20789

2

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "CAMPUS ACATLÁN"

CONCEPTUALIZACIONES DE LOS PROFESORES ACERCA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRIA EUCLIDIANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A

MARIO ARMANDO GIORDANO MORENO

ASESORA DE TESIS:

M. EN E.M. ASELA CARLÓN MONROY

ACATLÁN, EDO. DE MÉXICO MARZO 2000

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

275145

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Cecilia y a Sofía

En tanto los teoremas matemáticos se refieren a la realidad, no son ciertos y en tanto son ciertos, no se refieren a la realidad [. .] El progreso vinculado al método axiomático consiste en una separación clara entre la forma lógica y los contenidos reales e intuitivos [...] Los *axiomas son creaciones voluntarias de la mente* [. .] A esta interpretación de la geometría le confiero gran importancia porque de no haber estado familiarizado con ella, nunca hubiera desarrollado la teoría de la relatividad

A Einstein, en su ponencia "Geometrie und Erfhrung"
(citado en Berlanga, et al, 1999, p 52)

<u>ÍNDICE</u> **Página:**

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de tesis se ubica en el campo de la Educación Matemática, particularmente dentro de una línea de investigación que tiene por objeto describir o modelar los comportamientos, las formas de entendimiento y las creencias, que desarrollan alumnos y maestros como consecuencia de sus experiencias en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Los constantes cambios e innovaciones que vivimos, obligan a reflexionar acerca del papel de la formación matemática de las generaciones actuales y futuras; las siguientes citas textuales pueden dar idea del perfil que esta formación podría requerir.

Rico y Sierra, (en Díaz G., 1991, p 19), al analizar las nuevas necesidades y demandas en el sistema educativo español ante el desafío de la integración europea, señalan que "... la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas profundizan y desarrollan su dimensión educativa, planteándose nuevas metas y prioridades que desbordan el papel clásico atribuido a esta disciplina, y por esto toma cada vez mayor fuerza una nueva visión de las matemáticas en el sistema escolar que denominamos Educación Matemática Esta transformación se explica por el hecho de que las Matemáticas están comenzando a ser uno de los elementos esenciales de la cultura de nuestra época en nuestro país. Esto ocurre porque se da prioridad a la consideración de que se trata de <u>una de las formas básicas de expresión mediante la que dotamos de significado y organizamos nuestro mundo, que permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar</u>. Las Matemáticas no sólo son una disciplina formal que se construye lejos de nosotros y de nuestros intereses, antes bien aparecen en todas las formas de expresión humana." (el subrayado no aparece en el original).

Por otra parte, al hacer notar el papel que va tomando la matematización en campos que tradicionalmente se habían considerado difíciles de cuantificar, Berlanga, Bosch y Rivaud (1999, p 47-48), plantean lo siguiente· "Las matemáticas se emplean cada vez más en distintas áreas, lo que las hace sin lugar a dudas cada vez más importantes y atractivas. También en estas nuevas áreas se ha guardado el mismo esquema en el que, para estar seguro de que todo funciona bien, es necesario tener pruebas que a veces son pruebas técnicas y conforme se desarrollan estas nuevas áreas serán cada vez más inevitables. Sin embargo tales aplicaciones abren un nuevo camino y ofrecen un gran panorama para todas las carreras relacionadas con las matemáticas e incluso las que todavía no se "matematizan". <u>En general se requiere una preparación distinta de la tradicional</u> [...] En conclusión se abre un gran porvenir para los jóvenes que quieren estudiar algo relacionado con las matemáticas." (el subrayado no aparece en el original).

Estas reflexiones ponen de manifiesto la necesidad urgente de transformar y probablemente diversificar la formación matemática en todos los niveles Esto implica, necesariamente, entre otras cuestiones, atender la formación y actualización de los docentes de matemáticas, y uno de los aspectos a considerar radica en el conocimiento de sus concepciones, creencias y comportamientos acerca de las Matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, conocimiento que ayudaría no sólo a quienes inciden en los programas de formación y actualización, también los propios maestros se podría beneficiar al reflexionar, reconocer y asumir conscientemente sus posiciones en relación a esto. Como lo señaló Alba G. Thompson (1992, p. 137): "Es razonable asumir que el grado en el que la concepción de enseñanza de un maestro constituye un sistema coherente e integrado depende del nivel al cual el maestro ha reflexionado sobre esto y ha hecho explícito para sí mismo las creencias y valores que sostiene así como las proposiciones y principios que ha abstraído de su experiencia."

En este contexto, el papel de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, podría contribuir a una mejor formación tanto de alumnos como de maestros en el sentido de:

- Comprender y asumir que la validez de las afirmaciones matemáticas dependen del rigor de los argumentos lógicos con el que se deducen.
- Reconocer que los fundamentos de una teoría matemática no son verdades universales, sin embargo, en algunos casos, permiten interpretar y predecir fenómenos de diversa índole.
- Tomar conciencia de que el aprendizaje matemático requiere procesos de pensamiento que se hacen más complejos en cuanto a la necesidad de relacionar ideas, conceptos, procedimientos y representaciones.
- Reconocer que pensar, conjeturar y discutir, constituyen actividades que son partes del proceso en el que se trata de avanzar en la resolución de un problema o en una demostración.

CAPITULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes del Problema de Investigación.

A principios de los 70 se produce un cambio en la investigación en la enseñanza, desde un modelo de Proceso-Producto, en el que el objeto de estudio era la conducta de los maestros, a un enfoque sobre el pensamiento de los maestros y la toma de decisiones Este enfoque cognitivo generó, a su vez, el interés por identificar y entender la composición y estructura de "los sistemas de creencias y concepciones", "estructuras mentales de acción" (Slavelson, 1988; citado en Thompson, 1992), y "teorías implícitas" (Clark, 1988; citado en Thompson, 1992) subyacentes en los pensamientos y decisiones de los profesores

A partir de 1980, muchos estudios en Educación Matemática se han enfocado sobre las creencias de los maestros acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje La perspectiva común ha sido la de que "para entender la enseñanza desde la perspectiva de los maestros tenemos que entender las creencias con las que ellos definen su trabajo " (Nespor, 1987, citado en Thompson, 1992). Además, estos estudios indican que "las creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza juegan un papel significativo para delinear los patrones característicos de los maestros en relación a su comportamiento instruccional." (Thompson, 1992)

En las investigaciones educativas se reconoce actualmente que la manera en que los maestros interpretan e implementan los curricula está influenciada significativamente por sus *conocimientos y creencias.* (Clark y Peterson, 1986; Romberg y Carpenter, 1986, citado en Thompson, 1992) Ejemplos de estas consideraciones son·

- Mc Galliard (1983), observando la práctica instruccional en el estudio de la geometría, encuentra que maestros con concepciones dualísticas de las matemáticas, "... actúan en formas "autoritarias" en relación a los contenidos de las lecciones... generando en los estudiantes la creencia de que la autoridad externa es la fuente de la justificación *matemática", (citado en Thompson, 1992); y él mismo reporta* que, contradictoriamente, los maestros consideran que las matemáticas, particularmente la geometría, ayudan a promover los procesos de pensamiento lógico de los estudiantes

- "La investigación sobre el pensamiento de los maestros ha documentado el hecho de que ellos desarrollan y sostienen teorías implícitas acerca de sus estudiantes .. acerca de la materia que ellos enseñan... y acerca de sus roles y responsabilidades y como deben actuar... *Estas teorías no son nítidas, ni reproducen fielmente alguna teoría* de la *psicología* educativa; estas teorías implícitas en los maestros tienden a ser agregados eclécticos de proposiciones de causa-efecto surgidas desde diversas fuentes, reglas empíricas, generalizaciones desde la propia experiencia, creencias, valores, desviaciones y prejuicios." (Clark, 1988; citado en Thompson, 1992, p. 135)

Desde una perspectiva epistemológica, Brousseau señala entre los roles del maestro uno que consiste en asumir una epistemología. "En efecto; al mismo tiempo que enseña un saber, el docente sugiere como utilizarlo Manifiesta así una posición epistemológica, que el alumno adopta mucho más rápidamente porque el mensaje permanece implícito o aún inconsciente. Por desgracia, esa posición epistemológica es difícil de identificar, asumir y controlar, y, por otro lado, parece desempeñar un papel importante en la calidad de los conocimientos adquiridos." Brousseau también señala que: " ..el conflicto teoría/práctica nunca se ha visto más exacerbado. Se ha profundizado el abismo entre los docentes y el saber Muchos maestros de enseñanza primaria están convencidos de que la teoría , el "saber oficial", es un discurso, una convención, de una eficacia relativa o dudosa a la cual podemos aportar todos los acondicionamientos personales o sustituir por otros saberes "paralelos".(Broussseau, G. sin fecha de edición)

Martin y Harel (1989), investigando la visión que los maestros tienen acerca del papel de los argumentos inductivos y los argumentos deductivos en la demostración matemática, señalan que " ..el entendimiento que el profesor tenga de lo que constituye la demostración matemática es importante, aún cuando ellos no enseñen directamente este aspecto. Si los maestros guían a los estudiantes a la creencia de que unos cuantos ejemplos bien seleccionados constituye una demostración, es natural esperar que la idea de la demostración en la geometría de la escuela secundaria y en otros cursos sea difícil para los estudiantes "

Lo anterior permite considerar que las creencias de los maestros con respecto a las matemáticas y sus procesos de enseñanza y de aprendizaje, constituyen factores determinantes en los resultados obtenidos en estos procesos De esta manera la línea de investigación en Educación Matemática que ha tomado como objeto de estudio las creencias y las concepciones de los maestros (y de los alumnos) acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, se ha desarrollado principalmente en los siguientes campos:

- a) Las creencias de los maestros (y de los alumnos) acerca de las matemáticas.
- b) Las creencias de los maestros (y de los alumnos) acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas .
- c) Ambos aspectos, (a y b).
- d) La relación entre las creencias y la práctica docente.
- e) Los anteriores aspectos en relación a los diferentes niveles escolares
- f) Los anteriores aspectos en relación a los maestros en formación y a los maestros en servicio. (Thompson, 1992)

Por otro lado, también se reconoce la dificultad inherente a la enseñanza de la demostración matemática, particularmente la demostración deductiva en geometría euclidiana.

Luis Radford (1994), señala el hecho de la dificultad que implica este aprendizaje dada la "forma compleja y estructurada de la demostración deductiva". Aún cuando la demostración y la conceptualización de matemáticas son dos cosas íntimamente ligadas,

" la práctica escolar no toma en cuenta el cambio de conceptualización que se requiere para que el estudiante se implique en un proceso de aprendizaje de la demostración deductiva " Se presupone que el tiempo dará al estudiante la maduración matemática necesaria para transitar desde una conceptualización fenomenológica (delimitada por el aspecto figurativo), útil para el cálculo de áreas, perímetros, etc., a una conceptualización axiomática de tipo euclidiano

Juan Estrada (1991), considera que la enseñanza de la demostración en geometría tiende a presentar el proceso de la demostración como un conocimiento acabado y carente de justificación para los estudiantes. "...el proceso demostrativo de un hecho matemático involucra elementos de carácter intuitivo, análisis, síntesis, construcción geométrica, reformulaciones del problema, conjeturas e introducción de nuevas premisas; sin embargo en la enseñanza todos estos elementos ya no aparecen, han sido borrados, lo único que aparece es el resultado del proceso, a saber, el "formato" de la demostración· afirmación - razón; y esto es lo que se "enseña" a los alumnos ..." (Estrada, 1993)

Sharon Senk (1985), señala el bajo porcentaje de alumnos que habiendo cursado la asignatura de geometría, con la demostración como aspecto central, llegan a lograr tan solo un nivel medio en cuanto a su dominio.

Jesús Salinas (1991), señala que los estudiantes, aún cuando han concluido el ciclo escolar del bachillerato, se encuentran prácticamente ajenos al método de la matemática, y esto se refleja en la falta de sentido que ellos manifiestan ante la necesidad de demostrar una proposición, situación que influye en los propios maestros para preguntarse: ¿Para qué las demostraciones?.

Marylin Suydam (1985), al investigar acerca de la forma en que los maestros comunican las ideas geométricas a sus estudiantes, encuentra, entro varios aspectos, que los maestros hacen pocas preguntas que requieren un nivel más alto de pensamiento que el de memorización, y que hacen pocas preguntas acerca de la naturaleza de una demostración, (Friedman, 1976, citado en Suydam, 1985), también encuentra que los maestros comunican *un contenido cuya estructura es más sofisticada que la mostrada en los textos* (Cavanaugh, 1978, citado en Suydam, 1985)

1.2 Importancia del Problema de Investigación

Alba Thompson (1992, pp. 130-131), ha señalado que los estudios de las creencias de los maestros acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje juegan un papel significativo para definir los patrones característicos de su comportamiento instruccional. Entre estos estudios se encuentra el de Ernest (1988, citado en Thompson, 1992), quien ha determinado tres elementos fundamentales que influyen en la práctica del docente en matemáticas.

1) Los contenidos o esquemas mentales de los maestros, particularmente los sistemas de creencias relativos a las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje
2) El contexto social de la situación de enseñanza, particularmente las limitaciones y oportunidades que proporciona.
3) El nivel de los procesos de pensamiento y reflexión de los maestros

El mismo Ernest considera que el conocimiento matemático por sí solo, no es suficiente para explicar las diferencias en la práctica docente de los maestros, sus aproximaciones a la enseñanza de las matemáticas dependen fundamentalmente de sus sistemas de creencias, en particular de sus concepciones de la naturaleza y el significado de las matemáticas y de sus modelos mentales de la enseñanza y el aprendizaje de ellas

Schoenfeld (1983, citado en Thompson, 1992), por otra parte, ha analizado el papel que juegan las concepciones de los estudiantes acerca de las matemáticas y la interpretación que son capaces de lograr en tareas de resolución de problemas, es decir, también las creencias de los estudiantes representan un factor importante en el aprendizaje matemático y constituyen motivo de investigación. Esto ilustra de alguna manera el hecho de que el estudio de las creencias, tanto de los maestros como de los estudiantes, se ha convertido, en la presente década, en una línea de investigación legítima e importante dentro de la Educación Matemática

La importancia que el sistema de creencias, acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, representa desde un enfoque epistemológico con implicaciones didácticas, queda explicado a partir de las reflexiones de Bernardo Gómez (en Díaz G., 1991, pp 55-67), en cuanto al significado que tienen las matemáticas escolares:

1) En un sentido las matemáticas son como una herramienta, algo para manejar y aplicar, esto surge de la creencia de que las matemáticas escolares deben enfocarse a las necesidades matemáticas de la mayoría de los estudiantes, cuyos requerimientos se limitan a aquellos identificables en la vida diaria; esto genera modelos de aprendizaje orientados a la memorización y manejo adecuado de símbolos, fórmulas y técnicas, hechos básicos y algoritmos, lo que limita el aprendizaje de los estudiantes al desarrollo de conductas estereotipadas, como dar la respuesta estipulada, por el procedimiento estipulado y en un tiempo razonable. De esta manera los estudiantes aprenden a rechazar muchas respuestas pertinentes sin poder desarrollar la capacidad de valorar la razonabilidad de las mismas y los motivos que las generan

2) En otro sentido, el valor del aprendizaje matemático radica en su potencial para desarrollar capacidades personales y habilidades de índole general en los estudiantes, útiles para comprender la realidad en la que se encuentran inmersos; aquí se privilegia el entendimiento de conceptos y significados de los procesos matemáticos, de forma que el estudiante sea capaz de saber dónde son aplicables y bajo qué condiciones. Esta posición ha sido en parte influenciada por la irrupción de la tecnología en la enseñanza que plantea la posibilidad de cambiar el centro de atención del aprendizaje procedural (al demandar del estudiante menor esfuerzo para la memorización y el dominio de los algoritmos), al

aprendizaje conceptual, esta visión genera propuestas orientadas a la construcción de los objetos matemáticos en la mente de los estudiantes como consecuencia de la actividad matemática. Es importante añadir que "... la actividad matemática no se limita a puros actos formales en el vacío, sino que como toda actividad intelectual es una actividad humana en un contexto cultural que se ve afectada por la interacción con otras personas, por la propia historia individual, por el hecho de producirse en un organismo vivo y que depende de gran variedad de variables afectivas, lingüísticas y ambientales." (p. 67).

3) Un tercer enfoque surge de considerar las matemáticas a partir de su estructura lógica y axiomática "Las ideas matemáticas vienen de las definiciones y axiomas y la tarea del estudiante consiste en habituarse a ellas y en saber manipularlas de acuerdo con las reglas del juego." (p 65), lo importante es el dominio del lenguaje formal, la coherencia sintáctica y la estructura lógica. Aquí, como en el primer enfoque, las capacidades creativas y la elaboración de conjeturas o de hipótesis por parte de los estudiantes, reciben poca atención, las respuestas informales no tienen valor frente a la respuesta formal y rígida

Propuestas modernas consideran la formalización matemática como la meta última del aprendizaje matemático

Otros autores también han caracterizado las concepciones de los maestros acerca de las matemáticas y su aprendizaje y enseñanza, pero este aspecto será tratado en la parte correspondiente al marco metodológico considerado para la investigación objeto de esta tesis.

Tomando una perspectiva fundamentalmente psicológica en su enfoque sobre el pensamiento pedagógico del profesor, Shavelson y Stern (1981), hacen una revisión de la línea de investigación surgida en la década de 1970 sobre la toma de decisiones humana, sus juicios, decisiones y conducta, en ella distinguen dos presupuestos básicos que sustenta esta línea de investigación:

1) "... los profesores son profesionales racionales que.. realizan juicios y llevan a cabo decisiones en un entorno complejo e incierto.. Este presupuesto de racionalidad se refiere en realidad a las intenciones de los profesores respecto a sus juicios y decisiones, más que a su conducta, y ello por dos tipos de razones... La primera es que algunas situaciones de la enseñanza reclaman respuestas inmediatas en lugar de respuestas reflexivas. Lo que probablemente excluye el proceso racional de hacer un juicio o tomar una decisión con un proceso previo de información La segunda razón es que la capacidad de la mente humana para formular y resolver problemas complejos, como los que se presentan en la enseñanza, es muy pequeña, comparada con la complejidad de algún modelo <<ideal>> de racionalidad Con el fin de abarcar esta complejidad, la persona construye un modelo simplificado de la situación real. Entonces el profesor se comporta racionalmente respecto del modelo simplificado de la realidad que se ha construido." (p. 373)

2) "El segundo supuesto es que el comportamiento de un profesor se guía por sus pensamientos juicios y decisiones." (p. 374)

Señalan también que los métodos de investigación usados para estudiar los procesos cognoscitivos y el comportamiento de los profesores "... intentan recoger datos sobre los procesos mentales y de este modo utilizar pruebas más o menos directas de los pensamientos de los profesores y sus juicios. Incluyen el <<descubrir la estrategia>>, el modelo de lente, rastreo de procesos, estimulación del recuerdo, estudio de casos y etnografía..." (p. 374).

Dentro del modelo de investigación de los juicios, decisiones y conductas del profesor que Shavelson y Stern proponen, las creencias, junto con la concepción de la materia y la complejidad cognitiva, constituyen las características del profesor Este modelo ". . pretende mostrar que estas investigaciones se centran sobre como los profesores integran la *información que tienen* sobre los estudiantes, el tema y el entorno de la clase y la escuela, con el fin de alcanzar un juicio y decisión sobre la que se basará su comportamiento... Las personas establecen juicios, toman decisiones y las llevan a cabo sobre la base de su modelo psicológico de la realidad . Para comprender la conducta de los profesores es esencial conocer a) sus fines; b) la naturaleza del entorno de la tarea que afronta; c) sus capacidades de procesar información, y d) la relación entre todos estos elementos " (p. 378)

Por otra parte, González (1993, p.19), al plantear la necesidad de modificar los programas de formación de maestros de matemáticas, señala, citando a Furió y Gil, que: "*Resulta imprescindible superar la espontánea* imagen de la enseñanza según la cual ésta implica un proceso esencialmente simple para cuya ejecución basta con un buen conocimiento de la materia a enseñar, algo de práctica y, a lo sumo, algunos complementos psicopedagógicos. Y entre los compromisos que los profesores de matemáticas han de establecer para ejercer su función docente propuestos por Gil y Pessoa y citados también por González, está: "... conocer y cuestionar el pensamiento docente espontáneo, (pre-concepciones o ideas erróneas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática)".

Otras implicaciones del sistema de creencias de los profesores en su práctica docente *se reflejan en los intentos de renovación curricular Los logros o los alcances* que una propuesta curricular pueda tener, estarán condicionados por diversos factores entre ellos, la manera en que cada docente interprete y lleva a cabo lo que la propuesta prescribe. En este sentido Fernández (1994), hace un análisis de las actitudes que pudieran considerarse como de resistencia al cambio: El profesor desarrolla una actitud de supervivencia psicoprofesional ante su incapacidad de creación reflexiva para dar respuestas en este sentido a los retos que una educación de carácter utilitario le impone. Se ve inmerso, así, en una espiral de desajuste creciente (la <<seguridad profesional cerrada>>, un proceso por el cual el profesor sistemáticamente encuentra respuestas rutinarias a los problemas pedagógicos que se le presentan, que además *van siendo de mayor complejidad, esto es originado por la* inseguridad profesional ante la carencia de conocimientos técnico pedagógicos, didácticos que le permitan desenvolverse en un nivel mínimo de racionalidad.) en la que a cada nuevo problema pedagógico le da una respuesta rutinizada. Aún más, la seguridad psíquica que ese proceso le proporciona solo es temporal, provocando posteriormente cuadros neuróticos. En el nivel institucional se generan entonces reformas educativas como paliativos de un malestar que se extiende del ámbito docente al social. Considera también que en los grupos humanos comúnmente se disparan mecanismos psicosociales cuando las modificaciones a su quehacer rutinario son demandadas; particularmente el mecanismo de seguridad en lo que ha *sido probado y el mecanismo de economía del mínimo esfuerzo*. En el ámbito educativo estos mecanismos presentan características claras, se llega a hablar de las reformas <<a prueba de profesores>>.

También es necesario señalar que los alcances de esta línea de investigación, desarrollada ya por casi dos décadas, *proporcionan un conocimiento base de las creencias* acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje. Como utilizar esta información para contribuir a que los maestros (y las instituciones) reflexionen sobre sus propias creencias y prácticas es un aspecto que debe ser considerado como importante. Es mediante la reflexión sobre sus creencias y sobre sus perspectivas y sus acciones en el salón de clases, como los maestros pueden lograr conciencia acerca de sus supuestos tácitos, creencias y puntos de vista en relación a su práctica. Y, como lo señala Thompson (1992), "Es razonable asumir que el grado en el que la concepción de enseñanza de un maestro constituye un sistema coherente e integrado depende del nivel al cual el maestro ha reflexionado sobre esto y ha hecho explícito para sí mismo las creencias y valores que sostiene así como las proposiciones y principios que ha abstraído de su experiencia." (p 137)

1.3 Justificación del Proyecto de Investigación

La temática contemplada para el desarrollo de esta investigación surge de las experiencias del autor en la práctica docente al desempeñarse como profesor de los diferentes cursos de matemáticas que *se imparten en el subsistema educativo que constituye* la Dirección General de Educación Tecnológica e Industrial (DGETI) de la Secretaría de Educación Pública, este subsistema ofrece educación tecnológica en el nivel medio superior en dos modalidades, principalmente, Educación Terminal y Bachillerato Tecnológico.

En lo que se refiere específicamente a la enseñanza de la geometría euclidiana, el curso denominado Matemáticas II, Geometría y Trigonometría, del plan de estudios vigente, establece como "finalidad" de la asignatura lo siguiente:

- "A partir de conceptos fundamentales desarrollar la habilidad para deducir mediante el razonamiento lógico resultados elementales que establecen las relaciones mutuas entre las figuras geométricas desde el punto de vista de su magnitud y posición " (DGETI)

En relación a las Unidades Temáticas 3 y 4, Geometría y Trigonometría, *respectivamente, los objetivos son*·

1.- "Conocer el método axiomático deductivo de la geometría euclidiana; la novedad e importancia en su tiempo y actualmente, de esta rama del conocimiento, así como la importancia de sus construcciones y resultados geométricos en el desarrollo de otras ciencias.

2.- Conocer las formas y propiedades de figuras geométricas, así como sus elementos característicos

3.- Ejercitar la aplicación del método axiomático a la geometría euclidiana.

4 - Conocer los fundamentos teóricos de las funciones trigonométricas

5 - Resolver problemas prácticos mediante el uso de las funciones trigonométricas " (DGETI, sin año de edición)

Se observa que dos de estos objetivos (1 y 3), hacen referencia directa a la enseñanza y el aprendizaje del método axiomático deductivo para la demostración y la construcción de conocimientos de la geometría euclidiana.

En un tercer nivel de especificación, los objetivos de operación y las actividades de aprendizaje, que el programa de la asignatura establece, y que se refieren explícitamente a la demostración son los siguientes:

Subtema	Contenidos	Objetivos de operación	Actividades de aprendizaje
3.3 2	Demostración de teoremas	Demostrar teoremas de paralelas y perpendicularidad de rectas	Utilizar el método deductivo en la demostración de teoremas relativos a paralelismo perpendicularidad y congruencia
3.4 3	Demostración de teoremas	Demostrar teoremas específicos con relación a ángulos internos, externos, congruencia y semejanza	Demostrar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Demostrar teoremas relativos a congruencia y semejanza de triángulos.
4 3.1.	Identidades trigonométricas fundamentales	Demostración de identidades trigonométricas	Efectuar demostraciones de identidades trigonométricas en base a las identidades fundamentales

Así planteados estos objetivos, es de esperar, aunque el programa de la asignatura no lo indica, que para su consecución el profesor posea una adecuada preparación y desarrolle una actitud favorable hacia la demostración en el sistema axiomático de la geometría euclidiana y hacia su enseñanza.

Este proyecto de investigación pretende explorar las conceptualizaciones de los profesores acerca de la demostración en geometría euclidiana. El supuesto básico del que se parte es que las creencias y las concepciones que los maestros asumen de manera consciente o no consciente, en relación a las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, y en este caso particular con respecto a la demostración en el sistema axiomático de la geometría euclidiana, influyen en su práctica docente y, en consecuencia, en las concepciones y las creencias que sus alumnos desarrollan en relación a estos conocimientos

Una parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje corresponde al profesor, sus capacidades, actitudes y creencias condicionarán la calidad del proceso de enseñanza que a través de su práctica docente ponga en marcha en el aula Es necesario entonces que exista coherencia entre los objetivos que el programa establece y las cualidades que el profesor requiere para desarrollar su trabajo en el aula en ese sentido.

En los estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas elaborados por la NCTM se considera que·

- "Los maestros son las figuras clave para cambiar la forma en que las matemáticas son enseñadas y aprendidas.
- Tales cambios requieren que los maestros cuenten con apoyo a largo plazo y con recursos adecuados." (NCTM, 1991, p. 2).

La intención fundamental de este trabajo de investigación es la de establecer argumentos para proponer una mayor atención a los prerrequisitos que deben ser cubiertos por los docentes al abordar el programa de la asignatura referido.

De esta manera la pregunta fundamental que se pretende investigar es la siguiente.

- *¿Cuáles son las conceptualizaciones acerca de la demostración en el sistema axiomático de la geometría euclidiana de los profesores de matemáticas que con frecuencia o eventualmente imparten la asignatura de Geometría Plana y Trigonometría?*

Aquí se considera el sistema axiomático propuesto por Euclides en los Elementos Y los profesores que constituyen la población objeto de estudio son profesores de los planteles pertenecientes a la DGETI en el área metropolitana.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

2.1 Matemáticas

Sin duda, la conceptualización de Matemáticas no es única, en diferentes épocas y en diferentes circunstancias se han generado visiones diversas de lo que las matemáticas significan y representan Así lo plantean Davis y Hersh, para quienes "La definición de las matemáticas es cambiante. Cada generación y cada matemático reflexivo de cada generación formula una definición según sus luces." (en Davis, 1988, p. 24)

La escuela platónica (siglo IV a.C), sostenía la existencia de un mundo ideal, en el que existen las verdades absolutas e inalterables, lo perceptible es una vaga e imperfecta materialización del mundo ideal, y las leyes matemáticas eran no sólo la esencia de la naturaleza, eran también eternas e inalterables, (Kline, 1994, p. 20). Para Kant (1783), los juicios de la matemática son sintéticos a priori, la matemática no se desarrolla de la descomposición de sus propios conceptos, sino de la construcción de ellos; la "intuición pura", que es independiente de la experiencia, juega un papel determinante para lograr la adquisición de los conceptos (Kant, 1981, pp. 41-43).

Para los matemáticos y los educadores matemáticos del presente siglo, las conceptualizaciones de las matemáticas obedecen más a rasgos tales como su importancia como instrumento científico, como medio de comunicación y de desarrollo intelectual y social, entre otros. Ejemplos de estas conceptualizaciones son las de Aleksandrov et al, y la de Rees:

Para Aleksandrov (1979), la matemática se desarrolla esencialmente por una actividad mental. La matemática posee vitalidad puesto que tiene su origen en el mundo real y encuentra muchas de sus aplicaciones en él . Los procesos de abstracción alcanzan altos grados de generalización. El razonamiento lógico y las demostraciones permiten que la matemática sea incontestable y convincente para todo el que la entiende. Existe una interrelación entre la matemática y las ciencias que se sirven de ella de manera que los logros matemáticos impulsan el desarrollo de aquellas y viceversa.

Para Rees (sin fecha de edición), las matemáticas son un lenguaje que debe aprenderse, y debemos aprender sus técnicas si queremos utilizarlo Las matemáticas son a la vez inductivas y deductivas, pero la imaginación es totalmente indispensable para su desarrollo. Las matemáticas crecen por acumulación; las nuevas formas se crean a veces por la intuición y otras por el formalismo lógico. Las demostraciones y justificaciones dependen de la lógica habitual, pero el matemático es libre de modificar esta lógica si lo necesita. Las fuentes de la invención matemática residen a veces en las propias matemáticas y otras veces en las realidades del mundo que nos rodea. El proceso de abstracción y de axiomatización ha servido simultáneamente para profundizar en los problemas de fundamentos y para elevar una soberbia superestructura. Los resultados obtenidos por las matemáticas puras en el pasado y en el presente han proporcionado a los científicos la base conceptual para la comprensión y la descripción del mundo físico.

Una conceptualización de las matemáticas con importantes repercusiones en el proceso de la demostración matemática, es la de Lakatos, para quien el desarrollo de una idea matemática parte de un problema y una conjetura, para buscar " ...simultáneamente demostraciones y contraejemplos. Las nuevas demostraciones explican los contraejemplos viejos, los contraejemplos nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores." (citado en Davis, 1988, p. 253); de esta manera las matemáticas se conciben dentro de un proceso de crecimiento y descubrimiento, lo cual es realmente lo que los matemáticos conocen por matemáticas y lo que los estudiantes debieran conocer.

2.2 Demostración Matemática

En cuanto a la demostración matemática, parece existir un amplio consenso en el que se le considera como la metodología propia de la matemática como ciencia, y que constituye, también, el criterio de validación de los conocimientos matemáticos. La demostración matemática es objeto de estudio tanto de matemáticos como de filósofos e historiadores de la ciencia; su influencia es uno de los aspectos más notables en el desarrollo científico y cultural del mundo occidental, a partir de su utilización sistemática por los matemáticos griegos desde Tales en el siglo VI a.C. A continuación se presentan algunas de las consideraciones que diferentes especialistas hacen en cuanto al significado, a la importancia y al desarrollo de la demostración matemática

Las causas de la formalización de las matemáticas en la civilización griega parecen ser de diferentes tipos; Filloy (1998) señala tres grupos de causas que dan lugar a ésta formalización :
- Causas Sociológicas. La estructura de la sociedad griega favoreció el desarrollo del arte, la política y la ciencia, cultivadas por la clase dominante; el estudio de las matemáticas desde el punto de vista teórico se consideraba digno de los hombres libres.
- Causas Interculturales. Los filósofos griegos buscaban formas racionales de explicar el Universo, el plan matemático de la naturaleza era una de éstas teorías y como lo planteaban los pitagóricos, la naturaleza estaba gobernada por relaciones numéricas, las propiedades matemáticas eran la esencia de fenómenos diversos.
- Causas Internas (crisis dentro de la matemática). También los filósofos y los científicos griegos eran críticos ante sus propias teorías y buscaban por diferentes medios su comprobación; se considera que el descubrimiento de los inconmensurables provocó una crisis con efectos importantes en la forma de validar las afirmaciones matemáticas.

Arpad Szabó (1962), propone que para salvar este obstáculo (la existencia de inconmensurabilidad) los griegos emplearon la demostración indirecta, adoptando la ausencia de contradicción como el criterio de la afirmación verdadera. La adopción de la demostración indirecta, junto con la actitud anti-ilustrativa, opuesta a la demostración por visualización fuertemente apoyada en la figura dibujada, son a juicio de este autor, factores que llevan a los matemáticos griegos a la geometría deductiva.

Paul Ernest (1991), aborda el conocimiento matemático como un tipo de conocimiento proposicional, es decir, proposiciones que son aceptadas (creídas) bajo la condición de que existen fundamentos adecuados para su aseveración, ". . Un conocimiento *a priori* consiste de proposiciones que son aseveradas sobre la base única de la razón sin recurrir a observaciones del mundo real... La razón consiste en el uso de lógica deductiva y definiciones que son usadas en conjunción con un grupo de axiomas o postulados matemáticos asumidos, como base desde la cual inferir el conocimiento matemático. Por lo tanto la fundamentación del conocimiento matemático, esto es, las bases para afirmar la verdad de las proposiciones matemáticas, consiste en la demostración deductiva " (pp. 4-5). Particularmente, la demostración de una proposición matemática se lleva a cabo en una secuencia finita de afirmaciones que terminan precisamente en esa proposición; dicha secuencia satisface la siguiente propiedad: "Cada afirmación es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido, o es derivada por una regla de inferencia desde una o más afirmaciones precedentes en la secuencia. El término 'conjunto de axiomas' es concebido ampliamente para incluir afirmaciones que son admitidas en una demostración sin demostración previa, incluyendo axiomas, postulados y definiciones " (p. 5). En la demostración matemática *se asumen dos clases de proposiciones: matemáticas y lógicas*. Las proposiciones matemáticas asumidas son las definiciones y los axiomas. Las proposiciones lógicas asumidas son las reglas de inferencia, que forman parte de una teoría de la demostración subyacente, y la sintaxis subyacente del lenguaje formal

Para Ernest esta consideración del conocimiento matemático es esencialmente la que ha sido aceptada por casi 2500 años: En la obra de Euclides, Elementos, el conocimiento matemático es establecido por la deducción lógica de teoremas a partir de axiomas y postulados. La lógica subyacente no está especificada (a excepción del establecimiento de algunos axiomas concernientes a la relación de igualdad). Los axiomas no son considerados como suposiciones adoptadas temporalmente, sostenidas sólo para la construcción de una teoría bajo consideración. Los axiomas se consideran verdades básicas, que no necesitan justificación, más allá de su propia autoevidencia. Es debido a esto el requerimiento para proporcionar ciertos fundamentos para el conocimiento matemático. Puesto que la demostración lógica mantiene la verdad, y los axiomas asumidos son verdades autoevidentes, entonces los teoremas derivados de ellos deben ser también verdaderos (este razonamiento es implícito en Euclides). Sin embargo esta petición o requerimiento no es suficientemente aceptada, dado que *los axiomas y postulados de Euclides no se consideran* como verdades básicas e incontrovertibles, ninguna de las cuales puede ser negada sin resultar en una contradicción. (p. 6)

Luis Vega (1992), hace consideraciones en cuanto a cuestiones sobresalientes relativas a la idea clásica de demostración, entendida esencialmente como prueba conclusiva.

Por una parte la imagen tradicional de las matemáticas, presente desde los siglos IV y III a. C., en la antigua Grecia, en la que " .. la deducción matemática oficia ya como canon de la demostración estricta o propiamente dicha, y la familia de las ciencias matemáticas -la geometría en particular- proporciona el arquetipo de la ciencia demostrativa." (Vega, 1992, p 156), es una imagen sujeta a discusión en la actualidad; "Del amplio espectro de esta discusión puede dar una idea la posibilidad de encontrarnos con la posición *maximalista* que liga no sólo el estatuto de las proposiciones matemáticas sino su propio significado a su demostración sistemática estricta; con la postura *minimalista* que descarta la idea clásica de demostración y confían el desarrollo del conocimiento matemático a una dialéctica de conjeturas y refutaciones; con poses de *grado cero*, que sólo atribuyen a la demostración unos efectos de orden retórico o, como mucho, didáctico; y, en fin, con una rica gama de posiciones *intermedias* que conceden mayor o menor peso a diversos recursos de prueba, de comprobación y de demostración concluyente en matemáticas." (*ibid*).

La importancia de esta discusión radica, en su opinión, en que la idea de demostración tiene repercusiones no sólo filosóficas, sobre nuestra manera de ver el conocimiento matemático, sino metodológicas, sobre nuestra manera de organizarlo, e incluso historiográficas. El problema central estriba en si el conocimiento matemático únicamente "... admite ciertos métodos demostrativos congruentes con la naturaleza supuestamente cierta y *a priori* de la <<verdad matemática>> o si, por contra, no deja de emplear conocimientos más débiles de prueba o de comprobación ni deja de incluir conjeturas y resultados que podrían considerarse más o menos plausibles, más o menos <<empíricos>>". En definitiva, el conocimiento matemático no es única y exclusivamente demostrativo; "También cuentan los resultados obtenidos por aproximación, amén de diversos procedimientos de verificación empírica o prueba probabilística. Hay, por otro lado, conjeturas que por más que se resistan a la demostración no dejan de estimular su búsqueda y siguen siendo un motivo de investigación matemática... Hay, además, supuestos teóricos cuya verificación está confiada a su rendimiento ...el conocimiento matemático en su conjunto no encaja de manera cabal y uniforme en una de las casillas de nuestros pares prefabricados de opuestos: *a priori - a posteriori*, analítico - sintético, lógico - empírico, etc." (pp. 159-160).

Vega conceptualiza la demostración como una prueba lógicamente concluyente que nos hace saber que algo es (o no es) el caso, dentro del marco en el que se considera que toda demostración *es una prueba, y que toda prueba es una argumentación, sin* que valgan sus conversas. "Una argumentación es una interacción lingüística compleja capaz de cumplir, entre otras funciones, la de dar cuenta y razón de algo ante alguien en un marco de discurso ...todo argumento consta básicamente de tres componentes: una conclusión -digamos α-, un conjunto de premisas -digamos Γ- y una línea de discurso tendida entre ellas. El esquema "$<\Gamma,\alpha>$" designará un argumento. *Las pruebas son argumentos que en general* parten de ciertos conocimientos -o presunciones de conocimiento- para concluir en otro conocimiento -o presunto conocimiento- ...Una prueba procura hacer más inteligible el objeto de la argumentación, aumentar o explicar su contenido informativo, o también ...justificar el crédito que conferimos a su proposición ...Según esto, un argumento $<\Gamma,\alpha>$ será una prueba sólo si $<\Gamma,\alpha>$ *tiene un valor cognoscitivo o una fuerza epistémica* superiores a los representados por la mera proposición de α en el marco de discurso dado... Para que $<\Gamma,\alpha>$ sea una prueba en una marco M, además ha de ser visto o reconocido por algún agente discursivo como prueba de α en M De manera que la calidad de significar una prueba es una función esencialmente contextual y pragmática... No es seguro que una prueba en M pueda mantener indefinidamente su valor de origen en otro medio M' o pueda contar siempre con el mismo grado de aceptación o de reconocimiento" (pp. 160-162)

Un aspecto importante en el contexto de este proyecto de investigación, es la diferenciación que Vega hace entre creer y conocer: "Para que X crea que P, *(i)* no es necesario que alguien más comparta dicha creencia y *(ii)* no es necesario que P sea congruente con algún cuerpo pertinente de conocimientos. En cambio toda pretensión de conocimiento deberá atenerse a ambos supuestos de modo que deja de ser una cuestión personal para convertirse en una cuestión de dominio público, al menos en principio." (p. 162).

"Una demostración es un tipo especial de prueba. La peculiaridad de la demostración se hecha de ver en ciertos requisitos específicos como los siguientes: una prueba $<\Gamma,\alpha>$ en un marco discursivo M es una demostración de α en M sólo si $<\Gamma,\alpha>$

(i) es una deducción lógicamente concluyente;

(ii) hace saber a algún agente discursivo X que α es el caso;

(iii) es una prueba <<acogente>>.

Cabe plantear estas condiciones como demandas maximalistas dentro de cada uno de los planos respectivamente involucrados: el lógico, el epistémico y el pragmático..." (pp. 162-163). (este autor hace una explicación más amplia de lo que las tres condiciones señaladas implican)

2.3 Demostración en Geometría Euclidiana

A. I. Fetisov (1973), explica que existen dos formas fundamentales de conocer el mundo que nos rodea, sus objetos, fenómenos y leyes naturales:

- La primera consiste en el método de obtener conclusiones a partir de la observación de numerosos casos particulares, este proceso se llama inducción; los casos particulares conducen a la idea de que existen leyes generales.
- Un segundo método se usa cuando ya se conocen ciertas leyes generales, y se aplica este conocimiento a los casos particulares; este método se llama deducción.

Ambos caracterizan el método científico, y en el curso de toda demostración ambos métodos son utilizados.

Para Fetisov una demostración en geometría es: "...una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidos." (p. 17) En cuanto a la necesidad de demostrar, particularmente en geometría, este autor señala que la demostración geométrica establece las propiedades de las figuras espaciales en toda su generalidad. Con mayor detalle, las consideraciones por las que es necesaria la demostración son las siguientes:

"a) En la geometría, sólo se aceptan sin demostración un pequeño número de proposiciones fundamentales -los axiomas- . Las proposiciones restantes -los teoremas- se demuestran a partir de estos axiomas construyendo una serie de deducciones

b) Las demostraciones son necesarias como consecuencia de una ley fundamental del pensamiento correcto -la ley de la razón suficiente, de acuerdo con la cual nuestras aseveraciones deben tener un fundamento riguroso para que sean verdaderas-.

c) Una demostración construida correctamente sólo se apoya en axiomas y proposiciones previamente demostradas, no en lo que es obvio.

d) También es necesaria la demostración para establecer la generalidad de la proposición en cuestión, o sea, su aplicabilidad a todos los casos particulares.

e) Por último, mediante las demostraciones, la geometría se transforma en un sistema metódico de conocimientos científicos, en el cual se descubren las relaciones entre las diferentes propiedades de las formas espaciales." (p. 25).

Davis y Hersh, (1988), al analizar las razones por las que vale la pena seguir demostrando una y otra vez en la enseñanza de las matemáticas, señalan lo siguiente:

"Las demostraciones sirven simultáneamente a muchos fines. Al ser expuestas al escrutinio y enjuiciamiento de auditorios nuevos, quedan sujetas a un constante proceso de crítica y revalidación. Su presentación continuada permite eliminar y depurar de ella los errores, ambigüedades y malentendidos. La demostración conlleva respetabilidad, es el sello de la autoridad.

En los mejores casos, la demostración da una comprensión más profunda al revelar el alma del problema. La demostración sugiere nuevos desarrollos. El novel que estudia demostraciones se está acercando a la creación de nuevas matemáticas. La demostración es energía matemática, es la tensión eléctrica que da vida y dinamiza los enunciados, estáticos, de los teoremas.

Por último, la demostración es rito y celebración de la potencia de la razón pura. Tal ejercicio de reafirmación y confianza en nosotros mismos puede resultar sumamente necesario, en vista de los intrincados embrollos a los que el pensar con claridad nos lleva claramente." (p. 118)

En cuanto a la enseñanza de la geometría euclídea, estos mismos autores consideran que en ella no sólo se destacan los aspectos visuales o espaciales de esta materia, sino también su metodología en la cual la hipótesis lleva hasta la conclusión, en un proceso deductivo denominado prueba o demostración. Esta geometría fue el primer ejemplo de sistema deductivo formalizado, y se ha tomado como el paradigma de este tipo de sistemas. También la geometría ha sido un terreno propicio para la práctica del razonamiento lógico, y, con razón o sin ella, se ha sostenido que el estudio de la geometría proporciona al estudiante una formación básica en tal razonamiento (p. 24). Sin embargo, la línea expositiva definición-teorema-demostración, presentada como un conocimiento acabado y carente de significado, puede generar en los estudiantes una falsa idea de lo que son las matemáticas "La matemática es una actividad humana, y la descripción lógico-formal de la matemática no es más que una ficción; la matemática propiamente dicha ha de buscarse en la labor que realizan los matemáticos... Los teoremas matemáticos son calificados de <<profundos>> cuando su demostración es difícil. Entre los elementos responsables de tal profundidad se encuentran lo anti-intuitivo de los enunciados o planteamientos, lo novedoso de las ideas utilizadas, y la complejidad o longitud del material que constituye la demostración. En matemáticas, el antónimo de <<profundo>> es <<trivial>>, término utilizado muchas veces con matiz peyorativo. Empero, no se sigue que lo trivial carezca de interés, que sea inútil o sin importancia." (p. 226).

Por su parte Jesús Salinas (1991), hace notar, entre otros aspectos, la función que la demostración tiene como instrumento de convencimiento, así como el carácter sintético de la geometría euclidiana en el sentido de un proceso constructivo, y el importante papel que juega la figura en esta clase de demostración:

"Cuando se presenta la necesidad de convencer a alguna persona en relación a alguna afirmación que hacemos, buscamos sustentar ésta en una o más proposiciones que nuestro interlocutor pueda aceptar como verdaderas. De este modo, le hacemos ver que la afirmación en cuestión es consecuencia de las otras proposiciones *que sí puede admitir sin* dificultad. Gracias a este proceso podemos convencerlo de la afirmación inicial
Los elementos característicos de una demostración son:
- Un conjunto de proposiciones que sirven de apoyo para convencer a nuestro interlocutor. Esto es lo que se conoce como premisas del razonamiento
- *Un procedimiento lógico que nos permite encadenar adecuadamente tales proposiciones y* que nos conduce de unas a otras hasta la aseveración inicial. Esto es la deducción.

Una proposición matemática no se comprueba en la experiencia Su exactitud es inalcanzable por toda prueba experimental. En consecuencia, la verdad de una proposición *matemática es independiente de su correspondencia con el mundo exterior*. Su verdad es de carácter lógico, depende de la coherencia interna del sistema en que se encuentre. Su demostración lógica es lo único que nos puede garantizar su verdad.

En la geometría euclidiana no tenemos una colección azarosa de proposiciones, sino *un sistema de conocimientos construido con* apego estricto a las leyes de la lógica.

Es patente el importante papel que ha jugado la imagen gráfica en la demostración. La figura dibujada es una especie de detonador de nuestra intuición que nos impulsa en la construcción de la deducción. Este tipo de demostraciones son las más características de la geometría euclideana, demostraciones en las que es más importante hacer construcciones, dibujar líneas auxiliares; que elaborar cadenas de inferencias formales. La demostración en geometría procede de manera sintética: por construcción. Nuestra brújula es la intuición y nuestro barco el pensamiento lógico "

Cohen y Nagel (1993) explican la necesidad de establecer proposiciones que no se demuestran, pero también señalan el aspecto subjetivo que representa el considerar estas proposiciones primeras como verdades evidentes por sí mismas.

". una prueba lógica es un "señalamiento" o una "indicación" de las implicaciones entre un conjunto de proposiciones llamadas axiomas y otro conjunto de proposiciones llamadas teoremas ...los axiomas mismos no se demuestran ...pues se consideran verdades evidentes por sí mismas ...Pero que una proposición resulte obvia o no depende de las condiciones culturales y de la preparación individual de las personas ...Si bien los axiomas son lógicamente anteriores a los teoremas, el orden temporal en el que se descubre la dependencia lógica de las proposiciones hace que los axiomas sean posteriores a los teoremas." (desde el punto de vista histórico de la construcción de la geometría euclidiana)

"Las proposiciones pueden demostrarse exponiendo las relaciones de implicación que tienen entre sí, pero no es posible demostrar todas las correspondientes a un sistema dado, pues de los contrario nuestro razonamiento caería en un círculo vicioso."

Por último Merriman (1947) señala no solo la necesidad de contar con una frontera de postulados o axiomas aceptados inicialmente, sino que este hecho se repite en relación a los conceptos manejados dentro del sistema deductivo

"La demostración de un teorema matemático se efectúa por una cadena de simples razonamientos deductivos ...Cada uno establece, respecto a las proposiciones básicas aceptadas (hipótesis), una conclusión resultante incontrovertible, si ha sido válido el razonamiento. ...Un sistema matemático correctamente construido está entonces caracterizado por una frontera de *postulados* (derivado de la palabra latín para *pedidos*), o *axiomas* que son aceptados inicialmente, sin demostración o idea de demostración, como base de operaciones para el subsiguiente edificio deductivo ...A su vez, puesto que los postulados iniciales deben ser establecidos en función de palabras y conceptos cuya significación ha sido ya establecida, es igualmente claro que debe haber, más allá de la última frontera, por lo menos un concepto que queda completamente *indefinido*."

Como se puede apreciar, existe un amplio consenso en cuanto al papel que la lógica juega dentro de la demostración matemática y dentro de la demostración en geometría euclidiana; aunque es importante señalar que la lógica asumida por Euclides en los Elementos no es explícita:

García Bacca (1992), en la introducción a su versión de Euclides Elementos de Geometría I - II, señala que las nociones comunes en dicha obra tienen el carácter de métodos de demostración (métodos de identidad mediata), principios de conocimiento demostrativo, "innatos" en las mentes o inteligencias humanas, cuya utilización es tan natural como la de las manos o los oídos, y es en este sentido en el que son comunes, "...son instrumentos propios de "todos" los hombres, o al menos todos pueden llegar a apropiárselos y usarlos como "suyos". (p. LXXXIII) ...además de esta función vital, -sentirse vitalmente seguros cuando se emplean tales nociones para hacer geometría-, poseen las nociones comunes otra función derivada, puramente lógica " (p. LXXXIV).

En este aspecto una noción común es utilizada en la obra de Euclides como premisa de un silogismo proposicional, o bien como un silogismo relacional en si, "...casi descompuesta en tres proposiciones." (p. LXXXIV). García Bacca comenta que Euclides formula y entiende las nociones comunes en sentido neutral a relación y proposición.

La lógica en la geometría griega constituye, entonces, una estructura implícita, en la que se emplean fórmulas lógicas, a saber: inversión lógica, reducción al absurdo, silogismo proposicional, silogismo relacional, ampliación lógica y la inversa de una proposición directa dada; y reglas de deducción lógica: modus ponens y regla de sustitución. Esta estructura lógica es, en contraste, expresada explícitamente en los Fundamentos de la Geometría de Hilbert, tal como lo indica el mismo García Baca en su versión, ya citada. (p. LXXXV)

2.4 Modelos para Caracterizar las Conceptualizaciones de los Profesores acerca de las Matemáticas y de su Enseñanza y su Aprendizaje

2.4.1 El Modelo de Categorías e Indicadores para el Análisis de las Concepciones del Profesor sobre la Matemática y su Enseñanza de José Carrillo y Luis C. Contreras

Carrillo y Contreras (Carrillo, 1995), presentan un instrumento para el análisis de las *concepciones del profesor acerca de la matemática y su enseñanza*. Parten de considerar que: "... una determinada concepción sobre la Matemática o la Educación Matemática podría caracterizar la interpretación y toma de decisiones acerca de las concepciones, errores de aprendizaje u obstáculos epistemológicos de los alumnos, orientaría una determinada opción de selección del contenido o búsqueda de situaciones didácticas, y permitiría o justificaría el marco de negociación (implícito o explícito) de un determinado contrato didáctico... Es así que las mencionadas concepciones pueden considerarse como operadores que actúan en el proceso de transformación del conocimiento a la situación didáctica, y en el propio control de la interacción alumno-situación." (Carrillo, 1995, pp. 79-80)

Estos autores abordan el problema de investigación mediante el estudio de casos con nueve profesores de matemáticas que enseñan a alumnos entre 14 y 18 años, desarrollando un modelo teórico como marco interpretativo de referencia, dentro del cual se lleva a cabo el análisis de la información obtenida y se caracterizan las concepciones de estos profesores.

- Identificación de las concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

Aquí el modelo teórico contempla cuatro tendencias: tradicional, tecnológica, espontaneísta, e investigativa; seis categorías: metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno, papel del profesor, y evaluación; para identificar un total de 35 indicadores por tendencia.

- Identificación de las concepciones acerca de las matemáticas

Para esto, el modelo teórico consiste de tres tendencias instrumentalista, platónica y resolución de problemas; tres categorías: tipo de conocimiento, fin (de la construcción del conocimiento matemático), y modo de evaluación (de la matemática); en estas tres categorías se agrupan un total de 21 indicadores.

Con estos modelos fueron extraídas de cuestionarios y entrevistas las correspondientes *unidades de información*, entendidas como: "... aquellos enunciados correspondientes a una misma pregunta base con un ligazón sintáctica o semántica, o bien, ambas." (Carrillo, 1995, p. 82). El proceso se lleva a cabo a través de varias etapas de selección y catalogación, bajo un esquema de revisión vertical (comparación en un mismo individuo de inconsistencias al presentar indicadores de diferentes tendencias) y revisión horizontal (comparación en el mismo sentido pero entre todos los individuos); se generó así un Modelo Mental personalizado que fue puesto a consideración de los propios profesores. Los autores presentan la versión final del modelo teórico empleado en la investigación mediante un diagrama de flujo del proceso de revisión y once cuadros de caracterizadores.

Los autores consideran que la pontencialidad principal del instrumento elaborado radica en posibilitar la obtención detallada de un *retrato epistemológico* de los profesores revelando las eventuales relaciones entre su modelo de concepción de la Matemática y su tendencia didáctica sobre la Enseñanza de las Matemáticas. Su estudio les permitió identificar concepciones y tendencias contradictorias sostenidas por un mismo sujeto, es decir, se puso de manifiesto una amplia gama de posibilidades entre los modelos conceptuales de las Matemáticas y las tendencias didácticas manejadas.

Es importante recalcar que el estudio tuvo como objetivo principal comprobar: "... la viabilidad del instrumento de cara a una mejor caracterización tanto de las tendencias didácticas como de los modelos de concepción de la matemática " (p 91) Como un objetivo que se desprende del anterior, se propone al análisis obtenido como punto de partida para el diseño de estrategias de formación profesional para el docente de matemáticas.

2.4.2 La Caracterización de Paul Ernest para Definir el Modelo Mental con el que el Profesor Aborda su Práctica Docente.

Ernest (1988), señala que las reformas en la enseñanza no pueden ser llevadas a cabo a menos que las creencias que los maestros sostienen profundamente acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje, cambien.

Las componentes clave de las creencias de los maestros de matemáticas son.
- La visión o la concepción de la naturaleza de las matemáticas
- El modelo de la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas.
- El modelo del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

A) La concepción de la naturaleza de las matemáticas, que un profesor posee, es su sistema de creencias concerniente a la naturaleza de las matemáticas como un todo; lo que se

traduce en una filosofía de las matemáticas. Se distinguen en base a su ocurrencia, tres tipos de filosofías:
- La visión instrumentalista. Las matemáticas son un cúmulo de *reglas, hechos y habilidades*, usados por quien ha sido entrenado en ello en la persecución de un fin externo, las matemáticas son un conjunto de reglas y hechos aislados pero útiles.
- La visión platónica. Las matemáticas son un cuerpo estático pero unificado de conocimiento verdadero, un dominio cristalino de estructuras y verdades interconectadas, es *un producto monolítico, estático e inmutable.*
- La visión de resolución de problemas. Las matemáticas son un campo dinámico, en continua expansión, de la creación humana, un producto cultural. Las matemáticas constituyen un proceso de indagación y sus resultados permanecen abiertos a la revisión.

El modelo de enseñanza de las matemáticas, es la concepción que el profesor posee del tipo y el rango de roles de enseñante, de las acciones y de las actividades en el aula de matemáticas. Ernest distingue tres modelos, junto con el énfasis instruccional que cada uno conlleva·
- Instructor. El profesor desempeña su rol docente con maestría en las habilidades de enseñanza.
- Explicador. El profesor pretende en sus estudiantes entendimiento conceptual y conocimiento unificado
- Facilitador. El profesor pretende que sus estudiantes adquieran confianza para formular y resolver problemas.

El uso de los materiales curriculares es también de importancia central en un modelo de enseñanza; se distinguen tres patrones:
- el seguimiento estricto de un texto o un esquema;
- una modificación al acercamiento que el libro de texto propone, enriquecida con problemas adicionales y actividades;
- la construcción del curriculum de matemáticas por el maestro o por la escuela.

Estrechamente relacionado al anterior, está el modelo mental acerca del aprendizaje de las matemáticas. Este consiste en la visión del maestro del proceso de aprendizaje matemático, qué comportamientos y actividades mentales conciernen al estudiante, y qué es lo que constituyen actividades de aprendizaje apropiadas y prototípicas. Dos constructos clave de estos modelos son:
- el aprendizaje como una actividad constructiva, en oposición a la recepción pasiva del conocimiento.
- el desarrollo de autonomía y de interés de los estudiantes por las matemáticas, en oposición a quien aprende como un sujeto sumiso y condescendiente.

Con estos constructos clave se distinguen cuatro modelos de aprendizaje, entendidos como el modo como los estudiantes logran los aprendizajes·
- Comportamiento sumiso y el desarrollo de maestría de habilidades
- Recepción del conocimiento
- Construcción activa del entendimiento

- Exploración y seguimiento autónomo de sus propios intereses

En la práctica se observan, entonces, dos *modelos que no se corresponden* exactamente, y que en ocasiones llegan a estar en franca contradicción: el modelo de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que el profesor explícitamente enarbola; y el modelo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que el profesor manifiesta, o pone al descubierto, en su práctica docente cotidiana. Esta diferenciación es atribuida a dos causas claves:

B) El contexto social; en el que se distinguen, esencialmente, las expectativas de los demás (estudiantes, padres de familia, los colegas, los funcionarios, entre otros), y el curriculum institucionalizado (el esquema curricular, el sistema de evaluación, el sistema educativo, entre otros factores)

C) El grado de conciencia que el profesor posee acerca de sus propias creencias, y la extensión con la que reflexiona sobre su práctica de enseñanza de las matemáticas.

Algunos de los elementos clave en el pensamiento del maestro, y su relación con la práctica, son:

- la adopción consciente de visiones *específicas de la naturaleza de las matemáticas* y *su* enseñanza y aprendizaje;
- la habilidad para justificar estas visiones y adopciones;
- conciencia de la existencia de alternativas viables;
- sensibilidad para seleccionar e implementar estrategias apropiadas de enseñanza y aprendizaje de acuerdo a la situación y a su propia perspectiva,
- reflexividad, concerniente a reconciliar su práctica docente con sus creencias, y reconciliar creencias en conflicto.

Para Paul Ernest, es indispensable atender los tres aspectos marcados como incisos A, B y C, para aproximarse a la noción del maestro de matemáticas autónomo.

2.4.3 El Modelo Teórico que Alba G. Thompson Propone para Identificar el Nivel de Desarrollo de las Concepciones de los Maestros con Respecto a la Enseñanza de las Matemáticas.

Esta investigadora propone un marco de referencia, sustentado en sus observaciones a lo largo de cinco años de maestros en formación y maestros en servicio, doce en total, involucrados en dos proyectos de investigación. Una de sus premisas fundamentales es que:

"Mucho de lo que un maestro hace de una experiencia particular depende de los esquemas conceptuales de que dispone, y dentro de los cuales las experiencias son asimiladas, o de la acomodación de los esquemas que pueda llevar a cabo." (Thompson, 1991, p. 9)

El marco propuesto consiste de tres niveles en el desarrollo de las concepciones de los maestros de la enseñanza de las matemáticas. Cada nivel está caracterizado por concepciones de

1. ¿Qué es la matemática?
2. ¿Qué significa aprender matemáticas?
3. ¿Qué es lo que uno enseña cuando enseña matemáticas?
4. ¿Cuáles deben ser los roles del maestro y de los estudiantes?
5. ¿Qué constituye evidencia del conocimiento del estudiante y los criterios para juzgar la pertinencia, precisión, o aceptabilidad de los resultados y conclusiones matemáticas?

Nivel 0

La concepción de las matemáticas se basa sobre la percepción del uso común de las habilidades aritméticas en situaciones cotidianas. La instrucción matemática se concibe como una secuencia progresiva de tópicos y habilidades especificadas en un texto, se carece de una visión diferenciada de los tópicos en términos de su relevancia o significado matemático. El papel del maestro es percibido como el de un demostrador de los procedimientos correctamente establecidos, mismos que constituyen el centro del conocimiento matemático. El papel de los estudiantes es el de imitar esos procedimientos y repetirlos hasta lograr dominarlos.

Nivel 1

Se observa en este nivel una apreciación emergente de la importancia de la comprensión de conceptos y principios subyacentes en las reglas, ya no solo incluye el dominio procedimental. Un factor que posiblemente favorece este cambio es el uso de materiales manipulativos en la enseñanza. La concepción de la enseñanza de matemáticas se caracteriza por el surgimiento de mayor conciencia en cuanto al empleo de representaciones instruccionales (físicas y pictóricas) de los conceptos y procedimientos matemáticos, para ayudar a los estudiantes a desarrollar significados y entendimiento.

El maestro debe poseer técnicas pedagógicas específicas, aunque posiblemente no las pueda aplicar en otras situaciones. El uso de los materiales manipulativos es altamente valorado, pero más por su potencial para alcanzar metas actitudinales, que para lograr objetivos cognitivos. Las representaciones manipulativas o pictóricas son consideradas como una clase de justificación empírica de los procedimientos estándar. Pero las conexiones entre las acciones desarrolladas sobre los objetos o diagramas, la verbalización de esas acciones, y su representación en notación matemática no son explícitamente discutidas en la instrucción. Se presupone que los estudiantes lograrán establecer esas conexiones.

Hay una apreciación creciente de la complejidad del contenido matemático que surge de su análisis conceptual y de la reflexión sobre el carácter abstracto de la naturaleza de los conceptos La resolución de problemas se considera como importante dentro del curriculum, pero es vista como una rama aislada de éste. Se enseña la resolución de problemas, pero no "con" la resolución de problemas. Otra característica de este nivel es la ausencia de principios basados cognitivamente que sean conscientemente utilizados para conducir las decisiones instruccionales o de criterios adecuadamente articulados para juzgar los efectos cognitivos de las acciones instruccionales. Las innovaciones instruccionales no son valoradas de manera critica.

Nivel 2

En este nivel se considera que los estudiantes deben involucrarse en la indagación matemática como condición para dar sentido a las ideas matemáticas. El desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes en el contexto de investigación y construcción de las ideas matemáticas, es visto como un meta tan importante de la instrucción como el entendimiento de las ideas mismas, el entendimiento surge del compromiso con el proceso de hacer matemáticas. Las representaciones físicas y pictóricas constituyen medios por los cuales los estudiantes pueden involucrarse en tareas cuidadosamente diseñadas por el maestro para explorar ideas y generar procedimientos Los propios estudiantes deben llegar a determinar la validez de esos conceptos y procedimientos, lo cual constituye también una importante meta cognitiva.

El reconocimiento, por parte de los estudiantes, de las mismas ideas matemáticas en diferentes condiciones o diferentes áreas, es otro de los objetivos a largo plazo de la instrucción. El profesor se constituye en el conductor del pensamiento de los estudiantes hacia formas matemáticamente productivas. Existe una conciencia creciente de los aspectos finos de las ideas matemáticas que plantean obstáculos cognitivos y llevan a conceptos equivocados. La comunicación multidireccional y la valoración de las ideas es otro de los aspectos que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de este nivel. Pero el sello distintivo lo da la presencia de principios basados cognitivamente con los que se orientan las decisiones instruccionales, los objetivos cognitivos definen ampliamente la selección y el diseño de actividades, así como los procesos de evaluación.

Al discutir acerca de sus investigaciones, Alba Thompson señala que se observa relativa facilidad para avanzar del nivel cero al nivel uno, comparativamente, resulta más difícil pasar del nivel uno al nivel dos, considerando que prácticamente ninguno de los maestros bajo estudio se ajusta a un nivel particular, la explicación que da es la siguiente:

"Al crecer desde el nivel 0 al nivel 1, las nuevas concepciones pueden ocurrir sin mayores cambios en los esquemas conceptuales. Las ideas en el nivel 1 pueden ser asimiladas en estructuras que soportan las concepciones en el nivel 0, simplemente ampliando esas concepciones, pero sin la necesidad de reestructurar sus esquemas, i.e., sin la necesidad de reconceptualización de las ideas fundamentales que es necesaria para pasar del nivel 1 al nivel 2. La reestructuración necesaria para avanzar al nivel 2 requiere que un maestro experimente en numerosas ocasiones para llegar a estar consciente y cuestionar sus ideas profundamente enraizadas y examinar sus asunciones acerca de lo que significa saber, aprender y enseñar matemáticas." (p. 14).

2.5 Análisis de los modelos revisados

Una comparación entre los modelos precedentes permite señalar que el más general es el de Ernest, en el que se identifican tres conceptualizaciones de lo que es la matemática, tres roles que puede desempeñar el maestro y cuatro tipos actitudinales en los estudiantes. Esta caracterización constituye una cita frecuente en las investigaciones y en las propuestas sobre *conceptualizaciones y creencias de las matemáticas* y su enseñanza y aprendizaje entre alumnos y maestros.

Alba Thompson, establece en su modelo de tres niveles una caracterización más integrada en cuanto a las relaciones entre la conceptualización de las matemáticas, por un lado, y el rol del profesor, el rol del alumno, el significado del aprendizaje matemático y las evidencias que ese aprendizaje pudiera tener, por otro. Cabe aclara que este modelo se construyó mediante un estudio longitudinal de cinco años de duración con cinco profesores en servicio y siete en formación.

En el caso del modelo construido por Carrillo y Contreras, podemos observar como estos investigadores toman los tres tipos propuestos por Ernest en relación a la conceptualización de matemáticas; pero su modelo de categorías e indicadores propone cuatro tendencias que detalladamente caracterizan los "modelos mentales" (Carrillo /Contreras, 1995, p.82) de los profesores de matemáticas. Puede considerarse este tercer modelo como el más refinado dada la especificidad y la cantidad de caracterizadores considerados.

Por lo que respecta al trabajo de investigación llevado a cabo en esta tesis, no se asume explícitamente ninguno de estos tres modelos para caracterizar las conceptualizaciones de los profesores, en parte porque no se centran en la demostración matemática, ni en la demostración en geometría euclidiana en particular; sin embargo la revisión y el análisis de ellos permitieron establecer algunos de los criterios con los que la investigación se llevó a cabo, así como a elaborar parte del instrumento de investigación, y algunos elementos conceptuales con los que se analizó la información obtenida. Particularmente, del trabajo de Carrillo y Contreras (1995) se ha tomado la idea fundamental para elaborar el concepto de "unidades de significado", (*unidades de información*, apartado 2.4.1) así como el reconocimiento de la necesidad de llevar a cabo el análisis de la información bajo diferentes criterios de clasificación.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 La Población de Profesores

La población de profesores sujeta a esta investigación tiene las siguientes características:

A) La población investigada está constituida por 10 profesoras (el 19 6 %) y 41 profesores (el 80.4 %).

B) La cantidad de planteles representada por esta población de profesores es de 30, dos planteles representados por seis profesores cada uno, un plantel representado por cinco profesores, dos planteles representados por tres, cuatro representados por dos profesores y los restantes 21 planteles representados por un profesor

C) El 96 % de la población tienen estudios en el nivel de licenciatura, el 41 % manifiesta explícitamente estar titulado, el 14 3 % son pasantes, el 6 % son estudiantes o tiene estudios inconclusos y el 35.3 % no especifica su situación en cuanto a sus estudios de licenciatura.

D) Dos de los profesores de la población tiene estudios en el nivel de maestría, uno con grado y otro como estudiante.

E) Dentro de la población no existe profesor alguno con estudios en el nivel de doctorado.

F) El 21.6 % tiene estudios en al menos una especialización, y 29.4 % tienen estudios de diplomado.

G) El 74 5 % ha cursado una carrera en el área de ingeniería y ciencias físico-matemáticas, el 10 % pertenece al área de ciencias económico-administrativas, el 8 % han cursado estudios de licenciatura en el área de ciencias médico-biológicas, además existe un profesor con estudios en el área de ciencias de la informática.

H) En relación a la experiencia docente se tienen los siguientes resultados: En promedio la experiencia docente en matemáticas de los profesores de la población es de ocho años, el mínimo observado es de cero años y el máximo es de 25 años En promedio la cantidad de asignaturas de matemáticas impartidas por los profesores de la población es de cuatro, y el número de ocasiones en que se ha impartido la asignatura de Matemáticas II - Geometría Plana y Trigonometría es, en promedio, de cinco. La experiencia docente general, (la experiencia docente que los profesores han acumulado en otras asignaturas diferentes a las de matemáticas) es en promedio de diez años, y el promedio de asignaturas impartidas es de cuatro.

3.2 La Metodología Empleada

La metodología seguida en ésta investigación es una metodología de tipo cualitativa tanto en las características generales que presenta como en los propósitos que persigue En esta investigación no se pretende probar teorías o hipótesis, en todo caso se intenta generar alguna hipótesis de trabajo para una investigación posterior. Es el propio investigador quien interpreta la información recabada bajo ciertos criterios establecidos dentro de la investigación misma. Su propósito es de exploración y es también descriptivo, en el sentido de que se trata de identificar y presentar un catálogo o una caracterización de las conceptualizaciones acerca de la demostración en geometría euclidiana que tienen los profesores participantes en la investigación, en base a los significados que ellos mismos le otorgan.

Además de lo anterior, también es importante señalar que la población de profesores participante no fue seleccionada mediante algún método de muestreo, se buscó el momento en el que se tuviese un grupo de profesores concentrado en determinado lugar, esto se dio en la reunión de la Academia Regional de Matemáticas llevada a cabo en el mes de Octubre de 1998 en uno de los planteles de la DGETI en el Distrito Federal, en dicho evento fue posible recuperar 25 cuestionarios contestados. Con objeto de contar con una población mayor, se aplicaron más cuestionarios a profesores por separado, tomando como único criterio de selección el que fuesen profesores de las Academias Locales de Matemáticas en alguno de los planteles del D.F.

Por otra parte, la información que cada profesor ha proporcionado referida a su conceptualización de la demostración en geometría euclidiana, es decir, su respuesta a la pregunta ¿Qué es la demostración en geometría euclidiana?; ha sido separada en "unidades de significado", (ver el apartado 3.1.1). Esta fragmentación de las respuestas tiene el objeto de establecer asociaciones con los rasgos indicados en la conceptualización de referencia y con las unidades de significado identificadas en las respuestas de la población participante.

3.3 Elaboración del Instrumento de Investigación

El instrumento utilizado en este trabajo de investigación se presenta en el Anexo No 1, y lo constituye un cuestionario en el que se solicita a los profesores información en tres aspectos generales:

A) Situación Laboral y Formación Profesional
B) Experiencia Docente en Matemáticas y Experiencia Docente en General
C) Conceptualización de Demostración en Geometría Euclidiana y Conceptualización de Matemáticas

A) Situación Laboral y Formación Profesional.

1.- Nombre

2.- Plantel en el que labora
3.- Turno
4.- Categoría de la plaza que ostenta
5 - Formación Profesional

Estos datos tienen la finalidad de identificar a cada profesor dentro de la población participante en la investigación El cuarto dato (categoría de la plaza del docente) se ha considerado con la intención de establecer alguna relación entre este aspecto y la conceptualización que el profesor posee; de manera similar el quinto dato tiene la finalidad de establecer alguna relación entre la preparación profesional del profesor y la conceptualización que ha desarrollado.

B) Experiencia en Matemáticas y Experiencia Docente en General:

6.- Experiencia docente en matemáticas
a) Años como docente de matemáticas
b) Asignaturas impartidas con mayor frecuencia, indicando el nivel escolar
c) Número de ocasiones en que el profesor ha impartida la asignatura de Matemáticas II - Geometría Plana y Trigonometría

7.- Experiencia docente en general (excepto en matemáticas)
a) Años como docente
b) Asignaturas impartidas con mayor frecuencia, indicando el nivel escolar

También aquí la finalidad al solicitar esta información, es la de relacionar la experiencia docente que el profesor posee con la conceptualización que ha desarrollado.

C) Conceptualización de Demostración en Geometría Euclidiana y de Matemáticas:

8 - ¿Qué es la demostración en geometría euclidiana?
9.- ¿Qué son las matemáticas?

La pregunta número 8, que es la pregunta central para la investigación, se ha planteado como una pregunta abierta con la intención de que cada profesor conteste libremente, sin tratar de orientar su respuesta en alguna dirección. La pregunta número 9 se ha incluido en este instrumento con la finalidad de saber si la demostración es considerada dentro de la conceptualización de matemáticas que cada profesor tiene, como uno de sus rasgos característicos.

3.4 Pilotaje del Instrumento y Aplicación de la Versión Definitiva

Para evaluar la eficacia del instrumento de investigación se aplicó la primera versión de éste a una población de 10 profesores; el cuestionario incluyó, en esta primera aplicación, un cuarto aspecto en el que se solicitó a los participantes anotar sus observaciones en lo referente a:

a) El formato del cuestionario
b) El contenido del cuestionario
c) El propósito del cuestionario
d) Otros aspectos o sugerencias para mejorar el cuestionario

Estos cuestionarios se aplicaron personalmente por el investigador, a un grupo de 10 profesores y fueron devueltos una semana después. De estos cuestionarios aplicados fue posible recuperar 6. La información obtenida en esta primera aplicación permitió modificar el instrumento en las partes que se refieren a continuación

a) La instrucción general, esto es el primer párrafo que se lee en el cuestionario, haciendo mayor énfasis en la importancia de que las conceptualizaciones proporcionadas por cada profesor, fuesen personales, sin necesidad de recurrir a alguna fuente externa de información.

b) La parte en la que se solicita información acerca de la experiencia docente, el segundo aspecto considerado, generaba confusión, por lo que se invirtió el orden original de los datos identificados en la versión final con los números 6 y 7, enfatizando, además, su diferenciación.

De esta manera se obtuvo la versión definitiva del instrumento

Se aplicaron en total 75 cuestionarios, de estos se recuperaron 54, de los recuperados se descartaron tres debido a que las conceptualizaciones dadas por los profesores respectivos, corresponden a citas que aparecen en textos conocidos. Esto originó que se contara finalmente con 51 cuestionarios, mismos que constituyen el material de investigación.

3.5 Conceptualización de Referencia

Para establecer una conceptualización acerca de la demostración en geometría euclidiana que funcionara como un marco de referencia con el cual comparar las conceptualizaciones de los profesores, se llevó a cabo un proceso de recopilación de diversos planteamientos hechos por diferentes autores e investigadores en relación al significado de la demostración en la geometría euclidiana; esta información fue clasificada y comparada hasta obtener la conceptualización de referencia como un extracto de lo que los autores e investigadores plantean.

En una primera versión la conceptualización quedo conformada por 19 rasgos característicos, provenientes de siete autores; en una segunda versión la conceptualización quedo constituida por cinco rasgos característicos que para efectos de comparación con las conceptualizaciones que cada profesor expone en su respuesta, se subdividieron en 12 rasgos más específicos y fundamentales. El proceso aquí referido se presenta en el Anexo No. 2. La conceptualización de demostración en geometría euclidiana finalmente adoptada es la siguiente.

1.1) La demostración en la geometría euclidiana es una cadena o secuencia deductiva de proposiciones.
1.2) Su finalidad principal es validar la proposición que se quiere probar, es decir de un teorema.

2.1) Existen proposiciones matemáticas asumidas, estas son las definiciones, los axiomas y los postulados.
2.2) Existen proposiciones de la lógica clásica asumidas, estas son las reglas de inferencia.

3.1) Las entidades o conceptos geométricos a los que se refieren las proposiciones pueden ser términos primitivos o comunes, que no se definen,
3.2) o pueden ser términos definidos, que se construyen a partir de los primeros.

4.1) Cada proposición en la secuencia deductiva es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido,
4.2) o es deducida desde una o más proposiciones precedentes en la secuencia,
4.3) o bien está constituida por un teorema ya demostrado.

5.1) El conjunto de axiomas asumidos debe ser consistente.
5.2) El conjunto de axiomas asumidos debe ser independiente.
5.3) El conjunto de axiomas asumidos debe ser completo.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN Y RESULTADOS

4.1 Análisis de la Información

Las respuestas que los profesores dieron a la pregunta central de esta investigación (¿Qué es la demostración en geometría euclidiana?) presentan diversas características en cuanto a extensión, claridad, objetividad y calidad (en términos de la conceptualización de referencia y de los errores conceptuales identificados en cada respuesta). Algunos ejemplos textuales de éstas respuestas son los siguientes:

1) "Es la forma de Verificar las solución a las proposiciones que se plantean."

6) "Es el proceso sistemático, por el cual se trata de comprobar una hipótesis sobre el comportamiento de las figuras geométricas. y a partir de su resultado generar teoremas y leyes"

13) "ES LA APLICACION DE LOS TEOREMAS Y POSTULADOS QUE REQUIEREN UN RAZONAMIENTO ASI TAMBIEN ALGUNAS DEFINICIONES PERO TODO EN FORMA ORDENADA Y LOGICA"

29) "Es un proceso que se da paso a paso siguiendo axiomas, postulados, teoremas aplicados en las diferentes figuras geométricas

La demostración es comprobar y justificar las formas con operaciones aritméticas, algebraicas, aplicadas en axiomas, postulados, teoremas. tener un seguimiento preciso y sistematico, ordenado de justificar un problema geometrico o cuerpo geometrico"

32) "En Geometría Euclidiana se ven los "teoremas" que tienen que ser demostrados.
Por lo que es la ciencia que se basa en los teoremas y su demostración.
La demostración consiste en hacer un análisis profundo de lo que se menciona en el teorema."

50) " Es el proceso mediante el cual se acepta como válida ó se niega una afirmación previamente establecida.
Para aceptar ó negar dicha afirmación, es necesario basarse en premisas previamente demostradas y aceptadas como válidas.
la geometría euclidiana tiene como base para su demostración verdades aceptadas como ciertas sin necesidad de validarlas, estas afirmaciones son los postulados y axiomas a partir de éstos se construyen nuevas leyes, se validan teoremas y se determinan corolarios. estos a su vez pueden validar otros tantos etc."

(La ortografía y la puntuación son las utilizadas por cada profesor en su respuesta)

Se llevaron a cabo varias etapas de análisis del total de respuestas, para obtener finalmente un Modelo de Tendencias en las Conceptualizaciones acerca de la Demostración en Geometría Euclidiana. A continuación se describen cada una de éstas etapas y se reportan los resultados obtenidos

4.1.1 Fragmentación de las Respuestas en Unidades de Significado

Se entiende en este trabajo por *"unidades de significado"* a las frases u oraciones que forman parte de cada respuesta y que expresan una idea independiente y concreta en relación a diferentes aspectos involucrados con la pregunta planteada (Carrillo y Contreras. *unidades de información*, apartado 2.4.1). La finalidad de esta fragmentación es comparar y de ser posible asociar las unidades de significado con los rasgos establecidos en la conceptualización de referencia y con las unidades de significado identificadas entre todas las respuestas proporcionadas.

Citaremos aquí dos ejemplos para mostrar esta fragmentación. Las respuestas identificadas con los números 6 y 29, que aparecen en el apartado anterior, se han fragmentado de la siguiente manera:

6)
a) ES EL PROCESO SISTEMÁTICO
b) POR EL CUAL SE TRATA DE COMPROBAR UNA HIPÓTESIS
c) SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS
d) Y A PARTIR DE SU RESULTADO GENERAR TEOREMAS Y LEYES

29)
a) ES UN PROCESO QUE SE DA PASO A PASO
b) SIGUIENDO AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS
c) APLICADOS EN LAS DIFERENTES FIGURAS GEOMÉTRICAS
d) LA DEMOSTRACIÓN ES COMPROBAR Y JUSTIFICAR LAS FORMAS CON OPERACIONES ARITMÉTICAS, ALGEBRAICAS,
e) APLICADAS EN AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS
f) TENER UN SEGUIMIENTO PRECISO Y SISTEMATICO, ORDENADO
g) DE JUSTIFICAR UN PROBLEMA GEOMÉTRICO, O CUERPO GEOMÉTRICO

La respuesta 6 se ha fragmentado en cuatro unidades de significado, mientras que la número 29 en siete unidades.

4.1.2 Criterios de Clasificación de las Unidades de Significado

Una vez delimitadas las unidades de significado de cada respuesta, se paso a la etapa de sistematización de estas, para lo cual, bajo un primer criterio de clasificación, se agruparon unidades de significado que representaran ideas o rasgos equivalentes entre sí, comparando cada una de ellas con el total de unidades identificadas. Por ejemplo, en las dos respuestas antes mostradas se considera a la demostración en geometría euclidiana como *un proceso o procedimiento ordenado o sistemático* (6-a y 29-a), y también se considera en ambas respuestas que *su finalidad es la de comprobar proposiciones acerca de figuras geométricas* (6-c y 29-d,g). Además se identifican en estas respuestas otros rasgos no coincidentes entre sí.

Bajo un segundo criterio de clasificación, las unidades de significado se analizaron asociándolas a: *un qué, un cómo, un por qué y un para qué*; en relación a la pregunta central Tomando como premisa que las respuestas, en la mayoría de los casos, proporcionaron información más allá de una definición escueta, se consideró entonces conveniente someter el análisis de las respuestas a estos criterios. Ejemplificando nuevamente con las dos respuestas ya mostradas, la primer unidad de significado de la respuesta número 6 se puede asociar a un qué de la demostración, mientras que las tres unidades restantes se asocian a un para qué de la demostración. En la respuesta número 29 también es posible asociar la primer unidad a un qué, la segunda y la tercera a un cómo, y la sexta y séptima unidades a un para qué de la demostración en geometría euclidiana

Además en esta segunda etapa se clasificaron algunas unidades de significado bajo los rubros de: *Referencia Histórica, Referencia Didáctica, Juicio de Valor* y *Error Conceptual*. Ejemplos:

-Referencia Histórica

2) ...
c) LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA ESTA SUSTENTADA EN LA OBRA MÁS FAMOSA DE TODOS LOS TIEMPOS TITULADA "ELEMENTOS" QUE CONTIENE 13 LIBROS.

- Referencia Didáctica:

9)
b) DADO QUE LOS TEOREMAS YA ESTAN DEMOSTRADOS
c) AL ALUMNO SE LO DAMOS COMO RECETA
d) SIN DARLES NINGUNA OTRA OPCIÓN DE RAZONAMIENTO.

36)
d) ESTA DEMOSTRACIÓN DEBE SER SIGNIFICATIVA Y NO MEMORIZADA SIN SU COMPRENSIÓN.

- Juicio de Valor:

23)
a)ES UNA PARTE DONDE SE REQUIERE MUCHOS CONOCIMIENTOS PARA PODER LLEGAR A APLICARLA
SE REQUIERE DE HABILIDADES PARA DEMOSTRARLA...
c) SIN EMBARGO ES MUY HERMOSA ESTA PARTE DE LA GEOMETRÍA
d) Y NOS PUEDE PROPORCIONAR ESA ABSTRACCIÓN QUE REQUIEREN LAS MATEMÁTICAS.

-Error Conceptual:

26) . .
c)A PARTIR DE ESTO PODEMOS AFIRMAR QUE TODOS LOS POSTULADOS DE EUCLIDES SON COMPROBADOS PARA LLEGAR A UNA HIPÓTESIS COMPROBADA O VERDADERA

Finalmente se procedió a comparar las unidades de significado componentes de cada respuesta con los rasgos definidos en la conceptualización de referencia, para tener un registro por profesor de los rasgos identificados de esta. Este proceso en particular se describe y se ejemplifica en el siguiente apartado.

4.1.3 Los Rasgos Identificados de la Conceptualización de Referencia

De los doce rasgos específicos definidos en la conceptualización de referencia, seis son identificados o son mencionados por los profesores en sus respuestas, el que mayor frecuencia presenta (20), es el rasgo 1.2, en éste se indica que *la finalidad esencial de la demostración es validar la proposición que se quiere probar.* En las respuestas de los profesores se observan diferentes variantes de este aspecto:

- En algunos casos la respuesta se concreta a señalar que la demostración es la verificación, la comprobación o la justificación de las proposiciones que se plantean, por ejemplo:

1)
a) ES LA FORMA DE VERIFICAR LAS SOLUCIONES A LAS PROPOSICIONES QUE SE PLANTEAN.

27)
a) ES LA CONCLUSIÓN POR MEDIO DE UN PROCEDIMIENTO LOGICO
b) PARA LA DEMOSTRACIÓN DE UNA PROPOSICIÓN DE UN PROBLEMA GEOMÉTRICO.

- En otras respuestas, el hecho de comprobar o demostrar se aplica a las proposiciones que debieran considerarse como asumidas (axiomas, postulados, y las hipótesis correspondientes a cada teorema), esto se ha considerado en éste trabajo, como un error conceptual, por ejemplo:

15)
a) RAZONAMIENTO DE LOS PROBLEMAS
b) PARA COMPROBAR POR MEDIO DE APLICACIONES MATEMÁTICAS
c) LOS TEOREMAS, AXIOMAS, POSTULADOS, COROLARIOS, ETC.

45)
a) ES EL PROCESO A TRAVES DEL CUAL SE DA POR VERDADERO O FALSO UNA HIPOTESIS .

- En otras respuestas los profesores señalan que la demostración permite generar nuevas proposiciones:

35)
a) SI CIERTAS RELACIONES GEOMÉTRICAS SON CONOCIDAS
b) OTRAS PODRÁN SER ENCONTRADAS POR MEDIO DEL RAZONAMIENTO .

37)..
b) PARA LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA LA DEMOSTRACIÓN O DEDUCCIÓN ES EL PILAR FUNDAMENTAL
c) YA QUE ESTA ES SU ARMA PRINCIPAL PARA OBTENER NUEVOS RESULTADOS MATEMÁTICOS A PARTIR DE LOS YA CONOCIDOS

- Otra variante más, asociada con el rasgo 1.2, es la que considera como objeto de la demostración las figuras geométricas y no las proposiciones en sí:

28)
a) ES LA COMPROBACIÓN MATEMÁTICA
b) MEDIANTE OPERACIONES, TEOREMAS, ECUACIONES,
c) DE UNA RECTA O FIGURA GEOMÉTRICA DENTRO DE UN PLANO O EL ESPACIO.

29) .
d) LA DEMOSTRACIÓN ES COMPROBAR Y JUSTIFICAR LAS FORMAS CON OPERACIONES ARITMÉTICAS, ALGEBRAICAS, ...

El segundo rasgo que con mayor frecuencia (19) se ha identificado en las respuestas de los profesores es el rasgo 2.1, en el que *se establece la existencia de proposiciones matemáticas asumidas, a saber, definiciones, axiomas y postulados*; no en todas las respuestas se indica claramente que dichas proposiciones se asumen sin necesidad de demostración, lo que si se menciona, en general, es que éstas proposiciones son las que sirven para apoyar o sustentar la demostración como un proceso, es decir se consideran como el principio del que parten las demostraciones. Ejemplos de esto son:

10)
a) LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA EUCLIDIANA ES OBJETIVO
b) APOYÁNDOSE BÁSICAMENTE EN TEOREMAS, POSTULADOS, AXIOMAS, COROLARIOS, DEFINICIONES, ETC ..

13)
a) ES LA APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS Y POSTULADOS
b) QUE REQUIEREN UN RAZONAMIENTO
c) ASÍ TAMBIÉN ALGUNAS DEFINICIONES
d) PERO TODO EN FORMA ORDENADA Y LÓGICA

47)
a) ES EL ESTUDIO FORMAL DE LAS PROPIEDADES Y DE LAS FORMAS REGULARES
b) APLICANDO UN RAZONAMIENTO DEDUCTIVO
c) PARTIENDO DE DEFINICIONES Y POSTULADOS Y AXIOMAS ..

El tercer rasgo de los incluidos en la conceptualización de referencia que se menciona en las respuestas a la pregunta: ¿Qué es la demostración en geometría euclidiana?, es el identificado como el 2.2, que en este caso tiene una frecuencia de 10, y se refiere a *la existencia de proposiciones de la lógica asumidas, es decir, de reglas de inferencia*. En las respuestas de los profesores, en general, no se indica claramente que estas reglas de inferencia se asuman y se apliquen al proceso demostrativo, sino que se considera la presencia o la utilización de un cierto criterio lógico o de una forma de razonamiento ordenado para llevar a cabo la demostración, como ejemplos de esto se dan los siguientes:

25)
a) ES LA JUSTIFICACIÓN DE UNA TEORÍA
b) MEDIANTE EL USO DEL RAZONAMIENTO Y DE AXIOMAS Y TEOREMAS
c) EN FORMA ORDENADA Y CONCISA

43)
a) EL HECHO DE TENER "CONCEPTOS MATEMÁTICOS" COMO ALGORITMOS, FIGURAS GEOMÉTRICAS, CURVAS ETC. ES NECESARIO DEMOSTRAR QUE ALGUN CONCEPTO ES VALIDO
b) UTILIZANDO EL RAZONAMIENTO LÓGICO ...

El siguiente de los rasgos de la conceptualización de referencia identificado en las respuestas de los profesores, 7 menciones en este caso, indica que: *la demostración en la geometría euclidiana es una cadena o secuencia deductiva de proposiciones*, este constituye el rasgo 1.1. En algunos casos esta referencia no es explícita, aunque si se reconoce el carácter deductivo de la demostración. Ejemplos:

18)
a) ES UN PROCESO LÓGICO DE RAZONAMIENTO
b) EN QUE SE ENCADENA UNA SERIE DE PROPOSICIONES (DEFINICIONES, AXIOMAS, POSTULADOS Y TEOREMAS)
c) PARA LLEGAR A VERIFICAR LA VERACIDAD DE UNA NUEVA PROPOSICIÓN (TEOREMA)

19)..
c) ESTA OBRA (Los Elementos de Euclides) SIRVIÓ DE BASE PARA ESTUDIAR LA GEOMETRÍA
d) DE MANERA QUE EN BASE A LOS AXIOMAS Y POSTULADOS SE PUEDE LLEGAR A LA DEM. DE LOS TEOREMAS
e) QUE A SU VEZ SIRVEN PARA DEMOSTRAR OTROS TEOREMAS...

Los otros dos rasgos definidos en la conceptualización de referencia que son mencionados en las respuestas de los profesores, son el 4.1: *"cada proposición en la secuencia deductiva es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido"*, y el rasgo 4.3: *"o bien (cada proposición en la secuencia deductiva) está constituida por un teorema ya demostrado"*. En total son siete las menciones que se encontraron a estos aspectos, algunos ejemplos son:

39)
d) EN ESTE TIPO DE ARGUMENTOS SE USAN RESULTADOS DE OTRAS DEMOSTRACIONES CUYA CERTEZA ES CONOCIDA LLAMADOS TEOREMAS
e) Y PROPOSICIONES ACEPTADAS EXPLÍCITAMENTE POR SER EVIDENTES, LLAMADAS AXIOMAS.

46)
a) ES COMPROBAR UN RESULTADO ESTABLECIDO
b) POR MEDIO DE UN RAZONAMIENTO LÓGICO SECUENCIAL
c) A TRAVÉS DE CONCEPTOS YA PREVIAMENTE DEMOSTRADOS

50)
a) ES EL PROCESO MEDIANTE EL CUAL SE ACEPTA COMO VALIDA O SE NIEGA UNA AFIRMACIÓN PREVIAMENTE ESTABLECIDA
b) PARA ACEPTAR O NEGAR DICHA AFIRMACIÓN ES NECESARIO BASARSE EN PREMISAS PREVIAMENTE DEMOSTRADAS Y ACEPTADAS COMO VALIDAS .

En promedio las menciones a los rasgos de la conceptualización de referencia es de 1.28 por profesor, aunque son 19 los profesores (37 2 %) que no hacen ninguna mención a al menos uno de ellos, 13 profesores (25.5 %) se refieren sólo a uno, 10 (19.6 %) se refieren a dos de los rasgos definidos en la conceptualización, 7 (13.72 %) hacen mención de tres de los rasgos, un profesor se refiere a cuatro rasgos y otro identifica cinco de esos rasgos.

A manera de resumen, de los rasgos considerados en la conceptualización de referencia son fundamentalmente dos los que se mencionan en las respuestas: el que se refiere a la finalidad de esta demostración, (1.2), con 20 menciones, y el referido a su fundamentación en proposiciones asumidas, (2.1), con 19 menciones. Existen rasgos de la conceptualización de referencia que en ningún caso son mencionados, como son los referidos al origen de las entidades o los conceptos geométricos (3.1 y 3 2), y los referidos a las condiciones que debe cumplir el conjunto de axiomas (5 1, 5.2 y 5.3). Dos rasgos más sólo son identificados por la quinta parte de la población aproximadamente, el referido a la naturaleza deductiva de la demostración, (1.1), con 7 menciones, y el referido a su fundamentación lógica mediante reglas de inferencia específicas, (2.2), con 10 menciones.

4.1.4 Otros Rasgos Identificados en las Respuestas de los Profesores

- Entre los errores conceptuales más frecuentes presentes en las conceptualizaciones analizadas, está el que se refiere a la demostración o a la comprobación de las proposiciones que debieran ser asumidas en un sistema axiomático deductivo, tal como el de la geometría euclidiana, o bien a la no identificación clara de que es la tesis del teorema y no la hipótesis lo que se demuestra, son siete las unidades de significado así clasificadas Otro error conceptual que se observa en algunas de las respuestas es una confusión entre geometría plana y geometría analítica, ya que se afirma que la demostración consiste en relacionar ecuaciones con figuras.

- Las referencias históricas en general aluden al trabajo de Euclides y a su obra Los Elementos, o a la transformación de la geometría empírica en geometría deductiva, se encontraron cuatro de estas referencias.

- Algunas referencias didácticas muestran la necesidad de los profesores de emplear métodos de demostración alternativos a la demostración lógica, o bien, dejan entrever su preocupación al no poder llevar a cabo otro tipo de demostraciones que no sean las demostraciones deductivas presentadas comúnmente en los textos, otras referencias clasificadas dentro de este rubro señalan la importancia de que los estudiantes manipulen objetos, o bien que se les de oportunidad de asociar un significado a la demostración

- Sólo dos de los profesores que constituyen la población investigada, mencionan a la demostración como un rasgo característico de las matemáticas al dar su conceptualización de éstas.

4.2 Caracterización de las Tendencias de las Conceptualizaciones de los Profesores acerca de la Demostración en Geometría Euclidiana.

El análisis de las respuestas a la pregunta central de la investigación descrito en el apartado anterior, junto con la revisión de varios modelos para caracterizar las conceptualizaciones de los profesores acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, permitieron obtener un *Modelo de Caracterización de las Tendencias en las Conceptualizaciones de los Profesores acerca de la Demostración en Geometría Euclidiana*. Cabe aclarar que el término "tendencia" se utiliza en este trabajo en el sentido de la dirección o la orientación que pudiera tener la conceptualización que cada profesor manifiesta en sus respuestas, (García-Pelayo, 1993: "fuerza que orienta la actividad del hombre en un sentido determinado") y no en el sentido de la evolución en el tiempo de dichas conceptualizaciones

Cada una de las tendencias identificadas, que en total son ocho, pretenden por un lado, sintetizar rasgos o características similares que son atribuidas por los profesores a la demostración en geometría euclidiana y por otro lado, dar una idea de lo que cada respuesta como un todo significa desde un punto de vista conceptual, es decir, se intenta explicar la forma predominante en que concibe cada profesor esta clase de demostración:

I) Se considera a la demostración como una manera de **comprobar o establecer la veracidad de una proposición geométrica**. Las respuestas de los profesores asociadas a esta tendencia incluyen referencias a diferentes métodos de comprobación como empíricos, aritméticos, gráficos y algebraicos. Se conceptualiza la demostración con verbos como comprobar, verificar, demostrar, explicar, justificar, hacer entender, llegar a una conclusión. Se hace referencia a la comprobación de diferentes clases de proposiciones, desde axiomas y postulados hasta teoremas y corolarios Esta tendencia es la que mayoritariamente aparece en las respuestas de los profesores, su frecuencia dentro de la población investigada es de 23. Ejemplos:

3) -*ES* EL HECHO DE ESTAR SEGURO QUE LO QUE SE DICE ES CIERTO MEDIANTE PROPOSICIONES VERDADERAS

14) -ES UNA FORMA DE EXPLICAR
-PARA ENTENDER LOS TEOREMAS, POSTULADOS Y TEORÍAS
-QUE HAY EN ESTA RAMA DE LAS MATEMÁTICAS

II) Se considera la demostración euclidiana como algún tipo de **procedimiento predeterminado o un proceso** en el que se presentan etapas ordenadas de acuerdo a cierta lógica. A decir de los profesores, en algunos casos este proceso tiene la función de establecer la validez de una proposición, en otros se considera como un algoritmo que se debe seguir, o se considera, también, como un proceso heurístico. En este caso se han considerado 13 respuestas en correspondencia con esta tendencia, ejemplos.

17) -ESTRÍCTAMENTE HABLANDO LO ÚNICO QUE SE HACE ES MOSTRAR LAS DEMOSTRACIONES QUE UNO SE APRENDE
-Y EN POCAS OCASIONES REALMENTE PUEDO HACER UNA DEMOSTRACIÓN SALIDA DE UN PROCESO ELABORADO POR MI
-MUESTRO LO DEMOSTRADO ...

31) -SERIE DE PASOS
-QUE PARTEN DE UNA HIPÓTESIS
-*LA CUAL SE AUXILIA DE DEFINICIONES, AXIOMAS, POSTULADOS,*
-PARA COMPROBAR LA TESIS DE UNA PROPOSICIÓN

III) Se considera la demostración euclidiana como una **deducción o algún tipo de razonamiento**. En algunos casos se hace *referencia explícita a un razonamiento lógico* o a la obtención de relaciones geométricas a partir de otras establecidas, en otros se habla de razonamiento ordenado o de razonamiento puro. Se han asociado a esta tendencia 15 de las respuestas de los profesores, ejemplos.

21) -LA DEMOSTRACIÓN EN G. EUCLIDIANA ES EL RAZONAMIENTO PURO CON ALTO GRADO DE ABSTRACCIÓN
-QUE UTILIZA PARA ELLO LOS AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS, COROLARIOS, ETC

51) -ES LA DEDUCCIÓN DE UNA VERDAD O DE *UN NUEVO CONOCIMIENTO*
-BASADO EN LAS RELACIONES ALGEBRAICAS CON LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS FIGURAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

IV) *Se considera a la demostración como la* **aplicación de teoremas y postulados, o como una forma de tratar problemas** matemáticos o de ingeniería, utilizando proposiciones verdaderas. Las respuestas de los profesores identificadas en esta tendencia mencionan diferentes usos de la aplicación de teoremas: lograr un objetivo, explicar la parte conceptual de un problema, entre otros; o diferentes formas de llevar a cabo esa aplicación: ordenada, sistematizada, lógica, o como una herramienta para resolver problemas. Con esta tendencia se han asociado 18 respuestas, ejemplos:

22) -ES LA APLICACIÓN DE AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS Y DEFINICIONES
-EN FORMA SISTEMATIZADA Y ORDENADA

34) -LA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA EUCLIDIANA ES LA HERRAMIENTA BÁSICA PARA EL DESARROLLO DE *PROBLEMAS DE INGENIERÍA*
-EN LA CUAL LA SIMPLIFICACIÓN SE DA EN LOS DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE,
-POR MEDIO DEL CUAL UNO PUEDE DETERMINAR VALORES IMPLÍCITOS QUE SOLO SE PUEDEN DETERMINAR POR SUS FORMAS GEOMÉTRICAS PLANAS

V) Se considera la demostración como el **estudio formal de las propiedades y de las formas regulares**. Las respuestas de los profesores identificados con esta tendencia hacen alusión al estudio de las figuras o las formas geométricas y de sus *propiedades, o al estudio* científico de esos aspectos. Se tienen 6 respuestas en correspondencia con esta tendencia, ejemplos:

48) -LO QUE SE TIENE QUE HACER EN BASE A LO CIENTÍFICO
-PORQUE ANTES SE HACIA EMPÍRICAMENTE

49) -ES LA APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO EN BASE A AXIOMAS Y POSTULADOS
-RELACIONADO CON PROPIEDADES GEOMÉTRICAS EN UN PLANO O EL ESPACIO (TRES DIMENSIONES)

VI) Se considera que la demostración en geometría euclidiana consiste en **establecer relación entre expresiones algebraicas y figuras geométricas** Son 5 las respuestas identificadas con esta tendencia, ejemplo.

40) -MEDIANTE UNA SERIE DE ECUACIONES ALGEBRAICAS TRADUCIRLAS A UNA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
-RELACIONAR UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA CON LA GEOMETRÍA
-DANDO COMO RESULTADO LA CORRECTA INTERPRETACIÓN DE UNA ECC EN SU FORMA GEOMÉTRICA

VII) Se considera la demostración como **cierta clase de análisis** de las figuras geométricas o de los enunciados de los teoremas. En este caso son 3 las respuestas asociadas, ejemplo.

32) -EN G EUCLIDIANA SE VEN LOS TEOREMAS QUE TIENEN QUE SER DEMOSTRADOS
-POR LO QUE ES LA CIENCIA QUE SE BASA EN LOS TEOREMAS Y SU DEMOSTRACIÓN
-LA DEMOSTRACIÓN CONSISTE EN HACER UN ANÁLISIS PROFUNDO DE LO QUE SE MENCIONA EN EL TEOREMA

VIII) Se considera la demostración como una forma de **cuantificación universal o un medio para entender el universo** abstracto y concreto. Dos de las respuestas de los profesores se identifican con esta tendencia, ejemplo:

4) -ES LA CUANTIFICACIÓN DE TODO OBJETO EXISTENTE EN EL UNIVERSO Y AL PROPIO UNIVERSO

La mayoría de las conceptualizaciones investigadas (55 %) se han asociado con más de una tendencia, el promedio es de 1.73 tendencias asociados por respuesta. Al parecer, no existen tendencias contradictorias entre las propuestas, en todo caso se consideran complementarias en dos sentidos; en el sentido de que las conceptualizaciones reflejadas en la mayoría de las respuestas no están totalmente identificadas con alguna tendencia en particular, sino que se asocian a dos o más tendencias, y en el sentido de que el conjunto de tendencias intenta proporcionar un panorama general de las formas en que se concibe la demostración en geometría euclidiana entre la población de profesores investigada.

En el Anexo No. 4 se presenta una tabla resumen de la fragmentación que se ha hecho de cada una de las respuestas en "unidades de significado", de su clasificación en base a los criterios establecidos, y de las asociaciones establecidas con los rasgos de la conceptualización de referencia y con el modelo de tendencias elaborado en este trabajo de investigación.

4.3 Las Conceptualizaciones acerca de la Demostración en Geometría Euclidiana, en Relación al Perfil Profesional y la Experiencia Docente de los Profesores.

Con el objetivo de analizar las conceptualizaciones de los profesores en relación con la información adicional que han proporcionado en los cuestionarios, se ha optado por definir *la "calidad" de una conceptualización como la cantidad de asociaciones establecidas, tanto con la conceptualización de referencia, como con las tendencias identificadas.*

- En términos generales, el perfil profesional y el nivel de estudios alcanzado por cada profesor no es indicativo de la calidad de su conceptualización, excepción hecha de algunos de los profesores que han cursado el diplomado en Educación Matemática, llama la atención en este sentido, que el profesor con la conceptualización de mayor calidad (cinco rasgos identificados y cuatro tendencias), no tiene una licenciatura, pero si ha cursado dicho diplomado; otros tres profesores que han cursado ese diplomado tienen también conceptualizaciones que se podrían considerar como de alta calidad, relativas a la población investigada.

- En cuanto a la experiencia docente, no se puede afirmar que ésta sea indicativa de la calidad de la conceptualización de cada profesor, de hecho se observan casos contradictorios entre profesores con amplia experiencia docente, tanto en matemáticas como en general, que tienen conceptualizaciones pobres, y profesores con relativamente poca experiencia docente cuyas conceptualizaciones son de mayor calidad.

4.4 Comparaciones del Modelo de Tendencias Obtenido con Otros Modelos

- No existe una clasificación normalizada de las percepciones que los maestros tienen de las matemáticas (Mura, 1993); lo que se observa es la existencia de diferentes propuestas para caracterizar las concepciones de los profesores acerca de las matemáticas y de su aprendizaje y su enseñanza.

- Particularmente con respecto a la demostración en geometría, solo se encontró una propuesta elaborada por Luis Radford (1994) para caracterizar las conceptualizaciones que son frecuentes en los alumnos; este modelo consta de tres conceptualizaciones:
- la conceptualización fenomenológica, en la que el aspecto conceptual de los objetos geométricos existe sólo en términos del aspecto figurativo, el cual se restringe a la imagen concreta;
- la conceptualización dinámica-intuitiva, el aspecto conceptual se deslinda del aspecto figurativo, haciendo posible la aparición de representaciones del objeto, la figura adquiere movilidad;
- y la conceptualización abstracta-deductiva, en la que el razonamiento rebasa a la figura, la deducción se hace a partir de propiedades, relaciones o ambas, entre objetos, explícitamente aceptadas como ciertas.

El enfoque de este investigador se centra en el cambio necesario en la conceptualización de los objetos matemáticos, como condición para el entendimiento de la demostración geométrica esencialmente como una prueba lógica.

Al buscar relaciones entre la propuesta de Radford y la elaborada en este trabajo de tesis se observa lo siguiente:

· Tres de las tendencias propuestas, las identificadas con los números V, VI, y VII, tienen relación con la conceptualización fenomenológica en términos del objeto de estudio de la geometría y de la demostración geométrica, es decir, se considera a las figuras geométricas como dicho objeto de estudio.

· La segunda conceptualización que Radford señala, la conceptualización dinámica-intuitiva, pudiera tener relación con la tendencia IV, en el sentido en que bajo esa conceptualización, la figura se convierte en una representación simbólica del concepto, la tendencia IV propone que las conceptualizaciones de los profesores se centran en la aplicación de las proposiciones geométricas en la resolución de problemas o como un método explicativo.

· Por último la conceptualización *abstracta-deductiva, tiene relación con la tendencia III, en* el sentido de conceptualizar la demostración esencialmente como una prueba lógica fundamentada en proposiciones asumidas.

- En términos de la metodología empleada para recabar la información y para analizarla, la investigación aquí descrita es comparable, hasta cierto punto, con la realizada por Roberta Mura (1993), en el cual esta investigadora identifica *doce temas* que surgen de las respuestas de una población de 106 profesores miembros de los departamentos de ciencias matemáticas en universidades canadienses, a la pregunta: ¿Cómo define Ud. las *matemáticas?* Aún cuando las condiciones de la investigación y la conceptualización que se busca analizar son diferentes, se observan coincidencias entre los temas identificados por Mura y las tendencias caracterizadas en este trabajo, como son las siguientes:

· Tanto las matemáticas como la demostración geométrica se conciben como formas de razonamiento.

· La manipulación simbólica y el manejo del lenguaje matemático son referencias con las que se definen los dos conceptos.

· Las matemáticas y la demostración geométrica son medios para resolver problemas y para abstraer modelos de la realidad con los cuales explicarla, así como para crear ciencia y tecnología.

· Ambos conceptos representan el medio que permite enunciar proposiciones verdaderas.

· En ambas investigaciones, una buena parte de las respuestas contienen referencias a más de un tema o tendencia, según sea el caso.

4.5 Conclusiones

- Las conceptualizaciones investigadas muestran una tendencia predominante hacia considerar a la demostración en geometría euclidiana más como una comprobación o verificación de resultados mediante métodos preestablecidos, que como un proceso deductivo y de construcción de la geometría a partir de definiciones, axiomas y postulados.

Esto representa cierta incongruencia con los objetivos especificados en el programa de estudios de la asignatura correspondiente, Matemáticas II -Geometría Plana y *Trigonometría-* (ver el apartado 1.3); en el programa de estudios referido se enfatiza la importancia del aprendizaje y la utilización del método axiomático deductivo de la geometría, para que el estudiante reconozca el carácter sintético de esta rama de las matemáticas y la existencia de una fundamentación lógica necesaria para el establecimiento de proposiciones verdaderas Una condición deseable para alcanzar estos objetivos, será una conceptualización referente a la demostración en geometría euclidiana de los profesores de la asignatura en correspondencia con ello. Es por esto que se plantea la necesidad de revisar, o bien, diseñar programas de actualización para los profesores del área de matemáticas en general, y de geometría plana y trigonometría, en particular

- En términos generales, ni la formación profesional, ni la experiencia docente, son características determinantes de la conceptualización acerca de la demostración en geometría euclidiana entre la población de profesores investigada, sin embargo, algunos de los profesores que han cursado el diplomado en Educación Matemática, han podido desarrollar conceptualizaciones más ricas y acordes con el carácter axiomático deductivo de esta geometría. En cierta medida, este hecho refuerza la necesidad de involucrar a los docentes en programas de formación y actualización de manera que reflexionen acerca de sus propias conceptualizaciones y sistemas de creencias acerca de las matemáticas y de su aprendizaje y enseñanza, como una forma de mejorar el proceso de aprendizaje matemático

- Aún cuando no es generalizable a la población investigada, las respuestas de los profesores muestran su preocupación por dar a la demostración geométrica un significado; de alguna manera, parece ser que este proceso fundamental de la matemática se asume dentro de la práctica docente más como un requisito del programa de estudios, que como un instrumento potencialmente poderoso para el entendimiento y el aprendizaje, es de esperar que un mejor entendimiento de la fundamentación y el significado de la demostración, así como el conocimiento de alternativas a la demostración formal por parte de los profesores, amplie su visión acerca de este aspecto de la matemática y de la geometría en particular y de su enseñanza y su aprendizaje No se pretende plantear que la demostración formal sea el único medio en el ámbito escolar para establecer la validación de proposiciones, en todo caso, como se ha señalado por diferentes autores, la formalización puede llegar como la última etapa del entendimiento matemático; la demostración no formal puede jugar entonces un papel muy importante para lograr dicho entendimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. et al (1979); La Matemática. Su Contenido, Métodos y Significado, Alianza Universidad, Madrid, España.

Berlanga, R./ Bosch, C./ Rivaud J. (1999); Las Matemáticas Perejil de Todas las Salsas, colección *La Ciencia para Todos,* No. 163, Fondo de Cultura Económica, México

Brousseau, G. (sin fecha de edición); Los Diferentes Roles del Maestro; Cecilia Parra e Irma Saiz (compiladoras), Didáctica de las Matemáticas. Aportes y Reflexiones, ed Paidos.

Carrillo, J. /Contreras, L. (1995); Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza, en: *Educación Matemática*, Vol. 7, No. 3, Diciembre, pp. 79-92.

Cohen, M. /Nagel, E. (1993); Introducción a la Lógica y al Método Científico, Amorrortu editores, Buenos Aires, Argentina.

Davis, P. /Hersh, R. (1988); Experiencia Matemática, Editorial Labor S. A , España.

Díaz Godino, J. et al (1991); Área de conocimiento. Didáctica de las matemáticas; colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje; editorial Síntesis, Madrid, España.

Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), Programa de estudios de la asignatura Matemáticas II, México, sin fecha.

Ernest, P. (1988); The Impact of beliefs on the Teaching of Mathematics, Keitel, et al (eds.), Mathematics, Education and Society, UNESCO Science and Technology Education Document Series, No. 35, París, pp. 99-101

Ernest, P. (1991); The Philosophy of Mathematics Education, The Falmer Press, Rankine Road, Baringstoke, Hampshire.

Estrada, J. (1991); Estudio exploratorio sobre el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes del C.C.H., tesis de maestría, UNAM, México.

Estrada, J. (1993); ¿Cómo descubrían los antiguos la demostración de un teorema?; en: Memorias del IV Simposio de Educación Matemática, UNAM, México.

Fernández Pérez M. (1994); *Las tareas de la profesión de enseñar*; Cap. 5: Invitación a la 5ª tarea: Formación Permanente, Investigación, Innovación Educativa. Siglo XXI Editores, Barcelona, España.

Fetisov, A. (1973); La Demostración en Geometría, editorial Limusa-Wiley, S. A., México.

Filloy Yagüe, E. (1998); Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

García Bacca, J. (1992); Euclides Elementos de Geometría I - II, UNAM, primera edición 1944, México.

García-Pelayo, R. (1993); Diccionario Enciclopédico Ilustrado Larousse; Ed. Larousse, S A. de C. V., México

González Freddy E.; (1993); Aprender a enseñar Matemáticas. Elementos para configurar una estrategia; en: *Enseñanza de la Matemática*, Vol 2, No. 2, Agosto, pp. 4-22

Kant, M. (1981); Prolegómenos a toda metafísica del porvenir, Porrúa S A., México

Kline, M. (1994); Matemáticas. La pérdida de la certidumbre, Siglo XXI, México

Martin, G. /Harel, G. (1989); Proof frames of preservice elementary teachers; en: *Journal for Researches in Mathematics Education*, Vol. 20, No. 1, pp. 41-51

Mosterin, J. (sin fecha de edición); Conceptos y Teorías en la Ciencia, Alianza Universidad.

Merriman, G. (1948); Matemática Simplificada, ESPASA-CALPE Argentina, S. A: 1ª edición, Buenos Aires.

Mura, R. (1993); Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematical Sciences, en: *Educational Studies in Mathematics*, No. 25, pp. 375-385, Netherlands.

Radford, L. (1994); La enseñanza de la demostración aspectos teóricos y prácticos, en: *Educación Matemática*, Vol. 6, No. 3, Diciembre, pp. 21-36

Rees, M.(sin datos adicionales); Caracterización de Matemáticas.

Szabó, A. (1962); La Transformación de las Matemáticas en una Ciencia Deductiva y los Inicios de su Fundamentación en Definiciones y Axiomas, Scripta Mathematica, No. 27,

Salinas, J. (1991); Acerca de la Demostración en Geometría, en: *Educación Matemática*, Vol. 3 - No. 3, Diciembre de 1991.

Senk, S. (1985); How well do students write geometry proofs?; en· *Mathematics Teacher*, Vol. 78, No. 6, Septiembre, pp. 448-456

Shavelson, S. (1981); Research on teachers pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior, en: *Review of Educational Research*, Vol. 51, No. 4, págs. 455-498

Stewart, I. (sin fecha de edición); Conceptos de Matemática Moderna, Alianza Editorial.

Suydam, M. (1985); The shape of instruction in geometry. some highlights from research; en· *Mathematics Teacher*, Vol 78, No. 6, Septiembre, pp. 481-486

Vega, L. (1992); ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de la demostración matemática, en: *Mathesis*, No. 8, pp. 155-177

Thompson, A. (1991); The development of teachers' conceptions of mathematicas teaching, en: Proceedings of the 13th Annual Metting of the North American Chapter of the International Group of the Psichology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 8-14, Blacksburg, VA.

Thompson, A. (1992); Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research, en: Handbook of the Research on Mathematics Teaching and Learning, D. A Grows (ed.), New York, Mac Millan Publishing Company, pp.127-146

ANEXO No. 1 CUESTIONARIO II

Este cuestionario forma parte de un trabajo de investigación en el que se pretende determinar **las conceptualizaciones que los profesores de matemáticas tienen acerca de la demostración en la geometría euclideana.** La información que proporciones será de gran valía para esta investigación, por esto es muy importante que seas lo más explícito posible en tus respuestas; no es necesario que consultes algún texto u otra fuente, pues lo que para esta investigación interesa son **tus propias conceptualizaciones**. Es importante también mencionar que esta información será absolutamente confidencial y sólo se utilizará para el propósito ya señalado. De antemano gracias por tu colaboración.

1 Nombre: ______________________________

2 Plantel. ______________ 3. Turno: __________ 4. Categoría: __________

5. Formación Profesional: Indica el nombre de la especialidad y si eres Estudiante, Pasante o Titulado.

a) Licenciatura: ______________________________

b) Maestría: ______________________________

c) Doctorado: ______________________________

d) Especialización: ______________________________

e) Diplomado: ______________________________

f) Otra u otras: ______________________________

____

6. Experiencia Docente en Matemáticas: a) Años como docente de matemáticas: __________

b) Materias o asignaturas impartidas con mayor frecuencia, indicando el nivel escolar: __________

____

____

____

____

____

____

____

____

____

c) ¿Cuántas ocasiones has impartido el curso de Matemáticas II - Geometría Plana y Trigonometría? ______________________________

7. Experiencia Docente en general (excepto en matemáticas): a) Años como docente: __________

b) Materias o asignaturas impartidas con mayor frecuencia, indicando el nivel escolar: __________

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

8 ¿Que es la demostración en geometría euclideana?

9. ¿Qué son las matemáticas?

10 ¿Qué observaciones consideras pertinentes hacer a este cuestionario?

a) En cuanto al formato. Aspectos como la presentación, la distribución, el tamaño de la letra, los espacios para las respuestas, etc. ______________________________

b) En cuanto al contenido: Aspectos como la claridad de las preguntas, o de la clase de información solicitada. ______________________________

c) En cuanto al propósito del cuestionario: ______________________________

d) ¿Qué otras sugerencias consideras para mejorar este cuestionario? ______________________________

ANEXO No. 2

OBTENCIÓN DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE REFERENCIA

· **Planteamientos hechos por diferentes autores e investigadores en relación al significado de la demostración en geometría euclidiana y en matemáticas.**

A) "Una teoría axiomática, según la entendían Aristóteles y Euclides, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, conjunto organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos, que no se definen, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas, que no se demuestran. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar nuestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática." (**Mosterin, J.** (sin fecha de edición); Conceptos y Teorías en la Ciencia, Alianza Universidad)

B) Existen dos formas fundamentalmente distintas de adquirir conocimientos del mundo que nos rodea: el proceso inductivo, mediante la observación de numerosos casos particulares se llega a la idea de la existencia de una ley general; y el proceso deductivo, en el que se conocen ya ciertas leyes generales y se aplica ese conocimiento a casos particulares. Una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas. La conclusión de una demostración no sólo se apoya en lo que es obvio, sino también en la habilidad para pensar y razonar. La demostración en geometría establece las propiedades de las figuras espaciales en toda su generalidad, es este hecho el que justifica la necesidad de demostrar, además de convertir a la geometría en un sistema metódico de conocimientos científicos. Las demostraciones son necesarias como consecuencia de una ley fundamental del pensamiento correcto -la ley de la razón suficiente- de acuerdo con la cual nuestras aseveraciones deben tener un fundamento riguroso para que sean verdades.
Los requisitos de una demostración correcta son:
- sólo debe basarse en axiomas o en teoremas previamente demostrados
- todas las deducciones involucradas deben ser correctas
- el propósito de la demostración es establecer la veracidad de la proposición que debe probarse, y no sustituirla por alguna otra proposición

Además es factible utilizar el análisis como razonamiento científico al considerar la pregunta. ¿De qué proposiciones puede obtenerse por deducción la proposición que se desea probar?
En la geometría no se estudian axiomas aislados sino un sistema completo de axiomas. Existen tres condiciones fundamentales que debe satisfacer todo sistema axiomático:

- La condición de consistencia: los axiomas no sólo deben ser compatibles entre sí, sino que, entre las proposiciones deducidas a partir de los axiomas no debe haber dos cualesquiera que se contradigan
- La condición de independencia· también debe tenerse cuidado de no incluir en nuestro sistema de axiomas, proposición alguna que pueda deducirse de otros axiomas, de lo contrario, dicha proposición no será un axioma sino un teorema
- La condición de completo: si el sistema de axiomas está incompleto, entonces siempre es posible construir una nueva proposición (por supuesto una proposición que use los mismos conceptos fundamentales que los axiomas) que no es deducible a partir de los axiomas y que tampoco los contradice. Si el sistema de axiomas está completo, cualquier nueva proposición que se agregue y que use los mismos conceptos, es una consecuencia de estos axiomas o bien los contradice. (**Fetisov, A.** (1973); La Demostración en Geometría, editorial Limusa-Wiley, S. A., México.)

C) Toda demostración es una prueba y toda prueba es una argumentación, sin que valgan sus conversas. Una argumentación está constituida básicamente de tres componentes: un conjunto de premisas, una conclusión y una línea de discurso tendida entre ellas. Una prueba explicita una pretensión cognoscitiva o acentúa en tal sentido las dimensiones informativa, explicativa o justificativa de la argumentación. Para que un argumento sea una prueba, debe tener un valor cognoscitivo o una fuerza epistémica superiores a los representados por la mera proposición de la conclusión propia del argumento en el marco de discurso dado. Una prueba en un marco discursivo dado, es una demostración de la conclusión obtenida sólo si:
- es una deducción lógicamente concluyente ...es una acción discursiva que supone la mediación de una relación lógica de consecuencia . .
- hace saber a algún agente discursivo que algo (la conclusión) es (o no es) el caso, " ...hacer saber es una manera de probar que algo es el caso por sus causas y/o razones pertinentes e intrínsecas.", y
- es una prueba <<acogente>>, representa un alto grado de poder de convicción y de reconocimiento, " ...la cogencia responde al carácter holista de la demostración, cuyo saber da razón de que tal haya de ser el resultado de modo que esta conclusión no es independiente de la línea seguida de justificación ..."
Estos tres requisitos se identifican en tres ámbitos que son el lógico, el epistemológico y el pragmático, respectivamente. (**Vega, L.** (1992); ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de la demostración matemática, en: *Mathesis*, No. 8, pp. 155-177)

D) El conocimiento matemático es un tipo de conocimiento proposicional, proposiciones aceptadas bajo la condición de que existen fundamentos adecuados para su aseveración Esto es posible sobre la base única de la razón, que consiste en el uso de lógica deductiva y definiciones usadas en conjunción con un grupo de axiomas o postulados matemáticos asumidos desde los que se infiere el conocimiento matemático, esto es en lo que consiste la demostración deductiva.

La demostración de una proposición matemática se lleva a cabo en una secuencia finita de afirmaciones que terminan precisamente en esa proposición; dicha secuencia satisface la siguiente propiedad: "Cada afirmación es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido, o es derivada por una regla de inferencia desde una o más afirmaciones precedentes en la secuencia El término 'conjunto de axiomas' es concebido ampliamente para incluir afirmaciones que son admitidas en una demostración sin demostración previa, incluyendo axiomas, postulados y definiciones " (p. 5).

En la demostración matemática se asumen dos clases de proposiciones: matemáticas y lógicas. Las proposiciones matemáticas asumidas son las definiciones y los axiomas. Las proposiciones lógicas asumidas son las reglas de inferencia, que forman parte de una teoría de la demostración subyacente, y la sintaxis subyacente del lenguaje formal. (**Ernest, P.** (1991); The Philosophy of Mathematics Education, The Falmer Press, Rankine Road, Baringstoke, Hampshire)

E) El rigor lógico ejerce una influencia restrictiva que es de gran valor en circunstancias peligrosas, o cuando se consideran cuestiones sutiles.
La intuición proporciona una especie de <<tacto>> para el tema, permite ver que un teorema es cierto, sin necesidad de una demostración formal, y sobre esta visión construir una demostración que funciona.
La intuición debiera anteceder a la demostración formal Una demostración intuitiva permite comprender por qué un teorema debe ser cierto, la lógica proporciona una base firme para demostrar que es cierto. (**Stewart, I.** (sin fecha de edición); Conceptos de Matemática Moderna, Alianza Editorial.)

F) En los mejores casos, la demostración da una comprensión más profunda al revelar el alma del problema. La demostración sugiere nuevos desarrollos. El novel que estudia demostraciones se está acercando a la creación de nuevas matemáticas. La demostración es energía matemática, es la tensión eléctrica que da vida y dinamiza los enunciados, estáticos, de los teoremas.
La demostración es rito y celebración de la potencia de la razón pura. Tal ejercicio de reafirmación y confianza en nosotros mismos puede resultar sumamente necesario, en vista de los intrincados embrollos a los que el pensar con claridad nos lleva claramente
Esta geometría fue el primer ejemplo de sistema deductivo formalizado, y se ha tomado como el paradigma de este tipo de sistemas. También la geometría ha sido un terreno propicio para la práctica del razonamiento lógico, y, con razón o sin ella, se ha sostenido que el estudio de la geometría proporciona al estudiante una formación básica en tal razonamiento. (**Davis, P. /Hersh, R.** (1988); Experiencia Matemática, Editorial Labor S. A., España.)

G) "Cuando se presenta la necesidad de convencer a alguna persona en relación a alguna afirmación que hacemos, buscamos sustentar esta en una o más proposiciones que nuestro interlocutor pueda aceptar como verdaderas. De este modo, le hacemos ver que la afirmación en cuestión es consecuencia de las otras proposiciones que si puede admitir sin dificultad. Gracias a este proceso podemos convencerlo de la afirmación inicial.

Los elementos característicos de una demostración son:
- Un conjunto de proposiciones que sirven de apoyo para convencer a nuestro interlocutor Esto es lo que se conoce como premisas del razonamiento.
- Un procedimiento lógico que nos permite encadenar adecuadamente tales proposiciones y que nos conduce de unas a otras hasta la aseveración inicial. Esto es la deducción.

Una proposición matemática no se comprueba en la experiencia. Su exactitud es inalcanzable por toda prueba experimental. En consecuencia, la verdad de una proposición matemática es independientemente de su correspondencia con el mundo exterior Su verdad es de carácter lógico, depende de la coherencia interna del sistema en que se encuentre. Su demostración lógica es lo único que nos puede garantizar su verdad.

En la geometría euclidiana no tenemos una colección azarosa de proposiciones, sino un sistema de conocimientos construido con apego estricto a las leyes de la lógica

Es patente el importante papel que ha jugado la imagen gráfica en la demostración. La figura dibujada es una especie de detonador de nuestra intuición que nos impulsa en la construcción de la deducción. Este tipo de demostraciones son las más características de la geometría euclideana, demostraciones en las que es más importante hacer construcciones, dibujar líneas auxiliares; que elaborar cadenas de inferencias formales.

La demostración en geometría procede de manera sintética: por construcción. Nuestra brújula es la intuición y nuestro barco el pensamiento lógico " (**Salinas, J.** (1991); Acerca de la Demostración en Geometría, en: *Educación Matemática*, Vol. 3 - No. 3, Diciembre de 1991.)

H) "...una prueba lógica es un "señalamiento" o una "indicación" de las implicaciones entre un conjunto de proposiciones llamadas axiomas y otro conjunto de proposiciones llamadas teoremas ...los axiomas mismos no se demuestran ...pues se considran verdades evidentes por sí mismas ...Pero que una proposición resulte obvia o no depende de las condiciones culturales y de la preparación individual de las personas ... Si bien los axiomas son lógicamente anteriores a los teoremas, el orden temporal en el que se descubre la dependencia lógica de las proposiciones hace que los axiomas sean posteriores a los teoremas." (desde el punto de vista histórico de la construcción de la geometría euclidiana). "Las proposiciones pueden demostrarse exponiendo las relaciones de implicación que tienen entre sí, pero no es posible demostrar todas las correspondientes a un sistema dado, pues de los contrario nuestro razonamiento caería en un círculo vicioso." (**Cohen, M. /Nagel, E.** (1993); Introducción a la Lógica y al Método Científico, Amorrortu editores, Buenos Aires, Argentina.)

I) "La demostración de un teorema matemático se efectua por una cadena de simples razonamientos deductivos ...Cada uno establece, respecto a las proposiciones básicas aceptadas (hipótesis), una conclusión resultante incontrovertible, si ha sido válido el razonamiento." ...Un sistema matemático correctamente construido está entonces caracterizado por una frontera de *postulados* (derivado de la palabra latín para *pedidos*), o *axiomas* que son aceptados inicialmente, sin demostración o idea de demostración, como base de operaciones para el subsiguiente edificio deductivo." ...A su vez, puesto que los postulados iniciales deben ser establecidos en función de palabras y conceptos cuya significación ha sido ya establecida, es igulamente claro que debe haber, más allá de la última frontera, por lo menos un concepto que queda completamente *indefinido*." **(Merriman, G.** (1948); Matemática Simplificada, ESPASA-CALPE Argentina, S A: 1ª edición, Buenos Aires.)

· **Primera síntesis de los planteamientos considerados**

En esta primera síntesis se obtuvo una serie de 19 rasgos característicos de la demostración en geometría euclidiana, esto se hizo comparando los planteamientos entre sí, para distinguir, entre los rasgos que cada autor expone, cuales coinciden y cuales son particulares en cada caso. La síntesis obtenida es la siguiente.

1) Una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse. **(Fetisov)**

2) Dicha cadena de deduccciones satisface la siguiente propiedad: Cada proposición es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido, o es derivada por una regla de inferencia desde una o más proposiciones precedentes en la secuencia. **(Ernest)**

3) En la demostración matemática se asumen dos clases de proposiciones: matemáticas y lógicas. Las proposiciones matemáticas asumidas son las definiciones y los axiomas Las proposiciones lógicas asumidas son las reglas de inferencia, que forman parte de una teoría de la demostración subyacente, y la sintaxis subyacente del lenguaje formal **(Ernest)**

4) Las demostraciones son necesarias como consecuencia de una ley fundamental del pensamiento correcto -la ley de la razón suficiente- de acuerdo con la cual nuestras aseveraciones deben tener un fundamento riguroso para que sean verdades. **(Fetisov)**

5) Como sistema axiomático, la geometría euclidiana funciona como un conjunto de conocimientos organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos, que no se definen, y casi todas las verdades que componen la teoría, los teoremas, son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas, que no se demuestran. **(Mosterin).**

6) Las proposiciones pueden demostrarse exponiendo las relaciones de implicación que tienen entre sí, pero no es posible demostrar todas las correspondientes a un sistema dado, pues de los contrario nuestro razonamiento caería en un círculo vicioso. **(Cohen y Nagel)**

7) Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. **(Mosterin)**

8) La demostración en geometría procede de manera sintética: por construcción. **(Salinas)**

9) En la geometría no se estudian axiomas aislados sino un sistema completo de axiomas. **(Fetisov)**

10) Existen tres condiciones fundamentales que debe satisfacer todo sistema axiomático:
a) La condición de consistencia: los axiomas no sólo deben ser compatibles entre sí, sino que, entre las proposiciones deducidas a partir de los axiomas no debe haber dos cualesquiera que se contradigan.

b) La condición de independencia: también debe tenerse cuidado de no incluir en nuestro sistema de axiomas, proposición alguna que pueda deducirse de otros axiomas, de lo contrario, dicha proposición no será un axioma sino un teorema.

c) La condición de completo: si el sistema de axiomas está incompleto, entonces siempre es posible construir una nueva proposición (por supuesto una proposición que use los mismos conceptos fundamentales que los axiomas) que no es deducible a partir de los axiomas y que tampoco los contradice. Si el sistema de axiomas está completo, cualquier nueva proposición que se agregue y que use los mismos conceptos, es una consecuencia de estos axiomas o bien los contradice. **(Fetisov)**

11) Si bien los axiomas son lógicamente anteriores a los teoremas, el orden temporal en el que se descubre la dependencia lógica de las proposiciones hace que los axiomas sean posteriores a los teoremas (desde el punto de vista histórico de la construcción de la geometría euclidiana). **(Cohen y Nagel)**

12) Una proposición matemática no se comprueba en la experiencia. Su exactitud es inalcanzable por toda prueba experimental. **(Salinas)**

13) La verdad de una proposición matemática es independientemente de su correspondencia con el mundo exterior. Su verdad es de carácter lógico, depende de la coherencia interna del sistema en que se encuentre. Su demostración lógica es lo único que nos puede garantizar su verdad **(Salinas)**

14) La conclusión de una demostración no sólo se apoya en lo que es obvio, sino también en la habilidad para pensar y razonar. **(Fetisov)**

15) La demostración en geometría establece las propiedades de las figuras espaciales en toda su generalidad, es este hecho el que justifica la necesidad de demostrar. **(Fetisov)**

16) La demostración convierte a la geometría en un sistema metódico de conocimientos científicos **(Fetisov)**

17) Esta geometría fue el primer ejemplo de sistema deductivo formalizado. **(Davis y Hersh)**

18) La geometría euclideana se ha tomado como el paradigma de este tipo de sistemas deductivos. **(Davis y Hersh)**

19) Es patente el importante papel que ha jugado la imagen gráfica en la demostración La figura dibujada es una especie de detonador de nuestra intuición que nos impulsa en la construcción de la deducción. Este tipo de demostraciones son las más características de la geometría euclideana, demostraciones en las que es más importante hacer construcciones, dibujar líneas auxiliares; que elaborar cadenas de inferencias formales. **(Salinas)**

· **Segunda síntesis de los planteamientos considerados**

Esta segunda síntesis surge ante la necesidad de contar con un marco referencial que fuese lo más sintético posible, es decir, una conceptualización de referencia en la que se incluyeran los rasgos característicos más esenciales de la demostración en geometría euclidiana. Esto se hizo con la finalidad de establecer comparaciones más objetivas entre las respuestas de los profesores y la conceptualización de referencia:

1) La demostración en geometría euclidiana es una cadena o secuencia deductiva cuya finalidad principal es establecer la validez de la proposición que debe probarse, es decir, el teorema.

2) En la demostración geométrica se asumen dos clases de proposiciones, matemáticas y lógicas. Las proposiciones matemáticas asumidas son las definiciones, los axiomas y los postulados. Las proposiciones lógicas asumidas son las reglas de inferencia.

3) Las proposiciones se refieren a dos clases de entidades o conceptos geométricos: los términos primitivos o comunes, que no se definen; y los términos definidos, que se construyen a partir de los primeros.

4) Cada proposición matemática que aparece en la secuencia deductiva es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido, o es derivada por una regla de inferencia desde una o más proposiciones precedentes en la secuencia, o bien está constituida por un teorema ya demostrado. El término conjunto de axiomas se concibe ampliamente incluyendo cualesquiera afirmaciones admitidas sin demostración previa, estas son los axiomas, los postulados y las definiciones

5) El conjunto de axiomas debe cumplir las condiciones de ser:
- Consistente; los axiomas deben ser compatibles y no debe existir contradicción alguna entre dos cualesquiera.
- Independiente; no debe incluir axioma alguno que pueda deducirse de los restantes.
- Completo; cada nueva proposición es consecuencia de los axiomas asumidos, o bien los contradice.

Por último, cada uno de los rasgos característicos considerados en la conceptualización de referencia obtenida de la segunda síntesis, se fragmentaron en rasgos "independientes", es decir, rasgos con un significado propio y definido. El producto de este proceso es finalmente La Conceptualización de Referencia.

· **Conceptualización de referencia**

1.1) La demostración en la geometría euclidiana es una cadena o secuencia deductiva de proposiciones.
1.2) Su finalidad principal es validar la proposición que se quiere probar, es decir de un teorema.

2.1) Existen proposiciones matemáticas asumidas, estas son las definiciones, los axiomas y los postulados.
2.2) Existen proposiciones de la lógica clásica asumidas, estas son las reglas de inferencia.

3.1) Las entidades o conceptos geométricos a los que se refieren las proposiciones pueden ser términos primitivos o comunes, que no se definen,
3.2) o pueden ser términos definidos, que se construyen a partir de los primeros.

4.1) Cada proposición en la secuencia deductiva es un axioma extraído de un conjunto de axiomas previamente establecido;
4.2) o es deducida desde una o más proposiciones precedentes en la secuencia;
4.3) o bien está constituida por un teorema ya demostrado.

5.1) El conjunto de axiomas asumidos debe ser consistente.
5.2) El conjunto de axiomas asumidos debe ser independiente.
5.3) El conjunto de axiomas asumidos debe ser completo.

ANEXO No. 3

· Caracterización de las Tendencias en las Conceptualizaciones de los Profesores acerca de la Demostración en Geometría Euclidiana:

I) Se considera a la demostración como una manera de **comprobar o establecer la veracidad de una proposición geométrica**. Las respuestas de los profesores identificadas a esta tendencia incluyen referencias a diferentes métodos de comprobación como empíricos, aritméticos, gráficos y algebraicos Se conceptualiza la demostración con verbos como comprobar, verificar, demostrar, explicar, justificar, hacer entender, llegar a una conclusión. Y se hace referencia a la comprobación de diferentes clases de proposiciones, desde axiomas y postulados hasta teoremas y corolarios.

II) Se considera la demostración euclidiana como algún tipo de **procedimiento predeterminado o un proceso** en el que se presentan etapas ordenadas de acuerdo a cierta lógica. A decir de los profesores, en algunos casos este proceso tiene la función de establecer la validez de una proposición, en otros se considera como un algoritmo que se debe seguir, o se considera, también, como un proceso heurístico.

III) Se considera la demostración euclidiana como una **deducción o algún tipo de razonamiento**. En algunos casos se hace referencia explícita a un razonamiento lógico o a la obtención de relaciones geométricas a partir de otras establecidas, en otros se habla de razonamiento ordenado o de razonamiento puro.

IV) Se considera a la demostración como la **aplicación de teoremas y postulados, o como una forma de tratar problemas** matemáticos o de ingeniería, utilizando proposiciones verdaderas. Las respuestas de los profesores identificadas en esta tendencia mencionan diferentes usos de la aplicación de teoremas: lograr un objetivo, explicar la parte conceptual de un problema, entre otros; o diferentes formas de llevar a cabo esa aplicación: ordenada, sistematizada, lógica, o como una herramienta para resolver problemas.

V) Se considera la demostración como el **estudio formal de las propiedades y de las formas regulares**. Las respuestas de los profesores identificados con esta tendencia hacen alusión al estudio de las figuras o las formas geométricas y de sus propiedades, o al estudio científico de esos aspectos.

VI) Se considera que la demostración en geometría euclidiana consiste en **establecer relación entre expresiones algebraicas y figuras geométricas**.

VII) Se considera la demostración como **cierta clase de análisis** de las figuras geométricas o de los enunciados de los teoremas.

VIII) Se considera la demostración como una forma de **cuantificación universal o un medio para entender el universo** abstracto y concreto.

ANEXO No. 4

· **Cuadro resumen de la fragmentación de las respuestas de los profesores a la pregunta ¿Qué es la demostración en geometría euclidiana? en "unidades de significado". Así como la clasificación y las asociaciones de dichas unidades con los rasgos de la conceptualización de referencia y con las tendencias identificadas en el** ***modelo de conceptualizaciones*** **acerca de la demostración en geometría euclidiana.**

RESPUESTAS DE LOS PROFESORES A LA PREGUNTA: ¿QUÉ ES LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA EUCLIDIANA? (Las respuestas se han fragmentado en "unidades de significado")	*Rasgos identificados de la conceptualización de referencia y/o clasificación de las "unidades de significado" identificadas.*	*Tendencias asociadas a las unidades de significado y a cada respuesta.*
1) -ES LA FORMA DE VERIFICAR LAS SOLUCIONES A LAS PROPOSICIONES QUE SE PLANTEAN	1.2	I
2) -ES LA DEMOSTRACIÓN DE LA GEOMETRÍA ORDINARIA DE ACUERDO A LOS *PRINCIPIOS ESTABLECIDOS POR EUCLIDES.* -LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA ESTA SUSTENTADA EN LA OBRA MÁS FAMOSA DE TODOS LOS TIEMPOS TITULADA "ELEMENTOS" QUE CONTIENE 13 LIBROS	2.1 Referencia Histórica **(RH)**	IV
3) -ES EL HECHO DE ESTAR SEGURO QUE LO QUE SE DICE ES CIERTO MEDIANTE PROPOSICIONES VERDADERAS	1.2	I
4) -ES LA CUANTIFICACIÓN DE TODO OBJETO EXISTENTE EN EL UNIVERSO Y AL PROPIO UNIVERSO	Forma o método de cuantificación universal	VIII
5) -ES LA COMPROBACION DE TEORIAS, COROLARIOS O POSTULADOS -HACIENDO USO DE HERRAMIENTAS ALGEBRAICAS -QUE EN LA MAYORÍA DE LAS OCASIONES LOS ALUMNOS NO ALCANZAN A COMPRENDER A MENOS QUE REALIZEN ALGUNA ACTIVIDAD OPERATORIA O MANUAL, DONDE ELLOS MISMOS COMPRUEBAN LOS POSTULADOS	Error Conceptual **(EC)** Fundamento de la Demostración **(FD)**: *herramientas algebraicas* Referencia Didáctica **(RD)**	I VI
6) -ES EL PROCESO SISTEMÁTICO -POR EL CUAL SE TRATA DE COMPROBAR UNA HIPÓTESIS -SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS -Y A PARTIR DE SU RESULTADO GENERAR TEOREMAS Y LEYES	Proceso Sistemático EC Objeto de Estudio: figuras geométricas 1.2	II I V
8) -ES EL ANÁLISIS DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS -POR MEDIO DE CONCEPTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICAS -ES LA COMPROBACIÓN DE MÉTODOS APLICADOS	Forma de Análisis FD: conceptos básicos matemáticos Una comprobación	VII
9) MUESTRO LO DEMOSTRADO -DADO QUE LOS TEOREMAS YA ESTAN DEMOSTRADOS AL ALUMNO SE LO DAMOS COMO RECETA SIN DARLES NINGUNA OTRA OPCIÓN DE RAZONAMIENTO	Procedimiento Predeterminado RD	II
10) -LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRIA EUCLIDIANA ES OBJETIVO -APOYANDOSE BASICAMENTE EN TEOREMAS, POSTULADOS, AXIOMAS, COROLARIOS, DEFINICIONES, ETC. - EN EL ASPECTO OBJETIVO RECURRIMOS AL APOYO DIDÁCTICO (FIGURAS EN CARTÓN, PLASTICO, FIBRACEL, UNICEL, ETC) -QUE EL ALUMNO LO PALPE EN SUS MANOS Y ANALICE LA IMPORTANCIA EN MEDIDAS DE LONGITUD, ESPESOR, ALTURA, VOLUMEN ETC *-TAMBIEN LOGRAMOS DEMOSTRAR LOS DESARROLLOS EN CADA UNA DE LAS* FIGURAS GEOMETRICAS	Un Objetivo 2 1 RD RD	IV

11) -LA DEMOSTRACIÓN DE LA GEOMETRIA SE REALIZA A PARTIR DE LOS ENUNCIADOS QUE NOS MARCAN LOS POSTULADOS, TEOREMAS Y LEYES -PARA PODER EXPLICAR LA PARTE CONCEPTUAL DEL PROBLEMA -PARA ELLO SE APOYA DE LAS HIPOTESIS CONTENIDAS DENTRO DE ESTOS CAMPOS -PARA TERMINAR CON LA DEMOSTRACIÓN FINAL DEL PROBLEMA PRESENTADO	2.1 Medio Explicativo (de problemas) Parte de hipótesis Un objetivo o un fin	IV I
12) -ES LA EXPLICACIÓN ANALÍTICA O GRÁFICA DE UN EVENTO DETERMINADO OCURRIDO EN DOS PLANOS	Medio explicativo	I
13) -ES LA APLICACION DE LOS TEOREMAS Y POSTULADOS -QUE REQUIEREN UN RAZONAMIENTO -ASI TAMBIEN ALGUNAS DEFINICIONES -PERO TODO EN FORMA ORDENADA Y LOGICA	2.1 2.2 (2.1) (2.2)	IV III
14) -ES UNA FORMA DE EXPLICAR PARA ENTENDER LOS TEOREMAS, POSTULADOS Y TEORIAS QUE HAY EN ESTA RAMA DE LAS MATEMÁTICAS	Medio Explicativo	I
15) -RAZONAMIENTO DE LOS PROBLEMAS -PARA COMPROBAR POR MEDIO DE APLICACIONES MATEMÁTICAS LOS TEOREMAS, AXIOMAS, POSTULADOS, COROLARIOS, ETC.	Tipo de Razonamiento (de problemas) EC, 1.2	III I
16) -LA DEMOSTRACION MATEMATICA DENTRO DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA CONSISTE EN DEMOSTRAR QUE LOS AXIOMAS,POSTULADOS, TEOREMAS Y COROLARIOS PLANTEADOS PARA LA SOLUCIÓN DE CIERTOS PROBLEMAS SON CIERTOS -MEDIANTE UN ANALISIS METODOLOGICO QUE INCLUYE TRAZOS Y CALCULOS PARA LOGRARLO -YA QUE MEDIANTE ESTO SE HA PODIDO CONSTRUIR, GENERAR, ANALIZAR Y CREAR CIENCIA Y TECNOLOGÍA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE MEDIANTE LA GEOMETRIA E. EL SER HUMANO SE HA SERVIDO Y LOGRARA AVANCES TECNOLOGICOS	EC, 1.2 Tipo de Análisis Medio para Crear Ciencia y Tecnología	I VII
17) -ESTRICTAMENTE HABLANDO LO UNICO QUE SE HACE ES MOSTRAR LAS DEMOSTRACIONES QUE UNO SE APRENDE -Y EN POCAS OCASIONES REALMENTE PUEDO HACER UNA DEMOSTRACION SALIDA DE UN PROCESO ELABORADO POR MI, MUESTRO LO DEMOSTRADO -DEBE TENERSE EN CUENTA QUE EN LA ACTUALIDAD EXISTEN OTROS ASPECTOS DE PRESENTACIÓN DE LA GEOMETRIA E. QUE SE CONOCEN COMO GEOMETRIA MODERNA SIN PERDER DE VISTA LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDEAS.	Procedimiento Predeterminado, RD RD, Necesidad alternativa o creativa para la demostración Referencia a otras geometrías	II
18) ES UN PROCESO LOGICO DE RAZONAMIENTO -EN QUE SE ENCADENA UNA SERIE DE PROPOSICIONES (DEFINICIONES, AXIOMAS, POSTULADOS Y TEOREMAS) -*PARA LLEGAR A VERIFICAR LA VERACIDAD DE UNA NUEVA PROPOSICIÓN (TEOREMA)*	Tipo de razonamiento 1.1 1.2	II III I
19) COMO SABEMOS LA GEOMETRIA EUCLIDIANA TIENE SUS ORIGENES EN LOS ESTUDIOS MAS FORMALES DE LOS GRIEGOS, YA QUE ANTERIORMENTE, EGIPCIOS, BABILONIOS Y OTROS LA ESTUDIARON EN FORMA MAS EMPIRICA QUE FORMAL, GRACIAS AL ENORME TRABAJO DESARROLLADO POR EUCLIDES QUIEN SE ENCARGO DE RECOPILAR TODA LA INFORMACIÓN REFERENTE AL PROCESO DEDUCTIVO DE LA GEOMETRIA	RH	

-Y QUE AUN AHORA LOS DOCENTES NOS APOYAMOS EN LA GRANDIOSA OBRA DENOMINADA LOS ELEMENTOS -ESTA OBRA SIRVIO DE BASE PARA ESTUDIAR LA GEOMETRIA DE MANERA QUE EN BASE A LOS AXIOMAS Y POSTULADOS SE PUEDE LLEGAR A LA DEMOSTRACION DE LOS TEOREMAS QUE A SU VEZ SIRVEN PARA DEMOSTRAR OTROS TEOREMAS -QUIZAS EN LOS COMIENZOS DE MI FORMACION DOCENTE CONSIDERABA MENOS IMPORTANTE EL HECHO DE REALIZAR DEMOSTRACIONES EN EL AULA PERO ESPUES DE HACER UN POCO DE HISTORIA CONCLUYO QUE ES DE VITAL IMPORTANCIA QUE SE DEMUESTRE LA GEOMETRIA EN ESTE NIVEL (MEDIO SUPERIOR) -(SE HACE REFERENCIA AL MODELO DE VAN HIELE)	RD 2.1, 1.2, 1.1 RD Referencia al modelo de van Hiele	IV,I
21) LA DEMOSTRACION EN GEOMETRIA EUCLIDIANA ES EL RAZONAMIENTO PURO CON ALTO GRADO DE ABSTRACCIÓN -QUE UTILIZA PARA ELLO AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS, COROLARIOS, ETC.	Tipo de Razonamiento, 2.2 2.1	III IV
22) ES LA APLICACIÓN DE AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS Y DEFINICIONES -EN FORMA SISTEMATIZADA Y ORDENADA	2.1 Proceso Sistemático	IV II
23) ES UNA PARTE DONDE SE REQUIERE MUCHOS CONOCIMIENTOS PARA PODER LLEGAR A APLICARLA SE REQUIERE DE HABILIDADES PARA DEMOSTRARLA -DESDE LOS GRIEGOS HASTA NUESTROS TIEMPOS NO ES FÁCIL SU APRENDIZAJE NI SU ENSEÑANZA SE REQUIERE DE MUCHA PREPARACIÓN EN CONCEPTOS -SIN EMBARGO ES MUY HERMOSA ESTA PARTE DE LA GEOMETRIA -Y NOS PUEDE PROPORCIONAR ESA ABSTRACCIÓN QUE REQUIEREN LAS MATEMATICAS.	Juicio de Valor (JV) RD JV JV	
24) EL RAZONAMIENTO ORDENADO DE IDEAS -A TRAVES DE LOS TEOREMAS DE EUCLIDES -PARA DE ALGUNA FORMA PLASMARLOS EN UN EJERCICIO ESPECÍFICO -ENTONCES DEMOSTRACION EN GEOMETRIA EUCLIDIANA ES EL RAZONAMIENTO DE TEOREMAS, COROLARIOS, AXIOMAS, ETC	Tipo de Razonamiento Aplicación a ejercicios (Tipo de Razonamiento)	III IV
25) ES LA JUSTIFICACION DE UNA TEORÍA -MEDIANTE EL USO DEL RAZONAMIENTO Y DE AXIOMAS Y TEOREMAS -EN FORMA ORDENADA Y CONCISA	Forma de Justificación 2.2, 2.1	I III
26) ES LA GEOMETRIA QUE SE BASA EN LOS POSTULADOS DE EUCLIDES -DONDE SE SEÑALAN ALGUNOS CONCEPTOS QUE AL EFECTUARLOS, FACILMENTE PUEDEN SER DEMOSTRADOS CON FIGURAS GEOMETRICAS PLANAS. -A PARTIR DE ESTO PODEMOS AFIRMAR QUE TODOS LOS POSTULADOS DE EUCLIDES SON COMPROBADOS PARA LLEGAR A UNA HIPÓTESIS COMPROBADA O VERDADERA	2.1 FD: figuras geométricas EC, 1.2	I, IV (IV)
27) ES LA CONCLUSIÓN POR MEDIO DE UN PROCEDIMIENTO LOGICO -PARA LA DEMOSTRACIÓN DE UNA PROPOSICIÓN DE UN PROBLEMA GEOMETRICO	Una conclusión, 2.2 1.2, Confusión: problema por teorema	II I
28) ES LA COMPROBACIÓN MATEMÁTICA -MEDIANTE OPERACIONES, TEOREMAS, ECUACIONES, -DE UNA RECTA O FIGURA GEOMETRICA DENTRO DE UN PLANO O EL ESPACIO -ESTA DEMOSTRACION SE PUEDE DAR COMO COMPLEMENTO A LOS VALORES OBTENIDOS MEDIANTE OPERACIONES MATEMATICAS	Una Comprobación FD:operaciones, teoremas, eccs. Objeto de Estudio: figs. geométricas Complemento a la obtención de valores	I VI

29)ES UN PROCESO QUE SE DA PASO A PASO -SIGUIENDO AXIOMAS, POTULADOS, TEOREMAS -APLICADOS EN LAS DIFERENTES FIGURAS GEOMETRICAS -LA DEMOSTRACION ES COMPROBAR Y JUSTIFICAR LAS FORMAS CON OPERACIONES ARITMETICAS, ALGEBRAICAS -APLICADAS EN AXIOMAS, POSTULADOS, TEOREMAS -TENER UN SEGUIMIENTO PRECISO Y SISTEMATICO, ORDENADO -DE JUSTIFICAR UN PROBLEMA GEOMETRICO O CUERPO GEOMETRICO	Procedimiento 2.1 Objeto de estudio: figs. geométricas Una Comprobación y una Justificación 1.2, FD: oper. aritméticas y algebraicas (2.1) Procedimiento sistemático Objeto de Estudio: probs. u objetos geoms.	II IV V (V) (II) (V)
31) SERIE DE PASOS QUE PARTEN DE UNA HIPÓTESIS -LA CUAL SE AUXILIA DE DEFINICIONES, AXIOMAS, POSTULADOS, -PARA COMPROBAR LA TESIS DE UNA PROPOSICIÓN	Procedimiento (algoritmo) 2.1 1.2	II IV I
32) EN GEOMETRIA E. SE VEN LOS TEOREMAS QUE TIENEN QUE SER DEMOSTRADOS -POR LO QUE ES LA CIENCIA QUE SE BASA EN LOS TEOREMAS Y SU DEMOSTRACION -LA DEMOSTRACION CONSISTE EN HACER UN ANALISIS PROFUNDO DE LO QUE SE MENCIONA EN EL TEOREMA	RD Definición de Geometría Euclidiana (GE) Tipo de análisis	VII
33) ES UNA DE LAS FORMAS DE HACER COMPRENDER Y DEMOSTRAR AL SER HUMANO COMO ESTA FORMADO EL UNIVERSO Y LAS COSAS ABSTRACTAS QUE NOS RODEAN	Medio para Comprender el Universo concreto y abstracto	VIII
34) LA DEMOSTRACION GEOMETRICA EUCLIDIANA ES LA HERRAMIENTA BASICA PARA EL DESARROLLO DE PROBLEMAS DE INGENIERIA EN LA CUAL LA SIMPLIFICACIÓN SE DA EN LOS DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE, -POR MEDIO DEL CUAL UNO PUEDE DETERMINAR VALORES IMPLICITOS QUE SOLO SE PUEDEN DETERMINAR POR SUS FORMAS GEOMETRICAS PLANAS	Herramienta para resolver problemas de ingeniería (Por medio de geometrización)	IV
35) SI CIERTAS RELACIONES GOEMETRICAS SON CONOCIDAS -OTRAS PODRAN SER ENCONTRADAS POR MEDIO DEL RAZONAMIENTO -ESTO DIO ORIGEN A LA UNIÓN DE LA CIENCIA DEL RAZONAMIENTO, O LOGICA CON LA MATEMATICA	2.1 1.2, 2.2 Unión de la lógica y la matemática	III
36) ESTABLECER LA RELACIÓN ENTRE LA EXPRESION ALGEBRAICA Y LAS FIGURAS GEOMETRICAS (BASICAMENTE EN UN PLANO CON APLICACION A TRES DIMENSIONES) -CONOCIENDO SUS COMPONENTES DE : RECTA, CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, PARABOLA E HIPERBOLA CALCULANDO LONGITUDES, PERIMETROS Y AREAS -CON LO QUE SE DESARROLLAN LAS HABILIDADES DE RAZONAMIENTO, ANALISIS Y PRINCIPALMENTE DE TRANSFERENCIA -ESTA DEMOSTRACION DEBE SER SIGNIFICATIVA Y NO MEMORIZADA SIN SU COMPRENSION	Relacionar expresiones algebraicas y figuras geométricas FD: geometría analítica y cálculo aritmético RD RD	VI
37) LA DEMOSTRACION SE CONSIDERA QUE ES UN PROCEDIMIENTO HEURISTICO PARA ENTENDER UNA DIFICULTAD Y QUE CONDUCE EN ALGUNOS CASOS A ENCONTRAR EL CAMINO PARA LA SOLUCION DE ESA DIFICULTAD -PARA LA GEOMETRIA EUCLIDIANA LA DEMOSTRACION O DEDUCCIÓN ES EL PILAR FUNDAMENTAL -YA QUE ESTA ES SU ARMA PRINCIPAL PARA OBTENER NUEVOS RESULTADOS MATEMATICOS A PARTIR DE LOS YA CONOCIDOS -Y UTILIZA EL RAZONAMIENTO LOGICO COMO HERRAMIENTA	Procedimiento (heurístico) 1.1 1 2 2.2	II, IV III

-EL PROCESO DEMOSTRATIVO DE UN HECHO MATEMATICO INVOLUCRA ELEMENTOS DE CARACTER INTUITIVO COMO EL ANALISIS, SINTESIS, CONSTRUCCION GEOMETRICA E INTRODUCCION DE NUEVOS CONCEPTOS -ACEPTANDO DE ESTE MODO UNA ARGUMENTACIÓN LOGICA E IMPLICANDO UN RAZONAMIENTO.	RD. (relevancia de la intuición) (2 2)	
38) ES IDENTIFICAR CLARAMENTE LOS SUPUESTOS INICIALES -Y A PARTIR DE ESTOS RAZONAR EN FORMA LOGICA HASTA LOGRAR LA CONCLUSIÓN DESEADA -SE PARTE DE DEFINICIONES, POSTULADOS Y AXIOMAS CON LOS CUALES SE DEMUESTRAN TEOREMAS QUE A SU VEZ SIRVEN PARA DEMOSTRAR OTROS TEOREMAS	2.1 2.2 1.2	III IV
39) EUCLIDES ILUSTRA EN UN LIBRO EL SISTEMA GRIEGO DE ESCRIBIR DEMOSTRACIONES MATEMATICAS -EMPEZANDO POR IDENTIFICAR LOS SUPUESTOS INICIALES -Y A PARTIR DE ESTOS RAZONAR DE UNA MANERA LOGICA HASTA LLEGAR A UNA CONCLUSION -EN ESTE TIPO DE ARGUMENTOS SE USAN RESULTADOS DE OTRAS DEMOSTRACIONES CUYA CERTEZA ES CONOCIDA LLAMADOS TEOREMAS -Y PROPOSICIONES ACEPTADAS EXPLICITAMENTE POR SER EVIDENTES, LLAMADAS AXIOMAS	RH 2.1 2.2 4.3 4.1	IV III
40) MEDIANTE UNA SERIE DE ECUACIONES ALGEBRAICAS TRADUCIRLAS A UNA INTERPRETACIÓN GEOMETRICA -RELACIONAR UNA ECUACION ALGEBRAICA CON LA GEOMETRIA, DANDO COMO RESULTADO LA CORRECTA INTERPRETACION DE UNA ECUACION EN SU FORMA GEOMETRICA	Interpretar geométricamente eccs. algebraicas Interpretar geométricamente eccs. algebraicas	VI
41) LA DEMOSTRACION ES UN PROCEDIMIENTO QUE CONSISTE EN COMPROBAR UNA PROPOSICIÓN GEOMETRICA -A PARTIR DE OTRAS YA DEMOSTRADAS O QUE POR SU EVIDENCIA NO REQUIEREN DEMOSTRACION LA PROPOSICIÓN QUE SE DEMUESTRA SE LLAMA TEOREMA Y LA PROPOSICION GEOMETRICA QUE POR SU EVIDENCIA NO REQUIERE DEMOSTRACION RECIBE EL NOMBRE DE POSTULADO -LAS PARTES PRINCIPALES DE LA DEMOSTRACION SON: LA HIPOTESIS, LA TESIS, EL RAZONAMIENTO FORMADO POR LAS AFIRMACIONES Y RAZONES, Y LAS CONCLUSIONES QUE COINCIDEN CON LA TESIS	1.2 4.1, 4.3 se define teorema y postulados Las partes de una demostración	I II
42) USA O TIENE AXIOMAS POSTULADOS, TEOREMAS -SE EMPIEZA DE UN DEFINICION O UN PROBLEMA -PARA QUE PODAMOS DEMOSTRAR EL TEOREMA SE USA EL METODO CIENTIFICO LLAMADO DEDUCTIVO -PARA SU DEMOSTRACION SE TIENE QUE: PLANTEAR UN PROBLEMA, FORMULAR LA HIPOTESIS, COMO DAR SOLUCION A ESA HIPOTESIS, DAR LEYES	2.1 Confusión entre teorema y problema 1.1 Etapas de la demostración	IV III
43) EL HECHO DE TENER "CONCEPTOS MATEMATICOS" COMO ALGORITMOS, FIGURAS GEOMETRICAS, CURVAS, ETC. ES NECESARIO DEMOSTRAR QUE ALGUN CONCEPTO ES VALIDO -UTILIZANDO EL RAZONAMIENTO LOGICO -PARA TENER LA BASE AL DECIR O HACER CALCULOS MATEMATICOS -ASI PUES LA GEOMETRIA EUCLIDIANA PERMITE ENTENDER LA REALIDAD	1 2 2.2 Fundamentar procesos de cálculo mat. Medio de entender la realidad	I III

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

-SIN EMBARGO ES NECESARIO DEMOSTRAR QUE ALGO ES CIERTO Y QUE PERMANEZCA COMO VALIDO PARA LA CONCEPCION "BASICA DE LA REALIDAD"	Medio racional de entender la realidad	
-AUNQUE SE ESCUCHA REITERATIVO ES PRECISO ENTENDER CON EXACTITUD A QUE NOS REFERIMOS CUANDO TRATAMOS DE EXPLICAR LAS COSAS, PORQUE NUESTROS SENTIDOS Y PUNTOS DE REFERENCIA FALLAN SI NO CON FRECUENCIA NOS DAN DATOS ERRONEOS	Medio racional de entender la realidad	
-ASI PUES LA DEMOSTRACION GEOMETRICA EUCLIDIANA NOS PERMITE LLEGAR A UN RAZONAMIENTO LOGICO DE AQUELLO QUE PENSAMOS Y USAMOS COMO REALIDAD	Conceptualización de geom. euclidea	
44) ES LA FORMA ESTRUCTURADA Y JUSTIFICADA DE EXPLICAR EL CONJUNTO DE CONOCIMIENTOS DE LA MATEMATICA Y UNA HERRAMIENTA MUY UTIL PARA EXPLICAR CADA TEMA DE ESTA AREA	Medio explicativo	I, II
45) ES EL PROCESO A TRAVES DEL CUAL SE DA POR VERDADERO O FALSO UNA HIPOTESIS.	1.2, EC	
-CONSTA DE LOS SIGUIENTES ELEMENTOS: TEOREMA, FIGURA, HIPOTESIS, RAZONAMIENTO, CONCLUSION	Partes de una demostración	I
46) ES COMPROBAR UN RESULTADO ESTABLECIDO	1.2	I
-POR MEDIO DE UN RAZONAMIENTO LOGICO SECUENCIAL	2.2	II
-A TRAVES DE CONCEPTOS YA PREVIAMENTE DEMOSTRADOS	4.3, EC: conceptos por proposiciones	
47) ES EL ESTUDIO FORMAL DE LAS PROPIEDADES Y DE LAS FORMAS REGULARES	Objeto de Estudio: Formas Regulares	V
-APLICANDO UN RAZONAMIENTO DEDUCTIVO	1.1	III
-PARTIENDO DE DEFINICIONES Y POSTULADOS Y AXIOMAS	2.1	
-PARA LLEGAR A LA DEMOSTRACION DE TEOREMAS.	1.2	I
48) LO QUE SE TIENE QUE HACER EN BASE A LO CIENTIFICO PORQUE ANTES SE HACIA EMPIRICAMENTE	RH	V
49) ES LA APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO EN BASE A AXIOMAS Y POSTULADOS	2.1	IV
-RELACIONADO CON PROPIEDADES GEOMETRICAS EN UN PLANO O EL ESPACIO (TRES DIMENSIONES)	Objeto de Estudio: Propiedades geoms	V
50) ES EL PROCESO MEDIANTE EL CUAL SE ACEPTA COMO VALIDA O SE NIEGA UNA AFIRMACION PREVIAMENTE ESTABLECIDA	1.2	II, I
-PARA ACEPTAR O NEGAR DICHA AFIRMACION ES NECESARIO BASARSE EN PREMISAS PREVIAMENTE DEMOSTRADAS Y ACEPTADAS COMO VALIDAS	2.1	
-LA GEOMETRIA EUCLIDIANA TIENE COMO BASES PARA SU DEMOSTRACION VERDADES ACEPTADAS COMO CIERTAS SIN NECESIDAD DE VALIDARLAS, ESTAS AFIRMACIONES SON LOS POSTULADOS Y LOS AXIOMAS	4.1	IV
-A PARTIR DE ESTOS SE CONSTRUYEN NUEVAS LEYES, SE VALIDAN TEOREMAS Y SE DETERMINAN COROLARIOS, ESTOS A SU VEZ PUEDEN VALIDAR OTROS TANTOS, ETC.	1.1, 4.3	III
51) ES LA DEDUCCIÓN DE UNA VERDAD O DE UN NUEVO CONOCIMIENTO	1.1	III
-BASADO EN LAS RELACIONES ALGEBRAICAS CON LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS FIGURAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	Relacionar expresiones algebraicas y figuras geométricas	VI, V