UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CUATRO TEOREMAS BÁSICOS DE EDWARD NELSON"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

RAFAEL TORRES SIMÓN

DIRECTOR DE TESIS: MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI

MÉXICO, D. F. 2000

CUATRO TEOREMAS BÁSICOS DE EDWARD NELSON

RAFAEL TORRES SIMÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"CUATRO TEOREMAS BASICOS DE EDWARD NELSON"

realizado por RAFAEL TORRES SIMON

Con número de cuenta 9355184-1, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI	Zubieta
Propietario	M. EN C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO	
Propietario	M. EN C. CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ	
Suplente	MAT. MARICELA SOLORZANO AUDIFFRED	Maricela Solorzano A.
Suplente	M. EN I. DE O. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ	

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

FACULTAD DE CIENCIAS

La presente está dedicada a mi familia
por haberme apoyado moral y económicamente
durante mi trayectoria en esta Facultad de Ciencias.

En primer lugar a mi madre: María Simón Martín.
Gracias por la gran confianza y paciencia que me brindaste.
A mi padre: Pedro Torres Corona.

A mis hermanos:

Margarita
Ignacio
Cirila
Martha
Andrés
Norma Leticia

Los amo.

Xi ra mäkä nsunda ma tehu

ha nuna xim'hai, nubia di tehu

y di pä gä hoñhu ra ñho.

Ra pa'a ga tuhu di fa'a

te da thogi ko ma tehu.

Rafael

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis: Mat. Gonzalo Zubieta Russi, que sin él, la presente no hubiera sido posible. Los consejos y enseñanzas que me ha brindado son de gran ayuda en mi carrera profesional. Muchas gracias.

También quiero agradecer de manera muy especial a: Rocío Vite González, José Alfredo Amor, Maricela Solorzano y Norma Peralta por la gran paciencia que mostraron en la corrección de esta tesis y por sus contribuciones al mejoramiento de la misma. Gracias.

A los profesores: Imaz y Colavita, por las pláticas que ofrecieron durante la elaboración de este trabajo.

A mis amigos: Claudia América y Berta Zavala. Gracias por su amistad y por los ánimos que me dan para seguir adelante.

PRÓLOGO

Una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla el mismo idioma".

Desafortunadamente, muchas demostraciones que aparecen en los libros de texto y artículos de revistas no tienen la claridad necesaria; dicho en otras palabras, las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Lograr comunicar una demostración matemática a otra persona resulta difícil. Por lo tanto, para entender o hacer una demostración o ambas cosas uno debe aprender un método nuevo de razonamiento.

Este trabajo presenta un esquema deductivo que prescribe las formas obligadas de inferir y que sirve de marco para las demostraciones que se exhiben en esta tesis. Este método deductivo permite que una demostración resulte agradable y entendible. Una demostración es agradable cuando no cansa; es decir, cuando una demostración es muy larga, hay que descomponerla en etapas agradables. En la primera etapa se dejan pendientes algunos pasos a demostrar. En la segunda etapa se dan por demostrado los pasos que hayan sido demostrados sobre la marcha en la primera etapa, y se demuestran sobre la marcha algunos de los pasos pendientes. El la tercera etapa se dan por demostrado los pasos que lo hayan sido en la primera y segunda etapa, y se demuestran sobre la marcha algunos de los que quedan pendientes. Se prosigue así hasta que no queden pasos pendientes.

Muchas ocasiones, al demostrar una condicional, resulta muy engorroso cuando se entra en un callejón sin salida, es decir, cuando se agotan las esperanzas de poder llegar a la tesis. Este es el momento cuando se plantea la siguiente pregunta. ¿A dónde se quiere llegar ?. Entonces se forma una lista de desiderata empezando por la tesis, seguido de lo que ella quiere decir, y de todo aquello que de ahí se desprenda, hasta llegar a tener una idea del curso que debe tomar la demostración. Este método al que llamaremos método progresivo-regresivo puede ser la clave para la demostración de muchos teoremas que requieran de este método.

Otras veces, al querer ser muy formales en una demostración, el esquema hace que la demostración resulte muy larga y engorrosa, entonces se procede de la siguiente manera: los pasos demasiados obvios no se demuestran sobre la marcha y sólo se justifican con una razón del porque son válidos.

No tenerle pánico y enfrentarse a cualquier demostración matemática resulta difícil. Para superarlo, es necesario mucha práctica para llegar a tener fluidez, y se necesita aplicar una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia. Tomar más en cuenta el esquema deductivo, es un buen recurso para superar estas barreras que muchas personas padecen.

El esquema deductivo es un recurso para lograr comunicar una demostración matemática a otra persona. Además, al entender y analizar su estructura, uno podrá leer y entender las versiones más informales que se encuentran en los libros de texto y finalmente uno será capaz de crear sus propias demostraciones, con todo lo que se ha dicho.

INTRODUCCIÓN

En la parte I se muestra el esquema deductivo, que consta de cinco modos descendentes y tres modos hipotéticos; son los que se utilizarán para inferir en las demostraciones que surjan en este trabajo.

Luego se exponen algunos ejemplos de demostración de silogismos categóricos, empleando el esquema deductivo. Por último se anexan tablas de silogismos. Los silogismos sirven de modelo para demostrar teoremas, dentro del esquema deductivo .

El que domine las pruebas de cada uno de éstos, tendrá mucho éxito en sus demostraciones.

En la parte II se introducen filtros y ultrafiltros, que son los que nos permitirán definir el para casi todo, denotado con el símbolo: $\dot{\forall}$.

Dado un conjunto I y un filtro $\boldsymbol{F}$ de I, una proposición P(i) vale $\dot{\forall} i$ si, y sólo si existe $U \in \boldsymbol{F}$ tal que $\forall i \in U$, vale P(i).

Luego se incluyen " nuevos modos descendentes " del $\dot{\forall}$, esto es para agilizar las demostraciones posteriores. Estos nuevos modos descendentes se obtienen ocupando el esquema deductivo. Por lo que el esquema que consta de cinco modos descendentes puede ser ampliado todo lo que uno quiera. De hecho se podría denominar esquema deductivo mínimo.

Por último, el $\dot{\forall}$ se distribuye en la conjunción, disyunción, y negación. Será de gran utilidad en todo lo que sigue.

En la parte III abordamos un poco el análisis no estándar, ocupando el esquema deductivo para demostrar los cuatro teoremas de Edward Nelson. El objetivo principal en este capítulo es demostrar el **principio de concurrencia:** $\forall$R concurrente[1] en X, $\exists \eta \in {}^*X$ tlq, $\forall x \in X$, $(\bar{x}, \eta) \in {}^*$R. Este principio se deducirá inmediatamente de los teoremas 3 y 4.

[1] La definición de concurrente se encuentra en el glosario de definiciones.

Dado un conjunto X, y un conjunto I de índices, $\xi \in X^I$ si, y sólo si Dom ξ = I y, $\forall i \in$ I, $\xi(i) \in X$. Dado $A \subset X$, se dice que ξ *emerge de* A, o que $\xi \in {}^*A$, si, y sólo si $\xi \in X^I$ y, $\forall i$, $\xi(i) \in A$. Esta operación *, se distribuye con la unión, intersección y diferencia.

Se define la función " t ", de tal manera que Dom t $= X^I$ y $\forall \xi \in X^I$, $t(\xi) = \{ E : E \subset X \;\text{ y }\; \xi \in {}^*E \}$. Luego se demuestra que, para todo $\xi \in X^I$, $t(\xi)$ es ultrafiltro de X.

La demostración del tercer teorema de Nelson es natural, pero no así su enunciado, éste es: si $t: X^I \to u(X)$ es suprayectiva entonces, para todo R concurrente en X, existe $\eta \in X^I$ tal que, para todo $x \in X$, $(\bar{x}, \eta) \in {}^*R$. Aquí $u(X)$ es la familia de ultrafiltros de X. ¿Es posible encontrar una función $t: X^I \to u(X)$ suprayectiva?. El teorema cuatro asegura que sí.

El esquema deductivo jugará un papel importante en la demostración de cada uno de los teoremas, resultando claras las respectivas demostraciones.

R. T. S.

GLOSARIO DE DEFINICIONES

Por comodidad del lector se pone este glosario de definiciones, ya que éstas se usan constantemente durante el trayecto de las demostraciones.

1.- Dado $\boldsymbol{F}$ filtro de I, se define el cuantificador $\dot{\forall} i/\boldsymbol{F}$, para casi todo i, según $\boldsymbol{F}$, como sigue:
$\dot{\forall} i/\boldsymbol{F}$, vale P(i) ssi $\exists$U tal que U$\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i \in$U, vale P(i).

2.- R *es concurrente en* X ssi R$\subset X^2$ y, $\forall$E$\subset X$, E finito, $\exists$ y $\in X$ tal que, $\forall\, x \in$ E, $(x\,, y) \in$ R.

3.- Dado X conjunto e I conjunto de índices, entiéndase X^I como el conjunto de funciones de I en X, es decir:
$\xi \in X^1$ ssi Dom ξ = I y $\forall i \in$I, $\xi(i) \in X$.

4.- Dado E$\subset X$, se define la operación * como sigue:
$\xi \in$*E ssi $\xi \in X^1$ y $\dot{\forall} i$, $\xi(i) \in$E.

5.- Dados R$\subset X^2$ y $x \in X$, se define Rx de la siguiente manera:
Rx = { y : $(x\,, y) \in$ R }.

6.- Dado $x \in X$, se define $\bar{x}$ tal que $\bar{x} \in X^1$ y, $\forall i \in$I, $\bar{x}(i) = x$.

7.- *Función t.* La función t se define de tal manera que:
Dom t = X^I y dada $\xi \in X^I$, t(ξ) = { E : E $\subset X$ y $\xi \in$*E}.

SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\dot{\forall}$	Para casi todo
$\varnothing$	Vacío
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\subset$	Contención
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$-$	Diferencia
$=$	Igual a
$\doteq$	Casi igual
$\bigcap$	Intersección de índices
$\bigcup$	Unión de índices
$\neq$	Diferente a

ABREVIATURAS

ssi	si, y sólo si
tlq	tal que
tlsq	tales que
Ax	Axioma
Dm	Demostrado
Neg	Negación
Hpt	Hipótesis
Def	Definición
Trad	Traducción
Excl	Exclusión
Alg	Algebraico
ent	entonces
ultraf	ultrafiltro
max	maximal
conj	conjunción
Desc	Descendente
gral	general
ident	idéntico
esp	específico
Dist	Distributiva
elm	elemento
algn	algún
ning	ningún
Cof	Cofinito
Dom	Dominio

ÍNDICE

1
PROCESO DEDUCTIVO

Se usarán cinco modos descendentes y tres modos hipotéticos para inferir en una demostración.

Modos descendentes: De lo idéntico, de la conjunción a la parte, de la parte a la disyunción, de lo general a lo particular y de lo específico a lo inespecífico.
Modos hipotéticos: Por exclusión, por casos, y por contradicción.

Estos modos descendentes prescriben las formas de inferir en una demostración.
Definir sobre la marcha cuando se llegue a una cuantificación existencial, proceder por casos, o por exclusión, cuando se llegue a una disyunción, demostrar sobre la marcha cuando se trate de una cuantificación universal, etc.

Para negar una condicional se reproduce la hipótesis y se niega la tesis.

Ejemplos de condicionales:

Si x es hermano de y entonces x viene.

Si x no viene entonces x no es hermano de y.

Sus negaciones respectivas son:

x es hermano de y y x no viene.

x no viene y x es hermano de y.

Dos proposiciones que tienen la misma negación se llaman giros, la una de la otra.

Para girar una condicional, basta intercambiar la hipótesis y la tesis, y negar ambas.

1.1 ESQUEMA DEDUCTIVO

Deducción formal de P es una cadena $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de proposiciones, llamadas pasos, tales que P_n es P, y cada paso es un axioma o algo demostrado antes, o se infiere de pasos anteriores mediante algún axioma o algo demostrado antes.
Se dice que el paso α) se infiere de los pasos α_1), α_2), …, α_n), si la condicional:
" Si α_1), α_2), …,y α_n) entonces α) " es algún axioma o algo demostrado antes.

Son axiomas ordinarios las proposiciones que integran una definición implícita. Estos axiomas son válidos por su contenido. Son axiomas lógicos los modos descendentes, los modos hipotéticos, las condicionales que van de una frase a su traducción, las que van de una frase a su giro, y las disyunciones de la forma P o no P. Tales axiomas son válidos por su forma.

Todos los axiomas son válidos por definición, y no necesitan ser demostrados. En cambio, todo lo que no es axioma y se pretenda que es válido, requiere de demostración.

Esquema deductivo es una estructura carente de contenido que se utiliza en ciertos contextos. Consta de cinco modos descendentes y de tres modos hipotéticos, para inferir.

MODOS DESCENDENTES

De lo idéntico	Si P entonces P
De la conjunción a la parte	Si P y Q entonces P
De la parte a la disyunción	Si P entonces P o Q
De lo general a lo particular	Si, $\forall x$, P(x) entonces P(c)
De lo específico a lo inespecífico	Si P(c) entonces existe x tal que P(x).

MODOS HIPOTÉTICOS

Si P o Q, y no P, entonces Q.	Por exclusión
Si P o Q, y, si P entonces R, y, si Q entonces R, entonces R.	Por casos
Si, si P entonces Q, y, si P entonces no Q, entonces no P.	Por contradicción

1.2 SILOGISMOS: UNIVERSAL PARTICULAR PARTICULAR (UPP)

Demostración directa de una condicional es una deducción que parte de la hipótesis, en calidad de dato, y termina en la tesis.

Ejemplos de demostración:

Si todo mago es actor
y algún mago es poeta
entonces algún actor es poeta :

(1) Todo mago es actor	Hpt
(2) Para todo x, si x es mago entonces x es actor	(1) Trad
(3) Algún mago es poeta	Hpt
(4) Existe x tal que x es mago y x es poeta	(3) Trad
(5) y es mago y y es poeta	(4) Def de y
(6) Si y es mago entonces y es actor	(2) De lo gral
(7) y es mago	(5) De la conj
(8) y es actor	(7)Por(6)
(9) y es poeta	(5) De la conj
(10) y es actor y y es poeta	(8)(9) De lo idéntico
(11) Existe x tal que x es actor y x es poeta	(10) De lo específico
(12) Algún actor es poeta	(11) Trad

En esta demostración los pasos (1) y (3) son las partes de la hipótesis. El paso (5) consiste en ponerle nombre a lo que existe según (4). Los pasos restantes se infieren de pasos anteriores.

Si algún alumno es invitado
y ningún pasante es invitado
entonces algún alumno no es pasante :

(1) Algún alumno es invitado	Hpt
(2) Existe x tal que x es alumno y x es invitado	(1) Trad
(3) y es alumno y y es invitado	(2) Def de y
(4) Ningún pasante es invitado	Hpt
(5) Para todo x, si x es pasante entonces x no es invitado	(4) Trad
(6) Si y es pasante entonces y no es invitado	(5) De lo gral
(7) y es invitado	(3) De la conj
(8) Si y es invitado entonces y no es pasante	(6) Giro
(9) y no es pasante	(7) Por(8)
(10) y es alumno	(3) De la conj
(11) Existe x tal que x es alumno y x no es pasante	(10)(9) De lo específico
(12) Algún alumno no es pasante	(11) Trad

TABLA DE SILOGISMOS UPP:

Si todo M es B y algn A es M ent algn A es B	Darii	Si ning M es B y algn A es M ent algn A no es B	Ferio
Si ning B es M y algn A es M ent algn A no es B	Festino	Si todo B es M y algn A no es M ent algn A no es B	Baroco
Si algn M es B y todo M es A ent algn A es B	Disamis	Si todo M es B y algn M es A ent algn A es B	Datisi
Si algn M no es B y todo M es A ent algn A no es B	Bocardo	Si ning M es B y algn M es A ent algn A no es B	Ferison
Si algn B es M y todo M es A ent algn A es B	Dimatis	Si ning B es M y algn M es A ent algn A no es B	Fresiso

Las demostraciones de los silogismos sirven de modelo para demostrar teoremas, dentro del esquema deductivo.

1.3 SILOGISMOS: UNIVERSAL UNIVERSAL UNIVERSAL (UUU)

Si todo apóstol es mártir
y ningún mártir es beato
entonces ningún apóstol es beato:

(1) Todo apóstol es mártir	Hpt
(2) Para todo *x*, si *x* es apóstol ent *x* es mártir	(1) Trad
(3) Ningún mártir es beato	Hpt
(4) Para todo *x*, si *x* es mártir ent *x* no es beato	(3) Trad
(5) Para todo *y*, si *y* es apóstol ent *y* no es beato:	
(a) *y* es apóstol	Hpt
(b) Si *y* es apóstol ent *y* es mártir	(2) De lo gral
(c) *y* es mártir	(a)Por(b)
(d) Si *y* es mártir ent *y* no es beato	(4) De lo gral
(e) *y* no es beato	(c)Por(d)
(6) Ningún apóstol es beato	(5) Trad

Aquí el paso (5) se demuestra sobre la marcha.

Si ningún avaro es socio
y todo pobre es socio
entonces ningún avaro es pobre:

(1) Ningún avaro es socio	Hpt
(2) Para todo *x*, si *x* es avaro ent *x* no es socio	(1) Trad
(3) Todo pobre es socio	Hpt
(4) Para todo *x*, si *x* es pobre ent *x* es socio	(3) Trad
(5) Para todo *y*, si *y* es avaro ent *y* no es pobre:	
(a) *y* es avaro	Hpt
(b) Si *y* es avaro ent *y* no es socio	(2) De lo gral
(c) *y* no es socio	(a)Por(b)
(d) Si *y* es pobre ent *y* es socio	(4) De lo gral
(e) Si *y* no es socio ent *y* no es pobre	(d) Giro
(f) *y* no es pobre	(c)Por(e)
(6) Ningún avaro es pobre	(5) Trad

TABLA DE SILOGISMOS UUU:

Si todo M es B
y todo A es M
ent todo A es B Barbara

Si ning M es B
y todo A es M
ent ning A es B Celarent

Si ning B es M
y todo A es M
ent ning A es B Cesare

Si todo B es M
y ning A es M
ent ning A es B Camestres

Si todo B es M
y ning M es A
ent ning A es B Camenes

Nota: Se les puede dar cualquier nombre a las letras A, B y M como se hizo en los ejemplos.

1.4 NEGACIONES

Como negación de una proposición se toma otra proposición que afirme lo contrario de ella.

Ejemplos:

Si x es hermano de *y* entonces *x* viene
x es hermano de *y* y *x* no viene.

x es socio de *y* y *x* es menor que *y*
Si *x* es socio de *y* entonces *x* no es menor que *y*.

x cumple o *y* renuncia
x no cumple y *y* no renuncia

x no cumple
x cumple

Para todo *x*, *x* depende de *y*
Existe *x* tal que *x* no depende de *y*

Existe *x* tal que *x* es veraz
Para todo *x*, *x* no es veraz

Según los ejemplos anteriores, la negación de una condicional es la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis; la negación de una conjunción es la condicional que va de la primera parte a la negación de la segunda parte; la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de las partes; la negación de una negación es la afirmación de la parte; la negación de una cuantificación universal es la cuantificación existencial de la negación de la parte; la negación de una cuantificación existencial es la cuantificación universal de la negación de la parte.

1.5 DEFINICION DE =

Se dice que $x = y$ si, y sólo si, x y y son el mismo objeto. De lo contrario, se dice que x es diferente de y, en símbolo: $x \neq y$.
A continuación se dan las leyes de igualdad, ilustrando algunos con ejemplos.

Leyes de la igualdad:

$x = x$.	Reflexiva
Si $x = y$ entonces $y = x$.	Simétrica
Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$.	Transitiva
Si $x = y$ entonces padre de $x =$ padre de y.	De monotonía
Si x es hermano de y, $x = x'$, y $y = y'$, entonces x' es hermano de y'.	De sustitución

Estas leyes son válidas por definición. Son axiomas.

Según la ley de monotonía, al aplicar a cosas iguales la misma operación los resultados son iguales.

Según la ley de sustitución, se pasa de la hipótesis a la tesis sustituyendo iguales por iguales en la proposición de base. La proposición de base es una parte de la hipótesis que se parece a la tesis. La hipótesis consta de la proposición de base en conjunción con ciertas igualdades anexas, que indican qué se sustituye por qué.

A continuación se repite el ejemplo anterior de sustitución, subrayando en la proposición de base lo que se sustituye:

Si $\underline{x}$ es hermano de $\underline{y}$, $x = x'$, y $y = y'$,
entonces x' es hermano de y'.

2
FILTROS Y ULTRAFILTROS

Se introducen aquí los filtros y ultrafiltros, para darle sentido matemático a la expresión casi todo. A fin de que dicha expresión conmute con las operaciones y, o, no, se requiere de un ultrafiltro.

En las demostraciones de este capítulo se continuará utilizando el esquema deductivo, dando por demostradas todas las propiedades del álgebra de conjuntos que se empleen. Dichas propiedades se dan en términos de las operaciones $\cup$, $\cap$, -, y de las relaciones $\subset$, =, y se registran con la notación: Alg.

2.1 FILTROS

Dado un conjunto I, *filtro de* I es una colección $\boldsymbol{F}$ de subconjuntos de I tales que:
$I \in \boldsymbol{F}$, $\varnothing \notin \boldsymbol{F}$,
si $U_1, U_2 \in \boldsymbol{F}$ entonces $U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{F}$,
si $U \in \boldsymbol{F}$ y $U \subset U' \subset I$ entonces $U' \in \boldsymbol{F}$.

Vagamente, los elementos de $\boldsymbol{F}$ son los subconjuntos de I que incluyen a casi todo elemento de I. El casi todo se define en función de cada filtro $\boldsymbol{F}$.

Ejemplos de filtros:

1.- El *filtro de Frechet*, formado de los conjuntos cofinitos en I (I infinito), es decir, conjuntos U tales que $U \subset I$ e $I - U$ es finito.

2.- El *filtro principal generado por* x_0, formado de los subconjuntos de I que incluyen a x_0, elemento fijo de I.

Demostraciones:

Como I es infinito, los conjuntos cofinitos en I forman un filtro de I:

En efecto:

I es cofinito en I:	Porque $I \subset I$ e $I - I$ es finito.
$\varnothing$ no es cofinito en I:	Porque $I - \varnothing$ no es finito.

Si U_1, U_2 son cofinitos en I entonces $U_1 \cap U_2$ es cofinito en I:

(1) U_1 es cofinito en I	Hpt
(2) $U_1 \subset I$	
(3) $I - U_1$ es finito	(1) Def de cof
(4) U_2 es cofinito en I	Hpt
(5) $U_2 \subset I$	
(6) $I - U_2$ es finito	(4) Def de cof
(7) $U_1 \cap U_2 \subset I$	(2)(5) Alg
(8) $I - (U_1 \cap U_2)$ es finito:	
(a) $I - (U_1 \cap U_2) = (I - U_1) \cup (I - U_2)$	Alg
(b) $(I - U_1) \cup (I - U_2)$ es finito	(3)(6) Alg
(c) $I - (U_1 \cap U_2)$ es finito	(b)Por(a)
(9) $U_1 \cap U_2$ es cofinito	(7)(8) Def de cof

Si U es cofinito en I y $U \subset U' \subset I$ ent U' es cofinito en I:

(1) U es cofinito en I	
(2) $U \subset U'$	
(3) $U' \subset I$	Hpt
(4) $U \subset I$	
(5) $I - U$ es finito	(1) Def de cof
(6) $I - U' \subset I - U$	(2) Alg
(7) $I - U'$ es finito	(5)(6) Alg
(8) U' es cofinito en I	(3)(7) Def de cof

Los subconjuntos de I que incluyen a x_0 forman un filtro de I:

En efecto:

I es subconjunto de I que incluye a x_0.

$\varnothing$ no es subconjunto de I que incluye a x_0.

Si U_1, U_2 son subconjuntos de I que incluyen a x_0 entonces $U_1 \cap U_2$ es subconjunto de I que incluye a x_0.

Si U es subconjunto de I que incluye a x_0, y $U \subset U' \subset I$, entonces U' es subconjunto de I que incluye a x_0.

2.2 CASI TODO

Dado un filtro $\boldsymbol{F}$ de I, se define el cuantificador $\dot{\forall} i\,/\boldsymbol{F}$,

para casi todo i, según $\boldsymbol{F}$,

como sigue:

$\dot{\forall} i\,/\boldsymbol{F}$, vale P(i), ssi $\exists$U tlq U$\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i\in$U vale P(i)	Def de $\dot{\forall}$

De aquí en adelante y por comodidad, sólo se escribirá $\dot{\forall} i$, en lugar de escribir $\dot{\forall} i/\boldsymbol{F}$.
Es decir: $\dot{\forall} i$ significa $\dot{\forall} i/\boldsymbol{F}$.

NUEVOS MODOS DESCENDENTES

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) y Q(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i):

(1) $\dot{\forall} i$ vale P(i) y Q(i)	Hpt
(2) $\exists$U tlq U$\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i\in$U vale P(i) y Q(i)	(1) Def de $\dot{\forall}$
(3) U$\in\boldsymbol{F}$	
(4) $\forall i\in$U vale P(i) y Q(i)	(2) Def de U
(5) $\forall i\in$U vale P(i):	
(a) i$\in$U	Hpt
(b) Vale P(i) y Q(i)	(a) Por(4)
(c) Vale P(i)	(b) De la conj
(6)$\dot{\forall} i$ vale P(i)	(3)(5) Def de $\dot{\forall}$

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i) o Q(i):

(1) $\dot{\forall} i$ vale P(i)	Hpt
(2) $\exists$U tlq U$\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i\in$U vale P(i)	(1) Def de $\dot{\forall}$
(3) U$\in\boldsymbol{F}$	
(4) $\forall i\in$U vale P(i)	(2) Def de U
(5) $\forall i\in$U vale P(i) o Q(i):	
(a) $i\in$U	Hpt
(b) Vale P(i)	(a) Por(4)
(c) Vale P(i) o Q(i)	(b) De la parte
(6) $\dot{\forall} i$ vale P(i) o Q(i)	(3)(5) Def de $\dot{\forall}$

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) entonces $\exists i$ tal que vale P(i):

(1) $\dot{\forall} i$ vale P(i)	Hpt
(2) $\exists$U tlq U$\in \boldsymbol{F}$ y $\forall i \in$U vale P(i)	(1) Def de $\dot{\forall}$
(3) U$\in \boldsymbol{F}$	
(4) $\forall i \in$U vale P(i)	(2) Def de U
(5) $\exists i$ tlq $i \in$U	(3) Porque $\boldsymbol{F}$ es filtro
(6) j$\in$U	(5) Def de j
(7) Vale P(j)	(6) Por(4)
(8) $\exists i$ tlq vale P(i)	(7) De lo esp

Si $\forall i \in$I vale P(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i):

(1) $\forall i \in$I vale P(i)	Hpt
(2) I$\in \boldsymbol{F}$	Def de $\boldsymbol{F}$
(3) I$\in \boldsymbol{F}$ y $\forall i \in$I vale P(i)	(2)(1) De lo ident
(4) $\exists$U tlq U$\in \boldsymbol{F}$ y $\forall i \in$U vale P(i)	(3) De lo esp
(5) $\dot{\forall} i$ vale P(i)	(4) Def de $\dot{\forall}$

2.3 ULTRAFILTROS

$\boldsymbol{F}$ *es* *ultrafiltro de* I ssi $\boldsymbol{F}$ es filtro de I
y, $\forall$U, si U$\subset$ I entonces U$\in \boldsymbol{F}$ o I - U$\in \boldsymbol{F}$. Def de ultraf

Ejemplos de ultrafiltros:

1.- Todo filtro principal es ultrafiltro:

Porque, $\forall$U$\subset$ I, $x_0 \in$ U o $x_0 \in$ I - U.

2.- Ningún filtro de Frechet es ultrafiltro:

Porque, dados $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in$ I, distintos entre si, los conjuntos $\{x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$, I - $\{x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$ son infinitos, luego ninguno de ellos es cofinito en I.

$\boldsymbol{F}$ es *filtro maximal de* I ssi $\boldsymbol{F}$ es filtro de I
y, $\forall \boldsymbol{F}'$, si $\boldsymbol{F}'$ es filtro de I y $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{F}'$ entonces $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Def de maximal

En ambos casos se trata de un filtro de I que no puede crecer en I. Luego ultrafiltro y filtro maximal son lo mismo.

Dado I, el conjunto de filtros de I, forma un *orden parcial*, según la relación "$\subset$"; es decir:

1) $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{F}$ Para todo $\boldsymbol{F}$, filtro de I
2) Si $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}_2$ y $\boldsymbol{F}_2 \subset \boldsymbol{F}_3$ entonces $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}_3$ Para todo $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, filtros de I.

Cadena de filtros de I, es una colección no vacía Ω de filtros de I,
tales que si $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2 \in \Omega$ entonces $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}_2$ o $\boldsymbol{F}_2 \subset \boldsymbol{F}_1$.

$U \in \bigcup_{F\in\Omega} F$ ssi $\exists F$ tlq $F\in\Omega$ y $U\in F$ Def de $\bigcup$

Por comodidad cuando no haya ambiguedad escribiremos $\bigcup F$ en lugar de $\bigcup_{F\in\Omega} F$.

TEOREMA:

<u>Si</u> Ω <u>es una cadena de filtros de</u> I <u>entonces</u> $\bigcup_{F\in\Omega} F$ <u>es filtro de</u> I:

Demostración:

(1) Ω es una cadena de filtros de I — Hpt
(2) $\exists F$ tlq $F\in\Omega$
(3) $\forall F$, si $F\in\Omega$ ent F es filtro de I
(4) Si $F_1, F_2\in\Omega$ ent $F_1\subset F_2$ o $F_2\subset F_1$ — (1) Def de cadena
(5) $I\in \bigcup F$: — (2)(3) Porque $I\in F$
(6) $\varnothing \notin \bigcup F$:

  (a) $\varnothing \in \bigcup F$ — Neg
  (b) $\exists F$ tlq $F\in\Omega$ y $\varnothing \in F$ — (a) Def de $\bigcup$
  (c) $F\in\Omega$
  • (d) $\varnothing \in F$ — (b) Def de F
  • (e) $\varnothing \notin F$ — (c)(3) Def de filtro

(7) Si $U_1, U_2\in \bigcup F$ entonces $U_1\cap U_2\in \bigcup F$:

  (a) $U_1\in \bigcup F$ — Hpt
  (b) $\exists F$ tlq $F\in\Omega$ y $U_1\in F$ — (a) Def de $\bigcup$
  (c) $F_1\in\Omega$
  (d) $U_1\in F_1$ — (b) Def de F_1
  (e) $U_2\in \bigcup F$ — Hpt
  (f) $\exists F$ tlq $F\in\Omega$ y $U_2\in F$ — (e) Def de $\bigcup$
  (g) $F_2\in\Omega$
  (h) $U_2\in F_2$ — (f) Def de F_2
  (i) $F_1\subset F_2$ o $F_2\subset F_1$ — (c)(g) Por (4)
  (j) Si $F_1\subset F_2$ ent $U_1\cap U_2\in \bigcup F$:

    (j_1) $F_1\subset F_2$ — Hpt
    (j_2) $U_1\in F_2$ — (d)(j_1) Alg
    (j_3) $U_1\cap U_2\in F_2$ — (j_2)(h) Porque F_2 es filtro
    (j_4) $F_2\in\Omega$ y $U_1\cap U_2\in F_2$ — (g)(j_3) Desc
    (j_5) $\exists F$ tlq $F\in\Omega$ y $U_1\cap U_2\in F$ — (j_4) Desc
    (j_6) $U_1\cap U_2\in \bigcup F$ — (j_5) Def de $\bigcup$

  (k) Si $F_2\subset F_1$ ent $U_1\cap U_2\in \bigcup F$: — Análogo

(8) Si $U \in \bigcup_{\mathbf{F}\in\Omega} \mathbf{F}$ y $U \subset U' \subset I$ ent $U' \in \bigcup_{\mathbf{F}\in\Omega} \mathbf{F}$:

(a) $U \in \bigcup \mathbf{F}$	Hpt
(b) $\exists \mathbf{F}$ tlq $\mathbf{F}\in\Omega$ y $U \in \mathbf{F}$	(a) Alg
(c) $\mathbf{F}\in\Omega$	
(d) $U \in \mathbf{F}$	(b) Def de $\mathbf{F}$
(e) $U \subset U' \subset I$	Hpt
(f) $U' \in \mathbf{F}$	(d)(e) Porque $\mathbf{F}$ es filtro de I
(g) $U' \in \bigcup \mathbf{F}$	(c)(f) Alg

(9) $\bigcup_{F\in\Omega} F$ es filtro de I — (5)(6)(7)(8) Def de filtro

Los puntos que aparecen en los pasos (d) y (e) del paso (6), indican que hay una contradicción en estos pasos. Cada vez que se proceda a demostrar una afirmación por contradicción se marcarán con puntos los pasos que se contradicen.

Para todo $\mathbf{F}$, si $\mathbf{F}\in\Omega$ entonces $\mathbf{F} \subset \bigcup_{F\in\Omega} \mathbf{F}$. — Def de $\bigcup$

Como consecuencia de lo anterior se tiene:

Toda cadena de filtros de I está acotada por algún filtro de I.

Por último teniendo las condiciones del lema de Zorn, se tiene el siguiente:

TEOREMA

Todo filtro de I está contenido en algún ultrafiltro de I: — Porque filtro maximal y ultrafiltro son lo mismo.

LEMA:

Si $\boldsymbol{F}$ es ultrafiltro de I
entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i) o $\dot{\forall} i$ no vale P(i):

Demostración:

(1) $\boldsymbol{F}$ es ultrafiltro de I	Hpt
(2) $\forall i$, $i \in$ U ssi $i \in$ I y vale P(i)	Def de U
(3) U$\subset$I	(2) Alg
(4) U$\in \boldsymbol{F}$ o I - U$\in \boldsymbol{F}$	(3)Por(1)
(5) Si U$\in \boldsymbol{F}$ ent $\dot{\forall} i$ vale P(i):	
(a) U$\in \boldsymbol{F}$	Hpt
(b) $\forall i \in$ U vale P(i):	
(b_1) $i \in$ U	Hpt
(b_2) $i \in$ I y vale P(i)	(b_1)Por(2)
(b_3) Vale P(i)	(b_2) Desc
(c) $\dot{\forall} i$ vale P(i)	(a)(b) Def de $\dot{\forall}$
(6) Si I - U$\in \boldsymbol{F}$ ent $\dot{\forall} i$ no vale P(i):	
(a) I - U$\in \boldsymbol{F}$	Hpt
(b) $\forall i \in$ I - U no vale P(i):	
(b_1) $i \in$ I - U	Hpt
(b_2) $i \in$ I	
(b_3) $i \notin$ U	(b_1) Alg
(b_4) $i \notin$ U ssi $i \notin$ I o no vale P(i)	(2) Giro
(b_5) $i \notin$ I o no vale P(i)	(b_3)Por(b_4)
(b_6) No vale P(i)	(b_5)(b_2) Excl
(c) $\dot{\forall} i$ no vale P(i)	(a)(b) Def de $\dot{\forall}$
(7) $\dot{\forall} i$ vale P(i) o $\dot{\forall} i$ no vale P(i)	(4)(5)(6) Por casos

Según este lema, cualquier propiedad P(i) vale para casi todo i, o para casi ningún i, sin otra alternativa, cuando $\boldsymbol{F}$ es ultrafiltro.

2.4 DISTRIBUCIÓN DE $\dot{\forall} i$

Cuando F es ultrafiltro de I el cuantificador $\dot{\forall} i/F$ se distribuye en la conjunción, disyunción, y negación.

$\dot{\forall} i$, vale P(i) y Q(i) ssi $\dot{\forall} i$ vale P(i) y $\dot{\forall} i$ vale Q(i),

$\dot{\forall} i$, vale P(i) o Q(i) ssi $\dot{\forall} i$ vale P(i) o $\dot{\forall} i$ vale Q(i),

$\dot{\forall} i$ no vale P(i) ssi no $\dot{\forall} i$ vale P(i).

La dificultad principal se reduce a las siguientes demostraciones:

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) y $\dot{\forall} i$ vale Q(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i) y Q(i):

(1) $\dot{\forall} i$ vale P(i)	Hpt
(2) $\exists$U tlq U$\in F$ y $\forall i\in$U vale P(i)	(1) Def de $\dot{\forall}$
(3) $U_1 \in F$	
(4) $\forall i \in U_1$ vale P(i)	(2) Def de U_1
(5) $\dot{\forall} i$ vale Q(i)	Hpt
(6) $\exists$U tlq U$\in F$ y $\forall i\in$U vale Q(i)	(5) Def de $\dot{\forall}$
(7) $U_2 \in F$	
(8) $\forall i \in U_2$ vale Q(i)	(6) Def de U_2
(9) $U_1 \cap U_2 \in F$	(3)(7) Porque F es filtro
(10) $\forall i \in U_1 \cap U_2$ vale P(i) y Q(i):	
(a) $i \in U_1 \cap U_2$	Hpt
(b) $i \in U_1$	
(c) $i \in U_2$	(a) Alg
(d) Vale P(i)	(b)Por(4)
(e) Vale Q(i)	(c)Por(8)
(f) Vale P(i) y Q(i)	(d)(e) De lo ident
(11) $\dot{\forall} i$ vale P(i) y Q(i)	(9)(10) Def de $\dot{\forall}$

Si $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ o $Q(i)$ entonces $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ o $\dot{\forall} i$ vale $Q(i)$:

(1) $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ o $Q(i)$	Hpt
(2) $\exists U$ tlq $U \in \boldsymbol{F}$ y $\forall i \in U$ vale $P(i)$ o $Q(i)$	(1) Def de $\dot{\forall}$
(3) $U_1 \in \boldsymbol{F}$	
(4) $\forall i \in U_1$ vale $P(i)$ o $Q(i)$	(2) Def de U_1
(5) $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ o $\dot{\forall} i$ no vale $P(i)$	Lema
(6) Si $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ ent $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$	De lo ident
(7) Si $\dot{\forall} i$ no vale $P(i)$ ent $\dot{\forall} i$ vale $Q(i)$:	
(a) $\dot{\forall} i$ no vale $P(i)$	Hpt
(b) $\exists U$ tlq $U \in \boldsymbol{F}$ y $\forall i \in U$ no vale $P(i)$	(a) Def de $\dot{\forall}$
(c) $U_2 \in \boldsymbol{F}$	
(d) $\forall i \in U_2$ no vale $P(i)$	(b) Def de U_2
(e) $U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{F}$	(3)(c) Porque $\boldsymbol{F}$ es filtro
(f) $\forall i \in U_1 \cap U_2$ vale $Q(i)$:	
(f_1) $i \in U_1 \cap U_2$	Hpt
(f_2) $i \in U_1$	
(f_3) $i \in U_2$	(f_1) Alg
(f_4) Vale $P(i)$ o $Q(i)$	(f_2)Por(4)
(f_5) No vale $P(i)$	(f_3)Por(d)
(f_6) Vale $Q(i)$	(f_4)(f_5) Excl
(g) $\dot{\forall} i$ vale $Q(i)$	(e)(f) Def de $\dot{\forall}$
(8) $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ o $\dot{\forall} i$ vale $Q(i)$	(5)(6)(7) Por casos

Si $\dot{\forall} i$ no vale $P(i)$ entonces no $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$:

(1) $\dot{\forall} i$ no vale $P(i)$	
(2) $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$	Neg
(3) $\dot{\forall} i$ vale $P(i)$ y no vale $P(i)$	(2)(1) Dem
(4) $\exists i$ tlq vale $P(i)$ y no vale $P(i)$	(3) Desc
• (5) Vale $P(i_0)$	
• (6) No vale $P(i_0)$	(4) Def de i_0

Las recíprocas de estas condicionales son fáciles de demostrar.

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) y Q(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i) y $\dot{\forall} i$ vale Q(i).

Si $\dot{\forall} i$ vale P(i) o $\dot{\forall} i$ vale Q(i) entonces $\dot{\forall} i$ vale P(i) o Q(i).

Si no $\dot{\forall} i$ vale P(i) entonces $\dot{\forall} i$ no vale P(i).

Las dos primeras se basan en modos descendentes ya vistos. La tercera es un giro del lema anterior.

2.5 BASE DE FILTRO DE I

Base de filtro de I, es una colección no vacía $\boldsymbol{B}$ de subconjuntos de I tales que toda intersección finita de elementos de $\boldsymbol{B}$ es no vacía. Def de base

Ejemplo: Todo conjunto $I \neq \varnothing$ tiene una base. Considérese $\boldsymbol{B} = \{I\}$.

TEOREMA

Si $\boldsymbol{B}$ es base de filtro de I entonces existe $\boldsymbol{F}$ tal que $\boldsymbol{F}$ es filtro de I y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{F}$:

Demostración:

(1) $\boldsymbol{B}$ es base de filtro de I	Hpt
(2) $\exists U$ tlq $U \in \boldsymbol{B}$	
(3) $\forall U$, si $U \in \boldsymbol{B}$ ent $U \subset I$	
(4) $\forall U_1, \ldots, U_n \in \boldsymbol{B}$, $U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \varnothing$	(1) Def de base
(5) $\forall U$, si $U \in \boldsymbol{B}$ ent $U \neq \varnothing$	(4) Corolario
(6) $\forall X$, $X \in \boldsymbol{F}$ ssi $X \subset I$ y $\exists U_1, \ldots, U_n \in \boldsymbol{B}$ tlsq $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset X$	Def de $\boldsymbol{F}$
(7) $\forall X$, si $X \subset I$ y $\exists U \in \boldsymbol{B}$ tlq $U \subset X$ ent $X \in \boldsymbol{F}$	(6) Corolario
(8) $I \in \boldsymbol{F}$:	
(a) Si $I \subset I$ y $\exists U \in \boldsymbol{B}$ tlq $U \subset I$ ent $I \in \boldsymbol{F}$	(7) Desc
(b) $I \subset I$	Alg
(c) $\exists U \in \boldsymbol{B}$ tlq $U \subset I$:	
(c_1) $\exists U$ tlq $U \in \boldsymbol{B}$	(2) Desc
(c_2) $U_0 \in \boldsymbol{B}$	(c_1) Def de U_0
(c_3) $U_0 \subset I$	(c_2)Por(3)
(c_4) $\exists U$ tlq $U \in \boldsymbol{B}$ y $U \subset I$	(c_2)(c_3) Desc
(d) $I \in \boldsymbol{F}$	(b)(c)Por (a)
(9) $\varnothing \notin \boldsymbol{F}$:	
(a) $\varnothing \in \boldsymbol{F}$	Neg
(b) $\varnothing \subset I$	
(c) $\exists U_1, \ldots, U_n \in \boldsymbol{B}$ tlsq $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset \varnothing$	(a) Def de $\boldsymbol{F}$
(d) $U_1, \ldots, U_n \in \boldsymbol{B}$	
(e) $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset \varnothing$	(c) Def de $U_1, \ldots, U_n$
• (f) $U_1 \cap \ldots \cap U_n = \varnothing$	(e) Alg
• (g) $U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \varnothing$	(d)Por(4)

(10) Si X, Y$\in$ ***F*** ent X $\cap$ Y$\in$ ***F***:

(a) $X\in \boldsymbol{F}$	Hpt
(b) $X \subset I$	
(c) $\exists U_1,\ldots,U_n\in\boldsymbol{B}$ tlsq $U_1\cap\ldots\cap U_n\subset X$	(a) Def de ***F***
(d) $U_1,\ldots,U_n\in\boldsymbol{B}$	
(e) $U_1\cap\ldots\cap U_n\subset X$	(c) Def de $U_1,\ldots,U_n$
(f) $Y\in \boldsymbol{F}$	Hpt
(g) $Y\subset I$	
(h) $\exists V_1,\ldots,V_m\in \boldsymbol{B}$ tlsq $V_1\cap\ldots\cap V_m\subset Y$	(f) Def de ***F***
(i) $V_1,\ldots,V_m\in\boldsymbol{B}$	
(j) $V_1\cap\ldots\cap V_m\subset Y$	(h) Def de $V_1,\ldots,V_m$
(k) $X\cap Y\subset I$	(b)(g) Alg
(l) $U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_m\in \boldsymbol{B}$	(d)(i) Desc
(m) $U_1\cap\ldots\cap U_n\cap V_1\cap\ldots\cap V_m\subset X\cap Y$	(e)(j) Alg
(n) $X\cap Y\in \boldsymbol{F}$	(k)(l)(m) Def de ***F***

(11) Si X$\in$ ***F*** y X$\subset$ Y$\subset$ I ent Y$\in$ ***F***:

(a) $X\in \boldsymbol{F}$	Hpt
(b) $X\subset I$	
(c) $\exists U_1,\ldots,U_n\in\boldsymbol{B}$ tlsq $U_1\cap\ldots\cap U_n\subset X$	(a) Def de ***F***
(d) $U_1,\ldots,U_n\in \boldsymbol{B}$	
(e) $U_1\cap\ldots\cap U_n\subset X$	(c) Def de $U_1,\ldots,U_n$
(f) $X\subset Y$	
(g) $Y\subset I$	Hpt
(h) $U_1\cap\ldots\cap U_n\subset Y$	(e)(f) Alg
(i) $Y\in \boldsymbol{F}$	(g)(d)(h) Def de ***F***

(12) ***F*** es filtro de I	(8)(9)(10)(11) Def de filtro
(13) $\forall$X, si X$\in$***B*** ent X$\in$***F***:	

(a) $X\in\boldsymbol{B}$	Hpt
(b) $X\subset I$	(a)Por(3)
(c) $X\subset X$	Alg
(d) $\exists U$ tlq $U\in\boldsymbol{B}$ y $U\subset X$	(a)(c) Desc
(e) $X\in\boldsymbol{F}$	(b)(d) Def de ***F***

(14) $\boldsymbol{B}\subset \boldsymbol{F}$	(13) Alg
(15) $\exists\boldsymbol{F}$ tlq ***F*** es filtro de I y $\boldsymbol{B}\subset \boldsymbol{F}$	(12)(14) Desc

Como consecuencia de lo demostrado se tiene:

Toda base de filtro de I está contenido en algún filtro de I.

COROLARIO:

Toda base de filtro de I está contenido en algún ultrafiltro de I:

Porque todo filtro de I está contenido en algún ultrafiltro de I.

Traduciendo este corolario queda de la siguiente manera:

Si $\boldsymbol{B}$ es base de filtro de I entonces existe $\boldsymbol{F}$ tal que $\boldsymbol{F}$ es ultrafiltro de I y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{F}$.

Este corolario nos servirá para demostrar los dos últimos teoremas de esta tesis.

Observación: Dado que en todo conjunto $I \neq \varnothing$ tiene al menos una base de filtro de I, tomando en cuenta el teorema anterior y que todo filtro de I está contenido en algún ultrafiltro de I, entonces:
En todo conjunto $I \neq \varnothing$, existe algún ultrafiltro de I.

3
TEORÍA DE NELSON

En la teoría de Nelson destaca el propósito de sacar el análisis no estándar de su contexto metamatemático, para colocarlo dentro de un contexto matemático puro.

Se parte de un conjunto fijo X, de un conjunto I de índices, y de un ultrafiltro $\boldsymbol{F}$ de I.

R se llama <u>*concurrente en*</u> X ssi $R \subset X^2$
y, $\forall E \subset X$, E finito, $\exists y \in X$ tlq, $\forall x \in E$, $(x, y) \in R$.

$^*R = \{ (\xi, \eta) \in (X^I)^2 : \dot{\forall} i,\ (\xi(i), \eta(i)) \in R \}$.

Se pueden elegir I y $\boldsymbol{F}$ suficientemente grandes, para que valga el <u>*principio de concurrencia*</u> de Abraham Robinson:

$\forall R$ concurrente en X, $\exists \eta \in X^I$ tlq, $\forall x \in X$, $(\bar{x}, \eta) \in {}^*R$.

Aquí $\bar{x}$ es, por definición, la función de X^I tlq, $\forall i \in I$, $\bar{x}(i) = x$.

Ejemplos:

1.- Si X es la recta de los reales, la relación " < " es concurrente en X.

2.- En los números enteros, la relación " | " de divisibilidad, es concurrente en los enteros.

Los cuatro teoremas de Nelson los enunciamos en este capítulo. En aras de la brevedad, se harán las demostraciones guiándose por el esquema deductivo algunas veces, y por razones plausibles otras veces. Veremos como el esquema deductivo es de gran ayuda para visualizar una demostración y para ser entendida de manera clara.

3.1 OPERACIÓN *

De aquí en adelante, todas las discusiones se refieren a un conjunto fijo X, un conjunto fijo I, de índices, y un ultrafiltro $\boldsymbol{F}$ de I, fijo también.

Los elementos de X se designan como $x, y, z, \ldots$, y los elementos de X^{I}, <u>*expansión*</u> <u>*de*</u> X, se designan como $\xi, \eta, \zeta, \ldots$

Entiéndase X^{I}, como el conjunto de funciones de I en X, es decir:
$\xi \in X^{I}$ ssi $\mathrm{Dom}\xi = \mathrm{I}$ y, $\forall i \in \mathrm{I}$, $\xi(i) \in X$ — Def de X^{I}

Dado $\mathrm{A} \subset Y$ y $\xi \in Y^{I}$, se dice que ξ <u>*emerge*</u> <u>*de*</u> A,
o que $\xi \in {}^*\mathrm{A}$ ssi $\dot{\forall} i, \xi(i) \in \mathrm{A}$ — Def de *

En particular, observemos que si $\xi_1, \ldots, \xi_n \in X^{I}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in (X^{I})^{n} \cong (X^{n})^{I}$
y $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(i) = (\xi_1(i), \ldots, \xi_n(i))$. Entonces, por la definición anterior,
si $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}^{n}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in {}^*\mathrm{A}$ significa que $\dot{\forall} i$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(i) \in \mathrm{A}$

Propiedades distributivas:

$^*(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = {}^*\mathrm{A} \cup {}^*\mathrm{B}$

$^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = {}^*\mathrm{A} \cap {}^*\mathrm{B}$

$^*(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = {}^*\mathrm{A} - {}^*\mathrm{B}$.

Demostraciones:
$^*(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = {}^*\mathrm{A} \cup {}^*\mathrm{B}$:

(1) $\forall \xi$, si $\xi \in {}^*(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ ent $\xi \in {}^*\mathrm{A} \cup {}^*\mathrm{B}$:

(a) $\xi \in {}^*(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$	Hpt
(b) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	(a) Def de *
(c) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in \mathrm{A}$ o $\xi(i) \in \mathrm{B}$	(b) Alg
(d) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in \mathrm{A}$ o $\dot{\forall} i, \xi(i) \in \mathrm{B}$	(c) Dist
(e) $\xi \in {}^*\mathrm{A}$ o $\xi \in {}^*\mathrm{B}$	(d) Def de *
(f) $\xi \in {}^*\mathrm{A} \cup {}^*\mathrm{B}$	(e) Alg

(2) $\forall \xi$, si $\xi \in {}^*\mathrm{A} \cup {}^*\mathrm{B}$ ent $\xi \in {}^*(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$:

Demostración anterior, invirtiendo los pasos.

$*(A \cap B) = *A \cap *B$:

(1) $\forall\xi$, si $\xi \in *(A \cap B)$ ent $\xi \in *A \cap *B$:

(a) $\xi \in *(A \cap B)$	Hpt
(b) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A \cap B$	(a) Def de *
(c) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A$ y $\xi(i) \in B$	(b) Alg
(d) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A$ y $\dot{\forall} i, \xi(i) \in B$	(c) Dist
(e) $\xi \in *A$ y $\xi \in *B$	(d) Def de *
(f) $\xi \in *A \cap *B$	(e) Alg

(2) $\forall\xi$, si $\xi \in *A \cap *B$ ent $\xi \in *(A \cap B)$:

Demostración anterior, invirtiendo los pasos.

$*(A - B) = *A - *B$:

(1) $\forall\xi$, si $\xi \in *(A - B)$ ent $\xi \in *A - *B$:

(a) $\xi \in *(A - B)$	Hpt
(b) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A - B$	(a) Def de *
(c) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A$ y $\xi(i) \notin B$	(b) Alg
(d) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A$ y $\dot{\forall} i, \xi(i) \notin B$	(c) Dist
(e) $\dot{\forall} i, \xi(i) \in A$ y no $\dot{\forall} i, \xi(i) \in B$	(d) Dist
(f) $\xi \in *A$ y $\xi \notin *B$	(e) Def de *
(g) $\xi \in *A - *B$	(f) Alg

(2) $\forall\xi$, si $\xi \in *A - *B$ ent $\xi \in *(A - B)$:

Demostración anterior, invirtiendo los pasos.

Otras propiedades:

$*\varnothing = \varnothing$: Porque $*\varnothing = *(A - A) = *A - *A$

$*X = X^I$:

(1) $\forall\xi$, si $\xi \in *X$ ent $\xi \in X^I$:

(a) $\xi \in *X$	Hpt
(b) $\xi \in X^I$ y $\dot{\forall} i,\ \xi(i) \in X$	(a) Def de *
(c) $\xi \in X^I$	(b) Desc

(2) $\forall\xi$, si $\xi \in X^I$ ent $\xi \in *X$:

(a) $\xi \in X^I$	Hpt
(b) $\forall i \in I,\ \xi(i) \in X$	(a) Def de X^I
(c) $\dot{\forall} i,\ \xi(i) \in X$	(b) Desc
(d) $\xi \in *X$	(c) Def de *

(3) $*X = X^I$ (1)(2) Alg

La operación *, es monótona:

<u>Si</u> $D \subset E$ <u>entonces</u> $*D \subset *E$:

Demostración:

(1) $D \subset E$	Hpt
(2) $\forall\xi$, si $\xi \in *D$ ent $\xi \in *E$:	

(a) $\xi \in *D$	Hpt
(b) $\dot{\forall} i,\ \xi(i) \in D$	(a) Def de *
(c) $\forall i$, si $\xi(i) \in D$ ent $\xi(i) \in E$	(1) Alg
(d) $\dot{\forall} i$, si $\xi(i) \in D$ ent $\xi(i) \in E$	(c) Desc
(e) $\dot{\forall} i,\ \xi(i) \in E$	(b)Por(d)
(f) $\xi \in *E$	(e) Def de *

(3) $*D \subset *E$ (2) Alg

3.2 OPERACION ( )x

Dados R$\subset X^2$ y $x \in X$, se define
Rx = $\{y : (x, y) \in$ R$\}$. — Def de Rx

Dado $x \in X$, se define $\bar{x}$ tal que $\bar{x} \in X^I$ y, $\forall i \in$ I, $\bar{x}(i) = x$ — Def de $\bar{x}$

<u>TEOREMA 1</u>

<u>Si</u> R$\subset X^2$ <u>y</u> $x \in X$ <u>entonces</u> *(Rx) = (*R)$\bar{x}$:

Demostración:

(1) R$\subset X^2$	
(2) $x \in X$	Hpt
(3) $\forall \eta$, si $\eta \in$ *(Rx) ent $\eta \in$ (*R)$\bar{x}$:	
(a) $\eta \in$ *(Rx)	Hpt
(b) $\dot\forall i$, $\eta(i) \in$ Rx	(a) Def de *
(c) $\eta(i) \in$ Rx ssi $(x, \eta(i)) \in$ R	Def de Rx
(d) $\dot\forall i$, $(x, \eta(i)) \in$ R	(b)Por(c)
(e) $\forall i \in$ I, $\bar{x}(i) = x$	(2) Def de $\bar{x}$
(f) $\dot\forall i$, $(\bar{x}(i), \eta(i)) \in$ R	(d)Por(e)
(g) $\dot\forall i$, $(\bar{x}, \eta)(i) \in$ R	(f) Def
(h) $(\bar{x}, \eta) \in$ *R	(g) Def de *
(i) $\eta \in$ (*R)$\bar{x}$	(h) Def ( )$\bar{x}$
(4) $\forall \eta$, si $\eta \in$ (*R)$\bar{x}$ ent $\eta \in$ *(Rx):	
(a) $\eta \in$ (*R)$\bar{x}$	Hpt
(b) $(\bar{x}, \eta) \in$ *R	(a) Def de ( )$\bar{x}$
(c) $\dot\forall i$, $(\bar{x}, \eta)(i) \in$ R	(b) Def de *
(d) $\dot\forall i$, $(\bar{x}(i), \eta(i)) \in$ R	(c) Def
(e) $\forall i \in$ I, $\bar{x}(i) = x$	(2) Def de $\bar{x}$
(f) $\dot\forall i$, $(x, \eta(i)) \in$ R	(d)Por(e)
(g) $(x, \eta(i)) \in$ R ssi $\eta(i) \in$ Rx	Def de Rx
(h) $\dot\forall i$, $\eta(i) \in$ Rx	(f)Por(g)
(i) $\eta \in$ *(Rx)	(h) Def de *
(5) *(Rx) = (*R)$\bar{x}$	(3)(4) Alg

Dados $\xi, \eta \in X^1$,
$\xi \doteq \eta$ si, y sólo si, $\dot{\forall} i \ \xi(i) = \eta(i)$. Del de $\doteq$

$\doteq$ se lee " casi igual ".

<u>Si</u> R <u>es</u> <u>función</u> <u>entonces</u> *R <u>es</u> <u>función</u>:

(1) R es función	Hpt
(2) $\forall x, y, y'$, si $(x, y) \in R$ y $(x, y') \in R$ ent $y = y'$	(1) Def de función
(3) $\forall \xi, \eta, \eta'$, si $(\xi, \eta) \in {}^*R$ y $(\xi, \eta') \in {}^*R$ ent $\eta \doteq \eta'$:	
(a) $(\xi, \eta) \in {}^*R$	Hpt
(b) $\dot{\forall} i$, $(\xi, \eta)(i) \in R$	(a) Def de *
(c) $\dot{\forall} i$, $(\xi(i), \eta(i)) \in R$	(b) Def
(d) $(\xi, \eta') \in {}^*R$	Hpt
(e) $\dot{\forall} i$, $(\xi, \eta)(i) \in R$	(d) Def de *
(f) $\dot{\forall} i$, $(\xi(i), \eta'(i)) \in R$	(e) Def
(g) $\dot{\forall} i$, $(\xi(i), \eta(i)) \in R$ y $(\xi(i), \eta'(i)) \in R$	(c)(f) Dist
(h) $\dot{\forall} i$, $\eta(i) = \eta'(i)$	(g)Por(2)
(i) $\eta \doteq \eta'$	(h) Def de $\doteq$

El igual en X^1 es diferente al igual que conocemos. Es decir en X^1, dos objetos son iguales si son casi iguales, en símbolo ($\doteq$).

El paso de (2) a (3) se llama <u>transferencia</u>. Es parte de otro principio que utiliza Robinson en su análisis.

3.3 FUNCIÓN t

Dom $t = X^1$	
Dada $\xi \in X^1$, $t(\xi) = \{ E : E \subset X$ y $\xi \in {}^*E \}$	Def de t

TEOREMA 2

Para todo $\xi \in X^1$, $t(\xi)$ es ultrafiltro de X:

Demostración:

(1) $\xi \in X^1$	Hpt
(2) $\forall E$, $E \in t(\xi)$ ssi $E \subset X$ y $\xi \in {}^*E$	(1) Def de t
(3) $X \in t(\xi)$:	
(a) $X \in t(\xi)$ ssi $X \subset X$ y $\xi \in {}^*X$	(2) Desc
(b) $X \subset X$	Alg
(c) $\xi \in {}^*X$	(1) Porque $X^1 = {}^*X$
(d) $X \subset X$ y $\xi \in {}^*X$	(b)(c) Desc
(e) $X \in t(\xi)$	(d)Por(a)
(4) $\varnothing \notin t(\xi)$:	
(a) $\varnothing \in t(\xi)$	Neg
(b) $\varnothing \subset X$	
(c) $\xi \in {}^*\varnothing$	(a) Def de t
(d) $\xi \in \varnothing$	(c) Porque ${}^*\varnothing = \varnothing$
•(e) $\exists x$ tlq $x \in \varnothing$	(d) Desc
•(f) No $\exists x$ tlq $x \in \varnothing$	Def de $\varnothing$
(5) Si $E, F \in t(\xi)$ ent $E \cap F \in t(\xi)$:	
(a) $E \in t(\xi)$	Hpt
(b) $E \subset X$	
(c) $\xi \in {}^*E$	(a) Def de t
(d) $F \in t(\xi)$	Hpt
(e) $F \subset X$	
(f) $\xi \in {}^*F$	(d) Def de t
(g) $E \cap F \subset X$	(b)(e) Alg
(h) $\xi \in {}^*E \cap {}^*F$	(c)(f) Alg
(i) $\xi \in {}^*(E \cap F)$	(h) Porque ${}^*E \cap {}^*F = {}^*(E \cap F)$
(j) $E \cap F \in t(\xi)$	(g)(i) Def de t

(6) Si $E \in t(\xi)$ y $E \subset E' \subset X$ ent $E' \in t(\xi)$:

(a) $E \in t(\xi)$	Hpt
(b) $E \subset X$	
(c) $\xi \in {}^*E$	(a) Def de t
(d) $E \subset E'$	
(e) $E' \subset X$	Hpt
(f) ${}^*E \subset {}^*E'$	(d) Dem
(g) $\xi \in {}^*E'$	(c)(f) Alg
(h) $E' \in t(\xi)$	(e)(g) Def de t

(7) $\forall E \subset X$, $E \in t(\xi)$ o $X - E \in t(\xi)$:

(a) $E \subset X$	Hpt
(b) $X - E \subset X$	Alg
(c) $E \cup (X - E) = X$	(a) Alg
(d) ${}^*E \cup {}^*(X - E) = {}^*X$	(c) Dem
(e) ${}^*E \cup {}^*(X - E) = X^I$	(d)Porque ${}^*X = X^I$
(f) $\xi \in {}^*E$ o $\xi \in {}^*(X - E)$	(e)(1) Alg
(g) Si $\xi \in {}^*E$ ent $E \in t(\xi)$	(a) Def de t
(h) Si $\xi \in {}^*(X - E)$ ent $X - E \in t(\xi)$	(b) Def de t
(i) $E \in t(\xi)$ o $X - E \in t(\xi)$	(f)(g)(h) Por casos

(8) $t(\xi)$ es ultrafiltro de X	(3)(4)(5)(6)(7) Def de ultraf

3.4 CONCURRENCIA

R es <u>*concurrente en*</u> X si, y sólo si, $R \subset X^2$
y, $\forall E \subset X$, finito, $\exists y \in X$ tal que, $\forall x \in E$, $(x, y) \in R$.

u(X) = conjunto de los ultrafiltros de X. Def de u(X)

<u>TEOREMA 3</u>
<u>Si</u> $t : X^I \to u(X)$ <u>es suprayectiva entonces, para todo</u> R <u>concurrente en</u> X, <u>existe</u> $\eta \in X^I$ <u>tal que, para todo</u> $x \in X$, $(\bar{x}, \eta) \in {}^*R$:

Demostración:

(1) $t : X^I \to u(X)$ es suprayectiva	
(2) R es concurrente en X	Hpt
(3) $R \subset X^2$	
(4) $\forall E \subset X$, finito, $\exists y \in X$ tlq, $\forall x \in E$, $(x, y) \in R$	(2) Def
(5) $\exists \eta \in X^I$ tlq, $\forall x \in X$, $(\bar{x}, \eta) \in {}^*R$:	
(a) $\forall x \in X$, $Rx = \{y : (x, y) \in R\}$	Def de Rx
(b) $\boldsymbol{B} = \{Rx : x \in X\}$	Def de $\boldsymbol{B}$
(c) $\boldsymbol{B}$ es no vacío	(a) Porque $X \neq \varnothing$
(d) $\forall E$, si $E \in \boldsymbol{B}$ ent $E \subset X$	(a)(b) Alg
(e) $\forall E_1, \ldots, E_n \in \boldsymbol{B}$, $E_1 \cap \ldots \cap E_n \neq \varnothing$:	
(e_1) $E_1, \ldots, E_n \in \boldsymbol{B}$	Hpt
(e_2) $E_1 = Rx_1, \ldots, E_n = Rx_n$	
(e_3) $x_1, \ldots, x_n \in X$	(e_1) Def de $x_1, \ldots, x_n$
(e_4) $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$	(e_3) Alg
(e_5) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es finito	Conocido
(e_6) $\exists y$ tlq $y \in X$ y $(x_1, y) \in R, \ldots, (x_n, y) \in R$	(e_4)(e_5)Por(4)
(e_7) $y \in X$	
(e_8) $(x_1, y) \in R, \ldots, (x_n, y) \in R$	(e_6) Def de y
(e_9) $y \in Rx_1, \ldots, y \in Rx_n$	(e_8) Def de Rx
(e_{10}) $y \in Rx_1 \cap \ldots \cap Rx_n$	(e_9) Alg
(e_{11}) $y \in E_1 \cap \ldots \cap E_n$	(e_{10})(e_2) Def de =
(e_{12}) $E_1 \cap \ldots \cap E_n \neq \varnothing$	(e_{11}) Alg
(f) $\boldsymbol{B}$ es base de filtro de X	(c)(d)(e) Def de base
(g) $\exists \boldsymbol{D}$ tlq $\boldsymbol{D}$ es ultraf de X y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{D}$	(f) Dem
(h) $\boldsymbol{D}$ es ultrafiltro de X	

(j) $\boldsymbol{D} \in \mathrm{u}(X)$	(h) Def de $\mathrm{u}(X)$
(k) $\exists \xi \in X^{I}$ tlq $\mathrm{t}(\xi) = \boldsymbol{D}$	(j)Por(1)
(l) $\eta \in X^{I}$	
(m) $\mathrm{t}(\eta) = \boldsymbol{D}$	(k) Def de η
(n) $\forall x \in X,\ (\bar{x}, \eta) \in {}^*\mathrm{R}$:	
(n_1) $x \in X$	Hpt
(n_2) $\mathrm{R}x \in \boldsymbol{B}$	(n_1) Def de $\boldsymbol{B}$
(n_3) $\mathrm{R}x \in \boldsymbol{D}$	(n_2)(i) Alg
(n_4) $\mathrm{R}x \in \mathrm{t}(\eta)$	(n_3)(m) Def de =
(n_5) $\eta \in {}^*(\mathrm{R}x)$	(n_4) Def de t
(n_6) ${}^*(\mathrm{R}x) = ({}^*\mathrm{R})\bar{x}$	Teorema 1
(n_7) $\eta \in ({}^*\mathrm{R})\bar{x}$	(n_5)(n_6) Def de =
(n_8) $(\bar{x}, \eta) \in {}^*\mathrm{R}$	(n_7) Def de $(\ )\bar{x}$
(o) $\eta \in X^{I}$ y $\forall x \in X,\ (\bar{x}, \eta) \in {}^*\mathrm{R}$	(l)(n) Desc

3.5 SATURACIÓN

TEOREMA 4

Dado X, existe I, tal que $t : X^{I} \to u(X)$ es suprayectiva :

Demostración:

(1) $I = \{ i : i$ es finito e $i \subset P(x) \}$ — Def de I

(2) $\forall E \subset X,\ h(E) = \{ i \in I : E \in i \}$ — Def de $h(E)$

(3) $\boldsymbol{B} = \{ h(E) : E \subset X \}$ — Def de $\boldsymbol{B}$

(4) $\boldsymbol{B}$ es no vacío — (3) Porque $h(X) \in \boldsymbol{B}$

(5) Todo elm de $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de I — (3)(2) Alg

(6) Si $Y_1, \ldots, Y_n \in \boldsymbol{B}$ ent $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \neq \varnothing$:

- (a) $Y_1, \ldots, Y_n \in \boldsymbol{B}$ — Hpt
- (b) $Y_1 = h(E_1), \ldots, Y_n = h(E_n)$ — (a) Def de $E_1, \ldots, E_n$
- (c) $E_1, \ldots, E_n \subset X$ — (c) Def de I
- (d) $\{ E_1, \ldots, E_n \} \in I$ — Alg
- (e) $E_1, \ldots, E_n \in \{ E_1, \ldots, E_n \}$ — (c)(d)(e) Def de h
- (f) $\{E_1, \ldots, E_n\} \in h(E_1), \ldots, h(E_n)$ — (f) Alg
- (g) $\{ E_1, \ldots, E_n \} \in h(E_1) \cap \ldots \cap h(E_n)$ — (g)(b) Def de =
- (h) $\{ E_1, \ldots, E_n \} \in Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$ — (h) Alg
- (i) $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \neq \varnothing$

(7) $\boldsymbol{B}$ es base de filtro de I — (4)(5)(6) Def de base

(8) $\exists \boldsymbol{F}$ tlq $\boldsymbol{F}$ es ultraf de I y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{F}$ — (7) Dem

(9) $\boldsymbol{F}$ es ultraf de I

(10) $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{F}$ — (8) Def de $\boldsymbol{F}$

(11) $t: X^{I} \to u(X)$ es suprayectiva:

- (a) t va de X^{I} a $u(X)$ — Dem
- (b) $\forall \boldsymbol{D} \in u(X),\ \exists \xi \in X^{I}$ tlq $t(\xi) = \boldsymbol{D}$:
  - (b_1) $\boldsymbol{D} \in u(X)$ — Hpt
  - (b_2) $\boldsymbol{D}$ es ultraf de X — (b_1) Def de $u(X)$
  - (b_3) $\forall i \in I,\ A_i = \bigcap \{ E \in i : E \in \boldsymbol{D} \}$ — Def de A_i
  - (b_4) $\forall i \in I,\ A_i \in \boldsymbol{D}$ — (b_3) Porque A_i es intersección finita de elms de $\boldsymbol{D}$
  - (b_5) $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$ — (b_4)Porque $\boldsymbol{D}$ es filtro

(b_6) $\exists\xi\in X^I$ tlq $t(\xi) = \boldsymbol{D}$:

(α) $\exists\xi$ tlq $\mathrm{Dom}\xi = I$ y $\forall i\in I$, $\xi(i)\in A_i$	(b_5) Ax de elección
(β) $\mathrm{Dom}\xi = I$	
(γ) $\forall i\in I$, $\xi(i)\in A_i$	(α) Def de ξ
(δ) $\forall i\in I$, $\xi(i)\in X$	(γ)Porque $A_i\subset X$
(ε) $\xi\in X^I$	(β)(δ) Def de X^I
(ζ) $t(\xi) = \boldsymbol{D}$:	

(ζ_1) $\forall E$, si $E\in\boldsymbol{D}$ ent $E\in t(\xi)$:

(A) $E\in\boldsymbol{D}$	Hpt
(B) $E\in t(\xi)$ ssi $E\subset X$ y $\xi\in{}^*E$	Def de t
(C) $E\subset X$	(A) Porque $\boldsymbol{D}$ es filtro de X
(D) $\xi\in{}^*E$ ssi $\dot{\forall} i$, $\xi(i)\in E$	Def de *
(E) $\dot{\forall} i$, $\xi(i)\in E$ ssi $\exists U$ tlq $U\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i\in U$, $\xi(i)\in E$	Def de $\dot{\forall}$
(F) $h(E)\in\boldsymbol{F}$	Porque $h(E)\in\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{F}$
(G) $\forall i\in h(E)$, $\xi(i)\in E$:	

(G_1) $i\in h(E)$	Hpt
(G_2) $i\in I$	
(G_3) $E\in i$	(G_1) Def de $h(E)$
(G_4) $A_i\subset E$	(G_3)(A) Def de A_i
(G_5) $\xi(i)\in A_i$	(G_2)Por(γ)
(G_6) $\xi(i)\in E$	(G_5)(G_4) Alg

(H) $\exists U$ tlq $U\in\boldsymbol{F}$ y $\forall i\in U$, $\xi(i)\in E$	(F)(G) Desc
(I) $\dot{\forall} i$, $\xi(i)\in E$	(H)Por(E)
(J) $\xi\in{}^*E$	(I)Por(D)
(K) $E\subset X$ y $\xi\in{}^*E$	(C)(J) Desc
(L) $E\in t(\xi)$	(K)Por(B)

(ζ_2) $\boldsymbol{D}\subset t(\xi)$	(ζ_1) Alg
(ζ_3) $\boldsymbol{D} = t(\xi)$	(ζ_2) Porque $\boldsymbol{D}$ es max

(η) $\exists\xi\in X^I$ tlq $t(\xi) = \boldsymbol{D}$	(ε)(ζ) Desc

<u>COROLARIO</u> : (*Principio de concurrencia*).

$\forall R$ <u>concurrente</u> <u>en</u> X, $\exists\eta\in X^I$ <u>tlq</u>, $\forall x\in X$, $(\bar{x}, \eta)\in{}^*R$: Por teoremas 3 y 4.

El esquema deductivo no es una teoría, es simplemente una forma de trabajar en matemáticas. El esquema se preocupa por dar una presentación clara a las cosas, y por tratar de poner al alcance de más personas la posibilidad tanto de explicar como de leer una demostración.
El esquema se puede aplicar en muchas áreas de las matemáticas: Teoría de conjuntos, Álgebra, Geometría, Análisis, etc. Sólo hay que buscar la forma adecuada para poder aplicarlo, ya que en muchas ocaciones será necesario cambiar la forma que debe tomar ciertas definiciones con el fin de poder utilizar el esquema.

Por ejemplo:

Dada $\xi \in X^{I}$,
$t(\xi) := \{ E : E \subset X \text{ y } \xi \in {}^{*}E \}$.

Esta definición conviene escribirlo de la forma:

$E \in t(\xi)$ ssi $E \subset X$ y $\xi \in {}^{*}E$.

Esta última definición se adecua más al esquema.

En el presente trabajo, el esquema deductivo se aplica a filtros y a la teoría de Nelson.

El uso del esquema ofrece una solución eficaz a muchos problemas de demostración, gracias a la puntual descripción de los patrones de inferencia que se le siguen en las demostraciones. Es importante considerar el esquema deductivo para aprender a analizar y ordenar las ideas, a fin de garantizar un mayor éxito en matemáticas y en otras disciplinas abstractas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Halmos, Paul;
Teoría intuitiva de los conjuntos,
Continental, México, 1965.

[2] J. L. Kelley;
General topology,
Van Nostrand, N. York, 1955.

[3] Nelson, Edward;
Internal Set Theory: A new approach to nonstandard analysis,
American Mathematical Society,
1997, pp. 1192-1195.

[4] Sélem A. Elías;
XXIX *congreso nacional de la S.M.M.*: *Aportaciones matemáticas*,
serie comunicaciones 20, 1997, pp. 13-24.

[5] Zubieta R. Gonzalo;
Notas de clase,
Sin publicar.

[6] Zubieta R. Gonzalo;
Taller de lógica matemática,
Mc Graw-Hill, 1992.