

5
2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Estudio del cúmulo abierto NGC
2264 y de las variables δ Scuti W2 y
W20 asociadas”

TESIS

Que para obtener el título de

FÍSICO

Presenta

FAUSTO CERVANTES ORTIZ

278-11

México, D. F.

Octubre de 1999.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Estudio del cúmulo abierto NGC 2264 y de las variables
delta Scuti W2 y W20 asociadas"

realizado por Cervantes Ortiz Fausto

con número de cuenta 9120493-6 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis

Propietario M. en C. José Hermenegildo Peña Saint Martín

Propietario Dr. Roberto Alejandro Ruelas Mayorga

Propietario Dr. Roberto Ortega Martínez

Suplente M. en C. Ignacio Campos Flores

Suplente M. en C. Julieta Fierro Gossman

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache

Dra Patricia Goldstein Menache



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A:

Mariana,
Irian
y
Citlali.

Índice

Introducción	iii
Capítulo 1 Cúmulos y estrellas variables	1
1.1. Cúmulos abiertos	1
1.1.1. Estabilidad de los cúmulos	1
1.1.2. Poblaciones de cúmulos	2
1.1.3. Diferencias de composición química entre cúmulos	3
1.1.4. Diagramas color – magnitud y las distancias a los cúmulos	3
1.2. Estrellas variables	4
1.2.1. Tipos de estrellas pulsantes	4
1.2.2. Relación periodo - luminosidad	5
1.2.3. Relación periodo – densidad media	6
1.3. Variables en cúmulos	7
Referencias	7
Capítulo 2. Condiciones físicas en las estrellas	9
2.1. Estrellas en equilibrio	9
2.1.1. Equilibrio mecánico	9
2.1.2. Distribución de la masa	10
2.1.3. Producción de energía	10
2.1.4. El gradiente de temperatura	11
2.2. Estrellas pulsantes	13
Referencias	19
Capítulo 3. Estrellas δ Scuti y el cúmulo NGC 2264	21
3.1. Variables tipo δ Scuti	21
3.1.1. La era inicial	22
3.1.2. La hipótesis de la marea	22
3.1.3. La hipótesis <i>USPV</i>	22
3.1.4. ¿Las variaciones son irregulares, o multiperiodicas?	23
3.1.5. Razones de periodo radial de variables de gran amplitud	23
3.2. El cúmulo NGC 2264	24
Referencias	27
Capítulo 4. Fotometría	29
4.1. El sistema <i>UBV</i>	30
4.2. El sistema <i>uvby-β</i>	32
4.3. Calibraciones fotométricas	34
Referencias	35

Capítulo 5. Observaciones y reducción	36
5.1. Observaciones	36
5.1.1. Resumen de las observaciones	36
5.1.2. Rutinas de observación	37
5.2. Reducción	38
5.2.1. Fotometría absoluta	38
5.2.2. Fotometría diferencial	42
Referencias	43
Capítulo 6. Resultados y análisis	44
6.1. Resultados	44
6.1.1. Fotometría absoluta	44
6.1.2. Fotometría diferencial	51
6.2. Análisis	53
Referencias	54
Apéndice	56

Agradecimientos:

A mi familia, por todo su apoyo durante mis estudios.

A José H. Peña, por dirigir esta tesis.

A Rosario Peniche, por su supervisión durante la elaboración de la misma.

A Alejandro Ruelas, Roberto Ortega, Ignacio Campos y Julieta Fierro, por aceptar ser mis sinodales.

A Gabriela González, Saula Tecpanecatl, Carlos Escamilla y Carlos Yustis por su ayuda para obtener y procesar la fotografía para la carta de identificación.

Al Instituto de Astronomía, por brindarme las facilidades necesarias para llevar a cabo este trabajo, y en particular por los fondos otorgados para disfrutar de una temporada de observación en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir.

Al equipo técnico del OAN SPM.

A la Fundación UNAM, por la beca otorgada para elaborar esta tesis.

Al Conacyt, por la ayuda otorgada a través del proyecto 3925-E para acceder a un equipo de cómputo.

A Carmelo Guzmán, por su ayuda en problemas de cómputo.

A la UNAM, y en particular a la Facultad de Ciencias y al CCH Oriente, por mi formación académica.

A la Universidad de Estrasburgo, por su base de datos SIMBAD, que fue de gran ayuda para obtener información.

A los que me faltaron.

A todos aquellos mexicanos que pagan impuestos, sin cuya aportación yo no hubiese podido estudiar una carrera.

Introducción

El presente estudio fue motivado por el interés del autor en las estrellas pulsantes. El director, José Peña, sugirió la idea interesante de revisar la presencia de estrellas pulsantes del tipo δ Scuti en cúmulos abiertos. Puesto que algunos son muy jóvenes, resulta intrigante que posean estrellas pulsantes.

Es por ello que se eligió el cúmulo NGC 2264 para este estudio: se reportan en la literatura estrellas pulsantes tipo δ Scuti en él; y se le asigna una edad muy corta: 3×10^6 años.

En el primer capítulo se describe de manera breve las características físicas de los cúmulos abiertos, así como de las estrellas pulsantes en general. También se presenta una tabla de cúmulos abiertos con estrellas pulsantes tipo δ Scuti conocidas.

El segundo capítulo presenta la teoría física de las estrellas, tanto en equilibrio, como pulsantes. Se analizan las condiciones para que haya pulsación, y se describen los mecanismos y modos de pulsación.

El tercer capítulo presenta antecedentes de las estrellas pulsantes tipo δ Scuti, así como del cúmulo NGC 2264. Esta es una revisión bibliográfica de los resultados obtenidos por otros autores para el cúmulo, así como para las estrellas W2 y W20.

El cuarto capítulo describe los sistemas fotométricos utilizados para la observación del cúmulo y las estrellas pulsantes. En él se describe el sistema de Johnson y el de Strömngren, y se dan algunas calibraciones existentes, con las cuales se trabajó para reducir los datos proporcionados.

El quinto capítulo describe las técnicas de observación utilizadas, así como las técnicas de reducción de datos. Se describen las técnicas para determinar los parámetros físicos basadas en ciertas calibraciones.

El sexto capítulo da los resultados obtenidos en este estudio, así como un análisis de los mismos. Se discuten las novedades que arroja este estudio, que son interesantes.

Al concluir el presente trabajo, se descubrió una particularidad interesante del cúmulo analizado. Pero dejemos que sea el lector por sí mismo el que se de cuenta al llegar al sitio donde esto se describe.

Capítulo 1

Cúmulos y estrellas variables

1.1. Cúmulos abiertos

Los cúmulos contienen de cientos a miles de estrellas de secuencia principal, todas ellas de edad y composición química común. Hay dos tipos de cúmulos en la Galaxia, los globulares, y los abiertos. Los globulares, formados hace unos 13 a 15 mil millones de años, sólo contienen estrellas muy viejas. Los cúmulos abiertos son mucho más jóvenes, algunos de pocos millones de años de edad, y otros aún están formando estrellas. Muchos cúmulos abiertos son suficientemente jóvenes como para tener estrellas calientes masivas.

Los cúmulos abiertos se hallan en el disco de la Galaxia, frecuentemente asociados con material interestelar. Son objetos de baja velocidad y probablemente originados en los brazos espirales o cerca de ellos. Se han catalogado unos 10^3 cúmulos abiertos, pero se pueden apreciar muchos más en búsquedas fotográficas, como en las cartas de Palomar. Sólo se pueden observar los cúmulos más cercanos, debido al oscurecimiento interestelar en el disco de la Vía Láctea. Concluimos por tanto que vemos sólo una fracción pequeña de los cúmulos que realmente existen en la Galaxia; posiblemente se nos escapen de detección cientos de miles.

Varios cúmulos abiertos se ven a simple vista. El más famoso es el de las Pléyades, que parece un grupo pequeño de seis estrellas distribuidas como una pequeña "Osa" en la constelación de Taurus. Otro cúmulo famoso es el de las Híadas, que parece una "V", también en Taurus. El cúmulo de Praesepe, en Cáncer, a ojo parece un parche de luz. Los cúmulos abiertos típicos contienen de decenas a cientos de estrellas. Algunos llegan a tener más de un millar, como M67. Los diámetros de los cúmulos abiertos son de menos de 10 pc. Tienen entre 100 y 1000 veces la masa del Sol, y de 10^2 a 10^6 veces la luminosidad del Sol. La densidad de estrellas es como $0.1-10 m_{\odot}/pc^3$. Las estrellas más brillantes son rojas o azules.

1.1.1. Estabilidad de los cúmulos

Una condición para la estabilidad de un cúmulo aislado es que la velocidad promedio de sus estrellas individuales no exceda la velocidad de escape del cúmulo. De otro modo, las estrellas se escaparán al espacio y el cúmulo se disipará. Si las velocidades estelares son suficientemente bajas para satisfacer esta condición, decimos que el cúmulo está atado gravitacionalmente, esto es que la fuerza de gravedad es suficientemente fuerte para mantener las estrellas miembros y no dejarlas escapar.

Los cúmulos no están completamente aislados, sino que se mueven en varias órbitas a través de la Galaxia. Otra condición para la estabilidad y permanencia de los cúmulos es que las estrellas estén atadas con fuerzas gravitatorias tan fuertes como para vencer las fuerzas de marea ejercidas

por la Galaxia u otras estrellas cercanas. Entre más compacto es el cúmulo, mayor es su propio amarre gravitatorio comparado con las fuerzas que tienden a romperlo, y tiene más oportunidades de sobrevivir hasta edades muy viejas.

Los cúmulos abiertos que conocemos están cerca del Sol. A esta distancia del centro galáctico, las fuerzas de marea de la Galaxia tirarán del cúmulo en un orden de tiempo corto si la densidad estelar fuera mucho menor que, digamos, una estrella por parsec cúbico. Las Pléyades, por ejemplo, probablemente sólo sean estables en las regiones centrales, mientras que en las partes exteriores probablemente se esté disipando. Las Híadas están al borde de la inestabilidad. Los cúmulos abiertos típicos tienen tiempo de vida máximos de sólo unos cientos de millones de años. Por esta razón, la mayoría de los cúmulos abiertos son grupos de estrellas relativamente jóvenes, y sólo una pequeña fracción de ellos son muy viejas.

1.1.2. Poblaciones de cúmulos

Una forma de diagrama H-R conocida como diagrama color - magnitud es muy usual en el estudio de la evolución estelar. Este diagrama es la gráfica de las magnitudes aparentes de las estrellas del cúmulo contra sus índices de color ($B-V$). El índice de color de una estrella depende de su temperatura, y está relacionada directamente con su clase espectral. Los colores pueden medirse mucho más rápidamente que los tipos espectrales y por ello se usan con más frecuencia en estudios de gran número de estrellas débiles. En el capítulo 4 se hablará más extensamente de los índices de color.

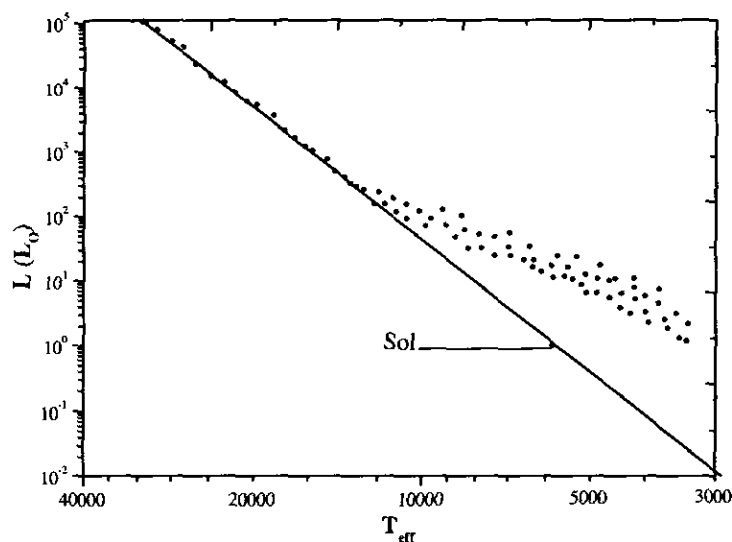


Figura. 1.1 Diagrama H-R teórico para un cúmulo joven.

Un diagrama de magnitud aparente contra índice de color es un diagrama H-R del cúmulo, salvo porque un diagrama H-R normal es una gráfica de magnitud absoluta (en lugar de magnitud aparente) contra índice de color. Pero todas las estrellas en el cúmulo están casi a la misma

distancia del Sol, y la diferencia entre magnitudes aparentes y absolutas es la misma para cada estrella y es igual al módulo de distancia del cúmulo.

Veamos cómo sería el diagrama H-R para un cúmulo cuyas estrellas se han condensado recientemente de una nube interestelar. Después de varios millones de años, las estrellas más masivas habrían completado su fase de contracción y deberían estar en la secuencia principal, mientras las menos masivas deberían estar fuera, a la derecha, aún en vías de entrar en la secuencia principal. La figura 1.1, muestra el diagrama H-R calculado por Kippenhahn y asociados en Munich para un cúmulo hipotético de una edad de 3 millones de años. Hay cúmulos reales que se adecúan a esta descripción también. Lo importante es hacer notar que en un cúmulo joven, es difícil hallar estrellas en la fase de gigantes, ya que las estrellas más calientes aun no tienen suficiente tiempo de evolucionar a esa fase; por otro lado, las estrellas más frías aun no llegan a la secuencia principal.

1.1.3. Diferencias en composición química entre cúmulos

El hidrógeno y el helio son los componentes más abundantes de las estrellas en los cúmulos. Pero las abundancias de los demás elementos varían de cúmulo a cúmulo. En el Sol, y la mayoría de las estrellas vecinas, la abundancia (en masa) combinada de elementos pesados parece estar entre el 1 y el 4 % de la masa estelar. Las intensidades de las líneas de elementos pesados en los espectros de estrellas en la mayoría de cúmulos abiertos muestran que en ellos también hay de 1 a 4 % de su materia en forma de elementos pesados. Las diferencias de composición química dependen del lugar y de la época en que las estrellas se formaron.

1.1.4. Diagramas color - magnitud y las distancias a los cúmulos

El método principal para determinar la distancia a un cúmulo abierto, es el de analizar los movimientos propios de las estrellas miembros del mismo. Con esto se encuentra un punto de convergencia, y este nos da la distancia al cúmulo. Este es el método más directo (después de la medición de paralajes), pero sólo se puede usar en el caso de cúmulos muy cercanos, ya que entre más lejos están, más difícil es medir los movimientos propios de las estrellas del mismo.

Las distancias a algunos cúmulos no muy jóvenes se pueden determinar de la relación periodo - luminosidad para estrellas variables. Para cúmulos muy jóvenes que no tengan variables, hay otra técnica usual que hace uso de diagramas color-magnitud. La mayoría de estrellas en un cúmulo están en una secuencia principal similar a la definida para estrellas vecinas al Sol. Hallamos una secuencia principal, por tanto, en el diagrama color-magnitud del cúmulo, con las estrellas más azules, estrellas que parecen ser las más brillantes (que en realidad son las estrellas más luminosas de secuencia principal en el cúmulo) más arriba y más lejos en el diagrama que las más rojas, las estrellas que parecen ser las más débiles. Del diagrama H-R ordinario sabemos qué magnitud absoluta corresponde a los varios índices de color a través de la secuencia principal. La diferencia a un índice de color dado, entre la magnitud aparente m de las estrellas del cúmulo y la magnitud absoluta M de las estrellas de secuencia principal del mismo color es el módulo de distancia DM del cúmulo:

$$DM = M - m$$

1.2. Estrellas variables

Cuando una estrella cambia su brillo por causas ajenas al observador o a la atmósfera, se dice que es una estrella variable. Existe una gran cantidad de estrellas variables, y dependiendo de las causas de esta variación, y de las características particulares, se han dividido en varias clases. Algunas estrellas aumentan su brillo aparente muy rápidamente debido a alguna explosión, por lo cual se les llama *eruptivas*. Otras cambian su brillo porque se trata de un sistema binario, en donde una de las estrellas es ocultada por la otra, provocando un descenso en el brillo mostrado, por lo que a éstas se les llama *eclipsantes*. Hay otras que cambian su brillo por procesos físicos en el interior de la estrella, que provocan pequeñas variaciones en el brillo de manera periódica, y a éstas se les llama *pulsantes*. En este trabajo nos ocuparemos exclusivamente de estas últimas.

A todas las estrellas variables se les da una designación especial, si es que antes no se les ha asignado una letra griega. Las primeras 334 estrellas variables de una constelación reciben como etiqueta letras del alfabeto latino: *R, S, T, ..., Z, RR, RS, ..., RZ, SS, ST, ..., SZ, ..., ZZ, AA, ..., AZ, ..., IZ, KK, ..., QQ, ..., QZ* (nótese que se omite la *J*), añadiendo el nombre de la constelación a la cual pertenecen. Las siguientes variables que se descubren se les llama *V335, V336*, etc. Existe un catálogo de estrellas variables, editado por Kurkarkin et al., donde se dan los nombres de las estrellas variables o sospechosas, así como sus coordenadas calculadas para el año 1950.

1.2.1. Tipos de estrellas pulsantes

Las estrellas pulsantes se dividen de acuerdo a sus características físicas, en las siguientes clases (la mayoría de ellas son gigantes, pero también las hay entre la secuencia principal y las enanas blancas):

RR Lyrae: Son estrellas que cambian su brillo en periodos regulares de entre 0.2 y 1.2 días, y las amplitudes de brillo son del orden de una magnitud (van de 0.4 a 2 mag.), los tipos espectrales son *A* y *F*, y las masas de 0.5 a 0.6 masas solares. Las hallamos en el halo y núcleo de la Galaxia y en algunos cúmulos globulares.

δ Cephei (cefeidas clásicas): Estrellas de alta luminosidad (de clases Ia a II) que también tienen cambios de brillo regulares, con periodos de 1 a 50 días y amplitudes de 0.1 a 2 magnitudes, con tipo espectral de *F5* a *K5* y masas entre 5 y 15 veces la del Sol. Las encontramos en los brazos espirales de la Galaxia.

W Virginis: Son estrellas con propiedades físicas similares a las de las cefeidas, pero más débiles en magnitud absoluta (1 a 2 mag) y masas bajas (0.4 a 0.6 masas solares). Se hallan en el halo y regiones centrales de la Galaxia.

δ Scuti: Variables de corto periodo, cercanas a la secuencia principal, de tipos espectrales *A* y *F* (1 a 2 masas solares), con periodos entre 0.03 y 0.3 días, y amplitudes de brillo entre 0.002 y 0.2 magnitudes. En el capítulo 3 se hablará más de estas estrellas.

Mira : Son estrellas gigantes de tipo espectral tardío (*M, C* y *S*) con líneas de emisión. Se llaman así por la estrella Mira Ceti = α Ceti (*M7 IIIe*). Las curvas de luz no son estables como en el caso de las

cefeidas; tienen periodos de 80 a más de 500 días, y amplitudes grandes de más de 2.5 y hasta 8 magnitudes, en el visible. Sus masas son del orden de la del Sol y los radios van de 100 a 1000 veces el radio solar. Están tanto en la población joven como en la más vieja de la Galaxia.

RV Tauri: Gigantes brillantes y supergigantes con tipos espectrales *F* a *K*. Sus curvas de luz tienen mínimos muy profundos y más superficiales, alternadamente. Los periodos son entre 30 y 150 días, y las amplitudes por encima de 3 magnitudes.

Variables semirregulares: Estrellas gigantes y supergigantes de tipo espectral medio y tardío (mayores que *F*) con cuasi-periodos de 30 a 1000 días.

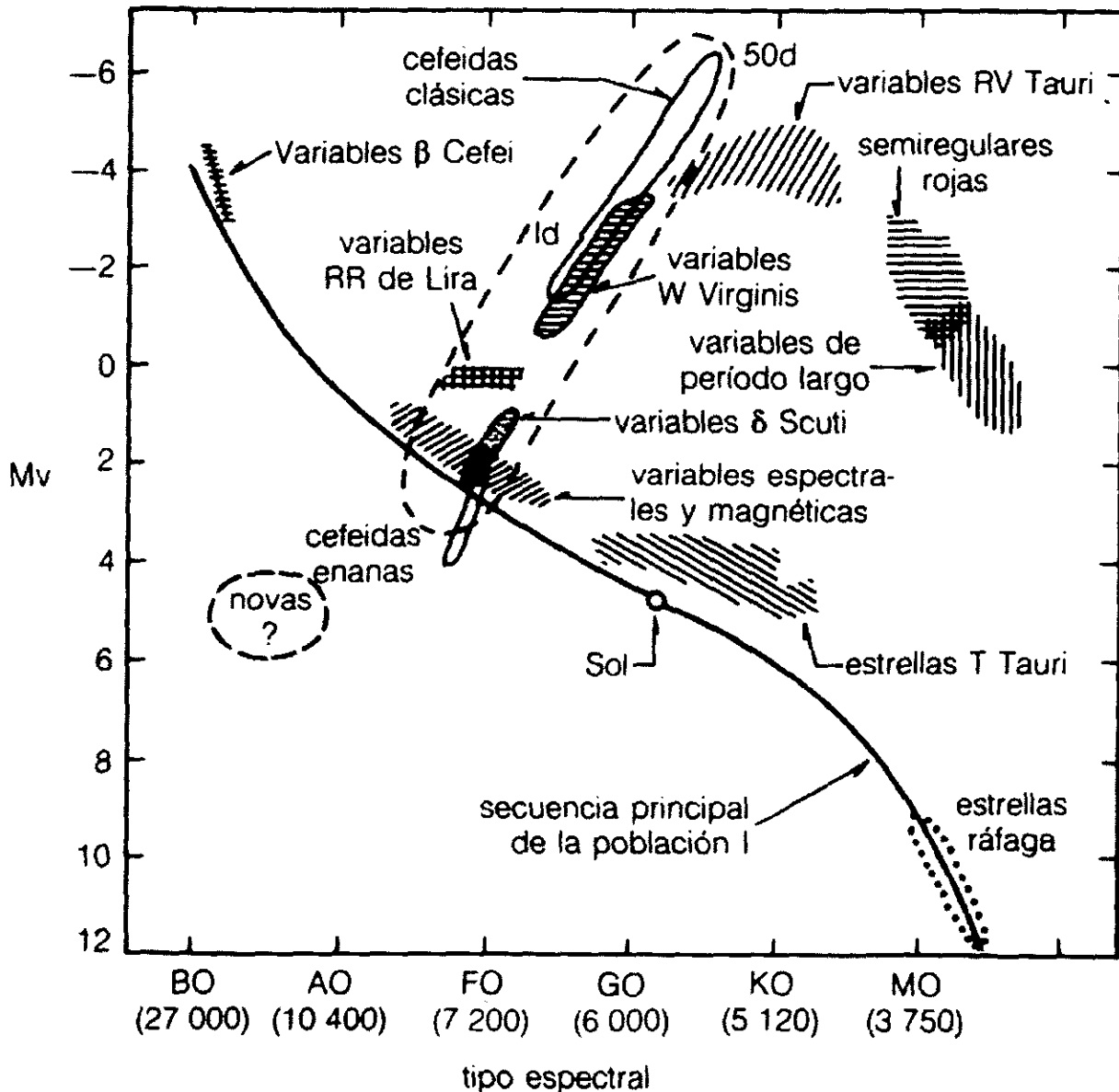


Fig. 1.2 Aquí se muestra la posición de algunas estrellas variables en el diagrama H-R.

La figura 1.2, muestra la ubicación de las diferentes clases de estrellas variables en el diagrama H-R.

1.2.2. Relación periodo - luminosidad

La importancia inicial de las estrellas variables (en particular las cefeidas) fue la existencia de una relación entre el periodo de pulsación de la estrella y la luminosidad. A partir del conocimiento de los periodos de estas estrellas se puede obtener la luminosidad, y por tanto la magnitud absoluta, por lo que se utilizaron ampliamente para calcular distancias estelares. En la figura 1.3 se muestra la dependencia periodo luminosidad para algunas estrellas variables.

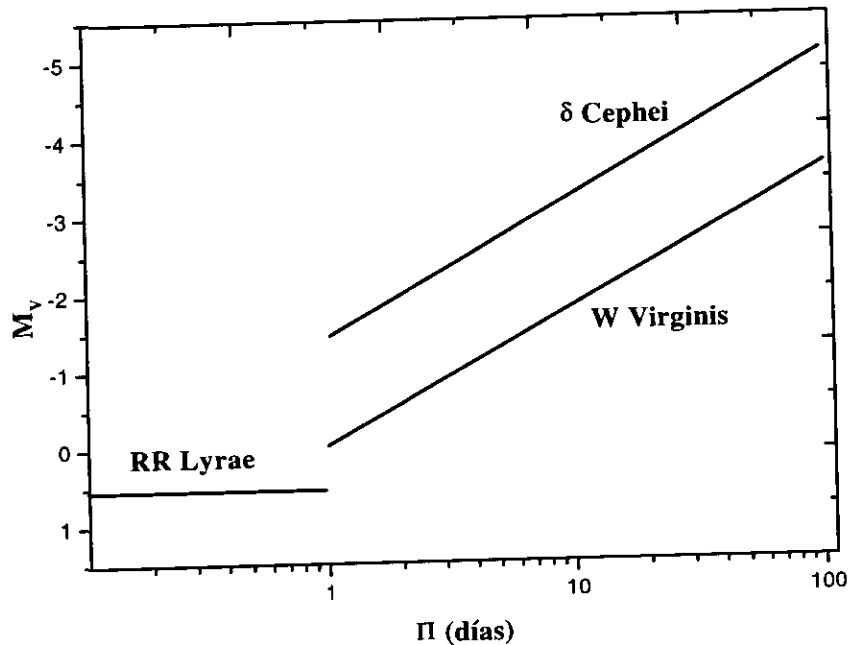


Fig. 1.3 Relación periodo luminosidad para algunas estrellas variables.

La relación existente entre la magnitud absoluta de una estrella y su distancia es la siguiente:

$$M - m = -5 \log r + 5$$

De esta relación se mide la magnitud aparente m , y se obtiene la magnitud absoluta M al medir el periodo, por lo que se puede obtener r , la distancia en parsecs a la estrella.

1.2.3. Relación periodo - densidad media

Un aspecto importante en la teoría física de las estrellas pulsantes se puede observar con una estimación simple: consideremos la pulsación como una onda acústica en la estrella. Su velocidad es:

$$C_s = \sqrt{(\Gamma P/\rho)},$$

con $\Gamma = (C_P/C_V)$, la razón de los calores específicos, P la presión, y ρ la densidad del material estelar. La presión media en el interior de las estrellas es del orden de magnitud de la fuerza gravitatoria sobre una columna de materia con una masa m y área transversal unitaria, extendida desde la superficie hacia el interior estelar, tenemos entonces :

$$\langle P \rangle = \langle \rho \rangle R (Gm/R^2).$$

El periodo de la oscilación es del orden de $\Pi \sim R/C \sim R(\Gamma Gm/R)$ y puesto que $m = (4/3)\pi R^3 \rho$, hallamos esta importante relación entre el periodo y la densidad media de la estrella:

$$\Pi = 2\pi \sqrt{\{(4/3)\pi G \langle \rho \rangle\}},$$

la cual ha sido comprobada gracias a numerosos datos observacionales.

1.3. Variables en cúmulos

Las observaciones de estrellas variables en cúmulos nos dan oportunidad de verificar las fases evolutivas dependientes de los modelos. Puesto que las estrellas de interés miembros de cúmulos se tiene la ventaja de que éstas son parte de una misma generación de estrellas, esto es, la edad y composición química de las estrellas es la misma que la de las demás estrellas del cúmulo, por lo que lo único que determina su fase evolutiva es su masa.

Son varios los astrónomos que se han dedicado a hacer observaciones de estrellas variables en cúmulos. A continuación se presenta una pequeña tabla de algunas estrellas variables, del tipo δ Scuti, en cúmulos abiertos.

Tabla 1.1. Estrellas variables tipo δ Scuti en cúmulos abiertos.

Cúmulo	Distancia (pc)	Edad años $\times 10^6$	Variables (conocidas)	Referencias
Coma	85.4	700	3	Bahner 1957 Breger & Sanwal 1969 Jackisch 1972
Pléyades	139.6	100	4	Breger 1972
Per	166	400	3	Slovak
Praesepe	171	700	9	Breger 1972
NGC 2264	850		2	Breger 1972
NGC 6134	910	891	3	Frandsen & Kjeldsen 1990

Referencias

Abell, G. O. 1993 *Exploration of the Universe*. (Saunders College Publishing)

-
- Bahner, K., Mawridis, L. 1957, *Z. Astrophys.* **41**, 254.
- Bakulin, P. I. et al. 1987 *Curso de Astronomía General*. (Mir)
- Breger, M. 1970, *ApJ*, **162**, 597.
- Breger, M. 1972, *ApJ*, **171**, 539.
- Breger, M. 1972, *ApJ*, **176**, 373.
- Breger, M. y Sanwal, N. B. 1968, *ApJ.Letters.*, **1**, 103.
- Frandsen, S. y Kjeldsen, H. 1990 *A. S. P. Conf. Series.* **11**, 312.
- Hoag, A. A., Johnson, H. L., Iriarte, B., Hallam, K. L., y Sharpless, S. 1961, *Publ. U. S. Naval Obs.*, **17**, part 7.
- Horan, S. 1979, *A.J.*, **84**, 1770.
- Jackisch, G. 1972, *Astron. Nachr*, **294**, 1.
- Karttunen, H. et al. 1994 *Fundamental Astronomy*. (Springer-Verlag)
- Mermilliod, J. C., 1976, *A&ASS*, **24**, 159.
- Peniche, R. y Peña, J. 1987 *Rev. Mex. Astron. Astrofís.* **14**, 420.
- Peña, J. H. y Peniche, R. 1985 "Estrellas Variables" en *La Astronomía contemporánea*. (UNAM)
- Slovak, M. 1978, *ApJ*, **223**, 192.
- Unsöld, A. y Baschek, B. *The New Cosmos*. (Springer-Verlag)

Capítulo 2

Condiciones físicas en las estrellas

2.1 Estrellas en equilibrio

Para describir los interiores estelares, se supone que están en equilibrio. Estas condiciones se pueden explicar en forma de ecuaciones que toman en cuenta el equilibrio de la estrella, y las leyes físicas que gobiernan el material estelar. Por supuesto que esto no sucede en las estrellas pulsantes. Antes de estudiar el fenómeno de la pulsación, veremos el sistema más simple de una estrella en equilibrio, para después considerar la pulsación como una perturbación.

2.1.1 Equilibrio mecánico

La fuerza gravitatoria sobre una cáscara de material estelar tiende a jalarla hacia el centro de la estrella. Sin embargo, la presión se incrementa con la profundidad, y entonces la presión debajo de la cáscara no es igual que sobre la cáscara. Esta diferencia de presiones es la que se opone a que la cáscara caiga al interior. La primera condición para el equilibrio es que la suma de esas fuerzas sea cero.

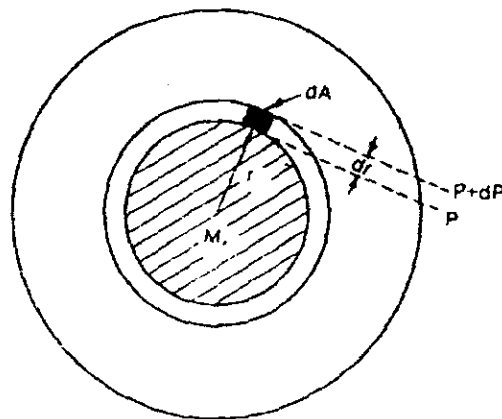


Fig. 2.1.

Considérese un elemento de volumen cilíndrico a una distancia r desde el centro de la estrella (figura 2.1). Su volumen es $dV = dA dr$, con dA el área de la base, y dr su altura; su masa será $dm = \rho(r) dA dr$, con $\rho(r)$ la densidad del gas en el radio r . Si la masa dentro del radio r es $M'(r)$, la fuerza gravitatoria sobre el elemento de volumen será

$$dF_g = -(GM(r)\rho(r)/r^2)dr, \quad (1)$$

¹ En este capítulo se usarán las letras m y M para la masa, y no para la magnitud, como en el resto de este trabajo.

donde G es la constante gravitatoria. El signo menos en esta expresión significa que la fuerza se dirige hacia el centro de la estrella. Si la presión en la superficie inferior del elemento de volumen es P y en la superficie superior es $P + dP$, la fuerza neta de presión actuando sobre el elemento es

$$dF_p = P dA - (P + dP) dA = - dP dA. \quad (2)$$

Puesto que la presión decrece hacia afuera, dP será negativa, y dF_p será positiva. La condición de equilibrio es que la fuerza total que actúa sobre el elemento de volumen es cero, esto implica que

$$dF_p + dF_g = -[GM(r)\rho(r)/r^2]dr - dP/dA = 0, \quad (3)$$

o

$$dP/dr = -GM(r)\rho(r)/r^2. \quad (4)$$

Esta es la ecuación de equilibrio hidrostático. Cuando la estrella no está en equilibrio la ecuación adquiere un término más (masa por aceleración), quedando como:

$$dP/dr = [-GM(r)\rho(r)/r^2] - \rho d^2r/dt^2. \quad (5)$$

2.1.2 Distribución de la masa

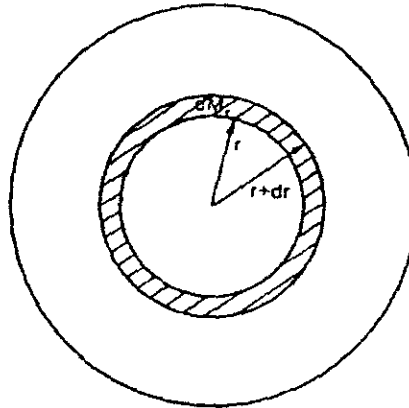


Fig. 2.2.

La segunda ecuación da la masa contenida en un radio dado. Consideremos una cáscara esférica de espesor dr a una distancia r del centro (figura 2.2). Su masa es

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (6)$$

dándonos la ecuación de continuidad de la masa

$$dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (7)$$

2.1.3 Producción de energía

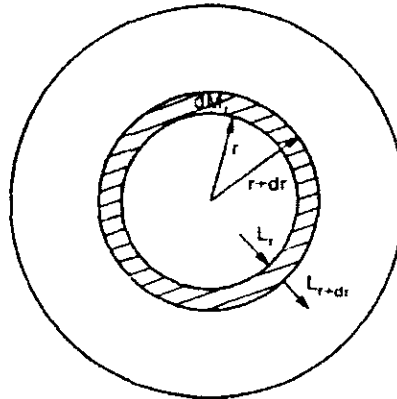


Fig. 2.3

La tercera condición de equilibrio expresa la conservación de la energía, en el supuesto de que la energía producida en el interior de la estrella sea transportada hacia afuera y luego radiada. Consideremos nuevamente una cáscara de espesor dr y masa $dM(r)$ a un radio r (figura 2.3). Sea $L(r)$ el flujo de energía, o sea, la cantidad de energía que pasa por la superficie de radio r por unidad de tiempo. Si el coeficiente de producción de energía es ϵ , es decir, la cantidad de energía que sale de la estrella por unidad de tiempo y de masa, entonces:

$$dL(r) = L(r+dr) - L(r) = \epsilon dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon dr. \quad (8)$$

Así, la ecuación de conservación de la energía es:

$$dL(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon. \quad (9)$$

Esta ecuación se generaliza debido a la salida de calor de la estrella con el tiempo, cuando hay una perturbación:

$$dL(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r) (\epsilon - T dS/dt). \quad (10)$$

La razón a que se produce la energía depende de la distancia al centro. Prácticamente toda la energía que radia la estrella se produce en el núcleo. En las afueras, la producción de energía es despreciable, y $L(r)$ es casi constante.

2.1.4 El gradiente de temperatura

La cuarta ecuación de equilibrio da la temperatura como función del radio, o el gradiente de temperatura dT/dr . La forma de la ecuación depende de la forma en que la energía es transportada: por conducción, por convección, o por radiación.

En los interiores de las estrellas normales, la conducción es muy ineficiente, ya que los electrones que llevan la energía sólo pueden viajar distancias muy cortas antes de chocar con otras partículas. La conducción sólo es considerable en las estrellas compactas, de las que no nos ocuparemos aquí, por lo cual podemos despreciar la contribución de la conducción.

En el transporte energético radiativo, los fotones emitidos en las partes más calientes de la estrella son absorbidos por las regiones más frías, calentándose por ello. Decimos que la estrella está en equilibrio radiativo cuando la energía que sale del interior de la estrella es transportada totalmente por causa de la radiación.

El gradiente de temperatura radiativo se relaciona al flujo de energía $L(r)$ de acuerdo a

$$dT/dr = (-3/4ac)(\kappa\rho/T^3)(L/4\pi r^2), \quad (11)$$

donde $a = 4c\sigma$ es la constante de radiación, σ la constante de Stefan-Boltzmann, c la velocidad de la luz, ρ la densidad, y κ es el coeficiente de absorción (también llamado opacidad), que da la cantidad de absorción de energía por unidad de masa. El valor de este depende de la temperatura, de la densidad, y de la composición química.

Si el transporte de energía por transferencia radiativa se vuelve ineficiente, el valor absoluto del gradiente radiativo de temperatura se hace muy grande. En ese caso, se crean movimientos en el gas, que acarrear la energía hacia afuera, en forma más eficiente que la radiación. En estos movimientos convectivos, el gas sube hasta las capas más frías, donde pierde energía, y vuelve a bajar. La subida y bajada del gas también mezcla el material estelar, con lo que la composición de las partes convectivas de la estrella se vuelve homogénea. Usaremos aquí los exponentes adiabáticos, definidos por:

$$dP/P + \Gamma_1 dV/V = 0, \quad (12)$$

$$dP/P + \Gamma_2/(1-\Gamma_2) dT/T = 0, \quad (13)$$

$$dT/T + (\Gamma_3 - 1) dV/V = 0. \quad (14)$$

La expresión para el gradiente de temperatura convectivo es:

$$dT/dr = (\Gamma_2 - 1/\Gamma_2)(T/P) (dP/dr). \quad (15)$$

Los movimientos convectivos comienzan cuando el gradiente de temperatura radiativo se hace más grande que el gradiente adiabático, ya sea si el gradiente radiativo desciende abruptamente, o si el gradiente convectivo sube a la superficie. De la ecuación del gradiente de temperatura radiativo se ve que esperaríamos un descenso del gradiente radiativo, ya sea porque la densidad del flujo de energía o porque el coeficiente de absorción se hacen muy grandes. El gradiente convectivo se puede hacer muy pequeño si el exponente adiabático se aproxima a 1.

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en términos de M (Esta se llama descripción lagrangiana, mientras que la anterior se llama descripción euleriana), con lo cual se define el

problema en términos de un parámetro más fácilmente observable. Con esto las ecuaciones quedan así:

$$dr/dM = 1/[4\pi r^2(M)\rho(M)], \quad (16)$$

$$dP/dM = -GM/[4\pi r^2(M)], \quad (17)$$

$$dL/dM = \varepsilon - T dS/dT, \quad (18)$$

$$dT/dM = (-3/4ac)(\kappa T^3)[L(M)/16\pi^2 r^4], \quad (19)$$

$$dT/dM = [\Gamma_2 - 1/\Gamma_2](T/P)(dP/dM). \quad (20)$$

Este sistema es irresoluble analíticamente, por lo que sus soluciones se obtienen numéricamente por medio de computadoras.

2.2 Estrellas pulsantes

Imaginemos que podemos aislar un elemento de gas de la estrella y estudiarlo. Su estado termodinámico se alterará en la pulsación, y la primera ley de la termodinámica requiere que el calor absorbido en un pequeño cambio sea igual a la suma de la energía interna que sale y el trabajo hecho por el elemento de gas sobre los alrededores:

$$dQ = dU + dW. \quad (21)$$

Si el elemento de masa se sigue durante un ciclo completo, el valor de la energía interna U regresa a su valor inicial, así que el trabajo hecho durante el ciclo es

$$W = + \int dQ. \quad (22)$$

El elemento hace trabajo positivo sobre los alrededores, esto es, produce oscilaciones sólo si absorbe una cantidad de calor.

La manera en que se debe producir la absorción para cumplirse efectivamente, esta dada por la segunda ley de la termodinámica. Debido a que el gas retorna a su estado inicial al final del ciclo, la entropía debería también regresar a su valor inicial:

$$dS = 0 = \int dQ/T. \quad (23)$$

Esto requiere que en un proceso cíclico el calor absorbido deba regresar parcialmente, siendo moderado el intercambio de calor por $1/T$. Si la pulsación fuera isotérmica, por ejemplo, deberíamos tener de inmediato que $\int dQ = 0$, y no puede hacerse trabajo. Supóngase que imaginamos que el ciclo progresa en el tiempo, y representamos la ganancia de calor con $dQ(t)$ y la variación de la temperatura del ciclo

$$T = T_0 + \Delta T(t). \quad (24)$$

Donde $\Delta T(t)$ es una pequeña modulación cíclica de la temperatura. Entonces de la ecuación 23 tenemos

$$0 = \int dQ(t)/(T_0 + \Delta T(t)) \approx \int (dQ/T_0)(1 - \Delta T/T_0). \quad (25)$$

Se sigue que:

$$W = \int dQ \approx \int (1 - \Delta T/T_0)dQ. \quad (26)$$

De este resultado se sigue el principio físico importante de que si se hace trabajo positivo en los alrededores, el calor debe ser absorbido mientras la temperatura es alta y reemitido cuando la temperatura cae. Debido a que la estrella entera oscila, y debido a que algunas porciones de la estrella pueden absorber trabajo, la estrella entera puede oscilar si

$$W = \int dQ \approx \int \oint_M \Delta T/T_0(M) dQ(M) dM. \quad (27)$$

Donde la integral cíclica es sobre cada masa y la integral de masa es sobre toda la estrella. Este principio físico es usado en los motores, donde el calor es agregado por compresión, y es parcialmente reemitido después de que el gas se enfría en la expansión.

Para analizar el problema de los detalles de la pulsación se usa una técnica simple: el análisis de estabilidad de las ecuaciones de movimiento linealizadas. Se supone que existe una configuración de equilibrio, y se estudian las oscilaciones infinitesimales para dicha configuración. Para amplitudes pequeñas, todas las ecuaciones son lineales en las perturbaciones de los valores de equilibrio de las variables. Estas amplitudes infinitesimales pueden crecer con el tiempo, en cuyo caso puede existir oscilación, o pueden cesar, en cuyo caso se tiene equilibrio estable. Esta técnica es útil para identificar los modos de inestabilidad, pero deja de ser válida si las oscilaciones se hacen muy grandes. Aunque la solución completa del problema de la pulsación requiere del análisis de las ecuaciones no lineales, se presentará el análisis lineal porque aclara factores muy importantes de la estabilidad.

Consideremos r , P , T , y L como funciones de M , y sean r_0 , P_0 , T_0 , y L_0 los valores de un modelo estelar satisfactorio en equilibrio. El procedimiento es considerar perturbaciones pequeñas de las variables, para ver si estas crecen o decaen. Para ello, definimos cambios fraccionales infinitesimales de estas variables como r' , p' , t' , y λ' , y las consideramos como variables dependientes del tiempo. Específicamente se tiene:

$$r(M,t) = r_0(M)[1 + r'(M,t)], \quad (28)$$

$$P(M,t) = P_0(M)[1 + p'(M,t)], \quad (29)$$

$$T(M,t) = T_0(M)[1 + t'(M,t)], \quad (30)$$

$$L(M,t) = L_0(M)[1 + \lambda'(M,t)], \quad (31)$$

Las ecuaciones de estructura estelar están entonces expandidas al primer orden de estos incrementos. La ecuación radial de movimiento, por ejemplo,

$$\partial P / \partial M = -1/(4\pi r^2)(GM/r^2) + (\partial^2 r / \partial t^2), \quad (32)$$

se transforma en

$$\partial P_0(1+p') / \partial M = -1/[4\pi r_0(1+r')]^2 [GM/(r_0^2(1+r')) + \partial^2 r_0(1+r') / \partial t^2]. \quad (33)$$

La expansión a primer orden en los incrementos nos da:

$$\partial P_0 / \partial M + \partial P_0 p' / \partial M = -[1 - 2r'/4\pi r_0] [GM(1 - 2r')/(r_0^2) + r_0(\partial^2 r' / \partial t^2)]. \quad (34)$$

Pero como el modelo inicial está en equilibrio,

$$\partial P_0 / \partial M = -[1/4\pi r_0^2] [GM/r_0^2]. \quad (35)$$

Con esto la ecuación 34 se convierte en:

$$-(GM/4\pi r_0)p' + P_0(\partial p' / \partial M) = (4r'GM/4\pi r_0) - (1/4\pi r_0)(\partial^2 r' / \partial t^2), \quad (36)$$

o alternativamente:

$$\partial p' / \partial M = 1/(4\pi r_0 P_0) [\sigma_0^2(4r' + p') - \partial^2 r' / \partial t^2]. \quad (37)$$

donde definimos $\sigma_0^2 = GM/r_0^2$.

Análogamente, se puede demostrar que la ecuación de continuidad, escrita de la forma:

$$\partial r / \partial M = 1/(4\pi r^2 \rho), \quad (38)$$

al ser linealizada se convierte en:

$$\partial r' / \partial M = -(1/4\pi r_0^2 \rho_0)(3r' + \alpha p' - \delta t'), \quad (39)$$

donde se ha definido:

$$\alpha = P/\rho (\partial \rho / \partial P)_T, \quad (40)$$

$$\delta = -T/\rho (\partial \rho / \partial T)_P, \quad (41)$$

Asimismo, la ecuación de difusión radiativa siguiente:

$$-(64\pi^2 a c r^4 T^3 / 3\kappa)(\partial T / \partial M) = L, \quad (42)$$

se puede linealizar como:

$$\partial t'/\partial M = (1/T_0)(\partial T_0/\partial M) [\lambda' - 4r' + \kappa_P p' + (\kappa_T - 4)t'], \quad (43)$$

donde las derivadas logarítmicas de la opacidad están definidas como:

$$\kappa_P = (P/\kappa)(\partial \kappa/\partial P)_T, \quad (44)$$

$$\kappa_T = (T/\kappa)(\partial \kappa/\partial T)_P, \quad (45)$$

La ecuación linealizada de la energía es la siguiente:

$$\partial \lambda'/\partial M = - [(\partial U/\partial V)_T + P_0](\alpha/\rho_0 L_0)(C dt'/dt - dp'/dt), \quad (46)$$

donde el parámetro de estado es ahora:

$$C = C_P \rho_0 T_0 / \alpha [(\partial U/\partial V)_T + P_0]. \quad (47)$$

Veremos más adelante que C está relacionada de forma simple con el segundo exponente adiabático. Está completo el conjunto de ecuaciones linealizadas. De estas ecuaciones, así como con las definiciones y parámetros de estado auxiliares, podremos determinar la estabilidad del modelo en equilibrio.

El examen de estabilidad de estas cuatro ecuaciones acopladas para una estrella entera es aun muy difícil, porque todos los coeficientes de las perturbaciones son funciones de la coordenada M . La estabilidad de la estrella depende del análisis de estabilidad de cada elemento y de como está relacionado con cada uno de los otros. Pero los fundamentos de la física se pueden ver tomando un modelo simple que consiste en tomar una zona delgada. Si la zona es suficientemente delgada, los coeficientes en las ecuaciones linealizadas pueden considerarse constantes a través de la zona. Esto es, la cuestión de la estabilidad de la estrella completa se reemplaza por la cuestión de la estabilidad de una zona delgada. Una vez que se entiende esa zona, podemos pasar a considerar a la estrella como una sucesión de zonas delgadas de estabilidad diferente.

Si suponemos que las fluctuaciones son constantes a través de la capa delgada, tenemos que:

$$\partial r'/\partial M = \partial p'/\partial M = \partial t'/\partial M = 0. \quad (48)$$

No obstante, si se hiciera la misma suposición para λ' , perderíamos la física esencial de la máquina térmica, porque la interacción que va a ser estudiada es la modulación del flujo de fotones debida a la interacción con el sistema mecánico. Sea la variación del flujo de la frontera baja de la cáscara λ'_L , y la de la frontera alta λ'_U . Entonces para la cáscara delgada tendría sentido tomar:

$$\lambda' = (\lambda'_L + \lambda'_U)/2, \quad (49)$$

y

$$\partial\lambda'/\partial M = (\lambda'_L + \lambda'_U)/m, \quad (50)$$

En la esencia de analizar la más simple de las cáscaras con miras a los efectos físicos, asumimos que el flujo en la frontera baja es constante; esto es, $\lambda'_L = 0$. Entonces de las dos ecuaciones previas tenemos:

$$\partial\lambda'/\partial M \approx 2\lambda'/m, \quad (51)$$

Cuando aplicamos estas simplificaciones a las ecuaciones linealizadas, resulta este conjunto de cuatro ecuaciones:

$$\partial^2 r'/\partial t^2 = \sigma_0^2 (4r' + p'), \quad (52)$$

$$3r' + \alpha p' - \delta t'' = 0, \quad (53)$$

$$\lambda' - 4r' + \kappa_p p' + (\kappa_T - 4)r' = 0, \quad (54)$$

$$C\partial t'/\partial t - \partial p'/\partial t = -K\sigma_0 \lambda', \quad (55)$$

donde el parámetro K se define como:

$$K = 2L_0\rho_0/(m\sigma_0\alpha[(\partial U/\partial V)_T + P]). \quad (56)$$

De estas cuatro ecuaciones se puede obtener (diferenciando y eliminando) la siguiente ecuación de tercer orden:

$$\partial^3 r'/\partial t^3 + K\sigma_0 A \partial^2 r'/\partial t^2 + \sigma_0^2 B \partial r'/\partial t + K\sigma_0 D r' = 0, \quad (57)$$

donde los coeficientes son:

$$A = -[\alpha(\kappa_T - 4) + \delta\kappa_p]/(\alpha C - \delta), \quad (58)$$

$$B = [3C - 4(\alpha C - \delta)]/(\alpha C - \delta), \quad (59)$$

$$D = [(4\delta - 3)(\kappa_T - 4) + 4\delta(\kappa_p + 1)]/(\alpha C - \delta), \quad (60)$$

Se puede demostrar que las siguientes relaciones son válidas:

$$\Gamma_1 = C/(\alpha C - \delta), \quad (61)$$

$$\Gamma_2 = C/(C - 1), \quad (62)$$

$$\Gamma_3 = 1 + [1/(\alpha C - \delta)], \quad (63)$$

Podemos hacer el examen de estabilidad suponiendo que la dependencia de la fluctuación en el tiempo es exponencial

$$r'(t) = \xi e^{st}. \quad (64)$$

Con esto obtenemos la siguiente ecuación cúbica para s :

$$s^3 + K\sigma_0 A s^2 + \sigma_0 B s + K\sigma_0 D = 0. \quad (65)$$

Consideremos primero oscilaciones adiabáticas. Es evidente de la manera en que las ecuaciones se establecieron, que la condición de que $dQ = 0$ es equivalente a

$$C dt'/dt - dp'/dt = 0, \quad (66)$$

de las ecuaciones 52-55 esto se cumple formalmente poniendo $K = 0$, con lo que la ecuación 65 se vuelve cuadrática, con las soluciones siguientes:

$$s = \pm i \sqrt{(B)\sigma_0} = \pm i \sqrt{(3\Gamma_1 - 4)\sigma_0}. \quad (67)$$

El caso $\Gamma_1 > 4/3$ nos lleva a oscilaciones adiabáticas senoidales. Estas se amortiguarán relativamente rápido cuando se considera la solución total, y no cuentan para el fenómeno de la variabilidad. Por otro lado, parece que el caso $\Gamma_1 < 4/3$ lleva a una perturbación exponencialmente creciente, esto es, a inestabilidad.

Enfocándonos a que el caso no adiabático ($K \neq 0$) sea estable, no obstante, las tres raíces de la ecuación cúbica deben tener partes negativas reales. Esto sólo se puede si:

$$\sigma_0 B > 0, \quad (68)$$

$$K\sigma_0^2 D > 0, \quad (69)$$

$$K\sigma_0(AB - D) > 0. \quad (70)$$

La primer condición simplemente asegura estabilidad dinámica, de la misma manera que se mencionó en el párrafo anterior. Para nuestros propósitos actuales será suficiente asumir que las dos primeras condiciones se satisfacen, y examinar la tercera. De la ecuación 57 se puede demostrar que la zona es estable si

$$4/C - (\kappa_T/C + \kappa_P) - 4/(3\Gamma_1) > 0. \quad (71)$$

El examen de la ecuación anterior muestra claramente los efectos físicos que contribuyen al estado de estabilidad de la zona. El primer término siempre contribuye a la estabilidad porque es positivo. Por otro lado, la cantidad

$$C = \Gamma_2/(\Gamma_2 - 1), \quad (72)$$

se hace muy grande conforme Γ_2 se aproxima a la unidad. Esto sucede en las zonas de ionización, donde Γ_2 es sólo ligeramente mayor que la unidad. Veremos entonces que el término de

estabilización disminuye en las zonas de ionización. A este efecto se le ha llamado mecanismo Γ . La razón física detrás de la presencia de este término estabilizador es la tendencia del gas a perder calor por radiación cuando la temperatura sube y a ganar calor cuando la temperatura baja, justamente lo opuesto al mecanismo de las pulsaciones provocadas.

El segundo término refleja la manera en que la opacidad varía durante la pulsación. Valores positivos de κ_T y κ_p implicarían que la opacidad se incrementa con la contracción, que debería remover más energía del flujo de radiación, al mismo tiempo que produce trabajo mecánico. El efecto desestabilizador de κ_T y κ_p positivos se le ha llamado mecanismo κ por Baker y Kippenhahn.

En las regiones internas donde se aplica la opacidad de Kramers (cualquiera de la forma $T^{-3.5}$) y donde $\Gamma_2 = 5/3$, el efecto κ es estabilizante porque

$$-(\kappa_T/C) + \kappa_p = +4/5, \quad (73)$$

este hecho contribuye a la estabilidad pulsacional del interior estelar.

En las zonas de ionización, el valor mayor de C reduce la importancia de κ_T , mientras que κ_p siempre es positivo. Hay también regiones donde κ_T también es positivo, pero todos estos factores desestabilizantes están relacionados a las mayores zonas de ionización.

El tercer término es siempre desestabilizante y refleja la geometría esférica de la estrella. La estabilidad total de la zona está determinada, desde luego, por la suma de los tres términos. La estabilidad total de la zona depende de los efectos acumulativos de todas las zonas.

En todo oscilador hay además de una frecuencia fundamental, otras oscilaciones a las que llamamos armónicos. En los instrumentos musicales estos armónicos dan el timbre particular de cada instrumento al combinarse con la frecuencia fundamental. De la misma manera podemos examinar una gráfica de la variación de luminosidad de la estrella, esto es, la curva de luz. Esta nos da el periodo básico y la densidad media de la estrella, así como algunas pistas del tamaño de la estrella. El análisis de armónicos en las estrellas se ha hecho común hace apenas unos años debido a que para ello se necesitan observaciones muy precisas y cuidadosas. Al modo fundamental se le llama F , y a los armónicos que siguen se les llama $1H$, $2H$, etc. También existen modos de pulsación no radiales (esto es, que no preservan la simetría esférica durante la pulsación), pero esto no se analizará en este trabajo.

Referencias

Bakulin, P. I. et al. 1987 *Curso de Astronomía General*. (Mir)

Clayton D. D. 1968 *Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. (Saunders College Publishing)

Cooper, . y Walker, . 1980 *Getting the Measures of Stars*. (Bristol)

Cox, J. P. *Theory of Stellar Pulsations*. (Princeton University Press)

Hansen, C. J. y Kawaler, S. D. 1994 *Stellar Interiors*. (Springer - Verlag)

Karttunen, H. et al. 1994 *Fundamental Astronomy*. (Springer - Verlag)

Kippenhahn, R. y Weigert, A. 1994 *Stellar Structure and Evolution*. (Springer - Verlag)

Novotny, E. 1987 *Stellar Atmospheres and Interiors*. (Oxford University Press).

Unno et al. 1990 *Nonradial Stellar Pulsations*. (Tokyo University Press)

Capítulo 3

Estrellas δ Scuti y el cúmulo NGC 2264

3.1 Variables tipo δ Scuti

Las estrellas δ Scuti son estrellas de clase espectral *A* ó *F*. Sus periodos de variación de brillo son menores que 0.3 días y la amplitud de su variación es desde milésimos, hasta 0.8 magnitudes, siendo típica una variación de 0.02 magnitudes. En el diagrama H-R, las δ Scuti se sitúan en una franja de inestabilidad que va de las 2.5 magnitudes sobre la secuencia principal, hasta debajo de la población I estándar de la secuencia principal, a la que pertenecen la mayoría de las δ Scuti, aunque existen algunas pertenecientes a la población II. Se piensa que el origen de la pulsación de las δ Scuti está en las zonas de ionización del He II y el H, y las zonas de impulso causadas por la coincidencia del máximo flujo con la frecuencia del borde de la segunda ionización del He. La temperatura máxima no se alcanza simultáneamente con el brillo máximo, sino un poco antes, y la curva de velocidad radial inversa se retrasa a la curva de luz por una fracción de 0.09 del periodo. Las propiedades de las δ Scuti en la secuencia principal difieren de las de mayor luminosidad: en las de la secuencia principal los periodos son como de una hora, y las amplitudes tan pequeñas como 0.02 magnitudes o menos; mientras que en las variables más luminosas tienen periodos mayores, y frecuentemente también tienen grandes amplitudes. Algunos de los parámetros que se sabe que provocan pulsación son: la velocidad de rotación, su luminosidad y su metalicidad.

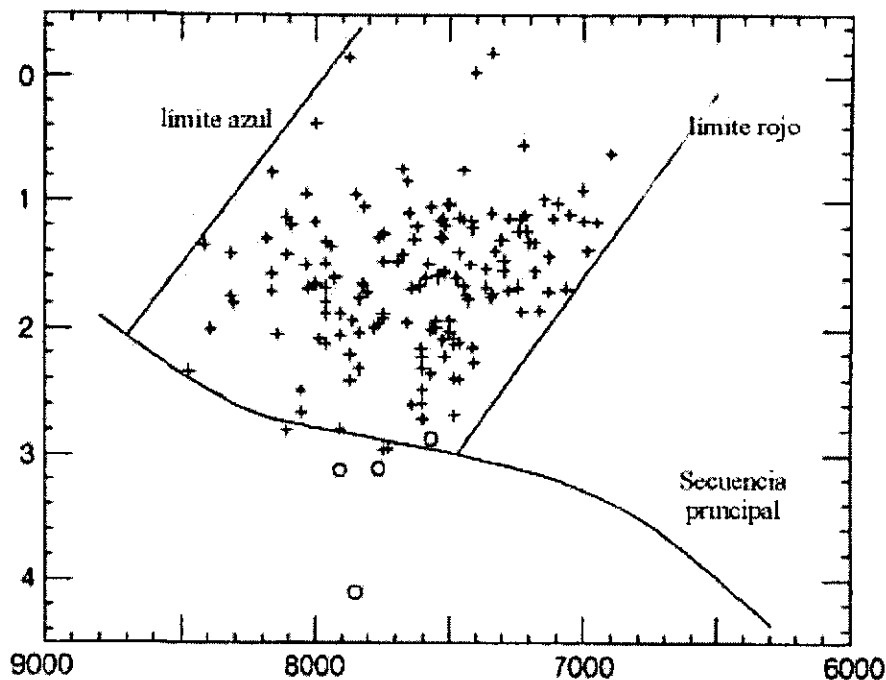


Fig. 3.1 Posición de las δ Scuti en el diagrama H-R.

La figura 3.1 muestra la posición de las δ Scuti conocidas en el diagrama H-R, y las líneas punteadas muestran los límites observados de la franja de inestabilidad. Estos límites no son absolutos, y sólo sirven para indicar que fuera de esa región la pulsación es menos probable, pero varias estrellas han sido reportadas como variables, y están ubicadas fuera de los bordes.

A continuación, una breve revisión de las interpretaciones de la pulsación de las estrellas δ Scuti desde los inicios.

3.1.1 La era inicial

La primera mención de variabilidad de δ Sct la hizo Wright en 1900, al anunciar que la velocidad radial de la estrella δ Scuti era variable. Varios años más tarde, en 1935 Colacevich y Fath hicieron sus mediciones relativamente cuidadosas de velocidad radial y fotométricas de la estrella. Ellos determinaron un periodo y situaron a δ Scuti en el grupo de estrellas variables de β Canis Majoris. Investigaciones subsecuentes sugirieron que δ Scuti se asemeja a las cefeidas, en lugar de a las variables más calientes β Canis Majoris. Las estrellas *DQ Cep*, *CC And*, y *AI Vel* eran similares a δ Scuti y mostraban amplitudes relativamente grandes.

En un desarrollo importante de 1956, Eggen señaló la existencia de un nuevo tipo de estrella variable con cuatro miembros propuestos (*DQ Cep*, *CC And*, δ Sct, y ρ Pup). No es sorprendente que las primeras estrellas δ Scuti descubiertas resultaran inusuales para su clase a causa de sus grandes amplitudes fotométricas. Fue hasta después de 1965 que pudieron hacerse numerosos descubrimientos de estrellas δ Scuti, cuando las medidas fotoeléctricas con precisión de milimagnitudes fueron posibles. Se llevaron a cabo varias búsquedas sistemáticas para más estrellas δ Scuti en 1966 por Breger, Danziger, Millis, y Jorgengen. Estos nuevos descubrimientos hicieron necesarios extensos artículos de revisión como los de Baglin en 1973, y Breger en 1979.

3.1.2 La hipótesis de la marea

Fitch propone en 1967 que en muchas pulsantes δ Scuti y β Cefei, la pulsación radial intrínseca podría ser perturbada por fuerzas de marea de una compañera estelar en una órbita elíptica. Esto debería explicar la modulación del (relativamente) gran periodo de los modos radiales observados en estrellas tales como *CC And*. Por otro lado, en órbitas circulares y rotación síncrona, la deformación de mareas debería parecer estática en el marco rotacional así que los modos no radiales podrían extenderse a intensidades significativas. Sin embargo, se puede obtener información valiosa sobre la pulsación estelar y la estructura estudiando las binarias pulsantes cercanas. Aún en sistemas binarios separados en general, donde la influencia de mareas de la compañera puede ser despreciable, los efectos de tiempo muerto en la órbita también deben considerarse.

3.1.3 La hipótesis *USPV*

En 1960, después de examinar nueve estrellas δ Scuti de pequeña amplitud en el grupo móvil de las Híadas y en la población vieja del disco, Eggen propuso que todas aquellas variables con $\Pi \sim 0.2$ días debían llamarse variables cefeidas de periodo ultracorto o variables *USPV* (ultra short period

variables). Sin embargo no pudo confirmar la relación periodo luminosidad propuesta por Breger en 1969. En lugar de ello, sugirió la existencia de dos grupos distintos de variables de periodo ultracorto separados por la luminosidad, a $M_V = 0.6$ y 1.9 mag, respectivamente. La posición en el diagrama H-R de las nueve variables estudiadas por él parecía fundamentar la división.

No obstante, una gráfica de una muestra grande de estrellas δ Scuti hecha por Breger en 1979 no muestra tal división. Además, a pesar de las incertidumbres conectadas con la definición de un periodo característico para una estrella multiperíodica, la mayoría de ejemplos también obedecen una muy clara relación periodo – luminosidad - color.

3.1.4 ¿Las variaciones son irregulares, o multiperíodicas?

La pregunta de si las estrellas δ Scuti muestran frecuencias de pulsación estables, opuestas a las variaciones cuasiperiódicas o aún irregulares, es astrofísicamente muy importante. En 1974, Le Contel, Valtier y otros, al reportar su fotometría de HR 432, 515, 812, 8006 y 9039, sugirieron que los periodos en las estrellas δ Scuti tienen significado sólo en sentido estadístico. La evidencia fue revisada por Fitch en 1976 y la halló contradictoria. Fitch especuló que aún diez noches de observaciones serían insuficientes para extraer las frecuencias de pulsación múltiple, así que se creó una impresión de irregularidad.

3.1.5 Razones de periodo radial de variables de gran amplitud

Muchas variables δ Scuti de gran amplitud (*HADS*, por High Amplitude Delta Scuti) son pulsadoras de doble modo radial con una razón de periodos de $\Pi_1 / \Pi_0 = 0.773$ para las variables de población I y valores mayores que 0.778 (*SX Phe*) para las estrellas pobres en metal de población II. Hasta hace poco, fue sorprendentemente difícil relacionar teóricamente esas razones muy bien determinadas observacionalmente. El esquema de Christiansen - Dalsgaard de 1993 muestra el problema, así como su solución: los modelos calculados con las opacidades de Cox & Tabor en 1976 no reproducen las observaciones, mientras que nuevos modelos con tablas *OPAL* de Rogers & Iglesias en 1992 reproducen las observaciones muy bien.

Aún antes de disponer de las nuevas tablas de opacidad, hubo sospechas y sucesivos intentos razonables para proveer una relación teórica. Ejemplos de ello son las opacidades detalladas ya usadas por Cox, King & Hodson en 1979 y el mejoramiento de las opacidades por un factor de 2.5 en la región de $\log T = 5.2$ a 5.9 por Andreason y Petersen en 1988. La situación presente es satisfactoria para las razones de periodo de *HADS* pues pueden demostrarse por los resultados del uso de las nuevas opacidades *OPAL/OP* por Petersen & Christiansen - Dalsgaard (1996). Las dos estrellas se muestran abajo y representan dos ejemplos excelentes de *HADS* de población I y II. Esto se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Comparación entre observaciones y modelos usando las nuevas opacidades *OPAL/OP*.

Estrella	Π_0	Π_1/Π_0	[Fe/H]	Z	M_V	M_V	M/M_\odot
AI Vel	0.112	0.7727	-0.2	0.01	1.6 ± 0.1	1.3	1.8
SX Phe	0.055	0.7782	-1.3	0.001	2.9 ± 0.1	2.7	1.0

Hasta aquí llegaremos en lo referente a las estrellas δ Scuti. Ahora daremos información del cúmulo NGC 2264.

3.2 El cúmulo NGC 2264

En este trabajo nos concentraremos en el cúmulo NGC 2264, por lo que daremos información útil acerca de este cúmulo. Como el cúmulo 2264 está asociado con una nebulosa, se ha inferido, y después probado, que el cúmulo es muy joven. Incidentalmente, mencionamos que a últimas fechas 2264 ha pasado a ser objeto de atención de la astronomía del medio interestelar.

El primero en hacer un estudio completo de 2264 fue Walker, quien presenta en 1956 un diagrama color - magnitud del cúmulo, y dio una lista de variables y posibles variables. Entre estas variables estaban *W2* y *W20*, descubiertas por Wolf en 1924, y que se estudian en este trabajo (el nombre oficial de estas estrellas variables es *KV Mon* y *MP Mon*, respectivamente). El diagrama color - magnitud indica que el cúmulo posee una secuencia principal normal, extendiéndose de *O7* a *A0*, debajo de lo cual las estrellas caen encima de la secuencia principal. Este efecto fue confirmado por las observaciones espectroscópicas. Esto está de acuerdo a las predicciones teóricas mencionadas antes para un cúmulo joven. También calcula la edad del cúmulo tomando en cuenta el punto donde las estrellas del cúmulo se apartan de la secuencia principal, y la establece en 3×10^6 años. Asimismo, se encontró que los espectros dan velocidades de rotación altas para estrellas de tipo espectral posterior a *F8*, lo cual indica que tales estrellas aun no han disipado el momento angular original del material del cual se formaron. Walker también encuentra estrellas de tipo T Tauri (estrellas extremadamente jóvenes), que él infiere que están aun en fase de contracción gravitacional. En total, Walker observó cerca de 320 estrellas, entre constantes y variables. La figura 3.2 muestra el diagrama color-magnitud obtenido por Walker.

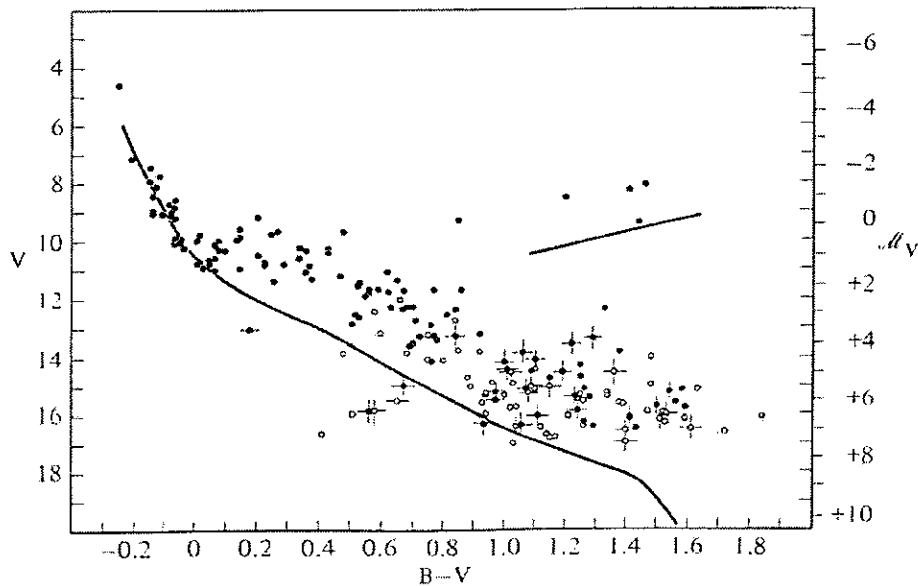


Figura 3.2. Diagrama color - magnitud para NGC 2264. (Walker, 1956).

En 1965, Vasilevskis, Sanders y Balz hicieron un estudio del cúmulo, en donde examinan membresía al cúmulo de 245 estrellas, por medio de mediciones de movimientos propios. Sus mediciones concluyen que unas 140 estrellas tienen probabilidades mayores de 0.5 de pertenecer al cúmulo. Ellos hicieron fotometría fotográfica para el cúmulo, y dan un diagrama color - magnitud. El diagrama color - magnitud para las estrellas medidas confirman la conclusión de Walker de que las estrellas posteriores a A0 se apartan hacia arriba de la secuencia principal.

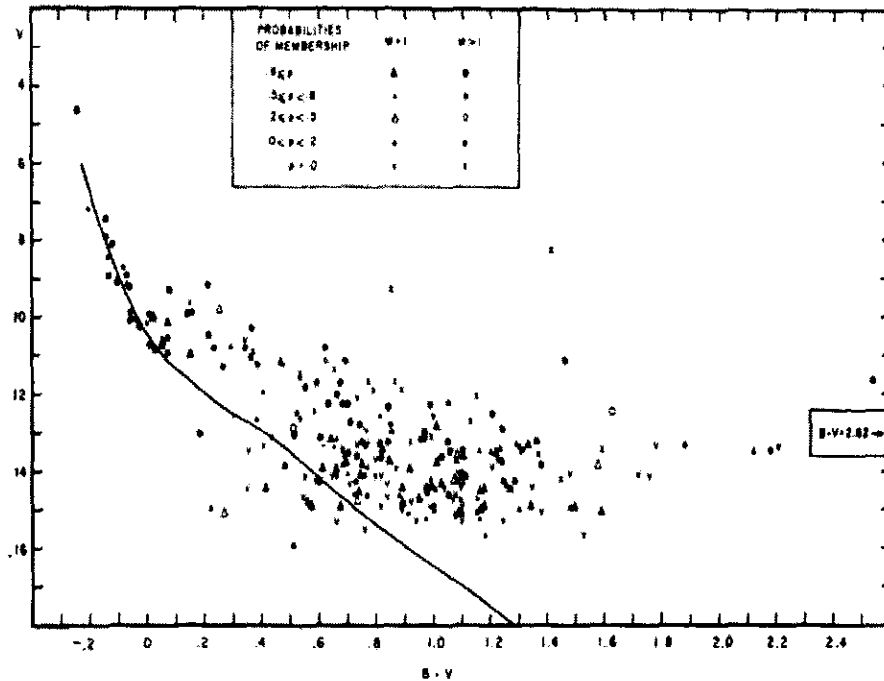


Figura 3.3. Diagrama color - magnitud obtenido por Vasilevskis et al.

Se tiene un estudio de Strom, Strom y Yost (1971), quienes hicieron observaciones en el sistema de Strömrgren de estrellas tipos A y F, previas a la secuencia principal. Sus observaciones sugieren que la mayoría de estas estrellas están rodeadas de cáscaras de gas. Esto está fundamentado según ellos por cierta continuidad en Balmer (donde debería verse discontinuidad, según se explica en el capítulo 4), y en emisión en $H\beta$. Además, encuentran ciertas diferencias entre las características de las cáscaras en estrellas tempranas y las de tipo tardío. Su estudio abarca 44 estrellas.

En 1972, Breger hace un nuevo estudio del cúmulo, concentrándose en estrellas que se reportaban como no pulsantes, de tipos A y F, en busca de variabilidad; notando además que las estrellas variables son débiles para su color. En su estudio, confirma la conclusión de Strom et al. de que muchas estrellas están rodeadas de cáscaras de gas. También encuentra una edad para el cúmulo de entre 1 y 3×10^6 años, y confirma variabilidad en W2 y W20, con lo que además determina que se trata de dos estrellas δ Scuti. Los periodos que reporta para estas estrellas son: para W2, $P = (0.11 \pm 0.01)$ días; para W20, $P = (0.124 \pm 0.006)$ días. De estas estrellas además dice que si son miembros del cúmulo, deberían tener una masa bastante grande, o pulsar en un armónico de orden alto. En total estudia 32 estrellas.

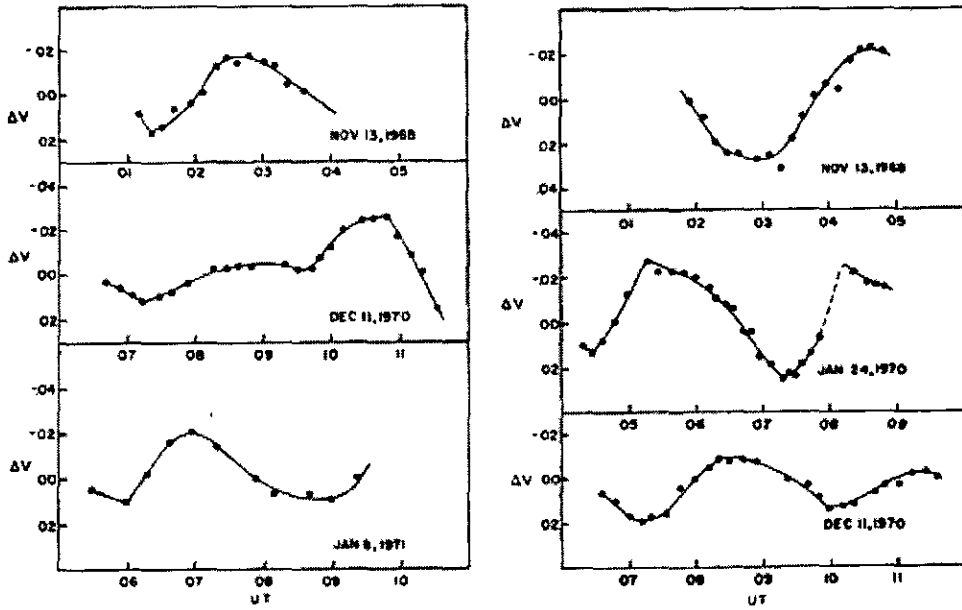


Figura 3.4. Curvas de luz medidas para W2 y W20 por Breger.

En 1989, Pérez, Joner, Thé y Westerlund, presentan fotometría de Strömgren para 21 estrellas, en busca de confirmar membresía, y de determinar parámetros físicos. Ellos hallan $E(b-y)$ de 0.031 ± 0.009 mag. También hallaron indicios de actividad en las cáscaras gaseosas mediante anomalías en c_1 y en β . Con ayuda de la calibración teórica de índices de Lester, Gray y Kurucz de 1986, se estiman las gravedades superficiales, y las temperaturas efectivas de las estrellas; las cuales también se prueban mediante modelos de Mihalas y de Philip y Newell. También calculan los radios estelares, las masas, y las posiciones que ocupan en el diagrama H-R. La mayoría de estrellas estudiadas cayeron en la secuencia principal, pero también se hallaron varias que dan muestras de ser estrellas T Tauri o estrellas Ae/Be Herbig. Ellos concluyen que la formación estelar en esta región no se restringe a una sola época en el pasado, sino que continúa en la actualidad.

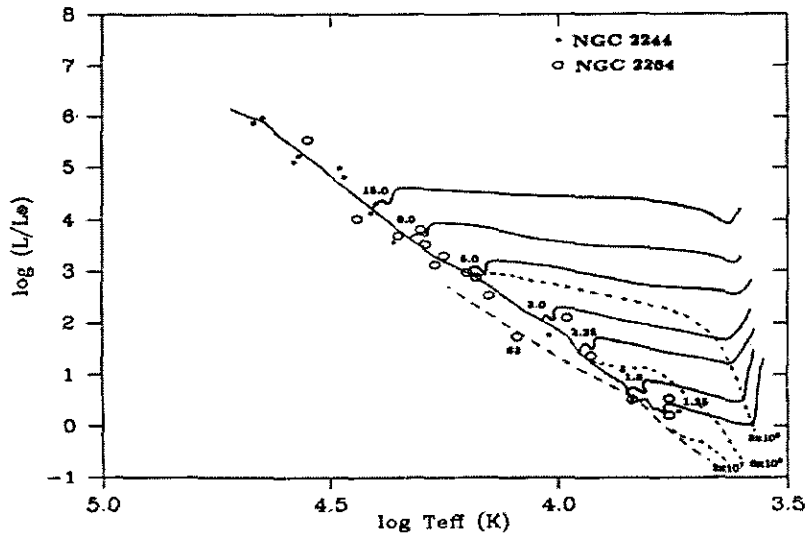


Figura 3.5. Diagrama HR obtenido por Pérez et al.

Neri, Chavarría y de Lara, en 1993; llevan a cabo fotometría $uvby-\beta$ y $JHKLM$, de unas 150 estrellas reportadas como peculiares en la literatura. Esta muestra incluye estrellas “subluminosas” y “deficientes en IR”, además de estrellas con excesos de IR o de UV y objetos con emisión de $H\beta$. Ellos encuentran una distancia de 910 ± 50 pc, y $E(b-y)$ de 0.05 ± 0.01 mag. De los datos en $JHKLM$, no corroboran lo de “deficientes en IR” reportado en la literatura. También hallan parámetros físicos tales como temperatura efectiva y gravedad superficial. Concluyen que el 70% de las estrellas que examinaron son variables o posibles variables. Reportan una distancia de (910 ± 50) pc. Dan posiciones de las estrellas en el diagrama H-R, y corroboran que existen grupos de estrellas “subluminosas”. Se muestra un el diagrama abajo. Las marcadas con cuadrados son estrellas bajo la secuencia principal. Las marcadas con triángulos son gigantes rojas subluminosas. Las marcadas con cruces son gigantes normales. Las marcadas con círculos abiertos son estrellas subluminosas. Las que están en puntos negros son otro tipo de estrellas.

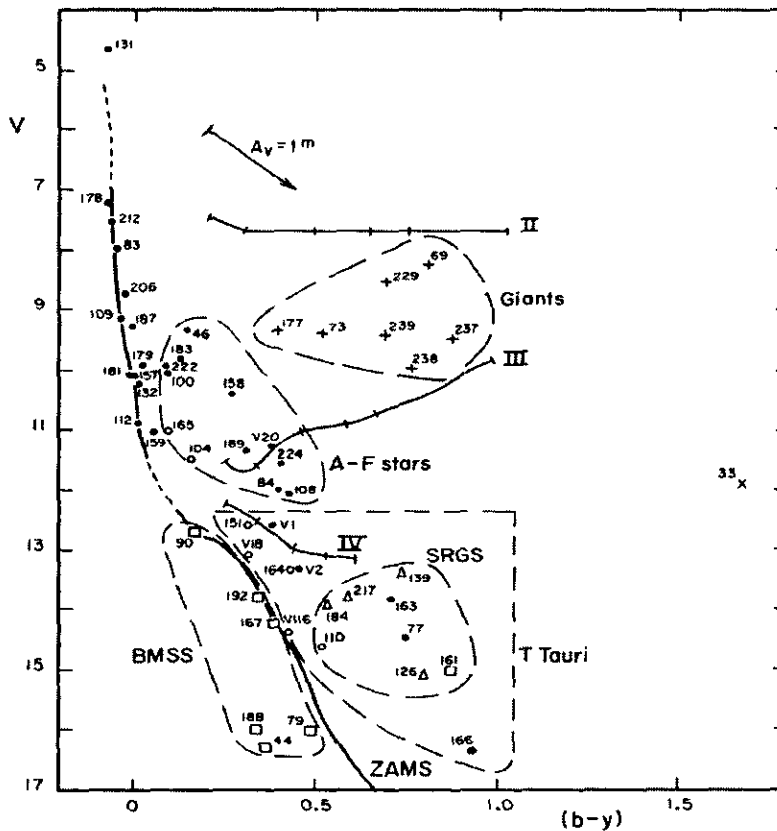


Figura 3.6. Diagrama color – magnitud obtenido por Neri et al.

Hasta aquí en lo relativo al cúmulo 2264. En el próximo capítulo se verá lo relacionado a las observaciones del cúmulo, y la forma de reducción de las observaciones.

Referencias

Abell, G. O. 1993 *Exploration of the Universe*. (Saunders College Publishing)

Bakulin, P. I. et al. 1987 *Curso de Astronomía General*. (Mir)

-
- Breger, M. 1972, *Ap. J.* **171**, 539.
- Breger, M. 1979 *P.A.S.P.*, **91**, 5.
- Breger, M. 1990 *A. S. P. Conf. Series.* **11**, 312.
- Breger, M. 1998 *A. S. P. Conf. Ser.*, **135**, 460.
- Karttunen, H. et al. 1994 *Fundamental Astronomy*. (Springer-Verlag)
- Neri, L. J. Chavarría, C. y de Lara, E. 1993, *A&ASS.* **102**, 201.
- Peniche, R. y Peña, J. 1987 *Rev. Mex. Astron. Astrofís* **14**, 420.
- Pérez, M.R. Joner, M.D. Thé, P.S. y Westwrlund, B. E. 1989, *PASP.* **101**, 195.
- Strom, K.M., Strom, S.E. y Yost, J. 1971, *Ap. J.* **165**, 479.
- Vasilevskis, Sanders, y Balz Jr. 1965, *A.J.* **70**, 797.
- Walker, M.F. 1956, *Ap.J.Suppl.* **2**, 365.
- Werner, J. W., Strom, S. E., Strom, K. M. 1977, *Ap.J.* **213**, 427.

Capítulo 4

Fotometría

La tarea básica de la fotometría es la de medir el flujo de luz que llega de un objeto celeste, sea una estrella, galaxia, etc. Sin embargo, aunque suene simple, es mucho más que sólo colocar un detector en el foco de un telescopio. El problema surge cuando varios observadores tratan de comparar sus datos obtenidos con diferentes telescopios y detectores. El flujo de luz que cada uno mide no sólo depende de las estrellas y del tiempo de medición, sino también de la respuesta del detector, del telescopio, etc.

La ecuación básica que describe esta situación es la siguiente:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \alpha_1^2 I_1(\lambda) T_i(\lambda, d_1) T_a(\lambda, d_1) T_t(\lambda) T_f(\lambda) r(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \alpha_2^2 I_2(\lambda) T_i(\lambda, d_2) T_a(\lambda, d_2) T_t(\lambda) T_f(\lambda) r(\lambda) d\lambda}.$$

Donde $I_i(\lambda)$ representa la intensidad de radiación de la estrella i ($i = 1, 2$) por unidad de longitud de onda, α_i el diámetro aparente de la estrella i , supuesta esférica y con emisión de radiación isotrópica, $T_i(\lambda, d_i)$ la fracción de radiación transmitida por el polvo interestelar, en la dirección d_i , $T_a(\lambda, d_i)$ la fracción de radiación transmitida por la atmósfera, $T_t(\lambda)$ la fracción de radiación transmitida por la óptica del telescopio, $T_f(\lambda)$ la fracción de radiación transmitida por el filtro colocado frente al receptor, y $r(\lambda)$ la función de respuesta del receptor, supuestamente dependiente sólo de λ .

Como se puede ver, es necesario contar con estrellas de referencia para poder aplicar esta fórmula. Por otra, parte, podemos obtener suficiente información de las estrellas sin tener que medir totalmente todo el rango espectral cubierto por la radiación emitida por la estrella, sino solamente midiendo en algunos intervalos espectrales intermedios que nos den características fundamentales de la fotósfera, llamados índices de color. Como hay diferentes sistemas fotométricos, cada sistema tiene diferentes estrellas de referencia o estándares, y diferentes índices de color.

En particular se tiene que en un espectro de una fotósfera hay una fuerte discontinuidad en aproximadamente 3650 \AA ¹, llamada *discontinuidad de Balmer* (véase la figura 4.1).

Los diferentes sistemas fotométricos dan una medida de esta discontinuidad en alguno de sus índices de color. En el caso de los sistemas de Johnson, y de Strömgen, se dan por los índices ($U-B$) y ($u-v$), respectivamente, según se explicará en lo que sigue.

¹ La Unión Astronómica Internacional convino que la abreviatura para Ångstrom es Å.

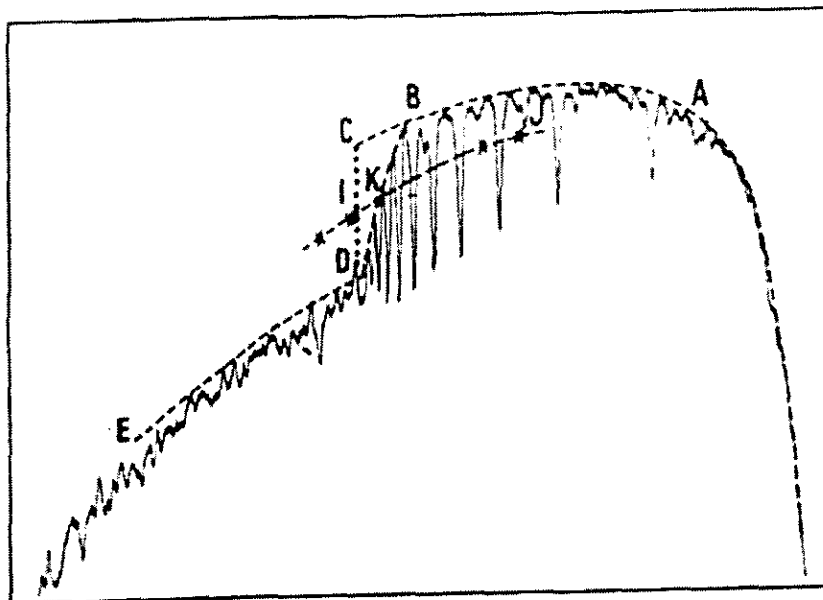


Figura. 4.1. El segmento CD da la discontinuidad de Balmer.

Strömngren distinguió entre sistemas fotométricos de banda ancha, intermedia, y angosta. Los límites entre cada uno de ellos son:

$\Delta\lambda > 300 \text{ A,}$	banda ancha;
$100 \text{ A} < \Delta\lambda < 300 \text{ A,}$	banda intermedia;
$\Delta\lambda < 100 \text{ A,}$	banda angosta.

Describiremos el sistema de Johnson y Morgan, que es un sistema de banda ancha, y el sistema de Strömngren, que es un sistema de banda intermedia; ya que estos fueron los sistemas usados para las observaciones que se presentan en este trabajo.

4.1 Sistema *UBV*

El sistema *UBV* fue definido y establecido por H. L. Johnson y W. W. Morgan (1953), que deseaban establecer un sistema fotométrico que pudiera producir resultados comparables a las magnitudes amarilla y azul del sistema internacional. Este sistema (*UBV*) consiste de tres filtros de banda ancha que dan una magnitud visual (*V*), azul (*B*) y ultravioleta (*U*) con longitudes de onda (λ) centradas en: 5500 A, 4300 A y 3500 A respectivamente. El filtro *V* se eligió para que la magnitud fuera casi idéntica a la magnitud fotovisual del sistema internacional. La magnitud *B* corresponde a la magnitud azul fotográfica. Actualmente este filtro consiste de dos: un filtro azul y otro que bloquea el ultravioleta. Este último evita que la magnitud *B* se afecte por la discontinuidad de Balmer. El filtro *U* se eligió para medir longitudes de onda más cortas que 3650 A (que es la longitud de onda de la discontinuidad de Balmer).

Uno de los aspectos más importantes del sistema *UBV* es su vínculo con el sistema de clasificación espectral de Morgan-Keenan (*M-K*). El punto cero para los índices de color fue definido por las estrellas clasificadas como *A0V* en el sistema de Morgan ($(B-V) = (U-B) = 0$), esto permite que los colores del sistema *UBV* estén relacionados directamente con el tipo espectral *M - K* y la temperatura (figura 4.2.). Es fácil ver que las líneas del hidrógeno dominan los tipos espectrales *A* y *F*; el espacio entre estas líneas llega a ser más y más cercano hasta que en el límite de Balmer se unen y la absorción llega a ser continua. Por consiguiente, en el límite de Balmer (3647 Å) hay una caída abrupta en el nivel de continuo, lo que da origen a la ya mencionada discontinuidad de Balmer. En la figura 4.2. se ve que el filtro *U* favorece esta discontinuidad, la cual se convierte en una función del tipo espectral de la estrella. La relación entre el color intrínseco y el tipo espectral para estrellas de la secuencia principal se estableció sobre bases firmes (Johnson y Morgan, 1953; Morgan, Harris y Johnson, 1953; y Mendoza, 1956).

En el sistema se definen dos índices de color (*B-V*) y (*U-B*) donde (*U-B*) da esencialmente una medida de la cantidad de radiación ultravioleta emitida por la estrella, y (*B-V*), esencialmente, mide su temperatura, siendo negativo para muchas estrellas azules y positivo para estrellas rojas.

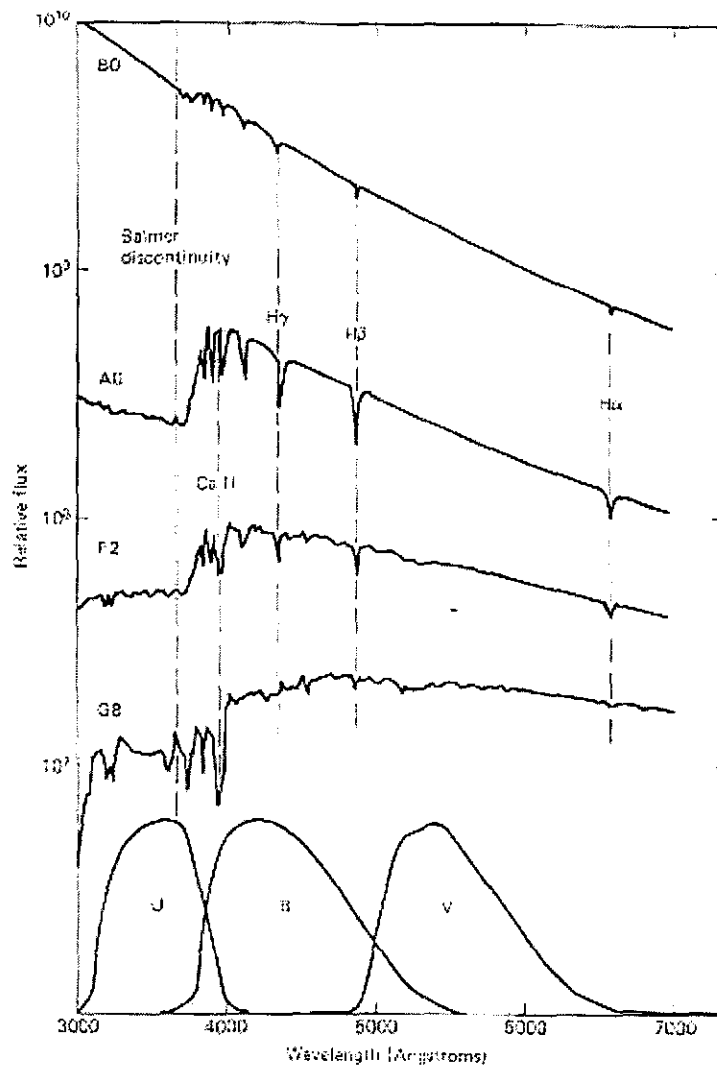


Figura 4.2. Transmisión en el sistema de Johnson.

Varios autores (Becker, 1938 y 1948; Johnson y Morgan, 1953; Morgan Harris y Johnson, 1953; Becker y Stock, 1954; y Morgan y Harris, 1956) señalaron que la fotometría de tres colores, la cual incluye mediciones en el ultravioleta, hacía posible (con ciertas restricciones) la determinación de colores intrínsecos de las estrellas, por lo tanto, la cantidad de enrojecimiento interestelar (el polvo interestelar absorbe selectivamente más luz azul que roja, haciendo que una estrella parezca más roja de lo que en realidad es). Al graficar los índices $(B-V)$ y $(U-B)$ se ve el efecto del enrojecimiento interestelar. El cambio en la cantidad de color producida por el polvo se llama "exceso de color" y se denota por $E(B-V)$ y $E(U-B)$. Por otro lado, la pendiente de la línea de enrojecimiento está dada por:

$$E(U-B)/E(B-V) = 0.72 - 0.05(B-V).$$

Para estrellas de tipo temprano $(B-V)$ es muy cercano a cero, así que el segundo término no es significativo. En el sistema UBV la razón de extinción total selectiva se estima de la siguiente relación:

$$R = A_V/E(B-V).$$

Donde A_V es la absorción en la magnitud V , $E(B-V)$ es el exceso de color. El valor que se ha encontrado para R en varias direcciones de la Galaxia es de $R = 3$, basado en las numerosas estrellas estándares observadas y publicadas en el sistema UBV , y que fueron medidas en este sistema, además de cientos de cúmulos abiertos y globulares, asociaciones, áreas estelares y decenas de miles de estrellas individuales que se han publicado en varios catálogos (Blanco et.al., 1968), Sharov y Yakimova (1970), Mermilloid y Nicolet (1977), Phillip et.al. (1976), Nicolet (1978a), etc. Las estrellas de cúmulos abiertos y globulares están prácticamente todas a la misma distancia, con igual enrojecimiento interestelar, edad y composición química; esto hace que sus estrellas sean muy útiles para la calibración de los diagramas de magnitud - color y de color - color. Usando el diagrama $M_V, (B-V)$ se puede determinar la distancia de un cúmulo. Con el diagrama $(U-B), (B-V)$ se determina el enrojecimiento (fig. 4.3).

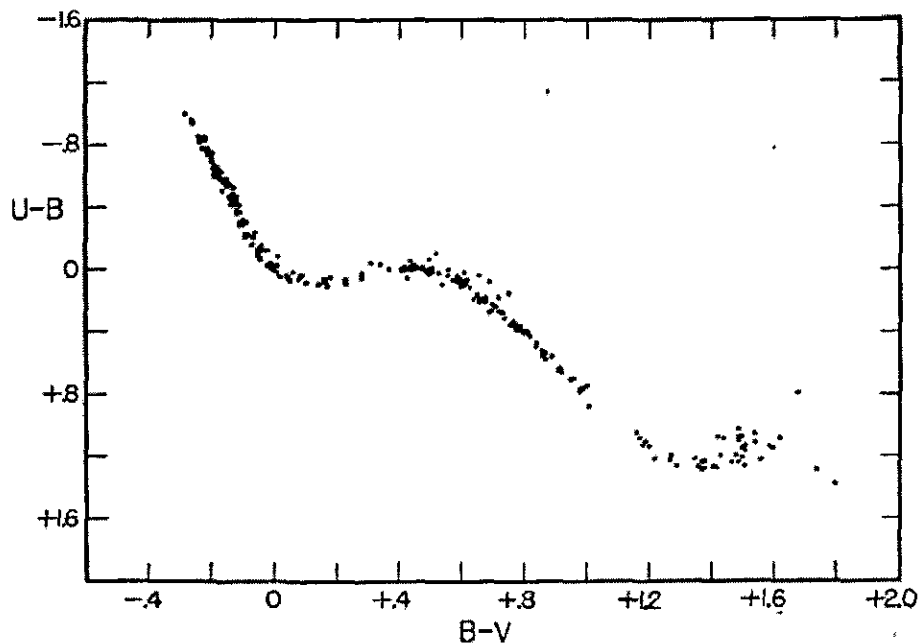


Figura 4.3.

El sistema *UBV* ha sido muy usado por los astrónomos, y existe una serie de observaciones *UBV* considerable en la literatura; También hay una lista extensa de estrellas estándares. Este sistema de banda ancha resulta apropiado para los usuarios de pequeños telescopios. El tubo fotomultiplicador y los filtros para definir este sistema son fácilmente disponibles.

4.2 El sistema *uvby-β*

Strömgren (1962, 1963a,b, 1966) definió un sistema de cuatro colores *uvby* de banda intermedia para la clasificación de estrellas tipo *A* y *F*. Posteriormente el sistema fue implementado con dos filtros adicionales que midieran la intensidad de la línea *Hβ* (Crawford, 1958, 1960; Crawford y Mander, 1966; Crawford et.al. 1966). Las longitudes de onda de cada filtro así como el ancho de banda del sistema *uvbyβ* se muestran a continuación:

Filtro	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>b</i>	<i>y</i>	β_N	β_W
$\lambda(A)$	3505	4110	4685	5488	4864	4865
$\Delta\lambda(A)$	330	170	183	235	30	137

Las funciones de transmisión de los filtros de este sistema se muestran en las figuras 4.4 y 4.5.

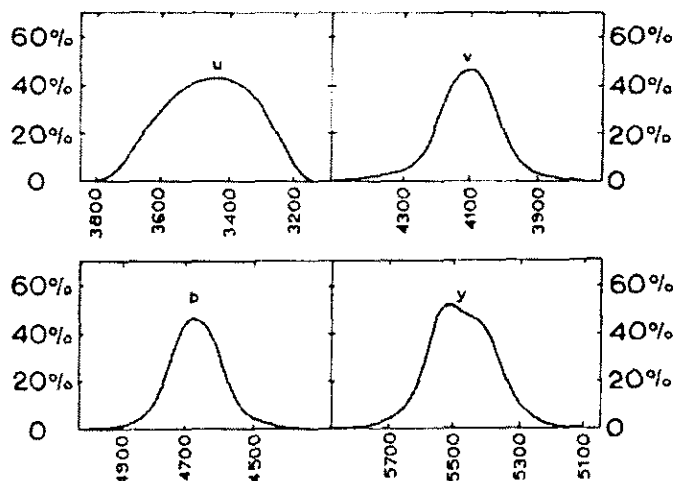


Figura 4.4. Transmisión en *uvby*.

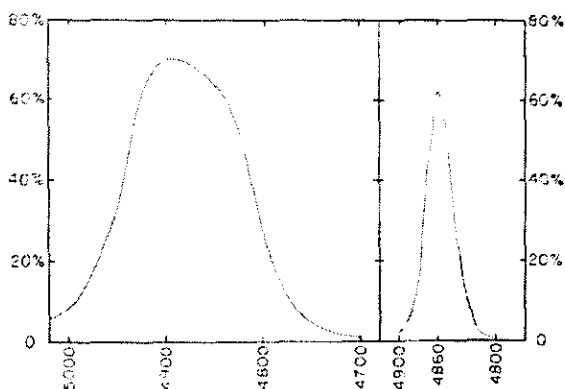


Figura 4.5. Transmisión en *Hβ*.

A diferencia del sistema *UBV*, el sistema de Strömgen está totalmente definido por filtros. El filtro *y* es igual a la magnitud visual y corresponde muy bien con la magnitud *V*. El filtro *b* está centrado alrededor de 300 Å del rojo en el filtro *B* del sistema *UBV*. El filtro *v* está centrado en una región de fuerte bloqueo pero evitando la región donde las líneas de hidrógeno comienzan a agruparse cerca del límite de Balmer.

Los índices de color en el sistema de Strömgen son cantidades muy útiles porque los filtros *b* y *y* están relativamente libres de bloqueo; el índice $(b-y)$ es un buen indicador del color y la temperatura efectiva. Un índice de color esencialmente es la pendiente del continuo que en ausencia de bloqueo, puede ser aproximadamente constante y $(b-y)$ será muy aproximada a $v-b$; porque $(v-b)$ está afectada por el bloqueo; la diferencia entre estos dos índices indica la intensidad del bloqueo. De este modo se tienen dos índices definidos como sigue: $c_1 = (u-v) - (v-b)$ y $m_1 = (v-b) - (b-y)$ donde el índice c_1 es un indicador de la temperatura para estrellas O-A y de luminosidad para estrellas A-F, se usa para determinar como ha sido afectada la pendiente del continuo por la discontinuidad de Balmer. El índice m_1 es un indicador del bloqueo de líneas (composición) para estrellas F-G e indicador de peculiaridad en estrellas A. Por último, $H\beta$ es un indicador de luminosidad para estrellas O-A y de temperaturas para estrellas A-G.

4.3 Calibraciones fotométricas

Crawford (1966) da curvas de calibración, para diferentes índices de color, de estrellas B, A y F que pertenecen a la secuencia principal. Por medio de diagramas similares se pueden seleccionar las estrellas de estas clases espectrales que pertenecen a la secuencia principal cuyos índices de color se han medido con fotometría de Strömgen.

El primero de ellos (fig. 4.6) es el diagrama $(b-y)$ vs c_1 , que sirve fundamentalmente para las B y A. El otro (fig. 4.7) es el diagrama $(b-y)$ vs m_1 , que sirve para las A y F. Estos se utilizarán al reducir la fotometría del cúmulo.

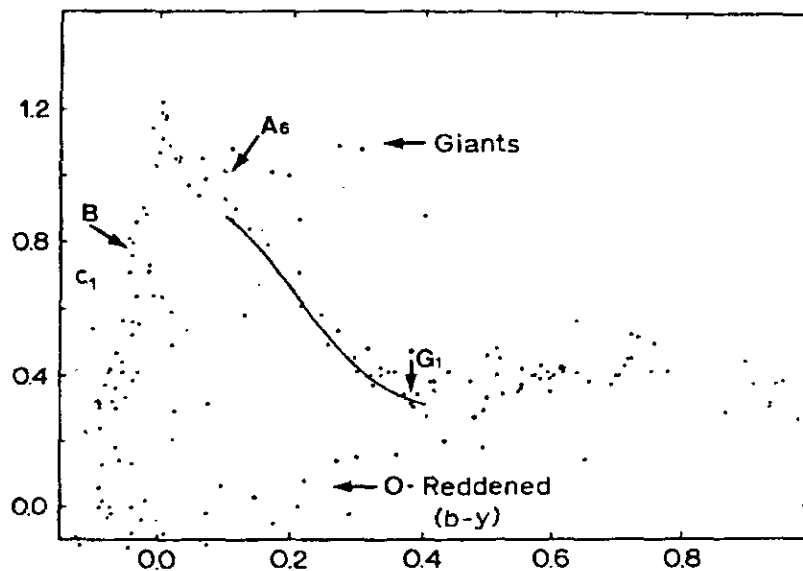


Figura. 4.6.

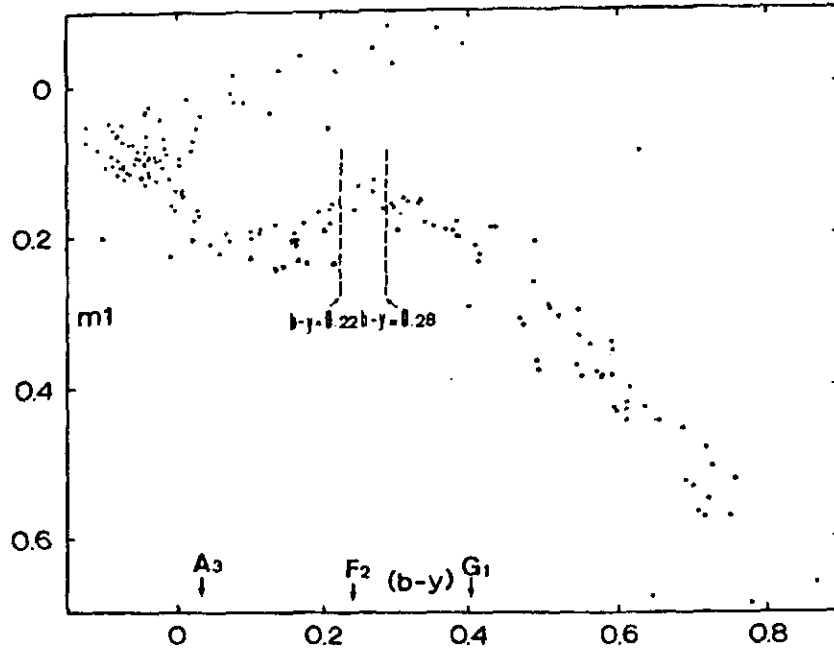


Figura. 4.7.

Referencias

- Crawford, D.L. 1966, *IAU Symp.* **24**, 170.
- Crawford, D.L. 1975, *A. J.* **80**, 955.
- Crawford, D.L., Perry, C.L. 1976, *P.A.S.P.* **88**, 454.
- Crawford, D.L., Barnes, J. V. 1970, *A.J.* **75**, 978.
- Crawford, D.L., Mander, J. 1966, *A.J.* **71**, 114.
- Golay, M. 1974 *Introduction to Astronomical Photometry*. Reidel.
- Johnson, H.L., Morgan, W.W. 1953, *Ap. J.*, **117**, 313.

Capítulo 5

Observaciones y reducción

5.1 Observaciones

5.1.1. Resumen de observaciones

Las observaciones fotométricas se llevaron a cabo en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, durante una temporada de observación en diciembre de 1985 y enero de 1986, y fueron realizadas por José H. Peña y Rosario Peniche. Para estas observaciones se utilizó el telescopio de 1.5 m de diámetro, con el fotómetro danés acoplado. El fotómetro permite medir en forma simultánea en las cuatro bandas *uvby* de la fotometría de Strömgren, o en las bandas *N* y *W* del sistema $H\beta$ de Crawford. La descripción detallada del fotómetro se puede hallar en el reporte de Schuster y Nissen (1988). También se usó el telescopio de 84 cm, con un fotómetro fotoeléctrico multifiltros, pero que mide en un solo filtro a la vez. Este se conoce como Lowell, o cuentapulsos. La tabla 5.1 da un resumen de las observaciones realizadas.

Tabla 5.1. Resumen de observaciones.

fecha	jd-2440000	fotometría	telescopio	filtro
dic 01, 1985	6400	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
dic 04, 1985	6403	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
dic 06, 1985	6405	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
dic 07, 1985	6406	diferencial	150	<i>uvby-β</i>
dic 08, 1985	6407	diferencial	150	<i>uvby-β</i>
ene 16, 1986	6446	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
ene 16, 1986	6446	diferencial	84	<i>V</i>
ene 17, 1986	6447	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
ene 18, 1986	6448	absoluta	150	<i>uvby-β</i>
ene 18, 1986	6448	diferencial	84	<i>V</i>
ene 19, 1986	6449	diferencial	84	<i>V</i>

En esencia, para las observaciones nos interesa contar los fotones que llegan de una estrella, por lo que es muy importante tener en el fotómetro un diafragma que no permita la llegada de luz de otra región del cielo. Al elegir la estrella, debemos posicionarla de tal manera que no haya algún otro objeto cerca, para lo cual debemos utilizar el diafragma más adecuado.

Para la localización de una estrella δ Scuti, a veces se busca en el Catálogo General de Estrellas Variables, de Kurkarkin, et.al. En este catálogo se consignan miles de estrellas variables, o sospechosas, algunas relativamente poco estudiadas. El catálogo nos da la denominación común para las variables, y sus coordenadas para 1950, entre otros datos. Teniendo esta información,

podemos calcular las coordenadas para 1850, y buscar las estrellas en el catálogo BD, para luego elaborar un mapa de la región del cielo apropiada, y poder buscar a la estrella en el telescopio durante las observaciones. Conociendo la denominación de la estrella, también es posible conocer otros datos de interés, que se pueden encontrar en la base de datos de la Universidad de Estrasburgo llamada "Simbad"; aquí se dan las diferentes denominaciones de la estrella para varios catálogos (SAO, HD, BS, etc.), las coordenadas para el año 2000, y una lista de las principales publicaciones que se han hecho acerca del objeto de interés. También pueden examinarse estrellas que no se sepa que son variables. Para esto, se busca que el tipo espectral sea F o A, y que tenga características físicas conocidas similares a las de las δ Scuti, como se menciona en el capítulo 3.

Para hacer fotometría absoluta de una estrella, se seleccionan además varias estrellas estándares, de una lista dada en Olsen (1983). Tratamos de seleccionar estrellas estándares cercanas a las estrellas que deseamos medir fotométricamente. Estas estrellas estándares nos servirán para determinar la magnitud estándar, ya que lo que obtendremos será una magnitud que depende de los instrumentos empleados para hacer las mediciones. A las magnitudes obtenidas así, les llamamos magnitudes instrumentales. Más adelante veremos como pasar de las magnitudes instrumentales a las magnitudes estándares.

Para la fotometría diferencial, también se eligen dos estrellas cercanas brillantes, de ser posible de características físicas similares a la variable, a excepción claro está, de la variabilidad. La razón de esto es porque tal vez la respuesta de los instrumentos no sea similar para estrellas de diferentes magnitudes, colores, etc. A una de las estrellas se le llama la comparación, y a la otra, confirmación (checking star). Se usan dos estrellas porque no sabemos si alguna de las dos estrellas sea también una variable, por tanto se debe confirmar la variabilidad con la presencia de otra estrella. Si bien hay probabilidades de que alguna estrella de las elegidas para comparación sea variable, es casi imposible que las dos lo sean, y en la misma proporción (periodos iguales, amplitudes iguales, etc.), por lo que cualquier anomalía se percibe inmediatamente al comparar con dos estrellas.

5.1.2 Rutinas de observación

Fotometría absoluta

Al observar una estrella para hacer fotometría absoluta, se sigue la rutina que a continuación se describe:

1. Se busca la estrella de interés, y se mide con el fotómetro durante unos 10 s, para obtener medidas de las cuentas por segundo promediadas en ese intervalo de tiempo. Esta medición se repite de tres a cinco veces.
2. Después de haber medido en los filtros $uvby$, se cambia la posición del fotómetro para medir en los filtros N y W , cuya diferencia define el índice β .
3. Se mide una sección del cielo circundante, también durante 10 segundos y por tres ocasiones.
4. Se mide, después de varias mediciones de la estrella de interés, alguna de las estrellas estándares.

5. Después de esto, regresamos al paso 1.

Fotometría diferencial

Para la fotometría diferencial, se utiliza la rutina que se describe enseguida:

1. Se busca la estrella de interés, y se mide con el fotómetro durante unos 10 s, para obtener medidas de las cuentas por segundo promediadas en ese intervalo de tiempo.
2. Se redirige el telescopio a una región del cielo muy cercana al objeto, pero que no tenga algún objeto brillante, y se mide del mismo modo que se hizo con la estrella que se analiza.
3. Se hace lo mismo para cada una de las otras dos estrellas, que se suponen constantes, y se regresa al paso 1.

5.2 Reducción

5.2.1. Fotometría absoluta

A continuación se da un breve bosquejo de la rutina para reducir los datos de fotometría absoluta:

1. Separamos los datos de cada noche, y también separamos para cada filtro, y para cada objeto, esto es: estrellas problema, cielo, y estrellas estándares.
2. Para cada uno de los objetos que se midieron, se calcula el promedio de las cuentas obtenidas las tres a cinco veces que se midió en cada ciclo.
3. A los promedios de las mediciones de cada una de las estrellas, se les resta el promedio de las cuentas medidas en el cielo para cada ciclo.
4. Una vez que se tiene esto, se calculan las magnitudes instrumentales, con la conocida fórmula:

$$m_i = -2.5 \log (c),$$

donde c representa el promedio de cuentas después de haber promediado y restar las cuentas del cielo. El subíndice indica que esto se debe hacer para cada uno de los filtros u , v , b , y . Para la magnitud de β se usa la fórmula:

$$\beta = -2.5 \log (n/w).$$

5. Si ya se tienen las magnitudes instrumentales, se pueden calcular los índices de color, esto es:

$$(b-y), (v-b), m_1 = (v-b) - (b-y) \text{ y } c_1 = (u-v) - (v-b).$$

6. También se corrige por extinción atmosférica de la manera siguiente:

$$m_0 = m_i - K_i X.$$

Donde m_0 es la magnitud o color fuera de la atmósfera, m_i es la magnitud o color instrumental, K es el coeficiente de extinción atmosférica (en magnitudes por unidad de masa de aire), y X es la masa de aire atravesada.

7. Ya que se tiene esto, calculamos las constantes de transformación del sistema instrumental al sistema estándar. Esto se hace con ayuda de las estrellas estándares, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$V_{std} = A + y_i + B(b-y)_i,$$

$$(b-y)_{std} = C + D(b-y)_i,$$

$$m_{1std} = E + F m_{1i} + G(b-y)_i,$$

$$c_{1std} = H + I c_{1i} + J(b-y)_i,$$

$$H\beta_{std} = K + LH\beta_i.$$

Aquí los subíndices *std* representan al sistema estándar, y los *i* representan al sistema instrumental.

8. Por supuesto, ya que se tienen las constantes de transformación, se transforman al sistema estándar las magnitudes instrumentales de cada estrella.

9. Hecho esto, pasamos de tiempo local a tiempo universal, sumando 7 horas al tiempo local (para el caso de San Pedro Mártir). El objetivo de usar el tiempo universal es que de esta manera se pueden comparar las observaciones de un lugar con las de otro lugar diferente, sin que haya diferencias debidas a la diferencia de horarios causadas por las diferencias de longitud geográfica.

10. También, conocida la fecha, pasamos a días julianos, para esto simplemente buscamos en algún almanaque la fecha correspondiente, y leemos el día juliano que corresponde a la fecha deseada. Además debemos transformar las horas y los minutos a fracciones decimales de día.

11. Para comparar los datos medidos en las diferentes épocas del año, se refiere el tiempo de observación al Sol, por lo que es necesario hacer una corrección al tiempo "geocéntrico", esto es porque la velocidad de la luz es finita, y no llega al mismo tiempo al Sol que a la Tierra, sino que hay diferencias de hasta 500 segundos antes o después de llegar al Sol; a este se le llama tiempo "heliocéntrico". Las diferencias dependen de la época del año, de la longitud celeste del Sol, de la distancia de la Tierra al Sol, de la Inclinación de la eclíptica respecto al ecuador, y de las coordenadas de la estrella. La corrección heliocéntrica al tiempo de observación es (Landolt y Blondeau, 1972):

$$H.C. = -0.0057755[(R \cos \vartheta)(\cos \alpha \cos \delta) + (R \sin \vartheta)(\sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha)],$$

con R la distancia de la Tierra al Sol en la fecha dada, ϑ la longitud celeste del Sol en esa fecha, α la ascensión recta de la estrella, δ su declinación, y ϵ la inclinación de la eclíptica ($\epsilon = 23^{\circ}27'$).

Selección de estrellas de secuencia principal

Para determinar los parámetros físicos de las estrellas se usarán calibraciones de Shobbrook y de Nissen. Pero éstas sólo son aplicables a las estrellas de secuencia principal. Por tal razón, debemos seleccionar de nuestras estrellas aquellas que pertenecen a la secuencia principal, y descartar todas las demás.

A fin de hacer esto, se usarán los diagramas $(b-y)$ vs c_1 , y $(b-y)$ vs m_1 que se mostraron en el capítulo 4 (figuras 4.5 y 4.6). De ellos seleccionamos todas las estrellas que caen cerca de la región apropiada, y descartamos las demás estrellas. Esto nos asegura que las estrellas que queden no son gigantes o supergigantes, sino que son de secuencia principal o muy cercanas a ella.

Pues bien, ya tenemos las estrellas de secuencia principal del cúmulo, pero como sabemos, la fotometría está afectada por el enrojecimiento debido al polvo interestelar.

Desenrojecimiento. Como estas magnitudes e índices de color están afectadas por el enrojecimiento, se deben desenrojecer. Esto se logra mediante las ecuaciones siguientes:

$$E(b-y) = (b-y) - (b-y)_0,$$

$$c_0 = c_1 - 0.25 E(b-y),$$

$$m_0 = m_1 + 0.3 E(b-y),$$

Estrellas de tipo espectral A y F. La siguiente rutina de desenrojecimiento fue propuesta por Nissen, en base a calibraciones de Crawford.

Para estrellas F (con $2.59 < \beta < 2.72$), se cumple que:

$$(b-y)_0 = K + 1.11 \Delta\beta + 2.7\Delta\beta^2 - 0.05 \delta c_0 - (0.1 + 3.6\Delta\beta) \delta m_0.$$

Para estrellas A (con $2.72 < \beta < 2.88$):

$$(b-y)_0 = 0.2946 - 1.00 \beta - 0.1 \delta c_0.$$

Aquí se tiene que: $\Delta\beta = 2.72 - \beta$; $K = 0.218$; $\delta m_0 = m_{1hiadas}(\beta) - m_0$; $\delta c_0 = c_0 - c_{1est}(\beta)$; $m_{1hiadas}$ es la relación entre m_1 y β para las Híadas. La relación para las Híadas la da Crawford (1966), así como otros de los parámetros mencionados en estas relaciones.

1. La magnitud visual absoluta se calcula de la siguiente relación:

$$M_V = M_{VZAMS}(\beta) - f \delta c_0,$$

donde $f = 9$ para estrellas A, y $f = 9 + 20\beta$ para estrellas F. La magnitud aparente (v) corregida por extinción interestelar se determina como sigue:

$$v_0 = V - 4.3 E(b-y),$$

2. El módulo de distancia de cada estrella se calcula como sigue:

$$DM = V - M_V.$$

3. La metalicidad se halla por medio de la fórmula:

$$[Fe/H] = - [10.5 + 50(\beta - 2.626)] \delta m_0 + 0.12,$$

válida sólo para estrellas de la secuencia principal en el intervalo $2.59 < \beta < 2.72$, esto es, de tipo F.

Estrellas de tipo espectral B. La siguiente rutina de desenrojecimiento se basa en las calibraciones de Balona y Shobbrook (1984) y Shobbrook (1984).

1. Para hallar $E(b-y)$ se calcula el valor de $(b-y)_0$ a partir de la siguiente relación:

$$(b-y)_0 = -0.1146 + 0.0805 c_0 + 0.0616 c_0^2 + 0.2719 c_0^3 - 0.7801 c_0^4 + 0.4679 c_0^5$$

Para derivar $(b-y)_0$ y $E(b-y) = (b-y) - (b-y)_0$, se usa un proceso iterativo: primero se calcula $(b-y)_0$ sustituyendo c_0 por c_1 , lo que da $E'(b-y) = (b-y) - (b-y)_0$, y $c'_0 = c_1 - 0.19 E'(b-y)$. Este c'_0 se sustituye por c_0 nuevamente en el polinomio, y así iterando hasta que c_0 y c_1 difieran en menos que 0.001 mag. Tendremos entonces:

$$m_0 = m_1 + 0.3 E(b-y)$$

$$c_0 = c_1 - 0.19 E(b-y)$$

$$V_0 = V - 4.3 E(b-y)$$

2. Para los índices de color se usan las siguientes relaciones:

$$[c] = \log(c_0 + 0.322)$$

$$[g] = [\beta] + \alpha [c] = \log(\beta - 2.515) + \alpha \log(c_0 + 0.322)$$

$$M_V = 3.4994 + 7.2026 \log(\beta - 2.515) - 2.3192 [g] + a_3 [g]^3$$

con $[g] = \log(\beta - 2.515) - 1.6 \log(c_0 + 0.322)$, $\alpha = -1.60$.

3. Para calcular la distancia d se usa:

$$DM = V_0 - M_{V0}$$

$$d = 10^{(DM/5 + 1)}$$

Determinación de T_{eff} , g y edad. Para determinar las temperaturas y gravedades superficiales, se usan las mallas de Relyea y Kurucz (1978). En estas, al graficar en los diagramas $(b-y)_0$ vs c_{10} , y m_{10} vs c_{10} , se obtienen los valores de $\log g$ y T_{eff} , que se usan para lo que sigue.

Para determinar la edad, se hace una gráfica $\log(L/L_{\odot})$ vs $\log T_{\text{eff}}$, y se compara con las isócronas teóricas dadas por Meynet et al. (1993), tratando de establecer el punto donde las estrellas se apartan de la secuencia principal (“turn off”). Para esto hay que determinar $\log(L/L_{\odot})$ a través de M_V . Novotny tabula los valores de $\log(L/L_{\odot})$ que corresponden a cada M_V .

Estos son los parámetros básicos que se obtienen de la fotometría absoluta.

5.2.2. Fotometría diferencial

Para la fotometría diferencial, se da enseguida la secuencia para la reducción de datos.

1. Se obtienen las magnitudes instrumentales de la misma forma que se describe en la sección de fotometría absoluta. También se calcula la fecha juliana heliocéntrica.
2. Una vez que se tienen las magnitudes de las estrellas variables y las de comparación, se grafican las magnitudes contra el tiempo. Esto nos da curvas de luz para cada estrella.
3. De las curvas de luz para las estrellas constantes, se interpola una curva suave que pase por todos los puntos de las curvas de luz para estas dos estrellas.
4. Hecho lo anterior, se restan las magnitudes de la curva constante a la estrella variable. Esto nos dará sólo las variaciones de magnitud de la estrella variable.
5. Para apreciar mejor las variaciones, calculamos el promedio de las magnitudes, y al promedio le restamos las magnitudes de la estrella variable. Esto nos dará las diferencias de magnitud respecto a un cero arbitrario, de manera que las curvas de luz tengan una cierta simetría respecto al eje x .
6. Finalmente graficamos las diferencias de magnitud contra el tiempo. Esto nos da las curvas de luz finales.
7. Para encontrar los modos de pulsación de las estrellas que predice la teoría, utilizamos la siguiente relación:

$$\log Q = -6.456 + \log P + 0.5 \log g + \log T_{\text{eff}} + 0.1M_{\text{bol}}$$

donde $M = M + C.B.$, y $C.B.$ es una constante que depende de la población de la estrella y la temperatura, y las da Lang (1991). De aquí se despeja Q , y de la tabla II dada por Breger (1979), se encuentra el modo de pulsación, de acuerdo al valor de Q .

8. Para ajustar la serie de Fourier correspondiente a las curvas de luz halladas, calculamos la transformada de Fourier de los puntos obtenidos en forma numérica. Sería largo describir las ecs. que se usan para ello. Además, esto se hizo con los programas “Astrofas” y “Fourier”, por M. A. Hobbart; por ello mejor se da una copia del código fuente de cada uno de estos programas en el apéndice.

9. Teniendo la transformada, seleccionamos la frecuencia con mayor potencia, y la restamos de lo obtenido antes. Hecho esto, repetimos lo anterior, hasta alcanzar el nivel de ruido.

10. Teniendo ya las frecuencias, amplitudes y fases, debemos trazar la curva correspondiente, y dar la comparación entre la curva teórica y los datos obtenidos.

Referencias

Abell, G. O. 1993 *Exploration of the Universe*.(Saunders College Publishing)

Balona, L. A. y Shobbrook, R. R. 1984 *MNRAS* **211**, 375.

Crawford, D.L. 1966, *IAU Symp.* **24**, 170.

Henden, Kaitchuk. 1985 *Astronomical Photometry*. (Saunders College Publishing)

Lang, K. R. 1991 *Astrophysical Data, Planets and Stars*. (Springer Verlag)

Meynet, G. Mermilliod, J. C. Maeder, A. 1993 *A&A. Suppl.* **98**, 477.

Nissen, P. E. 1988 *A&A*, **199**, 146.

Novotny, E. 1973 *Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors*.(Oxford University Press)

Olsen, E. H. 1983, *A&ASS*, **54**, 55.

Peña, J. H. y Peniche, R. 1994 *Rev. Mex. Astron. Astrofís.* **28**, 139.

Relyea, L. J. y Kurucz, R. L. 1978 *Ap. J. Suppl.***37**, 45.

Shobbrook, R. R. 1984 *MNRAS* **211**, 659.

Schuster, W. B. y Nissen, P. E. 1988, *A&A. Suppl.* **73**, 225.

Capítulo 6

Resultados y análisis

6.1 Resultados

6.1.1 Fotometría Absoluta

Se procedió con la fotometría de la manera en que se describió en el capítulo 5, para hallar los coeficientes de transformación al sistema estándar. Los coeficientes obtenidos se dan enseguida:

$$V_{std} = 18.9117 - 0.0029 (b-y)_{ins} + y_{ins},$$

$$(b-y)_{std} = 0.8295 + 0.9698 (b-y)_{ins},$$

$$m_{1std} = -0.3925 + 1.0533 (m_1)_{ins} - 0.0178 (b-y)_{ins},$$

$$c_{1std} = -0.0785 + 0.7772 (c_1)_{ins} - 0.0625 (b-y)_{ins},$$

$$H\beta_{std} = 2.7552 + 0.9925 (H\beta)_{ins},$$

En la tabla A.1 del apéndice se proporciona la fotometría obtenida durante la campaña mencionada en el capítulo 5, transformada al sistema estándar con los coeficientes dados arriba, así como de fotometría compilada de otras fuentes; en los cuatro índices de color con que se trabaja en la fotometría de Strömgren. Se anexa también la figura A.1, que es la carta de identificación para las estrellas observadas por Peña y Peniche, y que no tienen número de Walker (o sea que muchas de las estrellas observadas por ellos ya tienen número de Walker, y por tanto no se les asigna número nuevo).

La figura 6.1 muestra la gráfica $b-y$ vs c_1 para el cúmulo. De aquí se seleccionaron sólo las estrellas indicadas como de secuencia principal, de clase espectral B. En la figura 6.2 se ve la gráfica $b-y$ vs m_1 . De aquí se seleccionaron las estrellas indicadas como de clase A y F. Los resultados se dan en la tabla A.2. A estas estrellas fueron a las que se les aplicaron las calibraciones de Shobbrook y de Nissen mencionadas en el capítulo 4.

Las tablas A.6 y A.7 dan la fotometría absoluta para las estrellas variables W2 y W20. En la figura 6.4 se ve su ubicación en el diagrama H-R. A estas estrellas se les aplicó también la calibración de Nissen, pues se trata de una estrella A y otra F, respectivamente.

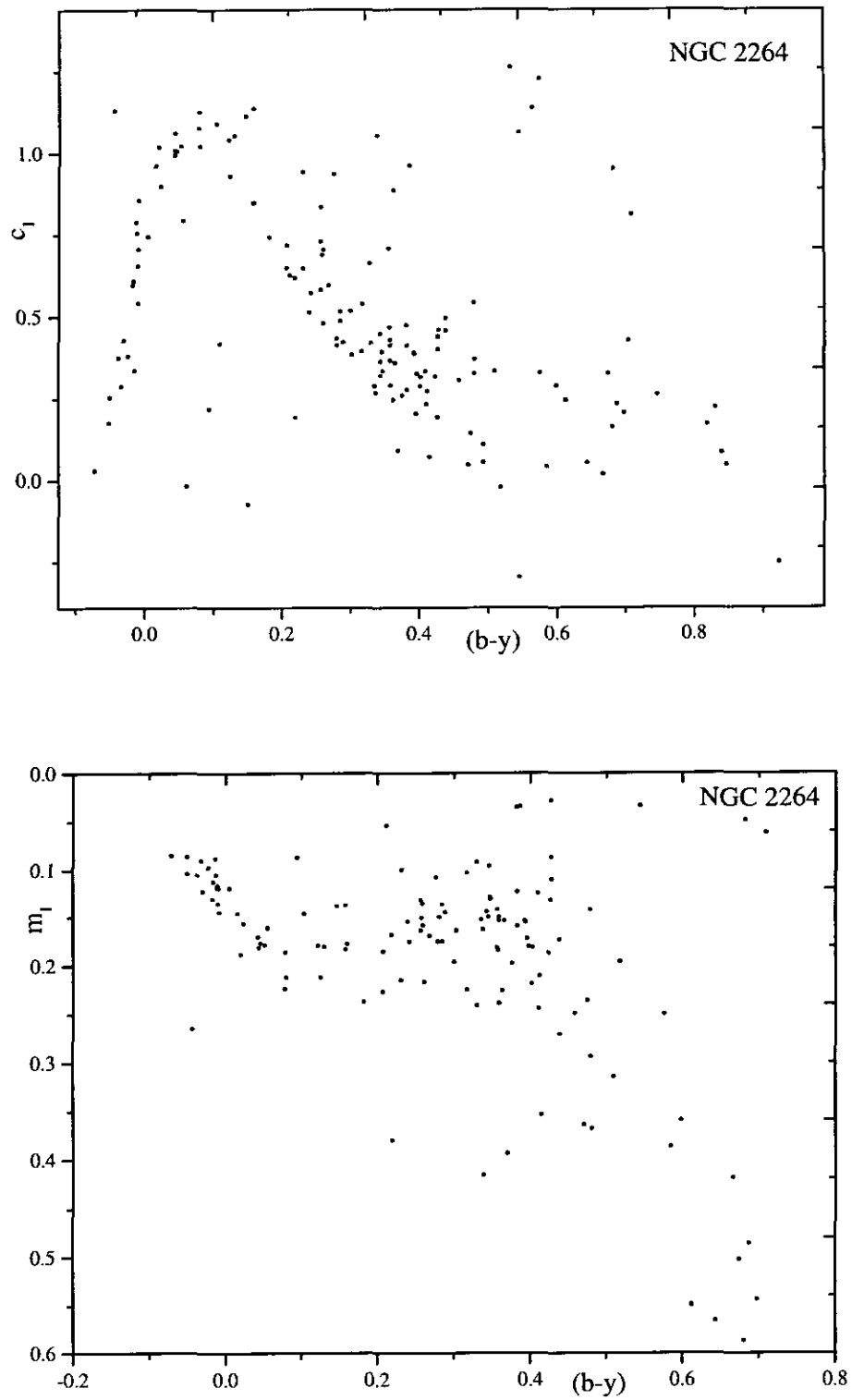


Figura 6.1. Diagramas antes de la selección.

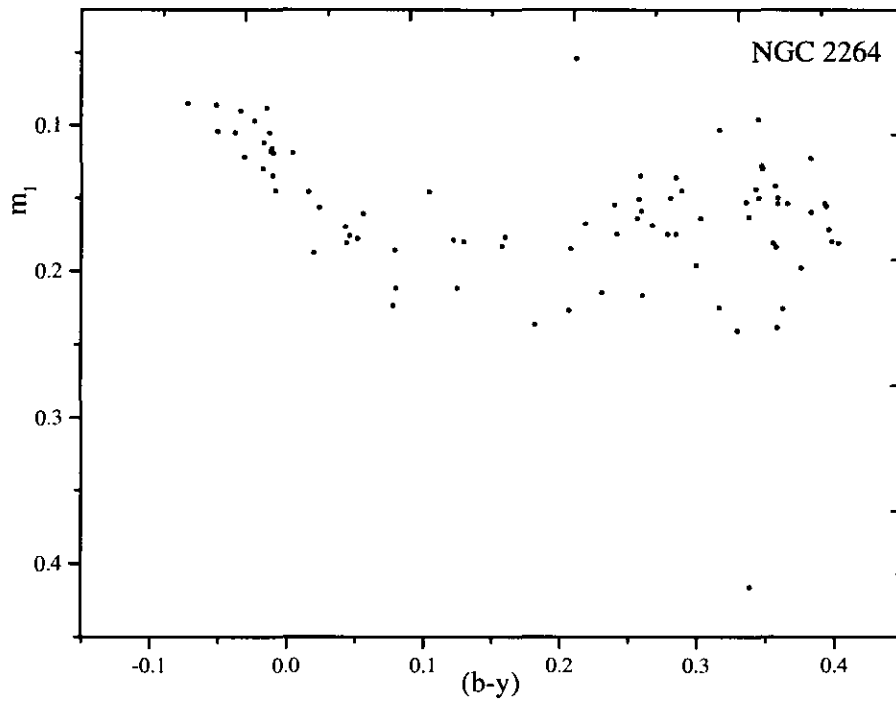
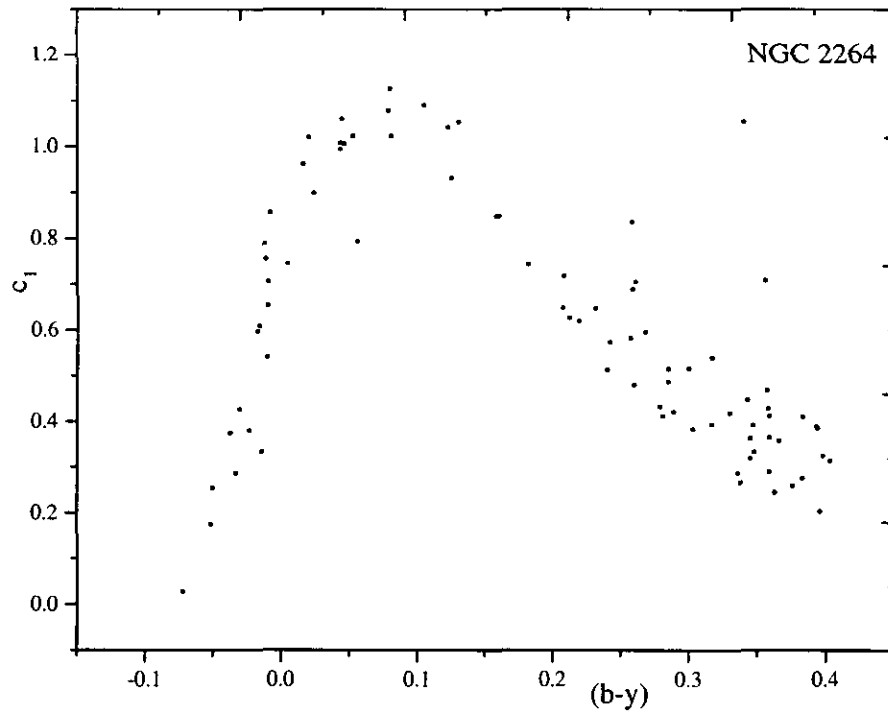


Figura 6.2. Diagramas después de la selección. Se eliminaron las estrellas que caen fuera de los diagramas dados por las calibraciones de Crawford, mostradas en las figuras 4.6 y 4.7.

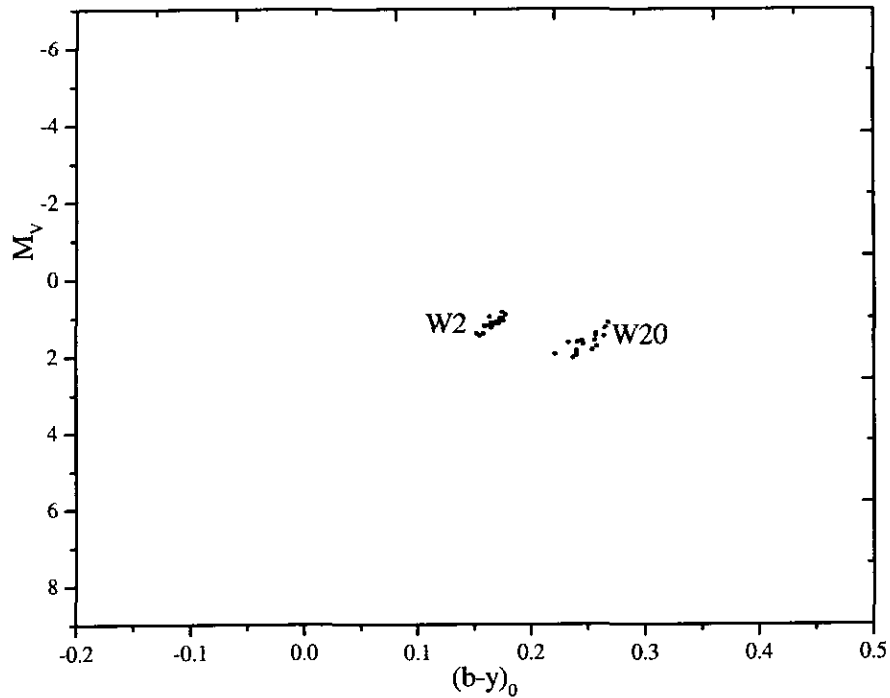


Figura 6.3. Ubicación de W2 y W20 en el diagrama H-R.

Desenrojecimiento. Para las estrellas de tipo espectral B, se da en la tabla A.3 los valores de los índices de color desenrojados. Para las estrellas A y F se dan en la tabla A.4. Para las variables W2 y W20 se dan en las tablas A.8 y A.9.

Membresía. En las gráficas de las figura 6.4. a 6.6. se muestran los histogramas de distancias contra número de estrellas obtenidos. En la tabla A.5 se ve cuáles son las estrellas miembros del cúmulo según este estudio.

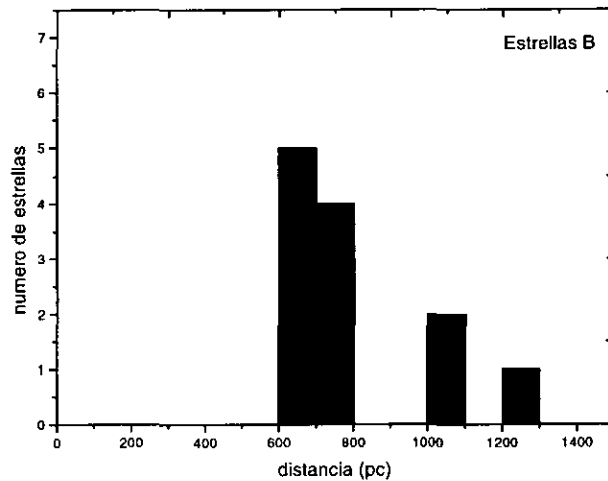


Figura 6.4.

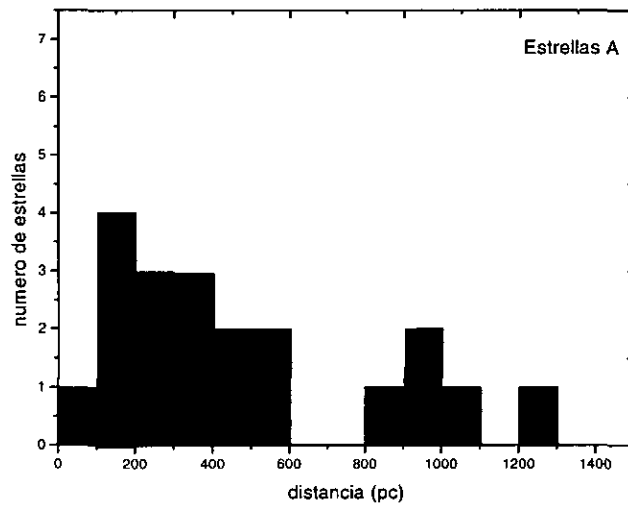


Figura 6.5.

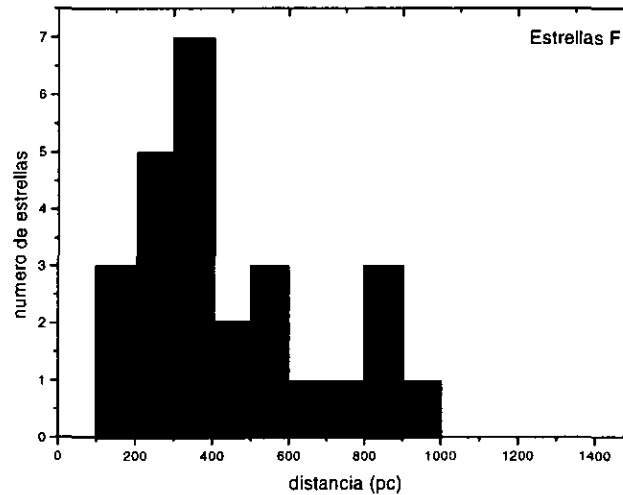


Figura 6.6.

Determinación de T_{eff} y g . En la tabla A.5 se dan los valores de $\log g$ y T_{eff} para las estrellas miembros del cúmulo. En la figura 6.7. y 6.8. se dan los diagramas donde se superponen las mallas de Relyea y Kurucz de que se habla en el capítulo 5. Las figuras 6.9. y 6.10. dan lo mismo , pero para W2 y W20, respectivamente. Para estas estrellas se interpola en la gráfica a fin de estimar una temperatura y una gravedad superficial promedio. Estas son las que se reportan en la tabla 6.1. Después de esto, se procedió a determinar la edad del cúmulo en base a las isócronas de Meynet et al. que se mencionan en el capítulo 4, pero esto se tratará un poco más adelante.

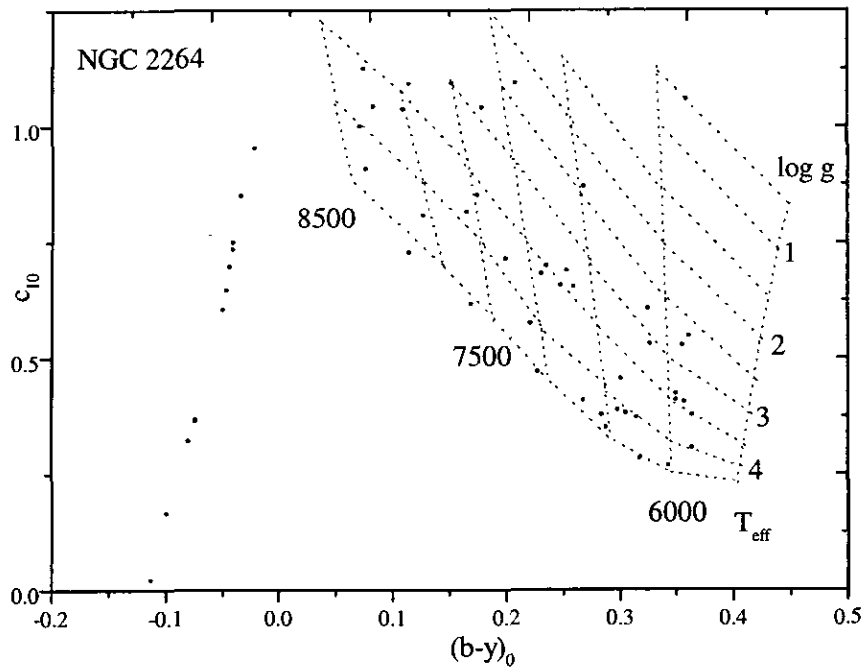


Figura 6.7. Diagramas para la determinación de T_{eff} y g .

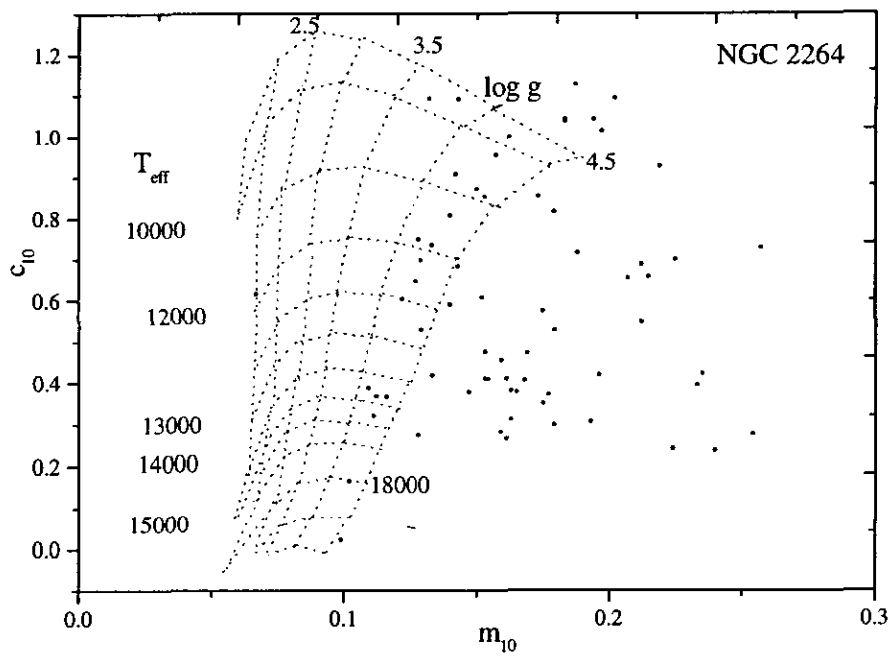


Figura 6.8. Diagramas para la determinación de T_{eff} y g .

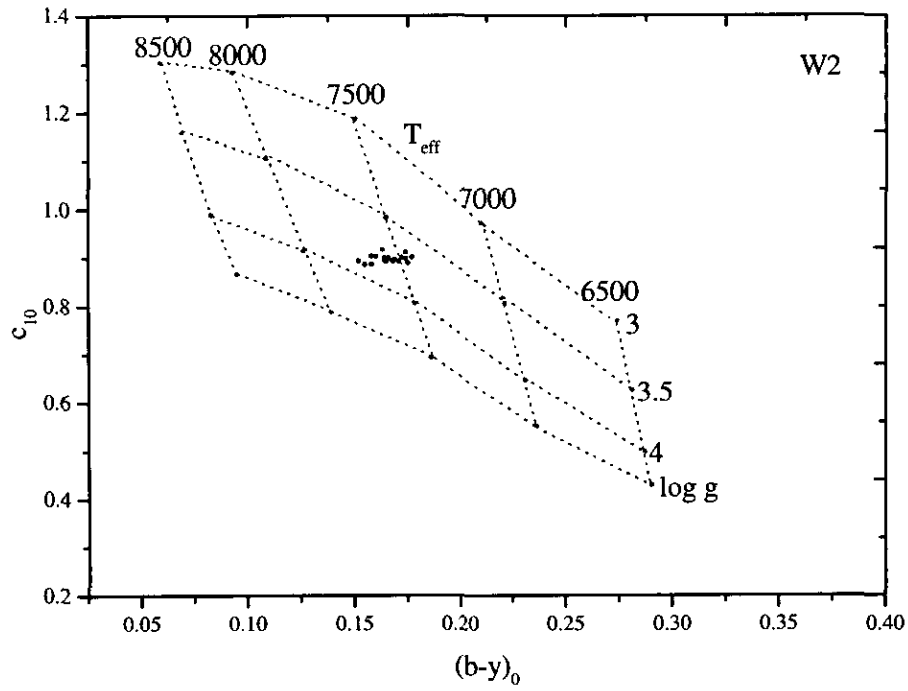


Figura 6.10. Diagrama para la determinación de T_{eff} y g en W2.

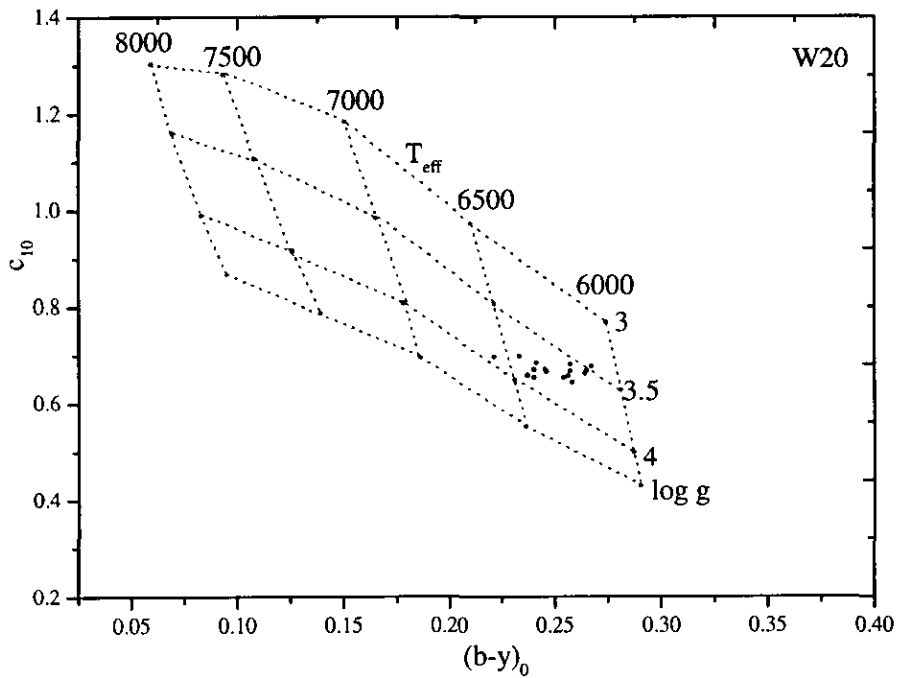


Figura 6.11. Diagramas para la determinación de T_{eff} y g en W20.

6.1.2 Fotometría diferencial

Las tablas A.10 y A.11 dan la fotometría diferencial obtenida para W2. Las tablas A.12 y A.13 dan la de W20. A partir de estos datos, se construyen las curvas de luz que se ven en las figuras 6.12. y 6.13. Es a partir de estos datos que se hace el análisis de periodos y modos de pulsación. En las mismas figuras vemos las curvas teóricas ajustadas con el método descrito, para poder comparar con los valores medidos. En las figuras A.2 y A.3 se ven los espectros de frecuencias que resultaron del ajuste numérico de transformadas de Fourier para los datos fotométricos.

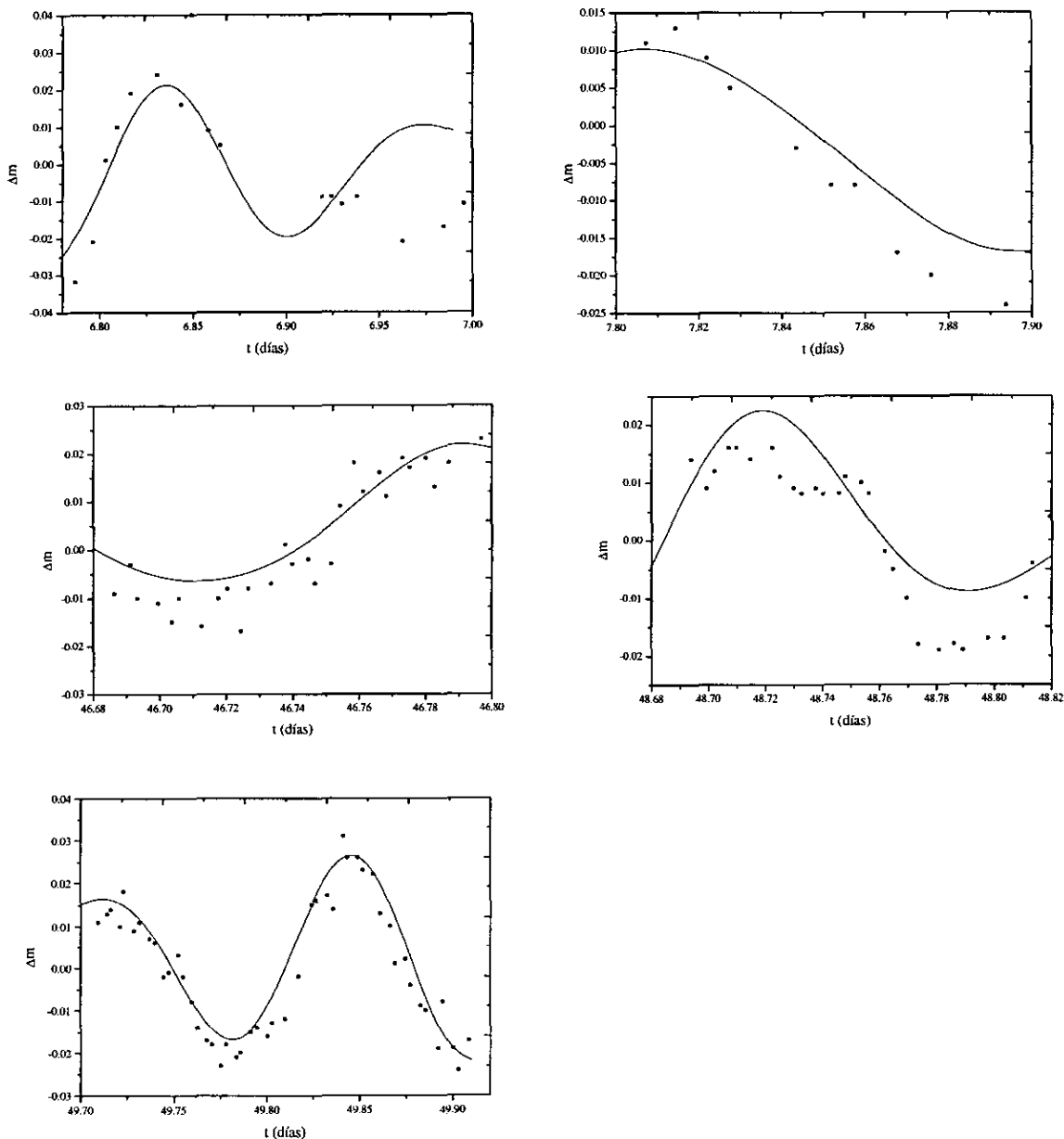


Figura 6.12. Curvas de luz para W2.

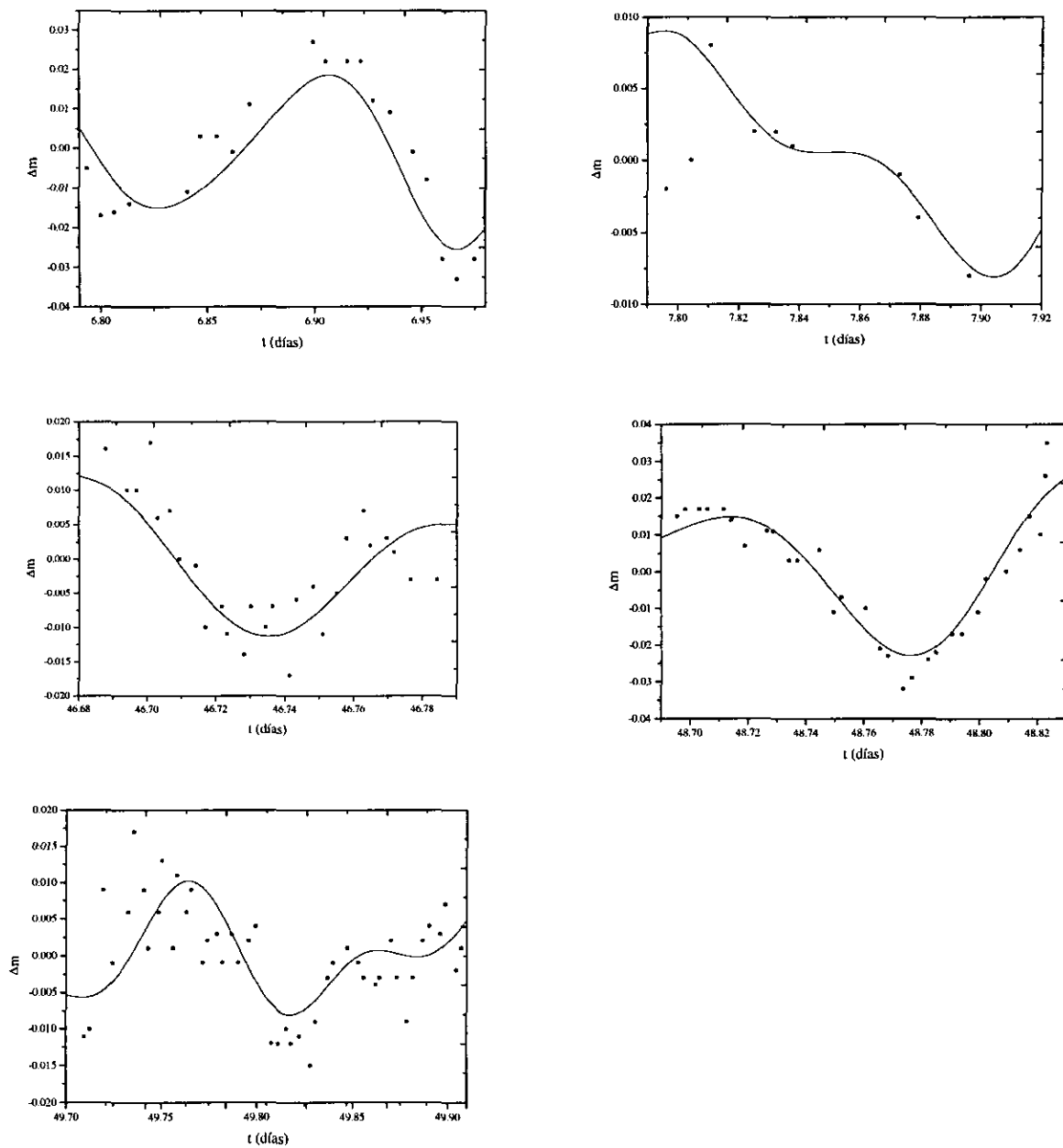


Figura 6.13. Curvas de luz para W20.

Modos de pulsación: De acuerdo a Breger (1979), Los modos de pulsación de una estrella δ Scuti, están relacionados con la constante de pulsación de la manera en que se da en la tabla A.13. Por medio de la siguiente relación se puede obtener la constante de pulsación Q de cada estrella:

$$\log Q = - 6.456 + \log \Pi + 0.5 \log g + 0.1 M_{bol} + \log T_e$$

donde Π es el periodo fundamental de pulsación de la estrella, g es el valor de la gravedad superficial de la estrella, M_{bol} es la magnitud bolométrica, y T_e es la temperatura efectiva.

Para hacer este cálculo, se tomaron los periodos hallados por el procedimiento descrito en el capítulo 5, a saber, para W2, $\Pi = 0.139 \pm 0.01$ días; y para W20, $\Pi = 0.131 \pm 0.006$ días.

Tabla 6.1. Parámetros físicos de las estrellas δ Scuti consideradas.

Estrella	Π	M_V	M_{bol}	$\log T_e$	$\log g$	Q	modo [Fe/H]
W2	0.139	1.157	1.152	3.869	3.6	0.029	F
W20	0.134	1.672	1.572	3.833	3.7	0.033	F 6 1H 0.55

6.2 Análisis

Al observar por primera vez el histograma de distancias, notamos con cierta curiosidad que las estrellas se agrupan en dos partes, una centrada en 300 pc, y otra centrada en 700 pc. Lo curioso es que una de estas agrupaciones nos da sólo estrellas de clase espectral B, mientras que la otra agrupa estrellas de clases A y F. Esto hizo sospechar que tal vez hubiera algún error en las calibraciones, por lo que pensamos que sería bueno hacer una revisión de las mismas.

Sin embargo, la sola revisión de un cúmulo no parece ser suficientemente determinante de esto, por lo cual pensamos que para concluir que la calibración está mal hacía falta esperar a ver lo que dicen otros datos en otros cúmulos.

Para fortuna nuestra, alguien más, R. M. García S. (1999) estaba haciendo un trabajo similar, con el cúmulo abierto α Per. Al examinar los resultados obtenidos por García, se ve que la calibración no está mal, sino que es totalmente consistente, sobre todo tomando en cuenta que α Per ya se ha estudiado más profundamente que NGC 2264. El diagrama color – color obtenido por García, así como el histograma de distancias, se ven en las figuras A.4 y A.5, respectivamente.

Esto no deja mas que una interpretación: **En la dirección del cúmulo NGC 2264 no hay uno, sino dos cúmulos.** Las características de los mismos son que uno de ellos, el más cercano, está representado fundamentalmente por estrellas jóvenes, de clase espectral B; y el otro, más lejano, está compuesto de estrellas más viejas, de clases espectrales A y F. En el cúmulo más joven no vemos estrellas de tipo espectral más tardío porque al estar a una distancia mucho más lejana (casi el doble) que el más viejo, las magnitudes aparentes son mucho más débiles, y salen de los límites de detección del fotómetro empleado.

La edad que se encontró para el cúmulo más joven, fue de 1.6×10^7 años como máximo, ya que del diagrama H–R no se ve que haya un “turn off” apreciable que muestre que las estrellas se aparten de la secuencia principal mucho. Para el cúmulo más viejo, el “turn off” se ve bastante claro, y de él se puede deducir una edad de 1.6×10^8 años: un

orden de magnitud mayor que el otro por lo menos. La figura 6.14 muestra el diagrama HR obtenido, donde se ve claramente la presencia de dos agrupaciones de estrellas distintas.

Al comparar estos resultados con lo que otros autores han obtenido (según se da cuenta de ello en el capítulo 3), vemos que los otros autores sólo han podido datar uno de los cúmulos, el más joven, hallando una edad de 3×10^6 años. Esta es la particularidad interesante de que se habló en la introducción.

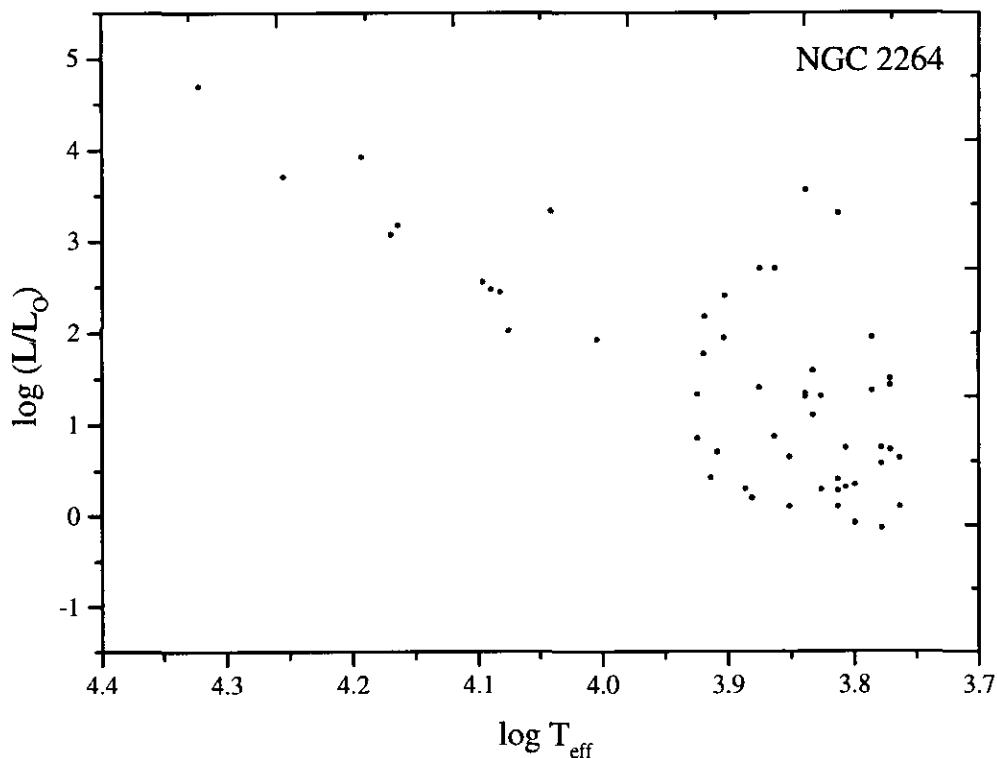


Figura 6.14.

Con respecto a las estrellas δ Scuti, vemos en la tabla 6.1 de los parámetros de las estrellas, que tiene razón Breger (1980): “Es interesante especular que la preferencia por el segundo y tercer sobretono puede estar conectado con posición de la estrella en la parte caliente de la banda de inestabilidad, donde los modelos teóricos predicen pulsación en sobretonos (Stellingwerf, 1979)”. En la tabla 6.2 se dan los parámetros de pulsación obtenidos, donde A simboliza la amplitud, ω la frecuencia, y ϕ la fase.

Tabla 6.2. Parámetros de pulsación de W2 y W20.

	A	ω	ϕ
W2	0.0185319	7.18582	0.093687
	0.0065789	9.55278	0.034312
	0.0074190	0.02097	0.039224

Doodle

Professor

W20	0.0154249	7.46317	0.834136
	0.0097124	8.13184	0.021845
	0.0048334	11.6948	0.219737

De acuerdo a lo que motivó el presente estudio; pensamos que las estrellas δ Scuti no son miembros del cúmulo joven, sino del más viejo, con lo cual su presencia sospechosa en un principio, deja de serlo. Próximamente se publicará más sobre el cúmulo (Peña et al, 1999), por lo pronto, concluimos este trabajo.

Referencias

Breger, M. 1980, *Ap. J.* **237**, 850.

García S., R. M. 1999, Tesis de licenciatura. UNAM.

Meynet, G., Mermilliod, J. y Maeder, A. 1993, *A&A*, **98**, 477.

Peña, J.H., Peniche, R., Cervantes, F. 1999. In preparation.

Stellingwerf, R.F. 1979, *Ap. J.* **227**, 935.

W20	0.0154249	7.46317	0.834136
	0.0097124	8.13184	0.021845
	0.0048334	11.6948	0.219737

De acuerdo a lo que motivó el presente estudio; pensamos que las estrellas δ Scuti no son miembros del cúmulo joven, sino del más viejo, con lo cual su presencia sospechosa en un principio, deja de serlo. Próximamente se publicará más sobre el cúmulo (Peña et al, 1999), por lo pronto, concluimos este trabajo.

Referencias

Breger, M. 1980, *Ap. J.* **237**, 850.

García S., R. M. 1999, Tesis de licenciatura. UNAM.

Meynet, G., Mermilliod, J. y Maeder, A. 1993, *A&A*, **98**, 477.

Peña, J.H., Peniche, R., Cervantes, F. 1999. In preparation.

Stellingwerf, R.F. 1979, *Ap. J.* **227**, 935.

Apéndice

Tabla A.1. Fotometría del cúmulo NGC 2264. El prefijo W indica número de Walker (1956). Los demás identificadores tienen en la tabla A.5 su número definitivo dado por Peña y Peniche.

Id.	V	b-y	m_1	c_1	β	$[m_1]$	$[c_1]$	[u-v]
P06	14.079	-0.367	0.705	0.656	2.712	0.6389	0.7294	2.066
P07	14.081	-0.366	0.705	0.657	--	0.6391	0.7302	2.067
W178	7.196	-0.072	0.085	0.029	2.599	0.072	0.0434	0.199
W178	7.196	-0.072	0.085	0.029	2.599	0.072	0.0434	0.199
W083	7.971	-0.051	0.086	0.175	2.638	0.0768	0.1852	0.347
W083	7.971	-0.051	0.086	0.175	2.638	0.0768	0.1852	0.347
W212	7.519	-0.05	0.104	0.253	2.49	0.095	0.263	0.461
W212	7.519	-0.05	0.104	0.253	2.49	0.095	0.263	0.461
P04	11.283	-0.044	0.265	1.129	2.97	0.2571	1.1378	1.659
P05	11.284	-0.044	0.265	1.129	--	0.2571	1.1378	1.659
W007	7.773	-0.037	0.105	0.373	2.678	0.0983	0.3804	0.583
W050	8.151	-0.033	0.09	0.286	2.628	0.0841	0.2926	0.466
W050	8.151	-0.033	0.09	0.286	2.628	0.0841	0.2926	0.466
W109	9.52	-0.03	0.122	0.426	2.79	0.1166	0.432	0.67
W074	8.474	-0.023	0.097	0.379	2.687	0.0929	0.3836	0.573
W172	10.107	-0.017	0.13	0.597	2.829	0.1269	0.6004	0.857
W206	8.762	-0.016	0.112	0.609	2.747	0.1091	0.6122	0.833
W088	9.077	-0.014	0.088	0.335	2.629	0.0855	0.3378	0.511
W088	9.077	-0.014	0.088	0.335	2.629	0.0855	0.3378	0.511
W024	8.543	-0.012	0.105	0.788	2.648	0.1028	0.7904	0.998
W014	8.576	-0.011	0.118	0.755	2.603	0.116	0.7572	0.991
W014	8.576	-0.011	0.118	0.755	2.603	0.116	0.7572	0.991
W152	9.14	-0.01	0.116	0.654	2.759	0.1142	0.656	0.886
W107	8.867	-0.01	0.135	0.54	2.642	0.1332	0.542	0.81
W187	9.233	-0.009	0.119	0.705	2.766	0.1174	0.7068	0.943
W179	10.107	-0.008	0.145	0.856	2.699	0.1436	0.8576	1.146
W181	10.099	0.005	0.119	0.744	2.81	0.1199	0.743	0.982
W112	10.829	0.016	0.146	0.96	2.838	0.1489	0.9568	1.252
W106	10.83	0.016	0.146	0.961	2.479	0.1489	0.9578	1.253
W030	10.76	0.02	0.188	1.019	2.909	0.1916	1.015	1.395
W103	10.095	0.024	0.157	0.898	2.872	0.1613	0.8932	1.212
W145	10.669	0.043	0.17	1.007	2.933	0.1777	0.9984	1.347
W138	10.218	0.043	0.17	0.993	2.866	0.1777	0.9844	1.333
W182	10.327	0.044	0.181	1.059	2.7	0.1889	1.0502	1.421
W159	10.965	0.046	0.176	1.005	2.889	0.1843	0.9958	1.357
W035	10.325	0.052	0.178	1.022	2.939	0.1874	1.0116	1.378
W215	9.36	0.056	0.161	0.793	2.822	0.1711	0.7818	1.115
P14	14.5	0.061	0.74	-0.018	2.701	0.751	-0.0302	1.462
W226	9.637	0.078	0.224	1.077	2.756	0.238	1.0614	1.525
W222	9.921	0.079	0.186	1.126	2.845	0.2002	1.1102	1.498
W165	11.007	0.08	0.212	1.022	2.728	0.2264	1.006	1.446

W202	9.223	0.094	0.087	0.218	2.777	0.1039	0.1992	0.392
W100	10.049	0.104	0.146	1.089	2.801	0.1647	1.0682	1.381
P01	13.501	0.11	0.662	0.416	2.809	0.6818	0.394	1.74
W043	10.544	0.122	0.179	1.041	2.814	0.201	1.0166	1.399
W193	9.815	0.125	0.212	0.93	2.837	0.2345	0.905	1.354
W002	9.685	0.13	0.18	1.053	2.844	0.2034	1.027	1.413
W087	10.749	0.147	0.138	1.112	2.752	0.1645	1.0826	1.388
P08	14.502	0.15	0.722	-0.074	2.696	0.749	-0.104	1.37
W046	9.227	0.158	0.137	1.137	2.74	0.1654	1.1054	1.411
P29	10.973	0.158	0.183	0.848	2.657	0.2114	0.8164	1.214
W104	11.385	0.16	0.177	0.849	2.757	0.2058	0.817	1.203
W128	11.051	0.182	0.237	0.742	2.843	0.2698	0.7056	1.216
W209	11.358	0.207	0.227	0.648	2.696	0.2643	0.6066	1.102
W223	10.958	0.208	0.185	0.717	2.742	0.2224	0.6754	1.087
P17	12.179	0.212	0.054	0.626	2.79	0.0922	0.5836	0.734
W205	10.651	0.219	0.168	0.619	2.588	0.2074	0.5752	0.955
P10	13.788	0.22	0.38	0.192	2.465	0.4196	0.148	0.952
W034	10.968	0.231	0.215	0.647	2.686	0.2566	0.6008	1.077
XVIII11	12.286	0.232	0.1	0.942	2.771	0.1418	0.8956	1.142
W006	8.188	0.24	0.155	0.512	2.608	0.1982	0.464	0.822
W025	7.821	0.242	0.175	0.572	2.572	0.2186	0.5236	0.922
W228	11.165	0.257	0.164	0.581	2.717	0.2103	0.5296	0.909
XVIII02	11.859	0.257	0.131	0.729	2.601	0.1773	0.6776	0.991
W158	10.395	0.258	0.151	0.835	2.77	0.1974	0.7834	1.137
XVIII19	11.326	0.259	0.135	0.688	2.697	0.1816	0.6362	0.958
W094	10.442	0.26	0.159	0.479	2.736	0.2058	0.427	0.797
W020	10.357	0.261	0.217	0.704	2.705	0.264	0.6518	1.138
W029	10.143	0.268	0.169	0.595	2.617	0.2172	0.5414	0.933
W017	12.887	0.277	0.108	0.935	2.96	0.1579	0.8796	1.151
W099	10.869	0.279	0.175	0.432	2.764	0.2252	0.3762	0.782
W221	12.147	0.281	0.15	0.411	2.678	0.2006	0.3548	0.711
W065	11.784	0.285	0.136	0.486	2.733	0.1873	0.429	0.758
XVIII08	12.617	0.285	0.175	0.514	2.558	0.2263	0.457	0.864
P37	12.227	0.289	0.145	0.42	2.708	0.197	0.3622	0.71
XVIII06	12.384	0.3	0.196	0.516	2.605	0.25	0.456	0.908
W220	9.732	0.303	0.164	0.382	2.649	0.2185	0.3214	0.71
W028	12.474	0.317	0.103	0.392	2.636	0.1601	0.3286	0.598
W116	11.68	0.317	0.225	0.538	2.613	0.2821	0.4746	0.988
W031	11.718	0.329	0.092	0.662	2.701	0.1512	0.5962	0.846
W070	11.178	0.33	0.241	0.418	2.634	0.3004	0.352	0.9
W180	12.942	0.336	0.153	0.287	2.641	0.2135	0.2198	0.593
W196	12.186	0.338	0.163	0.266	2.62	0.2238	0.1984	0.592
W150	12.808	0.339	0.416	1.053	2.649	0.477	0.9852	1.885
W098	11.764	0.343	0.144	0.447	2.569	0.2057	0.3784	0.735
W195	12.617	0.345	0.15	0.319	2.729	0.2121	0.25	0.619
W072	12.359	0.345	0.096	0.362	2.567	0.1581	0.293	0.554
P20	11.577	0.347	0.128	0.391	2.663	0.1905	0.3216	0.647

P35	13.267	0.348	0.13	0.333	2.712	0.1926	0.2634	0.593
W010	11.27	0.356	0.181	0.708	2.689	0.2451	0.6368	1.07
P28	12.174	0.357	0.142	0.467	2.648	0.2063	0.3956	0.751
W114	11.48	0.358	0.184	0.428	2.783	0.2484	0.3564	0.796
W118	11.783	0.359	0.154	0.364	2.668	0.2186	0.2922	0.672
P26	11.493	0.359	0.15	0.412	2.601	0.2146	0.3402	0.712
XV005	13.007	0.359	0.239	0.289	2.51	0.3036	0.2172	0.767
P15	13.701	0.363	0.226	0.245	2.665	0.2913	0.1724	0.697
P19	11.979	0.364	-0.029	0.886	2.705	0.0365	0.8132	0.828
W077	11.981	0.366	0.154	0.357	2.53	0.2199	0.2838	0.665
P13	13.387	0.37	0.394	0.091	2.653	0.4606	0.017	0.879
P36	12.351	0.376	0.198	0.258	2.68	0.2657	0.1828	0.654
XVIII18	13.279	0.381	0.036	0.473	2.614	0.1046	0.3968	0.545
W177	9.29	0.383	0.16	0.41	2.603	0.2289	0.3334	0.73
P23	11.65	0.383	0.123	0.275	2.572	0.1919	0.1984	0.521
W027	12.088	0.386	0.035	0.961	2.754	0.1045	0.8838	1.031
W108	12.115	0.393	0.154	0.388	2.645	0.2247	0.3094	0.696
P21	11.413	0.394	0.156	0.384	2.595	0.2269	0.3052	0.696
W190	12.097	0.396	0.172	0.203	2.515	0.2433	0.1238	0.547
W236	11.429	0.398	0.18	0.325	2.847	0.2516	0.2454	0.685
XV003	12.667	0.402	0.219	0.286	2.602	0.2914	0.2056	0.724
W224	11.548	0.403	0.181	0.314	2.613	0.2535	0.2334	0.676
W091	12.292	0.41	0.124	0.332	2.688	0.1978	0.25	0.58
P33	12.793	0.411	0.244	0.232	2.513	0.318	0.1498	0.72
W169	6.411	0.412	0.211	0.27	2.515	0.2852	0.1876	0.692
P09	13.454	0.415	0.354	0.071	2.601	0.4287	-0.012	0.779
P27	11.112	0.424	0.187	0.316	2.531	0.2633	0.2312	0.69
XVIII01	12.617	0.427	0.029	0.436	2.627	0.1059	0.3506	0.494
XVIII07	12.726	0.427	0.131	0.439	2.542	0.2079	0.3536	0.701
P18	13.132	0.427	0.087	0.192	2.526	0.1639	0.1066	0.366
XVIII13	12.192	0.428	0.11	0.458	2.558	0.187	0.3724	0.678
XVIII05	13.332	0.428	-0.19	0.398	2.424	-0.113	0.3124	0.018
W068	11.681	0.438	0.173	0.456	2.61	0.2518	0.3684	0.802
P12	12.224	0.438	0.271	0.494	2.481	0.3498	0.4064	1.036
XV001	12.969	0.458	0.249	0.304	2.636	0.3314	0.2124	0.802
W092	11.703	0.471	0.364	0.046	2.686	0.4488	-0.0482	0.774
P32	13.048	0.475	0.236	0.142	2.602	0.3215	0.047	0.614
XVIII10	13.509	0.479	0.142	0.542	2.512	0.2282	0.4462	0.826
W147	11.004	0.48	0.294	0.326	2.646	0.3804	0.23	0.914
W001	13.538	0.481	0.368	0.369	2.493	0.4546	0.2728	1.105
W066	12.475	0.493	-0.045	0.109	2.68	0.0437	0.0104	0.019
W067	10.873	0.493	-0.141	0.054	2.567	-0.0523	-0.0446	-0.228
W073	9.361	0.51	0.315	0.332	2.569	0.4068	0.23	0.962
W093	13.175	0.518	0.196	-0.022	2.414	0.2892	-0.1256	0.37
XVIII16	13.196	0.532	-0.009	1.261	2.959	0.0868	1.1546	1.243
P34	12.224	0.544	0.034	1.062	2.915	0.1319	0.9532	1.13
P39	13.671	0.546	0.654	-0.3	2.665	0.7523	-0.4092	1.008

XVIII04	12.071	0.564	-0.105	1.138	2.809	-0.0035	1.0252	0.928
XVIII14	13.055	0.574	-0.046	1.224	3.01	0.0573	1.1092	1.132
XVIII12	13.198	0.576	0.25	0.327	2.622	0.3537	0.2118	0.827
P38	13.599	0.585	0.387	0.04	2.594	0.4923	-0.077	0.814
XVIII09	13.039	0.599	0.36	0.287	2.516	0.4678	0.1672	1.007
P03	11.674	0.613	0.55	0.244	3.139	0.6603	0.1214	1.344
P02	11.672	0.613	0.549	0.243	2.802	0.6593	0.1204	1.341
XV002	11.442	0.644	0.566	0.052	2.534	0.6819	-0.0768	1.184
P30	12.826	0.667	0.419	0.017	2.504	0.5391	-0.1164	0.855
W239	9.311	0.675	0.503	0.326	2.542	0.6245	0.191	1.332
W229	8.529	0.681	0.587	0.161	2.567	0.7096	0.0248	1.335
W060	12.506	0.682	0.049	0.951	2.773	0.1718	0.8146	1.049
P25	10.227	0.688	0.486	0.232	2.532	0.6098	0.0944	1.204
P24	10.405	0.698	0.544	0.206	2.526	0.6696	0.0664	1.294
XVIII03	13.578	0.704	-0.185	0.425	2.582	-0.0583	0.2842	0.055
W038	10.99	0.709	0.062	0.812	2.636	0.1896	0.6702	0.936
W238	9.893	0.747	0.643	0.26	--	0.7775	0.1106	1.546
W069	8.243	0.819	0.698	0.17	2.587	0.8454	0.0062	1.566
W008	13.64	0.831	0.106	0.221	2.636	0.2556	0.0548	0.433
W037	8.042	0.84	0.803	0.083	2.567	0.9542	-0.085	1.689
P16	13.379	0.847	0.056	0.046	2.536	0.2085	-0.1234	0.158
XV006	13.84	0.923	0.131	-0.252	2.201	0.2971	-0.4366	0.01
P11	14.396	0.927	0.61	-1.384	2.485	0.7769	-1.5694	-0.164
P22	11.607	1.037	0.316	0.157	2.567	0.5027	-0.0504	0.789
XVIII20	12.681	1.094	0.368	1.66	2.544	0.5649	1.4412	2.396
P31	11.504	1.142	0.438	-0.074	2.593	0.6436	-0.3024	0.802
XVIII15	13.255	1.265	0.607	2.762	2.526	0.8347	2.509	3.976
XV004	13.669	1.276	0.664	-0.276	2.411	0.8937	-0.5312	1.052
XVIII17	12.951	1.35	0.84	-0.376	2.454	1.083	-0.646	1.304

Tabla A.2. Estrellas que quedaron como de secuencia principal, luego de aplicar los criterios de Golay para su selección.

Id	V	b-y	m_1	c_1	β	$[m_1]$	$[c_1]$	$[u-v]$
P06	14.079	-0.367	0.705	0.656	2.712	0.6389	0.7294	2.066
W178	7.196	-0.072	0.085	0.029	2.599	0.072	0.0434	0.199
W178	7.196	-0.072	0.085	0.029	2.599	0.072	0.0434	0.199
W083	7.971	-0.051	0.086	0.175	2.638	0.0768	0.1852	0.347
W083	7.971	-0.051	0.086	0.175	2.638	0.0768	0.1852	0.347
W212	7.519	-0.05	0.104	0.253	2.49	0.095	0.263	0.461
W212	7.519	-0.05	0.104	0.253	2.49	0.095	0.263	0.461
W007	7.773	-0.037	0.105	0.373	2.678	0.0983	0.3804	0.583
W050	8.151	-0.033	0.09	0.286	2.628	0.0841	0.2926	0.466
W050	8.151	-0.033	0.09	0.286	2.628	0.0841	0.2926	0.466
W109	9.52	-0.03	0.122	0.426	2.79	0.1166	0.432	0.67
W074	8.474	-0.023	0.097	0.379	2.687	0.0929	0.3836	0.573
W172	10.107	-0.017	0.13	0.597	2.829	0.1269	0.6004	0.857
W206	8.762	-0.016	0.112	0.609	2.747	0.1091	0.6122	0.833
W088	9.077	-0.014	0.088	0.335	2.629	0.0855	0.3378	0.511

W088	9.077	-0.014	0.088	0.335	2.629	0.0855	0.3378	0.511
W024	8.543	-0.012	0.105	0.788	2.648	0.1028	0.7904	0.998
W014	8.576	-0.011	0.118	0.755	2.603	0.116	0.7572	0.991
W014	8.576	-0.011	0.118	0.755	2.603	0.116	0.7572	0.991
W152	9.14	-0.01	0.116	0.654	2.759	0.1142	0.656	0.886
W107	8.867	-0.01	0.135	0.54	2.642	0.1332	0.542	0.81
W187	9.233	-0.009	0.119	0.705	2.766	0.1174	0.7068	0.943
W179	10.107	-0.008	0.145	0.856	2.699	0.1436	0.8576	1.146
W181	10.099	0.005	0.119	0.744	2.81	0.1199	0.743	0.982
W112	10.829	0.016	0.146	0.96	2.838	0.1489	0.9568	1.252
W106	10.83	0.016	0.146	0.961	2.479	0.1489	0.9578	1.253
W030	10.76	0.02	0.188	1.019	2.909	0.1916	1.015	1.395
W103	10.095	0.024	0.157	0.898	2.872	0.1613	0.8932	1.212
W145	10.669	0.043	0.17	1.007	2.933	0.1777	0.9984	1.347
W138	10.218	0.043	0.17	0.993	2.866	0.1777	0.9844	1.333
W182	10.327	0.044	0.181	1.059	2.7	0.1889	1.0502	1.421
W159	10.965	0.046	0.176	1.005	2.889	0.1843	0.9958	1.357
W035	10.325	0.052	0.178	1.022	2.939	0.1874	1.0116	1.378
W215	9.36	0.056	0.161	0.793	2.822	0.1711	0.7818	1.115
W226	9.637	0.078	0.224	1.077	2.756	0.238	1.0614	1.525
W222	9.921	0.079	0.186	1.126	2.845	0.2002	1.1102	1.498
W165	11.007	0.08	0.212	1.022	2.728	0.2264	1.006	1.446
W100	10.049	0.104	0.146	1.089	2.801	0.1647	1.0682	1.381
W043	10.544	0.122	0.179	1.041	2.814	0.201	1.0166	1.399
W193	9.815	0.125	0.212	0.93	2.837	0.2345	0.905	1.354
W002	9.685	0.13	0.18	1.053	2.844	0.2034	1.027	1.413
P29	10.973	0.158	0.183	0.848	2.657	0.2114	0.8164	1.214
W104	11.385	0.16	0.177	0.849	2.757	0.2058	0.817	1.203
W128	11.051	0.182	0.237	0.742	2.843	0.2698	0.7056	1.216
W209	11.358	0.207	0.227	0.648	2.696	0.2643	0.6066	1.102
W223	10.958	0.208	0.185	0.717	2.742	0.2224	0.6754	1.087
P17	12.179	0.212	0.054	0.626	2.79	0.0922	0.5836	0.734
W205	10.651	0.219	0.168	0.619	2.588	0.2074	0.5752	0.955
W034	10.968	0.231	0.215	0.647	2.686	0.2566	0.6008	1.077
W006	8.188	0.24	0.155	0.512	2.608	0.1982	0.464	0.822
W025	7.821	0.242	0.175	0.572	2.572	0.2186	0.5236	0.922
W228	11.165	0.257	0.164	0.581	2.717	0.2103	0.5296	0.909
W158	10.395	0.258	0.151	0.835	2.77	0.1974	0.7834	1.137
XVIII19	11.326	0.259	0.135	0.688	2.697	0.1816	0.6362	0.958
W094	10.442	0.26	0.159	0.479	2.736	0.2058	0.427	0.797
W020	10.357	0.261	0.217	0.704	2.705	0.264	0.6518	1.138
W029	10.143	0.268	0.169	0.595	2.617	0.2172	0.5414	0.933
W099	10.869	0.279	0.175	0.432	2.764	0.2252	0.3762	0.782
W221	12.147	0.281	0.15	0.411	2.678	0.2006	0.3548	0.711
W065	11.784	0.285	0.136	0.486	2.733	0.1873	0.429	0.758
XVIII08	12.617	0.285	0.175	0.514	2.558	0.2263	0.457	0.864
P37	12.227	0.289	0.145	0.42	2.708	0.197	0.3622	0.71

XVIII06	12.384	0.3	0.196	0.516	2.605	0.25	0.456	0.908
W220	9.732	0.303	0.164	0.382	2.649	0.2185	0.3214	0.71
W028	12.474	0.317	0.103	0.392	2.636	0.1601	0.3286	0.598
W116	11.68	0.317	0.225	0.538	2.613	0.2821	0.4746	0.988
W070	11.178	0.33	0.241	0.418	2.634	0.3004	0.352	0.9
W180	12.942	0.336	0.153	0.287	2.641	0.2135	0.2198	0.593
W196	12.186	0.338	0.163	0.266	2.62	0.2238	0.1984	0.592
W150	12.808	0.339	0.416	1.053	2.649	0.477	0.9852	1.885
W098	11.764	0.343	0.144	0.447	2.569	0.2057	0.3784	0.735
W195	12.617	0.345	0.15	0.319	2.729	0.2121	0.25	0.619
W072	12.359	0.345	0.096	0.362	2.567	0.1581	0.293	0.554
P20	11.577	0.347	0.128	0.391	2.663	0.1905	0.3216	0.647
P35	13.267	0.348	0.13	0.333	2.712	0.1926	0.2634	0.593
W010	11.27	0.356	0.181	0.708	2.689	0.2451	0.6368	1.07
P28	12.174	0.357	0.142	0.467	2.648	0.2063	0.3956	0.751
W114	11.48	0.358	0.184	0.428	2.783	0.2484	0.3564	0.796
W118	11.783	0.359	0.154	0.364	2.668	0.2186	0.2922	0.672
P26	11.493	0.359	0.15	0.412	2.601	0.2146	0.3402	0.712
XV005	13.007	0.359	0.239	0.289	2.51	0.3036	0.2172	0.767
P15	13.701	0.363	0.226	0.245	2.665	0.2913	0.1724	0.697
W077	11.981	0.366	0.154	0.357	2.53	0.2199	0.2838	0.665
P36	12.351	0.376	0.198	0.258	2.68	0.2657	0.1828	0.654
W177	9.29	0.383	0.16	0.41	2.603	0.2289	0.3334	0.73
P23	11.65	0.383	0.123	0.275	2.572	0.1919	0.1984	0.521
W108	12.115	0.393	0.154	0.388	2.645	0.2247	0.3094	0.696
P21	11.413	0.394	0.156	0.384	2.595	0.2269	0.3052	0.696
W190	12.097	0.396	0.172	0.203	2.515	0.2433	0.1238	0.547
W236	11.429	0.398	0.18	0.325	2.847	0.2516	0.2454	0.685
W224	11.548	0.403	0.181	0.314	2.613	0.2535	0.2334	0.676

Tabla A.3. Colores resenrojados y parámetros físicos calculados para estrellas B.

Id	E(b-y)	(b-y) ₀	m ₁₀	c ₁₀	β	V ₀	M _v	DM	dst
W108	0.078	0.315	0.177	0.372	2.645	11.78	3.86	7.92	383.92
W180	0.018	0.318	0.159	0.283	2.641	12.86	5.12	7.74	352.87
W028	0.019	0.298	0.109	0.388	2.636	12.39	3.71	8.68	545.52
W070	-0.02	0.35	0.235	0.422	2.634	11.27	3.34	7.93	384.95
W196	-0.005	0.343	0.161	0.267	2.62	12.21	5.26	6.95	245.78
W029	-0.057	0.325	0.152	0.606	2.617	10.39	0.57	9.82	919.07
W116	-0.044	0.361	0.212	0.547	2.613	11.87	1.29	10.58	1309.11
W224	0.039	0.364	0.193	0.306	2.613	11.38	4.5	6.88	237.42
W006	-0.087	0.327	0.129	0.529	2.608	8.56	1.55	7.01	252.82
XVII	--	0.355	0.179	0.527	2.605	12.62	1.42	11.2	1736.16
W177	0.026	0.357	0.168	0.405	2.603	9.18	2.95	6.22	175.68
P26	0.009	0.35	0.153	0.41	2.601	11.46	2.89	8.57	517.13
P21	0.03	0.364	0.165	0.378	2.595	11.28	3.21	8.07	410.79

Tabla A.4. Colores desrojados y parámetros físicos calculados para estrellas A y F.

Id	E(b-y)	(b-y) ₀	m ₁₀	c ₁₀	β	V ₀	M _V	DM	dst
W030	0.029	-0.009	0.197	1.013	2.909	10.63	1.34	9.3	723
W112	0.038	-0.022	0.157	0.953	2.838	10.66	0.65	10.01	1006
W172	0.034	-0.051	0.14	0.591	2.829	9.96	0.65	9.32	730
W181	0.046	-0.041	0.133	0.735	2.81	9.9	0.46	9.44	773
W109	0.038	-0.068	0.133	0.419	2.79	9.36	0.15	9.21	694
W187	0.035	-0.044	0.129	0.698	2.766	9.08	-0.08	9.17	681
W152	0.037	-0.047	0.127	0.647	2.759	8.98	-0.15	9.13	670
W206	0.034	-0.05	0.122	0.603	2.747	8.62	-0.3	8.91	607
P06	-0.321	-0.046	0.609	0.717	2.712	15.46	-1.04	16.5	19913
W179	0.026	-0.034	0.153	0.851	2.699	9.99	-1.61	11.61	2096
W074	0.051	-0.074	0.112	0.369	2.687	8.25	-1.21	9.47	783
W007	0.037	-0.074	0.116	0.366	2.678	7.61	-1.38	8.99	629
W083	0.049	-0.099	0.102	0.166	2.638	7.76	-2.31	10.07	1031.87
W088	0.07	-0.08	0.111	0.322	2.629	8.78	-2.58	11.35	1864.14
W014	0.031	-0.041	0.128	0.749	2.603	8.44	-5.49	13.94	6123.52
W050	0.056	-0.086	0.128	0.275	2.628	7.91	-2.56	10.47	1240.04
W178	0.043	-0.113	0.099	0.021	2.599	7.01	-3.59	10.6	1317.52
W103	-0.052	0.076	0.142	0.908	2.872	10.32	2.52	7.79	361.89
W138	-0.028	0.071	0.162	0.999	2.866	10.34	1.62	8.72	553.85
W236	0.245	0.153	0.254	0.276	2.847	10.38	7.44	2.93	38.6
W222	0.005	0.074	0.187	1.125	2.845	9.9	0.21	9.69	867.05
W002	0.047	0.083	0.194	1.043	2.844	9.48	0.86	8.62	530.58
W128	0.068	0.114	0.257	0.728	2.843	10.76	3.65	7.12	264.89
W193	0.024	0.101	0.219	0.925	2.837	9.71	1.89	7.82	366.67
W215	-0.071	0.127	0.14	0.807	2.822	9.67	2.96	6.7	218.91
W043	0.013	0.109	0.183	1.038	2.814	10.49	0.62	9.87	940.07
W100	-0.01	0.114	0.143	1.091	2.801	10.09	-0.01	10.1	1046.78
P17	0.043	0.169	0.067	0.617	2.79	12	4	8	398.07
W114	0.163	0.195	0.233	0.395	2.783	10.78	5.67	5.11	104.97
W158	0.093	0.165	0.179	0.816	2.77	9.99	1.82	8.18	432.11
W099	0.069	0.21	0.196	0.418	2.764	10.57	5.35	5.22	110.59
W104	-0.014	0.174	0.173	0.852	2.757	11.44	1.5	9.95	975.46
W226	-0.074	0.152	0.202	1.092	2.756	9.95	-0.57	10.52	1271.77
W223	0.009	0.199	0.188	0.715	2.742	10.92	2.48	8.44	488.2
W094	0.033	0.227	0.169	0.472	2.736	10.3	4.5	5.8	144.8
W065	0.057	0.228	0.153	0.475	2.733	11.54	4.36	7.18	272.54
W195	0.098	0.247	0.179	0.299	2.729	12.2	5.77	6.43	192.86
W165	-0.098	0.178	0.183	1.042	2.728	11.43	-0.58	12.01	2519.63
W228	0.036	0.221	0.175	0.574	2.717	11.01	3.15	7.86	373.95
P35	0.111	0.237	0.163	0.311	2.712	12.79	5.38	7.41	303.18
P37	0.052	0.237	0.161	0.41	2.708	12	4.51	7.49	314.65
W020	0.026	0.235	0.225	0.699	2.705	10.25	1.7	8.55	512.06
W182	-0.164	0.208	0.132	1.092	2.7	11.03	-2	13.03	4039.89
XVII	--	0.231	0.143	0.682	2.697	11.21	1.61	9.6	831.89
W209	-0.041	0.248	0.215	0.656	2.696	11.53	1.98	9.55	814.02

W010	0.103	0.253	0.212	0.687	2.689	10.83	1.11	9.72	877.16
W034	-0.028	0.259	0.207	0.653	2.686	11.09	1.67	9.42	766.24
P36	0.086	0.29	0.224	0.241	2.68	11.98	5.76	6.22	175.79
W221	0.013	0.268	0.154	0.408	2.678	12.09	4.05	8.04	405.91
W118	0.071	0.288	0.175	0.35	2.668	11.48	4.45	7.02	254.06
P15	0.047	0.316	0.24	0.236	2.665	13.5	5.81	7.69	344.58
P20	0.063	0.284	0.147	0.378	2.663	11.3	4.07	7.23	279.68
P29	-0.11	0.268	0.15	0.87	2.657	11.45	-1.57	13.02	4013.46
W220	-0.002	0.305	0.163	0.382	2.649	9.74	3.97	5.77	142.61
W150	-0.02	0.359	0.41	1.057	2.649	12.9	-4.45	17.35	29453.55
P28	0.056	0.301	0.159	0.456	2.648	11.93	2.89	9.04	642.78

Tabla A.5a. Estrellas miembros del cúmulo A.

Id	MV	DM	dst	[Fe/H]	$\log(L/L_{\odot})$	Teff	log g
W181	0.46	9.44	773		2.02	11900	4.3
W187	-0.08	9.17	681		2.44	12100	4.2
W152	-0.15	9.13	670		2.47	12300	4.2
W206	-0.3	8.91	607		2.55	12500	4.2
W074	-1.21	9.47	783		3.07	14800	4.2
W007	-1.38	8.99	629		3.17	14600	4.3
W103	2.52	7.79	361.89		0.85	8400	4.3
W138	1.62	8.72	553.85		1.33	8400	4
W222	0.21	9.69	867.05		2.18	8300	3.5
W002	0.86	8.62	530.58		1.77	8300	3.8
W128	3.65	7.12	264.89		0.42	8200	4.6
W215	2.96	6.7	218.91		0.7	8100	4.2
W043	0.62	9.87	940.07		1.94	8000	3.6
P17	4	8	398.07		0.29	7700	4.6
W158	1.82	8.18	432.11		0.19	7600	3.9
W104	1.5	9.95	975.46		1.4	7500	3.7
W223	2.48	8.44	488.2		0.87	7300	3.8
W094	4.5	5.8	144.8		0.1	7100	4.5

Tabla A. 5b. Estrellas miembros del cúmulo B.

Id	MV	DM	dst	[Fe/H]	$\log(L/L_{\odot})$	Teff	log g
W228	3.15	7.86	373.95	0.099	0.64	7100	4.1
W020	1.7	8.55	512.06	0.867	1.3	6900	3.5
XVIII19	1.61	9.6	831.89	-0.279	1.34	6900	3.6
W209	1.98	9.55	814.02	0.725	1.1	6800	3.5
W010	1.11	9.72	877.16	0.68	1.59	6800	3.3
W034	1.67	9.42	766.24	0.607	1.31	6700	3.4
W221	4.05	8.04	405.91	-0.093	0.28	6700	4.3
W118	4.45	7.02	254.06	0.168	0.1	6500	4.4
P20	4.07	7.23	279.68	-0.202	0.27	6500	4.3
W220	3.97	5.77	142.61	-0.057	0.31	6400	4
P28	2.89	9.04	642.78	-0.113	0.74	6400	3.8
W108	3.86	7.92	383.92	0.085	0.34	6300	4

W180	5.12	7.74	352.87	-0.15	-0.08	6300	4.5
W028	3.71	8.68	545.52	-0.723	0.4	6500	4.1
W070	3.34	7.93	384.95	0.647	0.57	6000	3.4
W196	5.26	6.95	245.78	-0.233	-0.13	6000	4.5
W029	0.57	9.82	919.07	-0.349	1.95	6100	2.7
W116	1.29	10.58	1309	0.219	1.5	5900	2.7
W224	4.5	6.88	237.42	0.034	0.1	5800	4
W006	1.55	7.01	252.82	-0.62	1.37	6100	3
W177	2.95	6.22	175.68	-0.283	0.72	5900	3.4
P26	2.89	8.57	517.13	-0.439	0.74	6000	3.5
P21	3.21	8.07	410.79	-0.371	0.63	5800	3.5

En lo que sigue se cumple: $HJD = \text{time} + 244xxx$

Tabla A.6. Fotometría absoluta de W2.

time	V	b-y	m1	c1	beta
7.78615	10.019	0.154	0.163	0.907	2.749
7.79204	9.704	0.148	0.18	0.914	2.762
7.79892	9.705	0.142	0.179	0.898	2.768
7.8072	9.708	0.151	0.17	0.896	2.747
7.81428	9.709	0.149	0.169	0.897	2.763
7.82187	9.705	0.151	0.17	0.892	2.757
7.82759	9.701	0.15	0.174	0.885	2.751
7.83476	9.705	0.143	0.179	0.895	2.761
7.84045	9.712	0.147	0.167	0.896	2.753
7.84344	9.695	0.154	0.158	0.902	2.77
7.84763	9.711	0.136	0.189	0.886	2.756
7.85196	9.697	0.148	0.175	0.893	2.778
7.85768	9.702	0.145	0.18	0.891	2.764
7.86162	9.722	0.138	0.191	0.891	2.751
7.86793	9.703	0.155	0.163	0.89	2.759
7.87579	9.709	0.142	0.186	0.883	2.776
7.89371	9.714	0.129	0.199	0.885	2.763
7.89954	9.737	0.131	0.198	0.882	2.772

Tabla A.5. Fotometría absoluta de W20.

time	V	b-y	m1	c1	beta
7.78254	10.399	0.27	0.191	0.706	2.715
7.8463	10.389	0.285	0.195	0.708	2.705
7.8651	10.316	0.26	0.198	0.662	2.703
7.87943	10.325	0.244	0.219	0.67	2.702
7.79613	10.295	0.262	0.201	0.672	2.7
7.82501	10.295	0.273	0.192	0.66	2.7
7.78925	10.624	0.26	0.195	0.687	2.698
7.83214	10.293	0.271	0.193	0.669	2.694
7.81918	10.304	0.271	0.18	0.674	2.693
7.87298	10.32	0.245	0.232	0.651	2.693

7.89184	10.363	0.229	0.23	0.674	2.689
7.83763	10.302	0.261	0.216	0.644	2.688
7.85896	10.294	0.264	0.207	0.658	2.688
7.81081	10.301	0.267	0.197	0.668	2.685
7.89621	10.332	0.236	0.225	0.655	2.683
7.80425	10.295	0.258	0.208	0.666	2.68
7.84923	10.328	0.251	0.206	0.673	2.678

Tabla A.8. Colores desenrojados y parámetros calculados para W2.

time	E(b-y)	(b-y)0	c10	beta	m10	V0	MV	DM	DST
7.85196	-0.004	0.152	0.894	2.778	0.174	9.72	1.41	8.3	457.61
7.87579	-0.013	0.155	0.886	2.776	0.182	9.76	1.47	8.29	455.3
7.89954	-0.027	0.158	0.887	2.772	0.19	9.85	1.42	8.43	485.73
7.84344	-0.004	0.158	0.903	2.77	0.157	9.71	1.21	8.5	501.03
7.79892	-0.018	0.16	0.902	2.768	0.174	9.78	1.22	8.56	516.07
7.85768	-0.019	0.164	0.895	2.764	0.174	9.78	1.22	8.56	515.56
7.89371	-0.036	0.165	0.892	2.763	0.188	9.87	1.26	8.61	527.04
7.81428	-0.015	0.164	0.9	2.763	0.165	9.77	1.15	8.62	529.92
7.79204	-0.015	0.163	0.917	2.762	0.175	9.77	0.98	8.78	571.35
7.83476	-0.023	0.166	0.9	2.761	0.172	9.8	1.14	8.66	540.16
7.86793	-0.013	0.168	0.893	2.759	0.159	9.76	1.16	8.6	525.3
7.82187	-0.018	0.169	0.896	2.757	0.165	9.78	1.11	8.67	542.82
7.84763	-0.035	0.171	0.893	2.756	0.179	9.86	1.15	8.71	552.02
7.84045	-0.025	0.172	0.901	2.753	0.159	9.82	1.02	8.8	575.84
7.82759	-0.025	0.175	0.89	2.751	0.167	9.81	1.09	8.72	554.17
7.86162	-0.036	0.174	0.898	2.751	0.18	9.88	1.03	8.84	586.74
7.78615	-0.02	0.174	0.911	2.749	0.157	10.11	0.86	9.24	705.48
7.8072	-0.026	0.177	0.901	2.747	0.162	9.82	0.93	8.88	598.4
prom.	-0.0206								541.14

Tabla A.9. Colores desenrojados y parámetros calculados para W20.

time	E(b-y)	(b-y)0	c10	beta	m10	V0	MV	DM	DST	F/H
7.78254	0.049	0.221	0.696	2.715	0.206	10.19	1.95	8.23	443.31	0.573
7.8463	0.052	0.233	0.698	2.705	0.211	10.16	1.66	8.5	502.16	0.664
7.8651	0.023	0.237	0.657	2.703	0.205	10.22	2.05	8.16	428.83	0.585
7.87943	0.004	0.24	0.669	2.702	0.22	10.31	1.95	8.36	470.01	0.803
7.79613	0.022	0.24	0.668	2.7	0.208	10.2	1.87	8.33	463.8	0.624
7.82501	0.033	0.24	0.653	2.7	0.202	10.15	1.99	8.16	429.1	0.545
7.78925	0.019	0.241	0.683	2.698	0.201	10.54	1.65	8.89	599.65	0.529
7.83214	0.025	0.246	0.664	2.694	0.2	10.19	1.7	8.49	499.07	0.523
7.81918	0.026	0.245	0.669	2.693	0.188	10.19	1.61	8.58	520.53	0.349
7.87298	-0.009	0.254	0.653	2.693	0.229	10.36	1.85	8.51	503.97	0.923

7.89184	-0.028	0.257	0.68	2.689	0.222	10.48	1.47	9.01	634.45	0.813
7.83763	0.003	0.258	0.643	2.688	0.217	10.29	1.76	8.53	509.08	0.745
7.85896	0.008	0.256	0.656	2.688	0.209	10.26	1.61	8.65	537.42	0.644
7.81081	0.01	0.257	0.666	2.685	0.2	10.26	1.41	8.85	589.03	0.515
7.89621	-0.028	0.264	0.661	2.683	0.216	10.45	1.49	8.97	621.81	0.736
7.80425	-0.007	0.265	0.667	2.68	0.206	10.33	1.27	9.06	647.98	0.592
7.84923	-0.016	0.267	0.676	2.678	0.201	10.39	1.14	9.26	709.64	0.528
prom.	0.0109								535.87	0.550

Tabla A.10. Fotometría diferencial de W2 en el filtro y durante diciembre.

Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm
6.787	-.032	6.858	.009	6.938	-.009	7.814	.013	7.862	.007
6.796	-.021	6.865	.005	6.963	-.021	7.822	.009	7.868	-.017
6.803	.001	6.880	.015	6.972	-.005	7.828	.005	7.876	-.020
6.809	.010	6.889	.020	6.978	.002	7.835	.010	7.894	-.024
6.817	.019	6.896	.018	6.985	-.017	7.840	.015	7.900	-.009
6.830	.024	6.910	-.019	6.995	-.011	7.843	-.003		
6.836	.010	6.919	-.009	7.792	.003	7.848	.008		
6.844	.016	6.924	-.009	7.799	.005	7.852	-.008		
6.849	.040	6.930	-.011	7.807	.011	7.858	-.008		

Tabla A.11. Fotometría diferencial de W2 en el filtro V durante enero.

Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm
6.686	-.009	6.766	.016	8.754	.010	9.731	.011	9.833	.017
6.691	-.003	6.768	.011	8.756	.008	9.737	.007	9.836	.014
6.693	-.010	6.773	.019	8.762	-.002	9.740	.006	9.841	.031
6.697	-.022	6.775	.017	8.765	-.005	9.745	-.002	9.843	.026
6.700	-.011	6.780	.019	8.770	-.010	9.747	-.001	9.849	.026
6.704	-.015	6.783	.013	8.774	-.018	9.752	.003	9.852	.023
6.706	-.010	6.787	.018	8.768	-.024	9.755	-.002	9.857	.022
6.710	.002	6.797	.023	8.781	-.019	9.760	-.008	9.861	.013
6.713	-.016	8.694	.014	8.786	-.018	9.763	-.014	9.866	.010
6.718	-.010	8.699	.009	8.789	-.019	9.768	-.017	9.869	.001
6.720	-.008	8.702	.012	8.795	-.011	9.770	-.018	9.874	.002
6.725	-.017	8.707	.016	8.798	-.017	9.775	-.023	9.877	-.004
6.727	-.008	8.710	.016	8.804	-.017	9.778	-.018	9.883	-.009
6.731	-.020	8.715	.014	8.807	-.021	9.783	-.021	9.886	-.010
6.734	-.007	8.717	.024	8.811	-.010	9.786	-.020	9.892	-.019
6.738	.001	8.722	.016	8.813	-.004	9.791	-.015	9.895	-.008
6.740	-.003	8.725	.011	8.820	.004	9.795	-.014	9.900	-.019
6.745	-.002	8.730	.009	9.709	.011	9.800	-.016	9.903	-.024
6.747	-.007	8.733	.008	9.714	.013	9.803	-.013	9.908	-.017
6.752	-.003	8.738	.009	9.716	.014	9.810	-.012		
6.754	.009	8.740	.008	9.721	.010	9.817	-.002		
6.759	.018	8.746	.008	9.723	.018	9.824	.015		
6.761	.012	8.748	.011	9.729	.009	9.827	.016		

Tabla A.12. Fotometría diferencial de W20 en el filtro y durante diciembre.

Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm
6.793	-.005	6.854	.003	6.922	.022	7.796	-.002	7.865	.003
6.800	-.017	6.862	-.001	6.927	.012	7.804	.000	7.873	-.001

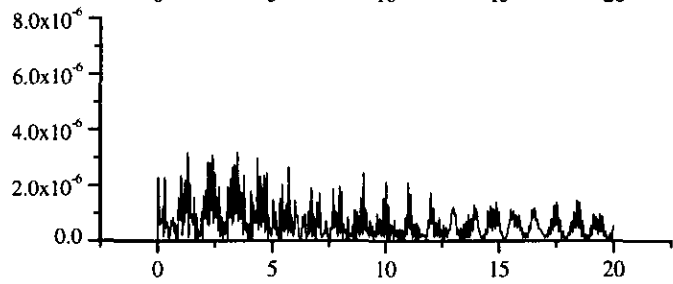
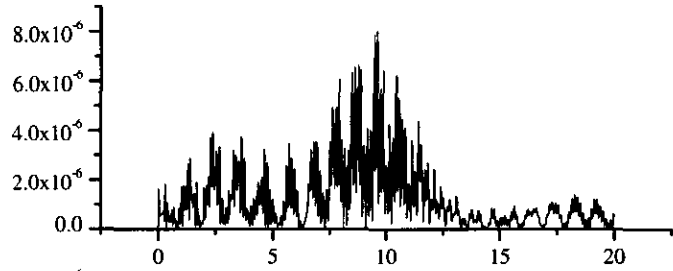
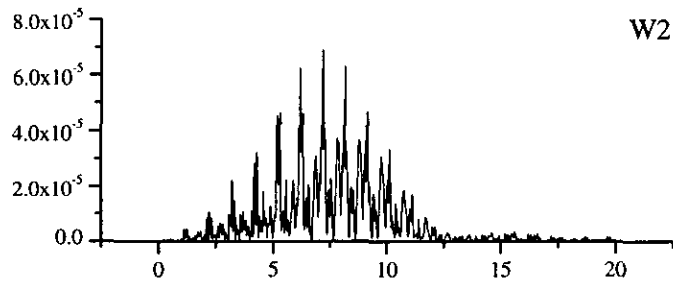
6.807	-.016	6.870	.011	6.935	.009	7.811	.008	7.879	-.004
6.814	-.014	6.876	.030	6.946	-.001	7.819	.012	7.896	-.008
6.827	-.004	6.892	.045	6.952	-.008	7.825	.002		
6.833	-.021	6.900	.027	6.960	-.028	7.832	.002		
6.841	-.011	6.905	.022	6.966	-.033	7.838	.001		
6.847	.003	6.915	.022	6.975	-.028	7.859	-.013		

Tabla A.13. Fotometría diferencial de W20 en el filtro V durante enero.

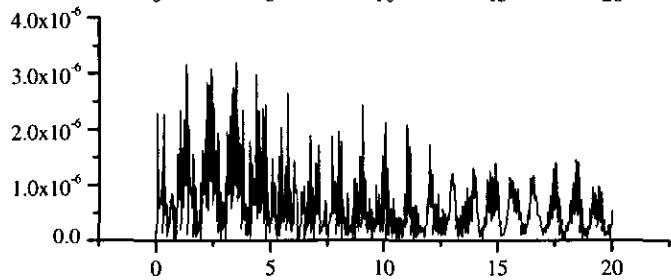
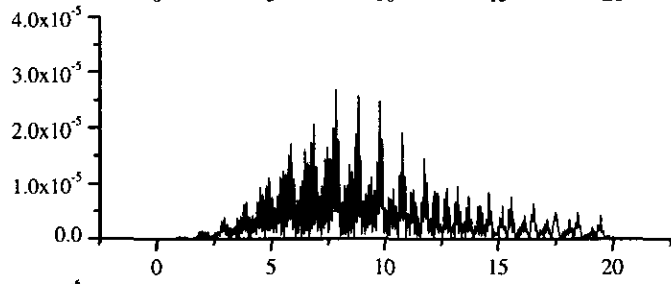
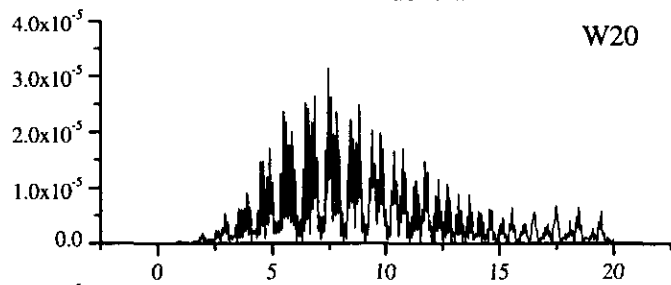
Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm	Time	Δm
6.688	.016	6.765	.002	8.752	-.007	9.733	.006	9.822	-.011
6.690	-.004	6.770	.003	8.758	-.013	9.736	.017	9.828	-.015
6.694	.010	6.772	.001	8.761	-.010	9.741	.009	9.831	-.009
6.697	.010	6.777	-.003	8.765	-.021	9.743	.001	9.837	-.003
6.701	.017	6.779	-.015	8.768	-.023	9.749	.006	9.840	-.001
6.703	.006	6.784	-.003	8.774	-.032	9.751	.013	9.845	-.017
6.706	.007	6.786	-.017	8.777	-.029	9.756	.001	9.847	.001
6.709	.000	6.788	.015	8.782	-.024	9.758	.011	9.853	-.001
6.714	-.001	8.695	.015	8.785	-.022	9.763	.006	9.856	-.003
6.717	-.010	8.698	.017	8.790	-.017	9.766	.009	9.862	-.004
6.722	-.007	8.703	.017	8.794	-.017	9.772	-.001	9.864	-.003
6.723	-.011	8.706	.017	8.799	-.011	9.774	.002	9.870	.002
6.728	-.014	8.711	.017	8.802	-.002	9.779	.003	9.873	-.003
6.730	-.007	8.714	.014	8.809	.000	9.782	-.001	9.879	-.009
6.734	-.010	8.719	.007	8.814	.006	9.787	.003	9.881	-.003
6.736	-.007	8.821	.010	8.817	.015	9.790	-.001	9.887	.002
6.741	-.017	8.727	.011	8.822	.026	9.796	.002	9.890	.004
6.743	-.006	8.729	.011	8.823	.035	9.799	.004	9.896	.003
6.748	-.004	8.734	.003	9.710	-.011	9.805	-.005	9.899	.007
6.751	-.011	8.737	.003	9.713	-.010	9.808	-.012	9.904	-.002
6.755	-.005	8.742	.000	9.717	.001	9.811	-.012	9.907	.001
6.758	.003	8.745	.006	9.720	.009	9.815	-.010		
6.763	.007	8.749	-.011	9.724	-.001	9.818	-.012		

Tabla A.14. Valores de Q radiales y razones de periodos para estrellas δ Scuti típicas.

Modo de pulsación	Periodo (días)	Q (días)	Π_i/Π_{i-1}
Fundamental, F.	0.07861	0.0329	
1er armónico, 1H.	0.05985	0.0251	0.761
2º armónico, 2H	0.04846	0.0203	0.810
3er armónico, 3H	0.04095	0.0172	0.845



frecuencia



frecuencia

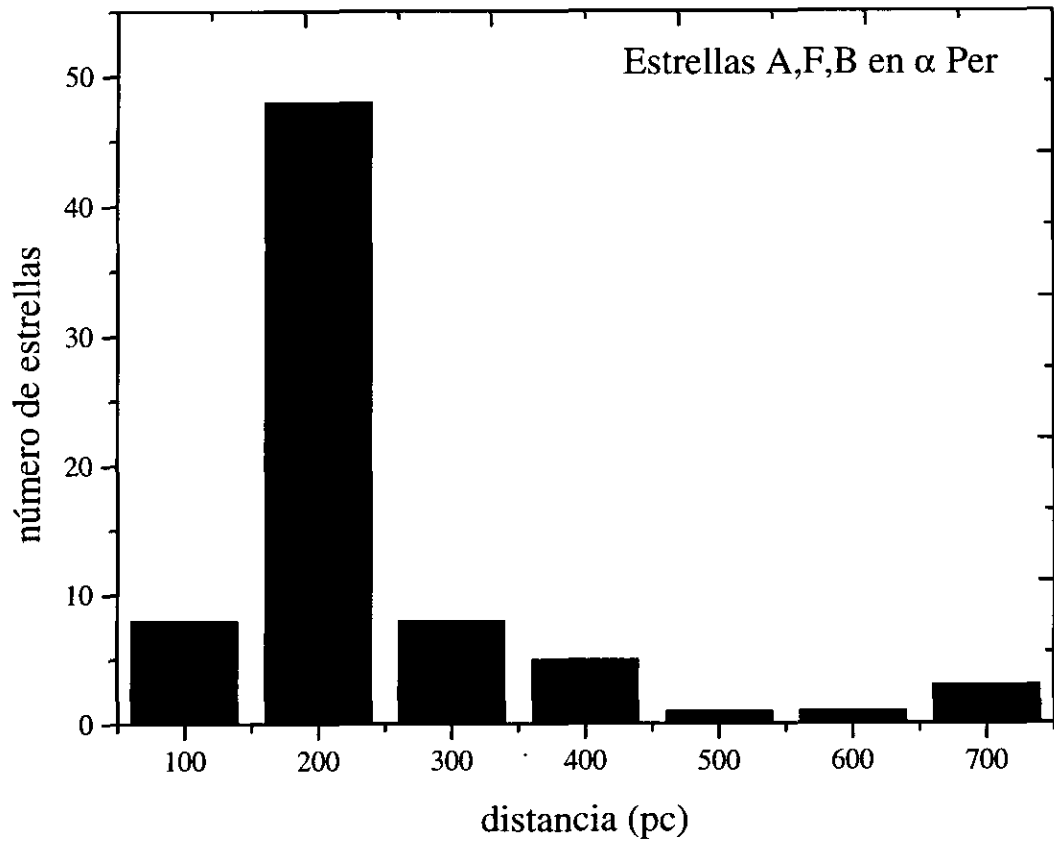


Figura A.2.

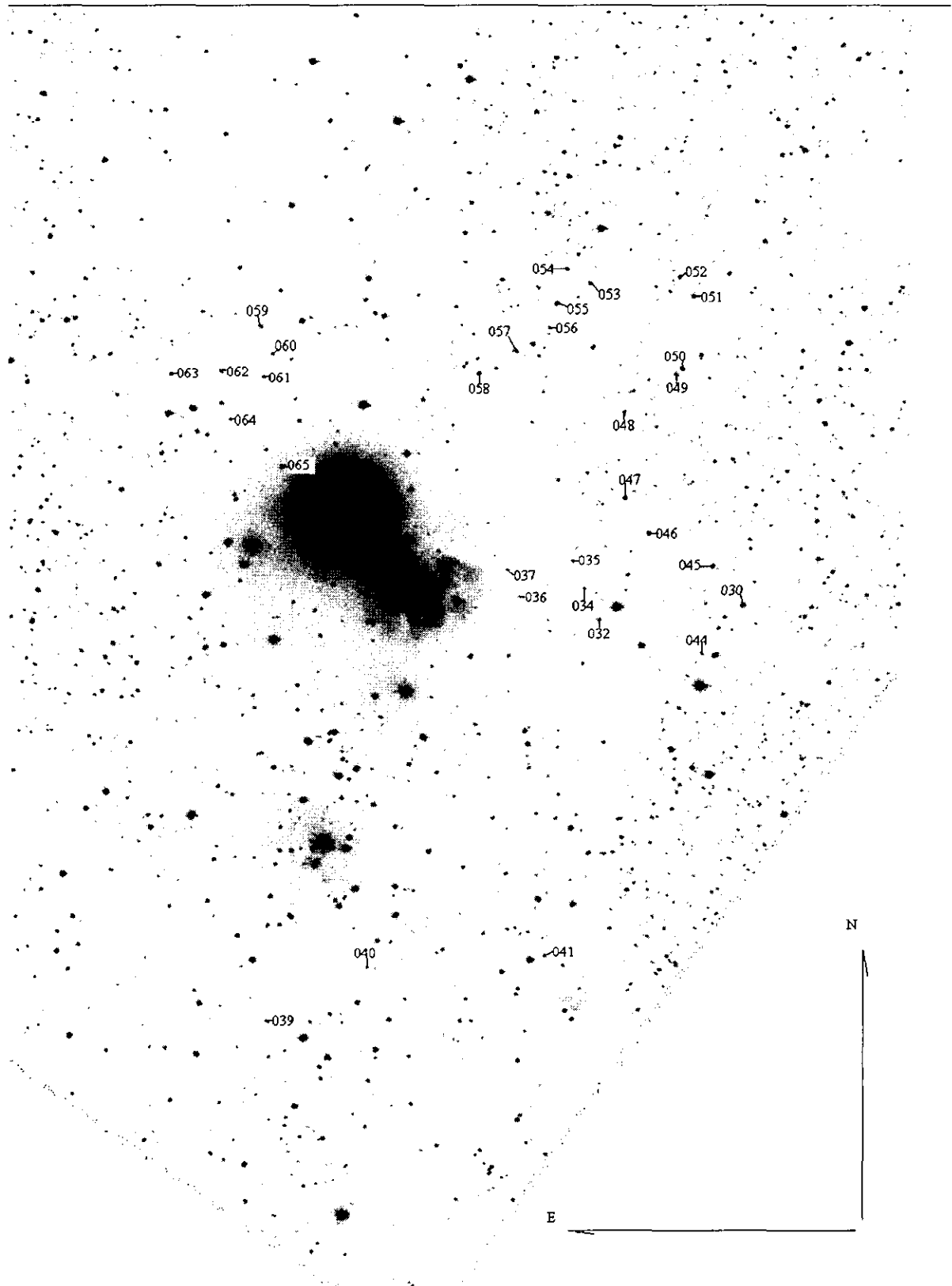


Figura A.3.

Programa para hallar la transformada de Fourier de datos fotométricos de estrellas variables, elaborado por Marco Antonio Hobbart.

```

100 '
110 '
120 '      /-----\
130 '      /          ASTROFASES-BASIC  (PROGRAMA PRINCIPAL)          \
140 '      ||                                          ||
150 '      \          (HASTA CINCO FRECUENCIAS)                      /
160 '
170 KEY OFF
180 CLS
190 DEFDBL A-H,O-Z
200 OPTION BASE 1
205 CLEAR
210 DIM T(500),Y(500),IOP(10),V(5),WW(5),FREC(5)
220 DIM FSE(100),ICERO(10),PRU1(100),PRU2(100),PRU3(100)
230 DIM PRU4(100),PRU5(100),TESTV(5),XY(11),SP(11,11),COE(11),SPM1(11,11)
240 DIM RL(11,11),U(11,11),Y1(11),IOPB(10)
340 '
350 '
360 '      <<<<<< READING BASIC DATA >>>>>>
370 '
380 INPUT "NAME OF THE DATA FILE";F$
390 OPEN "I",1,F$
400 FOR K=1 TO 500
410 IF EOF(1) THEN 460
420 INPUT #1,T(K),Y(K)
430 NEXT
440 PRINT "TOO MANY POINTS. I ONLY CONSIDER THE FIRST 500"
450 K=501
460 NO=K-1
466 DIM Z(NO),M(NO),E(NO),X(NO,11)
470 '
480 '      <<<<<< ESTABLISHING THE BASIC OPTIONS >>>>>>>>>
490 '
500 IOP(1)=1 : IOP(5)=1 : IP=4 : NRE=1 : NTI=0
510 '
520 '      <<<<<< COMMAND PROMPT >>>>>>>>>
530 '
540 INPUT "WHAT SHOULD I DO";COMA$
550 IF COMA$="NUTTIN'" THEN END
560 IF COMA$<>"OPCI" THEN 630
570 '
580 '      <<<<<< READING NEW OPTIONS >>>>>
590 '
600 INPUT
" IOP2, IOP3, IOP4, IOP6, IOP7, IP, NRE, NTI "; IOP(2), IOP(3), IOP(4), IOP(6)
610 INPUT IOP(7), IP, NRE, NTI
620 GOTO 540
630 IF COMA$<>"FREQ" THEN 870
640 '
650 '      <<<<<< FREQUENCIES PROMPT >>>>>
660 '
670 INPUT "HOW MANY FREQUENCIES";IFRE
680 '
690 '      <<<<<< TESTING THE FREQUENCY NUMBER >>>>>

```

```

700 '
710 IF IFRE>5 THEN PRINT "I JUST CAN HANDLE UP TO FIVE FREQS."
720 IF IFRE>5 THEN 540
730 PRINT "WILL YA GI'ME THE FREQUENCIES NU?"
740 FOR K=1 TO IFRE : INPUT V(K) : NEXT
750 FOR K=1 TO IFRE : WW(K)=2*3.141592654#*V(K) : NEXT
760 '
770 '          <<<<< SINES AND COSINES CALCULATIONS >>>>>
780 '
790 FOR I=1 TO NO
800 FOR J=1 TO IFRE
810 X(I,2*J-1)=SIN(WW(J)*T(I))
820 X(I,2*J)=COS(WW(J)*T(I))
830 NEXT
840 X(I,IFRE*2+1)=1
850 NEXT
860 GOTO 540
870 IF COMA$<>"FIT" THEN 1050
880 NVARI=0
890 '
900 '          <<<<< PRINTING BASIC DATA FOR FITTING >>>>>
910 '
920 PRINT F$;"          FITTING WITH";NO;"DATA AND THE
FOLLOWING";IFRE;"FREQUENCIES OMEGA:"
930 IF IFRE<1 THEN PRINT "NO FREQUENCIES, NO FITTING!"
940 IF IFRE<1 THEN 540
950 FOR I=1 TO IFRE : PRINT WW(I) : NEXT
960 NVARI=IFRE*2
970 IF NTI=0 THEN NVARI=NVARI+1
980 '
990 '          <<<<< CALL MINCUA >>>>>
1000 '
1010 NV=NVARI : NDO=NO : NDV=11
1020 GOSUB 5000          '5000 <<<<<----->>>>> MINCUA SUBROUTINE
1030 IF IER=1 THEN PRINT "I AM SORRY BUT I COULDN'T FIT"
1040 GOTO 540
1050 IF COMA$<>"PLOT" THEN 1310
1060 '
1070 '          <<<<< PLOTTING >>>>>
1080 '
1090 INPUT "WHAT SHOULD I PLOT: DATA, PREDICTIONS OR ERRORS";GRA$
1100 IF GRA$="DATA" THEN 1270
1110 IF GRA$="ERROR" THEN 1130
1120 IF GRA$<>"PRED" THEN PRINT "WHAT THE HELL DO YOU WANT THEN?"
1125 IF GRA$<>"PRED" THEN 540
1130 FOR I=1 TO NO
1140 E(I)=Y(I)
1160 FOR J=1 TO NVARI
1165 IF GRA$="PRED" THEN E(I)=X(I,J)*COE(J)
1166 IF GRA$="PRED" THEN 1190
1170 E(I)=E(I)-X(I,J)*COE(J)
1180 NEXT
1190 NEXT
1200 'NAME$=NOME$
1210 ' IF GRA$="PRED" THEN NAME$=NOMPR$
1220 '
1230 '          <<<<< CALL PLOT >>>>>

```

```

1240 '
1250 FOR K=1 TO NO:M(K)=E(K):Z(K)=T(K):NEXT:KH=NO
1255 GOSUB 30000:GOSUB 20000:GOSUB 35000
1260 GOTO 540
1270 ' <<<<< CALL PLOT >>>>>
1280 '
1290 FOR K=1 TO NO:Z(K)=T(K):M(K)=Y(K):NEXT :KH=NO
1295 GOSUB 30000:GOSUB 20000:GOSUB 35000
1300 GOTO 540
1310 IF COMA$<>"SWEEP" THEN PRINT "WHAT THE HELL DO YOU WANT THEN?"
1320 IF COMA$<>"SWEEP" THEN 540
1960 INPUT "OVER WHAT FREQ. DO YOU WANT TO SWEEP (1 A 5)";IFRBA
1970 IF IFRBA<1 OR IFRBA>IFRE THEN 1960
1980 INPUT "WHAT ARE THE LIMITS AND HOW MANY STEPS";FREINI,FREFIN,NPASOS
1990 FREINI=2*3.141592654#*FREINI
2000 FREFIN=2*3.141592654#*FREFIN
2010 '
2020 ' <<<<< FREQUENCY CYCLE >>>>>
2030 '
2040 ICF=0
2050 FOR FREBAR=FREINI TO FREFIN STEP (FREFIN-FREINI)/NPASOS
2060 FREC(IFRBA)=FREBAR
2070 J=IFRBA*2-1
2080 FOR I=1 TO NO
2090 X(I,J)=SIN(FREBAR*T(I))
2100 X(I,J+1)=COS(FREBAR*T(I))
2110 NEXT
2120 ICF=ICF+1
2125 LOCATE 1,70:PRINT ICF
2130 FSE(ICF)=FREBAR/(2*3.141592654#)
2140 '
2150 ' <<<<< CALL MINCUA >>>>>
2160 '
2170 FOR K=1 TO 10 : IOPB(K)=IOP(K):IOP(K)=ICERO(K) : NEXT : NDO=NO :
NDV=11 : NV=NVARI
2180 GOSUB 5000 '5000 <<<----->>> LEAST SQUARES SUBROUTINE
2185 FOR K=1 TO 10 :IOP(K)=IOPB(K):NEXT
2190 IF IER<>0 THEN PRINT IER
2200 IF IER<>0 THEN 540
2210 PRU1(ICF)=TESTV(1)
2220 PRU2(ICF)=TESTV(2)
2230 PRU3(ICF)=TESTV(3)
2240 PRU4(ICF)=TESTV(4)
2250 PRU5(ICF)=TESTV(5)
2260 NEXT
2265 LOCATE 25,1
2270 INPUT "WHAT DO YOU WANT ME TO PLOT: R2, CHI2, F, DW, VARER";COMA$
2280 IF COMA$="NUTTIN'" THEN 540
2290 IF COMA$="R2" THEN 2380
2300 IF COMA$="CHI2" THEN 2410
2310 IF COMA$="F" THEN 2440
2320 IF COMA$="DW" THEN 2470
2330 IF COMA$="VARE" THEN 2500
2340 GOTO 2270
2350 PRINT "WHAT THE HELL DO YOU WANT THEN?"
2360 GOTO 540
2370 END

```

```

2380 FOR K=1 TO ICF:Z(K)=FSE(K):M(K)=PRU1(K):NEXT
2385 KH=ICF
2390 GOSUB 30000:GOSUB 20000:GOSUB 25000 ' >>>-----> PLOTTER SUBROUTINE
2400 GOTO 2300
2410 FOR K=1 TO ICF:Z(K)=FSE(K):M(K)=PRU2(K):NEXT
2420 KH=ICF : GOSUB 30000:GOSUB 20000:GOSUB 25000
2430 GOTO 2310
2440 FOR K=1 TO ICF:Z(K)=FSE(K):M(K)=PRU3(K):NEXT
2450 KH=ICF:GOSUB 30000:GOSUB 20000:GOSUB 25000
2460 GOTO 2320
2470 FOR K=1 TO ICF:Z(K)=FSE(K):M(K)=PRU4(K):NEXT
2480 KH=ICF:GOSUB 30000:GOSUB 20000: GOSUB 25000
2490 GOTO 2330
2500 FOR K=1 TO ICF:Z(K)=FSE(K):M(K)=PRU5(K):NEXT
2510 KH=ICF: GOSUB 30000:GOSUB 20000: GOSUB 25000
2520 GOTO 2270
5000 '
5010 '
5020 ' <<<<<<<<< MINCUA SUBROUTINE >>>>>>>>>>
5030 '
5040 '           X=MATRIZ DE OBS DE VAR INDEP
5050 '           Y=VECTOR DE OBS DE VAR DEP
5060 '           SP=MATRIZ DE SUMA DE PRODUCTOS
5070 '           XY=VECTOR DE LADOS DERECHOS EN REG
5080 '           SPM1=INVERSA DE SP
5090 '           COE=VECTOR DE COEFICIENTES
5100 '           TESTV=VECTOR DE PRUEBAS ESTADISTICAS
5110 '                   1=VARIANZA DEL ERROR
5120 '                   2=CHI SQUARE
5130 '                   3=DURBIN WATSON
5140 '                   4=F
5150 '                   5=R**2
5160 '           NDO=DIMENSION DE OBSERVACIONES
5170 '           NDV=DIMENSION EN VARIABLES
5180 '           NO=NUMERO DE OBSERVACIONES
5190 '           NV=NUMERO DE VARIABLES
5200 '           IOP=VECTOR DE OPCIONES DE IMPRESION
5210 '                   1=IMPRIME COE
5220 '                   2=IMPRIME SPM1
5230 '                   3=IMPRIME SP & XY
5240 '                   4=IMPRIME DATOS
5250 '                   5=IMPRIME TESTV
5260 '                   6=IMPRIME RESIDUALES
5270 '                   7=IMPRIME ANALISIS DE VARIANZA
5280 '                   8 A 10 NO SE USAN
5290 '
5300 '           IER=VARIABLE DE ERROR
5310 '                   1=NO MENOR QUE NV
5320 '                   2=NV MENOR QUE 1
5330 '                   3=NDO MENOR QUE NO
5340 '                   4=NDV MENOR QUE NV
5350 '                   5=SP SINGULAR
5360 '                   6=TESTV 3 Y 4 OMITIDAS POR SER
5370 '                           CERO LA VARIANZA DEL ERROR
5380 '                   7=TESTV 4 OMITIDA POR SER NV=1
5390 '
5400 ' SI SE DESEA TERMINO INDEPENDIENTE EN LA REGRESION, INCLUIR

```

```
5410 ' UNA VARIABLE ADICIONNAL CONTENIENDO SOLAMENTE 1'S COMO DATOS
5420 '
5430 '
5440 '           ERRORES 1 A 4
5450 IF NO>NV THEN 5480
5460 IER=1
5470 RETURN
5480 IF NV>0 THEN 5510
5490 IER=2
5500 RETURN
5510 IF NDO>=NO THEN 5540
5520 IER=3
5530 RETURN
5540 IF NDV>=NV THEN 5580
5550 IER=4
5560 RETURN
5570 '           <<< ARMANDO SP & XY >>>
5580 FOR IM=1 TO NV
5590 XY(IM)=0
5600 FOR JM=1 TO NV
5610 SP(IM,JM)=0
5620 NEXT
5630 NEXT
5640 FOR KM=1 TO NO
5650 FOR IM=1 TO NV
5660 FOR JM=1 TO NV
5670 SP(IM,JM)=SP(IM,JM)+X(KM,IM)*X(KM,JM)
5680 NEXT
5690 XY(IM)=XY(IM)+Y(KM)*X(KM,IM)
5700 NEXT
5710 NEXT
5720 N=NV
5780 '           <<< SOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS >>>
5790 GOSUB 40000 ' >>>-----> SIMULT. EQS. SOLUTION SUBROUTINE
5800 IF IER=0 THEN 5850
5810 '           <<< MATRIZ SINGULAR >>>
5820 IER=5
5830 RETURN
5840 '           <<< IMPRESION DE COEFICIENTES >>>
5850 IF IOP(1)=0 THEN 5910
5860 PRINT "COEFICIENTES"
5870 FOR IM=1 TO NV
5880 PRINT "COE(";IM;")=";COE(IM)
5890 NEXT
5900 '           <<< IMPRESION DE SPM1 >>>
5910 IF IOP(2)=0 THEN 5990
5920 PRINT "INVERSA DE LA MATRIZ DE PRODUCTOS"
5930 FOR IM=1 TO NV
5940 FOR JM=1 TO NV
5950 PRINT "SPM1(";IM;",";JM;")=";SPM1(IM,JM)
5960 NEXT
5970 NEXT
5980 '           <<< IMPRESION DE SP & XY >>>
5990 IF IOP(3)=0 THEN 6080
6000 PRINT
6010 FOR IM=1 TO NV
6020 PRINT "XY(";IM;")=";XY(IM)
```

```

6030 FOR JM=1 TO NV
6040 PRINT "SP(";IM;",";JM;")=";SP(IM,JM)
6050 NEXT
6060 NEXT
6070 '          <<< IMPRESION DE DATOS >>>
6080 IF IOP(4)=0 THEN 6160
6090 FOR IM=1 TO NO
6100 PRINT "Y(";IM;")=";Y(IM)
6110 FOR JM=1 TO NV
6120 PRINT "X(";IM;",";JM;")=";X(IM,JM)
6130 NEXT
6140 NEXT
6150 '          <<< CALCULO DE RESIDUALES Y ESTADISTICAS >>>
6160 IF IOP(6)=0 THEN 6180
6170 PRINT "RESIDUALES          Y          YEST          DIF"
6180 FOR IM=1 TO 5
6190 TESTV(IM)=0
6200 NEXT
6210 SYY=0 : SY=0
6220 FOR IM=1 TO NO
6225 YEST=0
6230 FOR JM=1 TO NV
6240 YEST=YEST+COE(JM)*X(IM,JM)
6250 NEXT
6260 SYY=SYY+Y(IM)*Y(IM)
6270 SY=SY+Y(IM)
6280 YERR=Y(IM)-YEST
6290 YERR2=YERR*YERR
6300 TESTV(1)=TESTV(1)+YERR2
6310 TESTV(2)=TESTV(2)+YERR2/YEST
6320 IF IM>1 THEN TESTV(3)=TESTV(3)+(YERR-YERRA)^2
6330 YERRA=YERR
6340 IF IOP(6)=0 THEN 6360
6350 PRINT Y(IM),YEST,YERR
6360 NEXT
6370 SYY=SYY-SY*SY/NO
6380 SSR=SYY-TESTV(1)
6390 IGLE=NO-NV
6400 IGLR=NV-1
6410 IGLTOT=NO-1
6415 SSE=TESTV(1)
6420 SSRE=0
6430 IF NV<=1 THEN IER=7
6440 IF NV>1 THEN SSRE=SSR/IGLR
6450 IF TESTV(1)<>0 THEN TESTV(3)=TESTV(3)/TESTV(1)
6460 TESTV(1)=TESTV(1)/IGLE
6470 IF TESTV(1)<>0 THEN TESTV(4)=SSRE/TESTV(1)
6480 TESTV(5)=SSR/SYY
6490 IF TESTV(1)=0 THEN IER=6
6500 IF IOP(7)=0 THEN 6530
6510 PRINT "SSR  IGLR  SSRE  TESTV(4)  SSE  IGLE  TESTV(1)  SYY  IGLTOT"
6520 PRINT SSR,IGLR,SSRE,TESTV(4),SSE,IGLE,TESTV(1),SYY,IGLTOT
6530 IF IOP(5)=1 THEN 6550
6540 RETURN
6550 PRINT "VAR ERROR=          ";TESTV(1)
6560 PRINT "CHI CUADRADA=          ";TESTV(2)
6570 PRINT "DURBIN-WATSON=";TESTV(3)

```

```

6580 PRINT "E=                ";TESTV(4)
6590 PRINT "R**2=            ";TESTV(5)
6600 GOTO 6540
20000 '
20100 ' /
20200 ' /          PREPARATION OF SCREEN FOR GRAPHICS          /
20300 ' /
20400 '
20500 SCREEN 2
20600 CLS
20700 LINE (70,20)-(630,180),,B
20800 FOR L=1 TO 9
20900 LINE (70+56*L,177)-(70+56*L,180)
20910 LINE(70+56*L,20)-(70+56*L,23)
21000 NEXT
21100 FOR L=1 TO 9
21200 LINE (70,16*L+20)-(75,16*L+20)
21210 LINE(625,16*L+20)-(630,16*L+20)
21300 NEXT
21400 'LOCATE 2,1:PRINT USING "##.##^ ^ ^ ^";YMAX
21500 'LOCATE 23,1:PRINT USING "##.##^ ^ ^ ^";YMIN
21600 'LOCATE 25,5:PRINT USING "####.##";XMIN
21700 'LOCATE 25,70:PRINT USING "####.##";XMAX
21800 RETURN
25000 '
25100 ' /
25200 ' /          PLOTTER SUBROUTINE (LINES)          /
25300 ' /
25400 '
25500 FOR L=1 TO KH-1
25600 LX=( (Z(L)-XMIN)/DELTAX)*558+71
25700 LXX=( (Z(L+1)-XMIN)/DELTAX)*558+71
25800 LY=179- ( (M(L)-YMIN)/DELTAY)*158
25900 LYY=179- ( (M(L+1)-YMIN)/DELTAY)*158
26000 LINE(LXX,LYY)-(LX,LY)
26100 NEXT
26110 IF INKEY$<>"C" THEN 26110
26120 SCREEN 0
26130 PRINT "YMAX=";YMAX;" /YMIN=";YMIN;" /XMIN=";XMIN;" /XMAX=";XMAX
26200 RETURN
30000 '
30100 ' /
30200 ' /          SEARCHING OF MINIMA AND MAXIMA          /
30300 ' /
30400 '
30500 XMAX=1D-25
30600 FOR L=1 TO KH
30700 IF Z(L)<=XMAX THEN 31000
30800 XMAX=Z(L)
30900 IXMAX=L
31000 NEXT
31100 XMIN=1D+25
31200 FOR L=1 TO KH
31300 IF Z(L)>=XMIN THEN 31600
31400 XMIN=Z(L)
31500 IXMIN=L
31600 NEXT

```

```

31700 YMAX=1D-25
31800 FOR L=1 TO KH
31900 IF M(L)<=YMAX THEN 32200
32000 YMAX=M(L)
32100 IYMAX=L
32200 NEXT
32300 YMIN=1D+25
32400 FOR L=1 TO KH
32500 IF M(L)>=YMIN THEN 32800
32600 YMIN=M(L)
32700 IYMIN=L
32800 NEXT
32900 DELTAX=XMAX-XMIN
33000 DELTAY=YMAX-YMIN
33100 RETURN
35000 '
35010 ' /
35020 ' / PLOTTER SUBROUTINE (DOTS) /
35030 ' /
35040 '
35050 FOR L=1 TO KH
35060 LX=((Z(L)-XMIN)/DELTAX)*558+81
35070 LY=179-((M(L)-YMIN)/DELTAY)*158
35080 PSET(LX,LY)
35090 NEXT
35100 RETURN
40000 '
40010 ' /
40020 ' / SIMULTANEOUS EQUATIONS SOLVING SUBROUTINE /
40030 ' /
40040 '
40050 ' <<< EVALUATION OF THE TRIANGULAR MATRIXES [L] & [U] (A=LU) >>>
40060 SUMA1=0 : SUMA2=0
40070 FOR KS=1 TO N
40080 FOR JS=KS TO N
40090 IF KS<=1 THEN 40130
40100 FOR IS=1 TO (KS-1)
40110 SUMA1=SUMA1+RL(KS,IS)*U(IS,JS)
40120 NEXT
40130 U(KS,JS)=SP(KS,JS)-SUMA1 : SUMA1=0
40140 IF KS<=1 AND JS>(N-1) THEN 40210
40150 IF KS<=1 THEN 40200
40160 IF JS>(N-1) THEN 40210
40170 FOR IS=1 TO (KS-1)
40180 SUMA2=SUMA2+RL(JS+1,IS)*U(IS,KS)
40190 NEXT
40200 RL(JS+1,KS)=(SP(JS+1,KS)-SUMA2)/U(KS,KS) : SUMA2=0
40210 NEXT JS
40220 NEXT
40230 ' {{{ EVALUATION OF THE DETERMINANT [A] }}}
40240 DET=1
40250 FOR KS=1 TO N
40260 DET=DET*U(KS,KS)
40270 NEXT
40280 IF DET=0 THEN PRINT "DET(SP)=0 : THE INVERSE OF MATRIX [SP] DOES
NOT EXIST"
40290 IF DET=0 THEN RETURN

```



```

40295 IF DET=0 THEN IER=5 ELSE IER=0
40300 ' {{{ EVALUTATION OF THE KRONECKER DELTA OF Y=INV[A] }}}
40340 ' {{{ Solution of the equation Ax=b ----> LUX=b ----> LY=b & }}}
40350 ' {{{ Ux=y ----> we have to find y and then x }}}
40360 ' {{{ Solution of L y = b }}}
40370 SUMA=0
40380 FOR IS=1 TO N
40390 IF IS<=1 THEN 40430
40400 FOR KS=1 TO (IS-1)
40410 SUMA=SUMA+RL(IS,KS)*Y1(KS)
40420 NEXT
40430 Y1(IS)=XY(IS)-SUMA : SUMA=0
40440 NEXT
40450 ' {{{ Solution of U x = y }}}
40460 FOR IS=N TO 1 STEP -1
40470 IF IS>=N THEN 40510
40480 FOR KS=(IS+1) TO N
40490 SUMA=SUMA+U(IS,KS)*COE(KS)
40500 NEXT
40510 COE(IS)=(Y1(IS)-SUMA)/U(IS,IS) : SUMA=0
40520 NEXT
40530 RETURN

```

```

100 '
200 ' /
300 ' /          FOURIER PROGRAM VERSION DEEMING-JHP          /
400 ' /
500 '
600  OPTION BASE 1
700  DEFDBL A-H, O-Z
800  DIM T(501), F(501), FF(501), GG(501), FR(501), FI(501)
900  DIM D(501), G(501), M(501), W(501)
910  CLS
1000 INPUT "INITIAL FREQUENCY WI"; WI
1010 INPUT "FINAL FREQUENCY WF"; WF
1020 INPUT "NUMBER OF FREQUENCY POINTS"; NDOTS
1030 DF = (WF - WI) / CDBL(NDOTS)
1040 KH = WF / DF: KL = WI / DF
1100 PI = 3.141592653589793#
1210 CLS : FILES
1220 PRINT : PRINT
1300 INPUT "WHAT IS THE NAME OF THE DATA FILE"; DATFIL$: PRINT
1400 INPUT "WHAT ARE NIGHT1 AND NIGHT2"; NIGHT1, NIGHT2
1410 PRINT : INPUT "NAME OF THE POWER FILE"; POW$
1420 PRINT : INPUT "NAME OF THE WINDOW FILE"; WIN$
1430 OPEN "O", 8, POW$
1440 OPEN "O", 9, WIN$
1500 IND = 1
1600 OPEN "I", 1, DATFIL$
1610 LINE INPUT #1, AAA$: PRINT AAA$
1700 FOR I = 1 TO 501
1800 IF EOF(1) THEN 2400
1900 INPUT #1, T, F
1910 PRINT I, T, F
2100 T(IND) = T: F(IND) = F
2200 IND = IND + 1

```

ESTA TESIS NO DEBE
 SALIR DE LA BIBLIOTECA

```
2300 NEXT
2400 N = IND - 1
2410 CLS : COLOR 23, 0: LOCATE 12, 30: PRINT "FAVOR DE NO TOCAR"
2420 LOCATE 14, 30: PRINT "ESTOY CALCULANDO": COLOR 7, 0
2500 XM = 0'Elimination of the DC component forcing the mean to zero.
2600 FOR I = 1 TO N
2700 XM = XM + F(I)
2800 NEXT
2900 XM = XM / CDBL(N)
3000 FOR I = 1 TO N
3100 F(I) = F(I) - XM
3200 NEXT
3300 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
3310 LOCATE 1, 70: PRINT K; "/"; KH - KL
3320 TIEMPOS$ = TIMES$
3400 FR(K) = 0#: FI(K) = 0#: D(K) = 0#: G(K) = 0#
3500 A1 = 2# * PI * CDBL(K + KL - 1) * DF
3600 FOR I = 1 TO N
3700 A = A1 * T(I)
3800 C = COS(A)
3900 S = SIN(A)
4000 FR(K) = FR(K) + F(I) * C
4100 FI(K) = FI(K) + F(I) * S
4200 D(K) = D(K) + C
4300 G(K) = G(K) + S
4400 NEXT
4500 FF(K) = (FR(K) * FR(K) + FI(K) * FI(K)) / CDBL(N * N)
4600 GG(K) = (D(K) * D(K) + G(K) * G(K)) / CDBL(N * N)
4700 NEXT
4800 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
4900 W(K) = CDBL(K + KL - 1) * DF
5000 NEXT
5010 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
5020 PRINT #8, W(K); ", "; FF(K)
5030 PRINT #9, W(K); ", "; GG(K)
5040 NEXT
5100 PLAY "MSC4C4C4C4C4"
5200 CLS
5300 INPUT "POWER (P) OR WINDOW (W)"; PW$
5400 IF PW$ = "P" THEN 5900
5500 IF PW$ = "W" THEN 7100
5600 IF PW$ <> "P" AND PW$ <> "W" THEN 5200
5700 FOR K = 1 TO 501: M(K) = 0: NEXT
5900 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
6000 M(K) = FF(K)
6100 NEXT
6200 GOSUB 30000
6300 GOSUB 20000
6400 GOSUB 25000
6410 IF INKEY$ <> "C" THEN 6410
6500 PRINT W(IYMIN), W(IYMAX)
6600 LOCATE 10, 40: INPUT "ANOTHER GRAPH"; YN$
6700 IF YN$ = "Y" THEN 5100
6800 IF YN$ = "N" THEN SCREEN 0
6900 IF YN$ = "N" THEN END
7000 IF YN$ <> "Y" AND YN$ <> "N" THEN 6600
7100 FOR K = 1 TO 501: M(K) = 0: NEXT
```

```

7200 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
7300 M(K) = GG(K)
7400 NEXT
7500 GOTO 6200
20000 '
20100 ' /
20200 ' / PREPARATION OF SCREEN FOR GRAPHICS /
20300 ' /
20400 '
20500 SCREEN 2
20600 CLS
20700 LINE (80, 20)-(640, 180), , B
20800 FOR L = 1 TO 9
20900 LINE (80 + 56 * L, 180)-(80 + 56 * L, 177)
21000 LINE (80 + 56 * L, 20)-(80 + 56 * L, 23)
21100 NEXT
21200 FOR L = 1 TO 9
21300 LINE (80, 16 * L + 20)-(85, 16 * L + 20)
21400 LINE (635, 16 * L + 20)-(640, 16 * L + 20)
21500 NEXT
21600 LOCATE 2, 1: PRINT USING "##.##^"; YMAX
21700 LOCATE 23, 1: PRINT USING "##.##^"; YMIN
21800 LOCATE 25, 5: PRINT USING "###.##"; XMIN
21900 LOCATE 25, 70: PRINT USING "###.##"; XMAX
22000 RETURN
25000 '
25100 ' /
25200 ' / PLOTTER SUBROUTINE /
25300 ' /
25400 '
25500 FOR K = 1 TO KH - KL
25600 LX = ((W(K) - XMIN) / DELTAX) * 558 + 81
25700 LXX = ((W(K + 1) - XMIN) / DELTAX) * 558 + 81
25800 LY = 179 - ((M(K) - YMIN) / DELTAY) * 158
25900 LYY = 179 - ((M(K + 1) - YMIN) / DELTAY) * 158
26000 LINE (LXX, LYY)-(LX, LY)
26100 NEXT
26200 RETURN
30000 '
30100 ' /
30200 ' / SEARCHING OF MINIMA AND MAXIMA /
30300 ' /
30400 '
30500 XMAX = 1D-25
30600 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
30700 IF W(K) <= XMAX THEN 31000
30800 XMAX = W(K)
30900 IXMAX = K
31000 NEXT
31100 XMIN = 1D+25
31200 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
31300 IF W(K) >= XMIN THEN 31600
31400 XMIN = W(K)
31500 IXMIN = K
31600 NEXT
31700 YMAX = 1D-25
31800 FOR K = 1 TO KH - KL + 1

```

```
31900 IF M(K) <= YMAX THEN 32200
32000 YMAX = M(K)
32100 IYMAX = K
32200 NEXT
32300 YMIN = 1D+25
32400 FOR K = 1 TO KH - KL + 1
32500 IF M(K) >= YMIN THEN 32800
32600 YMIN = M(K)
32700 IYMIN = K
32800 NEXT
32900 DELTAX = XMAX - XMIN
33000 DELTAY = YMAX - YMIN
33100 RETURN
```