant[24]. Pero, entonces, la ciencia y el conocimiento en general son siempre conocimiento y ciencia deductivos[25]. La postura de Leibniz es, en consecuencia, la de un deductivismo radical Esto conduce inevitablemente, por una parte, a una concepción cuasi-estética del mundo, en el sentido de una ordenación rigurosa y armónica, donde el papel que las contradicciones pueden jugar es exclusivamente el de mostrar cuán imperfecto aún es nuestro conocimiento. Pero también implica, por la otra, la existencia de un conjunto de axiomas fundamentales de la realidad y del conocimiento. En vista de la concepción general de verdad que Leibniz sostiene, habría también la posibilidad de una ordenación de *conceptos* o *términos*, de forma tal que pueda aislarse un conjunto de ellos absolutamente primitivos.

La reducción que, de acuerdo con ii), debe emprenderse parte, entonces, de los siguientes supuestos:

---

[24] Concretamente, Leibniz piensa [*ibidem*] que toda proposición categórica verdadera puede reducirse a la forma AB es B. A diferencia de la definición kantiana de juicios analíticos, la de Leibniz es correcta -y dentro de su concepción filosófica general, no trivial La formulación ofrecida por Kant es, en realidad, no sólo demasiado vaga, sino equivocada [Véase más abajo Cap. 2, nota 23].

[25] La aparente contradicción entre estas conclusiones y la investigación lingüística *empírica* de Leibniz -por ejemplo, sus análisis para el mejoramiento del alemán como lenguaje- se resuelven en el sentido de que, aunque todas las verdades son, en último término, analíticas, sólo una mente ominicomprensiva, como la de Dios, *podría constatar* esto. Es decir, a nosotros seres humanos con recursos finitos -entre ellos el lenguaje natural- sólo nos queda preguntar en tales casos por las razones que hacen que algo sea como es (*Principio de Razón Suficiente*) o continuar en la búsqueda del lenguaje perfecto (cfr nota 3.)

a) todo concepto es susceptible de una reducción a un conjunto de conceptos o términos simples. Son éstos, precisamente, los que constituirían el punto de partida para la elaboración de una especie de alfabeto del pensamiento [1666, p.10][26];

b) los conceptos complejos se obtienen por construcción y derivación, a partir de los conceptos básicos y mediante el uso exclusivo de operaciones lógicas. En relación a esto, Leibniz parece tener en mente una conjunción en la forma amplia de conjunción proposicional, intersección de conjuntos y substitución por igualdad;

b') la manera de llegar a los conceptos simples es, entonces, por análisis y recurso a las definiciones

Se requiere, también, que

c) los conceptos sean *reales*, en el sentido que Leibniz atribuye a este adjetivo aplicado a conceptos; es decir, que existan objetos que caigan bajo ellos [cfr. Heinekamp 1976, p.530], esto es, que sean conceptos de objetos posibles.[27] Finalmente, se requiere, también, que

d) toda proposición verdadera sea analítica.

b), b') y d) combinados implican que, en última instancia, la verdad de una proposición verdadera se resuelva en términos de identidad o en términos de todo y parte. De hecho, el análisis o resolución de proposiciones tiene uno de los siguientes resultados: (a) identidad; (b) contradicción; (c) resolución *ad inf.*; y (d) resolución finita no contradictoria. A ello corresponden diversos tipos de verdades: necesarias, imposibles, contingentes y lógicamente posibles [1686, no.60 y 61, p.39].[28]

Ahora bien, un análisis de los elementos que conform[illegible] una ciencia parecería exigir, en primer término, de un examen de los conceptos que [illegible] ella intervienen, *seguido* por el de las relaciones de deducibilidad que puedan existir entre sus proposiciones. En Leibniz, esto último resulta prescindible, gracias a los principios a) y d), que hacen posible que la consideración de las relaciones deductivas entre proposiciones pueda llevarse a cabo a partir de la de las relaciones entre sus conceptos. Los términos son, por lo tanto, para Leibniz, los elementos lógicos fundamentales, su lógica es una lógica de términos. Consecuentemente, las operaciones básicas en su sistema se reducen a una sola: la definición. En todo caso, el objetivo de fondo es, precisamente, como hemos dicho, el de

---

[26] Los términos primarios serían, además, interpretados en el sentido de la Cábala -una influencia que en Leibniz es innegable- las claves, las cifras del mundo: El aprendizaje de este *ars* proporcionaría, en efecto «un conocimiento fundamental de todas las cosas.» [1666, p.11]

[27] La noción bolzaniana de la *Gegenstandlichkeit* de las ideas en sí parecería estar íntimamente relacionada o tiene su origen en esta concepción de Leibniz [Véase el capítulo 2, VIII], lo mismo que la interpretación fregeana de existencia como una característica de conceptos que consiste en que haya algo que caiga bajo ellos.

[28] Es claro que, *en última instancia,* no se presentaría sino una de las dos primeras posibilidades: las otras tendrían más bien, un carácter puramente epistemológico debido a la imperfección de nuestro conocimiento

expresar las relaciones entre términos de modo que se sujeten a reglas formales; en otras palabras, la transición de ii) a i).[29]

Es importante notar, sin embargo, que el principio c) no constituye *exactamente* la primera formulación, en la época moderna, de la idea de que en las matemáticas la consistencia implica la existencia, si bien sí se encuentra estrechamente relacionado con ese problema. Como es bien sabido, esta tesis estaría destinada a jugar un importante papel en la filosofía de las matemáticas, a partir de Bolzano y ha sido sostenida, entre otros, por Cantor, Dedekind y Hilbert. La idea de Leibniz parecería ser ligeramente distinta. La consistencia de conceptos implica, en él, efectivamente, su existencia [cfr. 1715, p.677]. Pero, para ser *reales*, los conceptos deben aplicarse a algo, debe existir al menos un objeto que caiga bajo ellos. Es precisamente el hecho de que puedan aplicarse a algo lo que les da realidad, lo que determina su aceptabilidad como tales. La función esencial de los conceptos es el establecimiento de distinciones. Si, por lo tanto, el concepto es vacío, esta función no se cumple.[30] Ahora bien, esto debe entenderse aquí en el sentido de que la existencia es un *resultado* de la consistencia lógica. Es decir, por lo tanto, que, por ejemplo, en las matemáticas, podemos hablar de existencia *una vez* que tengamos consistencia, que las matemáticas y la lógica se encuentran sujetas a la ley de no contradicción como principio supremo más claramente que cualquier otra disciplina; o, en otras palabras, que, para Leibniz, la consistencia es constitutiva, una condición necesaria y

---

[29] A manera de ilustración del procedimiento seguido por Leibniz, presentamos aquí, de manera suscinta, lo esencial de uno de sus primeros cálculos, expuesto por Leibniz en su *De Arte Combinatoria* [1686, pp 5ss]. La noción primitiva de este *Arte* es la de término *primario* o de *grado I, a,b,c,...*

Un *término* es cualquier combinación finita de términos primarios diferentes. El *grado* de un termino está dado por el número de términos primarios que en él aparecen, sus *componentes*.

Cualquier término puede ser sujeto o predicado de una proposición. No existe, por lo tanto, ninguna diferencia categorial entre sujeto y predicado; su diferencia es contextual y depende del papel que el termino juegue en la proposicion.

Si x y y son términos, *y se deriva de x*, si todo componente de x es un componente de y. (así, a se deriva de *abd*, etc.) Una proposición A es *verdadera*, *si es de la forma x es y y y se deriva de x.* Si el grado de y es mayor que el de y, A es falsa. La definición de verdad de Leibniz es, pues, extensional. Es evidente, por lo demás, la analogía entre estos análisis conceptuales y la factorización numérica, lo mismo que entre verdad y múltiplos y divisores y entre números primos y términos primarios.

[30] En el prefacio de su *Formulario* [1901, p iv], Peano atribuye a Leibniz, entre otras cosas, el descubrimiento de la idea y de las principales propiedades de lo que hoy llamamos el conjunto vacío. No he localizado el sitio en el que Leibniz expone este descubrimiento Sin embargo, suponiendo la verdad de la afirmación de Peano, se plantea el problema de si este hallazgo es compatible con lo que antecede. Tal vez podria argumentarse aquí como sigue. *-(x=x)* no es un concepto *real*, pero sí es un concepto. Si fuera real, tendría que existir un objeto *a* que fuera diferente a sí mismo. La distinción entre *conceptos en general* y conceptos reales pareceria necesaria, en vista a) de la posibilidad de que conceptos que hubieran sido utilizados suponiendo su legitimidad den, no obstante, lugar a una contradicción y b) de que entendemos lo que se quiere decir cuando se afirma -(a=a) o se habla del vacio. es decir, la extensión a conceptos vácuos estaria dictada por nuestras imperfecciones humanas. De todos modos, aquí tenemos la idea de que lo lógicamente correcto y las expresiones del lenguaje natural no necesariamente coinciden. Esta misma concepción está presente en Bolzano. en Frege y es uno de los supuestos implícitos en la teoria russelliana de las descripciones.

suficiente de la verdad en general. Hasta aquí, sin embargo, Leibniz parece tener aquí en mente algo más, a saber: la estrechísima relación que para él priva entre realidad y lógica. Esta relación determina el *carácter lógico de la realidad*, que la realidad sea lógica; los conceptos darían expresión, en su concepción ontologicista, a propiedades reales y viceversa Por lo tanto, en un lenguaje adecuado, la realidad es equivalente a la consistencia de los conceptos correspondientes. Nuestro punto de partida es siempre, sin embargo, un lenguaje, un lenguaje, en general, no perfecto, ni la realidad, por lo que es necesario demostrar, en primer lugar. que nuestros conceptos no se contradicen, esto es, que son reales Estas reflexiones parecerían ser la génesis de la idea leibniziana de una armonía universal preestablecida, es decir, de un mundo en el que las contradiciones no existen[31], lo mismo que la de la tesis hegeliana de que lo real y lo racional coinciden. No abordaremos, sin embargo, ninguno de estos problemas.[32]

V

Siendo, como queda dicho, el principio de no contradicción un elemento constitutivo de las verdades en la lógica y en las matemáticas, la única diferencia entre estas dos disciplinas se hallaría en el *grado de generalidad* de sus respectivos principios. Es decir, las matemáticas se subsumen en la lógica. Pero, si ambas son absolutamente generales, abstractas y «formales», ¿qué sentido tiene hablar de verdad en relación a ellas?

La lógica -y, por lo tanto, también las matemáticas- se refiere, según hemos visto, a la realidad, por lo que sí puede hablarse, aunque sea en ese sentido generalísimo, de verdad en relación a sus principios. Se trataría en todo caso, naturalmente, de verdades absolutamente primitivas y básicas.

Otra consideración pertinente aquí es la siguiente. El análisis de conceptos del que, de acuerdo con el punto ii) más arriba, tendríamos que partir, nos lleva, en primer lugar, a una ordenación de los conceptos y, por lo tanto, igualmente, según Leibniz, a una ordenación jerárquica de las proposiciones correspondientes. Como hemos dicho, la idea de las matemáticas que priva en el siglo XVII concibe a éstas como la ciencia del orden y de la medida. Ahora bien, ¿qué criterios conviene seguir en la tarea ordenadora en la que la ciencia consistiría? Las reglas que deben seguirse serían, de acuerdo con Leibniz, reglas lógicas y metodológicas. Las reglas para la dirección correcta del pensamiento que

---

[31] En este sentido y con las reservas que hemos anotado, la observación de Russell citada al inicio de este capítulo es correcta

[32] Vale la pena, no obstante, mencionar una consecuencia interesante de la teoría leibniziana· La realidad es reflejada, en el sentido de un «isomorfismo», por el lenguaje universal. Ahora bien, como éste posee una estructura matemática aquélla debe, también, tener este carácter. En este sentido, existe una afinidad esencial entre Leibniz y Pitágoras, a la vez que puede pensarse en las matemáticas como una ontología formal Esta tesis será nuevamente sostenida por el Bolzano de la primera época y, en nuestro siglo, influido por ambos, por H. Scholz [cfr. Scholz 1961]

Descartes formula unos años antes no son, en opinión de Leibniz [1692,pp. 383-4], reglas de este tipo, sino, en el mejor de los casos, principios psicológicos de gran vaguedad y de utilidad meramente heurística. Lo que se requiere son criterios operativos y formales relativos a la definición y procedimientos de traducción y de demostración.[33] Leibniz es, a este respecto [1671/2, p.147; 1679b, p.183; 1692, p.383], de la opinión de que la aceptación de un principio o un concepto como básico para una ciencia debe estar determinada, ante todo, por razones prácticas; una idea notable y de gran importancia que pone de manifiesto una tendencia bastante evidente, aunque inconsecuente en él [cfr. Styazhkin 1964, p.73], a abordar los problemas de la lógica y, en general, de la ciencia en términos de operatividad, haciendo a un lado las visiones esencialistas de los mismos y que adelanta en varios siglos la posición que hoy nos es familiar al respecto.

Leibniz piensa, por ejemplo, que, en la práctica, el carácter indubitable de los principios es relativo. Aun en el caso de principios considerados como axiomas, resulta de gran importancia, desde el punto de vista de la ciencia, la demostración de los mismos, de ser posible, a partir de otros principios más básicos, independientemente de la reacción psicológica que todo ello nos produzca [1692, p.383 y 1714, p.646].[34]

Podemos, entonces, resumir la posición de Leibniz respecto a las relaciones entre lógica y matemáticas como sigue: 1) las matemáticas, en su totalidad, son reducibles a la lógica en el sentido de una traducción o como caso particular de teorías lógicas; 2) la lógica es una teoría general de los lenguajes formales y, ella misma, puede ser parcialmente vista de esta manera; 3) las matemáticas son una *aplicación* de ese lenguaje formal de la lógica o en el que la lógica se expresa; 4) la lógica es, también, una teoría general de las *relaciones*. En todo caso, 5) la lógica posee un carácter más primitivo y general que las matemáticas, aunque 6) lógica y matemáticas comparten el mismo método simbólico, algorítmico y deductivo y 7) la índole de sus verdades sea la misma.

VI

El programa leibniziano de construir una *lingua universalis* no rebasó los límites de

---

[33] Dos principios que tendrían aquí cabida serían, a manera de ejemplo, el de substitución de iguales por iguales y el de no contradicción. Es claro, en vista de que en Leibniz lógica y matemáticas gozarían de un *status* superior al de otras ciencias que, por insuficiencia humana, no encuentran aún su acomodación deductiva, que ambas se encuentran íntimamente relacionadas entre sí en cuanto a sus bases teóricas: «El fundamento supremo de las matematicas [y -podemos agregar- de la lógica] es el principio de *no contradicción* o *identidad*. Por sí mismo, este principio basta para establecer todas las partes de la aritmética y la geometría, esto es, todos los principios de las matemáticas» [1715, p 677] Al mismo tiempo, sin embargo, el principio de identidad de los indiscernibles es, también, un principio metafísico [1715, p 687] y, con el principio de razón suficiente, permite el paso de las matemáticas a la filosofía de la naturaleza

[34] Esta tesis será sostenida casi textualmente de la misma manera siglos más tarde por Dedekind y Frege, entre muchos otros No obstante, por razones que seran examinadas en el siguiente capítulo, Bolzano la rechaza

un proyecto y un bosquejo de gran audacia. Es probable que la magnitud de la tarea, la amplitud consecuente de los intereses intelectuales de Leibniz y su trabajo ocasional e intermitente sobre estos tema hayan sido factores que le impidieron una elaboración más sistemática de sus ideas.[35] Existe, sin embargo, otro tipo de dificultades, de carácter interno, que definitivamente constituyen obstáculos insuperables para la realización de tal proyecto.

Como casi todas las grandes personalidades en la filosofía y la ciencia, Leibniz es una figura de transición. Nada ilustra mejor esto, en relación a él, que sus análisis[36] de la silogística, un examen que constituye, a la vez, el único intento de llevar a la práctica sus ideas sobre la construcción de un cálculo lógico. En su primera tentativa, Leibniz tiene la idea de asociar a cada término primitivo un número primo, asignándosele a cada término complejo el producto de los números primos correspondientes, en una especie de recursión y gödelización primigenias.[37] Aparte de ello, su interés central parece consistir, más que *nada, en dar una interpretación* algebraica de la lógica aristotélica y en hacer una transcripción notacional de la misma para ese fin.[38] Como resultado de estas investigaciones, Leibniz acepta veinticuatro modos del silogismo, demostrando, también, que éstos constituyen la totalidad de los modos válidos. Esto lo obliga, sin embargo, a suponer un contenido existencial en los enunciados universales, por lo que el paso de $(\forall\alpha)$ $\Phi\alpha$ a $(\exists\alpha)$ $\Phi\alpha$ resulta lícito.[39] Este principio es consecuencia directa de su concepción de que los conceptos deben ser *reales* y de un inadecuado análisis de los enunciados universales en términos de sujeto-predicado, que no establece ninguna distinción categorial entre éstos. Esta consideración hace necesario, en efecto, que el sujeto de un enunciado de ese tipo se refiera a algo, por lo que la transición de lo universal a lo existencial parece garantizada.

Otra consecuencia de la misma dificultad básica es su inconsistente tratamiento de

---

[35] Vease, sin embargo, nuestra nota 15 más arriba. Por otra parte, como Parkinson [1966, p.lix] observa, esto no explica del todo lo escaso del material *publicado*: Leibniz encontró tiempo para «escribir una gran cantidad de material acerca de la lógica..., *por lo que* la pregunta que surge es por qué tan pocos de sus escritos constituyen obras completas »

[36] Leibniz lleva a cabo tres [Cfr Bourbaki, 20 y Styazhkin, 82], de los que 1666, 1678, por una parte, y 1686 y 1690 dan, respectivamente, cuenta.

[37] Véase nuestra nota 29 más arriba Por lo demás, es digna de mención, a este respecto, la conclusión de Leibniz, al final de su investigación de 1686, en cuanto a haber descubierto la posibilidad de expresar numericamente todas las verdades

[38] O en establecer una representacion de ella en términos de figuras, diagramas o numérica De hecho, Leibniz establece en su obra de 1686 esta representabilidad como criterio para la evaluación de un calculo

[39] Cfr Capitulo 3, Apartado X

las relaciones. Por una parte, Leibniz es consciente[40] de las limitaciones de la silogística en lo que se refiere al manejo de las relaciones. Esta circunstancia resulta todavía más notable si recordamos que Leibniz identifica las matemáticas como una parte de la lógica justamente sobre la base de que ambas son teorías relacionales. Como hemos señalado antes, la idea leibniziana de enunciado considera que el predicado que en éste aparece debe ser monádico. Las relaciones se convierten, entonces, en conjunciones de atributos, lo que equivale a desconocer su carácter categorialmente más complejo.

Todo ello no demerita en nada, sin embargo, la importancia de algunas sus concepciones, ni disminuye en un ápice el interés del proyecto mismo. Leibniz descubre, entre otras cosas, las nociones y las propiedades que hoy asociamos con la intersección de conjuntos, la negación, la conjunción y el condicional de proposiciones, los diagramas de Euler. la igualdad, etc. Como hemos visto, Leibniz tiene una idea muy cercana a la nuestra de la axiomatización y la formalización de teorías, una idea cuya cabal apreciación sólo seria posible hasta principios de este siglo con Dedekind, Frege, Hilbert, Peano y otros. Leibniz es, también, el primero en combatir el psicologismo en la lógica, como lo pone de manifiesto su crítica a las *Reglas* cartesianas para la dirección del espíritu. En él se encuentran formuladas, asimismo, muchas ideas que tardarían años -y aun siglos- en reaparecer, como la de que, en matemáticas, la consistencia implica la existencia, una forma del logicismo, del que, como hemos visto, Leibniz es un claro precursor, la utilización de los números primos como recurso para pensar expresiones lingüísticas, del que Gödel se serviría en la tercera década de este siglo para probar sus resultados de incompletud, etc.[41]

La teoría leibniziana de un lenguaje universal puede ·. vista como la primera teoría unificada de la ciencia, de las ciencias en plural. Se trata de una teoría sistemática, linguística, lógico-matemática y formal, cuyo objetivo primario, aparte del de una concepción global y unitaria, es el de una fundamentación de las distintas disciplinas que conforman lo que se llama la ciencia
El sistema de Leibniz es, en este sentido, mucho más comprensivo que el de la casi totalidad de los filósofos de los siglos XVII a XIX. En él se incluye, aparte de metafísica, epistemología, ética, etc., una teoría del lenguaje en general, una notable teoría del lenguaje natural y de los lenguajes formales; en particular, una estructuración de la lógica como

---

[40] Vease, por ejemplo, [1678, p.13]

[41] Los escritos lógicos de Leibniz permanecieron, en su mayor parte, inéditos hasta principios de nuestro siglo, cuando L. Couturat hizo una edición de ellos. De hecho, Leibniz publica en vida una única obra de lógica [Parkinson 1966, xvii]. Si bien su influencia inmediata se vio mermada por esta circunstancia, existe una línea de continuidad temática básica, por lo menos en la intención, en lo que a la vinculación de logica. matemáticas y filosofía se refiere. que va de Descartes y Leibniz y pasa [cfr., por ejemplo, Styazhkin. Cap 3] por los hermanos Bernoulli. Ch. Wolff y Lambert y de éstos -particularmente de Wolff y con la mediacion. entre otros. de Kant- a Bolzano y Frege

cálculo y un intento de fundamentación de ésta y de las matemáticas. además de una concepción unificada sobre la metodología de la ciencia, algo ausente o sólo supuesto o incipientemente elaborado por otros. El de Leibniz es, además, el primer intento a fondo por superar la distancia creciente que se presenta a partir de los siglos XVII y XVIII entre la suposición de la lógica como una disciplina fundamental para la ciencia, la lógica existente en su forma de silogística, los niveles de desarrollo que pueden observarse en las diferentes ciencias de la época y la importancia creciente de las matemáticas, no sólo por sí mismas, sino como instrumento básico para el estudio de la naturaleza.[42] La enseñanza de Leibniz a este respecto, una enseñanza que servirá de guía tanto a Bolzano[43], como a Frege[44], a Peano a Hilbert, a Russell, a Gödel, etc. es la de que no existe, en realidad, una verdadera separación entre filosofía y ciencia y que, en particular, la filosofía, la lógica y las matemáticas van de la mano.

[42] Sin duda alguna, un rasgo constitutivo y característico de la filosofía moderna.

[43] Véase Cap. 2 nota 20

[44] Frege, por ejemplo, ve en su *Begriffsschrift* [1879, pp. xi-xii] una realización parcial del proyecto de una lengua universal de Leibniz [Cfr. Cap. 3]

CAPITULO 2

BOLZANO: LOS FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA Y LAS MATEMÁTICAS

Fortschreiten soll ich
Bolzano[1]
Es ist aber ein gewohnliches Schicksal der menschlichen Vernunft in der Spekulation, ihr Gebaude so fruh wie moglich fertig zu machen, und hintennach allererst zu fragen, ob der Grund dazu gut gelegt sei
Kant [1787, B-9]

En la historia de la ciencia y de la filosofía se presenta con cierta frecuencia el caso de ideas y desarrollos hoy tenidos unánimemente como valiosos y adelantados a su época que en su momento fueron ignorados por las concepciones dominantes acerca de los temas a los que se refieren, pero que reaparecen con todo vigor más tarde (en ocasiones, mucho más tarde), para ubicarse en una perspectiva en apariencia más justa, en una especie de reivindicación tardía de su originalidad y sus autores.

Por sí sola esta circunstancia arroja ya una sombra de duda sobre el carácter estrictamente lineal del desarrollo científico (en filosofía es mucho menos frecuente hablar seriamente de una evolución de este tipo), aunque, de cualquier manera, es claro que la misma no tendría un carácter conclusivo al respecto Hilbert, por ejemplo, ha hablado [1925, 162], en relación a ello, de una especie de *armonía preestablecida*, es decir, de una serie de factores ordenadores, promotores y correctivos internos de la actividad científica que garantizaría el progreso de ésta. Las grandes realizaciones en la ciencia -en especial en las matemáticas- se darían justamente en aquellos momentos de síntesis y acomodo de tales elementos dispersos, paciente y, a veces, inconexamente acumulados por los científicos a lo largo del tiempo. Un ejemplo de esta concepción lo encontraríamos en la metamatemática o teoría de la demostración que el mismo Hilbert crea en los decenios segundo y tercero de nuestro siglo. Su surgimiento requiere de la confluencia de una diversidad de factores, la mayoría de los cuales son independientes entre sí en relación a los problemas que suscitan su aparición: las geometrías no-euclidianas, los intentos de fundamentación rigurosa del análisis por parte de Gauss, Bolzano, Cauchy, Weierstrass y otros, la aritmética transfinita de Cantor, la lógica de Frege y Russell, etc.

Parecería posible, por lo tanto, hablar, de manera menos problemática, de la existencia de ciertos mecanismos de corrección que, si bien no garantizan la ordenación ulterior de tales factores, sí tienden, no obstante, a favorecerla. Como fuere, resulta claro que en la ciencia, en las matemáticas y aun en la filosofía, la incorporación de ideas y teorías al cuerpo compartido de la disciplina depende, por lo menos en parte, de una diversidad compleja de elementos entre los que ciertamente se cuentan algunos de índole *externa*.

Debo progresar (Inscripción lapidaria en la tumba de Bolzano).

El presente capítulo tiene por objeto la exposición de las principales ideas lógicas y acerca de los fundamentos de las matemáticas de uno de los -hasta hace poco- grandes olvidados de la historia de la filosofía, Bernard Bolzano, así como una somera revaloración del interés que algunas de sus teorías sobre estos temas puedan tener como influencia en o alternativas a teorías y concepciones actuales o como enriquecimiento de las mismas.

I

Bolzano es una figura más bien paradójica en la historia de las tres disciplinas a las que se dirige la mayor parte de su labor intelectual: la lógica, las matemáticas y la filosofía.[2] Por una parte, en cuanto a rigor, las ideas bolzanianas acerca de todas ellas se encuentran mucho más cerca de nosotros que las de la absoluta mayoría de los lógicos, matemáticos y filósofos de su tiempo. En ese sentido, el pensamiento de Bolzano posee una gran modernidad.[3] Por la otra, sin embargo, al poner en tela de juicio no sólo el aparato conceptual que su época hereda de la filosofía kantiana, sino también lo que parecería ser el núcleo mismo de ésta, es decir, al oponerse radicalmente al clima filosófico imperante en Europa durante la primera mitad del siglo XIX, Bolzano se convierte en una figura marginal y, de hecho, a los ojos de sus contemporáneos, inclusive obsoleta en su propio tiempo.[4]

Como Kant, Bolzano parte del hecho mismo de la ciencia; en especial, en el caso de las matemáticas, de la consideración de éstas en su actualidad histórica. Pero su pregunta acerca de ellas, específicamente acerca de la rama fundamental de las matemáticas cuya consideración es prácticamente omitida por completo por Kant, del análisis, no es la pregunta acerca del *fundamento de posibilidad de éste*, es decir, su problema no es el de la búsqueda de un fundamento extramatemático del análisis a partir de la consideración de ejemplos absolutamente elementales e inclusive *ad hoc* para la confirmación de una teoría previa y general acerca de lo que ha de considerarse como ciencia. La intención de Bolzano no es, como es el caso de Kant, la de *justificar* una práctica dada con una teoría filosófica general, sino la de examinar críticamente, en primer lugar, tal práctica en busca de sus fundamentos objetivos *desde* la ciencia misma. En otras palabras, lo que Bolzano se propone no es, en primera instancia, hacer filosofía apelando a resultados matemáticos confirmatorios, sino, en todo caso, llegar a ella a partir de una (en él prácticamente de *la*) ordenación rigurosa y sistemática de sus principios y de la elucidación precisa de sus métodos, todo ello en lo que él considera el espíritu original y esencial propio de esta

---

[2] En realidad, sin embargo, sus preocupaciones más hondas son de carácter ético-social y religioso. Sus investigaciones lógico-matemáticas, en teoría de la ciencia y en la filosofía política tienen, asimismo, esta base. Imbuido a fondo del espíritu racionalista, pedagógico y social de la Ilustración e influido particularmente por el pensamiento de Wolff, Bolzano cree que conceptos y fundamentos claros en el conocimiento conducen necesariamente a una mayor racionalidad en la vida social y contribuyen, en ese sentido, al bien común.

[3] Ejemplos manifiestos de ello son la primera y segunda partes de la *Wissenschaftslehre* escrita en 1837 y su notable *Rein analytischer Beweis.* de 1817. Ambos textos resultan sorprendentemente claros para un lector de nuestros días (véase más abajo)

[4] Sin duda alguna, esta sería *sólo* una parte de las razones a considerar Las dificultades políticas en las que Bolzano se ve envuelto y que conducen tanto a su separación de la docencia como a la prohibición de publicar que se le impone, la necesidad consecuente de dar a conocer algunas de sus obras bajo pseudónimo, su quebrantada salud, el aislamiento consecuente y el hecho mismo de que su ámbito de repercusión académica inmediata haya sido una ciudad de la «periferia» cultural de la época contribuyen también a ello

disciplina, el de Euclides[5], aunque, naturalmente, con las modificaciones que el desarrollo histórico imponga en el momento. La fundamentación de las matemáticas que Bolzano se plantea no es, en consecuencia, en primer término, una de tipo filosófico, sino una fundamentación *interna*, esto es, una reorganización del análisis y, en general, una reorganización de las matemáticas desde un punto de vista unitario y de carácter metodológico. Esto, junto con los descubrimientos *matemáticos* que la práctica de este enfoque le permite obtener, hace de Bolzano, con Gauss, el iniciador del movimiento rigorista en el análisis.[6]

Ahora bien, lo anterior significa que Bolzano se inscribe en la tradición leibniziana, es decir, no existe, para él, en el fondo, una línea de demarcación nítida entre la filosofía y la ciencia. Esto significa, por una parte, que la elucidación de los fundamentos de la ciencia debe consistir, ante todo, en un análisis de la estructura lógica y epistemológica de las teorías que la constituyen, *así como en una* explicitación y crítica de los supuestos filosóficos que las subyacen, y que tal examen no sólo puede tener, sino que, de hecho, tiene consecuencias en la organización, presentación y práctica misma de la ciencia. Pero también, conversamente, por la otra, que la filosofía no puede desentenderse, en lo que a ella misma atañe, de tales resultados, que éstos tienen repercusiones en ella y, por lo tanto, que una clarificación conceptual es la primera tarea común a *ambas*. En particular, en el caso de las disciplinas puramente conceptuales, como las matemáticas y la filosofía, esto implicaría la existencia de afinidades metódicas esenciales entre todas ellas.

A diferencia de Kant, entonces, quien defiende la idea una diversidad metódica esencial entre filosofía y ciencia[7], Bolzano insiste no sólo en la existencia de tal semejanza, sino también en las necesidades generales de procedimiento que de ello se derivan.[8]

---

[5] «La originalidad de los griegos -escribe Bourbaki [1972, 13]- consiste justamente en el esfuerzo consciente de escribir demostraciones matemáticas como una sucesión en donde no quepan dudas al pasar de un eslabón al siguiente [de la cadena deductiva], forzando el asentimiento universal».

[6] *Sin embargo, Bolzano no es* un matemático en el sentido común del término, como Gauss mismo o como Cauchy o Dedekind, digamos; es decir, un practicante cuyo interés profesional está básicamente en los problemas *de las matemáticas*. En el centro de sus preocupaciones profesionales se encuentra indefectiblemente la filosofía. Aun en el caso del análisis, Bolzano se interesa exclusivamente por los aspectos fundacionales de éste y no, por ejemplo, en las aplicaciones del cálculo. Es decir, si bien el punto de partida de sus reflexiones se encuentra *dentro* de la ciencia y no en la filosofía, se mantiene en una vecindad muy estrecha con ésta. En realidad, como veremos más adelante, también a este respecto, Bolzano es un representante típico, aunque tardío, de la Ilustración

[7] «El uso que puede hacerse de las matemáticas en la filosofía consiste o bien en la imitación de su método o *en la aplicación real de* sus teoremas a los objetos de la filosofía. Hasta ahora no se ha visto que lo primero haya tenido alguna utilidad, a pesar de las grandes ventajas que algunos se prometían de ello en un principio ..» [Kant 1763, 779]. Kant piensa, además, que mientras que la filosofía procede analíticamente, las matemáticas lo hacen de manera sintética, analizando conceptos en el primer caso, creándolos en el segundo (como ocurriría con la geometría euclidiana), con definiciones precisas en éstas y con definiciones no necesariamente precisas en aquélla, partiendo, de hecho, de definiciones de ésta índole en el caso de las primeras y llegando, más bien, a ellas en el caso de la filosofía.

[8] «Una de las costumbres más sorprendentes, inveteradas y características de los sabios de nuestro tiempo - dice Bolzano refiriéndose mucho menos a Kant (aunque también a algunas de las ideas de éste) que a sus *continuadores, particularmente* a Fichte, Schelling y Hegel- es el hecho de no apegarse en absoluto, o de apegarse muy poco, a las *reglas de la lógica*, es decir, no observar la obligación de explicar, sin excepciones y de manera unívoca, realmente *de qué* están hablando, en qué sentido toman este o aquel concepto, no aclarar ni hacer explícitas las *bases* en las que se apoyan para afirmar algo, etc.... El recurso al llamado *método matemático*, que habría evitado tales fallas, es considerado una muestra de pedantería, habiendo sido

También la filosofía es, básicamente, un instrumento de formación y elucidación de conceptos, de justificación de proposiciones y elaboración de teorías, esto es, de definición de los primeros, argumentación deductiva de las segundas y estructuración coherente de las últimas. En consecuencia, la fundamentación de las matemáticas, concretamente la del análisis, debe abocarse, en primer término, a una consideración metódica conceptual y general, es decir, a la *lógica*[9].

Ahora bien, ¿a qué lógica?, puesto que es evidente que la lógica requerida para tal empresa no puede ser la lógica tradicional, ni la mezcla de metafísica y epistemología que Hegel presenta bajo tal rubro en su *Ciencia de la Lógica* y a la que Bolzano considera, con toda razón, como un grave retroceso histórico en lo que a esta disciplina fundamental se refiere[10], ni la combinación de lógica escolástica y psicología que se impondrá poco a poco y dominará en el ámbito de la filosofía hasta finales del siglo XIX.

Bolzano piensa a este respecto que, si el punto de partida de la filosofía moderna en general ha de ser la ciencia, resulta de elemental consecuencia que una de las primeras tareas que una lógica se plantee sea la de estar a la altura de la argumentación científica y, muy particularmente, la de estar en condiciones de analizar y, en su caso, de validar o no la argumentación aducida en las matemáticas.

Sin duda alguna, más claramente que ninguna otra disciplina, las matemáticas disponen de un *método* para el establecimiento y explicación de sus afirmaciones, un método que, a pesar de la diversidad de las teorías que las conforman y a pesar de que en el establecimiento histórico de algunas de ellas no se haya utilizado siempre con el mayor rigor, asegura no sólo, en general, aunque no absolutamente[11], una continuidad sin parangón en otra ciencia y una progresión general casi lineal del trabajo matemático[12], sino, asimismo, que respalda los resultados obtenidos con un grado de seguridad comparativamente muy alto que hace posible, por ejemplo, que las teorías de Euclides y Arquímedes tengan en la actualidad una vigencia en ellas que no es ni remotamente comparable a la que, digamos, tienen la física de Aristóteles o la teoría química del flogisto.

Bolzano observa, justamente, que este método no puede ser otro que la *demostración*, el establecimiento deductivo de sus resultados a partir de un examen de los principios y conceptos, y ve, igualmente, que tal método se encuentra íntima e indisolublemente ligado a la lógica, que, de hecho, en esencia, no consiste sino en el desarrollo *lógico* de los elementos conceptuales y proposicionales básicos de cada teoría.

Para que un entrelazamiento conceptual y proposicional sea propiamente una demostración, se requiere, sin embargo, que el mismo sea conclusivo, esto es, necesario. Para Bolzano esto no puede significar sino que el procedimiento seguido debe ser estrictamente *analítico*. Éste es el criterio único de validación que *debe* privar en las matemáticas y, en realidad, la fuente misma de la continuidad histórica antes mencionada.

---

suprimido [con frecuencia] incluso en la exposición misma de resultados matemáticos. ..» [*Lehrbuch der Religionsphilosophie*, I, §63, citado por Scholz 1937, 220].

9 «Una discusión del método en las matemáticas no es otra cosa que lógica» , dice Bolzano [1810, IV, 1]

10 Ver nota 70.

11 El caso mismo de Bolzano sería, como hemos mencionado al principio, un posible contraejemplo a ello. Para otros ejemplos y un análisis crítico de esta concepción, véase [Crowe 1988]

12 En un sentido amplio, la armonía preestablecida hilbertiana, a la que nos hemos referido antes en este capítulo, parecería apuntar en la misma dirección.

La concepción bolzaniana de este carácter analítico[13] de un argumento tiene su origen tanto en el espíritu general que caracteriza a la Ilustración -particularmente en la idea de *razón* que priva en ese período, del que, como hemos apuntado, Bolzano es un representante extemporáneo-, como en su convicción de que un procedimiento de esta índole resulta esencial a las matemáticas y es el único que permite comprender cabalmente la necesidad y universalidad que les es propia. Para entender la interpretación ilustrada de «análisis» es necesario tener presentes, sin embargo, aunque sea en sus rasgos más generales, las consecuencias metódicas que la época extrae de la física newtoniana, su paradigma intelectual más importante.

II

A diferencia del siglo XVII, de Descartes, por ejemplo, Newton se vale del *análisis* y no de la pura deducción. Es decir, Newton no comienza colocando determinados conceptos o principios generales para deducir lo particular. Más bien, su pensamiento procede en la dirección opuesta: A partir de lo dado, los hechos particulares, que son comunes y, en ese sentido, según se piensa, unívocos, se pasa a *principios*. Esta transición se basa en el supuesto de que lo particular se encuentra sujeto siempre a leyes, esto es, de que *no* se trata, en realidad, de una masa inconexa de singularidades, sino de una manifestación concreta de algo universal, de una ejemplificación de una forma general. Esta forma -la «razón» del fenómeno en cuestión- puede, además, ser expresada matemáticamente, pero no es accesible *a priori*, sino sólo de manera gradual, con el avance del conocimiento.[14]

Son dos, por lo tanto, los momentos que pueden distinguirse en este procedimiento. Hay, por una parte, un aspecto *resolutivo*, de descomposición de algo en sus elementos básicos, pero éste es complementado, por la otra, por uno de carácter *compositivo*, en el que lo dado, el punto de partida se sujeta a principios generales y es «entendido».[15]

La idea bolzaniana de la lógica es un producto del concepto de razón que priva en el Siglo de las Luces y que vincula a ésta con el método analítico. Éste es también el origen de los intentos fundacionistas en el análisis matemático que tienen en Bolzano a uno de sus primeros y más conspicuos representantes[16] y constituye, asimismo, un elemento

[13] Este sería un primer sentido -aparte del propiamente matemático- en el que Bolzano hable de analiticidad, al que se añadirán otros, por ejemplo, como adjetivo aplicable a proposiciones

[14] Es importante tener presente esta concepción para un entendimiento cabal de la idea bolzaniana de *Grund* [cfr apartado XI más abajo]

[15] Newton parte de las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas, a las que interpreta como hechos observacionales, remitiéndose a sus supuestos y exhibiéndolas como una consecuencia de la coincidencia de diferentes condiciones, es decir, como algo *esencialmente complejo*, cuyos elementos básicos serían la caída libre de los cuerpos y el movimiento centrífugo. Esta descripción sería el primer paso. Éste es seguido por la *unificación*, por la inserción de tales elementos en una teoría general, susceptible de ser expresada matemáticamente. El cálculo de fluxiones (o infinitesimal, como Leibniz lo llama) sería precisamente el instrumento matemático que permite concebir con todo rigor tales fenómenos y expresar leyes de la *naturaleza*. «La filosofía del siglo XVIII -dice Cassirer [1932, 27]- se enlaza por doquier con el paradigma de la física newtoniana, pero su aplicación de éste es universal. No se contenta con considerar el análisis como el gran instrumento intelectual físico-matemático, sino que ve en él el arma necesaria de *todo* pensamiento

[16] «La finalidad esencial que se impone a sí misma la cultura del siglo XVIII consiste en la defensa y fortalecimiento de esta forma de pensamiento [es decir, en la práctica del método que acabamos de describir y en la consideracion consecuente de que la función primordial de la razón es separar y dividir y acomodar luego según principios generales], en esto reside su misión más importante y no en la mera adquisición y

explicativo de que el trabajo de Bolzano en matemáticas sea, en general, de *fundamentación* de resultados ya conocidos (como en el caso del teorema que lleva su nombre), de *explicación* de paradojas más que de descubrimiento propiamente dicho.

III

Ahora bien, ¿qué entiende Bolzano por «analiticidad de un argumento» y cómo aplica esto en su estudio de los fundamentos de las matemáticas? Antes de examinar el ejemplo que le sirve no sólo como modelo en su búsqueda de principios metódicos generales de demostración, sino igualmente, de manera más concreta, para establecer un conjunto de definiciones y resultados que efectivamente pueden constituir la base en la que el análisis matemático se funde, notemos una serie de consecuencias generales, evidentes en Bolzano, de esta influencia ilustrada en su pensamiento.

Bolzano es un racionalista y comparte con la Ilustración la idea de que la razón constituye una *fuerza*, una capacidad [Vermögen] que nos permite conocer a fondo la realidad. También, por lo tanto, la de que podemos tener acceso, siguiendo el método apropiado, a las leyes de ésta, a sus principios.[17] Esto significa que en ella, tomada en un sentido amplio, hay también un orden que la ciencia, en sus diferentes facetas -incluidas las matemáticas- trataría de explicar; que todas ellas tratan de la *verdad* en un ámbito *específico*, sin agotar nunca éste. Tal orden correspondería, entonces, «al orden de las cosas», es decir, es objetivo e independiente. Hay, en consecuencia, una *unidad* del conocimiento no sólo en general, sino también dentro de cada disciplina en particular. Más abajo veremos la forma concreta que asumen en Bolzano algunas de estas conclusiones.

Pero, además, la existencia de un orden entre los «principios» de la ciencia debe interpretarse, según Bolzano, en el sentido de que algunos de ellos resultan más fundamentales que otros y desemboca, en última instancia, en una jerarquía proposicional, es decir, puesto que de lo que se trata es de verdades, en una jerarquía de éstas que, en el caso ideal, tendría un carácter prácticamente axiomático. Los axiomas de una teoría serían, en consecuencia, los principios fundamentales y de mayor generalidad (a los que hasta ese momento se ha llegado, aunque corresponderían a una gradación objetiva) en los que el resto de las verdades de ese campo estarían basadas y algo parecido ocurriría también, en consecuencia, con los conceptos.

Esta consideración parecería implicar, igualmente, por una parte, la posibilidad de una ordenación parcial de las teorías o las ciencias mismas, una idea que ya aparece en la Ilustración y que constituye un claro antecedente de ciertas posturas reduccionistas como el logicismo y el positivismo lógico en filosofía y de la aritmetización del análisis y el logicismo en matemáticas y la filosofía de ellas, respectivamente. Pero también, por la otra, so pena de incurrir en un círculo vicioso o en una regresión *ad infinitum*, que la teoría del método, esto es, en la concepción de Bolzano, que la lógica *no* sea, ella misma, una ciencia, es decir, no trate directamente de verdades o, como hoy diríamos, que sea una metateoría de la ciencia.. Más adelante, al hablar de la *Wissenschaftslehre*, esto es, de la lógica de

---

ampliacion de determinados conocimientos positivos» [Cassirer 1932, 31]. Esta descripcion acerca de una epoca a la que, en realidad, Bolzano no pertenece ya, se ajusta bastante bien, no obstante, a los rasgos generales de sus planteamientos en lógica y en matemáticas, a la vez que hace paradójicamente comprensible, si se toma en cuenta que la filosofía kantiana se consideraba como la aplicación a la filosofía del método de Newton, la «obsolescencia» que sus ideas filosóficas tenían a los ojos de sus contemporáneos en el siglo XIX.

[17] Como aproximaciones graduales, subsumiéndolas en otras cada vez más generales.

Bolzano, de la teoría bolzaniana del método científico de las matemáticas y las ciencias conceptuales, volveremos brevemente a esta consecuencia.

IV

En el principio de la reflexión de Bolzano sobre los fundamentos de las matemáticas se encuentra, por lo tanto, la lógica.[18] Como en Leibniz y Frege, ésta es vista por él como un instrumento cuyo fin es permitir una mejor comprensión de las matemáticas, contribuir, clari-ficando, a su progreso y asentarlas sobre bases *firmes.*[19]

Una de las condiciones a satisfacer por este objetivo sería, entonces, según Bolzano, la supresión al máximo de aquellos elementos en las matemáticas que resulten contrarios al carácter necesario de sus resultados. La necesidad en matemáticas debe resultar exclusivamente del examen de los conceptos y los principios. Este análisis es *constitutivo* de la verdad en ellas, es decir, las demuestra y establece, y es, por su propia naturaleza, *objetivo*. Bolzano se opone, así, a una de las tesis centrales de Kant, para quien es la *intuición*, un vínculo establecido por un sujeto a partir de la evidencia, lo que se encuentra en la base de toda demostración en matemáticas.

Puede afirmarse, en general, que el desacuerdo con Kant y la búsqueda de una solución alternativa más satisfactoria que la que éste ofrece, de problemas que atañen a la lógica y la filosofía de las matemáticas, constituye una especie de *hilo conductor en* la formación y desarrollo del pensamiento de Bolzano. Hemos mencionado ya su aparente coincidencia al tomar la ciencia como punto de partida de sus reflexiones, así como sus divergencias en cuanto al papel que en la filosofía puedan jugar los procedimientos estrictos de definición y deducción. Cada uno de ellos se considera a sí mismo, además, como heredero de la tradición de rigor en la filosofía alemana.[20] Sin embargo, sus discrepancias son mucho mayores y mucho más profundas que sus convergencias y se manifiestan inmediatamente, desde las bases mismas de sus respectivas concepciones.

---

[18] «Si quisiera describir en una palabra la diferencia esencial entre mis ideas filosóficas... y las de otros, tendría que decir que se encuentra en el hecho de que he tenido siempre como norma el mayor cuidado de plantear todos mis pensamientos en un nivel más elevado de claridad y distinción que el que ha sido costumbre hasta ahora. Es esta orientación... la que me ha llevado a las teorías e ideas que he presentado en mis escritos (incluyendo los matemáticos). Pero si se quiere entender las razones que sostienen mis tesis y afirmaciones, debe comenzarse con la lógica» [Bolzano en una carta a Romang (1.5.1847), reproducida en [Berg 1962, 9]]

[19] Éste es, en realidad, en última instancia, otro de los aspectos paradójicos del pensamiento de Bolzano. La razón científica no puede proporcionarnos certezas últimas, es decir, abre la puerta a cierta forma de escepticismo. Las matemáticas y la lógica son, sin embargo, el terreno en el que más podemos aproximarnos a aquéllas (la lógica no puede hacerlo directamente), por lo que es necesario, si es que el escepticismo ha de ser refutado, darles bases sólidas, estableciendo de manera irrefutable por lo menos algunas verdades (Bolzano, por ejemplo, «demuestra», en [1837, §31], *que las verdades existen*). Esta preocupación verdaderamente obsesiva de Bolzano por analizar y demostrar *in extenso* aun resultados inmediatos hace que en ocasiones su lectura resulte fatigosa y parecería tener sus raíces en una profunda religiosidad que Bolzano busca justificar racionalmente a lo largo de toda su obra.

[20] Kant [1787, B XXVI] remonta el origen del mismo a Wolff, mientras que Bolzano incluye en la misma no sólo a éste, sino también a Leibniz, ambas las dos influencias decisivas de su pensamiento. Bolzano se identifica plenamente con ellos en lo relativo al vínculo indisoluble entre matemáticas y filosofía, sintiéndose, en particular, obligado, en relación al segundo de ellos, a escribir un artículo [Bolzano 1828] para poner en claro también sus diferencias con él en otros ámbitos.

Bolzano comparte con Kant, en primer lugar, la consideración de la lógica como una disciplina fundamental, pero, a diferencia de éste, para quien la lógica es algo concluido y perfecto [1787, B XIV], Bolzano piensa en ella como un *Órganon*, cuya tarea primordial es, por ende, ajustarse a la argumentación científica contemporánea, en especial a la matemática. Esto implica una concepción dinámica de la lógica en él, diametralmente contrapuesta a la definitividad pétrea con la que esta disciplina es vista por Kant.[21]

Bolzano considera que si bien muchas de las distinciones fundamentales introducidas por Kant son útiles y correctas, no todas lo son, y que, de hecho, algunas de las ideas más importantes de la filosofía de éste descansan en *un deficiente análisis conceptual de las nociones básicas de la misma*. Este sería, en particular, el origen de las insuficiencias que esta concepción enfrenta en lo referente a la lógica y la filosofía de las matemáticas.[22] Entre las distinciones esencialmente correctas debidas a Kant se contarían, de acuerdo con esto, ante todo, la que clasifica a los juicios en *a priori* y *a posteriori*. Bolzano cree también importante y correcto pensar en proposiciones sintéticas que sean, a la vez, *a priori*[23], lo mismo que diferenciar entre conceptos e intuiciones [1787, B-33].

Lo que suscita, sobre todo, su oposición es la función explicativa que en la filosofía kantiana se asigna a todas estas nociones, así como la descripción que Kant ofrece de las mismas. Ejemplo de ello son los juicios sintéticos *a priori*. Bolzano, como Kant, cree que las matemáticas consisten, efectivamente, en juicios de esta índole. Lo que le parece inaceptable es la descripción que Kant ofrece de los mismos, esto es, el recurso a una necesidad añadida por el sujeto gracias a una intuición fundamental del tiempo y del espacio. Ésta es una base demasiado vaga y, sobre todo, no objetiva para las matemáticas. La necesidad en las matemáticas no puede apoyarse en ella. El fundamento de la misma debe ser independiente, aun en principio, de cualquier sujeto. Para hacer valer el rigor en ellas, piensa Bolzano, debe comenzarse, más bien, con una elucidación *conceptual* de nociones como 'juicio', 'necesidad', 'intuición', 'intuición pura', etc. Es decir, lo que se requiere es, *en primer lugar*, un análisis de tipo lógico-lingüístico, lógico-semántico o, en la terminología de Bolzano, conceptual de las principales ideas de la teoría kantiana, muchas de las cuales resultarían no sólo ambiguas (como *necesidad*), sino de plano contradictorias (por ejemplo, la de una *intuición pura*) [Cfr. Bolzano 1810, 107].

Son varios, en realidad, los factores que deben tenerse en cuenta al explicar el rechazo de la filosofía kantiana de las matemáticas por parte de Bolzano. Hay, en primer término, su actitud primaria, influida a fondo, como hemos dicho, por la Ilustración, esto es,

---

21 En rigor, la idea bolzaniana de la lógica correspondería, más bien, a lo que Kant llama «la lógica del uso especial del entendimiento» [angewandte Logik], que supone la «lógica general» y, dentro de ésta, la «lógica pura» como algo acabado [1787, B 77].

22 En general, Bolzano piensa, como puede deducirse a partir de las notas 7 y 17, que esto mismo ocurre en muchas de las ciencias de su tiempo, si bien en el caso de la lógica y las matemáticas, al tratarse de disciplinas conceptuales y absolutamente fundamentales, resulta especialmente grave.

23 Bolzano considera, sin embargo, errónea la división kantiana de los juicios en sintéticos y analíticos, pues puede demostrarse no sólo que ésta descansa en una concepción demasiado pobre de analiticidad, sino que tampoco es nítida; es decir, hay juicios que, de acuerdo con la definición ofrecida por Kant [1787, B 9-B 10], tendrían que ser analíticos, mientras que es evidente que son estrictamente *a posteriori* y, por lo tanto, sintéticos. Así, por ejemplo, con base en la definición kantiana, 'El hijo de Leopold Mozart, músico de Salzburg, es musico' tendría que ser analítico, puesto que el sujeto contiene ya la idea del predicado [Cfr. Bolzano 1837, § 148, nota 4]. Por lo demás es notorio aquí que la idea de analiticidad de Kant, aparentemente tomada de Leibniz, resulta mucho menos precisa que la de éste [Cfr. Cap. 1, nota 24]

por la idea de hacer valer a la razón, sin huecos, hasta sus últimas consecuencias. Pero hay también en él, según nos parece, la obvia suposición de que hablar de verdades en cualquier campo del conocimiento supone la postulación de una realidad independiente o, en otras palabras, de que de *verdad* sólo puede hablarse en relación a un ámbito transubjetivo. Por lo tanto, si las matemáticas han de ser ciencia, es decir, si han de consistir en general de verdades, es necesario que en ellas tales verdades sean algo independiente y autosubsistente, por una parte y, también, por la otra, tratándose de una disciplina puramente conceptual, que su establecimiento se efectúe estrictamente de manera racional. Bolzano es de la opinión que el recurso a la intuición atenta contra ello. Apelar a ella representa una interrupción arbitraria de la cadena deductiva que debe sustentar las proposiciones matemáticas y entraña, por lo tanto, una renuncia del todo injustificada a la lógica, aparte de no ser, en sentido estricto, consistente con la pretensión de justificar racionalmente a las matemáticas.

En segundo lugar, debe considerarse el hecho de que Bolzano es, definitivamente, el primero en hacerse cargo de que la explicación de Kant no es ya satisfactoria de frente al estado actual de la ciencia, por lo menos de las matemáticas. Es decir, que resulta ya insuficiente tanto en lo que se refiere a lo que en opinión de éste es básico (la intuición), como en lo que en él se identifica como partes constitutivas elementales (aritmética y geometría) de esa disciplina. En este orden de ideas, la circunstancia de que Bolzano *demuestre* en la práctica misma de las matemáticas que las suposiciones kantianas respecto a la intuición son innecesarias o falsas juega un papel decisivo. Un poco más abajo nos referiremos a los problemas específicos que conducen a Bolzano a esta concepción.

En tercero, por último, Bolzano se percata, nuevamente como el primero y hasta Frege como el único, de la insuficiencia de la explicación kantiana de lo *a priori* y, por lo tanto, de lo inaceptable de su análisis de lo que constituye el fundamento de las matemáticas.

Todo ello pone de manifiesto una de las diferencias esenciales entre Kant y Bolzano: la del papel de la lógica en las matemáticas. Para el primero la lógica sólo tiene, en realidad, un papel secundario y, en última instancia, prácticamente superfluo en las demostraciones matemáticas, pues la fuerza de éstas descansaría en la construccion intuitiva.[24] Por su parte, Bolzano piensa que, en una ciencia puramente conceptual como ellas, el único un papel que la intuición puede tener es de carácter heurístico o pedagógico. La argumentación lógicamente correcta, *sin saltos ni huecos*, es lo único que en ese ámbito puede establecer verdades y éstas son completamente independientes de la intuición.

La metodología bolzaniana es, por lo tanto, no sólo más general, sino también más *confiable*. Para empezar, en Kant no sólo es poco claro qué ha de entenderse por *intuición*, aparte de inmediatez y reconocimiento por parte de un sujeto -y, en consecuencia, finitud-, sino que esto parecería implicar, por su propia naturaleza, que habría en ella un elemento esencialmente *empírico*[25] y hace imposible el que pueda hablarse de una «intuición pura». Pero, además, parecería pensar Bolzano, lo empírico, cualquiera que sea la forma en la que

[24] «Solo una prueba apodíctica, en tanto que sea intuitiva, puede verdaderamente ser una demostración» [1787, B761]. Dada la consideración kantiana acerca del carácter acabado de la lógica, es evidente que el fundamento de las matemáticas debía ser encontrado fuera de ella.

[25] El tiempo, dice Kant [1787, B37], «es la única forma bajo la cual resulta posible la intuición de un estado interno» y, son estados de esta índole, podemos agregar, los que se requerirían en las matemáticas. Ésta es la razón por la que el intuicionismo ha sido llamado un empirismo (Cfr. también nota 28 más abajo)

se dé, es, estrictamente hablando, algo contingente, por lo que no puede constituir una base aceptable para las matemáticas, que son *a priori* y necesarias.

V

Existen otros elementos históricos, no necesariamente filosóficos, que, sin lugar a dudas, contribuyen a reforzar en Bolzano el rechazo a la intuición como fundamento de las matemáticas.

En primer lugar, los infructuosos intentos de demostrar el postulado de las paralelas euclidiano. Estas tentativas, que desembocarían en la aceptación de geometrías hiperbólicas alternativas a la geometría plana, socavan gradualmente la suposición, hecha aún de manera irrestricta en el siglo XVIII, de que las proposiciones geométricas gozan de una especie de certeza o verdad «absoluta» y, en general, que la justificación plena de los principios y axiomas matemáticos sea algo justificado por la evidencia.[26] A principios del siglo XIX, la época en la que a Bolzano le toca vivir, el *status* del V postulado era, por lo menos, controvertido. Ello debió aguzar en él la desconfianza en la intuición como fuente justificativa y alimentar su deseo de dar un fundamento seguro y general a las matemáticas.[27]

Pero también, en segundo lugar, el hecho histórico de que (i) las matemáticas de su época trataran, directa o indirectamente, de objetos o conceptos que, en su opinión, no eran ya susceptibles, ni siquiera en principio, de una intuición *à la Kant*; y (ii) que ciertos resultados acerca de ellos contradijeran directamente a ésta o mostraran su carácter esencialmente prescindible.

Entre los primeros se encuentra, ante todo, el infinito. Era éste justamente lo que provocaba en las matemáticas cierta incomodidad en relación al postulado euclidiano. Pero este mismo concepto se encontraba ahora, sin embargo, por doquier en el cálculo, cuando se hablaba, por ejemplo, de infinitesimales, de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, de límite, de continuidad y, según vislumbraba Bolzano, de manera esencialmente inevitable, al hablarse del Continuo o de los números reales [Cfr. Bolzano 1851, §§12, 13, 46-50]. Bolzano piensa, con toda razón, que no puede haber una intuición de las totalidades infinitas[28], lo que, sin embargo, no implica la imposibilidad de un manejo

---

[26] Kant, por ejemplo, escribe acerca de ellos [1787, B-760]. «Los axiomas son principios fundamentales sintéticos *a priori*, en cuanto que su certeza es inmediata [sofern sie unmittelbar gewiss sind]». De hecho, podría pensarse, la aceptación de otro tipo de geometrías pone también en tela de juicio la posibilidad misma de hablar, por lo menos en términos absolutos, de «verdad» en las matemáticas.

[27] Bolzano mismo intenta, en su primera publicación [Bolzano 1804] deducir el axioma de las paralelas a partir de los otros postulados, mediante la precisión de la metodología utilizada y una nueva ordenación, la estrictamente lógica , en su opinión, de los teoremas El interés de este escrito, publicado el mismo año de la muerte de Kant, consiste, sobre todo, en que contiene ya claramente el núcleo de algunas las ideas principales de Bolzano acerca de las matemáticas, esto es, entre otras cosas, en el nuevo método que allí se ensaya por primera ocasión, en la objetividad de las relaciones que allí se defiende, en la explicitación, así sea parcial, de la lógica utilizada y en el hecho de que Bolzano, como uno de los primeros, no conciba ya a la geometría como una ciencia empírica, sino como una ciencia estrictamente conceptual, esto es, ajena a elementos empíricos como el tiempo o el movimiento De todos modos, según señala van Rootselaar [1970, 274], «nada en Bolzano parece indicar que se enterara de la culminación que estos problemas tuvieron en las geometrías no euclidianas».

[28] «Por medio de la *sensibilidad* pueden dársenos los objetos; y es ésta la única que puede proporcionarnos *intuiciones*» [Kant 1787, B-33]. Es decir, la intuición, aun la intuición pura, permanece siempre en el plano de lo finito Cfr también [1787, B-111 y B-299].

claro y consistente de las mismas, sino tan sólo la independencia entre verdad e intuición en matemáticas y el carácter esencialmente psicológico de esta última.[29] Esta intrusión de elementos subjetivistas debe ser evitada en estas últimas en lo posible. Bolzano es así, 75 años antes que Frege, el primero en combatir sistemática y prácticamente el psicologismo en las matemáticas.

Pero esta anticipación de desarrollos muy posteriores que, en realidad, muestra que intelectualmente Bolzano se encuentra -en particular en lo relativo a la filosofía de la ciencia y del lenguaje-, mucho más cerca de generaciones futuras que de la propia, es también una característica prominente de sus investigaciones estrictamente matemáticas y lógicas, los resultados de las cuales confirmaban, además, ampliamente, su convicción de que el fundamento de las matemáticas no podía ser el señalado por Kant.

VI

Ahora bien, las matemáticas sobre las que Bolzano reflexiona no son, en rigor, las mismas que habían servido como modelo a Kant. Como dijimos antes, Kant parte de la aritmética y la geometría y de la concepción de la ciencia como algo dado, a lo cual importa, ante todo, *justificar*. Otras ramas de ella, como el álgebra y el análisis, no son consideradas por él. En particular, en relación al cálculo, Kant opta, en congruencia con su idea de una separación nítida entre filosofía y ciencia, por la precaución y la reserva, esperando que fueran las matemáticas mismas las que arrojaran claridad sobre los objetos y los métodos allí utilizados.[30]

Justamente esto que en Kant provocaba perplejidad y cautela en las nuevas teorías -a las que, por lo demás, sus aplicaciones mismas justificaban *a posteriori*- es lo que debe constituir, en opinión de Bolzano, el punto de partida no sólo para una explicación filosófica del fundamento del análisis, sino para una *reconstrucción* del mismo y, con esta base, de las matemáticas en su totalidad [31]

En realidad, desde la perspectiva de la historia de las matemáticas, este momento parecería ser el inicio de un período de estructuración sistemática que seguía a uno de conformación creativa, en el que se había atendido menos al rigor lógico que a las posibilidades de utilización de la nueva y poderosa herramienta del cálculo.[32]

---

[29] Precisamente a este frecuente conflicto entre intuición e infinito apunta el título mismo de *Las Paradojas del Infinito* [Bolzano 1851], su obra más conocida hasta hoy. Por lo demás, resulta de interés, notar en este contexto que, años más tarde, Frege [1884, §§5, 13] esgrimirá un argumento similar, aunque referido a lo finito, en contra de la posibilidad de una intuición de un número «demasiado grande» para criticar las ideas kantianas acerca de las proposiciones aritméticas.

[30] «Son excesivas -dice Kant [1763, 779]- la premura y osadía con las que el concepto de infinitamente pequeño, que aparece con tanta frecuencia en las matemáticas, es rechazado. En lugar de ello, debe aceptarse que aún no sabemos lo suficiente acerca de él como para que un juicio al respecto esté justificado. . No es fácil, hay que reconocerlo, penetrar en la naturaleza de estos conceptos. Pero lo único que esta dificultad puede avalar es la prudencia en relación a suposiciones de suyo inseguras, no pretensiones terminantes de imposibilidad». Un ejemplo claro de esta postura negativa hacia los objetos del cálculo es el de Berkeley. Una exposición en detalle de la misma puede encontrarse en [Robles 1993].

[31] La diferencia básica aquí parecería ser, entonces, que mientras que Kant asume una actitud expectante, Bolzano decide iniciar él mismo la tarea de clarificación fundamental del análisis

[32] «A menudo -escribe Bourbaki [1972, 232]- el matemático debe optar entre métodos de exposición incorrectos, aunque fecundos, y métodos correctos que solamente le permiten expresar su pensamiento deformándolo previamente y pagando el precio de un esfuerzo agotador. Los griegos siguieron el segundo, y

Es precisamente en la segunda fase de esa sucesión de etapas en la conformación de algunas teorías históricas que puede ubicarse, según nos parece, la aparición de «paradojas» o la consideración de algunas conclusiones -con frecuencia *ya conocidas*, pero dejadas al margen intencionalmente por razones prácticas- como tales.[33] Bolzano es el primero o uno de los primeros representantes de este segundo momento, el de fundamentación, en el análisis y, de hecho, uno de los primeros practicantes e impulsores de un nuevo tipo de rigor argumentativo -y, en realidad, de un nuevo tipo de práctica de la ciencia- que se impone en las matemáticas desde principios del siglo XIX. El nuevo patrón parecía surgir justamente del abandono gradual del modelo general de demostración ofrecido por la geometría euclidiana -del que, en el fondo, las ideas de Kant son, en gran medida, expresión filosófica- y se orientaba, cada vez más, a consideraciones de carácter aritmético, algebraico y estrictamente lógico. La definición y la demostración analítica, sin recurso alguno a elementos espurios a la naturaleza misma de la disciplina es lo único que debe y puede legitimar una verdad en matemáticas.

Es claro, sin embargo, que la normatividad que a partir de ello se postula pone de manifiesto no sólo el rechazo de las ideas de Kant al respecto, sino, asimismo, el contraste entre esta nueva concepción y los métodos efectivamente utilizados en las matemáticas de la época y apunta -como parece ser el caso de todos los proyectos fundacionistas- a un programa de *reconstrucción*.

A pesar de las diferencias anotadas, Kant y Bolzano parecerían coincidir en la determinación de aquello que constituye el objeto de estudio de las matemáticas: la idea de *magnitud* [Grösse]. Sin embargo, aun a este respecto la divergencia entre ellos es abismal. Mientras que Kant define las magnitudes en términos de un sujeto, es decir, con una noción eminentemente psicológica[34], Bolzano piensa en ellas no sólo como algo objetivo e independiente de cualquier sujeto, sino también como algo esencialmente más comprensivo que Kant.

Para Bolzano, en efecto, si bien las matemáticas son la ciencia de la magnitud, o, equivalentemente, constituyen una teoría de la misma en general -una *Grossenlehre*-, lo que bajo este rubro debe entenderse es un estudio de la *relación* «menor o igual que», en su sentido más amplio posible, esto es , una investigación de aquellos dominios de objetos para los que valga la ley de la tricotomía, con la única restricción de que los subdominios de la misma que den lugar a teorías particulares sean homogéneos, es decir, que estén conformados por objetos de la misma índole.[35]

Son varios, entonces según parecería, los objetivos perseguidos por Bolzano con este planteamiento. Se trataría, en primer término, de conformidad con su interés

tal vez sea aquí. . donde haya que buscar la razón del sorprendente estancamiento de sus matemáticas inmediatamente después de su momento más brillante».

[33] Como en el caso no sólo de las suscitadas por el infinito en el análisis, sino también, por ejemplo, de las surgidas en la teoría de conjuntos

[34] «Una magnitud -dice [1787, B-202/203]- es, en general, la conciencia de la diversidad de lo similar en la intuición, en tanto que haga posible la representación de un objeto», lo que claramente excluye, de las magnitudes, las diversidades infinitas.

[35] «Una *magnitud* es un objeto que pertenece a un género de cosas, entre cualesquiera dos de las cuales vale una sola de las dos relaciones siguientes: o bien son iguales o una de ellas puede verse como un todo que incluye una parte igual a la otra» [1837, §87] Cfr también, Bolzano 1975a, §1, 1v] A diferencia de lo que ocurre en Kant, se abre aquí la posibilidad de una consideración matemática de totalidades infinitas.

primordial, de dar un fundamento firme y, sobre todo, riguroso y objetivo, a la totalidad de las matemáticas -no sólo a una parte de ellas, como es el caso del intento kantiano. En particular, se trataría de ofrecer una visión unitaria de la diversidad de teorías que las constituyen. A ello seguiría, en segundo, una exposición reconstructiva y productiva, sobre tales bases, de las ramas más importantes de la disciplina -sobre todo del análisis. Pero se trataría asimismo, en tercero -y a este respecto Bolzano no parece tener precedente alguno en la historia de la filosofía- de desarrollar y, en ese sentido, justificar nuevas teorías que en su opinión deben considerarse como parte esencial de las matemáticas a partir del mismo fundamento. Con este proyecto, acorde al espíritu enciclopédico de la Ilustración, Bolzano buscaba integrar y desarrollar en un sistema unitario los diferentes descubrimientos hechos por él en sus investigaciones particulares en lógica y en matemáticas.

Si en sus primeros escritos de 1804 y 1810 se formulan ya, de manera explícita, los elementos esenciales del pensamiento de Bolzano acerca de los fundamentos de las matemáticas, el artículo que publica en 1817 y otros resultados obtenidos por él en la década de los 30 le proporcionan la certidumbre de la corrección esencial de sus ideas.

En consonancia con el supuesto bolzaniano de que una reflexión filosófica acerca de la ciencia debe partir de ésta -y, en realidad, como consecuencia directa de la adopción implícita del modelo reflexivo de la Ilustración al que nos hemos referido anteriormente (Sección II)-, Bolzano desecha, antes de 1837, la posibilidad de publicar conclusiones de esa índole en la forma de un tratado comprensivo sobre la metodología en matemáticas.[36] Vale la pena, tanto por su valor intrínseco, como por la importancia que tienen en el desarrollo de las ideas de Bolzano, ofrecer aquí, aunque sea en bosquejo elemental, una descripción del contenido de algunos de los resultados de estas notables investigaciones.

1. *Rein analytischer Beweis* (=Rab)

Como ningún otro de los escritos de Bolzano, este ejemplar aunque breve estudio de los fundamentos del análisis a partir del examen de un teorema particular pone de manifiesto el contraste entre la metodología propuesta por su autor y las de sus antecesores y contemporáneos. Como en todos sus escritos matemáticos, el tratamiento de los problemas se presenta aquí indisolublemente ligado a consideraciones de carácter lógico-filosófico. El principio que se trata de establecer no sólo *no* es nuevo, sino que, de hecho, como Bolzano mismo advierte, es evidentemente verdadero. Así, la tesis del artículo se refiere mucho menos a la verdad de la proposición misma que al carácter de la demostración que se pretende ofrecer de ella (puramente analítica). Es decir, a pesar de su importancia histórica para las matemáticas, la tesis central del escrito es de carácter *lógico*, en el sentido que Bolzano da a esta noción (véase más abajo): Demostrar que la intuición no sólo es prescindible como criterio de verdad de una proposición en matemáticas, sino igualmente insatisfactoria, pues tiende a trastocar el orden correcto de fundamentación que la lógica exige.

---

36 Él mismo explica, claramente en oposición a Kant, las razones de esta larga espera [Cfr. 1817, 168]. Habría dos maneras de dar a conocer una metodología científica: (i) comenzar con una exposición conceptual en un texto filosófico y (ii) exponerla de manera gradual y concreta, esto es, en el tratamiento de problemas científicos específicos. «Para el avance de la ciencia, considero que la segunda vía es la más fructífera... Esta es la razón por la que en 1804 decidí comenzar dando a conocer los conceptos que he descubierto no en un tratado completo, sino en investigaciones particulares»

El teorema se refiere a una función continua *f* que toma valores positivos y negativos y afirma (δ) que *f* debe tener una raíz real.

Bolzano distingue [1817, 160], en primer lugar, entre *confirmación* [Gewissmachung] y *justificación* [Begründung], esto es, entre certeza intuitiva y «exposición del fundamento objetivo de la verdad en cuestión». Sólo lo segundo debe admitirse como prueba en las matemáticas. Como ciencia puramente conceptual, éstas proceden deductivamente, por lo que en ellas lo general debe siempre anteceder a lo particular. La corrección lógica se viola, por lo tanto, cuando se intenta seguir la vía opuesta. Esto es justamente lo que ocurre con los argumentos con los que se ha pretendido establecer (δ). En realidad, piensa Bolzano [*Ibid*], la geometría es una rama especial[37] de las matemáticas, por lo que no puede tener la generalidad de las matemáticas puras (la aritmética, el álgebra, el análisis.) De hecho, sus conceptos básicos (punto, línea, superficie, etc.) son particulares en relación a los conceptos básicos de éstas (operaciones algebraicas, relaciones, funciones, conjuntos). En consecuencia, (δ), siendo un teorema del análisis, no puede ser probado geométricamente.

Bolzano concluye de lo anterior que existen *proposiciones o verdades básicas* [Grundsätze] y otras que son *verdades consecutivas o consecuencias* [Folgewahrheiten]. Mientras que las primeras serían aquellas que sólo pueden justificar otras, sin poder ser ellas mismas consecuencias, las segundas deben ser demostradas a partir de otras verdades. Más adelante (apartado XI) volveremos sobre este punto.

Rab se propone presentar un ejemplo paradigmático de la nueva metodología, es decir, demostrar que (δ) puede establecerse sin apelar en forma alguna a la geometría, además de ilustrar con especial claridad la idea bolzaniana -que se desarrollará en las matemáticas particularmente durante la segunda mitad del siglo XIX- de que es el análisis el fundamento de la geometría y no viceversa. En realidad, un examen cuidadoso del teorema que nos ocupa revela que éste se refiere a magnitudes en general, no a magnitudes espaciales. Su reformulación precisa sería la siguiente:

Para toda función continua f con la propiedad de que exis a y b, tales que $f(a) > 0 > f(b)$, existe c, tal que $f(c) = 0$ (γ)

Es decir, el principio se refiere a la *continuidad* de una función, habla de un tipo específico de funciones. Al examinar la manera en la que esta noción ha sido entendida por sus contemporáneos, Bolzano constata, sin embargo, otra intromisión indebida de elementos extramatemáticos. La continuidad, como una propiedad de funciones, se asociaba constantemente con el *tiempo* y el *movimiento*.[38] Este es, en realidad, podemos agregar aquí, el origen de expresiones aún en uso en nuestros días como «tender hacia un límite» y «variable».

Bolzano no sólo es plenamente contemporáneo a nosotros en su concepción de las funciones como reglas de correspondencia entre totalidades, definidas exclusivamente para elementos de las mismas [1817, 164]; también lo es, por ejemplo, al presentar [1817, 162], varios años antes que Cauchy [Cfr. Sebestik 1992, 81], una definición de continuidad que

---

[37] O aplicada, al referirse a magnitudes particulares, como son las espaciales.

[38] En el caso de (γ), por ejemplo, se hablaba de que *f*, *siendo continua, «debe recorrer todos los valores entre* $f(a)$ y $f(b)$, por lo que debe haber un momento en el que tome el valor 0»

casi podría tener cabida en un texto de análisis de nuestros días: «La *definición correcta* de la expresión 'una función fx varía de acuerdo con la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites' -dice Bolzano- es simple y sencillamente esta:

Si x es uno de tales valores, la diferencia $f(x + w) - f(x)$ puede ser menor que cualquier cantidad dada, con tal de que w pueda considerarse tan pequeña como queramos»

La estrategia seguida por Bolzano para la demostración de (γ) consiste no en establecer ésta directamente, sino un resultado más general, el teorema del valor intermedio, y hace uso exclusivo de las propiedades elementales de las desigualdades, de las operaciones aritméticas y de conjuntos

Si fx y φx son dos funciones continuas con la propiedad de que existen α y β, tales que $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta) < f(\beta)$, entonces existe también ν, tal que $f(\nu) = \varphi(\nu)$.[39]

2. *Otros problemas particulares del cálculo* (por ejemplo, dar definiciones adecuadas de *función, continuidad, límite, convergencia*, etc.).

Después de haber dado inicio con Rab a la reconstrucción analítica de los fundamentos del cálculo y, en realidad, como resultado del desarrollo de su investigación de 1817 a un nivel superior de generalidad -lo que para él significa *a un nivel de fundamentación más profundo*-, Bolzano da los primeros y decisivos pasos para llevar a cabo, en la forma de una *teoría de funciones* [Funktionenlehre], una síntesis de las ramas fundamentales de las matemáticas (geometría, aritmética, álgebra y cálculo), partiendo de la consideración funcional de las ecuaciones. De entre los resultados obtenidos por Bolzano en estos estudios debe destacarse, sobre todo, el descubrimiento, hecho en 1834, de que existen funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Este resultado, atribuido con frecuencia a Weierstrass -quien no lo publica sino hasta 1875- proporciona a Bolzano una confirmación contundente de que su desconfianza en la intuición como elemento demostrativo en las matemáticas estaba más que justificada.[40]

3. La *Grossenlehre*

El enfoque más amplio del análisis integral planteado por Bolzano sería, sin embargo, a su vez, parte de una teoría mucho más general, cuya meta última es la

---

[39] En detalle, Bolzano establece sucesivamente lo siguiente: (1) Si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, entonces $f(\alpha+\iota) < \varphi(\alpha+\iota)$, si ι se considera suficientemente pequeña. (2) Esto define, para todo valor de ι menor que un valor dado, una propiedad de la función de ι expresada por $f(\alpha+\iota)$. Pero no la define para *todo* valor (por ejemplo, no lo hace para $\iota = \beta-\alpha$, puesto que $f(\beta) > \varphi(\beta)$). Bolzano establece enseguida el siguiente e importante lema (3) Si una propiedad M se aplica a todos los valores de una variable ι menores que cierto valor dado, aunque sin aplicarse a todos los valores posibles de la misma, existe un valor supremo μ para el que puede afirmarse que toda $\iota < \mu$ tiene la propiedad M. Considerando ahora tal valor para ι, se demuestra que (4) no puede ocurrir que $f(\alpha+\mu) < \varphi(\alpha+\mu)$ y, asimismo (5) que tampoco puede ser el caso que $\varphi(\alpha+\mu) < f(\alpha+\mu)$, por lo que $f(\alpha+\mu) = \varphi(\alpha+\mu)$. Es decir, *existe un valor intermedio ν, tal que $f(\nu) = \varphi(\nu)$*

[40] «Para las matemáticas del siglo XVIII y de la primera mitad del siglo XIX -escribe Sebestyk [1992, 417]]- era de suyo evidente que toda función continua debía ser derivable, excepto, tal vez, en algunos puntos aislados. Las funciones continuas que en esa época se manejaban eran, en su totalidad, derivables y la imagen intuitiva de una curva con sus tangentes contribuía a reforzar esa convicción común»

Bolzano escribe, en los años treinta del siglo pasado, una *Fuktionenlehre* que no será publicada sino hasta 1931. Por desgracia, no hemos tenido acceso a esta importante obra El párrafo anterior se apoya en su totalidad en [Berg 1962, §3] y en [Sebestyk 1992, cap. 5]..

obtención, fundamentación y exposición de *todas* las ramas de las matemáticas. Éste es el programa bolzaniano de una *Gròssenlehre*, de una teoría comprensiva y unitaria de las matemáticas, esto es, de la concepción, llevada a la práctica, de que la totalidad de las matemáticas es susceptible de una ordenación jerárquica y sistemática a partir de un conjunto relativamente pequeño de nociones y principios fundamentales. Ahora bien, ¿cuáles serían los elementos básicos de esta teoría y cuáles sus partes integrantes?

Mientras que en los *Beiträge* de 1810 [I, §8, 11] se parte de una visión ontologicista -cuasi leibniziana- de las matemáticas como teoría de «las condiciones de posibilidad de existencia de los objetos en general» [Bedingungen der Möglichkeit des Daseins der Dinge überhaupt], esto es, como una teoría de las leyes de los objetos en general[41], rechazándose explícitamente [*Ibid.* I, §4, 7] que su materia de estudio sean exclusivamente las magnitudes[42] y pensándose en sus diferentes teorías y conceptos como un resultado de especificaciones sucesivas a partir de las propiedades de la noción fundamental de objeto o cosa en general [Gegenstand, Ding überhaupt], 20 años más tarde, en la *Einleitung zur «Grossenlehre»* [= EGL, Bolzano 1975a][43], Bolzano retorna aparentemente a la idea tradicional de las matemáticas como una *teoría de las magnitudes*, aunque sosteniendo aún el argumento que lo había llevado al rechazo de esa definición en la primera obra.[44]

Más que la definición misma de las matemáticas, lo importante para tener una idea cabal de lo que Bolzano entiende por ellas y cómo se diferencia de sus contemporáneos y antecesores a este respecto es su clasificación de las diversas ramas de éstas. Lo que sigue se refiere a la ordenación general que Bolzano hace de las mismas en la EGL [1v-18r].[45]

El criterio de clasificación es la *generalidad* de las aplicaciones de los conceptos propios de la teoría de que se trate, aunque ya no, como en 1810, la posibilidad de obtener una teoría a partir de otra por especificación estricta. Hay dos distinciones básicas. La primera y más importante es la que divide a las matemáticas en *puras y aplicadas.*[46] Viene luego una subdivisión dentro de las primeras en *generales* y *especiales.*[47] De las matemáticas aplicadas formarían parte la combinatoria, la teoría de la probabilidad, la

[41] Es decir, de aquellos principios de aplicabilidad irrestricta a la realidad como la numerabilidad [Zahlbarkeit].

[42] Este sería el caso, por ejemplo, de la combinatoria o de la geometría. Los objetos de éstas, como las permutaciones, el espacio, los puntos, etc., no serían magnitudes

[43] La *Grossenlehre* queda inconclusa a la muerte de Bolzano La única parte de ella publicada en el siglo pasado es *Paradoxien des Unendlichen* [Bolzano 1851]. El resto, del que la EGL forma parte, no se publicará sino hasta 1975 [véase B 1975a, 1975b]

[44] «En relación a ningún otro problema -escribe Bolzano [EGL §I, 5]- he modificado tan frecuentemente mis ideas como con respecto a este concepto. Aun ahora que expongo lo en este momento me parece ser lo más correcto, no lo hago con la misma seguridad que me he permitido cuando me he apartado de la opinión general». Cfr Sección VI, nota 35.

[45] Para una descripción pormenorizada de la clasificación de 1810 y de los criterios que la rigen, cfr. [Sebestyk 1992, 297-301].

[46] «La diferencia esencial entre la teoría pura y la teoría aplicada de las magnitudes... es simplemente el hecho de que en la primera se consideran siempre magnitudes *in abstracto*.. , mientras que, en las segundas, siempre en relacion a otras propiedades específicas que no resultan de su carácter mismo de magnitudes [ihre Grossheit selbst]» [EGL, 13r]

[47] Una teoría de las magnitudes infinitamente pequeñas o de las magnitudes infinitamente grandes resultaría, por ejemplo, especial, pero no aplicada. «puesto que lo peculiar de ellas reside en su carácter mismo de magnitudes» [EGL. 7v]. Es evidente que, mucho más que la que se hace entre matemáticas aplicadas y puras, esta distinción de Bolzano resulta poco nítida.

cronometría o teoría del tiempo, la geometría o teoría del espacio. Por su parte, la teoría de agregados, la *Inbegriffstheorie*, que considera a los objetos de manera genérica y los divide en *clases* (agregados)[48], una teoría elemental sobre las magnitudes y la teoría de funciones son parte de las matemáticas puras generales, mientras que las teorías de los diferentes sistemas numéricos[49], el álgebra y la teoría de funciones serían, todas ellas, teorías matemáticas puras especiales.

La respuesta de Bolzano a la primera de las preguntas planteadas un poco más arriba es, por lo tanto, como sigue. El objeto primario de las matemáticas son los *agregados* o colecciones. Bolzano se adelanta, así, casi medio siglo, a la solución que, a partir de Dedekind y durante mucho tiempo, se dará de estos problemas. Pero, al mismo tiempo, la noción de conjunto tendría, según Bolzano, la importante propiedad de constituir, al lado de la de *representación en sí* (véase más abajo), el punto de articulación entre el ámbito de la lógica y el de las matemáticas. En la base de las matemáticas se encuentran consideraciones extensionales relativas a totalidades. Ahora bien, Bolzano desarrolla también, como parte de la *Grossenlehre*, una teoría especial de conjuntos infinitos, acerca de la cual su labor es no sólo absolutamente pionera, sino cuyos resultados le confirman, de manera particularmente clara, lo erróneo de la idea de que una intuición como la descrita por Kant constituya el fundamento de las matemáticas.

4. *Las Paradojas del Infinito*

Una de las nociones que no sólo aparentemente esenciales, sino también más recurrentes en el cálculo de principios del siglo XIX y que, además, se presentaba como la más seria de las dificultades para su fundamentación es, como hemos dicho, la de *infinito*.

¿Puede explicarse el infinito sin incurrir en contradicciones ni vaguedades? Y, de ser así, ¿es viable una teoría matemática acerca del mismo? Estos son los problemas que Bolzano se propone analizar en *Las Paradojas del Infinito* (=PU) [Bolzano 1851].[50]

El punto de partida de Bolzano es notablemente moderno. Justamente el estudio de las paradojas en las que interviene, según parecería, de manera esencial el concepto de infinito nos proporcionaría no sólo evidencia decisiva para rechazar la intuición como criterio de verdad en las matemáticas, sino también un punto de referencia y un elemento de

---

48 Como observa con toda razon, Sebestyk [1992, 298], esta teoría de máxima generalidad puede pensarse como un reflejo de la teoría del objeto en general expuesta en 1810.

49 «Los números [Zahlen] serían una subclase de las magnitudes [Grössen]. «La teoria de los números, en cuanto exposición especifica [de los diferentes sistemas numéricos] se llama *teoría pura de los números* o *aritmética*» [EGL, 8r, 8v]

50 PU se escribe en los años 40 del siglo pasado y estaba destinada a ser una de las partes conclusivas de la *Grossenlehre* bolzaniana. En particular, si bien es cierto que Bolzano revisa en varias ocasiones, desde 1844 hasta su muerte en 1848, el material contenido en las primeras 49 secciones de esta que es prácticamente su última obra [cfr. Berg 1962, 25], puede afirmarse [cfr Rootselaar 1975, XX*] que lo esencial de la totalidad de las ideas acerca de los temas abordados en ella se encuentra ya en las notas matemáticas de Bolzano anteriores a 1830 De hecho, el pensamiento de Bolzano acerca del infinito parecería variar mucho más que sus concepciones sobre prácticamente cualquier otro problema, lo que habla de una maduración al respecto (véase más adelante, particularmente la nota 66 acerca de un desarrollo particularmente importante del *mismo*) La exposición de su teoría del infinito se encuentra principalmente en [Bolzano 1837] y en PU. Lo que sigue se refiere básicamente a este último escrito.

contrastación para una teoría acerca del mismo.[51] En general, en lo que se refiere a la existencia de paradojas en alguna rama de la ciencia, Bolzano es de la opinión de que cada una de ellas apunta a una necesidad de clarificación conceptual o de principios o, simplemente, pone de manifiesto una incompatibilidad entre nuestra intuición y la corrección lógica. En esa medida, constituye un elemento de afinación metodológica de primerísima importancia.[52]

Ahora bien, no puede hablarse propiamente -y esto, como veremos a continuación, en varios sentidos- de *el* infinito. Finitud e infinitud no son objetos en sí mismos, sino que deben verse como predicados o propiedades. Más precisamente: «Finitud e infinitud sólo pueden utilizarse en relación a objetos que exhiban, en algún sentido, magnitud y diversidad» [PU, §2]. Es decir, son, según se sigue de lo dicho antes, propiedades de *conjuntos* o *agregados*[53], por lo que el planteamiento de Bolzano se inserta en el terreno de las matemáticas puras *generales*, si bien una teoría positiva específica sobre los agregados infinitos formaría parte, de acuerdo con su clasificación, de las matemáticas puras *especiales*.

La respuesta afirmativa a las preguntas anteriores que este planteamiento entraña coloca a Bolzano no sólo en oposición a una tradición sostenida, entre otros, por Locke, Descartes, Spinoza, Berkeley y Kant, sino que lo convierte, también, en un claro y -por excepción- explícitamente reconocido antecedente de la teoría del infinito desarrollada por Cantor cuatro décadas más tarde.[54]

---

[51] Como de costumbre, Bolzano se plante el problema en los términos más generales posibles. Además de las matemáticas, el concepto aparece en la física, en la filosofía y aun en la teología Sería en la primera de estas disciplinas, sin embargo, que puede esperarse una elucidación precisa del mismo que sirva de base para un examen de su uso en otros ámbitos.

[52] Esta concepción se encuentra implícita, según creemos haber hecho plausible en lo anterior, en su planteamiento general, en especial, en lo referente a su postura frente a la intuición. Es falso afirmar, por lo tanto, como hace van Rootselaar [1975, IX*], que «la atención que Bolzano dedica a paradojas de la más diversa índole, como las matemáticas, las de la física y la política, debe explicarse por su búsqueda de originalidad Los fenómenos extraños e inesperados en la naturaleza y en las ciencias lo estimulaban a encontrar nuevas soluciones, con frecuencia a partir de suposiciones más bien raras. Sus diarios ponen de manifiesto un intento incesante de resolver las paradojas conocidas, aunque éstas no eran siempre las más importantes» La última parte de esta afirmación es, sin embargo, cierta.

[53] Bolzano distingue, no siempre de manera consistente, entre *agregados* [Inbegriffe] y *conjuntos* [Mengen], considerando los primeros como los elementos básicos de su teoría matemática. En realidad, ambos conceptos se encuentran estrechamente relacionados y pertenecerían tanto a la lógica como a las matemáticas, esto es, constituyen, como se dijo, el punto de vinculación entre estas dos disciplinas. En la última parte de este capítulo, dedicada a la lógica de Bolzano, volveremos sobre estos conceptos. Baste saber, por el momento, que los agregados son totalidades dotadas de cierto orden, mientras que los conjuntos se obtienen a partir de ellas precisamente haciendo abstracción de ese orden [PU, §4] El ejemplo que Bolzano ofrece es sumamente obscuro un vaso tiene las mismas partes que un vaso roto. Como conjuntos, son iguales, no lo son, sin embargo, como agregados. Lo que sigue se refiere sólo a una teoría especial de una subclase de ellos: los agregados y conjuntos *infinitos*.

[54] «Bolzano -escribe Cantor [1883, 180-181]- es uno de los filósofos y matemáticos más agudos del siglo XIX. . El objetivo central de su PU es demostrar que las contradicciones que los escépticos y peripatéticos de todas las épocas han pretendido hallar en el infinito, en realidad no existen, con tal de que uno se tome el -en general, por supuesto, no siempre sencillo- trabajo de analizar con toda seriedad los conceptos de infinito de acuerdo a su verdadero contenido» Véase un poco más abajo para una descripción del punto exacto de contacto entre Bolzano y Cantor

La estrategia seguida por Bolzano consiste, por lo tanto, en examinar, en primer lugar, las paradojas acerca del infinito y distinguir, en general, entre éstas y las verdaderas contradicciones. Desde un punto de vista estrictamente lógico, sólo las segundas son significativas. Sus análisis lo conducen a un descubrimiento de suma importancia: Hay esencialmente dos maneras aceptables de hablar del infinito en matemáticas, pero sólo una de ella es *propia*. «Muchos matemáticos -dice Bolzano [PU, §12.1]- entre ellos el mismo Cauchy en su *Cours d'Analyse*, han creído explicar el infinito describiéndolo como una magnitud variable cuyo valor crece ilimitadamente y que supera, en consecuencia, cualquier magnitud dada... El límite de este incremento sería la magnitud infinitamente grande». De lo que se habla aquí, según Bolzano, es, más bien, de los *valores de una función* y de la inexistencia de un límite para la misma. Bolzano considera que, en rigor, es innecesario hablar de infinito en este tipo de contextos, pues todo lo que pueda querer decirse con este concepto puede explicarse igualmente en términos de valores y desigualdades aritméticas[55]. En este caso, el infinito es tan sólo un modo figurativo de hablar y resulta siempre dispensable.[56]

Ahora bien, el hecho de que una función, como f(x) = 5x, carezca de límite, esto es, que pueda tomar valores crecientes de manera ilimitada, supone, según Bolzano, que el conjunto de los mismos es auténticamente infinito, es decir, infinito en un sentido de presencia total.[57] En otras palabras, habría una utilización propia de ese concepto, esto es, existen los conjuntos infinitos. Éste es el origen de la importante distinción entre un *infinito potencial* [das potentiale Unendliche], esto es, sincategoremático o impropio y un *infinito actual* [das Aktual-Unendliche] o categoremático que Cantor hará décadas más tarde[58] y convierte a Bolzano en el iniciador de una investigación de alcances insospechados destinada a transformar de raíz las matemáticas en su totalidad, lo mismo que el momento de ruptura con una tradición secular que identificaba al infinito con lo ilimitado.

La existencia de un infinito actual no es, sin embargo, una verdad elemental, por lo que debe justificarse. Antes de analizar el argumento que Bolzano ofrece al respecto, analizaremos su definición de infinito.

Aunque no hay, en realidad, una definición satisfactoria del infinito en Bolzano, su investigación le permite establecer una serie de propiedades acerca de este tipo de totalidades que expresan adecuadamente las propiedades básicas de ese concepto. La caracterización bolzaniana del mismo parte de la idea de función o representación [Darstellung]. Con ella y las condiciones obvias de univocidad al respecto puede obtenerse, dado un objeto a arbitrario para el que la función f tenga un valor, una *sucesión*, es decir, un conjunto $a, f(a), f(f(a)), \ldots$ con una estructura de orden similar a la de los naturales. Un

---

55 Algo análogo podría decirse en relación a la referencia al infinito que se hace al hablarse de continuidad y límites y, en general, de infinitesimales.

56 Compárese lo anterior con las siguientes afirmaciones de Cantor [1883, 165]: « En lo que se refiere al infinito matemático, en cuanto que el mismo ha sido aplicado en la ciencia y contribuido a su progreso, me parece que este uso se ha dado principalmente en el significado de una magnitud variable que o bien se incrementa o bien decrece más allá de cualquier límite, aunque permaneciendo siempre en el ámbito de lo finito»

57 Como veremos más adelante en el caso de las «proposiciones en sí» (cfr. Apartado IX), este modo de argumentación que, en realidad, encierra un salto ontológico, es típico en Bolzano y revela un platonismo radical solo limitado por el principio de no-contradicción.

58 Cfr. Cantor [1883, 165-166] y [1885, 372-374]. Una posible excepción a ello lo constituye la distinción aristotélica entre *acto* y *potencia*.

conjunto α es entonces *finito*, si existe un elemento x de la sucesión, tal que α sea equivalente (esto es, pueda hacerse corresponder 1-1 con él) al conjunto de todos los términos anteriores a x [cfr. PU, §§7,8]. Un conjuntoα es *infinito*, si para todo conjunto finito β existe una parte (=subconjunto) de α equivalente a β.[59] Bolzano identifica luego los *números enteros* con finitud [PU, §8] y es claro que tiene en mente una operación abstractiva similar a la que Dedekind utilizará en 1887 para definir los números naturales.[60]

Aunque la definición de Bolzano es, en última instancia, circular, pues «sucesión» sólo puede explicarse en términos de los números naturales o de algo esencialmente equivalente a los mismos, de cualquier manera se trata ya de una definición *matemática* y, en ese sentido, resulta superior a cualquiera de las ofrecidas hasta ese momento. Bolzano examina las más importantes de ellas, rechazándolas en cada caso como insuficientes, vagas o incluso contradictorias. De entre las definiciones examinadas por él vale la pena destacar aquí la de Spinoza, según la cual sólo es infinito lo que no es susceptible de ningún incremento o aquello a lo que ya no puede añadirse nada [cfr. PU, §12.2]. La crítica a la misma ilustra con claridad el *modus operandi* bolzaniano. La definición resulta, en efecto, demasiado estrecha, pues, por ejemplo, una longitud acotada sólo de un lado puede extenderse de manera no sólo finita, sino infinita (es decir, en términos de intervalos, $(0,\infty)$ es menor, como magnitud, que $(-1,\infty)$, el cual es, a su vez, infinitamente menor que $(-\infty,\infty)$). Lo más interesante aquí es, sin embargo, la posibilidad de que el infinito mismo tenga varios *grados*. Esto requiere, evidentemente, de un criterio preciso de comparación entre este tipo de magnitudes; es decir, de una definición de las relaciones de «menor que» e «igualdad en cuanto a la cantidad» entre totalidades infinitas.

En la definición misma de infinito se encuentra ya contenido, de manera implicíta, un criterio -por lo menos parcial- de comparación entre magnitudes de conjuntos en lo que respecta a su magnitud (esto es, en términos de Bolzano, en cuanto a su multiplicidad [in Hinsicht auf die Vielheit]). Es decir, si α y β son finitos, puede definirse un orden entre ellos, estableciendo que $\alpha > \beta$ si y sólo si existe una correspondencia entre β y una parte de α y no existe ninguna correspondencia entre α y una parte de β. El criterio utilizado aquí es la existencia de una correspondencia entre ellos [PU, §22]. Por supuesto, esta es también una condición necesaria para la igualdad de dos conjuntos infinitos. Bolzano demuestra [PU, §20], por otra parte, que la reflexividad es, asimismo, una característica esencial de lo infinito[61], pero no es contradictoria, *por lo que* resulta matemáticamente aceptable. Sin embargo, esta misma propiedad lo lleva a concluir la imposibilidad de identificar las magnitudes de dos conjuntos sólo en razón de la existencia de una correspondencia como la señalada entre ellos.[62] En otras palabras, una correspondencia 1-1 es una condición

---

59 «A una multiplicidad que es mayor que cualquier multiplicidad finita, esto es, a una multiplicidad que tiene la propiedad de que todo conjunto finito representa tan sólo una parte de ella la llamo *infinita*» [PU, §9]

60 Cfr. Cap. Cuatro, 1ª. Parte. Conviene notar, sin embargo, que, en sentido estricto, Bolzano rechazaría este tipo de definiciones «creativas» con base en su objetivismo conceptual. La obtención de algo similar se da, sin embargo, gracias al realismo conceptual prácticamente irrestricto sostenido por él

61 Bolzano muestra que los intervalos (0,5) y (0,12) y, en general, que cualesquiera dos intervalos abiertos de números reales son equivalentes.

62 «Que dos conjuntos A y B se encuentren en una relación de ese tipo .. no nos autoriza a concluir. si ambos son infinitos, que sean iguales entre sí en lo que respecta a la multiplicidad de sus partes (*i e* cuando hacemos abstracción de todo tipo de diversidad entre ellos), sino que pueden todavía . conservar una relación de desigualdad al respecto, de tal modo que uno de ellos sea un todo del que el otro sería una parte. Una igualdad

necesaria, pero no suficiente para la identificación de dos magnitudes infinitas. Esta conclusión tendrá profundas consecuencias en la teoría bolzaniana del infinito, impidiendo, en última instancia, su cabal desarrollo.

Son dos, según nos parece, las razones de fondo que impiden a Bolzano dar éste, que sería el paso fundamental, a una verdadera *Grossenlehre* del infinito, esto es, a la concepción de números transfinitos y, por lo tanto, a una aritmética de este tipo.

En primer lugar, básicamente, la obscuridad -y aun inconsistencia- que puede constatarse en él en lo que se refiere a la distinción entre agregados y conjuntos, es decir, a la falta de claridad de sus nociones primitivas. Es esta confusión precisamente la que lo lleva a considerar la existencia de una correspondencia como insuficiente para la identificación de multiplicidades en general[63].

En segundo, Bolzano continúa adhiriéndose, sin reservas, al axioma euclidiano de que el todo es siempre mayor que cualquiera de las partes. Este principio, de validez indudable en la esfera de lo finito, es incompatible con la reflexividad de los conjuntos infinitos, hace imposible una descripción de *cardinalidad* que vaya más allá de la simple relación de subclase e impide, igualmente, que pueda disponerse de un concepto unitario de *número*. «Sin estos conceptos -dice Cantor [1883, §7, 180]- es imposible avanzar en la teoría de variedades [=conjuntos] y esto mismo ocurre con aquellos ámbitos de estudio que caen bajo ella, como la teoría de funciones o que, como la lógica y la epistemología, mantienen una estrechísima relación con la misma».

Vale la pena mencionar, por último, otros dos aspectos de la investigación bolzaniana acerca del infinito que, a pesar de sus insuficiencias, resultarían premonitorias de importantes desarrollos ulteriores: la existencia de niveles de infinitud y la existencia misma de totalidades infinitas.

a) «Quien acepte -se dice en [PU, §29]- la existencia de totalidades infinitas y, por lo tanto, de magnitudes con esta propiedad, no podrá negarse a la verdad de una diferenciación múltiple en cuanto a tamaño de las magnitudes infinitas... Existen cantidades infinitas de los llamados *órdenes superiores*, entre las cuales una de ellas puede ser infinitamente más grande que las otras». Cantor mismo habría de demostrar la corrección esencial de esta idea al establecer años después la no denumerabilidad de los reales y la inexistencia de un cardinal máximo. Pero corresponde a Bolzano el mérito de haber sido el primero en formularla y de romper con la concepción de un infinito único o absoluto (por ejemplo, al estilo de Hegel).

Bolzano intenta también establecer la existencia de conjuntos infinitos. Su argumento es el siguiente. Sea *A* una verdad cualquiera[64]. Si se define ahora

---

de las multiplicidades únicamente puede darse cuando hay también alguna otra razón, por ejemplo, que ambos conjuntos tengan el mismo fundamento de determinación [Bestimmungsgründe] o que su modo de generación haya sido el mismo» [[PU, §21]

[63] Considerando, digamos, los conjuntos N de los naturales y 2N de los pares y la correspondencia $f(x) = 2x$, resulta que, aunque N y 2N son equivalentes, como magnitudes son diversas, porque, argumenta Bolzano [PU, §23], si bien, *v gr* $f(5) = 10$ y $f(6) = 12$, 5 y 10 «no aparecen de la misma manera en sus respectivos conjuntos», es decir, por ejemplo, 6-5 = 1, mientras que 12-10 = 2. El argumento es insostenible, pues esto mismo ocurriría cuando se trata de conjuntos finitos

[64] Bolzano había «demostrado» ya en [1837, §31] que hay verdades y también ofrecido [*Ibid* §32] un argumento similar al que a continuación presentamos de que éstas son infinitas

$$A_1 = A$$
$$A_2 = A_1 \text{ es verdadera}$$
$$A_3 = A_2 \text{ es verdadera}$$
$$\vdots$$
$$A_{(n+1)} = A_n \text{ es verdadera},$$

se tiene una sucesión de proposiciones diferentes, según Bolzano, puesto que el sujeto de cualesquiera dos de ellas es diferente. «El agregado que contiene todas estas proposiciones contiene un conjunto de partes que es mayor que cualquier conjunto finito», es decir, es infinito. Podría pensarse, sin embargo, que, en realidad, las proposiciones *A* y *A es verdadera*, en el sentido intensional del término, no son diferentes, sino lógicamente equivalentes. Como veremos más adelante, esta equivalencia, aceptada por Bolzano, no constituye, sin embargo, una condición suficiente de la igualdad entre proposiciones. Pero, aun concediendo esto, es decir, aun suponiendo la diversidad de los elementos de la sucesión, el razonamiento de Bolzano no es conclusivo. Lo que se tiene es la existencia de un conjunto ilimitado, esto es, de un infinito potencial, no del infinito actual que Bolzano pretende concluir. 40 años más tarde, Dedekind[65] intentará demostrar la existencia de un conjunto de esta especie de manera similar a Bolzano, aunque apoyándose en nociones estrictamente extramatemáticas. Desde 1907, gracias, entre otras cosas, a la axiomatización de Zermelo, se sabe que la existencia del infinito *no* puede ser demostrada

De este modo, si bien, en última instancia, Bolzano fracasa en sus intentos de desarrollar una teoría matemática del infinito, sus logros son considerables. Bolzano es el primero en ofrecer un intento de legitimación matemática de este concepto, el primero en investigar sistemáticamente sus propiedades y problemas fundamentales. Como hemos dicho, la falla principal de su análisis es la ausencia de un criterio de identidad entre magnitudes[66] y la consecuente falta de una noción general de número y de la cardinalidad de un conjunto. Éste será precisamente el punto de partida positivo de la aritmética cantoriana.[67]

---

[65] Cfr Capítulo Cuatro 1ª. Parte, nota 14.

[66] Sin embargo, en una nota escrita pocos meses de su muerte [1848, 90], al comentar críticamente varios aspectos de la *Wissenschaftslehre*, Bolzano acepta que la posibilidad de una correspondencia biunívoca entre dos clases constituye una condición necesaria *y suficiente* para su identidad El argumento es, con ligeras modificaciones, el siguiente y supone nociones que se analizarán en la Sección VIII. Sea **n** un número arbitrario (natural, por ejemplo) La *extensión* de la representación *n* es un conjunto, concretamente: {0,1,2,...} Considérese ahora **2n**. La extensión de la representación *2n* = {0,2,4,.. }. Ambos conjuntos serían, como magnitudes, iguales, dice Bolzano. «El conjunto representando por *n* es exactamente el mismo [como magnitud] que el representado por *2n*, a pesar de que los objetos representados en uno y en otro difieren El error que se cometía antes [al negar esta identificación con base en el axioma de que el todo es siempre mayor que la parte] se explica simplemente por el paso injustificado de un número finito, es decir, no mayor que el número n a todos los números»

[67] «Puede verse entonces -escribe Cantor [1883, 180-1] al contrastar sus resultados con la investigación de Bolzano- la manera en la que el concepto general de número, que en el nivel finito sólo se presenta bajo el aspecto de *número de* [Anzahl], se parte, en cierto sentido, en dos conceptos cuando se pasa al plano infinito: en el de *cardinalidad* [Mächtigkeit], que es independiente del orden que pueda darse a un conjunto, y en el de *ordinal propiamente dicho* [Anzahl], que se encuentra necesariamente vinculado a un orden regular, por medio del cual se convierte en un conjunto *bien ordenado.* Y si seguimos la ruta contraria y descendemos de lo infinito a lo finito, podremos ver, con la misma claridad y belleza, que ambos conceptos se unifican y confluyen en el concepto de número entero finito». Es posible, podemos añadir, que justamente una confusión

VII

Ya hemos mencionado el papel central que tiene la lógica en el pensamiento de Bolzano. El concepto bolzaniano de lógica rebasa con mucho, sin embargo, los límites bajo los que se piensa actualmente en esta disciplina. Incluye no sólo una teoría de la inferencia válida, sino también una *teoría general de la ciencia* en sus aspectos de fundamentación, epistemológico y de descubrimiento y exposición. En lo que sigue, intentaremos ofrecer una descripción panorámica del complejo sistema bolzaniano de la misma. También en este terreno, Bolzano anticipa en detalle muchas ideas que reaparecerían sólo muchos años más tarde, por ejemplo, en Boole, en Frege, en Russell e inclusive en Tarski.[68] Si en sus primeros escritos Bolzano se refiere todavía a la lógica como una *doctrina de las leyes del pensamiento*, su interés por las matemáticas y su permanente tendencia a asociar éstas con la filosofía lo llevan a considerarla ya, desde un principio, como algo indisolublemente ligado a ellas [Cfr. Bolzano 1937, I, §21]. De hecho, su lógica puede describirse como el primer intento sistemático, después de Leibniz, de reivindicar tal vínculo.[69] Ello le proporciona, además -y éste es una de los rasgos más característicos de su sistema- una esfera concreta de contrastación de sus teorías. La lógica de Bolzano es, por lo tanto, una teoría del método científico, particularmente, tal y como éste se manifiesta en lo que en su concepción es la más básica de todas las ciencias: las matemáticas; es decir, una especie de metateoría de la ciencia. El método en cuestión no es otro, según él, que el análisis deductivo de principios y conceptos, esto es, en su forma ideal, la axiomatización. La exposición detallada de su sistema lógico se encuentra en la *Wissenschaftslehre* [=WL], publicada en 1837, cuyo título completo ilustra claramente los propósitos de su autor: *Teoría de la Ciencia o Intento de una Exposición detallada y, en lo fundamental, novedosa de la lógica, con atención constante a otros autores.*[70]

En el §15 de ésta, que él mismo considera su obra principal, Bolzano expone el plan temático de la misma, señalando a la vez, de manera más precisa, los contenidos que la lógica tiene en su perspectiva:

---

de estos dos aspectos de lo numérico sea la razón de la ausencia de una distinción clara en Bolzano entre conjuntos y agregados.

68 Sin duda alguna, Bolzano es el principal lógico de la primera mitad del siglo XIX Entre él y sus contemporáneos (Hegel, Fichte, Schelling y otros) existe, por lo menos en lo que a esa disciplina se refiere, un abismo, una inmensa diferencia cualitativa que Husserl será el primero en reconocer plenamente e intentar utilizar medio siglo más tarde.

69 Así, en un pequeño libro de texto elaborado en 1819-1820 para la enseñanza privada [cit. en Winter 1949, 31], Bolzano escribe que «Debido a que hasta ahora estas reglas [de la lógica] han encontrado aplicación *exacta únicamente en las exposiciones matemáticas*, particularmente en la geometría, y como se ha pensado que tales principios no pueden ser verdaderamente observados en la presentación de otras materias, el método descrito aquí ha sido llamado *matemático* o *geométrico*. Estamos convencidos, sin embargo, de que la utilizacion del mismo resulta no solo posible, sino, de hecho, necesaria en cualquier disciplina que merezca el nombre de ciencia».

70 El título no es, sin embargo, original y, de hecho, se elige con la manifiesta intención de reivindicarlo, es decir, en oposición especialmente a Fichte y, en parte, también, a Hegel, cuya *Ciencia de la Lógica* es para Bolzano, comenzando con su definición misma de lógica («el contenido de la lógica es el pensamiento en cuanto que éste consiste en la cosa y la cosa en tanto que es al mismo tiempo pensamiento puro»), una colección de confusiones y absurdos [cfr. WL, §§2, 7]. En lo que resta del capítulo, el signo de apartado, seguido de un número, se referirá siempre al *locus* correspondiente de la WL.

1ª. Parte. *Teoría Fundamental*: Demostración de que existen las verdades en sí y de que el ser humano tiene la capacidad de conocerlas.

2ª. Parte. *Teoría Elemental*: Teoría de las representaciones en sí, de las proposiciones en sí y de la verdad e inferencia en sí.

3ª. Parte. *Teoría del Conocimiento*: De las condiciones a las que se sujeta el conocimiento de la verdad.

4ª. Parte. *Heurística* [Erfindungskunst] o de las reglas que han de observarse cuando se trata de hallar la verdad.

5ª. Parte. *Teoría de la Ciencia en sentido estricto* o de las reglas que deben seguirse en la división del ámbito de la verdad en las ciencias particulares y en la exposición de las mismas en libros de texto.

Desde el punto de vista de la lógica, tal y como hoy la entendemos, la parte más interesante es, sin duda, la *teoría elemental*. Ésta constituye, en efecto, el núcleo mismo de la lógica bolzaniana, aunque supone y profundiza una serie de distinciones hechas previamente en la *teoría fundamental*.[71] El primer resultado concreto de todo ello es el planteamiento de una postura *antipsicologista*, que Bolzano articula, por primera ocasión, en la historia de la lógica.[72] Lo que sigue se refiere, en lo esencial, a las secciones §§54-268 de la WL, en las que dicha teoría se expone.

Las dos nociones más importantes y primitivas de la lógica de Bolzano son las de *proposición* [Satz] y *representación* [Vorstellung], ambas con el añadido *en sí* [an sich], para diferenciarlas de sus contrapartes psicológicas o lingüísticas (pensamientos o juicios y oraciones , en el caso de la primera [cfr. §19], e ideas en su aspecto subjetivo y palabras, en el caso de la segunda [cfr. §48]).

En sí tiene en Bolzano un carácter prácticamente ontológico, que es descrito por él en términos más que nada negativos. Ni las proposiciones en sí mismas [=SAS] ni las representaciones en sí mismas [=VAS] *existen* [cfr., §54]; es decir, ambas carecen de cualquier tipo de realidad fenoménica. Es esto precisamente lo que permite diferenciarlas, por una parte, de las oraciones y los nombres y, por la otra, de los juicios y las ideas. Las primeras forman parte de un lenguaje y son, en ese sentido, algo particular e histórico. Lo que se tiene siempre en el segundo caso es un acontecimiento psíquico, ligado, a causa de ello, al tiempo y que depende de un sujeto y varía de acuerdo con él. Por el contrario, las SAS y VAS serían algo general que iría más allá de cualquier lenguaje particular, aquello que constituiría el substrato comunicativo de todos los lenguajes históricos y que es independiente de las formas concretas que éstos asuman. Pero, además y en consecuencia, Bolzano distingue también de manera sistemática las VAS y las SAS de los objetos y los hechos respectivos [§49]. Unos y otros conforman la realidad, hacen posible la experiencia y están sujetos al cambio. Aunque no existen, las VAS y las SAS serían, sin embargo, algo

---

71 El objetivo de la 1ª. Parte de la WL es, en realidad, la refutación del escepticismo. Bolzano «demuestra» por *reducción al absurdo* que existe al menos una verdad. Un argumento más interesante -al que nos hemos referido antes en su versión de 1851-pretende establecer, asimismo, que existe un número infinito de verdades [cfr. §§ 19, 31, 32].

72 El antipsicologismo de Husserl tiene su antecedente explícito en Bolzano. Al comentar la importancia de Bolzano en la lógica, Husserl [1900,I, p.25] se refiere específicamente a la segunda parte de la WL en los siguientes términos: «En lo que toca a las materias tratadas en la *teoría elemental*, la WL supera con mucho cualquier otra exposición sistemática presentada hasta ahora en la lógica».

objetivo[73], es decir, autosubsistente. La existencia misma de fenómenos psíquicos o lingüísticos, como los juicios, sustantivos comúnes, etc., *supone*, de acuerdo con Bolzano, algo previo, transubjetivo y translingüístico[74] de lo que justamente esos fenómenos del pensamiento humano serían manifestación [cfr. §§19, 48].

La analogía con la realidad física es aquí estrecha. Así como una explicación satisfactoria de la percepción requiere de la suposición de aquélla como algo independiente, una explicación aceptable de *fenómenos lingüísticos y psíquicos* haría necesaria una base autónoma de significaciones.[75] Las SAS serían, según esto, aquello que las oraciones asertivas *expresan, lo pensado* en los juicios; las VAS pueden considerarse, a su vez, como *lo dicho* por un nombre propio. En otras palabras, entre el mundo de los fenómenos y nuestra pensamiento, Bolzano postula una esfera autónoma de entidades que nos permite conocer el primero y a las que terminará atribuyendo características platónicas como atemporalidad e inmutabilidad.

Estas entidades constituirían el objeto de estudio propiamente dicho de la lógica. Es decir, la lógica bolzaniana es, en primera instancia, una lógica de *contenidos*[76] y el carácter independiente y objetivo de éstos la convierte, de hecho, en una especie de ontología de este ámbito intermedio, en lo que, en vista de su relación con los significados, parecería constituir una especie de *ontología semántica*. Sin embargo, la lógica de Bolzano no es exactamente un sistema semántico en el sentido tarskiano de una interpretación (o de la interpretación principal) de un sistema sintáctico. La razón de ello debe buscarse en el papel que se asigna al lenguaje natural en su teoría lógica, un problema al que nos referiremos en la Sección XII.

La lógica de Bolzano se divide en dos grandes apartados, en correspondencia con las dos nociones más importantes de su sistema[77], en lo que, como ahora veremos, puede llamarse una *teoría de conceptos* y una *teoría de la deducción*. Para cada una de ellas, Bolzano desarrolla un sistema análogo basado en la idea de *compatibilidad* [Verträglichkeit]. Su punto de partida son, sin embargo, como en el caso de Frege, las proposiciones. Sólo en relación a ellas es que las VAS pueden considerarse como algo significativo y una teoría acerca de las mismas debe siempre tener a la vista tal contexto.

---

[73] Bolzano distingue consistentemente objeto [Gegenstand], realidad [Wirklichkeit], existencia [Dasein, Existenz], objetividad [Objektivität], *en el sentido de independencia* de cualquier sujeto, y objetividad de conceptos [Gegenstandlichkeit]. *Realidad* y *existencia* se refieren siempre al mundo fenoménico; son los elementos que constituyen al mismo. Las SAS y VAS, como los números o los conjuntos, son objetivos en cuanto a que no dependen de un sujeto, mientras que un concepto es objetivo si, como hoy diríamos, denota algo. [Cfr. §§ 19, 42, 49.1, 49 2, 50.1]

[74] En el sentido de independencia de cada lenguaje particular, no del lenguaje en general. Este problema no se plantea en Bolzano.

[75] Un argumento similar en favor del platonismo en las matemáticas se encuentra en Gödel [1944, 214] La coincidencia no es casual. Cfr Sección XIII más abajo acerca de las repercusiones de las ideas de Bolzano

[76] En referencia a las VAS, por ejemplo, se dice [§48.3] que «por VAS o representación objetiva que corresponde a una representación subjetiva, entiendo la *materia* [Stoff] inmediata que constituye la representación subjetiva. Esta representación objetiva no requiere de un sujeto y es autosubsistente, no como algo en proceso de ser, sino como un *algo* preciso y único .. y no se multiplica porque uno, dos o más sujetos la piensen Por eso puede afirmarse que es *objetiva*»

[77] Las nociones son primitivas, aunque no son las únicas. Entre otras, habría que contar como tales la relación atributiva *tener*, que conecta a dos VAS para dar lugar a una SAS.

Únicamente a partir de las proposiciones es que, por análisis, puede llegarse a las representaciones. Éstas son, en efecto, los elementos constitutivos de aquéllas.[78] Bolzano las describe [§48.2] como «todo aquello que forma parte de una proposición, sin ser ello mismo, una proposición». La aparente circularidad aquí desaparece recordando el carácter primitivo de las mismas y el resultado principal de la teoría fundamental, que establece, según hemos dicho, que hay algo verdadero y, por lo tanto, que hay proposiciones.

VIII

La lógica de Bolzano consta, entonces, en primer lugar, de una teoría de las representaciones, de una especie de teoría de conceptos que puede pensarse, asimismo, como una teoría general de las clases. Como la elección misma de estas designaciones lo sugiere, la lógica de Bolzano oscila, en efecto, entre la *intensionalidad* y la *extensionalidad*.

Lo característico de las representaciones es que, en general, se refieren a algo, a *objetos*[79] De acuerdo con ello, las representaciones pueden dividirse en aquellas que efectivamente representan al menos un objeto y aquellas que no lo hacen. Las primeras se llaman *objetivas* [gegenständlich], las segundas *vacuas* [gegenstandlos].[80] Ambas deben admitirse en la lógica y en la ciencia Por otra parte, toda representación objetiva determina de manera unívoca una *extensión* [Umfang], es decir, una totalidad o *conjunto* [Menge], mismo que posee, en consecuencia, una *magnitud*, a la que Bolzano llama también la *amplitud de la extensión* [Weite] y que puede ser infinita [cfr. §66.3].[81]

La admisión de extensiones únicamente para las representaciones objetivas no sólo resta generalidad a esta noción, sino que será también la causa de que Bolzano rechace más tarde en su teoría de conjuntos la existencia de un conjunto vacío, así como de su incapacidad para ofrecer una explicación satisfactoria del número cero[82].

Bolzano admite, por otra parte, según se sigue de lo anterior, una especie de axioma de comprensión para las VAS, con la única restricción de que éstas sean objetivas.[83] De este modo, las VAS poseen un aspecto *extensional* que, de hecho, forma parte de la articulación entre matemáticas y lógica. Pero no se reducen a él. Es decir, la coextensionalidad es una condición necesaria, pero no suficiente, para la igualdad de dos representaciones [§62.2]. *Triángulo equilatero* y *triángulo equiángulo*, por ejemplo, son dos VAS con la misma extensión, pero diversas.

---

78 Las proposiciones son, en realidad, sucesiones de representaciones, como en *Cayo es inteligente*, esto es, *Cayo tiene inteligencia*, que consta de las tres representaciones, *Cayo*, *tener* e *inteligencia*.

79 «Si bien no todas, sí la mayorías de las VAS se refieren a cierto algo que debe diferenciarse en todo momento de ellas y que puede llamarse *objetos*, en el sentido más amplio posible de este término» [§66.1]

80 §§67, 68 Cfr. también nota 73 más arriba.

81 Atendiendo a su extensión, además, las VAS pueden ser *individuales* o *generales* [§68 1]. Bolzano diferencia, así, entre representación individual e individuo y, por lo tanto, entre conjunto unitario y objeto, una distinción que Dedekind mismo pasará por alto en 1877 [cfr. Cap. 4, 1ª Parte, más abajo]

82 Cero sería una VAS vacua, al igual que raíz cuadrada de -1, y se le considera a la par con las contradicciones lógicas [§49.1]

83 «Hay -dice Bolzano [§66.4]- una sola colección [Inbegriff] de los objetos representados por una representacion, por lo que su extensión es también única». Sin embargo, no debemos pensar que las VAS son algo parecido a las *funciones proposicionales*. Más bien deben interpretarse, con las salvedades que impone su caracter no lingüistico y otras restricciones, como algo cercano a lo que Frege llamaría el *sentido* de un nombre. Así, por ejemplo, *3*, *número*, lo mismo que *J.S. Bach*, *músico*, *cero*, pero también, problemáticamente, *no*, *ser* y *tener* son representaciones

Ahora bien, ¿cuál sería el criterio de identidad para las representaciones? Bolzano distingue [§61] entre VAS *simples* y *complejas*. Una representación compuesta de una o más partes diferentes de ella que sean, a su vez, representaciones es una VAS compleja. Para toda representación *A*, existiría, sin embargo, una sucesión única $A_1,...,A_n$ de VAS simples en la que *A* puede ser analizada, es decir, a partir de la cual puede ser obtenida por medio de una cadena de definiciones. $(A_1,...,A_n)$ puede ser llamada [cfr. Berg 1962, 74] *la forma primitiva de A*. El criterio de identidad para las VAS resulta ahora inmediato: Dos VAS son iguales si y solamente si tienen la misma forma primitiva.[84]

Si bien Bolzano *no* ofrece [cfr. §78, nota 1] una lista de las representaciones simples, sí menciona y analiza algunas de ellas [§64, 275-6] que poseen un carácter eminentemente lógico, como *tener*[85], *ser*, *no*, *algún*, así como otras que, sin ser lógicas, resultan de importancia para comprender su teoría de los conceptos. Una de ellas es la de *intuición*, que Bolzano define [§72] como una representación individual simple.[86] Un *concepto* puede definirse ahora como una representación compleja sin componentes intuitivos [§73.1]. La diferencia esencial entre conceptos e intuiciones sería, por lo tanto, la índole simple de éstas y su necesaria objetividad, como VAS, en oposición a la posible vacuidad y a la generalidad de aquéllos.

La relación más importante que puede darse entre las VAS es la de *compatibilidad* o *incompatibilidad* de las mismas. Ambas relaciones se encuentran basadas en los objetos que caen [unterstehen] o no bajo ellas.[87] Bolzano expone con todo detalle una teoría puramente *extensional*, esto es, conjuntista de esas relaciones que aún hoy en día sorprende por su rigor y modernidad El enfoque es claramente algebraico y Bolzano se servirá una y otra vez de él en la WL con el propósito de establecer los principios básicos de una teoría de las VAS (de las SAS, de las verdades en sí mismas, etc.), esto es, de demostrar a partir de las definiciones y una serie de principios básicos sus propiedades esenciales.

Dos VAS *A* y *B* son *compatibles* si hay al menos un objeto que caiga bajo la extensión de ambas [§94]. La relación puede extenderse fácilmente a colecciones de VAS y a partir de ella pueden caracterizarse, asimismo, de manera inmediata y natural, otras relaciones importantes entre representaciones como las de *inclusión* [Umfassung], *inclusión propia* y *equivalencia* [Gleichgültigkeit] y generalizarse, en cada caso, a conjuntos de las mismas [cfr. §§ 95.1, 96.1]. Todas estas relaciones no pueden darse, sin embargo, sino entre VAS no vacuas, esto es, objetivas. Esta drástica restricción hará imposible un desarrollo general y satisfactorio de esta teoría y tiene su origen, como quedó dicho, en la adhesión irrestricta de Bolzano al lenguaje natural[88]. En §108, sin embargo, confrontado con la

---

[84] El *contenido* [Inhalt] de una VAS *A* es el conjunto de las representaciones primitivas en las que *A* puede descomponerse [§56]. Que el criterio de identidad entre VAS no puede ser simplemente la igualdad de contenido, sino que debe haber un orden en éste, puede verse fácilmente considerando las representaciones *7-3* y *3-7*, cuyo contenido es el mismo, pero que son obviamente diferentes.

[85] *Tener* [haben] es una expresión que en Bolzano corresponde a la relación de ser miembro de la extensión de una VAS

[86] Las intuiciones como VAS deben diferenciarse estrictamente de las intuiciones cognitivas, que son igualmente individuales y simples, pero que son subjetivas y que se expresan lingüísticamente por medio del pronombre demostrativo «esto». La existencia de las segundas supone, según Bolzano, las primeras.

[87] Esta relación entre objetos y VAS sería otro de los primitivos no explícitos de la teoría de Bolzano

[88] Es decir, *representación vacua* resulta una expresión incluso paradójica desde el punto de vista del lenguaje normal, al no haber nada que representar. Esto pone también de manifiesto la incomprensión que Bolzano

necesidad de explicar en toda su generalidad el concepto de ecuación, Bolzano amplía, a manera de convención inocua, ciertas relaciones como la equivalencia a representaciones vacías.

Como dijimos al principio de este apartado, las VAS sólo adquieren sentido en el contexto de una proposición, es decir, en una ordenación de representaciones que pueda evaluarse en términos de verdad o falsedad. Sin embargo, la determinación de aquellas ordenaciones que son SAS permanece obscura o, por lo menos, incompleta. La causa de esta imprecisión es, nuevamente, la contradicción aparentemente insalvable entre el atomismo defendido aquí por Bolzano y el lenguaje cuasi natural que le sirve de base a su teoría.

La teoría de las VAS que acabamos de bosquejar sienta las bases para una teoría general de la deducción que Bolzano expone también en la WL. Por sí misma representa ya, sin embargo, un hecho notable en la historia de la lógica, independientemente de su influencia en su tiempo o en la lógica posterior. Con ella se inaugura práctica y sistemáticamente, y a un nivel incomparablemente superior a todo lo hecho hasta ese momento, la lógica matemática propiamente dicha y se da el primer gran paso en la tarea de poner la lógica a la altura de la ciencia y, de manera muy especial, a la altura de las matemáticas de su tiempo.

IX

La teoría elemental culmina en la *teoría de la deducción*, que es, también una de las partes del pensamiento bolzaniano que ejerce, en particular en su forma de *consecuencia simple* -aunque de manera indirecta- mayor influencia en la historia de la lógica. Bolzano la desarrolla tomando como base la teoría de las representaciones y en estrecha analogía con ésta Así como las VAS se dividen en objetivas y vacuas, de acuerdo con su relación con los objetos, las proposiciones se dividen en *verdaderas* y *falsas*, de acuerdo con las relaciones que los objetos mantienen entre sí [§§28, 29]. *Verdad* y *falsedad* no son, sin embargo, objetos, como en Frege, sino propiedades [Beschaffenheiten] de las proposiciones [§24][89], y la teoría de la deducción se interesa en ellas, por una parte, sólo en cuanto que tienen que ver con la *necesidad y la posibilidad* [§155, nota1], en el caso de la consecuencia simple y, por la otra, de manera absoluta, en el caso de la consecuencia estricta. Al igual que las VAS, las SAS se dividen en simples y complejas. Esto es, Bolzano refrenda en lo que a ellas se refiere una concepción atomista de la lógica.

VAS y SAS se diferencian tanto por sus propiedades esenciales como por su forma de composición. Mientras que toda combinación de VAS es una VAS, es decir, mientras que «en la formación de VAS hay una especie de arbitrariedad esencial» [§64.5], no toda combinación de VAS da lugar a una proposición. Las SAS pueden pensarse, en efecto, en términos de una *forma canónica* única,

A tiene b.[90]

tiene todavía de las pruebas por vacuidad y será también la causa (véase más abajo) de su rechazo de las demostraciones indirectas.

[89] *Verdad* y *falsedad* serían también, como *objetividad* y *vacuidad* de una VAS, otros dos primitivos de la teoría lógica bolzaniana.

[90] «En todas las SAS puede encontrarse el concepto de *tener* o *poseer* o, más específicamente, el concepto designado por la palabra «tiene (posee)». Además de este componente, en toda proposición aparecen otros dos que ese concepto-verbo conecta, como en la expresión «*A tiene b*». *A* es la representación-sujeto y se refiere a

Esta tesis, calcada prácticamente de la gramática del lenguaje ordinario, es, por supuesto, un resabio de la lógica tradicional[91] y resulta indemostrable, dado el marco lingüístico en el que se plantea. Bolzano la da por cierta apoyándose en algunos ejemplos paradigmáticos y en algunas reglas que de allí se derivarían. Así, por ejemplo, una proposición del tipo *Hay alguna A* se interpreta como «la VAS *A* tiene objetividad» [§137]; una SAS universal como *Ningún A es B se convierte en* «la VAS de un *A* que es *B* tiene vacuidad» [§138], etc. Como este último ejemplo lo ilustra, Bolzano se mueve en un lenguaje «seman-ticamente cerrado» similar al lenguaje cotidiano a este respecto.[92]

Por lo demás, la lógica bolzaniana es esencialmente compleja, es decir, las reducciones no siguen casi nunca el curso que hoy sería dable esperar. Bolzano distingue, por ejemplo, entre proposiciones *contrarias* [widerstreitende] y proposiciones *contradictorias* [widersprechende]. Sea *A* una proposición cualquiera. *A* es, por lo tanto, de la forma canónica *a tiene B*. La contraria de *A* es *A tiene falsedad*, mientras que la *contradictoria sería a tiene no-B* [§159]. Una característica importante de la lógica bolzaniana de los enunciados es que entre las condiciones que una proposición debe satisfacer para ser verdadera se encuentra la de que su representación-sujeto sea objetiva [§§127.7, 154]. Puede ocurrir, por lo tanto, que ni *a tiene B* ni *a tiene no-B*[93] sean verdaderas [§§127-130]. El principio del tercero excluido se formula en Bolzano, en correspondencia con ello, en términos de contrarios, como *A* o *A tiene falsedad*. Por su parte, las proposiciones disyuntivas se reducen [§181] a proposiciones simbólicas del tipo: «la VAS de que *una entre A y B es verdadera* no es vacua», mientras que *Si A entonces B* se interpreta [§179] en términos de *derivabilidad* y, por lo tanto, en términos de *variables* [véase más abajo], como una especie de consecuencia lógica, en el sentido que hoy damos a este término, de *B* a partir de *A*. Etc.

Aparte de la imposibilidad de plantear precisamente el problema de si las reglas anteriores son o no adecuadas, los procedimientos de reducción empleados por Bolzano se enfrentan a varias dificultades. Además de la principal de ellas que es. sin duda, la de que el mecanismo se apoya enteramente en el lenguaje natural, estaría el [illegible] establecimiento de un criterio de identidad para proposiciones. Esto resulta urgente en [illegible]a de que, por ejemplo, una misma proposición puede ser expresada por diferentes oracio[illegible] [§127] y de que, como ahora veremos, la equivalencia lógica entre proposiciones no implica identidad [§156.13]. Bolzano lo resuelve recurriendo a la teoría de las VAS: para toda proposición *S* existe una proposición *S** equivalente en la que sólo aparecen VAS-simples. Es decir, generalizando la noción de Berg para VAS, para toda proposición *S* existe una *forma primitiva S** de *S*. Esto

un objeto; *b* es la propiedad o representación-predicado que la proposición atribuye a ese objeto» [§127.9; cfr. también §126] Bolzano considera, por lo tanto, que este sería, asimismo, el caso de las negaciones. Una negación sería, en realidad, según esto, parte del predicado [Véase más adelante, Sección XII].

91 Una proposición universal afirmativa, por ejemplo, tendría como representación-sujeto un conjunto.

92 Para una lista exhaustiva de las principales reglas parafrásticas *utilizadas* en ejemplos por Bolzano, véase [Berg 1962, cap. III, §5].

93 La negación es, como se dijo antes, de acuerdo con Bolzano, parte de la representación-predicado, no de la cópula *tener* [§§127.6, 136].

sugiere que la composición, a partir de las mismas partes elementales y en el mismo orden de construcción, proporcionaría un criterio de identidad entre SAS[94].

X

Las propiedades lógicas más importantes de las proposiciones, al igual que las relaciones fundamentales de esta índole entre ellas «sólo se ponen de manifiesto -dice Bolzano [§154.1]- cuando consideramos ciertas VAS contenidas en ellas como algo *variable*, observando al mismo tiempo el comportamiento de las nuevas SAS, obtenidas del intercambio de las VAS originales por cualesquiera otras, en lo relativo a la verdad y la falsedad». Siguiendo este procedimiento de pensar en ciertas VAS en una proposición como algo variable[95], con cada proposición S se encuentra asociada una clase α de proposiciones que coinciden con S en todo excepto, tal vez, en ciertas VAS. Ello le permite a Bolzano una caracterización extensional de lo que puede llamarse [§147, 81] *la forma* [Art] *de S*. Este *método de la variación* de representaciones en una proposición constituye la base misma a partir de la cual se desarrolla gran parte de la lógica proposicional de Bolzano.[96]

De acuerdo con lo anterior, la única limitación que parecería establecerse en cuanto a las substituciones posibles de una «VAS-variable» es la que resulta de la forma canónica de las proposiciones. Bolzano mismo parece permitir, de hecho, *cualquier* tipo de substituciones. Por ejemplo, en la proposición

(1) *Cayo, el ser humano, es mortal*,

«Cayo» puede ser reemplazada tanto por «Tito», como por «Sócrates», «la rosa», «triángulo», etc. [§147, 78].

Para el análisis de las propiedades lógicas de una proposición y, en general, de las de un conjunto de proposiciones, Bolzano se restringe, sin embargo, a la consideración de SAS *objetivas*, es decir, de aquellas cuya representación-sujeto sea objetiva [§146].

Ahora bien, sean S una SAS de este tipo, i una representación en S, S^{**} el conjunto de las SAS objetivas que resultan de S por substitución de i, y S^{*} el conjunto de las SAS verdaderas en S^{**}.[97] El estudio de las relaciones entre S^{*} y S^{**} hace posible precisar ahora *numéricamente* una de las nociones más importantes de la lógica de Bolzano. Sean $\#S^{*}$ y $\#S^{**}$, respectivamente, el número de elementos de S^{*} y S^{**} e i una representación en S. El *grado de validez de S* [Grad der Gültigkeit], $g(S, i)$, sería un caso particular del de la probabilidad [Warscheinlichkeit] de S. Bolzano lo define como sigue:

---

[94] [Cfr. §§32, 558] De hecho, una consideración de este tipo se encuentra también en la base del argumento bolzaniano para establecer la existencia de un conjunto infinito· *A y A es verdadera* son proposiciones diferentes, puesto que sus representaciones-sujeto tienen que ser diversas.

[95] Bolzano se sirve de la palabra *variable* exclusivamente como un adjetivo aplicable a VAS, por lo que en él no se plantea el problema de qué sea *una* variable

[96] La operación que da lugar a α no puede propiamente identificarse con la substitución que hoy es común en la logica, puesto que ésta tiene siempre un carácter linguístico. En aras de la sencillez nos serviremos también, sin embargo, del mismo término.

[97] S^{**} es infinito, puesto que S es objetiva y porque, según lo muestra Bolzano [§96], para toda VAS i, existe un numero infinito de representaciones equivalentes entre sí.

$$g(S, i) = \frac{\#S^*}{\#S^{**}}$$ [98]

Como ejemplo, considérese la proposición (1) más arriba y la VAS *Cayo* en ella. Tenemos entonces que

$g((1), Cayo) = 1$,

mientras que $g((1), mortal) < 1$.[99]

Bolzano define luego validez e invalidez universales. Sean S e i como antes. S es *universalmente válida*, si $g(S, i) = 1$; S es *universalmente inválida* , si $g(S, i) = 0$.[100] Como es evidente, validez e invalidez, lo mismo que grado de validez son nociones relativas en Bolzano, esto es, dependen de la o de las representaciones consideradas. Es decir, no son, en realidad, propiedades intrínsecas, sino extrínsecas de las proposiciones, *i.e.*, expresan propiedades de relaciones internas. Otros conceptos que Bolzano puede ahora introducir en su teoría son los de analiticidad y el del carácter sintético de una SAS. Una proposición es *analítica* si entre las VAS que la conforman hay al menos una con respecto a la cual sea universalmente válida o universalmente inválida. En caso contrario, la proposición es *sintética*.[101]

Como ocurría con las VAS, la relación más importante que puede presentarse entre las proposiciones (o entre conjuntos de ellas) es la de *compatibilidad*. Bolzano define esta noción cardinal de su lógica haciendo también uso de su método de variación:

Sean *A,B,C,D,...SAS* e *i,j,...VAS comunes* a todas ellas y diferentes entre sí. *A,B,C,D,...* son *compatibles* (o *consistentes*) si existen *i'j',...* que hagan a *A',B',C', D',...* verdaderas. En caso de no existir *i',j',..* con esas características, *A,B,C,D,...* son *incompatibles* [§154].

Como en el caso de la validez universal, la consistencia o inconsistencia de un conjunto de proposiciones no es absoluta, sino que depende de las VAS consideradas. Un mismo conjunto de proposiciones puede, por lo tanto, ser consistente con respecto a ciertas VAS e inconsistente con respecto a otras.[102] Esta relatividad será, en general, al igual que la de la objetividad de las VAS-sujeto en las proposiciones en cuestión, un rasgo característico de la mayor parte de las relaciones lógicas entre proposiciones en Bolzano e introducirá un elemento de substancial complejidad en su sistema.

La forma particular más importante de la compatibilidad entre proposiciones es la relación de *consecuencia*. Bolzano distingue dos formas de ella. La primera, la *derivabilidad* [Ableitbarkeit] o *consecuencia simple*, se presenta con todo detalle en §155 y

---

98 La noción puede generalizarse naturalmente a una sucesión finita α de *representaciones en S*, aunque, en tal caso, debe establecerse la restricción de que no haya elementos de α que sean equivalentes.

99 En este caso, el resultado se basa en la concepción bolzaniana de la magnitud de los conjuntos infinitos, particularmente en su omnipresente suposición de que el todo es siempre mayor que la parte

100 (1), por ejemplo, sería universalmente válida con respecto a *Cayo*, mientras que *Cayo, el ser humano, es inmortal* sería universalmente inválido con respecto a esa misma representación.

101 *Un hombre que es moralmente malo no merece respeto* es analítica con respecto a *hombre*; es sintética con respecto a *respeto*. La noción bolzaniana de analiticidad difiere claramente de la ofrecida por Kant. Aparte de los aspectos psicologistas e insuficiencias lógicas de la definición kantiana, la noción bolzaniano es mucho mas amplia al incluir bajo este rubro, por ejemplo, todas las proposiciones inválidas.

102 Por ejemplo, *3+2=5+1* y *2+5=8* son compatibles con respecto a *2*, pero no lo son con respecto a *5*.

es casi una versión no lingüística de la noción de consecuencia semántica que Tarski introduce en 1936; la segunda, la *consecuencia fundamental* [Abfolge], es una versión absolutista del método axiomático y arroja luz sobre la concepción bolzaniana de la racionalidad y su idea de ciencia.

Sean α y β dos conjuntos de proposiciones e *i,j,...* representaciones y considérese que α y β son *i,j,..*-compatibles. β *es derivable* [ableitbar] *de* α (con respecto a *i,j,...*), *si* todo agregado de representaciones *i*,j*,...* que reemplace a *i,j,...* en las proposiciones de α y β tiene la propiedad de que las proposiciones resultantes de esa substitución en β son verdaderas siempre que las proposiciones resultantes de la misma en α también lo sean.[103] α sería el conjunto de los *antecedentes* o *premisas*, al tiempo que β el de las *consecuencias* o *conclusiones*. Es importante subrayar, en la definición anterior, la condición de compatibilidad de las premisas y conclusiones. Por otra parte y esto representa una inconsistencia de peso en Bolzano, las VAS *i,j,...*no tienen que aparecer en todos los elementos del conjunto de los antecedentes. Bolzano demuestra, sin embargo, que para la derivabilidad sólo cuentan aquellas SAS en las que sí aparece por lo menos una de las representaciones en cuestión.[104]

En general, las relaciones entre consistencia y derivabilidad que de lo anterior se siguen son casi las que cabría esperar.[105] Hay, sin embargo, una divergencia fundamental. Como ocurría con la de objetividad en el caso de las VAS, la exigencia de compatibilidad de los antecedentes restringe severamente el sistema. Entre las consecuencias más significativas de ello se destaca, en primer lugar, el rechazo de las demostraciones indirectas o por *reducción al absurdo*[106], lo que, a su vez, dadas las pretensiones de idoneidad - por lo menos en lo relativo a las matemáticas de *su* tiempo- de la lógica bolzaniana, plantea el problema de explicar aquellos casos de argumentación en las matemáticas en los que se recurre a este procedimiento, lo mismo que aquellos en los que, en algún momento, resulta ser que premisas tomadas como consistentes eran, en realidad, incompatibles.

Bolzano mismo admite «la claridad cristalina» de las demostraciones de este tipo. Pero sostiene al mismo tiempo que esta transparencia es sólo heurística y expositiva, sin permitir realmente una justificación; es decir, cae en el ámbito de la *teoría de la ciencia en*

---

[103] Bolzano utiliza también como sinónimos para esta relación: *ser consecuencia de* [folgt aus] y *se deduce de* [kann aus.. erschlossen werden]. En lo que sigue, «consecuencia» se referirá casi siempre a la relación general de consecuencia en Bolzano, esto es, tanto a *Ableitung* como a *Abfolge*, reservándose «consecuencia simple» y *«derivabilidad» para la primera* y «consecuencia fundamental» para la segunda de éstas relaciones

[104] Esto es, si *M,N,O,* .. es derivable de *A,B,C,* .. y en *A* no aparece ninguna de las VAS *i,j,...*, entonces *M,N,O,* . es derivable de *B,C,..* [§155, 4)]

[105] Bolzano demuestra, entre otros muchos teoremas, la reflexividad, la transitividad (con las restricciones pertinentes en lo que concierne a las representaciones), que si α es *i,j,* -consistente y $\alpha \cup \{B\}$ *i,j,* -inconsistente, entonces α tiene como consecuencia la contradictoria de *B*, que si *A* es *i,j,..* -universalmente inválido y α *i,j,* .-compatible, entonces α tiene como *i,j,..*-consecuencia simple a la contraria de *A*, etc., etc.

[106] [§155, 7)]. De hecho, este fenómeno representa el *pendant* proposicional de la imposibilidad de las pruebas por vacuidad en la teoria de las representaciones y pone en tela de juicio el argumento que sustenta el resultado central de la teoría fundamental acerca de que hay verdades.

sentido estricto[107], en el de la presentación escolar de resultados, pero carece, en última instancia, de cualquier valor de fundamentación.[108]

Ahora bien, Bolzano sostiene que las demostraciones indirectas son enteramente dispensables en la lógica, en cuanto a que pueden ser reemplazadas siempre por una prueba directa. La ausencia de una especificación exacta del lenguaje básico de su sistema hace aquí, de nueva cuenta, imposible una consideración a fondo del problema.[109]

Otro efecto importante de la exigencia de compatibilidad de las premisas, en la definición de consecuencia simple, es la posibilidad de concluir correctamente existencia a partir de cualquier proposición universal no contradictoria. Es decir, de pasar de *Todos los A son b* a *Algún A es b*, siempre, por supuesto, que la primera proposición no sea analíticamente falsa. Como este ejemplo lo evidencia, a pesar de todas sus innovaciones Bolzano permanece aún ligado, en varios sentidos, a la lógica tradicional.

Además de todos estos desarrollos, Bolzano estudia, también, entre otros, de manera pormenorizada, tres casos particulares de la relación de consecuencia simple que conviene mencionar aquí en aras de un panorama más completo de los problemas que Bolzano aborda en la *teoría elemental*. El primero es el relativo a la *proporcionalidad* [genaue Bemessung] o a la *redundancia* [überfüllt sein] de un conjunto de premisas con respecto a un conjunto dado de conclusiones, según exista o no una subclase propia a partir de la cual pueda deducirse ese mismo conjunto de conclusiones [§155, 26)], esto es, según el conjunto sea o no independiente. El segundo es el de la relación de *equivalencia* entre dos conjuntos de proposiciones, cuya existencia demuestra, de paso, que consecuencia simple no es una relación asimétrica.[110] El tercero sería el del *encadenamiento* [Verkettung] o *independencia* [Unabhängigkeit] entre conjuntos de SAS, que se da [§158, d)] cuando los conjuntos son (*i,j,...*)-compatibles, pero ninguno de ellos es consecuencia simple del otro.[111] Con ello se completa un desarrollo estrictamente analógico entre las dos principales teorías lógicas de Bolzano, la teoría de conceptos y la teoría de la deducción. La correspondencia entre ellas sería la siguiente:

Teoría conceptual	*teoría de la deducción*
VAS	SAS
objetividad	verdad
vacuidad	falsedad analítica
compatibilidad	compatibilidad
contención	consecuencia simple
equivalencia	equivalencia
independencia	independencia

107 Cfr. más arriba, al inicio del apartado VII.

108 «No hay razón alguna -dice Bolzano [§530]- para evitar una demostración apagógica o indirecta en la exposición de un tratado escolar, siempre y cuando el único objetivo que con ello se persiga sea la persuasión... [*Sin embargo,*] *la proposición por medio de la cual una prueba de esta índole pretende justificar la proposición por demostrar no puede en ningún caso ser el fundamento objetivo de ésta*» (Véase el apartado XI para una explicación detallada de este «fundamento objetivo» en Bolzano).

109 Éste será, por lo demás, el caso de diferentes dificultades y resultados intuidos o, en ocasiones, inclusive precisamente planteados por Bolzano De entre estos últimos se destaca, por ejemplo, la idea de una demostración normal, en el sentido de Gentzen, que se expresa con toda claridad en [§155, 34)]

110 α y β son *i,j,* *-equivalentes* si α es (*i,j,* ..)-derivable de β y viceversa.

111 La noción equivalente a esta noción entre VAS se llama también de la misma manera. Entre dos VAS compatibles se da un encadenamiento, si ninguna de ellas está contenida en la otra [§98, 1]

La teoría bolzaniana de la consecuencia simple anticipa, con las modificaciones pertinentes, las nociones de consecuencia semántica de Tarski y Gentzen. Aparte de los aspectos problemáticos que resultan de una crítica general de su lógica (véase un poco más abajo), en una de las raras[112] exposiciones anteriores a los años 90 de este siglo de las ideas de Bolzano en el contexto de la historia de la lógica, Kneale & Kneale [1962, 368ss.] han criticado el concepto bolzaniano de *derivabilidad como nugatorio*. El argumento es el siguiente. «Hay algo esencialmente erróneo en el uso de la palabra *derivabilidad* para la relación definida por Bolzano. Una proposición no puede derivarse de un conjunto de premisas, a menos que sea posible establecer que si las premisas son verdaderas, la conclusión lo es también, sin tener primero que establecer si tanto las premisas como la conclusión son verdaderas o no... [En Bolzano ocurre precisamente esto, como] puede verse con facilidad si se considera el caso límite en el que la proposición consecuente no tenga constituyentes en común con ninguna de las premisas. En tal caso,... la relación de que una SAS sea una consecuencia de las premisas depende exclusivamente del hecho de que sea verdadera...». En otras palabras, si α es un conjunto $i,j,\ldots$-compatible de proposiciones y A es una SAS verdadera en la que no aparezcan $i,j,\ldots$, entonces A es $i,j,\ldots$-derivable de α. La crítica es parcialmente justa. La crítica se apoya en [§154, 20)], donde Bolzano afirma que una proposición falsa (verdadera) en la que no aparezcan los componentes $i,j,\ldots$ es incompatible (compatible) módulo esas VAS con un conjunto $i,j,\ldots$-compatible de proposiciones.[113] Pero tanto la afirmación como los teoremas afines se basan en una extensión *no justificada* de la noción de compatibilidad. Ésta requiere, en efecto, para poder darse, según se sigue de la definición (véase más arriba), que las representaciones en cuestión sean *comunes* a las proposiciones del conjunto considerado, esto es, de acuerdo con la explicación que Bolzano da de esto, que por lo menos alguna de ellas aparezca en cada elemento de tal conjunto. Ahora bien, si β es $i,j,\ldots$-consecuencia de α, entonces la unión de β y α sería $i,j,\ldots$-compatible, por lo que la relación de derivabilidad excluye aquellos casos en los que las representaciones variables consideradas no aparezcan en β. De cualquier manera, esto no sólo resta generalidad a la noción de consecuencia, en el sentido de que no siempre, dados un conjunto de SAS y una proposición arbitraria, puede establecerse si la relación se da o no entre ellos. Bolzano parece pasar completamente por alto tanto todas estas indeseables consecuencias de su extensión como la restricción impuesta por él mismo.

XI

Como se dijo antes, la teoría bolzaniana de la deducción no se agota en la teoría de la derivabilidad o consecuencia simple. Hay también en Bolzano otra relación entre proposiciones, en cierto sentido todavía más básica que aquélla, a la que se da el nombre de *consecuencia fundamental o consecuencia estricta* [Abfolge].[114] En ella pueden distinguirse

---

112 Aunque muy incompleta y, en sentidos esenciales, como el de la distinción bolzaniana entre *existencia* y *objetividad*, totalmente inexacta

113 Vease también el teorema citado en la nota 105 más arriba.

114 J. Berg [1962] traduce este término como *entailment*, esto es, como implicación, mientras que J. Sebestyk [1992] lo hace como *consecuencia*, utilizando *derivabilité* para la relación que hemos llamado consecuencia simple Por su parte, R. George [Bolzano 1837b] vierte *Ableitbarkeit* como «deducibilidad», reservando

un conjunto de proposiciones, las razones o *el fundamento* [Grund] de cierta proposición, y la proposición misma, la *consecuencia* [Folge] de tales proposiciones.

No hay, en realidad, en Bolzano, ninguna definición propiamente dicha de esta importante noción, sino que ésta se introduce en su teoría por medio de una serie de ejemplos y el análisis de algunas propiedades esenciales que pretenden, aunque sea parcialmente, hacerla comprensible. No se trata, sin embargo, de un error de omisión, sino de una dificultad planteada por la naturaleza misma del concepto de la que Bolzano es plenamente consciente. Bolzano cree, en efecto, haber descubierto el valor lógico de una relación de este tipo, basado en la función explicativa de la ciencia, pero es incapaz de ofrecer una descripción adecuada de la misma, limitándose al señalamiento de lo que, en su opinión, serían algunas de sus características esenciales.

Fundamentar una proposición consiste, en lo esencial, en apelar a un conjunto de proposiciones más simples, más básicas o generales que ella, a partir de las cuales pueda establecerse, es decir, explicarse lo afirmado en ella. Esta idea general, cuya expresión más clara se encuentra en la axiomatización de una teoría, y en el curso explicativo seguido, según quedo dicho, por la física newtoniana, parecería estar en el fondo de la reflexión bolzaniana que desemboca en la postulación de la existencia de la relación de consecuencia fundamental (=CF). He aquí algunos de los ejemplos que de ella se presentan en la WL [§§ 162, 198]:

(1)
a) La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
b) Todo rectángulo puede ser dividido en dos triángulos.
c) La suma de los ángulos de un rectángulo es igual a cuatro ángulos rectos.

(2)
a) La temperatura es más cálida en verano que en invierno.
b) El termómetro sube más en verano que en invierno.

(3)
a) No debe nunca preferirse el bien propio al mayor provecho ajeno.
b) Se prefiere el bien propio al mayor provecho ajeno cuando se destruye lo que a otros les resulta necesario para la subsistencia, sólo por obtener un placer sensual.
c) No debe destruirse nunca lo que a otros les resulta necesario para su subsistencia, sólo por obtener un placer sensual.

Mientras que en los ejemplos (1) y (3), c) es consecuencia fundamental de a) y b), en (2), b) lo es de a). Bolzano piensa que, en cada caso, el fundamento es *más básico* que la consecuencia.[115]

---

ground-consequence, esto es, «consecuencia fundamental» para *Abfolge* Este mismo curso es seguido por B. Terrel en su traduccion de [Bolzano 1837a].

[115] Otro ejemplo interesante, aunque negativo, es el siguiente [§221]: (i) Lo que es *a* es *b*; (ii) Lo que es *b* es *c*, (iii) Lo que es *a* es *c*. Bolzano considera que entre el conjunto de las dos primeras proposiciones y la tercera *no* se da necesariamente la relación de CF. Ésta no se presenta, por ejemplo, cuando la VAS *b* es más compleja que *a* o *c*.

Puede ocurrir ahora -es, en general, el caso más frecuente- que cada una de las proposiciones que integran el fundamento sea, a su vez, CF de otro conjunto de razones. Esto conduce a Bolzano a una especie de árbol de fundamentación para cada SAS.[116]

Como los ejemplos (1) y (3) hacen evidente, la relación no debe identificarse con la *causalidad*, pues ésta sólo se presenta en la esfera de lo espacio-temporal, de la que no forman parte ni los triángulos ni los números, ni los imperativos morales. No obstante, Bolzano parece considerar a la CF como una especie de versión generalizada de la causalidad que abarcaría no sólo casos empíricos -como el del ejemplo (2)-, sino también todos aquellos casos conceptuales o relativos al ámbito de la objetividad no existencial, e incluso morales, como lo muestra el ejemplo (3).[117]

Algunas de las propiedades y características más notables de esta relación podrían, tal vez, permitir formarse una idea menos imprecisa de las intenciones de Bolzano.

(i) Se trataría, en primer lugar, de una relación entre proposiciones *verdaderas* [§203]. «Verdad» se toma aquí, sin embargo, en un sentido absoluto, es decir, no como posibilidad, como en el caso de la consecuencia simple. Por otra parte, (ii) CF es una relación objetiva, esto es, no epistemológica [§198]. Bolzano la concibe, además, como una relación (iii) antirreflexiva, *i.e* , ninguna proposición puede fundamentarse a sí misma [§204], (iv) asimétrica [§209], es decir, si A es el fundamento de B, ésta no puede, a su vez, fundamentar a aquélla, y tal que (v) el fundamento de una verdad es *único* [§206]. De ello se sigue que (vi) CF no es una relación transitiva [cfr. §213]. Esto parecería contradecir la afirmación hecha antes acerca de que Bolzano considera la causalidad como una generalización de la causalidad. Bolzano desecha la objeción argumentando que la transitividad atribuida a la causalidad sería, en realidad, parte de una simple «costumbre lingüística», por lo que no es necesariamente correcta desde un punto de vista estrictamente lógico. Una característica distintiva de la relación sería también [Cfr. nota 117 más arriba] la de que (vii) el fundamento no puede nunca ser conceptualmente más complejo que la proposición fundamentada.

CF y derivabilidad son las relaciones en las que se basa la teoría general de la consecuencia en Bolzano. ¿Cuál sería, ahora, la relación entre ellas? De lo anterior se sigue, en primer término, que (viii) CF no es un caso particular de la consecuencia fundamental. En efecto, a diferencia de la consecuencia simple, CF es una relación no entre proposiciones en general, sino exclusivamente entre proposiciones verdaderas, en la que, además, *no intervienen* en forma alguna las representaciones variables. Aparte de esto, derivabilidad es reflexiva, no asimétrica, transitiva, etc. Por otra parte, una conexión positiva aparentemente natural entre ellas como

Si A y B son proposiciones (i,j,...)-equivalentes, A es un elemento del fundamento de B o viceversa

resulta indemostrable, dada la ausencia de una definición precisa de CF.

[116] Bolzano presenta, en §220, una representación plástica de una jerarquía de esta especie que debe considerarse como una clara anticipación de la noción de árbol semántico de Gentzen y Beth.

[117] *[Cfr §201, 1)-3)]* «Debemos alejarnos de la idea de explicar la relación de CF como causalidad... Más bien ocurre, a la inversa, que los conceptos de *causa y efecto* se originan en aquélla...»[§201, 4)]. Bolzano interpreta, de hecho, las proposiciones causales del tipo *X es causa de Y* como *La verdad de que X es se relaciona con la verdad de que Y es* a la manera en la que lo hace un fundamento con su consecuencia» [§168] Es decir, *causalidad*, en cuanto que ésta se expresa en proposiciones, sería un caso particular de la CF [cfr. también §203]

Parecería, sin embargo, que CF implica, en todo caso, derivabilidad. Aunque inclinado a una afirmación de este tipo, Bolzano presume, sin tener, por supuesto, una demostración al respecto, que esto no es así, es decir, que (ix) si una proposición es fundamento de otra, no necesariamente ésta puede derivarse de aquélla.[118]

Como dijimos antes, el paso de una proposición a su fundamento parecería, en general, poder continuarse, desembocándose en un árbol de fundamentación, esto es, en una ramificación ascendente a partir de la proposición inicial. Un problema que aquí se plantea es, evidentemente, el de determinar si toda ramificación de ese tipo conduce a proposiciones últimas, esto es, si toda verdad puede considerarse como consecuencia de otra o de un agregado de otras.[119]

Bolzano expresa a este respecto la hipótesis de «que hay y debe haber verdades que no tienen otro fundamento que su propia verdad» [§214. Cfr. también §221]. Un candidato natural para este tipo de *verdades fundamentales* [Grundwahrheiten] sería la proposición *Hay algo.*[120] Bolzano cree, sin embargo, que no toda cadena de fundamentación desemboca en verdades últimas. La causalidad ofrecería un ejemplo de una ramificación que se extiende ascendentemente al infinito, esto es, al menos una de cuyas ramas de fundamentación no posee un último elemento.[121]

La teoría de la CF es, quizás, la parte menos clara de la lógica de bolzaniana. Bolzano mismo es, como se dijo, plenamente consciente de esta situación y su exposición debe considerarse, por lo tanto, como hipotética en lo relativo a las propiedades establecidas, pero no en lo que toca a la existencia misma de la relación, de la que está del todo convencido. El rasgo más sobresaliente de ésta es su rigidez, es decir, su carácter absoluto y la naturaleza última e incondicionada de las verdades fundamentales. Pero la dificultad más importante para un tratamiento riguroso de ella parecería estar indisolublemente ligada con la índole estrictamente *material* de la misma, esto es, con el hecho de que su análisis requiera siempre de una referencia a *contenidos*, en oposición, digamos, a la condición *semiformal* de la relación de consecuencia simple.

Si bien la naturaleza de la relación es, en última instancia, bastante obscura, la admisión de la misma tiene una importancia esencial en el contexto del planteamiento general de Bolzano. La derivabilidad posee un carácter relativo, esto es, no asimétrico ni

---

118 El argumento que haría plausible esta sospecha es el *siguiente. Considérese una proposición* práctica de la forma (a) Debe hacerse (o quererse) *A*. Ésta sería la forma de cualquier mandato. La proposición tiene, sin embargo, como fundamento (completo) (b) *A* es posible (a) no es, sin embargo, derivable de (b), no importa cuál VAS se tome como variable, en virtud de que *deber* no aparece en ella [cfr. §200]. Como este ejemplo lo ilustra de manera fehaciente, Bolzano, aunque impedido por la ausencia de un fundamento lingüístico sintácticamente apropiado en su sistema, tiene ya una idea bastante diáfana de la importancia de las «demostraciones de imposibilidad», tan características de la lógica contemporánea.

119 La respuesta a la pregunta conversa sería afirmativa: Si *A* es una proposición verdadera, *A* es el fundamento de *A es verdadera* [§214]. Un ejemplo quizás más claro que este ofrecido por Bolzano sería el de que *A* es fundamento de *A o B es verdadera*.

120 Esto es, en términos bolzanianos: *La representación* algo *es objetiva*.

121 «Todo estado real tiene una causa, que, por lo menos parcialmente, se encuentra en el estado previo. Por esta razón, puede obtenerse aquí una serie de causas que se extiende al infinito. Pero si hay una serie infinita de causas, debe haber también una serie infinita de fundamentos, puesto que lo real *M* puede ser llamado una causa de lo real *N* sólo cuando la verdad de que *M* es constituye un fundamento, por lo menos parcial, de la verdad de que *N* sea» [§216]

fundamenta-lista, que coincide con lo que hoy es práctica común y que no permite la postulación de verdades últimas.[122] No es exagerado afirmar que a los ojos de Bolzano esto aparecía como un posible reforzamiento del escepticismo, el combate al cual, constituye, como se dijo, una de las grandes prioridades no sólo de su lógica, sino de su filosofía en general.

Por otra parte, la relación de CF parecería ser también una expresión en el ámbito de la demostración del atomismo lógico que Bolzano sustenta en relación a las proposiciones y las representaciones. Tal atomismo requeriría, en efecto, de verdades no demostrables que la relación de derivabilidad no puede proporcionar. Pero ello pone también de manifiesto un rasgo característico del pensamiento de Bolzano que lo vincula directamente con las preocupaciones de la filosofía moderna, la búsqueda tácita de certeza, de lo incondicionado, de algo que, aunque sea como ideal, permita dar un rumbo y una garantía *a priori* a la ciencia como actividad humana. Puede decirse, entonces, que, por lo menos en parte, los motivos que impulsan a Bolzano a defender una postura de este tipo son de naturaleza religiosa y metafísica. Esto nos lleva a una cuarta hipótesis explicativa en cuanto al origen de esta teoría bolzaniana.

La distinción entre consecuencia simple y consecuencia fundamental está ligada estrechamente con otra distinción esencial en Bolzano. Como se dijo antes, al analizar el teorema del valor intermedio, Bolzano distingue entre constatación y fundamentación. Lo primero sólo permite saber que algo es verdadero; lo segundo explica por qué lo es. Esto le permite, en la WL [§525], distinguir dos tipos de exposición de una teoría científica en general[123], de acuerdo con el modo argumentativo dominante en ella. Habría, en primer lugar, ciencias en las que lo más importante resulta la constatación de verdades. Éste es el caso de las teorías empíricas. Es en ellas en donde la derivabilidad juega, al lado del aspecto experimental de las mismas, un papel de importancia. Habría también, sin embargo, otras en las que la fundamentación constituye el factor determinante. Esto ocurriría, en particular, aunque no exclusivamente, en el terreno de las ciencias conceptuales puras, como las matemáticas. En éstas, piensa Bolzano [*Ibid.*], «casi todas las SAS a establecer deben ser demostradas a partir de su fundamento objetivo». El ideal de ese tipo de disciplinas debe ser el de una exposición fundamental estricta de sus teorías. Pero ésta sería, también, la forma que una explicación propiamente filosófica de la ciencia tendría que asumir. Así, la relación de consecuencia fundamental resulta una expresión no sólo de la afinidad metódica esencial entre filosofía y matemáticas, sino, igualmente, de la concepción bolzaniana de la racionalidad y de su ideal de ciencia rigurosa.

Es necesario señalar aquí, por último, en lo relativo a la noción de CF, una serie de implicaciones que la misma tiene para el tema general que nos preocupa. Es frecuente considerar a Bolzano como un precursor del logicismo. En un sentido, esto resulta obvio. Bolzano contribuye al desarrollo de la lógica vía su oposición a la idea de ésta como una disciplina concluida y al psicologismo, vía sus aportaciones al método axiomático y a la aritmetización del análisis, su labor pionera de énfasis en el rigor y en la búsqueda de un fundamento unitario para las matemáticas y el estudio extensional de nociones

[122] En todo caso, una fundamentación plantearía hoy el problema de *dónde* ha de llevarse ésta a cabo, por lo que seguiría siendo relativa

[123] En la *Rein analytischer..* , Bolzano establece esta división únicamente para las matemáticas; la WL la generaliza a toda teoría científica

absolutamente cardinales para la lógica como compatibilidad, consecuencia simple, etc. y, en fin, porque gracias a sus certeras críticas al apriorismo kantiano se sientan las bases para una renovada relación entre la lógica y las matemáticas.

No lo es, sin embargo, en el sentido de una reducción de esta última a la primera. Por una parte, en efecto, la lógica, como teoría del método de la ciencia en general, es claramente presupuesta por las matemáticas, por lo menos como *uno* de sus fundamentos, pero, justamente por esta razón, distinta a ellas.[124]

XII

Intentemos ahora una evaluación general final de la teoría lógica de Bolzano que acabamos de describir Tal vez el problema más grande que afronta el sistema lógico de Bolzano sea su vinculación indisoluble con el lenguaje natural (=LN) y la ausencia, en el fondo, de una evaluación crítica y sistemática de éste, desde el punto de vista de los problemas mismos que se van planteando. No hay en Bolzano, en verdad, a pesar de los análisis esporádicos que se hacen al respecto, un examen crítico del lenguaje natural en lo que toca a su idoneidad como instrumento para el estudio de la lógica, ni tampoco una delimitación *suficientemente* precisa de alguna parte del mismo que sirviera de base expresiva para la exposición de sus ideas en este campo. Bolzano se sirve de un lenguaje semiformalizado que no es otro que el alemán común y corriente y un conjunto de términos técnicos como elementos lingüísticos primitivos de su teoría. Aunque hay en él [cfr. §§ 127-146 y 169-164] un intento de investigar las relaciones entre el uso normal del LN y ese lenguaje filosófico, así como de establecer modelos de *reducción* de expresiones del primero a expresiones más precisas del segundo, el criterio observado para esto es siempre una sinonimia basada en la intuición, por lo que el LN se mantiene siempre como la instancia decisiva. *El resultado más interesante* de todo ello es, sin duda alguna, la distinción de *niveles* de las proposiciones y las representaciones ou Bolzano hace en §137, una evidente, aunque, por desgracia no desarrollada versión de la teoría de los tipos.[125]

Bolzano da por supuesto que el LN es el lenguaje adecuado para la lógica, suponiendo también la existencia de una correlación exacta entre ciertas estructuras gramaticales del LN y una serie de fenómenos lógico-semánticos básicos. El primer resultado de esta postura es la postulación de una forma única, prácticamente idéntica a la forma gramatical de la lógica aristotélica para todas las proposiciones. Un problema que surge naturalmente a partir de lo anterior es el de cómo enfrenta Bolzano las dificultades

[124] Como teoría del método matemático, la lógica «no puede en absoluto formar parte de las matemáticas» [1810, I]. Como esta afirmación lo pone de relieve, en Bolzano se presenta ya, de manera implícita, la idea de la ciencia como *teoría*, en cuanto conjunto de proposiciones, lo mismo que la de una diferencia entre niveles de consideración.

[125] Cfr. también §90. Las SAS que se *refieren*, esto es, que tienen como *objeto*, una representación tienen como representación-sujeto una *representación simbólica*, es decir, «una representación *de* una representación». Esto le permite a Bolzano explicar la cuantificación existencial como una propiedad de las representaciones de segundo orden Es decir, la postura de Bolzano acerca de la existencia es opuesta a la de Kant, para quien la existencia no es un predicado [cfr. §142, nota 1]. O, en su propia terminología: Decir que *hay una A* significa: *la representación A tiene objetividad* [cfr. nota 74] El paralelo con Frege es aquí manifiesto.

que plantean las llamadas paradojas semánticas, como la del mentiroso. A pesar de la perspicacia de algunas de sus observaciones y de su estima y conocimiento de Leibniz, las soluciones que Bolzano propone a este respecto se mantienen siempre en el plano de lo circunstancial y no lo llevan nunca a considerar la posibilidad de definir un lenguaje formal de referencia.

(En el caso de la paradoja de Epimenides -examinada por Bolzano en su versión: (P) *Lo que estoy diciendo es falso-*, por ejemplo, Bolzano distingue entre una SAS *en cuanto tal* y una representación de la misma. Sólo ésta puede aparecer como *representación-sujeto* de una proposición, de otro modo se estaría confundiendo entre el todo y la parte, un principio al que, como hemos visto, Bolzano se adhiere de manera irrestricta. La distinción prefigura claramente la que hoy nos resulta familiar entre uso y mención. Para Bolzano, P es falsa Su análisis de ésta es en los siguientes términos. P puede parafrasearse como: «Declaro que lo que estoy afirmando en este momento es falso». Como, en realidad, *no* estoy afirmando nada, puesto que no tengo ante mí una SAS y sólo ésta podría ser falsa, es igualmente falso que afirme algo falso.)[126]

Todas estas suposiciones, producto de su apego al LN, tendrán graves consecuencias para su sistema de lógica, impidiéndole, según hemos visto, a pesar de contar con una idea esencialmente correcta al respecto, la definición apropiada de varias de las nociones más im-portantes de ésta, como las de compatibilidad, consecuencia simple, analiticidad, etc. y serán también la causa de su incapacidad para ofrecer una descripción adecuada de nociones básicas como las VAS y las SAS y de la estructura y articulación de las mismas. Esta misma dificultad se pone de manifiesto, como acabamos de ver, de manera contundente en el caso de la relación demostrativa más importante de su sistema, la *consecuencia fundamental*.

Bolzano oscila entre una consideración intensional y una extensional de sus nociones más elementales, pero el criterio de identidad establecido, por ejemplo, en relación a las VAS y las SAS, *falla enteramente*, pues se encuentra basado en una forma primitiva que se afirma sin justificarse en ninguna parte. Aquí tenemos, de nueva cuenta, un problema de origen lin-güístico debido a la ausencia de una especificación clara de los primitivos de la teoría. El atomismo definido por Bolzano adolece, por lo tanto, de esta misma vaguedad. Pero también otros conceptos centrales de su lógica se ven afectados por ella. El análisis de la relación de derivabilidad, por ejemplo, se apoya esencialmente en el concepto de *forma*, concebido de manera conjuntista. La admisión, como posiblesVAS-variables, de cualquier constituyente de una proposición, incluyendo a las constantes lógicas y los verbos, convierte, sin embargo, al por sí mismo valioso descubrimiento del método de variación en un recurso que amplifica a tal grado la noción de forma que ésta termina siendo prácticamente inútil en términos de diferenciación.[127]

126 De hecho, una reflexión similar a la que le sirve a Bolzano para disolver la paradoja del mentiroso se encuentra en la base de su demostración del infinito [cfr. Sección VI, IV]. Sea A1 una proposición cualquiera, A2 = A1 *es verdadera*. Definiendo luego A3 = A2 *es verdadera* y continuando indefinidamente este proceso se llegaría un conjunto infinito. Como es obvio, la construccion es más bien *gramatical*. El argumento es débil y supone que la diversidad de representaciones-sujeto implica la diversidad de las representaciones

127 En una proposición de la forma canónica (i) *a tiene B*, puede variarse, por ejemplo, la VAS *B* En la forma así obtenida, se encontrarían tanto (i) misma como la contradictoria de ésta, *i.e.*, (ii) *a tiene no-B*, es decir, *a no tiene B*.

Otra consecuencia de este curso zigzagueante de Bolzano entre intensión y extensión es la ausencia de una demarcación precisa entre forma y contenido. La relación de derivabilidad ofrece, nuevamente, un buen ejemplo de ello. Si bien se trata de una de las nociones más formalmente estudiadas por Bolzano, la imprecisión en cuanto a las posibles VAS-variables arroja una sombra de duda sobre todo el tratamiento. Es decir, puede ocurrir que la relación se dé entre dos proposiciones y que, no obstante, tenga que apelarse a algo más que la forma lógica de las mismas.[128] En algunas secciones de la WL Bolzano parece percatarse de todas estas dificultades, acercándose a una concepción estrictamente formal de los mismos, pero sin dar el paso decisivo a un lenguaje puramente formal y lógico.[129]

XIII

Como en el caso de la teoría de conjuntos, Bolzano es también, en la lógica, a pesar de sus grandes descubrimientos, una figura de transición. Bolzano anticipa, en ocasiones en detalle, muchos de los más importantes desarrollos de la lógica del siglo XX, sin, no obstante, despojarse de cierto bagaje tradicional sumamente restrictivo. Éste es el caso, por ejemplo, de su insistencia en la objetividad de las VAS-sujeto en las relaciones de consecuencia -una suposición que, de hecho, juega en su lógica un papel similar al que en su *Grössenlehre* tiene el principio de que el todo es siempre mayor que la parte- y en la existencia de una jerarquía absoluta e irrevocable entre verdades, cuyo origen es probablemente aristotélico.

Como fuere, todas estas dificultades no pueden ocultar la importancia de sus descubrimientos lógicos, matemáticos y filosóficos. Bolzano es el primero en intentar una reconstrucción de las matemáticas a partir de un conjunto relativamente reducido de conceptos elementales. En este sentido, es también el iniciador del movimiento rigorista en análisis. La *Rein analytischer Beweis* constituye también, por lo tanto, el primer resultado concreto del proceso que desemboca en la llamada aritmetización del análisis, por una parte, y, más generalmente, en la creación de una teoría matemática unificadora, la teoría de agregados o conjuntos. En este orden de cosas, la WL no es, en realidad, otra cosa que la teoría del método sobre la cual tendría que edificarse la totalidad de las matemáticas. Pero también, nuevamente generalizando, Bolzano inaugura la moderna filosofía de la ciencia y es el primero en darse, sistemáticamente y *desde* la ciencia misma, a la búsqueda de una unidad de la misma, el primero en recurrir para ello a procedimientos reduccionistas y también el primero en concebir la función de la filosofía en relación a la ciencia como una tarea esencialmente de fundamentación y análisis de teorías. En este sentido -aunque no sólo en este-[130] Bolzano es un claro precursor y, como ahora veremos, inclusive un

---

[128] Considérense, por ejemplo, las SAS (a) *Esto es un triángulo* y (b) *Esto es una figura cuyos ángulos internos suman 180°.* (b) es derivable de (a) módulo la VAS *esto.* Para constatarlo, sin embargo, se hace necesario recurrir a conocimientos no lógicos

[129] La lógica -dice Bolzano [por ejemplo en §223, 394]- no puede ocuparse de tales casos, a no ser de manera indirecta «En ella sólo podemos esperar la descripción de aquellos tipos de derivabilidad cuya corrección resulte de conceptos estrictamente lógicos, esto es, de aquellos en los que se habla exclusivamente de conceptos, SAS y otros objetos lógicos» En otras palabras: lo que a la lógica le importa son exclusivamente las *formas* en las que se da la relación de consecuencia simple.

[130] Bolzano sostiene antes que nadie, por ejemplo, la existencia de un criterio de demarcación científico: en rigor, sólo lo que puede ordenarse de acuerdo con la relación de consecuencia fundamental debe considerarse como ciencia

importante antecedente del positivismo lógico, con el que, no obstante, habría discrepado radicalmente en lo relativo al *status* ontológico de los objetos conceptuales.

Por otra parte, en la filosofía de Bolzano se encuentra el primer intento de explicar, desde un punto de vista puramente lógico, el ámbito de lo *a priori*, esto es, sin recurso alguno a la intuición,. Este problema constituye, como hemos visto, el núcleo mismo de la crítica bolzaniana a Kant. Pero ello hace de Bolzano, también, el primero en pisar el terreno hasta entonces virgen de la semántica y los significados. El suyo es, en realidad, 60 años antes que Frege, el primer intento lógico-semántico de explicar las verdades *a priori*, las verdades *analíticas*.[131]

Con excepción del teorema del valor intermedio, una parte de sus investigaciones sobre el infinito y su clara influencia en Husserl, las ideas de Bolzano *parecerían* no haber *tenido ninguna influencia* en la historia de la lógica, las matemáticas y la filosofía. Bolzano supera con mucho, como hemos intentado demostrar aquí, particularmente en lo relativo a la lógica, todo lo hecho en este campo hasta su época -y aun lo que se hará hasta mucho tiempo después de él. Que su influencia no haya sido directa o no se conozca no significa, sin embargo, que ésta no exista. Hay, quizás, por una parte, una especie de diversidad en la transmisión de conocimientos que va mucho más allá de lo público y que se asemeja a la influencia que pudieron haber ejercido los geniales y anónimos artesanos de la Edad Media sobre algunas personalidades artísticas más conocidas de la posteridad y, por la otra, lo que, tal vez, pueda llamarse un *elemento de «centralismo»* en la historia de la filosofía y de la ciencia que pasa por alto con frecuencia todo aquello que no se integra a las grandes corrientes del momento. El caso de Bolzano sería uno de este tipo.

A pesar del nulo reconocimiento que en su momento se hace de su obra en los centros filosóficos de la época, es decir, en Alemania, en Inglatera y en Francia, Bolzano ha gozado, prácticamente de manera ininterrumpida, de algún prestigio y ejercido una considerable influencia, en general no explícita, en el ámbito local del Imperio Austro-húngaro y puede ser, de hecho, considerado, con Brentano, como la figura más importante de la filosofía austríaca del siglo XIX. Brentano mismo, quien según expresa confesión, es influido fuertemente por Bolzano, es discípulo de R. Zimmermann, un discípulo directo de Bolzano. El origen mismo del interés de Husserl por la WL puede explicarse igualmente en términos de una influencia de este tipo. Husserl, como Bolzano, nace en Bohemia y estudia en Viena con Brentano, quien, según dijimos, llama su atención en lo relativo a la lógica bolzaniana

Brentano es también maestro en Viena de K. Twardowski y J. Lukaciewicz, quienes años más tarde fundarían con L. Chwistik y Lesniewski la escuela polaca de lógica y filosofía. Precisamente de ella surge A. Tarski. Las afinidades de las investigaciones tarskianas en semántica con ciertas nociones conceptuales de la WL no serían, de acuerdo con esto, meramente casuales, sino que se explicarían por el contacto de Tarski con las

[131] Sobre la prácticamente indudable, aunque no explícitamente reconocida, influencia de Bolzano en Frege, véase Cap. 3, , Sección IV, nota 14.

ideas de Bolzano, por lo menos de manera indirecta, a través de sus maestros de lógica y filosofía.[132]

Por otra parte, tanto Twardowski como Chwistek participan asiduamente en las sesiones del *Círculo de Viena*, en el que se reconoce expresamente a Bolzano como antecedente, en particular en lo que atañe a la lógica y las matemáticas. Pero también lo es, según hemos mostrado, en relación a diversos aspectos de su concepción general de la ciencia.

Otro de los elementos del pensamiento de Bolzano que ejerce una influencia importante es su realismo conceptual. Ya hemos mencionado antes[133] la existencia de una semejanza entre el platonismo gödeliano y esta concepción de Bolzano. Se trata, en realidad, de una influencia directa de éste en aquél. Gödel mismo ha explicado [Wang, 1987, xx y 82], por ejemplo, el primero de sus grandes teoremas[134] en el espíritu de este realismo lógico bolzaniano y puede conjeturarse que esto mismo constituye el germen de su posterior ontológica postura respecto a los objetos de las matemáticas[135].

Mencionemos, por último, dos influencias más de Bolzano en la historia de la filosofía contemporánea. Una de ellas se presenta en K. Popper.[136] La otra, según se sigue de lo dicho acerca de su investigación del *a priori* y, en general, de sus investigaciones en semántica filosófica y por sus conexiones con el Círculo de Viena, es la filosofía analítica.

Hay otra influencia de Bolzano en la historia de la lógica que resulta, sin embargo, en rigor, indemostrable, aunque no por ello menos clara. Bolzano influye en Frege, sin ser mencionado nunca por él. En el siguiente capítulo, al exponer el primer sistema de la *Begriffsschrift*, volveremos brevemente sobre este asunto.

Así, con frecuencia de manera anónima, a través de los escritos y enseñanza de sus discípulos mediatos e inmediatos, Bolzano contribuye decisivamente al avance de la lógica y de la filosofía. Sin duda esta conclusión habría sido del agrado del gran pensador, quien a todos sus dones intelectuales añadía, como Kant, su gran oponente filosófico, la virtud de la modestia y la honestidad extremas y una gran preocupación educativa. Pero mostraría, asimismo, como el caso mismo de éste lo ilustra de manera tan patente, que, en el campo de las ideas, sobre todo en el de la filosofía, no existen, en realidad, las metrópolis.

---

[132] Esta conexión parece haber sido señalada por primera ocasión por F. Kambartel [1967, X, n.14] y ha sido confirmada recientemente por amplio y valioso estudio de Stadler [1997] acerca de los orígenes y desarrollo del Circulo de Viena.

[133] Cfr. nota 75.

[134] El de completud de la lógica de predicados de primer orden.

[135] Al igual que Husserl, Brentano, Meinong y la absoluta mayoría de los miembros del Círculo de Viena, Godel nace y crece en el seno del Imperio Austro-húngaro y estudia en Viena, entre otros, con H. Hahn. Resulta de interés notar en este contexto que Hahn es uno de los primeros editores de Bolzano en este siglo y escribe una serie de comentarios a la primera edición alemana en este siglo de las PU

[136] Popper nace y estudia en Viena y mantiene alguna relación con el *Wiener Kreis*. Es muy probable que la *Lógica de la Investigación Científica* haya tomado como modelo algunas partes de la WL, a la que se hace frecuente referencia. Pero es en lo relativo a la existencia de una esfera objetiva que mantiene la continuidad del conocimiento científico y que, en última instancia garantiza su progreso, es decir, en la idea de un tercer mundo, que la influencia de Bolzano en él es evidente. Popper mismo ha aceptado implícitamente [1967, 58] esta influencia bolzaniana en su pensamiento.

Capítulo 3

LA LÓGICA DE LA PRIMERA *BEGRIFFSSCHRIFT* FREGEANA

I

También la lógica de Frege se inscribe en el contexto de los intentos de fundamentación del análisis que tienen lugar en las matemáticas en la segunda mitad del siglo pasado. Las contribuciones de Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Cantor y otros, a la tarea de dar una base firme y segura al cálculo, el álgebra y los sistemas numéricos, desembocan en la llamada *aritmetización del análisis*, es decir, en la consideración demostrativamente fundada de que la aritmética de los números naturales y todo lo que ella *presupone* bastan para la estructuración de las diversas teorías que conforman el análisis matemático. Si bien en un principio el planteamiento de Frege se centra en el aspecto argumentativo, es decir, propiamente lógico de tal fundamentación, esto es, por una parte, en el concepto de *demostración* y, por la otra, en el problema de determinar qué tanto de las matemáticas posee una naturaleza estrictamente lógica, los hallazgos que esta investigación le permite hacer lo conducen a un planteamiento mucho más general y ambicioso que pretende llevar a sus últimas consecuencias no sólo las nuevas exigencias de rigor y precisión en las matemáticas, sino también a intentar un paso ulterior y, en su opinión, definitivo en el proceso iniciado con la aritmetización: la estructuración precisa, a partir exclusivamente de nociones y principios *lógicos*, absolutamente básicos, diáfanos y generales, de la aritmética misma de los números naturales. Frege es el primer representante sistemático del *logicismo* en su forma más acabada; es decir, de la tesis de que la aritmética, el análisis y las matemáticas clásicas en general pueden obtener · a partir de nociones y métodos demostrativos de carácter exclusivamente lógico.

Puede afirmarse, por lo tanto, que el programa fregeano de fundamentación de las matemáticas consta, *grosso modo*, de dos grandes estadios sucesivos y complementarios. Por un lado, el análisis de los principios y métodos *demostrativos* lícitos en la aritmética y en las matemáticas en general y la búsqueda de una sistematización rigurosa de los mismos en una lógica matemática propiamente dicha; todo ello en aras de una reducción adicional del papel que en ellas hayan de jugar la intuición y la evidencia psicológica. Por el otro, el establecimiento probatorio, a partir de ello, de la tesis logicista. La tarea que Frege se plantea es, por lo tanto, eminentemente analítica en el primero de los casos y constructiva o, mejor dicho, reconstructiva, en el segundo y es obvio, además, que existe una especie de influencia recíproca entre ambos objetivos.[1]

[1] En efecto, de la respuesta que Frege dé a la primera de estas dificultades depende lo que haya que entender en él por lógica, al tiempo que los objetivos logicistas del proyecto condicionan la edificación misma del sistema. Es evidente, además, que la construcción de un sistema lógico debe ir aparejada a una determinación precisa del significado que, en este contexto, haya de darse a conceptos como «reducción» u «obtención de la aritmetica a partir de la lógica».

La lógica de Frege se presenta inicialmente en la *Begriffsschrift* de1879, el primero de sus grandes escritos, mientras que la exposición de las ideas y los lineamientos conceptuales y filosóficos más importantes, atinentes a la segunda de sus metas generales se encuentra en su breve y notable opúsculo *Die Grundlagen der Arithmetik* [1884, 1884a]. La ejecución formal, detallada y última de ambos objetivos tiene lugar, sin embargo, en los dos volúmenes de las *Grundgesetze der Arithmetik*, el primero de los cuales aparece en 1893, mientras que el segundo es concluido de manera dramática por su autor en 1903.

Ahora bien, la teoría lógica que se expone en la *Begriffsschrift* de 1879 difiere esencialmente de la que Frege presenta bajo el mismo rubro en la primera parte de los *Grundgesetze* [1893, I, §§1-46]. No hay, por lo tanto, un sistema de lógica único en Frege. Pero entre ambas teorías existe una línea de continuidad; no sólo un desarrollo y refinamiento o revisión crítica, sino una modificación substancial que resulta, básicamente, de los brillantes descubrimientos -principalmente de índole semántica- que su autor lleva a cabo en el ínterin. Tales hallazgos constituyen el punto de partida histórico de la llamada filosofía del lenguaje[2] y son, en consecuencia, independientes del contexto de su surgimiento. En Frege, no obstante, esta conexión es indisoluble; es decir, el planteamiento de los problemas que dan lugar a su teoría semántica sólo puede entenderse cabalmente a partir de la consideración del sistema original de 1879 y, en realidad, a partir del planteamiento de la pregunta original fregeana acerca de qué tanto de la aritmética depende exclusivamente de la lógica. El presente capítulo se propone la exposición detallada de lo que podemos llamar *la primera lógica de Frege*; esto es, del sistema de la *Conceptografía* de 1879, sin perder de vista el objetivo general del programa fregeano de fundamentación de la aritmética, ni dejar de indicar los desarrollos a que sus diversos aspectos dan lugar en este autor.[3]

II

Partiendo de una idea cuyo origen se atribuye común -aunque equivocadamente- a Leibniz,[4] Frege se da a la búsqueda de un cálculo que combine, a la vez, el carácter formal y algebraico con una capacidad tanto expresiva como analítica en relación con los conceptos; esto es, que permita, partiendo de una base simple y controlable de elementos simbólicos, la formulación y el análisis de *todos* los argumentos posibles en las matemáticas, *i.e.* dar cuenta en su totalidad del aspecto deductivo de las mismas. No se trata ya, por lo tanto, como en Leibniz, de hallar un «alfabeto del pensamiento» en general, sino que lo que se

---

[2] Aunque, en estricta justicia, como hemos indicado en el capítulo anterior, el primero en plantear y desarrollar sistemáticamente una filosofía del lenguaje es Bolzano en su *Wissenschaftslehre* de 1837.

[3] En lo que sigue, nos referiremos a la *Begriffsschrift* de 1879 simplemente como la *Begriffsschrift* o, también, como la *Conceptografía*, BS, *primera* BS, etc. Cuando queramos hablar del sistema que con esta misma denominación aparece en 1893, usaremos la expresión «*Begriffsschrift* de 1893» o «la segunda *Begriffsschrift*», etc.

[4] Como hemos dicho en el Capítulo I, la idea aparece en Raymundo Lullio, Giordano Bruno, Dalgarno y Wilkins y Leibniz, entre otros. Frege considera a Leibniz [cfr. Frege 1879, v; 1882a, 2, 1882b, 54; 1896, 370] explícitamente como antecedente histórico, aunque establece un límite para tal afinidad. « La modelación del lenguaje aritmético de fórmulas al que el subtítulo de la *Conceptografía* alude [véase más adelante] se refiere más a la idea fundamental que a la realización en detalle. En particular, estoy lejos de intentar producir la similitud artificial [entre la aritmética y los conceptos] que resulta de *pensar un concepto como suma de sus características* El punto más inmediato de contacto entre mi lenguaje de fórmulas y el aritmético se encuentra en la forma en la que se utilizan las letras», es decir, en el aspecto algebraico.

busca ahora es construir un sistema de reglas y principios que permita la explicación del aspecto deductivo de la ciencia y, en particular, ante todo, del ámbito en el que tal aspecto resulta en todo momento crucial y constitutivo: las matemáticas. Éste es el origen de una de las más grandes trans-formaciones que la lógica *experimenta desde* Aristóteles y, de hecho, para algunos[5], en parte con toda razón, el momento mismo de la creación de la moderna lógica matemática, que en Frege tendría no sólo a su gran creador, sino con quien, además, se eleva a niveles de rigor comparables en muchos sentidos a los que privan en nuestros días y, de hecho, superiores en muchos aspectos a los de algunos de sus sucesores directos.[6]

En opinión de Frege, el error originario de la lógica tradicional ha sido su secular vinculación con los lenguajes naturales, en particular con la gramática de éstos y con la psico-logía. Esta falla ha restringido o deformado en exceso la concepción de la estructura de los objetos básicos de la lógica. La argumentación correcta, esto es, en esencia, en Frege, los juicios y, en general, el *contenido conceptual* [begrifflicher Inhalt][7] como un todo, es decir, en un contexto judicativo. Ésta es la clave de la deducción como relación veritativa, como una relación entre verdades; es esto y no los juicios en su sentido tradicional, ni las oraciones ni los razonamientos, lo que debe estar en la base de cualquier consideración lógica. La naturaleza de los juicios es, sin embargo, radicalmente diversa a la de sus posibles contrapartes lingüísticas o psicológicas, que son particulares o subjetivas,[8] por lo que su estructura misma no tiene por qué coincidir con la de éstas. Estas observaciones dan pábulo a la formulación de los principios metodológicos fundamentales que guían ya, desde 1879, la reflexión fregeana sobre estos problemas:[9]

---

[5] Bochenski, por ejemplo, compara [1956, 283] la *Begriffsschrift*, en cuanto a importancia histórica, con los *Primeros Analíticos* y una suposición del mismo género se encuentra también en van Heijenoort [1967, vi], para quien este escrito de Frege constituye el inicio de «una gran época de la historia de la lógica», obviamente de la más importante, considerándola, además, como «quizá la obra individual más importante que se haya escrito jamás» en esta disciplina. Como el capítulo anterior sugiere lo ya, la primera de estas *afirmaciones es sólo parcialmente cierta*. A este respecto, parecía más exacta la afirmación de Church [1956, §49] acerca de que lo que en la BS se presenta es, simplemente, el primer sistema de cálculo funcional de primer orden y de órdenes superiores. En nuestra opinión, sin embargo, el segundo de estos juicios es completamente justo.

[6] Ni los escritos lógicos de Peano ni los *Principia Mathematica de* Russell y Whitehead, por ejemplo, alcanzan los niveles de rigor definitorio de las *Grundgesetze.*

[7] Véase más adelante la Sec. V para un análisis de esta noción

[8] Frege mismo se sirve, en la *Conceptografía*, no sólo constante sino, de hecho, exclusivamente del término *Urtheil* (juicio). que la tradición había convertido en un objeto primario de la reflexión lógica, *si bien -y esto* ocurre en él, ya desde 1879 y explícita y prácticamente sin excepciones desde 1893 [Cfr. I, xxi y xxii, por ejemplo]- en un sentido que coincide, más bien, con el de *proposición* Como hemos señalado en el capítulo anterior, Bolzano [1837] había llevado ya a cabo una minuciosa crítica del psicologismo en general y de este concepto en particular -que en muchos aspectos adelanta la de Frege, distinguiendo de manera precisa entre *juicio, oración, proposición* y *hecho*, lo mismo que entre *idea, palabra, concepto y objeto* Mientras que los primeros pertenecerían al ámbito de la psicología, lo segundo remite a un lenguaje particular. sólo los últimos dos son generales y *objetivos, en particular, sólo las proposiciones y* los conceptos pueden constituir el punto de partida de la lógica El uso que Frege hace del concepto de *juicio* coincide exactamente con los resultados de este analisis, si bien, como se verá un poco más abajo, esto no impedirá que las nociones básicas mismas de sus sistemas (particularmente del de 1879) resulten problemáticas [cfr. nota 14] En este capítulo nos serviremos de *juicio* en el sentido que Frege da a esta expresión.

[9] Aunque los principios aquí citados aparecen explícitamente hasta 1884 [p. X-XI], se encuentran ya, de hecho, implícita o explícitamente en todos los escritos lógicos de Frege desde 1879.

a) «Separar siempre de manera precisa lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo» (Principio antipsicologista);

b) «No preguntarse nunca por el significado de una palabra considerándola de manera aislada, sino siempre en contexto» (Principio contextual)

El tercero es lo que podemos llamar un principio categorial:

c)No perder nunca de vista la distinción entre concepto y objeto».

Como lo hemos indicado anteriormente, en sentido estricto, la lógica de Frege se propone dar cuenta no de la argumentación correcta en su totalidad, como ocurre en Aristóteles o Leib-niz, sino *exclusivamente, en principio*, de la argumentación utilizada o lícita en la ciencia y, ante todo, en particular, en las matemáticas. A ello parece oponerse el subtítulo programático mismo de la *Conceptografía*. El objetivo de ésta sería, en efecto, el establecimiento de «un lenguaje formal del pensamiento puro, *modelado de acuerdo con la aritmética*[10]» Sin duda, puede pensarse en una aplicación de la nueva lógica a ámbitos extra-matemáticos, pero, en realidad, eso no resulta esencial para la evaluación de la misma: su campo propio y concreto son, en primera instancia, las matemáticas, específicamente las matemáticas puras. La expresión «pensamiento puro» indica aquí un grado extremo de generalidad, por lo que se diferencia del tipo de argumentación especial que tiene lugar en la ciencia o, sobre todo, en los lenguajes particulares, esto es, en la esfera de lo que Frege [1879, xi] llama *el lenguaje de la vida*. Se trataría, en consecuencia, de un lenguaje artificial, en todo caso, sólo parcialmente afín al lenguaje cotidiano. Sería, asimismo, en consonancia con su pretensión generalizadora y con su intención manifiesta de asemejarse a un cálculo algebraico, un lenguaje formal, es decir, un *lenguaje de fórmulas* -sin lugar a dudas, una traducción más literal y explícita, aunque menos natural de la palabra «Formelsprache» del subtítulo.[11]

Por otra parte, el nuevo lenguaje sería uno de máxima generalidad. El hecho mismo de que se tome la aritmética como arquetipo para su estructuración plantea, sin embargo, el problema de las razones por las que ésta puede, en realidad, servir de base a aquél y dar lugar a principios de aplicación extrema.

Un primer elemento a considerar a este respecto es la amplísima aplicación de que *son susceptibles* los principios aritméticos; otros serían la sencillez de algunas de sus leyes fundamentales y, por supuesto, su carácter formal y, en parte, algorítimico. Las matemáticas descansan, además, en mucho mayor medida que cualquier otra disciplina, en la deducción; es decir, el elemento inferencial es en ellas constitutivo o cuasi constitutivo y la aritmética parecería ser su teoría más básica. Esto sugiere que el modelo de aplicación más elemental de las leyes del «pensamiento puro» al nivel científico está representado históricamente por ésta, por lo que, en vista del alto grado de claridad que existe en torno a la misma, deberá ser ella la que sirva de modelo para estructurar, en *toda* su generalidad, un lenguaje que exprese adecuadamente tal pensamiento. Desde esta perspectiva, la lógica sería *el lenguaje*

---

[10] Las cursivas son nuestras.

[11] Resulta significativo, sin embargo, que Frege no utilice la expresión «formale Sprache», sino que se sirva, más bien, de la citada «Formelsprache». Con ello parecería querer hacerse énfasis en el carácter de cálculo del nuevo sistema, esto es, en la posibilidad de dar cuenta de la deducción sin referencia esencial alguna a significados, valiéndose tan sólo de variables (proposicionales), a la manera en la que esto sucede en el álgebra. En otras palabras, no hay en Frege una consideración del formalismo como un sistema sintáctico susceptible de varias interpretaciones, sino un sistema de signos ya interpretados

de las matemáticas, sin que éstas tuvieran que identificarse necesariamente con aquélla, si bien quedaría como problema la justificación última de los axiomas de la aritmética.

Podría pensarse, sin embargo, que el razonamiento que conduce a tal lenguaje sería otro: Si desde un principio se subordinan las matemáticas a la lógica, es claro que la aritmética, como teoría básica, debe ejemplificar paradigmáticamente el uso preciso de la lógica. No habría, según esto, ninguna generalización de lo particular (supuestamente la aritmética) a lo general (el pensamiento puro), sino que la pretensión de la *Begriffsschrift* sería hacer uso de métodos y procedimientos generales de manejo y comunicación de tal pensamiento para la elaboración rigurosa, sin recurso a elementos espurios, de otra manifesta-ción del mismo. En nuestra opinión, la vía seguida por Frege es la primera: Frege llega a la tesis logicista sólo después de percatarse de la inesperada posibilidad de definir la noción de sucesor en una serie (ver más adelante) y, por lo tanto, de describir de manera estrictamente lógica la noción misma de número.[12]

Ahora bien, si la aritmética puede reducirse a la lógica y a su vez ésta puede verse como un lenguaje especial -como algo parecido a la *Conceptografía*-, el análisis mismo y, con él, las matemáticas puras en general deben concebirse de igual manera. Hay en Frege, en consecuencia, varias reducciones: A) las «leyes del pensamiento puro», se codifican en un lenguaje reglado y preciso con un número reducido de primitivos conceptuales y proposicio-nales. De hecho, un supuesto implícito aquí es que el sistema es adecuado, por lo que, en este sentido, la lógica se *reduce* a la *Conceptografía* o a un sistema equivalente, esto es, en todo caso, a un *lenguaje*. En otras palabras, la lógica no se concibe como algo abierto, algo que vaya constituyéndose a partir del planteamiento de problemas y la aceptación paulatina, histó-rica, de métodos demostrativos en las matemáticas, sino como algo de alguna manera previo, concluido y, prácticamente, atemporal. B) la tesis primaria de Frege en su obra de 1879 es la de que las matemáticas pueden *expresarse* adecuadamente en un lenguaje lógico, es decir, que pueden formalizarse sin pérdida alguna de contenido. Ésta sería, en consecuencia, un tipo de reducción expresiva. Cuando, más tarde, Frege formule la tesis logicista, esto es, cuando las matemáticas se identifiquen con una parte de la lógica, se las convierte, por A), también en un lenguaje. Es decir, C) el lenguaje -en sus distintas modalidades- en el que se pretende que consistan las matemáticas se reduce al lenguaje de A).

III

La lógica de Frege intenta ser, entonces, en primer lugar, el lenguaje de las matemáticas clásicas, es decir, el lenguaje adecuado para la justificación de su aspecto deductivo, sin que esto incluya necesariamente también los axiomas mismos de las diversas teorías que las conforman. La conjetura aquí sería la de que los principios de la nueva lógica bastarían para justificar cualquier inferencia lícita en las matemáticas a partir de los axiomas, que el contenido de éstas puede formalizarse y que el sistema resultante es completo o, tam-bién, equivalentemente, que, por ejemplo, todos los teoremas del análisis

[12] En una carta dirigida a Jourdain en 1902, Frege [1976, II, XXI/2, 110] afirma, por ejemplo, en relación al origen de sus ideas: «La necesidad de excluir todo tipo de suposiciones implícitas en la fundamentación de la aritmética me condujo a la *Conceptografía* A su vez, el trabajo en esta obra me obligó a dar una versión más exacta de los conceptos fundamentales de la aritmética, aunque no puedo ya explicar en detalle cómo se dio esto. El reconocimiento de que los números se aplican a conceptos fue, sin duda alguna, esencialmente estimulado por la *Begriffsschrift*». Véase también la última parte de este escrito.

pueden verse como condicionales universalmente válidos, cada uno de los cuales tiene en el antecedente una conjunción de los axiomas de la aritmética y en el consecuente el teorema del análisis en cuestión. La segunda tesis de Frege es la de que la aritmética misma y los axiomas y los principios argumentativos por ella presupuestos son, en realidad, principios lógicos. Esto es, tomando en cuenta lo anterior, que, por sí mismos, los teoremas del análisis son proposiciones lógicamente verdaderas. Mientras que el primero de los objetivos de la lógica de Frege -completud- se formula en él sólo en términos hipotéticos, como conjetura, la realización del segundo, de la tesis logicista propiamente dicha, constituye el hilo de Ariadna mismo de su investigación en los fundamentos de las matemáticas a partir de 1879. Es claro que la segunda tesis es independiente de la tesis lingüística y, asimismo, que ésta es no sólo previa a la primera, sino también más débil que aquélla, esto es, implicada por la misma. Por lo demás, parecería existir una conexión natural entre el desarrollo de la axiomática -a la que Frege convierte en un procedimiento formalizado, aunque con características peculiares en él-[13] y la concepción de la lógica y las matemáticas como un *lenguaje*; una idea rica en consecuencias importantes y destinada a convertirse en centro de un debate sobre las bases mismas del quehacer matemático. Frege sería también, con Peano, aunque con esenciales diferencias con éste (véase Capítulo Cuatro, 2ª parte), uno de los primeros representantes históricos de esta postura.

IV

Es común la afirmación de que el sistema presentado por Frege en la *Conceptografía* constituye la primera formulación histórica de un cálculo lógico prácticamente idéntico, salvo en lo que respecta a la notación, o, equivalente, a los cálculos lógicos que hoy conocemos. En realidad, tal suposición es justa sólo con algunas reservas e identificaciones arbitrarias que pasan por alto elementos esenciales a la concepción global fregeana de la lógica y su naturaleza, por lo que resulta importante, para nuestros fines, una descripción en detalle de la misma. En lo que sigue nos ocuparemos, por lo tanto, de examinar la respuesta concreta que Frege da a una pregunta absolutamente esencial para su proyecto general: *¿Qué es la lógica?*

Es evidente, en primer término, que la lógica requerida por la tesis logicista no es, ni puede ser, la lógica tradicional, ni la mezcla de lógica, filosofía y psicología que se presenta como «ciencia del pensamiento» a lo largo de todo el siglo XIX. Frege recoge o descubre por cuenta propia ideas fundamentales de Bolzano,[14] Boole[15] y otros para crear una nueva

---

[13] Cfr., un poco más abajo, las observaciones acerca del formalismo *semántico* fregeano.

[14] A quien, dicho sea de paso, no menciona ni una sola vez en toda su obra. Esta circunstancia no deja de ser extraña, en vista de la minuciosa revisión que se hace -sobre todo en Frege 1884- de cualquier idea que tenga que ver con los temas que se plantean, independientemente de qué tan conocidos sean sus autores. Lo es aún más si se considera que Frege conoce la obra de Cantor y mantiene relación y correspondencia con Husserl, y que ambos se expresan con grandes elogios de Bolzano. En particular, como hemos visto, Husserl escribe en las *Investigaciones Lógicas*, que Bolzano debe considerarse como «el más grande lógico del siglo XIX», *reconociendo igualmente la influencia de éste en su obra*; una observación que Frege difícilmente podía pasar por alto. De hecho, en una carta a Frege escrita por Husserl en 1906 [Frege 1976, II, XIX/4, 105], éste menciona explícitamente a Bolzano en el contexto de una discusión sobre lo que debe constituir el objeto de estudio de la lógica. Frege sabía, por lo tanto, de la existencia de Bolzano. Como sea, algunas de las distinciones que sirven de base a su sistema parecerían ser hechas por Frege pensando justamente en una crítica a aquél.

lógica, más rica y poderosa que la lógica anterior. La opinión de Kant en la *Crítica de la Razón Pura* acerca de que la lógica debe considerarse como algo concluido y perfecto -algo que contradice su carácter mismo como ciencia e introduce cierto tipo de definitividad en su aspecto instrumental- pondría de manifiesto, según Frege, más la esterilidad o el agotamiento del enfoque seguido, que la imposibilidad de un progreso.[16] Lo que se requiere es, más bien, una transformación a fondo de la misma en el espíritu de su concepción original, es decir, de su concepción como *órganon* o instrumento que sirva para los fines del conocimiento, para justificar el cúmulo de inferencias y deducciones presentes en la ciencias, a partir de la consideración del terreno en el que su aplicaciones se presentan con la mayor nitidez: las matemáticas.

Como ya lo hemos mencionado, son dos, de acuerdo con Frege, los problemas básicos que afectan fundamentalmente la lógica tradicional:[17] su estrecha relación con el lenguaje natural y la presencia constante en ella de elementos de orden psicológico. En relación con lo primero, el error fundamental en que se incurre sería la identificación de la estructura gramatical de las oraciones -analizada en la forma sujeto-predicado- con la estructura *lógica* de los juicios; en relación con lo segundo, el error de principio sería la cancelación de las diferencias entre objeto y función, al concebirse ambos como representaciones [Vorstellun-gen].[18] Son los juicios y las relaciones objetivas, conceptuales y veritativas entre ellos, es decir, la argumentación correcta, lo que debe constituir el objeto de estudio de la lógica. Como Bolzano, Frege piensa que hay una esfera de contenidos objetivos no empíricos, con una legali-dad y subsistencia propias, a los que llegamos por medio del lenguaje natural y gracias a nuestra estructura subjetiva. La lógica se interesa en los contenidos mismos, no en el modo de su obtención. Ésta es la actitud general de Frege desde 1879. Es más explícita, sin embargo, en *Los Fundamentos de la Aritmética* y lo es aún más en las *Grundgesetze*: «Para mí -escribe en esta última obra [XVIII]- existe un dominio de lo que es objetivo, que es diferente de lo real y fenoménico» y que es también [*ibid* , XVI] independiente de cualquier sujeto.

Éstos serían, entonces, los fines que se plantea la *Conceptografía* y explica asimismo el nombre que se le da al nuevo lenguaje.[19]

Tanto el sistema de 1879 como el de 1893, pretenden, en primer término, dos cosas: i) el análisis simbólico de la argumentación matemática, sin recurso alguno al razonamiento intuitivo -aparte del reconocimiento de los signos especiales y la aceptación de los axiomas

[15] «En la lógica de Boole lo que importa es la forma lógica, omitiéndose por completo cualquier consideración relativa a la incorporación [giessen] en ella de un contenido». Por el contrario, en Frege se trata precisamente de esto. Por otra parte, existe una semejanza esencial entre ellas -que las diferencia de la lógica de Peano- y que consiste en que en ambas el acento se encuentra en la deducción. [cfr. Frege 1896, 370-371], que es omitida enteramente por Peano (véase el siguiente capítulo).

[16] Paradójicamente, una conclusión *en cierto sentido*, es decir, por lo menos en parte, similar a la kantiana es implicada por las tesis de Frege en relación a la completud lógica y adecuidad expresiva de la *Conceptografía* en relación a las matemáticas.

[17] Con esta designación nos referiremos, en lo que sigue, tanto a la lógica tradicional aristotélica y escolástica como a la psicología lógica, tan difundida en la época de Frege.

[18] Cfr. nota 14 y también nota 22.

[19] Por lo demás, el título resulta más bien paradójico. Por su naturaleza misma, los conceptos no son algo lingüístico, sino justamente algo a lo que llegamos por intermediación del lenguaje, como *referencia*, según la teoría general de nombres expuesta por Frege en 1893, de predicados o *palabras conceptuales* [Begriffswörte]. (Ver nota 21)

y reglas de inferencia- y ii) la idoneidad del sistema, esto es, su completud y corrección. La *Conceptografía* «debe hacer posible, en principio –dice Frege- el examen riguroso y seguro del carácter conclusivo o no de una cadena de inferencias, así como poner de manifiesto cualquier supuesto que pretenda deslizarse inadvertidamente [en la argumentación], para que pueda ser investigado y su origen detectado» [1879, iv]. Pero esto significa también, por lo tanto, que un aparato equivalente o similar a ella constituye una herramienta absolutamente imprescindible en la investigación *filosófica* de los fundamentos de las matemáticas.[20]

Otra de las condiciones a satisfacer por la construcción fregeana sería la generalidad de sus principios, en consonancia con el hecho mismo de que su objeto lo constituya «el pensamiento puro». Sin embargo, esto supone el carácter en última instancia *vacío* de los mismos. La lógica no tiene nada que ver -por lo menos no directamente- con la experiencia, ni agrega a las suposiciones a las que se aplica nada que no se encuentre ya de alguna manera en ellas. Su única función -y en esto reside justamente su importancia- es hacer explícitos tales contenidos. Así, *desde el punto de vista de nuestro conocimiento*, aun los principios lógicos o su aplicación a lo ya conocido pueden ser sintéticos, es decir, añadir algo a lo que ya sabíamos, si bien, desde el punto de vista de su justificación objetiva, tal adición no tiene, en realidad, lugar.

También la necesidad comúnmente asociada a la lógica debe entenderse en el contexto anterior. En realidad, puede afirmarse que la necesidad sería el ámbito en el que caerían sus principios; de hecho, prácticamente el ámbito *exclusivo* de ella si aceptamos la tesis logicista. La necesidad que con frecuencia se les adscribe a las matemáticas sería, en el fondo, de acuerdo con esto, una necesidad lógica y, como tal, se encontraría estrechamente vinculada a la generalidad extrema de los principios. «Necesario» es, sin embargo, un predicado sólo aplicable significativamente a proposiciones o juicios e indicativo del carácter puramente lógico de su justificación, es decir, indicativo de su fundamentación plena a partir de principios equivalentes a los de la *Begriffsschrift* [cfr. 1879, iii].

V

Pasemos ahora al aspecto constructivo de la lógica de Frege. Frege se propone, como objetivo principal en sus dos conceptografías, el establecimiento de las leyes generales de las conexiones entre las *verdades* en cuanto tales. En la base de su reflexión se encuentran los *juicios*, en su sentido objetivo, según se desprende del segundo de sus principios metodológi-cos (ver Sec.II). Ahora bien, ¿cómo deben entenderse éstos? La lógica de Frege es un formalismo deductivo *ya interpretado*. Pero en Frege lo deductivo, el aspecto formal y algebraico y los contenidos tienen el mismo peso, es decir, resultan igualmente esenciales a su lógica. No hay en él, en otras palabras, una distinción tajante entre semántica y sintaxis, ni una consideración independiente de ambos aspectos de su lenguaje[21]. De esta manera, el aspecto formal de su sistema *no* se refiere tanto al empleo de fórmulas como al análisis del contenido lógico, esto es, al análisis de lo que Frege llama el

[20] Gracias a esta característica, el sistema dispondría, en efecto, de un elemento capaz de proporcionar «una base a partir de la cual puede juzgarse la índole epistemológica [die erkenntnistheoretische Natur] de los principios demostrados» [1893, I, VIII]

[21] «Mi intención en la *Conceptografía* -dice [1882, 53]- no era la de hacer una representación abstracta por medio de formulas, sino la de dar expresión a contenidos de un modo más claro que el que se alcanza con las palabras, echando mano para ello de signos escritos especiales». Cfr. también [1896, 371].

contenido conceptual [begrifflicher Inhalt]. Se trata, en consecuencia, de un formalismo *sui generis*, de un formalismo *no lingüístico*. Frege se refiere heurísticamente a esta noción de contenido judicativo que ha de tomarse como primitiva de su primer sistema, como «aquello que resulta esencial en un juicio para su evaluación lógica» [1879, §3,3].

Para una comprensión cabal de esta idea resulta, entonces, de fundamental importancia considerar, por una parte, la distinción fregeana entre forma lingüística y forma lógica y, por la otra, un examen de la concepción que Frege tiene de los juicios.

En un significativo pasaje de una carta dirigida a Husserl [Frege 1976, II, XIX/3, 102-103] se afirma lo siguiente: «La tarea de la lógica no puede ser la de investigar lo que pueda haber en las expresiones del lenguaje cotidiano. Alguien que deseara aprender lógica a partir del lenguaje [natural] sería como un adulto que tratara de aprender a pensar tomando como modelo a un niño... Los lenguajes históricos no se han conformado siguiendo las pautas de la lógica. El elemento lógico se presenta en ellos revestido de imágenes que no siempre son exactas... La tarea principal del lógico es emanciparse del lenguaje [natural] y simplificar. La lógica debe ser juez del lenguaje [die Logik soll Richterin sein über die Sprachen]». La lógica no trata, por lo tanto, de oraciones o enunciados, sino de lo que tales oraciones o enunciados expresan, es decir, justamente de sus contenidos y, en particular, de los juicios. Según esto, en un lenguaje como la *Conceptografía*, la gramática debe estar supeditada al contenido lógico. En todo caso, esta *escritura conceptual*, como quizás podría traducirse más explícitamente la expresión «Begriffsschrift», sería un lenguaje lógicamente perfecto. Así, mientras que, por una parte, Frege coincide con Bolzano en la distinción entre estructura lógica de una SAS o juicio fregeano y su expresión lingüística, por la otra, difiere esencialmente de él en cuanto a que el objetivo central de Frege es el de construir un lenguaje que permita el manejo claro de tal estructura. El título del escrito de 1879 sugiere, sin embargo, que los elementos básicos del nuevo lenguaje serían los *conceptos*. No lo son y esto hace de la designación misma elegida por Frege algo equívoco.[22]

Ahora bien, el examen de la noción de juicio arrojaría el siguiente resultado. En un juicio algo se afirma y lo afirmado tiene que ver con la verdad. Esto conduce (a) a lo que se afirma y (b) a su verdad. Lo primero es el contenido conceptual. Sin embargo, no todo contenido conceptual es susceptible de evaluarse en términos veritativos. Frege distingue, en consecuencia, entre *contenidos judicables* [beurtheilbare Inhalte] y aquellos que no lo son. Es decir, dentro del sistema mismo, la noción de contenido es lógicamente anterior a la de juicio.[23]

Un contenido judicable puede analizarse siempre en dos elementos: la *función* y el *argumento* o los argumentos para los que en el mismo se afirmaría, esto es, en términos de función y objeto, las dos categorías formales (y ontológicas) básicas en Frege.

Frege se inspira en el concepto de función que las matemáticas del siglo XIX habían desarrollado hasta convertirla en una de las nociones absolutamente básicas del análisis,[24]

---

[22] En 1879 se habla de «combinaciones de ideas» [Vorstellungsverbindungen], que son identificadas con el contenido conceptual. Frege eliminará más tarde ambas designaciones, por sugerir asociaciones psicológicas, en el caso de la primera, y por encontrar más adecuado el termino *Gedanke*, en el caso de los contenidos, admitiendo, de paso, lo inadecuado del título de la BS [Cfr por ejemplo, Frege 1910, n 4, 275]

[23] Frege suprimirá en 1893 esta distinción considerando cualquier contenido como judicativo.

[24] *Aparentemente, el término* es utilizado por primera ocasión por Leibniz en el siglo XVIII [Cfr Couturat y Robbins 1941,285].

para introducir la idea de función [Funktion], en su sentido de *función judicativa* o, como hoy se diría, de *función proposicional*, sin lugar a dudas la noción cardinal de la lógica moderna. Frege reemplaza con ella la añeja descomposición aristotélico-tomista de los juicios en sujeto y predicado, de la que Bolzano mismo se sirve de manera esencial, haciendo posible una consideración mucho más sutil y general de ellos -una que, por ejemplo, se haga cargo, sin las complicaciones parafrásticas de Bolzano, de las proposiciones relacionales. Así, además de constituir un descubrimiento lógico de la mayor importancia histórica, esta consideración de que los elementos básicos de la lógica, los juicios, pueden descomponerse en funciones y objetos representa, en realidad, el momento de ruptura con Bolzano. Que entre la lógica y la gramática existe un abismo puede verse, por ejemplo, considerando oraciones que lógicamente expresan lo mismo y que, no obstante, tienen sujetos y predicados diferentes. Frege sienta, asimismo, de manera definitiva, las bases para un análisis extensional, cuasi conjuntista, de los predicados que Bolzano, a pesar de sus logros, no acaba de asumir en todas sus consecuencias.[25]

No obstante su carácter fundamental en la lógica de Frege, el concepto de función adolece en la *Conceptografía* de 1879 de una doble falta de claridad definitoria. Por una parte, el *status* mismo de las funciones[26] carece de la precisión necesaria -un error en el que también incurrirán Russell y Whitehead a lo largo de los *Principia Mathematica*. Por la otra, el uso que Frege hace del concepto parece cancelar parcialmente el tercero de sus principios metodológicos o ser violatorio de él. Esto último tendrá graves consecuencias para el sistema fregeano, al hacer inconsistente la versión más avanzada del sistema que se presenta en 1893.

VI

Examinemos brevemente, en primer lugar, la descripción que hace Frege de sus nociones básicas. Los juicios, el punto de partida de cualquier consideración lógica, se encuentran íntimamente ligados a las funciones proposicionales. En la *Conceptografía* [§9,15] se dice que «Si pensamos una expresión de esta manera, [es decir, como la modificación que permite el paso de 'María va por el pan' a 'Pedro va por el pan' y viceversa,] como algo variable, ésta se divide en una parte constante, que representa la totalidad de las relaciones, y en el signo que se considera reemplazable por otro y que se refiere al objeto que mantiene estas relaciones. A la primera la llamo función, a esta última su argumento». La formulación es sumamente obscura, pues sugiere que las funciones tienen un carácter *lingüístico*.[27]

Tomado al pie de la letra, esto equivaldría a una violación del tercer principio metodológico fregeano, aparte de que resulta manifiestamente incompatible con otras

[25] Este último paso no será dado por Frege, sin embargo, sino hasta la *Begriffsschrift* de 1893, concretamente con la introduccion de las nociones de *extensión de un concepto* y la de *curso de valores de una función* [Begriffsumfang y Wertheverlauf, respectivamente].

[26] En lo que sigue, con este término nos referiremos siempre, a menos que se diga otra cosa, a las funciones proposicionales

[27] Hay otras varias manifestaciones de esta equivocidad en la BS. Por ejemplo, en [1879, §9, 16], al señalarse las notas características de una función se afirma que «llamamos función a la parte invariable de la *expresión* [cursivas nuestras] a la que es susceptible de ser reemplazada su argumento». Más adelante [*ibid* 17-18], se habla también de que «en una función, hay signos reemplazables que dan lugar a funciones de varios argumentos», etc

manifestaciones al respecto en la BS mucho más congruentes no sólo con este principio, sino con el planteamiento general de Frege.[28]

La ambigüedad que envuelve, en la *Conceptografía*, esta noción cardinal para la teoría fregeana no será resuelta satisfactoriamente por Frege sino años más tarde, en «Funktion und Begriff» y de manera formal en 1893[29]. Como resultado de este nuevo análisis, Frege concluirá la imposibilidad de definir esta noción en su sistema [cfr., por ejemplo, 1904, 665]. Este carácter primitivo será compartido también por la de objeto. En 1893 se distingue, además, de manera rigurosa entre lo lingüístico –el plano de la gramática- y lo propiamente lógico Lo primero sería, en el mejor de los casos, expresión de lo segundo, aunque, por supuesto, también es independiente de ello. De hecho, por ejemplo, la determinación gramatical de un sujeto y un predicado en una oración supone un análisis lógico *previo*, es decir, una interpretación divisoria del juicio expresado por ella en términos de función y argumento, aparte de que, en realidad, en general, una distinción gramatical de este tipo resulta sumamente limitada e insatisfactoria –por ejemplo, para la evaluación lógica de los juicios universales.[30] Funciones y objetos no pertenecen, en consecuencia, a la esfera de la gramática.

Sin embargo, como dijimos antes, «juicio» no es una noción primitiva en ninguna de las dos conceptografías, aunque, en el fondo, constituya un elemento subyacente a la construcción de ambos sistemas. Con esta restricción, la lógica de Frege puede también pensarse como una teoría del juicio en general, aunque, evidentemente, no en el sentido tradicional de esta expresión.

La elección de los primitivos de la teoría formal misma está determinada, en primera instancia, más bien, por las relaciones entre funciones y juicios o, más precisamente, por la relación entre funciones y contenidos judicativos. Mientras que en la BS se distinguen en un juicio, por una parte, el contenido y, por la otra, el reconocimiento de la verdad del contenido judicativo como sus constituyentes esenciales, en 1893 el primero es reemplazado por el *pensamiento* [Gedanke],[31] al tiempo que el segundo será sustituido por la noción mucho más adecuada de lo Verdadero como uno de los dos posibles *valores de verdad*. Este análisis es producto tanto de la distinción sistemática entre sentido y

---

[28] Así, por ejemplo, en [1879, §9, 17], Frege dice que «el mismo contenido conceptual puede concebirse como función ora de este, ora de aquel argumento..., con tal de que función y argumento se encuentren completamente diferenciados».

[29] Al comentar las modificaciones hechas en el sistema de 1893 a la BS de 1879, Frege observa [1893, X], en efecto, que «también la naturaleza de las funciones *y su diferencia esencial con los objetos* se caracteriza ahora de manera más precisa que en la *Conceptografía* anterior». Por lo demás, la diferenciación consecuente entre funciones y argumentos en el contexto de un contenido judicativo llevará a Frege a distinguir entre funciones de distintos niveles, cuya naturaleza lógica es esencialmente diferente, es decir, a formular también, como Bolzano, un claro antecedente de la estratificación jerárquica en *tipos lógicos*.

[30] «Por sí mismo –dice Frege [1892b, 199]- el pensamiento [*der Gedanke*, esto es, el contenido lógico]- no determina qué es lo que ha de tomarse como sujeto. Decir 'el sujeto de este juicio' no describe absolutamente nada, a no ser que *se añada al mismo tiempo* un tipo específico de análisis...». Fundamentalmente, en la lógica, por lo tanto, en el principio es el juicio, es decir, algo no lingüístico. Este resultado coincide nuevamente con el análisis correspondiente de Bolzano. Por otra parte, es importante no confundir esta anterioridad «lógica» con una de carácter cronológico. En Frege, creemos, el problema de si es posible pensar sin un lenguaje no se plantea y, en realidad, carece de importancia. En todo caso, es el ámbito de lo expresado por nuestras afirmaciones lo que le interesa a la lógica, no que nosotros las hagamos o cómo hayamos llegado a ellas

[31] En su sentido evidentemente no psicológico [Véase también la nota 41]

denotación [Frege 1891], como de una concepción mucho más sutil de las funciones, expuesta por Frege desde 1892, y de la teoría general de los nombres que Frege desarrolla a partir de estos resultados y que se presenta en detalle en las *Grundgesetze*.

De acuerdo con todo ello, una función en general posee *argumentos* y *valores*. Ambos son *objetos*. En particular, en el caso de las funciones proposicionales, es decir, de los *conceptos*, los valores son *valores de verdad*, lo *Verdadero* y lo *Falso* [das Wahre y das Falsche, respectivamente] en la lógica bivalente de Frege. Una función tiene siempre ahora, para todo objeto, un valor que es, a su vez, un objeto. Esto le permitirá a Frege definir las funciones veritativas, esto es, las funciones cuyos argumentos y valores son valores de verdad. En esta nueva concepción hay también cabida precisa para lo lingüístico: un nombre designa un objeto, éste es su *denotación* [Bedeutung] y lo hace de cierto modo, su *sentido* [Sinn]. Con estos elementos, Frege puede explicar entonces con mayor exactitud qué es un juicio. La idea es la de pensar en las oraciones asertivas como nombres, es decir, como expresiones que poseen una denotación y un sentido. Frege identifica el sentido de una oración justamente con el *pensamiento*, con el antiguo contenido conceptual, mientras que su denotación sería su valor de verdad. Cuando éste es lo Verdadero, se obtiene un *juicio*. Esto significa, por lo tanto, que todos los juicios poseen la misma denotación.

Como aquí resulta evidente, el cambio que se da de la *Conceptografía* de 1879 a la de 1893 no reside tanto en las nociones básicas, ni -como ahora lo veremos- en la simbología, ni, por lo tanto, en lo que se identifica como aspectos esenciales de la noción básica de juicio, sino, sobre todo, *en la interpretación extrasistemática* de las funciones y en una concepción mucho más decantada de las relaciones entre éstas y los juicios. Todo juicio puede analizarse en términos de funciones. La diferencia esencial entre los objetos y las funciones consiste en el carácter *saturado* [gesättigt] de los primeros y la *insaturación* [ungesättigt sein] de las segundas, es decir, entre la índole «completa» o autosubsistente de los objetos, en oposición a cierto tipo de dependencia e incompletud de las funciones.

Un aspecto poco claro e incluso en apariencia incompatible con lo anteriormente dicho acerca de las relaciones entre la lógica y el lenguaje natural en la consideración fregeana de las funciones es el siguiente.

Lógicamente, nuestro punto de partida deben ser los juicios. En nuestros análisis lógicos debemos despojarnos, además, según quedó dicho, de los condicionamientos gramaticales. Pero esto sugiere también que debemos alejarnos lo más posible del lenguaje natural. Ahora bien, es evidente que este alejamiento no puede ser, en forma alguna, una ruptura.[32] En los hechos, sin embargo, si bien para Frege esto no es estrictamente esencial, nuestro punto de partida lo constituye el lenguaje natural, los diferentes lenguajes históricos. El objetivo de Frege es la creación de un aparato lingüístico que permita el análisis lógico también de tales lenguajes, esto es, la estructuración de un lenguaje lógicamente perfecto, un lenguaje, por así decirlo, *neutral* en relación a los lenguajes históricos. Lo que la lógica debe hacer es simplificar y abstraer y llegar a principios generales, pero, obviamente, no prescindir –no puede hacerlo ni siquiera del todo en la construcción del sistema- del lenguaje de la vida. Es natural, por lo tanto, que la BS refleje en muchos sentidos a nuestro lenguaje. Uno de ellos es el que sigue.

[32] Frege compara [1879, vi-viii] las relaciones entre el lenguaje natural y la *Conceptografía* con la que existe entre el ojo y el microscopio

Nuestra llegada a las funciones se da, en la práctica, a través de la consideración de una clase de oraciones *similares*, al distinguir en éstas una parte constante de otras que son variables. Por otro lado, un juicio puede expresarse por intermediación de diferentes oraciones. ¿Cómo distinguir, entonces, a partir de diferentes oraciones que expresan el mismo juicio, la función y sus notas características e identificar sus posibles argumentos? Esto es, ¿cómo distinguir –si es que la hay- la parte constante en la expresión de un juicio de lo que sólo son sustitutos, nombres de sus argumentos? Y, ¿cómo hacerlo cuando se tiene solamente una oración?[33] Esta ambigüedad no tiene nada que ver con el contenido lógico mismo del juicio y, según Frege *[1879, §11]*, «es asunto exclusivo de la interpretación [Auffassung]». En otras palabras, el contenido de una misma oración puede traducirse de varias maneras, de maneras esencialmente diferentes, a la BS. La ambigüedad se trasladará a la notación misma de la BS: 'Φ(A)' puede ser vista, en efecto, como una función tanto de 'A' como de 'Φ' [1879,§10,19]. La cláusula limitativa en la segunda de las preguntas anteriores se refiere al siguiente problema. ¿Por qué no admitir, como en Bolzano, que la abstracción de *cualquiera* –o aun de la totalidad- de los contenidos que en su conjunto producen un contenido judicativo dé lugar a una función de la que el o los contenidos omitidos serían justamente argumento(s)? Por una parte, Frege parecer admitir expresamente tal posibilidad.[34] Por la otra, sin embargo, al adoptarse el punto de vista según el cual una proposición se descompone siempre en argumento(s) y función, se establece implícitamente un límite a lo que pueda considerarse como variable, con lo cual está también obligado a aceptar las diferencias categoriales señaladas por el tercero de sus principios metodológicos. En la misma dirección apunta también la clasificación fregeana de las funciones en distintos órdenes. En este margen amplísimo de substitutibilidad parecería encontrarse uno de los puntos esencialmente débiles del sistema fregeano. Esta característica se trasladará al sistema de 1893 y será corresponsable del surgimiento de las paradojas en su sistema.

Otro problema conexo sería el siguiente. A partir de la consideración de oraciones que expresen contenidos judicativos llegamos a las funciones por abstracción de algún elemento constitutivo de las mismas. Esto permite, qué duda cabe, un análisis mucho más fino de cierto tipo de contenidos, por ejemplo, de lo que podríamos llamar momentáneamente proposiciones universales, que lo que resultaba posible en la lógica de Bolzano, por ejemplo. Pero esto parecería implicar al mismo tiempo la aceptación de algún tipo de *proposiciones elementales*, en las que no se cuantifique sobre nada. No hay en Frege nada al respecto,[35] lo que no necesariamente equivale a una descalificación de la BS como instrumento lógico. Las diferen-cias *relativas* de esa índole se indican con precisión en el

---

[33] 'Juan come sandía' expresa, por ejemplo, a la vez, el valor de la función

_ come sandía

para el argumento Juan, al mismo tiempo que el de la función

Juan come _

Para el argumento sandía

[34] «Si en una expresión, cuyo contenido no necesariamente es judicable, de la que forma parte, en uno o varios lugares, un signo –simple o compuesto- reemplazamos a éste en todos esos lugares o en algunos de ellos uniformemente, la parte constante es la *función*,. .»

[35] El problema será abordado más tarde por Russell y Wittgenstein y, como vimos en el capítulo anterior, se planteaba ya en Bolzano.

sistema simbólico mismo de la *Conceptografía* y es discutible que algo más que eso resulte necesario *en las matemáticas.*

Frege explica la generalidad como «la afirmación de la función, independientemente de cuáles sean los argumentos» [1879,§10,18]. La notación correspondiente es $\vdash\!\!\!\!—\ \Phi(A)$, que expresa que «*A* tiene la propiedad *Φ*» [*ibid.*] Sin embargo, los cuantificadores, que hacen notacionalmente *explícita* la generalidad, pueden también formar parte de una función [*ibid* §9.17] y, por otra parte, puesto que, como hemos dicho, el signo funcional '*Φ*' de *Φ(A)* puede aparecer, él mismo, como argumento, es también generalizable [1879,§11,19]. Con ello, Frege parece acercarse a la posición de Bolzano y cancelar la distinción misma entre función y argumento. En un intento limitativo de las posibilidades de substitución, se añaden estipulaciones que indican que lo que llamamos variables se piensan en él como algo que tiene un rango propio de valores; es decir, que hay diferencias categoriales entre argumentos y función, pero el curso que han de seguir tales restricciones - la conservación del carácter judicativo [Beurtheilbarkeit] de las expresiones resultantes [*ibid.*]- es aún demasiado vago.[36]

Lo anterior significa no sólo que la lógica que Frege tiene en mente es lo que hoy se llama una «lógica de orden superior», que la *Conceptografía* es, como hoy se diría, un cálculo extendido de predicados, sino que tiene, además, para el problema que nos ocupa, la desagradable consecuencia de dejar prácticamente en el misterio la índole misma de sus objetos básicos.[37] En efecto, la cuantificación de algo implica su «cosificación», por así decirlo, su conversión en objeto,[38] pero, al mismo tiempo, implica la cancelación de la diferencia básica prescrita por el principio categorial de Frege.

Como fuere, las funciones juegan en Frege no sólo un papel fundamental en lo que toca a la explicación de la estructura interna de los juicios, sino que le permiten más tarde una explicación de los *conceptos*[39] que, para las metas del logicismo, resultan decisivos.

Las expresiones funcionales en las que la variable –como hoy se diría-[40] es reemplazada por un nombre de un argumento, esto es, las expresiones funcionales de la forma

[36] Frege hace uso de la cuantificación explícita de las funciones en la tercera parte de la *Conceptografía* [§27ss, 62-65] para la definición de las sucesiones y la obtención más tarde, a partir de ello, del principio de inducción matemática. En la *Conceptografía* de 1893, Frege resolverá el problema mediante la consideración de funciones de diferentes órdenes que preservan la distinción básica objeto/función

[37] En realidad, aparte de lo que hemos expuesto y las reglas para operar con ellas –*v.gr* la especificación o la generalización- no hay mucho en 1879 acerca de la naturaleza de las funciones Esto sugiere la suposición implícita, por parte de Frege en esta época, de que tal noción es fundamentalmente clara.

[38] Según ha mostrado Quine en [Quine 1953]

[39] En la forma de la nociones *caer bajo un concepto, curso de valores de una función* y *extensión de un concepto* esta idea constituirá uno de los primitivos de la construcción de la aritmetica a partir de la lógica, que Frege pone en ejecución detallada a partir de 1893. De cualquier modo, ya en la *Begriffsschrift* [xiii] se habla de que «la concepción de un contenido como función permite formar conceptos [wirkt begriffsbildend]», aunque sin entrarse en detalles.

[40] Frege rechaza el uso del término, por considerarlo irreparablemente equívoco e inadecuado. «Lo más conveniente –dice en 1910 [p. 276, n.7]- es no utilizar en forma alguna esta expresión, puesto que, en realidad, no podemos hablar de un signo, ni decir de lo que éste expresa o denota que sea variable o una variable, por lo menos no en un sentido que pueda resultar utilizable en las matemáticas o la lógica».

$\Phi(A)$ [$\Phi(A,B)$, $\Phi(A,B,C)$, etc.],

donde 'Φ' denota una función y 'A' ('B', 'C', etc.) un objeto, representan *contenidos* o contenidos conceptuales. Por sí sola, sin embargo, cualquiera de las dos partes, de esta manera expresadas, constituye también un contenido. Los *contenidos judicativos*, aquellos que pueden dar lugar a juicios, se distinguen notacionalmente por medio de una línea horizontal, la barra de contenido [Inhaltsstrich], '—', de tal manera que si $\Phi(A)$ es como quedó dicho,

$$—\Phi(A)$$

es una expresión compleja en la que la barra horizontal conecta la función Φ y el argumento A en un todo susceptible de ser juzgado. Frege utiliza en 1879 la expresión *Vorstellungsver-bindung* [conexión representativa], rechazándola más tarde [p.ej. en 1910, 280, n.15], por considerarla demasiado psicológica y sustituyéndola justamente, como hemos dicho, por *Gedanke*. '$—\alpha$', con α contenido, se lee en 1879 como «la circunstancia de que α» [der Umstand, daβ...] y ha sido traducida también al inglés como «la proposición...».[41] Por otra parte, si a la expresión '$—\alpha$' se antepone una barra vertical, la barra judicativa [Urtheilsstrich], '|', el contenido $—\alpha$ se convierte propiamente, como $|—\alpha$, en un *juicio*.

Así, mientras que la barra de contenido responde a la necesidad de expresar un contenido (o una «proposición») considerativamente, esto es, sin necesidad de afirmarlo, la barra judicativa representa el aspecto veritativo del sistema, al afirmar propiamente tal contenido en el sistema, es decir, al afirmar su verdad.

Ahora bien, sería equivocado pensar que la barra de contenido es una especie de paréntesis cuyo alcance es una oración a la derecha que afirma la función para un argumento. El hecho de que se aplique a contenidos, lo mismo que la lectura sugerida por Frege remiten a algo extralingüístico, aunque íntimamente vinculado con el problema de «uso y mención».[42]

La barra de contenido es, en realidad, también expresión de una función, es decir, de una función cuyos argumentos son contenidos en general. De hecho, podría decirse que se trata en este caso de una especie de función recursivamente definida cuyos valores son contenidos judicativos [Cfr. Frege 1891, 21].[43] Esto significa, entonces, que los contenidos y, en particular, los contenidos judicativos, son también *objetos*, puesto que sólo objetos pueden ser argumentos de una función.

Es importante observar, sin embargo, que, a diferencia de la barra de contenido, la barra judicativa *no* simboliza una función. «La barra judicativa misma –dice Frege [1891, 22, n.7]- no puede ser utilizada para formar una expresión funcional, porque su tarea no es la de combinarse con otros signos para designar [bezeichnen] un objeto. '$|— 2 + 3 = 5$' no designa nada, sino que afirma algo», esto es, *juzga*. Esto implica notacionalmente que el

---

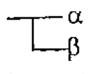
[41] Es de notar, no obstante, que Frege [1910, 280, n.18] rechaza explícitamente, aunque sin argumentar, esta lectura, que Jourdain hace de '$—\alpha$' en 1912

[42] Esta distinción que, como vimos, se encuentra ya implícita en Bolzano, forma parte de la versión de la *Conceptografía* que se presenta en las *Grundgesetze*. La distinción resulta necesaria, a partir de la distinción fundamental que allí se hace entre nombres y objetos y entre el sentido y la denotación como aspectos inherentes a los primeros.

[43] Si α es un contenido, $—\alpha$ es un contenido judicativo y, por lo tanto, un posible argumento para —, cuyo valor es $—\alpha$ mismo en este caso.

alcance de la barra judicativa es final, es decir, el resto de la expresión a la derecha. '—|—α' no expresa, en consecuencia, nada, sino que es una mera combinación simbólica carente de significado, como '+=3'.

Otros dos elementos de la gramática de la *Conceptografía* son el *condicional* [die Bedingheit] y la *negación* [die Verneinung] que Frege define [1879,§5 y §7, respectivamente]. A diferencia de la barra de contenido, éstas son dos funciones que toman argumentos que son contenidos judicativos y tienen valores que también lo son, es decir, operaciones judicati-vas sobre la clase de los contenidos judicativos. Éste será también el caso de la generalidad o generalización [die Allgemenheit, 1897, §11 y §12]. Concretamente, si α es *un contenido*, —α es un contenido judicativo y, por lo tanto, un posible argumento para la negación, por ejemplo. Desde el punto de vista de la notación, esto tiene como resultado no ⊥—α, sino —⊥—α. Análogamente, si α y β son contenidos, el par —α, —β es un argumento para el condicional |, cuyo valor es



donde —β es el antecedente y —α el consecuente, como hoy diríamos.

Por otra parte, para la cuantificación universal Frege utiliza letras góticas minúsculas como variables que deben colocarse en la cavidad de la expresión '—⌣—*Φ*( )', asi como en el hueco después del signo funcional. Sin embargo, mientras que los conectivos se interpretan de manera cuasi veritativo-funcional, la generalidad simboliza el contenido judicativo: la circunstancia de que *Φ(A)*, cualquiera que sea el argumento *A*. La versión de la cuantificación fregeana es adicionalmente compleja por el hecho de que «en la *expresión* de un juicio, la combinación de signos a la derecha de |— puede siempre verse como una función de los signos que allí aparecen» [§§11 y 19]. Dejando de lado otros problemas, esto significa no sólo que *Φ(A)* es una expresión ambigua, sino también la posibilidad de una generalización de orden superior. La notación elegida por Frege no es del todo satisfactoria, no tanto por su aspecto bidimensional, sino por el hecho de que simbólicamente no refleje de manera exacta la transformación efectuada; es decir, por el hecho de que, por ejemplo, la negación forme parte del *contenido* y que todavía tenga que añadirse una barra para preservar el carácter judicativo del mismo. Frege simplificará esto en 1893, modificando las reglas en el sentido de que —α es siempre un contenido judicativo, independientemente de cómo sea el contenido α.

El último de los signos primitivos utilizados por Frege en la *Conceptografía* es '≡' [Inhaltsgleichheit], que expresa *identidad de contenido.*

Sin embargo, ésta se presenta no como identidad de objetos, ni como equivalencia entre juicios o contenidos judicativos, sino como una relación entre *nombres*, de modo que, expresado *in extenso*, si α y β son dos *nombres* de contenidos, '|—α≡β' significa afirmar la circunstancia de que α y β designan lo mismo. Claramente, esto implica que los contenidos admitidos en el sistema no son exclusivamente contenidos, funciones, argumentos, operadores lógicos (negación, condicionalidad y generalidad), sino, asimismo, extrañamente, nombres de contenidos y relaciones entre tales nombres. El sistema se vuelve así, en cierto sentido, autorreflexivo.

El tratamiento que se hace de la identidad de contenidos constituye, tal vez, el problema más grave de la *Conceptografía.* Frege explica la introducción, en esta forma, de la igualdad como sigue [1879,§8,14]: «El mismo contenido puede ser determinado por completo de muy diversas maneras. Pero el hecho de que en un caso particular realmente se determine lo *mismo* es el contenido de un *juicio*. De cualquier modo, antes de que esto ocurra debe darse un nombre *distinto a cada* una de ellas». Esto significa, entonces, que una afirmación de identidad es una afirmación sobre *signos* y no sobre los contenidos a los que éstos remiten. Es decir, hay una especie de ambigüedad autonímica que Frege admite de manera explícita [*ibid*], esto es, el signo de identidad es un signo de identidad *de contenidos*, aunque, de hecho, relacione signos. La introducción de '≡' apunta, en todo caso, como es obvio, a una necesidad más general de clarificación del lenguaje de la *Conceptografía*, que ya hemos advertido anteriormente. En particular, en relación a la identidad, Frege mismo emprenderá esta empresa en sus escritos de semántica, cuyo origen debe remontarse, en consecuencia, a estos problemas.[44]

VII

Intentemos ahora, una vez hechas las aclaraciones pertinentes, una sistematización de las reglas de formación del *sistema* lógico del *Begriffsschrift*, así como una descripción de su aparato deductivo. Los elementos expresivos básicos de esta escritura conceptual son:

a) funciones
b) argumentos de funciones
c) — (barra de contenido)
d) | (barra judicativa)
e) ~ (negación)[45]
f) → (condicionalidad)
g) ∀ (generalidad)
h) ≡ (signo de identidad)
i) nombres de contenido

Un *contenido es* cualquier expresión compuesta de los signos anteriores.[46]

(I) Las reglas generales de formación de expresiones judicativas, esto es, que expresan contenidos judicativos (CJ) en el sistema serían las siguientes:

1. Si Φ es una función y A un argumento para Φ, entonces —$\Phi(A)$ es un CJ;
2. Si α es un CJ, entonces —$(\sim\alpha)$ es un CJ;
3. Si α y β son CJs, entonces —$(\alpha \rightarrow \beta)$ es un CJ;
4. —$((\forall\delta)$ —$\Phi(\delta))$ es un CJ, si Φ es una función y δ un signo que puede reemplazarse en $\Phi(\delta)$ por cualquier argumento dando por resultado un contenido judicativo.[47]

[44] Y, por supuesto, a la necesidad de una explicación satisfactoria de la igualdad matemática, que concilie el «carácter sintético» [1879,§8,15], no trivial, de la identidad, con la unidad que su verdad implica. En las *Grundgesetze* {I, IX}, Frege reemplazará el signo por '='.

[45] En aras de la simplicidad y con el objeto de apreciar mejor las ventajas que para Frege se derivan de la utilización de un sistema bidimensional de notación, a partir de la selección que hace de signos primitivos, y sin dejar de tener presentes las diferencias que hemos apuntado en los parrafos anteriores, usamos aquí los símbolos usuales para el condicional y la cuantificación universal y nos serviremos libremente de los parentesis como signos de asociación.

[46] Evidentemente hay aquí una especie de círculo vicioso debido al carácter ambiguo del signo de identidad.

[47] Véase la nota siguiente

5. Si ν y η son nombres de contenidos, entonces $—(\nu\equiv\eta)$ es un CJ.

Los juicios pueden ahora definirse fácilmente.

(II) Si α es un CJ, entonces $|\alpha$ es un *juicio*

El sistema de *1879* consta, así, de *ocho nociones primitivas*: función, argumento, barra de contenido, barra judicativa, negación, condicionalidad y generalidad. A ellas se añadirá en 1893 el llamado *spiritus lenis,* para designar el *curso de valores* de una función, simplificándose las reglas de formación de CJs en el sentido de que todo contenido se considerará ahora como judicativo.

Pasemos ahora a la descripción del aparato deductivo propiamente dicho de la *Conceptografía*.

El cálculo lógico de Frege consta de nueve axiomas y tres reglas de inferencia.

Axiomas. Sean α,β y γ contenidos, Φ una función, δ una «variable»[48] y η y κ nombres de contenidos.[49] Los siguientes son axiomas.[50]

(1) $\vdash(—\alpha \rightarrow —[—\beta \rightarrow —\alpha])$

(2) $\vdash[—[—\alpha \rightarrow —(—\beta \rightarrow —\gamma)] \rightarrow —[—(—\alpha \rightarrow —\beta) \rightarrow —(—\alpha \rightarrow —\gamma)]]$

(8) $\vdash —[—(—\alpha \rightarrow —(—\beta \rightarrow —\gamma))] \rightarrow —[—\beta \rightarrow —(—\alpha \rightarrow —\gamma)]$

(28) $\vdash —[—\alpha \rightarrow —\beta] \rightarrow —[—(\sim(—\beta)) \rightarrow —(\sim(—\alpha))]$

(31) $\vdash —[\sim(—(\sim(—\alpha)))] \rightarrow —\alpha$

(41) $\vdash —\alpha \rightarrow —[\sim(—(\sim(—\alpha)))]$

(52) $\vdash —(\eta\equiv\kappa) \rightarrow —(—\Phi(\eta) \rightarrow —\Phi(\kappa))$

(54) $\vdash\eta\equiv\eta$

(58) $\vdash —(\forall\delta)—\Phi(\delta) \rightarrow —\Phi(c)$

Lo que Frege presenta aquí como axiomas es, en realidad, un conjunto de esquemas axiomáticos. Su sistema consta, en consecuencia, de un número infinito de axiomas.

Mientras que los primeros seis principios constituyen, *mutatis mutandis* y junto con una forma del *modus ponens,* un conjunto completo, aunque ciertamente no independiente[51] de axiomas para la lógica proposicional, el séptimo y el octavo dan expresión en el sistema a las propiedades o, siguiendo estrictamente una distinción introducida por Frege más tarde, en *Fuktion und Begriff,* a las características de la igualdad.

Es evidente, por lo demás, en el axioma (52), lo insatisfactorio de la versión fregeana de la igualdad. En efecto, mientras que en el antecedente η y κ son nombres de contenidos, en el consecuente son argumentos, esto es, contenidos o lo designado por esos nombres.

Por su parte, el noveno de los axiomas parecería ser la versión fregeana de un principio de especificación universal. No lo es, sin embargo, en su *forma más inmediata*. Para ver esto, es necesario tener presente la simplificación notacional a que da lugar la introducción en el sistema de letras latinas. De acuerdo con ella, una expresión de un juicio de la forma $|—(\forall\alpha)—\Phi(\alpha)$ puede ser reemplazada por otra del tipo $|—\Phi(u)$, donde u es cualquier letra latina.

---

[48] Frege se sirve de letras góticas minúsculas y una cavidad para expresar generalidad Tales letras son lo que en la actualidad se llamarían variables, un término que, como dijimos, Frege rechaza (véase nota 40).

[49] En sentido estricto, entonces, Frege requeriría de un mecanismo para formar nombres de contenidos.

[50] Los números a la izquierda indican el orden de inserción que se les asigna en la *Conceptografía*

[51] Es posible prescindir, por ejemplo, de los axiomas (8), (28) y (41)

En otras palabras, las «variables» griegas[52] se reservan para la cuantificación explícita, mientras que las letras latinas serían lo que Russell llama en *Principia Mathematica* «variables reales». El alcance de la cuantificación implícita debe ser todo el contenido del juicio. Con esto y los ajustes notacionales pertinentes, el axioma puede expresarse como sigue:

$\vdash\!\!-\forall\alpha - ((\forall\delta - \Phi(\delta)) \rightarrow - \Phi(\alpha)))$.[53]

Frege dispone de tres reglas de inferencia en la BS, que serían, respectivamente y con las modificaciones a que haya lugar, las de *modus ponens*, la *generalización universal* y la *especificación universal.* Sin embargo, la regla de especificación resulta notacionalmente poco clara, debido a la ausencia en la BS de constantes no lógicas para individuos. Considérese, en efecto,

$\vdash\!\!- \forall\alpha - \Phi(\alpha)$

La barra de contenido a la izquierda de '∀'indica que «Φ(α) es verdadero [es gelte], independientemente de lo que se ponga en lugar de α».

La versión fregeana de la regla de generalización es la siguiente:

De $\vdash\!\!- \forall\alpha - (-A \rightarrow - \Phi(\alpha))$

puede derivarse

$\vdash\!\!- A \rightarrow - \forall - \Phi(\alpha)$

con tal de que α no aparezca en *A* [1879, §11, 21].

Por otra parte, Frege es el primero en tener clara la imposibilidad de formalizar *todos* los principios inferenciales de un sistema en el sistema mismo, si es que éste ha de tener alguna operatividad. «Estas reglas y las leyes que representan –dice [1879, §13, 25]- no pueden expresarse en el sistema mismo de la BS, pues constituyen justamente su fundamento». Al igual que los axiomas y los teoremas del sistema, se trata de principios del pensamiento puro, aunque aquí transformados en reglas imprescindibles para el manejo de *signos* [*ibid*]. El papel que se asigna a la intuición es precisamente el de reconocer la validez de los principios axiomáticos y el de aplicar las reglas simbólicas del sistema, junto con aquellos principios que le sirven de base.

Otro aspecto peculiar del sistema, que es digno de mención, es el siguiente. La lógica de Frege es una teoría de la verdad en general, esto es, del juicio en cuanto tal. Podría añadirse aquí, sin embargo, que se trata del juicio *categórico* en cuanto tal, puesto que las considera-ciones de carácter hipotético no tienen cabida en el sistema. Es decir, lo único que puede afirmarse en la BS son juicios, *i.e* , CJs verdaderos o relaciones de deducibilidad a partir de premisas, que en Frege son también, siempre, juicios. A este respecto –al igual que en la medida en la que se habla de deducibilidad a partir de un conjunto de premisas en el sistema mismo- la lógica de Frege difiere de la práctica actual.[54]

---

[52] *Góticas en Frege.*

[53] Esto es, *mutatis mutandis*, en la versión en Frege del teorema ∀x(∀y Fy → Fx) del cálculo de predicados.

[54] En palabras del propio Frege [1910, n.7, 278]: «Sólo una vez que un pensamiento [Gedanke] ha sido reconocido por mí como verdadero puede convertirse en una de mis premisas... Es posible, por supuesto, investigar qué consecuencias resultan de la suposición de que A es verdadera sin tener que haber reconocido previamente la verdad de A; pero el resultado tendrá que incluir la condición *Si A es verdadero..* ». Por lo demás, Frege considera la distinción tradicional de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos como algo que tiene, a lo más, importancia gramatical {1879, §4, 4-5}.

A partir de ello resulta evidente que el sistema de Frege es de una complejidad mucho mayor que los cálculos correspondientes que hoy conocemos.

Una característica importante de la *Conceptografía* que constituye, asimismo, el origen de varios de sus problemas más importantes es la ausencia en ella de una separación drástica y clara entre semántica y sintaxis. Así, por ejemplo, la contraparte fregeana de nuestro '$A \to B$' no representa una combinación de signos que pueda *interpretarse* en términos veritativos, sino que afirma directamente: «El caso de que B sea verdadero y A sea falso no ocurre» [1879,§5,5]. En otras palabras, el sistema de Frege no es, en rigor, un sistema axiomático formal, tal y como hoy lo concebimos; no es, por lo tanto, un lenguaje formal en el sentido de Hilbert, un lenguaje susceptible de diversas interpretaciones -aunque con una principal; en Frege las expresiones poseen siempre un significado o, más precisamente, un contenido conceptual. A diferencia de algunos de sus antecesores, Boole, por ejemplo, cuya intención era «representar en fórmulas una lógica abstracta» -en fórmulas susceptibles de diversas interpretaciónes- lo que Frege se propone es «expresar un contenido por medio de signos escritos, de manera más precisa y comprensible que lo que las palabras hacen posible» [1882, 97]. En particular, las nociones de consecuencia y demostrabilidad no son distinguidas en él. No se trata, sin embargo, como en la lógica tradicional, de un estudio de fórmulas por medio de argumentos basados en una lógica intuitiva, sino que lo que se busca es incorporar a un lenguaje especial todo aquello que resulte necesario precisamente para prescindir al máximo del razonamiento intuitivo.

VIII

En la tercera y última parte de la *Conceptografía* [§24-§26] se presenta una aplicación del nuevo sistema a la teoría de las series, que resulta de fundamental importancia para entender el desarrollo de las ideas lógicas de Frege. Frege logra definir allí no sólo la noción de que una propiedad sea *hereditaria en una serie* sino, asímismo, la relación de *sucesor inmediato en una serie*. Con ello se sientan las bases para una *formulación* puramente lógica del principio de inducción finita y, por lo tanto, de la totalidad de la aritmética. En este, por sí mismo, notable resultado de sus investigaciones debe verse el origen del logicismo fregeano. Es decir, de un planteamiento general que se proponía el análisis del papel exacto de la lógica en las matemáticas -concretamente, de la porción de éstas basada enteramente en aquélla- Frege transita ahora a la tesis del carácter esencialmente lógico de la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos. Desde el punto de vista técnico, sin embargo, el examen lógico de las nociones dichas requiere esencialmente de una cuantificación de orden superior y marca el punto de transición entre los dos objetivos de la lógica fregeana.

En §24 de la BS se define, en primer lugar, lo que significa que una propiedad sea *hereditaria en la serie f*. En lo esencial y con las modificaciones pertienentes, F es hereditaria en la serie f si y sólo si

$$\|\!\!-\!\!- \forall\delta -\!\!(-\!\!- F\delta \to -\!\!- \forall\alpha -\!\!(-\!\!- f(\delta,\alpha) \to -\!\!- F\alpha)).$$[55]

De aquí se obtiene, en §26, la definición de *sucesor en la serie f* (fórmula 76):

$$\|\!\!-\!\!- \forall F -\!\!((-\!\!- F\ f\text{-hereditaria} \wedge -\!\!- \forall\alpha -\!\!((-\!\!- f(x,\alpha) \to -\!\!- F\alpha) \to -\!\!- Fy)$$

de la cual Frege hace la siguiente paráfrasis: «Si de las dos oraciones [Sätze]de que el resultado de aplicar f a x tiene siempre la propiedad F y la de que esta propiedad es

---

[55] La doble barra judicativa antes de un contenido judicativo indica en Frege definición.

hereditaria en la serie f, independientemente de cuál sea esta F, puede concluirse que y tiene la propiedad F, decimos que *y sigue a x en la serie f*...»

A partir de esto, Frege obtiene (fórmula 77) un principio esencialmente equivalente a la inducción matemática: Si x tiene una propiedad F que es f-hereditaria y si y sigue a x en la serie f, y misma tiene la propiedad F.

Es notable el paralelo entre la demostración de Bolzano del teorema que lleva su *nombre* y las consecuencias filosóficas que éste extrae de ella,[56] por una parte, y este descubrimiento de Frege y su evaluación del mismo, por la otra. En ambos casos, el destinatario es Kant. «En este ejemplo –dice Frege al inicio de su tratamiento conceptográfico de la teoría de las series [1879, §23,55]- puede verse de qué manera el pensamiento puro, que por su propia naturaleza prescinde de todo contenido originado en los sentidos, lo mismo que de los contenidos proporcionados por una intuición *a priori*, es capaz de producir, exclusivamente a partir de contenidos derivados de sus propias características, juicios que a primera vista sólo parecerían ser posibles gracias a algún tipo de intuición». En otras palabras, tanto Bolzano como Frege coinciden –aunque en distinta medida- en la reivindicación de la analiticidad en las matemáticas, en oposición al intento kantiano de fundamentar la aritmética en la intuición.

IX

Intentemos ahora, para terminar, una evaluación general de la primera lógica de Frege.

En el cálculo de la *Conceptografía* se lleva a cabo, esencialmente, la primera síntesis histórica de la lógica proposicional y la lógica de predicados y relaciones. Pero esta lógica no sólo es novedosa en lo relativo a alcance, métodos, enfoque, carácter sistemático y aplicacio-nes, sino que constituye, asimismo, el paso fundamental y previo para el planteamiento de problemas sobre las características del sistema deductivo como un todo. En otras palabras, sólo en relación a un sistema *parecido* al de Frege. esto es, en un sistema sintáticamente preciso, en el que el aparato expresivo y deductivo sea enteramente explícito, es posible plantear consideraciones de carácter global sobre los límites y las capacidades del sistema mismo, como completud, consistencia, independencia, dispensabilidad de reglas, pruebas de imposibilidad, etc., tan características de la lógica contemporánea y para las que un sistema como el de Bolzano resulta demasiado inexacto. Frege es también el primero en hacer un uso claro y general de las variables –aun cuando en él se evite el término- y el primero en utilizarlas sistemáticamente para explicar la cuantificación.[57] En estos sentidos la *Conceptografía* constituye el primer sistema realmente moderno de lógica.

Todo esto no puede ocultar, sin embargo, el carácter problemático de varios aspectos, algunos de ellos fundamentales, de la construcción. Hemos aludido ya a algunos de ellos. En la conciencia que Frege mismo tiene de estas insuficiencias, sobre todo en lo que atañe a la índole precisa de las funciones, a la distinción clara entre éstas y los objetos y al tratamiento que en 1879 se ofrece de la igualdad, debe buscarse, en consecuencia, la

[56] Véase el Cap. 2 , VI,I.

[57] En realidad, la idea fundamental de Frege, la introducción de funciones en la lógica, puede verse como una extrapolación de la distinción entre variables y constantes que tiene lugar en el álgebra y el análisis al terreno del «pensamiento puro» en general.

génesis de sus escritos semánticos ulteriores, cuyos títulos mismos son reveladores de tales inquietudes.[58] En lo que sigue presentamos, en breve, algunos de los desarrollos a que tales problemas dan lugar. En el caso de que los mismo tengan una secuela en Frege mismo nos referiremos a ella tomando como referencia principal las *Grundgesetze*, indiscutiblemente, la obra en la que las ideas lógicas de Frege encuentran su expresión más decantada y sistemática.

La *Begriffsschrift* es un sistema de lógica clásica. Frege considera superfluo en la lógica un enfoque que se ocupe de los aspectos modales de la argumentación. «Cuando llamo a una oración [Satz] necesaria -dice [1879, §4,5]- lo único que estoy haciendo es proporcionar, por este medio, una indicación acerca de los fundamentos de mí juicio», esto es, una indicación acerca de las razones que tengo para aceptarlo. No se afirma nada sobre el contenido mismo de tal juicio, por lo que el análisis conceptográfico de tal necesidad, esto es, el tratamiento de los juicios apodícticos puede omitirse por completo». Como hoy sabemos, gracias a los trabajos de Lukasiewicz, Post y otros, existe una diversidad de *relaciones* proposicionales lógicamente significativas que no dependen de contenidos particulares y que, de acuerdo con los criterios fijados por Frege mismo, deben formar parte de la lógica. En la actualidad, parecería preferible hablar, más bien, de una pluralidad de lógicas, más que de *la* lógica, entre las cuales es claro que la lógica clásica con cuantificación de primer orden ocuparía un lugar privilegiado, y entre las cuales tendría cabida también un sistema de orden superior semejante al de 1879.

En las *Grundgesetze*, Frege emprende una reforma a fondo de la parte semántica de su lógica que hace del sistema de la *Conceptografía* algo esencialmente más complejo y refinado que su contraparte de 1879. Se distingue, así, consecuentemente entre uso y mención, en primer término. En el curso de esta consideración se introduce igualmente una teoría general de las expresiones significativas que las concibe como *nombres*, en relación a los cuales es posible distinguir dos aspectos: su sentido y su referencia. Esta distinción se encuentra en la base del problema mismo del significado. La denotación, aquello a lo que se refiere un nombre, es ahora múltiple: algunas expresiones denotan *objetos*, otras *funciones* y otras, por último, *valores de verdad*. En particular, los juicios y los contenidos conceptuales se subsumen en tal teoría y se habla ahora de oraciones como nombres, cuya referencia es siempre uno de los dos valores de verdad, lo verdadero y lo falso.

El sentido de los nombres consiste, más bien, en el *modo* en el que se hace referencia a algo, por lo que tiene que ver con los aspectos intensionales de una expresión.

La distinción entre estas facetas del significado se encuentra estrechamente ligada a los problemas suscitados en 1879 por la ambigüedad en torno al signo '≡' y le permite a Frege no sólo un tratamiento satisfactorio de la igualdad, sino también una separación clara entre extensionalidad e intensionalidad. Puede afirmarse, en realidad, que la intención última de la semántica de Frege y la razón principal de la insatisfacción de éste con el tratamiento de la identidad, presentado en 1879, se encuentran íntimamente ligadas al problema de hasta qué punto lo extensional puede reemplazar en las matemáticas lo intensional. Es evidente, como lo ejemplifica el caso de la identidad, que tal exclusión no

[58] *Función y Concepto* [Frege 1891], *Sobre el Sentido y la Denotación* [Frege 1892a], *Concepto y Objeto* [Frege 1892b], como se les conoce en español.

puede ser total.[59] Esto nos permite, al mismo tiempo, una visión más completa de la lógica de Frege. Ésta es, en efecto, fundamentalmente, una lógica de intensiones, las nociones básicas del sistema fregeano, los contenidos, son nociones intensionales. La idea subyacente de la investigación fregeana de los fundamentos de las matemáticas parecería ser la de que en las matemáticas lo esencial es, sin embargo, la extensionalidad y la de que una teoría satisfactoria de ésta requiere una elucidación previa de aquéllas y de sus relaciones con ésta. Una vez aceptada la tesis logicista, Frege, nos parece, concebirá las matemáticas justamente como aquella parte puramente exten-sional de la lógica.

Otra diferencia fundamental entre los sistemas de 1879 y 1893 es la relativa a las funciones. En las *Grundgesetze* el carácter *no lingüístico* de las mismas forma parte de la teoría general de nombres que acabamos de mencionar. Las funciones son ahora referentes de ciertas expresiones.[60] Como tales, tienen un carácter *objetivo*, si bien siguen pensándose como algo esencialmente diferente a los objetos. Su relación con éstos y con las oraciones es ahora mucho más precisa: Las «variables» forman parte de expresiones funcionales, pero se distingue ahora, en lo que a ellas se refiere, entre *valores* y *substitutos* (es decir, nombres de sus valores), *valores de la función* (V o F) y *oraciones*. Las «variables» representan, por así decirlo, el «hueco» en las funciones, su aspecto característico, que Frege describe, como hemos dicho antes, como su no-saturación. Esto es, también, lo único que las diferencia de los objetos. Con cierto tipo de funciones, los conceptos, Frege puede luego definir el *curso de valores* y la *extensión de conceptos*, con lo que obtiene un aparato, en apariencia, esencialmente equivalente a una teoría de conjuntos y puede luego construir el resto de la aritmética.

Todo ello se dará, sin embargo, a partir de varios supuestos sumamente problemáticos. El de un realismo irrestricto a la manera de Bolzano, en primer lugar, que se manifiesta sobre todo en una idea demasiado amplia del ámbito de los objetos y también, por lo tanto, de lo que resulta admisible como argumento de una función. Este realismo resultará aún más evidente en 1893, donde, por ejemplo, se postula que una función tiene siempre un valor para cualquier argumento, concibiéndose al mismo tiempo las extensiones de los conceptos como objetos. Esta será la escotilla que permitirá a Russell probar la inconsistencia del sistema de 1893.

Pero las funciones resultan también problemáticas en el siguiente sentido. Para preservar la distinción básica entre funciones y objetos, Frege distingue entre funciones de primero y segundo órdenes. Por otra parte, la barra de contenido es vista por él como una función. Es claro, sin embargo, que no puede tratarse de una función de primer nivel; pero igualmente que no puede ser tampoco una función de segundo orden y, por razones análogas, si tal estratificación se continúa, que no puede serlo de ningún orden o, si lo es, que el sistema es autorreflexivo y, en consecuencia, que está expuesto a los *peligros* que esto implica, por ejemplo, en relación a su consistencia, particularmente en el caso de un platonismo tan amplio como el practicado por Frege. Sea esto como fuere, es evidente aquí la estrecha conexión entre los problemas que el sistema de la BS plantea y los que

[59] Aunque también, como lo han mostrado los resultados de Tarski en relación a la idea de *verdad* y otras nociones semánticas, que muchos de tales conceptos pueden ser caracterizados extensionalmente de manera satisfactoria

[60] Como palabras-concepto [Begriffswörte], palabras-relación [Beziehunngsswörte], etc.

intentarán resolver unos años más tarde Russell y Whitehead con la teoría de los tipos lógicos.

Hay una especie de regresión en Frege. La aritmética es el punto de partida de su *Conceptografía*; al mismo tiempo, sus conclusiones lo llevarán a pensar en la posibilidad de construir ésta a partir de aquélla. Ahora bien, una vez asumida tal empresa, la lógica requerida es una lógica esencialmente *más compleja* y, en su tiempo, a pesar de los esfuerzos pioneros y notabilísimos de Frege al respecto, algo esencialmente menos claro que la aritmética misma. En este sentido, la tesis logicista resulta paradójica y, por supuesto, de entrada fallida. En nuestra opinión, la tarea que Frege se propone resulta históricamente mejor librada si se tiene presente el problema que originalmente se plantea, esto es, determinar qué tanto de las matemáticas puede obtenerse suponiendo exclusivamente la lógica. En este orden de ideas debe inscribirse, como uno de sus sorprendentes logros, la *definición* lógica de número, a la que, como quedó apuntado, la BS contribuye decisivamente.

El origen de muchos –aunque obviamente no de la totalidad- de los problemas que plantea el sistema de 1879 debe buscarse en el intento fregeano de construir un formalismo no estrictamente lingüístico. El conceptualismo de Frege, su compromiso irrenunciable con los contenidos es la causa de complicaciones excesivas e innecesarias en el sistema. Ejemplo de ello es, en primer lugar, la introducción de un mismo tipo de signos tanto para contenidos como para nombres de tales contenidos, pero también la introducción misma, innecesaria, de la barra de contenido, cuya función esencial es la consideración sin pretensiones judicativas de un CJ. Otro aspecto de ello es el de las complicaciones notacionales a que da lugar la aparente –aunque en los hechos, falsa- supresión de las variables, por la única razón de un apego excesivo a la etimología del término. Nada de ello demerita, sin embargo, el logro fundamental de Frege: la formalización de una gran parte de la argumentación en matemáticas y su reducción a un conjunto relativamente pequeño de primitivos notacionales y judicativos, esto es, la demostración de que grandes porciones del razonamiento matemático son susceptibles de un tratamiento preciso sin recurso alguno, en principio, a la intuición, la construcción de un sistema formal que, aunque imperfecto y peculiar constituye un primer y avanzado ejemplo de un *cálculo lógico*.

La *Conceptografía* –la de 1879, lo mismo que la de 1893- no es una obra cerrada en sí misma. Frege admite allí, como *posibilidad teórica*, la construcción de un sistema de manera puramente sintáctica. En las *Grundgesetze* [1903, §90] se habla, en efecto, de que las expresiones, axiomas y reglas de inferencia, por ejemplo, podrían haberse introducido simple y sencillamente «como estipulaciones arbitrarias» y manejarse, en consecuencia, «como figuras» sintácticas. Si bien el apartado forma parte de la crítica de Frege a una versión temprana del formalismo (representada por E. Heine y J. Thomae), que ya había desechado con razón como demasiado pobre como pretensión fundamentadora en 1884 [II, §28], en 1909,[61] Frege es convencido por Löwenheim [cfr. Frege 1976, XXIX, 158] de la posibilidad de un desarrollo satisfactorio de la arimética, justamente a partir de lo expuesto

[61] Hasta 1903, Frege mantiene, en lo esencial, la actitud expresada en Frege 1884 [*loc cit.*], 1903 [§§86-137] y en la correspondencia con Hilbert (1895-1903) [Frege 1976] no sólo en lo que respecta al método axiomático en general, sino también en relación a los fundamentos de éste, al problema de la existencia en matemáticas y a la necesidad y posibilidades de una demostración de consistencia de la aritmética. A diferencia de una opinion extendida, Frege sí fue capaz de apreciar el sentido de los nuevos *métodos* propuestos por Hilbert, aunque sin dejar de discrepar con éste sobre todo en los aspectos filosóficos.

por Frege en las *Grundgesetze*. Todo ello, junto con la necesidad de una revisión de la BS de 1893 impuesta por la aparición de las contradiciones, acerca a Frege a los umbrales de una concepción en la que el sistema mismo es objeto de estudio, a la *metamatemática*, que Hilbert comenzará a desarrollar en esta época.

Al final del Prefacio a las *Grundgesetze* [I, xxv-xxvi], Frege se refiere a los grandes objetivos de su lógica, mencionando la demostración de las leyes básicas de la aritmética como teoremas de su sistema como «la verdadera *prueba* de mis convicciones lógicas» y expresando también la esperanza de que su sistema contribuyera, a pesar de los obstáculos para su difusión, a renovar esta disciplina. La historia no le ha dado la razón en lo que toca a sus dos objetivos generales. Pero tampoco se la ha dado en lo que se refiere a los criterios de evaluación de su obra. Pocas veces en la historia de las ideas es posible determinar el momento preciso en el que se da *inicio* a *un modo* radicalmente diverso de practicar una disciplina. Éste es precisamente el caso de la lógica y el año de 1879, la fecha de aparición de la *Begriffsschrift*.

Capítulo Cuatro

ACERCA DEL CONCEPTO DE NÚMERO

Uno de los problemas centrales en torno a la fundamentación de la aritmética es el relativo a la naturaleza de los números naturales. El planteamiento es antiguo. Se encuentra ya, por ejemplo, en la filosofía griega, en los pitagóricos y Platón. Durante el siglo XIX adquiere, sin embargo, un nuevo sentido en el marco de la fundamentación del análisis. En correspondencia con ello, en esa época se presentan diversas tentativas de respuesta a esa cuestión, aparentemente conclusiva en la tarea de dar una base sólida y definitiva a aquella rama fundamental de las matemáticas. Los dos intentos decisivos a este respecto son los de Dedekind y Frege. Pero la aritmética de Peano tiene, asimismo, alguna importancia en este contexto debido a la gran difusión e influencia que alcanza en la última década del siglo pasado y los primeros años del presente[1] y al hecho de que, con frecuencia, se considere a su autor como un antecedente directo o indirecto del logicismo. El presente capítulo está dedicado al estudio de las teorías de Dedekind y de Peano. En la primera parte se analiza la teoría dedekindiana de sistemas, al igual que los aspectos más importantes de la crítica de Frege a la misma. En la segunda se examina la axiomatización de la aritmética que Peano presenta a partir de 1889, confrontándola con los resultados de la primera sección. La hipótesis de trabajo que guía esta exposición es la de que, a pesar de algunas semejanzas y coincidencias entre todos ellos, existe una diferencia esencial en cuanto al planteamiento mismo del problema y a la solución que se da de él, que resulta, además, indispensable para comprender mejor no sólo la peculiaridad del enfoque de Frege, sino el desarrollo del logicismo hasta su fin con Russell y su superación o vinculación con otras concepciones acerca de los fundamentos de las matemáticas, en especial con la teoría axiomática de conjuntos que Zermelo comienza a exponer desde 1904.

[1] Entre otros, existen trabajos sobre el tema de Kronecker, Mill, Schroder, Husserl, etc. Frege mismo critica agudamente algunas de estas concepciones en los *Grundlagen der Arithmetik*. Una teoría fundamental en este contexto es, sin embargo, la teoría cantoriana de conjuntos. El trabajo de Cantor se encuentra íntimamente ligado al de Dedekind y en lo relativo a los conjuntos finitos coincide esencialmente con él.

Parte I

La teoría dedekindiana de sistemas y los fundamentos de la aritmética

I

La preocupación principal de Dedekind, como la de la mayoría de los matemáticos más notables de su generación -Weierstraß y Cantor, por ejemplo- es la de dar un fundamento riguroso al análisis, la de edificar el cálculo infinitesimal sobre una base conceptual clara[2] que permita eliminar al máximo cualquier recurso a la intuición -sobre todo, a la intuición geométrica.[3] Se trataría, entonces, en primer término, de *construir* el análisis de una manera puramente aritmética o, dicho en otras palabras, de *aritmetizarlo*. El enfoque de Dedekind es *genético*, es decir, la idea es construir una estructura, la de los números reales, a partir de otra, la de los racionales, suponiendo sólo -aparte de la lógica- lo que resulta característico de ésta: el sistema [=conjunto] mismo de los racionales y las relaciones de orden entre sus elementos. El procedimiento puede ser reiterado análogicamente hasta llegarse al conjunto de los que parecerían ser los objetos matemáticos básicos: los números naturales [cfr. Dedekind 1872, §1, 5; §3 y 1887, iv]. Aunque éste es el objetivo general primario de Dedekind,[4] el primer gran paso concreto se da en 1872 en su *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. En el §4 de esta obra excepcional y ejemplar, verdadero clásico de la historia de la ciencia, Dedekind expone su teoría de los números reales como *cortaduras* [Schnitte], esto es, como pares (A,B) de clases de racionales ajenas entre sí, con la propiedad de que todo elemento de A es menor que todo elemento de B y cuya unión es igual a Q, esto es, al conjunto de los números racionales. Los números reales pueden, entonces, definirse como tales cortaduras y el sistema de todos estos números puede establecerse luego (§21, 16) como un conjunto bien ordenado y continuo, esto es, con la propiedad siguiente (§5, iv, 17): Si el sistema R de todos los reales se divide en dos clases U_1 y U_2, tales que todo número α_1 en U_1 es menor que todo número α_2 en U_2, entonces existe un único número real α que corresponde a esta cortadura. Por último, en el §7, Dedekind demuestra un resultado equivalente al principio de continuidad y que, como éste,

[2] A esta condición se añadirá, años más tarde, con el surgimiento de las paradojas, la exigencia de seguridad (cfr. Dedekind 1887, pref. 3ª edición [1911]).

[3] «Se dice con frecuencia -escribe Dedekind [1872,4] al exponer las razones de su investigación sobre los reales- que el cálculo trata de las magnitudes continuas. Pero en ninguna parte se ofrece una definición de esta continuidad y aun las presentaciones más rigurosas del cálculo diferencial basan sus demostraciones no en la *continuidad misma*, sino que recurren, con mayor o menor conciencia de ello, a ideas de la geometría, a ideas basadas en ésta o se apoyan en principios que no han sido nunca demostrados de manera puramente aritmética»

[4] Cfr. Dedekind 1887, iv.

puede servir de base a todo el análisis: *Toda función creciente pero acotada posee un límite.*

Una consecuencia inmediata de lo anterior es el carácter derivado de $\mathbb{R}$. Se trata, en efecto, de algo generado por la lógica y las operaciones conjuntistas -diríamos hoy- a partir de la aritmética de los racionales[5] y, en última instancia, de la aritmética de los naturales. Ahora bien, ¿puede irse aún más lejos o es ésta la base absolutamente simple en la que descansa el análisis? ¿Pueden definirse, en otras palabras, los números naturales o deben tomarse como algo dado y de qué manera? Una respuesta afirmativa a la segunda de estas preguntas significaría, posiblemente. además, por ejemplo, según Kant, que el fundamento último del análisis y de las matemáticas clásicas se encuentra en la intuición y en algún tipo de experiencia de esos números. En este sentido, el conocido *dictum* de Kronecker puede interpretarse como la identificación de la base común e irrecusable y, de acuerdo con él, *última* y absolutamente definitiva en la que descansarían no sólo el análisis, sino las matemáticas en su totalidad.[6]

II

La respuesta de Dedekind a la pregunta anterior es negativa. La idea de número en general y, en particular, la de número natural no es algo primitivo e irreducible, sino que ha sido adquirida a partir de nociones más elementales; sus leyes y principios son, en realidad, resultado de un proceso tanto de aprendizaje como argumentativo. Hemos adquirido por repetición y práctica continua de ciertas capacidades intelectuales el concepto de número y gracias a la reflexión sobre esa práctica permanente hemos llegado a los principios que lo rigen. Y si bien esto no nos dice todavía qué son los números, sí establece una conexión esencial entre tales facultades y ellos. «La posibilidad -dice Dedekind- de reducir tales verdades [aritméticas] a otras más simples, a pesar de que la serie de inferencias pueda ser muy grande e, inclusive, en apariencia, artificial, constituye para mí una prueba irrefutable de que su posesión o la creencia en ellas no puede estar en forma alguna dada por una intuición inmediata e interna de las mismas, sino que ha sido adquirida por la repetición más o menos completa de pasos deductivos simples» [1887, v]. De ser así, habría algo más elemental aún que los números naturales y, por lo tanto, la idea de Kant, según la cual la aritmética de los mismos se basa directamente en la intuición, sería errónea. En consonancia con esto, la investigación dedekindiana se plantea, como meta última y general, el establecimiento, sobre una base *unitaria*, de la «ciencia del número» [*ibid*], como se caracterizan en esa época las matemáticas. La conclusión tiene algo de paradójica en el sentido de que si las matemáticas son «la ciencia del número», su fundamentación en otro tipo de objetos no numéricos demostraría que, en realidad, tratan de otra cosa. Pero, sin duda, esto no es sino expresión del tránsito y extensión que tiene lugar en esta época en lo relativo a qué constituya precisamente el objeto de las matemáticas, un movimiento que tiene a Dedekind como uno de sus primeros y más conspicuos representantes. Como se hará

---

[5] Significativamente, el §4, en el que Dedekind los define, lleva el título *Schopfung der Irrationalen*, esto es, literalmente, «Creación de los números irracionales». *Véase la nota 27 más adelante para una explicación del* sentido que esta expresión tiene en Dedekind.

[6] «Algún día se logrará -escribe Kronecker en una versión no muy conocida del mismo- la «aritmetización» de todas las matemáticas, esto es, fundamentarlas en la base simple del concepto de número en su sentido más restringido» [citado en Edwards 1988, 141].

más claro un poco más adelante, el nuevo enfoque centrará su atención en las propiedades *estructurales* de los sistemas.

III

Como Leibniz, Frege y, en parte, como hemos visto, también Bolzano, Dedekind piensa que la *lógica* es lo único que puede resultar más elemental que la aritmética y servirle de base conceptual. En realidad, de acuerdo con esto, su ensayo de 1887 sobre la naturaleza y la esencia de los números no sería otra cosa que un tratado de lógica, específicamente de una de sus partes medulares: la aritmética de los números naturales. «Nada que en la ciencia sea susceptible de demostración -dice Dedekind en el enunciado de las metas de este escrito- debe ser aceptado sin ella. Esta obvia exigencia no se ha cumplido cabalmente ni siquiera en la más elemental de todas las disciplinas científicas, es decir, en aquella parte de la lógica que tiene que ver con la teoría de los números...» [1887, iii]. La idea de que existe una parte de la lógica que resulta adecuada para la fundamentación de la teoría de números y, por lo tanto, del análisis convierte a Dedekind en el primer representante moderno del *logicismo.*[7]

Ahora bien, ¿cuál es «aquella parte de la lógica que tiene que ver con la teoría de los números»? La lógica de Dedekind consta de dos aspectos separados. Por una parte, un aparato deductivo informal e intuitivo que podemos llamar *lógica elemental*, implícito y en relación al cual se da por supuesta su absoluta seguridad y corrección y en el que no se apela a ninguna otra cosa que no sea el «pensamiento puro».[8] Allí tendrían cabida, en primer lugar, todos aquellos modos inferenciales implícitos en una argumentación correcta -todo aquello, podría decirse, que forma parte del aparato deductivo de una teoría de primer orden, *más* dos principios generativos: a) una especie de axioma de comprensión y b) un principio de abstracción. Dedekind se refiere a ambos en términos psicológicos como «actividades» o «facultades del entendimiento» [Fähigkeit des Geistes].[9] A ellos nos referiremos más tarde. Por la otra, sin embargo, se presenta con todo detalle una teoría específica, a la que podemos llamar *teoría funcional de sistemas* y que constituye la base conceptual explícita a partir de la cual se obtiene la aritmética, y que ahora abordaremos, en primer lugar, con algún detalle.

IV

Los elementos primitivos del sistema dedekindiano de lógica son los de *sistema* [System], *cosa* [Ding] y *transformación* [Abbildung]. Las nociones primera y última pueden ser identificadas, sin más, con las de *conjunto* y *función* respectivamente, es decir,

---

[7] Aunque *Was sind.* se escribe en 1887 y Dedekind da el primer paso hacia una caracterización unitaria de los sistemas numéricos en 1872, las ideas básicas en relación al proyecto general las tiene ya desde 1857 [cfr 1887, iv] Por esta razón y porque, en realidad, el planteamiento de Frege supone, de una u otra manera, la aritmetización del análisis a la que Dedekind contribuye de manera esencial, debe considerárselo anterior a Frege, cuya tesis logicista no se plantea plenamente, aunque con matices, sino hasta 1884 y, con todo detalle, en 1893 y 1903.

[8] La utilización, por parte de Dedekind, de esta designación , al igual que el subtítulo de la *Conceptografía* a que nos hemos referido en el capítulo anterior, muestran, como es obvio, aunque por contraposición, la influencia de Kant y dan fe de las pretensiones en buena medida racionalistas tanto de Dedekind como de Frege.

[9] Por ejemplo, en 1887, v.

con los dos conceptos fundamentales de las matemáticas modernas. De todas ellas se ofrecen en el texto de 1887 «explicaciones» heurísticas, si bien ninguna de ellas constituye una definición propiamente matemática. Así, una cosa es «cualquier objeto de nuestro pensamiento» [§1,1], mientras que un sistema se caracteriza de la siguiente manera:[10]

> «Con frecuencia y por alguna razón, cosas distintas $a,b,c,...$ pueden ser aprehendidas por la mente desde un punto de vista común; en tal caso, diremos que forman el *sistema* S, cuyos *elementos* son precisamente $a,b,c,...$» y tal sistema es una cosa [*ibid*].[11]

Concretamente, esta definición se refleja en la teoría dedekindiano en la forma de un uso constante e irrestricto de una especie de principio de comprensión.
Un poco menos vagas resultan las afirmaciones de Dedekind en lo relativo al concepto de transformación. Una de las nociones más primitivas de nuestra razón y la lógica consiste en la asociación de una cosa con otra [Dinge auf Dinge zu beziehen]. Justamente en esta capacidad de nuestra mente, sin la cual no es posible ningún tipo de pensamiento, se encontraría el origen de los números [cfr 1887, iv]. Contar y medir, las funciones numéricas por antonomasia, suponen, en efecto, asociaciones previas, por ejemplo, una asociación entre números naturales y objetos a contar. La práctica constante de *esta facultad* -de la que también hablar y leer serían manifestaciones- «es la razón por la que las verdades aritméticas se nos presentan con tal grado de evidencia y por la que muchos conceptos [como el de número mismo] que, en realidad, son nociones complejas, pasan por simples» [1887, v].

Filosóficamente, esto tiene la consecuencia obvia de que los números naturales no tienen un carácter irreductible y que las verdades sobre ellos son de carácter estrictamente lógico, es decir, no tienen que ver con la intuición, ni con ningún tipo de experiencia.

Examinemos ahora los aspectos más importantes de la construcción dedekindiana de la aritmética de los naturales.

En [1887, §2, 21], Dedekind ofrece, remitiéndose expresamente a Dirichlet, una caracterización mucho menos imprecisa de transformación φ como una *ley* que asocia a cada elemento s de un sistema S «una cosa definida», su imagen, s'. Sea S' el sistema cuyos elementos son todas las imágenes de S bajo una transformación φ dada. Se ofrecen enseguida (§3, 26) definiciones de transformación similar [ähnlich] o unívoca, estableciéndose las propiedades elementales correspondientes. En [§3, 34] se formula, a partir de ello, la importante conclusión de que los sistemas pueden dividirse en clases de equivalencia módulo semejanza, que sirve de base para el planteamiento del problema de la cardinalidad de un *sistema y que* Dedekind mismo usará más adelante [§5, 64] para la definición de los sistemas numerables (véase más adelante).

En §4, Dedekind introduce la fundamental noción de *cadena* [Kette]. Dedekind piensa, en efecto, con razón, que es posible no sólo basar en esta gran idea la aritmética de

[10] Dedekind utiliza como sinónimos [cfr. §2] de 'sistema', los términos 'agregado' [Inbegriff], 'variedad' [Mannigfaltigkeit], 'totalidad' [Gesamtheit] y 'clase' [Klasse].

[11] Es notable, por lo demás, el parecido entre esta «explicación» de Dedekind y la que ofrece Cantor de *conjunto* [Menge] en 1895 [§1, 282]. «Por *conjunto* -dice- entendemos cualquier colección M de objetos m, bien definidos y distinguibles entre sí, en un todo». Esto sugiere una forma normal de proceder al presentar una teoría que no es muy precisa, que Frege critica acremente y que será superada justamente con el desarrollo estricto del método axiomático que tiene lugar como un producto lateral del problema de fundamentación de la aritmetica.

los naturales en su totalidad, sino que la misma posee características, aplicables a sistemas en general, estrechamente vinculadas a un buen orden. Sea φ una transformación dada de un sistema S en sí mismo. Si $K \subset S$ y $K' \subset K$, entonces K es una cadena. La designación se justifica a partir de las notables propiedades de este concepto, a saber: la imagen de una cadena es una cadena, la transformación φ no altera las relaciones de contención, la composición (unión) de cadenas es una cadena, la comunidad (intersección) de cadenas es una cadena; la existencia, para una sistema cualquiera A de una cadena mínima que lo contiene, con tal de que A' mismo ya esté contenido en una cadena [§4, 41]y, de manera particularmente importante:

Si φ es una transformación de *S en S* y $A \subset S$, entonces, puesto que S mismo es ya una cadena, el sistema de todas las cadenas en las que A está contenido no es vacío. La intersección A_o de todas esas cadenas es no sólo ella misma una cadena, sino, además, la «menor» cadena que contiene a A [§4, 47]. Un poco más abajo [§4, 57] se demuestra un resultado íntimamente vinculado al principio de inducción matemática:

$$(A_o)' = (A')_o,$$

que sirve para establecer el siguiente principio:

A fin de demostrar que la cadena Ao es parte de un sistema Σ cualquiera, basta probar

1. que $A \subset \Sigma$ y
2. que si a es un elemento común a Ao y Σ, a' es también un elemento de Σ, esto es, que $(Ao \cap \Sigma)' \subset \Sigma$,

del que el principio de inducción completa es un caso particular.

Con ello, Dedekind puede definir [§5, 64)] los sistemas infinitos como aquellos siste-mas similares a un subsistema propio. Como dijimos en el Capítulo 2, esta propiedad ya había sido identificada antes de él como característica específica de los sistemas infinitos (por ejemplo, por Bolzano [1851, §20] y Cantor (1878, 119)). Dedekind ve[12] su contribución al respecto precisamente en su consideración sistemática como propiedad *definitoria*. Pero, además, para Dedekind, como para Cantor, todas estas nociones son parte de una teoría general de los sistemas o conjuntos, por lo que va mucho más allá de la construcción de los números naturales y proporcionaría, según esto, un concepto general de ordinalidad, cardinalidad y número.

De cualquier manera, el teorema acerca de la existencia de por lo menos un sistema infinito, [§5, 66], fundamental para la construcción dedekindiana, es un punto esencialmente débil de su teoría. El argumento que allí se presenta ha sido llamado por Hilbert [1904, 265] *trascendental* en el sentido de apelar a nociones ajenas a las matemáticas y ser, por lo tanto, desde este punto de vista, inaceptable.[13] Bolzano había ofrecido ya una demostración semejante, aunque, como vimos, igualmente fallida. Lo que Bolzano demuestra no es propiamente la existencia de un agregado infinito, como él quiere, sino la de uno que no tiene un último elemento. Su prueba no es, en todo caso, simple sino que hace uso de nociones de orden. Por su parte, la demostración de Dedekind ofrece un

---

12 [1887, ix]

13 Hilbert se refiere con ello al uso de argumentos semejantes a los utilizados en la filosofía. En realidad, su objeción principal es la de que se supone en tal demostración la existencia de una totalidad que lleva a contradicciones

ejemplo interesante de la intromisión del psicologismo en las matemáticas, tan frecuente en la época y tan denodadamente combatido por Frege (y antes de él, pero sin éxito, por Bolzano)[14]: Sea S el sistema de las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento [meine Gedankenwelt]. Sean s un elemento de S y s' el pensamiento: s es objeto de mi pensamiento. s' es también un elemento de S. Ahora bien, si $\varphi(s) = s'$, φ es una transformación similar de S en S. Pero $S \not\subset S'$ porque, por ejemplo, mi propio yo pensante no es objeto de mi pensamiento. El argumento pertenece al tipo de los que habrían de conducir unos años más tarde a las paradojas. Las nociones centrales, pensamiento, yo, en él son, además, demasiado imprecisas. Russell [1919, 138] ha criticado con justicia la noción de pensamiento que allí interviene. Hay dos posibilidades de entender «pensamiento»: como una identidad con el objeto y como una descripción de éste. Como la reflexividad requiere que pensamiento y objeto difieran, 'pensamiento' debe significar *descripción del objeto*. Pero tampoco en este caso puede deducirse la reflexividad que Dedekind necesita, puesto que la relación descripción-objeto no es unívoca, al haber más de una descripción de muchas cosas.

V

Pasando a los números naturales mismos, Dedekind puede ahora definir lo que es un sistema finito como un sistema no infinito. Si bien este procedimiento de definir lo finito por medio de lo infinito podría parecer bastante artificial, debemos recordar, en primer lugar, que la base lógica de su sistema es absolutamente elemental (las nociones de cosa, sistema y transformación) y, en segundo, que su objetivo último es no sólo la construcción de los números naturales, sino la fundamentación unitaria de la noción de número desde una perspectiva de *generalidad* y *simplicidad* máximas, una que no excluya la posibilidad de números infinitos. A Dedekind no le interesa primordialmente, en otras palabras, como a la filosofía o a Frege, explicar el uso lingüístico de las expresiones numéricas para los naturales, sino precisar las propiedades matemáticas generales, esto es, abstractas de ciertas clases, dando por descontada una posible colisión con algunos -necesariamente no con todos- aspectos intuitivos de los objetos que forman parte de ellas. Todo esto a partir de una base unitaria, de la que, en todo caso, tales aspectos sean un caso particular. A ello apunta precisamente la combinación de verbos utilizados en el título mismo de su escrito de 1887: *Was sind* [¿Qué son?] *und was sollen* [¿y qué tendrían que ser, cómo deberían entenderse? ¿qué pretenden?] *die Zahlen?*[15]

El siguiente paso en la construcción dedekindiana de los números naturales se da a partir de los *sistemas infinitos simples* (=SIS). Un SIS es un sistema que puede generarse a partir de un solo elemento por aplicación repetida de una transformación similar -de manera análoga a como nuestros números naturales se generan a partir del cero por adición unitaria, esto es, justamente, como la menor cadena de la cerradura de ese elemento con respecto a la

[14] La prueba de Bolzano, a diferencia de la de Dedekind, recurre exclusivamente a nociones no psicológicas: proposición, verdad y números naturales.

[15] Observemos aquí, de paso, que mientras que Dedekind habla siempre de *Zahlen*, Frege se sirve, tanto en las *Grundlagen* como en las *Grundgesetze*, preferentemente de la palabra *Anzahl*, cuyo contexto de uso más frecuente en alemán es «die Anzahl der...», es decir, «el número de los...», que indica cardinalidad, que es menos general que la otra expresión y que respondería a la pregunta «¿cuántos?». De hecho, Frege reservará, en la segunda de estas obras [II, §157, 155], *Zahl* para los números reales y rechazará la idea de que esta estructura sea una extensión de la de los números naturales.

transformación. De manera más precisa: Sea N un sistema cualquiera. Si φ es una transformación similar de N en N, $a \in N$ y $a \notin N'$ y $\{a\}_0 = N$, entonces N es un SIS. Como su nombre lo indica, los SIS son los más simples entre los sistemas infinitos y pueden ser identificados con los conjuntos numerables.

Ahora bien, ¿hay sistemas de ese tipo? En [1887, §6, 72], Dedekind demuestra que todo sistema infinito contiene un subsistema con esas características, por lo que, por el problemático teorema en (§5, 66) mencionado antes, existen sistemas con tales propiedades.[16]

VI

Como es evidente, la definición de los SIS depende de la transformación φ. Esta función general genera, en realidad, un buen orden sobre N. Lo que Dedekind habría mostrado hasta ahora es que el sistema de todos los SIS no es vacío. Es evidente que existe una afinidad muy grande entre los números naturales que conocemos y los SIS; de hecho, el sistema de aquéllos sería un caso particular, aunque ciertamente no único, de éstos.[17] Dedekind llega a ellos por medio de un procedimiento problemático.

«*Si en la consideración de un SIS N cualquiera, ordenado por la transformación* φ, hacemos por completo caso omiso de la índole particular de los elementos y retenemos solamente la diversidad y las relaciones que φ establece entre ellos, esos [nuevos] elementos son los *números naturales, números ordinales* o, simplemente, *números* y el elemento básico 1 será el número básico de la serie de los números naturales» [1887, §6, 73, 17].

En realidad, Dedekind se propone explícitamente, desde un principio, trascender el ámbito puramente aritmético en aras de una máxima generalidad y de una visión unitaria. En una carta de1890 [pp. 99-100], por ejemplo, al explicar los objetivos de *Was sind...*, Dedkind se pregunta, «¿cuáles son las propiedades fundamentales, mutuamente independientes, de la sucesión N esto es, aquellas propiedades no deducibles unas de otras, pero de las cuales se siguen todas las demás? Y, *¿cómo podemos despojar estas propiedades de su carácter específicamente aritmético para que puedan incluirse en nociones más generales*[18] y en actividades del entendimiento sin las cuales no sería posible ningún pensamiento, pero con las que se puede dar una base confiable y completa a las demostraciones y a la construcción de conceptos y definiciones consistentes?»

Dedekind interpreta, además, este proceso de *abstracción* como un acto de liberación de cualquier utilidad específica de un SIS particular. Concretamente, Dedekind distingue aquí de manera implícita entre aplicaciones y estructuras abstractas. Las *matemáticas deben aten-der, en primer lugar y sobre todo, éstas. «En lo que toca a la* liberación de los elementos de cualquier tipo de contenido (o abstracción), podemos afirmar justificadamente que los números son *creaciones libres de la mente humana*» [1887, §73, 17] (cursivas nuestras). La aritmética tendría, entonces, por objeto primario el estudio en abstracto de las relaciones internas de los SIS.

---

[16] La demostración de Dedekind requiere del axioma de elección.

[17] En su formulación, [§6, 71], Dedekind utiliza el signo '1' en lugar de 'a', indicando su intención de obtener los numeros naturales como un SIS particular.

[18] Las cursivas son nuestras.

Ahora bien, a pesar del lenguaje psicologista en el que estas ideas se expresan, Dedekind está absolutamente alejado de cualquier posición estrictamente subjetivista. Precisa-mente el carácter *libre*, esto es, de máxima generalidad de los principios y operaciones, implica la objetividad de los mismos, por lo menos, en el sentido de una transubjetividad y de ser *a priori*; pero, también, en última instancia, la vacuidad de contenido de las nociones que allí intervienen. Esta consideración, junto con la índole elemental de las nociones necesarias para la construcción de su teoría de sistemas, parecerían ser las razones principales que llevan a Dedekind a concebir la aritmética abstracta, esto es, propiamente, la *teoría de los conjuntos finitos*, como una parte de la lógica, entendida ésta como una especie de «ciencia del pensamiento puro», esto es, de aquellos principios sin los cuales «no sería posible ningún tipo de pensamiento» [1887, iii]. Ambas ideas se sintetizan en la tesis logicista de Dedekind que, en realidad, según lo anterior, debemos entender más que nada en el sentido -verdaderamente audaz y renovador para su época- de que el objeto de estudio de las matemáticas no son los sistemas numéricos o geométricos, sino las *estructuras abstractas* (véase más adelante).

Aparte de lo anterior, el sistema de Dedekind para la aritmética elemental parecería ser adecuado en el sentido de hacer posible la obtención, como teoremas, no sólo de todos los resultados y principios corrientes acerca de los números naturales -como el principio de inducción completa [1887, §6, 80], las relaciones de buen orden [1887, §7], etc.- sino también en el de validar rigurosamente y hacer explícitas por primera ocasión las bases de procedimientos de definición y prueba fundamentales, como el teorema de recursión [1887, §, 125, 126], todo ello en el marco comprensivo y unitario al que nos hemos estado refiriendo.

Hemos mencionado ya la existencia de un sistema infinito como una de las principales dificultades internas de la teoría dedekindiana de los números naturales. La obtención misma de los números naturales en el sistema es también, sin embargo, problemática. Zermelo [1907a, 186] ha demostrado, en relación a la primera, que la suposición de la existencia de un infinito actual no es necesaria para la aritmética elemental, esto es, para la teoría de los conjuntos finitos.[19] Esta necesidad no surge sino hasta que se pasa al ámbito de los reales. La generalidad del planteamiento específico de Dedekind la hace, no obstante, imprecindible en su sistema. El desarrollo de la teoría axiomática de conjuntos, a la que las investigaciones dedekindianas contribuyen de manera decisiva, ha puesto de manifiesto la imposibilidad de una demostración de la existencia de conjuntos infinitos, distinta a la de la postulación axiomática de la de al menos uno de ellos. El análisis de Dedekind tiene, sin embargo, el mérito de haber hecho evidente tal necesidad. Por lo demás, como hoy sabemos, esta dificultad habría de resultar a la postre un obstáculo *filosóficamente* insalvable para la tesis logicista.

Consideremos ahora algunos problemas relativos al principio de abstracción y a los «números abstractos» de la aritmética dedekindiana.

VII

El paso final del procedimiento seguido por Dedekind para llegar a los números es, por decir lo menos, nebuloso. Los números se obtienen a partir de una clase no vacía de

[19] Sino que tal teoría puede basarse en el principio de inducción completa y otros principios de la teoría de conjuntos (entre ellos el axioma de elección).

sistemas isomorfos. Es decir, la abstracción es parcial: se conserva la estructura de orden de los sistemas y se abstrae de cada sistema en particular, postulándose la existencia de un nuevo objeto, esto es, en la terminología de la época se *crea* una entidad, una clase, que sólo posee características genéricas. La nueva clase representaría una especie de unidad *formal*, es decir, en realidad, una idealización de las relaciones de orden en cada uno de los sistemas particulares. Los números así obtenidos carecen, por lo tanto, de propiedades específicas diferentes a las de su posición en la estructura de la progresión.

Este mecanismo de *formación conceptual* parece haber constituido un expediente común en la época y representa, de hecho, un resabio de la lógica medieval.[20] Tanto el procedimiento mismo como sus implicaciones y supuestos filosóficos, aparecen con mucha mayor claridad en Cantor, quien se sirve de él con frecuencia, por ejemplo, para definir los números ordinales y, en una aplicación sucesiva del mismo, los cardinales. Los dos siguientes pasajes resultan no sólo muy cercanos a Dedekind, sino también particularmente ilustrativos al respecto: «Por número ordinal de un conjunto bien ordenado -escribe Cantor en 1884- entiendo el *concepto general* (el concepto genérico, el universal) que se obtiene cuando en el caso del conjunto ordenado M se hace abstracción de las propiedades y la notación de sus elementos y se piensa solamente en el orden de rango [Rangordnung] que relaciona entre sí a sus elementos; el *número* o *número ordinal de* M es, por lo tanto. común a todos los conjuntos bien ordenados *del mismo tipo*; es, en cierto sentido, aquello que les es inmanente» [Cantor 1932, 388]. Y, en un escrito sobre los fundamentos de la *teoría de los tipos de orden*, Cantor se refiere explícitamente a la filosofía tomista [1932, 411]: «Si en relación a un conjunto M dado, cuyos elementos son cosas concretas o conceptos abstractos se hace abstracción tanto de las características de sus elementos como del orden en el que es dado, se obtiene un concepto general bien definido (el universal, *unum versus alia* -en el sentido de: *unum aptum inesse multis* [=aquello que en lo múltiple es susceptible de considerarse como unidad]) al que llamo la *potencia* de M o también el *número cardinal* que corresponde a M».[21] Es probable también, por otra parte, que la «reducción eidética» husserliana sea otra manifestación de ese mismo procedimiento.

El proceso de abstracción constituye un ejemplo paradigmático de la intromisión de elementos psicologistas en las matemáticas, tan frecuentes en ellas durante todo el siglo XIX. La crítica general de Frege a esta forma de argumentación y, en particular, a la construcción dedekindiana de los números, puede servirnos, por lo tanto, como referencia para apreciar mejor no sólo la aritmética de Dedekind, sino también un tipo de *logicismo* más decantado -si bien no más interesante o novedoso desde un punto de vista estrictamente

---

[20] Aun un crítico tan acérrimo del mismo, como Frege, *parecería* recurrir a este tipo de elementos En 1881, Frege expresa, en efecto, la opinión de que «los números son, en primera instancia, una creación del pensamiento» [Nachgelassene Schriften, p.38]. Esto pondría de manifiesto un proceso de maduración del pensamiento de Frege que sería confirmado por ciertas reservas con las que en los *Grundlagen* se expresa la tesis logicista En nuestra opinión, sin embargo, una creatividad restringida del pensamiento -por ejemplo, respecto a los números- es consistente con la postura antipsicologista de Frege.

[21] Como Dedekind, Cantor habla de la abstracción como algo basado en un «aktives Denkvermögen», esto es, como un producto de una *facultad activa del pensamiento* [por ejemplo, en 1895, 282], sirviéndose, además, desde 1887, de la doble barra sobre una letra denotativa de un conjunto para indicar precisamente la doble abstracción que lleva de éste a su cardinal.

matemático-, el de Frege, así como las relaciones entre ambos enfoques. En lo que sigue, nos serviremos de ella, por lo tanto, cada vez que lo consideremos adecuado.

VIII

Para un lector de *Was sind und was sollen die Zahlen?* de los *Grundlagen* o las *Grundgesetze* resulta evidente la existencia de importantes coincidencias en las concepciones expuestas en estas obras, a pesar de las grandes diferencias terminológicas que existen entre ellas. Dedekind se refiere a Frege en 1890 [pp. *101, 102*], *así como en el* prólogo a la segunda edición de *Was sind ..*, constatando una «afinidad esencial» entre ambas teorías.[22] Por su parte, Frege describe [1893, vii-viii] el escrito dedekindiano de 1887 como «el trabajo más completo acerca de los fundamentos de la aritmética con que me he topado en los últimos tiempos». Podemos adelantar nuestra conclusión: si bien la crítica fregeana a Dedekind tiene como eje central la identificación y eliminación de elementos psicologistas en la obtención de los números, éstos sólo aparecen, como ya hemos notado, en la explicación dedekindiana de sistema, en el establecimiento de la existencia de un sistema infinito y, como ahora veremos, en la forma utilizada por Dedekind del principio de abstracción. Aparte de esto hay, en el fondo, una complementación entre ambas posturas. Es decir, los *objetivos* de Dedekind y Frege son, en realidad, *diferentes*: única y exclusivamente matemáticos, en el caso del primero, y lógico-filosóficos, en el del segundo. Frege mismo admite implícitamente esto [en 1893, VIII]: «En general -dice- el interés del matemático se centra en el contenido de una proposición. Lo que para él resulta importante es la demostración de la misma. Lo novedoso en este libro [las *Grundgesetze*] no es el contenido mismo de las proposiciones, sino la forma en la que son demostradas, las bases en las que se apoya». El primer expediente es el adecuado para el establecimiento de la verdad de una afirmación y se apoya en buen grado todavía en la intuición; el segundo, el suyo, sería, sin embargo, según hemos dicho en el capítulo anterior, el único adecuado cuando se trata de aclarar el fundamento de esta última y la *naturaleza* filosófica de los objetos en cuestión.[23] El problema para Frege es, en consecuenc más amplio que para Dedekind: no sólo dar una base matemáticamente adecuada a la aritmética, sino decirnos *qué* son los números. Lo que Frege se propone es, por lo tanto, una tarea adicional a la de Dedekind: llevar a sus últimas consecuencias la tesis logicista y mostrar definitivamente que las matemáticas no descansan en ningún tipo de intuición, ni siquiera en la demostrativa.[24] El primer aspecto de la crítica de Frege a Dedekind se refiere, por lo tanto, a la ya notada ausencia de una sistematización de los principios lógicos elementales. Pero es justamente este descuido el que le permite a Dedekind avanzar mucho más lejos que Frege[25] en la tarea *matemáticamente* más substantiva de dar un fundamento aritmético y general al análisis.

Ya hemos aludido antes a la vaguedad de las *Erklärungen* cantoriana y dedekindiana de 'conjunto', 'sistema' y términos análogos. Frege se refiere a estas ideas tanto en los

---

[22] Concretamente en lo relativo a la parte medular de la definición fregeana de número. la noción de sucesor inmediato de un elemento en una sucesión [Frege 1883, §79] y a lo que a ella sigue.

[23] Cfr. la distinción bolzaniana entre *constatación* y *fundamentación* expuesta en el capítulo anterior.

[24] «Se afirma con frecuencia -dice [1893, VII]- que la aritmética no es sino una forma desarrollada de la lógica. Sin embargo, esta tesis es dudosa, mientras las inferencias en las demostraciones no se basen en leyes lógicas reconocidas, sino, en apariencia, en la intuición».

[25] Según éste mismo lo admite [*ibid.*].

Grundlagen [§45] como en en las *Grundgesetze* [pp. VIII y 1], rechazándolas como fundamento de la aritmética, aunque reconociendo al mismo tiempo la necesidad de una caracterización *extensional* exacta «de aquello a lo que los matemáticos se refieren con las palabras 'conjunto', 'sistema', etc.».

Ahora bien, la consideración en Dedekind de los sistemas como extensiones, en la forma de una identificación de un sistema con sus elementos [1887, §2] es, en realidad, la causa de que en él se rechace [*ibid.*], de manera análoga a como ocurría en Bolzano, la existencia del vacío como sistema y, aparentemente, del 0 como número natural. Pero tiene también el desagradable efecto de cancelar [1887, §1, 3] prácticamente la distinción entre *cosa* y *sistema*, es decir, en terminos fregeanos, de que se confundan objeto y función o, en términos conjuntistas, inclusión y contención, $\in$ y $\subset$.[26]

Otro aspecto débil del sistema de Dedekind es la ausencia, en él, de un vínculo claro entre funciones proposicionales y sistemas. Como lo dijimos al principio, Dedekind hace un uso constante, aunque implícito, de una especie de axioma de comprensión, lo que en la práctica establece una conexión entre ambas nociones. De hecho, la explicación genética ofrecida por él de la noción de sistema apunta en tal dirección. Un sistema se obtendría, en efecto, cuando, «por alguna razón, cosas distintas pueden ser aprehendidas desde *un punto de vista común...*», pero ese punto de vista no puede ser otro que una norma o función proposicional. En este contexto, la única limitación que se establece es el carácter definido [Bestimmtheit] de la condición, es decir, la validez del principio del Tercero Excluido.[27] La aparición en el sistema fregeano de contradicciones que pueden trasladarse fácilmente a la teoría de Dedekind pondría de manifiesto poco tiempo después la imposibilidad de un platonismo tan irrestricto como el implicado por estos planteamientos. Dedekind mismo admite[28] como justificadas las dudas acerca de la seguridad de los fundamentos de su sistema, aunque manifiesta su confianza en que «una investigación rigurosa de la facultad creativa del espíritu que permite obtener algo nuevo y determinado a partir de ciertos elementos», pueda poner a salvo lo esencial de su construcción. Hoy sabemos, sin embargo, que por lo menos las nociones de sistema, conjunto -o, en términos de Frege: de lo que los matemáticos quieren decir con ellas, son absolutamente primitivas, esto es, no pueden ser definidas con base en algo más elemental, sino únicamente caracterizadas de manera implícita, enunciando sus propiedades esenciales, esto es, definiéndolas «por axiomas». Precisamente esa imposibilidad de explicarlas en términos más simples es lo que lleva a Dedekind y Cantor a recurrir a elementos no lógicos como «facultad del espíritu», «actividad de la mente», etc. En este sentido, la crítica de Frege acerca de la ininteligibilidad matemática de tales definiciones es completamente justificada.[29]

IX

Consideremos ahora el principio de abstracción. La utilización de este procedimiento es, en realidad, resultado de un enfoque específico acerca del papel y

[26] Dedekind identifica allí el sistema cuyo único elemento es *A* con *A* mismo.

[27] Dedekind se refiere expresamente [§1, 2, nota] a Kronecker, rechazando como injustificada cualquier limitación diferente a este principio lógico

[28] En el prefacio de 1911 a la tercera edición de *Was sind.*.

[29] Es importante observar la transición terminológica que todo esto determina. Mientras que Dedekind y Cantor hablan de «creación» [Schöpfung] de los números, Frege hablará, más bien [por ejemplo, en 1893, V], de su «construcción» [Aufbau] y opondrá esta idea a la de «análisis» [Zerlegung].

funcionamiento de las definiciones en un sistema deductivo, es decir, de una teoría general de la definición. Ahora bien, ¿cuál es la teoría de la definición presupuesta por Dedekind?

La concepción que actualmente tenemos de este mecanismo difiere fundamentalmente, en algunos aspectos, de la vigente hasta finales del siglo pasado. A partir de entonces y gracias en parte a las contribuciones de Padoa, Dedekind, Frege, Poincaré, Peano, Zermelo y Russell, entre otros, tiene lugar una importante diferenciación que hará evidente la existencia de desacuerdos básicos en relación a aquello que resulta aceptable al establecer una teoría matemática. Un punto de convergencia en torno a las definiciones es el de que muchas -tal vez la absoluta mayoría de ellas, no hacen sino abreviar una combinación de ideas, que resulta «nueva» solamente en el sentido de poner de relieve una posibilidad implícita, aunque quizá no notada o no notada suficientemente, en las nociones ya conocidas. En términos más formales, una definición es legítima cuando no es sino una abreviatura de una expresión cuyas partes significativas han sido aceptadas previamente en la teoría y, en última instancia, una forma sucinta, aunque en principio dispensable, de expresar algo en ella. Un ejemplo de este tipo de definiciones es la de *cadena* en Dedekind. Es evidente que el ejercicio consecuente de este procedimiento desemboca, en teoría, en una jerarquía conceptual o, en términos lingüísticos, terminológica, en cuya base se encuentran conceptos o términos no definidos y, asimismo, que su explicitación contribuye decisivamente a una visión mucho más precisa de los elementos y las dependencias que conforman una teoría deductiva.

Si aceptamos, como quiere el Frege de las *Grundgesetze* [I, XIII y §33, 51], que éste es el único tipo lícito de definiciones en las matemáticas, resulta obvio el error en el que incurren, por ejemplo, las definiciones dedekindianas de 'sistema' y 'cosa', pero también en el que caería la definición misma de los números naturales ofrecida por Dedekind. Ésta es, en efecto, un caso particular de las llamadas «definiciones generativas», *i.e.* de una clase de definiciones que permiten obtener nuevos objetos, a partir de una totalidad dada, por cancelación de diferencias. En nuestro caso presente, un nuevo objeto, la clase de los naturales, se obtiene por abstracción a partir de la totalidad de los SIS. Filosóficamente esto representa dotar las definiciones y, en último término, nuestra razón o alguna otra instancia similar, de una facultad inventiva, es decir, considerar que las definiciones pueden ser *creativas*. Los límites de tal facultad -y aun la existencia misma de ellos- no son del todo claros. Hemos mencionado ya como único principio restrictivo el principio del Tercero Excluído, así como el alegato vinculado a ello en favor de una libertad matemática -reivindicada, entre otros, por Dedekind y Cantor- que parece moverse exclusivamente en el ámbito de la posibilidad, esto es, en el ámbito regido exclusivamente por el principio de no contradicción. Esta fórmula aclara, según nos parece, no sólo que se hable en ellos, por ejemplo, de una «creación» de los números, sino que constituye al mismo tiempo un elemento explicativo de la génesis del logicismo en Dedekind. Si el terreno propio de las matemáticas es el de la posibilidad pura y las operaciones requeridas para su construcción no son sino un ejercicio del pensamiento a su nivel más general, parece natural pensar en que no hay, en realidad, ninguna diferencia esencial entre lógica y matemáticas.

Sin embargo, antes de continuar, señalemos aquí, como problema, otra posibilidad interpretativa más plausible en relación a la «creación» de objetos en las matemáticas clásicas. Es evidente que la consistencia, esto es, la posibilidad lógica es una condición necesaria para la existencia de algún género de objetos, pero eso no basta para la misma; tal introducción debe satisfacer alguna necesidad histórica o estar en consonancia con el «espíritu de generalidad»[30] y simplificación que parecería caracterizar las matemáticas. Éste es, también, *a pesar del énfasis hecho por sus autores en el aspecto creativo*, el caso de las definiciones de los reales de Dedekind, Cantor y Weierstraß, así como de la aritmética transfinita de Cantor. La noción misma de *cadena* en Dedekind se inscribe igualmente, según hemos visto, en esta perspectiva de dar una base general al tratamiento de los sistemas finitos y, en consecuencia, al análisis. Debemos diferenciar, por lo tanto, entre la expresión filosófica y aun las justificaciones filosóficas y generalizadoras ofrecidas por los autores de tales definiciones y el contexto específico en el que las misma se aplican. Este último es histórico y responde a las necesidades y conveniencias de la práctica matemática, *no de la mera* posibilidad lógica.

X

Examinemos ahora brevemente, por último, el problema de las definiciones abstractivas, tomando como base la crítica fregeana a las mismas, que tradicionalmente tenida por contundente.[31] Es necesario notar, ante todo, que los argumentos ofrecidos por Frege en contra de la abstracción son de varios tipos. No todas sus objeciones son aplicables, por lo tanto, a Dedekind. Frege presenta sus objeciones a la abstracción en tres bloques. El primero de ellos se presenta en los *Grundlagen* §§29-44, el segundo y el tercero, en el que, sin duda, se encuentran sus más apropiadas a Dedekind, se localizan en §§62-68, así como §85 y §§96-97, respectivamente, de la misma obra. La parte general de la crítica fregeana se centra en el aspecto psicológico de la abstracción, en el hecho, en otras palabras, de que se trate de un proceso que requiere de un *sujeto* que la lleve a cabo y, por lo tanto, que se encuentra limitado por la naturaleza misma del ser humano.[32]

Lo substancial del primer argumento particular de Frege en contra de la abstracción es como sigue. Cuando se habla de número, se habla de diversidad. Esto podría considerarse como el *origen* de la noción misma de número. La pregunta numérica por antonomasia, *¿cuántos.. ?* supone la diversidad pero, al mismo tiempo, algún tipo de homogeneidad. Así, el problema acerca de la naturaleza de los números se encuentra vinculado al de las relaciones entre unidad y diversidad o, equivalentemente, al de lo único y lo múltiple. Sin embargo, esto ha sido interpretado en el sentido de una identidad entre unidad y número uno[33] y desemboca, en última instancia, en un callejón sin salida: En un conjunto por enumerar, los elementos deben ser diferentes, pues, de no ser así, habría sólo uno. Pero, si este es el caso, resulta incorrecto asignar a cada unidad el signo '1', porque se trata, en realidad, de cosas distintas. Esta primera crítica de Frege al principio de abstracción considera, como caso ejemplar, el de Jevons. Éste explica la noción de número por medio de un tipo particular de abstracción. Cuando se usa un símbolo numérico, por *ejemplo*, '5', *estaríamos* utilizándolo en el sentido de

$$1+1+1+1+1$$

---

[30] Como A. Church [1960, 233], en otro contexto, lo llama

[31] Entre otros, por ejemplo, por M. Dummett [1991, 50].

[32] De manera análoga a como la intuición kantiana no puede servir para explicar, por ejemplo, la suma de números demasiado grandes para nosotros.

[33] Considerando que todos los demás números naturales pueden descomponerse como suma de unos o de unidades

y entendiendo que cada una de estas unidades es diferente de la otra. De ser necesario, podríamos escribir

$$1+1'+1''+1'''+1''''$$

para evidenciar las diferencias: «No habrá ahora -dice Jevons- ninguna dificultad para entender la naturaleza de la abstracción numérica. Consiste en abstraer del carácter de la diferencia en la que tiene su origen la pluralidad, conservando meramente el hecho. Cuando hablo de *tres hombres*, no necesito especificar de inmediato las notas características por las que cada uno es conocido. Tales notas deben existir, si es que realmente hay tres hombres y no uno solo y, al hablar de ellos como pluralidad, estoy dando a entender la existencia de las diferencias requeridas. El número abstracto sería, de acuerdo con esto, la *forma vacía de la diferencia*» [cit. en Frege 1883, §44].

La abstracción de la que aquí se habla no produce, por lo tanto, nada nuevo, sino que consiste, más bien, en una mera supresión de diferencias en una totalidad. La crítica de Frege es conclusiva; con esta abstracción a) no llegaríamos muy lejos en la construcción de los números;[34] b) no se explicaría cómo es que 0 y 1 son números,[35] c) se dice cómo abstraer, pero no en qué consiste la abstracción y d) lo que se obtiene siempre es un *concepto*, mientras que los números son *objetos*, como lo pone de manifiesto el uso de artículos determinados en relación a ellos, esto es, la imposibilidad gramatical de pluralizarlos y, sobre todo, el uso de la igualdad entre ellos.

Los puntos c) y d) de esta crítica de Frege pueden, sin duda, aplicarse a Dedekind. Debemos observar, sin embargo, en cuanto a c), que la crítica no es conclusiva. En realidad, en la ciencia no es necesario, según nos parece, saber qué sea exactamente algo, sino establecer los principios según los cuales opera. No sabemos exactamente qué sea una función o el movimiento, pero sí como operan.[36] El punto d) es, sin embargo, parcialmente acertado. De acuerdo con Frege, la abstracción no proporciona objetos, sino algo categorialmente distinto: *conceptos*. Por lo tanto, según parecería, los números no pueden ser obtenidos de esta manera. Si ampliamos la interpretación fregeana e incluimos en ella conjuntos, podríamos decir que la abstracción no proporciona objetos, sino conceptos o conjuntos cada vez más comprensivos.[37]

La vía seguida por Dedekind sería, en efecto, la de la obtención no de números individuales, sino de la *clase* de los mismos, la noción general de número y sus notas esenciales como sistema con una estructura en la que cada elemento está unívocamente determinado por el orden el que aparece en ella. En todo caso, los números individuales sólo importan *en tanto que formen parte de la misma y su característica única es precisamente el lugar que ocupan en la sucesión*. No hay, en Dedekind, en consecuencia, una aplicación falaz de tal principio. Lo que aquí se pone de manifiesto es, más bien, la existencia de diferencias irreductibles entre las dos concepciones en lo que toca a las relaciones entre totalidades e individuos. Para Frege, las primeras sólo pueden aprehenderse

---

[34] Por ejemplo, no llegaríamos nunca, por ejemplo, al 10 000, porque nos sería imposible aprehender tantas diferencias a la vez.

[35] ¿De qué tendría, en efecto, que abstraerse para llegar a ellos?

[36] «Para el matemático -dice Fraenkel [1968, 59]- lo que importa es el manejo de los objetos matemáticos, más que la investigación de su naturaleza ..»

[37] La única manera de entender esta conclusión de Frege parecería ser en el sentido de ir reemplazando constantes por variables y cuantificación existencial en un enunciado o en una función proposicional; pasar, esto es, de '$a>b$' a '$x>b$', '$\exists R\,(xRb)$', '$\exists y \exists R\,(xRy)$', '$\exists Px$'

por medio de conceptos y debe mantenerse, estrictamente y en todo momento, la distinción entre unas y otros. Por el contrario, para Dedekind tal distinción no es del todo nítida[38] o, en todo caso, no es tan rígida como en Frege: los conjuntos son ellos mismos objetos que pueden, por lo tanto, ser, a su vez, elementos de otros conjuntos.[39]

La historia de las matemáticas ha demostrado que, en realidad, no es necesario ningún otro tipo de entidades aparte de los conjuntos -esto es, que *strictu sensu* puede prescindirse enteramente de cualquier consideración de individuos, como ocurre en algunas teorías de conjuntos- y que la distinción requerida es simplemente contextual. Es decir, Dedekind parece estar, a este respecto, esto es, matemáticamente hablando, en la dirección correcta.

La diferencia de enfoque apuntada resulta aquí particularmente evidente: mientras que Dedekind está interesado en una consideración puramente matemática de las totalidades y en éstas como fundamento de las matemáticas, Frege está pensando también en términos filosófico-lingüísticos. La aparición de las paradojas en su sistema -que implica también *principios* de argumentación implícitos en Dedekind-[40] pondría nuevamente en el primer plano de atención el problema de la relación entre totalidades y elementos y haría indispensable no sólo una aclaración lingüística de nociones fundamentales como función proposicional, norma, condición, etc., esto es, de las nociones que establecen una conexión entre totalidades e individuos, sino igualmente el de los supuestos ontológicos básicos implícitos en la obtención de clases en general.

XI

Volviendo ahora al tipo de abstracción utilizado por Dedekind, debemos recordar, en primer lugar, que la prueba de la existencia de un sistema *infinito es fallida*. Esto significa que, en realidad, no sabemos a ciencia cierta si la clase de los SIS es vacía, en cuyo caso, no habría de qué abstraer. Es cierto también que aquí, como en el caso de la abstracción criticada por Frege, no sabemos en qué consista exactamente la abstracción, puesto que se trata de un acto psicológico. Sin embargo, es posible enunciar con precisión en qué condiciones resulta posible su aplicación. Es necesario, en primer término, partir de una clase no vacía A y, en segundo, que entre los elementos de A pueda establecerse una relación de equivalencia (en Dedekind, la clase en cuestión es la de los SIS y la relación no es otra que la existencia de un isomorfismo entre cualesquiera dos de tales sistemas). Ahora bien, que en la actualidad se considere justificada en las matemáticas, en tales circunstancias, la *introducción* de un nuevo género de objetos constituye un ejemplo de la manera en la que las contribuciones de Dedekind y Frege pueden complementarse. El cumplimiento de esas dos condiciones sería una condición necesaria -aunque obviamente no suficiente- para la postulación de un nuevo tipo de entidades en ellas.[41] En todos esos

---

[38] Como, de hecho, lo evidencia la confusión notada entre inclusión y contención.

[39] La adhesión consistente de Frege a tal distinción es una de las razones que lo llevarán a establecer en las *Grundgesetze una jerarquía de funciones que, sin duda, constituye un antecedente claro de la teoría de los* tipos de Russell.

[40] Por ejemplo, las definiciones impredicativas, esto es, aquellas en las que un objeto se define con base en una totalidad de la que él mismo formaría parte, de las que la de los números naturales es un ejemplo

[41] Los ejemplos abundan. Frege mismo analiza, por ejemplo, la posibilidad de definir la dirección de una recta por medio de la consideración de la relación de paralelismo entre ellas; las direcciones de a y b coinciden sii $a//b$. El concepto de *forma* puede obtenerse por medio de la relación de similitud geométrica en el conjunto de

casos tendríamos, entonces, una transformación de características comunes a una clase de objetos en un nuevo objeto ideal. El argumento de Frege contra la abstracción es que no sólo una definición no crea, en sentido estricto, nada; que, en realidad, no es necesario recurrir aquí a nociones psicológicas, sino que los principios que regulan la formación de totalidades son suficientes. En particular, que los números pueden considerarse como extensiones y, en tanto que únicas, como objetos, y que, además, dos totalidades pueden compararse con base, como Dedekind había hecho, en el establecimiento de una relación biunívoca entre ellas.[42] Pero esto significa, al mismo tiempo, la coincidencia entre Dedekind, Cantor y Frege en la concepción de que hay algo más primitivo que el número (en su versión de *Zahl* o de *Anzahl*), a saber: la posibilidad de comparar totalidades; en otras palabras, que no necesitamos saber cuántos elementos tiene una totalidad (o cuántos objetos caen bajo un concepto), es decir, su número, para saber si tiene más elementos que otra.

Vale la pena mencionar aún otros dos aspectos válidos de la crítica fregeana a Dedekind relacionados con el principio de abstracción. En primer lugar, el hecho de que tanto en Dedekind como en Cantor intervenga implícita o explícitamente una noción de orden en la definición del concepto de número y, en segundo, la consideración del principio de no contradicción como garante de existencia en matemáticas.

En lo que toca al primero, Frege argumenta, con razón, que la pregunta primitiva acerca de los números es *cuantitativa*, es decir, *¿cuántos...?*; una ordenación vendría sólo después. Dicho de otra forma: la cardinalidad es más primitiva que la ordinalidad. Podemos encontrar una evidencia al respecto en las modernas teorías axiomáticas de conjuntos (por ejemplo, en ZF o NBG). Mientras que en ambas puede demostrarse que a todo conjunto le corresponde un cardinal, no puede establecerse, sin echar mano del axioma de elección o de algún principio equivalente, que todo conjunto está asociado con un ordinal.

Mucho más difícil de evaluar es lo segundo. Tanto Dedekind como Cantor se refieren con alguna frecuencia a la libertad del pensamiento y ésta se pone en relación con una facultad de crear objetos limitada exclusivamente por el principio de no-contradicción. *Como hemos visto, las definiciones no crean ningún objeto.* Lo único que sí parece crearse son nuevos conceptos. Ahora bien, en relación a éstos no existe ninguna restricción lógica: aun los conceptos contradictorios son lícitos y pueden tener alguna utilidad. Esta «creación» sólo parece estar sujeta a consideraciones pragmáticas. Algo distinto ocurre con los objetos: éstos no se crean a conveniencia, sino que su existencia debe ser demostrada a partir de los principios de la teoría. En este sentido, atribuir a las definiciones un poder creativo significa, en realidad, una confusión entre objetos y conceptos, como apunta Frege [1883, §97].

---

los polígonos. Otra relación de equivalencia, esta vez en el conjunto de los enteros, sería la de *congruencia módulo m*, que proporcionaría *clases de congruencia*. Para otros ejemplos, cfr [Weyl 1949, I, §2] y [Fraenkel 1968, 61-63]. En particular, H Weyl considera la introducción de nociones por este procedimiento como un caso especial de las definiciones *creativas*, entre las que se contaría también, por ejemplo, la de los *elementos ideales* Hilbert mismo justificará, en 1925, la postulación misma de la existencia del infinito en términos de tales elementos. Se trataría, en todos los casos, de una extensión, en aras de la sencillez, de reglas y operaciones previas.

[42] Frege lleva a cabo esto, considerando la existencia de tal correlación como el sentido de un juicio de reconocimiento, esto es, como el sentido de una identidad numérica, interpretando ésta como la forma primaria de todo juicio de ese tipo.

Hemos mencionado ya que en las *Grundgesetze* [I, §33 y §66] -aunque no en los *Grundlagen*- se considera que las únicas definiciones válidas en las matemáticas son las definiciones como abreviatura, esto es, aquellas esencialmente dispensables. Si bien toda definición de este tipo es admisible en matemáticas -con tal de que lo sea la expresión o los conceptos abreviados- no toda definición matemáticamente admisible es de este tipo. No lo son, por ejemplo, ni siquiera en principio, las definiciones que hacen uso de la recursión transfinita.[43] Ésta es, por lo menos, según nos parece, la concepción actual de las definiciones. Así, aparte de la abstracción, el procedimiento dedekindiano en lo relativo a la definición es impecable.

En general, por lo tanto, el antagonismo entre los enfoques de Dedekind y de Frege parecería tener su origen en una visión radicalmente distinta de los fundamentos de las matemáticas: la actitud eminentemente pragmática de Dedekind se opone a la visión filosófica-fundamentalista de Frege; la primera sería la de alguien interesado en hacer matemáticas a partir de una base histórica y práctica, en las «*vraies mathématiques*» a que se refieren Poincaré y Zermelo; la segunda, la de alguien interesado en los fundamentos *filosóficos* de las matemáticas, la de alguien que, además, ve las matemáticas a través de la lupa de un sistema deductivo formal. El desarrollo mismo de los fundamentos de las matemáticas terminaría por hacer justicia a ambos. Es claro que, para la historia de lógica y de la filosofía en general Frege, posee una mayor importancia que Dedekind, pero es también indudable que el trabajo de Dedekind es matemáticamente de mucho mayor interés.[44]

---

[43] «En una ciencia rigurosa, una palabra o un signo no debe ser utilizado -dice Frege [1903, II, 70], refiriéndose a las definiciones recursivas en general- si su significado no ha sido aclarado previamente de manera integra y mucho menos debe usarse para continuar su propia definición»

[44] El caso de las definiciones proporciona un buen ejemplo al respecto. *En* un sistema formal, ninguna definicion puede ser otra cosa que una abreviatura, en las matemáticas informales y aun en la metateoría de un sistema formal resulta lícito, sin embargo, recurrir a otros tipos de definición.

Parte II

Lenguaje y lógica en la teoría peaniana de los números naturales

I

Pasemos ahora a la consideración comparativa de las ideas de Peano sobre los fundamentos de la aritmética.

Peano, como Dedekind y Frege, pretende dar un fundamento seguro y claro al análisis. En opinión de Peano, sin embargo, esta tarea sólo puede realizarse satisfactoriamente: 1) dando una base adecuada y simple a la aritmética y 2) llevando a sus últimas consecuencias el proceso de supresión del papel jugado por la intuición en las matemáticas, específicamente, desterrando a ésta por completo de la argumentación aritmética. Mientras que el primero de estos objetivos debe llevarse a cabo *dentro* de la aritmética misma, el segundo posee una generalidad mucho mayor y se encuentra ligado a consideraciones globales de carácter metodológico sobre la forma en la que deben *presentarse* las teorías matemáticas. Sin embargo, diferencia de Dedekind y de Frege, no hay en Peano ningún intento reduccionista que pretenda convertir los números naturales y la aritmética en una rama derivada de las matemáticas, sino un afán estrictamente limitativo en el sentido del establecimiento de una base *aritmética* mínima, a partir de la cual pueda derivarse el resto de la teoría de los números. Los recursos disponibles para ello serían, entonces, exclusivamente, las dos operaciones fundamentales que rigen un sistema axiomático, la definición y la demostración, y los principios lógicos que expresan las propiedades elementales de la identidad y la relación de pertenencia. En realidad, Peano no sólo *no* se interesa en una definición explícita de los naturales, sino que piensa, además, que una empresa de ese tipo estaría condenada al fracaso. Una definición como la que Dedekind o Frege pretenden tendría, en efecto, como meta, la obtención de lo complejo con base en lo simple. Desde este punto de vista, «la noción de número no puede ser definida, pues es de observar que las ideas de orden, sucesión, agregado, etc. -que, como hemos visto, son presupuestas por Dedekind o Frege- son por lo menos tan complejas como aquella idea...» [Peano 1901, 2ª Parte, 256-7; cfr. también 1ª Parte, 88].

Es claro aquí, en todo caso, que la fuerza de las razones aducidas por Peano reside en lo que pueda entenderse por *simplicidad*. Peano parece considerar que cualquier intento de definición de *número* incurre, de hecho, en un círculo vicioso: «La noción de número *no* puede ser definida, puesto que es claro que, no importa cómo se combinen estas palabras ['orden', 'sucesión', 'agregado', etc.], obtendríamos siempre una expresión equivalente a número» [1901, 256].[1]

[1] Cfr. también la Reseña de G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*, [Peano 1958, 194]. Los axiomas que sirven de base a su *reconstrucción* lógica de la aritmética son puestos como postulados, como reglas simples que no pueden ser demostradas, como quieren Dedekind y Frege. Para Peano «estas demostraciones son ilusorias. En realidad, como estas reglas son ya las reglas más simples de razonamiento que existen, para demostrarlas habría que aplicar o bien estas reglas o bien otras más complicadas. En cualquier caso, la argumentación sería viciosa...».

Ahora bien, la circunstancia de que Peano considere, en sentido estricto, imposible dar una definición de la noción de número no significa que ésta no pueda caracterizarse implícitamente enunciando sus propiedades matemáticas básicas en la forma de un sistema axiomático. Es decir, si bien una definición explicativa de *número natural* en términos de otros conceptos es imposible o inútil según Peano, esto no impide dar una definición estructural de ellos, haciendo explícitas las relaciones y propiedades elementales de los mismos que permitan obtener la aritmética en su totalidad. Siguiendo una idea de W. Pasch, Peano desarrolla, como uno de los primeros, la idea de una *axiomatización formal* como procedimiento metodológico universal en las matemáticas para la presentación y reconstrucción rigurosas de teorías.[2] Esto lo lleva a ocuparse del *lenguaje* utilizado en las matemáticas. «La dificultad principal en relación al problema de los fundamentos de las matemáticas -escribe Peano en [1889, III]- proviene, sobre todo, de la ambigüedad del lenguaje utilizado en ellas». Ésta sería, sin duda alguna, una de las fuentes más importantes, si no es que la más importante, de que se nutre la intuición. La reducción al máximo, en aras de la claridad, del papel de ésta en las demostraciones requiere, por lo tanto, del examen crítico del lenguaje matemático. Para este propósito, Peano introduce la noción de *sistema axiomático formal*. La tarea de dar un fundamento riguroso y claro al análisis plantea la necesidad de una investigación *formal* de la estructura lógica de las teorías. Concretamente, la axiomatización de la aritmética debe llevarse a cabo con base en su consideración *como lenguaje formal exacto*, algorítimicamente exacto, como hoy diríamos. Haciendo abstracción de sus contenidos, piensa Peano, por medio de una manipulación combinatoria puramente simbólica y algebraica, pueden elucidarse con toda precisión las conexiones lógicas entre las proposiciones e identificar algunas entre ellas que, sin riesgo de error, generen deductivamente el resto.

No se trata, sin embargo, en su caso, en rigor, de concebir las matemáticas como siste-mas puramente simbólicos, sin contenido, es decir, propiamente de un formalismo,[3] sino de analizar las necesidades lingüísticas de las matemáticas, de modo que se mantenga a buen resguardo la precisión que en ellas debe regir. Más bien, se trata de formalizar, de *traducir* o, mucho mejor, puesto que lo que se traduce es, estrictamente hablando, siempre un lenguaje, de *expresar* en un lenguaje especial y adecuado para este fin las teorías históricas que constituyen las matemáticas -ante todo, la aritmética de los números naturales y la geometría plana.

Por lo demás, el lenguaje requerido es un lenguaje *lógico*. Las pretensiones de Peano en relación a la lógica terminan, no obstante, aquí. La lógica no es, para él, otra cosa que el lenguaje requerido para *expresar* las proposiciones de las matemáticas y para evaluar la corrección de las pruebas y definiciones que en ellas se ofrezcan. Existe, por lo tanto, una clara línea divisoria entre matemáticas y lógica. La lógica de Peano es matemática en el sentido de su *aplicación* primaria. Es decir, Peano no se interesa en la construcción de un sistema lógico por sí mismo, como Frege, sino en la obtención de un algoritmo que permita el examen conclusivo de las definiciones y demostraciones. «Mediante estas notaciones -

---

[2] El surgimiento de la visión moderna de los axiomas puede situarse en el breve período que va de 1882 a 1889, de las *Vorlesungen über neuere Geometrie* de W. Pasch a *I principii di geometria logicamente esposti* de Peano. Pasch estaba interesado, sobre todo, en que su conjunto de axiomas constituyera una base completa para la prueba rigurosa de teoremas. Las *Vorlesungen* constituyen el punto de partida de las reflexiones axiomáticas de Peano [cfr. Kennedy 1980, 29].

[3] Por ejemplo, en el sentido de Curry

dice Peano al explicar los objetivos de su investigación en 1889 [1889, 3]- cualquier proposición asume la forma y adquiere la exactitud de que gozan las ecuaciones en álgebra. A partir de las proposiciones así escritas se deducen otras, todo ello mediante procedimientos que se asemejan a la resolución de ecuaciones. Ésta es la clave de todo el trabajo».

Con su lógica lingüística, Peano no pretende, en particular, ningún tipo de reducción que no sea la puramente cuantitativa de los axiomas a considerar. Es decir, a las exigencias de Pasch (completud), Peano añade ahora la de la independencia de los axiomas: El fundamento del análisis se encuentra en la aritmética y ésta posee un carácter absolutamente elemental, por lo que sólo se requiere su ordenación lógica, su axiomatización. El procedimiento riguroso en esta dirección hace necesaria, sin embargo, también su formalización.

Es clara, en consecuencia, también en esto, la diferencia con Frege: Frege pretende la fundamentación de la aritmética; Peano su ordenación como axiomática a partir de una base lingüística. Tales objetivos no son incompatibles, como lo pone de manifiesto el hecho de que Peano se haya servido de algunas ideas básicas de Frege, la implicación, por ejemplo.

II

Peano *lleva por primera vez a la práctica estas ideas en* 1889,[4] presentando un sistema con nueve axiomas y los primitivos N, 1, +1, = [1889, 58, §1], esto es, número natural, uno, la operación sucesor y el signo de igualdad. De ellos, los axiomas 2,3,4,5 son de carácter lógico y se refieren a la igualdad. Los cinco axiomas restantes son los que desde entonces se conocen como los *axiomas de Peano* para la aritmética:[5]

(1) $\mathbf{1 \in N}$
(6) $\mathbf{a \in N \,.\!\supset\!.\; a{+}1 \in N}$
(7) $\mathbf{a, b \in N \,.\!\supset\!:\; a = b \,.\!=\!.\; a{+}1 = b{+}1}$
(8) $\mathbf{a \in N \,.\!\supset\!.\; - a{+}1 = 1}$
(9) $\mathbf{k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N \,.\, x \in k :\supset_x .\; x{+}1 \in k :: \supset .\; N \supset k}$.[6]

Es decir, uno es un número natural; el sucesor de un número natural es un número natural; para cualesquiera dos números, la igualdad de los mismos es equivalente a la igualdad de sus sucesores; uno no es sucesor de ningún número y, finalmente: una versión del principio de inducción completa. A partir de 1891, Peano suprime de la axiomatización original los principios sobre la igualdad que son de carácter lógico y debilita el axioma (7), quedando como consecuente que la igualdad de dos sucesores de dos números implica la igualdad de esos números (es decir, que la función sucesor es unívoca).

Como lo evidencia la notación utilizada en esta presentación, Peano se sirve (axioma 7) ambiguamente del signo '=' para expresar tanto un bicondicional material como para expresar igualdad aritmética. Esto mismo sucede con el signo '⊂' que se usa para la

---

[4] Otras axiomatizaciones íntimamente relacionadas con ella se encuentran, por ejemplo, en 1891 y 1901.
[5] El axioma 2 afirma que la igualdad es una relación reflexiva en N; el axioma 3 que es conmutativa; el 4 que es transitiva y el 5 es un principio de substitución de iguales por iguales.
[6] «K» es un primitivo lógico; «k∈K» significa que k es una clase.

llamada implicación material, lo mismo que para la contención de clases en el axioma (9).[7] De cualquier modo, resultan notables la flexibilidad y la elegancia expresiva del lenguaje de Peano. En él se distingue, además, por primera ocasión, entre las relaciones de pertenencia, $\in$, y de contención, $\subset$, o, si queremos, aunque con la restricción que acabamos de indicar, entre varios sentidos diferentes de la palabra 'ser' como expresión de relaciones lógicas.

A partir de estos principios Peano puede definir sucesivamente, a la manera en la que hoy es familiar, es decir, por recursión, la suma [1889, §1, 2], la substracción [§2,4], máximo, mínimo y multiplicación [§4, 7], potencia [§5, 9], división [§6, 9], números racionales y reales [§8, 12 y §9, 15, respectivamente].

III

Para la comprensión íntegra de la contribución de Peano, al problema de caracterizar los números naturales y de dar un fundamento al análisis, resulta importante ocuparse, aunque sea muy brevemente, de la génesis de sus ideas. Hay cierta confusión en lo relativo al origen y autoría de sus axiomas para la aritmética, suscitada, en parte, por declaraciones contradictorias de él mismo al respecto. En 1889, en su primera exposición del sistema se reconoce, en efecto, que «En las demostraciones concernientes a la aritmética, me he servido del libro de H. Grassmann, *Lehrbuch der Aritmethik*, Berlín 1861» [1889, §1, V]. Y un párrafo más abajo: «Me ha resultado también bastante útil la reciente obra de R. Dedekind *Was sind...*». Una observación similar es hecha por Peano un par de años más tarde en *Sul concetto di numero* [1891, 93]. De acuerdo con esto, es falso, como afirma Kennedy [1980, 25-26], que «Peano no vio el escrito de Dedekind sino hasta que su propio ensayo [1889] iba ya camino a la imprenta».

Más clara que la de Dedekind es aún la precedencia parcial, no sólo cronológica, de Grassmann en este punto: Grassman -dice Hao Wang [1957, 147]- «fue el primero en introducir definiciones recursivas para la suma y la multiplicación, probando al mismo tiempo, por inducción, con base en esas definiciones, algunas de las leyes ordinarias de la aritmética», esto es, asociatividad y distributividad.[8] Lo que Dedekind hace en 1887 es no sólo *completar* esta axiomatización grassmanniana definiendo y demostrando el resto de las nociones y teoremas fundamentales de la aritmética, sino, sobre todo, según hemos visto, dar un fundamento más general a ésta, la teoría de conjuntos o de sistemas. En su teoría, los axiomas de Peano no son postulados, sino demostrados, esto es, en su caso, obtenidos a partir de principios conjuntistas. Así, por ejemplo, en su teoría existen, según hemos visto, sistemas infinitos simples. Sean **N** uno de tales sistemas y φ la función similar que lo ordena. Si identificamos ahora la operación sucesor con φ, los axiomas (6) y (7) son obvios. Por definición de un SIS, además, $1 \in \mathbf{N}$ (axioma (1)) y 1 no es sucesor de ningún elemento de **N** (axioma (8)). Finalmente, como hemos visto en el capítulo anterior, en [Dedekind 1887, §7, 80] se demuestra una versión del principio de inducción completa equivalente al axioma (9) de Peano. Todo ello plantea, por lo tanto, la pregunta de la especificidad de la axiomatización de Peano y la de cuál sea, en realidad, la contribución original de Peano al problema de dar un fundamento a la aritmética.

[7] Como lo señala Bourbaki [1972, 24, n 21], esta confusión puede interpretarse como una clara indicación de hasta qué punto estaba arraigada, incluso en Peano, la vieja costumbre de pensar en términos intensionales en vez de hacerlo en términos extensionales.

[8] Cfr también [Bourbaki 972, 43]

La respuesta a esta interrogante parecería tener dos aspectos. Es claro, en primer lugar, que la originalidad del sistema de Peano no ha buscarse en los contenidos de éste, sino en el *método*, la axiomatización rigurosa y formal, que ejemplifica; el *novo methodo exposita* del subtítulo de la obra de 1889 parecería justamente aludir a tal circunstancia.[9] Ahora bien, la presentación precisa de sus resultados requiere, para él, de su traducción a un lenguaje especial. Por lo tanto, en el desarrollo de un simbolismo *apto y manejable para este fin* estribaría, en segundo lugar, la peculiaridad de su aportación a la tarea de dar un fundamento seguro a la aritmética. Esto nos conduce, de nuevo, al tema de la concepción peaniana de la lógica y del papel que se le asigna en las matemáticas.

Peano se considera a sí mismo [1891, 31] como heredero del proyecto leibniziano de un lenguaje universal. Este lenguaje no sería -como en Leibniz- otro que la *lógica.*[10] La lógica de Peano es una lógica formal con la que puede operarse de manera algebraica, dejando de lado cualquier consideración semántica. Tiene, por lo tanto, un carácter esencialmente sintác-tico y algorítmico. Sin embargo, su objeto son las proposiciones de la ciencia, específicamente, en el caso que nos ocupa, de la aritmética. La lógica se ocupa, así, en última instancia, de *verdades.*[11]

IV

Los signos *lógicos* utilizados por Peano en 1889 son los siguientes:

K, $\cap$, $\cup$, -, $\supset$, $\in$, cuantificación universal sobre individuos y puntos como signos de asociación [Cfr. Peano 1889, VII y XII]

«Con sólo estos signos -dice Peano [1889, V]- puede ser expresada cualquier proposición de cualquier ciencia, con tal de que se añadan los signos que representen los entes de la ciencia en cuestión». De acuerdo con esto, la axiomatización formal de la aritmética sería el ejemplo más inmediato de la aplicación de este método de traducción. La meta que aquí se plantearía sería, entonces, la de reescribir la aritmética en su totalidad, recurriendo exclusivamente a este simbolismo. Sin duda, la notación peaniana es, como ya hemos insinuado, mucho más flexible y elegante que la de sus antecesores -Frege incluido. Pero ésa es también su *única* ventaja.

En realidad, Peano no está interesado en la lógica por sí misma, sino que la concibe en una especie de relación ancilar con las teorías concretas que formaliza, como un vehículo expresivo para la formulación precisa de éstas y sujeto *enteramente* a tal fin. Para Peano, como para Bolzano, la lógica no es, ella misma, una ciencia. "En el *Formulario* -dice Peano en su reseña de los *Principia Mathematica* [1913, 389]- la lógica matemática no es otra cosa que una herramienta útil para expresar y manejar las proposiciones matemáticas ordinarias; no es un fin en sí misma..." Es un error, por lo tanto, contar a Peano tanto entre los logicistas como entre los formalistas del siglo pasado o principios del presente.[12]

---

[9] Kennedy [1980, 26] ve en el título mismo empleado en este escrito: *Arithmetices Principia* en lugar de *Arithmetica Principia* o *Arithmeticae Principia*, es decir, en el empleo de una desinencia griega y no latina, un homenaje a Euclides, lo que resulta congruente con nuestra interpretación.

[10] En la introducción al *Formulario* de 1900, Peano afirma con gran exageración, que «Después de dos siglos, el sueño de Leibniz es una realidad... Hemos logrado resolver el problema planteado por él» [citado en Kennedy *1980, 65*]

[11] «La lógica matemática -dice Peano [introducción al vol. II del *Formulaire*, 1896, Opere Scelte, vol. 2, 197]- no tiene como objeto un conjunto de convenciones, sino de verdades».

[12] Como hacen, por ejemplo, Kneale/Kneale [1962, 474] y, menos claramente, Styazhkin [1969, 276, 323].

Ahora bien, la lógica peaniana no deja de recurrir esencial y constantemente al lenguaje natural. En Peano no existe, en realidad, ningún sistema de lógica que incluya algo más que las reglas de buena formación de las fórmulas. No hay en él, por ejemplo, en ninguna parte, un sistema de deducción, sino que sus demostraciones se presentan como una mera yuxtaposición seriada de fórmulas, entre las cuales se establece una conexión que el lector debe, a cada paso, imaginar, basándose en el lenguaje natural, esto es, en la intuición. Faltan entre otras cosas, por lo tanto, como Frege [1896, 370-1] observa, las reglas de inferencia y, en general, cualquier elemento propiamente deductivo.[13] El sistema debe juzgarse, en consecuen-cia, ante todo, como un sistema notacional con el que se simbolizan contenidos. Pero también, desde este punto de vista, resulta insuficiente: El lenguaje de Peano corresponde al de una lógica de primer orden con identidad. Sin embargo, en su sistema, el principio de inducción se presenta como un esquema axiomático que supone inclusive, al cuantificarse en él implícitamente sobre clases en general, la totalidad de éstas (o de las propiedades). Una formalización finita de su sistema -como cabía esperar en esta época que fuera la axiomatización de las matemáticas- requiere, por lo tanto, de una lógica de orden superior, esto es, como hemos señalado ya en el capítulo anterior, de un sistema esencialmente más complicado que el suyo y, sobre todo, para este tiempo, fundamentalmente menos claro que el sistema formalizado mismo de los números naturales.[14]

Podemos concluir, entonces, que la importancia de Peano para la historia de la lógica es, más bien, indirecta: el simbolismo notacional que él introduce adquiere rápidamente carta de naturalización gracias a su gran versatilidad y elegancia. En ese sentido, sus ideas lógicas tienen mucho mayor influencia en sus contemporáneos incluso que las de Frege mismo e históricamente contribuyen de manera decisiva a la apreciación de las mismas.

V

Examinemos ahora la caracterización peaniana de la aritmética.

Peano considera la aritmética *a través* de la lente de un lenguaje especial, lógico, que la expresaría, pero con el que *no* es identificada. Peano no es, en consecuencia, un logicista. Peano comparte, sin embargo, con el logicismo la visión de un conceptualismo realista. Su axiomatización ve la aritmética como un sistema de verdades y como un ámbito teórico constituido por dos jerarquías complementarias, una definicional, conceptual y otra demostrativa y proposicional. El tratamiento que Peano hace de ambos es, sin embargo, insuficiente. Para empezar, como ya lo hemos dicho, su sistema carece de un aparato deductivo. En cuanto a la definición, Peano recurre a expedientes que violan los principios establecidos por él mismo. En su teoría de la definición [1889, XVI], Peano establece, en efecto, una forma general para las definiciones. «Una definición es una proposición de la forma $x = a$, o bien de la forma $\alpha \supset. x = a$, en donde a es un agregado de signos que posee un sentido conocido; x es un signo o un agregado de signos que carece aún de significación y α es la condición bajo la que se da la definición».

[13] El sistema de Peano es por eso, como indica Frege, ante todo una *lingua characteristica.* (Véase la nota 15 al cap. 3)
[14] Como lo mostrarían poco después las paradojas.

Ahora bien, la definición peaniana de las operaciones básicas no es de esta forma, ni está avalada por los axiomas y principios que rigen su sistema. Peano recurre, en otras palabras, a expedientes tanto definitorios como demostrativos no estrictamente garantizados por su axiomas ni por la lógica subyacente. Las definiciones de suma o multiplicación, por ejemplo, son presentadas recursivamente, aunque nada de lo dicho previamente sobre funciones [§§ VI y XIII] avale un proceder de tal tipo. Es decir, Peano carece de algo parecido al teorema de recursión, que Dedekind prueba, como quedó dicho, en [1887, §126,28]. Esto es todavía más notable si se considera que Peano se apoya explícitamente [1889, V] en Dedekind, para la estructuración de su sistema y que, en particular, se refiere de manera muy clara a él al exponer su tratamiento de las funciones [*Ibid.* §VI, XVI].

Peano posee una concepción no genética, no creativa, estrictamente constructivista, de las definiciones, una concepción de acuerdo a la cual existe siempre la posibilidad de eliminar lo definido. Por lo tanto, las definiciones peanianas tendrían que ser *predicativas*, para servirnos del término acuñado por Russell en 1905, esto es, en ellas la x no podría utilizarse para definir la a.[15]

Otra consecuencia interesante de lo anterior es la siguiente. Si bien, como ha quedado dicho, Peano rechaza la posibilidad de una definición estricta de los números naturales, sus axiomas para la aritmética pueden considerarse como una definición *implícita* de ese sistema. Esto significaría no sólo que cada uno de los principios enuncia, en realidad, una propiedad básica del sistema,[16] sino, también, que la conjunción de todos ellos puede considerarse como *otra*, es decir, justamente, como la propiedad de *ser número natural.*[17] Puesto que en el axioma de inducción se cuantifica -implícita o explícitamente- sobre todas las propiedades, la de *ser número natural* sería una de ellas. Es decir, la definición implícita de los números sería no constructiva.[18] Entre los conceptos requeridos para describir los números se encontraría el concepto mismo que supuestamente se define. Esto muestra nuevamente que Peano no es un logicista: una definición propiamente dicha de los números tendría que estar sujeta, en relación al concepto de número, a algún tipo de condiciones constructivistas que en su axiomatización se pasan por alto.

Por otra parte, es más bien discutible que los cinco axiomas de Peano ofrezcan -ni siquiera de manera implícita- una definición del sistema de los naturales. En efecto, la lógica presupuesta por Peano es básicamente, según queda dicho, una lógica de segundo orden. En un sistema de este tipo, el conjunto de axiomas para los naturales es *categórico*, es decir, que si bien hay *esencialmente* una sola estructura que los satisface, lo que en realidad se caracteriza es *una clase* de modelos, los modelos inductivos o progresiones -

---

[15] El hecho mismo de que Frege también rechace en los *Grundlagen* [§6] este tipo de definiciones por considerarlas circulares parecería ser indicativo de cierta incomprensión en la época de esta nueva forma de definición «por tramos» de un concepto.

[16] De donde nuevamente parecería desprenderse la necesidad intuitiva de una axiomatización finita del mismo.

[17] Me parece que la idea es originalmente de Hilbert, aunque he olvidado o no he localizado el sitio ni el contexto preciso en que hace esta afirmación. Por lo demás, Poincaré [1905/6, 833] atribuye esta interpretación a Couturat, aunque añadiendo la necesidad de una demostración de la consistencia de los axiomas. Es decir, sólo los sistemas consistentes pueden definir realmente algo.

[18] O *impredicativa*, en la terminología utilizada por Russell en 1905 [p.34]. Russell se refiere, en particular, en ésta a aquellas normas que no definen clases por dar lugar a una especie de regresión al infinito.

entre cualesquiera dos de los cuales puede establecerse un isomorfismo.[19] Esto significa, entonces, en primer lugar, una especie de completud semántica de los axiomas,[20] sin que ello signifique también, según ha mostrado Gödel en1931, una completud de los métodos demostrativos, y, en segundo, la imposibilidad de una descripción axiomática específica de N.[21] Basándonos en esto último, podemos conjeturar, por lo tanto, que esta reflexión influye en la idea de Peano de que, en rigor, los números no pueden ser definidos. Pero, entonces. ¿qué son para él los números naturales, puesto que su sistema de axiomas no los caracteriza, esto es, los individualiza de manera concreta? Tanto en su reseña [1895, 194] de las *Grundgesetze* de Frege como en 1891 [p.88], al analizar las diferencias entre su enfoque y el de Dedekind, Peano constata afinidades, afirmando en cada caso que «es evidente que ambos enfoques coinciden». Puesto que Dedekind, según hemos visto, tampoco ofrece una descripción *específica* de los números naturales, sino que recurre a un nebuloso principio de abstracción y aunque ese no sea el curso que Frege sigue, sí hay en éste, no obstante, *mutatis mutandis*,[22] una aceptación de una forma del principio de abstracción, podemos concluir que entre los tres[23] enfoques parecería haber un acuerdo *de fondo* al respecto. Sin embargo, este tipo de definiciones -a diferencia de las definiciones nominales que, en realidad, no constituyen sino abreviaturas- son *creativas*, por lo menos en el sentido de permitir la introducción de un nuevo tipo de objetos, esto es, significan, en todo caso, una ampliación de la noción peaniana original de definición y, en última instancia, representan un replanteamiento del problema de los números en términos conjuntistas, una idea a la que, como ahora veremos, no sólo esta, sino también otras consideraciones globales sobre su teoría conducen a Peano en la última fase de su trabajo en los fundamentos de las matemáticas.

Observemos, de cualquier manera, antes de ello, que ese tipo de definiciones se encuentra íntimamente ligado no sólo a la consideración general de clases, sino también a las propiedades básicas de la identidad y la lógica. Es decir, la abstracción necesaria para llegar, por ejemplo, a los números naturales supone la imposibilidad de diferenciar formalmente, dos modelos, esto es, requiere de la vigencia de una especie de identidad

[19] Según uno de los teoremas de Löwenheim-Skolem, ningún sistema axiomático que tenga un modelo infinito es categórico, *considerado como una teoría de primer orden*. La axiomatización de Peano sería categórica como teoría de *orden superior* Véase, sin embargo, más adelante.

[20] Es decir, los axiomas de Peano caracterizan completamente el conjunto de verdades aritméticas.

[21] Peano mismo es consciente de esta situación: No sólo, como cabría pensar, a partir de la lectura del teorema 132 [1887, §X] de Dedekind, esto es, a partir de la prueba de la similitud de cualesquiera dos SIS. Las afirmaciones de Peano al respecto son bastante vagas, aunque es claro que apuntan en la misma dirección. Según él, para que una estructura «se corresponda con la serie de los números naturales es necesario y suficiente que satisfaga sus axiomas» [1891 p.87] La diferencia en el caso de Frege es que en él los números naturales se definen individualmente, es decir, se da un ejemplo de progresión que sirve de modelo comparativo para obtener progresiones en general.

[22] Por supuesto, una divergencia significativa será la proscripción en Frege de todo elemento psicologista en el proceso. La diferencia esencial en su caso es que en él los números naturales se definen individualmente, es decir, se da un ejemplo de progresión que sirve de modelo comparativo para obtener progresiones en general.

[23] «El número es precisamente lo que se obtiene al hacer abstracción de la índole particular de todos esos sistemas», escribe Peano casi a final de siglo, cuando su profusa -aunque ya no muy novedosa- producción sobre estos temas prácticamente tocaba a su fin [1898d,.218] La diferencia en el caso de Frege es que en él los números naturales se definen individualmente, es decir, se da un ejemplo de progresión que sirve de modelo comparativo para obtener progresiones en general.

estructural. En este sentido, la introducción de una nueva clase de objetos precisamente con tales características formales parecería ser avalada por la historia misma de las matemáticas.[24]

VI

Aunque, por supuesto, sin distinguir explícitamente niveles del lenguaje, Peano se ocupa de algunas de las propiedades metalingüísticas de su sistema. Como hemos dicho, Peano considera necesario establecer la independencia de sus axiomas. La prueba de este hecho se ofrece, por primera ocasión, en el artículo de 1891 que hemos estado citando.[25] El método seguido allí es el canónico: construir un modelo que satisfaga todos los axiomas excepto uno de ellos y repetir este procedimiento con cada uno de estos principios. Peano logra, por lo tanto, dar una base axiomática mínima a su sistema.

En 1900, Hilbert [1900, 56], en su célebre lista de problemas abiertos en las matemáticas, consigna como problema número 2, después de la prueba de la Hipótesis del Continuo, la demostración de que la aritmética es consistente. La actitud de Peano en relación a esta dificultad parecería ser más bien ambigua. Su primera y consecuente reacción es la de considerar tal demostración no sólo innecesaria, sino, de hecho, en última instancia, imposible por circular. No hay nada más básico, matemáticamente hablando, que los números naturales y su aritmética. Peano sostiene, en realidad, en principio, una especie de protocolarismo o quasi protocolarismo matemático. Las proposiciones aritméticas -como las geométricas- son verdades indubitables y sus objetos, al igual que los enunciados mismos que las expresan, no requerirían de ninguna justificación: «...Una demostración de que un sistema de postulados para la aritmética o para la geometría es consistente -dice Peano [1906a, 138 /342-3] en un significativo pasaje- no es, en mi opinión, necesaria. Los postulados no son algo que hayamos decidido crear, sino que lo que se supone como tal son las proposiciones más elementales implícita o explícitamente utilizadas en todo texto de aritmética o geometría. El sistema de postulados para éstas es satisfecho, respectivamente, por las ideas de número y punto [y línea] que posee cualquier autor de estas disciplinas. Pensamos en general en los números; por lo tanto, los números existen. Una prueba de consistencia puede tener utilidad cuando los postulados son hipotéticos y no corresponden a hechos reales».

Peano expresa aquí varias ideas importantes. En primer lugar, la constitución histórica de las teorías fundamentales (aritmética y geometría). No se trata en ellas de convenciones o de hipótesis, sino de *verdades* que, además, como lo sugiere el que estén presentes a lo largo de toda la historia de estas disciplinas, tienen un carácter irrecusable. Pero si esto es así, es decir, si se trata de verdades, el conjunto de los enunciados que las expresan -y, en particular, el conjunto de los axiomas de los que son consecuencia- es *consistente*; la realidad que describen, cualquiera que ésta sea, constituye ya un modelo de ellos. Por lo tanto, las axiomatizaciones de la aritmética y de la geometría no pueden, para Peano, ser otra cosa que un *reconocimiento* explícito de algunas de tales verdades y conceptos como

---

[24] Así, por ejemplo, A. Church habla en relación a un problema similar [1968, 233] del «espíritu de generalidad de las matemáticas». Sin embargo, tal vez sea Poincaré el que mejor resuma este punto: «Las matemáticas -dice en 1902 [29]- son el arte de dar el mismo *nombre* a cosas diferentes». Sin lugar a dudas, el problema se encuentra vinculado al carácter por lo menos parcialmente *formal* de las matemáticas y al papel fundamental que en ellas representan la analogía y la generalidad.

[25] Otras pruebas se encuentran, por ejemplo, en Peano 1891, 1901 y Peano 1906a.

postulados y primitivos y una ordenación del resto a partir de tal base; es decir, la axiomatización de la aritmética constituye una reflexión de segundo grado y su tarea es histórica y reconstructiva, esto es, identificar en la masa de proposiciones, que históricamente se entienden como aritmética, una serie de verdades básicas que permitan la obtención de todas las demás. Peano admite aquí varias posibilidades, por lo que es obvio que este carácter es relativo y también que no compartiría la idea bolzaniana de una jerarquía fundamental de las proposiciones, en el sentido que hemos explicado en el Capítulo 2. Pero, a Peano no le interesa tampoco, por otra parte, como sí le sucede a Kant o a Frege, una justificación última, epistemológica u ontológica del asunto. La pregunta «¿Qué son los números?» está ya, de alguna manera, contestada por la historia misma de la aritmética. Justamente esta respuesta -en el fondo, por lo menos en parte, comunitaria- se encuentra en la base misma de su investigación y, en última instancia, constituye también el criterio que ha de servir para juzgar la idoneidad de su sistema.[26]

La postura de Peano implica, no obstante, en primer término, que el papel de la evidencia en las matemáticas se encuentra, en todo caso, limitado a la evidencia comunitaria. En segundo, que -a diferencia, por ejemplo, del logicismo- el enfoque de Peano es, por así decirlo, aritméticamente cerrado, puesto que principia y termina en las matemáticas, sin apelar a nada fuera de ellas, a pesar de que sus formulaciones sugieran ocasionalmente algún otro tipo de pretensión -por ejemplo, metafísica («Pensamos en los números; por lo tanto, los números existen»). En relación a ello, no deja de resultar extraño que, no obstante ser consciente de que toda esta gama de problemas posee claras implicaciones filosóficas y de que algunas de éstas tendrían también repercusiones prácticas en las matemáticas.[27] Peano no publique nunca un solo ensayo propiamente filosófico -lo que, sin embargo, no significa en absoluto un desinterés por estos temas.[28]

Sea esto como sea, en un artículo dedicado al Teorema de Schröder-Bernstein, en el que se presenta una demostración de este resultado, que coincide en lo esencial con la prueba que aproximadamente dos años más tarde dará Zermelo [1908] del mismo, Peano ofrece también un modelo conjuntista de sus axiomas: «Se demuestra así -dice- aunque, en realidad, esto no era necesario, que los axiomas de la aritmética... son consistentes» [1906a, 343]. Ahora bien, lo que Peano expone allí, en relación a la aritmética, es una prueba *relativa* de su consistencia. Si su primer argumento en favor de la misma descansa en el aval que representa la utilización histórica táctica o explícita de ciertos principios, el segundo se apoya más bien en la consistencia de la teoría de conjuntos. La aparición de paradojas estrictamente matemáticas[29] constituye, por lo tanto, no sólo un golpe al segundo

---

[26] En este sentido, ni siquiera el Principio de Inducción Matemática mismo requiere, ni admite, en rigor, de ninguna justificación, a pesar de su carácter general.
[27] Por ejemplo, la relativa a la admisión de definiciones no estrictamente constructivas, un problema que Peano aborda brevemente en su artículo de 1906
[28] Como lo pone de manifiesto, entre otras cosas, su asistencia y activísima participación en el Congreso de Filosofía de 1900 [Cfr. Russell 1975, 147 y Kennedy 1980,]
[29] Peano es el primero, antes que Ramsey, a quien generalmente se le adjudica esta distinción, en diferenciar [1906b, 157] entre paradojas semánticas y paradojas sintácticas o matemáticas: «El ejemplo de Richard -dice- no pertenece a la aritmética, sino a la linguística. Un elemento fundamental en la definición de N [=el número problemático del argumento de Richard] no puede ser definido de manera exacta según las reglas de las matemáticas» En la actualidad, con los resultados de Tarski, sabemos que la distinción no es del todo sostenible

de estos argumentos, sino también al primero, al poner en tela de juicio la intuición en general, aun una de carácter «históricamente irrecusable» y parecería dar la razón a Hilbert.

VII

El artículo de 1906, escrito en *latino sine flexione* (el equivalente peaniano del lenguaje universal de Leibniz), constituye, junto con una *Additione* al mismo publicada inmediatamente después [1906b], el único escrito de Peano acerca de la teoría de conjuntos y marca también el punto de transición final en las preocupaciones fundacionistas de Peano, orientadas ahora en dirección a la teoría de Cantor.[30]

Si en sus escritos anteriores la teoría de conjuntos no era sino una parte de la lógica cuyo propósito principal era la expresión de las proposiciones matemáticas, es decir, una parte del lenguaje en el que las matemáticas se expresan, en 1906 se la considera ya como una teoría autónoma y básica, si bien, en última instancia, no tan básica como la aritmética. Las ideas que determinan este cambio en el enfoque de Peano parecerían ser por lo menos dos. En primer lugar, la posibilidad -explorada precisamente en ese artículo- de una interpretación conjuntista de la aritmética, es decir, la *traducción* de ésta a clases, lo que sugiere que una teoría de éstas debe poseer un carácter elemental. En 1897, Burali-Forti publica la primera paradoja moderna, acerca del máximo ordinal. Aunque consideradas en un principio como elementos marginales en la estructuración de la teoría, las antinomias cobran, sin embargo, gran importancia en lógica y en los fundamentos de las matemáticas a principios de siglo con la aparición de la paradoja de Russell.[31] En opinión de Peano, un elemento determinante en el surgimiento de todas las paradojas sería el infinito. Éste forma parte de la realidad a la que se enfrenta el matemático y resulta, por lo tanto, inevitable [1906b, 145]. Precisamente la posibilidad de una consideración general de las clases abre las puertas, en segundo lugar, a un tratamiento común y comprensivo de las esferas de lo finito y lo infinito.[32] Como la mayoría de los matemáticos de su época interesados en los fundamentos de las matemáticas, Peano transita de la aritmética a la teoría de conjuntos, del ámbito de lo finito a lo infinito, que es propiamente del que la teoría de conjuntos trata.[33]

Desde el punto de vista de sus implicaciones filosóficas o metodológicas y, en particular, para una mejor comprensión de las ideas fundacionistas de Peano que en este momento nos ocupan, el suplemento al escrito de 1906, 1906b, resulta, sin embargo, de mucho mayor interés que el artículo mismo de 1906a. Peano analiza críticamente, en este anexo, el axioma de elección, utilizado por primera vez en 1904 por Zermelo para la

---

[30] En realidad, si bien no publica nada al respecto, Peano se interesa, por lo menos unos diez años antes, por la teoría cantoriana de conjuntos, manteniendo desde 1895 una constante correspondencia con Cantor y promoviendo incluso la traducción de la obra de éste al italiano. En particular, Cantor hace saber a Peano como pueden definirse los números naturales a partir de tipos ordinales finitos [Cfr. Kennedy 1980, 62]. Las ideas de Peano en la Lógica serán recogidas e integradas a un marco más amplio y, sobre todo, más ambicioso, por Russell y Whitehead en sus *Principia Mathematica* de 1910.

[31] Que, en realidad, había sido descubierta unos años antes por Zermelo.

[32] A pregunta expresa de Peano al respecto, Cantor le explica en una carta de *1895* -citada por Kennedy [*1980*, 62] - la manera en la que pueden definirse los cardinales finitos en términos de clases (1= (a), 2=(a,b), etc) Esto parecería indicar que en estos años Peano no tiene aún una comprensión cabal de las posibilidades de la teoría cantoriana

[33] En su estudio sobre los conjuntos infinitos y el Principio de Inducción Matemática, Zermelo da expresión a este cambio de enfoque de la siguiente manera: «Para mí, todo teorema acerca de los números naturales no es, en realidad, otra cosa que un teorema sobre los *conjuntos finitos*» [1907a, I, 185].

demostración del principio de buen orden. Zermelo había justificado así su uso: «Este principio *lógico* [cursivas nuestras] no puede ser reducido a ningún otro más simple e [históricamente] ha sido utilizado de la manera más natural en las deducciones matemáticas» [1904, 141]. Peano admite tanto el carácter histórico del principio como la imposibilidad aparente de demostrarlo o refutarlo, pero sostiene, a la vez, que (1) el recurso al mismo puede obviarse en muchos casos (como en el caso del Teorema de Schröder-Bernstein);[34] que (2) el principio es verdadero en el caso finito, pero que, no obstante, (3) su uso no puede extenderse con base en (2), ni tampoco en la evidencia que en favor del mismo proporciona su uso histórico al caso infinito. Para éste, (4) el principio es aparentemente indemostrable. Por lo tanto, (5) «en aquellos casos en los que [el recurso al mismo] no pueda ser eliminado, esto es, cuando el argumento no pueda reducirse a las formas comunes de razonamiento [compendiadas en el *Formulario*, es decir, en la lógica peaniana], la demostración no es válida, de acuerdo con el significado usual [secondo valore normale] de la palabra *demostrar*» [1906b, 148]. Según Peano, (6) el Axioma de Elección debe verse como una mera hipótesis, como algo similar a la conjetura de Goldbach. Peano considera, por lo tanto, que su lógica posee una especie de corrección y completud empíricas y que, en consecuencia, debe tomarse como normativa: «Si una de sus reglas no se satisface, ello es señal de un defecto en las definiciones y demostraciones. Éste es precisamente el caso del principio de Zermelo» [1906b, 154].[35] La lógica de Peano, que incluye los principios conjuntistas, es una lógica finitaria. Un modo de argumentación como el axioma de Zermelo (=AC), que supone la elección de un elemento de cada elemento de una clase infinita de conjuntos no vacíos va más allá de cualquiera de sus principios.

El razonamiento de Peano en contra del axioma de elección es sumamente débil y, de hecho, inconsistente con el esgrimido por él mismo en lo que anteriormente hemos presentado como su primer argumento en favor de la consistencia de la aritmética. Si bien los puntos (1)-(4) y (6) son acertados, el (5) no es sostenible. Zermelo lo hará objeto de una demoledora crítica, particularmente en el §2 de su *Neuer Beweis für die Moglichkeit einer Wohlordnung* [Zermelo 1907b]. El debate no sólo posee un interés histórico, sino también intrínseco, y arroja luz sobre una especie de ruptura entre un enfoque relativamente tradicional -a pesar de sus innovaciones-, el de Peano y uno que, sin desligarse de la tradición, hace uso consecuente de todas las posibilidades que la aceptación de los supuestos básicos de la nueva teoría de conjuntos y sus poderosas herramientas traen aparejadas y cuya orientación es más bien pragmática.

Básicamente, Zermelo acepta los puntos (1), (2) , (4) y (6) demostrando al mismo tiempo la falsedad de (5).[36] Para él, en efecto, como para Peano, el principio es indemostrable. Peano incurre, sin embargo, según él, en el error de confundir

[34] Justamente esto es lo que Peano demuestra en 1906a.

[35] El resto del artículo está dedicado al examen de la paradoja de Richard. Peano analiza también la solución de las paradojas propuesta por Poincaré [Poincaré 1906b, 2, VII, 307] que exige la predicatividad de las definiciones. Peano encuentra que el criterio es «o bien demasiado amplio o destruye completamente las matemáticas» [1906b, 155], una idea en la que indudablemente no le falta razón No nos ocuparemos, sin embargo, de este último problema

[36] Si bien, según hemos subrayado, en su primera exposición de 1904 Zermelo ve el axioma como un principio lógico, es evidente en todos sus escritos posteriores su consideración como un supuesto de naturaleza matemática Por esta razón, puede considerarse, sin más, que también acepta el punto (3) de la crítica de Peano.

demostrabilidad y validez, lo que haría también incorrecta la axiomatización misma de la aritmética. Lo que justifica la adopción de un principio en las matemáticas es su demostración o bien el reconocimiento histórico de su validez. Si una proposición no es demostrable a partir de otras previamente aceptadas, esto muestra o la falsedad del principio o el carácter incompleto de la axiomatización. «El pensamiento de que el *Formulaire* de Peano sea incompleto precisamente en este sentido es de suyo obvio...» [1907, II, 113].

En realidad, ¿cómo llega Peano a sus axiomas? De acuerdo con Zermelo, esto no puede ser sino (a) por análisis de las formas de argumentación aritmética históricamente reconocidas como válidas, unido (b) al reconocimiento de su evidencia intuitiva [anschauliche Evidenz] y (c) a la necesidad científica de su aceptación [Zermelo 1907b, 112, 113]. De ser así, como dice Zermelo, el Axioma de Elección resulta irreprochable, pues satisface las condiciones que de ello se derivan: ha sido utilizado, por ejemplo, de manera amplia, inclusive para el establecimiento de teorías muy elementales, como la de los conjuntos finitos.[37]

Ahora bien, Peano niega tajantemente que la intuición o la evidencia puedan desempeñar algún papel justificativo: «El problema de la evidencia -dice en su característico estilo lapidario- es subjetivo y no tiene cabida en las matemáticas» [1906b, 147]. Pero, entonces, ¿cuál es su justificación última de los axiomas de la aritmética? Peano no se manifiesta nunca claramente al respecto, aunque parece considerar que el carácter de verdades apodícticas, junto con su poder deductivo, su independencia y su necesidad científica, en particular, son condiciones indispensables para que una proposición pueda aceptarse como axioma y que es, más bien, *debido a ello* que se da un consenso total en torno a los mismos y que se hacen evidentes. Tomando esto como criterio (parcial) de admisibilidad de un principio en matemáticas, parecería que el AC no es aceptable como axioma, puesto que no cumple con la primera condición.[38] Por el contrario, con gran pragmatismo, Zermelo concede a cierto tipo de evidencia un papel legitimador en las matemáticas: «Una aplicación tan amplia de un principio -dice refiriéndose al AC- sólo puede explicarse por su evidencia... Sin duda, esta evidencia es hasta cierto punto, subjetiva y, no obstante, constituye una fuente necesaria de los principios matemáticos, a pesar de no ser susceptible de demostración» [1907b, 113].

Una de las principales dificultades en relación con los planteamientos peanianos que tocan problemas no estrictamente técnicos es su carácter incompleto. No sabemos, por ejemplo, si las condiciones (1)-(6), que hemos señalado antes, son también suficientes para avalar la introducción de un principio como axioma en alguna teoría matemática ya constituida. De no ser así, es difícil imaginar qué faltaría. Ahora bien, de serlo, cabría

[37] Acerca de la necesidad científica del AC véase Zermelo 1907b [113-115].

[38] Todavía en 1906 [49], Russell resume así su análisis del AC. «El axioma multiplicativo ha sido utilizado constantemente en la demostración de teoremas acerca de los números transfinitos Sin embargo, si bien algunos pueden considerarlo como una verdad evidente, es posible que resulte susceptible de ser refutado por *reductio ad absurdum*. También es posible pensar que pueda hallarse una demostración del mismo, pero esto es mucho menos probable». Por su parte, Poincaré [1906, 313], constatando el recurso a la intuición como la base que sirve a unos para aceptar el principio y a otros para rechazarlo, concluye que «Hay, sin embargo, un punto sobre el que todo el mundo estará de acuerdo: El axioma es *evidente* para las clases finitas, aunque indemostrable para las clases infinitas...es un juicio sintético *a priori* sin el cual sería imposible una teoría de los cardinales, ni de los números finitos, ni de los infinitos». Es decir, no es, en todo caso, un principio lógico, aunque es claro que resulta *matemáticamente* necesario.

preguntar cómo es que se llega a esas proposiciones. Aquí podría todavía argumentarse, no obstante, que tal conocimiento -basado en algún tipo de intuición- no constituye, en realidad, la base que explica esas verdades. Y, sin duda, este razonamiento sería correcto. Lo que aquí tenemos enfrentadas son, más bien, dos posturas esencialmente diferentes y un problema de interpretación aparentemente irresoluble. Por una parte, una relativamente fundamentalista -en este caso, estrictamente realista- orientada a principios y, por lo tanto, normativa. Por la otra, una pragmática que, sin descuidar enteramente esos aspectos, se guía, sobre todo, por la práctica misma de la ciencia. Su enfrentamiento marca, además, una transición generacional. La postura más bien conservadora de Peano se opone a la actitud más dinámica y abierta, «desde la ciencia productiva», que representa Zermelo. Para esta posición, el AC, como cualquier otro principio que no pueda demostrarse y resulte necesario es aceptable como axioma, en tanto no se demuestre su falsedad; no hacerlo significa aceptar de antemano el carácter incompleto de la teoría en cuestión.[39]

La historia le ha dado la razón a Zermelo.[40] Los criterios actualmente prevalecientes para la admisión de un principio como axioma de una teoría matemática son parecidos en la actualidad a los que él señala. Su postura evidencia una ampliación de los mecanismos de prueba que supera todos los recursos de una lógica sujeta a restricciones finitarias como la de Peano. En su severo juicio final [1907b, 115] sobre el planteamiento de éste, da cuenta precisa de este cambio y de la nueva actitud: «Rechazar hechos o problemas fundamentales porque no pueden abordarse con ciertos principios preestablecidos sería como si se quisiera prohibir a la geometría el desarrollo de la teoría de las paralelas sólo porque el axioma respectivo no se puede demostrar. Los principios deben surgir de la ciencia y no debe juzgarse ésta a partir de verdades inamovibles. Y así como la geometría existía ya antes de los *Elementos*, también la aritmética y la teoría de conjuntos son anteriores al *Formulaire* de Peano y sobrevivirán, sin lugar a dudas, cualquier intento de sistematización escolar de sus principios».[41]

Peano es conocido, sobre todo, como lógico y por su axiomatización de la aritmética. Como Dedekind, Peano llega a la convicción de que es necesario dar una base firme a las matemáticas a partir de su trabajo en la teoría de funciones. Peano se propone, centrando su atención en el lenguaje de las matemáticas, proscribir enteramente de éstas a la intuición. En su opinión, por lo tanto, las matemáticas serían un sistema autocontenido que encontraría en sí mismas su justificación. En su base estaría un sistema absolutamente simple, la aritmética, que dispondría, además, de un mecanismo confiable de autoevaluación -precisamente la lógica. Con Peano las matemáticas se vuelven, así sea de manera indirecta, algo formal y lingüístico En este sentido, su obra marca un hito en la

---

[39] En su crítica de la teoría de Peano, Zermelo argumenta que no sólo es incompleta, en tanto que pretende ser, en realidad, una teoría de los conjuntos finitos, sino que, además, la ausencia en ella de una distinción clara entre clases y conjuntos la expone a la aparición de las antinomias [1907b, 116].

[40] La controversia acerca de la legitimidad o no de ciertos procedimientos volverá a plantearse poco tiempo después, de manera más aguda y más equilibrada desde el punto de vista de los argumentos, en un contexto ligeramente diverso, aunque íntimamente relacionado, con la polémica entre Hilbert y Brouwer. Esta vez, los oponentes principales serán ambos notables «representantes de la ciencia productiva» que Zermelo menciona en varias ocasiones, como argumento *ad hominem*, en su crítica a Peano.

[41] Que, no obstante, es necesario ocuparse sistemáticamente de principios y que la ciencia no puede fundamentarse a sí misma será uno de los resultados del debate Hilbert-Brouwer y, obviamente, de los teoremas de Gödel sobre la aritmética.

historia de los fundamentos que permitirá plantear problemas de gran alcance acerca de los límites de la lógica y, en general, de las relaciones entre ésta y las matemáticas. Peano interviene, asimismo, de manera significativa en discusiones metodológicas de gran importancia para las matemáticas modernas: no sólo acerca del AC, sino también en la importante polémica acerca de la impredicatividad (aprox. 1906-1912), en la que también tomarían parte Russell, Poincaré, y el mismo Zermelo y que revelará que una especie de *inevitabilidad* de la filosofía, esto es, concretamente, que la admisión de ciertas definiciones y, en general, de ciertos procedimientos metodológicos en las matemáticas va indisolublemente de la mano de la aceptación de ciertas posturas filosóficas.

Peano contribuye también decisivamente a dar carta de naturalización a las nuevas ideas lógicas y conjuntistas. Y tal vez esta difusión, junto con su axiomatización y la introducción de un *sistema notacional de gran precisión*, elegancia y riqueza expresiva -en uso parcial hasta nuestros días-[42] sean sus mayores contribuciones a la historia de la nueva disciplina de los fundamentos de las matemáticas. Pero también, por último, Peano es el vínculo entre las ideas de Frege y Russell,[43] por lo que su importancia para la historia del logicismo es insoslayable, a pesar de no sostener sus tesis.[44]

[42] En Church, Quine y Rosser, por ejemplo.

[43] Russell no sólo se interesa en la lógica gracias a Peano, sino que, con Whitehead, hace un uso amplio de su notación en los *Principia Mathematica*: «La notación utilizada en esta obra -dice en la introducción a la primera edición- está basada en la de Peano y las explicaciones que siguen [variables, constantes lógicas, metodología, etc.] han tomado en buena parte como modelo las que anteceden al *Formulario*»

[44] Con la profundidad que le es propia, Poincaré [1906, 295] se refiere a Peano en los siguientes términos: «Tengo a Peano en gran estima: sus trabajos poseen una gran belleza (por ejemplo, su curva que llena una área). Sin embargo, no ha podido llegar ni más lejos, ni más alto, ni más rápido que la mayor parte de aquellos matemáticos que carecen de alas para volar, a pesar de haber podido caminar tanto con sus piernas».

BIBLIOGRAFÍA

Aspray, W./Kitchner, Ph. (edits.)
1988: *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI, University of Minessota.

Bar-Hillel, Y. 1950: «Bolzano definition of Analytic Propostions», en Bar-Hillel 1970. pp. 3-24.
1952: «Bolzano's Propositional Logic», en Bar-Hillel 1970, pp. 33-68.
1970: *Aspects of Language*, Magness, Jerusalem.

Benacerraf, P./Putnam, H. (Eds.)
1964: *Philosophy of Mathematics*, Cambridge U.P., N.Y. 2ª. ed., 1983.

Berg, J. 1962: *Bolzano's Logic*, Almqvist & Wiksell, Estocolmo, 1962.
1973:«Introducción del Editor» en Bolzano 1937b.

Bochenski,J. 1956: *Formale Logik*, Albers, Zürich.

Bolzano, B. 1804: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, en *Early Mathematical Works*, Acta rer. Nat. Necnon. Tec., Nº especial, Praga 1981, pp. 9-49.
1810: *Beyträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik*, Widtman, Praga, 1ª. entrega.
1817: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die en entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Oswald Klassiker, Nº 153, Leipzig, 1905 (Citado de acuerdo a la traducción inglesa de S.B. Russ, mímeo.)
1828: «Verschiedenheit zwischen Leibnizens und meinen Ansichten», reproducido como apéndice a Winter 1949, pp. 76-79.
1837: *Wissenschaftslehre*, edición resumida, publicada bajo el título *Grundlegung der Logik*, editada por F. Kambartel, Felix Meiner, Hamburgo 1963. Esta es una selección y resumen de los 2 primeros vols. de la *Wissenschaftslehre* original, Sulzbach, 1837.
1837a: *Theory of Science* [Traducción parcial de los cuatro vols. de [Bolzano 1837], ed. por J. Berg y trad. por B, Terrel, Reidel, Dordrecht, 1973.
1837b: *Theory of Science* [Traducción parcial de los 4 vols. de [Bolzano 1837], ed. y trad. por Rolf George, Univ. de California, Berkeley, 1972.
1837c: «Bolzanos Wissenschaftslehre in einer Selbstanzeige», reimpr. en Winter 1949, pp. 78-89. Por desgracia, Winter no señala la fecha en la que esta reseña de la WL hecha por Bolzano mismo se publica. «1837c» no corresponde necesariamente, por lo tanto, al año de publicación.
1848: Carta a R. Zimmermann, en Winter 1949, pp. 89-90.

1851: *Paradoxien des Unendlichen*, editada por B. van Rootselar, Felix Meiner, Hamburgo,1975 [cit. de acuerdo a la ed. en español, México, UNAM, 1991. Trad. Luis Felipe Segura.]

1975a: *Einleitung zur Grössenlehre*, editada por Jan Berg, Frommann, Stuttgart-Bad Cannstatt.

1975b: *Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre*, ver [Bolzano 1975a]

Bourbaki, N. 1969: *Elements d'histoire des mathématiques*, Hermann, París 1969 [cit. de acuerdo a la ed. española, Alianza 1972, Madrid 1972. Trad. Jesús Hernández.]

Brouwer, L.E.J. 1925: «Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik», I-III, en *Mathematische Annalen*, 93, pp. 244-257.

Brown, S. 1995: «The Seventeenth-Century intellectual background», en Jolley 1995, pp.*

Cantor, G. 1878: «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», en Cantor 1932, pp.119-133.

1883: «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», en Cantor 1932, pp. 165-204.

1885: «Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche», en Cantor 1932, pp. 370-377.

1895: «Beiträge zur Begründung der Mengenlehre», en Cantor 1932, pp. 282-356.

1932: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, edit. por E. Zermelo, Springer, Berlín, reimpr. 1990.

Cassirer, E. 1902: *Leibniz's System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen*, reimpr. Olms, Hildesheim, 1980.

1955: *The Philosophy of Symbolic Forms*, vol. I, Yale, New Haven, trad. R. Manheim., reimpr. 1975.

Coffa, A, 1991: *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, Cambridge, Cambridge.

Copleston, F. 1964: *A History of Philosophy*, vol. 6, Image Books, Garden City.

Coreth, E./Schöndorf, H.
1983: *Philosophie des XVIII Jahrhunderts*, Kohlhammer, Stuttgart.

Courant, R. y Robbins
1941: *What is Mathematics?* Oxford U.P., N.Y [citada de acuerdo a la edición española, Aguilar, Madrid, 1971, trad. Luis Bravo Gala.]

Crowe, J.M. 1988: «Ten Misconceptions about Mathematics and Its History», en Aspray/ Kitcher 1988, pp. 260-277.

Church, A. 1956: *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton U.P., Princeton.

1960: «Mathematics and Logic», en Klibansky, R. 1968, pp. 218-246.

Dascal, M. 1987: *Leibniz, Language, Signs, Thought*, Johns Benjamin, Amsterdam.

Dedekind, R. 1872: *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 7ª edit. 1965.

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Ver Dedekind 1872.

1890: Carta a Keferstein, en Van Heijenoort 1967, pp. 98-103.

Descartes, R. 1628: *Reglas para la Dirección del Espíritu*, Edit. Sudamericana, Buenos Aires, 1967, trad. de E. de Olazo y T. Zwanc.
Dummet, M. 1991: *FREGE: Philosphy of Mathematics*, Harvard, Cambridge Mass.
Edwards, H. «Kronecker's Place in History», en Aspray, W./Kitcher, Ph. 1988, pp.139-145.
Fischer, K. 1920: *Leibniz: Leben, Werke und Lehre*, C. Winter, Heidelberg.
Fraenkel, A. 1968: Ver Fraenkel/Bar-Hillel/Levy 1968.
Fraenkel, A./Bar-Hillel, Y./Levy, A.
1968: *Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam.
Frege, G. 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, reimpr. En *Begriffsschrift und andere Aufsatze*, Edit. Por I. Angelelli, Olms, Hildesheim, 1964.
1879a: «Anwendungen der Begriffsschrift», reimpr. Ver Frege 1879, pp 89-93.
1882a: «Über den Zweck der Begriffsschrift», reimpr. Ver Frege 1879, pp.97-106.
1882b: «Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffschfrift», reimpr. Ver Frege 1879, pp.106-114.
1884: *Die Grundlagen der Arithmetik*, reimpr. (J.L. Austin edit.), Blackwell, Oxford, 1953.
1884a *Die Grundlagen der Arithmetik*, Centenar Ausgabe, edit. por C. Thiel, Felix Meiner, Hamburgo, 1986.
1891: «Funktion und Begriff», reimpr. En (G. Patzig, edit.) *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1965.
1892a:«Über Begriff und Gegenstand», reimpr. Ver Frege 1891.
1892b:«Über Sinn und Bedeutung», reimpr. Ver Frege 1891
1893: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol I. reimpr. Olms, Hildesheim, 1962.
1896: «Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene», Königl. Sächsiche Gesell. der Wiss., Mathematisch-physikalische Klasse 48, Leipzig, pp. 361-378.
1903: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. II (ver Frege 1893)
1904: «Was ist eine Funktion?» en el *Festschrift. L Bolzmann gew. Z. 60 Geburstag*, A. Barth, Leipzig, pp. 656-666.
1910: Comentarios a la exposición del capítulo «Gottlob Frege» de P.E.B. Jourdain (Ver Jourdain 1912)
1976: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, vols. I y II respect. (H. Hermes/F. Kambartel/F. Kaulbach edits.), Felix Meiner, Hamburgo 1976.
Gödel, K. 1931: «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme», I, en *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, pp.173-198.
1944: «Russell's Mathematical Logic», en Benacerraf, P./Putnam, H. 1964, pp.211-232.

Heijenoort, Jan van (edit.)
1967: *From Frege To Gödel*, Harvard U.P., Cambridge, Mass.

Heinekamp, A. 1976: «Sprache und Wirklichkeit nach Leibniz», en Parret 1976, pp. 518-570.

Heinekamp, A./Schupp, F.
1991:«Lógica y Metafísica de Leibniz», trad. de la introducción a *Leibniz: Logik und Metaphysik*, (mismos edits., Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988), *Diálogo Filosófico* 19, 1991, pp.4-31. Trad. J.A. Nicolás.

Hilbert, D.
1900: «Mathematische Probleme», *Archiv der Mathematik und Physik*, Serie 3 (1), pp. 44-63 y 213-217.
1904: «Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik», en Hilbert 1909, pp. 263-279.
1909: *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 3ª edit.
1925: «Über das Unendliche», en *Mathematische Annalen* 95 (1926), pp.161-190.

Husserl, E.
1900: *Logische Untersuchungen* I, Niemayer, Freiburg, 1968.

Jolley, N. (edit.)
1995: *The Cambridge Companion to Leibniz*, Cambridge U.P., Cambridge.

Jourdain, P.E.B.
1912: «The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics», en *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics* 43, 1912.

Kambartel, F.
1975: Introducción a Bolzano 1937.
1976: Véase. Frege 1976.

Kant, I. 1763: *Versuch, den Begriff der negativen Grossen in die Weltweisheit einzuführen*, en Kant 1968, II, pp. 779-
1787, *Kritik der reinen Vernunft*, I. Heidemann (edit.), Reclam, Stuttgart, 1966.
1968: *Vorkritische Schriften bis 1768*, Weischedel (ed.), Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Kennedy, H.
1980: *Peano*, Reidel, Dordrecht.

Klibansky, R. (ed.)
1968: *La Philosophie Contemporaine* (Chroniques), Florencia.

Kneale, W./Kneale, M.
1962: *The Development of Logic*, Oxford, Londres, reimpr. 1971.

Kneebone, G.T.
1963: *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, Londres.

Leibniz, F.G.
1666: *Of the Art of Combination*, en Leibniz 1966, pp.1-12.

1671/2: *On the Demonstration of Primary Proposition*, en Dascal 1987, pp. 147-159.
1675: Carta a Henry Oldnburg, en Leibniz 1969, pp.165-166.
1678a: De *Papers on grammatical Analysis*, en Leibniz 1966, pp.12-16.
1678b: Carta a Walter von Tschirnhaus, en Leibniz 1969, pp.192-195.
1678c: *The Analysis of Languages*, en Dascal 1987, pp. 161-165.
1679a: *Elements of a Calculus*, en Leibniz 1966, pp.17-24.
1679b: *Thoughts, Signs and the Foundations of Logic*, en Dascal 1987, 181-188.
1686: *Investigaciones Generales sobre el Análisis de las Nociones y las Verdades*, UNAM, IIF, México, 1986, trad. M. Beuchot y A. Herrera.
1690: *A Study in the logical Calculus*, en Leibniz 1969, pp.371-382.
1692: *Critical Thoughts on the General Part of the Principles of Descartes*, en Leibniz 1969, pp.383-412.
1695: *A Study in the Calculus of Real Addition*, en Leibniz 1966, pp.131-145.
1703/1705: *Nuevo Tratado sobre el Entendimiento Humano*, Aguilar, Buenos Aires, 1981. Trad. E. Ovejero. En especial,. Vol. III.
1714: *The Metaphysical Foundations of Mathematics*, en Leibniz 1969, pp.66-674.
1951: *The Philosophical Writings of Leibniz*, ed. por C.C. Morris, Dutton, N.Y.
1966: *Logical Papers*, Clarendon, Londres. Trad. G.H. Parkinson.
1969: *Philosophical Papers and Letters*, trad. y editado por L. Loemker, Reidel, Dordrecht.

Loemke, L.
1969: «Introduction» a Leibniz 1969.

Morris, C.C.
1951: «Introduction» a Leibniz 1951.

Parret, H. (edit.)
1976: *History of Linguistic Thought and Contemporary Linguistics*, De Gruyter, Berlín/N.Y.

Peano, G. 1895: Reseña de Frege 1893, en Peano 1958, II, pp.189-195.
1889: *Arithmetices Principia, Nova Methodo exposita*, Bocca, Turín.
1891: «Sul concetto di numero», en *Rivista di Matematica* 1, pp. 87-102, 256-267.
1896: «Introduction» [al vol. II del *Formulaire*], en Peano 1958, II, pp.196-200.
1898: «I fondamenti dell'aritmetica nel Formulario de 1898», en Peano 1958, III, pp.215-231.
1901: *Formulaire de mathématiques*, 3, Carré & Naud, París.
1906a: «Super theorema de Cantor Bernstein», en *Revista di Matematica* 8, pp 136-143 [también en el vol. I, pp.337-358 de Peano 1958]

1906b: «Additione [a Peano 1906a]», en *Rivista di Matematica* 8, pp. 143-157.

1913: Reseña de Whitehead/Russell 1910, en Peano 1958, II, 389-401.

1958: *Opere Scelte*, vols. I-III (1957, 1958 y 1959, respect.), Cremonese, Roma.

Poincaré, H.

1902: *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, reimpr. 1966.

1906: «Les mathématiques et la logique», en *Rev. de Metaphysique et morale* 14, pp. 294-317.

Popper, K.R. 1937: *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchingson, Londres, 1967.

1967:«Knowledge: Subjective versus Objective», en Popper 1985, pp.58-77

1985:*Popper Selections*, Princeton U.P., Princeton.

Quine, W.O.

1953: «Logic and the Reification of Universals» en, *From a logical Point of View*, Harvard, Cambridge Mass., 1953, 2ª ed. 1961.

Randall Jr., J.H.

1976: *The making of the Modern Mind*, Columbia University Press, N.Y. 2ª. Ed.

Rescher, N.

1954: «Leibniz' Interpretation of his logical Calculi», *J.S.L.* 19.

Robles, J.A. 1993: *Las ideas matemáticas de George Berkeley*, UNAM, México.

Rootselaar, van, J.

1970: Artículo «Bernard Bolzano» en el *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 2, editado por C. Gillespie.

1975: Introducción a Bolzano 1951.

Russell, B.

1903: *The Principles of Mathematics*, Norton, N.Y. s/f.

1905: «On Some Difficulties in the Theory of transfinite Numbers and Order-types», *Proceedings of the London Mathematical Society*, Serie 2, vol. IV, 1907, pp.29-53.

1908: «Mathematical Logic as based on the Theory of Types», en *American journal of mathematics* 30 (1908), pp. 222-262.

1910: *Principia Mathematica* (to *56), Cambridge, Cambridge, 1962.

1919: *Introduction to Mathematical Philosophy*, Harper, N.Y., 1957.

1937: *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Allen & Unwin, Londres. Reimpr. 1964.

1975: *The autobiography of Bertrand Russell*, Unwin, Londres.

Rutherford, D.

1995: «Philosophy and Language in Leibniz», en Jolley 1995, pp. 228-269.

Scholz, H. 1937:«Die Wissenschaftslehre Bolzanos: Eine Jahrhundertbetrachtung», en Scholz 1961, pp. 399-472.

1961: *Mathesis Universalis*, Basilea*

Sebestyk, J.
1992: *Logique et Mathématique chez Bernard Bolzano*, Vrin, París.

Stadler, Fr. 1997: *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext*, Suhrkamp, Frankfurt a/M.

Stein, H. 1988: «*Logos*, logic and *Logistiké*. Some philosophical remarks on Nineteenth-Century transformation of mathematics», en Aspray, W./Kitcher, Ph. 1988, pp.238-259.

Störig, H.J. 1992: *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*, Fischer, Frankfurt, a.M., 1993.

Styazhkin, N.I.
1969: *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, MIT, Cambridge Mass.

Waldegg, G. s/f: «La Geometría Elemental de Bolzano». Mimeo.

Wang, H. 1957: «The Axiomatization of Arithmetic», en J.S.L., 22.
1974: *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan, Londres.
1987: *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge Mass., 1995.

Weyl, H. 1949: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, reimpr. 1972.

Winter, E.J. 1949: *Leben und geistige Entwicklung des Sozialethikers und Mathematikers BERNARD BOLZANO*, M. Niemayer, Halle (Saale).

Zermelo, E.
1904: «Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann», en *Mathematische Annalen* 59, pp.514-516.
1907a: «Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète», en *Acta mathematica* 32 (2.2.1909), pp.185-193.
1907b: «Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung», en *Mathematische Annalen* 65 (1908), pp.107-128.
1907c: «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I», en *Mathematische Annalen* 65 (1908), PP. 222-262.