



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

CAMPUS ARAGÓN

“IMPLEMENTACIÓN DE LOS APUNTES Y
PRÁCTICAS DE LA MATERIA DE CINEMÁTICA”

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO
P R E S E N T A :

JOSÉ DE JESÚS RAZO CAMACHO

ASESORADO POR:

ING. RODOLFO ZARAGOZA BUCHAIN

MÉXICO

1999

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

277936

39
2e



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A los Ingenieros:

Rodolfo Zaragoza Buchain
Alberto Reyes Solis
Alejandro Rodríguez Lorenzana
Felipe Méndez Samperio
Teófilo Cuevas Martínez

Por su decidido, entusiasta, valioso y desinteresado apoyo para la realización de este trabajo.

A mi Querida Universidad

Por brindarme la oportunidad de superarme como profesionista y como persona.

A mis padres:

Rafael Razo Rojas
Cristina Camacho Saldaña

A mi esposa:

Teresa Domínguez López

A mis hijos:

Jesús
Ricardo
Susana

Con mucho cariño

PRÓLOGO

En el mundo moderno prácticamente todo lo en él utilizado para comodidad del ser humano tiene que ver con el movimiento. es decir, con la dinámica de los cuerpos o partículas. Si tenemos en cuenta que estos cuerpos o partículas son los automóviles, aviones, cohetes, trenes, planetas, satélites, etc. también las partes constituyentes de las máquinas mencionadas pueden ser consideradas como partículas por lo que es obvio que prácticamente en todas partes nos las encontramos; en la industria en el hogar, en la ciudad, en el campo, es decir, en la vida cotidiana.

Por lo antes dicho es importante conocer las particularidades de los movimientos que describen dichos móviles, para predecir su movimiento e introducir las mejoras y modificaciones pertinentes para hacer óptimo su funcionamiento y por ende su aprovechamiento por el ser humano.

JUSTIFICACIÓN DE ESTE TRABAJO DE TESIS

El principal objetivo que pretende este trabajo es el de coadyuvar al desarrollo de la preparación profesional de los alumnos de la carrera de ingeniería mecánica eléctrica.

Con el fin de lograr dicho objetivo se han elaborado estos apuntes de la manera más entendible y accesible posible para que los alumnos se sientan atraídos y despertar e incrementar el interés en los conocimientos de la cinemática en particular.

En este trabajo se concentra la información necesaria para el curso de cinemática lo que le dará al alumno una gran ventaja ya que en un solo tomo encontrará toda la información para salir adelante en el estudio de la materia. Con esto, no descartamos que deba consultar más bibliografía

IMPLEMENTACIÓN DE LOS APUNTES Y PRÁCTICAS DE LA MATERIA DE CINEMÁTICA

ÍNDICE		Página
TEMA I.	"CINEMÁTICA DEL PUNTO Y DE LA RECTA"	1
CONTENIDO:		
I.1	Cinemática	2
I.2	Posición	2
I.3	Trayectoria	2
I.4	Desplazamiento	3
I.5	Velocidad Instantánea	3
I.6	Aceleración Instantánea	4
I.7	Rapidez y	5
I.8	Acelerantes Lineales	5
I.9	Establecimiento de las componentes cartesianas de los vectores de posición, velocidad y aceleración lineales para:	6
I.9.1	Movimientos en el Espacio	6
I.9.2	En el Plano y	7
I.9.3	Línea Recta	7
I.10	Movimiento rectilíneo uniforme	8
I.11	Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	8
I.12	Caída Libre	13
I.13	Tiro Vertical	13
I.14	Tiro Parabólico	13
I.15	Características cinemáticas de puntos que describen movimientos rectilíneos con aceleración variable.	17
I.16	Movimiento armónico simple: Definición y propiedades cinemáticas.	18
I.17	Movimiento curvilíneo de un punto referido a sistemas:	24
I.17.1	Cartesianos.	24
I.17.2	Intrínsecos (Normal y Tangencial)	29
I.17.3	Polares y	35
I.17.4	Cilíndricos	39
I.18	Posición	40
I.19	Desplazamiento	40
I.20	Velocidad	40
I.21	Rapidez	40
I.22	Aceleración y	40
I.23	Acelerante angulares	40
I.24	Deducción y empleo de la relación de Poisson.	42

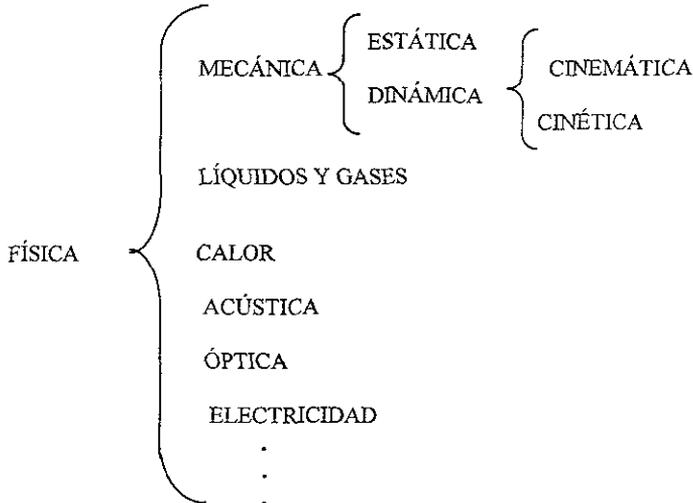
I.25	Determinación de las características cinemáticas de una recta en movimiento, para el caso general y para casos particulares.	45
I.26	Movimientos circulares: determinación de las relaciones entre las características cinemáticas de los puntos que los realizan, y las de las rectas que unen dichos puntos con el centro del círculo correspondiente.	47
TEMA II. " MOVIMIENTO RELATIVO "		49
CONTENIDO:		
II.1	Posición	49
II.2	Velocidad y	49
II.3	Aceleración Absolutas y Relativas	49
II.4	Definiciones de velocidad y aceleración de arrastre	53
II.5	Aceleración de Coriolis	58
II.6	Establecimiento de las expresiones propias del caso general de movimiento relativo.	63
II.7	Obtención y empleo de las expresiones para casos particulares de movimiento relativo.	65
TEMA III. " CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO "		67
CONTENIDO:		
III.1	Definición de los movimiento de un cuerpo rígido:	67
III.1.1	Traslación	67
III.1.2	Rotación y	68
III.1.3	Movimiento Plano General.	69
III.2	Deducción y empleo de las ecuaciones correspondientes a los movimientos de:	70
III.2.1	Traslación	70
III.2.2	Rotación y	71
III.2.3	Movimiento Plano General.	76
III.3	Concepto y aplicación del Eje instantáneo de rotación.	81
III.4	Mecanismos de tres y cuatro articulaciones.	83
TEMA IV " MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS Y MASAS "		85
CONTENIDO:		
IV.1	MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS	91
IV.1.1	Obtención de Momentos de Inercia de áreas de superficies simples.	94

IV.1.2	Producto de inercia	94
IV.1.3	Radio de Giro y del	97
IV.1.4	Momento Polar de Inercia de un área.	98
IV.1.5	Teoremas de Ejes Paralelos para:	99
IV.1.5.1	Momentos de Inercia y	99
IV.1.5.2	Productos de Inercia de áreas.	100
IV.1.6	Momentos de Inercia y	101
IV.1.7	Productos de Inercia de superficies simples con respecto a Sistemas de Ejes Centroidales.	104
IV.1.8	Momentos de Inercia de figuras compuestas.	107
IV.1.9	Productos de Inercia de Figuras Compuestas.	111
IV.1.11	Ejes Principales de Inercia y	115
IV.1.12	Momentos Principales de Inercia de un área.	115
IV.2.	Momentos de Inercia de la Masa de Cuerpos	121
IV.2.1	Momentos de Inercia de la Masa de un cuerpo, respecto a planos y ejes cualesquiera.	121
IV.2.2	Radio de Giro y	123
IV.2.3	Productos de Inercia de la Masa de algunos cuerpos simples.	126
IV.2.4	Teorema de Ejes Paralelos para:	127
IV.2.4.1	Momentos de Inercia y	127
IV.2.4.2	Productos de Inercia de Masas.	129
IV.2.5	Momentos de Inercia y	130
IV.2.6	Productos de Inercia de la Masa de cuerpos simples, con respecto a sistemas de ejes centroidales.	130
IV.2.7	Momentos de Inercia de la Masa de algunos cuerpos compuestos.	135
IV.2.8	Ejes Principales de Inercia y	137
IV.2.9	Momentos Principales de Inercia de la masa de un cuerpo.	137
TEMA V .	PRACTICAS DE CINEMÁTICA	141

TEMA I. "CINEMÁTICA DEL PUNTO Y DE LA RECTA"

OBJETIVO: Explicar los conceptos cinemáticos lineales y angulares básicos, las relaciones entre ellos y su aplicación en el análisis y resolución de problemas de movimiento de puntos y rectas.

I.1.-CINEMÁTICA .- Parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos prescindiendo de su masa y de las causas que lo producen. Su objetivo fundamental es establecer las ecuaciones de movimiento que relacionan las distintas variables cuyos valores condicionan las características del movimiento.



En el cuadro sinóptico anterior se ilustra una parte del campo de estudio de la Física al cual pertenece la Cinemática.

FÍSICA.- Ciencia que tiene por objeto el estudio de la materia y la energía, sus propiedades e interrelaciones. Trata también de la elaboración de las leyes que rigen los fenómenos físicos y su evolución con el tiempo; en términos generales puede decirse que la Física intenta una explicación del universo tanto global como individualizada, tanto en lo que atañe al macrocosmos como en lo que se refiere al microcosmos.

MECÁNICA.- Parte de la física que estudia el estado de reposo o de movimiento de los cuerpos. La mecánica, como todas las disciplinas que tienden a la consecución de un conocimiento exacto del mundo natural, se presenta bajo dos aspectos, a la vez distintos y paralelos:

- a) Teórico o Racional
- b) Experimental o Aplicado.

En el teórico, la mecánica, opera con nociones ideales tales como las de masa puntual, cuerpo rígido, velocidad instantánea, cantidad de movimiento, fuerza, aceleración, etc. Las leyes físicas se representan por medio de modelos matemáticos.

Bajo el aspecto experimental, la mecánica trata de hallar la explicación de los fenómenos con ella relacionados comprobando el modelo matemático establecido por la teoría y el experimento

¹Definiciones de Física y Mecánica del Diccionario Enciclopédico Bruguera. México, 1979. Págs. 870 y 1355

realizado. En lo que se refiere a la Mecánica Clásica, es necesario mencionar, ante todo, el principio de inercia debido a Galileo, y las leyes de Newton.

² **Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia o de Galileo.**

" Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras no exista una fuerza que se oponga o altere ese estado."

³ **Segunda Ley de Newton**

" Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza la aceleración que experimenta éste es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo". Se representa así:

$$a = \frac{F}{m}$$

o

$$F = ma$$

⁴ **Tercera Ley de Newton**

" A toda fuerza o acción se opone una reacción de igual magnitud pero de sentido contrario."

⁵ **ESTÁTICA.**- Estudio del equilibrio y de la acción de las fuerzas sobre cuerpos en reposo.

CINÉTICA.- Estudia las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y su movimiento.

I.1.- ⁶CINEMÁTICA.- Estudia la geometría del movimiento de los cuerpos prescindiendo de su masa y de las causas que lo producen.

⁷ **CINEMÁTICA RECTILÍNEA.**- Una partícula se puede desplazar sobre una trayectoria recta o curva; la cinemática en el movimiento rectilíneo se caracteriza por especificar en un momento determinado la posición, velocidad y aceleración de la partícula.

I.2.- ⁸ TRAYECTORIA.- Se define como trayectoria, descrita por una partícula o punto, al lugar geométrico que se forma por las distintas posiciones ocupadas por la partícula durante su movimiento.

Dicha trayectoria puede ser curva o recta.

I.3.- ⁹POSICIÓN .- Se puede definir la trayectoria en línea recta de una partícula usando un solo eje de coordenadas *s*. En un movimiento rectilíneo, la dirección de *r* es siempre a lo largo del eje *s*.

² Física General. Ing. Salvador Mosqueira. Pág. 52.
³ Guía Para Ingresar a Preparatoria y CCH. Pág. 289.
⁴ Física General. Ing. Salvador Mosqueira. Pág. 54.
⁵ Mecánica Para Ingenieros. Estática. T.C. Huang. Pág. 7.
⁶ Cinemática y Dinámica Básicas para ingenieros Jorge Solar González Pág. 87.
⁷ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Pág. 4
⁸ Cinemática y Dinámica Básicas para ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 90.

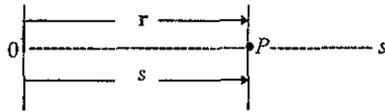


Fig.I.1 Posición

Para el análisis es conveniente representar r por medio de un escalar s , que representa la coordenada de posición de la partícula de 0 a P; se mide en metros o en pies y el sentido se define por medio del signo algebraico de s .

Arbitrariamente, a la derecha del punto 0, s es positivo y si la partícula se encuentra a la izquierda de 0, s es negativo.

I.4.- DESPLAZAMIENTO.- Se define como un cambio en la posición, es decir, si la partícula se mueve de P a P' , en la figura (I.2), el desplazamiento es $\Delta r = r' - r$. Utilizando el escalar s para representar r , se tiene

$$\Delta s = s' - s$$

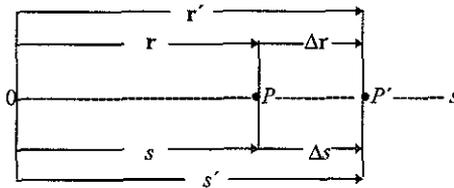


Fig. I.2 Desplazamiento

En este caso Δs es positiva ya que la posición final de la partícula es a la derecha de la que tenía al inicio, es decir, $s' > s$. Si la posición final de la partícula es a la izquierda de la posición inicial Δs es negativa.

Debido a que el desplazamiento de una partícula es una cantidad vectorial debe distinguirse de la distancia que recorre. De manera específica, la distancia recorrida es un escalar positivo que representa la longitud total de la trayectoria que recorre la partícula.

I.5.- VELOCIDAD.- Si la partícula experimenta un desplazamiento Δr de P a P' , durante el intervalo de tiempo Δt , ver figura (I.2), la velocidad media de la partícula es

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Tomando cantidades cada vez más pequeñas de Δt , la magnitud de Δr disminuirá gradualmente. Entonces, la velocidad instantánea se define como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta r / \Delta t)$$

⁹ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Pág. 4.

o

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Representando v como un escalar algebraico, ver figura (I. 3), es posible escribir la velocidad

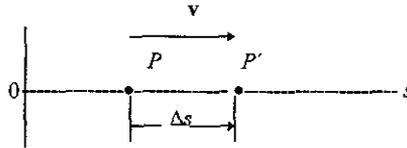


Fig.I.3 Velocidad

instantánea como

$$v = \frac{ds}{dt}$$

(1.1)

Como Δt , dt , es siempre positivo, el signo que se emplea para especificar el sentido de la velocidad es el mismo que el de Δs o ds . Es decir, si la partícula se mueve a la derecha como en la figura (I. 3), la velocidad es positiva, en tanto que si lo hace a la izquierda es negativa..

I.6.- ACELERACIÓN.- Conociendo la velocidad instantánea de la partícula en los puntos P y P' , la aceleración media de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aquí, Δv es igual a la diferencia de las velocidades durante el intervalo de tiempo Δt , o sea, $\Delta v = v' - v$, como se representa en la figura (I. 4).

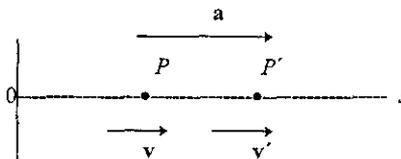


Fig.I.4 Aceleración

La aceleración instantánea en el tiempo t se determina tomando valores cada vez más pequeños de Δt y valores cada vez más pequeños de Δv , de manera que

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v / \Delta t)$$

o, si utilizamos escalares tenemos que la aceleración instantánea es

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1.2)$$

también podemos derivar dos veces la ecuación (1.1), por lo tanto tenemos

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La aceleración puede ser positiva o negativa, en la figura (I.5) se representa una partícula que está reduciendo su velocidad, es decir, está frenando; cuando esto ocurre se dice que la partícula desacelera.

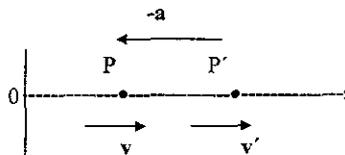


Fig. I.5 Desaceleración

En este caso $v' < v$ por lo tanto, $\Delta v = v' - v$ será negativo y actuará hacia la izquierda en sentido opuesto a la velocidad v .

I.7.-¹⁰RAPIDEZ.- La magnitud de la velocidad se conoce como *rapidez* y por lo general, se expresa en m/s o pies/s. En ocasiones se emplea el término "rapidez media". La rapidez media es un escalar positivo y se define como la distancia total S_T que viaja la partícula, dividida entre el tiempo transcurrido Δt ; es decir:

$$v_{\text{rap media}} = \frac{S_T}{\Delta t}$$

I.8.-¹¹ACELERANTE LINEAL.- Recibe el nombre de acelerante lineal la magnitud de la aceleración.

¹⁰ Hasta aquí, los conceptos están basados en el libro: Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. (Salvo donde se indica lo contrario). Pág. 5.

¹¹ Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 93.

I.9.-COMPONENTES CARTESIANAS DE LOS VECTORES DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN LINEALES PARA:

I.9.1.-MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

I.9.2.- EN EL PLANO Y

I.9.3.- LÍNEA RECTA.

I.9.1.-¹²MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

Consideremos el sistema de coordenadas rectangulares xyz de *mano derecha* mostrado en la figura (I.6) y el punto P .

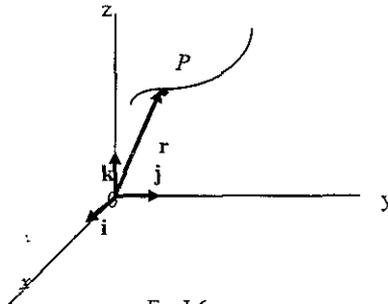


Fig.I.6

La posición de P quedará determinada, para cualquier valor de t , por la función vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.3)$$

Derivando la ecuación (1.3) respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (1.4)$$

Derivando ahora la ecuación (1.4) respecto al tiempo nos queda la aceleración dada por

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (1.5)$$

De acuerdo con lo anterior podemos decir que:

¹² Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 93.

\mathbf{r} = vector de posición de P .

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ = vectores unitarios asociados al sistema coordenado x, y, z .

x, y, z = componentes cartesianas de \mathbf{r} .

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ = componentes cartesianas de la velocidad.

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ = componentes cartesianas de la aceleración.

1.9.2.-¹³MOVIMIENTO EN EL PLANO

Para un movimiento de P en un plano cartesiano xy tenemos:

Posición.-

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(1.6)

Velocidad.-

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

(1.7)

Aceleración.-

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

(1.8)

19.3.-¹⁴MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

Para un movimiento rectilíneo de P en un eje, en este caso el eje x , tenemos:

Posición.-

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i}$$

(1.9)

velocidad.-

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{i}$$

(1.10)

Aceleración.-

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i}$$

(1.11)

¹³ Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 93

¹⁴ *Ibid.*

L.10.-¹⁵MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Éste es un movimiento en línea recta que se encuentra con frecuencia en aplicaciones prácticas. En este movimiento la aceleración a de la partícula es cero para cualquier Δt . Por consiguiente, la velocidad v es constante, es decir, $\Delta v = v - v = 0$, por lo tanto

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{constante}$$

la coordenada de posición s se obtiene integrando la anterior ecuación. Sea $s = s_0$, cuando $t = 0$, entonces

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt$$

$$s - s_0 = vt$$

$$\boxed{s = s_0 + vt} \quad (1.12)$$

Esta ecuación sólo es utilizable *cuando la velocidad de la partícula es constante*

L.11.-¹⁶MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Este tipo de movimiento también es muy común. En él la aceleración de la partícula es constante, es decir

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{constante}$$

por lo tanto la velocidad v de la partícula la obtenemos integrando la ecuación anterior:

$$\int_{v_0}^v dv = a_c \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = a_c t$$

$$\boxed{v = v_0 + a_c t} \quad (1.13)$$

donde v_0 representa la velocidad inicial. Sustituyendo el valor de v en la ecuación (1.13)

¹⁵ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica Ferdinand P. Beer Pág. 487.

¹⁶ Ibid. Pág. 488.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

tenemos

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_c t$$

sea $s = s_0$ cuando $t = 0$ integrando nos queda

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2} \quad (1.14)$$

Como $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = v \frac{dv}{ds} = \text{constante}$ (eliminando dt) e integrando

$$a \int_{s_0}^s ds = \int_{v_0}^v v dv$$

$$a_c (s - s_0) = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$$

despejando v^2 nos queda

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c (s - s_0)} \quad (1.15)$$

Las últimas tres ecuaciones nos proporcionan relaciones útiles entre las coordenadas de posición, velocidad y el tiempo en el caso de un movimiento uniformemente acelerado.

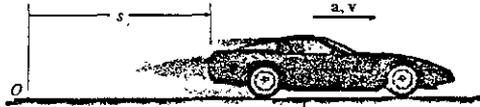
Una aplicación importante de este tipo de movimiento es el de un cuerpo en Caída Libre.

La aceleración de un cuerpo en caída libre, representada por g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.22 ft/s^2 .

NOTA: Las tres ecuaciones anteriores sólo pueden utilizarse cuando se sabe que la aceleración de la partícula es constante.

EJEMPLO RESUELTO I.1

Un automóvil arranca desde el reposo y alcanza una rapidez de 80 pies/s después de recorrer 500 pies a lo largo de un camino recto. Determine su aceleración constante y el tiempo de recorrido.



Solución:

Cálculo de la aceleración

Como sabemos que $s_0 = 0$, $v_0 = 0$ y después de recorrer 500 pies su rapidez es de 80 pies/s, tenemos

$$v^2 = v_0^2 + 2 a_c (s - s_0) = 0 + 2 a_c (500)$$

$$(80)^2 = 2 a_c (500) = 1000 a_c$$

$$a_c = \frac{(80)^2}{1000} = \frac{6400}{1000}$$

$$a_c = 6.4 \text{ pies/s}^2$$

Cálculo del tiempo de recorrido

Ahora ya conocemos la aceleración y la rapidez después de recorrer los 500 pies, por lo tanto podemos utilizar la siguiente ecuación:

$$v = v_0 + a_c t \quad \text{y como } v_0 = 0, \text{ despejando } t \text{ nos queda:}$$

$$t = \frac{v}{a_c} = \frac{80 \text{ pies/s}}{6.4 \text{ pies/s}^2}$$

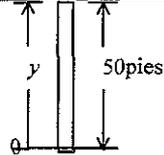
$$t = 12.5 \text{ s}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.2

Desde una torre de 50 pies de altura, se arroja hacia abajo una pelota de béisbol con una rapidez de 18 pies/s. Determine la rapidez con la que llega al suelo y el tiempo del recorrido.

Solución:

Sistema de coordenadas.- En este caso consideremos un eje y vertical de sentido positivo hacia arriba, ver esquema.



Cálculo de la rapidez

En este caso conocemos $y_0 = 50$ pies, $v_0 = 18$ pies/s y $a_c = g = -32$ pies/s² [esto es así porque la aceleración se dirige hacia abajo, es decir, en sentido contrario al del eje y considerado positivo hacia arriba], y sabemos que cuando la pelota llega al suelo $y = 0$, por lo tanto tenemos:

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

$$v^2 = (18)^2 - 2(32.2)(0 - 50)$$

$$v^2 = 324 + 3220 = 3544 \text{ pies}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{3544 \text{ pies}^2/\text{s}^2}$$

$$v = 59.53 \text{ pies/s}$$

Cálculo del tiempo del recorrido

Como ahora ya conocemos $v = 59.53$ pies/s, $v_0 = 18$ pies/s y $a_c = 32.2$ pies/s², tenemos:

$$v = v_0 + at$$

despejando t nos queda

$$t = \frac{v - v_0}{at} = \frac{59.53 - 18}{32.2}$$

$$t = 1.289\text{s}$$

EJEMPLO RESUELTO I3

Viajando con una velocidad inicial de 70 km/h, un automóvil acelera a 6000 km/h^2 en un camino recto. ¿ Cuánto tiempo le tomará alcanzar una rapidez de 120 km/h? También, ¿ cuál es la distancia que recorre el automóvil en ese lapso?

Solución:

Cálculo del tiempo

$$\begin{aligned} \text{Conocemos } v_0 &= 70 \text{ km/h} = 19.45 \text{ m/s} \\ v &= 120 \text{ km/h} = 33.34 \text{ m/s} \\ a_c &= 6000 \text{ km/h}^2 = 0.463 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Utilizando } v = v_0 + a_c t$$

y despejando t nos queda

$$t = \frac{v - v_0}{a_c} = \frac{33.34 - 19.45}{0.463} = \frac{13.89}{0.463}$$

$$t = 30 \text{ s}$$

Cálculo de la distancia recorrida durante este tiempo

Para la distancia tenemos $s = s_0 + v_0 t + (\frac{1}{2}) a_c t^2$
 $s_0 = 0$, por lo tanto:

$$s = 0 + v_0 t + (\frac{1}{2}) a_c t^2 = 19.45 (30) + (\frac{1}{2})(0.463)(30)^2$$

$$s = 583.5 + 208.35$$

$$s = 792 \text{ m}$$

I.12.- ¹⁷CAÍDA LIBRE

Si hacemos o permitimos que un cuerpo o partícula caiga en un vacío, de modo que la resistencia del aire no afecte su movimiento, se encontrará que *todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, forma o composición, caen con la misma aceleración.*

Convencionalmente, esta aceleración se denota por g , y se llama aceleración en caída libre o aceleración debida a la gravedad.

La aceleración depende del lugar donde nos encontremos, es decir, varía con la latitud y la altitud, en nuestro caso utilizaremos el valor de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ o 32.2 pies/s^2 .

La dirección de la aceleración en un punto determina lo que queremos significar con las palabras "hacia abajo" (hacia el centro de la tierra) en ese punto.

I.13.- ¹⁸TIRO VERTICAL

Ahora bien, los cuerpos con movimiento hacia arriba experimentan o se ven afectados con la misma aceleración en magnitud y dirección. Esto es, sin importar que la velocidad de la partícula sea hacia arriba o hacia abajo, la dirección de su aceleración bajo la influencia de la tierra es hacia abajo.

Como la aceleración es constante se utilizan las ecuaciones obtenidas anteriormente para el movimiento rectilíneo, es decir

$$v = v_0 + a_c t \quad (1.13)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \quad (1.14)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c (s - s_0) \quad (1.15)$$

Utilizando la convención de que el sentido hacia arriba es positivo y marcando la dirección como eje y tenemos:

$$v = v_0 - gt \quad (1.13.1)$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.14.1)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (1.15.1)$$

Estas ecuaciones se usan tanto en caída libre como en tiro vertical.

I.14.- ¹⁹TIRO PARABÓLICO

Este movimiento trata del movimiento bidimensional de una partícula, la que debido a la gravedad terrestre describe una trayectoria parabólica, por lo tanto es un movimiento con aceleración constante g , dirigido hacia abajo.

Aún cuando puede haber una componente horizontal de la velocidad, no hay una componente horizontal de la aceleración.

En este caso, como en algunos otros, suponemos que podemos despreciar el efecto del aire en el movimiento.

¹⁷Física General. Ing. Salvador Mosqueira. Pág. 39.

¹⁸ibid. Pág. 40.

¹⁹Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler Pág. 36.

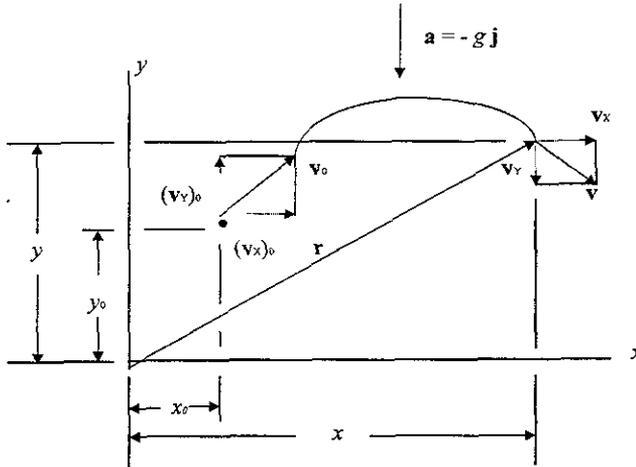


Fig.I.7 Tiro parabólico

MOVIMIENTO HORIZONTAL

Aplicando las ecuaciones de aceleración constante, es decir,

$$v = v_0 + a_c t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c (s - s_0)$$

y ya que $a = 0$ nos queda:

$$v_x = (v_x)_0 = v_0 \cos\theta$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t = x_0 + (v_0 \cos\theta) t$$

$$v_x = (v_x)_0 = v_0 \cos\theta$$

Esto nos indica que la componente horizontal de la velocidad permanece constante durante el movimiento.

MOVIMIENTO VERTICAL

En este caso y debido a que el sentido hacia arriba es positivo y ya que marcamos la dirección como eje y , entonces $a = -g$. Aplicando las ecuaciones de aceleración constante tenemos que:

$$v_y = (v_y)_0 - gt = v_0 \text{sen}\theta - gt$$

$$y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = y_0 + v_0 \text{sen}\theta t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

La componente vertical de la velocidad en el tiro parabólico es la de la caída libre.

MAGNITUD

La magnitud del vector resultante de la velocidad en cualquier instante es :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

ÁNGULO

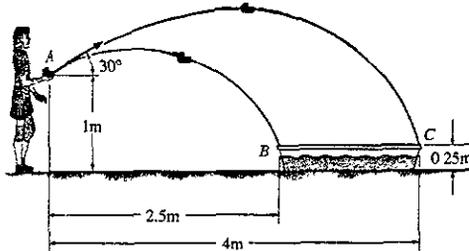
El ángulo θ que el vector de la velocidad forma con la horizontal está dado por

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todo punto.

EJEMPLO RESUELTO 1.4

La niña arroja siempre los juguetes con un ángulo de 30° a partir del punto A, según se ilustra. Determine el tiempo entre los lanzamientos de modo que ambos juguetes golpeen los extremos de la piscina, B y C, en el mismo instante. ¿Con qué rapidez deberá arrojar la niña cada juguete?



Solución:

Movimiento horizontal \rightarrow
Para el movimiento AB

$$(v_{Ax})_B = v_{AB} \cos 30^\circ = 0.866 v_{AB} \quad (1)$$

$$x_A = x_A + (v_{Ax})_B t_{AB} \quad (2)$$

$$2.5 = 0.866 v_{AB} t_{AB}$$

$$t_{AB} = \frac{2.5}{0.866 v_{AB}} = \frac{2.89}{v_{AB}} \quad (3)$$

Para el movimiento AC

$$(v_{Ax})_C = v_{AC} \cos 30^\circ = 0.866 v_{AC} \quad (4)$$

$$x_A = x_A + (v_{Ax})_C t_{AC} \quad (5)$$

$$2.5 = 0.866 v_{AC} t_{AC}$$

$$t_{AC} = \frac{4}{0.866 v_{AC}} = \frac{4.62}{v_{AC}} \quad (6)$$

Movimiento vertical \uparrow

Para el movimiento AB

$$(v_{Ay})_B = v_{AB} \sin 30^\circ = 0.5 v_{AB} \quad (7)$$

$$y_B = y_A + (v_{Ay})_B t_{AB} + \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \quad (8)$$

Sustituyendo $y_A = 1\text{m}$, $y_B = 0.25\text{m}$,
 $g = -9.81\text{m/s}^2$ y las ecuaciones (3) y (7)
en la (8)

$$0.25 = 1 + 0.5 v_{AB} \left(\frac{2.89}{v_{AB}} \right) + \frac{1}{2} (-9.81) \left(\frac{2.89}{v_{AB}} \right)^2$$

Despejando v_{AB}^2 nos queda

$$v_{AB}^2 = 18.66 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\text{Por lo tanto } v_{AB} \approx \sqrt{18.66}$$

$$v_{AB} = 4.32 \text{ m/s}$$

Para el movimiento AC

$$(v_{Ay})_C = v_{AC} \sin 30^\circ = 0.5 v_{AC} \quad (9)$$

$$y_C = y_A + (v_{Ay})_C t_{AC} + \frac{1}{2} g t_{AC}^2 \quad (10)$$

Sustituyendo $y_A = 1\text{m}$, $y_C = 0.25\text{m}$
 $g = -9.81\text{m/s}^2$ y las ecuaciones (6) y (9)
en (10) tenemos

$$0.25 = 0.25 + 0.5 v_{AC} \left(\frac{4.62}{v_{AC}} \right) + \frac{1}{2} (-9.81) \left(\frac{4.62}{v_{AC}} \right)^2$$

Despejando v_{AC}^2 nos queda

$$v_{AC}^2 = 34.2 \text{ m}^2/\text{s}^2, \text{ por lo tanto}$$

$$v_{AC} = \sqrt{34.2 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_{AC} = 5.85 \text{ m/s}$$

Sustituyendo v_{AB} en v_{AC} en (3) y (4)
respectivamente nos queda:

$$t_{AB} = 2.89/4.32 = 0.669 \text{ s}$$

$$t_{AC} = 4.62/5.85 = 0.790 \text{ s}$$

Tiempo entre lanzamientos

$$t = t_{AC} - t_{AB} = 0.790 - 0.669$$

$$t = 0.121 \text{ s}$$

1.15.- ²⁰CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS DE PUNTOS QUE DESCRIBEN MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS CON ACELERACIÓN VARIABLE.

Generalmente, la aceleración de una partícula se puede expresar como una función de una o más de las variables x , v y t . Para conocer la coordenada de posición x ó s en términos de t será necesario realizar dos integraciones sucesivas; aún cuando existen varios movimientos de este tipo, sólo se considerarán los tres casos siguientes:

- a) $a = f(t)$.
- b) $a = f(x) = f(s)$
- c) $a = f(v)$

a) $a = f(t)$. La aceleración está en función del tiempo t .

Podemos escribir $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a dt = dv$, después integramos para encontrar v .

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow v = \int a dt + c$$

Ahora escribimos $v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v dt = dx = ds$, después integramos para encontrar x ó s .

$$\int ds = \int v dt \Rightarrow s = \int v dt + c$$

b) $a = f(x) = f(s)$. La aceleración está en función de la posición x ó de s y se nos pide encontrar algo relacionado con velocidades o distancias recorridas usaremos las ecuaciones (1.1) y (1.2):

De (1.1) $dt = \frac{ds}{v}$, sustituyendo en (1.2) tenemos, $a = \frac{dv}{ds/v} = v \frac{dv}{ds}$, después separando variables e integrando encontramos v ó s .

$$\int v dv = \int a ds \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \int a ds + c$$

c) $a = f(v)$, La aceleración está en función de la velocidad v

En este caso podemos escribir $a = \frac{dv}{dt}$, separar variables e integrar para encontrar v :

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow v = \int a dt + c$$

luego escribimos $v = \frac{ds}{dt}$, separamos variables e integramos para encontrar s .

$$\int ds = \int v dt \Rightarrow s = \int v dt + c$$

²⁰ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros. Jorge Solar González. Págs. 480 y 110.

I.16.-²¹MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Ciertos movimientos se repiten de un modo regular y confiable como ejemplos tenemos el latido de nuestro corazón, el ciclo de las estaciones debido al movimiento repetido de la tierra alrededor del sol, el tipo más fundamental de movimiento rítmico está presente una y otra vez en el mundo físico. Es el Movimiento Armónico Simple. Ejemplos de él son el movimiento de una masa en el extremo de un resorte, y el movimiento de un péndulo.

El movimiento armónico simple se define como "aquél en el cual la posición de un punto varía a través del tiempo, en forma de una función de un seno o de un coseno". Además como un cuerpo cuya posición tiene una dependencia senoidal con respecto al tiempo tiene también una aceleración con dependencia senoidal del tiempo; su aceleración es proporcional a su posición.

Veamos ahora una gráfica $\text{sen } \theta$ en función de θ , y otra de $\text{cos } \theta$ en función de θ para describir mejor la dinámica del movimiento armónico simple.

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

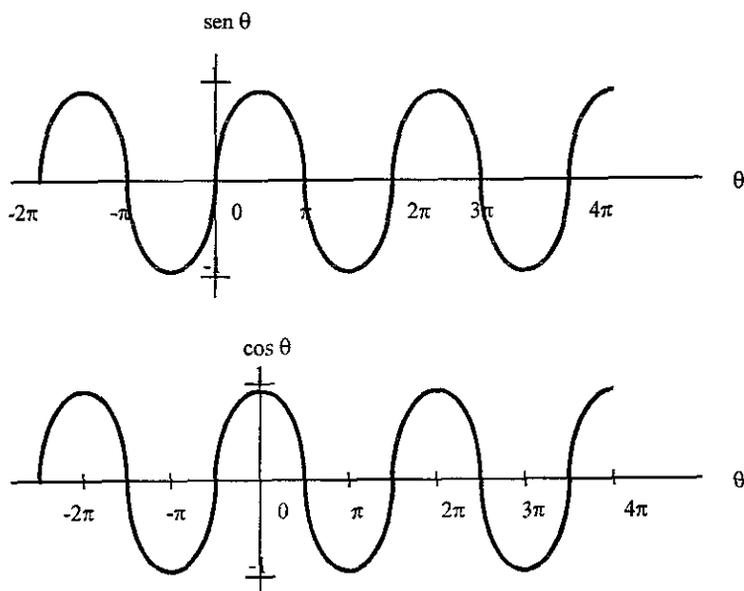


Fig.I.8

Ambas funciones se repiten cuando el ángulo θ varía 2π rad. Cuando $\theta = 0$, la función seno es cero, mientras que la función coseno es $+1$. Como se ve en las figuras, las funciones son idénticas si se desplaza el origen del eje θ . Las curvas se desplazan en el eje horizontal, y en particular se mueven entre las funciones seno y coseno.

²¹Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Págs. 558 y 952.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Considérese un bloque que tiene una masa m y está unido a un resorte de rigidez k . El movimiento de vibración ocurre cuando el bloque se libera desde una posición x , de tal modo que el resorte jala al bloque. Este, entonces, tendrá una velocidad que hará que se mueva fuera de su posición de equilibrio cuando $x = 0$. Si suponemos que la superficie donde se desplaza el bloque es lisa, la oscilación continúa en forma indefinida.

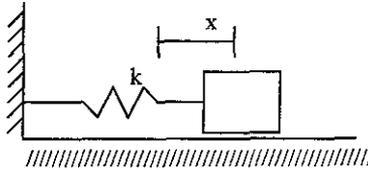


Fig. I.9 Posición de equilibrio

Determinaremos la trayectoria de movimiento dependiente del tiempo del bloque por medio de la ecuación del movimiento cuando el bloque se halla en la posición desplazada x .

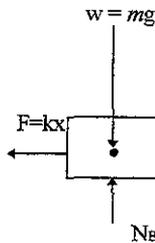


Fig. I.10 Diagrama de cuerpo libre

La fuerza elástica de restauración $F = kx$ se dirige siempre hacia la posición de equilibrio, en tanto que la aceleración a suponemos que actúa en dirección del desplazamiento positivo. -Como

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

tenemos (del diagrama de cuerpo libre):

$$\longrightarrow \Sigma F_x = ma_x, \quad -kx = m\ddot{x} \quad (1.16)$$

ordenando términos tenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.17)$$

dividiendo entre m nos queda

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.18)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Escogiendo o haciendo

$$p^2 = \frac{k}{m} \quad (1.19)$$

nos queda

$$\boxed{\ddot{x} + p^2x = 0} \quad (1.20)$$

El movimiento definido por la ecuación anterior se llama *Movimiento Armónico Simple*.

Se caracteriza por el hecho de que "la aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto"

La constante

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.21)$$

es conocida como frecuencia circular, y se expresa en rad/s .

Cada una de las funciones $x_1 = \text{sen } pt$ y $x_2 = \text{cos } pt$ satisfacen la ecuación del movimiento armónico simple. Por lo tanto, estas ecuaciones son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial. La solución general se obtiene multiplicando las dos soluciones particulares por constantes arbitrarias A y B, y sumándolas. Es decir, para la posición tenemos:

$$x = Ax_1 + Bx_2 = A\text{sen}pt + B\text{cos}pt \quad (1.22)$$

derivando respecto a t obtenemos sucesivamente la velocidad y la aceleración:

$$v = \dot{x} = Apcospt - Bpsenpt \quad (1.23)$$

$$a = \ddot{x} = -Ap^2senpt - Bp^2cospt \quad (1.24)$$

El valor de las constantes A y B depende de las condiciones iniciales del movimiento, por ejemplo, tenemos que $A = 0$ si la partícula es desplazada desde su posición de equilibrio y se suelta en $t = 0$. En general si sustituimos $t = 0$ y x_0, v_0 encontramos que

$$A = \frac{v_0}{p} \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad B = x_0.$$

La ecuación (1.22) se puede expresar también en términos de un movimiento senoidal simple, es decir,

$$A = C \cos \phi \qquad \qquad \qquad (1.25)$$

$$B = C \sin \phi \qquad \qquad \qquad (1.26)$$

donde C y ϕ son ahora las nuevas constantes por determinar en lugar de A y B, sustituyendo en la ecuación (1.22) tenemos

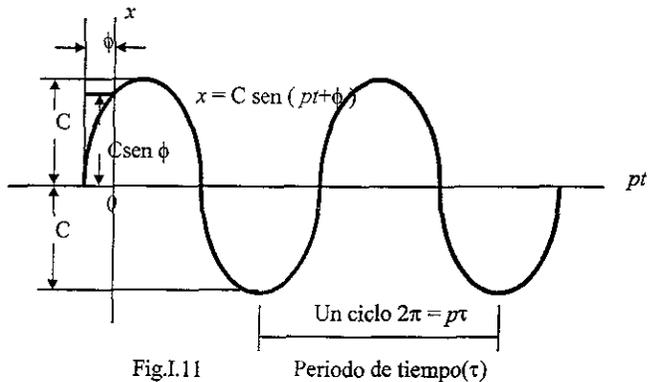
$$x = C \cos \phi \sin pt + C \sin \phi \cos pt \qquad \qquad \qquad (1.27)$$

sustituyendo la igualdad trigonométrica

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \text{ nos queda}$$

$$\boxed{x = C \sin(pt + \phi)} \qquad \qquad \qquad (1.28)$$

Si graficamos esta ecuación en un eje x contra pt obtenemos la siguiente figura:



El desplazamiento máximo del bloque desde su posición de equilibrio se define como amplitud de la vibración. En la figura (I.11), la amplitud es C, lo mismo que en la ecuación (1.28). El ángulo ϕ se llama ángulo de fase y nos representa la cantidad por la cual la curva es desplazada del origen cuando $t = 0$. Las constantes C y ϕ se relacionan con A y B por medio de las ecuaciones (1.25) y (1.26). Elevando al cuadrado y sumando estas dos ecuaciones tenemos que la amplitud es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (1.29)$$

dividiendo la ecuación (1.26) entre la ecuación (1.25) obtenemos el ángulo de fase, ver ecuación (1.30).

$$\frac{B}{A} = \frac{C \operatorname{sen} \phi}{C \operatorname{cos} \phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (1.30)$$

Observando de la figura (1.11) que cuando se completa un ciclo en un tiempo $t = \tau, p = 2\pi$ o

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = \text{Periodo} \quad (1.31)$$

este lapso se conoce como periodo, también lo podemos representar como

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.32)$$

La frecuencia f queda definida como el número de ciclos realizados en la unidad de tiempo, que es el recíproco del periodo, es decir

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \quad (1.33)$$

$$o \quad f = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.34)$$

La frecuencia se expresa en ciclos/s y se denomina como Hertz. 1 Hertz = 1 ciclo/s = 2π rad/s

Propiedades del movimiento armónico simple:

Son las tres constantes independientes que pertenecen al m.a.s.

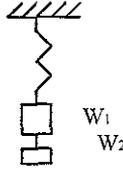
La amplitud C ,

La fase ϕ , y

La constante p , las que ya quedaron definidas.

EJEMPLO RESUELTO 1.5

Cuando un peso de 20 libras es suspendido de un resorte, éste se estira una distancia de 4 pulgadas. Determine la frecuencia natural y el periodo de vibración de un peso de 10 libras que se une al mismo resorte.



Solución:

Primero necesitamos conocer la masa y transformar los datos en forma congruente:

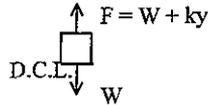
$$W_1 = m_1 g = 20 \text{ lb}$$

$$W_2 = m_2 g = 10 \text{ lb}$$

$$\text{Estiramiento} = 4 \text{ pulgadas} = 0.333 \text{ pie}$$

$$m_1 = W_1 / g = 20 \text{ lb} / 32.2 \text{ pie/s}^2 = 0.62 \text{ lbs}^2/\text{pie} = 0.62 \text{ slug}$$

$$m_2 = W_2 / g = 10 \text{ lb} / 32.2 \text{ pie/s}^2 = 0.31 \text{ lbs}^2/\text{pie} = 0.31 \text{ slug}$$



$$\downarrow \Sigma F_y = ma:$$

$$-W - ky + W = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + p^2 y = 0 \rightarrow p^2 = \frac{k}{m} \text{ por lo tanto } k \text{ será positiva}$$

despejando k de la ecuación (1) $k = \frac{m\ddot{y}}{-y} = \frac{(0.621 \text{ lbs}^2/\text{pie})(32.2 \text{ pie/s}^2)}{-(0.333 \text{ pie})} = 60 \text{ lb/pie}$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{60 \text{ lb/pie}}{0.31 \text{ lbs}^2/\text{pie}}} = 13.91 \text{ rad/s}$$

$$p = 13.91 \text{ rad/s}$$

$$\tau = 2\pi / p = 2\pi / 13.91 \text{ rad/s} = 0.452 \text{ s}$$

Periodo de vibración

$$f = 1/\tau = 1/0.452 \text{ s} = 2.21 \text{ (1/s)} = 2.21 \text{ Hz}$$

Frecuencia natural

I.17.- MOVIMIENTO CURVILÍNEO DE UN PUNTO REFERIDO A SISTEMAS:

I.17.1.- CARTESIANOS

I.17.2.- INTRÍNSECOS (NORMAL Y TANGENCIAL)

I.17.3.- POLARES Y

I.17.4.- CILÍNDRICOS.

I.17.1.-²²MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN UN SISTEMA CARTESIANO.

Algunas veces, nos es posible describir de mejor manera el movimiento de una partícula sobre una trayectoria si empleamos un marco de referencia fijo x, y, z

POSICIÓN.- Considerando que en un instante determinado la partícula P se localiza en un punto (x,y,z) de la trayectoria curva s , figura (I.12), entonces su ubicación queda definida por el vector de posición

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (1.3)$$

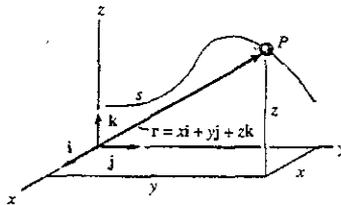


Fig. I.12 Posición

donde las coordenadas x, y, z son funciones de t , es decir,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \text{ de modo que } \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

De esta manera la magnitud de r que es siempre positiva se define por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.35)$$

y la dirección de r se especifica por medio de las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.

²² Ingeniería Mecánica Dinámica. R C Hibbeter. Pág. 32

VELOCIDAD

Derivando \mathbf{r} obtendremos la velocidad \mathbf{v} de la partícula.

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = d(x \mathbf{i})/dt + d(y \mathbf{j})/dt + d(z \mathbf{k})/dt$$

La derivada de la componente $x\mathbf{i}$ será

$$d(x\mathbf{i})/dt = d x \mathbf{i} / dt + x d \mathbf{i} / dt$$

$$d(x\mathbf{i})/dt = v_x \mathbf{i} + 0$$

El segundo término de la derecha es cero ya que el marco de referencia es fijo y la dirección y magnitud de \mathbf{i} no se modifican con el tiempo.

Procediendo de la misma manera obtenemos las derivadas de las componentes $y\mathbf{j}$ y $z\mathbf{k}$, por lo tanto el resultado final es

$$\mathbf{v} = d \mathbf{r} / dt = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (1.4)$$

Donde $v_x = \dot{x}$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

Donde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ representan las derivadas de primer grado de las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ respectivamente.

La magnitud de la velocidad quedará definida como el valor de

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.36)$$

y una dirección que se especifica por las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_v = \mathbf{v} / v$. Esta dirección es siempre tangente a la trayectoria. como se ilustra en la figura (I.13)

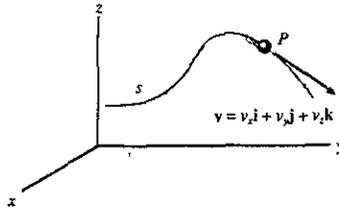


Fig.I.13 Velocidad

ACELERACIÓN

Al derivar dos veces el vector de posición \mathbf{r} obtenemos la aceleración

$$\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = d\mathbf{v}/dt = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1.5)$$

La aceleración tiene una magnitud definida por el valor de

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.37)$$

y una dirección especificada por las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_a = \mathbf{a} / a$.

Como la aceleración representa la razón de cambio de la velocidad en general \mathbf{a} no será tangente a la trayectoria que recorre la partícula, esto se ilustra en la figura (I.14)

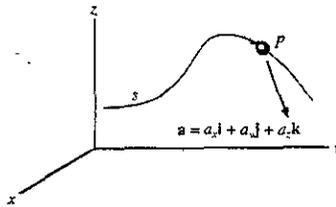


Fig. I.14 Aceleración

Debido a que el movimiento rectilíneo se desarrolla a la largo de cada eje, nos es posible determinar una descripción del movimiento de cada componente utilizando $\mathbf{v} = d(x \mathbf{i})/dt + d(y \mathbf{j})/dt + d(z \mathbf{k})/dt$ y $\mathbf{a} = d^2(x \mathbf{i})/dt^2 + d^2(y \mathbf{j})/dt^2 + d^2(z \mathbf{k})/dt^2$; una vez determinadas las componentes x, y, z , de \mathbf{v} y \mathbf{a} , las magnitudes de estos vectores se calculan en base al teorema de Pitágoras y las direcciones de sus componentes, a partir de los vectores unitarios respectivos.

EJEMPLO RESUELTO I.6

Una partícula se mueve sobre la trayectoria $r = \{8t^2 \mathbf{i} + (t^3 + 5)\mathbf{j}\}$ m, donde t se expresa en segundos. Determinar las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 3$ s. Asimismo, determine la ecuación $y = f(x)$ de la trayectoria.

Solución:

Cálculo de la velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\{8t^2 \mathbf{i} + (t^3 + 5)\mathbf{j}\}}{dt} = 16t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}$$

Con $t = 3$ s

$$\mathbf{v} = 16(3)\mathbf{i} + 3(3)^2\mathbf{j} = 48\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$$

Cálculo de la magnitud de la velocidad

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(48)^2 + (27)^2}$$

$$v = 55.07 \text{ m/s}$$

Cálculo de la aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(16t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j})}{dt} = 16\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

con $t = 3$ s

$$\mathbf{a} = 16\mathbf{i} + 6(3)\mathbf{j} = 16\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$$

Cálculo de la magnitud de la aceleración

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(16)^2 + (18)^2}$$

$$a = 24.08 \text{ m/s}^2$$

Determinación de la ecuación

$$y = f(x)$$

De la ecuación de la trayectoria tenemos que:

$$y = t^3 + 5 \quad (1)$$

$$x = 8t^2 \quad (2)$$

despejando t de (2) nos queda:

$$t = \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

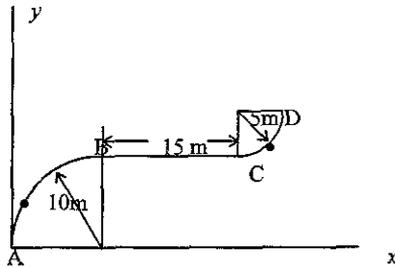
sustituyendo en (1)

$$y = \left[\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + 5$$

$$y = f(x) = \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{3}{2}} + 5$$

EJEMPLO RESUELTO 1.7

Una partícula viaja sobre una curva de A a B en 2s. Le toma 4s pasar de B a C y 3s más llegar de C a D. Determine su velocidad media cuando va de A a D.



Solución:

Distancias:

$$AB = 10\text{m}$$

$$BC = 15\text{m}$$

$$CD = 5\text{m}$$

$$\Sigma = 30\text{m}$$

Tiempos de recorrido

$$t_{AB} = 2\text{s}$$

$$t_{BC} = 4\text{s}$$

$$t_{CD} = 3\text{s}$$

$$\Sigma = 9\text{s}$$

Cálculo de: Velocidad media en la dirección x, y en la dirección y .

$$v_{\text{media } x} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t_x} = \frac{30}{9} = 3.33\text{i} , v_{\text{media } y} = \frac{\Delta r_y}{\Delta t_y} = \frac{15}{9} = 1.67\text{j}$$

por lo tanto

$$v_{\text{media } AD} = 3.33\text{i} + 1.67\text{j}$$

I.17.2.-²³MOVIMIENTO CURVILÍNEO DE UN PUNTO EN UN SISTEMA INTRÍNSECO. (NORMAL Y TANGENCIAL)

Cuando se conoce la trayectoria de una partícula en su movimiento, es conveniente muchas veces describirla por medio de las coordenadas n y t que actúan en forma normal y tangencial con relación a la trayectoria, respectivamente, y en el instante en que se considera su origen está ubicado en la partícula.

MOVIMIENTO EN EL PLANO

Consideremos la partícula P en la figura (I.15) moviéndose en un plano describiendo una curva fija, de tal forma que en un momento dado se ubica en la posición s , determinada a partir del punto O . Ahora consideraremos un sistema de coordenadas con origen en un punto fijo en la curva, y

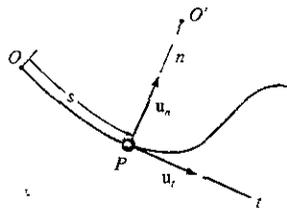


Fig.I.15 Posición

en el instante considerado este origen coincide con la ubicación de la partícula. El eje t es tangente a la curva en P y es positivo en la dirección en que aumenta s . Designaremos esta dirección positiva con el vector unitario u_t . La opción, única para el eje normal se da al considerar el hecho de que, teniendo en cuenta el punto de vista geométrico, la curva es construida a partir de segmentos de arcos diferenciales ds .

Podemos observar en la figura (I.16) que cada segmento ds se forma a partir del arco de un círculo asociado con un radio de curvatura ρ (rho) y un centro de curvatura O' . El eje normal n es perpendicular al eje t y se dirige de P hacia el centro de curvatura O' , esto se ilustra en la figura (I.15).

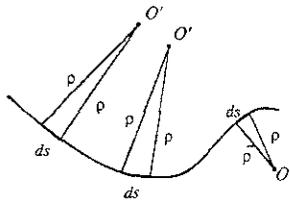


Fig.I.16 Radio de curvatura

²³ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Pág 47.

La dirección positiva, que siempre está en el lado cóncavo de la curva, se designa por el vector unitario u_n . Este plano que contiene los ejes n y t recibe el nombre de plano osculatorio o de osculación.

VELOCIDAD

Ya que la partícula se encuentra en movimiento, s es una función del tiempo. La velocidad v , como ya se indicó anteriormente, tiene una dirección que siempre es tangente a la trayectoria, ilustrado en la figura (I.17), y una magnitud determinada por la derivada respecto al tiempo de la función de trayectoria $s = s(t)$ de tal manera que

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1.1}$$

entonces $v = v u_t$ (1.38)

donde $v = \dot{s}$ (1.39)

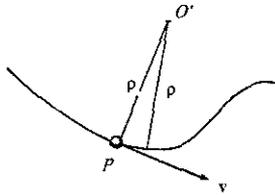


Fig.I.17 Velocidad

ACELERACIÓN

La aceleración de la partícula es la razón de cambio de la velocidad, es decir.

$$\mathbf{a} = \dot{v} = \dot{v} u_t + v u_t \tag{1.40}$$

para calcular \dot{u}_t , se observa que, a medida que la partícula se mueve a lo largo del arco ds en el tiempo dt , u_t mantiene su magnitud unitaria; pero, sin embargo, cambia de dirección, de modo que se convierte en u'_t , como se ve en la figura (I.18).

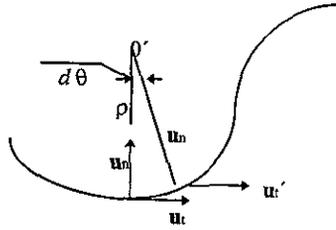


Fig.I.18

Como observamos en la figura (I.19), se requiere que $u' = u_t + du_t$, en este caso, du_t está

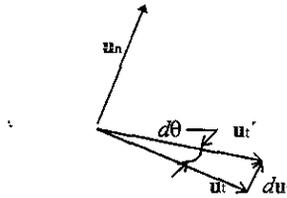


Fig. I.19

comprendida entre las puntas de flecha de u_t y u' , que se encuentran en un arco infinitesimal de radio $u_t = 1$. Por lo tanto, du_t tiene una magnitud de $du_t = (1) d\theta$, y su dirección está definida por un vector unitario u_n . De tal manera, $du_t = d\theta u_n$, y por lo tanto la derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{u}_t = \dot{\theta} u_n$$

Y viendo la figura (I.18) $ds = \rho d\theta$, entonces

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{\rho} \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\dot{u}_t = \dot{\theta} u_n = \frac{\dot{s}}{\rho} u_n = \frac{v}{\rho} u_n$$

sustituyendo en la ecuación de la aceleración tenemos:

$$\boxed{a = a_t u_t + a_n u_n} \quad (1.41)$$

donde

$$a_t = \dot{v} = v \frac{dv}{ds} \quad (1.42)$$

y

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.43)$$

estas dos componentes se muestran en la figura (1.20) donde se observa que, por definición, son perpendiculares entre sí, y su magnitud es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1.44)$$

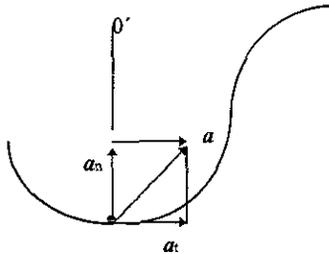


Fig.I.20 Aceleración

Resumiendo:

1) Cuando una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, $\rho \rightarrow \infty$ y con base en la ecuación de a_n , tenemos que $a_n=0$. De este modo se concluye que "la componente tangencial de la aceleración representa la razón de cambio de la magnitud de la velocidad."

2) Cuando la partícula se desplaza sobre una curva con velocidad constante, tenemos que $a_t = \dot{v}=0$ y $a_n = v^2/\rho$. Entonces, tenemos que, "la componente normal de la aceleración representa la razón de cambio en la dirección de la velocidad." Como esta componente de la aceleración siempre actúa hacia el centro de curvatura, algunas veces se le conoce como *aceleración centripeta*.

MOVIMIENTO EN EL ESPACIO

Las relaciones anteriores también se satisfacen en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio, ver figura (I.21), entonces en un momento determinado el eje t se

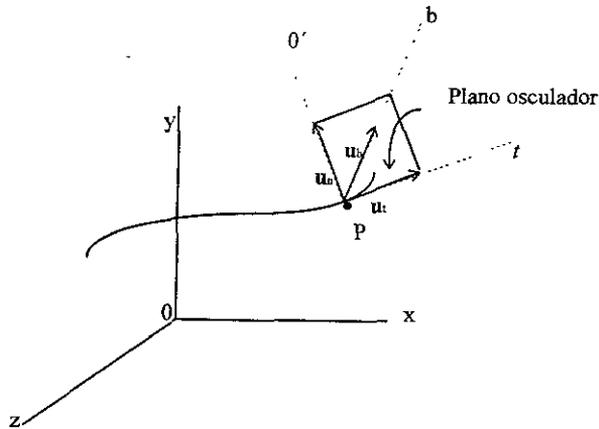


Fig. I.21

específica en forma única; sin embargo, nos es posible trazar un número infinito de líneas rectas perpendiculares al eje tangente en P . De la misma forma que en el movimiento en el plano, se elige el eje positivo n que se dirige de P hacia el centro de curvatura O' de la trayectoria. Dicho eje es conocido como normal principal a la curva en P . Ya con los ejes n y t definidos de dicha manera, es posible utilizar las ecuaciones anteriores para determinar v y a .

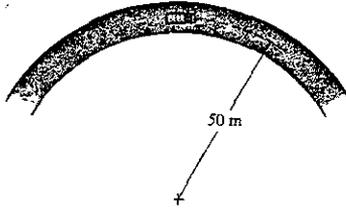
Ya que u_t y u_n son siempre perpendiculares entre sí y se encuentran en el plano osculador para el movimiento en tres dimensiones un tercer vector unitario, u_b , define un eje adicional llamado *eje binormal* b que es perpendicular a u_t y u_n . Entonces $u_b = u_t \times u_n$ define a la binormal en P . El sistema de referencia formado por los tres vectores anteriores recibe el nombre de sistema intrínseco²⁴.

Concluimos que la aceleración de la partícula en P puede descomponerse en dos componentes, una a lo largo de la tangente y otra a lo largo de la normal principal en P . La aceleración no tiene componente a lo largo de la binormal. Debemos recordar que u_n siempre se localiza en el lado cóncavo de la curva.

²⁴Cinemática y Dinámica Básicas para ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 127.

EJEMPLO RESUELTO 1.8

Un automóvil recorre una pista circular cuyo radio es de 50 m. Si lo hace con una rapidez de 16 m/s y ésta se incrementa de manera uniforme en 8 m/s^2 , determine la magnitud de su aceleración en ese instante.



$$\begin{aligned}v &= 16 \text{ m/s} \\a_t &= 8 \text{ m/s}^2 \\r = \rho &= 50 \text{ m}\end{aligned}$$

Solución:

Sistema de coordenadas

En este caso el origen de los ejes t y n coincide con el automóvil en el instante considerado. El eje positivo n se dirige hacia el centro del círculo y el eje t está en la dirección del movimiento. Este sistema de coordenadas fue seleccionado porque conocemos la trayectoria.

Cálculo de la aceleración

La magnitud de la aceleración está dada por

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

conocemos $a_t = 8 \text{ m/s}^2$, para conocer a_n haremos uso de

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(16 \text{ m/s})^2}{50 \text{ m}} = 5.12 \text{ m/s}^2$$

por lo tanto tenemos

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(8)^2 + (5.12)^2}$$

$$a = 9.5 \text{ m/s}^2$$

magnitud de la aceleración

MOVIMIENTO CURVILÍNEO DE UN PUNTO EN SISTEMAS CILÍNDRICOS Y POLARES

Debido a la geometría del problema, algunas veces es conveniente expresar la trayectoria del movimiento de una partícula en términos de coordenadas cilíndricas, r, θ y z . Si el movimiento se limita al plano, se emplea la versión bidimensional de coordenadas cilíndricas, es decir, se usan las coordenadas polares, r y θ .

I.17.3.-²⁵ COORDENADAS POLARES (COORDENADAS EN EL PLANO)

Podemos especificar la posición de la partícula P que se ilustra en la figura (I.22), utilizando la coordenada radial r , la cual se extiende hacia afuera, desde el origen fijo O a la partícula, y una coordenada transversal θ , que es el ángulo medido en sentido contrario a las manecillas del reloj entre una línea fija de referencia y el eje r . El ángulo se mide en grados o radianes, ($1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi$).

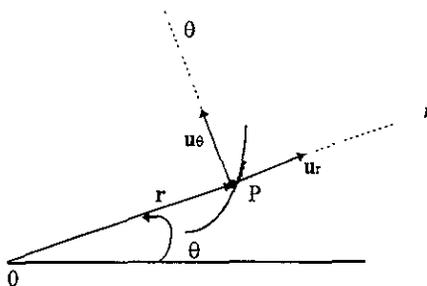


Fig.I.22 Posición

Las direcciones de las coordenadas r y θ quedan definidas mediante los vectores unitarios \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ , respectivamente. Dichas direcciones son perpendiculares entre sí. Aquí, \mathbf{u}_r o la dirección radial $+r$, va desde P a lo largo de la dirección en que aumenta r , y θ se mantiene fijo; y \mathbf{u}_θ o $+\theta$, va desde P en una dirección cuando r se mantiene fijo y θ se incrementa.

POSICIÓN

La posición de la partícula ilustrada en la figura (I.22), en el instante dado, queda definida por el vector de posición

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$(1.45)$$

²⁵ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Pág. 57.

VELOCIDAD

Para obtener la velocidad instantánea v de la partícula P , derivamos la ecuación (1.45) con respecto al tiempo; usando puntos para indicar la derivación obtenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = d(r\mathbf{u}_r) / dt = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r \quad (1.46)$$

Al evaluar $\dot{\mathbf{u}}_r$, se observa que \mathbf{u}_r cambia sólo de dirección respecto al tiempo, ya que por definición la magnitud de este vector es siempre 1. Es decir, durante el tiempo Δt , un cambio en Δr no provocará un cambio en la dirección de \mathbf{u}_r ; sin embargo, un cambio en $\Delta\theta$ hará que \mathbf{u}_r se convierta en \mathbf{u}'_r , donde $\mathbf{u}'_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$, ver figura (I.23)

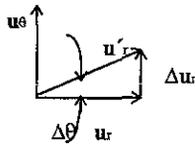


Fig. I.23

Entonces, el cambio en el tiempo en \mathbf{u}_r es $\Delta\mathbf{u}_r$. Como el ángulo es pequeño tenemos que la magnitud de este vector es $\Delta\mathbf{u}_r = 1(\Delta\theta)$ y actúa en la dirección de \mathbf{u}_θ . Entonces, $\Delta\mathbf{u}_r = 1(\Delta\theta)$, y por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (1.47)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de la velocidad nos queda:

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta \quad (1.48)$$

donde

$$v_r = \dot{r} \quad \text{y} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (1.49)$$

En la figura (I.24) se ilustran las componentes radial y angular de la velocidad, en ella se observa que la componente radial v_r es una medida del aumento o reducción en la longitud de la coordenada

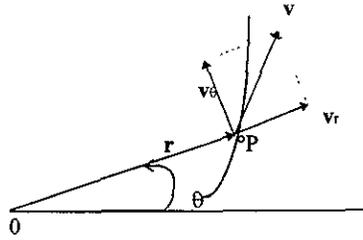


Fig.I.24 Velocidad

radial, es decir, \dot{r} , en tanto que a la componente transversal v_θ es posible interpretarla como la rapidez de movimiento a lo largo de un círculo de radio r . Al término $\dot{\theta} = d\theta / dt$ se le llama velocidad angular, ya que nos proporciona una medida de la razón de cambio del ángulo θ . Ya que v_r y v_θ son perpendiculares entre sí, la magnitud de la velocidad, o rapidez, la obtenemos de

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \quad (1.50)$$

y la dirección de la velocidad v es, como ya hemos visto en casos anteriores, tangente a la trayectoria en P .

ACELERACIÓN

La aceleración de la partícula la obtenemos derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta) = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.51)$$

En este caso no conocemos $\dot{\mathbf{u}}_\theta$, por lo que es necesario evaluar $(\dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta)$ y, para hacerlo, sólo se necesita encontrar el cambio en la dirección de \mathbf{u}_θ , ya que por definición, la magnitud es igual a 1. Durante el tiempo Δt , el cambio Δr no cambia la dirección de \mathbf{u}_θ pero el cambio $\Delta \theta$ hará que \mathbf{u}_θ se convierta en \mathbf{u}'_θ , donde $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta \mathbf{u}_\theta$, esto se ilustra en la figura (I.25). El cambio en el tiempo en \mathbf{u}_θ es, por lo tanto, $\Delta \mathbf{u}_\theta$.

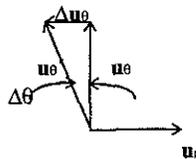


Fig.I.25

Para ángulos pequeños, este vector tiene una magnitud $\Delta u_\theta = r(\Delta\theta)$ y actúa en dirección $-\mathbf{u}_r$ entonces, $\Delta u_\theta = -\Delta\theta \mathbf{u}_r$, por lo que,

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = - \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r \quad (1.52)$$

y como ya se había obtenido anteriormente $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$; sustituyendo estas igualdades en la ecuación de la aceleración nos queda

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta \quad (1.53)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \quad (1.54)$$

donde

$$\begin{aligned} a_r &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ a_\theta &= (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

En particular el término $\ddot{\theta} = d^2\theta / dt^2$ recibe el nombre de aceleración angular, ya que mide el cambio realizado en la razón de cambio de θ durante un instante en el tiempo. Las unidades de la aceleración angular son rad/s^2 .

Como a_r y a_θ son siempre perpendiculares entre sí, la magnitud de la aceleración se obtiene de

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \quad (1.56)$$

la dirección se determina a partir de la suma vectorial de sus dos componentes. Debemos considerar que la aceleración \mathbf{a} no es tangente a la trayectoria, Esto se ilustra en la siguiente figura (1.26).

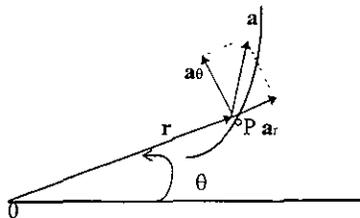


Fig.1.26

De los resultados obtenidos es evidente que:

- a) α_r no es igual a la derivada con respecto al tiempo de v_r .
- b) α_θ no es igual a la derivada con respecto al tiempo de v_θ .

Cuando una partícula se desplaza en un círculo de centro 0, $r = \text{constante}$ y $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, entonces las fórmulas de la velocidad y la aceleración nos quedan de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta} \quad (1.57)$$

$$\boxed{\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta} \quad (1.58)$$

I.17.4.- ²⁶COORDENADAS CILÍNDRICAS

Algunas ocasiones, la posición en el espacio de una partícula P se define por sus coordenadas cilíndricas r , θ y z , esto se ilustra en la figura (I.27)

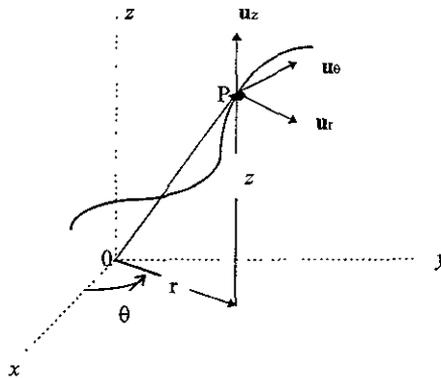


Fig.I.27

Es evidente que la coordenada z es idéntica a la empleada con coordenadas rectangulares y como el vector unitario que nos define la dirección \mathbf{u}_z , es constante, la derivada respecto al tiempo es cero por lo que podemos describir la posición, velocidad y aceleración de la partícula en términos de sus coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

Posición. $\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z \quad (1.59)$

Velocidad. $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \quad (1.60)$

Aceleración. $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z \quad (1.61)$

²⁶ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler. Pág. 60.

DEFINICIONES DE:

- I.18) Posición**
- I.19) Desplazamiento**
- I.20) Velocidad**
- I.21) Rapidez**
- I.22) Aceleración y**
- I.23) Acelerante angulares**

I.18 $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$

I.19) $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} =$ Desplazamiento (Se calcula por medio de una resta vectorial).

I.20) $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} =$ Velocidad angular

I.21) $v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} =$ Rapidez o magnitud de la velocidad

donde $\dot{r} = v_r =$ medida del aumento o disminución en la longitud de la coordenada radial , y

$r\dot{\theta} = v_{\theta} =$ rapidez de movimiento a lo largo de un círculo de radio r .

I.22) $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} =$ Aceleración angular

I.23) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 =$ acelerante o magnitud en la dirección radial , y

$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} =$ acelerante o magnitud en la dirección transversal.

$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} =$ Acelerante angular

Nuevamente , es importante hacer notar que a_r no es la derivada respecto al tiempo de v_r y tampoco a_{θ} es igual a la derivada respecto al tiempo de v_{θ} .

Nota: Para la deducción de las ecuaciones anteriores ver el capítulo de coordenadas cilíndricas y polares.

EJEMPLO RESUELTO 1.9

Si la posición de una partícula se describe por medio de las coordenadas polares $r = (2 \text{ sen } 2\theta) \text{ m}$ y $\theta = (4t) \text{ rad}$, donde t se expresa en segundos, determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 1 \text{ s}$.

Solución:

Posición:

coordenada radial $r = (2 \text{ sen } 2\theta) \text{ m}$ (1)

coordenada transversal $\theta = (4t) \text{ rad}$ (2)

Derivando (2) dos veces tenemos:

$$\dot{\theta} = 4 \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad (4)$$

Cálculo de las velocidades

Derivando (1) tenemos
(con la regla de la cadena)

$$v_r = \dot{r} = 2 \cos 2\theta (2\dot{\theta})$$

$$\dot{r} = v_r = 4\dot{\theta} \cos 2\theta \quad (5)$$

Sustituyendo $t = 1 \text{ s}$ en (2)

$$\theta = 4 \text{ rad} \quad (6)$$

Sustituyendo (3) y (6) en (5)

$$v_r = 4(4) \cos 2(4) = 16 \cos 8$$

$$v_r = -2.33 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad (7)$$

Sustituyendo (3) y (6) en (1)

$$r = 2 \text{ sen } 2(4) = 2 \text{ sen } 8$$

$$r = 1.978 \text{ m} \quad (8)$$

Sustituyendo (3) y (8) en (7)

$$v_\theta = (1.978)(4) = 7.91 \text{ m/s}$$

Cálculo de las aceleraciones

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (9)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (10)$$

Derivando (5) tenemos

$$\ddot{r} = -8\theta^2 \text{ sen } 2\theta + 4\ddot{\theta} \cos 2\theta \quad (11)$$

Sustituyendo (2),(3) y (4) en (11) y realizando operaciones nos queda

$$\ddot{r} = -126.63 \text{ m/s}^2 \quad (12)$$

Sustituyendo, ahora, (1), (3) y (12) en (9)

$$a_r = -158 \text{ m/s}^2$$

Para el cálculo de a_θ debemos sustituir (1), (3) (4) y (5) en (10), por lo tanto, tenemos:

$$a_\theta = 0 + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2(-2.33)(4)$$

$$a_\theta = -18.6 \text{ m/s}^2$$

I.24.- ²⁷RELACIÓN DE POISSON

Consideremos una barra como la mostrada en la figura (I.28) sometida a la carga axial T. En condiciones sin carga la longitud de la barra es L y el diámetro es D. El área de sección transversal

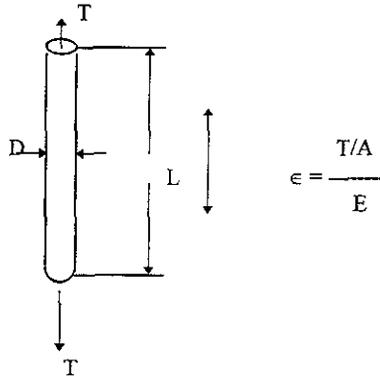


Fig.I.28 Barra en deformación axial

de la barra es A. Si aplicamos una carga tal que el esfuerzo no exceda el límite elástico del material, la deformación axial está dada por

$$\epsilon = \frac{T/A}{E} = \frac{\sigma_a}{E} \quad (1.62)$$

donde σ_a es el esfuerzo axial y E el módulo de elasticidad del material o módulo de Young. La relación

$$\epsilon_a = \frac{dL}{L} \quad (1.63)$$

²⁷ Métodos Experimentales para Ingenieros. Jack P. Holman, Resistencia de Materiales. William A. Nash. Págs. 417 y 6. La tabla de la pág. 43 se elaboró con datos del libro. Diseño de Elementos de Máquina Virgil Moring Faires. Pág. 728.

define a la deformación unitaria axial ϵ_a , es decir, es la deformación axial por unidad de longitud, resultante de la deformación en la dirección axial. Es una deformación correspondiente en el área de la sección transversal de la barra. El cambio del área lo evidencia el cambio de diámetro o el cambio de la dimensión transversal. La razón de la deformación unitaria en la dirección axial se define como Relación de Poisson y debe determinarse en forma experimental para diversos materiales.

$$\mu = \frac{-\epsilon_t}{\epsilon_a} = \frac{-dD/D}{dL/L} \quad \text{Relación de Poisson} \quad (1.64)$$

La relación de Poisson se representa por la letra griega μ .

Un valor típico de la relación de Poisson para muchos materiales es 0.3, para la mayoría de los metales está entre 0.25 y 0.35, a continuación se da una pequeña lista de materiales y su correspondiente coeficiente de Poisson:

MATERIAL	COEFICIENTE DE POISSON μ
Aleación de aluminio	0.33
Aleación de magnesio	0.35
Hierro gris	0.211
Hierro maleable	0.265
Hierro nodular	0.16
Acero moldeado	0.27
Acero forjado	0.3

EJEMPLO RESUELTO 1.10

Una barra de acero cuadrada de 5 cm de lado y un metro de longitud está sometida a una fuerza de tracción axial de 32 000 kg. Determine la disminución de la dimensión lateral debida a esta carga. Considerar:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu = 0.3$$

La tracción es axial, por lo cual la tensión en la dirección de la misma está dada por

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{32000 \text{ kg}}{25 \text{ cm}^2} = 1280 \text{ kg/cm}^2$$

La ley de Hooke para las cargas uniaxiales es $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

La deformación ϵ en la dirección de la carga es, por lo tanto, $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

$$\epsilon = \frac{1280 \text{ kg/cm}^2}{2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2} = 0.00061$$

La relación entre las deformaciones lateral y axial se llama relación de Poisson, es decir,

$$\mu = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

Encontramos la deformación axial $\epsilon = 0.00061$, entonces la deformación lateral será

$$\epsilon \times \mu = \text{deformación lateral} = 0.00061 \times 0.3 = 0.000183$$

Ya que la deformación lateral unitaria es 0.000183, la variación en una longitud de 5 cm es de 0.000915 cm, que representa la disminución de la dimensión lateral de la barra.

Nota: La definición de relación de Poisson, como cociente entre dos deformaciones, presupone que solo actúa en el elemento una carga uniaxial.

I.25.-²⁸ DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS DE UNA RECTA EN MOVIMIENTO:

- a) Para el caso general
- b) Para casos particulares

a) Características cinemáticas de una recta en movimiento para el caso general.

Sea un segmento de recta AB al que podemos imaginar como un vector de posición, a partir de un punto de referencia A , hacia cualquier otro punto B , o como una sucesión de partículas de un cuerpo rígido a lo largo de la recta AB . Ahora supongamos que el segmento se mueve en el espacio desde AB hasta $A'B'$ durante un intervalo de tiempo Δt , ver figura (I.29). Este movimiento

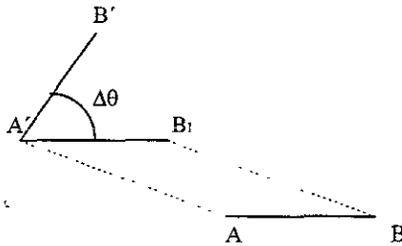


Fig.I.29

se puede considerar en dos etapas: la traslación de AB a $A'B_1$ y la rotación a la posición final $A'B'$, en un plano formado por $B'A'B_1$. Consideremos a $\Delta\theta$ como el ángulo descrito por el segmento de recta durante el intervalo de tiempo Δt , siendo $\Delta\theta$ un ángulo infinitesimal.

Sea ahora el caso simple en el que un segmento de recta AB , con el punto A fijo, se mueve en un plano. Durante el intervalo de tiempo Δt , el segmento de recta se mueve desde AB hasta AB' describiendo un ángulo $\Delta\theta$, ver figura (I.30). Podemos considerar a AB y AB' como vectores de posición con respecto a A , cuando una partícula se mueve desde B hasta B' , ver figura (I.31). De ésta, observamos que el vector de posición gira desde AB hasta AB' describiendo un ángulo $\Delta\theta$ durante el intervalo Δt . Estos dos casos simples corresponden a la rotación ilustrada en la figura (I.29).

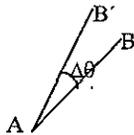


Fig.I.30

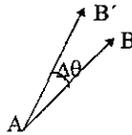


Fig I.31

²⁸Mecánica para Ingenieros. Dinámica. T.C. Huang Pág. 596.

Los desplazamientos angulares infinitesimales son cantidades vectoriales , por lo tanto , definimos a $\Delta\theta$ como el desplazamiento angular del segmento de recta AB durante el intervalo de tiempo Δt , es decir , como una cantidad vectorial con magnitud , dirección y sentido , de la manera siguiente:

Magnitud = $\Delta\theta$

Dirección = Perpendicular al plano que contiene a A'B₁ y A'B' en la figura (I.29) o a AB y AB' en las figuras (I.30) y (I.31).

Sentido = Al del avance del eje de un tirabuzón de rosca derecha o de acuerdo a la regla de la mano derecha.

También se define:

$$\text{Velocidad angular media} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\text{Velocidad angular instantánea} = \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\text{Aceleración angular media} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\text{Aceleración angular instantánea} = \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

En palabras podemos expresar, *la velocidad angular* es la rapidez de variación de cambio del desplazamiento angular , y *la aceleración angular* es la rapidez de variación de cambio de la velocidad angular , donde ambas son cantidades vectoriales.

b) Características cinemáticas de una recta en movimiento para casos particulares .

Uno de los casos de este tipo de movimiento es cuando la partícula describe un movimiento circular , es decir , el radio de la partícula o distancia de O a P es constante.

I.26.- MOVIMIENTOS CIRCULARES: determinación de las relaciones entre las características cinemáticas de los puntos que los realizan , y las de las rectas que unen a dichos puntos con el centro del círculo correspondiente.

Este es el caso del movimiento de una partícula en un círculo con centro en O , por lo tanto , tenemos que:

$$r = \text{constante}$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\ddot{r} = 0$$

y las ecuaciones, por lo tanto , son las ya deducidas en coordenadas polares, es decir

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (1.57)$$

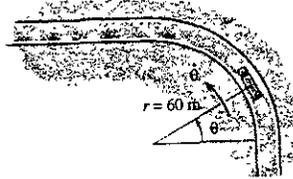
y

$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (1.58)$$

EJEMPLO RESUELTO I.11

Un camión recorre una pista circular, cuyo radio es de $r = 60$ m, con una rapidez constante $v = 20$ m/s.

Determine el ritmo de rotación angular $\dot{\theta}$ de la línea radial r y la magnitud de la aceleración del camión.



Solución:

Datos:

$$r = 60 \text{ m} = \text{constante}$$

$$v = 20 \text{ m/s} = \text{constante}$$

Ya que es necesario conocer las derivadas de primero y segundo orden tenemos:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad (1)$$

Cálculo de las velocidades

$$v_r = \dot{r} = 0 \quad (2)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 20 \text{ m/s} \quad (3)$$

Despejando $\dot{\theta}$ de (3) tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{20 \text{ m/s}}{60 \text{ m}} = 0.3333 \text{ rad/s}$$

Cálculo de las aceleraciones

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - r\dot{\theta}^2 = -60 \text{ m} (0.333 \text{ rad/s})^2$$

$$a_r = -6.67 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = \ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (\text{porque } \ddot{\theta} = 0 \text{ y } \dot{r} = \ddot{r} = 0)$$

Por lo tanto la magnitud de la velocidad será:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-6.67)^2 + 0}$$

$$a = 6.67 \text{ m/s}^2$$

TEMA II.- " MOVIMIENTO RELATIVO "

OBJETIVO: Describir las características cinemáticas absolutas y relativas de un punto y aplicarlas en la resolución de problemas de movimientos de puntos relacionados entre sí.

II.1.- POSICIÓN

Sean dos partículas , A y B, moviéndose a lo largo de la misma línea recta²⁹, figura (II.1). Si las

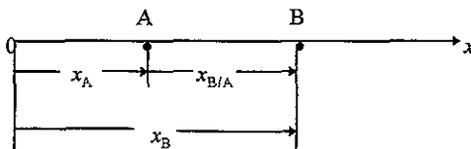


Fig.II.1 Posición

coordenadas de posición x_A y x_B son medidas desde el mismo origen, la diferencia $x_B - x_A$ define a la *coordenada de posición relativa de B respecto de A* y se designa por $x_{B/A}$. Por lo tanto escribimos

$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{o} \quad \boxed{x_B = x_A + x_{B/A}} \quad (2.1)$$

Si $x_{B/A}$ es positivo significa que B está ubicado a la derecha de A, independientemente de la posición de A y de B con respecto al origen.

II.2.- VELOCIDAD

La derivada con respecto al tiempo o rapidez de cambio de $x_{B/A}$ nos representa la *velocidad relativa de B respecto de A* y se designa por $v_{B/A}$. Derivando la ecuación (2.1), nos queda

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{o} \quad \boxed{v_B = v_A + v_{B/A}} \quad (2.2)$$

II.3.- ACELERACIÓN

Si $v_{B/A}$ es positivo significa que desde A se observa que B se mueve en dirección positiva; si $v_{B/A}$ es negativo significa que se le ve moverse en la dirección negativa.

La rapidez de cambio de $v_{B/A}$ es conocida como la *aceleración relativa de B con respecto de A* y es representada por $a_{B/A}$. Derivando la ecuación (2.2), nos queda

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{o} \quad \boxed{a_B = a_A + a_{B/A}} \quad (2.3)$$

²⁹ Para el movimiento en línea recta. La información se tomó del libro: Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 489.

³⁰ **Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación.**

En los casos anteriores se ha utilizado un solo sistema de referencia para describir el movimiento de una partícula. Ahora se analizarán situaciones en las que es conveniente utilizar simultáneamente varios sistemas de referencia. Si uno de ellos está unido a la tierra lo llamaremos sistema de referencia fijo y a los otros los llamaremos sistemas de referencia en movimiento, pero debemos entender que la selección de un sistema de referencia fijo es arbitraria.

Consideremos dos partículas A y B que se mueven en el espacio, ver figura (II.2); sus posiciones en cualquier instante respecto al sistema de referencia fijo $0xyz$ quedan definidas por los vectores \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B . Ahora consideremos un sistema de ejes x',y',z' centrado en A y paralelo a los ejes x,y,z . Mientras el origen de estos ejes se mueve, su orientación sigue siendo la misma; es decir, el sistema de referencia

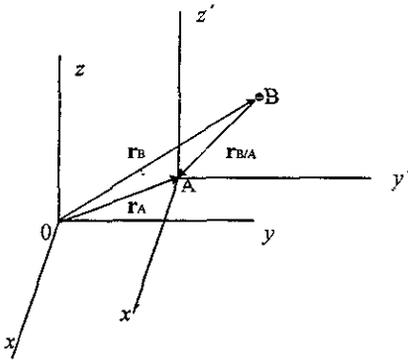


Fig.II.2 Posición

$Ax'y'z'$ está en traslación respecto de $0xyz$. El vector $\mathbf{r}_{B/A}$ que une a A y a B define la posición de B relativa al sistema en movimiento $Ax'y'z'$, es decir, la posición de B relativa a A. De la figura (II.2) vemos que el vector de posición \mathbf{r}_B de la partícula B es la suma del vector de posición \mathbf{r}_A de la partícula A y del vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A, es decir:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (2.4)$$

³⁰ Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 509.

POSICIÓN

De la figura (II.2) se observa que:

Posición absoluta de A = \mathbf{r}_A

Posición absoluta de B = \mathbf{r}_B .

Las posiciones absolutas de las partículas A y B se determinan a partir del origen común 0 del marco de referencia xyz.

Posición relativa de B con respecto a A = $\mathbf{r}_{B/A}$.

Se determina a partir del origen A del sistema de referencia en movimiento $x'y'z'$.

VELOCIDAD

Derivando la ecuación de la posición con respecto al tiempo, es decir,

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}$$

las cuales nos representan velocidades absolutas porque están referidas al marco de referencia fijo; en tanto que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

nos representa la velocidad de B con respecto de A ya que está referida a partir del marco de referencia en traslación; debido a que los ejes $x'y'z'$, se trasladan, es importante observar que, las componentes de $\mathbf{r}_{B/A}$ no cambiarán de dirección y por lo tanto la derivada con respecto al tiempo de este vector sólo nos representa el cambio en la magnitud del mismo, por tanto, tenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \quad (2.5)$$

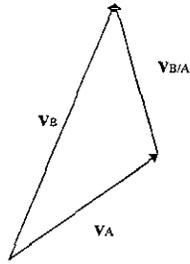


Fig.II.3

La ecuación anterior establece que la velocidad de B es igual a la velocidad de A más la velocidad de B con respecto de A, vectorialmente, las cuales son medidas por un observador en movimiento fijo en el marco de referencia $x'y'z'$.

ACELERACIÓN

Derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo obtenemos una relación vectorial similar entre las aceleraciones absolutas y relativa de las partículas A y B.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (2.6)$$

Aquí, $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de B de acuerdo a como la percibe un observador que está ubicado en A y que se traslada con el marco de referencia $x'y'z'$. La figura(II.4) nos muestra lo anterior.

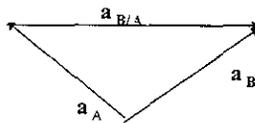


Fig.(II.4)

II.4.-³¹ VELOCIDAD Y ACELERACION DE ARRASTRE

A manera de introducción:

Si un cuerpo sólido se desplaza en un fluido , por ejemplo , un avión en el aire , da origen a unas fuerzas que no se dan cuando una nave espacial se desplaza en el vacío. La resultante de estas fuerzas en la dirección del movimiento es el arrastre o resistencia. El origen de estas fuerzas es la viscosidad.

Por el principio de acción y reacción el cuerpo ejerce sobre el fluido una fuerza igual y de sentido contrario a la que el fluido ejerce sobre el cuerpo. Es decir , el fenómeno de la resistencia que un sólido experimenta al moverse en un fluido es fundamentalmente igual al de la resistencia que un fluido experimenta al moverse en el interior de un sólido , como una tubería.

En estos casos , es decir , cuando un objeto se mueve a través de un líquido o en el aire , el medio ejerce una fuerza resistiva sobre el objeto. Generalmente se encuentra que la magnitud de la fuerza de rozamiento aumenta al aumentar la velocidad.

Estudiaremos dos casos . En el primero se supondrá que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad. Los objetos que experimentan este tipo de fuerzas son los que caen a través de un fluido y los muy pequeños , como las partículas de polvo que se mueven en el aire. En el segundo , analizaremos situaciones en las que se supone que la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto. Los objetos grandes , como un paracaidista que se mueve en el aire en caída libre en presencia de la gravedad, experimentan una fuerza de este tipo.

Fuerza de resistencia proporcional a la velocidad

Cuando un objeto se mueve con baja rapidez a través de un medio viscoso, experimenta una fuerza de resistencia que es proporcional a la velocidad del objeto. Supóngase que la fuerza de rozamiento R tiene la forma

$$R = -bv \quad (2.7)$$

donde v es la velocidad del objeto y b es una constante dependiente de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto. Si éste es una esfera de radio r , entonces se encuentra que b es proporcional a r .

Sea una esfera de masa m que se suelta a partir del reposo en un fluido ver fig. (II.5). Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la resistiva , $-bv$, y el peso, mg , se dará una descripción de su movimiento.

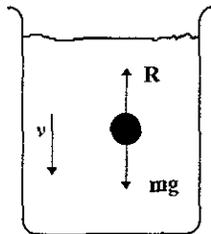


Fig.(II.5)

³¹ Física. Raymond A. Serway. Pág. 141. Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas C. Mataix Pág. 279.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical, con la dirección positiva hacia abajo, y observando que $\Sigma F_y = mg - bv$, obtenemos

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt}$$

despejando $dv/dt = a$ en la expresión anterior se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v \quad (2.8)$$

Obsérvese que al inicio, cuando $v = 0$, la fuerza resistiva es cero y la aceleración, dv/dt , es igual a g .

A medida que t se incrementa, la fuerza de rozamiento aumenta y la aceleración disminuye. En cierto momento, la aceleración llega a cero cuando la fuerza de rozamiento es igual al peso. En ese instante el cuerpo continúa su movimiento con aceleración cero y alcanza su *velocidad terminal*, v_t . Podemos obtener la velocidad terminal a partir de la ecuación (2.8) haciendo $a = dv/dt = 0$. Por lo tanto, tenemos

$$v_t = mg/b$$

La expresión para v que satisface la ecuación (2.8) con $v = 0$ en $t = 0$ es

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) = v_t (1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.9)$$

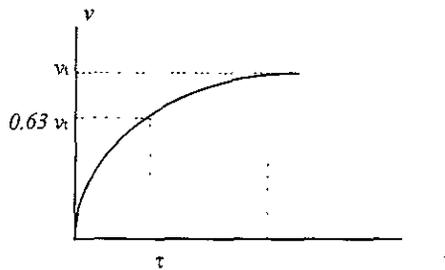


Fig. (II.6)

En la figura (II.6) se ilustra la gráfica de esta función. El tiempo $\tau = m/b$ es el que requiere el objeto para alcanzar un 63 % de su velocidad terminal.

Ejemplo. Una esfera cuya masa es de 2 g es liberada partiendo del reposo en un cilindro lleno de aceite. La esfera alcanza una velocidad terminal de 5 cm/s. Determinar la constante τ y el tiempo t que le toma a la esfera alcanzar 90 % de su velocidad terminal.

Solución: Ya que $v_t = mg/b$, despejando b tenemos

$$b = \frac{mg}{v_t} = \frac{(2g)(980\text{cm/s}^2)}{5\text{cm/s}} = 392 \text{ g/s}$$

El tiempo τ lo calculamos de
$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2g}{392 \text{ g/s}} = 5.1 \times 10^{-3} \text{ s}$$

La ecuación para la velocidad como función del tiempo es

$$v = v_t(1 - e^{-t/\tau})$$

Para calcular el tiempo t que le toma a la esfera alcanzar una velocidad de 0.90 v_t , sustituimos

$$v = 0.90 v_t \text{ en la expresión anterior y despejamos :}$$

$$0.90 v_t = v_t(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.90$$

$$e^{-t/\tau} = 0.10$$

$$\frac{-t}{\tau} = \ln 0.10 = -2.30$$

por lo tanto tenemos
$$t = 2.30 \tau$$

finalmente tenemos
$$t = 2.30 (5.1 \times 10^{-3} \text{ s})$$

$t = 0.0117 \text{ s}$

Resistencia del aire

En el análisis anterior tratamos con objetos pequeños, sin embargo, para objetos más grandes que se mueven a altas velocidades a través del aire, como los aviones, los paracaidistas y las pelotas de béisbol la fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional al cuadrado de la rapidez. En estos casos, la magnitud de la fuerza de resistencia la podemos expresar como

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)C\rho Av^2 \quad (2.10)$$

donde

ρ = densidad del aire

A = área de la sección transversal del objeto que cae medida en un plano perpendicular a su movimiento.

C = cantidad empírica adimensional denominada *coeficiente de resistencia*

El coeficiente de resistencia tiene un valor de 0.5 para objetos esféricos, pero puede llegar a valer 2 para los objetos de forma irregular.

Consideremos un avión en vuelo que experimenta una fuerza de este tipo. En la ecuación (2.10) se muestra que la resistencia es proporcional a la densidad del aire y por consiguiente disminuye al disminuir esa densidad. Como la densidad del aire disminuye al aumentar la altitud, la fuerza de resistencia que actúa sobre un avión de propulsión a chorro que vuela con una rapidez dada también debe disminuir al aumentar la altitud. Además, si se duplica la rapidez del avión, la fuerza de resistencia aumenta en un factor de 4. Para mantener una rapidez constante, la fuerza de propulsión también debe aumentar en un factor de 4 y la potencia requerida (fuerza por rapidez) debe incrementarse en un factor de 8.

Analizaremos ahora el movimiento de una masa que cae libremente y está sujeta a una resistencia del aire dirigida hacia arriba dada por la ecuación (2.10).

Supongamos que se libera una masa m partiendo del reposo desde la posición $y = 0$, ver figura (II.7)



Fig.(II.7)

La masa experimenta dos fuerzas externas: el peso, mg , dirigido hacia abajo y la fuerza de resistencia, R , hacia arriba. En consecuencia, la magnitud de la fuerza neta es

$$F_{\text{net}} = mg - \frac{1}{2} C\rho Av^2 \quad (2.11)$$

Sustituyendo $F_{\text{net}} = ma$ en la ecuación (2.11) encontramos que la masa tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \frac{C\rho Av^2}{2m} \quad (2.12)$$

Nuevamente podemos calcular la velocidad terminal, v_t , considerando el hecho de que cuando el peso queda equilibrado por la fuerza de resistencia, la fuerza neta es cero y como consecuencia la aceleración es cero. Haciendo $a = 0$ en la ecuación (2.12) tenemos

$$a = 0 = g - \frac{C_p A v_t^2}{2m}$$

despejando v_t , nos queda

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C_p A}} \tag{2.13}$$

En la siguiente tabla se dan las velocidades terminales de algunos objetos que caen en el aire. En esta tabla se supone que el coeficiente de resistencia C es de 0.5.

Objeto	Masa (kg)	Área (m ²)	v_t (m/s)
Paracaidista	75	0.7	60
Pelota de béisbol (radio 3.66 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	33
Pelota de golf (radio 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	32
Granizo (radio 0.5 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (radio 0.2 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9

II.5.-³² ACELERACIÓN DE CORIOLIS

Para determinar y dar una definición de la aceleración de Coriolis se considerará primero el movimiento en el plano de una partícula con relación a un sistema en rotación. En un tema posterior se determinará la aceleración de Coriolis para un sistema tridimensional.

Movimiento Plano de una partícula con relación a un sistema en rotación: **Aceleración de Coriolis.**

Sean dos sistemas de referencia, ambos centrados en O y los dos en el plano de la figura (II.8): un sistema fijo OXY , y un sistema en rotación Oxy , donde P es una partícula que se mueve en el plano de la figura. El vector de posición \mathbf{r} de P es el mismo en ambos sistemas, pero su rapidez de cambio dependerá del sistema de referencia elegido.

La velocidad absoluta \mathbf{v}_P de la partícula queda definida como la velocidad observada desde el sistema fijo OXY y es igual a la rapidez de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}$ de \mathbf{r} respecto de ese sistema.

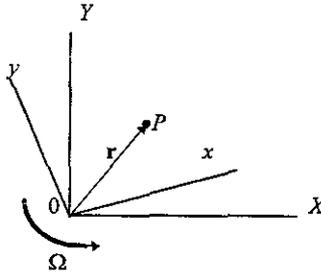


Fig.II.8

Podemos, también expresar \mathbf{v}_P en términos de la rapidez de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}$ que se observa desde un sistema en rotación utilizando la siguiente ecuación.

$$\boxed{(\dot{\mathbf{Q}})_{0XYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{0xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}} \quad (2.14)$$

Esta ecuación indica que la rapidez de cambio del vector \mathbf{Q} respecto al sistema fijo $OXYZ$ está compuesta de dos partes: la primera representa la rapidez de cambio de \mathbf{Q} respecto al sistema giratorio $Oxyz$; la segunda $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$, se induce por la rotación del sistema $Oxyz$. La ecuación (2.14) representa a \mathbf{v}_P en un plano tridimensional. Ahora, para el sistema en el plano ya indicado figura (II.8), sea Ω la velocidad angular del sistema Oxy respecto a OXY en el instante considerado tenemos:

$$\boxed{\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{0XY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{0xy}} \quad (2.15)$$

³² Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 760.

Donde $(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}$ define la velocidad de la partícula P relativa al sistema en rotación $0xy$. A partir de aquí representaremos al sistema giratorio por F por comodidad, por lo tanto, representaremos la velocidad $(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}$ de P relativa al sistema giratorio por $\mathbf{v}_{P/F}$.

Imaginando que una placa rígida se sujeta al sistema giratorio, $\mathbf{v}_{P/F}$ representará la velocidad de P a lo largo de la trayectoria descrita sobre la placa, figura (II.9).

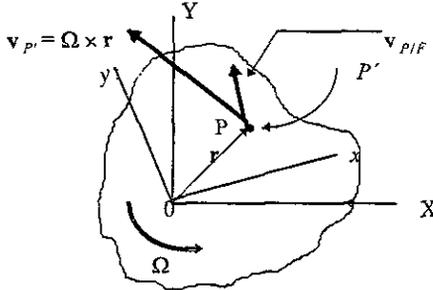


Fig.II.9

Por otro lado, la expresión $\Omega \times \mathbf{r}$ en (2.15) representará a la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ del punto P' de la placa (o sistema giratorio) que coincide con P en el instante considerado. Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/F} \quad (2.16)$$

Donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de la partícula P .

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema en movimiento que coincide con P .

$\mathbf{v}_{P/F}$ = Velocidad de P relativa al sistema en movimiento F .

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de la partícula se define como la rapidez de cambio de \mathbf{v}_P respecto al sistema fijo $0XY$.

Derivando (2.15) respecto a $0XY$ tenemos:

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}] \quad (2.17)$$

todas las derivadas se definen respecto a $0XY$ excepto donde se indique lo contrario. En relación con la ecuación (2.14) observamos que el último término de la ecuación (2.17) lo podemos expresar como

$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{0xy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{0xy} + \Omega \times (\dot{\mathbf{r}})_{0xy}$$

Por otro lado, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_P$, por lo tanto podemos sustituirla por el miembro del lado derecho de la ecuación (2.15). Haciendo las sustituciones nos queda:

$$\mathbf{a}_P = \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2\Omega \times (\dot{\mathbf{r}})_{0xy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{0xy} \quad (2.18)$$

o también

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P|F} + \mathbf{a}_C \quad (2.19)$$

De la ecuación anterior observamos que:

\mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'} = \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ = aceleración del punto P' del sistema en movimiento F que coincide con P.

$\mathbf{a}_{P|F} = (\ddot{\mathbf{r}})_{0xy}$ = aceleración de P relativa al sistema en movimiento F

$\mathbf{a}_C = 2\Omega \times (\dot{\mathbf{r}})_{0xy} = 2\Omega \times \mathbf{v}_{P|F}$ = aceleración complementaria o de Coriolis.

Este último término \mathbf{a}_C , es conocido como aceleración de Coriolis, en honor al matemático y físico francés Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843).

Como el punto P' se mueve en un círculo con centro en 0, su aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ consta generalmente de dos componentes: una $(\mathbf{a}_{P'})_t$, tangente a la trayectoria y otra $(\mathbf{a}_{P'})_n$ dirigida hacia 0. De manera semejante la aceleración $\mathbf{a}_{P|F}$ tiene en general dos componentes: una $(\mathbf{a}_{P|F})_t$, tangente a la trayectoria que describe P sobre la placa giratoria, y otra $(\mathbf{a}_{P|F})_n$ dirigida hacia el centro de curvatura de esa trayectoria.

Además, como el vector Ω es perpendicular al plano del movimiento y de esta forma a $\mathbf{v}_{P|F}$, la magnitud de la aceleración de Coriolis

$$\mathbf{a}_C = 2\Omega \times \mathbf{v}_{P|F} \quad \text{es} \quad a_C = 2\Omega v_{P|F}$$

y su dirección la podemos obtener girando el vector $\mathbf{v}_{P/F}$ 90° en el sentido de rotación del sistema en movimiento, figura (II.10). La aceleración de Coriolis es cero cuando Ω ó $\mathbf{v}_{P/F}$ sean cero.

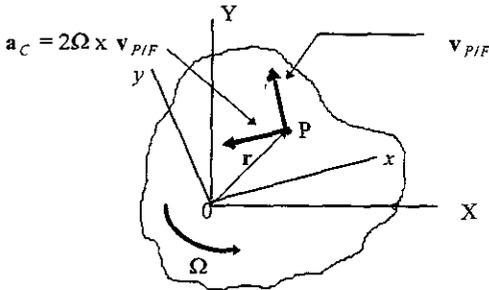


Fig.II.10

Las ecuaciones (2.16) y (2.19) nos sirven para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan entre sí. Permiten relacionar los movimientos absoluto y relativo de pasadores y collares deslizantes. El concepto de la aceleración de Coriolis es muy útil en el estudio de proyectiles de largo alcance y de otros cuerpos cuyo movimiento es afectado por la rotación de la Tierra.

Movimiento tridimensional de una partícula en relación a un sistema en rotación: Aceleración de Coriolis.

Analizaremos el movimiento tridimensional de la partícula P en relación a un sistema giratorio restringido a un solo origen O .

Sea \mathbf{r} el vector de posición de P en un instante dado y Ω la velocidad angular del sistema $Oxyz$ respecto al sistema fijo $OXYZ$ en el mismo instante, figura (II.11). Podemos expresar la velocidad absoluta

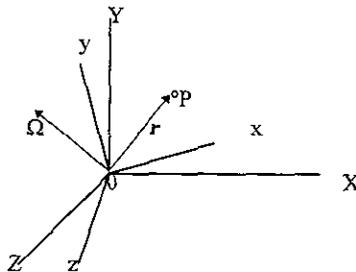


Fig.II.11

\mathbf{v}_P de P como

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{0xy} \quad (2.20)$$

nuevamente representamos por F al sistema giratorio $0xyz$, entonces podemos escribir esta relación de la manera alterna siguiente

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/F} \quad (2.21)$$

donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de la partícula P .

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema móvil F que coincide con P .

$\mathbf{v}_{P/F}$ = velocidad de P relativa al sistema móvil F

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de P la podemos expresar como

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{0xyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{0xyz} \quad (2.22)$$

también podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/F} + \mathbf{a}_C \quad (2.23)$$

donde \mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema móvil F que coincide con P .

$\mathbf{a}_{P/F}$ = aceleración de P relativa al sistema móvil F .

$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{0xyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/F}$ = aceleración complementaria o de Coriolis.

Es de notar que la aceleración de Coriolis es perpendicular al vector $\boldsymbol{\Omega}$ y a $\mathbf{v}_{P/F}$. No obstante, como estos vectores no son usualmente perpendiculares entre sí, la magnitud de \mathbf{a}_C no es igual por lo general a $2\boldsymbol{\Omega} v_{P/F}$ como fue en el caso del movimiento plano de una partícula. También se observa que la aceleración de Coriolis es cero cuando los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/F}$ son paralelos o cuando alguno de ellos es cero.

II.6.-³³ ESTABLECIMIENTO DE LAS EXPRESIONES PROPIAS DEL CASO GENERAL DE MOVIMIENTO RELATIVO.

Sea un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema $Axyz$ que se mueve de forma conocida pero arbitraria respecto a $OXYZ$ figura (II.12). Consideremos una partícula P moviéndose en el espacio

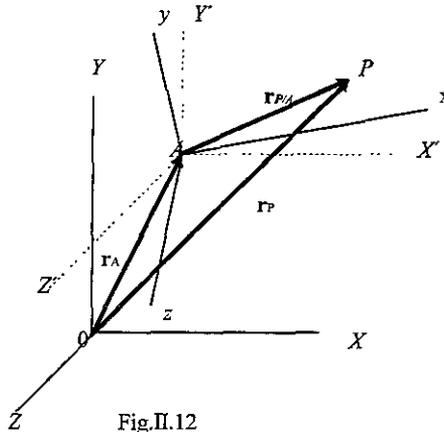


Fig.II.12

POSICIÓN

La posición de P se define en cualquier instante por el vector \mathbf{r}_P del sistema fijo y por el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ en el sistema en movimiento. Si representamos por \mathbf{r}_A el vector de posición de A en el sistema fijo, tendremos

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A} \quad (2.24)$$

VELOCIDAD

La velocidad absoluta \mathbf{v}_P de la partícula la obtenemos derivando (2.24), por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \quad (2.25)$$

las derivadas se definen respecto al sistema fijo $OXYZ$. Entonces $\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{v}_A$ representa la velocidad del origen A de los ejes en movimiento. Como la rapidez de cambio del vector es la misma respecto a un sistema fijo y respecto a un sistema en traslación, el término $\dot{\mathbf{r}}_{P/A}$ se puede considerar como la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa al sistema $AX'Y'Z'$ de la misma orientación que $OXYZ$ y el mismo origen que $Axyz$. Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \quad (2.26)$$

Pero $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa a $AX'Y'Z'$ la podemos obtener de (2.20) sustituyendo $\mathbf{r}_{P/A}$ por \mathbf{r} en esa ecuación, por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \quad (2.27)$$

donde Ω es la velocidad angular del sistema $Axyz$ en el instante considerado.

³³ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 781.

ACELERACIÓN

Esta se obtiene derivando (2.26), nos queda

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{P/A} \quad (2.28)$$

donde las derivadas se definen respecto a cualquiera de los sistemas $OXYZ$ o $AX'Y'Z'$. Por lo tanto el primer término de la ecuación (2.28) representa la aceleración \mathbf{a}_A del origen A de los ejes en movimiento y el segundo término representa la aceleración $\mathbf{a}_{P/A}$ de P relativa al sistema $AX'Y'Z'$. Esta aceleración la podemos obtener de la ecuación (2.22) sustituyendo $\mathbf{r}_{P/A}$ por \mathbf{r} . Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \quad (2.29)$$

Finalmente tenemos que las fórmulas de la sección anterior continúan siendo válidas para el caso de un sistema de referencia en movimiento general, es decir, las ecuaciones:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/F} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/F} + \mathbf{a}_C \quad (2.23)$$

donde los vectores que aparecen ya han sido definidos anteriormente.

De lo anterior se observa que si el sistema de referencia en movimiento F o $Axyz$ se está trasladando, la velocidad y la aceleración del punto P' que coincide con P se convierten en la velocidad y la aceleración del origen A del sistema. Por otro lado, como el sistema mantiene una orientación fija, \mathbf{a}_C es cero y las relaciones (2.21) y (2.23) se reducen a

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (2.18)$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (2.19)$$

encontradas anteriormente.

II.7.- OBTENCIÓN Y EMPLEO DE LAS EXPRESIONES PARA CASOS PARTICULARES DE MOVIMIENTO RELATIVO.

Existen varios casos particulares de movimiento relativo aquí se ilustrarán únicamente tres de los más comunes.

Caso 1) Cuando la posición de la partícula P siempre es la misma respecto al sistema móvil con origen en A, debido a esta condición tenemos, para todo instante

$r_{P/A} = \text{constante}$, $\dot{r}_{P/A} = 0$, $\ddot{r}_{P/A} = 0$, entonces, la velocidad de la partícula P será

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{r}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{P/A}} \quad (2.34)$$

y la aceleración será

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{P/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{P/A})} \quad (2.35)$$

Si, además de la condición para este caso, el punto A coincide con 0 tendremos para la velocidad

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \Omega \times \mathbf{r}_{P/A}} \quad (2.36)$$

y la aceleración del punto P será

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{P/A})} \quad (2.37)$$

Estas últimas dos ecuaciones se aplican también a puntos que describen trayectorias circulares.

Caso 2) Cuando el sistema móvil sólo se traslada, es decir no gira, tenemos, para todo instante

$\Omega = 0$, $\dot{\Omega} = 0$, entonces, la velocidad de la partícula P será

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \mathbf{r}_{P/A}} \quad (2.38)$$

y la aceleración de P será

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{r}}_A + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{AxPz}} \quad (2.39)$$

Estas ecuaciones se aplican en el movimiento de un punto con relación a otro y son equivalentes, respectivamente, a

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \quad (2.18)$$

y

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}} \quad (2.19)$$

³⁴ Cinemática y Dinámica Básicas para ingenieros. Jorge Solar González. Pág. 264.

Caso 3) Cuando el origen A del sistema móvil coincide siempre con el origen 0 del sistema fijo, tenemos, para todo instante

$\mathbf{r}_A = 0$, $\dot{\mathbf{r}}_A = 0$, $\ddot{\mathbf{r}}_A = 0$, entonces, la velocidad de la partícula P será

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \tag{2.40}$$

y la aceleración de la partícula P será

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \tag{2.41}$$

Si, además de la condición de este caso, el valor de $r_A = \text{constante}$, obtenemos nuevamente para la velocidad

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \tag{2.36}$$

y para la aceleración

$$\boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) \tag{2.37}$$

Ecuaciones obtenidas también en la parte final del caso 1) y que son aplicables a puntos que describen trayectorias circulares.

TEMA III.- " ³⁵ CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO "

OBJETIVO: Obtener las ecuaciones cinemáticas para analizar movimientos planos de cuerpos rígidos; aplicarlas a cuerpos móviles y mecanismos. Establecimiento de las expresiones propias del movimiento general de un cuerpo rígido. Movimientos planos cualesquiera de cuerpos rígidos: Características de las trayectorias de las partículas que los conforman, y de la velocidad y aceleración angulares de los cuerpos que realizan esos movimientos.

CUERPO RÍGIDO.- Sólido idealizado en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo permanece constante no importando el tipo de acción o fuerza a que sea sometido.

En la naturaleza no existe ningún cuerpo rígido al ciento por ciento, pues todos se deforman aunque sea muy poco, al aplicarles una fuerza por pequeña que sea, es decir, la rigidez de los llamados cuerpos rígidos es una ilusión. Los sólidos o cuerpos rígidos están compuestos de átomos que no están en contacto rígido, es decir, los átomos están unidos entre sí por fuerzas que se comportan de modo muy parecido a las fuerzas de los resortes.

No obstante lo anterior en el mundo existen muchos materiales que se consideran como cuerpos rígidos ya que dentro de ciertos límites y bajo la acción de fuerzas no se deforman, esto es, no se doblan, no se tuercen, no se rompen. Como ejemplo podemos citar dentro de dichos materiales los aceros utilizados para la construcción de maquinaria para la industria en general.

III.1.- DEFINICIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE UN CUERPO RÍGIDO

Los diferentes tipos de movimiento de un cuerpo rígido se pueden agrupar de la manera siguiente:

- 1) Traslación.
- 2) Rotación alrededor de un eje fijo.
- 3) Movimiento plano general.
- 4) Movimiento con respecto a un punto fijo.
- 5) Movimiento general (En el espacio).

DEFINICIONES

III.1.1) Traslación .- Un movimiento es de traslación si cualquier línea recta de un cuerpo permanece en la misma dirección durante su movimiento, es decir, durante la traslación todas las partículas que forman el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Cuando las trayectorias son líneas rectas, el movimiento se llama traslación rectilínea. Ver figura (III.1)

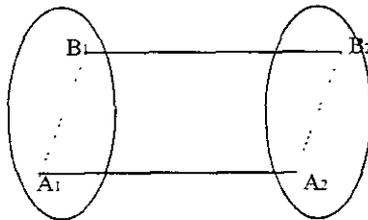


Fig.III.1 Traslación rectilínea

³⁵ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 718.

Cuando las trayectorias son líneas curvas el movimiento se llama traslación curvilínea. En este caso las líneas $A_1 A_2$ y $B_1 B_2$ son paralelas entre sí en su trayectoria, así como las líneas $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$ también lo son entre sí, ver figura (III.2)

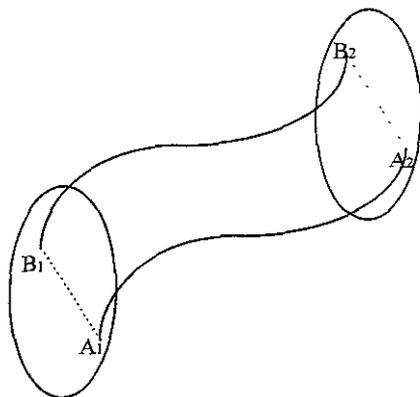


Fig.III.2 Traslación curvilínea

III.1.2) Rotación Alrededor de un Eje Fijo.- Cuando se da este movimiento las partículas que forman el cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre un mismo eje fijo ver figura (III.3). Este eje se llama eje de rotación.

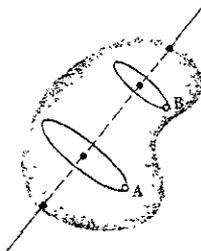


Fig.III.3 Rotación alrededor de un eje fijo

Ya que cada partícula se mueve en un plano dado, la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo se llama movimiento plano.

III.1.3) Movimiento Plano General.- Un movimiento plano general es cuando un cuerpo experimenta una combinación de traslación y rotación, (como ejemplos ver figuras III.4 y III.5).

En el caso de la figura III. 4, mientras la rueda gira, en un tiempo dado, dos puntos arbitrarios A y B se habrán desplazado desde A_1 hasta A_2 y desde B_1 hasta B_2 , es decir, el movimiento de traslación lo representa el desplazamiento del punto A desde A_1 hasta A_2 y el movimiento de rotación lo representa el desplazamiento del punto B desde B_1 hasta B_2 .

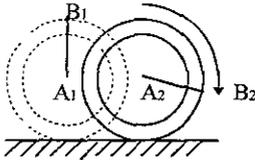


Fig.III.4

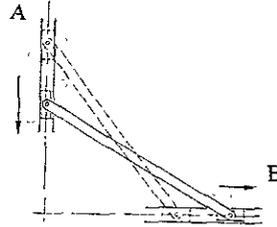


Fig.III.5

Ahora, para el caso de la figura III.5, se ilustra una barra cuyos puntos A y B se deslizan sobre una guía horizontal y una guía vertical, respectivamente, este movimiento lo podemos sustituir por una traslación en A y una rotación respecto de A; también lo podemos sustituir por una traslación en B y una rotación respecto a B (la deducción de las ecuaciones se realizará mas adelante).

4) Movimiento con respecto a un Punto Fijo.- Es el movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido unido a un punto fijo O . Puede representarse este tipo de movimiento en el movimiento de un trompo sobre una superficie rugosa. Aquí todas las partículas del cuerpo mantienen constante su distancia a dicho punto, ésto no implica necesariamente que las partículas del cuerpo describan trayectorias circulares, ver figura(III.6).

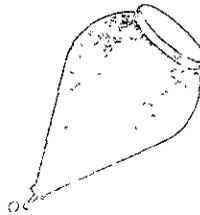


Fig.III.6 trompo

5) Movimiento General.- Es el movimiento de un cuerpo en un sistema tridimensional. El movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como la combinación de una traslación de un punto base y una rotación del cuerpo rígido alrededor de este punto, que se considera como fijo.

III.2.- DEDUCCIÓN Y EMPLEO DE LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A LOS MOVIMIENTOS DE:

III.2.1 Traslación

III.2.2 Rotación

III.2.3 Movimiento Plano General

III.2.1. Traslación.- Consideremos un cuerpo rígido en traslación (rectilínea o curvilínea), y sean A y B cualesquiera de sus partículas ver figura (III.7). Representando por r_A y r_B los vectores de posición de A y B con respecto a un sistema de referencia fijo y por $r_{B/A}$ al vector que une a A y B, tenemos

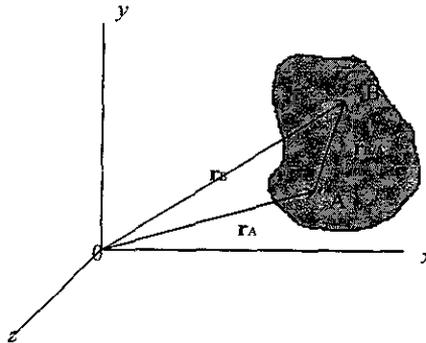


Fig.III.7 Posición

$$\boxed{r_B = r_A + r_{B/A}} \quad (3.1)$$

Derivamos a (3.1) con respecto al tiempo. Vemos que de la definición de traslación el vector $r_{B/A}$ debe mantener una dirección constante, su magnitud también debe ser constante, ya que A y B son del mismo cuerpo rígido. Por lo tanto, la derivada de $r_{B/A}$ es igual a cero, entonces tenemos

$$\boxed{v_B = v_A} \quad (3.2)$$

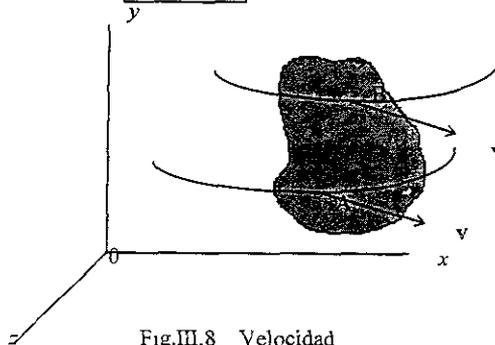


Fig.III.8 Velocidad

En la figura (III.8) se ilustra que cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad. Derivando ahora la ecuación (3.2) tenemos

$$\boxed{a_B = a_A} \tag{3.3}$$

En la figura (III.9) se ilustra, también, que cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma aceleración en cualquier instante.

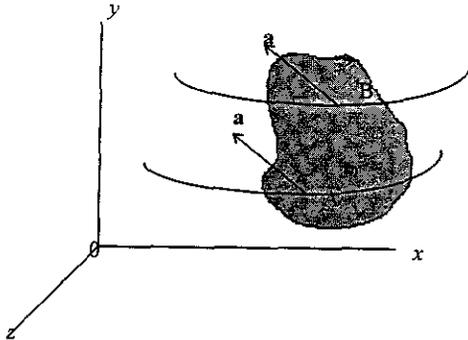


Fig.III.9 Aceleración

III.2.2.- Rotación con respecto de un eje fijo. Consideremos que sea P un punto del cuerpo rígido mostrado en la figura (III.10)

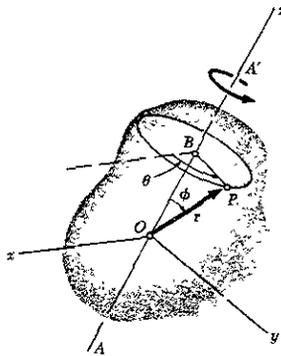


Fig.III.10 Posición

Por facilidad supongamos que el sistema está centrado en el punto O sobre la recta AA' y que el eje z coincide con dicha recta. Consideremos ahora a B como la proyección de P sobre AA' , P permanece a una distancia constante de B , por lo tanto P describirá un círculo de centro en B y de radio $r \sin \phi$, donde ϕ representa el ángulo que se forma por r y AA'

De la figura (III.10) observamos que la posición de P y de todo el cuerpo queda definida completamente por el ángulo θ que forma la línea BP con el plano zx . El ángulo θ recibe el nombre de coordenada angular del cuerpo, ésta se define como positiva cuando su movimiento es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj vista desde A . θ se expresa en radianes, revoluciones, o en grados: 1 revolución = 2π radianes = 360°

VELOCIDAD.- La velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de una partícula P es un vector tangente a la trayectoria de P y de magnitud $v = ds/dt$, donde la longitud Δs del arco descrito por P cuando el cuerpo gira hasta $\Delta\theta$ es

$$\Delta s = (BP)\Delta\theta = (r \text{ sen } \phi)\Delta\theta$$

dividiendo ambos miembros entre Δt , y obteniendo el limite cuando Δt tiende a cero, tenemos

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \text{ sen } \phi} \quad (3.4)$$

donde $\dot{\theta}$ nos representa la derivada de θ con respecto al tiempo, por lo tanto la velocidad \mathbf{v} de P es un vector perpendicular al plano que contiene a AA' y de \mathbf{r} , de magnitud v definida por la ecuación (3.4). Este resultado también lo obtendremos si trazáramos a lo largo de AA' un vector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ y si formamos el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, ver figura (III.11), por lo tanto tenemos

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (3.5)$$

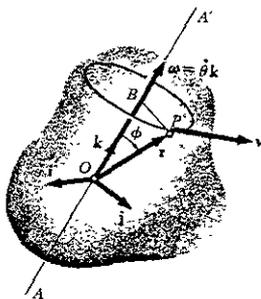


Fig.III.11 Velocidad

Al vector

$$\omega = \omega \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (3.6)$$

se le conoce como velocidad angular del cuerpo. Está dirigida a lo largo del eje de rotación y es igual en magnitud a la rapidez de cambio $\dot{\theta}$ de la coordenada angular y su sentido se obtiene por la regla de la mano derecha del sentido de rotación del cuerpo.

ACELERACIÓN .-Derivando la ecuación (3.5) determinaremos la aceleración \mathbf{a} de la partícula P .

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega \times \mathbf{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \quad (3.7)$$

Al vector $\frac{d\omega}{dt}$ se le llama aceleración angular del cuerpo y se representa por α .

Sustituyendo \mathbf{v} de la ecuación (3.5) nos queda

$$\mathbf{a} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Derivando la ecuación de la velocidad angular y como \mathbf{k} es de magnitud y dirección constante tenemos

$$\alpha = \alpha \mathbf{k} = \dot{\omega} \mathbf{k} = \ddot{\theta} \mathbf{k} \quad (3.9)$$

de aquí se deduce que la aceleración angular de un cuerpo rígido girando respecto a un eje fijo es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación, y es igual en magnitud a la rapidez de cambio $\ddot{\theta}$ de la velocidad angular. Analizando la ecuación (3.8) vemos que la aceleración de P es la suma de dos vectores. El primer vector $\alpha \times \mathbf{r}$, es tangente al círculo descrito por P por lo tanto nos representa a la componente tangencial de la aceleración; el segundo vector $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ se obtiene al formar el producto vectorial de ω y $\omega \times \mathbf{r}$, como $\omega \times \mathbf{r}$ es tangente al círculo que describe P , el triple producto vectorial se dirige hacia el centro B del círculo por lo tanto nos representa a la componente normal de la aceleración.

ROTACIÓN DE UNA PLACA

Puede definirse por el movimiento de una placa en un plano de referencia perpendicular al eje de rotación. Sea xy el plano de referencia y supongamos que coincide con el plano de la figura, es decir, el eje z es perpendicular al plano de la hoja, ver figura (III.12)

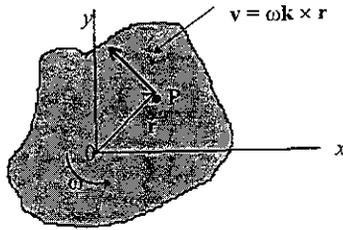


Fig.III.12 Velocidad

Ya vimos que $\omega = \omega\mathbf{k}$, y que un valor positivo del escalar ω corresponde a una rotación en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de la placa y que un valor negativo corresponde a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj.

VELOCIDAD.- Si sustituimos $\omega\mathbf{k}$ por ω en la ecuación (3.5),tenemos

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad (3.10)$$

Como los vectores \mathbf{k} y \mathbf{r} son perpendiculares entre sí, la magnitud de la velocidad v es

$$v = r\omega \quad (3.11)$$

y su dirección se obtiene girando \mathbf{r} un ángulo de 90° en el sentido de rotación de la placa.

ACELERACIÓN.- Si sustituimos $\omega = \omega\mathbf{k}$ y $\alpha = \alpha\mathbf{k}$ en la ecuación (3.8).y dándonos cuenta que si multiplicamos vectorialmente dos veces a \mathbf{r} por \mathbf{k} produce una rotación de 180° del vector \mathbf{r} , podemos expresar la aceleración del punto P como

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (3.12)$$

Si descomponemos \mathbf{a} en sus componentes normal y tangencial , ver figura (III.13)

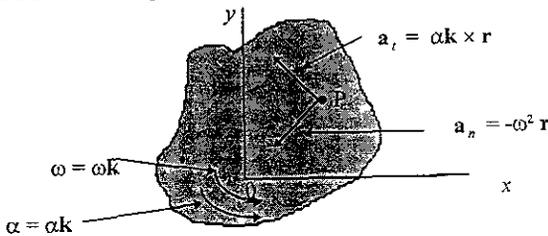


Fig.III.13 Aceleración

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_t &= \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r} & a_t &= r\alpha \\
 \mathbf{a}_n &= -\omega^2 \mathbf{r} & a_n &= r\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

La componente tangencial \mathbf{a}_t , apunta en la dirección contraria de las manecillas del reloj si el escalar es positivo, y en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj si es negativo. La componente normal \mathbf{a}_n siempre apunta en dirección contraria de \mathbf{r} , es decir, hacia 0.

ECUACIONES DE LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Frecuentemente, las condiciones de movimiento quedarán especificadas por el tipo de aceleración angular que el cuerpo posea.

Puede darse α como una función de t , como una función de θ o como función de ω . De:

$$\omega = \omega \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha \mathbf{k} = \dot{\omega} \mathbf{k} = \ddot{\theta} \mathbf{k} \quad \text{tenemos que}$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \tag{3.14}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}} \tag{3.15}$$

despejando dt de (3.14) y sustituyendo en (3.15) nos queda

$$\boxed{\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}} \tag{3.16}$$

Ya que estas ecuaciones son similares a las obtenidas para el movimiento rectilíneo de una partícula, puede seguirse el mismo procedimiento para su integración.

Frecuentemente encontramos dos casos especiales de rotación:

a) **Rotación uniforme.** La velocidad angular es constante ya que la aceleración se caracteriza por ser cero, entonces la coordenada angular está dada por:

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t} \tag{3.17}$$

b) **Rotación uniformemente acelerada.** Aquí la aceleración angular es constante. Las fórmulas siguientes se deducen en forma similar a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Debe tenerse en cuenta que la fórmula (3.17) puede utilizarse solamente cuando $\alpha = 0$ y que las ecuaciones (3.18) sólo cuando $\alpha = \text{constante}$. De no presentarse estos casos deben utilizarse las fórmulas generales (3.14), (3.15) y (3.16).

III.2.3.- MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Un movimiento plano general puede considerarse siempre como la suma de una traslación y una rotación.

Consideremos la rueda de la figura (III.14) la cual gira sobre una vía recta. En cierto tiempo, dos puntos A y B se habrán movido desde A_1 hasta A_2 y desde B_1 hasta B_2 . Este mismo resultado pudo

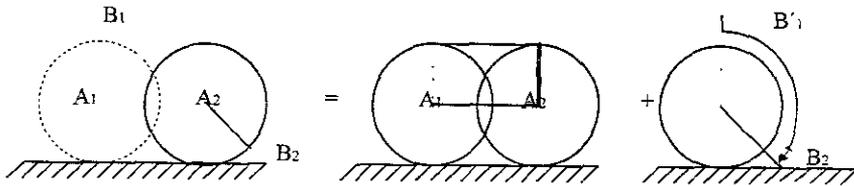
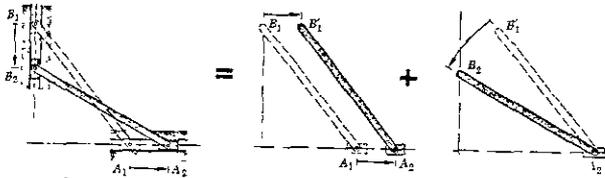


Figura III.14

obtenerse mediante una traslación que hubiera desplazado a A y B hasta A_2 y $B'1$, donde la línea AB sigue siendo vertical, seguida de una rotación respecto a A que desplaza a B hasta B_2 .

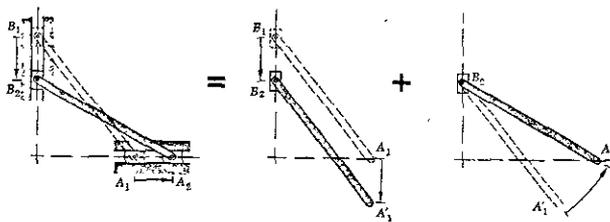
También podemos representar el movimiento plano general por medio de una barra cuyas extremidades se desplazan a lo largo de una vía vertical y una vía horizontal, respectivamente. Este movimiento lo podemos sustituir por una traslación en la dirección horizontal y una rotación con respecto de A. Ver figura(III.15).



Movimiento Plano = Traslación con A + Rotación sobre A

Fig. III.15

También podemos representarlo por una traslación en la dirección vertical y una rotación con respecto a B. Ver figura (III. 16).



$$\text{Movimiento Plano} = \text{Traslación con B} + \text{Rotación sobre B}$$

Fig. III. 16

Generalmente se considerará un desplazamiento pequeño que lleva dos partículas A y B de una placa representativa desde A_1 y B_1 hasta A_2 y B_2 , figura (III. 17), respectivamente. Este desplazamiento se puede dividir en dos, uno en el que las partículas se mueven hasta A_2 y B'_1 mientras la línea AB

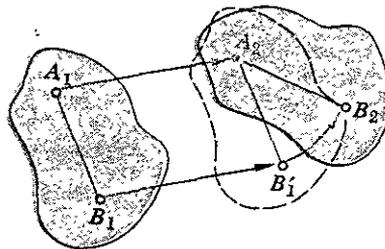


Fig. III. 17

mantiene la misma dirección, y otro en el que B se mueve hasta B_2 mientras A se mantiene fija. El primer movimiento es una traslación y el segundo una rotación con respecto de A. De la definición del movimiento relativo de una partícula con respecto a un sistema de referencia en movimiento; y de la definición de movimiento absoluto con respecto a un sistema de referencia fijo, podemos replantear de la siguiente manera el resultado obtenido: dadas dos partículas A y B de una placa rígida en un movimiento plano, el movimiento relativo de B con respecto a un sistema fijo a A y de orientación fija es una rotación. Si un observador se sitúa en A, moviéndose con ella, pero sin girar, le parecerá que la partícula describe un arco de círculo con centro en A.

VELOCIDAD ABSOLUTA Y VELOCIDAD RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

La velocidad absoluta v_B de una partícula B de la placa se obtiene de la fórmula de velocidad relativa encontrada anteriormente. es decir,

$$\boxed{v_B = v_A + v_{B/A}} \quad (3.19)$$

donde: v_B = Velocidad absoluta de B

v_A = Velocidad absoluta de A. Corresponde a la traslación de la placa con A.

$v_{B/A}$ = Velocidad relativa de B respecto de A. Asociada con la rotación de la placa con centro en A y de orientación fija. Ver figura (III. 18).

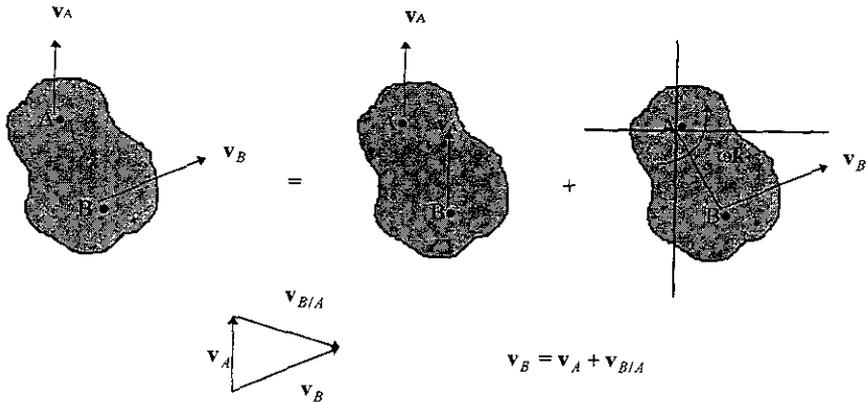


Figura III.18

Consideremos a $r_{B/A}$, el vector de posición de B relativo a A, ωk la velocidad angular de la placa con respecto a ejes de orientación fija, por lo tanto tenemos

$$v_{B/A} = \omega k \times r_{B/A} \quad \text{y} \quad v_{B/A} = r\omega \quad (3.20)$$

donde r es la distancia de A a B, sustituyendo el valor de $v_{B/A}$ en v_B tenemos:

$$\boxed{v_B = v_A + \omega k \times r_{B/A}} \quad (3.21)$$

ACELERACIÓN ABSOLUTA Y ACELERACIÓN RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

Para encontrar las aceleraciones haremos uso de la propiedad que nos dice que cualquier movimiento plano se puede sustituir por una traslación definida por el movimiento de un punto arbitrario A y una rotación simultánea con respecto a A.

Ya vimos que la aceleración absoluta a_B se puede obtener de la fórmula de aceleración relativa derivada anteriormente; el miembro de la derecha representa una suma vectorial

$$\boxed{a_B = a_A + a_{B/A}} \quad (3.22)$$

donde: a_B = Aceleración absoluta de la partícula de la placa.

a_A = Corresponde a la traslación de la placa con A.

$a_{B/A}$ = Aceleración relativa de B con respecto a A. Corresponde a la rotación de la placa alrededor de A medida respecto a ejes con centro en A y de orientación fija.

También vimos que la aceleración relativa $a_{B/A}$ se puede descomponer en dos componentes. una componente tangencial $(a_{B/A})_t$ la cual es perpendicular a la línea AB, y una componente normal $(a_{B/A})_n$ dirigida hacia A, ver figura(III. 19)

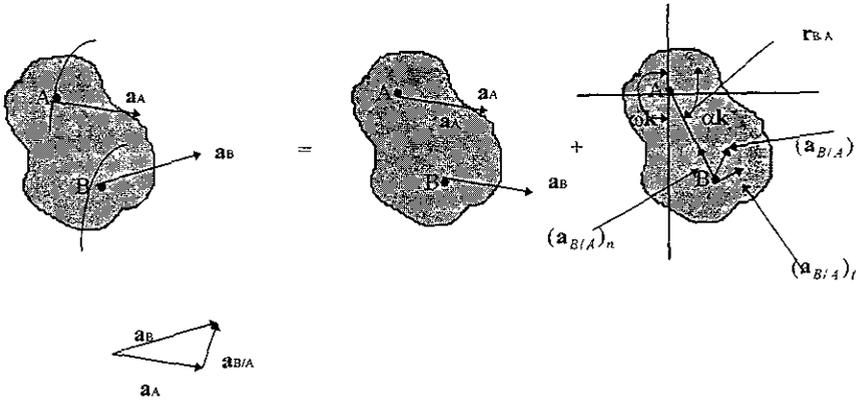


Fig.III.19

Si representamos por $r_{B/A}$ al vector de posición B relativo a A y por ωk y αk , respectivamente, la velocidad angular y la aceleración angular de la placa respecto a los ejes de orientación fija, nos queda

$$\begin{aligned} (a_{B/A})_t &= \alpha k \times r_{B/A} & (a_{B/A})_t &= r\alpha \\ (a_{B/A})_n &= -\omega^2 r_{B/A} & (a_{B/A})_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde r es la distancia de A a B. Sustituyendo en la ecuación (3.22) las expresiones obtenidas nos queda

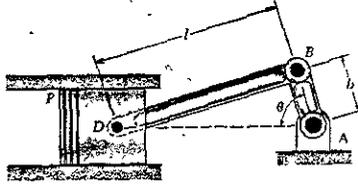
$$\boxed{a_B = a_A + \alpha k \times r_{B/A} - \omega^2 r_{B/A}} \tag{3.24}$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

EJEMPLO RESUELTO III.1

En el sistema mecánico mostrado $l = 8$ in y $b = 3$ in; la manivela AB gira con una velocidad constante de 2000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determinese la velocidad del émbolo P y la velocidad angular de la biela para la posición correspondiente a :

a) $\theta = 0$, b) $\theta = 90^\circ$ y c) $\theta = 180^\circ$.

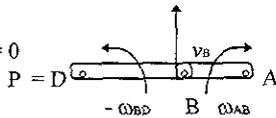


Movimiento de la manivela AB. Esta gira respecto al punto A. Expresando ω_{AB} en rad/s y escribiendo $v_B = b\omega_{AB}$, obtenemos

$$\omega_{AB} = (2000 \text{ rev/min}) (1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad}/1 \text{ rev}) = 209 \text{ rad/s}$$

$$v_B = (AB) \omega_{AB} = (3 \text{ in})(209 \text{ rad/s}) = 627 \text{ in/s}$$

a) Con $\theta = 0$



$$v_B = b\omega_{BD} = 8 \omega_{BD}$$

$$\omega_{BD} = v_B/b = (627 \text{ in/s})/(8 \text{ in}) = 78.375 \text{ rad/s}$$

Para expresarla en rpm, hacemos lo siguiente:

$$\omega_{BD} = 78.375 \text{ rad/s} \times (1 \text{ rev}/2\pi \text{ rad}) \times (60 \text{ s}/1 \text{ min})$$

$$\omega_{BD} = 748.5 \text{ rpm}$$

De la figura $\omega_{AB} = -\omega_{AD}$

Cálculo de $v_D = v_P$

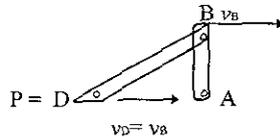
$$v_D = v_B \mathbf{j} + (-\omega \mathbf{k} \times (8 \cos 0^\circ \mathbf{i} + 8 \sin 0^\circ \mathbf{j}))$$

$$v_D = 627 \mathbf{j} + (-8\omega \mathbf{j})$$

$$v_D = 627 \mathbf{j} + (748.5 \text{ rev/min} \times (2\pi \text{ rad}/1 \text{ min}/60 \text{ s})) \mathbf{j}$$

$$v_P = v_D = 627 \mathbf{j} - 627 \mathbf{j} = 0$$

b) Con $\theta = 90^\circ$



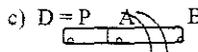
De la figura se observa que:

las velocidades $v_B = v_D = v_P$

son únicamente de traslación, es decir, no hay velocidad de rotación por lo tanto

$$\omega_{BD} = 0$$

$$v_{BP} = 627 \text{ in/s} (1 \text{ pie}/12 \text{ in}) = 52.25 \text{ pie/s}$$



Con $\theta = 180^\circ$ $\omega_{AB} = \omega_{BD}$

Esencialmente es lo mismo que en el a) lo único que cambia es el sentido de ω_{BD}

$$\omega_{BD} = 748.5 \text{ rpm}$$

$$v_P = v_D = 627 \mathbf{j} - 627 \mathbf{j} = 0$$

III.3.-³⁶ CONCEPTO Y APLICACIÓN DEL EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

Consideremos una placa con movimiento plano general. En este caso se tratará de demostrar que las velocidades de las diferentes partículas de la placa en cualquier instante, son las mismas que las que tendrían si la placa estuviera girando respecto a un cierto eje perpendicular al plano de ella, denominado *eje instantáneo de rotación*. Dicho eje interseca el plano de la placa en el punto C denominado *centro instantáneo de rotación*.

Debemos recordar que el movimiento plano de una placa se puede sustituir siempre por una traslación, la cual está definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A , y por una rotación con respecto de A . En lo que a la velocidad concierne, la traslación se caracteriza por una velocidad v_A del punto de referencia A y de la rotación se caracteriza por la velocidad angular ω de la placa (independiente de la elección de A). Por lo tanto, la velocidad v_A del punto A y la velocidad angular ω de la placa definen por completo las velocidades de todas las otras partículas de la placa, ver figura (III.20). Consideremos ahora que v_A y ω son conocidas y que las dos son diferentes de cero, ya que si $v_A = 0$ el punto A será también el centro instantáneo de rotación y si $\omega = 0$ todas las partículas que forman la placa tienen la misma velocidad v_A . Las velocidades se pueden obtener permitiendo que la placa gire con velocidad angular ω , con respecto al punto C ubicado sobre la perpendicular a v_A a la distancia $r = v_A/\omega$ desde A , como se ilustra en la figura (III. 21). Se comprueba que la velocidad de A será perpendicular a AC y que su magnitud será $r\omega = (v_A/\omega)\omega = v_A$.

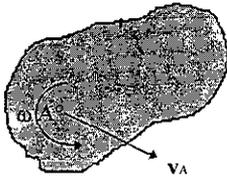


fig.III. 20

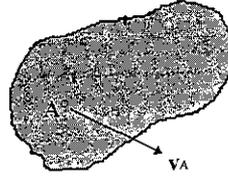


Fig.III.21

De esta forma las velocidades de todas las demás partículas de la placa serán las mismas que como se definieron originalmente. Así, en lo que se refiere a las velocidades, la placa parece girar respecto a su centro instantáneo de rotación C en el instante considerado.

También se puede definir la posición del centro instantáneo de rotación de otras dos maneras. Si las direcciones de las velocidades de dos partículas A y B de la placa son conocidas y son diferentes, el centro instantáneo C lo obtenemos trazando la perpendicular a v_A que pasa por A , y la perpendicular a v_B que pasa por B , y determinando el punto en el que estas líneas se intersecan ver figura (III. 22)

³⁶ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer. Pág. 740.

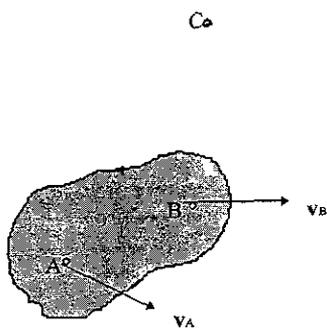


fig. III. 22

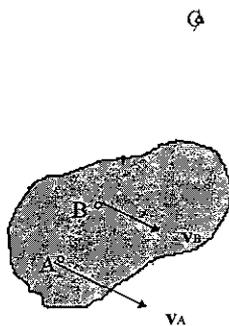


Fig. III. 23

Si las velocidades v_A y v_B de las partículas A y B son perpendiculares a la línea AB y si sus magnitudes son conocidas, el centro instantáneo se puede encontrar intersectando la línea AB con la línea que une los extremos de los vectores v_A y v_B ver figura (III. 23). Debemos observar que si en la figura (III. 22) v_A y v_B fuesen paralelas, el centro instantáneo C estaría a una distancia infinita y ω sería cero, esto mismo sucedería si en la figura (III. 23) v_A y v_B tuvieran la misma magnitud; por lo tanto todos los puntos de la placa tendrían la misma velocidad

APLICACIÓN DEL CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

Consideremos nuevamente la barra que vimos en el movimiento plano general, para ver como se puede aplicar el concepto de centro de rotación. Si trazamos la perpendicular a v_A que pasa por A y la perpendicular a v_B que pasa por B , Figura (III. 24) obtenemos el centro instantáneo C . En el instante

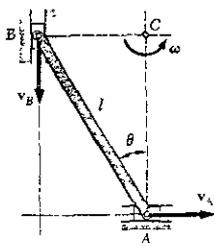


Fig. III. 24

considerado las velocidades de todas las partículas de la barra son por lo tanto las mismas que la barra tendría si girara con respecto a C. Ahora, si la magnitud v_A de la velocidad de A se conoce, la magnitud ω de la velocidad angular de la barra puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta} \quad (3.25)$$

La magnitud v_B de la velocidad v_B la podemos obtener entonces si escribimos

$$v_B = (BC) \omega = l \sin \theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \tan \theta \quad (3.26)$$

Obsérvese que en este caso sólo intervienen velocidades *absolutas*.

El centro instantáneo de rotación de la placa en movimiento plano se puede localizar dentro o fuera de la placa. Si se localiza sobre la placa, la partícula C que coincide con el centro instantáneo en un instante dado t debe tener velocidad cero en ese instante. Debemos tener claro que el centro instantáneo de rotación sólo es válido en un instante dado, es decir, la partícula C de la placa que coincide con el centro instantáneo de rotación en el tiempo t generalmente no coincidirá con el centro instantáneo de rotación en el tiempo $t + \Delta t$; esto quiere decir que mientras su velocidad es cero en el tiempo t , es muy probable que sea diferente de cero en el tiempo $t + \Delta t$. Esto nos dice que, en general, la partícula C no tiene aceleración cero y por consiguiente que la aceleración de las distintas partículas de la placa no puede determinarse como si la placa estuviera girando con respecto a C.

III.4.-³⁷ MECANISMOS DE TRES Y CUATRO ARTICULACIONES

VELOCIDAD

La mayoría de los mecanismos se componen de varias partes en movimiento. Cuando estas partes contienen juntas articuladas o uniones con pasadores, su análisis se puede realizar si consideramos cada parte como un cuerpo rígido, teniendo presente que los puntos donde dos partes están conectadas deben tener la misma velocidad absoluta. Podemos emplear un análisis similar cuando estudiamos engranajes ya que los dientes en contacto deben tener la misma velocidad absoluta. Pero, cuando un mecanismo contiene partes que se deslizan unas sobre otras, la velocidad relativa de la parte en contacto debe tomarse en cuenta.

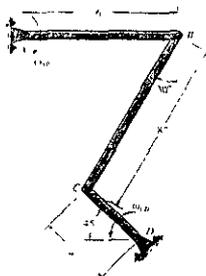
ACELERACIÓN

Como en el caso de las velocidades, cuando un mecanismo está compuesto de varias partes en movimiento conectadas por pasadores, podemos realizar su análisis considerando cada parte como un cuerpo rígido y teniendo en cuenta que los puntos donde se conectan dos partes deben tener la misma aceleración absoluta. Para el caso de engranajes, las componentes tangenciales de las aceleraciones de los dientes en contacto son iguales, pero sus componentes normales son diferentes.

³⁷ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer Págs 734 (vel.) y 750 (acel.).

EJEMPLO RESUELTO III.2

Si la barra CD está girando a $\omega_{CD} = 5 \text{ rad/s}$, determine la velocidad angular de la barra AB en el instante que se ilustra.



Solución:

Cálculo de v_C

$$v_C = \omega_{CD} \times r$$

$$v_C = 5\mathbf{k} \times (-4 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 4 \sin 45^\circ \mathbf{j})$$

$$v_C = -14.14 \mathbf{j} - 14.14 \mathbf{i} \quad (1)$$

Cálculo de v_B

Considerando el movimiento de la barra BC como un movimiento plano general.

$$v_B = v_C + v_{CB} \quad (2)$$

$$v_{CB} = \omega_{BC} \times r = \omega_{BC} \mathbf{k} \times (-8 \sin 30^\circ \mathbf{i} - 8 \cos 30^\circ \mathbf{j})$$

$$v_{CB} = -4 \omega_{BC} \mathbf{j} + 6.93 \omega_{BC} \mathbf{i} \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2)

$$v_B = -14.14 \mathbf{j} - 14.14 \mathbf{i} - 4 \omega_{BC} \mathbf{j} + 6.93 \omega_{BC} \mathbf{i}$$

Como v_B se mueve hacia abajo en la dirección \mathbf{j} tenemos:

$$v_B \mathbf{j} = -14.14 \mathbf{j} - 4 \omega_{BC} \mathbf{j} \quad (4)$$

$$0 = -14.14 \mathbf{i} + 6.93 \omega_{BC} \mathbf{i} \quad (5)$$

$$\omega_{BC} = 14.14 / 6.93 = 2.04 \text{ rad/s} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4)

$$v_B = -14.14 \mathbf{j} - 4(2.04) \mathbf{j} = -14.14 \mathbf{j} - 8.16 \mathbf{j} = -22.30 \text{ in/s } \mathbf{j}$$

$$v_B = \sqrt{v_B^2 \mathbf{i} + v_B^2 \mathbf{j}} = \sqrt{0 + (-22.30)^2} = 22.30 \text{ in/s}$$

Finalmente tenemos $v_B = r_{AB} \omega_{AB}$, por lo tanto, despejando ω_{AB}

$$\omega_{AB} = v_B / r_{AB} = (22.30 \text{ in/s}) / 6 \text{ in} = 3.71 \text{ rad/s}$$

TEMA IV.- " MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS Y MASAS "

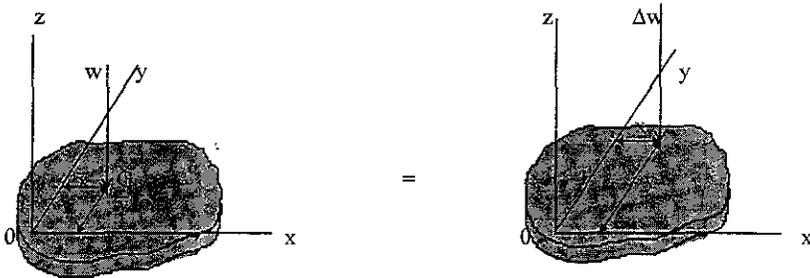
OBJETIVO: Explicar los conceptos de momentos de inercia de áreas y masas, y calcular dichos momentos.

IV.1.- ³⁸ MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

Antes de analizar la teoría de Momentos de Inercia de Áreas, consideraremos los conceptos de Centro de Gravedad, Centroides y Primeros Momentos de Áreas.

CENTRO DE GRAVEDAD

Sea una placa plana como la mostrada en la figura (A), la cual dividimos en n elementos pequeños. Las coordenadas de estos n elementos se representarán por x_1, y_1, x_2, y_2 , etc. Las fuerzas



Centro de gravedad de una placa Fig. A

que la tierra ejerce sobre los n elementos de la placa serán $\Delta w_1, \Delta w_2, \dots, \Delta w_n$, respectivamente. Aún cuando las fuerzas o pesos están dirigidos hacia el centro de la tierra, podemos suponer, en la práctica, que son paralelas. La resultante es por lo tanto, una sola fuerza en la misma dirección. es decir:

$$\sum F_x: \quad w = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \dots + \Delta w_n$$

Usando momentos para obtener las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del punto G donde la resultante w debe aplicarse:

$$\begin{aligned} \sum M_y: \quad \bar{x} w &= x_1 \Delta w_1 + x_2 \Delta w_2 + \dots + x_n \Delta w_n \\ \sum M_x: \quad \bar{y} w &= y_1 \Delta w_1 + y_2 \Delta w_2 + \dots + y_n \Delta w_n \end{aligned} \tag{i}$$

³⁸ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág. 333

Aumentando el número de elementos en los que dividimos la placa y reduciendo el tamaño de cada elemento, en el límite obtenemos las siguientes expresiones:

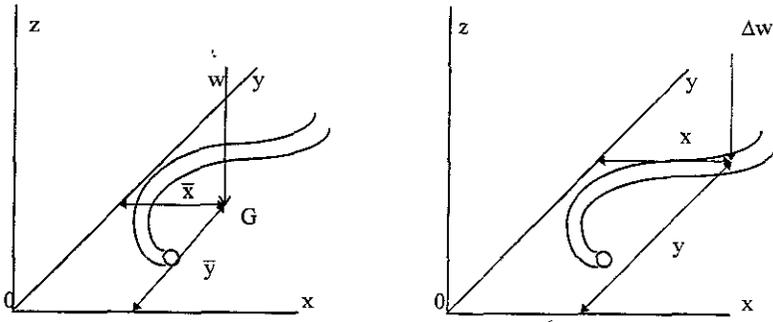
$$w = \int t w$$

$$\bar{x} w = \int x \, dw \quad (ii)$$

$$\bar{y} w = \int y \, dw$$

Las anteriores ecuaciones definen el peso w y las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centro de gravedad G de la placa plana.

De manera similar podemos obtener las mismas ecuaciones para un alambre ubicado en el plano xy como el mostrado en la figura (B); es de notar que en este caso el centro de gravedad G no estará generalmente sobre el alambre.



Centro de gravedad de un alambre Fig.B

CENTROIDES DE ÁREAS

Para el caso de una placa homogénea de espesor uniforme, la magnitud Δw del peso de un elemento de la placa puede expresarse de la siguiente manera

$$\Delta w = \gamma t \Delta A$$

- en la que γ = peso específico del material
- t = espesor de la placa
- ΔA = área del elemento

De igual manera la magnitud w del peso de la placa completa podemos expresarla como

$$W = \gamma tA$$

en la que A representa el área total de la placa.

Sustituyendo Δw y w en las ecuaciones de los momentos (i) y después dividiendo ambos miembros de la ecuación entre γt nos queda

$$\sum My: \quad \bar{x} A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n$$

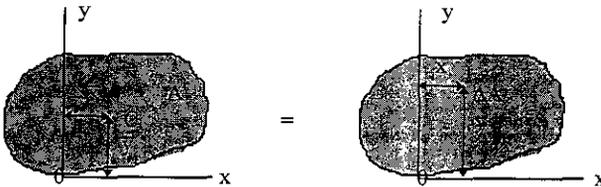
$$\sum Mx: \quad \bar{y} A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n$$

Aumentando el número de elementos en los que el área A se divide y disminuyendo al mismo tiempo el tamaño de cada elemento en el límite tenemos

$$\bar{x} A = \int x \, dA \tag{iii}$$

$$\bar{y} A = \int y \, dA$$

Las últimas dos ecuaciones definen las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centro de gravedad de una placa homogénea. También se conoce al punto de coordenadas x y y como el centroide C del área de la placa, figura (C). Si la placa no es homogénea, no pueden usarse estas ecuaciones para conocer el centro de gravedad de la placa pero si podemos obtener el centroide del área.



Centroide de un área Fig. C

El término centroide se utiliza en lugar de centro de gravedad cuando nos referimos a áreas (también a líneas y volúmenes), puesto que tales figuras no tienen peso; en el caso de un volumen el centroide es algún punto en el espacio que es fijo con respecto al volumen. Cuando el material de que está compuesto el volumen es homogéneo, entonces el centroide del volumen se define como centro de masa, o centro de gravedad.

PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS

Las integrales $\int x dA$ y $\int y dA$ (iii), se conocen como el primer momento del área A respecto a los ejes y y x respectivamente, es decir

$$Q_y = \int x dA = \text{primer momento de área respecto al eje } y.$$

$$Q_x = \int y dA = \text{primer momento de área respecto al eje } x.$$

También

$$Q_y = \bar{x} A$$

$$Q_x = \bar{y} A$$

Si el centroide de un área se ubica sobre un eje de coordenadas, el primer momento del área con respecto a dicho eje es cero y viceversa.

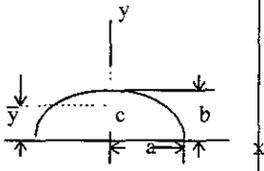
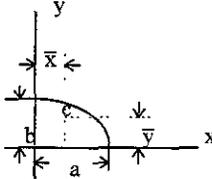
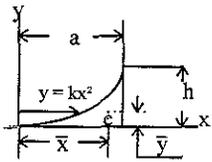
³⁹ A continuación se da una tabla con los centroides de algunas de las figuras más comunes

³⁹ La tabla de centroides se elaboró utilizando los libros de Estática anotados en la Bibliografía.

TABLA I

CENTROIDES DE ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COMUNES				
Nombre de la figura	Forma geométrica	Área	\bar{x}	\bar{y}
Triángulo rectángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$
Triángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$
Rectángulo		bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$
Círculo		πr^2	r	r
Semicírculo		$\frac{\pi r^2}{2}$	r	$\frac{4r}{3\pi}$
Cuarto de círculo		$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$

TABLA I (Continuación)

CENTROIDES DE ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COMUNES				
Nombre de la figura	Forma geométrica	Área	\bar{x}	\bar{y}
Semi-elipse		$\frac{\pi a b}{8}$	0	$\frac{4 b}{3 \pi}$
Cuarto de elipse		$\frac{\pi a b}{4}$	$\frac{4 a}{3 \pi}$	$\frac{4 b}{3 \pi}$
Enjuta parabólica		$\frac{a h}{3}$	$\frac{3 a}{4}$	$\frac{3 h}{10}$

IV.1.- MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

IV.1.1.-⁴⁰ OBTENCIÓN DE MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS DE SUPERFICIES SIMPLES.

Consideremos una superficie plana, de área A, como la mostrada en la figura (IV.1), se define como momento de inercia de área respecto al eje x, a la suma de las pequeñas superficies que la forman multiplicadas por el cuadrado de su respectiva distancia al eje x; representando dicho momento por I_x , podemos evaluarlo por medio de :

$$I_x = \int y^2 dA \quad (4.1.1)$$

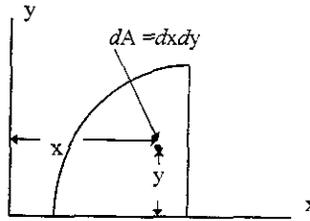


Fig.IV.1

De la misma manera el momento de inercia para el eje y lo podemos evaluar por:

$$I_y = \int x^2 dA \quad (4.1.2)$$

Las integrales anteriores se pueden calcular fácilmente si elegimos como dA una banda paralela a uno de los ejes de coordenadas. Para I_x , la banda será paralela al eje x, de esta manera todos los puntos que forman la banda están a la misma distancia y del eje x. Ver figura (IV.2). Entonces el momento de inercia I_x de la banda lo obtenemos multiplicando el área dA de la banda por y^2 .

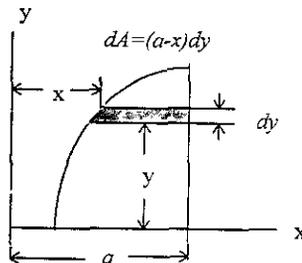


Fig.IV.2

⁴⁰ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág. 336.

De manera similar el momento de inercia de área I_y lo obtenemos colocando la banda paralela al eje y , entonces todos los puntos estarán a la misma distancia x del eje y . Así el momento de inercia I_x de la banda lo obtendremos multiplicando el área dA de la banda por x^2 , ver figura (IV.3).

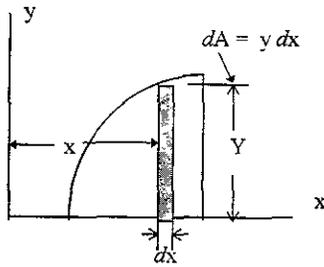


Fig.IV 3

Los momentos de Inercia de Áreas I_x e I_y son siempre positivos.

UNIDADES

Observando la integral del momento de inercia nos percatamos de que el resultado dimensional es una unidad de longitud elevada a la cuarta potencia, es decir, m^4 , cm^4 , in^4 , pie^4 , etc. debido a que se multiplican una área (A) por una longitud al cuadrado (x^2 o y^2).

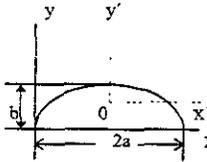
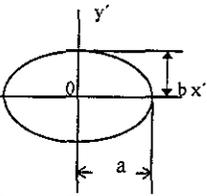
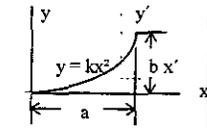
⁴¹ En la página siguiente se da una tabla con algunos de los momentos de inercia de figuras geométricas más comunes.

⁴¹La tabla de Momentos de Inercia de Área se elaboró utilizando los libros de Estática anotados en la Bibliografía

TABLA 2

MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COMUNES						
Nombre de la figura	Forma geométrica	$\bar{I}_{x'}$	$\bar{I}_{y'}$	I_x	I_y	J_0
Triángulo rectángulo		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{bh(h^2+b^2)}{36}$
Triángulo		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^3(b^2-ab+a^2)}{36}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh(b^2+ab+a^2)}{12}$	
Rectángulo		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{b^3h}{3}$	$\frac{bh(h^2+b^2)}{12}$
Círculo		$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{5\pi r^4}{4}$	$\frac{5\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{2}$
Semicírculo		$\frac{r^4(9\pi^2-64)}{72\pi}$	$\frac{\pi r^4}{8}$	$\frac{\pi r^4}{8}$	$\frac{5\pi r^4}{8}$	$\frac{\pi r^4}{4}$
Cuarto de círculo		$0.055r^4$	$0.055r^4$	$\frac{\pi r^4}{16}$	$\frac{\pi r^4}{16}$	$\frac{\pi r^4}{8}$

TABLA 2 (Continuación)

MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COMUNES						
Nombre de la figura	Forma geométrica	$\bar{I}_{x'}$	$\bar{I}_{y'}$	I_x	I_y	J_0
Semielipse		$ab^3(9\pi^2 - 64)$ 72π	$\pi a^3 b$ 8	$\pi a b^3$ 8	$5 \pi a^3 b$ 8	
Elipse		$\pi a b^3$ 4	$4 a^3 b$ 4			$\pi ab(a^2+b^2)$ 4
Enjuta parabólica				$a b^3$ 21	$a^3 b$ 5	

IV.1.2.- ⁴² PRODUCTO DE INERCIA

El producto de inercia de un área se obtiene al multiplicar cada elemento dA del área A por sus coordenadas x y y e integrando en toda el área, ver figura (IV.4). El producto de inercia se representa por la integral

$$I_{xy} = \int xy \, dA \tag{4.1.3}$$

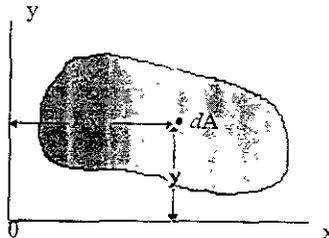


Fig.IV.4

⁴² Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág. 354.

El producto de inercia puede ser:

a) Positivo

b) Negativo

c) Cero. Cuando alguno de los ejes x o y es un eje de simetría o cuando los ejes x y y son simétricos.

UNIDADES

Son las mismas que para el momento de inercia, esto es, unidades de longitud a la cuarta potencia, m^4 , cm^4 , in^4 , pie^4 , etc.

⁴³ A continuación se ilustra una tabla con algunas figuras geométricas comunes y sus respectivos productos de inercia.

⁴³ La tabla de productos de inercia se elaboró utilizando los libros de Estática anotados en la Bibliografía

TABLA 3

PRODUCTOS DE INERCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COMUNES			
Nombre de la figura	Forma geométrica	$\bar{I}_{x'y'}$	I_{xy}
Triángulo rectángulo		$\frac{-h b^2}{72}$	$\frac{h^2 b^2}{24}$
Triángulo		$\frac{b h^2 (2a - b)}{72}$	$\frac{b h^2 (2a + b)}{72}$
Rectángulo		0	$\frac{b h^2}{4}$
Círculo		0	πr^4
Semicírculo		0	$\frac{2 r^4}{3}$
Cuarto de círculo		0	$\frac{r^4}{8} = \frac{a^4}{8}$

IV.1.3.- ⁴⁴ RADIO DE GIRO

Supongamos que el área de la figura (IV.5), la cual tiene un momento de inercia I_x con respecto al

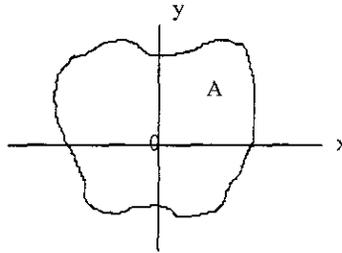


Fig.IV.5

eje x se concentra en una banda delgada paralela al eje x , ver figura (IV.6), de esta manera el área A así concentrada debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x . entonces la banda se debe colocar a una distancia k_x

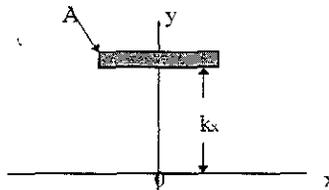


Fig.IV.6

del eje x y estará definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

ahora despejamos k_x , por lo tanto tenemos

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (4.1.4)$$

A la distancia k_x se le llama radio de giro del área A con respecto al eje x .

⁴⁴ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer Pág. 338.

De similar forma podemos definir el radio de giro k_y , en este caso el momento de inercia I_y con respecto al eje y se concentra en una banda delgada paralela al eje y , ver figura (IV.7), el área A así

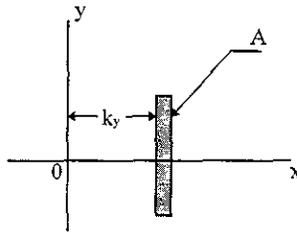


Fig.IV.7

concentrada debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje y , entonces la banda se debe colocar a una distancia k_y del eje y , y estará definida por la relación

$$I_y = k_y^2 A$$

ahora despejamos k_y , por lo tanto tenemos

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (4.1.5)$$

Entonces k_y es el radio de giro del área A con respecto al eje y .

Es de hacer notar que la franja la podemos colocar a cualquier lado del eje de referencia, ya que si k es negativo al elevarlo al cuadrado se vuelve positivo.

IV.1.4.- ⁴⁵ MOMENTO POLAR DE INERCIA

El momento de inercia de un área respecto a un eje perpendicular al plano del área se denomina momento polar de inercia y lo denotamos por J_o . En la figura (IV.8), el momento polar de inercia es

$$J_o = \int r^2 dA \quad (4.1.6)$$

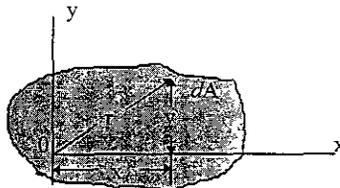


Fig.IV.8

⁴⁵ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág 337.

donde r es la distancia entre el área del elemento y el origen de las coordenadas. El eje de referencia para J_0 es un eje perpendicular al plano xy , ubicado en el origen de estas coordenadas.

De la figura (IV.8) se observa que $r^2 = x^2 + y^2$ entonces

$$J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA$$

$$J_0 = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

y como

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

finalmente nos queda

$$\boxed{J_0 = I_x + I_y} \quad (4.1.7)$$

IV.1.5.- TEOREMA DE EJES PARALELOS PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE ÁREAS

IV.1.5.1.- ⁴⁶TEOREMA DE EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA.

Sea el momento de inercia I del área A con respecto al eje AA' , ver figura (IV.9). La distancia de un elemento de área dA al eje AA' es y , entonces $I = \int y^2 dA$, consideremos ahora el eje BB' paralelo al eje AA' y que pasa por el centroide C del área; el eje BB' se llama eje centroidal, la

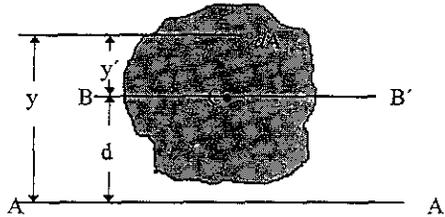


Fig.IV.9

distancia del elemento dA a BB' es y' por lo tanto tenemos que $y = y' + d$ donde d representa la distancia entre los ejes AA' y BB' . Ahora sustituyendo y en la ecuación integral de I nos queda

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$

desarrollando el binomio al cuadrado tenemos

$$I = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

De las ecuaciones anteriores se observa que la primera integral es el momento de inercia \bar{I} del área con respecto al eje centroidal BB' . La segunda integral es el primer momento del área con respecto al eje BB' , como el centroide C está sobre el eje, esta integral es cero. La tercera integral representa el área total A . Entonces nos queda

⁴⁶ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática Ferdinand P. Beer. Pág 343.

$$\boxed{I = \bar{I} + Ad^2} \quad (4.1.8)$$

Esta ecuación establece que el momento de inercia I con respecto a un eje AA' es igual al momento de inercia \bar{I} del área con respecto a un eje centroidal BB' paralelo al eje AA' más el producto Ad^2 del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes.

Podemos, también, establecer una relación similar para los radios de giro con respecto a ejes paralelos, uno de los cuales es un eje centroidal.

Sustituyendo I por k^2A e \bar{I} por \bar{k}^2A , podemos expresar el teorema de la siguiente manera

$$k^2A = \bar{k}^2A + Ad^2$$

dividiendo la ecuación anterior entre el área A nos queda

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (4.1.9)$$

En forma similar, para momentos polares de inercia y radios polares de giro se obtienen las siguientes relaciones análogas entre cualquier eje y un eje centroidal paralelo.

$$J_0 = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{o} \quad \bar{k}_0^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (4.1.10)$$

Donde: J_0 = momento polar de inercia de un área respecto al punto O .

\bar{J}_C = momento polar de inercia de la misma área respecto a su centroide C .

d = distancia entre O y C .

IV.1.5.2.- ⁴⁷TEOREMA DE EJES PARALELOS PARA PRODUCTOS DE INERCIA.

Sea un área A y un sistema de coordenadas rectangulares x y y , figura (IV.10). Donde se localiza

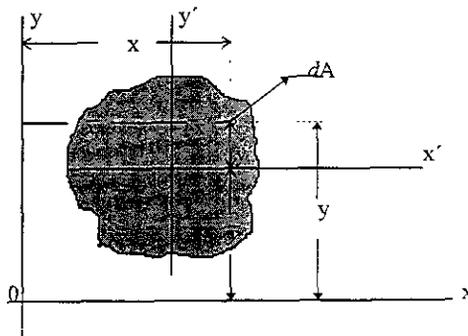


Fig.IV.10

⁴⁷ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer Pág. 355.

el centroide C del área con coordenadas \bar{x} y \bar{y} , trazamos dos ejes centroidales x' y y' paralelos a los ejes x y y , respectivamente. Indicando por x y y a las coordenadas de un elemento dA respecto a los ejes originales, y por x' y y' a las coordenadas del mismo elemento dA con relación a los ejes centroidales, tenemos que

$$x = x' + \bar{x}$$

$$y = y' + \bar{y}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.1.3) las relaciones anteriores nos queda

$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA$$

$$I_{xy} = \int x'y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{x} \bar{y} \int dA$$

Del análisis de la última ecuación integral se observa que:

$\int x'y' \, dA = \bar{I}_{x'y'}$ = producto de inercia del área A con relación a los ejes centroidales x' y y' .

$\int x' \, dA$ y $\int y' \, dA$. Estas integrales, segunda y tercera, representan los primeros momentos del área A en relación a los ejes centroidales; esto quiere decir que estos primeros momentos son cero porque el centroide C está ubicado en estos ejes.

Finalmente $\int dA$, nos representa el área total A .

Por lo tanto el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia estará representado por la ecuación (4.1.11)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x} \bar{y} A \tag{4.1.11}$$

IV.1.6.- MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS RESPECTO A EJES CENTROIDALES.

De acuerdo con lo visto anteriormente, hay dos maneras de encontrar el momento de inercia de superficies simples respecto a ejes centroidales:

1) Utilizando la expresión $\bar{I} = \int y^2 \, dA$

2) Utilizando la ecuación obtenida con el teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

A manera de ejemplo resolveremos algunos problemas⁴⁸ usando ambas formas de solución

⁴⁸ Problemas resueltos con base en los libros: Mecánica Para Ingeniería I Estática. Josepi. F. Shelley. Pág. 336. Ingeniería Mecánica. Estática. Bela I Sandor. Pág. 220

EJEMPLO RESUELTO IV.1

$$1) \bar{I} = \int y^2 dA$$

Encontrar los momentos de inercia I_x e I_y del área rectangular de la figura (IV.11) respecto a los ejes centroidales mostrados.

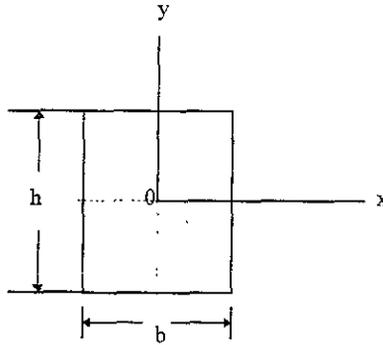


Fig.IV.11

Solución:

Elegimos el elemento de área dA como se indica en la figura (IV.12).

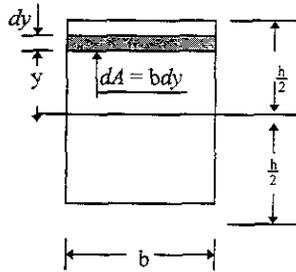


Fig.IV.12

$$\bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\bar{I}_x = b \left[\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right] = b \left[\frac{h^3/8}{3} - \frac{-h^3/8}{3} \right] = b \left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right] = b \left[\frac{2h^3}{24} \right]$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$

Resultado

De la misma manera obtenemos :

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}$$

EJEMPLO RESUELTO IV.2

2) $\bar{I} = I + Ad^2$

Encontrar el momento de inercia del triángulo de base b y altura h mostrado en la figura (IV.13), respecto a un eje centroidal paralelo a su base.

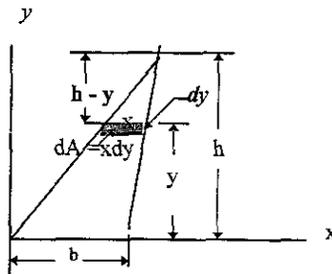


Fig.IV.13

Solución: primero resolveremos el momento de inercia respecto a la base. Seleccionamos una banda diferencial como se muestra en la figura (IV.13).

De la figura tenemos que : $dA = x dy$

Por semejanza de triángulos: $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$

Por lo tanto $x = \frac{b(h-y)}{h}$

Utilizando la expresión $I_x = \int y^2 dA$ e integrando desde $y = h$ hasta $y = 0$

$$I_x = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$I_x = \frac{b}{h} \left[\int_b^h hy^2 dy - \int_b^h y^3 dy \right] = \frac{b}{h} \left[\frac{4h^4 - 3h^4}{12} \right] = \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{12} \right]$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Ahora, para encontrar el momento de inercia \bar{I}_x , utilizamos la fórmula obtenida para el teorema de los ejes paralelos, es decir:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

Despejando \bar{I}_x , tenemos

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2$$

En la figura (IV.14) se ilustra la distancia entre el eje centroidal y el eje x es $h/3$ (dato obtenido de la tabla de centroides), por lo tanto nos queda:

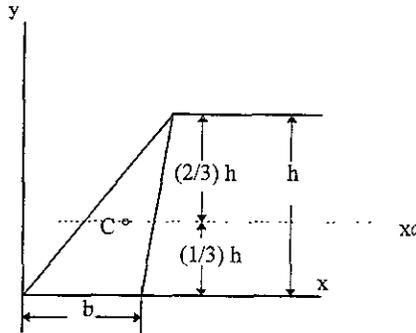


Fig.IV.14

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} - \left[\frac{bh}{2} \right] \left[\frac{h}{3} \right]^2 = \frac{bh^3}{12} - \left[\frac{bh}{2} \right] \left[\frac{h^2}{9} \right] = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36}$$

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$	Resultado
-------------------------------	-----------

IV.1.7.-⁴⁹ PRODUCTOS DE INERCIA DE ÁREAS RESPECTO A EJES CENTROIDALES.

Para el cálculo de productos de inercia de áreas respecto a ejes centroidales es conveniente utilizar el teorema de los ejes paralelos, es decir:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

En el siguiente problema se ilustra su utilización.

⁴⁹ Problemas resueltos con base en los libros: Mecánica Para Ingeniería I. Estática. Joseph F. Shelley Pag 336. Ingeniería Mecánica . Estática. Beia I Sandor. Pág. 220

EJEMPLO RESUELTO IV.3 Determinar el producto de inercia respecto a los ejes centroidales paralelos a los ejes x y y , del triángulo mostrado en la figura (IV.15).

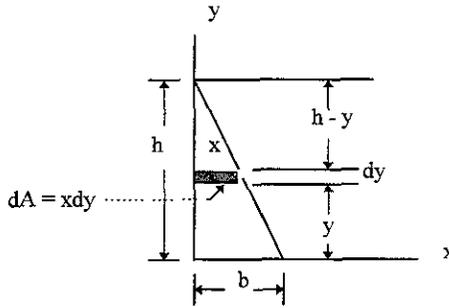


Fig.IV.15

Solución:

Primero encontraremos el producto de inercia respecto a los ejes x y y mostrados en la figura (IV.15).

Escogemos como área diferencial la franja sombreada paralela al eje x .

De la figura (IV.15) se observa que:

a) Al aplicar la fórmula de la definición de producto de inercia

$$I_{xy} = \int xy \, dA, \quad x \text{ e } y \text{ representan las coordenadas del centroide del área diferencial } dA.$$

b) El área de la franja es $dA = x \, dy$

c) Las coordenadas del centroide de la franja diferencial son $(\frac{1}{2}x, y)$

d) $x = \frac{b}{h} (h - y)$

Por lo tanto $dA = x \, dy = \frac{b}{h} (h - y) \, dy$

Entonces, sustituyendo en $I_{xy} = \int xy \, dA$ tendremos:

$$I_{xy} = \int_0^h \left[\frac{1}{2} \frac{b}{h} (h - y) \right] (y) \left[\frac{b}{h} (h - y) \, dy \right] = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3) \, dy$$

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2h^2} \left[\int_0^h h^2 y \, dy - 2h \int_0^h y^2 \, dy + \int_0^h y^3 \, dy \right] = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{h^2 y}{2} - \frac{2hy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^h$$

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{6h^4 - 8h^4 + 3h^4}{12} \right] = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{h^4}{12} \right]$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} \quad \text{Resultado parcial}$$

Ahora encontraremos el producto de inercia respecto a los ejes centroidales del triángulo. En la figura (IV.16) mostramos el triángulo con las coordenadas de su centroide.

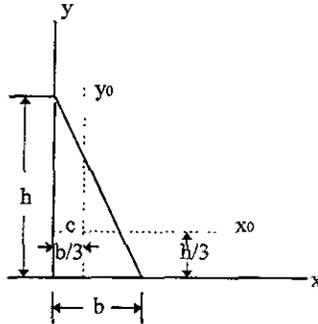


Fig.IV.16

Aplicando la fórmula del teorema de transferencia, es decir,

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A \bar{x} \bar{y}$$

Utilizando el producto de inercia $I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24}$ encontrado anteriormente tenemos

$$\frac{b^2 h^2}{24} = \bar{I}_{xy} + \left(\frac{bh}{2} \right) \left(\frac{b}{3} \right) \left(\frac{h}{3} \right)$$

$$\frac{b^2 h^2}{24} = \bar{I}_{xy} + \frac{b^2 h^2}{18}$$

despejando a \bar{I}_{xy} nos queda

$$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b^2 h^2}{18} = \frac{3b^2 h^2 - 4b^2 h^2}{72}$$

$$\bar{I}_{xy} = \frac{-b^2 h^2}{72}$$

Resultado

Observando el signo del resultado y además el triángulo, nos damos cuenta que la mayor parte del área está en los cuadrantes 2 y 4 respecto de los ejes centroidales. Si se gira 90° el triángulo respecto a la posición mostrada, el signo será positivo pero la magnitud será la misma, es decir,

$$\frac{b^2 h^2}{72}$$

También es importante recordar que el producto de inercia puede ser:

- a) Positivo
- b) Negativo
- c) Cero

IV.1.8.-⁵⁰ MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS COMPUESTAS.

Los momentos de inercia así como los productos de inercia de figuras compuestas por diferentes áreas, los podemos calcular dividiendo la figura en elementos tales como triángulos, rectángulos, semicírculos, etc. y calculando los momentos y productos de inercia respectivamente, para cada elemento de área simple. Por lo tanto el momento o producto de inercia, según sea el caso, es igual a la suma de los momentos o productos de inercia de los elementos en que se dividió la figura. Sin embargo, para poder sumar los momentos o productos de inercia de los elementos, todos deben ser calculados antes con respecto al mismo o mismos ejes, usando la fórmula del teorema de transferencia respectivo cuando sea necesario. A continuación se resolverán algunos ejemplos.

EJEMPLO RESUELTO IV. 4

Calcular el momento de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y cuando $a = 20\text{mm}$ de figura (IV.17)

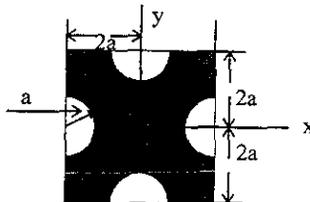


Fig.IV.17

⁵⁰ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág. 344.

Solución. Podemos obtener el área dada restando los cuatro semicírculos al cuadrado.
 Calcularemos los momentos de inercia del cuadrado y de los semicírculos por separado.

Cálculo del momento de inercia I_x del cuadrado. Fig.IV.18

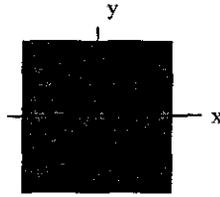


Fig.IV.18

De la tabla de momentos de inercia tenemos, para un cuadrado $I_x = \frac{bh^3}{12}$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{(4a)(4a)^3}{12} = \frac{256a^4}{12} = \frac{256(20)^4}{12} = \frac{256(16000)}{12}$$

$$I_x = 3,413,333.33 \text{ mm}^4$$

Cálculo de los momentos de inercia de los cuatro semicírculos. Figura (IV.19)

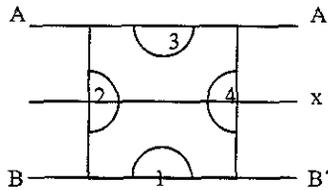


Fig.IV.19

Primero calcularemos el momento de inercia del semicírculo (3) respecto al eje AA', ver figura (IV.20), después respecto al eje centroidal del semicírculo y finalmente respecto al eje x.

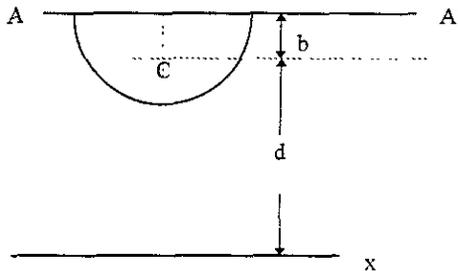


Fig.IV.20

De la tabla de centroides, localizamos el centroide C del semicírculo respecto al eje AA'.

$$b = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(20)}{3\pi} = 8.49\text{mm}$$

La distancia d del centroide C al eje x es: $d = 40\text{mm} - b = 49\text{mm} - 8.49\text{mm} = 31.51\text{mm}$

Ahora, partiendo de la tabla para momentos de inercia calculamos el momento de inercia del semicírculo respecto al eje AA'; y calculamos, además, el área del semicírculo.

$$I_{AA} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi(20)^4}{8} = 62831.8\text{mm}^4$$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(20)^2}{2} = 628.3\text{mm}^2$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos para calcular \bar{I}_x

$$I_{AA} = \bar{I}_x + Ab^2$$

Despejando a \bar{I}_x nos queda

$$\bar{I}_x = I_{AA} - Ab^2$$

$$\bar{I}_x = 62831.8\text{mm}^4 - 628.3\text{mm}^2 (8.49\text{mm})^2$$

$$\bar{I}_x = 62831.8\text{mm}^4 - 45287.9\text{mm}^4$$

$$\bar{I}_x = 17543.9\text{mm}^4$$

Ahora utilizando nuevamente el teorema de los ejes paralelos para obtener el valor de I_x :

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$I_x = 17543.9\text{mm}^4 + 628.3\text{mm}^2 (31.51\text{mm})^2$$

$$I_x = 17543.9\text{mm}^4 + 623826.6\text{mm}^4$$

$$I_x = 641,370.46\text{mm}^4$$

Observación: De acuerdo a la figura (IV.19) el momento de inercia del semicírculo (3) es igual al momento de inercia del semicírculo (1), por lo tanto al restar se debe considerar también.

Ahora debemos calcular el momento de inercia de los semicírculos (2) y (4), teniendo en cuenta la observación anterior que para este caso también se aplica; es decir, el momento de inercia del semicírculo (2) es igual al momento del semicírculo (4), por lo tanto calcularemos el momento de inercia del semicírculo (4) únicamente, ver figura (IV.21).

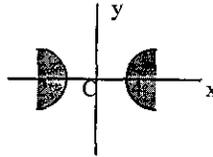


Fig.IV.21

De la tabla para momentos de inercia tenemos, para el semicírculo (4) que :

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_x = \frac{\pi (20)^4}{8}$$

$$I_x = 62831.8 \text{ mm}^4$$

Finalmente el momento de inercia I_x del área sombreada dada lo obtenemos restándole al momento de inercia obtenido para el cuadrado, los momentos de inercia de los cuatro semicírculos.

Resumiendo:

a) Momento de inercia del cuadrado: $I_x = 3413333.33 \text{ mm}^4$

b) Momento de inercia del semicírculo 1 : $I_x = 641370.46 \text{ mm}^4$

c) Momento de inercia del semicírculo 2 : $I_x = 62831.8 \text{ mm}^4$

d) Momento de inercia del semicírculo 3 : $I_x = 641370.46 \text{ mm}^4$

e) Momento de inercia del semicírculo 4 : $I_x = 62831.8 \text{ mm}^4$

Realizando la resta tenemos:

$$I_x = 3413333.33 - 2(641370.46) - 2(62831.8)$$

$$I_x = 3413333.33 - 1282740.92 - 125663.6$$

$$I_x = 3413333.33 - 1408404.52$$

$$I_x = 2004928.81 \text{ mm}^4$$

Resultado

Finalmente como la figura es simétrica tenemos que $I_x = I_y$, por lo tanto:

$$I_y = 2004928.81 \text{ mm}^4$$

Resultado

IV.1.9.- ⁵¹ PRODUCTOS DE INERCIA DE FIGURAS COMPUESTAS.

EJEMPLO RESUELTO IV.5

Determinar el producto de inercia del área que se forma restando el semicírculo de la figura (IV.22) respecto a los ejes x y y mostrados.

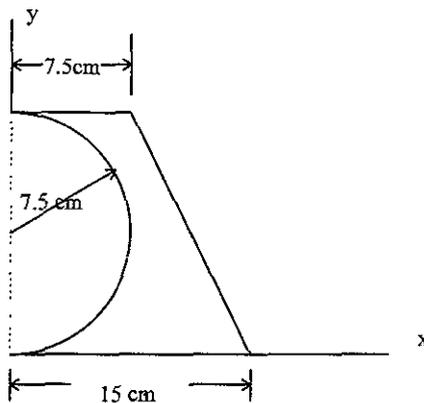


Fig.IV.22

Solución.

Resolveremos el problema de la siguiente manera:

- Calcularemos I_{xy} del triángulo
- Se calculará I_{xy} del rectángulo
- Obtendremos I_{xy} del semicírculo
- Finalmente haremos la sumatoria para encontrar el producto de inercia del área formada restando el semicírculo de la figura (IV.22).

En la figura (IV.23) se muestra como se dividió la figura (IV.22).

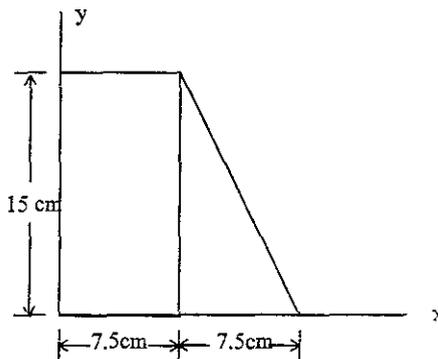


Fig.IV.23

⁵¹ Ingeniería Mecánica, Estática, Bela I Sandor, Pág. 231.

a) I_{xy} del triángulo.

En la figura (IV.24) se ilustran el triángulo y las distancias a los ejes x y y .

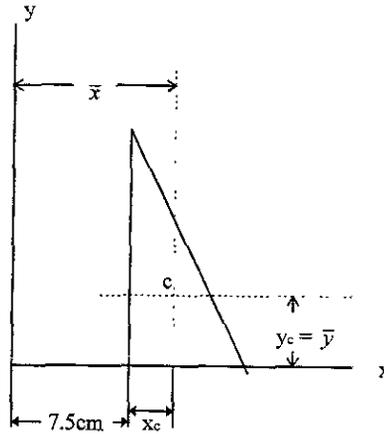


Fig.IV.24

De la tabla de centroides tenemos para un triángulo rectángulo.

$$x_c = \frac{b}{3} = \frac{7.5 \text{ cm}}{3} = 2.5 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{h}{3} = \frac{15 \text{ cm}}{3} = 5 \text{ cm}$$

Distancias a los ejes x y y .

$$\bar{x} = 2.5 \text{ cm} + 7.5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 5 \text{ cm}$$

De la tabla para productos de inercia tenemos para un triángulo rectángulo, para su centroide.

$$\bar{I}_{xy} = \frac{-b^2 h^2}{72} = \frac{-(7.5)^2 (15)^2}{72}$$

$$\bar{I}_{xy} = -175.78 \text{ cm}^4$$

Utilizando el teorema de transferencia tenemos

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

$$I_{xy} = -175.78 \text{ cm}^4 + (10\text{cm})(5\text{cm}) \left[\frac{(7.5 \text{ cm})(15 \text{ cm})}{2} \right]$$

$$I_{xy} = -175.78 \text{ cm}^4 + 2812.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 2636.72 \text{ cm}^4$$

b) I_{xy} del triángulo

En la figura (IV.25) se ilustran el rectángulo y las distancias a los ejes x e y .

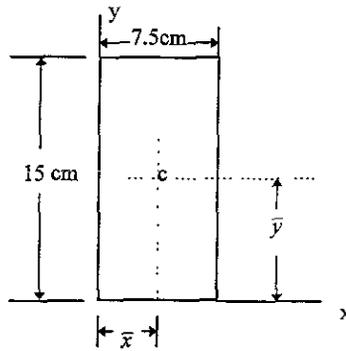


Fig.IV.25

$$\bar{x} = 3.75 \text{ cm}, \quad \bar{y} = 7.5 \text{ cm}$$

Sabemos que el producto de inercia centroidal es igual a cero ya que la figura es simétrica respecto a su centro. Por lo tanto utilizando la fórmula del teorema de transferencia tenemos

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A = 0 + (3.75 \text{ cm})(7.5 \text{ cm})(7.5 \text{ cm})(15 \text{ cm}) = 3164 \text{ cm}^4$$

c) I_{xy} del semicírculo

En la figura (IV.26) se ilustra el semicírculo y las distancias a los ejes x y y .

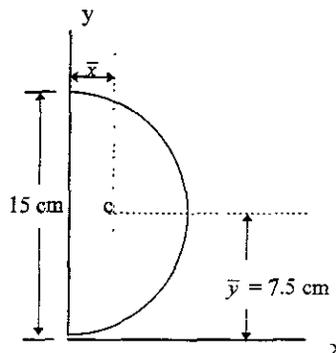


Fig.IV.26

de la tabla de centroides, para un semicírculo, tenemos

$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(7.5 \text{ cm})}{3\pi} = 3.18 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = r = 7.5 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (7.5 \text{ cm})^2}{2} = 88.36 \text{ cm}^2$$

El producto de inercia con respecto a los ejes centroidales es cero ya que la figura es simétrica, por lo tanto haciendo uso del teorema de transferencia tenemos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

$$I_{xy} = 0 + (3.18 \text{ cm})(7.5 \text{ cm})(88.36 \text{ cm}^2)$$

$$I_{xy} = 2107.4 \text{ cm}^4$$

Resumen de resultados:

a) I_{xy} del triángulo = 2636.72 cm^4

b) I_{xy} del rectángulo = 3164 cm^4

c) I_{xy} del semicírculo = 2107.4 cm^4

d) Por lo tanto el producto de inercia del área formada restando el semicírculo de la figura (IV.22) será:

$$I_{xy} = a) + b) - c) = 2636.72 \text{ cm}^4 + 3164 \text{ cm}^4 - 2107.4 \text{ cm}^4$$

$I_{xy} = 3693.3 \text{ cm}^4$

IV.1.10.-⁵² EJES PRINCIPALES DE INERCIA DE UN ÁREA.

IV.1.11.- MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN ÁREA.

Sea el área A y las coordenadas x y y de la figura (IV.27).

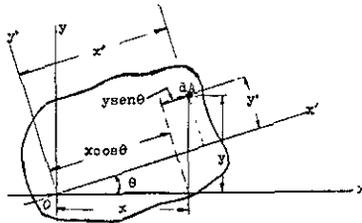


Fig.IV.27

Debemos suponer que los momentos y el producto de inercia del área A considerada son conocidos y lo que se pretende determinar son los momentos y el producto de inercia con respecto a los nuevos ejes x' y y' que se obtienen al girar los ejes originales un ángulo theta alrededor del origen. Es decir:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad \text{Momentos y producto de inercia conocidos} \quad (4.1.12)$$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA \quad \text{Momentos y producto de inercia por determinar}$$

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA$$

De la figura (IV.27) obtenemos las siguientes relaciones entre las coordenadas x y y y x' y y' del elemento de área dA:

$$x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta$$

Sustituyendo y' en la expresión de I_{x'}, nos queda

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta)^2 dA, \text{ desarrollando tenemos}$$

⁵² Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer. Pág. 355.

$$I_x = \int (y^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta) dA, \text{ ordenando}$$

$I_x = \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA$. tomando en cuenta las ecuaciones de los momentos y producto de inercia conocidos, es decir las ecuaciones (4.1.12), nos queda

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta \quad (4.1.13)$$

De manera similar, se obtiene para I_y e $I_{y'}$ las expresiones

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \quad (4.1.14)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (4.1.15)$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{aligned}$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

las ecuaciones (4.1.13), (4.1.14) y (4.1.15) las podemos escribir:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (4.1.16)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (4.1.17)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (4.1.18)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.17) observamos que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (4.1.19)$$

Podríamos haber anticipado este resultado ya que ambos miembros de (4.1.19) son iguales al momento polar de inercia J_o .

Las expresiones (4.1.16) y (4.1.18) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto quiere decir que si escogemos un sistema de coordenadas rectangulares y trazamos un punto M de abscisa $I_{x'}$ y ordenada $I_{y'}$ para cualquier valor del parámetro θ , todos los puntos obtenidos estarán sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, debemos eliminar el parámetro θ de las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.18): esto lo hacemos trasponiendo el término $(I_x + I_y)/2$ en la ecuación (4.1.16), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.18) y sumándolas, obtenemos

$$\left[I_{x'} \frac{I_x + I_y}{2} \right]^2 + I_{x'y'}^2 = \left[\frac{I_x - I_y}{2} \right]^2 + I_{xy}^2 \quad (4.1.20)$$

Haciendo

$$I_{prom} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left[\frac{I_x - I_y}{2} \right]^2 + I_{xy}^2} \quad (4.1.21)$$

Podemos escribir la identidad (4.1.20) en la forma

$$(I_{x'} - I_{prom})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \quad (4.1.22)$$

que es la ecuación de un círculo de radio R , con centro en el punto C de Abscisa I_{prom} y ordenada cero ver figura (IV.28). Se debe hacer la observación de que las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.18) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Debido a la simetría del círculo, además, respecto al eje horizontal, se hubiera obtenido el mismo resultado si en vez de M hubiéramos trazado el punto N de coordenadas $I_{x'}$ y $-I_{x'y'}$ respectivamente, ver figura (IV.29).

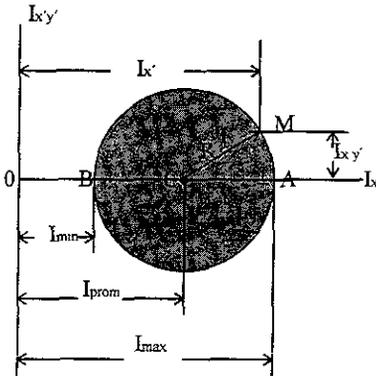


Fig.IV.28

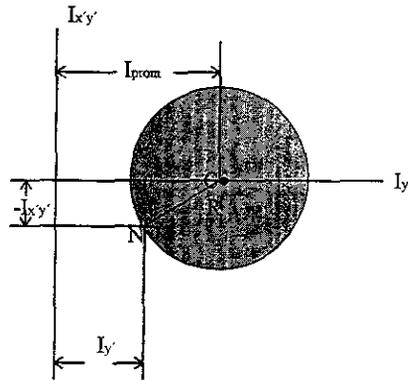


Fig.IV.29

Los dos puntos A y B donde el círculo corta al eje de las abscisas son de especial interés: el punto A corresponde al valor máximo del momento de inercia I_x , en tanto que el punto B corresponde a su valor mínimo. También, ambos puntos corresponden a un valor del producto de inercia I_{xy} . En consecuencia, los valores θ_m del parámetro θ correspondiente a los puntos A y B se pueden obtener haciendo $I_{xy} = 0$ en la ecuación (4.1.18), es decir:

$$\begin{aligned}
I_{x'y'} = 0 &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \\
- I_{xy} \cos 2\theta &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta \\
- 2 I_{xy} \cos 2\theta &= (I_x - I_y) \sin 2\theta \\
\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta \\
\tan 2\theta_m &= \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{4.1.23}
\end{aligned}$$

Esta ecuación define dos valores de $2\theta_m$ separados 180° y por tanto dos valores de θ separados 90° . Uno de ellos corresponde al punto A de la figura (IV.28) y a un eje que pasa por 0 en la figura (IV.27) respecto al cual el momento de inercia del área es máximo; el otro valor corresponde al punto B y a un eje que pasa por 0 respecto al cual el momento de inercia es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí y reciben el nombre *de ejes principales del área respecto a θ* , y los valores correspondientes I_{\max} e I_{\min} del momento de inercia reciben el nombre *de momentos principales de inercia del área respecto a θ* . Debido a que los dos valores θ_m definidos por la ecuación (4.1.23) fueron obtenidos al hacer $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (4.1.18) es obvio que el producto de inercia del área dada respecto a sus ejes principales es cero.

De la figura(IV.28) observamos que

$$I_{\max} = I_{prom} + R \quad \text{e} \quad I_{\min} = I_{prom} - R \tag{4.1.24}$$

Sustituyendo a I_{prom} y a R por las ecuaciones de (4.1.21), escribimos

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{4.1.25}$$

Sí por simple inspección visual no es posible determinar cual de los dos ejes principales corresponde a I_{\max} y cual a I_{\min} se tendrá que sustituir uno de los valores de θ_m en la ecuación (4.1.16) para poder determinar cual de los dos corresponde al valor máximo del momento de inercia del área respecto a θ .

En referencia a lo visto anteriormente respecto a los productos de inercia de un área, es de notar que si un área tiene un eje de simetría que pasa por el punto 0, dicho eje debe ser un eje principal del área respecto a 0. Por otra parte un eje principal no necesariamente es un eje de simetría; cualquier área, tenga o no propiedades de simetría, tendrá dos ejes principales de inercia respecto a cualquier punto 0.

Las propiedades que se establecieron aquí son válidas para cualquier punto localizado dentro o fuera del área dada. Si hacemos coincidir el punto 0 con el centroide del área, cualquier eje que pase por 0 será centroidal; a los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide se le conoce como ejes principales centroidales del área.

CÍRCULO DE MOHR PARA LOS MOMENTOS Y LOS PRODUCTOS DE INERCIA

Las ecuaciones que se desarrollaron en la sección anterior no tienen que ser memorizadas ya que una interpretación de ellas que fue desarrollada por el Ingeniero alemán Otto Mohr es mucho más útil. En esta interpretación se usa el círculo que se vio en la sección anterior y se le conoce como círculo de Mohr.

Comprobaremos que, si se conocen los momentos y el producto de inercia con respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por un punto O , ese círculo lo podemos utilizar para determinar gráficamente:

- Los ejes principales y los momentos de inercia principales del área respecto a O .
- Los momentos y el producto de inercia con respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares x' y y' que pasen por O .

Sea un área A y dos ejes coordenados rectangulares x y y , figura (IV.30).

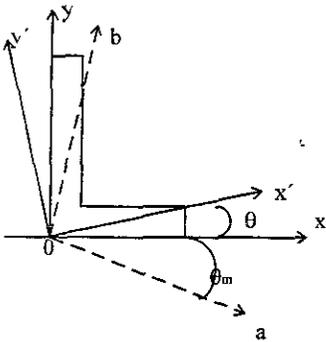


Figura IV.30

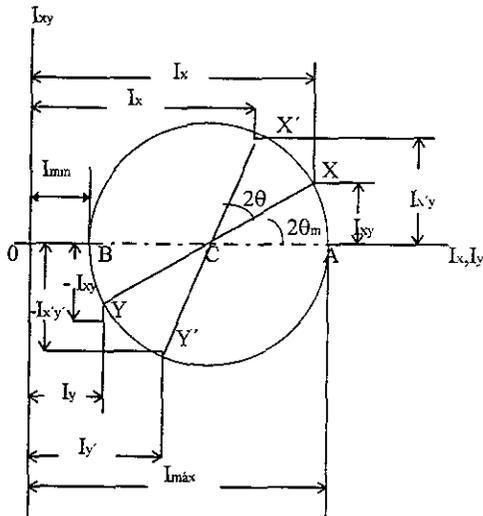


Figura IV.31

Se supondrá que se conocen: I_x , I_y e I_{xy} , y los representaremos en un diagrama por un punto X de coordenadas I_x e I_{xy} y un punto Y de coordenadas I_y e $-I_{xy}$, figura (IV.31). Si como se ha supuesto en la figura (IV.31), I_{xy} es positivo, el punto X queda arriba del eje horizontal y el punto Y abajo. Si I_{xy} es negativo, Y queda arriba del eje horizontal y X abajo. Uniendo X y Y por una línea recta, queda definido el punto C de intersección entre esta línea XY y el eje horizontal. Trazamos el círculo con centro en C y diámetro XY . Observando que la abscisa de C y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades I_{prom} y R definidas por las ecuaciones (4.1.21), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada con respecto a O . Por lo tanto, las abscisas de los puntos A y B donde el círculo corta al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos de inercia principales del área I_{max}, I_{min} .

Observamos también que como

$$\tan(XCA) = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los dos ángulos $2\theta_m$ que satisfacen la ecuación (4.1.23); luego el ángulo θ_m que en la figura (IV.30) define el eje principal $0a$ correspondiente al punto A en la figura (IV.31), se puede obtener dividiendo entre dos el ángulo XCA medido en el círculo de Mohr. Además observamos que si $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como en el caso aquí considerado, la rotación que lleva CX a CA es en el sentido de las manecillas del reloj. Pero en ese caso, el ángulo θ_m que obtenemos de la ecuación (4.1.23) y que define el eje principal $0a$ en la figura (IV.30), es negativo; por lo tanto, la rotación que lleva $0x$ a $0a$ es también en el sentido de las manecillas del reloj. Se concluye, por lo tanto, que los sentidos de la rotación en las figuras (IV.30) y (IV.31) son los mismos: es decir, si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de $2\theta_m$ para transformar CX en CA en el círculo de Mohr, se necesitará una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de θ_m para transformar $0x$ en el eje principal correspondiente $0a$ en la figura (IV.30).

Ya que el círculo de Mohr está definido unívocamente, se debe obtener el mismo círculo si consideramos los momentos y el producto de inercia del área con respecto a los ejes rectangulares x' y y' ver figura (IV.30). El punto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ y el punto Y' de coordenadas $I_{y'}$ e $-I_{x'y'}$ se ubicarán sobre el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ de la figura (IV.31) debe ser el doble del ángulo $x'0a$ de la figura (IV.30). Puesto que, como se observó antes, el ángulo XCA es el doble del ángulo $x0a$, entonces el ángulo XCX' de la figura (IV.31) será también el doble del ángulo $x0x'$ de la figura (IV.30). El diámetro $X'Y'$ que define los momentos y productos de inercia del área dada respecto a los ejes rectangulares x' y y' , que forman un ángulo θ con los ejes x y y , se puede obtener al rotar un ángulo 2θ el diámetro XY correspondiente a los momentos y al producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} . La rotación que transforma el diámetro XY en el diámetro $X'Y'$ en la figura (IV.31) tiene el mismo sentido que la rotación que transforma los ejes x y y en los ejes x' y y' en la figura (IV.30).

Se debe hacer notar que la utilización del círculo de Mohr no está limitada a soluciones gráficas, es decir, a soluciones basadas en el trazo y medición precisos de los distintos parámetros en cuestión. Con sólo esbozar el círculo de Mohr y utilizando trigonometría se pueden derivar fácilmente las relaciones para la solución de un problema.

IV.2.- MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE CUERPOS.

⁵³ El momento de inercia es una manera de medir la resistencia que opone un cuerpo a la aceleración angular ($M = I\alpha$), de la misma manera que la masa es una medida de la resistencia que opone el cuerpo a la aceleración ($F = ma$).

Sea el cuerpo rígido de la figura (IV.32), el brazo del momento r es la distancia perpendicular desde el eje z al elemento diferencial dm .

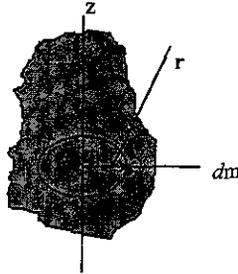


Fig.IV.32

El momento de inercia del cuerpo mostrado en torno del eje z es

$$I = \int r^2 dm \quad (4.2.1)$$

Ya que en la fórmula anterior está involucrado el radio r del cuerpo, el valor de I dependerá del eje para el que se calcule, ya que si el eje coincide con el eje longitudinal de una varilla delgada, I será pequeña, pero si el eje es perpendicular a la varilla, I será grande, debido a que la varilla tendrá una mayor masa distribuida a mayor distancia del eje.

IV.2.1.- ⁵⁴ MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO

Sea una masa pequeña Δm colocada sobre una barra de masa despreciable que puede girar libremente sobre un eje AA' , figura (IV.33)

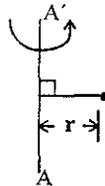


Fig.IV.33

Aplicando un par al sistema, la barra y la masa, que inicialmente estaban en reposo, empezarán a girar alrededor del eje AA' . El tiempo necesario para que el sistema alcance una velocidad de rotación arbitraria es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r . Por lo tanto, el producto $r^2\Delta m$ nos proporciona una medida de la inercia del sistema, es decir, una medida de la resistencia que el sistema presenta cuando se intenta ponerlo en movimiento. Debido a esto, al producto $r^2\Delta m$ se le denomina momento de inercia de la masa Δm con respecto al eje AA' .

⁵³ Ingeniería Mecánica. Dinámica. R.C. Hibbeler Pág. 342.

⁵⁴ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand. P. Beer. Pág. 1018.

Sea, ahora, un cuerpo de masa m que va a girar alrededor de un eje AA' , figura (IV.34). Si dividimos al cuerpo en elementos de masa $\Delta m_1, \Delta m_2$ hasta Δm_i , se encuentra que la resistencia que el cuerpo presenta nos la da la suma $r^2_1\Delta m_1 + r^2_2\Delta m_2 + \dots + r^2_i\Delta m_i$, por lo tanto, esta suma nos define el momento de inercia del cuerpo respecto al eje AA' .

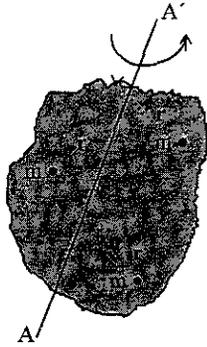


Fig.IV.34

Aumentando el número de elementos, encontramos en el límite que el momento de inercia del cuerpo de masa m es igual a la integral encontrada anteriormente, es decir

$$I = \int r^2 dm \tag{4.2.1}$$

Sea ahora el cuerpo de la figura (IV.35). El momento de inercia para el elemento diferencial dm del

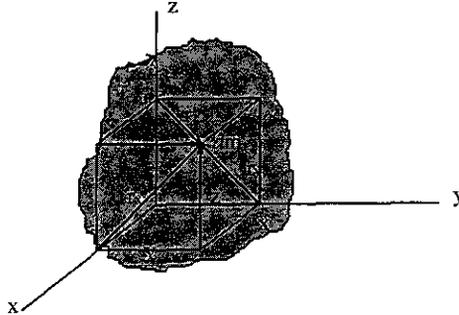


Fig.IV.35

cuerpo alrededor de cualesquiera de los tres ejes de coordenadas se define como el producto de la masa del elemento y el cuadrado de la distancia mínima con respecto del eje hacia dicho elemento. De la figura (IV.35) observamos que

$$r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$$

por lo tanto, el momento de inercia del elemento dm alrededor del eje x es

$$dI_x = r^2_x dm = (y^2 + z^2) dm$$

De esta manera, el momento de inercia I_x del cuerpo lo determinamos integrando esta expresión en toda la masa del cuerpo. De la misma forma, para cada uno de los ejes tendremos:

$$\begin{aligned} I_x &= \int r^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int r^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

De las anteriores expresiones observamos que el momento de inercia siempre es una cantidad positiva, ya que el cuadrado de las distancias y la sumatoria de los elementos de la masa dm , al multiplicarse siempre nos da una cantidad positiva.

UNIDADES

En el SI, el momento de inercia de una masa se expresa en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

En el sistema inglés se expresa en $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$

Relaciones

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45 \text{ N})(0.3048 \text{ m})(1 \text{ s})^2 = 1.356 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o ya que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

IV.2.2.- ⁵⁵ RADIO DE GIRO

El radio de giro k del cuerpo respecto al eje AA' queda definido por la relación

$$I = k^2 m \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (4.2.3)$$

De esta manera vemos que el radio de giro k representa la distancia a la que se debería concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a AA' no debe cambiar, ver figura (IV.36). La masa m responderá de la misma manera a una rotación o giro sobre AA' , ya sea que mantenga su forma inicial, ver figura (IV.34) o que se concentre como se muestra en la fig. (IV.36).

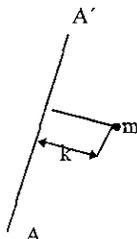


Fig.IV.36

⁵⁵ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand. P Beer. Pág. 1018.

UNIDADES

En el SI el radio de giro lo expresamos en m y la masa en kg .

En el sistema inglés el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs, es decir, en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$.

Las fórmulas para el radio de giro de los ejes x,y,z serán las siguientes:

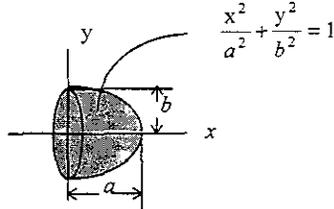
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \quad (4.2.3')$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \quad (4.2.3'')$$

$$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (4.2.3''')$$

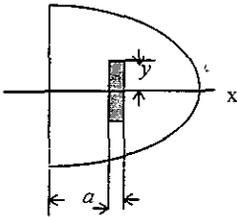
EJEMPLO RESUELTO IV.6

Se forma un semielipsoide al hacer girar el área sombreada en torno del eje x. Determine el momento de inercia de este sólido con respecto al eje x y exprese el resultado en términos de la masa m del sólido.



Solución:

Utilizando un elemento disco



$$dI_x = \left(\frac{1}{2} dm\right) y^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{2}{3} \pi a b^2$$

$$m = \rho V = \frac{2}{3} \rho \pi a b^2$$

del elemento disco

$$dm = \rho dV = \rho (\pi y^2) dx \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1)

$$dI_x = \frac{1}{2} (\rho (\pi y^2) dx) y^2$$

$$dI_x = \frac{1}{2} \rho \pi y^4 dx \quad (3)$$

de la ecuación que define la figura

$$y^2 = (b^2/a^2)(a^2 - x^2), \text{ por lo tanto}$$

$$y^4 = (b^4/a^4)(a^4 - 2a^2x^2 + x^4) \quad (4)$$

sustituyendo (4) en (3) e integrando

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi (b^4/a^4) (a^4 \int dx - 2a^2 \int x^2 dx + \int x^4 dx)$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi (b^4/a^4) (a^4 x - \frac{2}{3} a^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5)$$

Sustituyendo los límites en los que se está integrando, es decir, desde $x = a$ hasta $x = 0$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi (b^4/a^4) (a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{1}{5} a^5)$$

haciendo operaciones nos queda

$$I_x = \frac{2}{15} \rho \pi a b^4 \quad (5)$$

Sustituyendo m en (5) tenemos

$$I_x = \frac{2}{3} m b^2$$

IV.2.3.- ⁵⁶ PRODUCTOS DE INERCIA DE UNA MASA

Sea el elemento diferencial dm de la figura (IV.37), el producto de inercia del elemento diferencial dm se define con respecto a dos planos ortogonales como el producto de la masa del elemento y las distancias perpendiculares o las más cortas, que existen desde dichos planos al elemento.

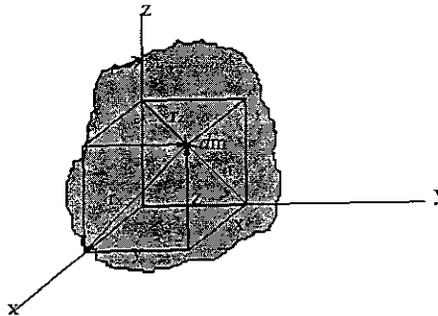


Fig.IV.37

Consideremos los planos $y-z$ y $x-z$, el producto de inercia dI_{xy} para el elemento diferencial dm que nos muestra la figura es

$$dI_{xy} = xy \, dm \quad (4.2.4)$$

de lo anterior se deduce que

$$dI_{xy} = dI_{yx}$$

Integrando para toda la masa, para cada combinación de planos el producto de inercia se expresará de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= \int xy \, dm \\ I_{yz} = I_{zy} &= \int yz \, dm \\ I_{xz} = I_{zx} &= \int xz \, dm \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

El producto de inercia puede ser positivo, negativo o igual a cero. Esto depende de las dos coordenadas definidas, que varían independientemente una de otra.

⁵⁶ Ingeniería Mecánica. Dinámica R C. Hibbeier Pág. 512.

IV.2.4.- TEOREMA DE EJES PARALELOS PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE MASAS

IV.2.4.1.-⁵⁷ TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

Se desarrollará ahora una relación que es muy útil entre los momentos de inercia de masa de un cuerpo rígido con respecto a un eje centroidal y con respecto a un eje paralelo a dicho eje centroidal. Este método recibe el nombre de *Teorema de los Ejes Paralelos*

Sea un cuerpo de masa m , y sean dos sistemas de coordenadas rectangulares, es decir, sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas con origen en un punto O arbitrario y sea $Gx'y'z'$ un sistema de ejes centroidales paralelos, esto quiere decir un sistema con origen en el centro de gravedad G del cuerpo y con los ejes x',y',z' paralelos a x,y,z respectivamente.

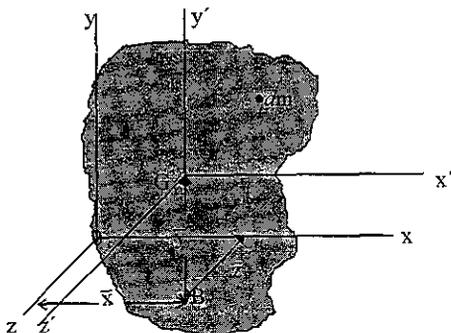


Fig.IV.38

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, podemos escribir ahora las siguientes relaciones entre las coordenadas x,y,z del elemento dm con respecto a $Oxyz$ y sus coordenadas x',y',z' respecto de los ejes centroidales $Gx'y'z'$, respecto de la figura (IV.38) las relaciones son:

$$\begin{aligned} x &= x' + \bar{x} \\ y &= y' + \bar{y} \\ z &= z' + \bar{z} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

De acuerdo con las ecuaciones de momentos de inercia deducidas anteriormente, es decir

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

⁵⁷ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand . P Beer. Pág. 1020.

y sustituyendo en I_x las relaciones obtenidas tenemos:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm$$

$$I_x = \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm$$

De esta última expresión se observa que la primera integral nos representa el momento de inercia \bar{I}_x del cuerpo alrededor del eje centroidal x' , la segunda y tercera integrales nos representan el primer momento del cuerpo respecto a los planos $z'-x'$ y $x'-y'$ respectivamente, y ya que ambos contienen a G, las dos integrales son cero; y como la última integral es igual a la masa m total del cuerpo podemos escribir:

$$I_x = \bar{I}_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad (4.2.7)$$

esta ecuación representa el momento de inercia en torno del eje x . De manera similar tenemos para los ejes y y z :

$$I_y = \bar{I}_y + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad (4.2.8)$$

$$I_z = \bar{I}_z + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (4.2.9)$$

De la figura (IV.38) se puede verificar que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y' .

De la misma manera, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan los cuadrados de las distancias entre los ejes x y x' y entre los ejes z y z' , respectivamente.

Designando por d la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB' , figura (IV.39), se puede escribir por lo tanto, la relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia \bar{I} con respecto a BB' .

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (4.2.10)$$

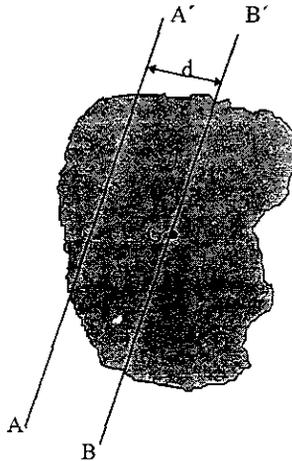


Fig.IV.39

Para expresar los momentos de inercia en términos de los correspondientes radios de giro basta recordar que el radio de giro se expresa de la siguiente manera:

$$I = k^2 m$$

$$\bar{I} = \bar{k}^2 m$$

sustituyendo en la ecuación $I = \bar{I} + md^2$ tenemos

$$k^2 m = \bar{k}^2 m + md^2$$

dividiendo entre m nos queda

$$\boxed{k^2 = \bar{k}^2 + d^2} \quad (4.2.11)$$

donde k = radio de giro alrededor de AA' y

\bar{k} = radio de giro alrededor de BB' .

IV.2.4.2.-⁵⁸ TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA PRODUCTOS DE INERCIA DE MASAS

Ya se dedujeron anteriormente las ecuaciones para determinar los productos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes x - y , los ejes y - z y los ejes z - x respectivamente, las cuales son

$$I_{xy} = \int xy \, dm$$

$$I_{yz} = \int yz \, dm$$

$$I_{zx} = \int zx \, dm$$

Sea el cuerpo mostrado en la figura (IV.40)

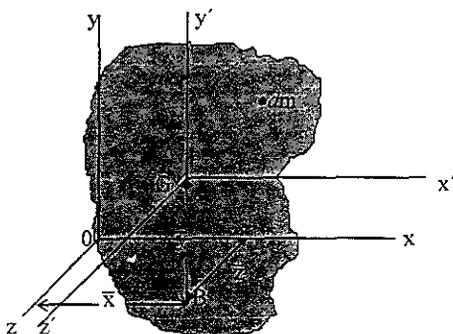


Fig.IV.40

⁵⁸ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand . P Beer. Pág. 1032.

De la figura (IV.40) se obtienen las siguientes relaciones:

$$x = x' + \bar{x}$$

$$y = y' + \bar{y}$$

$$z = z' + \bar{z}$$

Sustituyendo las relaciones en I_{xy} , tenemos:

$$I_{xy} = \int xy \, dm = \int [(x' + \bar{x})(y' + \bar{y})] dm$$

$$I_{xy} = \int [x'y' + x'\bar{y} + \bar{x}y' + \bar{x}\bar{y}] dm$$

$$I_{xy} = \int x'y' dm + \bar{y} \int x' dm + \bar{x} \int y' dm + \bar{x}\bar{y} \int dm$$

De la expresión anterior observamos que la primera integral representa el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$, que la segunda integral, así como la tercera son igual a cero ya que ambas contienen a una coordenada centroidal, la cuarta integral representa la masa total m del cuerpo por lo tanto nos queda:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}m \quad (4.2.12)$$

de la misma manera tenemos :

$$I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + \bar{y}\bar{z}m \quad (4.2.13)$$

$$I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + \bar{z}\bar{x}m \quad (4.2.14)$$

donde:

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}, \bar{I}_{y'z'}, \bar{I}_{z'x'}$ representan los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y', z' .

CÁLCULO DE MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE LA MASA DE CUERPOS SIMPLES CON RESPECTO A EJES CENTROIDALES.

IV.2.5.- ⁵⁹ MOMENTOS DE INERCIA.

IV.2.6.- PRODUCTOS DE INERCIA.

Momentos de inercia de placas delgadas.

Sea una placa delgada de espesor uniforme t , constituida de un material homogéneo de densidad ρ . El momento de inercia en términos de la masa de una placa con respecto a un eje AA' , contenido en el plano de la placa, figura(IV.41) es

$$I_{AA', masa} = \int r^2 dm$$

⁵⁹ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P Beer Pág. 1021.

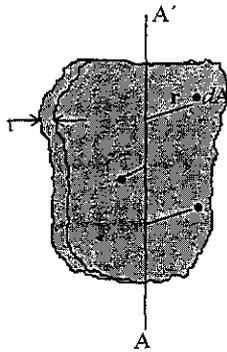


Fig.IV.41

ya que $dm = \rho t dA$, tenemos

$$I_{AA', masa} = \rho t \int r^2 dA$$

ρ = densidad = masa por volumen = mv

como r representa la distancia del elemento de área dA al eje AA' , por lo tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA' , es decir,

$$I_{AA', masa} = \rho t I_{AA', area} \tag{4.2.15}$$

De la misma manera, para un eje BB' perpendicular a AA' , figura (IV.42) .

$$I_{BB', masa} = \rho t I_{BB', area} \tag{4.2.16}$$

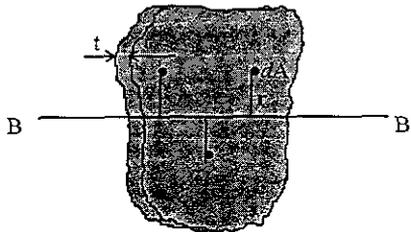


Fig.IV.42

Consideremos ahora al eje CC' perpendicular a la placa y que pasa por el punto de intersección C de los ejes AA' y BB' figura (IV.43)

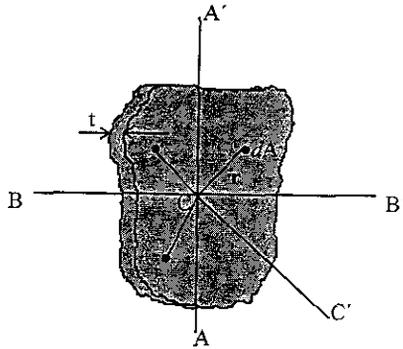


Fig.IV.43

entonces tenemos:

$$I_{CC, masa} = \rho t J_{C, area} \tag{4.2.17}$$

donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa respecto al punto C , es decir, recordemos la relación

$$J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$$

que existe entre los momentos de inercia polar y rectangulares de un área, podemos escribir la siguiente relación entre los momentos de inercia de una placa delgada:

$$I_{CC} = I_{AA} + I_{BB} \tag{4.2.18}$$

Placa rectangular

Sea la placa rectangular mostrada en la figura(IV.44) :

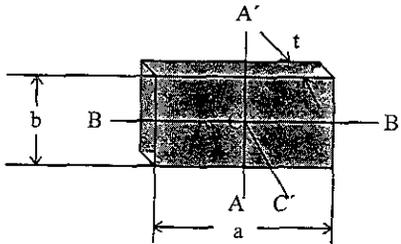


Fig.IV.44

Los momentos de inercia se dan en términos de su masa con respecto a ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa

$$I_{AA', \text{masa}} = \rho t I_{AA', \text{área}} = \rho t \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_{BB', \text{masa}} = \rho t I_{BB', \text{área}} = \rho t \frac{a b^3}{12}$$

donde: ρ = densidad de la placa

t = espesor de la placa

$$dm = \rho t dA$$

$$m = \rho t A = \rho t a b$$

$$I_{AA', \text{área}} = \frac{a^3 b}{12} = \text{momento de inercia de área respecto al eje } AA'.$$

$$I_{BB', \text{área}} = \frac{a b^3}{12} = \text{momento de inercia de área respecto al eje } BB'.$$

Ya que $\rho a b t$ es igual a la masa m de la placa, podemos expresar los momentos de inercia de una placa rectangular delgada de la manera siguiente:

$$I_{AA', \text{masa}} = \frac{m a^2}{12} \quad (4.2.19)$$

$$I_{BB', \text{masa}} = \frac{m b^2}{12} \quad (4.2.20)$$

Considerando el eje CC' perpendicular a la placa y que pasa por el punto de intersección C de AA' y BB' de la figura tenemos

$$I_{CC', \text{masa}} = \rho t J_C \text{área}$$

en donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa con respecto a C .

Sabemos también que $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ entonces podemos escribir

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'}$$

por lo tanto nos queda

$$I_{CC'} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} \quad (4.2.21)$$

Placa circular

Para el caso de una placa circular de radio r , figura (IV.45), tenemos que el momento de inercia es:

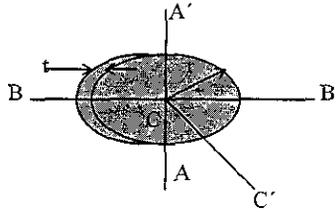


Fig.IV.45

$$I_{AA', \text{masa}} = \rho t I_{AA', \text{área}}$$

$$I_{AA', \text{área}} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{AA', \text{masa}} = \rho t \frac{\pi r^4}{4}$$

y como la masa del círculo es $m = \rho V$ y $V = \pi r^2 t$, entonces $m = \rho \pi r^2 t$, por lo tanto el momento de inercia es:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{mr^2}{4} \quad (4.2.22)$$

el momento de inercia $I_{CC'}$ es:

$$I_{CC'} = \frac{mr^2}{4} + \frac{mr^2}{4} = \frac{2mr^2}{4} = \frac{mr^2}{2} \quad (4.2.23)$$

IV.2.6.- ⁶⁰ PRODUCTOS DE INERCIA DE LA MASA DE CUERPOS SIMPLES RESPECTO A SISTEMAS DE EJES CENTROIDALES.

Se pueden calcular utilizando el teorema de ejes paralelos ya que conociendo el producto de inercia de los ejes x, y, z , se pueden calcular los productos de inercia respecto a los ejes centroidales del cuerpo.

Nota: debemos recordar que el producto de inercia puede ser:

Positivo, negativo o cero.

⁶⁰ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand. P Beer. Pág 1033.

IV.2.7.- ⁶¹ DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE ALGUNOS CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo está constituido por varias partes sencillas, como discos, triángulos, placas rectangulares, esferas, varillas, etc. los momentos de inercia se pueden obtener calculando los momentos de inercia de sus partes componentes con respecto al eje deseado y sumándolos algebraicamente. Cada parte componente debe considerarse como una cantidad negativa si ya fue tomada en cuenta como parte de otra parte; como ejemplo tenemos un agujero debe ser restado de una placa sólida. Para calcular el centro de masa que no se encuentre sobre el eje de referencia es necesario utilizar el teorema de los ejes paralelos.

Por lo tanto el momento de inercia estará dado por la siguiente ecuación:

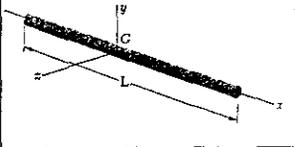
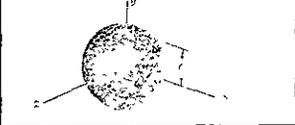
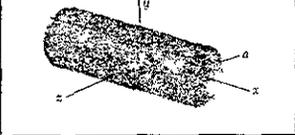
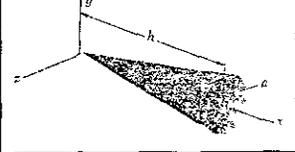
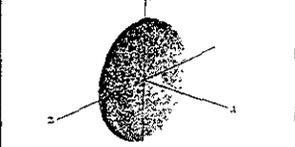
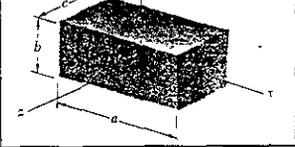
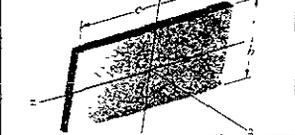
$$I = \sum(I_G + md^2) \quad (4.2.24)$$

I_G de cada parte componente se puede calcular por medio de integración o bien utilizando la tabla que se da a continuación⁶².

⁶¹ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand . P Beer. Pág. 1022.

⁶² Ibid. Pág. 1023.

**MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
DE FORMAS GEOMÉTRICAS COMUNES**

Nombre de la figura	Forma	I_x , I_y e I_z
Varilla		$I_y = I_z = \frac{mL^2}{12}$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2ma^2}{5}$
Cilindro circular		$I_x = (1/2)ma^2$ $I_y = I_z = \frac{m(3a^2 + L^2)}{12}$
Cono circular		$I_x = (3/10)ma^2$ $I_y = I_z = (3/5)m[(1/4)a^2 + h^2]$
Disco delgado		$I_x = (1/2)mr^2$ $I_y = I_z = (1/4)mr^2$
Prisma rectangular		$I_x = (1/12)m(b^2 + c^2)$ $I_y = (1/12)m(c^2 + a^2)$ $I_z = (1/12)m(a^2 + b^2)$
Placa rectangular delgada		$I_x = (1/12)m(b^2 + c^2)$ $I_y = (1/12)mc^2$ $I_z = (1/12)mb^2$

IV.2.8.- ⁶³ EJES PRINCIPALES DE INERCIA Y

IV.2.9.- ⁶⁴ MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE LA MASA DE UN CUERPO

Para definir los ejes y momentos principales de inercia se harán primero las deducciones de :

- Momento de inercia respecto a un eje arbitrario que pase por 0.
- Productos de inercia de la masa de un cuerpo
- Elipsoide de inercia

Momentos y productos de inercia respecto a un eje arbitrario que pasa por 0.

Sea el cuerpo representado en la figura (IV.46), en la que se representa un eje arbitrario 0L que

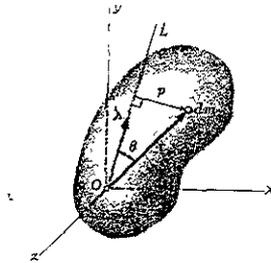


Fig.IV.46

pasa por el origen. El momento de inercia respecto a 0L queda representado por la integral

$$I_{0L} = \int p^2 dm$$

donde: p = distancia perpendicular del elemento dm al eje $0L$.

Representando por λ el vector unitario a lo largo de $0L$ y por r el vector de posición del elemento dm , de lo anterior se observa que la distancia perpendicular p es igual a la magnitud r sen θ del producto vectorial $\lambda \times r$. Por lo tanto podemos escribir:

$$I_{0L} = \int p^2 dm = \int [\lambda \times r]^2 dm \tag{4.2.25}$$

Desarrollando el producto cruz $\lambda \times r$ en forma de determinante

$$\lambda \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(\lambda_y z)k - (\lambda_z y)i - (\lambda_x z)j + (\lambda_y x)i + (\lambda_x y)k + (\lambda_z x)j$$

$$= (\lambda_y z - \lambda_z y)i + (\lambda_z x - \lambda_x z)j + (\lambda_x y - \lambda_y x)k$$

⁶³ Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand . P Beer. Pág. 1032.

⁶⁴ Ibid 1034.

Desarrollando los cuadrados para expresar el cuadrado en términos de las componentes rectangulares:

$$I_{OL} = \int [(\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2 + (\lambda_x y - \lambda_y x)^2] dm$$

$$(\lambda_y z - \lambda_z y)^2 = \lambda_y^2 z^2 - 2 \lambda_y z \lambda_z y + \lambda_z^2 y^2$$

$$(\lambda_z x - \lambda_x z)^2 = \lambda_z^2 x^2 - 2 \lambda_z x \lambda_x z + \lambda_x^2 z^2$$

$$(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 = \lambda_x^2 y^2 - 2 \lambda_x y \lambda_y x + \lambda_y^2 x^2$$

En las ecuaciones anteriores las componentes $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ del vector unitario λ representan los cosenos directores del eje OL , así, también las componentes x, y, z de r representan las coordenadas del elemento de masa dm . Reordenando los términos de los cuadrados desarrollados tenemos:

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - \lambda_x \lambda_y \int xy dm - 2 \lambda_y \lambda_z \int yz dm - 2 \lambda_z \lambda_x \int zx dm \quad (4.2.26)$$

De la ecuación (4.2.26), es de notar que las tres primeras integrales representan los momentos de inercia I_x, I_y , e I_z , del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las tres últimas nos representan los productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes x e y, y y z, z y x , respectivamente, es decir:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad \text{Momentos de inercia} \quad (4.2.27)$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int xy dm$$

$$I_{yz} = \int yz dm \quad \text{Productos de inercia} \quad (4.2.28)$$

$$I_{zx} = \int zx dm$$

Sustituyendo las integrales de (4.2.23) y (4.2.28) en (4.2.26) nos queda:

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (4.2.29)$$

Consideremos ahora un cuerpo con un gran número de ejes OL que pasan por el punto O y en cada eje OL graficamos un punto Q a una distancia:

$$OQ = \sqrt{1/I_{OL}}$$

El lugar geométrico que se obtiene de graficar esos puntos Q forma una superficie como la que se muestra en la figura(IV.47).

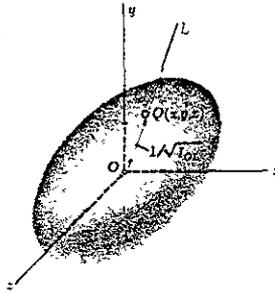


Fig.IV.47

Para obtener la ecuación de la superficie sustituimos $I_{OL} = 1/(0Q)^2$ en (4.2.29) y multiplicando los dos lados de la ecuación por $(0Q)^2$. Teniendo en cuenta que:

$$(0Q)\lambda_x = x$$

$$(0Q)\lambda_y = y$$

$$(0Q)\lambda_z = z$$

donde x,y,z representan las coordenadas rectangulares de un punto Q de la superficie, por lo tanto, elevando al cuadrado tenemos:

$$(0Q)^2 \lambda_x^2 = x^2$$

$$(0Q)^2 \lambda_y^2 = y^2$$

$$(0Q)^2 \lambda_z^2 = z^2$$

Sustituyendo en (4.2.29) nos queda:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1 \quad (4.2.30)$$

Esta ecuación nos representa una superficie cuadrática. Como el momento de inercia I_{OL} es diferente de cero para todo eje OL, ningún punto Q puede estar a una distancia infinita de O. Por lo tanto la superficie obtenida es un elipsoide. Dicho elipsoide, que define el momento de inercia del cuerpo respecto a cualquier eje que pase por O, es conocido como Elipsoide de Inercia del cuerpo en O.

Si giramos los ejes de la figura (IV.47) observamos que cambian los coeficientes de la ecuación que define el elipsoide, ya que éstos son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes rotados. Pero el elipsoide mismo permanece sin alteración, ya que su forma sólo depende de la distribución de la masa del cuerpo considerado. Supongamos ahora que elegimos como ejes coordenados los ejes principales x', y', z' , del elipsoide de inercia, figura (IV.48).

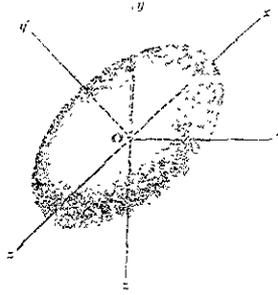


Fig.IV.48

La ecuación del elipsoide respecto a estos ejes coordenados será.

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \quad (4.2.31)$$

donde los productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes x', y', z' son cero.

Los ejes x', y' y z' reciben el nombre de ejes principales de inercia en 0.

Los coeficientes I_x, I_y, I_z se conocen como los momentos de inercia principales del cuerpo en 0.

Si utilizamos como ejes coordenados los ejes principales de inercia x', y', z' , la ecuación (4.2.29) para el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario que pase por 0 se reduce a

$$I_{0L} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 \quad (4.2.32)$$

TEMA V.-⁶⁵ PRACTICAS DE CINEMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CAMPUS ARAGÓN

LABORATORIO DE CINEMÁTICA

PRACTICA # 1

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

OBJETIVO:

Aplicar los conceptos de movimiento rectilíneo uniforme

ACTIVIDADES:

- 1.1._ Analizar las características del M.R.U.
- 1.2._ Determinar la velocidad lineal de un cuerpo.
- 1.3._ Determinar la constante de restitución del resorte plano.
- 1.4._ Construir e interpretar las gráficas de desplazamiento - tiempo, $x-t$, y velocidad - tiempo, $v-t$.
- 1.5._ Interpretar el significado de la pendiente de la recta en la gráfica $x-t$.

EQUIPO:

- Bomba de calor.
- Riel de aire con accesorios y carros.
- Cronómetros.
- Flexómetro.

ASPECTOS TEÓRICOS:

Señalar que es:

- Movimiento relativo.
- Trayectoria de una partícula y de un cuerpo rígido.
- Desplazamiento.
- Características del M.R.U.
 - Velocidad.
 - Trayectoria.

⁶⁵ Prácticas elaboradas con la asesoría de profesores de la materia de Cinemática de la ENEP ARAGÓN

Desplazamiento.

Aceleración.

Ecuaciones generales.

-- Dar algunos ejemplos del M.R.U.

DESARROLLO

-- Preparar el equipo ensamblando el riel de aire, conectándole la bomba de calor, los carros y ajustando los resortes.

-- Con precaución, nivela el riel, colocando el carro en su parte central y encendiendo la bomba de calor, observando hacia donde tiende a desplazarse el carro y ajustar con los tornillos que se encuentran en los soportes del riel. Apagar la bomba y volver a realizar la misma operación hasta que el carro oscile en una posición de equilibrio.

-- Con el flexómetro, señala las divisiones que crea conveniente a lo largo del carril (toma en cuenta la longitud del carro). Haz las marcas con lápiz.

-- Impulsa ligeramente el carro hacia algún extremo del riel (de preferencia hacia donde inicia la referencia que marcaste). Espera a que la velocidad del carro sea lo suficientemente lenta para que puedas medir de una manera lo más precisa posible el tiempo de recorrido entre marcas.

-- Construye una tabla de lecturas como la que se ilustra a continuación:

Lectura #	s (cm)	Δs (cm)	t (s)	Δt (s)	$v = \Delta s / \Delta t$ (m/s)
Σ lecturas	Σs (total)	Σs	Σt (total)	Σt	$v_1 = \Sigma v / \Sigma \text{lect.}$ $v_2 = \Sigma s / \Sigma t$

- Construye una gráfica en papel milimétrico con los datos de s y de t , ajusta la recta utilizando el método de mínimos cuadrados, señalando sus parámetros y en especial recalcando la pendiente.
- Construye una gráfica de la velocidad v contra el tiempo t .
Utiliza s y v en el eje de las ordenadas y t en el eje de las abscisas.
- Realiza tres pruebas, para las cuales, cada una llevará sus respectivas gráficas.
- Realiza dos pruebas en las cuales se abarque todo el riel, es decir, sólo mide el tiempo desde que se inicia el movimiento hasta el final del riel. Haz las pruebas una tras de la otra.
Calcula la velocidad para cada prueba ($v = dx/dt$) y calcula la energía cinética para cada caso y determina la constante de restitución del resorte plano. Desprecia la deformación del resorte y el tiempo que dura ésta.

CUESTIONARIO

- ¿ Qué es un riel de aire ?
- ¿ Qué es una bomba de calor y por qué se utiliza en este experimento ?
- ¿ Qué es un resorte plano y qué significa la constante de restitución ?
- ¿ Qué ocurre si se coloca un peso en un lado del carro en equilibrio ? Describe el fenómeno.
- ¿ En qué instante se tiene una velocidad constante en el carro (M.R.U.) ?
- ¿ En qué parte del equipo se presentan las aceleraciones del carro y a qué fenómeno se deben ?
- ¿ Para qué se le colocan pesos al carro ?

CONCLUSIONES

En este punto señalar lo que se observó a través del desarrollo de la práctica, dando descripción y justificación.

Señala los errores en que se incurre.

Señala lo que obtuviste en los cálculos y coméntalo.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CAMPUS ARAGÓN

LABORATORIO DE CINEMÁTICA

PRACTICA # 2

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

OBJETIVO:

Aplicar los conceptos del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.

ACTIVIDADES:

- Analizar las características del M.R.U.V.
- Construir la gráfica velocidad - desplazamiento ($v - x$).
- Elaborar la gráfica velocidad - tiempo e interpretar la pendiente.
- Construir la gráfica desplazamiento-tiempo.

EQUIPO:

- Riel de aire con accesorios.
- Bomba de calor.
- Flexómetro.
- Cronómetros.
- Vernier de alturas.

ASPECTOS TEÓRICOS

Señalar que es:

- El movimiento rectilíneo uniformemente variado.
- Ecuaciones del M.R.U.V. (aceleración, velocidad, desplazamiento).
- El plano inclinado.
- Componentes de la aceleración en un plano inclinado.

DESARROLLO

- Montar el riel de aire con la bomba de calor. de la misma forma que se hizo en la práctica # 1. Equilibrar el sistema (equilibrar el carro). Mide la altura de la mesa a la base.
- Ajustar el tornillo que se encuentra en la base del riel, de manera que éste tenga una pendiente pequeña (para que el carro no se acelere demasiado). Mide la altura en la base del riel.

-- Mide con el flexómetro la separación horizontal de las bases y, con la diferencia de alturas, calcula la pendiente.

-- Divide el riel de manera semejante que en la práctica # 1

-- Coloca el carro en la parte superior del riel, que se encuentre en un equilibrio inicial, sujétalo con la mano.

-- Suelta el carro y comienza a contar el tiempo, de igual forma para cada división. Realiza tres pruebas.

Construye una tabla como la siguiente:

Lectura #	s (cm)	t (s)	t^2 (s ²)	Δt (s)	Δs (cm)	v

Primera parte

--Con los datos del desplazamiento y de la velocidad construye una gráfica para cada prueba. (v en las ordenadas y s en las abscisas).

--Construye una gráfica con los valores promedio de las tres pruebas.

--De la misma forma que para los datos anteriores, realiza las gráficas $v-t$ y $s-t$.

--Ajusta las líneas rectas con el método de mínimos cuadrados y las líneas curvas con regresión polinomial.

--Enfatiza la pendiente de la línea de la gráfica $v-t$.

Segunda parte.

Con el valor de la aceleración de la gravedad, calcula:

--Las componentes de esta aceleración para el plano inclinado que forma el riel y menciona cuál es la que actúa sobre el carro.

--Calcula la velocidad instantánea para los valores de s y de t para cada lectura de las tres pruebas.

Tabula los valores comparándolos con los de la primera parte (velocidad promedio)

Comenta los datos.

--Con los datos de s y t , calcula ahora la aceleración.

--Calcula la velocidad instantánea y tabula de la misma manera que en el caso anterior.

-- Deriva la función que resulta de aplicar la regresión lineal en la gráfica $s-t$. grafica, y nuevamente derivala.

--Compara los tres valores de la aceleración obtenidos y coméntalos.

Anota todos los cálculos en la memoria.

CUESTIONARIO

¿ Cómo es la aceleración en el M.R.U.V.?

¿ De qué grado son las líneas que se obtienen en las gráficas $s-t$, $v-t$ y $a-t$? ¿ por qué ?

¿ Qué pasa si al carro se le impulsa hacia arriba y después del rebote se comienza a tomar el tiempo del recorrido ?

¿ Qué pasaría si se le colocara un peso al carro en este experimento ?

¿ Qué tipo de energía tiene en un principio el carro (cuando se encuentra en equilibrio en la parte superior) ?

¿ En qué tipo de energía se transforma la energía inicial al final del recorrido del carro ?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CAMPUS ARAGÓN

LABORATORIO DE CINEMÁTICA

PRACTICA # 3

CAÍDA LIBRE

OBJETIVOS:

Comprobar que la caída libre es un ejemplo del Movimiento Uniformemente Variado.

Explicar la aceleración debida a la gravedad, como aceleración de un cuerpo en caída libre.

MATERIAL:

- Bola de metal.
- Cronómetro.
- Flexómetro.

ANTECEDENTES:

Cuando los cuerpos caen libremente en el vacío bajo la acción de su peso se dice que la tierra los atrae en virtud de la gravedad y entonces la aceleración que reciben se llama aceleración de la gravedad y se representa con la letra g . Su definición es la siguiente:

Aceleración: Es la variación de la velocidad en cada segundo y por consiguiente, al caer un cuerpo libremente en el vacío la velocidad que adquiere cada segundo es g ; al cabo de dos segundos $v = 2g$, por lo tanto:

$$v = gt \quad (1)$$

Análogamente la distancia recorrida durante la caída se obtiene de

$$h = (1/2) gt^2 \quad (2)$$

$$g = \frac{2h}{t^2} \quad (3)$$

DESARROLLO:

Se colocará el balón a diferentes alturas, registrando el tiempo que tarda en caer. Cada dato será tabulado en la siguiente tabla:

1	2	3	4	5
h (cm)	t (seg)	t^2 (seg) ²	$h t^2$ [(cm)(seg) ²]	$2 h$ (cm)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CAMPUS ARAGÓN

LABORATORIO DE CINEMÁTICA

PRACTICA # 4

MOVIMIENTO PARABÓLICO

OBJETIVOS:

-- Analizará las características del movimiento parabólico y lo interpretará como la combinación del M.R.U y del M.R.U.V.

-- Identificará que la componente horizontal de la trayectoria parabólica es un M.R.U.

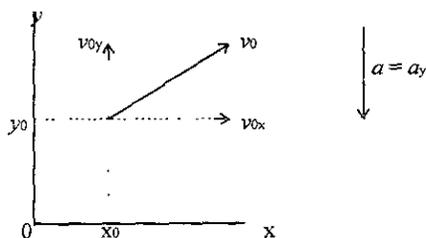
-- Identificará que la componente vertical de la trayectoria parabólica es un M.R.U.V.

MATERIAL:

- Dos bolas de acero.
- Hojas de papel blanco.
- Hojas de papel carbón.
- Transportador.

Antecedentes:

En el caso especial del movimiento bidimensional, libre para distancias cortas cerca de la tierra, la velocidad inicial puede descomponerse en dos componentes.



Las ecuaciones se pueden hallar de la siguiente forma:

$$a_x = 0$$

$$v_x = \int a_x dt = 0 + c = v_{0x}$$

$$x = \int v_x dt = v_{0x}t + c = x_0 + v_{0x}t$$

y

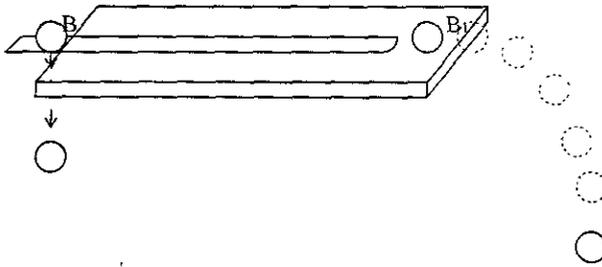
$$a_y = -g$$

$$v_y = \int a_y dt = -gt + c = v_{0y} - gt$$

$$y = \int v_y dt = v_{0y} t - (1/2)gt^2 + c = y_0 + v_{0y} t - (1/2)gt^2$$

DESARROLLO:

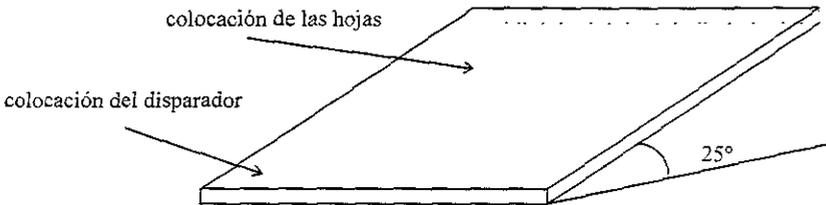
Monte el dispositivo como se muestra



Coloque el impulsor a una altura de 0.80 m del piso y jale el gatillo. Anote todas sus observaciones.

-- Para el siguiente experimento:

Construya un plano inclinado con la plataforma de modo que forme un ángulo de 25° con la horizontal, coloque una hoja de papel blanco sobre la plataforma y sobre ésta una hoja de papel carbón, coloque el disparador a 15,30,45,60 y 75°, jale el gatillo y el balín marcará su trayectoria en el papel.



Retire el papel carbón y mida con una regla lo que se pide en la siguiente tabla.

Ángulos de lanzamiento (°)	Alcance máx.(cm)	Altura máx.(cm)
15		
30		
45		
60		
75		

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CAMPUS ARAGÓN

LABORATORIO DE CINEMÁTICA

PRACTICA # 5

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

OBJETIVOS:

- 1.- Describir y explicar el movimiento circular uniforme.
- 2.- Determinar y comprender los conceptos de Periodo, frecuencia y velocidad angular.
- 3.- Identificar la dirección y la magnitud de la velocidad y la aceleración centrípeta.
- 4.- Construir e interpretar las gráficas de desplazamiento angular-tiempo y velocidad angular- tiempo.

MATERIAL:

- Disco de cartón.
- Motor eléctrico.
- Flexómetro o regla.
- Calculadora.
- Fuente de energía.

ASPECTOS TEÓRICOS.

El movimiento circular se presenta continuamente en la naturaleza; por ejemplo: los satélites y los planetas presentan este movimiento.

Una partícula tiene un movimiento circular si se mueve de manera que su distancia (vector de posición) en un punto fijo (centro de rotación) sea siempre la misma, es decir, la trayectoria descrita por la partícula es una circunferencia.

Un movimiento circular uniforme implica que la partícula describa desplazamientos angulares iguales en intervalos de tiempo iguales.

Dentro del movimiento circular es necesario definir algunos conceptos:

Periodo (τ) : Es el tiempo necesario (t) para que la partícula realice una vuelta (N).

$$\tau = \frac{t}{N} \text{ [seg]}$$

Frecuencia (f) : Se define como el número de vueltas (N) que se realizan en la unidad de tiempo (t)

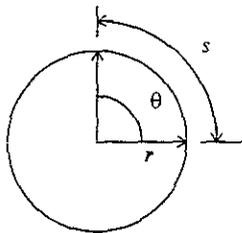
$$f = \frac{N}{t} \text{ [ciclos/seg] = 1 Hertz = 1 Hz}$$

Al comparar las 2 ecuaciones anteriores podemos fácilmente visualizar que:

$$f = \frac{1}{\tau} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{1}{f}$$

Esto quiere decir que son cantidades recíprocas.

Desplazamiento angular (θ): Es el ángulo descrito por el vector de posición y se define como la razón entre el arco (s) y el radio (r). (Ver figura).



Para el caso en que el arco descrito por el vector de posición sea igual a una circunferencia ($s = 2\pi r$) el ángulo θ estará definido como:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes} = 1 \text{ revolución}$$

[El desplazamiento se puede medir en grados, radianes o revoluciones].

Recordando que : 2π radianes = 360° = 1 revolución. Por lo tanto

$$1 \text{ radián} = 57.29^\circ$$

Velocidad angular media (ω) de una partícula :

Es el cociente del incremento de desplazamiento angular $\Delta\theta$ entre el incremento de tiempo Δt correspondiente.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Si el incremento de desplazamiento es una vuelta, el incremento de tiempo correspondiente será un periodo, de tal forma que:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\omega = 2 \pi f \text{ [radianes/seg]}$$

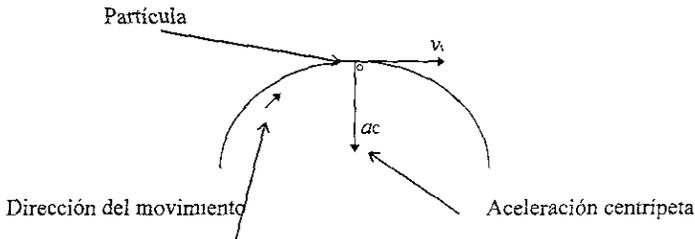
La partícula en movimiento circular será afectada por una velocidad tangencial cuya magnitud es igual al cociente de la distancia recorrida de una vuelta entre el periodo.

$$v_t = \frac{2 \pi r}{\tau} = \omega r \text{ [metros/seg]}$$

Aceleración centrípeta (a_c): Es aquella que se genera cuando existe un cambio de dirección en la trayectoria de la partícula, y su dirección siempre es hacia el centro de la trayectoria.

Matemáticamente se determina por medio de la ecuación:

$$a_c = \frac{v_t^2}{r} = \omega^2 r \text{ [m/seg}^2\text{]}$$



Cabe mencionar que en el caso de movimientos circulares "no uniformes" existirá una componente adicional de aceleración llamada aceleración tangencial que tendrá el mismo sentido que la velocidad tangencial y que está definida por la siguiente expresión:

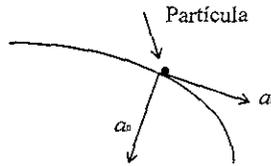
$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad [m/seg^2]$$

Y para el caso especial de un "Movimiento Circular Uniformemente Variado" (En el cual la aceleración angular es constante) podemos decir que:

$$a_t = \alpha \cdot r \quad [m/seg^2]$$

donde:

α = aceleración angular
 r = radio vector



Componentes de la aceleración en movimientos circulares.

donde

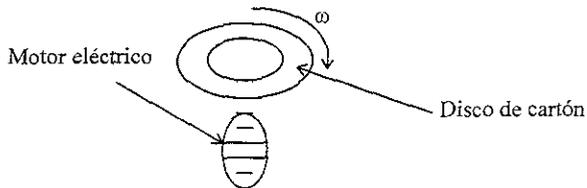
a_t = aceleración tangencial
 a_n = aceleración normal o centrípeta

De la figura se puede definir la magnitud de la aceleración como:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

DESARROLLO:

1.- Con ayuda de un motor eléctrico y construyendo un disco de cartón de tamaño adecuado, arne un dispositivo capaz de producir un movimiento circular como se observa en la figura.



I.I.- Haga funcionar el dispositivo y marque un punto en el extremo del disco.

- a) Calcule el valor del radio vector de este punto.
- b) Calcule el valor del desplazamiento angular de este radio vector al término de una vuelta.
- c) Calcule el valor del arco (s) recorrido por este punto al término de una vuelta.

d) Marque otro punto sobre el disco y repita los incisos (a),(b) y (c) . Compare los resultados y a continuación escriba sus conclusiones: ¿ Son iguales los valores obtenidos anteriormente para los dos puntos ? ¿ De que dependen ?

II.- Ahora determinaremos el periodo τ de una partícula en movimiento circular uniforme.

- a) Marque un punto en el disco. (Puede tratarse del mismo de los incisos anteriores).
- b) Mida el tiempo que tarda ese punto en recorrer el número de vueltas indicado en la siguiente tabla.

# de vueltas	tiempo	$\tau = \frac{t}{\text{\# de vueltas}}$
5		
10		
15		
20		
30		
50		

c) Encienda el dispositivo y analice el movimiento tratando de descubrir cuál de los 5 puntos contiene o presenta mayor velocidad tangencial (recuerda que la velocidad tangencial también se puede definir como una cierta distancia recorrida en la unidad de tiempo).

Llena la siguiente tabla

punto	radio vector (cm)	s (cm)	velocidad tangencial [cm/s]
1			
2			
3			
4			
5			

¿Cuál de los 5 puntos tuvo mayor velocidad tangencial ?

Existe un punto con velocidad tangencial máxima.

Determina cuál es ese punto (o puntos) y calcula la velocidad tangencial de los mismos.

Hay un punto que permanece inmóvil.

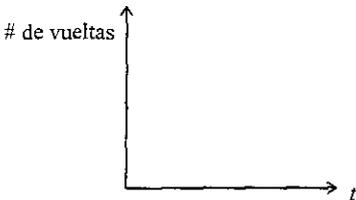
¿Cuál es ese punto ?

¿Cuánto vale su velocidad ?

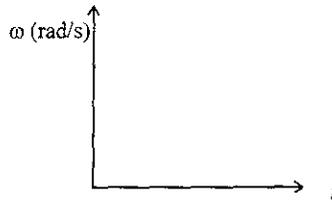
IV.- Construcción de las gráficas:

Con los datos medidos en el inciso II realiza las gráficas que se piden a continuación.

a)

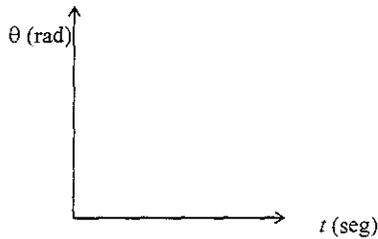


b)



Recordando que: 1 vuelta = 2π radianes

Construya la gráfica de desplazamiento angular contra tiempo.



V.- Contesta el cuestionario y presenta tus conclusiones de la práctica.

CONCLUSIONES

Es innegable que los estudiantes y maestros serán los mejor jueces para evaluar el trabajo realizado, a través del tiempo, en esta tesis y en consecuencia emitir un juicio ahora es prematuro.

A despecho de lo anterior espero que este trabajo, que fue realizado con el propósito de ayudar a la formación profesional de los alumnos de ingeniería, sea de utilidad para lograr ese objetivo, ya que esa será la mejor recompensa al esfuerzo realizado para elaborarlo

BIBLIOGRAFÍA

- R. C. Hibbeler
Ingeniería Mecánica "DINÁMICA"
Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.
México, 1996
- Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
Mecánica Vectorial para Ingenieros "DINÁMICA"
McGraw-Hill
México, 1995
- Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
Mecánica Vectorial para Ingenieros "ESTÁTICA"
McGraw-Hill
México, 1990
- Joseph F. Shelley
Mecánica para Ingeniería "ESTÁTICA"
Publicaciones Marcombo, S. A.
México, 1985
- Bela I. Sandor
Ingeniería Mecánica "DINÁMICA"
Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.
México, 1989
- T.C. Huang
Mecánica para Ingenieros "ESTÁTICA"
Ediciones Alfaomega, S.A. de C.V.
México, 1990
- T.C. Huang
Mecánica para Ingenieros "DINÁMICA"
Ediciones Alfaomega, S.A. de C.V.
México, 1993
- Raymond A. Serway
Física
McGraw-Hill
México, 1990
- Jack P. Holman
Métodos Experimentales para Ingenieros
McGraw-Hill
México, 1986

William A. Nash
Resistencia de Materiales
McGraw-Hill
México, 1985

Claudio Mataix
Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas
Harla
México, 1983

Jorge Solar González
Cinemática y Dinámica Básicas para Ingenieros
Trillas
México, 1998

Salvador Mosqueira R.
Física General
Editorial Patria, S. A.
México, 1977

Virgil Moring Faires
Diseño de Elementos de Máquinas
Montaner y Simón, S.A.
Barcelona, España. 1977

Diccionario Enciclopédico Bruguera
Editorial Bruguera
México, 1979

Guadalupe Morales Gutiérrez.
Nancy Sanciprián Marroquín.
Mario A. Sánchez Ramírez.
Guía para Ingreso a Preparatoria
McGraw- Hill
México, 1995