

157



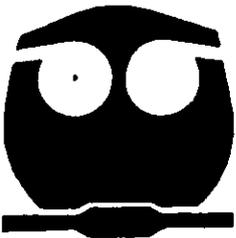
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

MATEMATICAS APLICADAS: LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN QUIMICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE: INGENIERO QUIMICO PRESENTA: RAMON CARLOS TORRES ENRIQUEZ



MEXICO, D.F.

277074



EXAMENES PROFESIONALES FACULTAD DE QUIMICA

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Jurado asignado:**

Presidente           **Prof. RUBEN DANIEL COELLO RAMIREZ**

Vocal               **Prof. MANUEL JESUS AGUILAR GOMEZ**

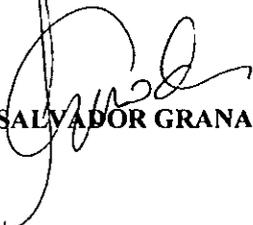
Secretario         **Prof. AMADO SALVADOR GRANADOS AGUILAR**

1<sup>er</sup> suplente       **Prof. JOSE MARTIN PANTING MAGAÑA**

2<sup>do</sup> suplente      **Prof. MARVIN RAUL RIVERA CASTRO**

La presente tesis se desarrolló en el Departamento de Matemáticas de la  
Facultad de Química, UNAM. Edificio "C"

Asesor del Tema:

  
Prof. AMADO SALVADOR GRANADOS AGUILAR

Sustentante:

  
RAMON CARLOS TORRES ENRIQUEZ

Agradezco

A mis padres, por ser el ejemplo de Perseverancia y Superación.

A mi hermano con el que crecí compartiendo experiencias y anhelos.

A mi familia que siempre es tan cariñosa y atenta.

A mis amigos y compañeros gracias por compartir mas allá de las aulas

A Tania...

A mi Universidad y la Facultad de Química, por formarme como profesionalista.

A mi jurado, Prof RUBEN DANIEL COELLO RAMIREZ, Prof MANUEL JESUS AGUILAR GOMEZ, y muy especialmente al Prof. AMADO SALVADOR GRANADOS AGUILAR

## Contenido

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>MÉTODOS ANALÍTICOS</b> .....	<b>2</b>
<b>ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN</b> .....	<b>2</b>
<i>Clasificación de Ecuaciones Diferenciales</i> .....	2
<i>Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden</i> .....	3
Ecuaciones Diferenciales de primer orden con variables separables .....	3
Ecuaciones Diferenciales exactas.....	3
Ecuaciones Diferenciales homogéneas.....	4
Ecuaciones Diferenciales lineales .....	5
Tipos especiales de Ecuaciones Diferenciales de primer orden .....	6
Ecuación de Bernoulli.....	6
Ecuación de Riccati .....	6
Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden del tipo de factores integrantes .....	7
Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden de grado mayor que uno .....	8
Primer Método:.....	8
Segundo Método:.....	9
Tercer Método: .....	10
Problema I: Eficiencia de plato en una columna de destilación .....	11
Solución al Problema I.....	12
Nomenclatura del Problema I: .....	14
Problema II Calentamiento en un tanque agitado.....	16
Solución al Problema II .....	17
Nomenclatura del Problema II:.....	19
Problema III: Calentamiento de un líquido en un tanque agitado, con nivel variable.....	20
Solución al Problema III .....	20
Nomenclatura del Problema III:.....	22
Problema IV: Flujo en canales abiertos .....	23
Desarrollo de la Ecuación Diferencial .....	23
Solución de la Ecuación Diferencial.....	25
Cálculo de los perfiles de la superficie .....	27
Los cuatro regímenes del flujo en canales abiertos.....	29
Desarrollo de la Ecuación Diferencial para canales horizontales .....	29
Nomenclatura del Problema IV: .....	31
Problema V: Cálculo de las trayectorias de partículas .....	32
Desarrollo de la Ecuación Diferencial .....	32
Solución de la Ecuación Diferencial.....	34
Cálculo de las trayectorias de las partículas en la región turbulenta .....	35
Trayectorias calculadas para velocidades en la región de la ley de Stokes.....	36
Nomenclatura del Problema V:.....	38

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR .....	40
<i>Propiedades generales de las Ecuaciones Diferenciales lineales</i> .....	40
<i>Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes</i> .....	41
Determinación de la solución complementaria .....	41
Ejemplo: .....	43
Determinación de la Integral particular .....	43
Ejemplo: .....	44
Propiedades de las funciones hiperbólicas .....	45
Relación de funciones circulares .....	45
Identidades Fundamentales .....	46
Problema VI: Conducción de calor .....	47
Solución al problema de conducción de calor .....	49
Nomenclatura del Problema VI: .....	52
Problemas propuestos .....	53
Problema VII: Torre empacada con absorción y reacción química simultánea .....	53
Problema VIII: Estabilidad mecánica para un sistema de control automático .....	54
Problema IX: Medición de las fluctuaciones de Presión en Manómetro tipo U .....	54
<i>Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes variables</i> .....	55
Ecuación lineal de Cauchy .....	55
Ejemplo: .....	56
Ecuación lineal Exacta .....	56
Ejemplo: .....	57
Reducción de orden .....	58
Ejemplo: .....	58
Integración de Ecuaciones Diferenciales en series .....	59
Ilustración del método: .....	61
Problema X: Solución de la ecuación de Bessel .....	64
<i>Transformadas de Laplace</i> .....	65
Ejemplo: .....	66
Solución de problemas con valores iniciales .....	68
Ejemplo: .....	68
La integral de convolución .....	69
Ejemplo: .....	69

<b>MÉTODOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>70</b>
INTRODUCCIÓN .....	70
PROBLEMAS GENÉRICOS .....	70
PROBLEMAS DE VALOR INICIAL (PVI'S) .....	71
<i>PVI's de Primer orden</i> .....	71
Problema XI: Conversión de Sacarosa a Glucosa en un reactor agitado .....	71
Método de series de Taylor .....	73
Método de Euler .....	74
Método de Runge-Kutta .....	76
Método de Runge-Kutta-Fehlberg .....	80
Nomenclatura del Problema XI: .....	81
<i>Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias</i> .....	82
Algoritmo de sistemas de Primer Orden .....	83
<i>Ecuaciones de Orden Superior</i> .....	83
<i>Resumen de PVI's</i> .....	84
PROBLEMAS CON VALOR A LA FRONTERA (PVF'S) .....	85
Problema XII: Generación de calor en una resistencia eléctrica .....	86
Método de Disparo .....	87
Nomenclatura del Problema XII: .....	91
MÉTODO DE COLOCACIÓN ORTOGONAL .....	92
<i>Colocación interior</i> .....	93
<i>Sistemas geométricos simétricos</i> .....	94
<i>Reducción de la forma diferencial</i> .....	95
Forma reducida de la primera derivada .....	96
Forma reducida de la segunda derivada .....	97
Obtención de los factores de peso $W$ .....	98
<i>Procedimientos de cálculo para los polinomios de Jacobi</i> .....	99
Problema XIII: Flujo en un conducto circular .....	103
Solución: .....	103
Desarrollo para un punto de colocación interior .....	104
Desarrollo para dos puntos de colocación interior .....	105
Problema XIV: Flujo en un conducto cuadrado .....	107
Solución: .....	107
Desarrollo para un punto de colocación interior .....	108
Desarrollo para dos puntos de colocación interior .....	110
Problema XV: Flujo radial en un material poroso .....	112
Solución: .....	113
<b>CONCLUSIONES: .....</b>	<b>116</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA: .....</b>	<b>117</b>

## Índice de Figuras y Tablas

Figura 1	Diagrama de una columna de destilación.....	11
Figura 2	Relación <i>eficiencia de Murphree</i> vs Eficiencia global.....	14
Figura 3	Relación adimensional de la Temperatura vs Tiempo de llenado.....	21
Figura 4	Gráfica de la solución de la integral de $f(\eta)$ .....	26
Figura 5	Gráfica de perfiles del flujo.....	28
Figura 6	Diagrama de fuerza para la trayectoria de una Partícula.....	33
Figura 7	Trayectorias de Partículas (Resistencia del fluido según ley de Stokes).....	37
Figura 8	Gráfica de funciones hiperbólicas.....	42
Figura 9	Diagrama del Termopozo, Termopar.....	47
Tabla 10	Transformadas de Laplace.....	67
Figura 11	Conversión de Sacarosa a Glucosa en un reactor bien agitado.....	72
Tabla 12	Solución del ejemplo con el método de Euler.....	75
Figura 13	Solución del ejemplo con el método de Euler.....	76
Tabla 14	Cálculos para el método de Runge-Kutta de 4º orden.....	79
Tabla 15	Solución del ejemplo con el método de Runge-Kutta 4º orden.....	79
Tabla 16	Solución del ejemplo con el método Runge-Kutta-Fehlberg.....	81
Figura 17	Ejemplo de un problema con valores a la frontera.....	86
Tabla 18	Solución del problema con valores a la frontera.....	89
Figura 19	Perfil de temperatura en un alambre anular.....	90
Figura 20	Sistemas geométricos simétricos.....	93
Figura 21	Perfil característico de la coordenada independiente.....	94
Tabla 22	Términos de los polinomios de Jacobi.....	100
Tabla 23	Geometría rectangular ( $a = 1$ ).....	102
Tabla 24	Geometría cilíndrica ( $a = 2$ ).....	102
Tabla 25	Geometría esférica ( $a = 3$ ).....	102
Figura 26	Perfil de Velocidad de un fluido Newtoniano.....	103
Figura 27	Localización de un punto de colocación (0.557) interior.....	104
Figura 28	Perfil de velocidades utilizando un punto de colocación.....	105
Figura 29	Localización de dos puntos de colocación interior.....	105
Figura 30	Perfil de velocidad utilizando dos puntos de colocación.....	106
Figura 31	Dimensiones de un conductor cuadrado.....	107
Figura 32	Cuadrante de solución para el conductor rectangular.....	108
Figura 33	Localización de un punto de colocación (0.4472) interior.....	109
Figura 34	Plano de solución con un punto de colocación (0.4472) interior.....	109
Figura 35	Perfil de velocidad utilizando un punto de colocación.....	110
Figura 36	Localización de dos puntos de colocación interior.....	110
Figura 37	Plano de solución de dos puntos de colocación interior.....	111
Figura 38	Distribución radial de lechada en un estrato poroso.....	112

## Introducción

Este trabajo tiene como objetivo el ser un texto de apoyo de la materia de ecuaciones diferenciales, buscando que el alumno encuentre las bases teóricas del curso impartido en la facultad de química, según el temario del curso. Lo que este documento intenta es crear un libro de ejercicios y teoría con problemas relacionados con la química.

Con este documento queremos sentar el precedente para la continua revisión y corrección de este trabajo que tiene como fin el de mejorar las condiciones de cátedra en la facultad de química, y en particular de la materia de ecuaciones diferenciales, que tenemos la esperanza de que sea una ayuda para vencer las dificultades de los estudiantes para resolver problemas de ecuaciones diferenciales dentro de las diferentes carreras que se imparten en la Facultad.

Al proponer y presentar diferentes formas para resolver problemas con ecuaciones diferenciales, que tienen que ver con química esperamos que el alumno desarrolle estrategias útiles que pueda aplicar en problemas que enfrente en su futuro, y que al mismo tiempo estos problemas al ser de índole química despierten el interés del alumno y la facilidad para aprender y aplicar ecuaciones diferenciales.

# Métodos Analíticos

## Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

### Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación que tiene una derivada por ejemplo:  $\frac{dy}{dx} + y = x$  es conocida como una ecuación diferencial. La derivada  $\frac{dy}{dx}$  se dice que es de primer orden por ser la primera derivada.

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

El grado de una ecuación diferencial se refiere al grado de la derivada de mayor orden dentro de la ecuación, después de que ha sido racionalizada. La siguiente es una ecuación diferencial de segundo orden y de segundo grado  $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx}$

Un tercer punto que se necesita definir es cuando una ecuación tiene la clasificación de parcial u ordinaria. Si una ecuación tiene más de una variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial parcial con respecto a las variables independientes, en el caso de que solo tenga una variable independiente se dice que es ordinaria.

Por ejemplo  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$  es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y de primer grado.

Por ultimo la ecuación se clasificará según su linealidad. Cuando en una ecuación diferencial ordinaria o parcial, la variable dependiente y sus derivadas ocurren en el primer grado, y no en mayores grados o en productos, se dice que la ecuación es lineal. El coeficiente de una ecuación lineal puede ser una constante o una función con variable(s) independiente(s).

Ejemplos :

La ecuación  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3$  es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal.

La ecuación  $yy' + \frac{1}{x}y = 1$  es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal.

Es importante que antes de iniciar la solución de alguna ecuación diferencial se conozca su orden, grado, número de variables independientes y su linealidad. En general la solución de ecuaciones diferenciales no lineales es más difícil que la de las lineales.

## Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden

El problema de resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden es fundamentalmente la integración. Consiste en encontrar la expresión más general que cuando sea derivada nos resulte en la ecuación diferencial. Mucho del trabajo al buscar una solución es el método y técnicas necesarias para arreglar o transformar a partir de la ecuación diferencial a la integral óptima. En algunos casos el conocimiento de la situación física que es representada por la ecuación diferencial nos permite hacer sustituciones o transformaciones, que facilitan notablemente la solución de la ecuación diferencial.

Los matemáticos han estudiado muchos tipos de ecuaciones diferenciales, y sus soluciones que han sido clasificadas. El siguiente es un pequeño resumen de las más importantes ecuaciones diferenciales de primer orden que han sido estudiadas, junto con su método de solución.

## Ecuaciones Diferenciales de primer orden con variables separables

Una ecuación diferencial con variables separables es fácil de resolver, se necesita escribir la ecuación de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde  $M$  y  $N$  son funciones de  $x$  y  $y$ . En esta ecuación si las variables son separables, la ecuación se puede reducir a la siguiente expresión:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

El proceso que se realiza para obtener esta ecuación a partir de la anterior se denomina separación de variables y la última ecuación puede ser integrada de la siguiente manera:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

Donde  $C$  es una constante de integración.

## Ecuaciones Diferenciales exactas

Para entender lo que es una ecuación diferencial exacta, considere la siguiente ecuación.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

o su similar

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

donde

$$M(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y; \text{ y } N(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x$$

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación sea exacta es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces la solución  $\psi(x, y) = C$  se obtiene de la integración del primer término con respecto a  $x$ :

$$\psi(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y)$$

Donde  $h(y)$  es una constante de integración.

Ahora, dado que

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x = N(x, y)$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \int M(x, y) dx + h(y) \right] = N(x, y)$$

de modo que

$$h'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx$$

y

$$h(y) = \int N(x, y) dy - \iint \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx dy$$

por lo tanto

$$\psi(x, y) = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \iint \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx dy$$

## Ecuaciones Diferenciales homogéneas

Partiendo de la ecuación con la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Se entiende que la función  $f(x, y)$  es homogénea en  $x$  y  $y$  de grado  $n$  si el efecto de multiplicar cada variable por cualquier número  $t$  es igual que multiplicar la función por  $t^n$

$$f(xt, yt) = t^n f(x, y)$$

Por lo tanto una ecuación diferencial homogénea de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ se puede expresar como } \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si  $M$  y  $N$  son funciones homogéneas de  $x$  y  $y$  de el mismo grado  $n$ , entonces la ecuación diferencial homogénea puede ser transformada a una de ecuación diferencial de variables separables por la sustitución de  $y = vx$ , donde la ecuación tomara la forma :

$$\varphi(v) + \frac{dx}{x} = 0$$

Con las variables separadas, se puede proponer la integral y obtener la solución.

## Ecuaciones Diferenciales lineales

la ecuación diferencial lineal de primer orden es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

Donde  $P$  y  $Q$  son funciones de  $x$  solamente.

Escribiendo la que se denomina como la ecuación homogénea de la ecuación lineal tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0$$

Esta ecuación es de variables separables por lo que se reduce a:

$$\frac{dy}{y} + Pdx = 0$$

Donde sabemos que  $y = Ce^{-\int Pdx}$  y  $C$  es una constante de integración.

Si sustituimos  $y = ve^{-\int Pdx}$  en la ecuación lineal donde  $C$  ha sido sustituida por  $v$ , como función de  $x$ . Entonces tendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{dv}{dx} e^{-\int Pdx} = Q$$

Arreglando obtenemos:  $v = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$

entonces podemos expresar la solución general de una ecuación lineal de primer orden, de la siguiente manera:

$$y = e^{-\int Pdx} \left[ \int Qe^{\int Pdx} dx + C \right]$$

En la ecuación anterior  $C$  es una constante de integración, que nunca puede faltar en la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden. De esto se puede generalizar que la solución de cualquier ecuación diferencial de orden mayor  $n$  tendrá  $n$  constantes arbitrarias.

Es de gran importancia para la ingeniería química la correcta evaluación de las constantes, esto se debe a que sus valores junto con el método de evaluación, reflejarán las propiedades físicas del problema que se estudia. Por lo tanto el buen entendimiento del problema (propiedades, límites, etc.) resultará en el mejor desarrollo de una solución sencilla y útil, que representa el objetivo final de esta herramienta.

## Tipos especiales de Ecuaciones Diferenciales de primer orden

### Ecuación de Bernoulli

La ecuación  $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$  en donde  $P$  y  $Q$  son función solamente de  $x$ . Es una ecuación diferencial de primer orden conocida como la ecuación de Bernoulli. Esta ecuación se puede hacer lineal a través de un cambio de variables en donde se define a  $z$  como:

$$z = y^{1-n}$$

Sustituyendo  $z$  en la ecuación anterior, esta se transforma en una ecuación lineal del tipo:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q$$

la cual tiene una solución sencilla por ser lineal

### Ecuación de Riccati

Es otro tipo de ecuación no lineal de primer orden, que se generaliza de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0$$

Dentro de la expresión  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones de  $x$ . La ecuación anterior se puede reducir a una forma lineal cuando  $P = 0$ . Pero cuando  $P \neq 0$  la ecuación puede ser transformada en una lineal de segundo orden. Para lograrlo es necesario hacer la siguiente sustitución:

$$y = \frac{v}{P}$$

Lo que permite obtener la ecuación:

$$v' + v^2 + \left(Q - \frac{P'}{P}\right)v + PR = 0$$

definiendo a  $v$  como  $v = \frac{u'}{u}$  y sustituyéndola, obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma:

$$u'' + \left( Q - \frac{P'}{P} \right) u' + PRu = 0$$

La ecuación original de Riccati es de la forma:

$$y' + ay^2 = bx^n$$

En donde  $a$  y  $b$  son constantes. Esta ecuación con las correspondientes sustituciones tendrá la forma:

$$u'' - abx^n u = 0$$

Esta ecuación se resuelve por los métodos conducentes para ecuaciones de 2° orden.

## Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden del tipo de factores integrantes

En ocasiones es posible llegar a la solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, pero cuando éstas no pueden ser resueltas por los métodos anteriores, se tendrá que usar el método conocido como de Factores Integrantes. Este método se explica a continuación, a partir de la ecuación diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Un factor  $u(x, y)$ , si existe, al ser introducido, convertirá a la ecuación en exacta. Este factor es conocido como "Factor Integrante". En general el factor se debe proponer analizando la ecuación, y debe ser derivado desde la solución general; en muchos problemas de ingeniería la solución de la ecuación proviene de su análisis, y no es conocida de antemano.

No hay una regla general que se pueda citar que nos ayude a encontrar el factor integrante. Frecuentemente este puede ser propuesto por medio del análisis de los términos que aparecen en la ecuación. Este análisis generalmente requiere el arreglo y agrupación de los términos de la ecuación.

Es importante hacer notar que el factor integrante puede aplicarse a la Ecuación Diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

que si de tal forma multiplicamos la ecuación por  $e^{\int P dx}$  ésta puede convertirse en exacta y es integrada según el método de ecuaciones diferenciales exactas. Pero la selección del factor integrante en este caso no es tan sencilla.

Un arreglo común de términos es:

$$ydx - xdy$$

Analizando los términos anteriores nos damos cuenta que los siguientes factores integrantes pueden hacer esta ecuación exacta.

$$\frac{1}{x^2} : (ydx - xdy) = -d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y^2} : (ydx - xdy) = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{xy} : (ydx - xdy) = d \log\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)} : (ydx - xdy) = d \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -d \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{(x^2 - y^2)} : (ydx - xdy) = \frac{1}{2} d \log \frac{x-y}{x+y}$$

La ecuación:

$$(y^2 - x^2 y)dx + x^3 dy = 0$$

Puede ser escrita de la siguiente manera con solo reagrupar:

$$y^2 dx - x^2 (ydx - xdy) = 0$$

Donde  $\frac{1}{x^2 y^2}$  es un factor integrante, que al aplicarlo obtenemos:

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{(ydx - xdy)}{y^2} = 0$$

de donde se obtiene la siguiente solución:

$$x^2 + Cxy + y = 0$$

## Solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden de grado mayor que uno

El problema que corresponde a esta sección, es la solución de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$f(x, y, y') = 0$$

Donde  $f(x, y, y')$  es un polinomio de grado mayor que  $y'$ , y los coeficientes son racionales en  $x$  y  $y$ .

En la búsqueda de la solución para la ecuación anterior hay tres métodos que serán mostrados a continuación.

Primer Método:

Este método hace una distinción entre ecuaciones reducibles y no reducibles. La ecuación anterior será reducible solo si es factorizable, ya que cada término es racional en  $x$  y  $y$ . En el caso en que no sea factorizable, se dice que es no reducible.

Ejemplo:

a) Solución de una ecuación reducible:

$$(y')^2 + (x + y)y' + xy = 0$$

Los factores de esta ecuación son los siguientes:

$$(y' + x) = 0 \text{ y } (y' + y) = 0$$

Y sus soluciones son respectivamente:

$$2y + x^2 = C \text{ y } y = Ce^{-x}$$

Estas constituyen la solución general de la ecuación diferencial.

Otra forma de la solución general es:

$$(2y + x^2 - C)(y - Ce^{-x}) = 0$$

b) Solución de una ecuación no reducible:

$$y^2 + (y')^2 = 1$$

Esta ecuación es no reducible, pero puede ser cambiada por cualquiera de las dos ecuaciones siguientes:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \text{ y } y' = -\sqrt{1 - y^2}$$

La solución a la primera de estas es:

$$\text{sen}^{-1} y = x + C \text{ ó } y = \text{sen}(x + C)$$

Cualquiera de las dos formas es solución general de ecuación, la solución de la segunda ecuación es de la forma:

$$y = \text{cos}(x + K)$$

Que es la misma que  $y = \text{sen}(x + C)$  cuando  $K = \left(C - \frac{\pi}{2}\right)$

Segundo Método:

Resolver para  $y' = p$  consiste en una ayuda frecuentemente empleada para derivar con respecto a  $x$ , integrar y eliminar  $y'$  entre esta solución y la ecuación obtenida con la solución general. Entonces considerando la ecuación:

$$y = f(x, p)$$

Si resolvemos para  $y$ , y derivamos entonces obtendremos que:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} p'$$

La ecuación anterior puede ser integrada, para después eliminar  $p$  entre esta solución y  $f(x, y, p) = 0$  que nos dará la solución general.

Tercer Método:

Resolver para  $x$ , derivar con respecto a  $y$ , integrar y eliminar  $y'$  entre esta solución y la ecuación obtenida con la solución general. Este método es, en esencia, el mismo que el segundo método, en lo que difiere es que la solución es obtenida por medio de:

$$x = f(y, p)$$

Si diferenciamos con respecto a  $y$  para obtener:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Si integramos esta ecuación, entonces podremos obtener la solución general al eliminar  $p$  usando el resultado de la integral y la ecuación diferencial dada.

La solución general de ecuaciones diferenciales ordinarias de grado mayor que uno deben de tener tantas constantes arbitrarias, como grado tenga la ecuación diferencial.

## Problema I: Eficiencia de plato en una columna de destilación

Un factor importante en la determinación del número de platos requeridos para llevar a cabo la separación de una burbuja de vapor en una columna de destilación es la eficiencia de plato. En la estimación completa de un plato será necesario tomar en cuenta no solamente la eficiencia del contacto entre el líquido y el vapor en un punto del plato, sino también el efecto del cambio gradual en la composición del líquido en su flujo a través del plato. Todo el vapor que se genera desde el fondo no tiene contacto con líquido enriquecido; debido a que cuando el líquido empieza su descenso primero tiene contacto con vapor que ya fue generado, lo que hace variar la composición del líquido. En el momento en que se está construyendo el diagrama de McCabe-Thiele es necesario estar de acuerdo con la composición de vapor que abandona el plato relacionada con la composición de la pequeña fracción de vapor que se forma en el plato. Es deseable que se calcule la relación entre la eficiencia de un plato y la de toda la columna, así como la variación de la eficiencia total y la de cada plato con respecto a los flujos de vapor y líquido.

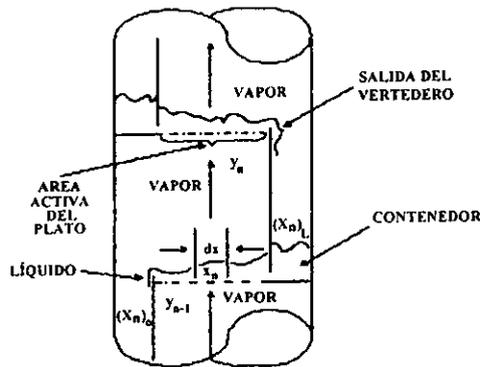


Figura 1 Diagrama de una columna de destilación

La figura anterior representa una sección a través de una columna de destilación donde el líquido fluye de izquierda a derecha, después cae al siguiente plato para continuar su viaje hacia la izquierda donde volverá a caer hasta el siguiente plato. Considere una sección del plato. El balance de materia para esta sección será:

$$(y_n - y_{n-1})dV = Ldx_n$$

Por conveniencia definimos que  $\frac{dV}{V} = dw$ , y también introducimos la relación de reflujo

$R = \frac{L}{V}$ , lo que nos permite obtener la siguiente ecuación:

$$y_n - y_{n-1} = R \frac{dx_n}{dw}$$

Considerando que en todo el intervalo de composiciones  $(X_n)_0$  y  $(X_n)_L$  el equilibrio entre líquido y vapor cumple con la ecuación:

$$y_n^* = mx_n + b$$

y estableciendo que:  $\frac{m}{R} = \frac{mV}{L} = \lambda$  se llega a la siguiente expresión:

$$(y_n - y_{n-1})\lambda = \frac{dy_n^*}{dw}$$

La relación del enriquecimiento del vapor con respecto al máximo enriquecimiento posible es conocida como *eficiencia de Murphree*

$$E = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_n^* - y_{n-1}}$$

despejando  $y_n^*$  y sustituyéndola en la ecuación anterior se llega a que:

$$(y_n - y_{n-1})\lambda = \frac{dy_n}{Edw} - \frac{(1-E)dy_{n-1}}{Edw}$$

En este problema se supone que el vapor que entra a cada plato se ha mezclado y su composición será constante, lo que significa que  $\frac{dy_{n-1}}{dw} = 0$  entonces la ecuación se reduce a la siguiente forma:

$$\frac{dy_n}{dw} - E\lambda y_n = -E\lambda y_{n-1}$$

Para obtener una solución numérica a partir de la ecuación diferencial anterior se requiere definir a  $E_n = \frac{(y_n)_{prum} - y_{n-1}}{(y_n^*)_0 - y_{n-1}}$  como la eficiencia global. Es necesario expresar el resultado construyendo una curva de  $E_0$  vs  $\lambda$  para una eficiencia de plato de  $E = 0.7$ . Cubriendo el intervalo de  $\lambda$  desde 0 a 2.

La composición de la mezcla del vapor que deja el plato se puede calcular a través de la siguiente ecuación:

$$(y_n)_{prum} = \int_0^L y_n dw$$

## Solución al Problema I

Analizando la ecuación  $\frac{dy_n}{dw} - E\lambda y_n = -E\lambda y_{n-1}$  nos damos cuenta de que es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ que tiene una solución del tipo } y = e^{-\int P dx} \left[ \int Q e^{\int P dx} dx + C \right].$$

Resolviendo para este caso tenemos que:

$$y_n = e^{\int E\lambda dw} \left[ \int -E\lambda y_{n-1} e^{-\int E\lambda dw} dw + C \right]$$

la cual, integrada y simplificada, resulta en:

$$y_n = y_{n-1} + C e^{E\lambda w}$$

Con el fin de conocer  $C$  es necesario aplicar las siguientes condiciones del problema, cuando  $w=0$ ,  $y_n = (y_n)_0$  entonces:

$$C = (y_n)_0 - y_{n-1}$$

Sustituyendo  $C$ , la solución será de la forma:

$$y_n = y_{n-1} + [(y_n)_0 - y_{n-1}] e^{E\lambda w}$$

para determinar  $(y_n)_{prom}$  se debe resolver:

$$(y_n)_{prom} = \int y_n dw = \int_0^1 \{ e^{E\lambda w} [(y_n)_0 - y_{n-1}] + y_{n-1} \} dw$$

Integrando y simplificando resulta:

$$(y_n)_{prom} = \frac{e^{E\lambda} - 1}{E\lambda} [(y_n)_0 - y_{n-1}] + y_{n-1}$$

sustituyendo en la fórmula de la eficiencia global obtenemos:

$$E_o = \frac{e^{E\lambda} - 1}{E\lambda} \frac{[(y_n)_0 - y_{n-1}] + y_{n-1} - y_{n-1}}{(y_n)_0 - y_{n-1}} = \frac{e^{E\lambda} - 1}{E\lambda} \left[ \frac{(y_n)_0 - y_{n-1}}{(y_n)_0 - y_{n-1}} \right]$$

si recordamos que:

$$E = \frac{(y_n)_0 - y_{n-1}}{(y_n)_0 - y_{n-1}}$$

entonces la ecuación se reduce a:

$$E_o = \frac{e^{E\lambda} - 1}{\lambda}$$

Con el fin de evaluar  $E_o$  cuando  $\lambda = 0$ , habrá que determinar el  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_o$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_o = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{E\lambda} - 1}{\lambda}$$

Aplicando la regla del L'Hopital, que nos dice que derivemos el numerador y el denominador de forma independiente con respecto a  $\lambda$  y que evaluemos el resultado cuando  $\lambda = 0$ . Entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{E\lambda} - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} E e^{E\lambda} = E$$

Si  $E = 0.7$ , la siguiente tabla muestra los resultados de  $E_o$  para valores de  $\lambda$  de 0 a 2.

$\lambda$	$e^{k\lambda}$	$E_o$
0.0	1.000	0.700
0.2	1.150	0.751
0.4	1.323	0.808
0.6	1.522	0.870
0.8	1.751	0.938
1.0	2.014	1.014
1.2	2.316	1.097
1.4	2.664	1.189
1.6	3.065	1.291
1.8	3.525	1.403
2.0	4.055	1.528

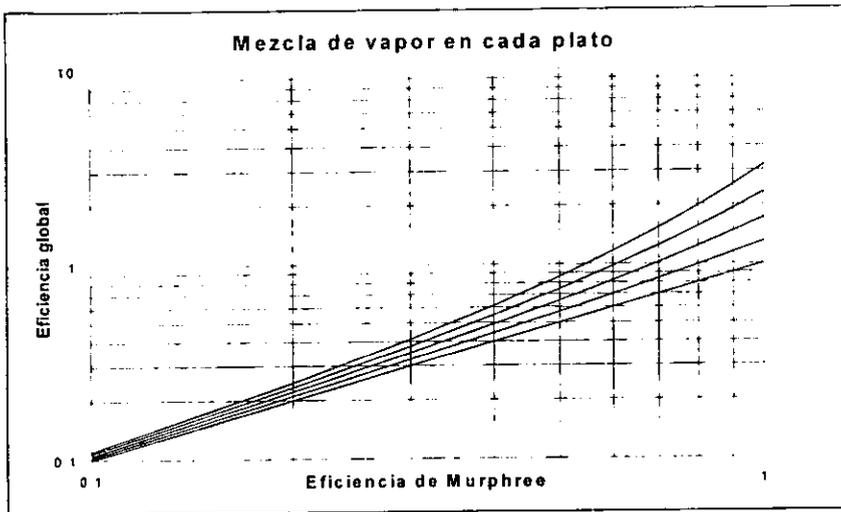


Figura 2 Relación *eficiencia de Murphree* vs Eficiencia global

Nomenclatura del Problema I:

- $E$  = Eficiencia de Murphree
- $E_o$  = Eficiencia global
- $m$  = Pendiente de la línea de equilibrio
- $b$  = Constante en la relación de equilibrio
- $L$  = Flujo del líquido Lbmol/h
- $w$  = Fracción del flujo de vapor que entra al plato con respecto a la distancia a través del plato

- $x$  = Fracción mol de los componentes líquidos; la  $(x_n)$  se refiere a la composición del plato  $n$ ,  $(X_n)_o$  se refiere a la composición del líquido que deja el plato y  $(X_n)_i$  se refiere a la composición del líquido que entra al plato.
- $y$  = Fracción mol de los componentes del vapor: la  $(y_n)$  se refiere al vapor que se genera en el plato  $n$  y  $(y_{n-1})$  se refiere al vapor que entra al plato
- $y^*$  = Fracción mol de los componentes del vapor en equilibrio con el líquido de composición  $x$ .
- $z$  = Distancia a través del plato
- $R$  = Relación de reflujo
- $\lambda$  = Relación dimensional  $\frac{mV}{L}$
- $V$  = Flujo del vapor en  $\frac{lb \cdot mol}{h}$

## Problema II Calentamiento en un tanque agitado

Un material sólido es suspendido en agua y calentado para la preparación de una reacción química. Se desea que del tanque salga la mezcla caliente, el tanque esta equipado con un agitador y un serpentín de calentamiento. El líquido frío y el sólido serán agregados continuamente, mientras que la suspensión caliente saldrá en la misma proporción. El método de operación para iniciar el proceso consiste en llenar el tanque con el líquido y el material sólido en la proporción requerida, después iniciamos la agitación, introducimos agua y material sólido en la proporción requerida, al mismo tiempo dejamos que la suspensión empiece a salir del tanque, y al final empezamos el calentamiento del tanque, para que el efluente alcance una cierta temperatura.

A partir del balance de energía representado por la ecuación diferencial lineal de primer orden.

$$\frac{dt}{d\theta} + \left( \frac{UA + GC_p}{WC_p} \right) t = \frac{UAT + GC_p t_0}{WC_p}$$

Se desarrolla una función para el tiempo requerido, expresado como el tiempo en que el contenido del tanque es desplazado por el flujo de entrada. El tiempo se expresa en forma adimensional mediante la siguiente expresión:

$$n = \frac{G\theta}{W} = \frac{Lb}{Lb} \cdot \frac{h}{Lb}$$

Complementando con las siguientes ecuaciones adimensionales.

$$B = \frac{UA}{GC_p}$$

$$\varphi = \frac{t - t_0}{T - t_0}$$

La última ecuación representa el grado de acercamiento a la temperatura del vapor.

Calcular el tiempo que se necesita para que el efluente alcance  $80^\circ\text{C}$ . Si el contenido inicial del tanque y el flujo de entrada están a  $20^\circ\text{C}$ , la temperatura del vapor es  $120^\circ\text{C}$ . La superficie de transferencia de calor es de  $23.9 \text{ ft}^2$ . Y la capacidad calorífica es de  $100 \frac{\text{p.c.u.}}{\text{h}^\circ\text{C ft}^2}$ .

El tanque contiene  $6000 \text{ Lb}$  y la relación de las corrientes es de  $122 \text{ Lb/h}$ . En la proporción del problema, se puede asumir que el calor específico de la suspensión es  $1 \frac{\text{p.c.u.}}{\text{Lb}^\circ\text{C}}$ .

¿Cómo se afecta al tiempo si el área útil de transferencia es duplicada? ¿Por qué el tiempo para el área mayor es menos que la mitad del tiempo obtenido con el área menor?

Desarrollando el balance de energía para el problema llegamos a que:

$$GC_p t_0 + UA(T - t) - GC_p t = WC_p \frac{dt}{d\theta}$$

que también se puede expresar de la manera:

$$\frac{dt}{d\theta} + \left( \frac{UA + GC_p}{WC_p} \right) t = \frac{UAT + GC_p t_0}{WC_p}$$

Disponemos además de la condición inicial que establece  $t = t_0$  cuando  $\theta = 0$ .

## Solución al Problema II

A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{dt}{d\theta} + \frac{UA + GC_p}{WC_p} t = \frac{UAT + GC_p t_0}{WC_p}$$

Que es de la forma:  $y' + Py = Q$ . Comparando las dos ecuaciones nos damos cuenta que,  $P = \frac{UA + GC_p}{WC_p}$ , y  $Q = \frac{UAT + GC_p t_0}{WC_p}$ . Esta es una ecuación diferencial de primer orden lineal

que tiene una solución del tipo:  $y = e^{-\int P dx} \left[ \int Q e^{\int P dx} dx + C \right]$ .

Entonces para el problema 2 la solución correspondiente será:

$$t = e^{-\int \frac{UA + GC_p}{WC_p} d\theta} \left[ \int \frac{UAT + GC_p t_0}{WC_p} e^{\int \frac{UA + GC_p}{WC_p} d\theta} d\theta + C \right]$$

Resolviendo la ecuación anterior llegamos a la siguiente expresión:

$$t = \frac{UAT + GC_p t_0}{UA + GC_p} + C e^{-\frac{(UA + GC_p)\theta}{WC_p}}$$

Aplicando las condiciones iniciales, donde  $t = t_0$  cuando  $\theta = 0$  resulta:

$$t_0 = \frac{UAT + GC_p t_0}{UA + GC_p} + C$$

$$C = \frac{UA}{GC_p} (t_0 - T)$$

$$C = \frac{UA}{GC_p} + 1$$

Sustituyendo  $C$  la solución de la ecuación diferencial será:

$$t = \frac{UA}{GC_p} T + t_0 + \frac{UA}{GC_p} (t_0 - T) e^{\left( \frac{UA}{GC_p} + 1 \right) \theta}$$

Simplificando llegamos a la siguiente forma de la ecuación:

$$\frac{t - t_0}{T - t_0} = \frac{UA}{GC_p + 1} \left[ 1 - e^{\left( \frac{UA}{GC_p} + 1 \right) \theta} \right]$$

Si introducimos las ecuaciones adimensionales a la ecuación anterior  $B = \frac{UA}{GC_p}$ ,  $\varphi = \frac{t - t_0}{T - t_0}$ , y

$n = \frac{G\theta}{W}$ . Llegamos a la siguiente ecuación:

$$\varphi = \frac{B}{B+1} \left[ 1 - e^{-(B+1)n} \right]$$

despejando  $n$ :

$$n = \frac{1}{B+1} \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{B+1}{B} \varphi} \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos dados por el problema tenemos que:

$$B = \frac{(100)(23.9)}{(1200)(1)} = 1.99166$$

$$\varphi = \frac{80 - 20}{120 - 20} = 0.6$$

$$\frac{B+1}{B} \varphi = \frac{1.99166+1}{1.99166} (0.6) = 0.90125$$

$$1 - \frac{B+1}{B} \varphi = 0.09875$$

$$\ln \frac{1}{1 - \frac{B+1}{B} \varphi} = 2.31516$$

Entonces el valor de  $n = \frac{2.31516}{1.99166+1} = 0.7738$

Si  $\theta = \frac{nW}{G} = \frac{0.7738 * 6000}{1200} = 3.869h$

Cuando el área de transferencia es duplicada  $B = 3.983$ , entonces el valor de  $n = 0.27869$  y  $\theta = 1.393h$

El tiempo requerido con el doble de área para transferencia de calor es menor que la mitad del tiempo utilizando el área original. Debido a que  $80^{\circ}\text{C}$  en el primer caso tendrá una diferencia menor entre el acercamiento y la temperatura máxima posible que es  $86.7^{\circ}\text{C}$ , con  $23.9 \text{ ft}^2$  de superficie de transferencia de calor, mientras que en el segundo caso la temperatura máxima de  $100^{\circ}\text{C}$ , es posible con  $47.8 \text{ ft}^2$ .

Nomenclatura del Problema II:

- $W$  = Contenido del tanque en peso  $Lb$
- $G$  = Flujo de sólido y líquido  $\frac{Lb}{h}$
- $T$  = Temperatura del vapor  $^{\circ}\text{C}$
- $t$  = Temperatura del tanque, asumiendo que hay un mezclado perfecto  $^{\circ}\text{C}$
- $t_0$  = Temperatura del liquido-sólido que se introduce en el tanque y la temperatura inicial del contenido del tanque  $^{\circ}\text{C}$
- $U$  = Coeficiente de transferencia de calor  $\frac{p.c.u.}{h^{\circ}\text{Cft}^2}$
- $A$  = Superficie de transferencia de calor  $\text{ft}^2$
- $C_p$  = Calor específico de la suspensión  $\frac{p.c.u.}{Lb^{\circ}\text{C}}$
- $\theta$  = Tiempo transcurrido desde el instante en que el vapor empieza a transferir calor al tanque  $h$ .
- $B$  = Relación adimensional  $\frac{UA}{GC_p}$
- $\varphi$  = Grado de acercamiento a la temperatura del vapor =  $\frac{t - t_0}{T - t_0}$

Las siguientes cantidades de calor están involucradas en el problema:

- Entrada de calor a través de la mezcla fría  $\frac{GC_p t_0 p.c.u.}{h}$
- Entrada de calor a través del serpentín con vapor  $\frac{UA(T - t)p.c.u.}{h}$
- Salida de calor con la suspensión que deja el tanque  $\frac{GC_p t p.c.u.}{h}$
- Acumulación de calor en el tanque  $WC_p \frac{dt}{d\theta} p.c.u.$

### Problema III: Calentamiento de un líquido en un tanque agitado, con nivel variable

Considere un tanque equipado con un agitador que tiene la suficiente fuerza para mantener la temperatura de todo el contenido de forma uniforme, y que la transferencia de calor se realiza a través de un serpentín o una chaqueta arreglada de tal forma que el área disponible para la transferencia de calor es proporcional a la cantidad de líquido en el tanque. Si el líquido es introducido al tanque con un flujo constante, empezando con el tanque vacío. ¿Cuál será la temperatura del líquido dentro del tanque cuando este se llene?

El balance de energía para este problema es de la siguiente forma:

$$GC_p t_0 + U(T - t)a = \frac{d}{d\theta} (wc_p t)$$

El área instantáneamente expuesta será proporcional a la cantidad de líquido en el tanque esto quiere decir que:

$$a = A \left( \frac{G\theta}{W} \right) = Af \text{ y } w = G\theta = W \left( \frac{G\theta}{W} \right) = Wf$$

Donde  $f$  es la fracción llena. Sustituyendo las igualdades anteriores y simplificando, el balance de energía se reduce a:

$$f \frac{dt}{df} + (Bf + 1)t = BfT + t_0$$

En donde  $B$  es el grupo adimensional:

$$B = \frac{UA}{GC_p}$$

Introduciendo una variable nueva dependiente:

$$\varphi = \frac{t - t_0}{T - t_0}$$

Que representa el acercamiento a la temperatura del vapor, se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\varphi}{df} + \left( B + \frac{1}{f} \right) \varphi = B$$

### Solución al Problema III

La ecuación anterior tiene una solución del tipo:  $y = e^{-\int p dx} \left[ \int Q e^{\int p dx} dx + C \right]$  que, aplicada a este problema nos permite obtener:

$$\varphi = e^{-\int P df} \left[ B \int e^{\int P df} df + C \right]$$

Donde  $P = B + \frac{1}{f}$ . Si sustituimos  $P$  llegamos a la expresión:

$$\int P df = Bf + \ln f$$

$$e^{Bf + \ln f} = fe^{Bf}$$

La solución se reduce a:

$$\varphi = \frac{e^{-Bf}}{f} \left[ B \int fe^{Bf} df + C \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{Bf} + C \frac{e^{-Bf}}{f}$$

La condición inicial de que la temperatura del líquido que entra al tanque  $t_0$  debe ser expresada de manera que  $\varphi = 0$  para  $f = 0$  en la ecuación anterior. Esta condición se satisface si la constante de integración  $C$  es igual a  $\frac{1}{B}$ .

Finalmente:

$$\varphi = 1 - \frac{1 - e^{-Bf}}{Bf}$$

Si graficamos  $\varphi$  contra el producto de  $Bf$  obtenemos una relación donde interviene la temperatura en función de la fracción del llenado del tanque.

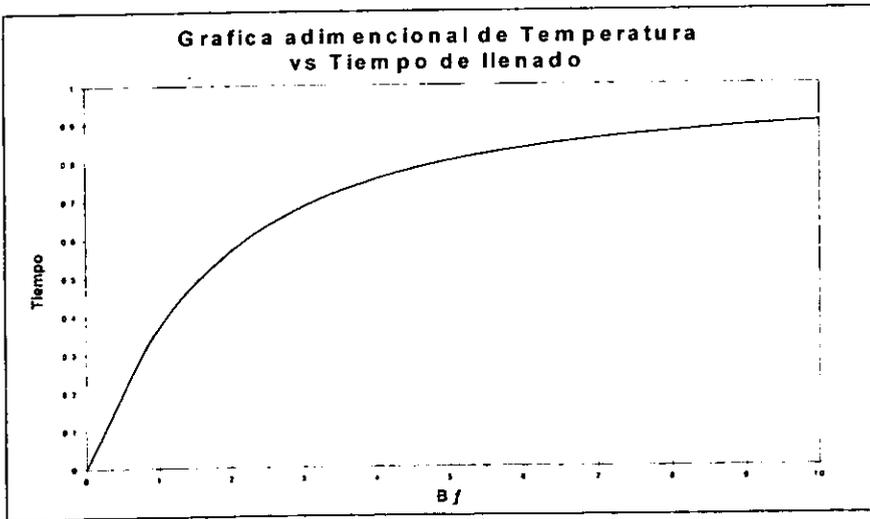


Figura 3 Relación adimensional de la Temperatura vs Tiempo de llenado

Si la superficie de transferencia de calor consiste en un serpentín con 10 vueltas, de 1 pulgada de diámetro exterior. Cada vuelta del serpentín tiene 4 ft de diámetro.

El flujo de alimentación es  $1200 \text{ Lb}_h$ , el coeficiente de transferencia de calor es de  $100 \frac{\text{Btu}}{\text{hft}^2 \text{ } ^\circ\text{F}}$ . el valor de  $B = 2.74$ . Cuando el tanque esta lleno, el valor correspondiente de  $\varphi = 0.659$ . Para una temperatura de vapor de  $105^\circ\text{C}$ . y una temperatura inicial de  $20^\circ\text{C}$ , esto corresponde a una temperatura final de  $76^\circ\text{C}$ .

### Nomenclatura del Problema III:

$G$  = Flujo del líquido  $\text{Lb}_h$

$C_p$  = Calor especifico del líquido  $\frac{\text{p.c.u.}}{\text{Lb}^\circ\text{C}}$

$a$  = Superficie de transferencia de calor expuesta al tiempo  $\theta$  en  $\text{ft}^2$

$A$  = Superficie de transferencia de calor expuesta cuando el tanque esta lleno  $\text{ft}^2$

$t$  = Temperatura del líquido en el tanque al tiempo  $\theta$  en  $^\circ\text{C}$

$t_0$  = Temperatura del líquido que se introduce en el tanque en  $^\circ\text{C}$

$T$  = Temperatura del vapor  $^\circ\text{C}$

$U$  = Coeficiente de transferencia de calor  $\frac{\text{p.c.u.}}{\text{h}^\circ\text{Cft}^2}$

$w$  = Contenido del tanque en peso al tiempo  $\theta$  en  $\text{Lb}$

$W$  = Contenido del tanque en peso cuando el tanque esta lleno en  $\text{Lb}$

$f$  = Fracción de llenado

$B$  = Relación adimensional  $\frac{UA}{GC_p}$

$\varphi$  = Grado de acercamiento a la temperatura del vapor =  $\frac{t - t_0}{T - t_0}$

$\theta$  = Tiempo transcurrido en  $h$ .

## Problema IV: Flujo en canales abiertos

Aunque la mayoría de los problemas de flujo en ingeniería química corresponden a flujo en tuberías (conductos cerrados), hay casos de flujo con superficie expuesta. Algunos de esos son; flujo en una tubería parcialmente llena, flujo a través de los platos de una columna de destilación ó torres de absorción, y flujo a través de canales.

Todos los problemas de flujo de canales abiertos son resueltos por métodos muy similares a los usados en los de conductos cerrados. La solución muchas veces se complica debido a la interdependencia de la cabeza del líquido y la velocidad.

El siguiente desarrollo demuestra cómo se obtiene y resuelve una ecuación diferencial de primer orden con variables separables, al analizar un problema de flujo con superficie expuesta.

### Desarrollo de la Ecuación Diferencial

Imaginemos un canal recto, con lados verticales, y una pendiente. Se puede asumir que la pendiente es pequeña como para que la profundidad de la película de agua sea constante a lo largo del canal. La presión se supone que tiene una distribución hidrostática, variando de la presión atmosférica en la superficie del líquido, a la presión atmosférica más el peso de una columna de líquido de una altura dada en el fondo del canal. Esta suposición con respecto a la distribución de la presión es incorrecta si la profundidad del líquido varía rápidamente, como resultado de la aceleración en las partículas del líquido.

Aplicando el teorema de Bernoulli a una sección diferencial en el plano vertical, separado una distancia  $dx$  medida en el fondo del canal obtenemos:

$$\frac{g_c}{g_c} (z + y) + \frac{V^2}{2g_c} = \frac{g_c}{g_c} [(z + y) + d(z + y)] + \frac{V^2}{2g_c} + d \frac{V^2}{2g_c} + dF$$

Donde  $dF$  representa la pérdida en cabeza debido a la fricción del líquido en la sección diferencial. Esto procede de la suposición de la distribución de energía en la ecuación anterior, y es reproducible si el balance de energía describe al líquido que fluye en la superficie, en el fondo del canal, ó en cualquier punto intermedio. Por analogía con el flujo en tuberías decimos que:

$$dF = \frac{fV^2}{y2g_c} dx$$

Donde  $y$  es el radio hidráulico, en este caso es igual a la profundidad del líquido. Otra expresión común en hidráulica es la que involucra al coeficiente Chezy  $C$ .

$$dF = \frac{V^2}{C^3 y} dx$$

Varias ecuaciones empíricas son válidas para estimar  $C$  en canales con diferentes profundidades y rugosidades. Una de las más simples es la de Manning, que resuelve para  $C$  de la siguiente forma:

$$dF = \frac{1.486 y^6}{n} \left[ \frac{f t^2}{s} \right]$$

Aquí  $n$  depende de la rugosidad del canal. De acuerdo con [Rouse, 1938],  $n$  varía de 0.007 – 0.009  $f t^6$  para cobre (hidráulicamente liso) a 0.022 – 0.035  $f t^6$  para la grava.

El flujo volumétrico  $q$  basado en el ancho del canal es independiente de la profundidad del líquido, pero el cálculo de la velocidad  $V$  varía de acuerdo al cambio de profundidad.

Utilizando

$$q = Vy$$

Obtenemos:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g_L} \right) = - \frac{q^2}{y^3 g_L} \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores, y la primera definición de la fricción en la ecuación desarrollada con el teorema de Bernoulli, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{q^2}{y^3 g_L} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{fq^2}{2g_L y^3} = 0$$

Sustituyendo,  $\left( \frac{dz}{dx} \right)$  la pendiente del fondo del canal, que es igual a  $-S_0$ , obtendremos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - \frac{fq^2}{2g_L y^3}}{1 - \frac{q^2}{g_L y^3}}$$

Evidentemente la profundidad del líquido es constante  $\left( \frac{dy}{dx} \right) = 0$ .

$$S_0 = \frac{fq^2}{2g_L y^3}$$

Si la profundidad  $y_0$  que satisface esta ecuación es la profundidad del líquido tal que la energía ganada en la caída a cierta distancia  $(dz + dy)$  es exactamente disipada por el trabajo de fricción en la distancia  $dx$ .

La profundidad puede disminuir o aumentar si el líquido fluye a través del canal dependiendo si

$$y \neq y_0$$

y entonces si

$$\frac{q^2}{g_L y^3} = \frac{V^2}{g_L y} \geq 1$$

La relación  $\frac{V^2}{g_L y}$  es conocida como el número Froude y es de gran importancia en muchas investigaciones de flujo en superficies abiertas. A partir de la velocidad de una ola solitaria en un canal poco profundo puede mostrarse como,  $g_L$  (altura de la ola) se puede conocer con el cálculo del número Froude la relación de la velocidad real a la velocidad de la ola. Cuando la velocidad excede la velocidad de la ola, cualquier ola que se forme será acarreada pendiente abajo. Cuando la velocidad es exactamente igual a la velocidad de la ola, la formación de una superficie de olas estacionaria es muy probable.

La profundidad a la cual el número de Froude es exactamente igual a 1 es conocida como la profundidad crítica  $y_c$ . Los parámetros  $y_0$  y  $y_c$  determinan la forma de la superficie del líquido, como se verá más tarde en este desarrollo. Introduciendo estos parámetros en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - \frac{f q^2}{2 g_L y^3}}{1 - \frac{q^2}{g_L y^3}}$$

obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{y^3 - y_0^3}{y^3 - y_c^3}$$

## Solución de la Ecuación Diferencial

Separando las variables en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\frac{y^3 - y_c^3}{y^3 - y_0^3} dy = S_0 dx$$

Introduciendo la variable adimensional  $\eta = \frac{y}{y_0}$  y estableciendo  $r = \frac{y_c}{y_0}$ . Sustituyendo estas expresiones llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{\eta^3 - r^3}{\eta^3 - 1} d\eta = S_0 dx$$

Ahora a partir de

$$\frac{\eta^3 - r^3}{\eta^3 - 1} = 1 + \frac{1 - r^3}{\eta^3 - 1}$$

y usando fracciones parciales llegamos a:

$$\frac{1}{\eta^3 - 1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\eta - 1} - \frac{\eta + 2}{\eta^2 + \eta + 1} \right)$$

Sustituyendo en la última ecuación tenemos que:

$$\left[ 1 + \frac{1-r^3}{3} \left( \frac{1}{\eta - 1} - \frac{\eta + 2}{\eta^2 + \eta + 1} \right) \right] d\eta = S_0 \frac{dx}{y_0}$$

La anterior es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. La solución es:

$$\eta - (1-r^3)f(\eta) = S_0 \frac{x}{y_0} C_1$$

En donde  $f(\eta)$  es dada por la integral indefinida:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \frac{1}{3} \int \left( \frac{\eta + 2}{\eta^2 + \eta + 1} - \frac{1}{\eta - 1} \right) d\eta \\ &= \frac{1}{6} \left( \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} + 2\sqrt{3} \operatorname{atan} \frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Esta función es graficada a continuación.

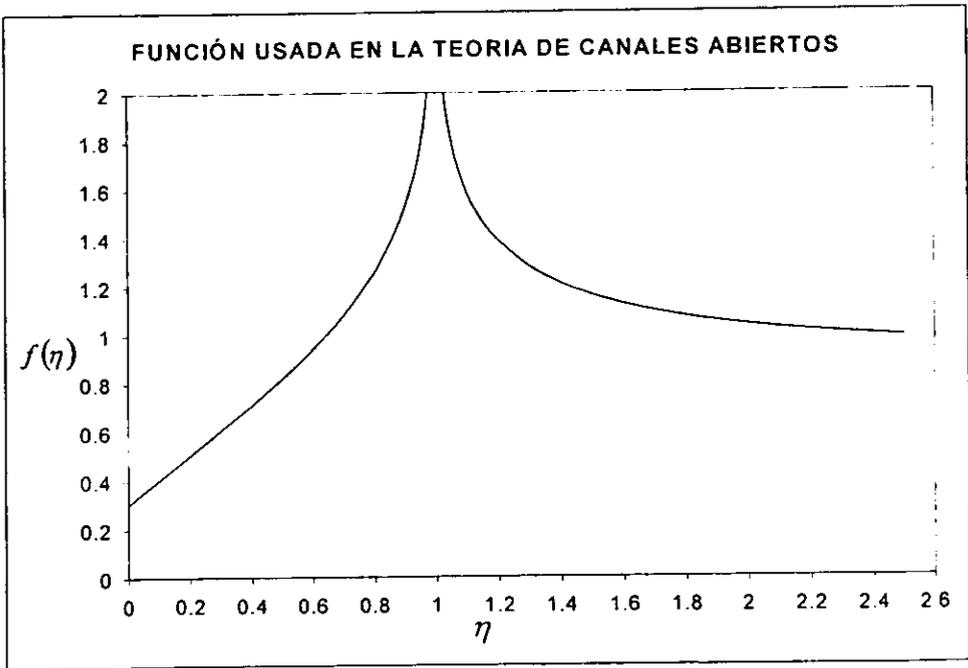


Figura 4 Gráfica de la solución de la integral de  $f(\eta)$

## Cálculo de los perfiles de la superficie

Este estudio se basa en la ecuación:  $\eta - (1 - r^3)f(\eta) = S_0 \frac{x}{y_0} C_1$

Las formas de los perfiles de la superficie dependen de los valores del tiempo relativos de la profundidad crítica, la profundidad uniforme, y la profundidad instantánea. Algunas de las más interesantes olas se muestran de forma adimensional en la figura 5, la cual se basa en la suposición de que  $y_0 = 2y_c$ . La relación de  $y_0$  a  $y_c$  depende únicamente de la magnitud del flujo, donde  $y_0$  depende de la pendiente, el factor de fricción y la magnitud del flujo. La curva superior con asíntota horizontal representa el caso de la descarga de una corriente en un depósito grande. Las dos curvas inferiores que están cerca del lado de la intersección con la línea que representa  $y = y_c$  son obtenidas cuando un valor instantáneo de  $y$  es menor que  $y_0$ .

El flujo en la línea inferior corresponde al flujo rápido de una corriente que es abierta en la base de un dique o el flujo rápido proveniente de una corriente en un canal de paso con pendiente dentro de un canal que súbitamente disminuya su pendiente. De acuerdo con las curvas mostradas en la figura 5. La relación de incremento de la profundidad se vuelve más rápida cuando  $y$  se acerca a  $y_c$ . En esta región, la aceleración de las partículas del líquido se vuelve tan rápida que la suposición de la distribución de la presión hidrostática ya no es válida. Realmente, la profundidad aumenta abruptamente antes de que la curva alcance  $y_c$ , este fenómeno es llamado el "salto hidráulico". La profundidad después del salto puede mentir cuando se está arriba de la línea inferior o de la línea superior. La ubicación de la posición del salto en el canal debe ser calculada por métodos analíticos suplementarios a los de las relaciones de energía aquí presentadas.

El flujo a la profundidad crítica corresponde a condiciones de energía total mínima por unidad másica de líquido. Si el flujo volumétrico es constante, y la profundidad es mayor que la profundidad crítica, el incremento en la profundidad causa un incremento en la cabeza del líquido, de tal forma que excede el decremento en energía cinética. Cuando la profundidad es menor que la crítica, el decremento en la profundidad incrementa la energía cinética más rápidamente que el decremento de la energía potencial. Estos factores explican la forma de las curvas en la figura 5.

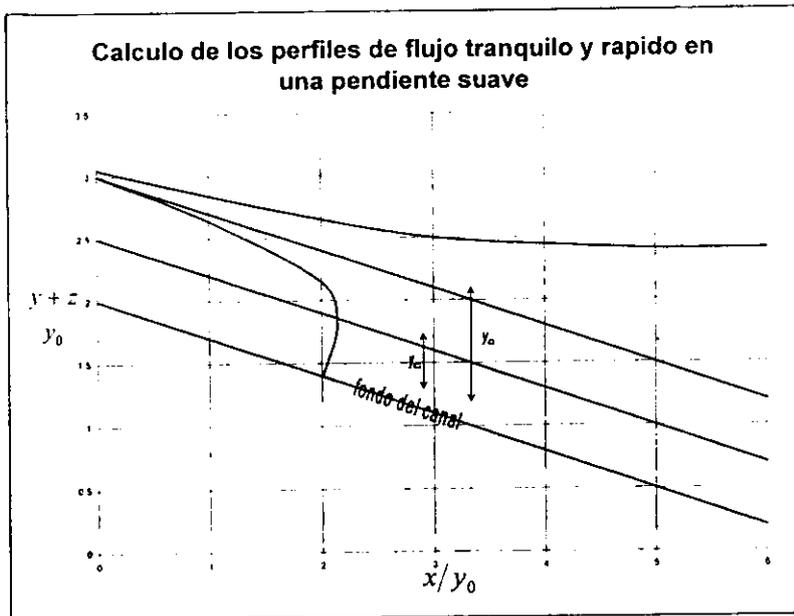


Figura 5 Gráfica de perfiles del flujo

En la curva superior la velocidad es menor que la correspondiente al flujo uniforme. En esta curva, por lo tanto, la profundidad se incrementa debido a que la energía no es consumida por la fricción tan rápidamente como es creada.

En cada sección de la curva inferior la energía es consumida más rápido de lo que es creada debido a la alta velocidad. De esta manera, en las secciones de esta curva, la profundidad tiende hacia la profundidad crítica donde la energía por unidad de masa es mínima. Cerca de la profundidad crítica la energía cambia muy lentamente con la variación de la profundidad. Por lo tanto, en este punto la curva de profundidad tiene tangente vertical.

## Los cuatro regímenes del flujo en canales abiertos

Un flujo volumétrico en canales abiertos con una profundidad menor que la crítica es conocido como un flujo rápido ó torrencial. Cuando la profundidad es mayor que la crítica, el flujo se conoce como tranquilo. El flujo rápido es identificado por que presenta saltos hidráulicos. El flujo debe ser clasificado como turbulento ó laminar, al igual que en el caso de tuberías. Este sistema de clasificación se discute en Robertson & Rouse, en donde se muestran fotografías de las 4 clases diferentes de flujo.

El análisis presentado anteriormente está basado en la suposición de que el flujo sea turbulento. El caso habitual es un flujo constante en canales de pendiente suave con velocidades moderadas y profundidades mayores que una fracción de pulgada es tranquilo-turbulento. El drenaje baja con una pendiente tal que forma una película habitualmente tranquila-laminar.

## Desarrollo de la Ecuación Diferencial para canales horizontales

Si la pendiente del canal se considera cero, la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - \frac{fq^2}{2g_L y^3}}{1 - \frac{q^2}{g_L y^3}}$$

se reduce a:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{f}{2}}{\left(\frac{y}{y_c}\right)^3 - 1}$$

$$\left[\left(\frac{y}{y_c}\right)^3 - 1\right] d\frac{y}{y_c} = -\frac{f}{2} \frac{dx}{y_c}$$

cuando se integra esta ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{y}{y_c}\right)^4 - \left(\frac{y}{y_c}\right) = -\frac{f}{2} \left(\frac{x}{y_c}\right) + C$$

En este problema el factor de fricción tendrá que ser calculado. La constante se evalúa a partir de las profundidades en los extremos del canal,  $y_1$  y  $y_2$ . Entonces obtenemos la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{f}{2}\right) \left(\frac{x}{y_c}\right) = \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{y_1}{y_c}\right)^4 - \left(\frac{y_2}{y_c}\right)^4 \right] - \left[ \left(\frac{y_1}{y_c}\right) - \left(\frac{y_2}{y_c}\right) \right]$$

Cálculo de factor de fricción a partir de los datos experimentales.

Utilizando la ecuación anterior, se calcula a continuación el factor de fricción a partir de los datos de Good, Hutchinson, y Rousseau. Todos los datos usados son basados en la velocidad

del aire dada por  $(\text{velocidad del aire})(\text{densidad del aire})^{\frac{1}{2}} = 1.2 \left( \frac{\text{Lb}}{\text{ft}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

Borde libre pulgadas	Flujo del liquido gal/hr ft	f/2 adimensional
3/8 <sup>6</sup>	500	6.2
	1000	3.4
	1385	2.7
1 <sup>6</sup>	500	12.9
	1000	7.2
	1385	7.6
	2365	5.9
1 <sup>7</sup>	3365	6.2
	500	8.5
	1000	3.8
1-3/4 <sup>6</sup>	1385	3.4
	500	8.7
	1000	3.8
	1385	3.8
	2365	3.8
2-1/2 <sup>6</sup>	3365	3.5
	500	6.0
	1000	4.1
	1385	4.3
	2365	3.0

Para los datos anteriores el número de hileras de capuchones es 12 y la distancia de desplazamiento utilizada en los cálculos de  $f$  es la distancia real de la línea central de la primera hilera hasta la línea central de la última hilera de capuchones.

El análisis de la tabla anterior muestra como el factor de fricción es casi independiente del flujo del líquido, para todos los flujos excepto para el primero de cada borde libre, y el factor de fricción es independiente del borde libre, excepto para uno de los dos arreglos de datos tomados con un borde libre de 1in. Esto se debe emplear, por tanto, en ausencia de datos

experimentales, la última ecuación se usa para una predicción burda del efecto del flujo, profundidad del líquido, o número de hileras de capuchones en el gradiente hidráulico.

En la aplicación de la ecuación anterior, por lo menos es necesario un dato experimental del gradiente hidráulico, para la evaluación del factor de fricción. La ecuación es muy útil para la interpolación y la extrapolación de datos experimentales. La ecuación nunca se debe emplear cuando los datos experimentales son obtenidos en las condiciones deseables. Los errores causados por el empleo de la teoría para flujo en canales sin obstrucciones es aplicada en este caso. En ausencia de datos experimentales que cubran el intervalo de condiciones requerido, la ecuación presentada es adecuada para obtener aproximaciones iniciales.

Probablemente el error principal de esta ecuación consiste en que la fricción del fluido se debe al flujo a través de la superficie horizontal más que el flujo alrededor y a través de los capuchones de burbujeo y el paso de burbujas de vapor a través del líquido. En la ecuación usada para la cabeza de fricción, la profundidad está en el denominador debido a que se supone que la fricción es originada en el fondo del canal. Realmente, cualesquiera que sean sus características, se debe utilizar el diámetro de los capuchones de burbujeo debido a que la fricción es mayor que la generada por estas obstrucciones. La segunda causa de fricción, la creación de burbujas de vapor, compensará algún error en el cálculo de la fricción en los capuchones. La fricción creada por las burbujas crece cuando el flujo de aire aumenta. Cuando pase más vapor a través de los capuchones, es correcto incluir de alguna manera en la ecuación usada para la cabeza de fricción una función inversa de la profundidad.

#### Nomenclatura del Problema IV:

- $V$  = Velocidad del fluido
- $y$  = Profundidad del canal
- $z$  = Distancia del fondo del canal en el plano horizontal
- $g_L$  = Aceleración local debida a la gravedad
- $g_c$  = Factor de conversión gravitacional
- $F$  = Pérdida de la cabeza debido a la fricción
- $f$  = Factor de fricción
- $x$  = Distancia del canal
- $q$  = Flujo volumétrico basado en el ancho del canal

## Problema V: Cálculo de las trayectorias de partículas

Para el conocimiento de las trayectorias descritas por las partículas de un sólido o la caída de un líquido proyectado a través de un medio fluido, es necesaria la estimación del tamaño del equipo en donde las partículas serán contenidas para caer libremente bajo la influencia de la gravedad. Ejemplos de estos equipos incluyen enfriadores, secadores, y absorbedores por aspersión, así como equipo que maneje aire en diversas formas, como pueden ser los equipos de clasificación hidráulica. El problema del cálculo de las trayectorias de las partículas de diferentes tamaños en el campo centrífugo presente en un ciclón separador de polvos es más complicado pero tiene solución al menos de forma aproximada por métodos similares.

Si las partículas son lo suficientemente pesadas para no ser afectadas por la resistencia del aire, tendrán una trayectoria parabólica. Como se muestra en cualquier libro de mecánica elemental. Si las partículas son lo suficientemente pequeñas y ligeras para ser afectadas por la resistencia del aire seguirán la ley de Stokes, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son un poco más difíciles. Siempre para el flujo turbulento, donde la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, el problema es relativamente simple desde el punto de vista matemático si el movimiento es restringido únicamente en la dirección vertical. Cuando el movimiento se presenta en ambas direcciones, horizontal y vertical, como es el caso frecuente, el problema es un poco más complicado matemáticamente. En este caso el resultado debe ser expresado en una forma útil si la resistencia del fluido es proporcional al cuadrado de la velocidad.

### Desarrollo de la Ecuación Diferencial

Considere una partícula de masa pequeña  $m$ , con área  $A$  cayendo libremente con una velocidad  $v$ , como se muestra en la figura 6, la partícula es afectada tanto por la fuerza de la gravedad<sup>1</sup>  $mg_L$ , como por la resistencia del fluido  $F$  dada por:

$$F = C_D A \rho_F \frac{v^2}{2g_c}$$

Aplicando la ley de movimiento de Newton respecto a la aceleración de las partículas a lo largo de los ejes de las  $x$  y  $y$  llegamos a:

$$\frac{m}{g_c} \frac{dv_x}{dt} = -F_x = -\frac{C_D A \rho_F}{2g_c} v^2 \cos \theta$$

<sup>1</sup> Cuando la densidad de la partícula y el fluido alrededor son aproximadamente iguales, la aceleración de la gravitación debe ser corregida multiplicándola por la relación  $\frac{\rho_P - \rho_F}{\rho_P}$ .

$$m \frac{dv_y}{dt} = -F_y + \frac{mg_t}{g_c} = -\frac{C_D A \rho_F}{2g_c} v^2 \sin\theta + \frac{mg_t}{g_c}$$

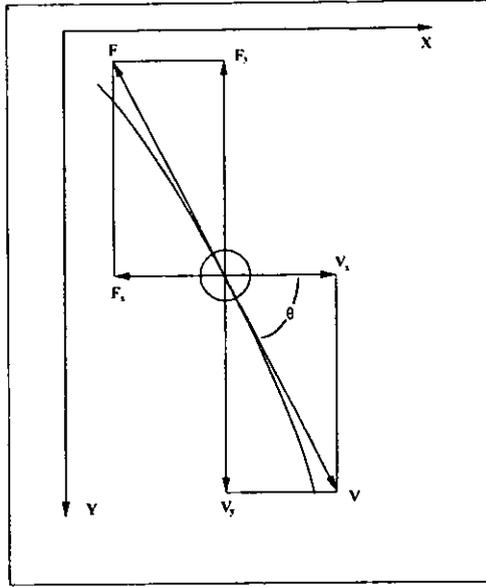


Figura 6 Diagrama de fuerza para la trayectoria de una Partícula

Para el cálculo de las trayectorias, solo nos interesa la relación funcional entre  $y$  y  $x$  y no su dependencia, o la dependencia de los componentes de la velocidad, en el tiempo. Entonces es deseable eliminar el tiempo de las ecuaciones anteriores, desarrollando una ecuación diferencial en la que la velocidad es la variable dependiente y alguna cantidad, como el ángulo  $\theta$ , describiendo la dirección del movimiento, es la variable independiente. Entonces:

$$v_x = v \cos \theta \text{ y } v_y = v \sin \theta$$

La primera ecuación es equivalente a:

$$\begin{aligned} \cos \theta \left( \frac{dv}{dt} \right) - v \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right) &= -kv^2 \cos \theta \\ \sin \theta \left( \frac{dv}{dt} \right) + v \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right) &= -kv^2 \sin \theta + g_t \end{aligned}$$

En donde:

$$k = \frac{C_D A \rho_F}{2g_c m}$$

Estas ecuaciones se simplifican si se muestran de la forma:

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 + g_L \sin \theta$$

$$v \frac{d\theta}{dt} = g_L \cos \theta$$

La primera de estas ecuaciones se obtuvo multiplicando las dos ecuaciones anteriores por  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , respectivamente, y sumándolas. La segunda ecuación se obtuvo multiplicando por  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , respectivamente y restando la primera de la segunda.

El tiempo puede ser eliminado de la ecuación y  $\theta$  sustituida por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Utilizando el ultimo par de ecuaciones llegamos a:

$$\cos \theta \frac{dv}{d\theta} - v \sin \theta = -k \frac{v^3}{g_L}$$

Una ecuación diferencial de primer orden no-lineal en  $v$  y  $\theta$ . El significado de la constante  $k$  puede ser aclarado haciendo notar que cuando la partícula cae verticalmente a velocidad constante  $v_t$ , llamada velocidad terminal, el miembro izquierdo de la siguiente ecuación:

$$\sin \theta \left( \frac{dv}{dt} \right) + v \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = -kv^2 \sin \theta + g_L$$

Se vuelve cero, entonces la velocidad y no la dirección del movimiento varia con el tiempo. Bajo esas condiciones  $\theta = 90^\circ$  y

$$g_L = kv_t^2$$

Eliminando  $k$  por el significado de esta relación, la ecuación diferencial queda como:

$$\cos \theta \frac{dv}{d\theta} - v \sin \theta = -\frac{v^3}{v_t^2}$$

### Solución de la Ecuación Diferencial

La ultima ecuación puede ser reducida a una donde las variables son separables si el componente horizontal de la velocidad es usado como la variable dependiente tanto como la velocidad misma. Entonces, al sustituir

$$v_x = v \cos \theta$$

llegamos a

$$\frac{dv_x}{d\theta} = -\frac{v_x^3}{v_t^2} \cos^3 \theta$$

Después de que las variables son separadas obtenemos:

$$-\frac{dv_x}{v_x^3} = \frac{d\theta}{v_t^2} \cos^3 \theta$$

La solución será:

$$\frac{1}{v_x^2} = \frac{1}{v_i^2} \left[ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \frac{(1 + \sin \theta)}{\cos \theta} \right] + C$$

La constante  $C$ , puede ser evaluada en la condición de que

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \text{ cuando } \theta = \theta_0$$

En el origen de la trayectoria. Con esta condición, la última ecuación se convierte en.

$$\frac{1}{v^2} \cos^2 \theta = \frac{1}{v_0^2} \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{v_i^2} \left[ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \ln \frac{(1 + \sin \theta) \cos \theta_0}{(1 + \sin \theta_0) \cos \theta} \right]$$

cuando resolvemos para  $v$ , se genera la solución final para la velocidad de la partícula

$$v = v_0 \cos \theta_0 f(\theta, \theta_0, v_i, v_0) \cos \theta$$

Donde la función en el numerador, que más tarde es abreviada con  $f(\theta)$ , esta dada por:

$$\frac{1}{(f(\theta))^2} = 1 + \left( \frac{v_0}{v_i} \right)^2 \cos^2 \theta_0 \left[ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \ln \frac{(1 + \sin \theta) \cos \theta_0}{(1 + \sin \theta_0) \cos \theta} \right]$$

### Cálculo de las trayectorias de las partículas en la región turbulenta

Las trayectorias recorridas por las partículas son obtenidas por medio del cálculo de las siguientes integrales.

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\theta v_x dt = \int_{\theta_0}^\theta v_x \left( \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = \frac{1}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{v v_x}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{(f(\theta))^2}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\theta v_y dt = \int_{\theta_0}^\theta v_y \left( \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = \frac{1}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{v v_y}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{(f(\theta))^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Similarmente el tiempo de caída es obtenido de la integral

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \int_{\theta_0}^\theta \left( \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = \frac{1}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{v d\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{v_0 \cos \theta_0}{g_L} \int_{\theta_0}^\theta \frac{f(\theta)}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Si la distancia y el tiempo son expresados de forma adimensional, el resultado final se presenta como:

$$X = \frac{x g_L}{v_0^2} = \cos^2 \theta_0 \int_{\theta_0}^\theta \frac{(f(\theta))^2}{\cos^2 \theta} d\theta = F_1 \left( \theta, \theta_0, \frac{v_i}{v_0} \right)$$

$$Y = \frac{y g_t}{v_0^2} = \cos^2 \theta_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(f(\theta))^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = F_2 \left( \theta, \theta_0, \frac{v_t}{v_0} \right)$$

$$T = \frac{t \cdot g_t}{v_0} = \cos \theta_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(f(\theta))}{\cos^2 \theta} d\theta = F_3 \left( \theta, \theta_0, \frac{v_t}{v_0} \right)$$

Debido a la complicada forma de  $f(\theta)$ , estas integrales deben ser evaluadas a través de métodos numéricos ó gráficos.

Para un simple valor de la dirección inicial de movimiento, la ubicación de las curvas  $X - Y$  depende únicamente del valor de la relación adimensional  $\frac{v_t}{v_0}$ , que más tarde es llamada  $R$ .

Entonces cuando se efectúa una representación adimensional, se puede emplear una familia de trayectorias construida con varios valores de  $R$  para encontrar las trayectorias descritas por las partículas de cualquier tamaño proyectadas en la misma dirección  $\theta_0$  a cualquier velocidad inicial  $v$ . Si las curvas así obtenidas son marcadas a intervalos apropiados con valores adimensionales del tiempo de caída, esta misma carta puede ser usada para el tiempo real de caída para cualquier posición, sin tener en cuenta la velocidad inicial ó la velocidad terminal. Si la trayectoria ha sido calculada para un par de valores de la velocidad inicial y terminal, la misma configuración debe ser usada para otros tamaños de partículas si la velocidad de proyección se ajusta haciendo que la relación  $R$  sea constante.

Las curvas construidas con el análisis anterior se restringen, por supuesto, para velocidades necesariamente altas que permita que el coeficiente de arrastre mantenga un valor constante durante toda la trayectoria.

### Trayectorias calculadas para velocidades en la región de la ley de Stokes

Si el fluido arrastrado obedece la ley de Stokes, a través de su trayectoria, las dos ecuaciones diferenciales básicas para los componentes horizontal y vertical se convierten :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{v_t} g_t$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left( 1 - \frac{v_y}{v_t} \right) g_t$$

Cuando se resuelven estas ecuaciones para el caso de una proyección inicial en la dirección horizontal, el resultado se puede expresar en la forma:

$$X = R \left( 1 - e^{-\frac{T}{R}} \right)$$

$$Y = R^2 \left( \frac{T}{R} - 1 + e^{-\frac{T}{R}} \right)$$

En donde las cantidades adimensionales de  $X$ ,  $Y$ ,  $T$ , y  $R$  tienen el mismo significado descrito en párrafos anteriores.

El resultado final para este caso es mucho más simple que el de la sección anterior, en donde el coeficiente de arrastre se asume constante. Una carta del comportamiento descrito anteriormente puede ser construida con menos esfuerzo, por consiguiente. Esa carta se muestra en la siguiente figura.

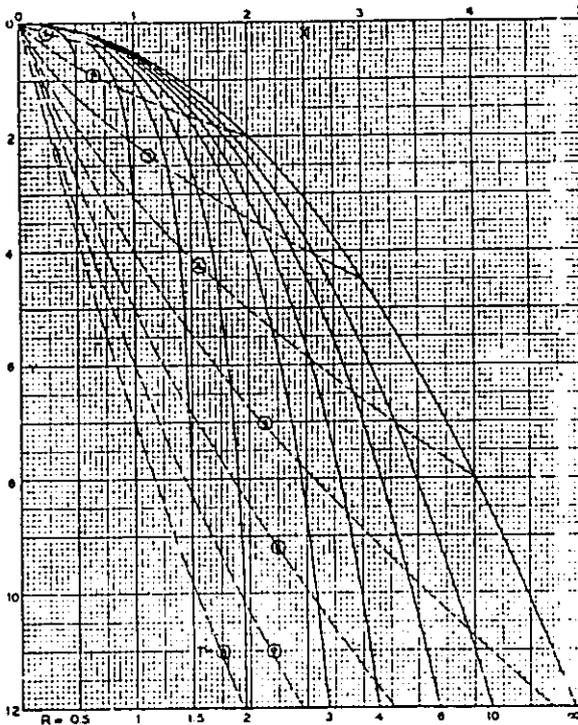


Figura 7 Trayectorias de Partículas (Resistencia del fluido según ley de Stokes)

Todas las trayectorias calculadas anteriormente están basadas en la suposición de que el fluido alrededor de la partícula está tranquilo. El resultado se explica precisamente cuando se

proyecta una partícula, o cuando la corriente de partículas es proyectada en conjunto, si las partículas en la corriente están lo suficientemente separadas. Las ecuaciones no pueden producir resultados para una nube de partículas, debido a que el fluido ha entrado con las partículas y con el movimiento de la nube.

Los movimientos de las partículas en la nube difieren de aquellos que se pueden predecir por los métodos anteriores debido a las colisiones que se pueden generar entre el movimiento rápido de las partículas pesadas y el movimiento lento de las partículas ligeras. Si las partículas son gotas líquidas, las colisiones serán acompañadas por el efecto de coalescencia, lo que resulta en que muchas de las partículas finas que son proyectadas en el momento en que son liberadas serán barridas por las partículas pesadas.

Una corriente de partículas proyectadas desde un punto, se convierte pronto en un jet de partículas junto con el fluido. El momentum intercambiado entre el jet de partículas y el fluido estacionario que se encuentra alrededor obliga a que el jet de partículas se expanda. Esta expansión causa que las partículas ligeras sean perdidas por el jet de partículas pesadas que se adelantan.

#### Nomenclatura del Problema V:

- $A$  = Area proyectada de partícula  $ft^2$
- $C_D$  = Coeficiente de arrastre
- $F$  = Fuerza de retardo de la resistencia del fluido lb
- $g_i$  = Aceleración de la gravedad  $\frac{ft}{s^2}$
- $g_c$  = Factor de conversión gravitatorio  $\frac{lb_{masa} \cdot ft}{lb_{fuerza} \cdot s^2}$
- $m$  = Masa de la partícula  $lb_{masa}$
- $v$  = Velocidad de la partícula  $\frac{ft}{s}$
- $v_0$  = Velocidad a la que la partícula es proyectada  $\frac{ft}{s}$
- $v_t$  = Velocidad terminal de la partícula  $\frac{ft}{s}$
- $t$  = Tiempo en segundos
- $T$  = Tiempo adimensional  $\frac{g_i \cdot t}{v_0}$
- $x$  = Distancia horizontal desde el punto de proyección  $ft$

$X$  = Distancia horizontal adimensional  $\frac{Xg_t}{v_0^2}$

$y$  = Distancia vertical desde el punto de proyección descendente  $f_i$

$\gamma$  = Distancia vertical adimensional  $\frac{\gamma g_t}{v_0^2}$

$R$  = Relación adimensional  $\frac{v_t}{v_0}$

$\theta$  = Dirección angular del movimiento de las partículas, positiva en dirección de las manecillas del reloj

## Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

### Propiedades generales de las Ecuaciones Diferenciales lineales

Antes de discutir el tema de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, hay que considerar algunas de las propiedades de la clase más general de ecuaciones diferenciales en donde los coeficientes son función de la variable independiente. La ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

es una ecuación diferencial lineal de  $y$ , y los coeficientes  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$  así como también el del lado derecho de la igualdad  $f(x)$  son funciones de la variable independiente  $x$ . Ya hemos discutido las ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

y también hemos analizado la solución general en términos de los coeficientes  $P$  y  $Q$ . Desgraciadamente no es posible generar una solución similar en el caso de una ecuación con coeficientes. Habrá que analizar las propiedades de las soluciones de esta ecuación, algunas de esas propiedades pueden ser inferidas de nuestro conocimiento de la solución general de la ecuación lineal de primer orden:

$$y = e^{-\int P dx} \int e^{\int P dx} Q dx + C e^{-\int P dx}$$

Esta solución se puede ver como la suma de dos términos. Esto se representa como:

$$y = u + Cv$$

Donde  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$  determinadas por  $P$  y  $Q$ , y  $C$  es la constante arbitraria. Se ve que  $u$  satisface la ecuación de primer orden como también  $v$  y por lo tanto también  $Cv$ . Si  $Q$  se hace cero, esta modificación de la ecuación de primer orden se llama la homogénea o ecuación reducida y  $Cv$  es llamada la función complementaria. La forma completa de la ecuación de primer orden es llamada ecuación no homogénea y  $u$  es llamada la integral particular. Resultados similares se encuentran en ecuación diferencial con coeficientes que se explica a continuación:

1. Si  $y = y_1(x)$  es una solución de la ecuación lineal homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

Entonces  $C_1 y_1$  es también una solución.

2. Si dos funciones  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal de  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$ , como por ejemplo  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias, también serán soluciones de la ecuación lineal homogénea.

3. Si  $Y_p(x)$  es una solución de la ecuación no homogénea de la ecuación diferencial con coeficientes, y  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son  $n$  soluciones linealmente independientes, la solución de la ecuación homogénea de la ecuación diferencial con coeficientes de la forma más general es:

$$y = Y_p(x) + Y_c(x)$$

en donde  $Y_c(x)$  denota la solución complementaria

$$Y_c(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Con el análisis de estas propiedades, el estudio de métodos para encontrar la solución de la ecuación diferencial con coeficientes es dividido en dos: 1) métodos para encontrar la función complementaria y 2) métodos para obtener la integral particular.

En la siguiente sección vamos tratar con la forma simple de la ecuación diferencial con coeficientes, en la cual los coeficientes  $a_n(x)$  son constantes.

### Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes

En la mayoría de los libros de Ingeniería se dedica un gran espacio a ecuaciones de este tipo. Pensando que solamente un método puede darnos la integral particular y la función complementaria para la ecuación diferencial con coeficientes constantes, y que muchos textos proponen métodos alternativos para determinar cada parte de la solución, En este trabajo se escoge el método más simple. Nunca se debe pensar que el método escogido para encontrar la integral particular pueda fallar para cierta clase de ecuaciones, es creíble que será satisfactorio para la mayoría de ecuaciones en problemas prácticos:

#### Determinación de la solución complementaria

Tratando de satisfacer la ecuación general homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

Por la solución del tipo  $e^{mx}$  que satisface la ecuación lineal de primer orden. Si esta solución es derivada y sustituida en la ecuación anterior encontraremos que la siguiente identidad se debe de satisfacer.

$$(m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n) e^{mx} \equiv 0$$

dado que  $e^{mx}$  no puede ser cero, los valores de  $m$  deben de satisfacer la ecuación algebraica

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

llamada la *ecuación característica*, suponga que las  $n$  raíces de la ecuación anterior son  $m_1, m_2, \dots, m_n$  la solución complementaria será:

$$Y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

si las  $m_n$  son diferentes, las soluciones en la ecuación anterior son linealmente independientes, y la ecuación anterior representa totalmente la solución complementaria.

Nota: el caso cuando dos o más de las raíces son idénticas requiere tratamiento especial  
 Con el fin de analizar las propiedades de esta solución, considere la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

la ecuación característica en este caso es:

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

y los dos valores de  $m$  son obtenidos por:

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$$

Los siguientes casos deben ser considerados por separado:

- a)  $m_1$  diferente a  $m_2$ , ambas reales
- b)  $m_1$  igual a  $m_2$ , real
- c)  $m_1$  y  $m_2$  complejas conjugadas

a) Este es el caso donde se aplica una ecuación complementaria del tipo

$$Y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

pero por algunos problemas es más conveniente usar la forma equivalente:

$$Y_c = e^{ax} [C_3 \cosh bx + C_4 \sinh bx], m_1, m_2 = a \pm b$$

las dos ecuaciones anteriores son equivalentes debido a las siguientes definiciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

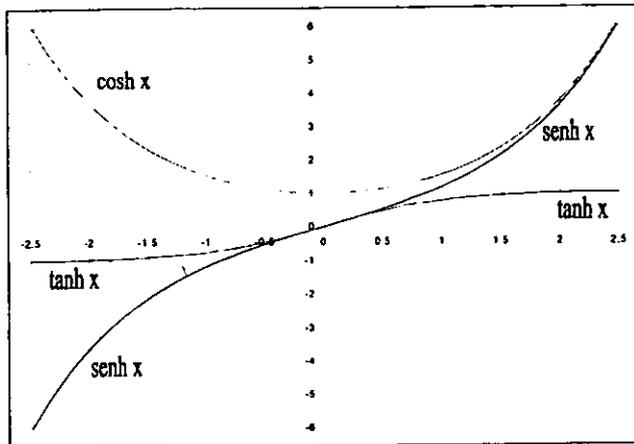


Figura 8 Gráfica de funciones hiperbólicas

b) Cuando  $m_1$  es igual a  $m_2$  solo se obtiene una solución. En este caso, si la función  $w$  es vista como que  $w e^{mx}$  satisface la ecuación diferencial, esto es verdad si  $w = x$ . La función complementaria cuando  $m_1 = m_2$  es:

$$Y_c = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$$

c) Cuando las raíces de la ecuación característica tienen partes imaginarias se utiliza las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

o la relación equivalente

$$e^{ix} = \operatorname{cos} x + i \operatorname{sen} x$$

usando estas relaciones la función complementaria queda como:

$$Y_c = e^{sx} (A \operatorname{sen} tx + B \operatorname{cos} tx)$$

donde  $m_1, m_2 = s \pm it$ .

Ejemplo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 3x^2 - 4x + 2e^x$$

la ecuación homogénea asociada es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

y la ecuación característica es:

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

Esta se satisface por  $m = 1, 2$  lo que permite que la solución complementaria se exprese de la manera siguiente:

$$Y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

## Determinación de la Integral particular

De los diferentes métodos para determinar la integral particular de la ecuación no homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

solo se describirá el método de coeficientes indeterminados. Para más métodos aplicables a la ecuación general con coeficientes constantes, como también a la ecuación de

coeficientes variables, se deberá hacer referencia a cualquiera de los textos de ecuaciones ordinarias. El método aquí presentado solo se aplica a ecuaciones con coeficientes constantes para las que  $f(x)$  es obtenida de combinaciones lineales de términos de los siguientes tipos:

$$\begin{array}{ll} x^p e^{\alpha x} \cos \beta x, & x^p e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \\ x^p e^{\alpha x} \cosh \beta x, & x^p e^{\alpha x} \operatorname{senh} \beta x \end{array}$$

El método puede ser descrito de la siguiente manera: "Escribe las partes de la variable del término en el miembro de la derecha  $f(x)$  y las partes de cualquier otro, obtenido derivando  $f(x)$ . Juntando los términos que se encontraron en grupos que se obtuvieron a partir de  $f(x)$ , aparecerán en un solo grupo. Cualquier grupo que no aparezca como términos de la ecuación complementaria  $Y_c$  se dejarán intactos, pero si en cualquier grupo un término es de  $Y_c$ , entonces todo este grupo será multiplicado por la menor potencia positiva de la integral de  $x$  que los transformará en diferentes formas de cada término de  $Y_c$ . Al multiplicar cada término en todos los grupos por la constante general, y hacer la suma de las expresiones se obtiene  $Y_p$ ." Las constantes son determinadas de igual manera que en la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

y se satisface de la misma manera. El siguiente ejemplo se utiliza para mostrar el método:

Ejemplo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 3x^2 - 4x + 2e^x$$

la función complementaria anteriormente encontrada es:

$$Y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

la parte variable de  $f(x)$  y los términos que se originan de la diferenciación de  $f(x)$  son:

$$x^2, x, 1, e^x$$

Los tres primeros términos no aparecen dentro de  $Y_c$ , pero el cuarto término si aparece por lo tanto este debe de ser multiplicado por  $x$ , esto hace que todos los términos sean distintos de los que hay en  $Y_c$ . Ahora hay que encontrar los valores de las constantes en  $Y_p$ :

$$Y_p = b_1 x^2 + b_2 x + b_3 + b_4 x e^x$$

Diferenciando  $Y_p$  y sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que.

$$2b_1 x^2 + (2b_2 - 6b_1)x + (2b_3 - 3b_2 + 2b_1) - b_4 e^x \equiv 3x^2 - 4x + 2e^x$$

Según esta ecuación para cumplir la identidad tenemos que:

$$2b_1 = 3, (2b_2 - 6b_1) = -4, (2b_3 - 3b_2 + 2b_1) = 0, -b_4 = 2$$

de las ecuaciones anteriores resulta que:

$$b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = \frac{5}{2}, b_3 = \frac{9}{4}, b_4 = -2$$

La solución completa es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{2} x + \frac{9}{4} - 2x e^x$$

Los valores de  $C_1$  y  $C_2$  se deben de determinar de las limitaciones físicas del problema; por ejemplo con las condiciones límite.

## Propiedades de las funciones hiperbólicas

### Relación de funciones circulares

Las relaciones entre las funciones circulares trigonométricas y las funciones exponenciales obtenidas por la expansión de series de potencias son:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\operatorname{cos} x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + (ix) - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!}$$

$$= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + i \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$$

$$e^{ix} = \operatorname{cos} x + i \operatorname{sen} x$$

por lo tanto

$$e^{-ix} = \operatorname{cos} x - i \operatorname{sen} x$$

También

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

Las siguientes son relaciones entre identidades trigonométricas y funciones exponenciales

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

comparando las ecuaciones llegamos a:

$$\sin x = -i \sinh ix, \sinh ix = i \sin x$$

$$\cos x = \cosh ix$$

## Identidades Fundamentales

Las siguientes relaciones entre funciones hiperbólicas se pueden verificar fácilmente a partir de las últimas cinco identidades

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$2 \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh x - 1$$

$$2 \cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$d(\sinh x) = \cosh x dx$$

$$d(\cosh x) = \sinh x dx$$

## Problema VI: Conducción de calor

La temperatura de una corriente de gas es medida por medio de un termopar instalado dentro de un termopozo de acero, como se muestra en la figura siguiente.

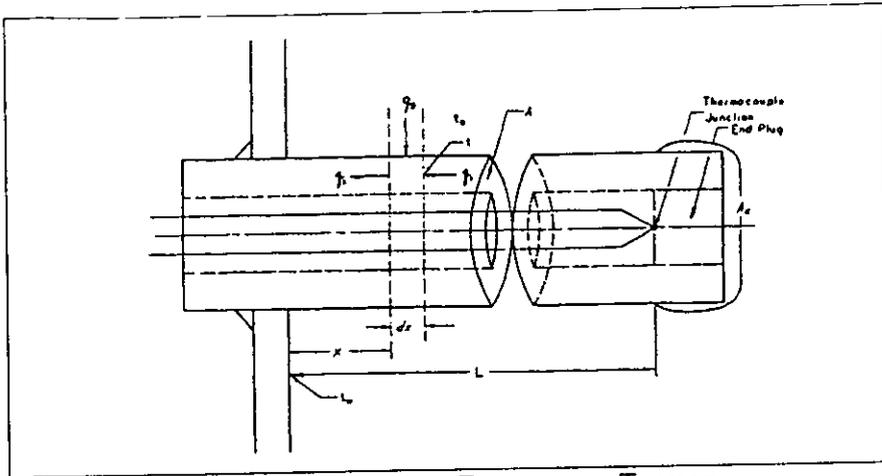


Figura 9 Diagrama del Termopozo, Termopar

El termopozo está soldado a la pared de la tubería, y la unión está soldada al extremo del termopozo. El gas está a mayor temperatura que la pared de la tubería y el flujo del gas es turbulento por lo que la temperatura del gas alrededor del termopozo es independiente de la posición a lo largo de la superficie. La conducción de calor a través del termopozo y de la pared de la tubería indica una temperatura en el termopar menor que la temperatura real del gas.

a) En el Desarrollo de una expresión para este error en términos de las temperaturas de la corriente del gas y de la superficie de la tubería, la conductividad del metal del termopozo, el coeficiente de transferencia de calor desde el gas a la superficie del termopozo, el área transversal, el perímetro de superficie, y la longitud del termopozo, las siguientes suposiciones son válidas.

1. La temperatura del gas alrededor del termopozo es uniforme.
2. La temperatura en la base del termopozo es igual que en la pared de la tubería, la resistencia del calor transferida radialmente desde la base del termopozo hacia dentro del tubo es insignificante comparada con la resistencia del termopozo por sí sola.

3. La variación de temperatura en la dirección radial del termopozo es insignificante comparada con el gradiente de temperatura en la dirección paralela al eje del termopozo.
4. La temperatura en el tapón usado para cerrar extremo del termopozo es uniforme. El área del tapón y la parte final del termopozo que está expuesto al fluido es  $A_f$ , el coeficiente de transferencia de calor es  $h_f$ . El tapón está soldado al final del termopozo.
5. La relación de conducción a lo largo de los cables del termopar es insignificante comparada con la que ocurre a lo largo del termopozo.

Desarrollar una ecuación diferencial para la temperatura en varios puntos a lo largo del termopozo que considere el balance de energía de la manera siguiente: el flujo de calor que entra y sale ( $q_1$  y  $q_2$  respectivamente) de una sección diferencial del termopozo de longitud  $dx$  y el calor ganado por la transferencia del gas alrededor del termopozo hasta la superficie de una sección diferencial. La ley básica de conducción de calor es la ley de Fourier:

$$q = +kA \left( \frac{dt}{dx} \right)$$

Las condiciones límite son obtenidas por la expresión matemática de las siguientes condiciones:

En la base del tubo la temperatura es igual a la temperatura de la pared de la tubería  
 La relación de calor a lo largo del termopozo como en la punta es igual a la relación de calor que se transfiere del tapón hacia el gas.

- b) Si el termopozo está hecho a partir de 3 plg de longitud de  $\frac{1}{8}$  plg de tubería de acero estándar que tiene un área de sección transversal de  $0.057 \text{ plg}^2$  y un perímetro de  $1.27 \text{ plg}$ , ¿Cual es el error en la determinación de la temperatura de una corriente de gas que tiene una temperatura real de  $300^\circ\text{C}$  cuando la temperatura de la tubería es de  $200^\circ\text{C}$ ? La conductividad térmica de la pared es  $26 \frac{\text{p.c.u. ft}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$  y el coeficiente de transferencia de calor (incluyendo radiación del gas a la pared) es  $56 \frac{\text{p.c.u.}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ . El área al final del tubo es  $0.126 \text{ plg}^2$  y el coeficiente de transferencia de calor para el final del tubo es también  $56 \frac{\text{p.c.u.}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$ .
- c) ¿Si se usara aluminio  $k = 120 \frac{\text{p.c.u. ft}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$  para el termopozo, cual sería el error en la medición de la temperatura?
- d) ¿Que error se presenta en cada cálculo si el final del termopozo se considera tan insignificante que no hay transferencia de calor del gas al termopozo a través de esta área?

## Solución al problema de conducción de calor

### Parte A:

El siguiente procedimiento para el desarrollo de la ecuación diferencial relaciona la temperatura del termopozo con su distancia desde la base, considerando un balance diferencial de energía sobre el elemento de distancia  $dx$ , tomando en cuenta todo el flujo de calor que entra y sale del elemento.

Calor entrante ( $x + dx$ ) por conducción,  $q_1$ :

$$q_1 = +kA \left[ \frac{dt}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{dt}{dx} \right) dx \right]$$

Dado que el calor fluye en la dirección del decremento de  $x$ , el signo para la conductividad térmica será positivo, en este caso. En esta expresión el segundo término dentro de los corchetes representa el cambio en el gradiente de temperatura,  $\frac{dt}{dx}$  en la dirección  $x$ , multiplicado por la distancia  $dx$  a través de la cual se presenta este cambio. La expresión dentro de los corchetes representa el gradiente de temperatura causado por el flujo de calor en ( $x + dx$ ).

Calor saliente en  $x$ , por conducción,  $q_2$ :

$$q_2 = kA \frac{dt}{dx}$$

Calor entrante por convección alrededor de la periferia,  $q_3$ :

$$q_3 = h(t_o - t)dA$$

$$q_3 = h(t_o - t)Pdx$$

Donde  $Pdx$  representa el área diferencial expuesta al gas caliente.

El balance de energía con tres contribuciones definidas anteriormente es:

$$\begin{aligned} q_1 + q_3 &= q_2 \\ &= kA \left[ \frac{dt}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{dt}{dx} \right) dx \right] + h(t_o - t)Pdx = kA \frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

lo que se reduce a:

$$= kA \frac{d^2t}{dx^2} + h(t_o - t)P = 0$$

Esta ecuación diferencial se puede catalogar como una ecuación diferencial lineal de segundo orden, con coeficientes constantes. El término constante puede ser eliminado, transformando la ecuación homogénea al hacer la siguiente sustitución:

Propongamos que  $T = t_o - t$  entonces  $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{d^2t}{dx^2}$ , y la ecuación diferencial se convierte a:

$$kA \frac{d^2 T}{dx^2} - hPT = 0$$

Que para expresar la ecuación en su forma general, se divide entre  $kA$  resultando:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA} T = 0$$

la cual tiene una solución de la forma:

$$T = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  se determinan por la siguiente ecuación característica:

$$m^2 - \frac{hP}{kA} = 0$$

Y entonces  $m_1$  y  $m_2$  son  $\frac{hP}{kA}$  y  $-\frac{hP}{kA}$  respectivamente.

La solución se escribe como:

$$T = C_1 e^{Bx} + C_2 e^{-Bx}$$

$$\text{donde } B = \frac{hP}{kA}$$

Las condiciones límite para establecer  $C_1$  y  $C_2$  son las siguientes:

1. a  $x = 0, t = t_w, T = t_o - t_w = T_w$
2. a  $x = L, q = h_f A_f (t_o - t_f) = +kA \left( \frac{dT}{dx} \right)_L = h_f A_f T_f$

si  $x = 0$

$$T_w = C_1 + C_2$$

$$\text{donde } T = C_1 e^{Bx} + (T_w - C_1) e^{-Bx}$$

$$\text{o también } T = C_1 (e^{Bx} - e^{-Bx}) + T_w e^{-Bx}$$

si  $x = L$

$$= - \left( \frac{dT}{dx} \right)_L = B [C_1 (e^{BL} + e^{-BL}) - T_w e^{-BL}] = \frac{h_f A_f T_f}{kA}$$

combinando las dos últimas, tenemos que:

$$C_1 (e^{BL} + e^{-BL}) - T_w e^{-BL} = -M [C_1 (e^{BL} - e^{-BL}) + T_w e^{-BL}]$$

$$\text{y } C_1 = \frac{T_w (1 - M) e^{-BL}}{e^{BL} + e^{-BL} + M (e^{BL} - e^{-BL})}$$

$$\text{donde } M = \frac{h_f A_f}{kAB}$$

$$\text{entonces } C_2 = T_w - C_1$$

$$C_2 = \frac{T_w (1 + M) e^{BL}}{e^{BL} + e^{-BL} + M (e^{BL} - e^{-BL})}$$

La solución final es:

$$\begin{aligned}
 t_o - t_i &= e^{B(L-x)} + e^{-B(L-x)} + M(e^{B(L-x)} - e^{-B(L-x)}) \\
 t_o - t_w &= e^{BL} + e^{-BL} + M(e^{BL} - e^{-BL}) \\
 &= \cosh B(L-x) + M \sinh B(L-x) \\
 &= \cosh BL + M \sinh BL
 \end{aligned}$$

Parte B:

$$k = 26, A = \frac{0.057}{144}, P = \frac{1.27}{12}; h = 56$$

$$B^2 = \frac{(56)(1.27)(12)}{(26)(0.057)} = 576, B = 24$$

$$BL = \frac{(24)(3)}{(12)} = 6$$

$$M = \frac{h_f A_E}{AkB} = \frac{(56)(0.129)(144)}{(144)(0.057)(26)(24)} = 0.203$$

$$\cosh BL = \sinh BL = \frac{e^{BL}}{2} = 201.7$$

$$t_o - t_k = \frac{1}{t_o - t_w} = \frac{1}{(1.203)(201.7)} = 0.00411, t_o - t_k = (0.00411)(100) = 0.41^\circ\text{C}$$

Parte C:

$$k = 120, B = 24, \frac{26}{120} = \frac{24}{4.61} = \frac{24}{2.15} = 11.2$$

$$BL = \frac{11.2}{4} = 2.8, \cosh BL = 8.25; \sinh BL = 8.19$$

$$M = \frac{0.203}{2.15} = 0.0942$$

$$t_o - t_F = \frac{1}{t_o - t_w} = \frac{1}{8.25 + (0.094)(8.19)} = \frac{1}{9.02} = 0.1105$$

$$t_o - t_k = (0.1105)(100) = 11^\circ\text{C}$$

Parte D:

$$\frac{t_o - t_k}{t_o - t_w} = 0.00495, t_o - t_k = 0.495^\circ\text{C} \quad \text{con termopozo de acero}$$

$$\frac{t_o - t_k}{t_o - t_w} = 0.1215, t_o - t_k = 12.15^\circ\text{C} \quad \text{con termopozo de Aluminio}$$

## Nomenclatura del Problema VI:

$A$  = Área de la sección transversal del termopozo  $ft^2$

$A_e$  = Área expuesta del final del termopozo  $ft^2$

$h$  = Coeficiente de transferencia de calor de la superficie expuesta del termopozo,  $\frac{p.c.u.}{hrft^2^{\circ}C}$

$h_e$  = Coeficiente de transferencia de calor al final del termopozo,  $\frac{p.c.u.}{hrft^2^{\circ}C}$

$k$  = Conductividad térmica del metal del termopozo,  $\frac{p.c.u.ft}{hrft^2^{\circ}C}$

$L$  = Longitud total del termopozo,  $ft$

$P$  = Perímetro de superficie expuesto al gas caliente,  $ft$

$q$  = Flujo de calor,  $\frac{p.c.u.}{hr}$

$t$  = Temperatura en el termopozo,  $^{\circ}C$

$t_o$  = Temperatura del gas alrededor del termopozo,  $^{\circ}C$

$t_w$  = Temperatura en la base del termopozo,  $^{\circ}C$

$t_e$  = Temperatura en el tapón del termopozo,  $^{\circ}C$

$X$  = Distancia a lo largo del termopozo,  $ft$

## Problemas propuestos

### Problema VII: Torre empacada con absorción y reacción química simultánea

Una torre de absorción empacada es usada para llevar a cabo una reacción en fase líquida entre un material gaseoso,  $A$ , y un material no volátil disuelto en agua. Las cantidades de reactivo son tales que la reacción es de primer orden y su relación es gobernada por la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

La relación de transferencia de  $A$  desde la fase gaseosa hacia el líquido a través de la torre sigue la relación:

$$-Gdy = K_g a (y^* - y) dz$$

Donde  $G$  es el flujo de gas en  $\frac{\text{lb.moles}}{\text{hrft}^2}$ ,  $z$  es la distancia vertical a través de la torre,  $y$  es la fracción mol de  $A$  en el vapor,  $y^*$  es la fracción mol en equilibrio con el líquido para la composición  $x$ , y  $K_g a$  es el coeficiente de transferencia en  $\frac{\text{lb.moles}}{\text{hrft}^3 \text{ fracción - mol}}$ . La relación de equilibrio entre  $y^*$  y  $x$  se asume que es:

$$y^* = mx$$

Desarrolle una ecuación para el decremento en la fracción mol de  $A$  en la corriente de gas, expresada como función de la distancia a lo largo de la torre en términos del número de unidades transferidas, y dos relaciones adimensionales.

$$\lambda = \frac{mG}{L} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{kH(H)_G}{L}$$

Donde  $H$  es la retención de líquido por  $\text{ft}^3$  de empaque, y  $L = \frac{\text{lb.moles}_{\text{líquido}}}{\text{hrft}^2}$ . Note que la relación entre el número de unidades transferidas y la distancia  $z$  es:

$$n = \frac{z}{(H)_G} = K_g a \frac{z}{G}$$

Problema VIII: Estabilidad mecánica para un sistema de control automático.

La conducta de cierto sistema de control automático esta gobernado por la ecuación diferencial:

$$X''' + A_2 X'' + A_1 X' + A_0 X = 0$$

La variable  $X$  representa la posición de una viga de balance usada para medir continuamente el peso de una corriente de material sólido que pasa a través de una banda transportadora. Los coeficientes  $A_2, A_1,$  y  $A_0$  describen la respuesta de ciertos elementos del sistema de control para fuerzas aplicadas. Las primas indican derivadas de  $x$  con respecto al tiempo.

Para que el equipo de control opere de manera estable es necesario que  $x$  varíe de manera oscilatoria cuando ocurra un incremento repentino. Discutir las condiciones, en términos de relaciones entre los coeficientes  $A_2, A_1, A_0$  de forma tal que la variación de  $x$  con el tiempo sea oscilatoria.

Problema IX: Medición de las fluctuaciones de Presión en Manómetro tipo U.

Un manómetro tipo U es usado para medir las fluctuaciones de presión dentro de un conducto de gas. Para reducir las fluctuaciones en la lectura del manómetro, tanto la estimación de la presión diferencial calculada puede ser hecha a ojo, se hace una reducción en la parte baja del tubo tipo U. La caída de presión causada por el flujo líquido en el manómetro a través de la reducción es proporcional a la primera potencia del flujo y es gobernada por la ley de Poiseuille.

Derive una expresión para la variación del nivel de líquido en el manómetro con respecto al tiempo. Tome en cuenta la inercia del líquido en los brazos del tubo. Suponga que la variación de la presión en el conducto de gas sigue la ecuación:

$$p = p_0 \left( 1 + a \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{T} \right) \right)$$

¿A qué valor del periodo de la fluctuación de la presión,  $T$  se obtendrá la resonancia con valores razonables de la longitud total de la columna de mercurio, y una longitud del estrechamiento de  $1mm$  en el diámetro?

## Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes variables

Se ha mostrado que la solución de la ecuación diferencial lineal del siguiente tipo:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

Puede ser expresada como la suma de la solución de la ecuación homogénea (solución complementaria), y una solución particular de la ecuación completa ó no homogénea. Para el caso en donde los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sean constantes, se han citado métodos generales de obtención de la solución complementaria e integral particular. Se ha mostrado asimismo que el problema se reduce a la solución de ecuaciones algebraicas.

En esta sección se consideran los métodos para resolver la ecuación diferencial lineal cuando  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  son funciones de  $x$ . Si  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  fueran funciones de  $y$ , entonces la ecuación sería una ecuación diferencial no lineal, que esta fuera del alcance de este estudio.

No hay un método general para la integración de ecuaciones lineales con coeficientes variables y de orden mayor que uno. Hay solo dos tipos especiales para los que métodos de integración han sido desarrollados. En todos los demás casos es generalmente necesario recurrir a la integración de la ecuación por medio de series infinitas, y el método de series es, por mucho, el mas importante para las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Este método requiere el entendimiento de las propiedades de las series infinitas.

Los dos tipos especiales de ecuación para los que existe método de solución son los que a continuación se describen brevemente.

### Ecuación lineal de Cauchy

Un tipo de ecuación diferencial lineal que puede ser integrada es la ecuación de Cauchy, definida por la forma:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

Donde las  $a$ 's son constantes, y  $a_0 = 1$ . Sustituyendo  $y = x^r$  en la parte izquierda de la ecuación anterior, obtenemos:

$$A_0 x^r + A_1 x^r + \dots + A_{n-1} x^r + A_n x^r$$

Donde  $A_i$  depende del valor de  $r$ . Dado que  $f(x) = 0$ , la sustitución anterior se expresa como:

$$x^r (A_0 + A_1 + \dots + A_n) = 0$$

Igualando el término entre paréntesis con cero, se obtienen los valores de  $r$  que satisfacen la ecuación reducida

Ejemplo:

En la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

Sustituyendo  $y = x^r$ , se obtiene que:

$$x^r (r^2 - 4r - 5) = 0$$

Donde las raíces del polinomio son  $r = 5$  y  $r = -1$  para la ecuación:

$$r^2 - 4r - 5 = 0$$

Y la solución para la ecuación diferencial se propone como:

$$y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x}$$

Cuando  $f(x) \neq 0$ , la integral particular puede ser determinada por el método de variación de parámetros, o de coeficientes indeterminados.

## Ecuación lineal Exacta

El otro tipo especial de ecuaciones lineales con coeficientes variables es la ecuación lineal exacta. A partir de la ecuación diferencial lineal.

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q(x)$$

Que es exacta. Después de la primera integración la ecuación se transforma a:

$$R_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + R_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + R_{n-3} \frac{d^2 y}{dx^2} + R_{n-2} \frac{dy}{dx} + R_{n-1} y = S(x) + C$$

Con el fin de establecer si es o no una ecuación diferencial lineal exacta, se debe cumplir la siguiente condición necesaria y suficiente.

$$P_n - P'_{n-1} + P''_{n-2} - P'''_{n-3} + \dots + (-1)^n P_0^n = 0$$

cuando la ecuación anterior se cumple, entonces la primera integración de la ecuación diferencial lineal exacta se obtiene con las siguientes relaciones a partir de los coeficientes de la ecuación original:

$$S(x) \equiv \int Q(x) dx + C$$

$$R_0 \equiv P_0$$

$$R_1 \equiv P_1 - P'_0$$

$$R_2 \equiv P_2 - P'_1 + P''_0$$

⋮

$$R_{n-2} \equiv P_{n-2} - P'_{n-3} + P''_{n-4} - \dots + (-1)^{n-2} P_0^{n-2}$$

$$R_{n-1} \equiv P_{n-1} - P'_{n-2} + P''_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} P_0^{n-1}$$

Ejemplo:

Considere la ecuación diferencial lineal

$$(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = 2 \cos x - 2x$$

se aplica el criterio de exacta a la ecuación anterior:

$$P_2 - P'_1 + P''_0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

Que significa que la ecuación diferencial es exacta.

Por lo tanto la primera integral se convierte en:

$$R_0 y' + R_1 y = \int (2 \cos x - 2x) dx + C$$

Que a partir de las relaciones antes citadas se llega a que:

$$R_0 = (x^2 + 1)$$

$$R_1 = 4x - 2x = 2x$$

Sustituyendo nuestra ecuación queda como:

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 2 \cos x - x^2 + C_1$$

Que es una ecuación de primer orden. Esta puede ser resuelta por el método desarrollado en esta sección o aplicando la fórmula de la solución general que se menciona dentro de "Solución general de las ecuaciones diferenciales de primer orden" del capítulo I para dar:

$$(x^2 + 1)y = -2 \cos x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

En el caso donde la ecuación diferencial lineal es de orden mayor que 2, no hay nada que asegure que la primera integración de una ecuación exacta será por sí misma exacta. En general todo lo que se puede esperar es que la ecuación exacta sea remplazada por su primera integración, por la ecuación lineal de orden inferior subsecuente.

Cuando la ecuación lineal dada es exacta y de segundo orden, su primera integración será lineal de primer orden, y entonces puede ser integrada si esta es exacta o no.

## Reducción de orden

Otra herramienta que puede tener utilidad a la hora de resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables es el método de reducción de orden. Esta herramienta depende del conocimiento de una solución particular o soluciones de reducción de la ecuación homogénea. El hecho es que este método requiere conocer de antemano los límites de solución para que sea de utilidad. De cualquier manera es probable que en algunos casos la solución de la ecuación homogénea pueda ser determinada por inspección. El método se expresa en términos generales a continuación:

Si  $k$  soluciones lineales independientes de la ecuación homogénea son conocidas, el orden de la ecuación diferencial puede ser reducido a partir de  $n$  hasta  $(n - k)$ .

Tal que, si  $y = y_1(x)$  es una solución de la ecuación homogénea, entonces la sustitución de  $y = uy_1$  puede reducir la ecuación lineal al siguiente orden inferior, en donde la variable dependiente es  $v = u'$ .

Ejemplo:

Considere la siguiente ecuación

$$xy'' - 2y' = x^4$$

La que al ser analizada permite observar que la solución  $y = x^3$  satisface la ecuación reducida.

$$xy'' - 2y' = 0$$

Sustituyendo  $y = ux^3$  se obtiene:

$$x^4u'' + 4x^3u' = x^4$$

Y si nombramos a  $v = u'$ , llegamos a la ecuación de primer orden.

$$x^4v' + 4x^3v = x^4$$

que se simplifica para llegar a la forma:

$$v' + \frac{4v}{x} = 1$$

Esta ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la solución:

$$v = \frac{x}{5} + \frac{C_1}{x^4}$$

tal que:

$$u = \int v dx = \frac{x^2}{10} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$$

de la que se obtiene:

$$y = ux^3 = \frac{x^5}{10} - \frac{C_1}{3} + C_2x^3$$

que es solución de la ecuación dada. Esta es la solución general debido a que contiene dos constantes arbitrarias. Los valores de esas constantes dependen de las condiciones límite del problema físico que resuelve.

## Integración de Ecuaciones Diferenciales en series

En general las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables de orden mayor que uno no pueden ser expresadas en términos de las llamadas funciones elementales. Algunas de esas ecuaciones de orden superior llevan a series infinitas o integrales definidas, que definen nuevas funciones, y en algunos casos, estas nuevas funciones se encontraban de manera tan frecuente en problemas de ingeniería y física que justificaba su tabulación, similar a las tablas trigonométricas y logarítmicas. Por lo tanto siempre que esas nuevas funciones no sean tan comunes como las elementales, aún aquellas que no sean tan diferentes, son sencillas de usar cuando sus valores se presentan en tablas.

Algunas de las funciones más familiares del tipo de las llamadas superiores, son funciones de Bessel, polinomios Legendre ó harmónicas, polinomios de Hermite, etc. Obviamente cualquier nueva serie infinita resultante de la solución de una ecuación diferencial puede ser clasificada y nombrada como una nueva función.

El método de integración por series será utilizado para ecuaciones lineales. Es posible usar el método de series para algunas ecuaciones no lineales de primer orden. De la misma manera es aplicable a ecuaciones lineales de primer orden.

Un procedimiento en el desarrollo del método de series, considerando el ejemplo específico de una ecuación lineal de segundo orden.

$$P_0 y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$$

donde  $P_0, P_1,$  y  $P_2$  son funciones de  $x$ .

Asume que la solución de la ecuación anterior es dada a través de la serie infinita

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+s} + A_2 x^{m+2s} + \dots + A_k x^{m+ks} + \dots$$

Para que la serie tenga la potencia que corresponda a la ecuación dada, es necesario establecer procedimientos para determinar  $m$  y  $s$ . Es posible determinar  $s$  asumiendo que  $P_0, P_1,$  y  $P_2$  sean polinomios de  $x$ , y para sustituir  $y = x^m$  en la ecuación dada. Esto nos conduce a la siguiente ecuación.

$$m(m-1)P_0 x^{m-2} + mP_1 x^{m-1} + P_2 x^m = 0$$

Que también se expresa de la siguiente forma:

$$f(m)x' + g(m)x'' = 0 \quad \text{para } (s > 0)$$

Esta expresión permite suponer que hay solo dos distintas potencias de  $x$  resultantes de la sustitución de  $y = x^m$ . Debido a que la ecuación a resolver es de segundo orden,  $f(m)$  ó  $g(m)$  deberá ser de segundo grado en  $m$ . Asumiremos que  $f(m)$  será de segundo grado. Es evidente

que la expresión anterior es necesaria para determinar el valor de  $s$  para la serie infinita. Ahora solo falta mostrar cual es la manera de obtener  $m$ .

Al sustituir la serie en la ecuación dada resulta:

$$\begin{aligned} & A_0 f(m)x^r + A_0 g(m)x^{r+s} \\ & + A_1 f(m+s)x^{r+s} + A_1 g(m+s)x^{r+2s} \\ & + A_2 f(m+2s)x^{r+2s} + A_2 g(m+2s)x^{r+3s} \\ & + \dots \\ & + A_k f(m+ks)x^{r+ks} + A_k g(m+ks)x^{r+(k+1)s} \\ & + A_{k+1} f[m+(k+1)s]x^{r+(k+1)s} \\ & + A_{k+1} g[m+(k+1)s]x^{r+(k+2)s} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Para que la ecuación diferencial se satisfaga, es decir, que la serie infinita sea solución de la ecuación dada, es necesario y suficiente que los coeficientes para las distintas potencias de  $x$  desaparezcan. Esto requiere que se satisfaga la siguiente relación general.

$$\begin{aligned} f(m) &= 0 \\ A_k g(m+ks) + A_{k+1} f[m+(k+1)s] &= 0, (k=0,1,2,3,\dots) \end{aligned}$$

La última ecuación es llamada la ecuación indicial y su solución permite conocer los valores requeridos de  $m$  para la serie infinita, por hipótesis  $f(m)$  es de segundo grado, por lo que se obtendrán dos valores de  $m$  donde llegamos a que la última ecuación se puede expresar como:

$$A_k g(m+ks) + A_{k+1} f[m+(k+1)s] = 0, (i=1,2)$$

De donde, una expresión de  $A_{k+1}$  puede ser expresada en términos de  $A_0$ ,  $m$  y  $s$  de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{-A_k g(m+ks)}{f[m+(k+1)s]} = \dots \\ &= (-1)^{k+1} A_0 \frac{g(m)g(m+s)\dots g(m+ks)}{f(m+s)f(m+2s)\dots f[m+(k+1)s]} \end{aligned}$$

Si  $m_1$  y  $m_2$  son distintas, la serie infinita tomara dos diferentes formas:

$$y = A_0(x^{m_1} + a_1 x^{m_1+s} + a_2 x^{m_1+2s} + a_3 x^{m_1+3s} + \dots) = A_0 y_1$$

$$y = B_0(x^{m_2} + b_1 x^{m_2+s} + b_2 x^{m_2+2s} + b_3 x^{m_2+3s} + \dots) = B_0 y_2$$

según como sean usadas  $m_1$  y  $m_2$  en la expresión de  $A_{k+1}$ , por la linealidad de la ecuación dada, la solución general es:

$$\begin{aligned} y &= A_0 y_1 + B_0 y_2 = A_0(x^{m_1} + a_1 x^{m_1+s} + a_2 x^{m_1+2s} + a_3 x^{m_1+3s} + \dots) \\ &+ B_0(x^{m_2} + b_1 x^{m_2+s} + b_2 x^{m_2+2s} + b_3 x^{m_2+3s} + \dots) \end{aligned}$$

Ilustración del método:

En la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' + xy' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

sustituyendo  $y = m^x$  se obtiene:

$$(m^2 - m - 2)x^{m-2} + (m+1)x^m = 0$$

Entonces para  $s = 2$  la solución será:

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+2} + A_2 x^{m+4} + A_3 x^{m+6} + \dots + A_k x^{m+2k}$$

que es sustituida en la ecuación diferencial para dar:

$$\begin{aligned} & A_0(m^2 - m - 2)x^{m-2} + [A_0(m+1) + A_1(m^2 + 3m)]x^m \\ & + [A_1(m+3) + A_2(m^2 + 7m + 10)]x^{m+2} + \dots \\ & + [A_k(m+2k+1) + A_{k+1}(m+2k)(m+2k+3)]x^{m+2k} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Comparando la ecuación anterior con el caso general mostrado anteriormente podemos ver que:

$$\begin{aligned} f(m) &= m^2 - m - 2 \\ g(m) &= m + 1 \\ r &= m - 2 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

Donde la ecuación indicial es:

$$m^2 - m - 2 = 0$$

Que tiene como raíces a:  $m = 2$  y  $m = -1$

Para  $m = 2$ , los coeficientes de las distintas potencias de  $x$  se obtienen como:

$$\begin{aligned} 3A_0 + (2 \cdot 5)A_1 &= 0 \\ 5A_1 + (4 \cdot 7)A_2 &= 0 \\ (3 + 2k)A_k + (2 + 2k)(5 + 2k)A_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

que al despejar tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3A_0}{(2 \cdot 5)} \\ A_2 &= -\frac{5A_1}{(4 \cdot 7)} = \frac{(3 \cdot 5)A_0}{(2 \cdot 4)(5 \cdot 7)} \\ A_{k+1} &= -\frac{(3 + 2k)A_k}{(2 + 2k)(5 + 2k)} \end{aligned}$$

La última ecuación sirve para determinar cualquier coeficiente en la serie a partir de otro previamente determinado. Entonces:

$$A_3 = -\frac{(3+2 \cdot 2)A_2}{(2+2 \cdot 2)(5+2 \cdot 2)} = -\frac{7A_2}{(6 \cdot 9)} = -\frac{(3 \cdot 5 \cdot 7)A_0}{(2 \cdot 4 \cdot 6)(5 \cdot 7 \cdot 9)}$$

Y la solución para  $m = 2$  es

$$y = A_0 \left[ \begin{array}{l} x^2 - \frac{3}{(2 \cdot 5)} x^4 + \frac{3 \cdot 5}{(2 \cdot 4)(5 \cdot 7)} x^6 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)(5 \cdot 7 \cdot 9)} x^8 + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2))(5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+1))} x^{2n} + \dots \end{array} \right] = A_0 y_1$$

Los coeficientes para  $m = -1$  se encuentran como:

$$A_0(0) + A_1(-2) = 0; A_1 = 0$$

$$2A_1 + 4A_2 = 0$$

$$2kA_k + (2k-1)(2k+2)A_{k+1} = 0$$

y es evidente que todos los coeficientes dependientes de  $A_1$  son cero, por lo tanto la solución se reduce a:

$$y = A_0 x^{-1} \equiv A_0 y_2$$

y la solución general se escribe ahora como:

$$y = Ay_1 + By_2$$

para considerar la convergencia de la solución de una serie, se deben de tomar en cuenta los tres siguientes casos:

- Si  $f(m)$  es de segundo grado (que se asume en capítulo pasado) y  $g(m)$  de grado menor,
- Si  $g(m)$  es de segundo grado, cuando cada serie es convergente para algún intervalo definido de valores de  $x$  y divergentes para los demás. Entonces se debe establecer este intervalo.
- Si  $f(m)$  es de primer grado, entonces  $g(m)$  es de segundo grado, y solo una serie es obtenida, la cual diverge para todos los valores de  $x$  mayores que cero. Cuando dicha condición ocurre se emplea, la siguiente modificación.

Asuma la solución:

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_k x^{m-k}$$

de donde se pueden establecer las ecuaciones para determinar los coeficientes, y la ecuación indicial es  $g(m) = 0$ .

La discusión anterior se basó en la suposición de que las raíces de la ecuación indicial eran distintas. En el caso donde las raíces son iguales, se requiere un tratamiento especial. En el caso donde  $m_1 = m_2$ , solo se obtiene una serie independiente, y se puede probar que una segunda solución independiente se puede encontrar a partir de la siguiente relación:

$$\frac{\partial y_1}{\partial m} = y_2, \text{ para } m = a$$

Donde  $y_1$  es la solución encontrada por el método anterior. En la derivada parcial de  $y_1$  con respecto a  $m$ , es necesario escribir los coeficientes de la serie en términos de  $m$ . Después de

derivar, el valor de  $m$  obtenido de la ecuación indicial se substituye en las series para obtener la segunda solución.

En algunos casos, el coeficiente de las series tiende a infinito. Esto ocurre cuando las raíces de la ecuación indicial están relacionadas por la ecuación:

$$m_2 = m_1 + hs \quad (h \text{ es un entero positivo})$$

de la ecuación que desarrollamos anteriormente

$$A_{k+1} = \frac{-A_k g(m+ks)}{f[m+(k+1)s]}, \quad (k = 0.1.2 \dots)$$

Se puede apreciar que en el arreglo de los coeficientes en la serie correspondiente a  $m = m_1$ , el denominador se convierte en  $f(m_1)$ . Por ejemplo cero para,  $k = h-1$  el coeficiente correspondiente  $A_h$  tenderá a infinito.

Esta dificultad es superada al proponer,  $A_0 = a(m - m_1)$  que es arbitraria. La serie se convertirá en:

$$ax^m \left[ (m - m_1) + (m - m_1) \frac{A_1}{A_0} x^s + (m - m_1) \frac{A_2}{A_0} x^{2s} + \dots + (m - m_1) \frac{A_h}{A_0} x^{hs} + \dots \right]$$

Dado que  $A_h$  es el primer coeficiente que tiende a infinito a,  $m = m_1$ , el primer termino  $h$  en la serie tiende a cero cuando,  $m = m_1$ , cuando el factor que hace que  $A_h$  sea infinito ha sido removido. La solución en serie se presenta de la forma:

$$y = ay_1 = ax^m [C_h x^{hs} + C_{h+1} x^{(h+1)s} + \dots]$$

Donde las  $C$ 's son constantes arregladas.

### Problema X: Solución de la ecuación de Bessel.

Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de series.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

Determine la solución completa de la ecuación en términos de  $\alpha$ .

La ecuación es equivalente a:

$$A_0(x)y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$$

Donde se evalúa el coeficiente  $A_0$  alrededor de  $x_0 = 0$

$$A_0 \underset{x_0=0}{\rightarrow} x^2 \underset{x_0=0}{=} 0 \text{ Es un punto singular.}$$

Dividiendo la ecuación original entre  $A_0(x)$  tenemos:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$$

Que es de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Donde  $p(x)$  y  $q(x)$  se analizan para saber si el punto singular es regular

$$xp(x) = 1 \underset{x_0=0}{=} 1$$

$$x^2q(x) = x^2 - \alpha^2 \underset{x_0=0}{=} -\alpha^2; \alpha \neq 0$$

Como  $xp(x)$  y  $x^2q(x)$  están definidas, la ecuación se resuelve por el método de Frobenius proponiendo un polinomio de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+r}$$

Sustituyendo el polinomio y sus derivadas en la ecuación original tenemos la siguiente ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \alpha^2] A_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+r+2} = 0$$

Desarrollando y reagrupando términos semejantes tenemos que:

$$(r^2 - \alpha^2)A_0 x^r + [(1+r)^2 - \alpha^2]A_1 x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+r)^2 - \alpha^2\} A_n + A_{n-2} \} x^{n+r} = 0$$

del polinomio anterior resolvemos la ecuación indicial

$$r^2 - \alpha^2 = 0$$

que tiene raíces

$$r = \pm \alpha$$

del polinomio encontramos que:

$$A_1 = 0$$

y la solución general es:

$$y = A_0 \left[ \begin{array}{l} - \frac{x^{r+2}}{4\alpha + 2^2} + \frac{x^{r+4}}{(4\alpha + 2^2)(8\alpha + 4^2)} - \frac{x^{r+6}}{(4\alpha + 2^2)(8\alpha + 4^2)(12\alpha + 6^2)} \\ + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{j=1}^n (-1)^n \frac{x^{r+2n}}{(2(2j)\alpha + 2j^2)} \end{array} \right]$$

## Transformadas de Laplace

La transformada de Laplace es una transformada integral de la forma:

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

En donde la función  $f$  se transforma a otra función  $F$ , por medio de una integral. Se dice que la función  $F$  es la transformada de  $f$  y la función  $K$  se llama *kernel* de la transformación. La idea general es usar la transformada, para que un problema  $f$  se transforme en un problema más sencillo  $F$ . haciendo una selección apropiada del *kernel*  $K$  y de los límites de integración  $\alpha$  y  $\beta$ .

La transformada de Laplace de  $f$  que se denota como  $L\{f(t)\}$  o por  $F(s)$  se define por medio de la siguiente ecuación:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

esta transformación hace uso de *kernel*  $K(s, t) = e^{-st}$  y está asociada particularmente con las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Es especialmente útil en la solución de problemas con términos no homogéneos de naturaleza discontinua o impulsiva.

La integral sobre el intervalo no acotado se conoce como integral impropia, que se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t) dt$$

Donde  $A$  es un número real positivo. Si la integral desde  $a$  hasta  $A$  existe para cada  $A > a$ , y si existe el límite cuando  $A \rightarrow \infty$ , entonces la integral impropia es convergente en este valor límite.

Si la función  $f$  es seccionalmente continua sobre el intervalo  $0 \leq t \leq A$  para cualquier  $A$  positiva, y  $f(t) \leq Ke^{-at}$  cuando  $t \geq M$ . En esta desigualdad  $K$ ,  $a$  y  $M$  son constantes reales,  $K$  y  $M$  necesariamente positivas. Entonces la transformada de Laplace  $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  existe para  $s > a$ .

Ejemplo:

Considerando  $f(t) = \text{sen } at$ , para  $t \geq 0$ . Entonces

$$L\{\text{sen } at\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen}(at) dt$$

que se expresa de la siguiente manera:

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \text{sen}(at) dt$$

que al integrarla por partes:

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-st} \cos at}{a} - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos(at) dt \right] = \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt$$

y después de una segunda integración por partes es:

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen}(at) dt = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s)$$

Por lo tanto, despejando  $F(s)$ , se llega a:

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$t^n, n = \text{entero positivo}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a$
$\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a$
$e^{at} \text{sen } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \text{cos } bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$t^n e^{at}, n = \text{entero positivo}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$	$c > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	
$\delta(t-c)$	$e^{-cs}$	
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
$-t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	

Tabla 10 Transformadas de Laplace

## Solución de problemas con valores iniciales

Si  $f$  es continua y  $f'$  es seccionalmente continua en cualquier intervalo  $0 \leq t \leq A$ . donde existen constantes  $K$ ,  $a$  y  $M$  tales que  $f(t) \leq Ke^{at}$  para  $t \geq M$ . Entonces existe  $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$  para  $a, s > y$ .

Si  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas y  $f^{(n)}$  es seccionalmente continua en cualquier intervalo  $0 \leq t \leq A$ . Suponga, que existen las constantes  $K$ ,  $a$  y  $M$ , tales que  $f(t) \leq Ke^{at}$ ,  $f'(t) \leq Ke^{at}, \dots, f^{(n-1)}(t) \leq Ke^{at}$  para  $t \geq M$ . Entonces  $L\{f^{(n)}(t)\}$  existe, para  $s > a$  y esta dada por:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Ejemplo:

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0$$

y las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

tenemos que:

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 0$$

donde, se escribe la transformada de una suma como la suma de las transformadas, para expresar  $L\{y''\}$  y  $L\{y'\}$  en términos de  $L\{y\}$ . la ecuación toma la forma:

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0$$

Al sustituir  $y(0)$  y  $y'(0)$  en la ecuación anterior, y despejando  $Y(s)$ , obtenemos:

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

para llegar a la siguiente solución:

$$y = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

## La integral de convolución

En ocasiones es posible identificar una transformada de Laplace  $H(s)$  como el producto de otras dos transformadas  $F(s)$  y  $G(s)$ , que corresponden a las funciones conocidas  $f$  y  $g$ , respectivamente. En este caso, podríamos anticipar que  $H(s)$  sería la transformada del producto de  $f(t)$  y  $g(t)$ . Sin embargo, la transformada de Laplace no puede conmutarse con la multiplicación ordinaria, pero se puede definir un producto generalizado.

Si  $F(s) = L\{f(t)\}$  y  $G(s) = L\{g(t)\}$  donde ambas existen para  $s > a \geq 0$ , entonces

$$H(s) = F(s)G(s) = L\{h(t)\}, \quad s > a$$

donde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

la función  $h$  se conoce como la convolución de  $f$  y  $g$ ; las integrales de la última ecuación se conocen como integrales de convolución.

Ejemplo:

$$\text{Si } F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \text{ y } G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

Aplicando la convolución:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

gracias a que el integrando de la primera integral no depende de la variable de integración de la segunda, podemos reorganizar la ecuación y obtener:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi) d\xi$$

al introducir nuevas variables de integración  $\xi = t - \eta$ , para una  $\eta$  fija. La expresión se transforma a:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-st} f(t-\eta) dt$$

considerando que  $\eta = \tau$  la expresión será:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt$$

al invertirse el orden de la integración obtenemos:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$$

que también es:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = L\{h(t)\}$$

# Métodos Numéricos

## *Introducción*

Cuando se considera el modelamiento de problemas dinámicos, siempre aparecen ecuaciones diferenciales que describen fenómenos transientes ó espacialmente distribuidos. Frecuentemente estas ecuaciones resultan difíciles, o lo que es más, imposibles de resolver analíticamente; por lo que requieren el empleo de algunas técnicas numéricas, estableciendo los algoritmos que nos permitan su adecuada implementación.

Existen dos clases fundamentales de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's). Problemas de valor inicial (PVI's), los cuales tratan con sistemas espacialmente homogéneos que cambian con el tiempo y problemas con valores a la frontera (PVF's) que involucran sistemas en estado estacionario con gradientes internos. Los sistemas que presentan ambos tipos de problemas se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales parciales cuyas soluciones son significativamente complejas y no serán discutidas en este trabajo.

## *Problemas Genéricos*

Existen dos tipos de métodos numéricos para resolver EDO's, métodos de un solo paso y métodos multipaso. Ambos métodos estiman la solución como una sucesión de valores a intervalos específicos para generar una función que satisface la ecuación diferencial. Los métodos de un solo paso necesitan solamente un valor para estimar la solución en cada intervalo de tiempo, posteriormente esta estimación se emplea para encontrar el valor de la función en el intervalo de tiempo subsecuente. Los métodos multipaso están basados en la extrapolación de ecuaciones en diferencias, regularmente combinados con algún método iterativo de interpolación para refinar la solución (métodos predictor-corrector). Estos métodos requieren de dos o más valores de la función a un tiempo para obtener la siguiente estimación.

Ambos métodos son igualmente exactos; sólo que los métodos multipaso ofrecen mejores resultados cuando la función tiene un comportamiento "pobre" es decir, sus derivadas cambian con rapidez extrema o es discontinua para ciertos valores de la variable independiente. Sin embargo, estos métodos sufren la desventaja de requerir más de un valor inicial. La mayoría de PVI's no disponen de valores iniciales múltiples, de manera que su solución solamente puede ser generada por métodos de un solo paso. Adicionalmente, dado que la ecuación de interpolación es iterada muchas veces para reducir el error, los requerimientos

computacionales de los métodos multipaso pueden exceder a los que se requieren para los métodos de un solo paso.

### **Problemas de Valor Inicial (PVI's)**

En PVI's como el caso de un tanque agitado, los parámetros específicos como temperatura o concentración, se suponen uniformes al interior del sistema y solamente varían con el tiempo. Los modelos PVI's de parámetro fijo tienen amplia aplicación en el diseño de reactores, control de procesos y cinética química. Las restricciones matemáticas sobre el sistema son los valores de los parámetros dados al tiempo cero.

Los PVI's están definidos por una ecuación diferencial, acompañada de sus respectivas condiciones iniciales, las cuales son los valores de las variables independientes, la función y su derivada en  $t = 0$ , donde  $t$  es el tiempo. La mayoría de PVI's son de primer orden.

#### **PVI's de Primer orden**

La forma general de los PVI's de primer orden es:

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

El objetivo de la solución es el de estimar  $x(t)$  o el valor de  $t$  que corresponda al valor conocido de  $x$ .

#### **Problema XI: Conversión de Sacarosa a Glucosa en un reactor agitado**

La glucoamilasa inmovilizada es una enzima que transforma sacarosa en glucosa. Un problema con la glucoamilasa se presenta a concentraciones altas de glucosa, en donde ocurre una reacción no deseada de sacarosa. Una vía para reducir la formación de este producto secundario es limitando la concentración de glucosa, lo que permite el control de la conversión de sacarosa.

Considere un reactor perfectamente mezclado que contiene una cantidad fija de glucoamilasa inmovilizada. Suponga que la producción de glucosa sigue una cinética de pseudo-segundo orden. La solución de sacarosa es alimentada al reactor y, para controlar la concentración de glucosa, los productos se retiran a la misma velocidad, la velocidad de flujo se selecciona de manera tal que el rendimiento de glucosa se mantenga en 50%. El reactor inicia con una

solución de sacarosa a la concentración de alimentación ¿cuánto tiempo tomará al reactor alcanzar el 95% de la concentración en equilibrio de glucosa?  $q, A, V$

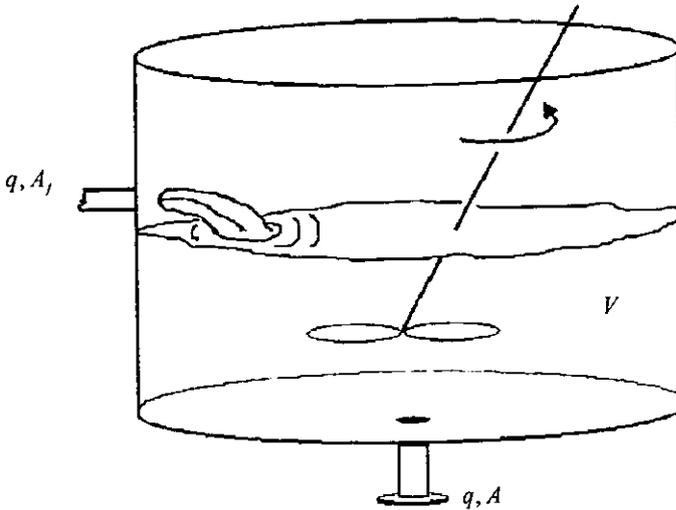


Figura 11 Conversión de Sacarosa a Glucosa en un reactor bien agitado

El modelo diferencial es:

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{q}{V} [A_1] - k[A]^2 - \frac{q}{V} [A]$$

Los parámetros tienen los valores siguientes:  $q = 100 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ ;  $V = 10,000 \text{ gal}$ ;  $[A_1] = 5 \frac{\text{lb}}{\text{gal}}$ ;

$k = 0.004 \frac{\text{gal}}{(\text{min})(\text{lb})}$ . Por simplicidad es conveniente escribir el problema en términos de variables adimensionales, como:

$$\theta = \frac{tq}{V}$$

$$\gamma = \frac{Vk[A_1]}{q}$$

$$\zeta = \frac{[A]}{[A_1]}$$

Sustituyendo valores tenemos que:  $\gamma = 2$ .

Las condiciones iniciales son cuando:  $\theta = 0, \zeta(\theta) = 1$

Sustituyendo en la ecuación original queda:

$$\zeta' = 1 - \zeta - 2\zeta^2 = f(\theta, \zeta)$$

donde  $\zeta' = \frac{d\zeta}{d\theta}$

El valor asintótico de  $\zeta$  ocurre en el 50% de conversión de sacarosa a glucosa. ¿Cuánto tiempo tomará para alcanzar el 95% del valor asintótico? que es:

$$\zeta = 1 - (0.95 \cdot 0.5) = 0.525$$

Esta ecuación tiene solución analítica por el método de Riccati. Insertando los parámetros del ejemplo, la solución específica es:

$$\zeta = \frac{2e^{3\theta} + 1}{4e^{3\theta} - 1}$$

El 95% de conversión se encuentra cuando  $\theta = 0.90819$ , valor que corresponde a  $t = 90.819 \text{ min}$ .

Los métodos numéricos para PVI's son equivalentes a las técnicas de integración numérica. La variable independiente ( $t$ ) se subdivide en intervalos. Los puntos que definen cada intervalo se conocen como puntos de malla. Empezando por las condiciones iniciales, se efectúa una estimación de  $x(t)$  en el siguiente punto de malla (el próximo paso en el tiempo) para generar  $t_1$ . El nuevo valor se emplea para estimar el siguiente punto y así sucesivamente. Estos son los frecuentemente llamados procedimientos en marcha, dado que involucran estimaciones de  $x(t)$  en pasos secuenciales. La solución de este modelo también se puede obtener a partir de una representación funcional utilizando métodos de interpolación, tales como splines cúbicos [Tao, Bernard, 1987].

Tal como sucede con todas las técnicas numéricas, la exactitud de los métodos se puede cuantificar. Con las soluciones en marcha, se emplea el error por truncamiento local (ETL), que no es más que la cantidad de error introducida por la técnica de aproximación sobre un solo paso. El ETL depende de varios factores, entre los que se encuentran el tamaño de paso, el método usado y el comportamiento del sistema.

### Método de series de Taylor

La base matemática para el desarrollo de métodos numéricos adecuados a PVI's es la expansión en series de Taylor. Esta expansión estima el valor de una función, ubicado a una pequeña distancia de un valor conocido, usando la derivada de la función.

Dada una función,  $g(t)$  con derivadas continuas en la región alrededor de  $t = a$  el valor de  $g(a + h)$ , donde  $h$  es pequeña, es:

$$g(a+h) = g(a) + hg'(a) + \frac{1}{2!} h^2 g''(a) + \frac{1}{3!} h^3 g'''(a) + \dots$$

Repitiendo estos cálculos secuencialmente para valores de  $t_n = a + nh$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  obtenemos una serie de estimaciones de  $g(t)$ , si en cada cálculo se incluye un número infinito de términos se obtendrá una solución exacta. Sin embargo, el número de términos en la serie prácticamente puede ser finito; por lo que se puede aceptar algún grado de error. El orden de magnitud de este error por truncamiento está definido por la potencia más alta de los términos incluidos. En otras palabras, si el último término es de orden  $h^5$ , el error en que se incurre por el truncamiento de todos los términos de orden alto no es mayor de  $h^5$ . De esta manera, un método de  $n$ -ésimo orden, que incluye el término de la derivada de  $n$ -ésimo orden tiene un ETL de  $(h^n)$ . Así, al incluir más términos en la ecuación, se reduce el ETL.

Cuando se plantea un PVI, se dispone de  $g(0)$  y  $g'(0)$ . Tomando la derivada de  $g$  de más alto orden y utilizando la expansión en series de Taylor, se obtiene una estimación de  $g(\theta)$ . Desafortunadamente, la derivada de más alto orden no siempre se encuentra de manera sencilla; por lo que se necesitan métodos que pasen por alto este requerimiento.

### Método de Euler

Este método parte de la base de que la primera derivada es conocida, por tanto el camino lógico consiste en truncar los términos de alto orden y emplear tamaño de paso pequeño. Esta técnica se conoce como el método de Euler, matemáticamente este método se ve como:

$$g(a+h) = g(a) + hg'(a) = g(a) + hf(a, g)$$

En la ecuación anterior,  $f(a, g)$  representa el valor de una función en el punto  $a$  y en el valor de la función del tiempo  $g$ , para un punto  $a$  en el tiempo dado.

Se necesita un método para resolver la ecuación anterior, iniciamos con un punto  $a$  y le adicionamos una diferencia finita,  $h$  y repetimos este proceso hasta obtener un resultado correcto. Esto se cumple con:

$$w_0 = a \quad w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n)$$

donde  $w_n$  es la estimación de  $g(t_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Algoritmo del método de Euler

Dado el tamaño de paso  $h$ , la condición inicial  $y(t_0) = a$ , el número de iteraciones ( $\#iterac$ ) y la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y)$ , de tal suerte que  $w_0 = a$ .

Para  $i = 1$  hasta  $\# \text{iterac}$  :

- $\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i)$
- $t = t_0 + ih$
- *Salida* =  $\omega$

El método de Euler se interpreta geoméricamente como una aproximación a  $f(t)$  mediante el empleo de la pendiente  $f'(t)$ , en cada punto de la malla, para generar una función,  $\omega(t)$ , que aproxima  $f(t)$ . Esto se muestra en la figura 13 Para propósitos de ilustración, las dos funciones se separan claramente; con el método real las dos curvas podrían estar muy cercanas una de la otra. El error total se incrementa generalmente en forma lineal con el incremento de  $t$ . El ETL para este método es  $(h^n)$  y es proporcional al tamaño de paso. La tabla 12 muestra los valores que se obtienen para el ejemplo del reactor, utilizando  $h = 0.1$  y  $h = 0.001$ . Dado que el número de cálculos es inversamente proporcional al tamaño de paso, una solución exacta requiere de un gran número de cálculos. Por lo tanto, para este caso es deseable implementar un método de error de alto orden, por ejemplo, uno en el cual el término de error sea proporcional a la diferencia entre el valor real y el estimado elevado a una potencia mayor que uno. En la figura 13. El error es lineal (la diferencia entre los valores de la función real y estimado) para un error cuadrático, la diferencia es este valor se eleva a una potencia de cuarto orden. Las potencias más altas generan los errores más pequeños.

t,min	Sol.Analítica	Valor de $\zeta$	
		Métodos de Euler	
		( $h = 0.1$ )	( $h = 0.01$ )
0	1	1	1
20	0.73853159	0.69200000	0.73480497
40	0.62214519	0.58569186	0.61889970
60	0.56465910	0.54027616	0.56232894
80	0.53480868	0.51935288	0.53324380
100	0.51890546	0.50939418	0.51789120

Tabla 12 Solución del ejemplo con el método de Euler

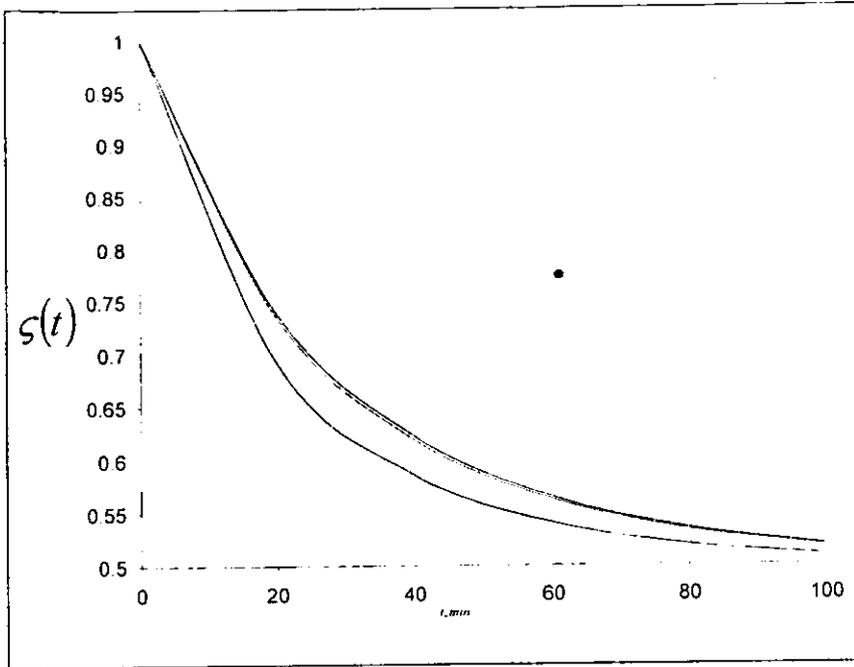


Figura 13 Solución del ejemplo con el método de Euler

### Método de Runge-Kutta

Este método fue diseñado para reproducir los términos de la serie de Taylor sin diferenciación de la ecuación original. El orden del método depende del número de términos reproducidos. Aquí desarrollaremos un método de segundo orden. Los métodos de orden más alto pueden deducirse de manera similar, si bien con una cantidad significativamente mayor de manipulaciones algebraicas. La deducción es basada sobre la expansión en series de Taylor para dos variables.

$$\begin{aligned}
 f(t+h, x+k) &= f + hf_t + kf_x \\
 &+ \frac{1}{2!} (h^2 f_{tt} + 2hkf_{tx} + k^2 f_{xx}) \\
 &+ \frac{1}{3!} (h^3 f_{ttt} + 3h^2 kf_{ttx} + 3hk^2 f_{txx} + k^3 f_{xxx}) + \dots
 \end{aligned}$$

donde :

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} \quad f_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad f_{tx} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

posteriormente, empleando una fórmula que involucra la evaluación de  $f(t, x)$ :

$$F_1 = hf(t, x)$$

$$F_2 = hf(t + \alpha h, x + \beta F_1)$$

una combinación lineal de  $F_1$  y  $F_2$  aproxima los términos de la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + C_1 F_1 + C_2 F_2 \\ &= x(t) + C_1 hf(t, x) + C_2 hf(t + \alpha h, x + \beta F_1) \end{aligned}$$

Posteriormente se determinan las nuevas restricciones  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , para compararlas con los coeficientes de la serie de Taylor, como se delinea en las siguientes seis ecuaciones.

Expandiendo el último término y usando la expansión de Taylor para dos variables:

$$f(t + \alpha h, x + \beta F_1) = f + \alpha hf_t + \beta hf f_x + \text{términos de alto orden}$$

Sustituyendo ésta en la ecuación anterior, y despreciando los términos de alto orden:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + C_1 hf + C_2 h(f + \alpha hf_t + \beta hf f_x) \\ &= x + C_1 hf + C_2 hf + \alpha C_2 h^2 f_t + \beta C_2 h^2 f f_x \end{aligned}$$

de la serie de Taylor

$$x(a+h) = x(a) + hx'(a) + \frac{1}{2!} h^2 x''(a) + \frac{1}{3!} h^3 x'''(a) + \dots$$

Reconociendo que:  $x'(t) = f(t, x)$

$$f''(t, x) = \frac{df(t, x)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = f_t + f_x f$$

Sustituyendo ésta en la serie de Taylor y eliminando los términos de alto orden.

$$x(a+h) = x + hf + \frac{1}{2!} h^2 (f_t + f f_x)$$

comparando esta ecuación con la obtenida anteriormente:

$$x(t+h) = x + C_1 hf + C_2 hf + \alpha C_2 h^2 f_t + \beta C_2 h^2 f f_x$$

tenemos que:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$C_2 \beta = \frac{1}{2}$$

Este sistema de cuatro variables con tres incógnitas tiene un grado de libertad; por lo tanto, para determinar los valores de tres de ellas, se debe seleccionar el valor de una. Para efectuar esta selección existen diversos métodos [Burden, 1981]. Un conjunto de valores cuidadosamente seleccionados es:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}; \alpha = \beta = 1$$

Lo que nos ofrece las ecuaciones de recursión:

$$\omega_0 = a$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$F_1 = hf(t_n, \omega_n)$$

$$F_2 = hf(t_n + h, \omega_n + F_1)$$

Dado que el ETL es  $(h^2)$ , se requiere el empleo de un método de Runge-Kutta de segundo orden para obtener un resultado más exacto. El método de Runge-Kutta más comúnmente empleado es de orden 4. El empleo de este método generará un resultado mucho más exacto; su algoritmo se presenta de la manera siguiente.

### *Algoritmo del Método de Runge-Kutta de 4º Orden*

Dado el tamaño de paso  $h$ , la condición inicial  $y(t_0) = a$ , el número de iteraciones ( $\#iterac$ ) y la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y)$ , de tal suerte que  $\omega_0 = a$ .

Para  $i = 1$  hasta  $\#iterac$  repetir los pasos:

1.  $F_1 = hf(t_i, \omega_i)$
2.  $F_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, \omega_i + \frac{1}{2}F_1\right)$
3.  $F_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, \omega_i + \frac{1}{2}F_2\right)$
4.  $F_4 = hf(t_i + h, \omega_i + F_3)$
5.  $\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$
6.  $t = t_0 + ih$
7. Salida =  $\omega$

Un planteamiento alternativo de finalización podría ser el de especificar un límite para  $t$ , en lugar de fijar un número máximo de iteraciones.

La tabla 14 muestra los valores calculados para  $\omega$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ , usando el ejemplo del rector con  $h = 0.1$ , la tabla 15 compara estos valores con aquellos encontrados para  $h = 0.01$ .

Dado que el ETL es de orden  $(h^4)$ , el error se reduce enormemente, comparado con el método Euler; sin embargo, se requieren cuatro evaluaciones por cada paso; así que, la reducción del tamaño de paso incrementa el número de cálculos Gill [Lapidus, 1982] ha sugerido una modificación que reduce los requerimientos de cómputo.

$h = 0.1$		$\omega(\theta) = 1$			
$\theta$	$\omega(\theta)$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
0	1	-2	-1.520000	-1.631552	-1.237463
0.1	0.840991	-1.255521	-0.989450	-1.044520	-0.821517
0.2	0.738574	-0.829558	-0.668983	-0.699528	-0.562731
0.3	0.669752	-0.566889	-0.464216	-0.482574	-0.394007
0.4	0.622178	-0.396388	-0.328030	-0.339706	-0.280183
0.5	0.588644	-0.281647	-0.234803	-0.242539	-0.201462
0.6	0.564681	-0.202409	-0.169634	-0.174913	-0.146021
0.7	0.547388	-0.146657	-0.123376	-0.127057	-0.106454
0.8	0.534822	-0.106892	-0.090171	-0.092779	-0.077938
0.9	0.525643	-0.078245	-0.066138	-0.068007	-0.057238
1	0.518914	-0.057457	-0.048638	-0.049989	-0.042132

Tabla 14 Cálculos para el método de Runge-Kutta de 4°orden

t, min	Sol. Analítica	Valor de $\zeta$	
		Métodos de R-K 4°	
		( $h = 0.1$ )	( $h = 0.01$ )
0	1	1	1
20	0.73853159	0.73857426	0.73853160
40	0.62214519	0.62217781	0.62214519
60	0.56465910	0.56468055	0.56465910
80	0.53480868	0.53482220	0.53480868
100	0.51890546	0.51891382	0.51890546

Tabla 15 Solución del ejemplo con el método de Runge-Kutta 4° orden

Otra manera de reducir el número de cálculos consiste en ajustar el tamaño de paso para mantener un ETL específico, con el avance de la solución. En las regiones de rapidez de cambio lenta, el tamaño de paso se podría incrementar, reduciendo el número de cálculos. De otra manera, en las regiones de alta rapidez de cambio, el tamaño de paso se podría reducir, con lo que se mejora la exactitud del método y reduce el ETL. Aquí presentamos un esquema revisado de ETL ampliamente usado, desarrollado por Fehlberg [Burden, 1981].

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

## Método de Runge-Kutta-Fehlberg

El método de Runge-Kutta-Fehlberg emplea una fórmula de ETL de 5° orden ( $h^5$ ) basado en diversas elecciones para los coeficientes del método de 4° orden. La diferencia entre los resultados con orden ( $h^4$ ) y ( $h^5$ ) nos da una estimación para el ETL. Se dispone de varias estrategias para cambiar el tamaño de paso en respuesta a un cambio en ETL. Por simplicidad, el algoritmo aquí empleado divide en dos o duplica el tamaño de paso. Fehlberg recomienda una estrategia más sofisticada, basada en la magnitud del error relativo.

### Algoritmo del Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Dado el tamaño de paso  $h$ , la condición inicial  $y(t_0) = a$ , el número de iteraciones ( $\#iterac$ ), la máxima tolerancia de error ( $Maxtol$ ), la mínima tolerancia de error ( $Minitol$ ) y la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y)$ , cuando  $t < b$ , se hace:

1.  $F_1 = hf(t_n, \omega_n)$
2.  $F_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, \omega_n + \frac{1}{4}F_1\right)$
3.  $F_3 = hf\left(t_n + \frac{3}{8}h, \omega_n + \frac{3}{32}F_1 + \frac{9}{32}F_2\right)$
4.  $F_4 = hf\left(t_n + \frac{12}{13}h, \omega_n + \frac{1932}{219}F_1 - \frac{7200}{219}F_2 + \frac{7296}{219}F_3\right)$
5.  $F_5 = hf\left(t_n + h, \omega_n + \frac{439}{216}F_1 - 8F_2 + \frac{3680}{513}F_3 - \frac{845}{4104}F_4\right)$
6.  $F_6 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, \omega_n - \frac{8}{27}F_1 + 2F_2 - \frac{3544}{2565}F_3 + \frac{1859}{4104}F_4 - \frac{11}{40}F_5\right)$
7.  $\omega_{n+1}(4) = \omega_n + \frac{25}{216}F_1 + \frac{1408}{2565}F_2 + \frac{2197}{4104}F_3 - \frac{1}{5}F_5$
8.  $\omega_{n+1}(5) = \omega_n + \frac{16}{135}F_1 + \frac{6656}{12825}F_3 + \frac{28561}{56430}F_4 - \frac{9}{50}F_5 + \frac{2}{55}F_6$

$\omega_{(4)}$  y  $\omega_{(5)}$  se refiere a las estimaciones de 4° y 5° orden, respectivamente.

9.  $Salida = \omega_{(4)}$
10. Si  $\frac{\omega_{(4)} - \omega_{(5)}}{h} > (Maxtol)$ , entonces  $h = 2h$

$$11. \text{ Si } \frac{\omega_{(4)} - \omega_{(3)}}{h} < (\text{Minitol}), \text{ entonces } h = \frac{h}{2}$$

Debido al error por redondeo digital, la rutina de ajuste de error puede ser inestable; por este motivo se recomienda emplear límites máximo y mínimo en el tamaño de paso. El control de ETL emplea dos cálculos funcionales adicionales por paso; para tamaño de paso pequeño, el número de cálculos se puede reducir empleando periódicamente el control de error, en lugar de hacerlo para todos los pasos.

Los métodos presentados solamente se pueden manipular en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden; los problemas prácticos involucran frecuentemente ecuaciones diferenciales de alto orden ó sistemas de ecuaciones diferenciales. Extendamos ahora estos métodos para solución de ecuaciones diferenciales de primer orden a situaciones más complejas.

t, min	Sol. Analítica	Valor de $\zeta$
		Métodos de R-K-F (hmax = 0.1) (hmin = 0.1)
0	1	1
20	0.73853159	0.73853159
40	0.62214519	0.62214519
60	0.56465910	0.56465910
80	0.53480868	0.53480868
100	0.51890546	0.51890546

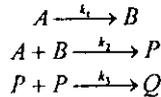
Tabla 16 Solución del ejemplo con el método Runge-Kutta-Fehlberg

### Nomenclatura del Problema XI:

- $t$  = Tiempo, min
- $q$  = Volumétrico, gal min
- $V$  = Volumen del reactor, gal
- $k$  = Constante de velocidad de reacción, gal (min)(lb)  
[incluye la cantidad de enzima presente]
- $[A]$  = Concentración de sacarosa en el reactor, lb gal
- $[A_0]$  = Concentración de sacarosa en la corriente de alimentación, lb gal.

## Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias

Es frecuente, en los problemas físicos, la presencia de varios sistemas interrelacionados, cuyo modelamiento matemático requiere del empleo de sistemas de ecuaciones diferenciales; por ejemplo, considere la producción en serie de compuestos secundarios en el reactor del ejemplo:



Suponiendo que las reacciones son elementales, el proceso se modela como un sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= \frac{1}{V} (q[A_f] - q[A] - k_1[A] - k_2[A][B]) \\ \frac{d[B]}{dt} &= \frac{1}{V} (-q[B] + k_1[A] - k_2[A][B]) \\ \frac{d[P]}{dt} &= \frac{1}{V} (-q[P] + k_2[A][B] - k_3[P]^2) \\ \frac{d[Q]}{dt} &= \frac{1}{V} (-q[Q] + k_3[P]^2) \end{aligned}$$

Los valores de las condiciones iniciales son al tiempo cero;  $[A] = [A_f]$ ,  $[B] = [P] = [Q] = 0$

Los sistemas acoplados de EDO's no lineales raramente tienen solución analítica, sin embargo estos sistemas se pueden resolver numéricamente a través de los métodos delineados para PVI's en EDO's sencillas. El primer paso consiste en adimensionalizar los valores de los parámetros:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{[A]}{[A_f]}; & x_2 &= \frac{[B]}{[A_f]}; & x_3 &= \frac{[P]}{[A_f]}; & x_4 &= \frac{[Q]}{[A_f]} \\ \theta &= \frac{tq}{V}; & \varepsilon_1 &= \frac{k_1}{q}; & \varepsilon_2 &= \frac{k_2[A_f]}{q}; & \varepsilon_3 &= \frac{k_3[A_f]^2}{q} \end{aligned}$$

el sistema se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= 1 - x_1 - \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{d\theta} &= -x_2 + \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_1 x_2 \\ \frac{dx_3}{d\theta} &= -x_3 + \varepsilon_2 x_1 x_2 - \varepsilon_3 x_3^2 \\ \frac{dx_4}{d\theta} &= \varepsilon_3 x_3^2 - x_4 \end{aligned}$$

Siendo las condiciones iniciales: cuando  $\theta = 0$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Cada una de estas ecuaciones se resuelve individualmente para cada paso, empleando los métodos delineados previamente. Al trabajar con un método de Runge-Kutta de 4° orden, cada paso requiere 16 cálculos funcionales, cuatro por ecuación. Se presenta un algoritmo de cómputo adecuado, en donde los sistemas de ecuaciones se pueden escribir en notación matricial, por conveniencia, es decir, se escribirán en la forma  $X' = F(X)$ , en donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} 1 - x_1 - \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_1 x_2 \\ -x_2 + \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_1 x_2 \\ -x_3 + \varepsilon_2 x_1 x_2 - \varepsilon_3 x_3^2 \\ \varepsilon_3 x_3^2 - x_4 \end{bmatrix}$$

### Algoritmo de sistemas de Primer Orden

Dada la función matricial  $X' = F(X)$  con las condiciones iniciales  $X(0)$ , el tamaño de paso  $h$ , y el límite  $t = b$ :

Para  $t < b$ , efectuar los pasos:

1.  $F_1(X) = F(X)$
2.  $F_2(X) = F\left(X + \frac{1}{2} hF_1\right)$
3.  $F_3(X) = F\left(X + \frac{1}{2} hF_2\right)$
4.  $F_4(X) = F(X + hF_3)$
5.  $X(t_n + 1) = X(t) + \frac{1}{2} h(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$

### Ecuaciones de Orden Superior

La solución de PVI's de alto orden es similar a la solución de sistemas de EDO's. El truco consiste en descomponer la ecuación diferencial de enésimo orden en un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden y pasando a la solución del sistema a través del empleo de los métodos delineados previamente, haciendo una sustitución de variables para las derivadas de la ecuación. Por ejemplo, el siguiente PVI altamente no lineal con restricciones.

$$y'' = y'' \cos(y') + \ln y(\tan \theta)$$

Siendo las condiciones iniciales: cuando  $\theta = 0$ ;  $y''(0) = a$ ;  $y'(0) = b$ ;  $y(0) = c$

Las nuevas variables son:  $x_1 = \theta$ ;  $x_2 = y'$ ;  $x_3 = y''$ ;  $x_4 = y''$

Y diferenciando cada variable:

$$x'_1 = 1; \quad x'_2 = x_3; \quad x'_3 = x_4; \quad x'_4 = x_4 \cos(x_3) + \ln x_2 (\tan x_1)$$

Ahora los valores iniciales son:

$$x_4 = a, \quad x_3 = b, \quad x_2 = c, \quad \text{y } x_1 = 0$$

Reconociendo a  $X' = F(X)$  como un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden, este problema se resuelve usando los métodos descritos anteriormente ( para grandes sistemas de ecuaciones, la retransformación se simplifica a través de una tabla de transformación de variables).

## Resumen de PVI's

Los métodos aquí presentados nos permiten conocer la solución numérica de PVI's de primer orden; empleándose también, por extensión, para la solución de EDO's complejas y de sistemas de EDO's. La exactitud de los métodos o el número de cálculos involucrados de puede establecer a través de la determinación del tamaño de paso. Existen dos formas para efectuar esta toma de decisión: manualmente ó a través del monitoreo del ETL.

La gran ventaja que ofrecen estos métodos es que podemos resolver ecuaciones diferenciales altamente no lineales, sin emplear técnicas aproximadas de linealización u otro tipo de simplificaciones de los sistemas. Sin embargo, la carga computacional se incrementa severamente con el incremento de EDO's. Partiendo de la base de que estos sistemas acoplados son frecuentemente propensos a singularidades y comportamiento oscilatorio, los resultados deben ser cuidadosamente monitoreados para detectar errores.

No hemos mencionado una palabra alrededor de la exactitud de estos métodos, debido a que los errores adicionales por truncamiento o por redondeo digital pueden jugar un papel importante en el error total. Por ejemplo, dependiendo de que tan pequeño es el tamaño de paso, pueden aparecer errores debidos a las divisiones o multiplicaciones que involucren  $h$ . De la misma manera, para sistemas que efectúen comparaciones de términos exponenciales y no exponenciales, la exactitud de los exponentes puede causar problemas también. La línea base consiste siempre en analizar cuidadosamente la solución suministrada por los métodos numéricos para determinar si tiene o no sentido; Revisar si cualquier comportamiento al interior del sistema podría causar errores extremos o invalidar la solución; y finalmente, tratar de emplear métodos diferentes para verificar los resultados, si esto es posible.

## ***Problemas con Valor a la Frontera (PVF's)***

Los PVF's suponen la existencia de variaciones espaciales (los parámetros se encuentran distribuidos) dentro del sistema, mientras que éste se encuentra en estado estable. Los modelos de parámetro distribuido se emplean en sistemas que involucran transporte de momentum (cantidad de movimiento), calor o masa. En este caso, las restricciones matemáticas son los valores de los parámetros en las fronteras del sistema, y debido a la geometría de los sistemas, los PVF's son de naturaleza más compleja que los PVI's. Los métodos numéricos para solución de PVF's requieren el conocimiento de técnicas como diferencias finitas; perturbación (una función que produce un pequeño cambio en el valor de una función dada); o intentos por ajustar una forma funcional a la solución, basada en técnicas de colocación (mediante la comparación de una función corriente con otra) las cuales requieren un antecedente matemático más sofisticado. Sin embargo discutiremos un método para resolver PVF's, con base en una simple extensión de los procedimientos para la solución de PVI's.

La mayoría de PVF's se pueden ejemplificar a través de EDO's de 2° orden, que poseen restricciones específicas en las formas del sistema:

$$y'' = f(t, y, y'); \quad y(a) = \alpha; \quad y(b) = \beta$$

**Problema XII: Generación de calor en una resistencia eléctrica.**

En el problema de generación de calor a través de una resistencia eléctrica en un alambre con temperatura cercana a su temperatura de superconductividad, la resistencia eléctrica, así como la producción de calor resistivo, se incrementa con la temperatura. Para minimizar la temperatura interna del alambre, se emplea un alambre anular a través del cual fluye líquido enfriante, tanto por el interior como por el exterior ¿cuál es la temperatura máxima, en estado estacionario, al interior del alambre?

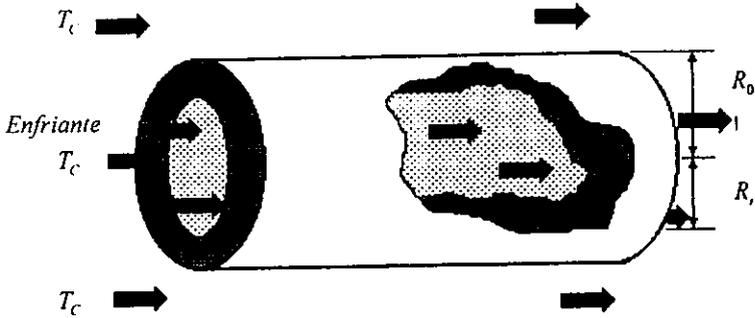


Figura 17 Ejemplo de un problema con valores a la frontera

Si la conductividad térmica y el calor disipado son funciones de la temperatura, el modelo diferencial de este sistema es:

$$\frac{d}{dr} \left( -rk(T) \frac{dT}{dr} \right) = h(T)r$$

$$r = R_0 \rightarrow T = T_c$$

$$r = R_i \rightarrow T = T_c$$

En donde  $T_c$  = temperatura del líquido enfriante.

Si  $h(T)$  y  $k(T)$  son constantes o funciones simples de  $T$ , se puede construir la solución analítica de este problema [Bird,1960]; sin embargo, si  $h$  y  $k$  son complejas, no es posible determinar tal solución; por lo que se requiere de una solución numérica. Desarrollando el modelo diferencial:

$$rkT'' + rk'T'^2 + kT' + rh = 0$$

Reescribir el modelo para hacerlo adimensional:

$$\theta'' + \frac{k'}{k} T_c \theta'^2 + \frac{1}{\varepsilon} \theta' + \frac{R_0^2}{T_c k} h = 0$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_c} \quad \varepsilon = \frac{r}{R_0}$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\varepsilon}$$

Suponga que la conductividad térmica y la disipación de calor tienen los siguientes comportamientos:

$$k = k_0(1 + \theta^2)$$

y

$$h = h_0 e^{\theta r_c}$$

entonces:

$$\theta'' + \frac{2\theta}{(1 + \theta^2)} \theta'^2 + \frac{1}{\varepsilon} \theta' + \frac{R_0^2}{T_c k_0 (1 + \theta^2)} e^{\theta r_c} = 0$$

Esta ecuación es diferencial de segundo orden altamente no lineal, cuya solución analítica no existe; sin embargo, es un PVF de dos puntos que se puede resolver mediante una extensión de los métodos previamente descritos para PVI's, llamado el método del disparo

Las condiciones de frontera son:

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_0} \rightarrow \theta = 0$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \theta = 0$$

### Método de Disparo

El método de disparo es una técnica de búsqueda similar a la determinación de la raíz de una función. Primero, reconoce que, si la restricción inicial en la primera derivada fuera especificada a cambio de una segunda condición de frontera, el problema se podría resolver como un PVI. Dado que la función es continua, debe existir su primera derivada en la posición inicial; de esta manera, un método consiste en encontrar un valor para esa primera derivada, que satisfaga la segunda condición de frontera en la solución numérica. El método de búsqueda involucra la estimación de trayectorias iniciales, de ahí su nombre.

Matemáticamente

$$y'' = f(\theta, y, y')$$

con  $y(a) = \kappa$  y  $y(b) = \eta$ .

Dado un valor  $y'(a) = z$ ,  $\omega(b)$  se estima a través de los métodos de solución numérica para PVI's. El valor de  $\omega(b)$  predicho debería ser aceptablemente cercano a  $\eta$ ; si esto no ocurre, se debe intentar la búsqueda de otro valor para  $y'(a)$ . Suponga que alguna función  $q(z)$  describe la dependencia de  $\omega(b)$  en  $z$ . El truco consiste en buscar eficientemente un valor de  $z$  que

corresponda a  $\omega(b) = \eta$  (Esto es como buscar raíces de una función, excepto porque la función es desconocida).

Las estrategias de búsqueda empleadas son las mismas que aquellas que permiten encontrar las raíces de una ecuación [Tao,1988]; una estrategia simple consiste en usar un modelo lineal para  $q(z)$ . Dadas dos suposiciones de  $q(z)$ , la siguiente se estima por aproximación lineal. Con el uso de más puntos, se puede evitar el uso de las estrategias de estimación de alto orden [Cheney,1980]; el algoritmo que se emplea hace una búsqueda lineal.

### *Algoritmo para el método de disparo*

Dada la ecuación diferencial con sus condiciones a la frontera

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta$$

el tamaño de paso  $h$ , la suposición inicial de  $y'(a)$  y  $(Maxtol)$  = tolerancia de error para la solución de la condición a la frontera  $y(b)$ .

Primero: se descompone el sistema en tres ecuaciones de primer orden, usando el método dado para PVI's de alto orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= 1 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Segundo: este sistema es resuelto usando el método para sistemas de ecuaciones de enésimo orden. Inicialmente esto se realizará varias veces a diferentes valores de  $y'(a)$  para suministrar los puntos iniciales de la búsqueda.

Tercero: si  $x_2 = y(b) > (Maxtol)$ , use la estrategia de búsqueda para estimar un nuevo valor de  $y'(a)$  y repita el segundo paso. Repetir estos dos pasos hasta que  $x_2 - y(b) < (Maxtol)$ .

Se dispone de varias técnicas de búsqueda, en el empleo de estas técnicas se deben observar las mismas precauciones que se han comentado previamente, acerca de la estabilidad y la rapidez de convergencia de estrategias de búsqueda de raíces [Tao,1988].

A pesar de que el método es teóricamente válido, el valor de  $\omega(b)$ , usualmente, es muy sensitivo al valor exacto de  $z$ ; por lo que la exactitud digital juega un papel muy importante en la convergencia de este método. Para determinar si es este el caso, es prudente efectuar algunas estimaciones preliminares acerca de la sensibilidad que presenta  $\omega(b)$  con  $z$ , previo a emplear el método, para garantizar resultados altamente exactos.

En el ejemplo a través de la sustitución de las variables son:  $x_1 = \varepsilon$ ;  $x_2 = \theta$ ;  $x_3 = \theta'$ ;  $x'_1 = 1$  y  $x'_2 = x_3$ , tenemos:

$$x'_3 = \frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} x_1 - \frac{1}{x_1} x_3 + \frac{R_0^2 x_2}{T_c k_0 (1+x_2^2)} e^{x_3/t_c}$$

Las condiciones a la frontera son:

$$x = \varepsilon_0; x_2 = 0$$

$$x = 1; x_2 = 0$$

suponga un valor para  $x_3$  y resuelva para  $x_2$  en  $x_1 = 1$ ; si  $x_2$  no es cero en  $x_1 = 1$ , intente con otro valor para  $x_3$ . Este procedimiento continua hasta obtener un valor aceptable para  $x_2$ . La Tabla 18 contiene los valores calculados a través del empleo de los siguientes valores para los parámetros:  $R_0 = 1 \text{ cm}$ ;  $T_c = 100 \text{ K}$ ; y  $k = 0.1 \frac{\text{Watt}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}}$ . La estrategia estima  $x_3$  y el perfil resultante se muestra en la figura 19.

Tolerancia de error=0.00001	N=10	Disparo 1.0
$\varepsilon$	$\theta$	$\theta'$
0.50	0	0.429950
0.55	0.020484	0.390472
0.60	0.039106	0.353862
0.65	0.055551	0.294935
0.70	0.066584	0.122168
0.75	0.065370	-0.155191
0.80	0.054007	-0.271569
0.85	0.039923	-0.283761
0.90	0.025970	-0.273083
0.95	0.012653	-0.259582
1	0	-0.247716

Tabla 18 Solución del problema con valores a la frontera

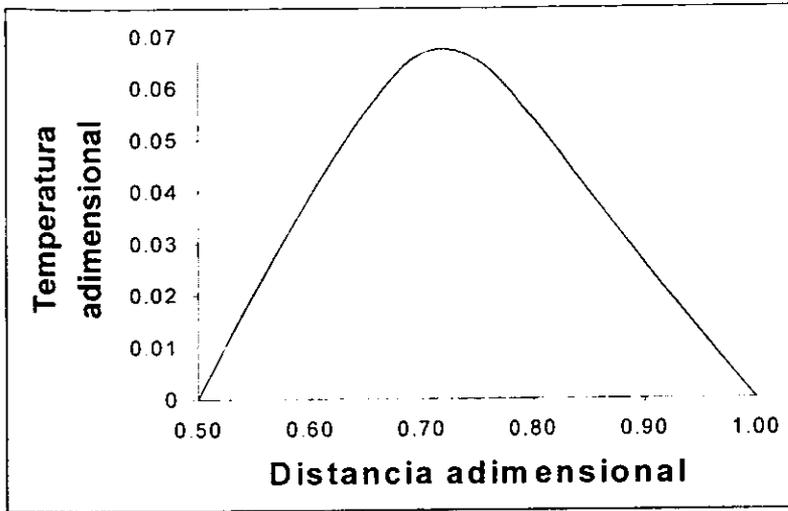


Figura 19 Perfil de temperatura en un alambre anular

Otros métodos empleados en la solución de PVF's [Lapidus,1982], involucran el uso de técnicas de diferencias finitas y teoría de perturbación; sin embargo, estos métodos son absolutamente sensitivos a la linealidad del sistema de ecuaciones, de manera que no pueden emplearse en sistemas altamente no lineales. La ventaja principal del método de disparo es que permite la solución de sistemas altamente no lineales, usando algunas técnicas ya establecidas para la solución de PVI's.

Es posible extender los métodos numéricos a la solución de problemas con valores a la frontera de dos puntos, empleando técnicas de búsqueda; mientras no se presente una garantía de convergencia, los métodos son teóricamente válidos y son capaces de manipular sistemas no lineales, usando métodos para PVI's.

En la medida en que se emplean sistemas más sofisticados, se pierde la sensación intuitiva para la solución, de tal manera que se torna crítico el asegurar que la solución numérica es apropiada; por lo que los resultados siempre deben revisarse y compararse con las ecuaciones originales para tener certeza en la exactitud. Estos resultados deben ser cuidadosamente escrutados para poder decir que reflejan fielmente la realidad física. Se deben emplear trampas para errores o monitoreo progresivo de la solución a fin de encontrar errores digitales o singularidades numéricas.

Finalmente; a pesar que estas técnicas constituyen herramientas poderosas para resolver problemas específicos, no pueden ser sustitutos del análisis teórico válido; dado que siempre existirán sospechas debido a los errores digitales y de cómputo. Además, los métodos numéricos solamente suministran soluciones específicas y no pueden predecir el comportamiento general del sistema bajo diferentes condiciones. La comprensión del comportamiento del sistema solamente puede ser adquirida a través del análisis teórico fundamental.

#### Nomenclatura del Problema XII:

- $T =$  temperatura
- $k(T) =$  conductividad térmica como función de la temperatura
- $h(T) =$  disipación de calor como función de la temperatura
- $r =$  distancia radial desde el centro del alambre

## Método de colocación Ortogonal

El método de colocación ortogonal es una técnica eficiente para resolver ecuaciones integrales o diferenciales que describen problemas de transporte (transferencia de momento, calor y masa) ajustando una solución prueba en puntos seleccionados. El método se visualiza como de un proceso  $V$  descrito por una ecuación o un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales o no-lineales.

$$L_V y = 0$$

Con condiciones frontera o iniciales  $S$  lineales o no-lineales.

$$L_S y = 0$$

$L_V$  y  $L_S$  definen el espacio y condiciones de la ecuación diferencial o integral a resolver,  $y$  es la variable dependiente. Para resolver el modelo del proceso  $L_V y = 0$ , [Villadsen y Stewart, 1967] propone una solución  $\tilde{y}_n$  que aproxima a la solución exacta, denominada función prueba.

$$\tilde{y}_n = y_0 + \sum_{i=1}^n b_i P_i(x)$$

La solución de la función prueba es de orden de aproximación  $n$ , con parámetros  $b_i$  indeterminados y una combinación lineal de funciones  $P_i$  conocidas. Los parámetros  $b_i$  son determinados en  $n$  puntos, donde se sabe que la función prueba satisface la ecuación que define el modelo del proceso, las condiciones frontera y las condiciones iniciales. Los puntos seleccionados son las raíces de una función, la cual es combinación lineal de una familia de funciones ortogonales. Estos puntos, denominados puntos de colocación, minimizan el error de aproximación en la región de interés.

Se han propuesto varios métodos para aproximar la solución de este problema, los cuales difieren entre sí por los criterios para seleccionar las funciones ortogonales  $P_i$ , las condiciones del modelo y los puntos donde se determinan los parámetros  $b_i$ . [Stewart, 1984] clasifica los métodos de aproximación de la solución de la manera siguiente:

- A Métodos de residuos pesados
  - Mínimos cuadrados.
  - Métodos variacionales.
  - Colocación ortogonal.
  - Elemento finito.
  
- B Métodos de diferencias finitas

De los métodos de aproximación de la solución referidos, el de diferencias finitas es más fácil de automatizar. Sin embargo, el espaciamento equivalente entre los puntos de la coordenada independiente con frecuencia es una desventaja, ya que no representa adecuadamente a los segmentos no lineales del proceso. Colocación ortogonal es un poco más difícil de automatizar, utiliza un espaciamento óptimo y representa mejor segmentos no lineales. Colocación ortogonal se ubica entre los métodos de residuos pesados, también conocidos como métodos de distribución del error. Discutiremos una de las tres estrategias disponibles en la colocación ortogonal.

### Colocación interior.

Esta estrategia de colocación ortogonal requiere que la solución prueba  $y_n$  satisfaga idénticamente las condiciones frontera. La solución debe cumplir con las condiciones  $L_1 y_n = 0$  y  $L_2 y_n = 0$ . Para resolver el modelo de un proceso representado por la ecuación diferencial  $L_1 y = 0$  es posible proponer una función prueba de la forma

$$y_n = y_{(1)} + (1 - x^2) \sum_{r=0}^{n-1} b_r P_r(x^2)$$

La función prueba  $y_n$  satisface las condiciones frontera en  $x^2 = 1$ .

Las funciones  $P_r(x^2)$  son una familia de polinomios ortogonales;  $b_r$  son los coeficientes de la combinación lineal de polinomios. Las raíces del polinomio que resulta de la combinación lineal de los polinomios ortogonales  $P_r(x^2)$  nos proporcionan los puntos de colocación o puntos de cuadratura óptima.

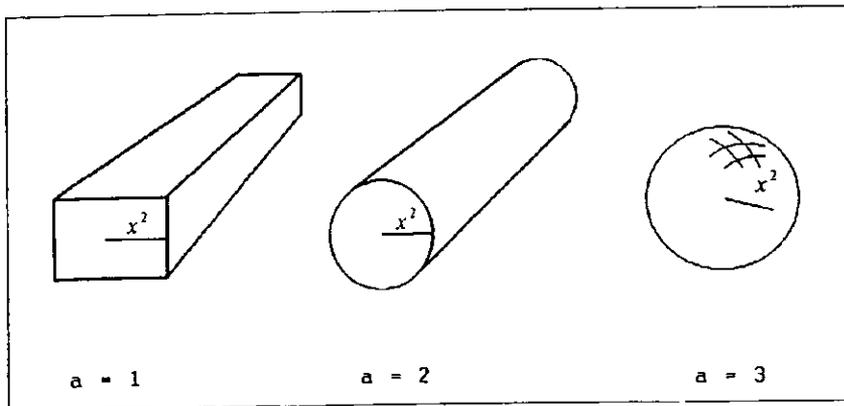


Figura 20 Sistemas geométricos simétricos.

### Sistemas geométricos simétricos.

Considere una región geométrica simétrica limitada  $x^2 = 1$  (figura 20). Es posible definir un parámetro  $a$  para identificar diferentes geometrías:  $a = 1$  para geometría rectangular,  $a = 2$  para geometría cilíndrica y  $a = 3$  para geometría esférica. Se puede aproximar un elemento diferencial de volumen como una función de la coordenada independiente y el parámetro de geometría  $a$ .

$$dV = x^{a-1} dx$$

Además, estos sistemas geométricos simétricos cumplen con las siguientes condiciones

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$f(x) = f(-x)$$

Por lo tanto, el perfil característico de la coordenada independiente es de la forma mostrada en la figura 21, lo cual justifica seleccionar la familia de polinomios ortogonales de la forma  $P_i(x^2)$  y no de la forma  $P_i(x)$ .

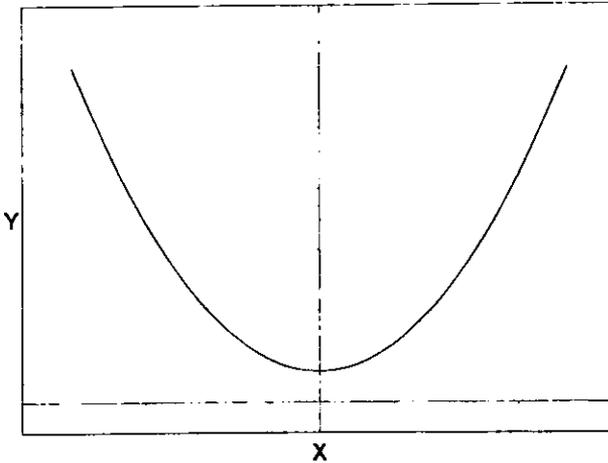


Figura 21 Perfil característico de la coordenada independiente.

La experiencia ha demostrado que muchos modelos de importancia práctica para ingeniería se representan por ecuaciones diferenciales de segundo orden (Carnahan, 1969), por mencionar algunas: ecuación de conducción de calor, ecuación de transporte de vorticidad, ecuación de Poisson, ecuación de onda, ecuación de difusión, etc. La solución a estas ecuaciones se

se simplifica cuando se definen condiciones a la frontera simétricas con geometría rectangular, cilíndrica o esférica.

Reducción de la forma diferencial.

Una característica importante de los polinomios ortogonales consiste en que, una combinación lineal de una familia de polinomios ortogonales

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n b_i P_i(x)$$

está en correspondencia con un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales de la forma

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n e_i x^i$$

Si la función prueba es de la forma

$$y_n = y_{(1)} + (1-x^2) \sum_{i=0}^{n-1} b_i P_i(x^2)$$

entonces, una forma alternativa de escribir la función prueba es la siguiente:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n+1} e_i x^{2i-2}$$

Como podemos observar, la función prueba alternativa es un polinomio  $P_n(x^2)$  de la forma

$$y_n = e_1 + e_2 x^2 + e_3 x^4 + \dots + e_{n+1} x^{2n}$$

Al evaluar la función prueba alternativa en cada punto de colocación, obtenemos:

$$y_{n_j} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i x_j^{2i-2}; \quad j = 1, \dots, n+1$$

La cual podemos expresar en forma matricial.

$$\tilde{y}_n = Qe$$

Donde

$$\tilde{y}_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 & \dots & x_1^{2n} \\ 1 & x_2^2 & \dots & x_2^{2n} \\ \vdots & \vdots & x_j^{2i-2} & \vdots \\ 1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{2n} \end{bmatrix}$$

Un punto importante es que con los valores de las ordenadas y los puntos de colocación conocidos podemos resolver para  $e$  y obtener los coeficientes de la función prueba, esta consideración será utilizada posteriormente para reducir las formas diferenciales.

De la ecuación anterior obtenemos:

$$e = Q^{-1} \tilde{y}_n$$

$Q$  es una matriz de dimensión  $[n+1, n+1]$  y sus elementos se definen como:  $Q_{j,j} = x_j^{2i-2}$

### Forma reducida de la primera derivada.

Derivando la forma alternativa de la función prueba y evaluando en cada punto de colocación resulta:

$$\frac{d\tilde{y}_n}{dx} \Big|_{x_j} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i \frac{dx^{2i-2}}{dx} \Big|_{x_j} \quad ; j = 1, \dots, n+1$$

La cual podemos expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\tilde{y}'_n = \frac{d\tilde{y}_n}{dx} = Ce$$

Donde

$$\tilde{y}'_n = \begin{bmatrix} \tilde{y}'_1 \\ \tilde{y}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}'_{n+1} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & \dots & 2nx_1^{2n-1} \\ 0 & 2x_2 & \dots & 2nx_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & (2i-2)x_j^{2i-3} & \vdots \\ 0 & 2x_{n+1} & \dots & 2nx_{n+1}^{2n-1} \end{bmatrix}$$

$C$  es una matriz de dimensión  $[n+1, n+1]$  y sus elementos se definen como:

$$C_{i,j} = (2i-2)x_j^{2i-3}$$

Substituyendo  $e = Q^{-1} \tilde{y}_n$  en la expresión de la primera derivada obtenemos la forma reducida de la ecuación diferencial

$$\frac{d\tilde{y}_n}{dx} = A\tilde{y}_n$$

$$A = CQ^{-1}$$

$A$  es una matriz de coeficientes reales de dimensión  $[n+1, n+1]$  obtenida a partir de los valores de los puntos de colocación. La siguiente expresión es la forma desarrollada de la ecuación

$$\frac{d\tilde{y}_n}{dx} = \sum_{i=1}^{n+1} A_{i,j} \tilde{y}_i(x_j) \quad j = 1, \dots, n+1$$

Como se observa, la ecuación diferencial de primer orden es reducida a un sistema de ecuaciones simultáneas. Los coeficientes  $A_{i,j}$  son valores conocidos, determinados por los valores de los puntos de colocación. La solución del sistema de ecuaciones corresponde a la solución de la ecuación diferencial en los puntos de colocación determinados.

### Forma reducida de la segunda derivada.

En virtud de que la expresión de la segunda derivada depende del sistema coordenado utilizado, es necesaria una expresión de trabajo donde se incluyan los tipos de sistemas de coordenadas para las geometrías referidas.

$$\bar{y}_n'' = x^{1-a} \frac{d}{dx} \left( x^{a-1} \frac{d\bar{y}_n}{dx} \right) = \begin{cases} \frac{d^2 \bar{y}_n}{dx^2}; & a = 1 \\ \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\bar{y}_n}{dx} \right); & a = 2 \\ \frac{d}{x^2 dx} \left( x^2 \frac{d\bar{y}_n}{dx} \right); & a = 3 \end{cases}$$

Para obtener la forma reducida de la segunda derivada se incluye el término que determina el sistema coordenado.

$$x^{1-a} \frac{d}{dx} \left( x^{a-1} \frac{d\bar{y}_n}{dx} \right) = x^{1-a} \frac{d}{dx} \left( x^{a-1} \sum_{i=1}^{n+1} e_i \frac{dx^{2i-2}}{dx} \right)$$

Desarrollando la ecuación, al evaluar en cada punto de colocación obtenemos la siguiente expresión.

$$\bar{y}_n'' = \sum_{i=1}^{n+1} e_i (2i-2)[(2i-3)+(a-1)] x^{2i-4}; \quad ; j = 1, \dots, n+1$$

La cual podemos expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$x^{1-a} \frac{d}{dx} \left( x^{a-1} \frac{d\bar{y}_n}{dx} \right) = \bar{y}_n'' = D e$$

Substituyendo  $e = Q^{-1} \bar{y}_n$  en la expresión de la segunda derivada, obtenemos la forma reducida de la ecuación diferencial de segundo orden.

$$\bar{y}_n'' = B \bar{y}_n'$$

$$B = D Q^{-1}$$

Donde

$$\bar{y}_n'' = \begin{bmatrix} \bar{y}_1'' \\ \bar{y}_2'' \\ \vdots \\ \bar{y}_{n+1}'' \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2a & (4a+8)x_1^2 & \cdots & (2n+a-4)(2n-2)x_1^{2n-4} \\ 0 & 2a & (4a+8)x_2^2 & \cdots & (2n+a-4)(2n-2)x_2^{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & D_{ii} & \vdots \\ 0 & 2a & (4a+8)x_{n+1}^2 & \cdots & (2n+a-4)(2n-2)x_{n+1}^{2n-4} \end{bmatrix}$$

La matriz  $D$  es dimensión  $[n+1, n+1]$  y sus elementos se definen como:

$$D_{ii} = [(2i-3)+(a-1)](2i-2)x_i^{2i-4}$$

$B$  de manera similar que  $A$ , es una matriz de coeficientes reales de dimensión  $[n+1, n+1]$  obtenida a partir de los valores de los puntos de colocación. La forma desarrollada de la ecuación matricial es:

$$\bar{y}_n^* = \sum_{i=1}^{n+1} B_{ji} \bar{y}_n(x_i) \quad j=1, \dots, n+1$$

Como se observa, la ecuación diferencial de segundo orden es reducida a un sistema de ecuaciones simultáneas. Los coeficientes  $B_{ji}$  son valores conocidos, determinados por los valores de los puntos de colocación. La solución del sistema de ecuaciones corresponde a la solución de la ecuación diferencial en los puntos de colocación determinados.

### Obtención de los factores de peso $W$ .

Cuando se requiere evaluar una integral, utilizamos la fórmula de cuadratura

$$\int_V f(x) dV = \sum_{i=1}^{n+1} w_i f(x_i)$$

Donde  $w_i$  son los factores de peso.

Utilizando la aproximación diferencial de un elemento de volumen ( $dV = x^{u-1} dx$ ), la fórmula de cuadratura se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_V f(x) dV = \int_0^1 f(x) x^{u-1} dx$$

Recordando que la función prueba se puede expresar como sigue:

$$\bar{y}_n = \sum_{i=1}^{n+1} e_i x^{2i-2}$$

Observando la similitud entre la fórmula de cuadratura y la función prueba.

$$F = \int_V f(x) dV = \sum_{i=1}^{n+1} w_i f(x_i) = \bar{y}_n = \sum_{i=1}^{n+1} e_i x^{2i-2}$$

Se derivan las siguientes expresiones.

$$f(x) = x^{2i-2}$$

$$e(x) = w(x) = x^{u-1}$$

Integrando la ecuación de cuadratura con aproximación diferencial de un elemento de volumen, se pueden conocer los valores de la ordenada en cada punto de colocación, lo cual nos proporciona un vector de valores ordenados.

$$F_i = \int_V f(x) x^{u-1} dx = \int_0^1 x^{2i-2} x^{u-1} dx \quad ; j=1, \dots, n+1$$

$$F_j = \int_0^1 x^{2j-2} x^{a-1} dx = \frac{1}{2j-2+a} \quad ; j = 1, \dots, n+1$$

Conocido el vector de ordenadas  $F_j$ , la función prueba se puede expresar como sigue:

$$F_j = \bar{y}_{nj} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i x_i^{2j-2} \quad j = 1, \dots, n+1$$

Esta ecuación se puede expresar en forma matricial, de manera similar como se hizo con las ecuaciones de la primera y segunda derivadas.

$$F = Qe$$

Pero, dado que  $e = W$ , entonces

$$F = QW$$

Por lo tanto, los factores de peso también se pueden obtener a partir de los valores de los puntos de colocación.

$$W = FQ^{-1}$$

Los factores de peso resultan útiles cuando se dispone de la ecuación diferencial que representa al modelo del proceso, pero se desean evaluar valores medios definidos como:

$$f(x) = \frac{\int_V f(x) dV}{\int_V dV}$$

La ecuación integral se expresa de manera equivalente.

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i}$$

Procedimientos de cálculo para los polinomios de Jacobi.

Obtención de los coeficientes de los términos de los polinomios de Jacobi.

Se calculan los coeficientes de los términos de los polinomios de Jacobi  $P_n(x^2) = 0$ , de acuerdo con la función:

$$P_n(x^2) = 1 + \frac{(-n) \left( n + \frac{a}{2} + 1 \right)}{1! \binom{a}{2}} x^2 + \dots + \frac{(-n)(-n+1) \dots (-1) \left( n + \frac{a}{2} + 1 \right) \dots \left( n + \frac{a}{2} + n \right)}{n! \binom{a}{2} \binom{a}{2} \dots \binom{a}{2+n-1}} x^{2n}$$

Donde  $n$  es el grado del polinomio en  $x^2$  y  $a$  corresponde con el tipo de geometría. La ortogonalidad de los polinomios de Jacobi asegura que los ceros o raíces de  $P_n(x^2) = 0$  sean reales, distintos y localizados en el intervalo abierto  $(0,1)$ .

Al obtener los coeficientes de los términos del polinomio de Jacobi, de acuerdo con el grado del polinomio y la geometría del sistema. Los resultados se muestran en la tabla 22.

a	n	$P_n(x^2)$	$P_n(x)$
1	1	$P_1(x^2) = 1 - 5x^2$	$P_2(x) = 1 + 0x - 5x^2$
	2	$P_2(x^2) = 1 - 14x^2 + 21x^4$	$P_4(x) = 1 + 0x - 14x^2 + 0x^3 + 21x^4$
	3	$P_3(x^2) = 1 - 27x^2 + 99x^4 - 85x^6$	$P_6(x) = 1 + 0x - 27x^2 + 0x^3 + 99x^4 + 0x^5 - 85x^6$
2	1	$P_1(x^2) = 1 - 3x^2$	$P_2(x) = 1 + 0x - 3x^2$
	2	$P_2(x^2) = 1 - 8x^2 + 10x^4$	$P_4(x) = 1 + 0x - 8x^2 + 0x^3 + 10x^4$
	3	$P_3(x^2) = 1 - 15x^2 + 45x^4 - 35x^6$	$P_6(x) = 1 + 0x - 15x^2 + 0x^3 + 45x^4 + 0x^5 - 35x^6$
3	1	$P_1(x^2) = 1 - 2.3x^2$	$P_2(x) = 1 + 0x - 2.3x^2$
	2	$P_2(x^2) = 1 - 6x^2 + 6x^4$	$P_4(x) = 1 + 0x - 6x^2 + 0x^3 + 6x^4$
	3	$P_3(x^2) = 1 - 11x^2 + 28.6x^4 - 20.4x^6$	$P_6(x) = 1 + 0x - 11x^2 + 0x^3 + 28.6x^4 + 0x^5 - 20.4x^6$

Tabla 22 Términos de los polinomios de Jacobi.

Obtención de las matrices  $Q, C, D$  y los factores de peso  $w$ .

Se construyen los elementos  $Q_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ , y  $F_i$  como sigue:

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2j+a-2} \\ Q_{ij} &= x_j^{2i-2} \\ C_{ij} &= (2i-2)x_j^{2i-3} \\ D_{ij} &= [(2i-2) + (a-2)](2i-2)x_j^{2i-4} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j=1, \dots, n+1 \\ i=1, \dots, n+1 \end{array}$$

por ejemplo, para  $a=1$  y  $n=2$  tenemos:

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^2 & x_1^4 \\ x_2^0 & x_2^2 & x_2^4 \\ x_3^0 & x_3^2 & x_3^4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 4x_1^3 \\ 0 & 2x_2 & 4x_2^3 \\ 0 & 2x_3 & 4x_3^3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12x_1^2 \\ 0 & 2 & 12x_2^2 \\ 0 & 2 & 12x_3^2 \end{bmatrix}$$

Las siguientes tablas muestran los resultados de las raíces de los polinomios de Jacobi o puntos de colocación, las tablas muestran los elementos de las matrices  $A_n$ ,  $B_n$  y el vector factor de peso  $W_n$ .

$n$	$x_j$	$A_{\mu}$	$B_{\mu}$	$W_j$
1	0.4472	-1.118 1.118	-2.5 2.5	0.8333
	1	-2.5 2.5	-2.5 2.5	0.1667
2	0.2852	-1.7530 2.5076 -0.7547	-4.7399 5.6771 -0.9373	0.5549
	0.7651	-1.3706 -0.6535 2.0241	8.3229 -23.2601 14.9373	0.3785
	1	1.7915 -8.7915 7	19.0719 -470719 28	0.0667
3	0.2093	-2.3889 3.5135 -1.7401 0.6155	-8.1079 9.6033 -2.0343 0.5389	0.4125
	0.5917	-1.5027 -0.8450 3.3435 -0.9958	11.6116 -27.2946 19.3095 -3.6264	0.3411
	0.8717	0.8178 -3.6741 -0.5736 3.4299	-3.9822 31.2613 -77.0974 49.8183	0.2107
	1	-1.4877 5.6276 -17.6399 13.500	-35.4326 1229363 -200 112500	0.0357

Tabla 23 Geometría rectangular ( $a=1$ )

$n$	$x_j$	$A_{\mu}$	$B_{\mu}$	$W_j$
1	0.5774	-1.7321 1-7321	-6 6	0.375
	1	-3 3	-6 6	0.125
2	0.3938	-2.5396 3.8256 -1.2860	-9.9024 12.2997 -2.3973	0.1882
	0.8031	-1.3777 -1.2452 2.6229	9.0337 -32.7643 23.7306	0.2562
	1	1.7155 -9.7155 8	22.7575 -65.4241 42.6667	0.0556
3	0.2976	-3.3598 5.2924 -3.1010 1.1684	-15.8814 19.6364 -5.2812 1.5262	0.1102
	0.6399	-1.3980 -1.5628 4.3197 -1.3589	11.1519 -34.4974 29.2357 -5.8902	0.1941
	0.8875	0.6972 -3.6767 -1.1268 4.1062	-3.5406 34.5121 -99.6212 68.6496	0.1644
	1	-1.2267 5.4011 -19.1744 15.00	-33.870 1362497 -2523797 150.00	0.0313

Tabla 24 Geometría cilíndrica ( $a=2$ )

$n$	$x_j$	$A_{\mu}$	$B_{\mu}$	$W_j$
1	0.6547	-2.2913 2.2913	-10.50 10.50	0.2333
	1	-3.50 3.50	-10.50 10.50	0.10
2	0.4688	-3.1993 5.0152 -1.8158	-15.6700 20.0349 -4.3649	0.0949
	0.8302	-1.4087 -1.8067 3.2154	9.9651 -44.3300 34.3649	0.1908
	1	1.6968 -10.6968 9.00	26.9329 -86.9329 60	0.04776
3	0.3631	-4.1309 6.8819 -4.5475 1.7965	-23.8531 30.5937 -9.7463 3.0057	0.0457
	0.6772	-1.3389 -2.2150 5.2891 -1.7351	11.0999 -43.2377 40.8188 -8.6810	0.1259
	0.8998	0.6257 -3.7406 -1.6671 4.7820	-3.3228 38.3568 -125.4093 90.3753	0.1340
	1	-1.0727 5.3256 -20.7528 16.50	33.6756 15.23752 -31.11996 19.250	0.0278

Tabla 25 Geometría esférica ( $a=3$ )

### Problema XIII: Flujo en un conducto circular

El flujo laminar en estado estacionario desarrollado por un fluido newtoniano, densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  constantes en un conducto circular donde  $r \ll L$ . El movimiento puramente axial cuya velocidad  $v_z = v_z(r)$  permite que la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas se describa por la siguiente ecuación diferencial.

$$\mu \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\Delta P}{L} = 0$$

Con las condiciones frontera: en  $r = R$ ,  $v_z = 0$ . Se requiere encontrar el perfil de velocidades  $v_z$ .

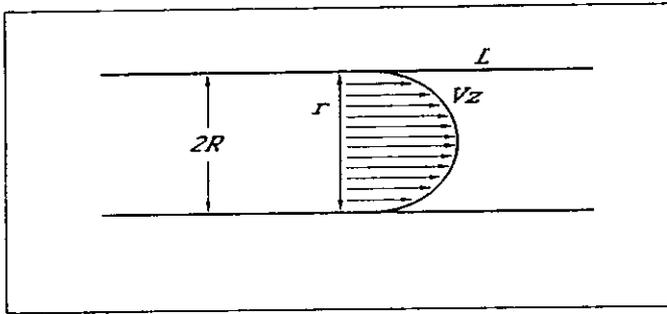


Figura 26 Perfil de Velocidad de un fluido Newtoniano.

Solución:

Definiendo las variables adimensionales:

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \varphi = \frac{v_z L \mu}{R^2 \Delta P}$$

y sustituyendo las en la ecuación de movimiento resulta la siguiente ecuación adimensional

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + 1 = 0 -$$

Con las condiciones frontera: en  $\rho = 1$ ;  $\varphi = 0$ .

Definiendo  $\psi(\rho) = \varphi$ , y substituyendo la forma diferencial de segundo orden por la forma matricial en la ecuación de movimiento adimensional obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n+1} B_{j\rho} \psi_j + 1 = 0; \quad j = 1, \dots, n$$

Con las condiciones frontera: en  $\rho_{n+1} = 1$ ;  $\varphi_{n+1} = 0$ .

Desarrollo para un punto de colocación interior.

De la tabla 24 obtenemos el valor del punto de colocación (0.577) para geometría cilíndrica. La figura 27 muestra la ubicación del punto de colocación y los puntos extremos.

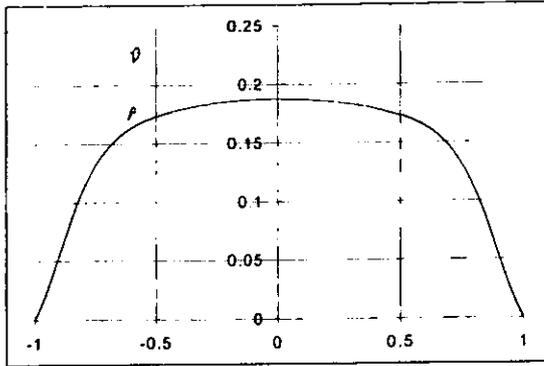


Figura 28 Perfil de velocidades utilizando un punto de colocación.

Tomando de la tabla valores de los factores de peso, podemos obtener la velocidad media.

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0 d\rho}{\int d\rho} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} W_j \rho_j}{\sum_{j=1}^{n+1} W_j} = \frac{0.375(0.16) + 0.125(0)}{0.375 + 0.125} = 0.1245$$

Desarrollo para dos puntos de colocación interior.

De manera similar que en el desarrollo para un punto, de la tabla 24 obtenemos los valores para dos puntos de colocación. La figura 29 muestra la ubicación de los puntos de colocación y los puntos extremos.

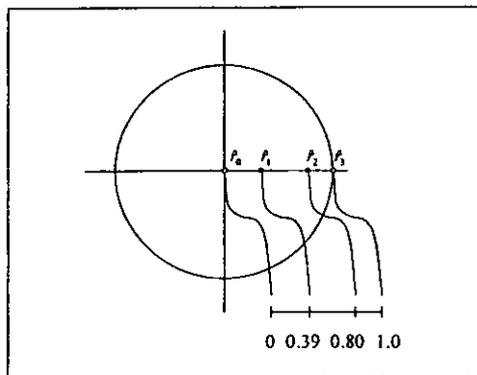


Figura 29 Localización de dos puntos de colocación interior.

El desarrollo de la ecuación de movimiento adimensional para dos puntos de colocación interior nos proporciona el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$B_{11}\varphi_1 + B_{12}\varphi_2 + B_{13}\varphi_3 + 1 = 0$$

$$B_{21}\varphi_1 + B_{22}\varphi_2 + B_{23}\varphi_3 + 1 = 0$$

Substituyendo las condiciones frontera en  $\rho_3 = 1$ ,  $\varphi_3 = 0$ , obtenemos:

$$B_{11}\varphi_1 + B_{12}\varphi_2 = -1$$

$$B_{21}\varphi_1 + B_{22}\varphi_2 = -1$$

Tomando los valores de  $B_{\mu}$  de la tabla 24 para geometría cilíndrica y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas.

$$-9.9024 \cdot \varphi_1 + 12.2997 \cdot \varphi_2 = -1$$

$$9.0337 \cdot \varphi_1 - 32.7643 \cdot \varphi_2 = -1$$

que al resolver se obtiene:

$$\varphi_{\rho(0.39)} = 0.2112$$

$$\varphi_{\rho(0.80)} = 0.0881$$

La figura 30 muestra el perfil de velocidad cuando el desarrollo se hace para dos puntos de colocación.

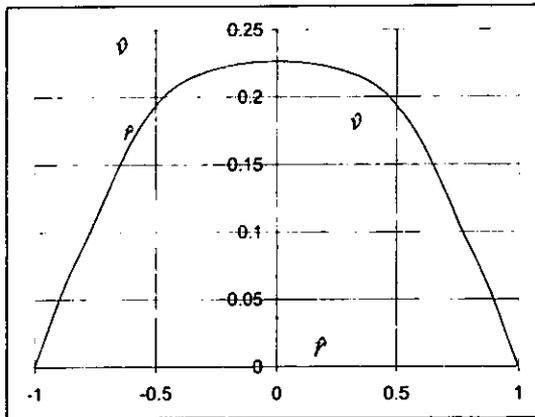


Figura 30 Perfil de velocidad utilizando dos puntos de colocación.

**Problema XIV: Flujo en un conductor cuadrado**

El flujo laminar en estado estacionario desarrollado por un fluido newtoniano, con densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  constantes en un conductor cuadrado donde  $L \ll h$ . El movimiento puramente axial con velocidad  $v_z = v_z(x, y)$  permite que la ecuación de movimiento en coordenadas rectangulares se describa por la siguiente ecuación diferencial.

$$\mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right\} + \frac{\Delta P}{L} = 0$$

La ecuación de continuidad se reduce a la forma:

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Con las condiciones frontera en:  $\left. \begin{matrix} x = \pm h \\ y = \pm h \end{matrix} \right\} v_z = 0$  Se requiere encontrar el perfil de velocidades  $v_z$ .

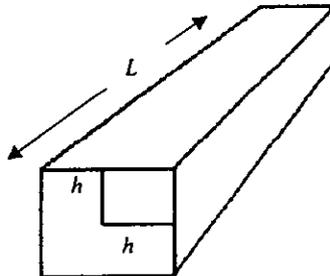


Figura 31 Dimensiones de un conductor cuadrado.

Solución:

Definiendo las variables adimensionales:

$$\xi = \frac{x}{h}; \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad \phi = \frac{v_z L \mu \Delta P}{h^2 \Delta P}$$

y sustituyendo las en la ecuación de movimiento resulta la siguiente ecuación adimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 1 = 0$$

Con las condiciones frontera: en  $\xi = \eta = 1$ ;  $\phi = 0$ .

Por simetría del sistema se cumplen las identidades:

$$\phi(\xi, \eta) = \phi(\eta, \xi) = \phi(-\xi, \eta)$$

Como es indiferente cualquier pared para definirla como coordenada independiente, solamente se requiere plantear la solución en un cuadrante del conductor.

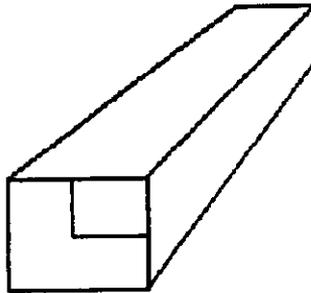


Figura 32 Cuadrante de solución para el conductor rectangular.

Las siguientes ecuaciones son las formas desarrolladas de las variables adimensionales, aplicadas a cada coordenada para un sistema geométrico rectangular.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} \phi(\xi_j, \eta_k) \quad k = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} \phi(\xi_i, \eta_j) \quad i = 1, \dots, n$$

Si definimos a  $\phi(\xi_j, \eta_k) = \phi_{jk}$  y aplicando las ecuaciones anteriores a la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} \phi_{jk} + \sum_{j=1}^{n+1} B_{kj} \phi_{ij} + 1 = 0 \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Con las condiciones de frontera en:  $\xi = \eta = 1$ ;  $\phi_{n+1} = 0$

Desarrollo para un punto de colocación interior.

De la tabla 23 obtenemos el valor del punto de colocación (0.4472) para geometría rectangular. La figura 33 muestra la ubicación del punto de colocación y los puntos extremos.

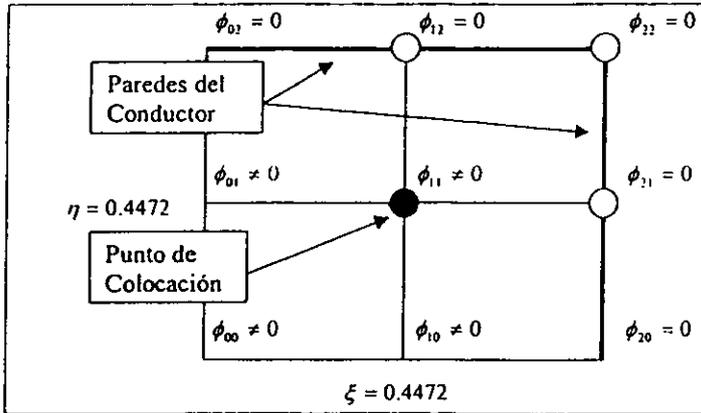


Figura 33 Localización de un punto de colocación (0.4472) interior.

Desarrollando la ultima ecuación para un punto de colocación tenemos:

$$\underbrace{B_{11}\phi_{11} + B_{21}\phi_{21}}_{\xi} + \underbrace{B_{11}\phi_{11} + B_{12}\phi_{12}}_{\eta} + 1 = 0$$

Por simetría  $\phi_{12} = \phi_{21}$ , y por las condiciones de frontera  $\phi_{12} = 0$ . Tomando el valor de  $B_{11}$  de la tabla 23 y resolviendo la ultima ecuación para  $\phi_{11}$  se obtiene la solución en el punto de colocación  $\xi = \eta = 0.4472$

$$\phi_{11} = \frac{-1}{2B_{11}} = \frac{-1}{2(-2.5)} = 0.2$$

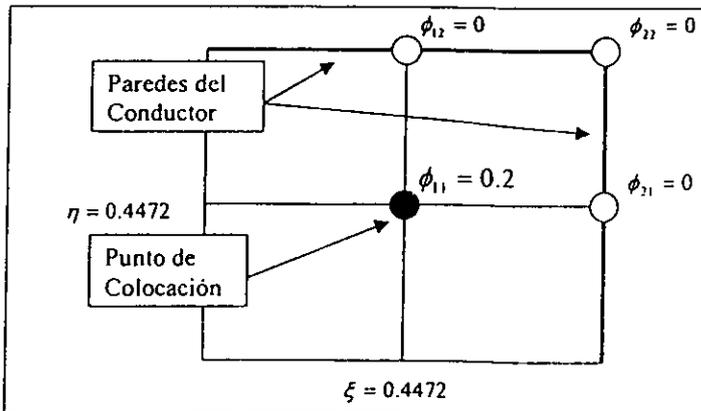


Figura 34 Plano de solución con un punto de colocación (0.4472) interior

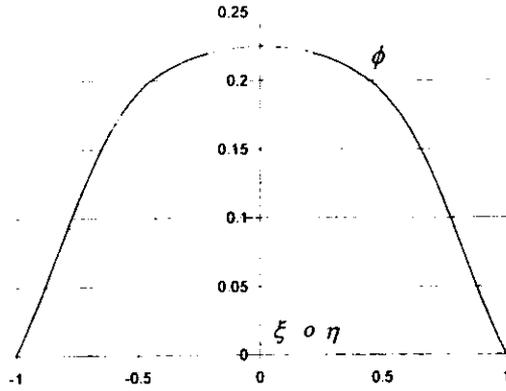


Figura 35 Perfil de velocidad utilizando un punto de colocación.

Desarrollo para dos puntos de colocación interior.

De manera similar que en el desarrollo para un punto, de la tabla 23 obtenemos los valores para dos puntos de colocación. La figura 36 muestra la ubicación de los puntos de colocación y los puntos extremos.

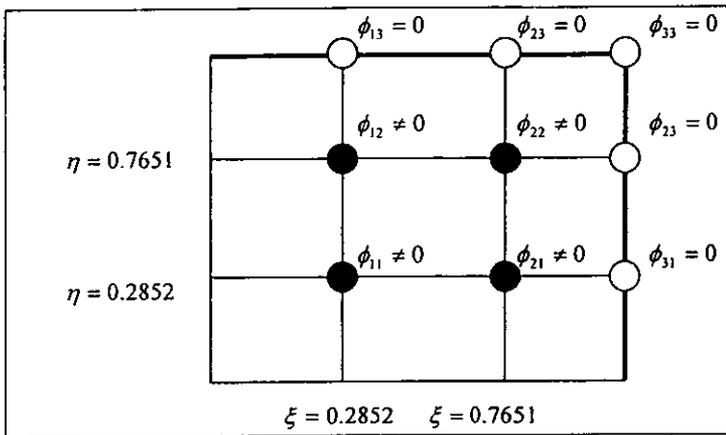


Figura 36 Localización de dos puntos de colocación interior.

El desarrollo de la ecuación de movimiento adimensional para dos puntos de colocación interior nos proporciona el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$i = 1 \begin{cases} k = 1: B_{11}\phi_{11} + B_{12}\phi_{21} + B_{13}\phi_{31} + B_{11}\phi_{11} + B_{12}\phi_{12} + B_{13}\phi_{13} + 1 = 0 \\ k = 2: B_{11}\phi_{12} + B_{12}\phi_{22} + B_{13}\phi_{32} + B_{21}\phi_{11} + B_{22}\phi_{12} + B_{23}\phi_{13} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$i = 2 \begin{cases} k = 1: B_{21}\phi_{11} + B_{22}\phi_{21} + B_{23}\phi_{31} + B_{11}\phi_{21} + B_{12}\phi_{22} + B_{13}\phi_{23} + 1 = 0 \\ k = 2: B_{21}\phi_{12} + B_{22}\phi_{22} + B_{23}\phi_{32} + B_{21}\phi_{21} + B_{22}\phi_{22} + B_{23}\phi_{23} + 1 = 0 \end{cases}$$

Por simetría  $\phi_{12} = \phi_{21}$ ,  $\phi_{13} = \phi_{31}$  lo cual genera un sistema redundante. Y por las condiciones de frontera,  $\phi_{13} = \phi_{31} = \phi_{23} = \phi_{32} = 0$ , se reduce al siguiente sistema de ecuaciones.

$$B_{11}\phi_{11} + B_{12}\phi_{21} + B_{13}\phi_{31} + B_{11}\phi_{11} + B_{12}\phi_{12} + 1 = 0$$

$$B_{11}\phi_{12} + B_{12}\phi_{22} + B_{13}\phi_{32} + B_{21}\phi_{11} + B_{22}\phi_{12} + 1 = 0$$

$$B_{21}\phi_{12} + B_{22}\phi_{22} + B_{23}\phi_{32} + B_{21}\phi_{21} + B_{22}\phi_{22} + 1 = 0$$

Reagrupando los términos:

$$2B_{11}\phi_{11} + 2B_{12}\phi_{12} + 1 = 0$$

$$B_{12}\phi_{22} + B_{21}\phi_{11} + (B_{22} + B_{11})\phi_{12} + 1 = 0$$

$$2B_{21}\phi_{12} + 2B_{22}\phi_{22} + 1 = 0$$

Tomando los valores de  $B_{ji}$  de la tabla 23, resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la solución:

$$\phi_{11} = 0.2552$$

$$\phi_{12} = 0.125$$

$$\phi_{22} = 0.0662$$

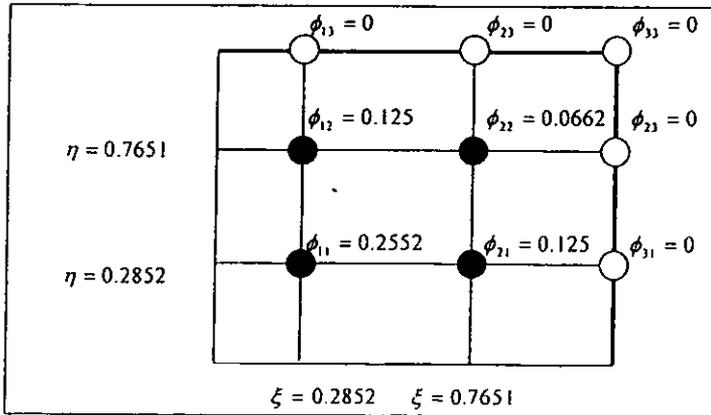


Figura 37 Plano de solución de dos puntos de colocación interior.

### Problema XV: Flujo radial en un material poroso

Un estrato rocoso subterráneo de porosidad  $\varepsilon$  y permeabilidad  $\kappa$  se encuentra saturado con agua a una presión  $P_0$ , densidad  $\rho_0$  y viscosidad  $\mu_0$  constantes. Se quiere sellar el estrato inyectando una lechada a presión constante  $P_w$ , a través de un tubo vertical. Se espera que el diseño de la boca del tubo, la porosidad del estrato y la presión  $P_w$  permitan una distribución radial de la lechada.

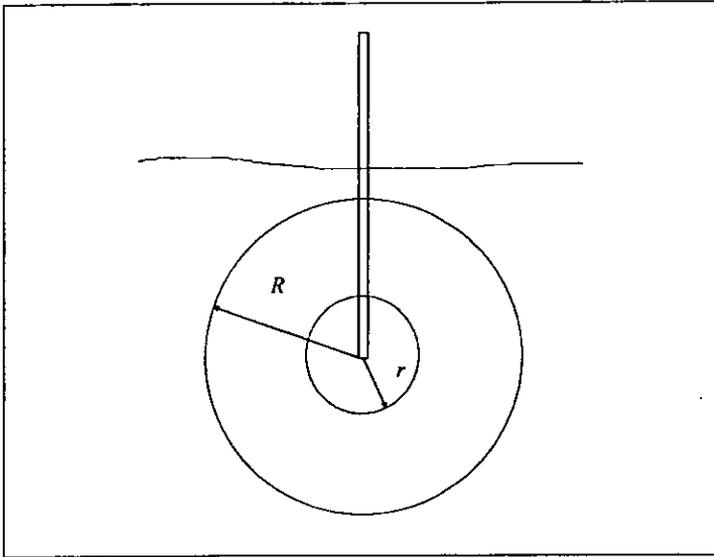


Figura 38 Distribución radial de lechada en un estrato poroso

La lechada se prepara una sola vez y su viscosidad  $\mu_L$  se incrementa con el tiempo de acuerdo con la relación.

$$\mu_L = a_L + \frac{b_L}{c_L - t}$$

$$a_L = 1cp$$

donde:  $b_L = 3.5 \frac{cp}{min}$

$$c_L = 74min$$

Suponiendo que la lechada y el agua son ligeramente compresibles y que obedecen a la misma ecuación de estado, el modelo del proceso se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$-\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r}$$

Ecuación de Darcy

$$v_r = - \frac{k \partial P}{\mu_t \partial r}$$

Ecuación de estado

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = c(P - P_0)$$

El radio de la interfase lechada agua progresa describiendo una esfera, de acuerdo con:

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{k}{\mu_0 \varepsilon} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_r$$

donde  $r^*$  indica que el gradiente de presión está evaluado en el lado de la interfase correspondiente al agua.

Solución:

La ecuación de estado se puede expresar como:

$$\rho = \rho_0 e^{c(P - P_0)}$$

Al derivar la densidad con respecto al radio obtenemos:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)$$

substituyendo la ecuación de estado derivada y la ecuación de Darcy en la ecuación de continuidad, obtenemos:

$$\frac{\varepsilon \mu_t}{\kappa} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \partial \rho}{\partial r} \right)$$

con las condiciones iniciales, finales y de frontera:

Condiciones iniciales: para  $t = 0$ ;  $r = 0$ ;  $\rho = \rho_0$

Condiciones finales: para  $t = \infty$ ;  $r = R$

Condiciones frontera: en  $r = R$ ;  $\rho = \rho_0$

Definiendo las variables adimensionales

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \hat{r} = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{\kappa t}{R^2 \varepsilon \mu_t}$$

Substituyendo las variables adimensionales en la última ecuación de continuidad. Se tiene la forma adimensional de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} \left( \hat{\rho}^2 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{\rho}} \right)$$

Con las condiciones iniciales, finales y de frontera:

Condiciones iniciales:	para $\tau = 0;$	$\hat{\rho} = 0;$	$\hat{\rho} = 1$
Condiciones finales:	para $\tau = \infty;$	$\hat{\rho} = 1$	
Condiciones frontera:	en $\hat{\rho} = 1;$		$\hat{\rho} = 1.00324$

La ecuación adimensional del radio de interfase lechada agua se expresa como

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\tau} = - \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{\rho}} \right)_{\hat{\rho}}$$

Con las condiciones iniciales: en  $\tau = 0; \hat{\rho} = 0; \hat{\rho} = 1.00324$

Aplicando el método de colocación ortogonal a la ecuación de continuidad, tenemos:

$$\frac{d\hat{\rho}_j}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n+1} B_{ji} \hat{\rho}_i; \quad j = 1, \dots, n$$

Con las condiciones iniciales y de frontera

Condiciones iniciales:	para $\tau = 0;$	$\hat{\rho} = 1.00324$	
Condiciones frontera:	en $\hat{\rho} = 1;$	$\hat{\rho}_{n+1} = 1$	

Aplicando el método de colocación ortogonal a la ecuación adimensional que describe el desarrollo del radio de la esfera, resulta:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\tau} = - \frac{1}{\hat{\rho}_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} A_{n+1,i} \hat{\rho}_i$$

Las condiciones iniciales de la ecuación anterior son: en  $\tau = 0; \hat{\rho} = 0; \hat{\rho}_i = 1.0032$

Desarrollando las dos últimas ecuaciones para un punto de colocación ( $\hat{\rho} = 0.6547$ ), y tomando de la tabla 25 los valores de los coeficientes  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  de geometría esférica, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_1}{d\tau} &= 10.5\hat{\rho}_1 + 10.5\hat{\rho}_2 \\ \frac{d\hat{\rho}}{d\tau} &= - \frac{1}{\hat{\rho}_2} (-3.5\hat{\rho}_1 + 3.5\hat{\rho}_2) \end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales y de frontera.

Condiciones iniciales: para  $\tau = 0$ ;  $\hat{\rho}_1 = 1.00324$   
Condiciones frontera:  $\hat{\rho}_2 = 1$

El proceso subsecuente para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales consiste en aplicar un método tradicional para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con problema de valor inicial, por ejemplo Runge-Kutta.

## **Conclusiones:**

El documento presentado esta dividido en dos partes fundamentales que son; los métodos analíticos, donde se presentan las ecuaciones diferenciales de primer orden, y las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, cada parte con los métodos de solución más usuales, y la segunda parte que son los métodos numéricos que se dividen en problemas de valor inicial, problemas de valor a la frontera, y el método de colocación ortogonal. Cada parte con sus problemas resueltos que dan una idea general de la utilidad, y manejo de cada procedimiento, para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales.

El aspecto más relevante y que constituye una aspiración mayor de este trabajo es que, alumnos y profesores lo usen revisen, corrijan y contribuyan al material aquí presentado, para que facilite la enseñanza y aplicación de las ecuaciones diferenciales en la facultad y en la vida profesional.

## Bibliografía:

Boyce, Diprima *"Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera"* Limusa, México, 1993

Bird, R.B., Stewart, W.E. & Lightfoot, E.N., *"Transport Phenomena"* John Wiley & Sons, New York, 1960.

Burden, R.L. *"Numerical Analysis"* 2<sup>nd</sup> ed. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1981

Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J.O., *"Applied Numerical Methods"* Wiley, New York, 1969

Celia M.A., Ahuja L.R., Pinder G.F., *"Orthogonal Collocation and alternating direction procedures for unsaturated flow problems"* Water Resources 10 178-187, 1987

Cheney, W. & Kincaid, D., *"Numerical Mathematics and Computing"* Brooks/Cole Publishing Co., California, 1980

Finlayson, B.A., *"Nonlinear Analysis in Chemical Engineering"* Mc Graw-Hill, New York, 1980

Finlayson B.A. *"Orthogonal Collocation in Chemical Reaction Engineering"* Cat. Rev. Sci. Eng. 10 69-138, 1974

Finlayson B.A. *"The Method of Weighted Residual and Variational Principles"* Academic Press., 1972

Holland C.D., Liapis A.I., *"Computer Methods for Solving Dynamic Separation Problems"* Mc Graw-Hill, 1983

Lapidus, L., *"Digital Computation for Chemical Engineers"* Mc Graw-Hill, New York, 1982

Simmons George F. *"Ecuaciones Diferenciales con aplicación"* Mc Graw-Hill/Interamericana

Tao, Bernard Y., *"Using Splines"* Chemical Engineering oct 26 p-109, 1987

Villadsen J.V., Michelsen M.L. "*Solution of differential equation models for polynomial approximation*" Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J. 1978

Villadsen J.V., Steward W.E. "*Solution of Boundary-value problems by orthogonal collocation*" Chem. Eng., Sci 22: 1483-1501. 1967

Zill Dennis "*Ecuaciones Diferenciales*" Iberoamericana