03061

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PROCESOS DE LEVY EN R

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN ESTADISTICA E INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

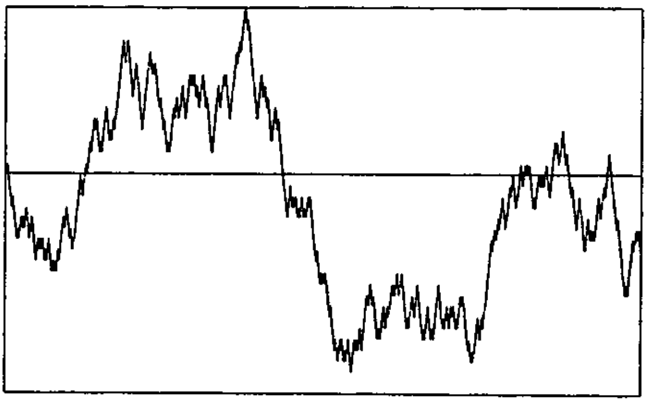
E L A C T U A R I O

ALBERTO MOLINA ESCOBAR

276456

MEXICO, D. F. MARZO 2000

Procesos de Lévy en ℝ



Alberto Molina Escobar

Agradezco al Instituto de Matemáticas la beca de lugar que me otorgó para realizar la tesis, al IIMAS el apoyo y las facilidades que me otorgaron durante los estudios de maestría, y a CONACyT su apoyo económico durante los 2 años de maestría.

A María Emilia, por su apoyo durante toda mi carrera y que sin duda es el pilar más importante en ella.

A Jean Bertoin, por los magníficos cursos de procesos de Lévy que impartío y que hicieron que este trabajo llegara a su fin.

A Raúl, Begoña, Ana y Angel por su minuciosa revisión de la tesis y sus valiosos comentarios.

A mis amigos de siempre, Yorch, Jorgito, Cucodrilo y Carlangas por acompañarme durante los años que me llevó llegar hasta aquí.

A todos aquellos que de una manera directa o indirecta han contribuido a alcanzar esta meta.

GRACIAS

A Rosalía, mi amiga más cercana, mi amor.
Sin ti esta tesis no habría sido esta tesis.

A mis hermanos, Alejandra, Edgar, Aída, Victor, Jesús, Martha y Elena, quienes con su cariño y forma de ser se ha colmado de alegría mi vida.

Y finalmente, pero de todo corazón, a mis padres porque me dieron y me siguen dando vida, educación y cariño.

Alberto Molina E.

Contenido

ABREVIACIONES Y SÍMBOLOS

cadlag	funciones continuas por la derecha con límite por la izquierda
c.s.	casi seguramente
DA(α)	dominio de atracción
$(i.d.)$	infinitamente divisible
(p.p.d.)	proceso puntual discreto
(p.p.p.)	proceso Poisson puntual
(p.p.σ-d.)	proceso puntual σ-discreto
VR(δ)	funciones de variación regular con índice δ
$\asymp$	$f \asymp g$ si existen c y $\tilde{c} > 0$ tales que $cf \leqslant g \leqslant \tilde{c}f$
$\backsim$	$f \backsim g$ si $\lim\{f/g\} = 1$
$\simeq$	$X \simeq Y$ si existe $c > 0$ tal que $X = cY$
q	coeficiente gaussiano
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	convergencia en distribución
$\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$	convolución de $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$
d	derivada o drift
$\mathbf{P}_x(\cdot)$	distribución de un proceso de Lévy que inicia en x
$\mathbb{P}_X(\cdot)$	distribución de X
$S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$	distribución estable de índice α
$N(\mu, \sigma^2)$	distribución normal con media μ y varianza σ^2
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	equivalencia en distribución
$C_0(E)$	espacio de funciones continuas en E que se anulan en infinito
L^p	espacio de funciones p integrable
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbb{P})$	espacio de probabilidad filtrado
$\mathbb{D}[0, \infty)$	espacio de trayectorias cadlag
$\mathbb{E}(\cdot)$	esperanza con respecto a $\mathbb{P}$
$\mathbf{E}_x(\cdot)$	esperanza con respecto a $\mathbf{P}_x$
$\Phi(\cdot)$	exponente característico
$\Psi(\cdot)$	exponente de Laplace para subordinadores

$(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$	filtración canónica completada con respecto a $\mathbb{P}$
$\blacksquare$	final de demostración
$\varphi_X(\cdot)$	función característica de X
$\rightsquigarrow$	función de
$\mathfrak{U}(\cdot)$	función de renovación
P_t, $P_{s,t}$	función de transición
$\mathbb{1}_A(\cdot)$	función indicadora de A
$\delta_x(\cdot)$	función masa de x
$I(\cdot)$	integral cola
L_x	inversa de un subordinador
$\overline{\Pi}(\cdot)$	medida cola de Lévy
$\Pi(\cdot)$	medida de Lévy
$\mathbb{P}(\cdot)$	medida de probabilidad
$U(x,\cdot)$	medida potencial
$U(\cdot)$	medida de renovación
$\lvert\cdot\rvert$	norma euclidiana
$\lvert\cdot\rvert_\infty$	norma del supremo
$U^q(x,\cdot)$	núcleo del resolvente
$\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$	números complejos, números naturales
$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$	números reales, números reales no negativos
$U^q(\cdot)$	operador resolvente
θ_t, θ_T	operador de translación
ρ	parámetro de positividad de un proceso estable
$\Im$	parte imaginaria de un número complejo
Δ	punto cementerio
$\mathcal{F}^{(\infty)}$	σ-álgebra cola
$\mathcal{B}$	σ-álgebra de borel
$\mathcal{F}_\infty$	σ-álgebra generada por la unión infinita de $\mathcal{F}_t$ completada con respecto a $\mathbb{P}$
(d,q,Π)	tercia generadora
$\mathfrak{F}(\cdot)$	transformada de Fourier
$\mathfrak{L}(\cdot)$	transformada de Laplace
$\omega(t)$	trayectoria del proceso

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudian los procesos de Lévy que constituyen una rama de la teoría moderna de probabilidad que ha tomado auge en años recientes. Los procesos de Lévy son procesos estocásticos con incrementos independientes y estacionarios los cuales incluyen al movimiento Browniano, al proceso Poisson y a los procesos estables, entre otros. La importancia de estudiar los procesos de Lévy es que en los últimos años se han tenido numerosas aplicaciones en áreas como matemáticas financieras, física, teoría de colas, estimación de riesgo, etc.

Dado que se cuenta con poco material bibliográfico sobre este tema, el objetivo de este trabajo es presentar de manera accesible la teoría de los procesos de Lévy para gente con conocimientos básicos de procesos estocásticos y deseen iniciar un estudio en alguna de sus aplicaciones o desarrollar su teoría.

Además de presentar los conceptos básicos de procesos de Lévy se generaliza el Teorema del Límite Central para el caso más sencillo de procesos de Lévy que son las caminatas aleatorias. Estos resultados son nuevos y generalizan los expuestos en el artículo de José Villaseñor [21].

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el capítulo uno se recuerdan los conceptos de distribuciones infinitamente divisibles así como la fórmula de Lévy-Khintchine para la construcción de los procesos de Lévy, dando en el camino algunos ejemplos de este tipo de procesos para entender mejor la construcción. En el capítulo dos se dá una mejor descripción de los procesos de Lévy al asociar estos con los procesos de Markov. Esta relación se aprovecha para desarrollar un caso particular de procesos de Lévy llamados Subordinadores, que no son más que procesos de Lévy no decreciente, los cuales se presentan en el capítulo tres. Al final de ese capítulo se hace un estudio del comportamiento asintótico de las trayectorias de los Subordinadores, el cual lleva al desarrollo del último capítulo en donde se generaliza el Teorema del Límite Central dando previamente los conceptos de Distribuciones Estables y Dominio de Atracción.

Capítulo 1

Procesos de Lévy

El objetivo de este capítulo es presentar un panorama detallado de los procesos de Lévy en $\mathbf{R}$ recordando el concepto de distribuciones infinitamente divisibles, así como la fórmula de Lévy-Khintchine que caracteriza a este tipo de distribuciones. El resultado más importante del capítulo se presenta en la última sección en donde se da una construcción explícita de los procesos de Lévy, dando previamente algunos ejemplos, que ayudarán a entender mejor dicha construcción.

§1.1 Notación

Se denota por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a un espacio de probabilidad y a $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso estocástico real definido en éste.

Se considera a Δ como el *punto cementerio* y a $\mathbf{D}[0,\infty)$ como el espacio de todas las trayectorias *cadlag* (continuas por la derecha con límite por la izquierda). Se define la filtración canónica asociada al proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$ y completada con respecto a $\mathbb{P}$ como $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leqslant t)$ para toda $t \geqslant 0$. La notación $\mathcal{F}_\infty$ se entiende como la compleción de $\sigma\left(\cup_{t\geqslant 0}\mathcal{F}_t\right)$.

De aquí en adelante $\Delta = \infty$ y se considera a $\Omega = \mathbf{D}[0,\infty]$ y será un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$.

Se escribe $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$ si las variables aleatorias X y Y tienen la misma distribución. La distribución de X se denota por $\mathbb{P}_X$ y como $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ a la convolución de $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$. $\mathbb{1}_A$ es la función indicadora del conjunto A y $\delta_x(y)$ es la función masa de x, es decir, vale 1 si $y = x$ y 0 si $y \neq x$. $\varphi_Y(\cdot)$ denota a la función característica de Y.

§1.2 Definiciones y primeras propiedades

Definición 1.1. Sea $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso estocástico real definido en $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$. Se dice que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un *proceso de Lévy* si cumple:

i) Para cualquier $n \geqslant 1$ y $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias $Y_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ son independientes.

ii) $X_0 = 0$ c.s.

iii) Para toda $0 < t, s$ la distribución de $X_{t+s} - X_t$ depende de s pero no de t, es decir, $X_{t+s} - X_t \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_s$.

A estos procesos también se les llama procesos con incrementos independientes y estacionarios. Se puede pensar a los procesos de Lévy como caminatas aleatorias continuas en el tiempo.

Los procesos de Lévy tienen relación con las distribuciones infinitamente divisibles. Se recuerda lo que significa que la distribución de una variable aleatoria sea infinitamente divisible y algunas características de éstas.

Definición 1.2. Una variable aleatoria Y, con distribución $\mathbb{P}_Y$ y función característica φ_Y, se dice que es *infinitamente divisible* (*i.d.*) si para todo $n \in \mathbf{N}$ existe una sucesión $(\eta_k)_{k=1}^n$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que Y tiene la misma distribución que la suma de éstas ($Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} \eta_1 + \cdots + \eta_n$) o de manera equivalente si $\varphi_Y = (\varphi_{\eta_1})^n$ o $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_{\eta_1} * \cdots * \mathbb{P}_{\eta_n}$.

Lema 1.1. *Si Y es (i.d.) entonces $\varphi_Y(\lambda) \neq 0$ para toda λ y existe una única función continua $\Psi(\lambda) : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{C}$ tal que $\varphi_Y(\lambda) = \exp\{-\Psi(\lambda)\}$ con $\Psi(0) = 0$.*

A la función Ψ se le llama el *exponente característico* ya que si dos variables aleatorias tienen el mismo exponente, tienen la misma distribución.

La forma general para funciones características que son (*i.d.*) queda determinada por el teorema de representación de Lévy-Khintchine.

Teorema 1.1 (Lévy-Khintchine). *Una función $\Psi : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{C}$ es el exponente característico de una distribución (i.d.) si y sólo si existen $d \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}^+$ y* *una medida* Π *en* $\mathbf{R}-\{0\}$ *con* $\int(1\wedge x^2)\Pi(dx)<\infty$ *tales que*

$$\Psi(\lambda)=id\lambda+\frac{q^2\lambda^2}{2}+\int_{\mathbf{R}-\{0\}}\left(1-e^{i\lambda x}+i\lambda x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right)\Pi(dx). \tag{1.1}$$

A la constante d se le llama deriva o "drift"; a la medida Π, *medida de Lévy y a q el coeficiente gaussiano.*

La distribución de los procesos de Lévy y las distribuciones $(i.d.)$ tienen la siguiente relación.

Teorema 1.2. *Si* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *es un proceso de Lévy, entonces la distribución de* X_t *es infinitamente divisible para toda t y si* $\varphi_{X_1}(\lambda)=\exp\{-\Psi(\lambda)\}$ *entonces* $\varphi_{X_t}(\lambda)=\exp\{-t\Psi(\lambda)\}$.

Demostración. X_t es $(i.d.)$ ya que dado $t>0$

$$\begin{aligned} X_t &= X_{\frac{t}{n}}+\left(X_{\frac{2t}{n}}-X_{\frac{t}{n}}\right)+\cdots+\left(X_t-X_{\frac{(n-1)t}{n}}\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n}Y_j \qquad \text{con } \left(Y_j=\left(X_{\frac{jt}{n}}-X_{\frac{(j-1)t}{n}}\right)\stackrel{\mathcal{D}}{=}X_{\frac{t}{n}}\right)\quad j=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

es decir, X_t es la suma de n variables independientes e idénticamente distribuidas.

En particular, para $t=1$ y por el lema 1.1

$$\varphi_{X_1}(\lambda)=\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_1}\right)=\exp\{-\Psi(\lambda)\}\qquad(\lambda\in\mathbf{R}).$$

De (1.2) se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1}(\lambda) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda\sum_{j=1}^{n}\left(X_{\frac{j}{n}}-X_{\frac{j-1}{n}}\right)\right\}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{i\lambda\left(X_{\frac{j}{n}}-X_{\frac{j-1}{n}}\right)\right\}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda X_{\frac{1}{n}}\right\}\right)\\ &= \left(\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda X_{\frac{1}{n}}\right\}\right)\right)^n\\ &= \left(\varphi_{X_{\frac{1}{n}}}(\lambda)\right)^n, \end{aligned}$$

esto es, $\varphi_{X_{\frac{1}{n}}}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_{\frac{1}{n}}}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{n}\Psi(\lambda)\right\}$.

Siguiendo el mismo razonamiento pero ahora para $t = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$

$$X_{\frac{m}{n}} = \sum_{j=1}^{m}\left(X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{j-1}{n}}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_{\frac{m}{n}}}\right) &= \prod_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda X_{\frac{1}{n}}\right\}\right)\\
&= \left(\exp\left\{-\tfrac{1}{n}\Psi(\lambda)\right\}\right)^{m}\\
&= \exp\left\{-\tfrac{m}{n}\Psi(\lambda)\right\}.
\end{aligned}$$

Para $t \geqslant 0$ existe una sucesión $(q_n)_{n\geqslant 1}$ de racionales tales que $q_n \downarrow t$. Por ser X un proceso continuo por la derecha, la función exponencial continua y $| e^{i\lambda X_{q_n}} | \leqslant 1$ se tiene, por un lado, que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_{q_n}}\right) &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} e^{i\lambda X_{q_n}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda \lim_{n\to\infty} X_{q_n}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_t}\right)
\end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_{q_n}}\right) &= \exp\left\{-\lim_{n\to\infty} q_n\Psi(\lambda)\right\}\\
&= \exp\left\{-t\Psi(\lambda)\right\},
\end{aligned}$$

entonces $\varphi_{X_t}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_t}\right) = \exp\{-t\Psi(\lambda)\}$ para toda $t \geqslant 0$. ∎

El recíproco del teorema anterior, que cualquier distribución (*i.d.*) puede verse como la distribución de X_1, donde $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es algún proceso de Lévy, se sigue del siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Si $d \in \mathbb{R}$, $q \geqslant 0$, Π una medida definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\int (1 \wedge x^2)\,\Pi(dx) < \infty$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\Psi(\lambda) = id\lambda + \frac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}}\left(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right)\Pi(dx), \tag{1.3}$$

entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso X bajo éste, tal que X es un proceso de Lévy con exponente característico Ψ.

La representación de Ψ dada por la tercia (d, q, Π) es única, por eso a (d, q, Π) se le llama la *tercia generadora*.

Los primeros dos sumandos de (1.3) representan la parte continua o Browniana del proceso y el último la parte de los saltos. Al final de este capítulo se hace la demostración de este teorema en donde se da una idea más detallada de cada componente.

Definición 1.3. Dada $\omega \in \Omega$, la *trayectoria del proceso* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es la aplicación $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ que se suele denotar como $\omega(t) = X_t(\omega)$.

Definición 1.4. Un proceso $(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ tiene *variación acotada* (trayectorias de variación acotada) si las trayectorias $\omega(t)$ son de variación acotada para casi toda ω.

Observación 1.1. Un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ tiene variación acotada si y sólo si $q = 0$ y $\int_{\mathbb{R}-\{0\}}(1 \wedge |x|)\Pi(dx) < \infty$, y en este caso el exponente característico tiene la siguiente expresión

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(1 - e^{i\lambda x}\right) \Pi(dx). \tag{1.4}$$

Este hecho se aclara en la sección §1.4.

Como se sabe, la función característica determina de manera única a la distribución, de aquí que si se conoce a $\Psi(\lambda)$ se conoce la distribución de X_t para toda t. En el caso de los procesos de Lévy, si se conocen las distribuciones unidimensionales, por independencia y estacionalidad, se conocen las distribuciones finito dimensionales y por lo tanto la distribución del proceso. Por eso la importancia de estudiar al exponente característico.

Se analizan ahora algunas propiedades asintóticas del exponente característico.

Teorema 1.4. *Con la misma notación del teorema* (1.3) *se tiene*

i) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{q^2}{2}$.

ii) *Si X tiene variación acotada, entonces* $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = -id$.

Demostración.

(i) Basta con demostrar que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-2}\left(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right) = 0$$

y

$$\lambda^{-2}\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left|1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right| \Pi(dx) < \infty,$$

ya que por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-2}\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi(dx) = 0,$$

con lo que se llega al resultado.

Para demostrar que la integral es acotada, se demuestra que para λ suficientemente grande

$$\lambda^{-2}\left|1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right| \leqslant k\left(1 \wedge x^2\right),$$

donde k es una constante, ya que $\int_{\{0\}^c} (1 \wedge x^2)\,\Pi(dx) < \infty$.

Se toma $|\lambda| > 1$ y se hacen dos casos, $|x| < 1$ y $|x| \geqslant 1$. Usando las desigualdades

$$|1 - \cos(a)| \leqslant 2\left(1 \wedge |a|^2\right) \quad \text{y} \quad |a - \operatorname{sen}(a)| \leqslant 2\left(|a| \wedge |a|^3\right),$$

(ver [I.1]) *, se tiene que si $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\lambda^{-2} \mid 1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mid &\leqslant \lambda^{-2}\left(|1 - \cos(\lambda x)| + |\lambda x - \operatorname{sen}(\lambda x)|\right)\\ &\leqslant 2(1 \wedge x^2) + \lambda^{-2}|\lambda x - \operatorname{sen}(\lambda x)|.\end{aligned}$$

Como

$$|\lambda x - \operatorname{sen}(\lambda x)| \leqslant 2\left(|\lambda x| \wedge |\lambda x|^3\right) \leqslant 2\lambda^2(1 \wedge x^2)$$

entonces

$$\lambda^{-2} \mid 1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mid \leqslant 4(1 \wedge x^2).$$

*La notación [X.n] se refiere al n-ésimo enunciado del apéndice X.

Con respecto al límite

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-2}\left(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x\right) \leqslant \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-2}(2+|\lambda|) = 0.$$

Para el caso $|x| \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} \mid 1 - e^{i\lambda x} \mid &\leqslant \lambda^{-2} \left(|1-\cos(\lambda x)| + |\operatorname{sen}(\lambda x)|\right) \\
&\leqslant \lambda^{-2} \left(2\left(1 \wedge (\lambda x)^2\right) + 2\right) \\
&\leqslant 2(1 \wedge x^2) + 2(1 \wedge x^2) \\
&= 4(1 \wedge x^2)
\end{aligned}$$

y

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-2}\left(1 - e^{i\lambda x}\right) \leqslant \lim_{|\lambda|\to\infty} 2\lambda^{-2} = 0.$$

(ii) Por la observación 1.1 un proceso de Lévy tiene variación acotada si $\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge |x|)\, \Pi(dx) < \infty$ y $q = 0$, de donde

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(1 - e^{i\lambda x}\right) \Pi(dx)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-1}\Psi(\lambda) &= \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-1} \left(-id\lambda + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(1 - e^{i\lambda x}\right) \Pi(dx)\right) \\
&= -id + \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(1 - e^{i\lambda x}\right) \Pi(dx).
\end{aligned}$$

Ahora, siguiendo con la misma técnica de (i) y usando [I.1]

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-1}\left(1 - e^{i\lambda x}\right) \leqslant \lim_{|\lambda|\to\infty} 2\lambda^{-1} = 0$$

y

$$\begin{aligned}
|\lambda|^{-1} \mid 1 - e^{i\lambda x} \mid &\leqslant |\lambda|^{-1} \left(\mid 1 - \cos(\lambda x) \mid + \mid \operatorname{sen}(\lambda x) \mid\right) \\
&\leqslant |\lambda|^{-1} \cdot 2(1 \wedge |\lambda x|) + |\lambda|^{-1} \cdot 2(1 \wedge |\lambda x|) \\
&\leqslant 4(1 \wedge |x|),
\end{aligned}$$

se obtiene el resultado. ∎

§1.3 Ejemplos

En esta sección se dan algunos ejemplos de procesos de Lévy como son el proceso Poisson, el proceso Poisson compuesto y el movimiento Browniano así como los procesos estables.

§1.3.1 Proceso Poisson

De los procesos más importantes de Lévy está el proceso Poisson; se da su definición, existencia y algunas martingalas asociadas al proceso.

Definición 1.5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Un *proceso Poisson* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ con intensidad $\alpha > 0$ es un proceso que cumple:

i) $N_0 = 0$.

ii) Para $0 < t_1 < \cdots < t_k$ los incrementos $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$, son independientes.

iii) Para toda $0 \leqslant s < t$ y $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{(\alpha(t-s))^k e^{-\alpha(t-s)}}{k!}.$$

Nótese que bajo estas condiciones se tiene que un proceso Poisson es un proceso con incrementos independientes y estacionarios.

Construcción. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro α, es decir, $\mathbb{P}(X_i > x_i) = \exp\{-\alpha x_i\}$ con $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Se puede ver a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión de tiempos de llegada, esto es, X_1 es el tiempo en que ocurre el primer evento y X_n es el tiempo de llegada entre el $(n-1)$-ésimo y n-ésimo evento. Vistas así, la variable aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ representa el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento. Se define $S_0 = 0$.

Como $\mathbb{E}(e^{itX_k}) = \frac{\alpha}{(\alpha - it)}$ para toda $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tS_n}) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{it\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \exp\{itX_k\}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\{itX_k\}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha - it}\right)^n.
\end{aligned}$$

la cual representa a la función característica de una variable aleatoria con distribución Gamma(n, α), esto es,

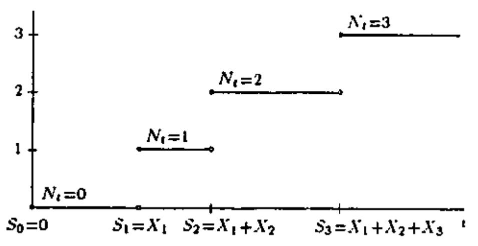
$$\mathbb{P}_{S_n}(x) = \mathbb{P}(S_n \leqslant x) = \int_0^x \frac{(\alpha u)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha e^{-\alpha u} du \quad \text{para toda } x \geqslant 0.$$

Si se define

$$N_t = \max\{n \in \mathbf{N} : S_n \leqslant t\},$$

N_t representa el número de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Figura 1: Proceso Poisson



Como consecuencia de esta definición se tiene que $N_t = 0$ si $t < S_1$, en particular $N_0 = 0$. Además

(1.5) $$\{N_t \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\},$$

de donde

$$\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t < S_{n+1}\} \tag{1.6}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant t < S_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(S_n \leqslant t, X_{n+1} > t - S_n) \\
&= \int_{\{x \leqslant t\}} \mathbb{P}(X_{n+1} > t - x)\, \mathbb{P}_{S_n}(dx) \\
&= \int_{\{x \leqslant t\}} e^{-\alpha(t-x)} \left[\alpha^n \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}\right] dx \\
&= \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!},
\end{aligned}$$

es decir, N_t tiene una distribución Poisson con parámetro αt.

Se afirma que el proceso $(N_t)_{t \geqslant 0}$ es un proceso Poisson con intensidad α. Ya se demostró (i), se verá que se cumplen (ii) y (iii).

Sea t fija y considérense los eventos que pasan después de t. El primer tiempo de llegada después de t es $S_{N_t+1} - t$ ya que $S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}$; el tiempo de llegada entre el primero y el segundo después de t es X_{N_t+2}, etc. Entonces, los tiempos de llegada después de t son

$$X_1^{(t)} = S_{N_t+1} - t, X_2^{(t)} = X_{N_t+2}, \ldots, X_n^{(t)} = X_{N_t+n}, \ldots \tag{1.7}$$

Ahora, si $s > 0$ y $m \in \mathbf{N}$ por (1.5)

$$\begin{aligned}
\{N_{t+s} - N_t \geqslant m\} &= \{N_{t+s} \geqslant N_t + m\} \\
&= \{S_{N_t+m} \leqslant t + s\} \\
&= \{S_{N_t+1} + X_{N_t+2} + \cdots + X_{N_t+m} \leqslant t + s\} \\
&= \left\{X_1^{(t)} + X_2^{(t)} + \cdots + X_m^{(t)} \leqslant s\right\},
\end{aligned}$$

entonces

$$N_{t+s} - N_t = \max\left\{m \in \mathbf{N} : X_1^{(t)} + \cdots + X_m^{(t)} \leqslant s\right\} \tag{1.8}$$

y

$$\{N_{t+s} - N_t = m\} = \left\{X_1^{(t)} + \cdots + X_m^{(t)} \leqslant s < X_1^{(t)} + \cdots + X_{m+1}^{(t)}\right\}.$$

La idea ahora es demostrar que las variables aleatorias (1.7) son independientes y exponenciales condicionadas al evento $\{N_t = n\}$.

Sean $y \geqslant 0$ y $\mathbb{P}_{S_n}$ la distribución de S_n, como X_{n+1} tiene distribución exponencial

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t = n,\ X_1^{(t)} > y\right) &= \mathbb{P}\left(S_n \leqslant t < S_{n+1},\ S_{n+1} - t > y\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t + y\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n \leqslant t,\ X_{n+1} > t + y - S_n\right)\\
&= \int_{\{x \leqslant t\}} \mathbb{P}\left(X_{n+1} > t + y - x\right) \mathbb{P}_{S_n}(dx)\\
&= \int_{\{x \leqslant t\}} e^{-\alpha(t+y-x)} \mathbb{P}_{S_n}(dx)\\
&= e^{-\alpha y} \int_{\{x \leqslant t\}} \mathbb{P}\left(X_{n+1} > t - x\right) \mathbb{P}_{S_n}(dx)\\
&= \mathbb{P}\left(N_t = n\right) e^{-\alpha y}.
\end{aligned}$$

Ahora, como las variables X_n son independientes

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N_t = n, X_1^{(t)} > y_1, \ldots, X_j^{(t)} > y_j\right)\\
&\qquad = \mathbb{P}\left(S_n \leqslant t < S_{n+1}, S_{n+1} - t > y_1, X_{n+2} > y_2, \ldots, X_{n+j} > y_j\right)\\
&\qquad = \mathbb{P}\left(S_n \leqslant t, S_{n+1} - t > y_1\right) e^{-\alpha y_2} \cdots e^{-\alpha y_j}\\
&\qquad = \mathbb{P}\left(N_t = n\right) e^{-\alpha y_1}\ e^{-\alpha y_2} \cdots e^{-\alpha y_j}.
\end{aligned}$$

Si se toma $H = (y_1, \infty) \times \cdots \times (y_j, \infty)$ entonces

$$\text{(1.9)}\quad \mathbb{P}\left(N_t = n, \left(X_1^{(t)}, \ldots, X_j^{(t)}\right) \in H\right) = \mathbb{P}(N_t = n)\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_j) \in H\right)$$

y por el teorema de extensión se sigue para $H \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^j)$.

El evento $\{N_{s_i} = m_i\}_{i=1}^{u}$ se puede escribir en términos de $\{(X_1, \ldots, X_j) \in H\}$, con $j = m_u + 1$ y H el conjunto de $x \in \mathbf{R}^j$ para los cuales $x_1 + \cdots + x_{m_i} \leqslant s_i < x_1 + \cdots + x_{m_i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant u$.

Así, por (1.8) $\left\{\left(X_1^{(t)}, \dots, X_j^{(t)}\right) \in H\right\} = \{N_{t+s_i} - N_t = m_i, 1 \leqslant i \leqslant u\}$ y por la observación anterior y (1.9)

$$\mathbb{P}\left(N_t = n, N_{t+s_i} - N_t = m_i, 1 \leqslant i \leqslant u\right) = \mathbb{P}\left(N_t = n\right) \cdot \\ \mathbb{P}\left(N_{s_i} = m_i, 1 \leqslant i \leqslant u\right).$$

De aquí por inducción sobre k, si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$

$$\mathbb{P}\left(N_{t_i} - N_{t_i-1} = n_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(N_{t_i - t_{i-1}} = n_i\right),$$

que demuestra (ii) y como $\mathbb{P}\left(N_t = k\right) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!}$ se cumple (iii). ∎

Otra forma de justificar la existencia de un proceso Poisson es en base a los siguientes resultados.

La función característica de una distribución Poisson es infinitamente divisible, pues

$$\varphi_{N_t}(\lambda) = \exp\left\{-\alpha t\left(1 - e^{i\lambda}\right)\right\} = \left(\exp\left\{\frac{-\alpha t}{n}\left(1 - e^{i\lambda}\right)\right\}\right)^n,$$

para toda $n \in \mathbf{N}$.

Usando el teorema de extensión de Kolmogorov y el teorema 1.5 (ver [5, pag. 304]), se garantiza la existencia del proceso Poisson.

Teorema 1.5. *Dada la función característica $\varphi(\lambda)$ de una distribución infinitamente divisible, existe un proceso $(N_t)_{t\geqslant 0}$ con incrementos independientes y estacionarios con $N_0 = 0$, tal que $\varphi_t(\lambda) = (\varphi(\lambda))^t$.*

Una vez que se vió que un proceso Poisson es un proceso de Lévy, se calcula su exponente característico.

Como $\varphi_{N_t}(\lambda) = \exp\{-t(\alpha - \alpha e^{i\lambda})\}$ entonces $\Psi(\lambda) = \alpha\left(1 - e^{i\lambda}\right)$. En este caso la tercia (d, q, Π) está dada por $d = 0$, $q = 0$ y $\Pi(dx) = \alpha\delta_1(dx)$.

Algunas martingalas asociadas al proceso Poisson se mencionan en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Sea $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso de Poisson con parámetro α, entonces*

i) *$(M_t)_{t\geqslant 0}$ con $M_t = (N_t - \alpha t)$ es martingala.*

ii) $(\tilde{M}_t)_{t\geqslant 0}$ *si* $\tilde{M}_t = M_t^2 - \alpha t$ *es martingala.*

iii) *Si* $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ *es un proceso real predecible y* $\mathbb{E}\left(\int_0^t |Z_s|ds\right) < \infty$ *para toda* $t \geqslant 0$ *entonces* $(\bar{M}_t)_{t\geqslant 0}$ *es martingala con*

$$\bar{M}_t = \int_0^t Z_s dN_s - \alpha \int_0^t Z_s ds.$$

iv) *Si* $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ *es como en* (iii) *y además* $\mathbb{E}\left(\int_0^t Z_s^2 ds\right) < \infty$ *y es acotada, entonces* $(\hat{M}_t)_{t\geqslant 0}$ *es martingala con*

$$\hat{M}_t = \exp\left\{\int_0^t Z_s dN_s + \alpha \int_0^t (1 - e^{Z_s}) ds\right\}.$$

Tanto en (iii) *y* (iv), *la integral* $\int_0^t Z_s dN_s$ *se entiende como una integral real de Stieljes, ya que* $N_s(\omega)$ *es no decreciente en* s *para toda* $\omega \in \Omega$.

Demostración.

(i) Sea $s < t$. Se sabe que $\mathbb{E}\left(N_s - \alpha s / \mathcal{F}_s\right) = N_s - \alpha s$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(N_t - \alpha t - (N_s - \alpha s) / \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(N_t - N_s / \mathcal{F}_s\right) - \alpha(t - s) \\
&= \mathbb{E}\left(N_t - N_s\right) - \alpha(t - s) \\
&= \alpha(t - s) - \alpha(t - s) = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Basta con demostrar

$$\mathbb{E}\left(M_t^2 - M_s^2 / \mathcal{F}_s\right) = \alpha(t - s).$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
M_t^2 - M_s^2 &= N_t^2 + \alpha^2 t^2 - 2\alpha t N_t - \left(N_s^2 + \alpha^2 s^2 - 2\alpha s N_s\right) \\
&= \left(N_t^2 - N_s^2\right) - 2\alpha t\left(N_t - N_s\right) - 2\alpha t N_s \\
&\quad + 2\alpha s N_s + \alpha^2\left(t^2 - s^2\right) \\
&= N_t\left(N_t - N_s\right) + N_s\left(N_t - N_s\right) - 2\alpha t\left(N_t - N_s\right) \\
&\quad - N_s(2\alpha t - 2\alpha s) + \alpha(t - s)(\alpha t + \alpha s),
\end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(N_t\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) + N_s\mathbb{E}\left(N_t - N_s/\mathcal{F}_s\right) - 2\alpha t \cdot \\
&\qquad \mathbb{E}\left(N_t - N_s/\mathcal{F}_s\right) - N_s(2\alpha t - 2\alpha s) + \alpha(t-s)(\alpha t + \alpha s) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(N_t\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) + N_s\alpha(t-s) - 2\alpha t(\alpha t - \alpha s) \\
&\qquad - 2\alpha t N_s + 2\alpha s N_s + \alpha(t-s)(\alpha t + \alpha s) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(N_t\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) - \alpha t N_s + \alpha s N_s - 2\alpha t(\alpha t - \alpha s) \\
&\qquad + \alpha(t-s)(\alpha t + \alpha s) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(N_t\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) - \alpha N_s(t-s) + \alpha(t-s)(-\alpha t + \alpha s) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(N_t\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) - \mathbb{E}\left(N_s\left(N_t - N_s\right)/\mathcal{F}_s\right) - \alpha^2(t-s)^2 \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\left(N_t - N_s\right)^2/\mathcal{F}_s\right) - \alpha^2(t-s)^2 \\
&\quad = \alpha(t-s) + \alpha^2(t-s)^2 - \alpha^2(t-s)^2 \\
&\quad = \alpha(t-s)
\end{aligned}
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(N_t - N_s\right)^2/\mathcal{F}_s\right) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}\left(N_t - N_s = k/\mathcal{F}_s\right) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \tfrac{\alpha^k(t-s)^k}{k!} e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha(t-s)} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k\alpha^k(t-s)^k}{(k-1)!} \\
&\quad = e^{-\alpha(t-s)}\alpha(t-s)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{(k-1)\alpha^{k-1}(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} + \tfrac{\alpha^{k-1}(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right] \\
&\quad = e^{-\alpha(t-s)}\alpha(t-s)\left[\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(k-1)\alpha^{k-1}(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} + e^{\alpha(t-s)}\right] \\
&\quad = e^{-\alpha(t-s)}\alpha(t-s)\left[\alpha(t-s)\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{\alpha^{k-2}(t-s)^{k-2}}{(k-2)!}\right]\alpha(t-s) \\
&\quad = \alpha^2(t-s)^2 + \alpha(t-s).
\end{aligned}
$$

(iii) Recuérdese que un proceso elemental $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ se define como

$$Z_t(\omega) = \zeta_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{m^*} \zeta_i(\omega)\mathbb{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t) \tag{1.10}$$

con ζ_i $\mathcal{F}_{u_i}$-medible, $0 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_i < \cdots$ para $i = 1, \ldots, m-1$ y $m^* = t \wedge (m-1)$.

En el caso de que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ sea elemental

$$\int_0^t Z_u dN_u - \alpha \int_0^t Z_u du = \sum_{i=1}^{m^*} \left[\zeta_i \left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right) - \alpha\zeta_i \left(u_{i+1} - u_i\right)\right]$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^t Z_u dN_u - \alpha \int_0^t Z_u du/\mathcal{F}_s\right) & \\ = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{m^*} \left[\zeta_i \left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right) - \alpha\zeta_i \left(u_{i+1} - u_i\right)\right]/\mathcal{F}_s\Big). & \end{aligned} \tag{1.11}$$

Existe j_0 tal que $u_{j_0} < s \leqslant u_{j_0+1}$. de aquí (1.11) es

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j_0} \left[\zeta_i \left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right) - \alpha\zeta_i(u_{i+1} - u_i)\right] + \right. \\
&\left. \sum_{i=j_0+1}^{m^*} \left[\zeta_i \left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right) - \alpha\zeta_i \left(u_{i+1} - u_i\right)\right]/\mathcal{F}_s\right) \\
&= \int_0^s Z_u dN_u - \alpha \int_0^s Z_u du + \\
&\sum_{i=j_0+1}^{m^*} \left[\mathbb{E}\left(\zeta_i \left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right)/\mathcal{F}_s\right) - \alpha\zeta_i \left(u_{i+1} - u_i\right)\right] \\
&= \int_0^s Z_u dN_u - \alpha \int_0^s Z_u du + \\
&\sum_{i=j_0+1}^{m^*} \zeta_i \left[\mathbb{E}\left(\left(N_{u_{i+1}} - N_{u_i}\right)/\mathcal{F}_s\right) - \alpha \left(u_{i+1} - u_i\right)\right] \\
&= \int_0^s Z_u dN_u - \alpha \int_0^s Z_u du + \\
&\sum_{i=j_0+1}^{m^*} \zeta_i[\alpha \left(u_{i+1} - u_i\right) - \alpha \left(u_{i+1} - u_i\right)] \\
&= \int_0^s Z_u dN_u - \alpha \int_0^s Z_u du.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que todo proceso predecible es límite creciente de una sucesión de procesos elementales se llega al resultado.

(iv) Hay que demostrar que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_0^t Z_u dN_u + c\int_0^t (1-e^{Z_u})du\right\}/\mathcal{F}_s\right)$$
$$= \exp\left\{\int_0^s Z_u dN_u + c\int_0^s (1-e^{Z_u})du\right\}$$

lo que equivale a demostrar que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_s^t Z_u dN_u + c\int_s^t (1-e^{Z_u})du\right\}/\mathcal{F}_s\right) = 1.$$

Supóngase que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso elemental y está definido como (1.10) entonces

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{i=j_0}^{m-1}\zeta_i\left(N_{u_{i+1}}-N_{u_i}\right)+c(1-e^{\zeta_i})(u_{i+1}-u_i)\right\}/\mathcal{F}_s\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=j_0}^{m-1}\exp\left\{\zeta_i\left(N_{u_{i+1}}-N_{u_i}\right)+c(1-e^{\zeta_i})(u_{i+1}-u_i)\right\}/\mathcal{F}_s\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=j_0}^{m-1}\exp\left\{\zeta_i\left(N_{u_{i+1}}-N_{u_i}\right)+c(1-e^{\zeta_i})(u_{i+1}-u_i)\right\}/\mathcal{F}_{u_{m-1}}\right)/\mathcal{F}_s\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=j_0}^{m-2}\exp\left\{\zeta_i\left(N_{u_{i+1}}-N_{u_i}\right)+c(1-e^{\zeta_i})(u_{i+1}-u_i)\right\}\cdot\right.$$
$$\left.\mathbb{E}\left(\exp\left\{\zeta_{m-1}\left(N_{u_m}-N_{u_{m-1}}\right)+c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}/\mathcal{F}_{u_{m-1}}\right)/\mathcal{F}_s\right).$$

Ahora se denota por $Y_m = N_{u_m} - N_{u_{m-1}}$. Como ζ_{m-1} es $\mathcal{F}_{u_{m-1}}$ medible e independiente de Y_m

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\zeta_{m-1}\left(N_{u_m}-N_{u_{m-1}}\right)+c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}/\mathcal{F}_{u_{m-1}}\right)$$

$$=\exp\left\{c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}\mathbb{E}\left(\exp\left\{\zeta_{m-1}(N_{u_m}-N_{u_{m-1}})\right\}/\mathcal{F}_{u_{m-1}}\right)$$

$$=\exp\left\{c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\exp\{xy\}\,\mathbb{P}_{Y_m}(dy)\mathbb{P}_{\zeta_{m-1}}(dx)$$

$$=\exp\left\{c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}\cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{xk\}\,\mathbb{P}\left(Y_m=k/\mathcal{F}_{u_{m-1}}\right)\right]\mathbb{P}_{\zeta_{m-1}}(dx)$$

$$=\exp\left\{c(1-e^{\zeta_{m-1}})(u_m-u_{m-1})\right\}\cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{xk\}\exp\{-c(u_m-u_{m-1})\}\frac{(c(u_m-u_{m-1}))^k}{k!}\right]\mathbb{P}_{\zeta_{m-1}}(dx)$$

$$=\exp\left\{-ce^{\zeta_{m-1}}(u_m-u_{m-1})\right\}\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ce^x(u_m-u_{m-1}))^k}{k!}\right]\mathbb{P}_{\zeta_{m-1}}(dx)$$

$$=\exp\left\{-ce^{\zeta_{m-1}}(u_m-u_{m-1})\right\}\int_{\mathbb{R}}\exp\{ce^x(u_m-u_{m-1})\}\,\mathbb{P}_{\zeta_{m-1}}(dx)=1$$

y así por inducción se llega al resultado. ■

§1.3.2 Movimiento Browniano

El movimiento Browniano, también conocido como el proceso de Wiener, es parte fundamental para la construcción de los procesos de Lévy, de hecho éste representa la parte continua de un proceso de Lévy.

Definición 1.6. Un proceso estocástico real $(B_t)_{t\geqslant 0}$ es un *movimiento Browniano estándar* en el espacio filtrado $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathbb{P})$ si cumple las siguientes propiedades:

i) $B_0=0$ c.s.

ii) La función $t\rightsquigarrow B_t(\omega)$ es una función continua para toda $t\in\mathbb{R}^+$ c.s.

iii) Para toda $t,h\geqslant 0$, $B_{t+h}-B_t$ es independiente de $(B_u)_{t\geqslant u\geqslant 0}$ y tiene distribución normal con media 0 y varianza h.

Se sabe que la función característica de B_t es

$$\varphi_{B_t}(\lambda) = \exp\{-\tfrac{\lambda^2}{2}t\}$$

por lo que $\Phi(\lambda) = \lambda^2/2$. En este caso la tercia (d, q, Π) está dada con $q = 1$ y $\Pi = d = 0$.

Como consecuencia inmediata de la definición de $(B_t)_{t\geqslant 0}$ se tienen las siguiente propiedades.

Proposición 1.1. *Si $(B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano entonces*

i) **(simetría)** *el proceso $(-B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano.*

ii) **(escala)** *el proceso $(cB_{tc^{-2}})$ con $c > 0$ es un movimiento Browniano, en particular si $0 < s < t$ y $c = \sqrt{t}$ entonces $(\sqrt{t}B_r)_{1\geqslant r\geqslant 0}$ con $r = st^{-1}$ es un movimiento Browniano, y*

iii) **(invarianza bajo translaciones)** *para $h > 0$ $(B_{t+h} - B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano.*

Otras propiedades que se emplearán a lo largo de este trabajo y cuya demostración se puede consultar en [15] son las siguientes.

Proposición 1.2. *Sea $(B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano entonces*

i) **(reflexión)** $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant s}\{B_t > a\}\right) = 2\mathbb{P}(B_s > a) = \mathbb{P}(|B_s| > a)$,

ii) **(propiedad de Markov)** *para T un tiempo de paro finito el proceso*

$$B_{T+t} - B_T, \quad t \geqslant 0$$

es independiente de $\mathcal{F}_T$, y

iii) **(variación)** *las trayectorias de un movimiento Browniano son de variación infinita sobre intervalos, es decir, para todo $s \leqslant t$*

$$\sup \sum \left|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right| = \infty \quad \text{c.s.}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $s < t_1 < \cdots < t_n < t$ del intervalo (s, t).

Algunas martingalas asociadas con el movimiento Browniano se mencionan a continuación.

Proposición 1.3. *Sea $(B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano entonces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es martingala si*

i) $X_t = B_t$,

ii) $X_t = B_t^2 - t$ *y*

iii) $X_t = \exp\left\{cB_t - \frac{1}{2}c^2 t\right\}$ *con* $c \in \mathbf{C}$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Usando el hecho de que el movimiento Browniano tiene incrementos independientes y estacionarios se tiene que para $s \leqslant t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_s + (B_t - B_s)/F_s) \\
&= \mathbb{E}(B_s/F_s) + \mathbb{E}(B_t - B_s/\mathcal{F}_s) \\
&= B_s + \mathbb{E}(B_t - B_s) \\
&= B_s.
\end{aligned}$$

(ii) Como $B_t - B_s$ tiene media 0 y varianza $t - s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^2/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_s^2 + sB_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s) \\
&= B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s/\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s) \\
&= B_s^2 + 0 + (t - s)
\end{aligned}$$

(iii) Igualmente que (i) y (ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp\{cB_t\}/\mathcal{F}_s) &= \exp\{cB_s\}\,\mathbb{E}(\exp\{c(B_t - B_s)\}/\mathcal{F}_s) \\
&= \exp\{cB_s\}\exp\left\{c^2\left(\tfrac{(t-s)}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ya que la función generadora de momentos de una variable aleatoria X con distribución normal con media 0 y varianza t es $\exp\left\{c^2t/2\right\}$. ∎

§1.3.3 Proceso Poisson compuesto

Otro ejemplo importante de procesos de Lévy son los procesos Poisson compuestos ya que son parte fundamental para construir un proceso de Lévy.

Definición 1.7. Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, las variables Y_n tienen distribución común $\mathbb{P}_Y$ y sea $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso Poisson con parámetro α independiente de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$ se dice que es un *proceso Poisson compuesto* si para toda $t \geqslant 0$

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j.$$

Se verá que es infinitamente divisible y se encontrará su exponente característico.

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_t}/N_t = n\right)\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda(Y_1+\cdots+Y_n)}\right)\frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y_1}\right)^n \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Si $\varphi_Y(\lambda)$ es la función característica de Y_1

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_Y^n(\lambda)\frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\varphi_Y(\lambda)(\alpha t)\right)^n}{n!} \\
&= \exp\left\{\alpha t(\varphi_Y(\lambda) - 1)\right\} \\
&= \left(\exp\left\{\tfrac{\alpha t}{n}(\varphi_Y(\lambda) - 1)\right\}\right)^n,
\end{aligned}$$

por tanto la distribución de X_t es infinitamente divisible y de aquí que sea un proceso de Lévy. Su exponente característico es $\Psi(\lambda) = \alpha(1 - \varphi_Y(\lambda))$.

Como un proceso Poisson compuesto es de variación acotada, $\Psi(\lambda)$ se expresa como en (1.4), de donde la tercia (d, q, Π) está dada por $d = 0$, $q = 0$ y $\Pi(dx) = \alpha\mathbb{P}_Y(dx)$.

Otra manera de escribir a Ψ es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda) &= \int_{\{0\}^c}\left(1-e^{i\lambda x}\right)\alpha\mathbb{P}_Y(dx)\\ &= -i\alpha\int_{\{0\}^c}\lambda x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\mathbb{P}_Y(dx)+\int_{\{0\}^c}\left(1-e^{i\lambda x}+\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right)\alpha\mathbb{P}_Y(dx)\\ &= -id\lambda+\int_{\{0\}^c}\left(1-e^{i\lambda x}+\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right)\alpha\mathbb{P}_Y(dx)\end{aligned}$$

si $d=\int_{\{0\}^c}x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\alpha\mathbb{P}_Y(dx)$.

Esta última expresión, que es un caso particular de la fórmula de Lévy-Khintchine, sugiere la posibilidad de aproximar una distribución (*i.d.*) usando una sucesión de procesos Poisson compuestos.

Si se define el proceso puntual

$$e_t=\begin{cases}Y_n & \text{si } N_{t^-}<n=N_t\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

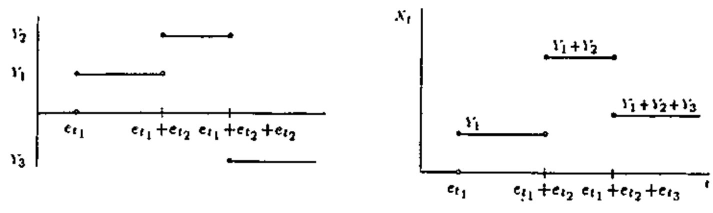
entonces

$$X_t=\sum_{j=1}^{N_t}Y_j=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}e_s.$$

En este caso se tiene que $(e_t)_{t\geqslant 0}$ es un (p.p.p.) con medida característica $v=\alpha\mathbb{P}_Y$ (ver apéndice II). Su exponente característico, dado por la fórmula exponencial [II.5], es

$$\Psi(\lambda)=\int_{\mathbb{R}-\{0\}}(1-e^{i\lambda x})v(dx)=\int_{\mathbb{R}-\{0\}}(1-e^{i\lambda x})\alpha\mathbb{P}_Y(dx). \tag{1.12}$$

Figura 2: Proceso Poisson Compuesto



Observación 1.2. Como caso particular de un proceso Poisson compuesto, si se toma $\mathbb{P}_Y(dx) = \delta_1(dx)$, se tiene el proceso Poisson; igualmente si $\frac{\nu(dx)}{dx} = (x)^{-1}e^{-\alpha x}$, se tienen los procesos Gamma(α, t). Este hecho se demuestra en §3.2.4.

§1.3.4 Procesos estables

Definición 1.8. Se dice que un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un *proceso estable* con índice α si para cualquier $a > 0$,

$$(X_{at})_{t\geqslant 0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (a^{1/\alpha}X_t)_{t\geqslant 0} \tag{1.13}$$

con $\alpha \in (0, 2]$.

Observación 1.3. Se llaman procesos α-estables a los procesos estables con índice α. Si se hace el cambio de variable $a = t^{-1}$, la condición (1.13) sería

$$(t^{1/\alpha}X_1)_{t\geqslant 0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_t)_{t\geqslant 0}.$$

La propiedad de ser un proceso α-estable queda dado, en términos del exponente característico, como

$$\Psi(t^{1/\alpha}\lambda) = t\Psi(\lambda) \quad \text{ó} \quad \Psi(k\lambda) = k^\alpha\Psi(\lambda),$$

con $k = t^{1/\alpha}$ y $t > 0$.

La familia de procesos α-estables se caracteriza porque el exponente característico tiene la siguiente representación

$$\Psi(\lambda) = c|\lambda|^\alpha\left(1 - i\beta\tfrac{\lambda}{|\lambda|}z(\lambda,\alpha)\right),$$

donde $0 < \alpha \leqslant 2$, $|\beta| \leqslant 1$, c una contante positiva, $\lambda/|\lambda| = 0$ si $\lambda = 0$ y

$$z(\lambda,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln|\lambda| & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

En la sección §4.1 se dará una idea más detallada de esta representación.

Como ejemplos de procesos estables están el movimiento Browniano que se obtiene con $\alpha = 2$, de donde

$$\Psi(\lambda) = c\lambda^2.$$

En este caso, la tercia (d, q, Π) está dada con $\Pi(dx) = d = 0$ y $q = \sqrt{2c}$.

Si $\alpha = 1$ se tiene un proceso de Cauchy con deriva, ya que

$$\Psi(\lambda) = c|\lambda|\left(1 + i\beta\tfrac{\lambda}{|\lambda|}\tfrac{2}{\pi}\ln|\lambda|\right) = c|\lambda| + i\mu\lambda,$$

con $\mu = c\beta\frac{2}{\pi}\ln|\lambda|$. Para este caso $d = \mu$, $q = 0$ y $\frac{\Pi(dx)}{dx} = \frac{c}{\pi x^2}$.

Si además de $\alpha = 1$ se toma $c = 1$ y $\beta = 0$ se tiene un proceso de Cauchy simétrico, para el cual

$$\Psi(\lambda) = |\lambda|$$

y $d = q = 0$ y $\frac{\Pi(dx)}{dx} = \left(\pi x^2\right)^{-1}$. Nótese que procesos simétricos se obtienen cuando $\beta = 0$ ya que $\Psi(\lambda)$ es real y por tanto la función característica $\varphi_{X_t}(\lambda) = \exp\{-t\Psi(\lambda)\}$ también.

La representación general de $\Psi(\lambda)$ para procesos α-estables, con $\alpha \neq 2$. en términos de la tercia (d, q, Π) es la siguiente

$$d = \int_{-1}^{1} x\Pi(dx) = \tfrac{\beta}{1-\alpha} \cdot \tfrac{\alpha c}{\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}, \quad q = 0 \quad \text{y}$$

$$\tfrac{\Pi(dx)}{dx} = |x|^{-1-\alpha}\left[\tfrac{1}{2}(1+\beta)\mathbb{1}_{\{x>0\}} + \tfrac{1}{2}(1-\beta)\mathbb{1}_{\{x<0\}}\right]\tfrac{\alpha c}{\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}.$$

☞ **Observación 1.4.** La restricción sobre el índice α se debe a que la medida de Lévy debe cumplir

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

En este caso

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) &\simeq \int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)|x|^{-1-\alpha}dx \\ &= \int_{\{|x|<1\}} |x|^{-1-\alpha}dx + \int_{\{|x|\geqslant 1\}} |x|^{1-\alpha}dx < \infty\end{aligned}$$

si y sólo si $2 - \alpha > 0$ y $-\alpha < 0$, es decir, $\alpha \in (0, 2)$. Nótese que el caso $\alpha = 2$ es el movimiento Browniano.

§1.4 Construcción de un Proceso de Lévy

Básicamente se demostrará el teorema 1.3 y se harán algunas observaciones sobre esta construcción. Para hacerlo más claro, se reescribe el exponente característico de la siguiente manera

(1.14)
$$\Psi(\lambda) = id\lambda + \tfrac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{\{|x|\geqslant 1\}}\left(1-e^{i\lambda x}\right)\Pi(dx) + \int_{\{|x|<1\}}\left(1-e^{i\lambda x}+i\lambda x\right)\Pi(dx).$$

La intención ahora es construir un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ como

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)} \qquad (t \geqslant 0)$$

en donde $(X_t^{(i)})_{t\geqslant 0}$, $i = 1, 2, 3$, son procesos de Lévy independientes con exponente característico $\Psi^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

Por la independencia entre estos tres procesos se tendría que

$$\begin{aligned}\exp\{-t\Psi(\lambda)\} &= \varphi_{X_t}(\lambda) = \varphi_{X_t^{(1)}}(\lambda)\cdot\varphi_{X_t^{(2)}}(\lambda)\cdot\varphi_{X_t^{(3)}}(\lambda)\\ &= \exp\{-t\{\Psi^{(1)}(\lambda)+\Psi^{(2)}(\lambda)+\Psi^{(3)}(\lambda)\}\},\end{aligned}$$

de donde $\Psi(\lambda) = \Psi^{(1)}(\lambda) + \Psi^{(2)}(\lambda) + \Psi^{(3)}(\lambda)$.

Como se sabe, si Y es una variable aleatoria con distribución $N(m, \sigma^2)$, entonces

$$\varphi_Y(\lambda) = \mathbb{E}\left(\exp\{i\lambda Y\}\right) = \exp\left\{i\lambda m - \tfrac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Sean $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un movimiento Browniano y $q > 0$, entonces si se define $X_t^{(1)} = qB_t - dt$, se tiene que $\mathbb{E}(X_t^{(1)}) = -dt$ y $\mathrm{Var}(X_t^{(1)}) = q^2 t$, de aquí que

$$\varphi_{X_t^{(1)}}(\lambda) = \exp\{-t(i\lambda d + \tfrac{1}{2}\lambda^2 q^2)\}$$

y por lo tanto $\Psi^{(1)}(\lambda) = i\lambda d + \frac{1}{2}\lambda^2 q^2$.

Sea $(e_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso Poisson puntual, independiente de $(B_t)_{t\geqslant 0}$ con medida característica Π. Se define

$$e_t^{(2)} = \begin{cases} e_t & \text{si } |e_t| \geqslant 1,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Entonces $(e_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ es un (p.p.p.) con medida característica

$$\Pi^{(2)}(dx) = \Pi(dx \cap \{|x| \geqslant 1\})$$

(ver apéndice II).
Nótese que

$$\Pi^{(2)}(\mathbb{R}) = \Pi(\mathbb{R} \cap \{|x| \geqslant 1\}) = \int_{\{|x|\geqslant 1\}} \Pi(dx) \leqslant \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$$

y por lo tanto $e_t^{(2)}$ es discreto.

Se considera para $t \geqslant 0$ un nuevo proceso

$$X_t^{(2)} = \sum_{s\leqslant t} e_s^{(2)},$$

el cual es un proceso Poisson compuesto y por lo tanto un proceso de Lévy (ver §1.3.3). Por la fórmula exponencial [II.5] o por (1.12)

$$\Psi^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x})\Pi^{(2)}(dx) = \int_{\{|x|\geqslant 1\}} (1 - e^{i\lambda x})\Pi(dx).$$

Por último se define

$$e_t^{(3)} = \begin{cases} e_t & \text{si } |e_t| < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este nuevo proceso resulta ser un (p.p.p.) con medida característica

$$\Pi^{(3)}(dx) = \Pi(dx \cap \{|x| < 1\}),$$

independiente de $(e_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$, pues ambos son procesos Poisson puntual que no tienen saltos en común.

En este caso se puede tener $\sum_{s\leqslant t} |e_t^{(3)}| = \infty$, si no fuera así se tendría simplemente otro proceso Poisson compuesto, por eso se considera para cada $\epsilon > 0$ que la suma es infinita y se define el proceso de sumas compensadas

$$X_t^{(\epsilon,3)} = \sum_{s\leqslant t} \mathbb{1}_{\{\epsilon<|e_s^{(3)}|<1\}} e_s^{(3)} - t\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx) \qquad (t \geqslant 0), \tag{1.15}$$

el cual resulta ser un proceso de Lévy, pues es suma de dos procesos de Lévy independientes.

☞ **Observación 1.5.** El primer sumando de (1.15) corresponde a un proceso Poisson compuesto con parámetro $\Pi(dx \cap \{\epsilon < |x| < 1\})$ y tiene como exponente característico a la expresión

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x}) \mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}} \Pi(dx).$$

Hecha esta observación, se encuentra el exponente característico de $X_1^{(\epsilon,3)}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda X_1^{(\epsilon,3)}\right\}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left\{i\lambda \sum_{s\leqslant 1} \mathbb{1}_{\{\epsilon<|e_s^{(3)}|<1\}} e_s^{(3)}\right\}\right)\cdot \exp\left\{-i\lambda(1)\int_{\mathbb{R}} x \mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)\right\}\\
&= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\lambda x})\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)\right\}\cdot\exp\left\{-\int_{\mathbb{R}} i\lambda x\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)\right\}\\
&= \exp\left\{-\left(\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\lambda x})\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)+\int_{\mathbb{R}} i\lambda x\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)\right)\right\}\\
&= \exp\left\{-\left(\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\lambda x}+i\lambda x)\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx)\right)\right\},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Psi^{(\epsilon,3)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x)\mathbb{1}_{\{\epsilon<|x|<1\}}\Pi(dx).$$

Por ser $(X_t^{(\epsilon,3)})_{t\geqslant 0}$ un proceso de Lévy tiene incrementos independientes y por la fórmula exponencial, $\mathbb{E}(X_t^{(\epsilon,3)}) = 0$, por lo que $(X_t^{(\epsilon,3)})_{t\geqslant 0}$ es una martingala.

Por la desigualdad maximal de Doob [1.5]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}|X_s^{(\kappa,3)} - X_s^{(\epsilon,3)}|^2\right) &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} |x|^2 \mathbb{1}_{\{\kappa<|x|<\epsilon\}}\Pi(dx)\\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.
\end{aligned}$$

entonces si $\kappa, \epsilon \to 0^+$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}|X_s^{(\kappa,3)} - X_s^{(\epsilon,3)}|^2\right) \to 0.$$

Por lo tanto, $X_t^{(\epsilon,3)} \to X_t^{(3)}$ uniformemente en L^2 si $\epsilon \to 0^+$. Así, el exponente característico de $X_t^{(3)}$ es

$$\Psi^{(3)}(\lambda) = \int_{\{|x|<1\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x)\Pi(dx).$$

Con lo que se obtiene la igualdad (1.14).

Observación 1.6. El proceso $(X_t^{(1)})_{t\geqslant 0}$ es una trasformación lineal de un movimiento Browniano con deriva, el cual representa la parte continua de un proceso de Lévy. $(X_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ es un proceso Poisson compuesto que tiene únicamente saltos no menores que uno y por último $(X_t^{(3)})_{t\geqslant 0}$ es una martingala que tiene saltos menores que uno.

Un proceso de Lévy es continuo si y sólo si $\Pi = 0$ y es un proceso de saltos si y sólo si $q = 0$.

Si se denota por eX_t el salto de X en el tiempo t, esto es $eX_t = X_t - X_{t-}$, entonces $\sum_{s\leqslant t} |eX_s|$ representa la serie parcial de los saltos de $(X_t)_{t\geqslant 0}$. De la fórmula exponencial se tiene que

$$\sum_{s\leqslant t} |eX_s| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int (1 \wedge |x|)\Pi(dx) < \infty.$$

Sabiendo esto y que un movimiento Browniano no tiene variación acotada se deduce que un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ tiene variación acotada si y sólo si $q = 0$ y $\int (1 \wedge |x|)\Pi(dx) < \infty$. En este caso

$$X_t = dt + \sum_{0\leqslant s\leqslant t} e_s \qquad (t > 0), \tag{1.16}$$

donde $(e_t)_{t\geqslant 0}$ es un (p.p.p.) con medida característica Π. El exponente característicio de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es por tanto

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x})\Pi(dx).$$

Claro está que si en (1.16) $d = 0$ entonces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un procesos Poisson compuesto.

Capítulo 2

Procesos de Lévy como Procesos de Markov

En este capítulo se dan algunas propiedades de los procesos de Markov que satisfacen los procesos de Lévy, ya que los procesos de Lévy cumplen la propiedad de Markov. Se aprovecha esta relación para asociar algunos operadores lineales, de la teoría de Markov, a los procesos de Lévy dando una mejor descripción de éstos últimos.

§2.1 Propiedad de Markov y funciones de transición

En esta sección se dan algunas propiedades de los procesos de Lévy en términos de procesos de Markov.

✎ **Definición 2.1.** Sea $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso estocástico definido en el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ con valores en $(E, \mathcal{E})$. Se dice que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un *proceso de Markov* si para $0 \leqslant s < t$ y $A \in \mathcal{E}$ cumple la *propiedad de Markov*, es decir,

$$\mathbb{P}\left(X_t \in A/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{P}\left(X_t \in A/\sigma\left(X_s\right)\right).$$

Esto es equivalente a decir que

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)/\sigma\left(X_s\right)\right),$$

para toda $f : E \rightsquigarrow \mathbb{R}$ acotada y $\mathcal{E}$-medible.

Un resultado importante que relaciona a los procesos de Lévy y los procesos de Markov está dado por el siguiente lema.

Lema 2.1. *Si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso con incrementos independientes y estacionarios entonces tiene la propiedad de Markov.*

DEMOSTRACIÓN. Para $v < u < r$, $X_r - X_u$ y $X_u - X_v$ son independientes y para $A_i \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}\left((X_{t_i} - X_{r_i}) \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right) = \mathbb{P}\left(X_{t_i - r_i} \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

con $t_i > r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sean $s, t \geqslant 0$, si

$$X = X_{t+s} - X_t, \quad Y = X_t, \quad \mathcal{G} = \mathcal{F}_t, \quad \text{y} \quad A \in \mathcal{E}$$

de [I.6] se obtiene el resultado. ♜

Ahora, ya se sabe que un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es efectivamente de Markov.

Una propiedad de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ que se empleara a lo largo del trabajo es la siguiente.

Proposición 2.1. *La filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ es continua por la derecha, es decir,*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \qquad \textit{para toda } t \geqslant 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que demostrar que $\mathcal{F}_0 = \cap_{s>0}\mathcal{F}_s$. Se denota por $\mathcal{T}$ al espacio de trayectorias de $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $X^{(n)} : \Omega \rightsquigarrow \mathcal{T}$ como

$$X^{(n)} = \left\{X_{t+2^{-n}} - X_{2^{-n}} : 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2^n}\right\}.$$

Por tener $(X_t)_{t\geqslant 0}$ incrementos independientes, $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables independiente. Las trayectorias $\{X_t : 0 \leqslant t \leqslant 2^{-n}\}$ se pueden recuperar de $X^{(n+1)}, X^{(n+2)}, \ldots$ ya que *

$$\begin{aligned}\{X_t : 0 \leqslant t \leqslant 2^{-n}\} &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X_t : t \in [\tfrac{1}{2^{n+i}}, \tfrac{2}{2^{n+i}}]\} \\ &= \bigcup_{i=n+1}^{\infty}\left\{X^{(i)} + X_{\frac{1}{2^i}}\right\}.\end{aligned}$$

*Por continuidad por la derecha de (X_t), en el cero se toma el límite.

Si $\mathcal{F}^{(n)}$ es la σ-álgebra generada por $X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots$, la cual es una σ-álgebra cola, entonces $\mathcal{F}^{(n+1)} = \mathcal{F}_{2^{-n}}$ y por la ley $0-1$ de Kolmogorov

$$\mathcal{F}^{(\infty)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^{(n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{2^{-n}} = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{0+},$$

es decir, $\mathcal{F}_{0+}$ es la σ-álgebra trivial.

Para $t \geqslant 0$, sean $\epsilon > 0$ y $\mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}'_\epsilon$ en donde $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}'_\epsilon = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}'_\epsilon))$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_\epsilon &= \sigma(X'_u : 0 \leqslant u \leqslant \epsilon)\\ &= \sigma(X_{t+u} - X_t : 0 \leqslant u \leqslant \epsilon)\\ &= \sigma(X_v - X_t : t \leqslant v \leqslant t+\epsilon)\end{aligned}$$

y $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leqslant t)$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}_{t+\epsilon} = \sigma(X_s : s \leqslant t) \vee \sigma(X_v - X_t : t \leqslant v \leqslant t+\epsilon),$$

de aquí que $\mathcal{F}_t$ sea independiente de $\mathcal{F}'_\epsilon$. Como $(X_t)_{t\geqslant 0}$ y $(X'_u)_{u\geqslant 0}$ son indistinguibles $\mathcal{F}'_\epsilon = \mathcal{F}_\epsilon$. De todo esto

$$\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \bigcap_{\epsilon>0} (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}'_\epsilon) = \mathcal{F}_t \vee \left(\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_\epsilon\right) = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{0+} = \mathcal{F}_t. \qquad \blacksquare$$

Se dán algunas definiciones que serán de utilidad para trabajar con los procesos de Markov.

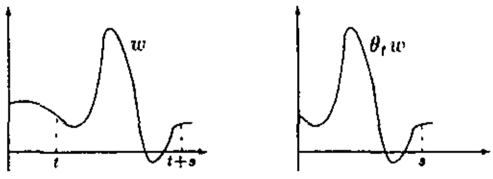
✎ **Definición 2.2.** Para $t \geqslant 0$ se define el *operador de translación* como la función

$$\theta_t : \Omega \rightsquigarrow \Omega \quad \text{tal que} \quad (\theta_t\omega)(s) = \omega(t+s), s \geqslant 0$$

donde $\omega(u) = X_u(\omega)$.

El efecto de θ_t sobre la trayectoria de ω es que corta la parte anterior a t de ésta y mueve el origen a t.

Figura 3: Operador de translación



Definición 2.3. Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible. Se dice que una función $N(x, A) : E \times \mathcal{E} \rightsquigarrow \mathbf{R}^+$ es una *probabilidad de transición* si

i) $N(x, \cdot)$ es una medida en $\mathcal{E}$ para toda $x \in E$,

ii) $N(\cdot, A)$ es $\mathcal{E}$-medible para cada $A \in \mathcal{E}$,

iii) $N(x, E) = 1$ para toda $x \in E$.

Una probabilidad de transición N da el mecanismo para el movimiento aleatorio sobre el espacio E.

Definición 2.4. Una *función de transición* sobre un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es una familia $(P_{s,t})_{t>s\geqslant 0}$ de probabilidades de transición sobre $(E, \mathcal{E})$ tal que cumple la propiedad de *Chapman-Kolmogorov*, esto es, para cada $s < u < t$, $x \in E$ y $A \in \mathcal{E}$

$$P_{s,t}(x, A) = \int_E P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, A).$$

Se dice que una *función de transición es homogénea* si $P_{s,t}$ depende sólo de la diferencia $(t - s)$, es decir, $P_{s,t} = P_{0,t-s}$, en este caso se denota $P_t = P_{0,t}$ y la propiedad de Chapman-Kolmogorov toma la forma

$$P_{t+s}(x, A) = \int_E P_s(x, dy) P_t(y, A) \qquad (0 \leqslant s, t).$$

ya que

$$\begin{aligned} P_{t+s}(x,A) &= P_{u,u+t+s}(x,A) \\ &= \int_E P_{u,u+s}(x,dy)P_{u+s,u+s+t}(y,A) \\ &= \int_E P_{0,s}(x,dy)P_{0,t}(y,A) \\ &= \int_E P_s(x,dy)P_t(y,A), \end{aligned}$$

para $s,t,u \geqslant 0$.

Definición 2.5. Se dice que una función de transición $P_{s,t}(x,A)$ está asociada a un proceso de Markov $(X_t)_{t\geqslant 0}$ si para todo $t > s \geqslant 0$ y $A \in \mathcal{E}$

$$P_{s,t}(x,A) = \mathbb{P}\left(X_t \in A / X_s = x\right)$$

con $x \in E$, o de manera equivalente, si

$$P_{s,t}(X_s,A) = \mathbb{P}\left(X_t \in A/X_s\right), \tag{2.1}$$

o

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)/X_s\right) = \int_E f(y)P_{s,t}(X_s,dy)$$

para toda $f : E \rightsquigarrow \mathbb{R}$ acotada y $\mathcal{E}$-medible.

Proposición 2.2. *Sea $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso de Markov. Si se define $P_{s,t}$ como en (2.1) entonces $(P_{s,t})_{t>s\geqslant 0}$ es una función de transición.*

Demostración. Para toda $t > u > s$ y $A \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} P_{s,t}\left(X_s,A\right) &= \mathbb{P}\left(X_t \in A/X_s\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_t \in A/\mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(X_t \in A/\mathcal{F}_u\right)/\mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(X_t \in A/X_u\right)/\mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(P_{u,t}(X_u,A)/\mathcal{F}_s\right) \\ &= \int_E P_{u,t}(y,A)P_{s,u}(X_s,dy) \\ &= \int_E P_{s,u}(X_s,dy)P_{u,t}(y,A) \end{aligned}$$

y se puede concluir que $P_{s,t}(X_s, A)$ es una función de transición. ■

Asociada una función de transición a un proceso de Markov, la definición (2.1) se expresa de la siguiente manera.

Definición 2.6. Un proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un *proceso de Markov con función de transición* $P_{s,t}$ si para toda función $f : E \rightsquigarrow \mathbb{R}$ acotada y $\mathcal{E}$-medible y para $t > s \geqslant 0$

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right) = P_{s,t}\left(X_s, f\right),$$

donde $P_{s,t}\left(X_s, f\right) = P_{s,t}f(X_s) = \int f(y)P_{s,t}(X_s, dy)$. De manera equivalente, si para cada $A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}\left(X_t \in A/\mathcal{F}_s\right) = P_{s,t}(X_s, A). \tag{2.2}$$

La medida de probabilidad v dada por $v(A) = \mathbb{P}\left(X_0 \in A\right)$ se llama *distribución inicial.*

Observación 2.1. Si un proceso de Markov es homogéneo, las condiciones anteriores quedan dadas como

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{F}_s\right) = P_{t-s}f\left(X_s\right) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\left(X_t \in A/\mathcal{F}_s\right) = P_{t-s}\left(X_s, A\right)$$

respectivamente.

Una descripción de la propiedad de Markov es la siguiente:

Teorema 2.1. *Un proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso de Markov con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ con función de transición $(P_{s,t})_{t>s\geqslant 0}$ y distribución inicial v si y sólo si para toda $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ y $(f_i)_{i=0}^{k}$ funciones acotadas y $\mathcal{E}$-medibles*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i\left(X_{t_i}\right)\right) = &\int_E v(dx_0)f_0(x_0)\int_E f_1(x_1)P_{0,t_1}(x_0, dx_1)\cdots \\ &\int_E f_k(x_k)P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}, dx_k).\end{aligned} \tag{2.3}$$

(se considera $P_{0,0}(x,\cdot) = \delta_x(\cdot)$).

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso de Markov, es claro que para $k=0$ se cumple (2.3). Supóngase válido para $k=n-1$ entonces para $k=n$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n} f_i\left(X_{t_i}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i\left(X_{t_i}\right)\mathbb{E}\left(f_n\left(X_{t_n}\right)/\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i\left(X_{t_i}\right) P_{t_{n-1},t_n} f_n\left(X_{t_{n-1}}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i^*\left(X_{t_i}\right)\right),
\end{aligned}
$$

donde $f_i^* = f_i$ para $i=1,2,\ldots,n-2$ y $f_{n-1}^* = f_{n-1}P_{t_{n-1},t_n}f_n$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i^*\left(X_{t_i}\right)\right) &= \int_E v(dx_0)f_0^*(x_0)\int_E f_1^*(x_1)P_{0,t_1}(x_0,dx_1)\cdots\\
&\quad\int_E f_{n-1}^*(x_{n-1})P_{t_{n-2},t_{n-1}}(x_{n-2},dx_{n-1})\\
&= \int_E v(dx_0)f_0(x_0)\int_E f_1(x_1)P_{0,t_1}(x_0,dx_1)\cdots\\
&\quad\int_E f_{n-1}(x_{n-1})P_{t_{n-2},t_{n-1}}(x_{n-2},dx_{n-1})P_{t_{n-1},t_n}f_n\left(x_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

y como

$$
P_{t_{n-1},t_n}f_n\left(x_{n-1}\right) = \int_E f_n\left(x_n\right)P_{t_{n-1},t_n}\left(x_{n-1},dx_n\right)
$$

se llega al resultado.

Para demostrar que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso de Markov si se supone (2.3) es suficiente, por el teorema de clases monótonas [I.7], con demostrar que

$$
\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i\left(X_{t_i}\right)g\left(X_v\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i\left(X_{t_i}\right)P_{t,v}g\left(X_t\right)\right) \tag{2.4}
$$

con $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant v$ y $(f_i)_{i=0}^{k}$, acotadas y $\mathcal{E}$-medibles.
Por (2.3)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i\left(X_{t_i}\right)g\left(X_v\right)\right) &= \int_E f_0\left(x_0\right)v\left(dx_0\right)\cdots\int_E f_k\left(x_k\right)P_{t_{k-1},t_k}\left(x_{k-1},dx_k\right)\\
&\quad\int_E g\left(x_v\right)P_{t,v}\left(x_t,dx_v\right)
\end{aligned}
$$

y como $P_{t,v}g\left(X_t\right) = \int_E g\left(x_v\right)P_{t,v}\left(x_t,dx_v\right)$ entonces (2.4) es cierta. ∎

☞ **Observación 2.2.** Este último teorema dice que la distribución inicial y la función de transición determinan de manera única a la distribución de un proceso de Markov. Como ejemplos tenemos al movimiento Browniano con función de transición en $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ dada por

$$P_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dy$$

y al proceso Poisson con función de transición

$$P_t(x, \{x + na\}) = \frac{e^{-ct}(ct)^n}{n!}, \qquad c > 0, a \neq 0, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

Como caso particular de (2.3), considerando procesos homogéneos y funciones indicadoras, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_v(X_{t_0} \in A_0, \dots, X_{t_k} \in A_k) = \int_{A_0} \cdots \int_{A_k} & P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) \cdots \\ & P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2)\, P_{t_1 - t_0}(x_0, dx_1)\, v(dx_0), \end{aligned} \tag{2.5}$$

entonces para cada x_0 se tiene una medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\delta_{x_0}}$ que se denota por $\mathbb{P}_x$ y por $\mathbb{E}_x$ la esperanza con respecto a $\mathbb{P}_x$. Es claro que para procesos homogéneos tenemos la igualdad

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A) = P_t(x, A),$$

es decir, la probabilidad de que el proceso que inició en x esté en A en el tiempo t, está dado por el valor de la probabilidad de transición $P_t(x, A)$. De esto se tiene que $x \rightsquigarrow \mathbb{P}_x(X_t \in A)$ es medible. De manera general se tiene el siguiente lema.

Lema 2.2. *Si Y es $\mathcal{F}_\infty$-medible y acotada, la función*

$$x \rightsquigarrow \mathbb{E}_x(Y) : (E, \mathcal{E}) \rightsquigarrow \mathbf{R}$$

es medible y

$$\mathbb{E}_v(Y) = \int_E \mathbb{E}_x(Y) v(dx).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de clases monótonas es suficiente con demostrarlo para

$$Y = \mathbb{1}_A \quad \text{con} \quad A = \{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}, \quad 0 < t_1 < \cdots < t_n.$$

En este caso

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(Y) &= \mathbb{P}_x(A) \\
&= \int_{A_1} P_{0,t_1}(x, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_E \cdots \int_E \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x_n) P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{0,t_1}(x, dx_1)
\end{aligned}$$

la cual es medible en x.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_v(Y) &= \mathbb{P}_v(A) \\
&= \int_E v(dx) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_E v(dx) \int_E \cdots \int_E \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x_n) \cdot \\
&\qquad\qquad P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_E \mathbb{P}_x(A) v(dx) = \int_E \mathbb{E}_x(Y) v(dx).
\end{aligned}$$

∎

Ahora se da la propiedad de Markov en términos del operador de translación.

Teorema 2.2. *Si Y es $\mathcal{F}_\infty$-medible y acotada entonces para $t > 0$ y distribución inicial v*

$$\mathbb{E}_v(Y \circ \theta_t / \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(Y) \quad \mathbb{P}_v\text{-c.s.} \tag{2.6}$$

donde el lado derecho de (2.6) es la variable aleatoria que se tiene al componer las funciones $\omega \rightsquigarrow X_t(\omega)$ y $x \rightsquigarrow \mathbb{E}_x(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de esperanza condicional, lo que hay que demostrar es que para cualquier Z acotada y $\mathcal{F}_t$-medible

$$\mathbb{E}_v(Y \circ \theta_t \cdot Z) = \mathbb{E}_v(\mathbb{E}_{X_t}(Y) \cdot Z).$$

Por el teorema de clases monótonas es suficiente con demostrarlo para

$$Z = \prod_{i=1}^{k} f_i\left(X_{t_i}\right) \qquad \text{y} \qquad Y = \prod_{j=1}^{n} g_j\left(X_{t_j}\right),$$

donde $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ y $\{g_j\}_{j=1}^{n}$ son funciones acotadas y $\mathcal{E}$-medibles con $t_i \leqslant t$ para toda i.
Aplicando simplemente (2.3) se tiene el resultado. ∎

Observación 2.3. Como caso particular de (2.6) si se toma $Y = \mathbb{1}_{\{X_s \in A\}}$ se tiene

$$\mathbb{P}_v\left(X_{t+s} \in A/\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{P}_{X_t}\left(X_s \in A\right) = P_s\left(X_t, A\right),$$

que coincide con (2.2).

Ahora, se da la conexión entre los semigrupos de operadores y los procesos de Markov. Sea $C_0(E)$ el espacio de funciones continuas f tales que se anulan en infinito con norma $|f(x)|_\infty = \sup\limits_x |f(x)|$.

Definición 2.7. Un *semigrupo de Feller* en $C_0(E)$ es una familia T_t, $t \geqslant 0$, de operadores lineales positivos en $C_0(E)$ tal que

i) $T_t f \in C_0(E)$, para toda $f \in C_0(E)$.

ii) Si $f \in C_0(E)$ y $0 \leqslant f \leqslant 1$ entonces $0 \leqslant T_t f \leqslant 1$.

iii) $T_0 = \mathbf{I}$ (la identidad en $C_0(E)$) y $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ para $s, t \geqslant 0$.

iv) Para toda $f \in C_0(E)$, $\lim\limits_{t \downarrow 0} |T_t f - f|_\infty = 0$.

La importancia de esta definición es la siguiente

Proposición 2.3. *Si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ es un semigrupo de Feller entonces existe una función de transición $P_t(x, A)$, $t \geqslant 0$. en $(E, \mathcal{E})$ tal que*

$$T_t f(x) = P_t f(x)$$

para toda $f \in C_0(E)$ y $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN. Para toda $x \in E$ la aplicación $f \rightsquigarrow T_t f(x)$ es lineal y no negativa. Por el teorema de Riesz (ver [1.8]) existe una medida $P_t(x, \cdot)$ en $\mathcal{E}$ tal que

$$T_t f(x) = \int f(y) P_t(x, dy)$$

para cada $f \in \mathcal{C}_0(E)$.

Como $P_t f \in \mathcal{C}_0(E)$ para cada $f \in \mathcal{C}_0(E)$ se tiene que $P_t f$ es medible y por el teorema de clases monótonas resulta que $P_t(x, A)$ es medible en x para cada $A \in \mathcal{E}$. Las demás propiedades de función de transición son consecuencia de las propiedades de semigrupo de T_t. ■

Definición 2.8. Una función de transición asociada a un semigrupo de Feller se le llama *función de transición de Feller*.

Sea $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ un proceso de Lévy. Se define para cada $x \in E$, a $\mathbf{P}_x$ como la distribución de $X + x$, es decir, $\mathbf{P}_x$ es la distribución del proceso de Lévy que empieza en x ($\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$).

Se define para $t \geqslant 0$ un operador sobre $\mathcal{C}_0(E)$ como

$$P_t f(x) = \mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right). \tag{2.7}$$

Observación 2.4. El operador de (2.7) tiene la siguiente expresión

$$P_t f(x) = \mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right) = \mathbb{E}\left(f(X_t + x)\right) = \int_E f(x+y) \mathbb{P}_{X_t}(dy).$$

Proposición 2.4. *La familia $(P_t)_{t \geqslant 0}$ es un semigrupo de Feller.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) Usando el hecho de que f es acotada

$$\lim_{|x| \to \infty} P_t f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \mathbb{E}(f(x + X_t)) = \mathbb{E}(\lim_{|x| \to \infty} f(x + X_t)) = 0.$$

Sean $f \in \mathcal{C}_0(E)$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$, entonces por convergencia dominada

$$\begin{aligned} \|P_t f(x_n) - P_t f(x)\|_\infty &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \Big(f(x_n + y) - f(x + y) \Big) \mathbb{P}_{X_t}(dy) \right\|_\infty \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left\| \Big(f(x_n + y) - f(x + y) \Big) \right\|_\infty \mathbb{P}_{X_t}(dy) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(ii) Si $0 \leqslant f \leqslant 1$ entonces $0 \leqslant P_t f(x) = \mathbf{E}_x\left(f\left(X_t\right)\right) \leqslant 1$.

(iii) Para la primera parte $P_0 f(x) = \mathbf{E}_x\left(f(X_0)\right) = \mathbb{E}\left(f(x + X_0)\right) = f(x)$. Para $s, t \geqslant 0$

$$P_{t+s} f(x) = \mathbf{E}_x\left(f(X_{t+s})\right)$$

y

$$\begin{aligned} P_t\left(P_s f(x)\right) &= P_t\big(\mathbf{E}_x\left(f(X_s)\right)\big) \\ &= \mathbf{E}_x\big(\mathbf{E}_{X_t}\left(f(X_s)\right)\big) \\ &= \mathbf{E}_x\big(\mathbf{E}_x\left(f(X_s) \circ \theta_t / \mathcal{F}_t\right)\big) \\ &= \mathbf{E}_x\big(\mathbf{E}_x\left(f(X_{t+s}) / \mathcal{F}_t\right)\big) \\ &= \mathbf{E}_x\left(f(X_{t+s})\right). \end{aligned}$$

(iv) Para toda $x \in E$ y para $f \in \mathcal{C}_0(E)$, por ser X_t cadlag

$$\begin{aligned} \left|P_t f(x) - f(x)\right|_\infty &= \left|\mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right) - f(x)\right|_\infty \\ &= \left|\mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right) - \mathbf{E}_x\left(f(X_0)\right)\right|_\infty \\ &\leqslant \mathbf{E}_x\left|f(X_t) - f(X_0)\right|_\infty \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

entonces $\sup_x \left|P_t f(x) - f(x)\right| \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. ∎

Se refuerza la propiedad de Markov mostrando que los tiempos fijos t se pueden cambiar por tiempos aleatorios.

Definición 2.9.

i) Se dice que T es un *tiempo de paro* si $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geqslant 0$.

ii) Bajo un tiempo de paro, el operador de translación se define como

$$\theta_T \omega(s) = \theta_{T(\omega)} \omega(s) = \omega(t + s) \quad \forall s \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \{T < \infty\}$$

iii) Se define la σ-álgebra parada en T como

$$\mathcal{F}_T = \{A : A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \text{ para toda } t \geqslant 0\}.$$

A la siguiente propiedad se le llama *propiedad fuerte de Markov.*

Teorema 2.3. *Sean Z acotada y $\mathcal{F}_\infty$-medible y T un tiempo de paro, entonces para cualquier distribución inicial v*

$$\mathbb{E}_v\left(Z\circ\theta_T\cdot \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}/\mathcal{F}_T\right)=\mathbb{E}_{X_T}(Z) \qquad \mathbb{P}_v\text{-c.s.}$$

sobre el conjunto $\{X_T\neq\Delta\}$.

Demostración. Supóngase que T toma valores sobre un conjunto numerable $D=\{t_1<t_2<\cdots\}$. Sea $A\in\mathcal{F}_T$, entonces

$$A\cap\{T=t_n\}=(A\cap\{T\leqslant t_n\})-(A\cap\{T\leqslant t_{n-1}\})\in\mathcal{F}_{t_n}.$$

Ahora aplicando (2.6)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(Z\circ\theta_T; A\cap\{T<\infty\}\right)&=\sum_n\mathbb{E}_v\left(Z\circ\theta_{t_n}; A\cap\{T=t_n\}\right)\\&=\sum_n\mathbb{E}_{X_{t_n}}\left(Z; A\cap\{T=t_n\}\right)\\&=\mathbb{E}_{X_T}(Z).\end{aligned}$$

Para un resultado general se define

$$T_n=\frac{[2^n]T+1}{2^n},$$

es decir,

$$T_n=(m+1)2^{-n}\quad\text{si}\quad m2^{-n}\leqslant T<(m+1)2^{-n}.$$

Si $t\in(\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}]$ entonces $\{T_n<t\}=\{T<m2^{-n}\}\in\mathcal{F}_t$ por lo tanto T_n es tiempo de paro y $T_n\downarrow T$ si $n\to\infty$.

Sean $A\in\mathcal{F}_T$ y $Z=\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ donde las f_i's son acotadas y continuas. Como $T<T_n$ entonces $A\in\mathcal{F}_{T_n}$.
Obsérvese que $\{T_n<\infty\}=\{T<\infty\}$ y aplicando el caso anterior para T_n,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(Z\circ\theta_{T_n}; A\cap\{T_n<\infty\}\right)&=\mathbb{E}_v\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\circ\theta_{T_n}; A\cap\{T_n<\infty\}\right)\\&=\mathbb{E}_v\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\circ\theta_{T_n}; A\cap\{T<\infty\}\right)\\&=\mathbb{E}_{X_{T_n}}\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\right).\end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada $\mathbb{E}_{X_{T_n}}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})\right)$ es continua y acotada. Ahora por el teorema de convergencia acotada y las observaciones anteriores

$$Z\circ\theta_{T_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z\circ\theta_T \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}_{X_{T_n}}(Z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_{X_T}(Z),$$

llegando al resultado.

§2.2 Operador resolvente

Otro operador lineal importante asociado a los procesos de Lévy es el operador resolvente.

Definición 2.10. Para $q>0$ y $x\in E$ se define el *operador resolvente de orden q* asociado al semigrupo $(P_t)_{t\geqslant 0}$ como

$$U^q f(x) = \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t)dt\right) \quad (f\in C_0).$$

Por comodidad se le llamará a U^q el *operador resolvente.*

Observación 2.5. Este nuevo operador no es más que la transformada de Laplace del semigrupo $(P_t)_{t\geqslant 0}$ definido en (2.7), ya que usando Fubini

$$\begin{aligned} U^q f(x) &= \int_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-qt}P_t f(x)dt. \end{aligned}$$

Proposición 2.5. *El operador resolvente tiene las siguientes propiedades.*

i) *Cumple la ecuación resolvente, esto es*

$$U^q f(x) - U^p f(x) + (q-p)U^q U^p f(x) = 0 \quad (q,p>0).$$

ii) *si $z(q)$ es una variable aleatoria exponencial con parámetro q independiente de un procesos de Lévy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ entonces*

$$\mathbf{E}_x\left(f(X_{z(q)})\right) = qU^q f(x); \tag{2.8}$$

iii) $\lim_{q\to\infty} U^q f(x) = f(x)$;

iv) $\lim_{|x|\to\infty} U^q f(x) = 0$;

v) *si se define* $\mathcal{D}=U^q(C_0)$ *entonces* $\mathcal{D}$ *no depende de* q, *es decir, la imagen de* C_0 *bajo* U^q *no depende de* q.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Si $q = p$ es obvio, supóngase que $q \neq p$. Usando Fubini y las propiedades de semigrupo de Feller de $(P_t)_{t\geqslant 0}$

$$
\begin{aligned}
U^pU^q f(x) &= U^p\left(\int_0^\infty e^{-qt}P_t f(x)dt\right)\\
&= \int_0^\infty e^{-ps}P_s\left(\int_0^\infty e^{-qt}P_t f(x)dt\right)ds\\
&= \int_0^\infty e^{-ps}\mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-qt}P_t f(X_s)dt\right)ds\\
&= \int_0^\infty e^{-ps}\left(\int_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}_x\left(P_t f(X_s)\right)dt\right)ds\\
&= \int_0^\infty e^{-ps}\left(\int_0^\infty e^{-qt}P_sP_t f(X_s)dt\right)ds\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ps}e^{-qt}P_{s+t} f(X_s)dtds
\end{aligned}
$$

haciendo un cambio de variable $T(s,t) = (u,v)$ con $u = s+t$ y $v = t$ de donde $T^{-1}(u,v) = (u-v,v)$ y el jacobiano $J_{(T^{-1})} = 1$. De aquí

$$
\begin{aligned}
U^pU^q f(x) &= \int_0^\infty\int_0^u e^{-p(u-v)-qv}P_u f(x)dvdu\\
&= \int_0^\infty\int_0^u e^{-v(q-p)-uq}P_u f(x)dvdu\\
&= \int_0^\infty e^{-up}P_u f(x)\left(\int_0^u e^{v(p-q)}dv\right)du\\
&= \int_0^\infty e^{-up}P_u f(x)\left(\frac{e^{u(p-q)}-1}{(p-q)}\right)du\\
&= \frac{1}{(p-q)}\int_0^\infty\left(e^{-uq}P_u f(x) - e^{-up}P_u f(x)\right)du\\
&= \frac{1}{(p-q)}\left(U^q f(x) - U^p f(x)\right).
\end{aligned}
$$

(ii) Si $z(p)$ tiene distribución exponencial entonces $\mathbb{P}_{z(q)}(dx) = qe^{-qt}dt$ por lo que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\left(f(X_{z(q)})\right) &= \mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_x\left(f(X_{z(p)})/z(q)\right)\right)\\ &= \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty qe^{-qt}f(X_t)dt\right)\\ &= qU^q f(x).\end{aligned}$$

(iii) Usando el hecho de que $P_t f(x) \underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} f(x)$ y la igualdad (2.8)

$$\lim_{q\to\infty} qU^q f(x) = \lim_{q\to\infty}\mathbf{E}_x\left(f(X_{z(q)})\right) = \lim_{q\to\infty} P_{z(q)}f(x) = f(x).$$

(iv) Se sabe que $|e^{-qt}P_t f(x)| \leqslant e^{-qt}$ y que e^{-qt} es integrable. Así, por convergencia dominada

$$\lim_{|x|\to\infty} U^q f(x) = \lim_{|x|\to\infty}\int_0^\infty e^{-qt}P_t f(x)dt = \int_0^\infty e^{-qt}\lim_{|x|\to\infty} P_t f(x)dt = 0.$$

(v) Por la condición (iv) y por como está definido el operador resolvente es claro que si $P_t f\in C_0$ entonces $U^q f\in C_0$.

Sea $f\in C_0$ entonces por (i)

$$U^q f = U^p f + (p-q)U^p f.$$

Si se define $g = U^q f$ y usando que el resolvente es un operador lineal

$$U^q f = U^p f + (p-q)U^p g = U^p(f+(p-q)g) = U^p h.$$

donde $h = f + (p-q)g\in C_0$. Esto es, dado $f\in C_0$ existe $h\in C_0$ tal que $U^q f = U^p h$, por lo tanto $U^q(C_0)\subset U^p(C_0)$ para toda r, q. de donde $U^q(C_0) = U^p(C_0)$. ∎

Proposición 2.6. *Si se denota la transformada de Fourier de una función $g\in L^1$ por*

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}g(x)dx \qquad \xi\in\mathbb{R},$$

entonces para toda $f \in L^1 \cap L^\infty$ se cumplen

$$\mathcal{F}(P_t f)(\xi) = \exp\{-t\Psi(-\xi)\}\,\mathcal{F}(f)(\xi) \qquad t > 0$$

y

$$\mathcal{F}(U^q f)(\xi) = (q + \Psi(-\xi))^{-1}\,\mathcal{F}(f)(\xi) \qquad q > 0$$

Demostración. Sean $\xi \in \mathbf{R}$ y $f \in L^1 \cap L^\infty$. Para la primer igualdad

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(P_t f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\mathbb{E}\left(f(X_t + x)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\mathbb{P}_{X_t}(dy)\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi z} f(z)dz\ \mathbb{E}\left(\exp\{i(-\xi)X_t\}\right) \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi)\exp\{-t\Psi(-\xi)\}.
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad se usa Fubini y el resultado de la primer igualdad

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(U^q f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\left(\int_0^\infty e^{-qt}P_t f(x)dt\right)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\mathcal{F}(P_t f)(\xi)\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}e^{-t\Psi(-\xi)}dt\ \mathcal{F}(f)(\xi) \\
&= -\frac{e^{-t(q+\Psi(-\xi))}}{q+\Psi(-\xi)}\Big|_0^\infty\ \mathcal{F}(f)(\xi) \\
&= \frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{q+\Psi(-\xi)}
\end{aligned}$$

llegando al resultado. ∎

☞ **Observación 2.6.** Como consecuencia de la ecuación resolvente se tiene que

$$\mathcal{F}((r-q)U^qU^r f)(\xi) = \frac{r-q}{(q+\Psi(-\xi))(r+\Psi(-\xi))}\,\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Se caracteriza al operador resolvente de otra manera. Usando Fubini

$$\begin{aligned}
U^q f(x) &= \int_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}_x\left(f(X_t)\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbf{P}_x(X_t \in dy)\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} U^q(x, dy)
\end{aligned}$$

donde $U^q(x, dy) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbf{P}_x(X_t \in dy)dt$.

La familia $(U^q(x, \cdot))_{x\in\mathbf{R}}$ asociada al operador resolvente es una familia de medidas, ya que $\mathbf{P}_x(X_t \in \cdot)$ lo es. A esta familia se le conoce como *núcleo del resolvente* y se puede escribir como

$$U^q(x, A) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}_x\left(\mathbb{1}_A(X_t)\right) dt.$$

Definición 2.11. La *medida potencial* $U(x, \cdot)$ corresponde a la medida resolvente con $q = 0$, es decir,

$$U(x, A) = \int_0^\infty \mathbf{P}_x(X_t \in A)dt = \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t \in A\}}dt\right).$$

En el siguiente capítulo se trabaja con un caso particular de esta nueva medida.

Capítulo 3

Subordinadores

En este capítulo se desarrolla lo visto en los dos capítulos anteriores pero para procesos de Lévy con valores en $\mathbf{R}^+$. A estos procesos se les conoce como subordinadores. Se da un estudio detallado del comportamiento asintótico –tanto en infinito como en cero– de las trayectorias de los subordinadores, lo que permite dar teoremas como la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN).

§3.1 Definiciones

✎ **Definición 3.1.** Se considera a $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ como un espacio filtrado. Un proceso estocástico $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ es un *subordinador* si es no decreciente y tiene incrementos independientes y estacionarios con $\mathbb{P}(\sigma_0 = 0) = 1$.

☞ **Observación 3.1.** Un subordinador no es más que un proceso de Lévy con valores en $\mathbf{R}^+$. Esto se debe a la propiedad de incrementos independientes y estacionarios. Nótese que por ser no decreciente $\sigma = (\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ no tiene saltos negativos y tiene variación acotada.

Como $\sigma : \Omega \rightsquigarrow \mathbf{R}^+$ se puede hablar de la *trasformada de Laplace*, esto es, de $\mathbb{E}(e^{-\lambda\sigma})$.

Al igual que se hizo en §1.2 para asociar a los procesos de Lévy con el exponente característico, se hace para subordinadores. Por ser σ_t (*i.d.*) y que su transformada de Laplace nunca se anula

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\sigma_t}) = \exp\{-t\Phi(\lambda)\}$$

donde $\Phi : \mathbf{R}^+ \rightsquigarrow \mathbf{R}^+$. A $\Phi(\lambda)$ se le llama *exponente de Laplace para subordinadores* que por comodidad sólo se le llamará *exponente de Laplace.*

Por las observación (1.1) y (3.1) el exponente característico de un subordinador está dado por

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \int_{\mathbf{R}} \left(1 - e^{i\lambda x}\right) \Pi(dx) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

con la condición $\int_0^\infty (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$.

Ahora, se encontrará la relación que existe entre el exponente de Laplace y el exponente característico.

Se puede extender a las funciones $\lambda \rightsquigarrow \Psi(\lambda)$ y $\lambda \rightsquigarrow \varphi(\lambda)$ de manera analítica en $\Im\lambda > 0$, de aquí que $\Phi(\lambda) = \Psi(i\lambda)$ por lo tanto

$$\Phi(\lambda) = d\lambda + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \Pi(dx) \quad (\lambda \in \mathbf{R}^+). \tag{3.1}$$

A esta última expresión se le llama *representación de Lévy-Khintchine para subordinadores.* Ahora la pareja (d, Π) es la que caracteriza a un subordinador ya que q siempre es cero para esta clase de procesos.

Teorema 3.1. *El exponente de Laplace para subordinadores es cóncavo y cumple la desigualdad*

$$\Phi(\lambda) \leqslant k\Phi\left(\tfrac{\lambda}{k}\right)$$

para toda $\lambda > 0$ *y* $k > 1$.

Demostración. Las funciones $1 - \exp\{-\lambda x\}$ y $x\exp\{-\lambda x\}$ están acotadas superiormente por $(1 \wedge x)$, con $\lambda \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$. Por lo que para toda $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= d + \int_0^\infty (xe^{-\lambda x})\Pi(dx) \\ \Rightarrow \qquad \Phi''(\lambda) &= \int_0^\infty (-x^2 e^{-\lambda x})\Pi(dx) < 0 \end{aligned}$$

demostrando que $\Phi(\lambda)$ es cóncava. $\Phi(\lambda)$ satisface

$$\Phi(\eta\lambda_1 + (1-\eta)\lambda_2) \geqslant \eta\Phi(\lambda_1) + (1-\eta)\Phi(\lambda_2)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^+$ y $\eta \in (0,1)$. Si en particular se toma $\lambda_2 = 0$ y $\eta = \frac{1}{k}$ se tiene la desigualdad. ∎

Otra manera de expresar a Φ es por medio de la medida cola de Lévy.

Definición 3.2. La *medida cola de Lévy* se define como

$$\overline{\Pi}(x) = \Pi((x,\infty)) = \int_x^\infty \Pi(dx). \tag{3.2}$$

Por simplicidad simplemente se le llama a $\overline{\Pi}$ medida cola.

Proposición 3.1. *En términos de la medida cola, el exponente de Laplace está dado por*

$$\Phi(\lambda) = d\lambda + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)dt$$

con $\int_0^1 \overline{\Pi}(t)dt < \infty$.

Demostración. Usando Fubini y (3.2) se tiene

$$\begin{aligned}
d\lambda + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)dt &= d\lambda + \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t}\Pi(dx)dt \\
&= d\lambda + \int_0^\infty \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt\Pi(dx) \\
&= d\lambda + \int_0^\infty -e^{-\lambda t}\Big|_0^x \Pi(dx) \\
&= d\lambda + \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})\Pi(dx) = \Phi(\lambda).
\end{aligned}$$

Sólo falta ver que se cumple la condición sobre la medida cola

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overline{\Pi}(t)dt &= \int_0^1 \int_t^\infty \Pi(dx)dt \\
&= \int_0^1 \int_0^x dt\Pi(dx) + \int_1^\infty \int_0^1 dt\Pi(dx) \\
&= \int_0^1 x\Pi(dx) + \int_1^\infty \Pi(dx) = \int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(dx) < \infty,
\end{aligned}$$

con lo que se concluye la proposición. ∎

§3.2 Ejemplos

Entre los ejemplos que ya se vieron en la sección §1.3 y que resultan ser subordinadores están el proceso de Poisson y los procesos estables con índice $\alpha \in (0,1)$.

§3.2.1 Proceso Poisson

El exponente característico de un proceso Poisson es $\Psi(\lambda) = \alpha(1 - e^{i\lambda})$. Como ya se vio, $\Phi(\lambda) = \Psi(i\lambda)$ entonces $\Phi(\lambda) = \alpha(1 - e^{-\lambda})$, de donde (d, Π) queda determinada con $d = 0$ y $\Pi(dx) = \alpha\delta_1(dx)$.

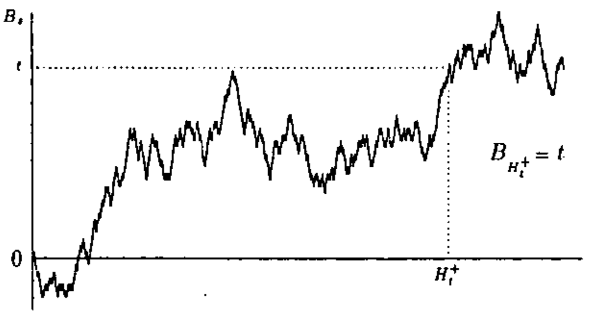
§3.2.2 Proceso H^+ para un movimiento Browniano

Sea $(B_t)_{t\geqslant 0}$ la trayectoria de un movimiento Browniano en $\mathbf{R}$ que inicia en cero. Se define para $t \geqslant 0$

$$H^+ = H_t^+ = \inf\{s > 0 : B_s > t\}.$$

Se sabe que $\mathbb{P}(\{\exists s > 0 : B_s > t\}) = 1$, por lo tanto H_t^+ es finito para toda $t \in \mathbf{R}^+$. Por construcción $(H_t^+)_{t\geqslant 0}$ es un proceso con valores en $\mathbf{R}^+$.

Figura 4: Proceso H^+ de un Browniano



Para $s \in \mathbf{R}^+$ se define

$$B_s^* = B_{s+H_t^+} - t = B_{s+H_t^+} - B_{H_t^+},$$

entonces se tiene que $(B_s^*)_{s\geqslant 0}$ es un movimiento Browniano que inicia en cero, es decir, $\mathbb{P}(B_0^* = 0) = 1$. Además, este proceso resulta ser independiente de $\mathcal{F}_{H_t^+}$ porque el movimiento Browniano cumple la propiedad fuerte de Markov.

Se toma $H_{t+s}^+ = \inf\{r > 0 : B_r > t + s\}$ y sea $r \in \mathbf{R}^+$ tal que

$$B_r > t + s \Leftrightarrow r > H_t^+ \Leftrightarrow r - H_t^+ > 0.$$

Si se define $u = r - H_t^+$ entonces

$$\begin{aligned}
H_{t+s}^+ &= \inf\{u + H_t^+, u > 0 : B_{u+H_t^+} > t + s\} \\
&= H_t^+ + \inf\{u > 0 : B_{u+H_t^+} > t + s\} \\
&= H_t^+ + \inf\{u > 0 : B_{u+H_t^+} - t > s\} \\
&= H_t^+ + \inf\{u > 0 : B_{u+H_t^+} - B_{H_t^+} > s\}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$H_{t+s}^+ - H_t^+ = \inf\{u > 0 : B_u^* > s\} \perp \mathcal{F}_{H_t^+},$$

es decir, $H_{t+s}^+ - H_t^+ \perp H_t^+$ y como $H_{t+s}^+ - H_t^+$ sólo depende de $(B_s^*)_{s\geqslant 0}$ se puede concluir que H^+ tiene incrementos independientes y estacionarios, de aquí que H^+ sea un subordinador.

Para $t \geqslant 0$ se tiene $\{H_1^+ < t\} = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \{B_s > 1\}$, entonces por las proposiciones 1.1 y 1.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_1^+ < t) &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \{B_s > 1\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} \left\{\sqrt{t} B_r > 1\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} \left\{B_r > \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right\}\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(B_1 > \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= 2\int_{t^{-1/2}}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} dx,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable, $x = u^{-1/2}$, $dx = -\frac{1}{2}u^{-3/2}du$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_1^+ < t) &= -\tfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^0 \tfrac{1}{2} u^{-3/2} e^{-1/(2u)} du \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-3/2} e^{-1/(2u)} du,
\end{aligned}$$

entonces $\mathbb{E}(e^{-\lambda H_1^+}) = \exp\{-\Phi(\lambda)\}$ con

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}(2\pi x^3)^{-1/2}\right) dx = \sqrt{2\lambda}$$

por lo tanto $d = 0$ y $\frac{\Pi(dx)}{dx} = (2\pi x^3)^{-1/2}$.

§3.2.3 Proceso Gamma

Una variable aleatoria T_t tiene distribución Gamma con parámetros (α, t) si su densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{t-1}e^{-\alpha x}\alpha^t}{\Gamma(t)} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La distribución Gamma es (*i.d.*) ya que

$$\begin{aligned} \varphi_{T_t}(\lambda) &= \mathbb{E}\left(e^{-iT_t\lambda}\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-ix\lambda}x^{t-1}e^{-\alpha x}\alpha^t}{\Gamma(t)}dx \\ &= \frac{\alpha^t}{\Gamma(t)}\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\lambda)x}dx. \end{aligned}$$

Integrando $(t-2)$ veces por partes

$$\varphi_{T_t}(\lambda) = \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+i\lambda}\right)^t = \left(\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+i\lambda}\right)^{t/n}\right)^n.$$

Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso Gamma, es decir, T_t tiene distribución Gamma(α, t) para toda $t \in \mathbb{R}$ y sabiendo que $-\int_0^\infty e^{-\eta x}x^{-1}dx = \log(\eta)$ entonces

$$\Phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_t}\right) = \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^t = \exp\left\{-t\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})x^{-1}e^{-\alpha x}dx\right\}$$

y por lo tanto $d = 0$ y $\frac{\Pi(dx)}{dx} = x^{-1}e^{-\alpha x}$.

§3.2.4 Procesos estables

Antes de ver que bajo ciertas condiciones algunos de los procesos estables son subordinadores, se dan nuevas características de éstos.

✎ **Definición 3.3.** Sea $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso α-estable. Se llama *parámetro de positividad* a

$$\rho = \mathbb{P}(X_t \geqslant 0). \tag{3.3}$$

Este parámetro no depende de t pues por la observación 1.3

$$\rho = \mathbb{P}(X_t \geqslant 0) = \mathbb{P}(t^{-1/\alpha}X_1 \geqslant 0) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant 0).$$

Para $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ se puede expresar (3.3) en términos de β como

$$\rho = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi\alpha} \arctan(\beta \tan\left(\tfrac{\pi\alpha}{2}\right))$$

(ver [18]).

Si $\alpha \in (0,1)$ entonces $\tan(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0$, si además $\beta = 1$ se tiene que $\rho = 1$ por lo que $X_t \geqslant 0$ para toda $t \geqslant 0$. Ahora, si $\beta = -1$ y $\alpha \in (0,1)$ se tiene $\rho = 0$, es decir, $-X_t \geqslant 0$ para toda t (ver figuras de §4.1).

Hecho esto, los procesos α-estables $(X_t)_{t\geqslant 0}$ con $\alpha \in (0,1)$ y $\beta = 1$ son subordinadores. Al igual que $(-X_t)_{t\geqslant 0}$ con $\beta = -1$, pues son procesos de Lévy no negativos.

En este caso, la pareja (d, Π) queda de la siguiente manera

$$d = \tfrac{1}{1-\alpha} \cdot \tfrac{\alpha c}{\Gamma(1-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \quad \text{y} \quad \tfrac{\Pi(dx)}{dx} = \tfrac{\alpha c}{\Gamma(1-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})} x^{-1-\alpha}$$

(ver §1.3.3).

§3.3 Medida de renovación

En esta sección se trabaja con un caso particular de la medida potencial vista en §2.2.

Definición 3.4. En el caso en que se tome $x = 0$ en la medida potencial se tiene la *medida de renovación*

$$U(0, A) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sigma_t \in A\}} dt\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\sigma_t \in A) dt$$

la cual se denota por $U(A)$.

Definición 3.5. La función de distribución de la medida de renovación se denota y se define para toda $x \geqslant 0$ como

$$\mathcal{U}(x) = U([0,x]) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\sigma_t \leqslant x\}} dt\right)$$

y se le conoce como la *función de renovación*.

Ahora, se encontrará una relación entre la función de renovación, la medida cola y el exponente de Laplace.

Teorema 3.2. *Si $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace, entonces*

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(\lambda) = \tfrac{1}{\Phi(\lambda)} \quad y \quad \mathcal{L}(\overline{\Pi})(\lambda) = \tfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} - d.$$

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo la definición y usando el teorema de cambio de variable

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{U})(\lambda) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\sigma_t \in dx\right) dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left(e^{-\lambda\sigma_t}\right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t\Phi(\lambda)} dt = \tfrac{1}{\Phi(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\overline{\Pi})(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \overline{\Pi}(x) dx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\lambda x} \Pi(dy) dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^y e^{-\lambda x} dx \, \Pi(dy) \\
&= \tfrac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda y}\right) \Pi(dy) \\
&= \tfrac{1}{\lambda} \left(\Phi(\lambda) - d\lambda\right).
\end{aligned}$$
∎

Con este resultado se tiene que la función de renovación y la medida cola caracterizan a Φ y por lo tanto a la distribución del subordinador.

Si se define la *inversa de un subordinador* $(\sigma_t)_{t \geqslant 0}$ como

$$L_x = \sup\{t \geqslant 0 : \sigma_t \leqslant x\} = \inf\{t \geqslant 0 : \sigma_t > x\} \tag{3.4}$$

para $x \geqslant 0$, ésta cumple con ser continua y no decreciente.

Teorema 3.3. *Definida L_x como en* (3.4) *entonces*

$$\mathcal{U}(x) = \mathbb{E}(L_x).$$

Demostración. Nótese que por definición de L_x se tiene que

$$\sigma_t \leqslant x \quad \Leftrightarrow \quad t \leqslant L_x.$$

En base a esto

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sigma_t \leqslant x\}} dt\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{L_x} dt\right)\\ &= \mathbb{E}(L_x).\end{aligned}$$

■

Proposición 3.2. *La función de renovación es subaditiva, es decir,*

$$\mathcal{U}(x+y) \leqslant \mathcal{U}(x) + \mathcal{U}(y).$$

Demostración. Teniendo en mente que $L_x = \inf\{t : \sigma_t > x\}$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(x < \sigma_t \leqslant x+y)\, dt\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<\sigma_t \leqslant x+y\}} dt\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\int_{L_x}^\infty \mathbb{1}_{\{x<\sigma_t\leqslant x+y\}} dt/\mathcal{F}_{L_x}\right)\right).\end{aligned}$$

Ahora, si $\sigma_{L_x} \geqslant x$ entonces $\sigma_t - x \geqslant \sigma_t - \sigma_{L_x}$, por lo que si $\sigma_t - x \leqslant y$ entonces $\sigma_t - \sigma_{L_x} \leqslant y$ y usando la propiedad de Markov se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x+y) - \mathcal{U}(x) &\leqslant \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\int_{L_x}^\infty \mathbb{1}_{\{\sigma_t - \sigma_{L_x} \leqslant y\}} dt/\mathcal{F}_{L_x}\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sigma_t \leqslant y\}} dt\right)\\ &= \mathcal{U}(y).\end{aligned}$$

■

☞ **Observación 3.2.** De este resultado se concluye también que

$$\mathbb{E}(L_{x+y}) \leqslant \mathbb{E}(L_x) + \mathbb{E}(L_y).$$

Ahora, se dan unas estimaciones de la medida de renovación en términos del exponente de Laplace. Esto se sigue del hecho de que la transformada de Laplace de las medidas $\mathcal{U}$ y $\overline{\Pi}$ tienen una expresión sencilla en términos del exponente de Laplace. Para este fin, se usará la notación $f \asymp g$ para entender que existen constantes c y $\hat{c}$ positivas tales que $cf \leqslant g \leqslant \hat{c}f$, donde f y g son funciones no negativas.

Proposición 3.3. *Para toda $x \geqslant 0$ se cumplen*

$$\mathcal{U}(x) \asymp \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad y \qquad \frac{\Phi(x)}{x} \asymp I\left(\tfrac{1}{x}\right) + d,$$

donde I denota la integral cola de la medida cola, es decir, $I(x) = \int_0^x \overline{\Pi}(t)dt$.

Demostración. Primero se demuestra que

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-y}\mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) dy. \tag{3.5}$$

Para esto se utiliza el teorema 3.2 e integrando por partes se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(\lambda)} &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathcal{U}(dx) \\
&= e^{-\lambda x}\mathcal{U}(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathcal{U}(x)\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \int_0^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y}dy.
\end{aligned}$$

Para encontrar la cota inferior de la primera relación se usa el hecho de que $\mathcal{U}$ es creciente, entonces para toda $\lambda, k > 0$ y $y \geqslant k$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(\lambda)} &= \int_0^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y}dy \\
&\geqslant \int_k^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y}dy \\
&\geqslant \mathcal{U}\left(\tfrac{k}{\lambda}\right) \int_k^\infty e^{-y}dy \\
&= \mathcal{U}\left(\tfrac{k}{\lambda}\right) e^{-k},
\end{aligned}$$

por lo tanto, eligiendo $k = 1$ y $\lambda = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{x}\right)} \geqslant e^{-1}\mathcal{U}(x).$$

Para la cota superior

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi(\lambda)} &= \int_0^x \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y} dy + \int_x^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y} dy \\ &\leqslant \mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) \int_0^x e^{-y} dy + \int_x^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y} dy \\ &\leqslant \mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + \int_x^\infty \mathcal{U}\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) e^{-y} dy,\end{aligned}$$

tomando como caso particular de la cota inferior encontrada arriba a $k = \frac{y}{2}$ y $\lambda = \frac{\lambda}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi(\lambda)} &\leqslant \mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_x^\infty e^{-y} e^{y/2} dy \\ &= \mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + \frac{2}{\Phi\left(\frac{\lambda}{2}\right)} e^{-x/2} \\ &\leqslant \mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + \frac{4}{\Phi(\lambda)} e^{-x/2}.\end{aligned}$$

En la última desigualdad se usó el resultado del teorema 3.1. Si en particular se toma $x \geqslant 2 \log 8$, entonces $4e^{-x/2} \leqslant \frac{1}{2}$ y por lo tanto

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} \leqslant 2\mathcal{U}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right).$$

Para la segunda relación se demuestra primero que

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-y} \left(I\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) + d\right). \tag{3.6}$$

Como

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = d + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{\Pi}(t) dt,$$

todo se reduce a demostrar, tomando $y = \lambda t$ en (3.6), que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{\Pi}(t) dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} I(t) dt$$

lo que resulta cierto, ya que integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} I(t) dt &= I(t) \left(e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{\Pi}(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{\Pi}(t) dt.\end{aligned}$$

Usando la misma técnica aplicada para la primer equivalencia se tiene para toda $\lambda, k > 0$ que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} &\geqslant \int_k^\infty e^{-y}\left(I\left(\tfrac{y}{\lambda}\right)+d\right)dy \\
&\geqslant \left(I\left(\tfrac{k}{\lambda}\right)+d\right)\int_k^\infty e^{-y}dy \\
&= \left(I\left(\tfrac{k}{\lambda}\right)+d\right)e^{-k},
\end{aligned}$$

por lo tanto si se toma $\lambda = x$ y $k = 1$ se tiene

$$\tfrac{\Phi(x)}{x} \geqslant \left(I\left(\tfrac{1}{x}\right)+d\right)e^{-1}.$$

Igualmente se encuentra la cota inferior, pues

$$\begin{aligned}
\tfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} &\leqslant \left(I\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)+d\right)\int_0^x e^{-y}dy + \int_x^\infty e^{-y}\left(I\left(\tfrac{y}{\lambda}\right)+d\right)dy \\
&\leqslant \left(I\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)+d\right) + \int_x^\infty e^{-y}\left(I\left(\tfrac{y}{\lambda}\right)+d\right)dy \\
&\leqslant \left(I\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)+d\right) + \tfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\int_x^\infty e^{-y}e^{y/2}dy \\
&= \left(I\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)+d\right) + \tfrac{2\Phi(\lambda)}{\lambda}e^{-x/2}
\end{aligned}$$

y si $x \geqslant 2\log 4$ entonces $2e^{-x/2} \leqslant \frac{1}{2}$. de donde

$$2^{-1}\tfrac{\Phi(x)}{x} \leqslant \left(I\left(\tfrac{1}{x}\right)+d\right). \qquad \blacksquare$$

§3.4 Tasas de crecimiento

En esta sección se estudian las tasas de crecimiento asintótico de las trayectorias de los subordinadores, tanto en tiempos pequeños como grandes. El mismo argumento que se da para el origen sirve para el infinito, así que sólo se dan las demostraciones para el origen y de manera análoga se sigue para el infinito.

Proposición 3.4. *Sean $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ un subordinador y el coeficiente deriva $d \geqslant 0$, entonces*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma_t}{t} = d \qquad \text{c.s.}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supóngase que $d = 0$. Como se recuerda, por el teorema (1.4-ii)

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = 0$$

entonces para toda $\lambda \geqslant 0$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} \simeq \lim_{t\to 0^+} t\Psi(i\tfrac{\lambda}{t}) \simeq \lim_{t\to 0^+} t\Phi(\tfrac{\lambda}{t}) = 0.$$

Ahora, usando la desigualdad de Markov [I.2], con $h(x) = 1 - e^{-x}$ y $a = \epsilon t$, para toda $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\tfrac{\sigma_t}{t} > \epsilon\right) &\leqslant \left(1 - e^{-1}\right)^{-1} \mathbb{E}\left(1 - \exp\{-\tfrac{1}{\epsilon t}\sigma_t\}\right) \\ &\leqslant 1 - \exp\{-t\Phi\left(\tfrac{1}{\epsilon t}\right)\}. \end{aligned}$$

Así que $\left(t^{-1}\sigma_t\right)_{t\geqslant 0}$ converge en probabilidad a cero. Para demostrar que la convergencia se da c.s. se demuestra que $\left(t^{-1}\sigma_t\right)_{t\geqslant 0}$ es una martingala reversible y aplicando el teorema de convergencia para martingalas (ver [I.4]), se tendría el resultado.

Por la propiedad de Markov sólo es necesario verificar que para toda $0 \leqslant \lambda$ y $s < t$

$$\mathbb{E}\left(\left(\tfrac{\sigma_s}{r} - \tfrac{\sigma_t}{t}\right) \exp -\lambda \tfrac{\sigma_t}{t}\right) = 0.$$

Esto es cierto ya que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\tfrac{\sigma_s}{s} - \tfrac{\sigma_t}{t}\right) \exp\left\{-\lambda \tfrac{\sigma_t}{t}\right\}\right) & \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{t}\right) \sigma_s \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\sigma_s\right\} \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\left(\sigma_t - \sigma_s\right)\right\}\right) \\
&\quad -\mathbb{E}\left(\tfrac{1}{t}\left(\sigma_t - \sigma_s\right) \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\left(\sigma_t - \sigma_s\right)\right\} \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\sigma_s\right\}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{t}\right) \mathbb{E}\left(\sigma_s \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\sigma_s\right\}\right) \exp\left\{-(t-s)\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \\
&\quad -\tfrac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\sigma_t - \sigma_s\right) \exp\left\{-\tfrac{\lambda}{t}\left(\sigma_t - \sigma_s\right)\right\}\right) \exp\left\{-s\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \\
&= \left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{t}\right) s\Phi'\left(\tfrac{\lambda}{t}\right) \exp\left\{-s\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \exp\left\{-(t-s)\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \\
&\quad -\tfrac{1}{t}(t-s)\Phi'\left(\tfrac{\lambda}{t}\right) \exp\left\{-(t-s)\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \exp\left\{-s\Phi\left(\tfrac{\lambda}{t}\right)\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.4. *Sea $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ un subordinador con deriva $d = 0$ y medida de Lévy Π. Supóngase que $h : [0,\infty) \rightsquigarrow [0,\infty)$ es una función creciente tal que $t \rightsquigarrow t^{-1}(t)$ también sea creciente entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $\limsup\limits_{t\to 0^+} \left(\frac{\sigma_t}{h(t)}\right) = \infty \quad$ c.s.;

ii) $\displaystyle\int_0^1 \overline{\Pi}(h(t))dt = \infty;$

iii) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\Phi\left(\tfrac{1}{h(t)}\right) - \left(\tfrac{1}{h(t)}\right)\Phi'\left(\tfrac{1}{h(t)}\right)\right\} dt = \infty.$

Y si alguna de estas afirmaciones no es cierta entonces

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\sigma_t}{h(t)}\right) = 0 \quad \text{c.s.}$$

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i) Sean $c > 1$ y $\epsilon > 0$. Usando el hecho de que $t^{-1}h(t)$ es creciente se tiene que

$$\frac{h(ct)}{ct} > \frac{h(t)}{t} \quad \Leftrightarrow \quad h(ct) > ch(t)$$

por lo que

$$\overline{\Pi}(ch(t)) \geqslant \overline{\Pi}(h(ct))$$

gracias a que $\overline{\Pi}$ es no creciente. Ahora bien,

$$\int_0^{\epsilon} \overline{\Pi}(ch(t))dt \geqslant \int_0^{\epsilon} \overline{\Pi}(h(ct))dt = \infty.$$

Como ya se vio, el proceso de saltos de $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ que se denota por $(e\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ es un (p.p.p.) con medida característica Π. Entonces si $\eta \in (0,\epsilon)$, la variable aleatoria

$$\#\left\{t \in [\eta,\epsilon] : e\sigma_t > ch(t)\right\}$$

tiene distribución Poisson con parámetro $\int_\eta^\epsilon \overline{\Pi}(ch(t))dt$. De aquí se deduce que existen una infinidad de puntos $s \in (0,\epsilon)$ tales que $e\sigma_s > ch(s)$ de donde se sigue necesariamente que $\sigma_s > ch(s)$ por lo que

$$\limsup_{t\to 0^+} \left(\frac{\sigma_t}{h(t)}\right) \geqslant c$$

y como c es arbitraria se llega al resultado.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supóngase que $\int_0^1 \overline{\Pi}(h(t))dt < \infty$. Como la función h es creciente existe su inversa, la cual se denota por $\check{h}$. El proceso $(\check{h}(e\sigma_t))_{t\geqslant 0}$ es un (p.p.p.) con medida característica $\check{\Pi}$ que cumple $\check{\Pi}[t,\infty) = \Pi[h(t),\infty)$.

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \check{\Pi}[t,\infty)dt &= \int_0^1 \int_t^\infty \check{\Pi}(dx)dt \\
&= \int_0^1 \int_0^x dt\check{\Pi}(dx) + \int_1^\infty \int_0^1 dt\check{\Pi}(dx) \\
&= \int_0^\infty (1 \wedge x)\check{\Pi}(dx)
\end{aligned}$$

y como $\check{\Pi}[t,\infty) = \Pi[h(t),\infty) = \overline{\Pi}(h(t))$ entonces

$$\int_0^\infty (1 \wedge x)\check{\Pi}(dx) < \infty.$$

Así que $\check{\Pi}$ se puede pensar como la medida de Lévy de un subordinador. Para toda $t \geqslant 0$ sea

$$\check{\sigma}_t = \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \check{h}\left(e\sigma_s\right),$$

el subordinador con deriva $d = 0$ y medida de Lévy $\tilde{\Pi}$. Por ser $t^{-1}h(t)$ creciente, se cumple para toda $a, b > 0$ que $h(a+b) \geqslant h(a) + h(b)$ de donde

$$h(\tilde{\sigma}_t) = h\left(\sum_{0\leqslant s\leqslant t} \tilde{h}(\epsilon\sigma_s)\right) \geqslant \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \epsilon\sigma_s = \sigma_t.$$

Esta última igualdad se debe a la observación 1.6 tomando un subordinador.

Por la proposición 3.4 se tiene que $\lim_{t\to 0^+} t^{-1}\tilde{\sigma}_t = 0$ c.s. entonces para $\epsilon > 0$ y t pequeña $\tilde{\sigma}_t \leqslant \epsilon$ c.s. de donde

$$0 \leqslant \tilde{\sigma}_t \leqslant h(\tilde{\sigma}_t) \leqslant h(\epsilon t) \leqslant \epsilon h(t)$$

siempre y cuando $0 < \epsilon < 1$. De aquí que

$$\lim_{t\to 0^+} \tfrac{\sigma_t}{h(t)} = 0 \quad \text{c.s.}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Como $\Phi(\lambda) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)dt$ entonces

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)dt - \lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)dt,$$

así,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\{\Phi\left(\tfrac{1}{h(t)}\right) - \left(\tfrac{1}{h(t)}\right)\Phi'\left(\tfrac{1}{h(t)}\right)\right\}dt &= \int_0^1\int_0^\infty \left(\tfrac{1}{h(t)}\right)^2 xe^{-x/h(t)}\overline{\Pi}(x)dxdt \\ &= \int_0^1\int_0^\infty \tfrac{x}{h(t)}e^{-x/h(t)}\overline{\Pi}(x)\tfrac{dx}{h(t)}dt \\ &= \int_0^1\int_0^\infty xe^{x}\overline{\Pi}(xh(t))dxdt.\end{aligned}$$

Por ser $\overline{\Pi}$ no creciente se tiene

$$\overline{\Pi}(h(t)) \leqslant \overline{\Pi}(xh(t)) \leqslant \overline{\Pi}(h(xt))$$

si $0 < x < 1$ y $0 < t$. Concluyendo que las integrales en (ii) y (iii) convergen o divergen simultáneamente. ■

Como ejemplo de este teorema, se tiene que si $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ es un subordinador estable con índice $\alpha \in (0,1)$ entonces

$$\limsup_{t\to 0+}\left(\tfrac{\sigma_t}{h(t)}\right) = \infty \quad \text{ó} \quad 0 \quad \text{c.s.}$$

dependiendo de si la integral $\int_0^1 h(t)^{-\alpha} dt$ diverge o converge, ya que

$$\int_0^1 \overline{\Pi}(h(t))dt = \int_0^1 \int_{h(t)}^{\infty} \Pi(dx)dt \asymp \int_0^1 \int_{h(t)}^{\infty} x^{-1-\alpha} dxdt.$$

La condición de que $t \leadsto t^{-1}h(t)$ sea creciente puede ser restrictiva ya que frecuentemente falla para una trayectoria típica de un proceso creciente. Esta condición se puede debilitar si la integral cola tiene *incrementos positivos*, es decir,

$$\liminf_{x \to 0+} \frac{I(2x)}{I(x)} > 1.$$

Proposición 3.5. *Sea $h : [0, \infty) \leadsto [0, \infty)$ una función creciente y supóngase que $I(x)$ tiene incrementos positivos entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $\limsup_{t \to 0+} \left(\frac{\sigma_t}{h(t)} \right) = \infty$ c.s.;

ii) $\displaystyle\int_0^1 \overline{\Pi}(h(t))dt = \infty$;

iii) $\displaystyle\int_0^1 \Phi \left(\frac{1}{h(t)} dt \right) = \infty$.

Si alguna de estas afirmaciones no es cierta entonces

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\sigma_t}{h(t)} = 0 \quad \text{c.s.}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\overline{\Pi}$ es no creciente

$$I(x) = \int_0^x \overline{\Pi}(t)dt \geqslant x\overline{\Pi}(x).$$

Más aún

$$I(2x) = I(x) + \int_x^{2x} \overline{\Pi}(t)dt \leqslant I(x) + x\overline{\Pi}(2x) \leqslant I(x) + x\overline{\Pi}(x)$$

de donde

$$1 < \liminf_{x \to 0+} \frac{I(2x)}{I(x)} \leqslant \liminf_{x \to 0+} \left(1 + \frac{x\overline{\Pi}(x)}{I(x)} \right),$$

es decir, $\liminf_{x\to 0+} I(x)^{-1}(x\overline{\Pi}(x)) > 0$ lo que significa que $I(x) \asymp x\overline{\Pi}(x)$. Por la proposición 3.3, se tiene que $x\Phi\left(\frac{1}{x}\right) \asymp I(x)$ por lo que

$$\Phi(\tfrac{1}{x}) \asymp \overline{\Pi}(x)$$

y de aquí que (i) y (ii) resulten ser equivalentes.

Supóngase que $\int_0^1 \overline{\Pi}(h(t))dt = \infty$ entonces por los mismos argumentos vistos en el teorema 3.4 se llega a que

$$\limsup_{t\to 0+} \tfrac{\sigma_t}{h(t)} \geqslant 1 \quad \text{c.s.}$$

Si se sustituye $h(t)$ por $ch(t)$ con $c > 1$ en (3.5-iii), por ser Φ cóncava, se tiene que

$$\int_0^1 \Phi\left(\tfrac{1}{ch(t)}\right) = \infty$$

de donde

$$\limsup_{t\to 0+} \tfrac{\sigma_t}{h(t)} = \infty \quad \text{c.s.}$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Markov con $h(x) = 1 - e^{-x}$ (ver [I.2])

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sigma_t \geqslant a\right) &\leqslant \left(1-e^{-1}\right)^{-1} \mathbb{E}\left(1-\exp\left\{-\tfrac{1}{a}\sigma_t\right\}\right)\\ &\leqslant \left(1-e^{-1}\right)^{-1}\left(1-\exp\left\{-t\Phi\left(\tfrac{1}{a}\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

y en particular si $t = 2^{-n+1}$ y $a = h(2^{-n})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sigma_{2^{-n+1}} \geqslant h(2^{-n})\right) &\leqslant \left(1-e^{-1}\right)^{-1}\left(1-\exp\left\{-2^{-n+1}\Phi\left(\tfrac{1}{h(2^{-n})}\right)\right\}\right)\\ &\leqslant 2\left(1-e^{-1}\right)^{-1} 2^{-n}\Phi\left(\tfrac{1}{h(2^{-n})}\right).\end{aligned}$$

La última igualdad se debe al hecho de que $1 - e^{-x} \leqslant x$.

Como $t \leadsto \Phi\left(h(t)^{-1}\right)$ es decreciente, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\Phi\left(\tfrac{1}{h(2^{-n})}\right) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \Phi\left(\tfrac{1}{h(t)}\right) dt < \infty.$$

entonces por el lema de Borel-Cantelli

$$\sigma_{2^{-n+1}} \leqslant h\left(2^{-n}\right) \quad \text{para toda } n \text{ suficientemente grande c.s.}$$

y por un argumento de monotonía se sigue que

$$\sigma_t \leqslant h\left(t\right) \quad \text{para toda } t \text{ suficientemente pequeña c.s.}$$

Si se sigue suponiendo que $\int_0^1 \Phi\left(h(t)^{-1}\right) dt < \infty$ se puede remplazar h por ϵh con $\epsilon \in (0,1)$ y se llega a que

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sigma_t}{h(t)} = 0 \quad \text{c.s.}$$ ■

Teorema 3.5 (Ley Fuerte de los Grandes Números). (LFGN) *Sea* $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ *un subordinador con* $\mathbb{E}(\sigma_1) < \infty$ *entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_t}{t} = \mathbb{E}(\sigma_1).$$

Demostración. Sea $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución y $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$ entonces por la (LFGN)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(Y_1).$$

Si se define $Y_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$ entonces para toda $k \geqslant 1$

$$\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(\sigma_k - \sigma_{k-1}) = \mathbb{E}(\sigma_1 - \sigma_0) = \mathbb{E}(\sigma_1)$$

y como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sigma_n,$$

se tiene que

$$\frac{\sigma_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(\sigma_1).$$

Ahora, por ser $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ no decreciente y si $n \leqslant t < n+1$

$$\frac{\sigma_n}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant \frac{\sigma_t}{t} \leqslant \frac{\sigma_{n+1}}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_t}{t} = \mathbb{E}(\sigma_1).$$ ■

Capítulo 4

Generalización del Teorema del Límite Central

En este capítulo se generaliza el Teorema del Límite Central para transformaciones de caminatas aleatorias con dominio de atracción una distribución estable. Para esto se dan las definiciones de distribuciones estables y dominio de atracción así como algunas de sus propiedades básicas.

§4.1 Distribuciones Estables

Definición 4.1. Sea T una variable aleatoria. Se denota por $\mathbb{P}_T$ su distribución y su función característica por φ. Se dice que es *estable* si para cualquier $n \in \mathbf{N}$ existen contantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbf{R}$ y variables aleatorias independientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, con la misma distribución de T tales que

$$a_n T + b_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi_1 + \cdots + \xi_n \tag{4.1}$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}_T\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) = \mathbb{P}_T * \cdots * \mathbb{P}_T(x) \tag{4.2}$$

o bien

$$(\varphi(\lambda))^n = (\varphi(a_n\lambda))\, e^{i\lambda b_n}. \tag{4.3}$$

Observación 4.1. Si X es tal que $\mathbb{P}(X = m) = 1$ para m constante, se dice que X es *degenerada*. En este caso, $\varphi_X(\lambda) = e^{i\lambda m}$ y claramente X es estable. pues si se toma $a_n > 0$ y $b_n = (n - a_n)m$ se tiene (4.3).

Una característica especial de esta clase de distribuciones es la siguiente.

Teorema 4.1. *Cualquier distribución estable es infinitamente divisible.*

DEMOSTRACIÓN. Por (4.3)

$$\varphi(\lambda)^n = \left(\varphi(a_n\lambda)e^{ib_n\lambda}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\lambda)^n e^{-ib_n\lambda} = \varphi(a_n\lambda)$$
$$\Leftrightarrow \quad \varphi\left(\tfrac{t}{a_n}\right)^n \exp\left\{-\tfrac{ib_n t}{a_n}\right\} = \varphi(t)$$

por lo tanto

$$\varphi(t) = \left(\varphi\left(\tfrac{t}{a_n}\right)\exp\left\{-\tfrac{ib_n t}{na_n}\right\}\right)^n.$$ ∎

Si se define $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, por (4.1)

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \overset{\mathcal{D}}{=} T \tag{4.4}$$

La pregunta que surge es ¿qué tipo de distribución se obtiene en el límite en (4.4)?

Como respuesta parcial, se tiene por ejemplo que si las variables aleatorias $(\xi_j)_{j=1}^n$ cumplen con que $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\xi_1) < \infty$ y si se definen $a_n = \sigma\sqrt{n}$ y $b_n = n\mathbb{E}(\xi_1)$, entonces por el teorema del límite central se tiene que

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(\xi_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Ahora, si ξ_1 tiene densidad Cauchy, es decir,

$$f(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)} \qquad \text{con } \theta > 0$$

y sabiendo que $\varphi_{\xi_1}(t) = \exp\{-\theta|t|\}$ se llega a que $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(\exp\left\{-\frac{\theta|t|}{n}\right\}\right)^n$. Por lo que si $a_n = n$ y $b_n = 0$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{Cauchy}(\theta).$$

El teorema siguiente da condiciones sobre T para que (4.4) se cumpla.

Teorema 4.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una variable aleatoria T sea el límite en distribución de la variable aleatoria $\frac{S_n - b_n}{a_n}$, $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, es que T sea estable.*

Demostración. Si T es estable, por (4.1)

$$T \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{S_n - b_n}{a_n}$$

con $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, de donde

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T.$$

Sea $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y supóngase que $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} T$, con $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbf{R}$. Se demostrará que T es estable.

Sea $k \geqslant 1$ y se define

$$S_n^{(1)} = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \ldots, S_n^{(k)} = \xi_{(k-1)n+1} + \cdots + \xi_{kn}$$

y

$$T_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)} - b_n}{a_n}, \ldots, T_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)} - b_n}{a_n}.$$

Las variables aleatorias $T_n^{(1)}, \ldots, T_n^{(k)}$ tienen la misma distribución y

$$T_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si se define

$$U_n^{(k)} = T_n^{(1)} + \cdots + T_n^{(k)}.$$

entonces por un lado

$$U_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T^{(1)} + \cdots + T^{(k)} \tag{4.5}$$

donde $T^{(i)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y por otro

$$\begin{aligned}
U_n^{(k)} &= \frac{S_n^{(1)} - b_n}{a_n} + \frac{S_n^{(2)} - b_n}{a_n} + \cdots + \frac{S_n^{(k)} - b_n}{a_n} \\
&= \frac{S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \cdots + S_n^{(k)} - kb_n}{a_n} \\
&= \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{nk} - kb_n}{a_n} \\
&= \frac{a_{kn}}{a_n} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{nk} - b_{kn}}{a_{kn}} + \frac{b_{kn} - kb_n}{a_n} \\
&= \alpha_n^{(k)} V_{kn} + \beta_n^{(k)},
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_n^{(k)} = \frac{a_{kn}}{a_n}, \quad \beta_n^{(k)} = \frac{b_{kn} - kb_n}{a_n} \quad \text{y} \quad V_{kn} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{nk} - b_{kn}}{a_{kn}}.$$

De todo esto se tiene que

$$V_{kn} = \frac{U_n^{(k)} - \beta_n^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T \tag{4.6}$$

Ahora, aplicando el resultado del lema 4.1 existen constantes $\alpha^{(k)} > 0$ y $\beta^{(k)} \in \mathbf{R}$ tales que $\alpha_n^{(k)} \to \alpha^{(k)}$ y $\beta_n^{(k)} \to \beta^{(k)}$. Por (4.5) y (4.6) se concluye que

$$T \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{T^{(1)} + \cdots + T^{(k)} - \beta^{(k)}}{\alpha^{(k)}}$$

lo que afirma que T es estable.

Lema 4.1. *Sean* $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} \xi$, $a_n > 0$ *y* $b_n \in \mathbf{R}$ *constantes tales que*

$$a_n\xi_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \tilde{\xi},$$

entonces existen constantes $a > 0$ *y* $b \in \mathbf{R}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad y \quad \tilde{\xi} = a\xi + b.$$

La demostración de este lema se puede consultar en [6].

Dado que las distribuciones estables son (*i.d.*) y éstas se caracterizan por la fórmula de Lévy-Khintchine, las distribuciones estables se pueden determinar por medio del exponente característico que es un caso particular de Lévy-Khintchine.

Teorema 4.3 (Representación Espectral). *Una variable aleatoria T tiene distribución estable si y sólo si su función característica está dada por* $\varphi_T(\lambda) = \exp\{-\Psi(\lambda)\}$ *con*

$$\Psi(\lambda) = i\gamma\lambda + \kappa|\lambda|^{\alpha}\left[1 - \beta\frac{\lambda}{|\lambda|}z(\lambda,\alpha)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

donde γ es una constante real, $\kappa \geqslant 0$, $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$. $\frac{\lambda}{|\lambda|} = 0$ *si* $\lambda = 0$ *y*

$$z(\lambda,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & si\ \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\ln(\lambda) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

☞ **Observación 4.2.** Como una distribución estable se caracteriza por los parámetros α, γ, κ y β se denota a una distribución estable por $S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$ y para indicar que una variable aleatoria X tiene distribución estable, se escribe $X \sim S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$.

La idea de la demostración del teorema 4.3 es usar (4.4) y obtener una representación de Lévy-Khinchine de la función característica, la cual sería $\varphi_T(\lambda) = \exp\{-\Psi(\lambda)\}$ con

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} iM\lambda + \kappa\lambda^2 & \text{si } \alpha = 2, \\ iM\lambda + P\int_0^\infty \vartheta(\lambda, x)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} + Q\int_{-\infty}^0 \vartheta(\lambda, x)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$$

Aquí $M \in \mathbf{R}$, $\kappa \geqslant 0$, P y Q son números no negativos y

$$\vartheta(\lambda, x) = 1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

En particular, para $\alpha < 2$ y X no-degenerada $P + Q > 0$. Más aún, se tiene que

$$M = \frac{\beta\alpha\kappa}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}, \quad P = \frac{(1+\beta)\alpha\kappa}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \quad \text{y} \quad Q = \frac{(1-\beta)\alpha\kappa}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}.$$

de donde $\beta = \frac{P-Q}{P+Q}$. Lo que restaría es evaluar las integrales para llegar a (4.7) y encontrar que

$$\frac{\Pi(dx)}{dx} = \frac{P}{x^{1+\alpha}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) + \frac{Q}{|x|^{1+\alpha}}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x),$$

que coincide con lo visto en §1.3.4. Una demostración detallada se puede consultar en [6].

§4.2 Propiedades de las distribuciones estables

Algunas de las propiedades básicas de las distribuciones estables se mencionan y se analizan en esta sección, así como la interpretación de los parámetros α, κ, β y γ.

Proposición 4.1. *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes donde $X_j \sim S_\alpha(\kappa_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = 1, 2$, entonces $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$ con*

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2, \quad \beta = \frac{\beta_1\kappa_1 + \beta_2\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad y \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}\ln\left(\varphi_{X_1+X_2}(\lambda)\right) &= \ln\left(\varphi_{X_1}(\lambda)\right) + \ln\left(\varphi_{X_2}(\lambda)\right)\\ &= i(\gamma_1+\gamma_2)\lambda + (\kappa_1+\kappa_2)|\lambda|^\alpha + i|\lambda|^\alpha \tfrac{\lambda}{|\lambda|}\tan\left(\tfrac{\pi\alpha}{2}\right)(\beta_1\kappa_1+\beta_2\kappa_2)\\ &= i(\gamma_1+\gamma_2)\lambda + (\kappa_1+\kappa_2)|\lambda|^\alpha\left[1 - i\tfrac{\beta_1\kappa_1+\beta_2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\tfrac{\lambda}{|\lambda|}\tan\left(\tfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Para $\alpha = 1$ es similar. ∎

Proposición 4.2. *Si $X \sim S_\alpha(\kappa,\beta,\gamma)$ y $a, b \in \mathbf{R}$ entonces $aX+b \sim S_\alpha(\tilde{\kappa},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ con*

$$\tilde{\kappa} = \kappa|a|^\alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta\tfrac{a}{|a|} \quad y \quad \tilde{\gamma} = \begin{cases} a\gamma + b & si\ \alpha \neq 1;\\ a\gamma + b - \tfrac{2}{\pi}\kappa\beta a\ln|a| & si\ \alpha = 1.\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Para $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}\ln\left(\varphi_{aX+b}(\lambda)\right) &= i\gamma(\lambda a) + \kappa|\lambda a|^\alpha\left[1 - i\beta\tfrac{\lambda a}{|\lambda a|}\tan\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right] + i\lambda b\\ &= i(\gamma a + b)\lambda + \kappa|a|^\alpha|\lambda|^\alpha\left[1 - i\beta\tfrac{a}{|a|}\tfrac{\lambda}{|\lambda|}\tan\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

e igualmente se hace para $\alpha = 1$. ∎

Proposición 4.3. *Para cualquier $\alpha < 2$,*

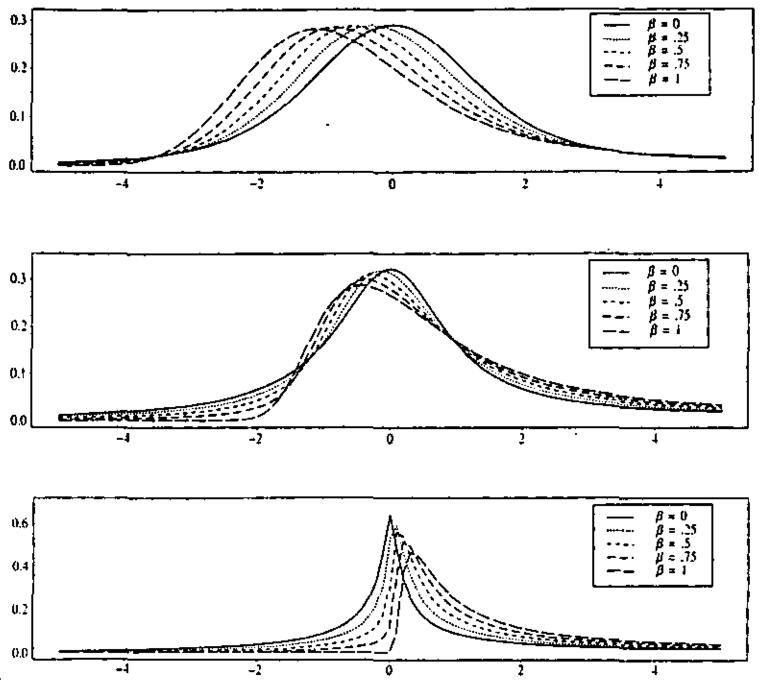
$$X \sim S_\alpha(\kappa,\beta,0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\kappa,-\beta,0)$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro de la proposición 4.2 tomado $a = -1$ y $b = 0$. ∎

Por las proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3 los parámetros α, κ, β determinan la naturaleza de la distribución. En cambio, la constante γ es sólo un parámetro de localización. El parámetro κ es una constante de escala, el parámetro β describe la asimetría de la distribución y el parámetro α refleja el comportamiento de la distribución en infinito.

Aunque las distribuciones estables son absolutamente continuas sus densidades se expresan por funciones muy complicadas, sólo en algunos casos se expresan por funciones elementales. Por ejemplo, el caso $S_\alpha(0,\beta,\gamma)$ corresponde a la distribución de una variable aleatoria degenerada. Para $S_2(\kappa,0,\gamma)$ se tiene $\varphi(\lambda) = \exp\{i\gamma\lambda - \kappa\lambda^2\}$, la cual corresponde a una distribución $N(0,2\kappa)$, aquí el valor de β es irrelevante y suele tomarse como $\beta = 0$.

Figura 5: $S_\alpha(1,\beta,0)$ con $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$ respectivamente



Para el caso en que $\beta = 0$ se tiene una función característica real, por lo que si $\beta = 0$ la distribución estable es simétrica alrededor de γ. Como caso particular para $S_1(\kappa, 0, 0)$ se tiene la distribución de Cauchy(κ) y para $S_{1/2}(\kappa, 1, \gamma)$ surge la distribución de Lévy, cuya funcion de densidad es

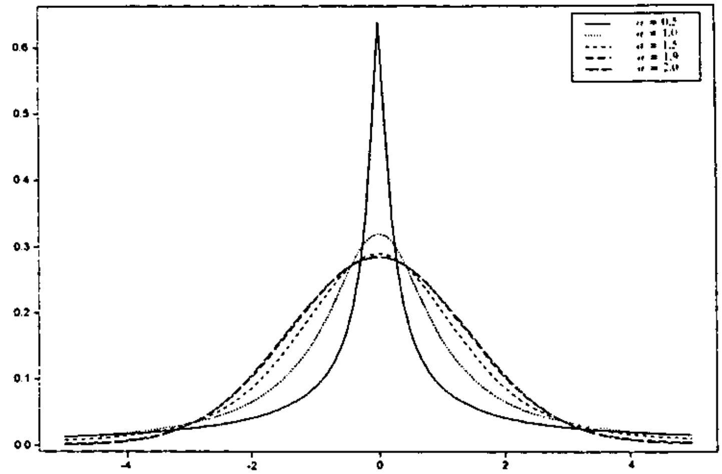
$$f(x) = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\gamma)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{2(x-\gamma)}\right\}$$

y se concentra en (γ, ∞). Si $X \sim S_{1/2}(\kappa, 1, 0)$, entonces para $x > 0$

$$\mathbb{P}_X(x) = 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\kappa}{x}}\right)\right),$$

donde Φ es la función de distribución de una $N(0,1)$.

Figura 6: $S_\alpha(1, 0, 0)$ variando α



Si $\beta = 1$ y $\alpha < 1$ la variable T es positiva, y si $\beta = -1$ y $\alpha < 1$ es negativa. Para el caso en que $|\beta| < 1$ y $\alpha \neq 1$ la variable aleatoria T tiene como soporte al eje real (ver figuras 5 y 6).

§4.3 Teorema del Límite Central

En §4.1 se discutió sobre las características que T debía satisfacer para que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T,$$

en donde $(X_n)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y S_n la suma parcial de las primeras n de éstas. llegando a la conclusión de que $T \sim S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$.

Los siguientes resultados definen y caracterizan a las variables aleatorias $(X_n)_{n\geqslant 1}$ y a las constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbf{R}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = S_\alpha(\kappa, \beta, \gamma)$$

✎ **Definición 4.2.** Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución $\mathbb{P}_{X_1}$. Se dice que X_1 ó $\mathbb{P}_{X_1}$ pertenece al *dominio de atracción* de $S_\alpha(\kappa,\beta,\gamma)$ si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tfrac{S_n-b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} S_\alpha(\kappa,\beta,\gamma). \qquad S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Esto se denota como $X \in \mathrm{DA}(\alpha)$ ó $\mathbb{P}_{X_1} \in \mathrm{DA}(\alpha)$ y se dice que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ cumple el Teorema del Límite Central con límite $S_\alpha(\kappa,\beta,\gamma)$.

Recordando la teoría de funciones de variación regular (ver apéndice III), se tiene la siguiente caracterización del dominio de atracción.

Teorema 4.4. *Supóngase que* $X_1 \in \mathrm{DA}(\alpha)$ *con* $\alpha \in (0,2]$ *y* $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

i) *Si* $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ *entonces*

$$\tfrac{S_n-n\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1).$$

ii) *Si* $\mathbb{E}(X^2) = \infty$ *y* $\alpha = 2$ *ó si* $\alpha < 2$ *entonces*

$$\tfrac{S_n-b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} S_\alpha(\kappa,\beta,0)$$

donde

$$b_n = \begin{cases} n\mu & si\ \alpha\in(1,2],\\ 0 & si\ \alpha\in(0,1),\\ 0 & si\ \alpha=1\ y\ \mathbb{P}_{X_1}\ simétrica \end{cases}$$

y $a_n = n^{1/\alpha}L(n)$ *con* L *una función apropiada de variación lenta* [III.1].

La demostración de este teorema se puede consultar en [11].

Ahora, si se considera una transformación $h(S_n)$ con ciertas propiedades, surge la interrogante de si existen sucesiones $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que se siga cumpliendo

$$\tfrac{h(S_n)-b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} S_\alpha(\kappa,\beta,0). \tag{4.8}$$

La solución para el caso $S_2(1/2,0,0)$, es decir, para el caso en que el dominio de atracción sea una distribución normal estándar se da en [21].

El nuevo resultado que se explica en esta sección y que extiende el encontrado para la normal estándar, es para $S_\alpha(\kappa,\beta,0)$ con $\alpha \in (1,2]$. Quedando como un caso particular lo encontrado en [21].

La demostración de esta generalización sigue la misma técnica empleada en el caso de la distribución normal estándar.

A continuación, se dan condiciones sobre $H = h^{-1}$ para que se cumpla (4.8). Las siguientes condiciones sobre H se toman como ciertas en toda la sección. $H(x)$ es una función positiva en (x_0,∞) para algún $x_0 > 0$ y cumple que $\lim_{x\to\infty} H(x) = \infty$.

Lema 4.2. *Sea H una función diferenciable en (x_0,∞) para algún $x_0 > 0$.*

i) *Si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)} = \delta > 0 \tag{4.9}$$

entonces $H \in \mathrm{VR}(\delta)$.

ii) *Si $H'(x)$ es una función monótona y $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ entonces (4.9) se cumple.*

Demostración. (i) Sea $t > 1$ entonces para $\epsilon > 0$ y $x > 0$

$$\frac{H(xt)}{H(x)} = \exp\{\log H(xt) - \log H(x)\} = \exp\left\{\int_x^{xt} \frac{H'(y)}{H(y)}dy\right\}.$$

Por hipótesis, para $x > x_0$ y $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta-\epsilon}{x} < \frac{H'(x)}{H(x)} < \frac{\delta+\epsilon}{x} \\ \Leftrightarrow\ & (\delta-\epsilon)\int_x^{xt}\frac{dy}{y} \leqslant \int_x^{xt}\frac{H'(y)}{H(y)}dy \leqslant (\delta+\epsilon)\int_x^{xt}\frac{dy}{y}, \end{aligned}$$

de donde

$$t^{\delta-\epsilon} \leqslant \frac{H(xt)}{H(x)} \leqslant t^{\delta+\epsilon}.$$

De la misma manera se procede para $t \in (0,1)$ llegando a que

$$t^{\delta+\epsilon} \leqslant \frac{H(xt)}{H(x)} \leqslant t^{\delta-\epsilon}$$

por lo que se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(xt)}{H(x)} = t^{\delta},$$

es decir, $H \in \mathrm{VR}(\delta)$.
(ii) Sin pérdida de generalidad se considera a $H'(x)$ no creciente. Para $t > 1$ y $x > 0$

$$\frac{H(xt)}{H(x)} - 1 = \frac{H(xt)-H(x)}{H(x)} = \frac{\int_x^{xt} H'(y)dy}{H(x)} \leqslant \frac{H'(x)}{H(x)} x(t-1)$$

y como $H \in \mathrm{VR}(\delta)$,

$$\frac{t^{\delta}-1}{t-1} \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)}. \tag{4.10}$$

Ahora, si $t \downarrow 1$ queda

$$\delta \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)}.$$

Igualmente se hace para $t \in (0,1)$ y $x > 0$ obteniendo en este caso

$$\delta \geqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)},$$

concluyendo que $H(x)$ cumple (4.9). ∎

Teorema 4.5. *Sea $H(x)$ una función diferenciable en (x_0, ∞) para algún $x_0 > 0$. Si se cumple*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H(x)} = \delta > 0$$

entonces para $h(x) = H^{-1}(x)$ y $\alpha \in (1,2]$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{h(S_n)-b_n}{a_n} \leqslant x\right) = S_{\alpha}(\kappa, \beta, 0)$$

donde $b_n = h(n\mu)$ y $a_n = h(n\mu)/\delta\mu n^{1-1/\alpha}$.

Demostración. La función H^{-1} existe ya que $H'(x) > 0$ en (x_0, ∞). Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{h(S_n)-b_n}{a_n} \leqslant x\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n \leqslant H(a_n x + b_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{n^{1/\alpha}} \leqslant \frac{H(a_n x + b_n) - n\mu}{n^{1/\alpha}}\right)\end{aligned}$$

sólo hay que demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(a_n x+b_n)-n\mu}{n^{1/\alpha}} = x. \tag{4.11}$$

Como $H(b_n) = n\mu$ y si se define $x_n = a_n x + b_n$

$$\begin{aligned}\frac{H(x_n)-H(b_n)}{n^{1/\alpha}} &= \frac{\sqrt{\mu}}{n^{1/\alpha-1/2}}\left(\frac{H(x_n)-H(b_n)}{\sqrt{H(b_n)}}\right)\\ &= \sqrt{\mu}\left(\frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{H(x_n)}{H(b_n)}}\right).\end{aligned}$$

Primero se demuestra que $\lim_{n\to\infty} H(x_n)/H(b_n) = 1$, para esto se hace notar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right) = 1$$

ya que $a_n/b_n = 1/(\delta\mu n^{1-1/\alpha}) \to 0$ si $n \to \infty$ entonces para $\epsilon > 0$

$$b_n(1-\epsilon) \leqslant b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right) \leqslant b_n(1+\epsilon)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{H(b_n(1-\epsilon))}{H(b_n)} \leqslant \frac{H\left(b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right)}{H(b_n)} \leqslant \frac{H(b_n(1+\epsilon))}{H(b_n)}$$

y como $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ se llega a que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(x_n)}{H(b_n)} = 1.$$

Ahora bien,

$$\frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}} = \frac{1}{n^{1/\alpha-1/2}}\int_{b_n}^{x_n}\left(\frac{yH'(y)}{H(y)}\right)\frac{\sqrt{H(y)}}{2y}dy.$$

por el lema (4.2-i) para n grande y $0<\epsilon<\delta$

$$\begin{aligned}\frac{(\delta-\epsilon)}{n^{1/\alpha-1/2}}\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{H(y)}}{2y}dy &\leqslant \frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\\ &\leqslant \frac{(\delta+\epsilon)}{n^{1/\alpha-1/2}}\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{H(y)}}{2y}dy\end{aligned}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Por ser $\sqrt{H(y)}$ no decreciente

$$\begin{aligned}\frac{(\delta-\epsilon)\sqrt{H(b_n)}}{2n^{1/\alpha-1/2}}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right) &\leqslant \frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\\ &\leqslant \frac{(\delta+\epsilon)\sqrt{H(x_n)}}{2n^{1/\alpha-1/2}}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right).\end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por a_n/b_n las desigualdades de arriba, se llega a que

$$\frac{a_n}{b_n}\frac{(\delta-\epsilon)\sqrt{\mu n}}{2n^{1/\alpha-1/2}}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{b_n/a_n}=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left(1-\frac{\epsilon}{\delta}\right)\log\left(1+x/(b_n/a_n)\right)^{\frac{b_n}{a_n}}$$

y

$$\frac{a_n}{b_n}\frac{(\delta+\epsilon)\sqrt{H(x_n)}}{2n^{1/\alpha-1/2}}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{\frac{b_n}{a_n}}=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left(1+\frac{\epsilon}{\delta}\right)\sqrt{\frac{H(x_n)}{H(b_n)}}\log\left(1+\frac{x}{(b_n/a_n)}\right)^{\frac{b_n}{a_n}}.$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{H(x_n)}{H(b_n)}}=1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=x$$

así que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\epsilon}{\delta}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\right)x &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\right)\\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\right)\\ &\leqslant \left(1+\frac{\epsilon}{\delta}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\right)x\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{H(x_n)}-\sqrt{H(b_n)}}{n^{1/\alpha-1/2}}\right)=\frac{x}{2\sqrt{\mu}}$$

llegando a demostrar (4.11). ∎

Teorema 4.6. *Sea* $H(x)$ *una función diferenciable en* (x_0,∞) *para algún* $x_0>0$. *Si*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{H'(x)}{x^\nu H(x)}=\delta>0$$

para algún $\nu>-1$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{h(S_n)-b_n}{a_n}\leqslant x\right)=S_\alpha(\kappa,\beta,0)$$

donde $b_n=h(n\mu)$ *y* $a_n=1/(b_n^\nu\delta\mu n^{1-1/\alpha})$

DEMOSTRACIÓN. Por las misma razones expuestas en el teorema 4.5, lo que se tiene que demostrar es que

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{H(a_n x+b_n)-n\mu}{n^{1/\alpha}} = x.$$

Sea $x_n = a_n x + b_n$ entonces

$$\tfrac{H(x_n)-H(b_n)}{n^{1/\alpha}} = \mu n^{1-1/\alpha}\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)} - 1\right). \tag{4.12}$$

Nótese que

$$\log\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)}\right) = \int_{b_n}^{x_n} \tfrac{H'(y)}{y^\nu H(y)} y^\nu dy$$

así que para n grande y $0 < \epsilon < \delta$

$$(\delta - \epsilon)\int_{b_n}^{x_n} y^\nu dy \leqslant \log\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)}\right) \leqslant (\delta + \epsilon)\int_{b_n}^{x_n} y^\nu dy. \tag{4.13}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\int_{b_n}^{x_n} y^\nu dy &= \tfrac{1}{\nu+1}\left(x_n^{\nu+1} - b_n^{\nu+1}\right) \\
&= \tfrac{b_n^{\nu+1}}{\nu+1}\left(\tfrac{(xa_n/b_n+1)^{\nu+1}-1}{xa_n/b_n}\right)\tfrac{a_n}{b_n}x \\
&= \tfrac{1}{\nu+1}\left(\tfrac{(xa_n/b_n+1)^{\nu+1}-1}{xa_n/b_n}\right)\tfrac{x}{\delta\mu n^{1-1/\alpha}}
\end{aligned}$$

ya que $a_n/b_n = 1/(b_n^{\nu+1}\delta\mu n^{1-1/\alpha})$. Usando el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \tfrac{(1+x)^{\nu+1}-1}{x} = \nu + 1 \tag{4.14}$$

se llega a

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{H(x_n)}{H(b_n)} = 1.$$

Como

$$\lim_{t\to 1} \tfrac{t-1}{\log(t)} = 1,$$

si se elige $t = H(x_n)/H(b_n)$ se tiene para n grande y $0 < \epsilon < 1$

$$(1-\epsilon)\log\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)}\right) < \left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)} - 1\right) < (1+\epsilon)\log\left(\tfrac{H(x_n)}{H(b_n)}\right).$$

Usando (4.13), el desarrollo de $\int_{b_n}^{x_n} y^\nu dy$ y (4.14) se tiene

$$\left(1 - \tfrac{\epsilon}{3}\right)(1-\epsilon)^2 x \leqslant \frac{H(x_n) - H(b_n)}{n^{1/\alpha}} \leqslant \left(1 + \tfrac{\epsilon}{3}\right)(1+\epsilon)^2 x$$

concluyendo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(x_n) - H(b_n)}{n^{1/\alpha}} = x. \qquad \blacksquare$$

☞ **Observación 4.3.** En todos los casos si se considera $\alpha = 2$ se tiene lo expuesto en [21].

Quedaría como un trabajo a seguir encontrar las constantes a_n y b_n para el caso en que $\alpha \in (0, 1]$. Igualmente se plantea el hacer un Teorema del Límite Central generalizado para procesos de Lévy, no sólo para casos particulares, como son las caminatas aleatorias.

Concluciones

En este trabajo se desarrolló la teoría básica de los procesos de Lévy. Se hizó enfásis en los procesos de Markov ya que estos constituyen una característica importante de los procesos de Lévy.

Además, se estudiaron los subordinadores que son un caso particular de los procesos de Lévy dando un tratamiento detallado del comportamiento asintótico de las trayectorias de los subordinadores.

Con esta idea se generaliza el Teorema del Límite Central donde se encuentran constantes adecuadas que hacen que una transformación de una caminata aleatoria, S_n, converga a una distribución estable con índice entre 1 y 2. De esta forma se extiende el resultado de José Villaseñor, el cual sólo considera como dominio de atracción a distribuciones estables con índice 2, es decir, la distribución normal estándar. Esta generalización aplica la misma técnica empleada por Villaseñor para demostrar los resultados.

Como continuación de este trabajo puede quedar el análisis para $\alpha \in (0, 1]$ así como trabajar con procesos de Lévy de forma general en vez de considerar sólo caminatas aleatorias.

Apéndice I

Fundamentos

En esté apéndice se dan algunos resultados importantes que se emplearán a lo largo de todo este trabajo.

Desigualdades

I.1. *Las siguientes desigualdades se cumplen para todo $a \in \mathbb{R}$*

i) $|1-\cos(a)| \overset{(1)}{\leqslant} 2\left(1 \wedge |a|^2\right) \overset{(2)}{\leqslant} 2\left(1 \wedge |a|\right)$

ii) $|a-\operatorname{sen}(a)| \overset{(1)}{\leqslant} 2\left(|a| \wedge |a|^3\right)$ *y* $|\operatorname{sen}(a)| \overset{(2)}{\leqslant} 2\left(1 \wedge |a|\right)$

Demostración

(i-2) Para $|a| \geqslant 1$ es obvio, pues $2(1 \wedge |a|^2) = 2(1 \wedge |a|)$. Si $|a| < 1$ también se cumple la desigualdad ya que

$$|a| < 1 \Leftrightarrow |a|^2 < |a|$$

(i-1) Como $|1-\cos(a)| = 1-\cos(a)$ hay que demostrar que

$$1-\cos(a) \leqslant 2(1 \wedge |a|^2)$$

Para el caso $0 < a < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos(a) \leqslant 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^a \cos(x)dx \leqslant 4\int_0^a dx \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(a) \leqslant 4a \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^a \operatorname{sen}(x)dx \leqslant 4\int_0^a x dx \\
&\Leftrightarrow \quad 1-\cos(a) \leqslant 2a^2.
\end{aligned}$$

Si $-1 < a < 0$ entonces $0 < -a < 1$ y aplicando el resultado anterior se tiene que

$$1 - \cos(-a) \leqslant 2(-a)^2 \Leftrightarrow 1 - \cos(a) \leqslant 2a^2.$$

En el caso $|a| > 1$ es claro, pues $\cos(a) \leqslant 1$ y entonces $1 - \cos(a) \leqslant 2$.

(ii-1) Para el caso $a \geqslant 1$

$$a - \operatorname{sen}(a) \leqslant 2a \Leftrightarrow 1 - \cos(a) \leqslant 2.$$

Si $a \leqslant -1$ entonces $-a \geqslant 1$ y aplicando la igualdad anterior se llega a

$$-a - \operatorname{sen}(-a) \leqslant 2(-a) \Leftrightarrow -a + \operatorname{sen}(a) \leqslant 2(-a)$$

por lo tanto $|a - \operatorname{sen}(a)| \leqslant 2|a|$. Si $0 < a < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \cos(a) \leqslant 12 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(a) \leqslant 12a \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \cos(a) \leqslant 6a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a - \operatorname{sen}(a) \leqslant 2a^3 \end{aligned}$$

y para el caso $-1 < a < 0$ se tiene que $0 < -a < 1$ y por el resultado anterior

$$-a - \operatorname{sen}(-a) \leqslant 2(-a)^3 \Leftrightarrow -a + \operatorname{sen}(-a)^3$$

por lo que $|a - \operatorname{sen}(a)| \leqslant 2|a|^3$.

(ii-2) Es claro que si $a \geqslant 1$ se cumple la desigualdad. Para $0 < a < 1$

$$\cos(a) \leqslant 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(a) \leqslant a$$

y por ser la función valor absoluto par se tiene que para $-1 < a < 0$ también se cumple. ∎

I.2 (Desigualdad de Markov). *Sea Y una variable aleatoria con $Y \in L^1$ y sea $h : [0,\infty) \rightsquigarrow [0,\infty)$ una función creciente. Si $a > 0$ y $0 < h(a) < \infty$ entonces*

$$\mathbb{P}\left(|Y| \geqslant a\right) \leqslant \tfrac{1}{h(a)} \mathbb{E}\left(h(|Y|)\right).$$

Martingalas

I.3. *Un proceso estocástico* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ *es una martingala si para toda* $t \geqslant 0$, M_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible y*

$$\mathbb{E}\left(M_t/\mathcal{F}_s\right) = M_s.$$

I.4. *Sean* $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$ *una* σ*-álgebra decreciente y* $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ *un proceso adaptado a* $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$. *Se dice que* $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ *es una martingala reversible si para toda* $s < t$

$$\mathbb{E}\left(Y_s/\mathcal{G}_t\right) = Y_t.$$

Si $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ *es una martingala reversible entonces*

$$Y_t \xrightarrow{c.s.} Y_\infty \quad y \quad Y_t \xrightarrow{L^p} Y_\infty.$$

I.5 (Desigualdad Máximal de Doob). *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ *un espacio filtrado. Si* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *es una martingala entonce para toda* $t > 0$ *se tiene*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s|^2\right) \leqslant 4\mathbb{E}\left(|M_t|^2\right).$$

En particular, si f *una función borel sobre* $E \cup \{\Delta\}$ *con* $f(\Delta) = 0$, *entonces para cualquier* $T > 0$ *fija*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\{\left|\sum_{0\leqslant s\leqslant t} f(e_s) - t\int f(x)dv(x)\right|^2\right\}\right) \leqslant 4T\int_E f(x)^2 dv(x).$$

Propiedad de Markov

I.6. *Sean* X *y* Y *dos variables aleatorias definidas en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $\mathcal{G}$ *una sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$ *tales que* Y *es* $\mathcal{G}$*-medible y* X *es independiente de* $\mathcal{G}$ $(X \perp \sigma(Y))$ *entonces en particular para* $h : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}$ *tal que sea boreliana,* $h(X, Y) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $h = f \cdot g$, *con* $f, g : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ *borelianas*

$$\mathbb{E}(h(X, Y)/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(h(X, Y)/\sigma(Y)).$$

Demostración. Sean $f, g : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ borelianas y sea $h = f \cdot g$ entonces por un lado

$$\mathbb{E}(f(X) \cdot g(Y)/\mathcal{G}) = g(Y)\mathbb{E}(f(X)/\mathcal{G}) = g(Y)\mathbb{E}(f(X))$$

y por otro

$$\mathbb{E}(f(X) \cdot g(Y)/\sigma(Y)) = g(Y)\mathbb{E}(f(X)/\sigma(Y)) = g(Y)\mathbb{E}(f(X)).$$

llegando al resultado. Como caso particular si $h(X, Y) = \mathbb{1}_{\{X+Y \in A\}}$ se tiene

$$\mathbb{P}\left(X + Y \in A/\mathcal{G}\right) = \mathbb{P}\left(X + Y \in A/\sigma(Y)\right).$$

Teorema de Clases Monótonas

I.7. *Sea $\mathcal{A}$ un π-sistema y sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial de funciones reales definidas en Ω. Si cumplen*

i) *si $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$;*

ii) *si $0 \leqslant f_n \in \mathcal{H}$ y $f_n \uparrow f$, una función acotada, entonces $f \in \mathcal{H}$.*

Entonces $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones acotadas en Ω que son medibles con respecto a $\sigma(A)$.

Teorema de Riesz

I.8. *Sea ρ una funcional lineal no negativa continua en $\mathcal{C}_0(E)$ entonces existe una única medida μ finita no negativa en $\mathcal{E}$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}_0(E)$.*

$$\rho(f) = \int_E f(y)\mu(dy).$$

Apéndice II

Procesos Puntuales

Sean $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible y $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Se considera a $E = E \cup \{\Delta\}$ donde Δ es el punto cementerio. Sea $e = (e_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t$.

Proceso Puntual Discreto

II.1. *Se dice que* $(\epsilon_t)_{t\geqslant 0}$, $e : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow E$ *es un proceso puntual discreto o finito si el conjunto* $D_\omega = \{t \in \mathbb{R}^+ : e_t(\omega) \neq \Delta\}$ *es finito* c.s.

Se abrevia esta clase de procesos como (p.p.d.).

Proceso Puntual σ-Discreto

II.2. *Se llama al proceso* $(e_t)_{t\geqslant 0}$ *un proceso puntual* σ*-discreto* (p.p.σ-d.) *si existe una sucesión* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $E_n \uparrow E$ *y* $(e_t)_{t\geqslant 0}$ *restringido a* E_n *es un* (p.p.d.).

Proceso Poisson Puntual

II.3. *Sean* $B \in \mathcal{E}$ *y* $N_t^B = \#\{s \leqslant t : \epsilon_s \in B\}$. *Se dice que* $(e_t)_{t\geqslant 0}$ *es un proceso Poisson puntual* (p.p.p.) *si* $(e_t)_{t\geqslant 0}$ *es un* (p.p.σ-d.) *casi seguramente y* $(N_t^B)_{t\geqslant 0}$ *es un proceso Poisson con parámetro* $v(B)$.

Definida así $v(\cdot)$ *resulta ser una medida, ya que si* $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ *ajenos entonces* $N_t^{B_1}$ *y* $N_t^{B_2}$ *son dos procesos Poisson sin saltos en común y por lo tanto independientes, así* $v(B_1 + B_2) = v(B_1) + v(B_2)$. *Para una familia numerable se procede de igual manera.*

A la medida $v(\cdot)$ *se le conoce como la medida característica del* (p.p.p.)

Fórmula de Compensación

II.4. *Sea $G = (G_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso predecible, positivo definido en* $\mathbb{R}\times\Omega\times E$ *tal que para toda t y ω, $G(t,\omega,\Delta)=0$ entonces*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{0\leqslant s} G(s,\omega,e_s(\omega))\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds\int_E G(s,\omega,u)v(du)\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de clases monótonas [I.6] es suficiente probar la igualdad para $G(s,\omega,u)=K(s,\omega)\mathbb{1}_B(u)$ donde K es un proceso predecible en $\mathbb{R}^+\times\Omega$ y $B\in\mathcal{E}$. Como

$$\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\mathbb{1}_B(e_s(\omega)) = \#\{s\leqslant t : e_s\in B\} = N_t^B$$

y por el teorema (1.6-iii) con $s=0$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t K(s,\omega)dN_s(\omega) - v(B)\int_0^t K(s,\omega)ds\right) = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{0\leqslant s\leqslant t} K(s,\omega)\mathbb{1}_B(e_s(\omega))\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t K(s,\omega)dN_s(\omega)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(v(B)\int_0^t K(s,\omega)ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_E \mathbb{1}_B(u)v(du)\int_0^t K(s,\omega)ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t ds\int_E K(s,\omega)\mathbb{1}_B(u)v(du)\right)
\end{aligned}$$

y si $t\to\infty$ se cumple la igualdad. ∎

Fórmula Exponencial

II.5. *Si $f:E\rightsquigarrow\mathbb{C}$ es una función tal que $f(\Delta)=0$ y $\int_0^\infty|1-e^{f(u)}|v(du)<\infty$ entonces para toda $t\geqslant 0$*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{0\leqslant s\leqslant t} f(e_s)\right\}\right) = \exp\left\{-t\int_E(1-e^{f(u)})v(du)\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $f(u) = \mathbb{1}_B(u)$. Usando el teorema (1.6-iv) con $s = 0$ y $H = f$ se tiene

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_0^t \mathbb{1}_B dN_s + v(B)\int_0^t (1 - e^{\mathbb{1}_B})ds\right\}\right) = 1$$

o de manera equivalente

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{N_t^B\right\}\right) = \exp\left\{-t(1-e)v(B)\right\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{0\leqslant s\leqslant t} \mathbb{1}_B(e_s)\right\}\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{N_t^B\right\}\right)\\ &= \exp\left\{-t(1-e)v(B)\right\}\\ &= \exp\left\{-t\int_E (1 - e^{\mathbb{1}_B(u)})v(du)\right\}.\end{aligned}$$

Siguiendo así para f simple, f positiva y sabiendo que cualquier función f es límite de simples se llega al resultado. ∎

Apéndice III

Variación Regular

Las demostraciones de todo este apéndice se pueden consultar en [13].

Funciones de Variación Regular

III.1. *Sea $H : (0,\infty) \rightsquigarrow (0,\infty)$ una función medible. Se dice que $H(x)$ es de variación regular con índice $\delta \in \mathbb{R}$ si para $t > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(tx)}{H(x)} = t^{\delta}$$

y se denota como $H \in \mathrm{VR}(\delta)$.

Se puede hablar de variación regular en cero con un simple cambio. $H(x)$ es de variación regular en infinito si y sólo si $H(x^{-1})$ es de variación regular en cero.

Si $\delta = 0$ se dice que H es de variación lenta. Las funciones de variación lenta se suelen denotar como L. Si $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ entonces $H(x)/x^{\delta} \in \mathrm{VR}(0)$ y si se define $L(x) = H(x)/x^{\delta}$ se concluye que toda función $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ se puede escribir como $H(x) = x^{\delta}L(x)$.

Representación para Funciones de Variación Regular

III.2. *$H(x) \in \mathrm{VR}(\delta)$ si y sólo si*

$$H(x) = \exp\left\{c(x) + \int_{z}^{x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}$$

para alguna $z > 0$ tal que $x > z$ y donde las funciones c y ε son medibles tales que $c(x) \to c \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon(x) \to \delta$ cuando $x \to \infty$.

Teorema de Densidad Monótona

III.3. *Sea* $H(x) = \int_0^x h(y)dy$ *donde* h *es monótona en* (z, ∞) *para alguna* $z > 0$. *Si*

$$H(x) \backsim cx^{\delta} L(x) \quad x \to \infty$$

con $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ *y* $L \in \mathrm{VR}(0)$ *entonces*

$$h(x) \backsim c\delta x^{\delta - 1} L(x)$$

e inversamente si $H(x) = \int_0^x h(y)dy$ *y* $h \in \mathrm{VR}(\delta - 1)$ *con* $\delta > 0$ *entonces* $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ *y*

$$H(x) \backsim c\delta^{-1} x h(x)$$

Teoremas Tauberianos de Karamata

III.4. *Sea* H *una función no decreciente, continua por la derecha definida en* $\mathbb{R}^{+}$. *Si* $L \in \mathrm{VR}(0)$, $c > 0$ *y* $\delta \geqslant 0$ *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $H(x) \backsim cx^{\delta} L(x)/\Gamma(1 + \delta) \quad si \quad x \to \infty;$

ii) $\mathcal{L}(H)(\lambda) \backsim c\lambda^{-\delta} L(1/\lambda) \quad si \quad \lambda \downarrow 0.$

Como consecuencia se tiene que si $H \in \mathrm{VR}(\delta)$ *con* $\delta > 0$ *entonces su inversa* $\hat{H} \in \mathrm{VR}(\delta^{-1})$.

Bibliografía

[1] Billingsley P.. *Probability and Measure.* Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[2] Bertoin J.. *Lévy Processes.* Cambridge Tracts in Mathematics (121), Cambridge University Press, 1996.

[3] Bertoin J.. *Subordinators: Examples and Applications.* Ecole d'été de Probabilités de St-Flour, 1997.

[4] Bertoin J. and Caballero M. E.. On the Rate of growth of Subordinators with Slowly Varying Laplace Exponent. *Séminaire de Probabilités XXIX*, pag. 125-132, 1996.

[5] Breiman L.. *Probability.* SIAM Philadelphia, 1992.

[6] Chow Y. and Teicher H.. *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales.* Third Edition, Springer-Verlag, 1997.

[7] Durrett R.. *Stochastic Calculus: A Practical Introduction.*CCR Press, 1996.

[8] Embrechts P., Klüppelberg C. and Mikosch T.. *Modelling Extremal Events.* Applications of Mathematics (33) Springer-Verlag, 1997.

[9] Ethier S. and Kurtz T.. *Markov Processes. Characterization and Convergence.* John Wiley & Sons, 1986.

[10] Feller W.. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[11] Hoffman-Jorgensen J.. *Probability With a View Toward Statistics.* Volume I, Chapman & Hall, New York, 1994.

[12] RESNICK S.. *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, 1994.

[13] RESNICK S.. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Applied Probability (4), Springer-Verlag, 1987.

[14] RESNICK S.. Point Processes, regular Variation and Weak Convergence . *Add. Appl. Prob.* **18**, pag. 66-138, 1986.

[15] REVUZ D. AND YOR M.. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Second Edition, Springer-Verlag, 1994.

[16] ROGERS C. AND WILLIAMS D.. *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Itô Calculus.* John Wiley & Sons, 1987.

[17] ROGERS C. AND WILLIAMS D.. *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Foundations.* Second Edition, John Wiley & Sons. 1994.

[18] SAMORODNITSKY G. AND TAQQU M.. *Stable Non-Gaussian Random Processes. (Stochastic Models with Infinite Variance).* Chapman & Hall, 1994.

[19] SATO KEN-ITI . *Time Evolution of Lévy Processes.* Trends in Probability and Related Analysis. Proc. SAP'96 (Singapore). pag. 35-82. World Scientific, 1997.

[20] TUDOR C.. *Procesos Estocásticos.* Segunda Edición. Serie de Textos No. 2, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[21] VILLASEÑOR J.. Limit Theorems for Transformations of Sums for IID Random Variables. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* (3). 1997.

ÍNDICE