



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**MODELADO Y CONTROL DE
ESTRUCTURAS ANTI-SISMICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

AREA ELECTRICA-ELECTRONICA

P R E S E N T A:

MIGUEL VELAZQUEZ DE LA ROSA BECERRA

DIRECTOR DE TESIS: DR. YU TANG XU



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D.F.

1999

275591



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Porque no sólo me dio la vida, me enseñó
que los frutos obtenidos son el resultado de
un trabajo duro y constante y que se
disfrutan mejor si se comparten con los
seres amados.*

**Con todo mi amor.
Gracias, mamá.**

A quien me brindó su apoyo incondicional, y
me ha inculcado el deseo de superación.
Gracias por estar junto a mí en este
momento tan especial.

Gracias papá.

Dedicado a ustedes
Que me dieron su apoyo e integridad
Para mi formación.

Un especial agradecimiento a la persona quien sin su supervisión y paciente consejo, este trabajo no sería una realidad.

Gracias, por todo
Dr. Yu Tang Xu
Atte. Su amigo
Miguel Velázquez de la Rosa
Becerra

A la mujer que por sus palabras de aliento y acciones, me ha hecho mejor persona, que está conmigo en las buenas y en las malas. Agradezco tu esfuerzo y comprensión.

Gracias Raquel.
TQM

ÍNDICE.

- I. *Introducción.*
- II. *Modelado de una Estructura de Ingeniería Civil.*
 - 2.0 *Introducción.*
 - 2.1 *Modelado del Sistema.*
 - 2.1.1 *Estructuras de 1 - DOF.*
 - 2.1.2 *Propiedades y características físicas del modelo.*
 - 2.1.3 *Comportamiento a excitaciones periódicas y sísmicas.*
 - 2.1.4 *Estructuras de 2 - DOF.*
 - 2.1.5 *Propiedades y características físicas del modelo.*
 - 2.1.6 *Comportamiento a excitaciones periódicas y sísmicas.*
- III. *Control por Masa Activa.*
 - 3.0 *Descripción del sistema.*
 - 3.1 *Objetivo del control LQR.*
 - 3.2 *Diseño del controlador LQR.*
 - 3.2.1 *Modelo matemático de la estructura de 1 - DOF.*
 - 3.2.2 *Modelado matemático de una estructura de 2 - DOF.*
 - 3.2.3 *Algoritmo de control basándose en un LQR.*
 - 3.2.4 *Selección de las matrices Q y R.*
 - 3.2.5 *Resultados de la simulación numérica.*
 - 3.3 *Objetivo de control MID.*
 - 3.4 *Diseño del controlador MID.*

3.4.1 Modelo Discreto.

3.4.2 Control por Modo Interno Dominante (MID).

3.4.3 Desarrollo del controlador.

3.5 Resultados de la simulación.

3.5.1 Estructura de 1 – DOF.

3.5.2 Estructura de 2 – DOF.

3.5.3 Consideraciones prácticas.

IV. Control Híbrido.

4.0 Introducción.

4.1 Descripción del sistema.

4.2 Esquema de control.

4.3 Diseño del controlador.

V. Comparación de los algoritmos de control.

VI. Conclusiones.

Apéndice.

Bibliografía.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN.

Las Estructuras de Ingeniería Civil (EIC's; edificios, torres, puentes, etc.), tal como las conocemos, siempre están sujetas a cambios en su entorno, es decir, disturbios naturales, tales como sismos, grandes vientos, oleadas etc. Dichos disturbios son de naturaleza aleatoria tanto en magnitud como en su ocurrencia, y están presentes a lo largo de la vida útil de una EIC, y que no siempre se presentan de una manera soportable para estas estructuras. Al ocurrir los disturbios, las estructuras sufren daños que van desde ligeros hasta daños severos (derrumbes, parcial o total), por lo que en el ámbito de la Ingeniería existe una preocupación desde el punto de la seguridad de los usuarios, como del punto de vista económico que representa el derrumbe de una EIC. Esta preocupación fue demostrada en la Primera Conferencia Mundial en Control Estructural en Pasadena, California en agosto de 1994, con más de 300 participantes de 35 diferentes países.

Esto nos ha llevado al estudio de técnicas de Control Estructural que tienen como objetivo reducir la vibración estructural, debida excitaciones, ó en términos de control reducir los efectos del disturbio. Esta tecnología ha sido desarrollada en los últimos 20 años y los modelos de control han sido tomados de la Teoría de Control y desarrollados para sistemas de control en EIC's.

Existen tres principales tipos de control estructural: control pasivo, control activo y control híbrido. Esta división se hace dependiendo de si una fuerza externa es o no necesaria para reducir el efecto del disturbio.

El control pasivo no necesita una energía o fuerza externa, el cual atenúa las vibraciones por simple aislamiento o dispositivo de absorción instalado en los cimientos o en el cuerpo de la estructura. En el control activo es necesaria una fuerza de control externa, dicha fuerza está dada por cierta ley de control (obtenida según el algoritmo de control usado) y es aplicada a la estructura a través de actuadores para reducir la vibración producida por un disturbio.

El control pasivo es simple y de "fácil implementación", pero que dadas las características del aislamiento o del dispositivo de absorción, solo puede lograr una atenuación de las vibraciones en un rango particular de excitaciones, por lo que, es incapaz de mantener la estabilidad de la EIC en un rango mayor de excitación. Por otro lado, el control activo, puede modificar la fuerza de control en tiempo real durante el tiempo de la excitación externa, pero será necesaria una gran fuerza de control, la cual no podría ser proporcionada con la rapidez requerida. El control híbrido es una combinación de los

anteriores, activo y pasivo, lo cual compensa las desventajas anteriores y mejora con sus respectivas ventajas. En años recientes el control híbrido ha recibido mucha atención para su empleo en el control de grandes estructuras.

En este trabajo se estudia específicamente a los edificios, bajo la condición de que los que desplazamiento que un edificio experimenta es unidireccional. Se ha propuesto estudiar dos esquemas de control: control activo y control híbrido, con el fin de obtener un *medio de comparación eficiente de estos dos principales esquemas*. Con respecto al control activo se analiza la funcionalidad de este esquema ante disturbios naturales por medio de un sistema de control de masa activa, en el cual se usa una masa llamada de amortiguación, en movimiento que contrarresta el desplazamiento de la estructura. Por otro lado el control híbrido es analizado proponiendo un sistema que emula la respuesta mecánica del cuerpo humano a estímulos externos (disturbios). Con el estudio de estos dos esquemas se pretende entonces, valorar ventajas y desventajas entre ambas técnicas y proveer una base para realizaciones de orden mayor.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera: en el capítulo II se obtienen los modelos matemáticos de las EIC's mediante la ecuación de Lagrange, así como los parámetros físicos de masa, rigidez y coeficiente de amortiguación que caracterizan la estructura. En el capítulo III se analiza el esquema de control activo usando un sistema de masa activa. Se obtiene la ley de control que se requiere para este sistema, obtenida por medio de la realización de un regulador LQR, posteriormente se obtiene la ley de control por el método del Modo Interno Dominante (MID), de tal forma que se tengan dos algoritmos de comparación para un mismo esquema. Para el capítulo IV se estudia el

control híbrido, propuesto por Xu [1]. Se describen el sistema mecánico que le da su carácter híbrido y los modelos matemáticos discretos para aplicar el algoritmo de control propuesto. En el capítulo V se hace una breve comparación de ambas técnicas de control usadas, así como algunos comentarios de los resultados que se obtienen de cada técnica. Por último en el capítulo VI se concluye y se comenta de los trabajos futuros.

CAPÍTULO II

MODELADO DE UNA ESTRUCTURA DE INGENIERÍA CIVIL.

2.0 INTRODUCCIÓN.

Una estructura de ingeniería civil, específicamente un edificio de n -pisos, puede ser considerado como un sistema de n -grados de libertad (n -DOF) que está sujeto a una aceleración debida a un movimiento sísmico de una sola dimensión. Esquemáticamente está representado en la figura 2.1.

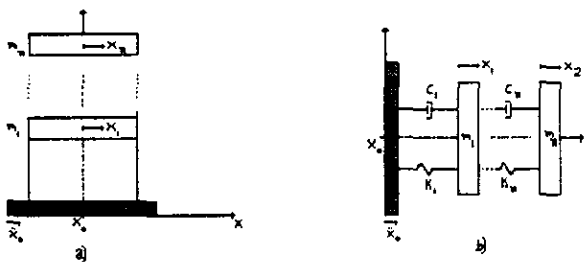


Figura 2.1. Modelo de parámetros concentrados de una estructura de n -DOF.

Para analizar una estructura como la de la figura 2.1, podemos auxiliarnos de una poderosa herramienta llamada ecuación de Lagrange, esta formulación está basada en el concepto de energía y es muy útil en el análisis de sistemas dinámicos. La forma usual de la ecuación de Lagrange esta dada por (2.1).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial W_c}{\partial q_i} = \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

donde K es la suma de todas las energías cinéticas, U es la suma de las energías de rigidez, W_c es el trabajo realizado por las fuerzas de amortiguamiento y W_e es el trabajo realizado por todas las fuerzas externas. Todas las expresiones en términos de las coordenadas generalizadas q_i , donde $i=1,2,3\dots n$.

2.1 Modelado del Sistema.

2.1.1 Estructuras de 1 - DOF.

Proponemos el uso de la ecuación de Lagrange para el modelado de una estructura n-DOF, por lo que el primer modelo es una estructura representada por 1-DOF (un grado de libertad), como el que se muestra en la figura 2.2

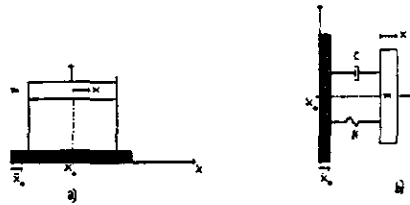


Figura 2.2. Modelo de parámetros concentrados de 1-DOF.

Tomando en cuenta el desplazamiento horizontal de la estructura en la dirección de x , es decir, en una sola dimensión, nuestra coordenada generalizada será $q_1 = x$. Las expresiones de energía en términos de la coordenada generalizada x son como siguen:

$$K = \frac{1}{2}mx^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.2)$$

$$W_c = (-cx)x$$

$$W_e = -px + ux$$

En la cual m , c y k , son la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez de la estructura respectivamente, u es la fuerza de control y p representa el disturbio al cual se somete el sistema. Usando la ecuación (2.1) obtenemos:

$$mx + cx + kx = B_0u - Gp \quad (2.3)$$

Donde B_0 de $1 \times r$ es la vector de posición de la fuerza de control y G de $1 \times r$ vector de posición de la fuerza de excitación. Con el fin de analizar el sistema usando las técnicas

desarrolladas en el espacio de variables de estado, y para que nos sea más útil en el momento del diseño de su respectivo controlador, se representa la ecuación (2.3) como una ecuación de variable de estado:

$$z = Az + Bu + Wx_0 \quad (2.4)$$

donde

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{nr} \\ m^{-1}B_0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0_{mq} \\ -m^{-1}G \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Para el caso de una estructura de 1-DOF tenemos la siguiente representación de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}B_0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m}G \end{bmatrix} p \quad (2.6)$$

2.1.2 Propiedades y características físicas del modelo.

Dado el modelo en variables de estado es necesario saber algunas propiedades de éste, ya que si se cumple con ellas podemos saber si el sistema es factible controlar, por lo tanto, la propiedad relacionada es la controlabilidad. Para saber si el par $[A, B]$ es controlable tiene que cumplir con la siguiente condición:

$$\text{Rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (2.7)$$

Donde n es el número de estados del sistema.

Además de comprobar que el sistema es controlable, será necesario, para fines de simulaciones que se llevarán a cabo posteriormente, obtener los parámetros de éste, que asimilen la frecuencia natural de la estructura, la cual varía entre 1 a 3 Hz, ya que en promedio una gran cantidad de edificios tienen una frecuencia natural (f_0) dentro de este rango.

Una vez seleccionada la frecuencia natural f_0 , podemos escoger los parámetros que asimilen dicha frecuencia de la siguiente expresión:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.8)$$

Con lo que respecta a el coeficiente de amortiguamiento c , en la selección se tiene que tomar en consideración entre mayor sea la relación de amortiguamiento (δ), menor será la amplitud del desplazamiento de la estructura cuando ésta vibra una frecuencia de f_0 , debido a excitaciones externas, entonces la relación estará dada por:

$$\delta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.9)$$

Para una estructura de 1-DOF consideremos los siguientes parámetros,

$$m = 500 \text{ kg,}$$

$$k = 42480 \text{ N/m,}$$

$$c = 344.4 \text{ Ns/m,}$$

con lo que obtenemos la siguiente ecuación de variables de estado. De donde obtenemos que el sistema es controlable de acuerdo con la condición (2.7) y, por lo tanto usando los parámetros antes mencionados la ecuación (2.6) queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -84.9600 & -0.6888 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0020 \end{bmatrix} u$$

Es posible conocer las características físicas del sistema a partir del análisis en la frecuencia de la estructura. La frecuencia natural f_0 y el factor de amortiguamiento se calculan con las expresiones (2.8) y (2.9).

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.46 \text{ Hz},$$

$$\delta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.03736$$

En la figura 2.3 tenemos el diagrama de Bode, con el cual podemos observar el comportamiento en la frecuencia de la estructura. Observamos que la frecuencia el sistema toma el valor máximo en ganancia es de $f = 9.1 \text{ rad/seg. (1.44 Hz)}$ que es aproximadamente la frecuencia natural calculada con la ecuación (2.8) a partir de los parámetros estructurales propuestos.

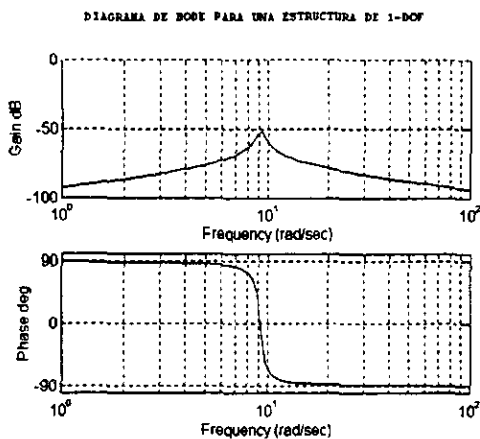
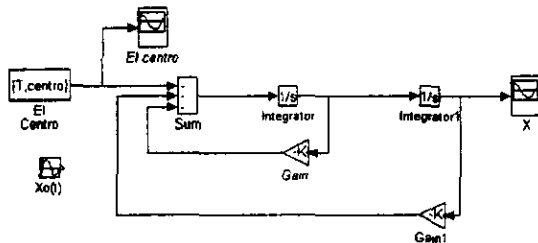


Fig. 2.3. Diagrama de Bode para una estructura de 1-DOF.

2.1.3. Comportamiento a excitaciones periódicas y sísmicas.

Es importante conocer el comportamiento de la estructura ante excitaciones periódicas y sísmicas, para así evaluar el rendimiento del algoritmo de control. La información que se puede obtener de este análisis, es principalmente el desplazamiento máximo al que está sometida la estructura.



MODELADO EN SIMULIK
Estructura de 1-DOF

Figura 2.4a. Esquema de bloques para simulación.

Debido a que una excitación sísmica está compuesta de diversas componentes de frecuencia, pero los edificios solo responden en un rango en particular, en este análisis excitamos el sistema con una señal periódica cuya frecuencia es $f = f_0 = 1.46$ Hz, que es la misma frecuencia natural calculada en la ecuación (2.8).

El diagrama de simulación está mostrado en la figura 2.4a. El siguiente resultado bajo una excitación $x_0(t) = \text{sen}(2\pi ft)$, obtenido para la estructura de 1-DOF se muestra en la figura 2.4b. La gráfica muestra el desplazamiento de la estructura, lo cual nos da una idea de la peor situación con respecto a la frecuencia de excitación.

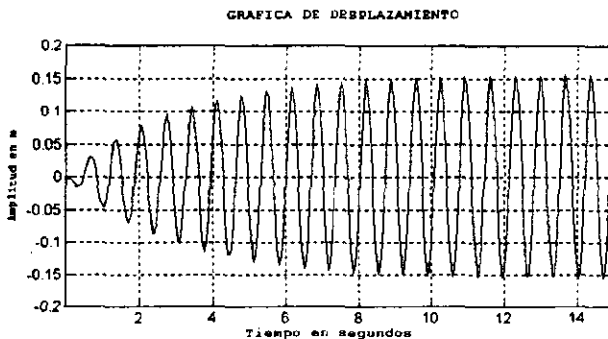


Fig. 2.4b. Desplazamiento de la estructura de 1-DOF bajo una señal senoidal.

Para el caso de una excitación sísmica utilizamos un registro de datos de un sismo real, perteneciente al sismo El centro de 1940, mostrado en la figura 2.5a. La intención de someter el modelo a dicha excitación, para tener una idea de los desplazamientos a los que es sometido el modelo, lo cual es un parámetro importante para verificar el rendimiento de

los algoritmos de control propuestos posteriormente. De la figura 2.5b podemos observar que la amplitud del desplazamiento máximo del piso No. 1 con masa m , es de alrededor de 3×10^{-2} m con respecto a la base.

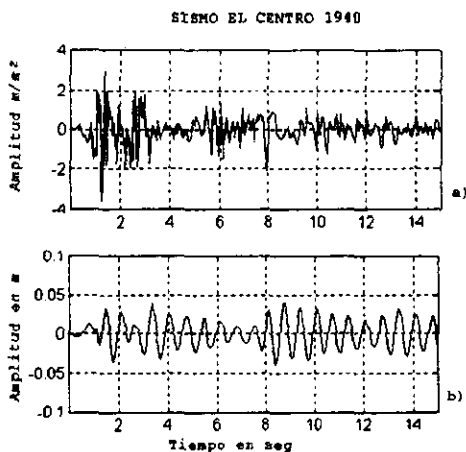


Figura 2.5. Desplazamiento ante una excitación real.

2.1.4 Estructuras de 2-DOF.

Considerando ahora una EIC de 2 grados de libertad como la mostrada en la figura 2.6, donde ahora al considerar el desplazamiento horizontal en la dirección x , tendremos dos coordenadas generalizadas, x_1 y x_2 , que corresponden a los desplazamientos del piso 1 y

2 respectivamente con respecto a la base. Usando la ecuación de Lagrange (2.1) se obtiene la ecuación diferencial.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_0 \quad (2.10)$$

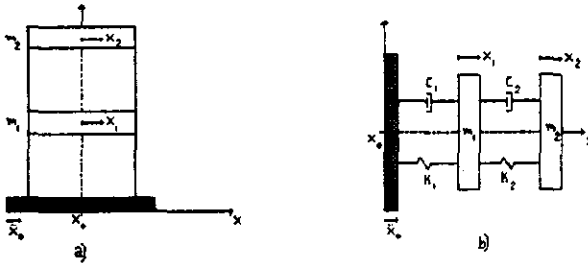


Figura 2.6. Modelo de parámetros concentrados 2-DOF.

La ecuación (2.10) describe el sistema con 2 grados de libertad, que se representa por medio de una ecuación de variables de estado de la forma (2.5):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{m_2 k_1 + m_1 k_2}{m_1 m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{m_2 c_1 + m_1 c_2}{m_1 m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_0(t) \quad (2.11)$$

2.1.5 Propiedades y características físicas del modelo.

Para la estructura de 2-DOF consideramos los siguientes parámetros listados en la tabla I.

Masa m_i (Kg)	Rigidez (N/m)	Amortiguación (N-s/m)
500	42480	344.4
500	42480	344.4

Tabla I
Parámetros de una EIC de 2 – grados de libertad¹

De igual forma que en el caso del sistema de 1-DOF, se verificó la controlabilidad del sistema, que en este caso cumple con la condición $\text{Rango}[B \ AB \dots \ A^{n-1}B] = n$, con $n = 4$, por lo tanto el par $[A,B]$ es controlable. Considerando los parámetros dados en la tabla I, se tiene que las frecuencias naturales del sistema son las que podemos obtener del análisis en la frecuencia de la estructura, figura 2.7.

¹ Datos usados en la simulación numérica en el reporte [1].

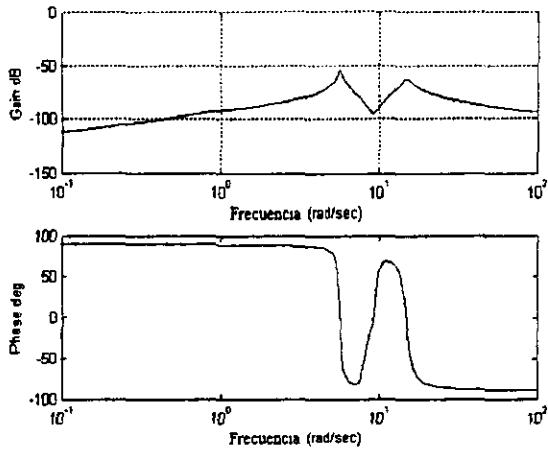


Figura 2.7. Diagrama de Bode para una estructura de 2-DOF.

Se puede observar que las frecuencias dominantes de la estructura se encuentran en $f_1 = 8.5$ rad/seg. (1.35 Hz) y $f_2 = 20$ rad/seg. (3.1 Hz), que están dentro del rango que una EIC puede asimilar.

2.1.6 Comportamiento a excitaciones periódicas y sísmicas.

En este análisis se excita el sistema con una señal periódica cuya frecuencia es de 1.46 Hz, que es la frecuencia natural teórica, antes ya calculada para este modelo. En la figura 2.8 podemos observar los resultados del análisis.

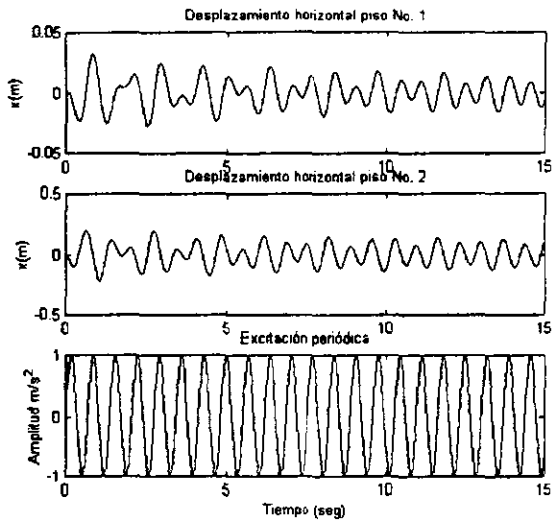


Figura 2.8. Desplazamiento de la estructura de 2-DOF bajo una señal periódica.

Para el caso de una señal real se utiliza al igual que en la sección anterior el registro de datos El Centro de 1940. Los resultados se presentan en la figura 2.9, estos incluyen los desplazamientos de ambos pisos.

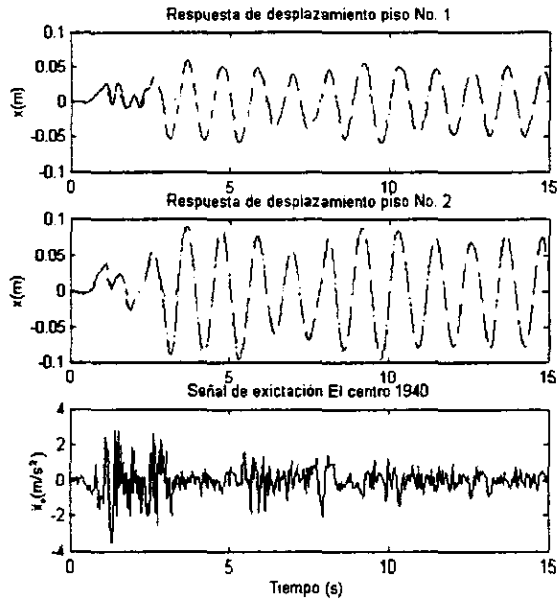


Figura 2.9. Desplazamiento bajo una excitación real.

CAPÍTULO III

CONTROL POR MASA ACTIVA.

3.0 INTRODUCCIÓN.

Ha habido un significativo progreso en el área de control estructural activo para la creación de una tecnología con el fin de mejorar la funcionalidad estructural y seguridad contra los peligros naturales tales como sismos de gran magnitud. A través de los años, muchos algoritmos de control y dispositivos han sido investigados, cada uno con sus propios méritos, dependiendo de su particular aplicación y efecto deseado. Claramente, es necesario realizar ciertas comparaciones para enfocarlas en esfuerzos futuros y con esto lograr cada vez algoritmos de control más eficientes y prácticos.

En este capítulo presentamos un problema de control estructural que puede ser usado para evaluar la relativa efectividad e implementabilidad de varios otros algoritmos de control estructural con el fin tener un punto de evaluación analítico para otros algoritmos de control. El sistema de masa activa ha sido usado en la modalidad de una sola masa activa, en edificios altos y torres para reducir vibraciones no deseadas. En este capítulo también se verá un concepto novedoso , usando *n-masas de amortiguación*. Este sistema no ha sido estudiado a fondo por lo que es un buen punto de partida para comparación con otros sistemas.

3.1 Descripción del sistema.

El sistema está basado en el principio de control activo que se caracteriza básicamente por la necesidad de una fuerza externa, proporcionada de acuerdo con cierta ley de control, llamada "*fuerza de control*". El principio activo es llevado a cabo por medio de un actuador, que mueve una "*masa de amortiguación*". De acuerdo a los propósitos de control, la masa será colocada en cada piso de la estructura. En este trabajo se considera un sistema que será llamado **dispositivo de masa activa**, que consiste en un actuador hidráulico con masas sujetas en los extremos del pistón. El peso total de cada masa activa es de alrededor del 10 % de la masa total de cada piso.

Una forma en que puede ser implementada la acción del controlador, es por medio de la retroalimentación del desplazamiento de la posición de la masa. La posición del actuador se obtiene por medio de un transformador diferencial lineal variable (LVDT). La fuerza de control será proporcionada al actuador en proporción del desplazamiento angular de cada piso de la estructura con respecto a la base de cada piso.

3.2 Objetivos de control LQR.

Como se mencionó anteriormente, el sistema consta de *n-masas de amortiguación* colocadas en cada piso. El objetivo es encontrar la ley de control en función de los desplazamientos angulares que sufre la estructura durante un sismo. Existen muchas formas de obtener la ley de control deseada para el sistema. En este trabajo se supone que

todos los estados son medibles, por lo que consideramos la ley de control de retroalimentación de estados como sigue:

$$u(t) = -Kx \quad (3.1)$$

donde la matriz K es constante llamada matriz de ganancia del controlador. En la expresión anterior podemos observar que la señal de control es proporcional al vector de estados del sistema.

3.3 Diseño del controlador LQR.

3.3.1 Modelo matemático de la estructura de 1 - DOF.

Con el objetivo de diseñar el controlador para dispositivos de masa activa, se desarrollará a continuación un modelo matemático, en el cual se toman las variables de estado el desplazamiento horizontal y ángulo de inclinación, como lo muestra la figura 3.1, así como sus respectivas derivadas con respecto al tiempo. Aunque podemos observar que la estructura puede tener varias columnas, consideramos un modelo de parámetros concentrados, con lo cual tenemos una sola columna con una rigidez rotacional dada. Las ecuaciones diferenciales son obtenidas a partir de la energía potencial y cinética, aplicando la ecuación de Lagrange.

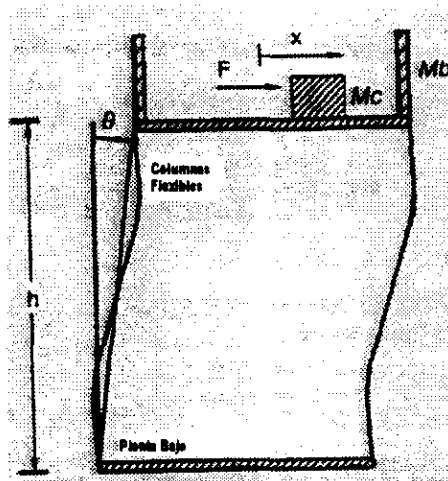


Figura 3.1. Modelo de parámetros concentrados 1-DOF.

Los elementos asociados al movimiento en el sistema, son la masa del primer piso y la masa de amortiguamiento, por lo que las ecuaciones de cinéticas son:

$$K_c = \frac{1}{2} M_c (h \cdot \theta + x)^2 \quad (3.2)$$

$$K_b = \frac{1}{2} M_b (h\theta)^2$$

donde

M_c total de masa de amortiguamiento

M_b total de la masa del primer piso.

x desplazamiento de la masa de amortiguamiento.

θ desplazamiento angular.

h altura de la estructura.

La energía potencial almacenada por la rigidez de la estructura está dada por:

$$P_{\text{potencial}} = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (3.3)$$

donde k es la rigidez rotacional de las estructuras. La ecuación de movimiento de la estructura está dada por las siguientes expresiones, aplicando (2.1) del capítulo anterior, con la energía cinética y energía potencial total:

$$K = \frac{1}{2} M_c (h\theta + x)^2 + \frac{1}{2} M_b (h\theta)^2 \quad (3.4)$$

$$U = \frac{1}{2} k \theta^2$$

Realizamos las derivadas correspondientes para obtener la siguiente representación de estado para el modelo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{hM_b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{h^2M_b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_c + M_b}{M_c M_b} \\ -\frac{1}{M_b h} \end{bmatrix} F \quad (3.5)$$

3.3.2 Modelado Matemático de una estructura de 2-DOF.

Nuevamente se modelará bajo los mismos principios que la estructura anterior. Con el fin de que al evaluar la respuesta de la estructura, ahora se modelará tomando dos grados de libertad. Esto es debido a que entre mas grados de libertad se analice, la respuesta del modelo se aproximará mas a la respuesta de una EIC real. En este caso se considera un modelo de parámetros concentrados como el que se muestra en la figura 3.2.

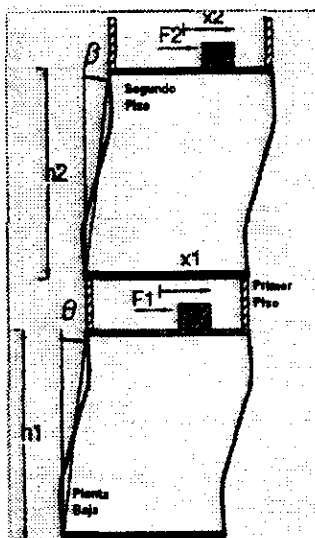


Figura 3.2. Modelo de parámetros concentrados 2-DOF.

El modelo puede ser considerado como el que se usa en grandes torres o edificios para reducir vibraciones no deseadas. Con el modelo obtenido además de analizar el algoritmo de control, podremos introducir un análisis del concepto de dos masas de amortiguamiento que se presenta a continuación.

El modelo matemático para el sistema se obtiene como sigue: las energías cinéticas están dadas por:

$$\begin{aligned}
 K_{c1} &= \frac{1}{2} M_{c1} (h_1 \cdot \theta + x)^2 \\
 K_{b1} &= \frac{1}{2} M_{b1} (h_1 \cdot \theta)^2 \\
 K_{c2} &= \frac{1}{2} M_{c2} (h_1 \cdot \theta + h_2 (\theta + \beta) + x_2)^2 \\
 K_{b2} &= \frac{1}{2} M_{b2} (h_1 \cdot \theta + h_2 (\theta + \beta))^2
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

y la energía potencial almacenada en el sistema está dada por:

$$\begin{aligned}
 P_{columna1} &= \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \\
 P_{columna2} &= \frac{1}{2} k_2 \beta^2
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Usando la ecuación (2.1) para formular las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema, obtenemos las siguientes matrices A y B para una representación de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\beta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{eq1} & 0 & m_{eq5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{eq2} & 0 & -m_{eq6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{eq3} & 0 & m_{eq7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{eq4} & 0 & m_{eq8} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \\ x_2 \\ \beta \\ x_1 \\ \theta \\ x_2 \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{eq9} & m_{eq13} \\ -m_{eq10} & -m_{eq14} \\ m_{eq11} & m_{eq15} \\ m_{eq12} & m_{eq16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix}
 \tag{3.8}$$

los parámetros m_{eqi} son constantes encontradas en el proceso de linealización del sistema, las cuales son demasiado extensas para describirlas totalmente aquí. Véase que se respeta la forma de la ecuación de estado representada por el conjunto de ecuaciones (2.1), del capítulo anterior.

3.3.3 Algoritmo de control basándose en un LQR

Es de interés la implementación de una ley de control lineal que cumpla con la forma antes descrita, para esto nos basaremos en técnicas de control óptimo. Consideremos el regulador *mínimo cuadrático* (LQR por sus siglas en Inglés), cuyo diseño se basa en la minimización del criterio de optimicidad en términos de la acción de control y los estados. Para esto se escogen las matrices de ponderación tal que minimizen el criterio. La ganancia del sistema se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati algebraica. La estabilidad del sistema en lazo cerrado está garantizada si la ecuación de estado es controlable y las matrices de ponderación cumplen cierta condición.

Las características del sistema nos proporciona una planta invariante en el tiempo, dado de la forma,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{como condición inicial } x(t_0) \quad (3.9)$$

donde las matrices A y B son constantes y cumplen con las propiedades de controlabilidad.

Consideremos el siguiente índice de optimización:

$$J = \int_0^{\infty} (u^T Ru + x^T Qx) dt \quad (3.10)$$

donde la matriz Q semipositiva definida y la matriz R positiva definida y $C^T C = Q$, con el par (A,C) observable. El problema de minimización se enfoca a la obtención de una señal de control óptimo que reduzca el índice de optimización J. La solución a este problema de regulador lineal se da resolviendo la siguiente ecuación Riccati diferencial,

$$-P = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q$$

con condiciones iniciales $P(T, T) = 0$. Si el horizonte de optimización $T \rightarrow \infty$ y $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T) = \bar{P}$, existe y es constante, entonces \bar{P} satisface la siguiente ecuación Riccati algebraica,

$$\bar{P}A + A^T \bar{P} - \bar{P}B R^{-1} B^T \bar{P} + Q = 0 \quad (3.11)$$

y $x^T(t) \bar{P} x(t)$ es el índice de optimización cuando el tiempo inicial es t y el estado inicial es $x(t)$. El control óptimo al tiempo t cuando el tiempo inicial es arbitrario está dado únicamente por la siguiente expresión,

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \bar{P} x(t) \quad (3.12)$$

3.3.4 Selección de las matrices Q y R

Las matrices Q y R , se deben seleccionar de acuerdo con ciertos criterios de ponderación, que muchas veces suelen ser un poco *a priori*, es decir, se pueden seleccionar por métodos de iteración que conduzcan a la mejor respuesta de salida del sistema. Además que deban cumplir con las condiciones de $C^T C = Q$ y que el par (A, C) sea observable. Las matrices de ponderación que se seleccionaron para el sistema de 1-DOF, son las siguientes,

$$Q = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .7 \end{bmatrix}$$

$$R = 2e - 8$$

Donde se observa que de $C^T C = Q$ resulta,

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{350} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

y el par (A,C) es observable. Una vez seleccionadas las matrices de ponderación, podemos resolver la ecuación (3.11), y de esa forma encontrar la matriz de ganancia,

$$K = R^{-1}B^T \bar{P} \quad (3.13)$$

la ecuación (3.13) puede ser resuelta en **MATLAB** ver. 4.0 edición para estudiantes, por medio de comando *lqr*, cuyo resultado es la siguiente matriz de ganancia,

$$K = 1e5[1.3229 \quad -0.1424 \quad 0.0324 \quad 0.0577]$$

la ley de control que se busca queda de la siguiente forma,

$$u(t) = -Kx(t)$$

sustituyendo en la ecuación de estado, nos queda una representación del sistema en lazo cerrado que incluye la matriz de ganancia K ,

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

en donde la matriz $A-BK$ es estable ya que todos los valores propios tienen parte real negativa dado que (A,B) es controlable y (A,C) es observable.

Para el caso de un sistema de 2-DOF podemos definir las matrices de ponderación Q y R , para el cálculo de la matriz K , para el regulador lineal, quedando de la siguiente forma,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3e-6 & 0 \\ 0 & 3e-6 \end{bmatrix}$$

Una vez más (A,C) es observable con $C^T C = Q$, así se obtiene la matriz K de igual forma que en el caso anterior, obteniendo la siguiente matriz de ganancias,

$$K = 1 \times 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0040 & 0.0092 & 0.0063 & 0.0028 & 0.0007 & 0.0075 & 0.0004 \\ 0.0005 & 0.7203 & -0.0040 & -1.3540 & 0.0065 & 0.0028 & -0.0033 & -0.0059 \end{bmatrix}$$

con lo cual encontramos la ley de control lineal buscada para el sistema.

3.3.5 Resultados de la simulación numérica.

Caso 1. Estructura de 1-DOF.

Un gran número de simulaciones fueron hechas con la ayuda de **MATLAB**, para demostrar la efectividad del algoritmo. Para poder realizar un análisis del algoritmo de

control que aplicamos en la estructura, se introduce una excitación sísmica real, esta excitación es un registro de un sismo llamado El centro 1940. Los resultados obtenidos en lazo cerrado se muestran en la figura 3.3, en la cual se le sobrepuso la respuesta al mismo sismo en lazo abierto.

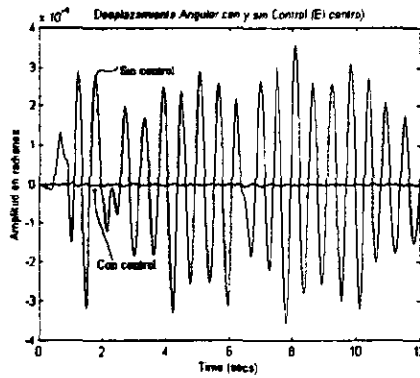


Fig. 3.3. Respuesta del desplazamiento angular bajo excitación real.

Los desplazamientos angulares a los que se somete a la estructura en un principio cuando no se tiene control sobre ella son del orden de 3×10^{-4} radianes, se puede observar que una vez aplicado el control en la estructura la respuesta se ve atenuada, la amplitud máxima del desplazamiento en este caso es de alrededor de 6×10^{-6} radianes. Con esto vemos que el algoritmo de control nos proporciona una reducción del 98 % de magnitud en vibración, ante una excitación sísmica. Si hacemos un análisis con *FFT* de los datos obtenidos de esta simulación podemos ver la disminución de la potencia de la señal alrededor de la frecuencia natural de la estructura. Los resultados teóricos para la frecuencia de natural de la estructura tenemos que es alrededor de 1.46 Hz, del análisis de los datos

como se puede ver en la figura los resultados proporcionan las siguientes frecuencias, 2.8 Hz y 3.5 Hz, como se muestra en la figura 3.4.

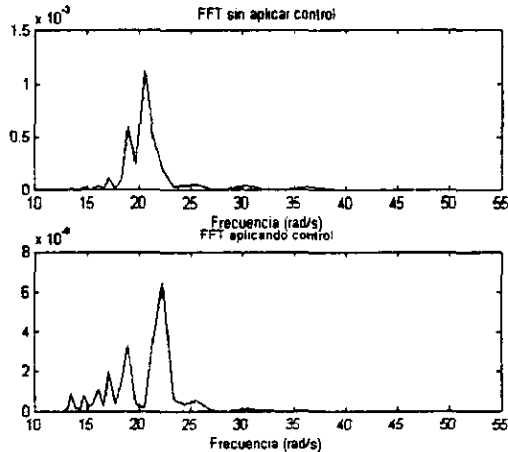


Fig. 3.4. Respuesta en la frecuencia de la estructura de 1-DOF.

Caso 2. Estructura de 2-DOF.

Consideremos ahora la estructura de 2-DOF. Para evaluar la respuesta del sistema se excitó con el registro sísmico de El centro1940, al igual que en la estructura anterior observamos su comportamiento con respecto a los desplazamientos relativos de cada piso como se muestra en la figura 3.5 y 3.6.

Como podemos observar la reducción de las vibraciones no deseadas cuando el control es implementado es significativo. El desplazamiento en el piso No. 1 cuando la estructura no es controlada es del orden de 1×10^{-2} radianes y para el piso No. 2 tenemos el

doble, en ambos casos podemos observar que la reducción es de alrededor de 20,000 veces menor, que es lo que estamos buscando para nuestra estructura.

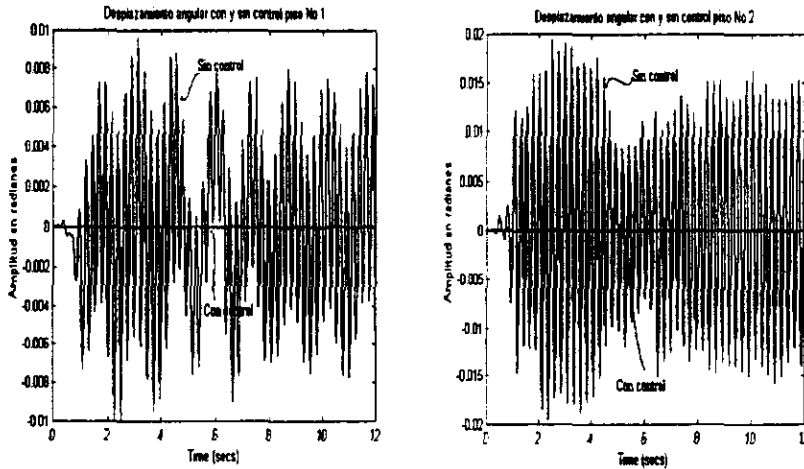


Figura 3.5 y 3.6 Desplazamiento angular bajo una excitación real (piso No. 1 y 2).

Será interesante analizar la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, por lo que aplicaremos FFT a los datos del sistema. La FFT para los dos conjuntos de datos del sistema (piso No. 1 y piso No. 2) se muestran en la figura 3.7 y 3.8. Si analizamos las frecuencias naturales de las estructuras teóricas son de alrededor de 1.5 Hz a 2.5 Hz. En las gráficas podemos observar que la frecuencia dominante es de alrededor de 2.2 Hz. Por otro lado el algoritmo en realidad reduce las vibraciones deseadas en la estructura como se observó en las gráficas de desplazamiento que se analizaron anteriormente. Es notable que el considerar más grados de libertad, y más aun el tener dos masas de amortiguamiento reducen en varios ordenes de magnitud la respuesta del sistema.

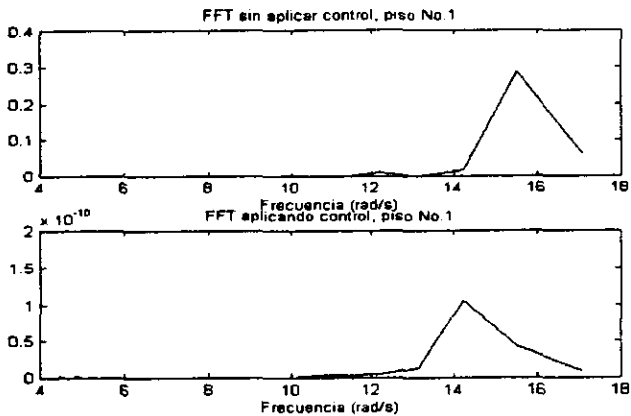


Fig. 3.7. Respuesta en la frecuencia de la estructura de 2-DOF (piso No. 1).

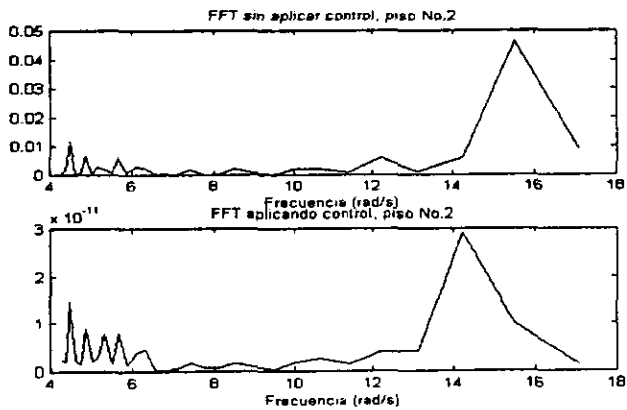


Fig. 3.8. Respuesta en la frecuencia de la estructura de 2-DOF (piso No. 2).

3.4 Objetivo del control MID.

Como en todo esquema de control para EIC's, el objetivo primordial es la reducción de vibraciones en la estructura causadas por estímulos externos. Para el algoritmo de control propuesto, el método es el establecer en base a las características dinámicas de la estructura en el dominio de la frecuencia, donde la ley de control que se requiere, puede ser obtenida a partir del polinomio de MID. La idea principal del uso de MID es que una señal compuesta de varios componentes frecuenciales, su MID es exactamente su mínimo común múltiplo de todos los polinomios MID de sus componentes individuales. Entonces equivalentemente el aplicar una carga o excitación $p(k)$, con $k\mu\theta$, a una EIC, que está compuesta de varias componentes sinusoidales, donde su polinomio MID es el mínimo común múltiplo de todos los polinomios MID $\Psi(z^{-1})$ de sus componentes, lo cual puede ser expresado como:

$$\Psi(z^{-1})p(k) \approx p_{\Psi}(k) \approx 0 \quad (3.13)$$

Esto lo podemos ver en forma esquemática por medio del siguiente diagrama a bloques para una estructura dinámica como la que se muestra en la figura 3.9. Se observa que la respuesta del sistema es aproximadamente cero (idealmente cae a cero), debido a la acción de control, que casi compensa la respuesta debida a la excitación.

En la obtención del polinomio MID se basa en encontrar la frecuencia natural del sistema, ya que los demás componentes de señal en la respuesta de la estructura no

contribuyen de manera significativa a que la estructura sufra daño, con lo cual nos enfocamos a las frecuencias que se encuentran cercanas a la frecuencia en la cual la estructura principalmente responde y las frecuencias adyacentes a esta.

3.5 Diseño del controlador MID.

3.5.1 Modelo Discreto.

Extendiendo el modelo dado en el capítulo 2. El movimiento que sufre una estructura controlada de n -DOF puede ser modelado mediante la siguiente ecuación:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t) + Gp(t) \quad (3.14)$$

donde M definida positiva, C y K son las matrices de $n \times n$ de masa, amortiguación y rigidez respectivamente, B de $n \times r$ matriz de posición de la fuerza de control ($r \leq n$), G de $n \times r$ matriz de posición de la fuerza de excitación, $x(t)$ de $n \times 1$ vector de la fuerza de control, entonces la ecuación (3.14) se representa en una ecuación e variable de estado de la siguiente forma:

$$\dot{z} = Az + Bu + Wx_0 \quad (3.15)$$

donde

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M^{-1} & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times r} \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0_{n \times r} \\ -M^{-1}G \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

discretizando la ecuación (3.15)

$$v(k) = \Phi v(kt) + \Gamma u(kt) + Fp(kt) \quad (3.17)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{At}, \\ \Gamma &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \cdot B, F \approx \int_0^t e^{At} d\tau \cdot W \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde la aproximación para la matriz F puede ser válida, si el periodo de muestreo t es mucho menor que el periodo de más alta frecuencia natural dominante de la estructura. Discretizamos el sistema para una estructura con los parámetros propuestos en el capítulo 2 en el modelado de una EIC para 1-DOF y un periodo de muestro de $t = 0.007 \text{ sec}$, con lo cual obtenemos el siguiente sistema:

$$v((k+1)t) = \begin{bmatrix} 0.9979 & 0.0070 \\ -0.5929 & 0.9931 \end{bmatrix} v(kt) + \begin{bmatrix} 0.0005e-4 \\ 0.1396e-4 \end{bmatrix} u(kt) \quad (3.19)$$

Nótese que la matriz de W no la discretizamos por razones que más adelante se explicarán y justificarán el hecho de que no se realice dicha operación en ella. Para una estructura de 2-DOF se discretiza de igual manera.

3.5.2 Control por Modo Interno Dominante (MID).

De acuerdo al polinomio característico de nuestro sistema para una EIC de n-DOF es:

$$\begin{aligned}\lambda(z) &= |zI_{2n} - \Phi| \\ &= \prod_{i=1}^n [z^2 - 2e^{-\delta_i \omega_i h} \cos(\omega_i h)z + e^{-2\delta_i \omega_i h}]\end{aligned}$$

donde δ_i , ω_i y $f_{di} = \sqrt{1 - \delta_i^2} \cdot f_i$ son respectivamente la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural y la frecuencia natural de amortiguada del i-ésimo grado de libertad. Con lo cual se obtiene la frecuencia natural de cada modo de vibración. Una EIC de n-DOF tiene n frecuencias naturales. Entonces una EIC responde principalmente a excitaciones con componentes adyacentes a las n frecuencias naturales. Dada una señal senoidal exponencialmente decayente

$$g(k) = A\alpha^{k-k_0} \sin(\omega k + \varphi) \quad (3.20)$$

donde $0 < \alpha < 1$ es la razón de decaimiento, $\omega = 2\pi f$ con f como la frecuencia de la señal senoidal, que satisface el modo interno, es decir:

$$\Psi(z^{-1})g(k) = 0 \quad (3.21)$$

donde:

$$\Psi(z^{-1}) = 1 - \zeta\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}; \quad \text{con} \quad \zeta = 2\cos(\omega h) \quad (3.22)$$

es el polinomio de MID. Basado en lo anterior, la idea básica del método MID, es considerar que las cargas o excitaciones son señales compuestas de n componentes senoidales, entonces su polinomio MID de esas n componentes está dado por,

$$\Psi(z^{-1})p(kt) = p_{\Psi} \approx 0 \quad (3.23)$$

donde si consideramos que sólo tenemos excitaciones aleatorias w , es decir, la parte de señal determinística no existente y $n > 0$

$$\Psi(z^{-1}) = \prod_{i=1}^n (1 + \Psi_{1i}z^{-1} + \Psi_{2i}z^{-2}) \quad (3.24)$$

En caso de que el rango $(B) = \leq n$, (ver Apéndice B.) la fuerza de control $u(kt)$ debe satisfacer el mismo modo interno de la excitación, entonces,

$$\Psi(z^{-1})u(kt) = u_{\Psi}(kt) \approx 0 \quad (3.25)$$

3.5.3 Desarrollo del controlador.

Sea la siguiente expresión donde multiplicamos la ecuación (3.17) por el polinomio MID de la ecuación (3.24) tenemos

$$v(k+1) = -\sum_{i=1}^{2n} \psi_i v(k-i) + \Phi \sum_{i=0}^{2n} \psi_i v(k-1-i) + \Gamma \Psi(z^{-1})u(kt) + F \Psi(z^{-1})p(kt) \quad (3.26)$$

Donde

$$\Psi(z^{-1})u(kT) = u_{\psi}(kT)$$

$$\Psi(z^{-1})p(kT) \approx 0$$

Por lo tanto tenemos

$$v'([k+1]T) = -\sum_{i=1}^{2\eta} \psi_i v'([k-1-i]T) + \Phi \sum_{i=0}^{2\eta} \psi_i v'([k-1-i]T) + \Gamma u_{\psi}(kT) \quad (3.26)$$

de aquí se justifica el hecho de porque antes no discretizamos la matriz w para obtener F_1 ya que la excitación o carga al ser aplicada por el polinomio MID, es aproximadamente cero.

Por último note que la ecuación (3.26) no contiene más término de la excitación externa $p(kT)$, y expresando en forma matricial, tenemos la siguiente expresión:

$$v'([k+1]T) = \Phi' v(kT) + \Gamma' u_{\psi}(kT) \quad (3.27)$$

Aplicando el siguiente índice de rendimiento.

$$J = \frac{1}{2} [v^T(kT) Q' v(kT) + u_{\psi}^T(kT) R u_{\psi}(kT)] \quad (3.28)$$

donde

$$Q' = \bar{C}^T \bar{C} = \text{diag}[Q, 0, 0, \dots, 0]$$

con Q semipositiva definida y R positiva definida, y donde los elementos en la diagonal principal de Q se dividen en dos partes: la ponderación de los desplazamientos estructurales y las velocidades respectivamente, y R la matriz de ponderación para el vector de la fuerza de control. Q es usada para reducir los desplazamientos horizontales relativos, y para reducir las velocidades de vibración, mientras que R es usada para reducir la fuerza de

control, por razones de energía. Ahora minimizando con respecto $u_\psi(kT)$ obtenemos entonces la siguiente expresión:

$$u_\psi(kT) = -[[\Gamma^T Q \Gamma + R]^{-1} \cdot \Gamma^T Q' \Phi']v(kT) \tag{3.29}$$

y de la ecuación (3.25) finalmente obtenemos la ley de control de l sistema:

$$u(kT) = \frac{u_\psi(kT)}{\Psi(z^{-1})} \tag{3.30}$$

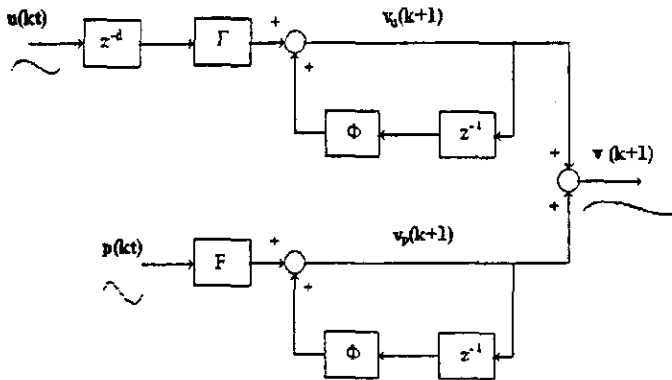


Figura 3.9. Diagrama a bloques de una estructura dinámica controlada.

3.6 Resultados de la simulación.

Con el fin de comprobar la efectividad del esquema de control propuesto, se realizaron simulaciones numéricas, las cuales fueron implementadas en MATLAB, y así

mostrar el comportamiento de un estructura por medio del MID. A continuación se presentan los resultados principales.

3.6.1 Estructura del 1-DOF.

Considere una estructura 1-DOF como la que se modeló en la sección 3.5. El periodo de muestreo seleccionado fue de $t = 0.007$ sec. (que es mucho menor que el periodo de la frecuencia natural de la estructura). Y con la siguientes matrices Q y R,

$$Q = \text{diag}[1, 250], R = 4 \times 10^{-6}$$

Caso 1. Respuesta a excitación periódica.

Para la realización de la simulación de una excitación periódica se usa una frecuencia $f = 1.46$ Hz que es la misma frecuencia natural de la estructura, y que sería la excitación más severa para la estructura. De acuerdo con la ecuación (3.24), el polinomio MID debe ser:

$$\Psi(z^{-1}) = 1 + \psi_{11}z^{-1} + \psi_{21}z^{-2}, \quad \psi_{11} = -2\alpha \cos(2\pi fh), \quad \psi_{21} = \alpha^2, \quad \alpha = 0.9 \quad (3.31)$$

Los resultados obtenidos con los parámetros anteriores se muestran en la figura 3.10. Las líneas punteadas muestran el desplazamiento de la estructura cuando ésta no está siendo controlada por otro lado, la línea sólida muestra el desplazamiento cuando la señal de control es aplicada. Como se muestra la respuesta del sistema ante una excitación senoidal se reduce en buena proporción a partir del segundo periodo, la máxima amplitud

de la respuesta es de $0.05m$, comparados con la amplitud de la respuesta sin control que es de $0.24 m$. Esto es aproximadamente una reducción de 5 veces.

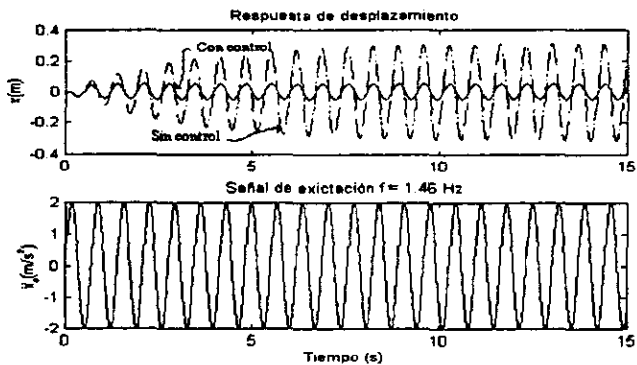


Figura 3.10. Resultados bajo una excitación senoidal, para una estructura de 1-DOF.

· Caso 2. Respuesta a una excitación sísmica.

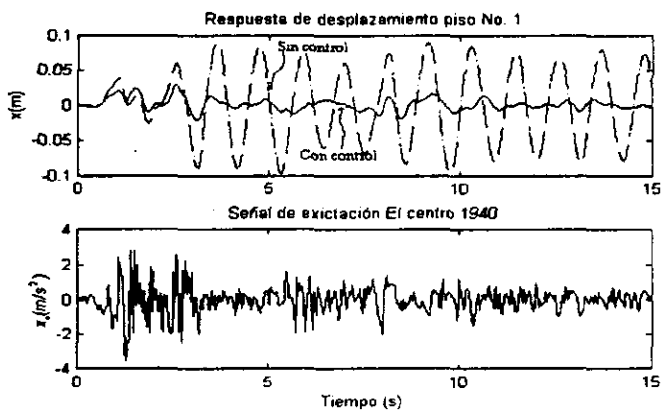


Figura 3.11. Resultados de simulación bajo una excitación sísmica (El Centro 1940)

Para el caso de una excitación real, en la cual se supone que está compuesta de señales senoidales de distinta amplitud y frecuencia, se espera que el control reduzca principalmente la respuesta del desplazamiento de la estructura, en las frecuencias cercanas a la frecuencia natural del sistema. La excitación usada para esta simulación es el registro del mismo El Centro de 1940. Los resultados obtenidos mostrados en la figura 3.11, muestran un significativo reducción de aproximadamente de un 33% con respecto a su máximas amplitudes.

3.6.2. Estructura de 2-DOF.

Consideremos el modelo de una estructura de 2-DOF analizando anteriormente, con los parámetros físicos ya usados, para el modelado del sistema. El periodo de muestreo es mismo que el usado en las simulaciones previas, en este caso se usará $n = 2$, lo cual corresponde a dos frecuencias naturales de la estructura, pero como frecuencia dominante $f = 1.46$, las matrices Q y R seleccionadas en este caso son las siguientes:

$$Q = \text{diag}[1,1,1,250], \quad R = \text{diag}[4 \times 10^{-6}, 4 \times 10^{-6}]$$

Caso 1. Respuesta a una excitación periódica.

La excitación para el sistema consiste de una señal senoidal de amplitud 2 de frecuencia $f = 1.46$ Hz que es la frecuencia que la estructura más asimila.

$$X_0(t) = 2 \text{sen}(2\pi ft)$$

De acuerdo con la ecuación (3.24), obtenemos el polinomio MID, donde los valores $\alpha_1 = \alpha_2 = .951$. Los resultados de la simulación numérica son los que se muestran en la figura 3.12. En los cuales no se nota una reducción significativa como en la sección anterior.

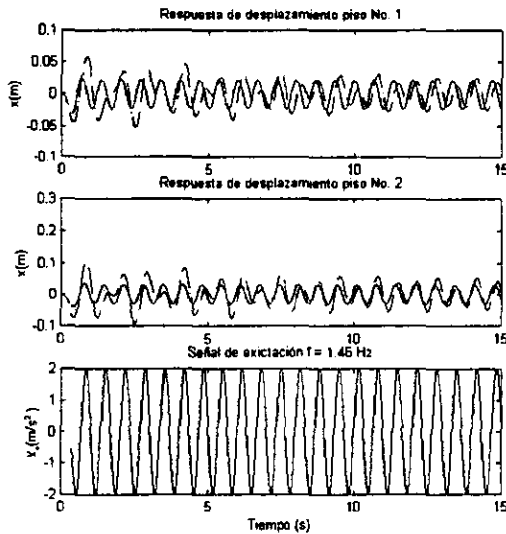


Figura 3.12. Resultados de la simulación bajo una excitación senoidal.

Caso 2. Respuesta a una excitación sísmica.

El registro de El Centro fue tomado como en el caso anterior para ser usado como excitación para el sistema, empleando el mismo polinomio usado en el análisis anterior, en el cual obtenemos una respuesta satisfactoria, lo cual implica una notable reducción del desplazamiento horizontal de la estructura, así obtenido un 33% de reducción con respecto las máximas amplitudes. Los resultados se muestran en la figura 3.13.

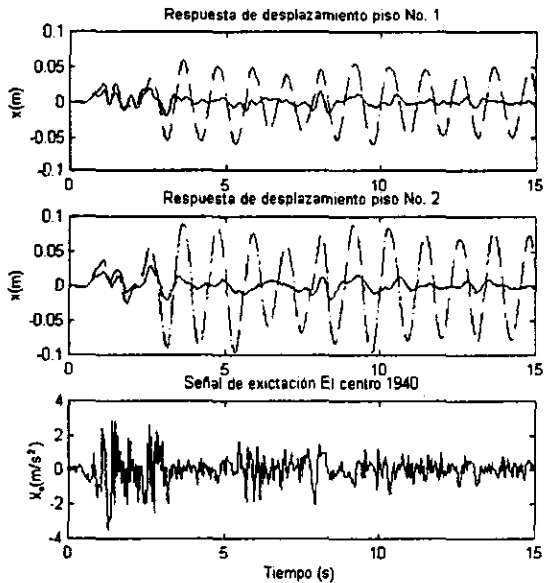


Figura 3.13. Resultados de la simulación bajo una excitación real (El Centro 1940).

3.6.3 Consideraciones prácticas.

1.- Obtención de la frecuencia natural de un EIC.

En el diseño del control basado en modo interno es necesario obtener la frecuencia natural de la estructura. Dicha frecuencia puede ser obtenida a partir de la experiencia, así como, de las características estándar de la estructura. Pero a lo largo de la vida útil de la estructura, su frecuencia puede variar. Esto es debido a las variaciones de carga, soportadas en los distintos pisos de la estructura.

Este inconveniente ocasiona que la frecuencia para la cual fue diseñado el controlador se encuentre desplazada con respecto a la frecuencia inicial. Una solución práctica a este problema, es que el sistema sea capaz de adaptarse a las variaciones de su frecuencia natural.

Un edificio responde a excitaciones sísmicas de baja magnitud sin sufrir daños a su estructura. Esto puede ser empleado para adquirir un registro de la vibración y con él obtener los datos de la frecuencia natural a la cual respondió el edificio. Este dato obtenido es el que va a actualizar el controlador basado en MID. En sucesivas ocasiones en las cuales el edificio sea sometido a excitaciones se tomará el registro y se promediará la frecuencia natural actual con los datos anteriores. Siendo este método uno de los más sencillos. Esto es por que no hay que esperar a que suceda un movimiento sísmico. El hecho de que existan fuentes de excitaciones tales como máquinas rotatorias o el paso de camiones grandes etc. Son excitaciones externas suficientes para que la estructura responda sin sufrir daños.

2.- Rapidez de la respuesta.

Cuando se habla de rapidez de respuesta, se espera que el control responda lo antes posible a cualquier tipo de disturbio, ya que si el control es lento no tendría caso que la reducción que este prevea sea significativa, en cuanto a la reducción es obvio que es el parámetro más importante de un controlador de este tipo. Entre estos dos parámetros se obtiene una forma sencilla de medir el rendimiento del controlador son de interés, ya que nos dicen que tan factible es la construcción de un esquema u otro, puesto que puede que uno tenga un rendimiento muy superior al otro, pero su costo es alto y no sea demasiado factible su construcción, lo cual haría tomar una decisión por el otro esquema de control.

CAPÍTULO IV

CONTROL HÍBRIDO

4.0 INTRODUCCIÓN.

Como se ha mencionado anteriormente, el uso de control activo ha tenido un considerable progreso, pero en la actualidad el control híbrido ha recibido mucha atención para el control de grandes estructuras. Como se sabe durante la construcción de una EIC, el control de estas se puede complicar, una estrategia que puede ser usada para estos casos, es la modificación de parámetros físicos de la estructura en tiempo real, con el fin de cambiar la respuesta del sistema durante una excitación

Esto se puede lograr mediante el uso de un sistema de control inteligente, el cual se basa en una Estructura Inteligente (EI), la cual emula los mecanismos para mantener el equilibrio en el cuerpo humano, ante estímulos externos. Es decir, de acuerdo con los estímulos externos, la respuesta de una estructura inteligente podrá modificar los parámetros físicos, tales como rigidez, coeficiente de amortiguación y distribución de

masas, etc., en tiempo real para suprimir las vibraciones. A esta tecnología de control híbrido se conoce como Tecnología de Modificación de Parámetros en Tiempo Real (RSPM)¹. Para tener el control de una (E.I) es necesario encontrar un algoritmo de control eficiente del cual obtengamos una reducción significativa de las vibraciones de la estructura en tiempo real.

4.1 Descripción del Sistema.

Una estructura inteligente (E.I) está compuesta de las siguientes partes:

- ◆ Celdas sensores;
- ◆ Unidad de decisión inteligente;
- ◆ Actuadores;

Un ejemplo de cómo es una estructura inteligente se muestra en el modelo de la figura 4.1. Un brazo controlable es instalado en cada piso. El mecanismo de control se muestra en la figura 4.2, este es una válvula de alta velocidad (HSV), cuando está cerrada, el brazo se encuentra bajo tensión lo cual provoca un incremento en la rigidez estructural de cada piso; por otro lado, cuando la válvula esta abierta la rigidez decrece a su valor nominal. Con este sistema se logra uno de los propósitos del esquema de control, que es la modificación en tiempo real de los parámetros físicos de la estructura.

¹ Real - Time Structure Parameter Modification.

Para realizar un control efectivo, un sistema distribuido de cómputo es instalado en la estructura, como unidades de cómputo en modo esclavo, se usa un microprocesador que es instalado en cada piso de la estructura, con el fin de realizar la adquisición de datos, y entonces enviar los datos al host para su procesamiento. Usando la tecnología RSPM basada en MID, la computadora determinará si los brazos de cada piso deberán ser puestos en condición rígida o no. El microprocesador entonces cambiará el *status* de los HSV's de acuerdo con las ordenes de la computadora principal.

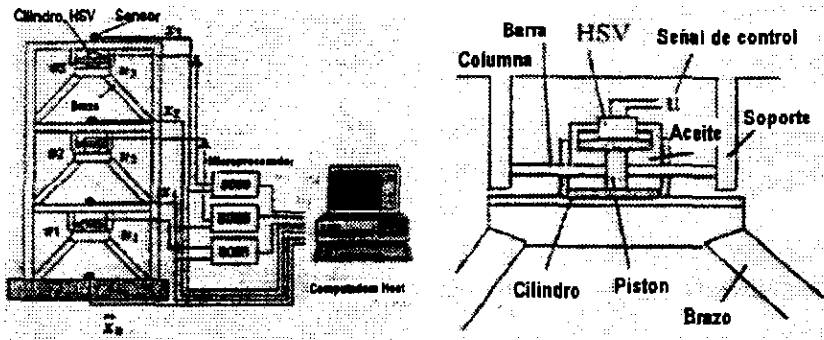


Figura 4.1 y 4.2. Esquema de control EI y válvula HSV.

4.2 Esquema de control.

La vibración de una estructura de n-DOF controlada puede ser descrita por la siguiente ecuación de parámetros distribuidos:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0 u(t - \tau) + Gx_0(t) \quad (4.1)$$

donde M, C y K , son matrices de $n \times n$ de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, B_0 de $n \times r$ matriz de posición de la fuerza de control, G de $n \times 1$ matriz de posición de la fuerza de excitación, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$ de $n \times 1$ son los vectores de desplazamiento relativo, velocidad y aceleración respectivamente, $u(t)$ de $r \times 1$ vector de control cuyas componentes son todas las fuerzas aplicadas a la estructura, τ retardo de la fuerza de control.

Cuando se hace un esquema como el mencionado anteriormente (ISS), la fuerza no es proporcionada directamente y entonces $u(t) = 0$, y como las matrices M , C y K son modificados en tiempo real. Entosnes es razonable considerar que la ecuación 4.1 es una ecuación variante en el tiempo, esto se expresa como sigue:

$$M(t)x(t) + C(t)\dot{x}(t) + K(t)x(t) = Gx_0(t) \quad (4.2)$$

Como fue resaltado anteriormente, los parámetros de rigidez y amortiguamiento de cada piso pueden ser cambiados de acuerdo al estado correspondiente de la HSV. Sean k_j y c_j la rigidez y el amortiguamiento del j -ésimo piso respectivamente, $u_j = 1$ y $u_j = 0$ indican el estado de abierto o cerrado de la j - ésima válvula HSV. Lo anterior puede expresarse con las siguientes ecuaciones:

$$k_j(t) = \begin{cases} k_{j0} + \Delta k_j & u_j = 0 \\ k_{j0} & u_j = 1 \end{cases}, \quad c_j(t) = \begin{cases} c_{j0} & u_j = 0 \\ c_{j0} + \Delta c_j & u_j = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

donde k_{j0} y c_{j0} son los parametros originales de rigidez y amortiguamiento del i -ésimo piso respectivamente. Para un edificio controlado, sólo tres modos de control son empleados

como se muestra en la figura 4.3 de acuerdo con la función de cada brazo de control. En otras palabras, como sólo dos estados son posibles para cada piso, tenemos un total de ocho modos. De ellos, sólo tres pueden tener una frecuencia natural totalmente diferente.

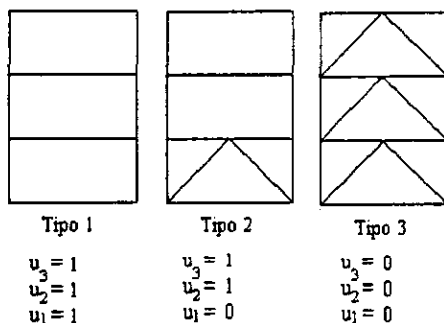


Figura 4.3. Señales de control y estados del brazo controlable.

CAPÍTULO V

COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL.

Se han mencionado que el objetivo principal de los esquemas de controles es el de atenuar las vibraciones no deseadas de una EIC debidas a excitaciones externas (sismos, vientos, olas, etc.) Aunque los dos esquemas antes analizados cumplen con el objetivo ya mencionado, es necesario evaluar otros parámetros de rendimiento. Estos parámetros pueden ser rapidez de respuesta ante las excitaciones, razón reducción del desplazamiento de la estructura, facilidad de implementación y costo.

Enfoquémonos a comparar ambos esquemas aquí expuestos. Como se mostró anteriormente el control activo se caracteriza principalmente por el uso de una fuerza externa, la cual es propiciada de acuerdo a la Ley de control usada. En los casos estudiados se puede notar que para una estructura modelada como de 1-DOF, se tiene una sola fuerza de control y una masa de amortiguación con sus respectivos actuadores, lo que en su momento fue llamado **dispositivo de masa activa**. En esta configuración se observa que la respuesta es 50 veces menor cuando se aplica el control, realizando la comparación con

respecto al control híbrido, respuesta es el orden 3 veces, es obvio que el control de masa activa tiene una mejor propuesta en el control activo es inmediata y para el control híbrido las reducciones comienzan a ser significativas a partir de los 2.5 seg. de ocurrida la excitación, (ver figura 3.3 y 4.5), pero comparemos entonces su implementabilidad de cada esquema, para el control activo se requiere un sistema dispositivo de masa activa, que ya se mencionó de lo que consta, para el control híbrido se tiene que por cada piso se requiere de celdas sensoras, una válvula HSV, una estructura de brazos y sistema computacional para el control híbrido, entonces por este concepto se puede inclinar hacia este esquema Esto es porque para el control activo es necesario construir un sistema de deslizamiento para la masa de amortiguación y un sistema de actuadores capaz de mover dicha masa que es de alrededor de 10% de la masa total del piso. Esto requiere una mayor energía, la que es muchas veces mayor que la requerida para una válvula HSV.

Para una estructura de 2-DOF el control híbrido nos proporciona un 33 % de reducción aproximadamente para los 2 pisos, es decir, aproximadamente 3 veces menor es la respuesta con respecto al desplazamiento sin control y al igual pasará el caso de 1-DOF su respuesta comienza a ser más significativa una vez transcurrida 2 a 3 seg. De comenzada la excitación. Por otro lado el control activo nos muestra una respuesta excelente la reducción es del orden 20×10^3 veces lo que es una clara tendencia a cero desplazamiento angular, lo cual nos plantea la interrogante, ¿En puede mejorar la respuesta el uso de dos masas activas en vez de una sola masa activa?. Entonces, ¿el uso de múltiples masas activas dará mejores beneficios?.

Claro que los resultados nos hacen pensar que así es, pero aunque se obtengan algunos beneficios, ya no serían significativos, por lo tanto el costo de dicha obra, se elevaría enormemente, por lo cuál dichos beneficios no justificarían el gran costo. Lo anterior es causa suficiente para inclinarse hacia el control híbrido que sólo aumenta el número de actuadores y celdas sensoras, como se puede observar es económica esta opción, por otro lado, si se piensa que el control de masa activa aplica la fuerza de control directamente a la estructura, es posible que una situación en la que la introducción de dicha acción de control puede causar vibraciones mayores a esta. En el control híbrido la energía necesaria para realizar la acción de control no es muy grande y no es aplicada directamente a la estructura la cual es una situación de acción errónea de control simplemente se puede relajar todas las HSV para dejar la estructura con sus parámetros originales. Por otro lado el cambio también es un ahorro en la energía necesaria para la operación de este tipo de control. Para el control híbrido basado en el modo interno dominante realizado para estabilizar un sistema de lazo cerrado, se obtiene de él una buena respuesta pero la frecuencia a las cuales diseña y como se vio en el capítulo IV puede obtenerse un buen rendimiento para distintos tipos de excitaciones, este tipo de algoritmo es relativamente simple de ser usado no sólo en un sistema como el que aquí se expone (ISS), si no, en otro tipo de sistemas de control en línea y que es práctica para estructuras de $m - \text{DOF}$.

Por otro lado el retraso de tiempo de la acción de control podría provocar inestabilidad en el control o el incremento en la fuerza de control. En el caso de algoritmo de control para el esquema de masa activa se implementa un regulador LQR el cuál como se observa en la respuesta del sistema, este algoritmo provee un buen rendimiento, es decir,

se aproxima bastante al valor de cero en el desplazamiento angular y buena rapidez en la acción de control.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES.

En este trabajo, se han estudiado 3 métodos de control para reducir las vibraciones de una EIC: el control activo LQR y MID y el control híbrido. Los resultados numéricos muestran que un regulador LQR, para un esquema de control activo, usando un Sistema de Masas Activas tiene las siguientes características sobresalientes:

- 1) El uso del algoritmo LQR proporciona una respuesta sin la necesidad de predecir la respuesta de la estructura, con lo que es posible implementar en él, como una segunda etapa un sistema adaptativo que mejoren el rendimiento.
- 2) También se obtiene una considerable reducción en la respuesta por medio de este algoritmo, con lo cual se cumple el objetivo del control estructural satisfactoriamente.

Con los resultados numéricos obtenidos por el método MID se muestran las siguientes características sobresalientes del método:

- 1) El método puede ser aplicado para cualquier tipo de disturbio y seguir conservando su buen rendimiento.
- 2) Con éste método es muy factible el diseño posterior de algoritmos que incluyan la predicción de la respuesta estructural. Además de diseñar sistemas de control adaptativos que mejoren el rendimiento.
- 3) El diseño puede ser hecho tan solo conociendo los rangos de los parámetros estructurales, y por medio de un sistema adaptativo ser corregidos los parámetros de la planta y así corregir la frecuencia de operación del controlador y aproximarla a la frecuencia natural dominante de la estructura.
- 4) El algoritmo es fácilmente transportable a cualquier aplicación de control en línea.

En el caso del control híbrido que se analizó anteriormente podemos destacar las siguientes características de este esquema:

- 1) Requiere de una menor energía externa para la acción de control.
- 2) El sistema de control permite la modificación de la fuerza de control en tiempo real.
- 3) Este esquema es apto para el uso de un sistema de control distribuido, lo cual proporciona seguridad, ya que cada piso tiene su sistema de adquisición de datos y cómputo propio, para realizar las acciones de control. Lo cual se evita que todas las tareas recaigan sobre una computadora central.

- 4) Cabe mencionar que mencionar, la idea planteada aquí para el esquema de control híbrido, tiene la desventaja en que no existe un algoritmo de control que efectivo para la atenuación de vibraciones. Esto es, por que hasta ahora no es posible atenuar las vibraciones debidas a excitaciones externas, solo se ha logrado acotar la respuesta de la estructura ante estas. El problema radica en encontrar un criterio para la selección de la combinación de estados posibles que producen un cambio en los parámetros estructurales. En el capítulo IV solo se ejemplifica una estructura de tres pisos, y en la cual solo se seleccionan tres combinaciones de las ocho posibles, lo que repercute en limitar la respuesta a solo tres condiciones.

Por último, el uso de uno o de otro algoritmo siempre será un compromiso entre funcionalidad y costo. Los algoritmos y esquemas estudiados brevemente en este documento no pretenden ser una solución para la construcción de una EIC segura, sino una herramienta que mejore el buen diseño, que una EIC debe tener desde su conceptualización en etapas tempranas de su diseño, lo cual redundará en una estructura funcional, segura y a un costo bajo.

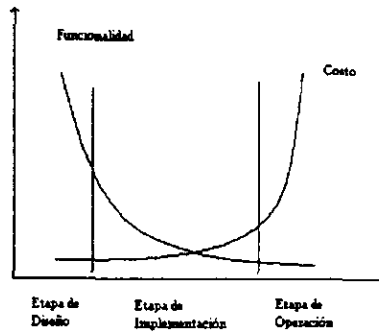


Figura 5.1. Curvas de Funcionalidad vs. Costo

En la figura 5.1 se puede observar que un buen diseño en las etapas tempranas nos proporciona costo bajo y alta funcionalidad, por el contrario si el diseño se intenta mejorar en etapas posteriores, es decir, si se hacen correcciones en la etapa de construcción o implementación, lo cual nos llevará a un costo mayor y muy posiblemente con una pobre funcionalidad.

Apéndice A

Control Óptimo

Cuadrático.

El diseño de sistemas de control estable basado en los índices de desempeño cuadrático se define mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{A-1}$$

En donde x = vector de estado (vector de dimensión n)

u = vector de control (vector de dimensión r)

A = matriz de coeficientes constantes $n \times n$

B = matriz de coeficientes constantes $n \times r$

Al diseñar sistemas de control, con frecuencia, nos interesa seleccionar el vector de control $u(t)$ tal que un índice de desempeño determinado se minimice. Se puede demostrar

que un índice de desempeño cuadrático, en el que los límites de integración son 0 e ∞ , de modo que

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt$$

en donde $L(x, u)$ es una función cuadrática o hermitiana de x y u , producirá las leyes de control lineal; es decir,

$$u(t) = -Kx(t)$$

en donde K es una matriz de $r \times n$, o

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Por tanto, el diseño de los sistemas de control óptimo y los sistemas reguladores óptimos basados en tales índices de desempeño cuadráticos reducen a la determinación de los elementos de la matriz K .

Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será estable, excepto en el caso en el que el sistema no es controlable. Al diseñar sistemas de control con base en la minimización de los índices de desempeño cuadráticos, necesitamos resolver las ecuaciones de Riccati. MATLAB tiene un comando `lqr` que

proporciona la solución a la ecuación de Riccati en tiempo continuo y determinar la matriz de ganancias de realimentación óptima.

A continuación, consideraremos el problema de determinar e vector de control $u(t)$ óptimo para el sistema descrito mediante la ecuación (A-1) y el índice de desempeño obtenido mediante

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad A-2$$

En donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva(o semidefinida positiva), R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva y u no está restringida. El sistema de control óptimo se basa en minimizar el índice de desempeño.

Problemas de control óptimo cuadrático.

Ahora consideraremos el problema de control óptimo que, dadas las condiciones del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A-3$$

Determina la matriz K del vector de control óptimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad A-4$$

A fin de minimizar el índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad A-5$$

En donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva) y R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Observe que el segundo término del segundo miembro de la ecuación (A-5) considera el gasto de energía de las señales de control. Las matrices Q y R determinan la importancia relativa del error y del gasto de este sistema. En este problema, suponemos que el vector de control $u(t)$ no está restringido. Como se verá después, la ley de control lineal obtenida mediante la ecuación (A-4) es la ley de control óptimo. Por tanto, si se determinan los elementos desconocidos de la matriz K para minimizar el índice de desempeño, entonces $u(t) = -Kx(t)$ es óptima para cualquier estado inicial $x(0)$. El diagrama de bloques que muestra la configuración óptima aparece en la figura A-1.

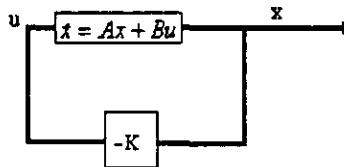


Figura A-1.- Sistema de control óptimo.

Ahora resolveremos el problema de estabilización. Sustituyendo la ecuación (A-4) dentro de la ecuación (A-3), obtenemos

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

En las deducciones siguientes, suponemos que la matriz $A - BK$ es estable, o que los valores característicos de $A - BK$ tienen partes reales negativas. Sustituir la ecuación (A-4) dentro de la ecuación (A-5) produce

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \end{aligned}$$

Siguiendo el análisis obtenido al resolver el problema de optimización de parámetros, establecemos

$$x^T (Q + K^T R K) x = - \frac{d}{dt} (x^T P x)$$

En donde P es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Así, obtenemos

$$x^T (Q + K^T R K) x = -x^T P x - x^T P x = -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x$$

Comparando ambos miembros de esta última ecuación y considerando que la misma debe ser válida para cualquier x , requerimos que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad \text{A-6}$$

Mediante el segundo método de Liapunov, si $A - BK$ es una matriz estable, existe una matriz P definida positiva que satisface la ecuación (A-6).

Por lo tanto, nuestro procedimiento se basa en determinar los elementos de P a partir de esta ecuación y ver si es definida positiva. (Obsérvese que más de una matriz P puede satisfacer esta condición. Si el sistema es estable, siempre existe una matriz P definida positiva que satisface esta ecuación. Esto significa que, si despejamos la ecuación y encontramos una matriz P definida positiva, el sistema es estable. Otras matrices P que satisfacen esta ecuación no son definidas positivas y deben descartarse.)

El índice de desempeño J se calcula como:

$$\int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt = -x^T P x \Big|_0^{\infty} = x^T (\infty) P x (\infty) + x^T (0) P x (0)$$

Dado que se supone que todos los valores característicos de $A - BK$ tiene partes reales negativas, tenemos que $x(\infty) = 0$. Por lo tanto obtenemos

$$J = x^T (0) P x (0) \tag{A-7}$$

Así, el índice de desempeño J se obtiene en términos de la condición inicial $x(0)$ y P . Para obtener la solución al problema de control óptimo cuadrático, se prosigue de modo siguiente: dado que sea supuesto que R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva, escribimos

$$R = T^T T$$

en donde T es una matriz no singular. Así la ecuación (A-6) se escribe como

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0$$

que puede reescribirse como

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

La minimización de J con respecto a K requiere de la minimización de,

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x$$

con respecto a K . Dado que esta última expresión es no negativa, el mínimo ocurre cuando es cero o cuando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P$$

por tanto,

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad \text{A-8}$$

La ecuación (A-8) produce la matriz óptima K . Así, la ley de control óptimo para el problema del control óptimo cuadrático es lineal cuando el índice de desempeño se obtiene mediante la ecuación (A-5) y se llega a ella mediante

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t)$$

La matriz P de la ecuación (A-8) debe satisfacer la ecuación (A-6) o la ecuación reducida siguiente

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

A-9

La ecuación (A-9) se denomina ecuación de Riccati. Los pasos del diseño se plantean del modo siguiente:

1. Resolver la ecuación (A-9) para la matriz **P**. (Si existe una matriz **P** definida positiva el sistema es estable o la matriz **A - BK** es estable).
2. Sustituir la matriz **P** dentro de la ecuación (A-8). La matriz **K** resultante es la matriz óptima.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Apéndice B

Demostración.

Lograr un estado ideal de respuesta cero de la estructura ($x = 0$, $\dot{x} = 0$ y $\ddot{x} = 0$).

De la ecuación (3.14) tenemos que,

$$Bu(t) + Gp(t) = 0 \quad \text{B-1}$$

La expresión correspondiente en tiempo discreto es

$$Bu(kt) + Gp(kt) = 0 \quad \text{B-2}$$

multiplicando (B-2) por el polinomio MID $\Psi(z^{-1})$ y usando la ecuación (3.23) y (3.24) tenemos,

$$Bu_{\Psi}(kt) + Gp_{\Psi}(kt) = Bu_{\Psi}(kt) = 0 \quad \text{B-3}$$

premultiplicando por la transpuesta de la matriz B

$$B^T Bu_{\Psi}(kt) = 0$$

Entonces cuando $B^T B$ es no singular, o el rango de B, $r \leq n$, por lo tanto $u_{\Psi}(kt) = 0$,

lo cual demuestra la condición $\text{rango}(B) \leq n$.

Apéndice C

Scripts en MATLAB

El siguiente listado es un script en MATLAB ver4, para la simulación del sistema controlado por medio del control MID. Principalmente este script obtiene la matriz de ganancia K_d para la ley de control lineal propuesta.

```
clc  
clear
```

```
load a:centro.mat  
load a:T.mat
```

```
% Parámetros físicos del sistema.
```

```
m=500;  
c=344.4;  
k=42480;  
h=.007;
```

```
% Cálculo de la matriz de ganancia  $K_d$ .
```

```
wd=sqrt(k/m);  
d1=c/(2*sqrt(k*m));  
a1=.85;
```

```
A=[ 0 1;  
-k/m -c/m];
```

```
B=[ 0;  
1/m];
```

```
C=[ 1 0];
```

```
D=0;
```

```
W=[ 0;
    -1];
```

```
ident=eye(length(A),length(A));
```

```
ceros=zeros(length(A),length(A));
```

```
cero=zeros(length(A),1);
```

```
psi1=-2*a1*cos(wd*h);
```

```
psi2=a1*a1;
```

```
[phi,gamma]=c2d(A,B,h);
```

```
phi1=[ phi-psi1*ident psi1*phi-psi2*ident psi2*phi;
```

```
       ident      ceros      ceros;
```

```
       ceros      ident      ceros];
```

```
gamma1=[gamma;
```

```
        cero;
```

```
        cero];
```

```
Q=[ 1 0;
```

```
    0 250];
```

```
R=4e-6;
```

```
Cpsi=[-psi2 -psi1];
```

```
C1=[ident ceros ceros];
```

```
Q1=C1**Q*C1;
```

```
Kd=(inv(gamma'*Q*gamma +R))*gamma1'*Q1*phi1;
```

Script para el cálculo de la matriz de ganancia K_d para un EIC de 2 - DOF.

```
cic
clear
```

```
load C:\MATLAB5-2\usuario\centro.mat
load C:\MATLAB5-2\usuario\T.mat
```

```
% Parámetros físicos para un sistema de 2 - DOF.
```

```
m1=500;
m2=500;
c1=344.4;
c2=344.4;
k1=42480;
k2=42480;
h=.007;
```

```
% Cálculo de la matriz de ganancia  $K_d$ .
```

```
wd1=sqrt(k1/m1);
wd2=.5*sqrt(k2/m2);
a1=.951;
a2=.951;
a=.9;
```

```
A=[ 0 0 1 0;
    0 0 0 1;
    -(k1+k2)/m1 k2/m2 -(c1+c2)/m1 c2/m2;
    k2/m2 -k2/m2 c2/m2 -c2/m2];
```

```
B=[ 0 0;
    0 0;
    1/m1 0;
    0 1/m2];
```

```
W=[ 0;
    0;
    -1;
    -1];
```

```
C=[ 0 0 1 0];
```

```
D=[ 0 0];
```

```
ident = eye(length(A),length(A));
ceros=zeros(length(A),length(A));
cero=zeros(length(A),2);
```

```
psi11=-2*a1*cos(wd1*h);
psi12=-2*a2*cos(wd2*h);
psi21=a^2;
psi22=a^2;
```

```
c1=psi11+psi12;
c2=psi22+psi12+psi21;
c3=psi11*psi22 + psi21*psi12;
c4=psi21*psi22;
```

```
[phi,gamma]=c2d(A,B,h);
```

```
phi1=[ phi-c1*ident    c1*phi-c2*ident    c2*phi-c3*ident    c3*phi-c4*ident
      c4*phi;
      ident    ceros    ceros    ceros    ceros;
      ceros    ident    ceros    ceros    ceros;
      ceros    ceros    ident    ceros    ceros;
      ceros    ceros    ceros    ident    ceros];
```

```
gamma1=[gamma;
        cero;
        cero;
        cero;
        cero];
```

```
Apsi=[ 0  1  0  0;
       0  0  1  0;
       0  0  0  1;
       -c4 -c3 -c2 -c1];
```

```
Bpsi=[0;0;0;1];
```

```
Cpsi=[-c4 -c3 -c2 -c1];
```

```
Dpsi=[1 1];
```

```
Q=[ 1  0  0  0;
    0  1  0  0;
    0  0  1  0;
    0  0  0  250];
```


$$R = \begin{bmatrix} 4e-6 & 0 \\ 0 & 4e-6 \end{bmatrix};$$

$$C1 = [\text{ident ceros ceros ceros ceros}];$$

$$Q1 = C1 * Q * C1;$$

$$Kd = (\text{inv}(\text{gamma}' * Q * \text{gamma} + R)) * \text{gamma}' * Q1 * \text{phi};$$

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Ning – Shou Xu, Dong – Shan Hao, Zhi – Hong, Yun – Dong Li, Ya – Ting Zhang, Hong – Ying Dong, Hong Zhang. "An Innervated Structure System Scheme Using Associative Memory Approach."
- [2] Ning – Shou Xu, Zhi – Hong Yang. "A Novel Predictive Structural Control Based on Dominant Internal Mode Approach.", San Francisco, California, USA, June 30, 1996.
- [3] Tadanobu Sato, Kenzo Toki. "Active Control of Seismic Response of Structures .", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 1 – October 1990.
- [4] Linear Motion Experiments, "3.9 y 3.10 Active Mass Damper One and Two Floors.", <http://www.quanser.com>.
- [5] B.F. Spencer Jr. "Active Mass Driver System.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, September 1996.
- [6] Ogata, Katsuhico, "Ingeniería de Control Moderna.", Ed. Prentice Hall, 3ª edición. México 1998.
- [7] Moore, John B., "Optimal Control Linear Quadratic Methods.", Ed. Prentice Hall, New Jersey 1990.