



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

APLICACIÓN DE ALGORITMOS GENÉTICOS Y
SIMULATED ANNEALING PARA INVERTIR
LA DISPERSIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES :
MODELOS PROMEDIO DE LA CORTEZA
TERRESTRE EN EL SUR DE MÉXICO

T E S I S

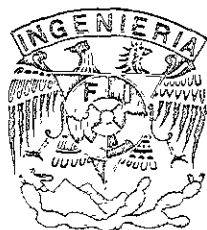
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA:

ARTURO IGLESIAS MENDOZA

DIRECTOR: M.C JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ ZÚÑIGA



MÉXICO, D.F.

Febrero del 2000



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-I-091

SR. ARTURO IGLESIAS MENDOZA
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. C. José Luis Rodríguez Zúñiga y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Geofísico:

**APLICACIÓN DE ALGORITMOS GENETICOS Y SIMULATED ANNEALING PARA
INVERTIR LA DISPERSION DE ONDAS SUPERFICIALES: MODELOS PROMEDIO DE
LA CORTEZA TERRESTRE EN EL SUR DE MEXICO**

	RESUMEN
I	INTRODUCCION
II	PRINCIPIOS DE ELASTODINAMICA
III	ONDAS SUPERFICIALES DE LOVE Y DE RAYLEIGH
IV	TEORIA DE INVERSION
V	METODOS DE INVERSION GLOBAL
VI	INVERSION DE CURVAS DE DISPERSION DE EVENTOS DE SUBDUCCION
VII	MODELOS CORTICALES PROMEDIO
VIII	CONCLUSIONES BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ciudad Universitaria, a 26 de enero de 2000
EL DIRECTOR


INC. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFR*RLLK*gtg
P

*Y aunque tenga don de profecía y sepa todos los misterios, y toda la ciencia, y tenga toda la fe en forma que traslade montañas, si no tengo amor, nada soy.
(1º Cor. 13)*

...mi amor, mi cómplice y todo

A Oralia, la mujer de mi vida, ya que su incansable amor me develó la razón de existir.

A mi madre, a mi padre y a mi hermano por su profundo amor, su apoyo incondicional y su persistente confianza.

A mis amigos; Víctor, Carlos, José Luis, Cynthia, Eugenio, Ciri, Israel, Moisés, Raúl, Alma, Octavio y Laura.

A Nicolai Shapiro, ya que sin su ayuda y su amistad no hubiera sido posible este trabajo.

A mis abuelos Rubén, Josefina y Lourdes por darme el apoyo moral y afectivo que aligeró mi vida estudiantil.

A la abogada Oralia Lara y a mi primo Octavio de León por creerme alguien especial.

RESUMEN	4
I INTRODUCCIÓN	5
II PRINCIPIOS DE ELASTODINÁMICA	8
2.1 Introducción	9
2.2 El tensor de esfuerzos	9
2.2.1. Definición	9
2.2.2. El vector de tracciones y el teorema de Cauchy	12
2.2.3. Ecuaciones de equilibrio y simetría del tensor de esfuerzos	15
2.3 El tensor de deformaciones	19
2.3.1. Campo de desplazamiento	21
2.3.2. Deducción del tensor de deformaciones	21
2.4 Ley de Hooke	25
2.5 Ecuación de Movimiento y Ecuación de Navier	26
2.6 Ondas P y Ondas S	27
2.7 Solución de la ecuación de onda - Ondas elásticas planas	30
2.8 Ondas en un medio elástico seminfinito	31
2.8.1. El principio de Fermat y la ley de Snell	31
2.8.2. Caso SH en un semiespacio infinito	33
III. ONDAS SUPERFICIALES DE LOVE Y DE RAYLEIGH	37
3.1 Introducción	38
3.2 Angulo crítico o ángulo de emergencia	38
3.3 Onda inhomogénea evanescente	40
3.4 Ondas Superficiales de Love y de Rayleigh	41
3.4.1 Desplazamientos debidos a la onda de Rayleigh	42
3.5 Dispersión de ondas superficiales	46
3.5.1 Ecuación de dispersión de ondas de Love	47
3.6 Dispersión de velocidad de grupo observada en registros sísmicos	52
3.6.1 Filtrado Múltiple	52
3.6.2 Apilado logarítmico	53
3.6.3 Error sistemático en la estimación de la curva de dispersión	55

IV TEORÍA DE INVERSIÓN	57
4.1 Definición	58
4.2 Solución del problema inverso	60
4.3 Función de desajuste o función de costo	60
4.4 Las superficies de costo	61
4.5 Linealidad, Inestabilidad y Unicidad	63
4.6 Información <i>a priori</i>	64
4.7 Inversión lineal generalizada	65
4.7.1 El problema inverso para una línea recta	67
4.7.2 Solución de mínimos cuadrados para una línea recta	67
4.7.3 Generalización de la solución de mínimos cuadrados	68
4.7.4 Mínimos cuadrados amortiguados o Método de Marquardt-Levenberg	71
4.8 Inversa generalizada	72
4.8.1 Matriz de resolución de los datos	73
4.8.2 Matriz de resolución de los parámetros	75
V MÉTODOS DE INVERSIÓN GLOBAL	76
5.1 Inversión Global	77
5.2 Método de Montecarlo	78
5.3 Método de <i>Simulated Annealing</i>	79
5.3.1 Inversión con <i>Simulated Annealing</i>	79
5.4 Método de Algoritmos Genéticos	82
5.4.1 Acoiación del problema, incorporación de información <i>a priori</i>	83
5.4.2 Inversión con algoritmos genéticos	84
5.5 Estimación de la incertidumbre con métodos globales	92
VI. INVERSIÓN DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE EVENTOS DE SUBDUCCIÓN	94
6.1 Inversión Sintética	95
6.1.1 Diseño de la inversión sintética	96
6.1.2 Criterios de aceptación de los modelos	99
6.1.3 Parametrización del problema inverso	101
6.1.4 Resultados de la inversión sintética	102

6.2 Inversión de curvas de dispersión a partir de datos registrados	106
6.2.1 Selección de Eventos	106
6.2.2 Tratamiento de los datos	110
6.2.3 Planteamiento del problema Inverso	113
6.2.4 Inversión de las curvas de dispersión observadas para la trayectoria 1	114
6.2.4.1 Inversión con Algoritmos genéticos	114
6.2.4.2 Inversión con <i>Simulated Annealing</i>	118
6.2.4.3 Combinación de los resultados de ambos métodos	121
6.2.5 Inversión de las curvas de dispersión observadas para la trayectoria 2	123
6.2.5.1 Inversión con Algoritmos genéticos	123
6.2.5.2 Inversión con <i>Simulated Annealing</i>	126
6.2.5.3 Combinación de los resultados de ambos métodos	129
6.2.6 Discusión de los resultados para las trayectorias 1 y 2	130
VII. MODELOS CORTICALES PROMEDIO	132
7.1 Comparación de los resultados con modelos previos	133
VIII CONCLUSIONES	136
BIBLIOGRAFÍA	142

RESUMEN

En este trabajo se presentan los elementos teóricos mínimos para entender el fenómeno de la dispersión de ondas superficiales y la relación que tiene con las características elásticas de un medio

Por otro lado se aborda brevemente la teoría clásica del problema inverso en geofísica y se revisan dos métodos de optimización (Simulated Annealing y Algoritmos genéticos) que recientemente han sido implementados para resolver una gran cantidad de problemas de inversión en esta disciplina. Estas herramientas son aplicadas para invertir curvas de dispersión de velocidad de grupo obtenidas, a partir de catorce sismos, ocurridos en la costa del sur de México

Los registros son agrupados en dos trayectorias. La primera se diseñó con diez sismos ocurridos en la costa de Guerrero y registrados en la estación CUIG de banda ancha del Servicio Sismológico Nacional (S.S.N.) ubicada en el campus de Ciudad Universitaria, dentro del valle de México. La segunda comprende de cuatro registros de sismos con epicentro cercano a la población de Huatulco, Oax., y registrados en la estación PLIG del S.S.N., ubicada en la Ciudad de Iguala Gro.

Las curvas de dispersión son apiladas por trayectorias, utilizando una técnica de reciente desarrollo llamada apilamiento logarítmico (*Campillo et al., 1996* y *Shapiro et al., 1997*). Este procedimiento permite conocer, en buena medida, la confiabilidad de los resultados obtenidos a partir del proceso de inversión.

Como resultado de este trabajo se presentan modelos de la corteza terrestre que contemplan un promedio entre la estación de registro y la zona epicentral. Estos resultados son comparados con algunos modelos de la zona sur de México determinados previamente.

I. INTRODUCCIÓN

Desde tiempos inmemorables, los terremotos han sido causa de grandes desastres. Por lo anterior, el hombre ha tenido gran temor a su ocurrencia. En México, algunos terremotos han provocado pérdidas materiales y sobre todo de vidas humanas. Los sismos de 1985, por ejemplo, demostraron los efectos devastadores de un gran terremoto en la Ciudad de México, que a pesar de encontrarse a más de 300 Km del epicentro, sufrió grandes daños.

La paradoja es que, si bien los terremotos provocan severos perjuicios, también son fuente indispensable de información respecto a la constitución interna del planeta, la cual tratada adecuadamente puede, entre otras cosas, ayudar a la mitigación de los riesgos.

El objetivo del presente trabajo, es extraer información de algunos sismos que pueda ayudarnos a conocer de mejor manera la constitución interna de la Tierra bajo nuestro país. Para este objetivo, se utiliza el análisis de las ondas superficiales y una propiedad de ellas llamada la dispersión. A diferencia de las ondas de cuerpo (ondas P y S), las ondas superficiales presentan una peculiar propiedad: su velocidad de propagación depende de la frecuencia. La dispersión es el término para describir la relación entre frecuencia y velocidad de propagación de las ondas superficiales. La relación entre velocidad y frecuencia para las ondas superficiales depende del medio a través del cual se propagan, por lo que para cada modelo distinto se tendrán diferentes relaciones velocidad-frecuencia. Para una relación específica (asociada a un modelo), se puede obtener una representación gráfica llamada curva de dispersión.

Las curvas de dispersión contienen información precisa del medio a través del cual se propagan las ondas superficiales. Para extraer dicha información se utilizan esquemas de inversión cuyo objetivo es proponer modelos físicamente posibles, cuya curva de dispersión se parezca lo más posible a la obtenida a partir de los sismogramas registrados.

Este procedimiento se lleva a cabo, en el presente trabajo, para extraer información de la estructura cortical de la parte centro-sur de la República Mexicana.

Para este objetivo se utilizaron catorce eventos agrupados en dos trayectorias. La primera de ellas se compone de sismos ocurridos en la costa del estado de Guerrero y registrados en una estación de banda ancha ubicada al sur de la Ciudad de México (Ciudad Universitaria). La segunda trayectoria, se compone de sismos ocurridos cerca de la población de Huatulco, Oax. y registrados en una estación

ubicada en la ciudad de Iguala, Gro. Para aumentar la definición de las curvas de dispersión se usó, para cada trayectoria, una técnica de apilado de las curvas de dispersión en el dominio velocidad de grupo contra periodo (Campillo et al., 1996).

Tradicionalmente las curvas de dispersión son invertidas utilizando esquemas lineales o linealizados. Sin embargo esto trae algunas dificultades debido a que el problema de la dispersión es altamente no lineal y multiparamétrico (Yamanaka et al., 1996).

En este trabajo se utilizaron dos esquemas de inversión global de reciente desarrollo (algoritmos genéticos y recristalización simulada), los cuales permiten evitar la linealización.

Algoritmos genéticos es un método de optimación basado en los procesos de la evolución de las especies, la cual sido indispensable para la supervivencia y adaptación de los individuos de una especie ante sus depredadores y características del entorno. La selección, cruce y mutación son traducidos a un programa de cómputo, donde el objetivo es que los modelos "evolucionen" hasta obtener una buena solución.

Por otro lado recristalización simulada (simulated annealing)¹ es un procedimiento de optimación basado en una propiedad termodinámica de la materia, donde a partir de un enfriamiento lento se alcanzan estados ordenados de la materia. Este principio es usado para, a través de un proceso computacional, perturbar un modelo inicial hasta alcanzar una solución aceptable.

Con la aplicación de estas modernas técnicas de optimación global a la inversión de curvas de dispersión calculadas para los trayectos analizados, se proponen algunos modelos de velocidades sísmicas para la corteza terrestre en la parte centro-sur de México.

Estos resultados son interpretados a la luz de investigaciones geofísicas previas, reportadas en la literatura para la misma zona.

Las comparaciones y correlaciones efectuadas, permiten establecer las bondades y limitaciones tanto del método de interpretación de curvas de dispersión como de los métodos de inversión utilizados en la búsqueda de las mejores soluciones que conduzcan a explicar la única evidencia, los datos.

¹ El método es conocido con el término en inglés "simulated annealing", donde la traducción literal (recocido simulado) no corresponde precisamente al proceso al que hace referencia el término en inglés.

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.

II.- Principios de Elastodinámica

II. INTRODUCCIÓN

2.1 Introducción.

Representar el fenómeno de la propagación de ondas sísmicas en la tierra no es asunto sencillo ya que la naturaleza supera en mucho a los modelos matemáticos concebidos hasta ahora por el hombre. Sin embargo haciendo algunas simplificaciones es posible modelar este fenómeno con un esquema comprensible que contempla razonablemente bien los aspectos más importantes de la propagación de ondas en la tierra. Con este efecto, la tierra suele considerarse como un medio lineal, homogéneo e isótropo.

La teoría de la mecánica del medio continuo proporciona los elementos básicos para entender el comportamiento del medio ante un estado de esfuerzos, así como la relación entre estos últimos y la deformación, es por ello que en este trabajo se hará un resumen de los principios básicos de la mecánica del medio continuo. En el estudio de la propagación de ondas sísmicas en el interior de la tierra también es necesario conocer los diferentes tipos de ondas, el tipo de esfuerzos y deformaciones a los cuales se asocian, su dirección de propagación, etc. A través de estos conceptos es como se puede llegar a comprender el fenómeno de la dispersión, tema central de este trabajo, e íntimamente ligado a la propagación de las ondas sísmicas.

2.2 El tensor de esfuerzos.

2.2.1. Definición.- Imaginemos un cuerpo cualquiera que contiene una superficie cerrada S , nuestro objetivo es conocer la interacción de fuerzas entre la parte exterior e interior de S .

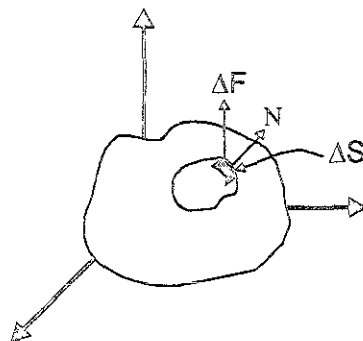


Figura 2.1 Representación del Estado de Esfuerzos.

Esta interacción está compuesta de dos tipos diferentes de fuerzas:

- las fuerzas de cuerpo que son ejercidas a distancia (como la gravedad y la fuerza electromagnética) y pueden ser expresadas como fuerza por unidad de masa.
- las fuerzas de superficie que son ejercidas por contacto a través de la frontera de S y que pueden ser expresadas como fuerza por unidad de superficie.

Para expresar las fuerzas de superficie definamos una porción diferencial de S llamada ΔS . Imaginemos un vector normal a ΔS , dicho vector puede definir la orientación de dicha diferencial de superficie en el espacio. Por otro lado se pueden distinguir dos partes de ΔS , una en contacto con el exterior y la otra en contacto con el interior de S .

Existe una fuerza F del exterior hacia el interior por estar en contacto ambas superficies, esta fuerza obliga la existencia de una fuerza ΔF en el interior que se contrapone a la anterior, esta fuerza ΔF depende del tamaño, posición y orientación de la superficie. Si suponemos que ΔS tiende a cero, el cociente $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ tiende a un límite

definido $\overset{N}{T} = \frac{dF}{dS}$, a este concepto se le llama vector de esfuerzos o de tracciones, y es dependiente de la orientación de la superficie a la que esta asociado por lo que la notación $\overset{N}{T}$ es precisa en cuanto indica que es el vector de esfuerzos asociado a la superficie cuyo vector normal es N .

Esta definición de esfuerzo es solamente aplicable a un plano, pero es posible representar el estado de esfuerzos de todo un cuerpo con ayuda de la representación de dicho estado de esfuerzos en una diferencial de volumen. Si se tiene una diferencial de volumen cúbica habrá esfuerzos normales en tres direcciones perpendiculares mientras que tendremos 6 esfuerzos tangenciales (2 en cada una de las tres direcciones que definen el espacio). En la figura 2.2 se muestra una diferencial de volumen y la representación de los esfuerzos en cada cara, los esfuerzos están representados por la letra σ y el primer subíndice indica la cara del cubo en la cual el actúa el esfuerzo y el segundo subíndice la dirección con que está aplicado dicho esfuerzo (notación indicial).

Estos esfuerzos pueden agruparse en un arreglo matricial, este arreglo es llamado tensor (de segundo orden) de esfuerzos. El tensor de esfuerzos representa el estado de esfuerzos del medio y es especialmente útil ya que cualquier tipo de esfuerzo en

cualquier dirección queda representado en el arreglo. En el tensor de esfuerzos los esfuerzos normales están contenidos en la diagonal principal mientras que en la triangular superior e inferior están contenidos los esfuerzos de cortante.

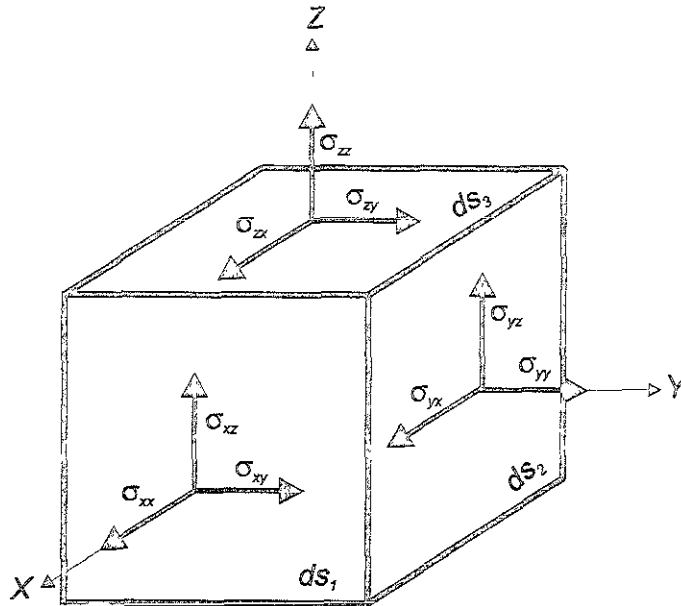


Figura 2.2 Representación del estado de esfuerzos en un elemento diferencial de volumen. Nótese que se muestran sólo los esfuerzos en las 3 caras visibles, ya que los esfuerzos actuando en las 3 caras ocultas son iguales en dirección a los esfuerzos mostrados.

El siguiente esquema muestra la representación clásica del tensor de esfuerzos. Los índices representan primero la cara donde actúa el esfuerzo y segundo la dirección en la que está aplicada el esfuerzo.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Es práctica común omitir el doble índice de los elementos de la diagonal principal y ponerles un solo índice, también en ocasiones en la literatura los esfuerzos cortantes se denotan con la letra τ en lugar de σ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Puede demostrarse matemáticamente que un tensor de 2° orden, como el tensor de esfuerzos, posee características que no cambian ante una transformación del sistema de coordenadas. Estas cantidades son llamadas invariantes, y se pueden calcular de la siguiente manera:

$$I1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I2 = (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy} \cdot \tau_{yx}) + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz} \cdot \tau_{zy}) + (\sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz} \cdot \tau_{zx})$$

$$I3 = \sigma_x (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz} \cdot \tau_{zy}) - \tau_{xy} (\tau_{yx} \cdot \sigma_z - \tau_{yz} \cdot \tau_{zx}) + \tau_{xz} (\tau_{yx} \cdot \tau_{zy} - \sigma_y \cdot \tau_{zx})$$

2.2.2.- El vector de tracciones y el teorema de Cauchy.

Consideremos un tetraedro de tamaño diferencial, el cual tiene tres caras alojadas en los planos ortogonales que definen un sistema cartesiano, la cuarta cara es perpendicular a un vector unitario que llamaremos el vector n , el cual a su vez puede expresarse en tres componentes, cada una paralela a los ejes coordenados. En la *figura 2.3* se muestra el tetraedro y en cada cara se indica cada uno de los esfuerzos actuando en ella. A cada una de las superficies que forman el tetraedro se les ha nombrado como dS donde el índice es el número de la cara de la cual se trata.

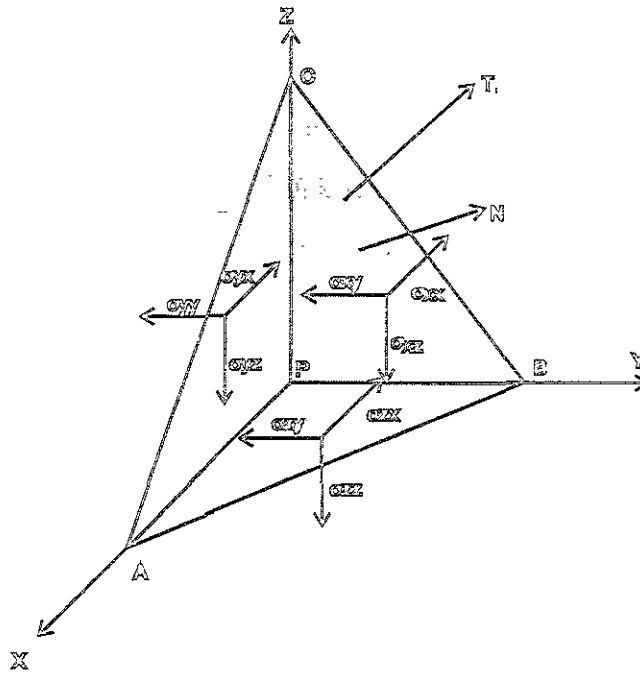


Figura 2.3 Tetraedro diferencial con 3 caras alojadas en los planos coordenados y una cara perpendicular al vector normal N .

Cada una de las superficies que conforman la figura pueden ser expresadas como proyecciones de la superficie perpendicular al vector n (superficie ABC), en los diferentes planos coordenados, esto es :

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= ds \cdot \cos(n,x) \\ ds_2 &= ds \cdot \cos(n,y) \\ ds_3 &= ds \cdot \cos(n,z) \end{aligned} \right\} \dots(2.1)$$

donde:

$\cos(n,x)$ es el coseno director entre el vector normal n y la dirección del eje x , $\cos(n,y)$ el coseno director entre n y la dirección del eje y , y $\cos(n,z)$ el coseno director entre n y la dirección del eje z .

Por otro lado el volumen del tetraedro puede ser expresado como:

$$dv = \frac{1}{3} h \cdot ds$$

donde:

dv = volumen diferencial del cuerpo

h = altura desde el punto P hasta la base ds

ds = superficie diferencial de la cara ABC

Si proponemos el equilibrio de fuerzas alrededor del punto P, en la dirección del eje x , se debe cumplir que:

$$\sum F_x - m.a = 0 \quad \dots(2.2)$$

El primer término de la ecuación 2.2, puede ser descompuesto en las siguientes fuerzas:

$$\left. \begin{aligned} (T_n + \varepsilon).ds &= \text{Fuerza actuando en la cara ABC} \\ (-\sigma_x + \varepsilon).ds_1 &= \text{Fuerza actuando en la cara PBC} \\ (-\tau_{xy} + \varepsilon).ds_2 &= \text{Fuerza actuando en la cara PAC} \\ (-\tau_{xz} + \varepsilon).ds_3 &= \text{Fuerza actuando en la cara PAB} \end{aligned} \right\} \text{Fuerzas de superficie} \quad \dots(2.3)$$

$$(X_I + \varepsilon)dv = \text{Fuerza de cuerpo.} \quad \dots(2.4)$$

ε es una cantidad que representa el esfuerzo en un punto ligeramente diferente a P.

El segundo término de la ecuación 2.2 se puede escribir como:

$$-ma = -\frac{1}{3}(\rho.h.V) \dot{V} \quad \dots(2.5)$$

donde:

ρ =densidad

\dot{V} =Derivada de la velocidad (aceleración)

Sustituyendo las ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 en 2.2:

$$\begin{aligned} (T_{n,x} + \varepsilon)ds - (\sigma_x \cos(n,x) + \varepsilon) ds - (\tau_{xy} \cos(n,y) ds + \varepsilon) + \\ -(\tau_{xz} \cos(n,z) ds + \varepsilon) + X_I = \frac{1}{3}(\rho.h.V) \dot{V} \quad \dots(2.6) \end{aligned}$$

Si se supone que el estado de esfuerzo es continuo, ε es una cantidad despreciable. Cuando h tiende a cero (para encontrar el estado de esfuerzos en el punto P), se puede dividir la ecuación 2.6 entre ds , si entonces se despeja $T_{n,x}$:

$$T_{n,x} = \sigma_x \cdot \cos(n,x) - \tau_{xy} \cdot \cos(n,y) - \tau_{xz} \cdot \cos(n,z) \quad \dots(2.7)$$

Repitiendo el mismo procedimiento para las otras dos direcciones (y y z):

$$T_{n,y} = \sigma_y \cdot \cos(n,y) - \tau_{yx} \cdot \cos(n,x) - \tau_{yz} \cdot \cos(n,z) \quad \dots(2.8)$$

$$T_{n,z} = \sigma_z \cdot \cos(n,z) - \tau_{zy} \cdot \cos(n,y) - \tau_{zx} \cdot \cos(n,x) \quad \dots(2.9)$$

las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 pueden ser expresadas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_{n,x} \\ T_{n,y} \\ T_{n,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(n,x) \\ \cos(n,y) \\ \cos(n,z) \end{bmatrix} \quad \dots(2.10)$$

En notación indicial:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

A esta relación se le conoce como el teorema de Cauchy y expresa que el vector de tracciones actuando en una superficie es igual al producto del tensor de esfuerzos asociado al cuerpo por el vector normal a dicha superficie.

2.2.3.- Ecuaciones de equilibrio y simetría del tensor de esfuerzos.

Consideremos ahora el equilibrio estático en un paralelepípedo diferencial como el mostrado en la figura 2.4, entonces se debe cumplir que la suma de las fuerzas actuando sobre él debe ser cero.

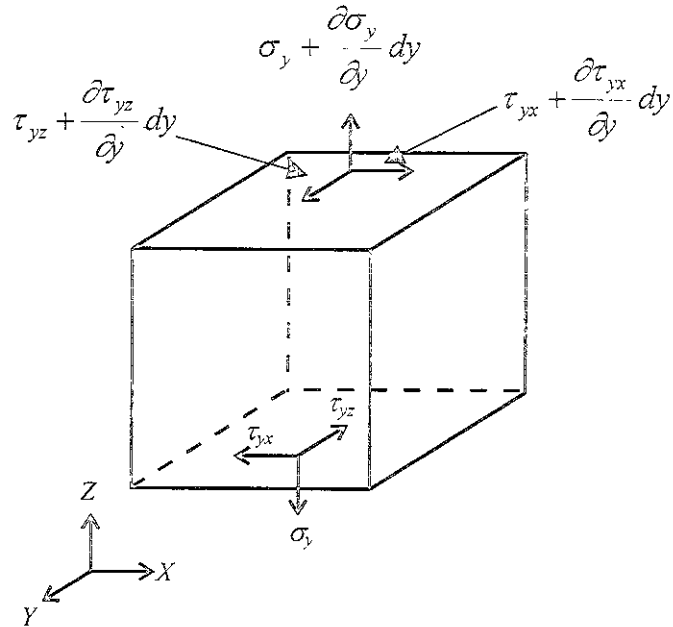


Figura 2.4 Paralelepípedo donde se muestran los esfuerzos en la cara inferior y superior del cubo

Los esfuerzos actuando en la base de la figura son :

$$\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$$

y en la cara opuesta:

$$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right), \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right), \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right)$$

donde:

$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$ es el cambio que experimenta τ_{yx} por estar en la distancia dy .

Haciendo lo mismo con las demás caras del paralelepípedo encontramos los esfuerzos actuando en cada una de ellas.

El volumen de este cuerpo puede ser encontrado como:

$$dv = dx dy dz$$

El área de las caras las definimos como:

$$dS_1 = dy dz$$

$$dS_2 = dx dz$$

Si ahora proponemos el equilibrio estático en la dirección del eje X

$$\sum F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \sigma_x dy dz - \tau_{yx} dz dx - \tau_{zx} dy dx + X_1 dx dy dz = 0$$

...(2.11)

Restando términos semejantes:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_1 = 0 \quad \dots(2.12)$$

Para la dirección del eje Y:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + X_2 = 0 \quad \dots(2.13)$$

Para la dirección del eje Z:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + X_3 = 0 \quad \dots(2.14)$$

Las expresiones 2.12, 2.13 y 2.14 pueden ser representadas en notación indicial como:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + x_i = 0 \quad \dots(2.15)$$

La expresión 2.15 (ecuación de equilibrio) es la primera conclusión de considerar el equilibrio estático, sin embargo se debe cumplir también que la suma de momentos debe ser igual a cero.

Si en el cuerpo mostrado en la figura 2.4 proponemos que la suma de momentos alrededor el eje Z debe ser cero tenemos:

$$\begin{aligned}
 & -(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx)dydz \frac{dy}{2} + \sigma_x dydz \frac{dy}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx)dydz dx - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy)dxdz dy + \\
 & + (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy)dxdz \frac{dx}{2} - \sigma_y dxdz \frac{dx}{2} + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz)dxdy \frac{dx}{2} - \tau_{zx} dxdy \frac{dy}{2} + \\
 & - X_1 dxdydz \frac{dy}{2} + X_2 dxdydz \frac{dx}{2} = 0
 \end{aligned}$$

...(2.16)

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz \frac{dy}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx)dydz dx - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy)dxdz dy + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dydxdz \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dzdxdy \frac{dx}{2} + \\
 & - X_1 dxdydz \frac{dy}{2} + X_2 dxdydz \frac{dx}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Dividiendo entre $dxdydz$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dy}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dx}{2} + \\
 & - X_1 \frac{dy}{2} + X_2 \frac{dx}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Si dx, dy, dz tienden a cero:

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

y por lo tanto:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \dots(2.17)$$

Si repetimos el mismo análisis para los otros dos ejes entonces podemos concluir que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \dots(2.18)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \dots(2.19)$$

Las ecuaciones 2.17, 2.18, y 2.19, pueden sintetizarse en la siguiente expresión de manera inicial:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \dots(2.20)$$

La expresión 2.20 concluye que el tensor de esfuerzos es simétrico, esto es que sólo puede tener 6 elementos diferentes entre si:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2.3 El tensor de deformaciones.

Intuitivamente sabemos que un cuerpo que se somete a un estado de esfuerzos sufre cierta deformación.

Supongamos una viga de sección transversal diminuta empotrada sometida a esfuerzos únicamente en su dirección longitudinal (figura 2.5).

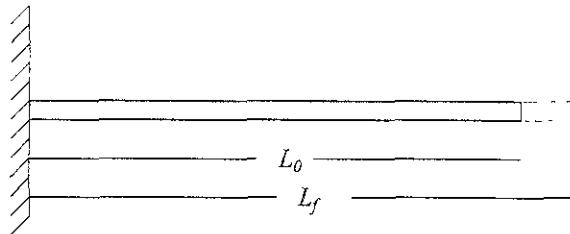


Figura 2.5 Viga de sección transversal diminuta empotrada sometida a esfuerzos en la dirección longitudinal.

Si medimos esta viga antes de ser sometida a los esfuerzos y luego un momento después de ser sometida a ellos, podemos saber cuánto cambió su longitud:

$$\Delta L = L - L_0$$

Sin embargo este cambio de longitud no es una medida propia de la deformación, ya que es dependiente de la longitud de la barra. Para eliminar esta dependencia podemos normalizar esta medida (ΔL) en función de la longitud inicial, con lo que ahora si tendríamos una medida de la deformación independiente del tamaño de la viga, con lo cual si las deformaciones fueran constantes a lo largo de toda la viga podríamos tomar dos puntos cualquiera en ella y medir la distancia entre ellos antes y después de aplicar el esfuerzo y calcular la deformación que sufrió esta viga con la siguiente expresión:

$$e = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \dots(2.21)$$

La ecuación 2.21 es una manera objetiva de medir la deformación, sin embargo no es la única ya que por ejemplo en el denominador podríamos usar la longitud final en lugar de la inicial, con lo cual, esta manera de medir la deformación sería también independiente del tamaño de la viga (y por lo tanto igualmente válida) pero diferente a la encontrada con la expresión 2.21.

Las deformaciones son adimensionales e independientes de la magnitud de la recta que une los dos puntos tomados para el análisis. Podemos generalizar este concepto diciendo que un medio continuo sufre deformaciones si la distancia relativa entre dos puntos sufre un cambio entre un estado inicial y un estado final.

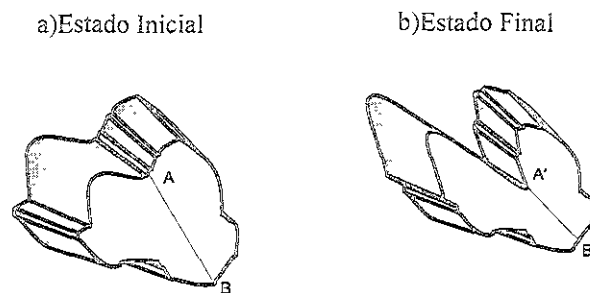


Figura 2.6 Sólido en a) estado inicial, b) estado final. El tamaño del segmento AB es diferente.

2.3.1.- Campo de desplazamiento.

Si un punto de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en un estado inicial, pasa a ser un punto de coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) referido a otro sistema, se puede encontrar el desplazamiento que sufrió el punto referido a ambos sistemas coordenados (ver fig. 2.7)

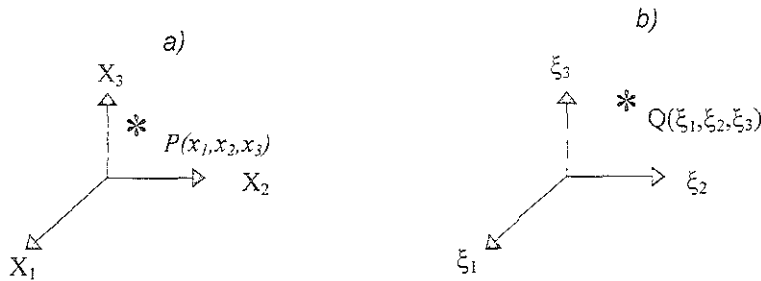


Figura 2.7 Posición del punto * a) en un estado inicial, b) en un estado final.

El desplazamiento puede ser representado como:

$$U = (u_1, u_2, u_3), \quad u_1 = \xi_1 - x_1, \quad u_2 = \xi_2 - x_2, \quad u_3 = \xi_3 - x_3$$

agrupando en notación indicial:

$$u_i = \xi_i - x_i, \quad \dots (2.22)$$

Si conocemos el desplazamiento que sufrió cada partícula del cuerpo, entonces a partir del cuerpo deformado podríamos reconstruir el cuerpo original. En mecánica del medio continuo suponemos que la deformación es continua y para consideraciones posteriores asumimos también que las deformaciones son permisibles, hecho que implica que el siguiente determinante jacobiano debe ser diferente de cero

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

2.3.2.- Deducción del tensor de deformaciones.

Consideremos dos puntos cercanos de un sólido en un estado inicial y analicemos la deformación sufrida por ellos en un estado final (ver figura 2.8).

Usando el concepto de distancia media entre los dos puntos:

$$\frac{1}{2}(ds^2 - ds_0^2) \quad \dots(2.23)$$

Donde:

$$ds_0^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \dots(2.24)$$

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 \quad \dots(2.25)$$

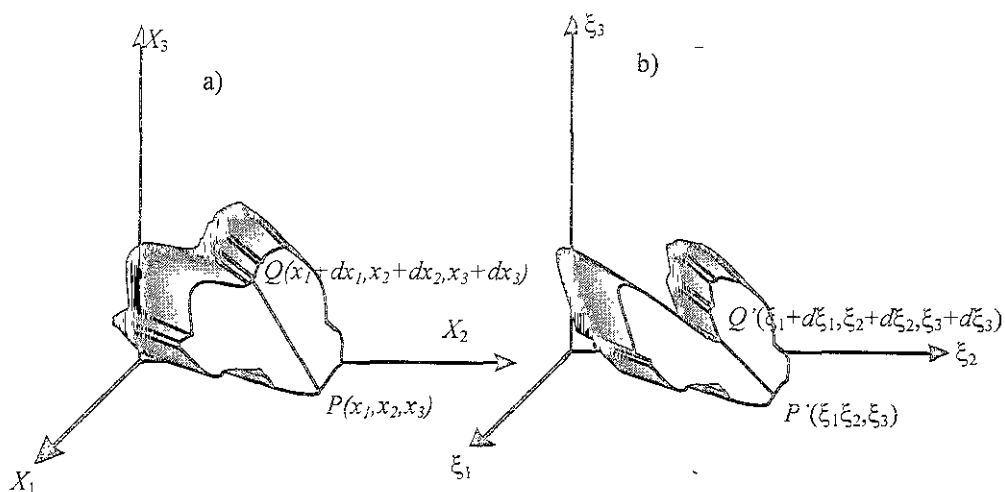


Figura 2.8 Recta PQ en a) Estado Inicial, b) Estado deformado.

Del concepto de diferencial total sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} d\xi_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_3 &= \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots(2.26)$$

Sabemos de la ecuación (2.22) que:

$$u_i = \xi_i - x_i$$

entonces:

$$\xi_i = u_i + x_i$$

Sustituyendo en las ecuaciones 2.26

$$\left. \begin{aligned} d\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \end{aligned} \right\} \dots(2.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.27 en 2.25 tenemos:

$$\begin{aligned} d\vec{s}^2 &= \left(\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \right)^2 \end{aligned} \dots(2.28)$$

Sustituyendo 2.28 y 2.24 en ecuación 2.23:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(ds^2 - ds_0^2) &= \left(\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \right)^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \end{aligned} \dots 2.29$$

Desarrollando la expresión anterior (2.29):

$$e_{11} dx_1^2 + e_{22} dx_2^2 + e_{33} dx_3^2 + 2e_{12} dx_1 dx_2 + 2e_{13} dx_1 dx_3 + 2e_{23} dx_2 dx_3 \quad \dots 2.30$$

donde definimos e_{11} , e_{22} , e_{33} , e_{12} , e_{13} y e_{23} (las componentes del tensor de deformaciones) como:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\
 e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\
 e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\
 e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Agrupando las ecuaciones 2.31 y expresándolas en notación indicial:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \tag{2.32}$$

La expresión 2.32 es conocida como el tensor de deformaciones de Green o tensor de deformaciones Lagrangianas.

Si en lugar de haber tomado como referencia para la deformación el sistema coordenado original hubiéramos tomado el sistema de referencia del cuerpo deformado, hubiéramos obtenido una expresión similar a la anterior (2.32) donde las derivadas parciales son con respecto a las coordenadas del sistema deformado:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\beta} \right) \tag{2.33}$$

La expresión 2.33 es conocida como el tensor de deformaciones Eulerianas o de Almansi.

Si los desplazamientos son muy pequeños las derivadas mixtas son despreciables y las expresiones 2.51 y 2.52 son iguales:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\beta} \longrightarrow 0$$

$$e_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots 2.34$$

La expresión 2.34 es conocida como el tensor de deformaciones infinitesimales.

2.4 Ley de Hooke.

Es natural pensar que existe una relación íntima entre esfuerzos y deformación, esta relación la propuso Hooke y establece que las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que la producen.

$$\sigma_{ij} \propto e_{ij} \quad \dots 2.35$$

Cauchy propuso una generalización de esta ley, la cual comprende a cualquier tipo de material :

$$\sigma_{ij} = c_{ijrs} e_{rs} \quad \dots 2.36$$

donde c_{ijrs} es un tensor de cuarto orden que representa las constantes elásticas del cuerpo. De manera general son 81 (3^4) constantes, sin embargo si se considera que tanto el tensor de esfuerzos como el tensor de deformaciones son simétricos, este número se reduce a 36 constantes diferentes. Ahora si el cuerpo es perfectamente elástico se puede comprobar que el tensor de constantes c es simétrico, con lo que el número de constantes distintas se reduce a 21. Considerando que el cuerpo es simétrico con respecto a tres planos ortogonales, este número se reduce a 9. La última consideración es que el cuerpo sea isótropo, esto es que sus propiedades físicas no cambian con respecto de la dirección en que se miden, de esta propiedad se puede demostrar que el número de constantes diferentes entre sí se reduce a dos, con lo que se puede expresar el tensor de constantes elásticas, en notación indicial, de la siguiente manera:

$$c_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad \dots 2.37$$

Sustituyendo la ecuación 2.37 en 2.36, obtenemos una expresión de la ley de Hooke para un medio idealmente elástico e isotrópico:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \dots 2.38$$

2.5 Ecuación de Movimiento y Ecuación de Navier.

La segunda ley de movimiento de Newton establece que:

$$\sum F_i = \frac{\partial}{\partial t} (mv_i) \quad \dots 2.39$$

Por otro lado nosotros sabemos que las fuerzas las podemos dividir en dos tipos, las fuerzas de superficie y las fuerzas de cuerpo. Expresando la ecuación 2.39 considerando del lado izquierdo de la igualdad ambos tipos de fuerzas, y del lado derecho expresando a la masa como una integral de volumen:

$$\int_S T_i ds + \int_V X_i dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V v_i \rho dv \quad \dots 2.40$$

De acuerdo al teorema de Cauchy el primer término de esta relación puede ser expresado como:

$$\int_S T_i ds = \int_S \sigma_{ij} n_j ds$$

Pero por el teorema de la divergencia la anterior la podemos expresar como:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j ds = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad \dots 2.41$$

Sustituyendo 2.41 en 2.40 y agrupando términos comunes:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V v_i \rho dv$$

Igualando los integrandos, considerando la densidad constante y expresando la derivada de la velocidad como la segunda derivada del desplazamiento tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \dots 2.42$$

Esta última es conocida como la ecuación de movimiento.

En la ecuación 2.42 podemos sustituir los esfuerzos en función de las deformaciones con ayuda de la ecuación 2.38 (ley de Hooke):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

A su vez las deformaciones pueden expresarse en términos de los desplazamientos con ayuda de 2.34 (tensor de deformaciones infinitesimales):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Agrupando y considerando que $\delta_{ij} = 1$ cuando $i = j$ y que j es subíndice libre:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \dots 2.43$$

Expresando en notación vectorial:

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \bar{u} + \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \dots 2.44$$

Pero el laplaciano de u se puede expresar como:

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - (\nabla \times \nabla \times \bar{u})$$

Por lo que 2.44 la podemos escribir como:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) + \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \dots 2.45$$

La cual es conocida como la ecuación de Navier.

2.6 Ondas P y Ondas S.

Si en la ecuación de Navier consideramos que las fuerzas de cuerpo son nulas,

obtenemos la divergencia de ambos lados sustituyendo $\nabla \cdot \bar{u} = \Theta$ y despejamos $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$

obtenemos:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Theta - \frac{\mu \nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \bar{u}))}{\rho} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \quad \dots 2.46$$

pero la divergencia del rotacional de cualquier vector siempre es cero ($\nabla \cdot (\nabla \times \bar{u}) = 0$), por lo que 2.70 queda como:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \quad \dots 2.47$$

Esta expresión es conocida como ecuación de onda, y representa ondas que se propagan con velocidad:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \dots 2.48$$

Este tipo de ondas, llamadas ondas P, son aquellas que no provocan distorsión, es decir sólo hay cambio de volumen. Si ahora tomamos el rotacional de 2.45, obtenemos la relación:

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega_i \quad \dots 2.49$$

donde:

$$\omega_i = \frac{\nabla \times u_i}{2}$$

La expresión 2.49 representa ondas que se propagan con velocidad:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \dots 2.50$$

Las ondas representadas en la expresión 2.49 son llamadas ondas S, y no provocan un cambio de volumen solo una distorsión.

De acuerdo al teorema de Hemholtz es posible expresar el campo de desplazamientos (dado que es un campo vectorial) como la divergencia de un potencial escalar mas el rotacional de un potencial vectorial:

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\Psi}$$

donde el potencial escalar ϕ esta asociado a las ondas P y el potencial vectorial $\bar{\Psi}$ esta asociado a las ondas S, por lo que si se propagan ambos tipos de ondas simultáneamente el campo de desplazamientos es un campo complejo. Con efecto de nuestro estudio se puede considerar que la fuente que provocó la propagación de las ondas es lejano, lo que trae ciertas ventajas, ya que si la fuente es lejana podemos pensar que la propagación se lleva a cabo en planos subsecuentes (ver figura 2.9)

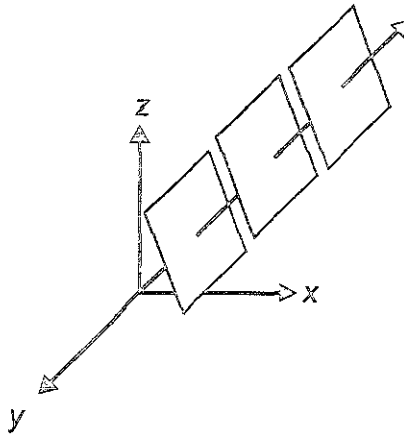


Figura 2.9 Frente de onda plano propagándose a través de un semiespacio.

La dirección del desplazamiento que provoca una onda P coincide con la dirección de propagación de la onda (llamada rayo), mientras que la dirección del desplazamiento provocada por la onda S está definida por un vector contenido en un plano perpendicular a la dirección de propagación llamado frente de onda. Cuando una onda S incide en una interfase es conveniente hacer un análisis independiente para cada dirección del desplazamiento por lo que estas ondas son divididas en dos tipos, las SH que provocan desplazamientos de las partículas en la dirección de un eje coordenado y las SV cuyo efecto provoca un desplazamiento perpendicular a las anteriores pero contenido en el frente de onda.

Debido a la subdivisión que se lleva a cabo en las ondas S, es conveniente expresar el potencial vectorial del desplazamiento distinguiendo ambos tipos:

$$\bar{\Psi} = \bar{\psi}(x, z, t) + \nabla x \bar{\chi}(x, z, t)$$

donde: $\bar{\psi}(x, z, t) = (0, \psi(x, z, t), 0)$ es el potencial asociado a las ondas SV y

$\nabla x \bar{\chi}(x, z, t) = \nabla x(0, \chi(x, z, t), 0)$ es el potencial asociado a las ondas SH.

2.7 Solución de la ecuación de onda - Ondas elásticas planas.

En una sola dimensión la ecuación de onda puede ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots 2.51$$

Las soluciones de esta ecuación son del tipo:

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad \dots 2.52$$

Si se toma como solución particular: $y = f_1(x - ct)$ se podrá conocer qué representa la constante c .

Se puede ver en la figura 2.10 que la repetición de la forma de onda (período espacial) sucede en una distancia Δx , después de un tiempo Δt_0 .

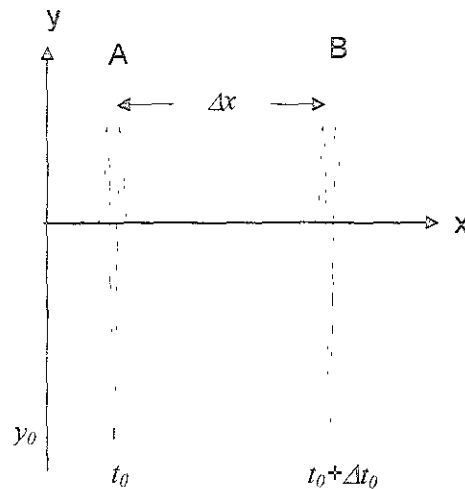


Figura 2.10 Forma de onda propagándose, graficada y vs. x .

El máximo de la función en el tiempo t_0 , tiene un valor y_0 , y después de un tiempo Δt_0 , a una distancia Δx , la función vuelve a tener el mismo valor y_0 , por lo que podemos aplicar la siguiente igualdad:

$$y_0 = f(x_0 - ct_0) \text{ para la posición A}$$

$$y_0 = f(x_0 + \Delta x - c(t_0 + \Delta t_0)) \text{ para la posición B}$$

igualando:

$$f(x_0 - ct_0) = f(x_0 + \Delta x - c(t_0 + \Delta t_0))$$

donde podemos igualar los argumentos:

$$x_0 - ct_0 = x_0 + \Delta x - c(t_0 + \Delta t_0)$$

despejando c y anulando términos obtenemos:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \quad \dots 2.53$$

donde se puede concluir que c es la velocidad de propagación de la onda.

En el dominio de Fourier se pueden elegir soluciones de la ecuación 2.51 que cumplan la forma de la solución 2.52 pero que además permitan hacer manejos sencillos, la siguiente expresión representa la solución de la ecuación de onda para una onda plana elástica en el dominio de Fourier:

$$u = Ae^{i\omega\left(\frac{xl+ym+zn}{c}-t\right)} \quad \dots 2.54$$

donde: x, l, m son los cosenos directores para cada dirección.

2.8 Ondas en un medio elástico seminfinito.

2.8.1.- El principio de Fermat y la ley de Snell.

Cuando se encuentra una interfase (contacto) entre dos medios, surge una pregunta ¿que pasa con la trayectoria de la onda?, esta pregunta es respondida por el principio de Fermat y la ley de Snell.

El principio de Fermat establece que un rayo recorrerá la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos, de tal manera que si T es el tiempo que tarda un rayo de ir de un punto P a otro Q y P es un parámetro de rayo, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = 0 \quad \dots 2.55$$

La primera conclusión de este principio es que el rayo incidente y el reflejado o refractado están en un mismo plano.

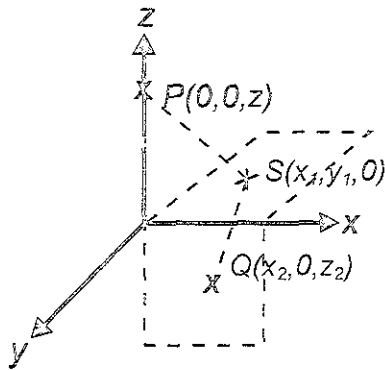


Figura 2.11 Suposición del rayo incidente y reflejado. Las trayectorias P-S, y S-Q no son coplanares..

Si consideramos los puntos mostrados en la figura 2.11, y encontramos el tiempo que tarda el rayo en recorrer la trayectoria de P a Q.

$$T = \frac{PS}{V_1} + \frac{SQ}{V_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + z_2^2}}{V_2}$$

Obteniendo la derivada parcial de esta expresión con respecto a la coordenada y_1 :

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = \frac{y_1}{V_1} (x_1^2 + y_1^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{y_1}{V_2} ((x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + z_2^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Por lo que $y_1 = 0$, lo que implica que el rayo incidente y el refractado están en un mismo plano, dada esta conclusión, se puede redibujar la figura 2.11 en un sólo plano (figura 2.12)

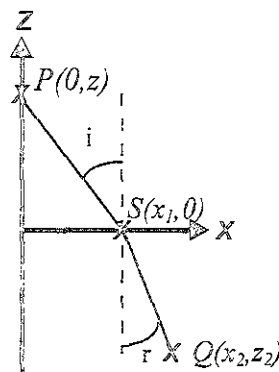


Figura 2.12 Rayo Incidente y rayo refractado (ambos contenidos en el mismo plano). Las trayectorias P-S y S-Q son coplanares.

La segunda conclusión del principio de Fermat es la ley de Snell. Para demostrarla ocuparemos nuevamente la expresión del tiempo que tarda el rayo en recorrer la trayectoria de P a Q . De acuerdo a la figura 2.11 tenemos:

$$T = \frac{PS}{V_1} + \frac{SQ}{V_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + z^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + z^2}}{V_2}$$

derivando con respecto a la coordenada x_1 y aplicando el principio de Fermat obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{x_1}{V_1} (\sqrt{x_1^2 + z^2})^{-\frac{1}{2}} - \frac{x_2 - x_1}{V_2} \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad \dots 2.56$$

pero geoméricamente podemos definir:

$$\frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2 + z^2})^{\frac{1}{2}}} = \text{sen } i \quad ; \quad \frac{x_2 - x_1}{(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + z^2})^{\frac{1}{2}}} = \text{sen } r$$

sustituyendo las expresiones anteriores en 2.56 tenemos que:

$$\frac{\text{sen } i}{V_1} = \frac{\text{sen } r}{V_2} \quad \dots 2.57$$

La expresión 2.58 es conocida como la ley de Snell, y se aplica tanto al rayo reflejado como el transmitido (refractado) en el caso de dos medios competentes. La ley de Snell puede entenderse pensando en la existencia de una velocidad aparente en la interfase, la cual es constante, y es la velocidad de propagación que un observador parado en la interfase podría medir.

2.8.2.- Caso SH en un semiespacio infinito.

Como ejemplo del procedimiento de análisis de una onda incidiendo en una interfase analizaremos el caso de la onda SH incidiendo en la interfase entre un semiespacio infinito y el aire. Entonces supongamos una onda SH incidiendo en dicha interfase como la mostrada en la figura 2.12

El campo de desplazamientos en el semiespacio podemos definirlo como:

$$\bar{U} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$$

Debido a que la onda incidente es una onda SH el campo de desplazamientos es diferente de cero solamente en la dirección v , por lo que podemos expresar el campo de desplazamientos provocado por la onda incidente de acuerdo a 2.54 como:

$$v^i = A e^{i \left(t + \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta} \right)} \quad \dots 2.58$$

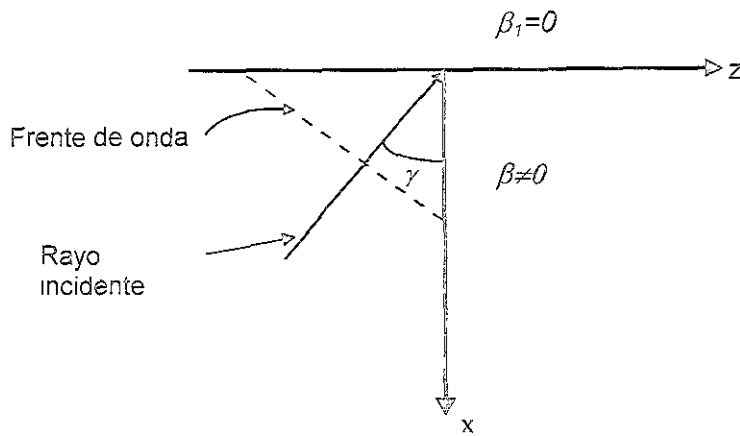


Figura 2.13 Onda SH incidiendo en el contacto entre el aire y el semiespacio

En la ecuación 2.58, el signo positivo del término $\frac{x \cos \gamma}{\beta}$ indica que la onda se está propagando en la dirección negativa del eje x , mientras que el signo negativo del término $\frac{z \sin \gamma}{\beta}$ indica que la onda se está propagando en la dirección positiva del eje z .

Sin embargo se deben cumplir las condiciones de frontera que en este caso, son que los esfuerzos en la superficie deben ser nulos, esto es que:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$$

Encontrando primero las deformaciones en función de los desplazamientos con el tensor

de deformaciones ($e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ para $i=1,2,3$ y $j=1,2,3$):

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} A i \omega \frac{\cos \gamma}{\beta} e^{i\omega \left(t + \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta} \right)}$$

$$e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

No se ha calculado el esfuerzo e_{23} por que a pesar de ser diferente de cero no está involucrado en el cálculo de los esfuerzos que nos interesan (en la superficie).

Haciendo uso de la Ley de Hooke ($\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$):

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = 0 \quad \sigma_{13}|_{x=0} = 2\mu(e_{13}) = 0$$

$$\sigma_{12}|_{x=0} = 2\mu e_{12} = \mu A i\omega \frac{\cos \gamma}{\beta} e^{i\omega(t + \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta})}$$

La expresión anterior indica que no se cumplen las condiciones de frontera, por lo que es entonces indispensable considerar un esfuerzo adicional que anule dicha expresión. Este esfuerzo adicional debe estar asociado a una onda de la misma naturaleza que la incidente, por lo cual podemos suponer una onda reflejada como la mostrada en la figura 2.14.

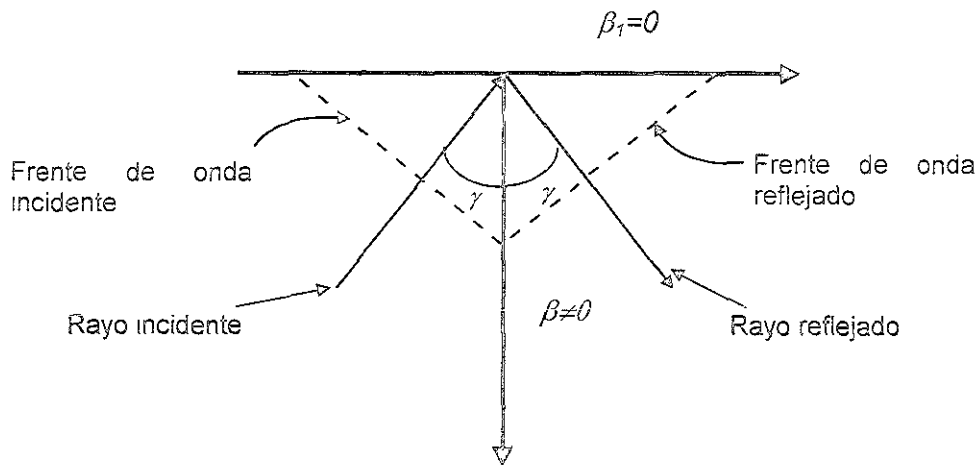


Figura 2.14 Ondas SH incidente y reflejada, en el contacto entre la superficie libre y un semiespacio.

Para cumplir las condiciones de frontera, la expresión del desplazamiento de esta onda es:

$$v^r = Ae^{i\omega(t - \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta})}$$

El ángulo de reflexión debe ser el mismo que el ángulo de incidencia, debido a que según la ley de Snell, se debe conservar la velocidad aparente en la interfase, y dado que la onda se propaga en el mismo medio con la misma velocidad, la única solución posible es que los ángulos de incidencia y reflexión sean iguales:

$$\frac{\sin \gamma}{\beta} = \frac{\sin \gamma}{\beta}$$

Estas conclusiones obligan a reescribir el campo de desplazamientos en el semiespacio:

$$v = v^i + v^r = Ae^{i\left(t + \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta}\right)} + Ae^{i\left(t - \frac{x \cos \gamma}{\beta} - \frac{z \sin \gamma}{\beta}\right)}$$

Se puede observar que en el miembro izquierdo, las dos partes de la expresión son muy similares, ya que la amplitud de la onda incidente y reflejada es la misma, los ángulos de incidencia y el de reflexión también son iguales y la velocidad de propagación donde es importante notar que la amplitud de la onda reflejada es la misma que la amplitud de la onda incidente.

Hasta este momento se ha analizado los principios fundamentales de la mecánica del medio continuo y la teoría que sustenta la propagación de las ondas de cuerpo (P y SV). Sin embargo existen otro tipo de ondas generadas a raíz de las ondas de cuerpo, las cuales al incidir, con un ángulo grande (mayor al ángulo crítico), se convierten en ondas que viajan guiadas por la interfase. Estas ondas, llamadas superficiales, presentan una característica muy importante para el presente trabajo: su velocidad de propagación depende de la frecuencia (dispersión).

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.

III.- Ondas Superficiales de Love y de Rayleigh

III. ONDAS SUPERFICIALES DE LOVE Y DE RAYLEIGH

3.1 Introducción.

En el capítulo anterior se analizaron ondas del tipo P y S¹, las cuales tienen características bien definidas tales como propagarse con una velocidad específica únicamente dependiente del medio a través del cual viajan (independientemente de la frecuencia). También expusimos un ejemplo sencillo de una onda SH incidiendo en una interfase.

La incidencia de ondas de cuerpo en una interfase puede dar lugar a ondas que viajan guiadas por ella, llamadas ondas superficiales. Este tipo de ondas tiene gran interés de estudio ya que el comportamiento de las ondas superficiales también está fuertemente ligado al medio donde se propagan y a la frecuencia con que viajan las ondas. Además suelen tener amplitudes grandes las cuales están relacionadas a los daños observados después de los sismos.

Este capítulo servirá para analizar brevemente las características de las ondas superficiales y dar elementos que posteriormente servirán para rescatar información sumamente útil a partir de ellas.

Sabemos del capítulo anterior que la ley de Snell implica que la velocidad aparente en una interfase debe ser la misma para cualquier tipo de ondas presentes en ella. Sin embargo, cuando una onda incide con un ángulo mayor a cierta cantidad (ángulo crítico), la velocidad de fase a lo largo de la interfase puede ser tan pequeña que ningún ángulo de refracción y/o reflexión puede llevar a que una onda de cuerpo (Onda P u Onda S) cumpla la ley de Snell. Entonces, aparecen ondas que van guiadas por la superficie (se propagan a lo largo de ella).

3.2 Angulo crítico o ángulo de emergencia.

De acuerdo con la ley de Snell (ec. 2.57) existe un ángulo máximo de incidencia con el cual una onda de cuerpo al incidir en una interfase se reflejará o transmitirá con su misma naturaleza de onda de cuerpo. Este ángulo es llamado ángulo crítico o ángulo de emergencia. Supongamos una interfase entre dos medios donde incide una onda SH (figura 3.1):

¹ Las ondas P y S son conocidas como ondas de cuerpo.

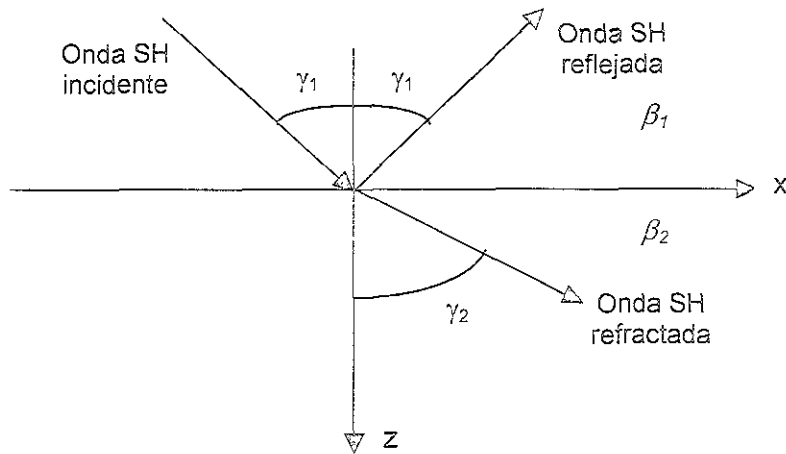


Figura 3.1 Onda SH incidiendo en una interfase que separa a dos medios de velocidades β_1 y β_2 , donde $\beta_1 < \beta_2$. γ_1 es el ángulo de incidencia y reflexión y γ_2 es el ángulo de refracción.

Sabemos de la ecuación 2.57 que:

$$\frac{\text{sen}(\gamma_1)}{\beta_1} = \frac{\text{sen}(\gamma_2)}{\beta_2} \quad \dots 3.1$$

despejando de 3.1 γ_2 obtenemos:

$$\gamma_2 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \text{sen}(\gamma_1) \right) \quad \dots 3.2$$

El argumento de la función sen^{-1} no puede ser mayor de uno, por lo que:

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \text{sen}(\gamma_1) = 1$$

despejando de la ecuación anterior γ_1 :

$$\gamma_1 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \quad \dots 3.3$$

Esta es la expresión que determina el ángulo crítico o ángulo de emergencia para el contacto entre dos medios de velocidad diferente. El ángulo crítico es el ángulo a partir

del cual las ondas de cuerpo al incidir en una interfase no se refractan en el otro medio, si no que viajan a través del contacto entre los dos medios

3.3 Onda inhomogénea evanescente.

Volvamos al ejemplo de una onda SH (sección 2.8.2) incidiendo en un contacto entre dos semiespacios (figura 3.2). Sabemos que habrá una onda reflejada en el mismo medio que la onda incidente y una onda refractada o transmitida en el otro medio. Los desplazamientos en el medio 1 podemos expresarlos como:

$$v_1 = v_1^i + v_1^r = B_1 e^{i\omega(t - \frac{x \cos \gamma_1}{\beta_1} - \frac{z \text{sen} \gamma_1}{\beta_1})} + B_2 e^{i\omega(t - \frac{x \cos \gamma_1}{\beta_1} + \frac{z \text{sen} \gamma_1}{\beta_1})} \quad \dots 3.4$$

mientras que en el medio 2 podemos expresarlo como:

$$v_2 = B' e^{i\omega(t - \frac{x \cos \gamma_2}{\beta_2} - \frac{z \text{sen} \gamma_2}{\beta_2})} \quad \dots 3.5$$

donde:

B_1 es la amplitud de la onda incidente,

B_2 es la amplitud de la onda reflejada,

B' es la amplitud de la onda refractada o transmitida.

Sabemos por la ley de Snell que la velocidad de fase de todas las ondas a lo largo de la interfase debe ser la misma:

$$c_x = \frac{\beta_1}{\cos(\gamma_1)} = \frac{\beta_2}{\cos(\gamma_2)} \quad \dots 3.6$$

El número de onda está definido como:

$$k_x = \frac{\omega}{c_x} \quad \text{y} \quad k_z = \frac{\omega}{c_z} \quad \dots 3.7$$

Podemos también definir dos nuevas variables que sólo servirán para simplificar el desarrollo de las expresiones:

$$r_{\beta 1} = \sqrt{\frac{c_x^2}{\beta_1^2} - 1} = \cot(\gamma_1) \quad \text{y} \quad r_{\beta 2} = \sqrt{\frac{c_x^2}{\beta_2^2} - 1} = \cot(\gamma_2) \quad \dots 3.8$$

donde:

$\cot(\gamma_1)$, $\cot(\gamma_2)$ son las cotangentes de los ángulos γ_1 y γ_2 respectivamente.

Con ayuda de 3.6, 3.7 y 3.8 podemos volver a expresar 3.4 y 3.5 como:

$$v_1 = B_1 e^{i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta 1} z)} + B_2 e^{i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta 1} z)} \quad \dots 3.9$$

$$v_2 = B' e^{i(\alpha x - k_x x - k_x r_{\beta 2} z)} \quad \dots 3.10$$

Si el ángulo de incidencia es mayor al crítico (postcrítico) implica que $c_r < \beta_2$ y entonces $r_{\beta 2}$ es una cantidad imaginaria. Podemos definir una nueva cantidad llamada $r_{\beta 2}^*$:

$$r_{\beta 2}^* = \sqrt{1 - \frac{c_x^2}{\beta_2^2}} \quad \dots 3.11$$

por lo tanto:

$$r_{\beta 2} = \pm i r_{\beta 2}^* \quad \dots 3.12$$

Sustituyendo la expresión 2.12 en 2.10:

$$v_2 = B' e^{\pm k_x r_{\beta 2}^* z} e^{i(\alpha x - k_x x)} \quad \dots 3.13$$

Dado que el término $r_{\beta 2}^*$ es imaginario puede ser separado de la exponencial que involucra al tiempo (t), esto significa que no hay propagación de la onda en la dirección z , y que el término $B' e^{\pm k_x r_{\beta 2}^* z}$ solo afecta a la amplitud de la onda. El signo positivo de la exponencial en el término de amplitud carece de sentido físico ya que implicaría la existencia de una onda cuya amplitud crece con la profundidad. Entonces la solución que cumple con todas las condiciones y además tiene un sentido físico es aquella que considera en el término de amplitud el signo negativo, lo que implica que la onda tiene una amplitud que decrece con la profundidad. Como ya hemos dicho esta onda no se propaga en la dirección z , sólo lo hace en la dirección x por lo que podemos decir que va "guiada" por la interfase. A este tipo de ondas se les llama ondas inhomogéneas evanescentes.

3.4 Ondas Superficiales de Love y de Rayleigh.

Las ondas superficiales de Rayleigh son ondas que surgen por la interacción de una onda P ó SV que incide con un ángulo postcrítico en una interfase. Estas ondas generan desplazamientos en la interfase que describen trayectorias elípticas con el plano vertical orientado en la dirección de propagación.

Cuando las ondas SH inciden en la superficie libre y se reflejan, pueden interactuar con capas más profundas de tal manera que estas ondas tienen posibilidad de quedar atrapadas entre la superficie libre y una capa profunda produciendo propagación horizontal. Estas ondas atrapadas son llamadas de Love y producen desplazamientos en la superficie que son perpendiculares a la dirección de propagación.

Es posible demostrar que la condición geológica más sencilla para la generación de ondas de Rayleigh es un semiespacio infinito, mientras que el modelo geológico más sencillo para la existencia de ondas de Love es una capa en contacto con la superficie libre descansando sobre un semiespacio infinito.

La amplitud de las ondas superficiales decae con la profundidad, por lo que la energía se concentra cerca de la superficie.

Como ejemplo y por simplicidad del caso deduciremos los desplazamientos que producen las ondas de Rayleigh.

3.4.1 Desplazamientos debidos a la onda de Rayleigh.

Supongamos un semiespacio infinito donde incide una onda P como el mostrado en la figura 3.2:

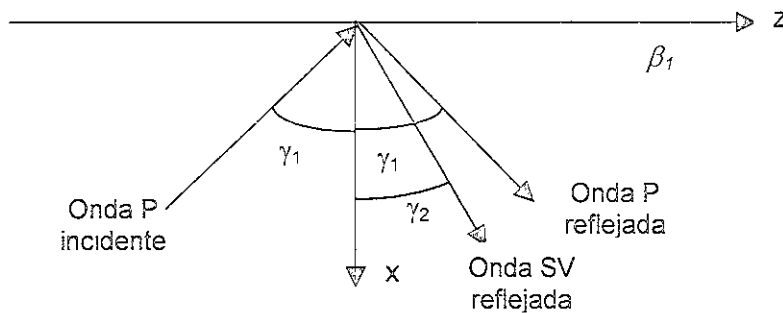


Figura 3.2 Onda P incidiendo en un semiespacio homogéneo, donde se reflejan una onda P y una onda SV.

Los potenciales del desplazamiento pueden ser escritos como:

$$\varphi = A_1 e^{i(\omega t - k_z z + k_z r_\alpha x)} + A_2 e^{i(\omega t - k_z z - k_z r_\alpha x)} \quad \dots 3.14$$

y

$$\psi = B e^{i(\omega t - k_z z - k_z r_\beta x)} \quad \dots 3.15$$

donde:

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1}$$

$$r_\beta = \frac{c^2}{\beta^2} - 1$$

$$k_z = \frac{\omega}{c}$$

c es la velocidad de fase (aparente) a lo largo del eje z .

φ es el potencial escalar (debido a ondas P).

ψ es el potencial vectorial (debido a ondas S).

A_1 , A_2 , B_2 son las amplitudes de las ondas P incidente, P reflejada y SV reflejada respectivamente.

Las ecuaciones 3.14 y 1.15 pueden ser escritas como:

$$\varphi = (A_1 e^{Mx} + A_2 e^{-Mx}) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \quad \dots 3.16$$

$$\psi = B e^{-Kx} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \quad \dots 3.17$$

Donde:

$$M^2 = k_z^2 r_\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

$$K^2 = k_z^2 r_\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right) = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

Con el objeto de demostrar la existencia de las ondas de Rayleigh en un semiespacio, consideremos que $c < \beta < \alpha$ por lo que M y K son números reales. Entonces los términos afectados por estos factores salen de la exponencial compleja y pasan a formar parte de la amplitud. El primer término de 3.16 implicaría una onda cuya amplitud crece indefinidamente conforme la profundidad es mayor, esto físicamente no es posible por lo que se demuestra que en este caso $A_1 = 0$. Este resultado implica que no existe una onda incidente y solo existen dos ondas (una P y una SV) viajando en la dirección del eje z .

Sabemos que en la interfase se deben cumplir ciertas condiciones de frontera, en este caso como se trata de la interfase entre un semiespacio y el aire, las condiciones de frontera que se deben cumplir son que cada uno de los esfuerzos involucrados (en la interfase) debe ser cero. Los tres esfuerzos involucrados en la superficie son:

$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. El esfuerzo τ_{xy} es igual a cero ya dado que se trata de ondas P y SV, por lo que los únicos esfuerzos de interés en este caso son: σ_x, τ_{xz} .

De acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma_{xx} = \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{xx} \quad \dots 3.18$$

$$\tau_{xz} = 2\mu e_{xz} \quad \dots 3.19$$

Las deformaciones pueden ser encontradas a través del tensor de deformaciones infinitesimales(ec. 2.34):

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots 3.20$$

y los desplazamientos a través del teorema de Hemholtz:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = 0 \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots 3.21$$

Sustituyendo 3.20 y 3.21 en 3.18:

$$\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad \dots 3.22$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad \dots 3.23$$

Encontrando las respectivas derivadas en 3.22 y desarrollando:

$$\left(\lambda M^2 - \lambda \frac{\omega^2}{c^2} + 2\mu M^2 \right) A_2 + \frac{2i\mu k \omega}{c} B_2 = 0 \quad \dots 3.24$$

Haciendo lo mismo para 3.23:

$$2 \frac{i\omega M}{c} A_2 + \left(K^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_2 = 0 \quad \dots 3.25$$

Dado que las ecuaciones 3.24 y 3.25 forman un sistema homogéneo, la única solución posible es la trivial, sin embargo esta solución no es de interés (implicaría que no hay ondas propagándose) por lo que podemos imponer la condición de la existencia de dependencia lineal entre ambas expresiones, para lo cual encontramos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda M^2 - \lambda \frac{\omega^2}{c^2} + 2\mu M^2 \right) A_2 & \frac{2i\mu k \omega}{c} B_2 \\ 2 \frac{i\omega M}{c} A_2 & \left(K^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y sustituyendo los valores de M y K :

$$\left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 + 4\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1\right)\left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \dots 3.26$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de Rayleigh. Si resolvemos la ecuación anterior para la velocidad de fase (c) considerando un medio de Poisson $\alpha = \sqrt{3}\beta$:

$$\frac{c^2}{\beta^2} \left[\frac{c^6}{\beta^6} - 8 \frac{c^4}{\beta^4} + c^2 \left(\frac{24}{\beta^2} - \frac{16}{\alpha^2} \right) - 16 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2} \right) \right] = 0 \quad \dots 3.27$$

Encontremos soluciones para $\frac{c^2}{\beta^2}$:

La primera solución es que $\frac{c^2}{\beta^2} = 0$, pero esto implicaría que no hay onda propagándose,

las otras tres soluciones son:

$$\frac{c^2}{\beta^2} = 4; \quad \frac{c^2}{\beta^2} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \frac{c^2}{\beta^2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}};$$

Al principio del análisis consideramos que $c < \beta$ por lo que la única solución posible es la tercera. Esto implica que:

$$c = 0.92\beta \quad \dots 3.28$$

Si en la ecuación 3.25 sustituimos los valores de M y K y a su vez sustituimos los valores de α^2 y β^2 con las siguientes relaciones $\alpha^2 = \frac{3c^2}{(0.92)^2}$ y $\beta^2 = \frac{c^2}{(0.92)^2}$ obtenemos:

$$B_2 = 1.4689A_2 \quad \dots 3.29$$

Para encontrar el campo de desplazamientos debido a la onda de Rayleigh sustituimos las expresiones 3.14, 3.15, 3.28 y 3.29 en las expresiones para encontrar el desplazamiento (ecs. 3.21):

$$u = A_2 k_z \cos(\omega t - k_z z) \left(-0.85 e^{(-0.85 k_z x)} + 1.47 e^{(-0.39 k_z x)} \right) \quad \dots 3.30$$

y

$$w = A_2 k_z \sin(\omega t - k_z z) \left(e^{(-0.85 k_z x)} - 0.58 e^{(-0.39 k_z x)} \right) \quad \dots 3.31$$

Si evaluamos los desplazamientos en la superficie tenemos:

$$u = 0.62 A k_z \cos(\omega t - k_z z)$$

y

$$w = 0.42 k_z \sin(\omega t - k_z z)$$

La combinación de estos desplazamientos dan como resultado un movimiento elíptico.

3.5 Dispersión de ondas superficiales.

En la sección anterior se demostró que una onda P incidiendo en la superficie libre, puede dar lugar a una onda de Rayleigh. La condición impuesta de que la velocidad de fase sea menor a la velocidad de las ondas S, y por lo tanto menor a la velocidad de ondas P ($c < \beta < \alpha$), implica que tanto la onda incidente como las reflejadas son ondas inhomogéneas. La onda de Rayleigh generada en un semiespacio puede entenderse como la interferencia constructiva de ondas P y SV. Se ha también encontrado que la onda de Rayleigh tiene una velocidad constante, y ésta es función de la velocidad de propagación de las ondas S. Este tipo de ondas superficiales es llamado ondas de interfase.

Sin embargo, existe otro tipo de ondas superficiales denominado ondas guiadas que son producto de la energía atrapada en una zona llamada guía de onda.

Un ejemplo de este tipo de ondas surge cuando se combina la reflexión total de ondas SH en la superficie libre con un medio estratificado. Las reverberaciones de la onda SH quedan atrapadas cerca de la superficie e interfieren entre sí dando lugar a propagación horizontal de ondas de Love.

Las ondas superficiales guiadas presentan una característica muy peculiar: la dispersión. Cuando estas ondas viajan en un medio estratificado, la velocidad con la que se propaga cada uno de los armónicos que la constituyen es diferente. Esto es, la velocidad en las ondas superficiales depende de la frecuencia. Este fenómeno es sumamente útil en sismología ya que de un análisis cuidadoso de él, se pueden concluir importantes resultados. Así por ejemplo, la dispersión de las ondas superficiales ha servido para inferir modelos estratificados ya sea con sismos naturales (bajas frecuencias) o con experimentos de fuente controlada (altas frecuencias), los primeros han arrojado resultados confiables para inferir modelos de corteza terrestre en México (*Campillo et al., 1996; Shapiro et al., 1997;*) y los segundos para inferir estratigrafía local en algunos puntos determinados (*Chávez-García et al., 1995*).

Como ejemplo deduciremos aquí la ecuación que gobierna el comportamiento de la velocidad de las ondas de Love en función de la frecuencia (dispersión) para el medio geológico más sencillo donde pueden aparecer dichas ondas.

3.5.1 Ecuación de dispersión de ondas de Love.

Supongamos una capa en contacto con el aire, la cual descansa sobre un semiespacio (figura 3.3).

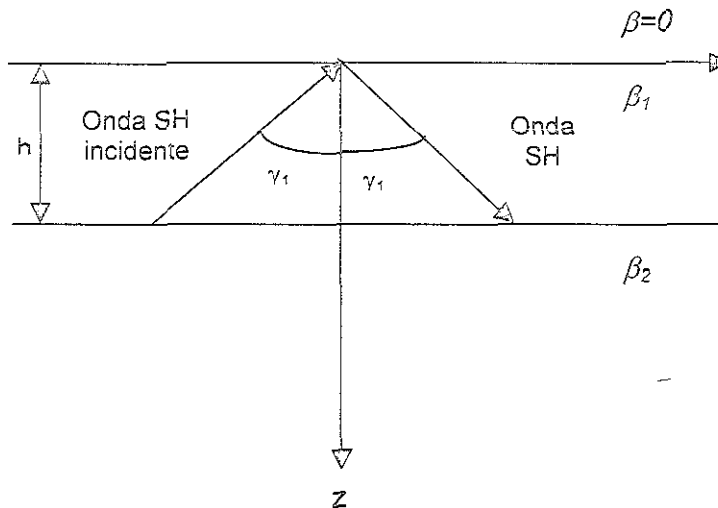


Figura 3.3 Onda SH propagándose en un estrato con velocidad de propagación β_1 . Nótese que no existe propagación en el medio 2.

Podemos expresar el campo de desplazamientos en el medio 1 como:

$$v_1 = v_1^i + v_1^r = B_1 e^{i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta_1} z)} + B_2 e^{i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_1} z)} \quad \dots 3.32$$

y en el medio 2:

$$v_2 = B' e^{i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)} \quad \dots 3.33$$

Una condición de la existencia de ondas de Love en un modelo como el mostrado en la figura es que en el medio 2 no debe haber propagación de ondas de cuerpo, por lo que en el medio 1 la reflexión es total, esto indica que la onda esta atrapada en el estrato por lo que el término $k_x r_{\beta_2} z$ debe salir de la exponencial compleja y pasar a formar parte de la amplitud. Esta condición se logra si $r_{\beta_2} \in I$ (donde I es el conjunto de los números imaginarios), esto es que $c_x < \beta_2$:

$$r_{\beta_2} = \left(\frac{c_x^2}{\beta_2^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } c_x < \beta_2 \text{ entonces } r_{\beta_2} \in I$$

Considerando lo anterior podemos expresar el campo de desplazamientos en el medio 2 como:

$$v_2 = B' e^{(-k_x r_{\beta_2 z})} e^{i(\omega t - k_x x)} \quad \dots 3.34$$

Las condiciones de frontera que se deben cumplir son que:

En la superficie libre los esfuerzos deben ser iguales a cero.

$$1.- \tau_{xz}|_{z=0} = 0$$

$$2.- \tau_{yz}|_{z=0} = 0$$

$$3.- \sigma_z|_{z=0} = 0$$

Los esfuerzos en el contacto entre los medios 1 y 2 deben ser iguales.

$$4.- \tau_{xz}|_{z=h} = \tau_{xz}|_{z=h}^2$$

$$5.- \tau_{yz}|_{z=h} = \tau_{yz}|_{z=h}^2$$

$$6.- \sigma_z|_{z=h} = \sigma_z|_{z=h}^2$$

Los desplazamientos en el contacto entre los medios 1 y 2 deben ser iguales

$$7.- u_1|_{z=h} = u_2|_{z=h}$$

$$8.- v_1|_{z=h} = v_2|_{z=h}$$

$$9.- w_1|_{z=h} = w_2|_{z=h}$$

Debido a que una onda SH solo provoca desplazamientos en la dirección y (perpendicular al plano xz), las condiciones 1,3,4,6,7 y 9 son cumplidas (por que, tanto los esfuerzos como las deformaciones en las direcciones consideradas son nulas).

De la condición 2 (con ayuda del tensor de deformaciones y de la ley de Hooke):

$$\tau_{yz} = \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_1 (ik_x r_{\beta_1}) (\beta_2 - \beta_1) = 0$$

Por lo tanto:

$$\beta_2 = \beta_1 \quad \dots 3.35$$

De la condición 5 (con ayuda del tensor de deformaciones y de la ley de Hooke):

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=h}$$

$$(-ik_x r_{\beta_1}) B_1 \left(e^{(-ik_x r_{\beta_1} h)} - e^{(ik_x r_{\beta_1} h)} \right) e^{i\omega t} e^{-ik_x x} = \frac{\mu_2}{\mu_1} (-ik_x r_{\beta_2}) B' e^{(-ik_x r_{\beta_2} h)} e^{i\omega t} e^{-ik_x x}$$

Simplificando y usando la identidad $e^{-\alpha} + e^{\alpha} = 2 \cos(\alpha)$.

$$2B_1 \cos(k_x r_{\beta 1} h) = B' e^{ik_x r_{\beta 2} h} \quad \dots 3.36$$

De la condición 8:

$$v_1 \Big|_{z=h} = v_2 \Big|_{z=h}$$

$$B_1 \left(e^{-ik_x r_{\beta 1} h} + e^{ik_x r_{\beta 1} h} \right) e^{i\omega t} e^{-ik_x x} = B' e^{i\omega t} e^{-ik_x x} e^{-ik_x r_{\beta 2} h}$$

Simplificando y usando la identidad $e^{-\alpha} - e^{\alpha} = 2i \operatorname{sen}(\alpha)$:

$$2i\mu_1 r_{\beta 1} B_1 \operatorname{sen}(k_x r_{\beta 1} h) = -\mu_2 r_{\beta 2} B' e^{-ik_x r_{\beta 2} h} \quad \dots 3.37$$

Despejando $e^{-ik_x r_{\beta 2} h}$ de 3.36 y 3.37, igualándolas y usando la identidad $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \tan \alpha$:

$$\tan(k_x r_{\beta 1} h) = \frac{-\mu_2 r_{\beta 2}}{i\mu_1 r_{\beta 1}} \quad \dots 3.38$$

La ecuación 3.38 es la ecuación de dispersión de ondas de Love, cuyas soluciones a menudo se obtienen graficando ambos lados de la ecuación.

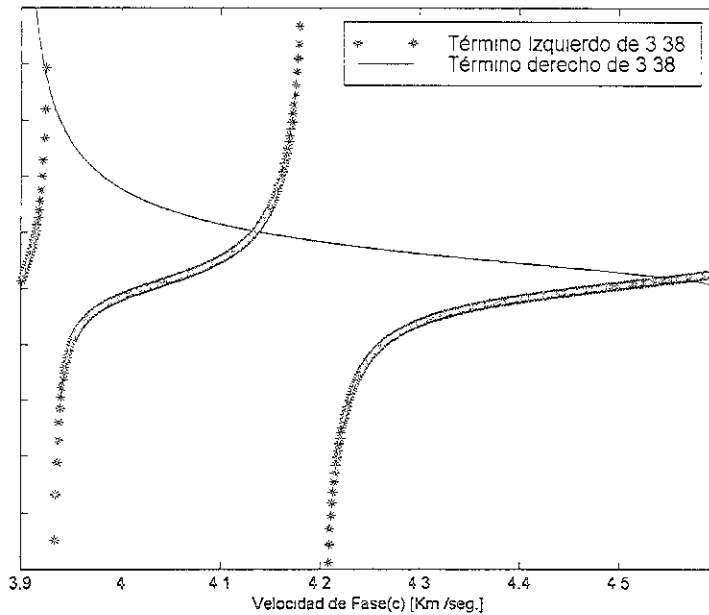


Figura 3.4 Gráfica de la expresión 3.38. Los asteriscos representan el lado izquierdo de dicha ecuación, y la línea continua el lado derecho. Las intersecciones de ambas curvas son los valores de c (velocidad de fase) que son solución de la ecuación 3.38.

En la figura 3.4 se muestran las curvas generadas por el lado izquierdo de 3.38 (en asteriscos) y el lado derecho (en línea continua). Los parámetros para generar las curvas fueron: $h = 50$ Km, $\beta_1 = 3.9$ Km/s, $\beta_2 = 4.6$ Km/s, $\rho_1 = 2.8$, $\rho_2 = 3.3$ y un período $T = 1$ s..

El hecho de que para una misma frecuencia exista mas de una solución, (en este caso 3 soluciones) indica la existencia de diversos modos de propagación. Esto es que existen armónicos de la misma frecuencia pero que se propagan con velocidad diferente. Una curva de dispersión, se logra graficando las soluciones de la expresión 3.38 para diversas frecuencias (figura 3.5). De esta manera podríamos tener una gráfica de velocidad de fase contra frecuencia, donde las curvas de izquierda a derecha de la gráfica representan el modo fundamental de propagación y los modos superiores.

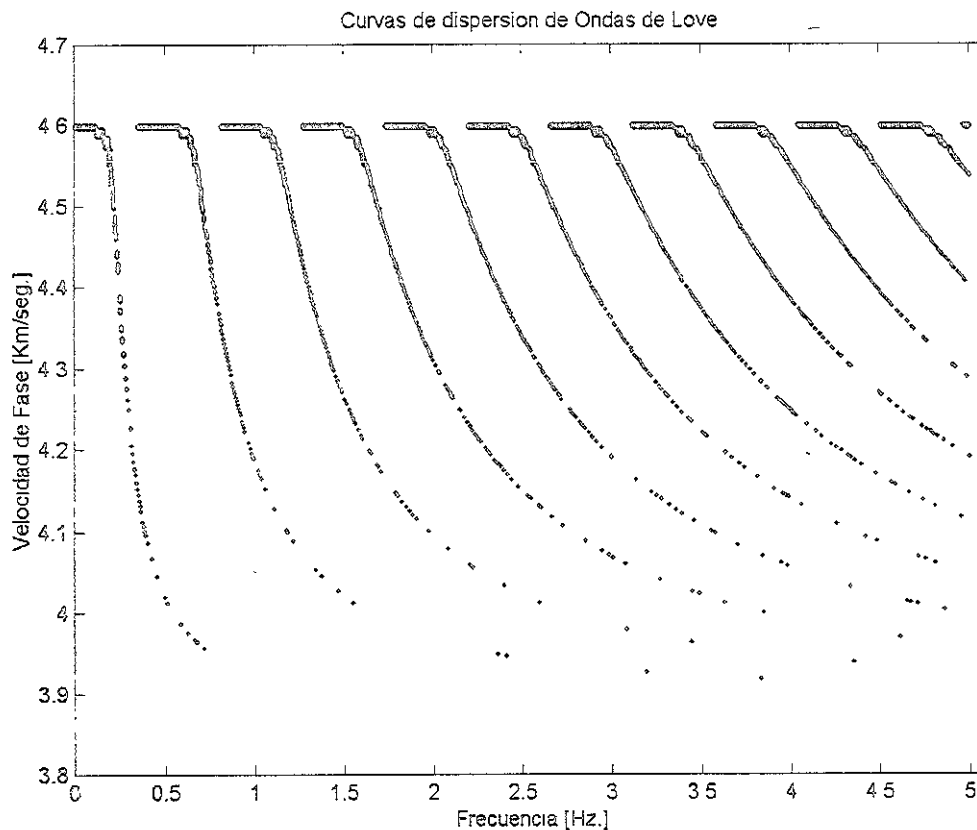


Figura 3.5 Curvas de dispersión generadas con los mismos parámetros que la fig. 3.4, variando la frecuencia entre 0.1 Hz. y 5 Hz y encontrando las raíces de la expresión 3.38.

La velocidad de fase, en el caso de las ondas superficiales, es aquella con la que viaja cada armónico (una distinta para cada frecuencia), pero también existe una velocidad con la que se propagan paquetes completos de energía, esta velocidad es llamada velocidad de grupo (U). La velocidad de grupo puede calcularse como:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad \dots 3.39$$

donde:

U es la velocidad de grupo

ω es la frecuencia

k es el número de onda.

Existe una relación estrecha entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo:

$$c = U + \lambda \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad \dots 3.40$$

donde:

U es la velocidad de grupo

c es la velocidad de fase

λ es la longitud de onda

Las curvas de dispersión son únicamente dependientes de las propiedades del medio donde se propagan y la frecuencia de interés. Esto se puede ver en la ecuación 3.38, donde los valores de c que son solución para una frecuencia dada son dependientes solamente de h , β_1 , β_2 , μ_1 y μ_2 , las cuales son las propiedades acústicas que caracterizan al medio .

En un registro sísmico se pueden observar las ondas superficiales, y a través de algunos procesos calcular las curvas de dispersión. Este hecho es de especial interés en la sismología ya que a través de un proceso de inversión de las curvas de dispersión se pueden conocer las características del medio donde se propagaron las ondas de las cuales se tiene registro.

3.6 Dispersión de velocidad de grupo observada en registros sísmicos.

Para obtener la velocidad de grupo existen tres alternativas. La primera consiste en analizar la diferencia en tiempo, entre dos estaciones alineadas al epicentro, de arribos en paquetes de ondas filtradas para distintas frecuencias. La segunda alternativa es calcular la dispersión de la velocidad de grupo a partir de la ecuación 3.40, lo que implica el previo conocimiento de la velocidad de fase. La tercera alternativa es medir el tiempo de arribo de las ondas para diferentes frecuencias. Este procedimiento requiere, una buena localización del epicentro (para conocer la distancia entre el epicentro y la estación), y de contar con el tiempo de origen de manera precisa. Con estos dos parámetros es posible calcular la velocidad de grupo. La distribución de las estaciones de registro usadas en este trabajo, no permitió elegir ninguna de las dos primeras alternativas, por lo que para todo el análisis se optó por la tercera alternativa.

Para determinar la velocidad de grupo en este trabajo se usó la técnica de filtrado múltiple (Dziewonski *et al.* 1969) enriquecida por un procedimiento de apilamiento logarítmico (Campillo *et al.*, 1996; Shapiro *et al.*, 1997) que permite, a través de varios registros de una misma zona epicentral en una misma estación de registro, aumentar la definición y por lo tanto la confiabilidad de las curvas de dispersión.

3.6.1 Filtrado Múltiple.

La técnica de filtrado múltiple, consiste de dos pasos básicamente: El cálculo de la transformada de Fourier de la señal de entrada y una multiplicación del espectro complejo por un filtro gaussiano para pequeñas ventanas de frecuencia. El filtro gaussiano se puede escribir en el dominio de la frecuencia como:

$$H(\omega) = e^{-\alpha \left(\frac{\omega - \omega_n}{\omega_n} \right)^2} \quad \dots 3.41$$

donde:

$H(\omega)$ es una función de la frecuencia

ω_n es la frecuencia central del filtro y

α es un factor relacionado con el ancho de banda del filtro.

Si designamos el ancho de banda como B (el ancho de la campana gaussiana), podemos calcular los valores límites inferior (ω_-) y superior (ω_+) que puede tomar la función gaussiana alrededor de una frecuencia centrada (ω_n):

$$\omega_{-,n} = (1 - B)\omega_n \quad \dots 3.42$$

$$\omega_{+,n} = (1 + B)\omega_n \quad \dots 3.43$$

Si designamos a β como un parámetro que describe el decaimiento de la función y lo calculamos como:

$$\beta = \ln \frac{|H_n(\omega_n)|}{|H_n(\omega_{-n})|} = \ln \frac{H_n(\omega_n)}{H_n(\omega_{+n})} \quad \dots 3.44$$

entonces el parámetro α puede ser expresado usando 3.42, 3.43 y 3.44 como:

$$H_n = \begin{cases} 0 & \text{Para } \omega < (1-B)\omega_n \\ e^{-\alpha \left(\frac{\omega-\omega_n}{\omega_n}\right)^2} & \text{Para } (1-B)\omega \leq \omega \leq (1+B)\omega_n \\ 0 & \text{Para } \omega > (1+B)\omega_n \end{cases} \quad \dots 3.45$$

Después de filtrar la señal original con el filtro alrededor de una frecuencia centrada ω_n se calcula transformada inversa de Fourier. Para esta nueva señal se obtiene la envolvente (Goodman, 1960; Dziewonski, 1969), cuyas amplitudes máximas indican el tiempo de arribo de las ondas superficiales alrededor de una frecuencia ω_n . Si este mismo procedimiento es llevado a cabo para múltiples frecuencias se puede obtener un diagrama de contornos donde se grafique la amplitud como función de la frecuencia y el tiempo de arribo. Es común representar esta función en el dominio periodo contra velocidad de grupo, la cual se calcula dividiendo la distancia epicentral entre el tiempo de cada arribo, mientras que el período se calcula como $1/\omega$.

Estos diagramas a menudo son complejos ya que puede observarse confusión entre los diversos modos de propagación, además de ruido causado por efectos dispersivos debidos a heterogeneidades laterales, entre otros fenómenos.

Con el fin de disminuir estos efectos se usó para este trabajo una técnica de apilado en las amplitudes de las envolventes de la señal filtrada (Campillo et al., 1996; Shapiro et al., 1997).

3.6.2 Apilado logarítmico.

Esta técnica considera la posibilidad de llevar a cabo el procedimiento antes descrito (filtrado múltiple) para diversos eventos provenientes de la misma zona epicentral y registrados en la misma estación. Si se cuenta con n eventos (desde $i=1, n$), se puede calcular la amplitud de la envolvente normalizada para el evento i -ésimo en un período (T) dado y una velocidad de grupo (u) como:

$$N_i(T, u) = e^{-\left[\frac{\alpha r_i}{\pi U_i^2(T)} (u - U_i(T)) \right]^2} \quad \dots 3.46$$

donde:

$N_i(T, u)$ es la amplitud de la envolvente del evento i -ésimo para un período T y una velocidad de grupo (u).

$U_i(T)$ es la velocidad de grupo observada del evento i -ésimo en el período T .

α es un factor relacionado al ancho de banda del filtro.

r_i es la distancia entre el epicentro y la estación para el evento i -ésimo.

El apilado logarítmico consiste en la multiplicación de todas las amplitudes de las envolventes ($N_i(T, u)$) de cada uno de los eventos para un período y velocidad de grupo dados:

$$A_s(T, u) = N_1(T, u) * N_2(T, u) * \dots * N_n(T, u) \quad \dots 3.47$$

donde:

n es el número de registros con que se dispone.

Cuando la velocidad de grupo es la misma para todos los registros, entonces la amplitud de la envolvente es igual a uno y el ancho de banda es igual a: $B = \frac{U^2(T)}{\alpha r_i}$.

Si la velocidad de grupo es diferente para cada $U_i(T)$ la amplitud máxima de la envolvente es menor que uno. Consideremos que los diferentes valores de velocidad de grupo $U_i(T)$ están distribuidos en torno a un valor medio $U_0(T)$ entonces la velocidad de grupo para el evento i -ésimo esta dada por:

$$U_i(T) = U_0(T) + \delta_i(T) \quad \dots 3.48$$

donde:

$\delta_i(T)$ es la desviación de la velocidad de grupo observada en el registro i -ésimo para el período T causado tanto por heterogeneidades laterales en la estructura local como por incertidumbre en la localización de los eventos.

En este caso la envolvente promedio tiene su máxima amplitud en una velocidad de grupo $U_0(T)$. Dicha amplitud puede ser expresada como:

$$\text{Max}(A_s(T, u)) = e^{-\left[\frac{\alpha r}{\pi U_0^2(T)} \right]^2 \sum \delta_i^2(T)} \quad \dots 3.49$$

La amplitud máxima de la envolvente promedio en un período dado, depende de que tan parecidos son entre sí los diferentes valores de la velocidad de grupo de cada uno de los registros. La ecuación 3.49 es útil para medir la incertidumbre de la curva de dispersión para un período dado, ya que con la amplitud máxima de la envolvente promedio ($Max(A,(T,u))$) y cada una de la amplitudes ($N_u(T,u)$) es posible obtener la desviación estándar alrededor de un valor central.

3.6.3 Error sistemático en la estimación de la curva de dispersión.

Como se ha mencionado anteriormente la técnica de filtrado múltiple implica una multiplicación del espectro del sismograma por un filtro gaussiano centrado en una frecuencia ω_n . Dado que en las ondas superficiales generalmente la amplitud del espectro de la señal decrece en bajas frecuencia, el resultado de la multiplicación de la señal por el filtro gaussiano, será una señal cuya máxima amplitud este en una frecuencia $\overline{\omega_n}$ diferente a la frecuencia central del filtro. Esto provocará que la velocidad de grupo, al ser calculada, sea asignada a una frecuencia ω_n cuando en realidad debiera corresponder con una frecuencia $\overline{\omega_n}$ (Leshvin et al., 1989). Debido a esta diferencia, la curva de dispersión calculada estará desfasada de la curva de dispersión real.

Para disminuir el error causado por este efecto, se ha *propuesto* (Leshvin et al., 1989) cambiar la frecuencia ω_n por una frecuencia instantánea Ω calculada como:

$$\Omega(\omega_n) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_s(\omega_n, t) \Big|_{t=\tau(\omega_n)}$$

donde $\Phi_s(\omega_n, t)$ es la fase de la transformada inversa del espectro filtrado y τ_{ω_n} es el punto de máxima amplitud.

El problema de esta expresión, es que, en presencia de modos superiores de propagación, habría diferentes máximos para una misma frecuencia ω_n . Si bien un analista con cierta experiencia podría fácilmente discernir cual se refiere al modo fundamental, automatizar el proceso en algún lenguaje de cómputo no es sencillo.

Por otro lado y para evitar el problema anterior, N. Shapiro y S.Singh (Shapiro y Singh, 1999) propusieron asignar el cálculo de la velocidad de grupo a una frecuencia centroide del espectro filtrado. Esta frecuencia centroide puede ser calculada cómo:

$$\omega_c(\omega_n) = \int \omega H(\omega_n, \omega)^2 d\omega$$

donde $H(\omega_n, \omega)$ es el espectro filtrado de la señal.

Esto, además de evitar la ambigüedad que existe por la presencia de modos superiores, permite ser incorporado como parte del cálculo del apilado logarítmico.

Como se verá mas adelante, los conceptos analizados en este capítulo serán útiles para la inversión de curvas de dispersión con el fin de determinar un modelo de corteza para la parte centro-sur de México. En el siguiente capítulo se hablará de la teoría de inversión en la geofísica, ya que los conceptos vertidos en ella también serán útiles para cumplir el objetivo de este trabajo.

IV TEORÍA DE INVERSIÓN.

4.1 Definición.

La teoría inversa es un conjunto de técnicas matemáticas que permiten obtener información útil acerca del mundo físico a partir de inferencias logradas a través de observaciones (Menke, 1984). Habitualmente un fenómeno físico se puede caracterizar a través de observaciones, las cuales son registradas por algún instrumento diseñado para medir discretamente el fenómeno. Así por ejemplo, para medir la gravedad terrestre se utiliza un gravímetro, con el cual se toman mediciones puntuales en diferentes posiciones del terreno; en el caso de un sismo se puede tener un instrumento que registre el evento para diferentes instantes de tiempo. Este procedimiento puede ser seguido para un número grande de fenómenos físicos; en todos los casos se tienen mediciones discretas del fenómeno, a estas mediciones en adelante se les llamará, en este trabajo, observaciones o datos.

A partir de las observaciones se puede, en muchos casos, extraer información útil que posteriormente será utilizada con fines prácticos. En geofísica esta información permite caracterizar algunas propiedades de interés en un medio. Por ejemplo a partir de mediciones de gravedad adecuadamente tratadas se puede determinar la existencia y propiedades de un cuerpo de densidad contrastante con su entorno; en el caso de un sismo a partir del procesamiento de los registros es posible obtener una caracterización del medio donde se pueden distinguir sus dimensiones y propiedades acústicas.

En este trabajo se les llamará parámetros del modelo a las propiedades que caracterizan a un medio ante un fenómeno específico. La teoría inversa entonces, se encarga de estimar valores para estas propiedades, es decir de estimar parámetros del modelo que se acerquen lo más posible a la realidad.

Es necesario diferenciar claramente entre la formulación del problema directo y del problema inverso o teoría inversa. El problema directo es la herramienta matemática que permite caracterizar (lo mejor posible) al fenómeno, por lo que, con los valores conocidos de los parámetros de un modelo se puede obtener la respuesta teórica de éste ante una excitación conocida.

El problema inverso es aquel que permite, en función de las observaciones, estimar el valor de los parámetros del modelo.

Como ejemplo de lo anterior se puede pensar en la regla que rige la temperatura de un pozo con respecto a la profundidad:

$$T(Z) = T_0 + kZ$$

donde: $T(Z)$ es la temperatura a una profundidad Z , T_0 es la temperatura en la superficie (en $Z = 0$), y k es una constante que rige el incremento de la temperatura a una cierta profundidad.

Si se conociera el valor de T_0 y k , se podría calcular la temperatura en el pozo a cualquier profundidad, por lo que se estaría calculando el problema directo.

Por otro lado si se desconocieran los valores de T_0 y k y se contara con mediciones de la temperatura a diferentes profundidades, a través de la teoría inversa, se podrían estimar valores de T_0 y k , que satisficieran razonablemente las observaciones.

a) Cálculo del problema directo.

$$T(Z) = 23 + 0.1Z \longrightarrow$$

Z	$T(Z)$
1	23.1
10	24.0
15	24.5
60	29.0

b) Cálculo del problema inverso.

Observaciones:

Z	$T(Z)$
1	28.12
5	28.60
15	29.80
58	34.96
63	35.56
75	37.00
100	40.00
200	52.00

Valores calculados:

$\longrightarrow T_0 = 28, k = .12$

Figura 4.1 a) Representación esquemática del cálculo del problema directo

b) Representación esquemática del cálculo del problema inverso.

Dado que los registros de los fenómenos naturales son datos que en ocasiones son insuficientes, en otras redundantes y muchas veces contaminados por ruido aleatorio (Jackson, 1972), el problema inverso implícitamente acarrea cierto error. Además, como se verá adelante, el cálculo del problema inverso estará supeditado a las limitaciones del

problema directo en cuanto a su representación fiel de la realidad. Por ejemplo en el caso de la temperatura en el pozo analizado antes, el problema directo ($T(Z) = T_0 + kZ$) es una expresión simple que no puede considerar las variaciones de temperatura debidas a una fuente térmica cercana (p.ej. una estructura ígnea), o aquellas producidas por un intercambio violento de fluido dentro del pozo y la roca adyacente. Entonces, en cualquiera de estos casos, con efecto de inversión, se necesitaría un problema directo que considerara estas situaciones.

Actualmente parece imposible representar en una formulación (problema directo) todas las condiciones reales que impone la naturaleza en un fenómeno dado, sin embargo las representaciones existentes pretenden considerar las más importantes, suponiendo que las no tomadas en cuenta no tienen gran repercusión en la medición del fenómeno. De la misma manera la teoría de inversión, ligada intrínsecamente al cálculo del problema directo, de ninguna manera, puede escapar tampoco de la anterior suposición.

4.2 Solución del problema inverso

La teoría de inversión consiste en encontrar una combinación adecuada de los valores de los parámetros del modelo, que permita minimizar la diferencia o error entre las observaciones y la respuesta teórica del modelo propuesto calculada mediante el problema directo.

Matemáticamente, esto se representa con la siguiente ecuación:

$$f(d,m) = d - g(m)$$

donde $f(d,m)$, es una función de error que depende de los datos (d) y los parámetros del modelo (m) y $g(m)$ es la función que representa al problema directo y que depende de los parámetros del modelo (m). Al conjunto de valores que $f(d,m)$ puede tomar de acuerdo a la variación de los parámetros se le llama espacio de soluciones, dominio de soluciones, superficie de costo, etc.

4.3 Función de desajuste o función de costo.

En este trabajo se llamará función de desajuste o función de costo, a alguna medida de la diferencia entre las observaciones y la respuesta de un modelo cualquiera al mismo fenómeno.

Las diversas formas de calcular el error son llamadas normas. Las normas más usadas son las basadas en la suma de alguna potencia de los elementos de un vector

que contiene la diferencia punto a punto. Estas normas forman una familia, donde de manera genérica son llamadas normas " L_n ", donde n , es la potencia:

$$L_1 ; \|e\|_1 = \sum_i |e_i|^1$$

$$L_2 ; \|e\|_2 = \left[\sum_i |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$L_n ; \|e\|_n = \left[\sum_i |e_i|^n \right]^{\frac{1}{n}}$$

Dentro de esta familia de normas, la norma L_2 es la que con mayor frecuencia se utiliza. Sin embargo en la literatura se han propuesto otras maneras de medir el error, por ejemplo máxima entropía, correlación, la familia de las normas H (Zhou et al., 1998), etc.

Cuando se realiza una inversión, la elección de la norma es un punto muy importante ya que en cierta manera, ésta, determinará la mejor convergencia a la solución.

Para una descripción detallada de la elección de la norma el lector puede consultar Menke, 1984.

4.4 Las superficies de costo.

Supongamos un fenómeno que es función de sólo dos parámetros x , y y una variable independiente ω . Supongamos también que se cuenta con un vector de i observaciones (d_i) del fenómeno registradas cada ω_i . Si se utiliza la norma L_2 para medir el error:

$$L_2 ; \|e\|_2 = 1 - \left[\frac{\sum_{i=1}^n |e_i|^2}{\sum_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde:

$e_i = d_i - f(a, b, \omega_i)$ es el error puntual para cada ω_i ,

d_i es el vector de i observaciones

a, b son los parámetros de un modelo específico

ω_i es la variable independiente para el cálculo i -ésimo.

Entonces se podría hacer un barrido variando x y y y calcular para cada combinación diferente de ellos su función de costo ($\|e\|_2$), de tal manera que entre más cercana a uno fuera la evaluación de la función de costo, el modelo sería cada vez más cercano al objetivo (aquel cuyos parámetros a, b provocan un $\|e\|_2 = 1$).

Para ilustrar lo anterior supongamos un fenómeno físico tal que se pudiera representar con la siguiente función:

$$f(x) = A \text{ Sen}(B x)$$

donde los parámetros del modelo son (A, B) , y x la variable independiente. Supongamos también que se cuenta con observaciones del fenómeno las cuales se encuentran registradas para $1 \leq x \leq 10$ con valores de x cada 0.1 .

Si se hace un barrido para $-5 \leq A \leq 5$ cada 0.1 , y $-2 \leq B \leq 3$ cada 0.05 y se calcula la función de costo para cada una de las combinaciones podría graficarse el plano de las combinaciones de A y B contra su función de costo respectiva con lo que se obtendría una superficie. La *figura 4.2* representa dicha superficie, en ella el eje X representa los valores que tomó el parámetro A , el eje Y los valores que tomó el parámetro B , y el eje Z (la altura) la función de costo para cada una de las combinaciones de A y B .

Es sólo posible representar en papel superficies de costo correspondientes a problemas de uno y dos parámetros, ya que cada parámetro del modelo es representado en un eje y la función de costo en otro por lo que, por ejemplo, si se tuviera un problema directo con tres parámetros requeriríamos una representación de cuatro dimensiones, y para un problema de n parámetros una representación $n+1$ dimensional.

Como se ha dicho antes, el modelo objetivo es aquel cuya función de costo es uno, pero en situaciones reales esto es casi imposible dado que los datos a menudo son insuficientes, inadecuados y/o contaminados por ruido. Lo anterior provoca que la búsqueda se realice para los parámetros del modelo cuya función de costo sea lo más cercano a la unidad.

¹ La norma L_2 se puede modificar para que el valor de la función de costo tienda a uno, esto se logra dividiendo entre la suma de los elementos del vector de observaciones y restándole dicho cociente a la unidad

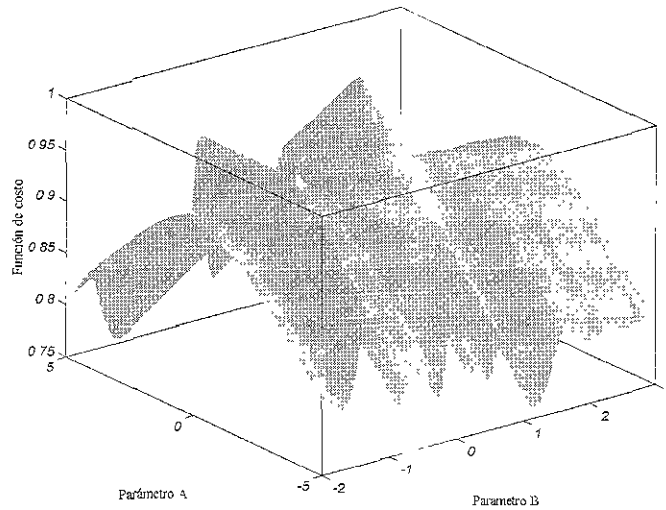


Figura 4.2 Superficie de costo que representa en el plano las combinaciones de los parámetros A y B, y en la altura la función de costo de tales combinaciones.

La forma de las superficies de costo dependen en gran medida de la complejidad del problema directo, pero también dependen de manera importante de la norma utilizada para calcular la función de costo.

Aunque es poco frecuente encontrar fenómenos naturales que sólo dependan de dos parámetros, pensar en el espacio de soluciones como una superficie nos reportará ventajas importantes para el análisis tanto del problema directo como del problema inverso.

4.5 Linealidad, Inestabilidad y Unicidad.

La respuesta de un modelo puede ser una función lineal o no-lineal de los parámetros del mismo. Un modelo que puede representarse como una combinación lineal de sus parámetros, es un problema lineal. Por el contrario si el modelo no puede representarse a través de una combinación lineal de los parámetros se dice que el problema es no lineal. Este concepto tiene importancia en nuestro estudio ya que los métodos clásicos de inversión (*Lines y Treitel, 1984*) parten del hecho de que el problema es lineal, y como veremos adelante frecuentemente un problema inverso no lineal suele resolverse linealizándolo y siguiendo la teoría de la solución de un problema inverso lineal.

La inestabilidad se define como: "a partir de un pequeño cambio en la entrada del problema se produce un cambio físicamente inaceptable en la salida" (Tarantola y Valette, 1982). La inestabilidad puede presentarse tanto en el problema directo como en el problema inverso.

En la figura 4.2 se puede observar que la superficie de costo tiene crestas, valles, montañas y depresiones, por lo que el problema planteado es inestable, ya que si uno se desplaza por algunas zonas de la superficie de costo, encontrará barrancas y montañas cuya gran pendiente representa cambios bruscos en la respuesta teórica. La inestabilidad puede dar lugar a problemas durante el proceso de inversión ya que puede provocar una difícil convergencia a la solución.

El término unicidad se refiere al número de soluciones que tiene el problema inverso, por lo que si en la figura 4.2 hubiera dos o más máximos que alcanzaran el valor de la función de costo igual a la unidad, el problema tendría mas de una solución y sería *no único*. A pesar de que no es frecuente encontrar problemas que tengan dos o más soluciones exactas, si es común que la superficie de costo tenga varios máximos muy cercanos a uno, esto es, que algunas combinaciones de parámetros tengan respuestas teóricas parecidas a otras. Esto se debe a que hay problemas directos en los cuales existe una relación entre los parámetros muy cercana, de tal modo que A este fenómeno se le llama acoplamiento de parámetros (*trade-off*). Por ejemplo en la teoría de prospección gravimétrica es bien conocido que existe un acoplamiento de parámetros entre el contraste de densidades y la profundidad de un cuerpo, de tal manera que es posible obtener la misma respuesta gravimétrica teórica de dos cuerpos con contraste de densidades diferentes que a su vez estén enterrados a diferentes profundidades.

4.6 Información *a priori*.

Para dar solución a un problema de inversión generalmente es necesario contar con información que restrinja, en alguna medida, el dominio de soluciones. En tanto mejor quede restringido el dominio de soluciones se tendrá mas oportunidad de llegar a la solución esperada. Sin embargo, un dominio muy restringido implica un conocimiento muy amplio de los parámetros del modelo, por lo que dejaría de tener sentido una inversión.

La información *a priori* puede ser considerada de muchas maneras, por ejemplo, se puede establecer que algún parámetro no puede tomar un valor específico por que

físicamente no es posible, o se puede considerar conocidos algunos de los parámetros del modelo tomando resultados obtenidos en el mismo sitio de interés con otros métodos geofísicos. Por ejemplo, si se tratará de obtener un modelo a través de invertir sondeos eléctricos verticales, se sabe que la resistividad no puede tener valores negativos, con lo que este hecho podría considerarse como información *a priori*. Pero si se contará con información de un pozo cercano, la cantidad de información *a priori* sería tal, que la inversión se debería limitar a encontrar valores muy precisos de los parámetros, tales que se parecieran en gran medida a los observados en los núcleos de roca extraídos del pozo.

Para resolver el problema inverso; de acuerdo a la cantidad de información *a priori* disponible y a las características propias del problema directo asociado; se pueden usar métodos de inversión locales o globales los cuales deben su nombre a su dominio de exploración.

Los métodos locales son óptimos para resolver problemas lineales o ligeramente no lineales donde se tiene mucha información *a priori*, por lo que su dominio de búsqueda se limita a una pequeña zona del dominio de soluciones. Los métodos globales son muy eficientes para problemas fuertemente no lineales donde la información *a priori* es escasa y su dominio de búsqueda se extiende en gran parte del dominio de soluciones.

Los métodos locales y los métodos globales tienen, ambos, el mismo objetivo: encontrar los valores de los parámetros de un modelo que tengan sentido físico y cuya respuesta teórica se parezca en lo más posible a las observaciones. Sin embargo, la estrategia seguida por unos y otros es drásticamente diferente por lo que es indispensable hacer un estudio por separado de ambos.

En el presente capítulo de este trabajo se hará un análisis somero de algunos métodos locales, resaltando los principios básicos, mientras que en el siguiente capítulo se hará una revisión de algunos métodos globales deteniéndonos especialmente en el de *simulated annealing* y algoritmos genéticos por ser estos los utilizados para la realización de nuestro estudio.

4.7 Inversión lineal generalizada.

Inversión lineal generalizada es el nombre que se le dá al problema inverso desde el punto de vista de los métodos locales, hay un gran número de métodos que corresponden a este esquema, sin embargo nosotros en este trabajo sólo analizaremos

dos por su sencillez y por ser los más socorridos para resolver problemas inversos en geofísica.

Como se ha dicho, el problema inverso se reduce a minimizar la diferencia que hay entre las observaciones y la respuesta teórica de un modelo cuyos parámetros se buscan.

El planteamiento del problema usando la notación de *Menke, 1984* para la forma explícita es:

$$f(d,m)=d-g(m)=0 \quad \dots 4.1$$

donde.

$f(d,m)$ es la función de los datos y los parámetros que se va a minimizar (función de costo).

d es el vector columna de N observaciones

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

m es el vector columna de M parámetros

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_M \end{bmatrix}$$

$g(m)$ es un funcional que relaciona los parámetros y su respuesta teórica (problema directo).

Si g es lineal con respecto a los parámetros podemos expresar la ecuación 4.1 como:

$$f(d,m)=d-Gm=0 \quad \text{ó}$$

$$Gm=d \quad \dots 4.2$$

donde G es un arreglo que es lineal con respecto a los parámetros y relaciona la respuesta teórica del modelo y los parámetros de éste. A la ecuación 4.2 se le llama la forma lineal explícita.

4.7.1 El problema inverso para una línea recta.

Supongamos un fenómeno físico cuyo problema directo se puede representar con una línea recta de tal manera que:

$$f(Z) = m_1 - m_2 Z \text{ (por ejemplo el planteado en la sección 4.1: } T(Z) = T_0 + kZ)$$

donde:

$f(Z)$ es la respuesta teórica del modelo cuyos parámetros son m_1 y m_2 y Z es la variable independiente.

Además supongamos que se cuenta con un vector de n observaciones ($d_i, i=1, n$).

Nuestro objetivo es determinar los valores de m_1 y m_2 cuya respuesta teórica se parezca en lo más posible a las observaciones. Como el fenómeno puede ser representado por una recta, es imposible encontrar valores de m_1 y m_2 cuya respuesta teórica sea una recta que coincida (ajuste) perfectamente con todas las observaciones, a menos de que efectivamente todas las observaciones estén contenidas en una sola recta. Sin embargo, esto no es posible debido a que, normalmente las observaciones contienen ruido y son inexactas.

Si definimos el error punto a punto (para el mismo valor de Z) se tiene:

$$e_i = d_i - f(Z_i)$$

Expresando el problema en la forma lineal explícita.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 1 & Z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad \dots 4.3$$

o bien:

$$e_i = d_i - m_1 - m_2 Z_i \quad \dots 4.4$$

4.7.2 Solución de mínimos cuadrados para una línea recta.

La solución del problema inverso más usada consiste en minimizar la suma de los cuadrados de los errores punto a punto (norma L_2) (usando la notación de *Menke, 1984*):

$$E = \|e\|_2 = e^T e = \left[\sum_i |e_i|^2 \right] \quad \dots 4.5$$

combinando las ecuaciones 4.4 y 4.5:

$$E = e^T e = \sum_{i=1}^n (d_i - m_1 - m_2 Z_i)^2 \quad \dots 4.6$$

El problema ahora se reduce a encontrar el mínimo de la función expresada por 4.6 lo cual se hace igualando a cero las derivadas parciales de E con respecto a m_1 y m_2 , y resolviendo el sistema de ecuaciones resultantes:

$$\frac{\partial E}{\partial m_2} = 2m_1 \sum_{i=1}^n Z_i^2 + 2m_2 \sum_{i=1}^n Z_i - 2 \sum_{i=1}^n (d_i Z_i) = 0 \quad \dots 4.7 a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial m_1} = 2m_1 \sum_{i=1}^n Z_i + 2Nm_2 - 2 \sum_{i=1}^n d_i = 0 \quad \dots 4.7 b)$$

La solución de este sistema de ecuaciones para m_1 y m_2 es la solución del problema inverso para una línea recta.

4.7.3 Generalización de la solución de mínimos cuadrados.

El procedimiento de la solución de mínimos cuadrados puede ser generalizada para cualquier problema lineal. En ocasiones el problema directo no está planteado en la forma lineal explícita, por lo que se hace uso de expansiones en serie que permitan lograr esta forma. Entonces, si la respuesta teórica del modelo es una función lineal de los parámetros, una pequeña perturbación de la respuesta del modelo puede ser expresada como la expansión en series de Taylor de primer orden (siguiendo la notación de *Lines y Treitel, 1984*):

$$\bar{f}(\bar{m}) = \bar{f}^0 + \sum_{i=1}^p \left. \frac{\partial \bar{f}(\bar{m})}{\partial m_i} \right|_{\bar{m}=\bar{m}^0} (m_i - m_i^0) \quad 4.8$$

donde:

$\bar{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ es el vector columna de n observaciones.

$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix}$ es el vector columna de p parámetros

$$\bar{f}(\bar{m}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{m}) \\ f_2(\bar{m}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{m}) \end{bmatrix} \text{ es el vector columna que contiene la respuesta teórica del modelo para } n$$

observaciones².

$$\bar{m}_0 = m_i^0 = \begin{bmatrix} m_1^0 \\ m_2^0 \\ \vdots \\ m_p^0 \end{bmatrix} \text{ es una estimación inicial de los parámetros (desde } i=1 \text{ hasta } p) \text{ y}$$

$$\bar{f}^0 = \begin{bmatrix} f_1^0(\bar{m}) \\ f_2^0(\bar{m}) \\ \vdots \\ f_n^0(\bar{m}) \end{bmatrix} \text{ es el vector columna que contiene la respuesta teórica del modelo } \bar{m}_0 \text{ para}$$

n observaciones.

La ecuación 4.8 puede ser expresada en forma matricial como:

$$\bar{f} = \bar{f}_0 + \bar{Z}\delta \quad \dots 4.9$$

donde:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial m_p} \end{bmatrix} \text{ es la matriz jacobiana de } n \times p \text{ derivadas parciales de la respuesta}$$

teórica del modelo propuesto (modelo inicial) con respecto a los parámetros.

$$\bar{\delta} = \begin{bmatrix} (m_1 - m_1^0) \\ \vdots \\ (m_p - m_p^0) \end{bmatrix} \text{ es el vector que contiene la diferencia de los parámetros del modelo}$$

buscado y los del modelo inicial, llamado vector de perturbaciones.

² Este vector debe contener el mismo número de elementos que el vector de observaciones, ya que la respuesta teórica del modelo debe estar evaluada para las mismas ordenadas (p.ej. las diferentes profundidades (Z) en el caso del problema de la temperatura de un pozo).

Seguendo el esquema de mínimos cuadrados presentado en la sección 4.7.2, se debe escoger el vector de perturbaciones tal que minimice la suma de los cuadrados de los errores entre la respuesta teórica del modelo y las observaciones (norma L_2).

Si el error lo definimos como:

$$\bar{d} - \bar{f} = \bar{e} \quad \dots 4.10$$

donde e es el vector que contiene las diferencias entre las observaciones y la respuesta teórica del modelo (observaciones teóricas).

Combinando 4.9 y 4.10 se tiene:

$$\bar{d} - (\bar{f}_0 + \bar{Z}\bar{\delta}) = \bar{e}$$

o bien,

$$\bar{d} - \bar{f}_0 = \bar{Z}\bar{\delta} + \bar{e} \quad \dots 4.11$$

El vector $\bar{d} - \bar{f}_0$, que contiene las diferencias entre las observaciones y la respuesta teórica del modelo inicial, es llamado vector de diferencias o de discrepancias (\bar{g}), por lo que 4.11 puede verse cómo:

$$\bar{g} = \bar{Z}\bar{\delta} + \bar{e}$$

o bien cómo,

$$\bar{e} = \bar{g} - \bar{Z}\bar{\delta} \quad 4.12$$

De acuerdo a la ecuación 4.6 sabemos que la norma L_2 puede ser expresada cómo:

$$E = e^T e \quad \dots 4.13$$

Sustituyendo 4.12 en la anterior:

$$E = (g - Z\delta)^T (g - Z\delta) \quad 4.14^3$$

Esta es la expresión que se debe minimizar para lo cual se obtienen sus derivadas con respecto al vector $\bar{\delta}$ y se igualan a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{\delta}} = (\delta^T Z^T Z \delta - g^T Z \delta - \delta^T Z^T g + g^T g) = 0$$

Llevando a cabo esta derivada (Lines y Treitel, 1984; Graybill, 1969) se tiene:

$$Z^T Z \delta = Z^T g$$

o bien:

³ Por claridad omitiremos la resta de los vectores.

$$\delta = (Z^T Z)^{-1} Z^T g \quad \dots 4.15$$

Esta es la expresión que permite conocer como perturbar el modelo inicial para llegar a la solución. Sin embargo si el modelo inicial no se encuentra muy cercano a la solución, se usará el modelo perturbado como modelo inicial con el cual se repetirá el proceso de minimización, este proceso iterativo se seguirá hasta lograr un ajuste esperado entre los datos y las observaciones.

En este trabajo se planteó una manera de llegar a la forma lineal explícita (ec. 4.8) sin embargo no es la única, en algunas ocasiones sólo es necesario expresar el problema de otra manera, por ejemplo el espectro de un sismo (*Field y Jacob, 1995*) puede ser expresada (en el dominio de la frecuencia) cómo una combinación de efectos de fuente (*C*) trayecto (*P*) y Sitio (*S*):

$$f(\omega) = C * P * S$$

La expresión anterior no esta en la forma lineal explícita, sin embargo si se obtiene el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln(f(\omega)) = \ln(C) + \ln(P) + \ln(S)$$

que es una expresión que ahora se encuentra en la forma lineal explícita y no fue necesario expresarla en términos de una serie de potencias. Dada la forma de esta expresión se podría seguir el mismo procedimiento ya planteado para encontrar la solución del problema inverso.

4.7.4 Mínimos cuadrados amortiguados o Método de Marquardt-Levenberg.

El método de mínimos cuadrados presenta a menudo problemas que hacen su solución inviable. Si la matriz $(Z^T Z)$ no tiene inversa (cuando tiene singularidades), no es posible resolver la ecuación 4.15. Aun si existiera la inversa de $(Z^T Z)$ hay múltiples casos en los que se obtiene una solución divergente (no se aproxima al modelo esperado) o de muy lenta convergencia. El método de mínimos cuadrados amortiguados (*Levenberg, 1944 y Marquardt, 1963*) con efecto de evitar estos problemas, impone la restricción de que la suma de los cuadrados de los elementos del vector δ sea una cantidad finita. El método de multiplicadores de Lagrange permite una solución para el problema de encontrar los valores límites (mínimos y máximos) de una función que esta sujeta a la restricción que le impone otra función: agregando en la ecuación 4.13 la

restricción $(\delta^T \delta - \delta_0^2)$ que asegura que la suma de los cuadrados de los elementos de δ sea una cantidad finita:

$$E = e^T e + \beta(\delta^T \delta - \delta_0^2) \quad \dots 4.16$$

donde β es un multiplicador de Lagrange

De acuerdo al método de multiplicadores de Lagrange si encontramos el mínimo de la función expresada en 4.16, obtendremos también el mínimo de la función de error que esta acotada por la restricción.

Diferenciando con respecto a δ y resolviendo para δ obtenemos:

$$\delta = (Z^T Z + \beta I)^{-1} Z^T g \quad \dots 4.17$$

donde I es la matriz identidad.

En la expresión anterior observamos que si la matriz $Z^T Z$ tiene singularidades o valores muy cercanos a cero en la diagonal principal el factor βI lo modifica de tal manera que sea más probable encontrar solución para la matriz inversa $(Z^T Z)^{-1}$.

El método de Marquardt-Levenberg es en realidad un método mixto ya que de acuerdo a los valores que tome el factor de amortiguamiento β , recibe diferentes nombres: en el caso de que β sea igual a cero el método se reduce al de *mínimos cuadrados* o de *Newton* (sección 4.7.3), en el caso en que β sea igual a uno recibe el nombre de *steepest-descent* o del *descenso más pronunciado*. Para una explicación detallada del método el lector puede consultar *Lines y Treitel, 1984, Levenberg, 1944, Marquardt, 1963*.

4.8 Inversa generalizada.

En la sección 4.7 nos abocamos a encontrar los parámetros del modelo cuya respuesta teórica se acerque lo más posible a los datos. Si observamos las expresiones 4.15 y 4.17 el lado izquierdo de ambas contienen un vector de diferencias entre los parámetros de un modelo inicial y los parámetros de un modelo estimado, mientras que del lado derecho existe un funcional que opera sobre un vector de diferencias entre las observaciones y la respuesta teórica de un modelo estimado. Podríamos tratar de reducir dicha búsqueda a suponer que existe un operador que actúa sobre los datos y que permite el conocimiento de los parámetros de un modelo estimado:

$$m^{est} = Md$$

donde:

m^{est} es el vector de parámetros del modelo estimado

M es el operador que actúa sobre los datos y

d es el vector que contiene los datos.

Para el caso de la solución por medio del método de *mínimos cuadrados* el operador M es $(Z^T Z)^{-1}$ y para el método de *Marquardt-Levenberg* es $(Z^T Z + \beta I)^{-1}$.

Si recordamos la ecuación 4.2 que representa la forma lineal explícita:

$$Gm = d$$

El operador M podría ser visto como un operador G inverso que resolviera esta expresión para m (el vector de parámetros de los modelos). De aquí que M sea llamado inversa generalizada y representado con el símbolo G^{-g} por lo que la expresión anterior puede ser vista como:

$$m = dG^{-g} \quad \dots 4.18$$

En esta sección (4.8) estudiaremos el operador G^{-g} que dará información valiosa para conocer más acerca de la teoría de inversión.

4.8.1 Matriz de resolución de los datos.

De acuerdo a los procedimientos vistos en la sección (4.7) podemos estimar los parámetros de un modelo cuya respuesta teórica ajusten suficientemente bien a los datos de acuerdo a una norma de error. Sin embargo se puede conocer mejor la naturaleza de este error si se analiza el funcional M .

Sustituyendo la ecuación 4.2 en la ecuación 4.18:

$$d^{calc} = Gm^{est} = G(G^{-g}d^{obs}) = (GG^{-g})d^{obs} \quad \dots 4.19$$

donde:

d^{calc} es el vector que contiene la respuesta teórica calculada con los parámetros del modelo estimado

m^{est} es el vector que contiene los parámetros del modelo estimado

d^{obs} es el vector que contiene las observaciones.

La ecuación 4.19 relaciona directamente los datos y la respuesta teórica del modelo estimado a través de la matriz (GG^{-g}) , esta matriz es una matriz cuadrada que de acuerdo a *Menke, 1984* llamaremos la matriz de resolución de los datos N . Si esta matriz

fuera igual a la matriz identidad estaríamos en el caso en que las observaciones y la respuesta teórica del modelo estimado fueran exactamente iguales. Sin embargo, como ya se ha dicho antes este caso es casi imposible por que las observaciones tienen errores y características que probablemente la teoría que sustenta el problema directo (con el que se calcula la respuesta teórica del modelo estimado) no pueden reproducir.

Por lo anterior lo más común es encontrar matrices de resolución de los datos que se acerquen a la matriz identidad pero teniendo ligeras variaciones. Cada renglón de la matriz de resolución indica qué tan bien ha sido ajustado el dato cuyo índice coincide con el renglón. Es posible graficar los renglones de la matriz de resolución con respecto al valor de sus elementos.

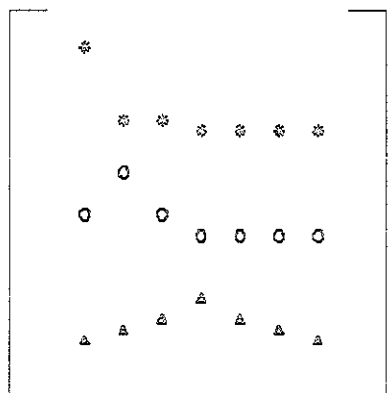


Figura 4.3 Gráfica de algunos renglones de la matriz de resolución contra el valor de sus elementos, cada símbolo diferente se refiere a un renglón de la matriz de resolución.

Si la gráfica tiene un pico claro alrededor de la diagonal principal significa que el dato calculado correspondiente a ese renglón no tiene demasiado error (fig 4.3 asteriscos). Si por el contrario, se forma una curva suave, el dato calculado tiene gran incertidumbre (fig 4.3 triángulos).

Los elementos de la diagonal principal indican qué tan bien fueron aproximadas las observaciones y cuál es el peso de cada uno de los datos teóricos en la aproximación.

4.8.2 Matriz de resolución de los parámetros.

El mismo análisis llevado a cabo para los datos puede seguirse para los parámetros. Supongamos que existe un conjunto de parámetros del modelo que a través del problema directo ajustan perfectamente a las observaciones, lo que implica que:

$$Gm^{real} = d^{obs} \quad \dots 2.20$$

donde:

m^{real} son los parámetros del modelo que ajustan perfectamente a las observaciones por lo que les llamaremos verdaderos.

d^{obs} es el vector de observaciones.

G es el funcional que relaciona a los parámetros y a los datos.

Los parámetros del modelo estimado pueden ser estimados cómo:

$$m^{est} = G^{-g} d^{obs} \quad \dots 2.21$$

Sustituyendo 2.20 en 2.21:

$$m^{est} = G^{-g} d^{obs} = G^{-g} * (Gm^{real}) = (G^{-g} G)m^{real} = Rm^{real} \quad 2.22$$

Donde R es llamada la matriz de resolución de los parámetros.

En realidad no se conoce el vector m^{real} ya que precisamente el problema inverso consiste en encontrar dicho vector, sin embargo es posible conocer la matriz R , ya que se pueden conocer las matrices G y G^{-g} . La matriz R permite conocer la incertidumbre en los parámetros calculados con la inversión. Del mismo modo que en la sección anterior, si esta matriz fuera igual a la matriz identidad, significaría que los parámetros calculados y los reales son exactamente iguales. Sin embargo generalmente R no es igual a la matriz identidad, por lo que los parámetros del modelo calculados son realmente valores promedio pesados de los parámetros verdaderos del modelo. La matriz R es una medida para determinar la incertidumbre en los parámetros calculados.

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.

V.- Métodos de Inversión Global

V MÉTODOS DE INVERSIÓN GLOBAL

5.1 Inversión Global.

Los métodos de inversión local (como los estudiados en el capítulo 4), son una manera muy eficaz para resolver problemas lineales o ligeramente no lineales de los cuales se tiene la suficiente información a priori como para limitar el dominio de búsqueda a un pequeño entorno de un modelo inicial. De esta manera los métodos locales son guiados eficientemente a un punto extremo (máximo o mínimo) de la función en cuestión (aquella de la cual se buscan sus puntos extremos). Por ejemplo la función $f(x,y)$ mostrada en la figura 5.1, sólo presenta un máximo por lo que un método de inversión local encontraría rápidamente ese punto.

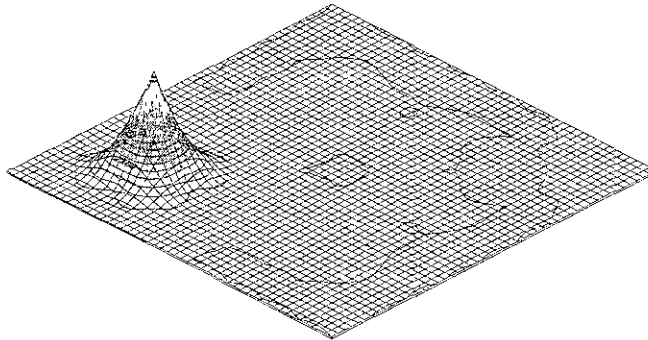


Figura 5.1 Función de dos variables independientes con sólo un máximo.

Por otro lado la figura 5.2 es la representación de una función con dos máximos, y, debido a la naturaleza de los métodos de inversión locales, sólo sería factible encontrar el mayor valor de la función si el modelo inicial se encontrara en las inmediaciones del máximo global (montaña grande). De otra manera, si el modelo inicial estuviera en las faldas del máximo local (montaña pequeña), el método de inversión local sólo podría alcanzar la cumbre de este máximo y nunca llegaría al valor del máximo global. Esto se debe a que los métodos de inversión local buscan el mejor valor en la vecindad del modelo inicial y sólo es posible escalar (en el caso de maximización de funciones) y nunca descender.

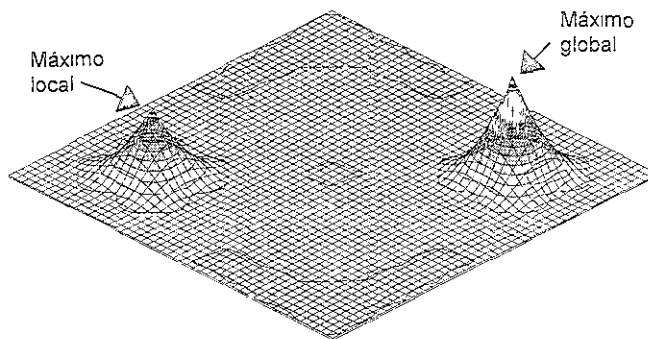


Figura 5.2 Función de dos variables independientes con dos máximos: uno local (derecha) y otro global (izquierda).

En realidad las funciones que tienen una gráfica como la figura 5.1 son las menos y las funciones de las cuales se requiere conocer sus puntos extremos son mucho más complicadas presentando discontinuidades abruptas (son no lineales) y varios máximos locales (son multimodales).

Los métodos de inversión global son muy apropiados para resolver problemas fuertemente no lineales y multimodales ya que poseen la capacidad de buscar a través de toda la función los puntos extremos sin quedarse atrapados en un máximo local.

La inversión en geofísica, como hemos dicho antes, consiste en minimizar una función que mide el desajuste entre dos curvas (función de costo). Esta función es frecuentemente no lineal y multimodal por lo que los métodos de inversión global han sido usados con gran éxito para resolver una gran cantidad de problemas de diferente naturaleza.

En este capítulo estudiaremos tres de los métodos de inversión global más conocidos: montecarlo, simulated annealing y algoritmos genéticos.

5.2 Método de Montecarlo.

En realidad la denominación de Montecarlo es usada para designar una familia de métodos que están relacionados. En este trabajo como en otros textos (Sambridge y Drijoningen, 1992) el término Montecarlo es usado para describir una búsqueda completamente aleatoria.

Esta búsqueda aunque explora toda la superficie de modelos puede ser lenta, ya que es necesario hacer un número muy grande de evaluaciones de la función de costo para acercarse a una solución aceptable.

La información a priori es incorporada limitando el intervalo de búsqueda de cada parámetro, esto es definiendo un valor mínimo y uno máximo de cada parámetro.

Para cada uno de los parámetros se determina un valor aleatorio entre el valor mínimo y el valor máximo y con la combinación de los valores de todos los parámetros se calcula la función de costo del modelo, este procedimiento se repite hasta encontrar una solución aceptable, es decir cuando la función de costo sea menor o igual a una tolerancia permitida.

5.3 Método de Simulated Annealing.

El método de Simulated Annealing (S.A.) está basado en la analogía con una propiedad termodinámica de la materia: la recristalización. Si se tiene un fluido mineral que se enfría bajando la temperatura lentamente, este alcanzará un estado de energía bajo, y podrá formar cristales bien definidos. Si por el contrario la sustancia mineral se enfría abruptamente el estado de energía será mayor y se formaran cristales imperfectos o vidrios.

Este concepto es usado dentro del método de inversión para reconocer como potencialmente útiles ciertos modelos (combinaciones de parámetros).

El método de S.A. tiene tres componentes básicos (*Vasudevan et al., 1991*):

- a) Una función de energía (función de costo)
- b) Una función de orden (criterio de Metrópolis)
- c) Temperatura.

5.3.1 Inversión con Simulated Annealing.

La siguiente descripción del funcionamiento del método está basado en la implementación de Bill Goefe y otros (*Goefe et al., 1994*).

Para acotar el problema se designan, con base en la información a priori, los valores máximo y mínimo que puede tomar cada parámetro. También se determina un modelo inicial y un vector VM que contiene para cada uno de los parámetros un paso máximo de búsqueda en torno al modelo inicial, este vector VM se irá autoajustando de acuerdo a las necesidades del proceso.

Se calcula la función de costo del modelo inicial y a partir de aquí se inicia un proceso iterativo.

1.- Perturbación de los parámetros.

Se perturba el primer parámetro (para la primera iteración) del modelo inicial sumándole la multiplicación de un número aleatorio entre -1 y 1 por el valor de VM .

$$\bar{m}_{trial} = \begin{bmatrix} m_1 + (VM(1) * rand) \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

donde:

\bar{m}_{trial} es el vector que contiene los parámetros del modelo modificado

$rand$ es un número aleatorio entre -1 y 1.

2.- Calculo del problema directo.

Se calcula el problema directo con los parámetros del modelo para obtener las observaciones teóricas o calculadas:

$$\bar{d}_{calc} = g(\bar{m}_{trial})$$

donde:

\bar{d}_{calc} es el vector que contiene las observaciones teóricas o calculadas del modelo perturbado,

g es el funcional que relaciona los parámetros del modelo y su respuesta teórica (problema directo).

3.- Calculo de la función de costo.

Se calcula la función de costo para la respuesta teórica del modelo perturbado, comparando ésta con las observaciones. La función de costo se calcula con alguna norma como las mostradas en el capítulo 4 (p.ej. L_2).

$$cost_{trial} = f(\bar{d}_{obs}, m_{trial}) = \left[\sum_i |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_i |\bar{d}_{obs} - \bar{d}_{calc}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$f(\bar{d}_{obs}, m_{trial})$ es la función de costo, desajuste o misfit del modelo.

4.- Criterio de aceptación del modelo.

Si la función de costo mejora el modelo es aceptado incondicionalmente, si no es así el modelo es aceptado con una probabilidad que depende de la temperatura del proceso, mientras más joven sea el proceso la temperatura será mayor y la probabilidad de ser aceptado también, cuando el proceso avance, la temperatura será menor y con esto su probabilidad de ser aceptado (*criterio de Metropolis*)

$$P_{met} = e^{\frac{-\Delta E}{T}}$$

donde:

P_{met} es la probabilidad de que el modelo sea aceptado debido al criterio de Metropolis.

$\Delta E = cost_{inicial} - cost_{trial}$ es el cambio de energía.

$cost_{inicial}$ es la función de costo del modelo inicial

$cost_{trial}$ es la función de costo del modelo perturbado.

T es la temperatura del proceso.

Entonces se elige un número aleatorio entre cero y uno, si este número es menor o igual al valor de P_{met} el modelo es aceptado.

Si el modelo es aceptado, ya sea por que su función de costo mejoró o debido al criterio de Metropolis, el modelo inicial es sustituido por el perturbado, si el modelo no fue aceptado el modelo inicial continúa intacto.

5.-Regreso al paso 1.

El modelo resultado de los 4 pasos anteriores es modificado nuevamente pero ahora perturbando el segundo parámetro y repitiendo nuevamente el mismo procedimiento (pasos del 1 al 4). Esta operación se repite hasta modificar cada uno de los parámetros.

Este procedimiento (pasos del 1-5) se repite un número definido de veces (que el usuario determina) y periódicamente se modifica el vector de perturbaciones máximas de cada parámetro VM , tratando de que el número de modelos aceptados sea aproximadamente igual a la mitad de los evaluados.

También periódicamente se reduce lentamente el valor de la temperatura, provocando que cada vez sea más difícil aceptar un modelo que no mejore su función de costo (debido a que la temperatura es determinante en el criterio de Metropolis).

El procedimiento se detiene después de un número determinado de iteraciones o cuando el algoritmo encuentra una solución aceptable, esto es cuando se encuentra un modelo cuya función de costo es igual o menor a una tolerancia previamente establecida.

El ajuste periódico del vector VM y de la temperatura son fundamentales en el proceso. El ajuste del vector VM permite encontrar el tamaño adecuado de las perturbaciones de los parámetros en función del tipo de búsqueda llevado a cabo en un momento dado del proceso, esto es cuando el proceso es joven los valores del vector VM se incrementan de tal manera que es factible encontrar la zona del máximo global, y cuando el proceso es avanzado los valores del vector VM son disminuidos de tal manera que permiten converger rápidamente a la cumbre de dicho máximo.

Por otro lado, el ajuste lento de la temperatura permite que el algoritmo acepte modelos que no necesariamente mejoran su función de costo pero que contienen información potencialmente útil que se irá usando para encontrar modelos que van mejorando sin entraparse en máximos locales. En analogía con la recristalización, la disminución lenta de la temperatura permite ir encontrando estados ordenados de baja energía, de tal manera que al final del proceso se tiene un cristal bien definido.

Si sólo se aceptaran modelos cuya función de costo siempre es mejor, se tendría alto riesgo de entraparnos rápidamente en un máximo local. Esto sería equivalente a disminuir a cero la temperatura abruptamente y, en analogía con la recristalización, sólo obtendríamos un estado de alta energía que formaría un vidrio con estructura pobremente ordenada.

5.4 Método de Algoritmos Genéticos.

El método de algoritmos genéticos es una modificación al método de Montecarlo implementada por primera vez por John Holland en 1975 (Holland, 1975).

El método de Algoritmos Genéticos (A.G.) consiste básicamente en imitar a la naturaleza en el proceso de evolución de las especies el cual ha sido sumamente efectivo para mantener un equilibrio entre presa y depredador evitando una ruptura en la cadena alimenticia.

La naturaleza a través de la reproducción sexual, la selección natural y la mutación le ha dado a algunas especies cualidades excepcionales que les permiten sobrevivir a condiciones físicas y biológicas adversas. De este modo se conoce por ejemplo, que animales marinos adquirieron capacidad para explorar suelo firme, lo que implicó fuertes modificaciones en su estructura biológica. Esto se logró con pequeños cambios sucesivos

a través de múltiples generaciones. En la naturaleza, cambios como el mencionado, tardaron millones de años tiempo durante el cual muchas especies no pudieron sobrevivir y sufrieron la extinción.

La reproducción sexual permite a los seres vivos heredar las características de sus padres. Estas características son recibidas como una mezcla de información genética de ambos padres, lo que permite que el nuevo individuo tenga las cualidades y/o defectos de ellos. La selección natural determina si un individuo sobrevive o no ante un entorno continuamente cambiante, en el cual sus depredadores han mejorado sus actividades de caza. La mutación son cambios abruptos que permiten a los seres vivos obtener características extraordinarias que pueden ayudar o entorpecer su adaptación al medio que lo rodea. Este muy complejo procedimiento de evolución ha permitido que algunas especies hayan adquirido cualidades extraordinarias para sobrevivir mientras que otras hayan quedado extintas.

El método de A.G. intenta rescatar todas las cualidades que poseen los procedimientos de reproducción, cruza y mutación en la evolución de las especies y representarlos mediante una serie de observaciones obtenidas para encontrar los parámetros de un modelo físico cuya respuesta teórica se parezca razonablemente a una serie de observaciones obtenidas.

5.4.1 Acotación del problema, incorporación de información a priori.

Como en cualquier método de inversión, en el método de A.G. es necesario establecer cuales son las fronteras de la búsqueda para el método de inversión. Sin embargo una gran ventaja de este método sobre la mayoría de los métodos de inversión, es que éste no parte de un modelo inicial, por lo que sólo es necesario establecer un valor mínimo y máximo para cada parámetro y un incremento o paso de discretización entre esas dos fronteras. Este valor podrá ser determinado en función del grado de error que se desee manejar en dicho parámetro, de la capacidad de cómputo y de la resolución que puede ser esperada para dicho parámetro. Los valores mínimo y máximo para cada parámetro serán determinados con información a priori del problema. De esta manera, es bastante sencillo incorporar la información previa que se tiene del problema. Para lograr una buena inversión es muy importante acotar de manera apropiada el problema, aunque este método no requiere de tener un conocimiento a priori muy detallado para hallar la solución, ya que es altamente capaz de escapar de máximos locales para encontrar el máximo absoluto de la superficie de costo.

5.4.2 Inversión con algoritmos genéticos.

El método de A.G. es un método iterativo en el cual se desarrollan los siguientes pasos:

1.- Discretización de los parámetros del modelo.

Para cada uno de los elementos del vector de parámetros m se determinan valores entre el valor mínimo (m_i^{min}) que puede tomar ese parámetro y el valor máximo (m_i^{max}) del mismo cada Δm_i que es el valor del incremento fijo para el parámetro i -ésimo.

$$\bar{X}_i = \begin{bmatrix} m_i^{min} \\ m_i^{min} + \Delta m_i \\ m_i^{min} + 2 * \Delta m_i \\ : \\ : \\ m_i^{min} + (n_i - 1) * \Delta m_i \\ m_i^{max} \end{bmatrix} \quad \dots 5.1$$

donde:

\bar{X}_i es el vector que contiene los diferentes valores que puede tomar el parámetro i -ésimo.

n_i es el número de posibles valores que puede tomar ese parámetro.

Como es de esperarse existe un vector X diferente para cada uno de los parámetros el cual contiene los diferentes valores que puede tomar dicho parámetro.

El número de elemento del vector \bar{X} se puede asociar directamente a un valor de ese parámetro. Esta representación es muy útil, ya que el método de A.G. trabaja con estos índices (números enteros) y no con los valores reales de los parámetros (números reales).

2.- Población inicial aleatoria.

Como se dijo antes el método de A.G. no requiere de un modelo inicial, ya que este trabaja con toda una población de modelos que permanece constante (en cantidad) a lo largo de todo el proceso de inversión. La población inicial consiste de un número finito de combinaciones aleatorias de valores de los diferentes parámetros. Estas combinaciones se hacen escogiendo números aleatorios entre cero y uno, estos números

aleatorios se multiplican por el número de posibles cambios de cada parámetro (n_i) y finalmente a la parte entera de este valor se le suma uno. Este procedimiento garantiza tener números aleatorios enteros entre uno y el número de posibles cambios para cada parámetro (n_i), de tal manera que si uno deseara conocer el valor real de un parámetro dentro de una combinación bastaría asociar directamente el índice del vector \bar{X} de cada uno de los parámetros con el número aleatorio entero.

El número de combinaciones (individuos en la población) que se debe elegir depende del problema. Una población grande permite una convergencia adecuada y segura, pero requiere un mayor tiempo de computo que una población pequeña.

Todos estos modelos son guardados en un arreglo que llamaremos M , donde las columnas representan cada uno de los parámetros y los renglones el tamaño de la población.

$$M_y = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & \dots & m_i \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \text{ mod} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} Ent(n_1 * ran) + 1 & Ent(n_2 * ran) + 1 & \dots & Ent(n_j * ran) + 1 \\ Ent(n_1 * ran) + 1 & Ent(n_2 * ran) + 1 & \dots & Ent(n_j * ran) + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ent(n_1 * ran) + 1 & Ent(n_2 * ran) + 1 & \dots & Ent(n_j * ran) + 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

en notación indicial:

$$M_{ij} = Ent(n_j * ran + 1) \quad \dots 5.2$$

Para $i=1, n \text{ mod}$ y $j=1, n \text{ par}$

donde:

$n \text{ par}$ es el número de parámetros

$n \text{ mod}$ es el tamaño de la población (número de modelos)

ran es un número aleatorio entre 0 y 1

$Ent(x)$ es la parte entera de x .

En el arreglo M los renglones son las diversas combinaciones que dan lugar a lo que se llamará un modelo, con el cual a través del problema directo se puede conocer su respuesta teórica.

Cada uno de los elementos de la matriz M es transformado en su respectivo número binario, después de lo cual son agrupados por renglones. De esta manera se

tendrá un vector $Mbin$ cuyos elementos son cadenas de ceros y unos que representan a cada uno de los modelos:

$$Mbin_i = \begin{bmatrix} bin(M_{11}) \cup bin(M_{12}) \cup \dots \cup bin(M_{1,j}) \\ bin(M_{21}) \cup bin(M_{22}) \cup \dots \cup bin(M_{2,j}) \\ \vdots \\ bin(M_{i1}) \cup bin(M_{i2}) \cup \dots \cup bin(M_{ij}) \end{bmatrix} \quad \dots 5.3$$

Para $i=1, nmod$ y $j=1, npar$

donde:

$bin(x)$ es el equivalente binario de x .

\cup es una operación que significa concatenación (poner un número enseguida de otro, por ejemplo $(1110) \cup (1000) = 11101000$).

El vector $Mbin$ contiene en cada uno de sus renglones cadenas de ceros y unos que adecuadamente separadas representan los números binarios cuyo equivalente entero es cada uno de los elementos de cada renglón de la matriz M .

Las cadenas de ceros y unos son únicas para cada combinación de parámetros (modelos), y debido a la semejanza con la manera en que la información genética se encuentra contenida en los seres vivos, estas cadenas son llamadas cromosomas y cada cero o uno que contiene la cadena es llamado gen. La posición particular de cada gen en el cromosoma se de gran importancia, ya que ésta determina una característica única del modelo. Dado que cada cromosoma representa toda la información correspondiente a los parámetros de un modelo, estas cadenas pueden también ser llamadas individuos, mientras que el total de modelos puede ser llamado población.

Estas analogías entre la información genética de los seres vivos y los elementos del arreglo $Mbin$ no son especulativas, ya que como en los seres vivos, el orden y valor (0 ó 1) de los aquí llamados genes determinan características específicas e irrepetibles de cada individuo.

El proceso numérico requiere que todas las transformaciones a números binarios tengan el mismo número de dígitos, por lo que, si es necesario, se agregan ceros a la izquierda del número binario, lo cual no altera su valor y permite que esta condición se cumpla. La razón por la cual todos los números binarios deben tener la misma cantidad de dígitos es porque de esta manera es posible tener un control exacto de los puntos donde empieza y donde termina la representación del número que hace referencia a cada uno de los parámetros. El número de dígitos debe ser suficiente para representar en

binario el valor del elemento más grande del vector n . Entonces si por ejemplo el elemento más grande del vector n fuera 15 ($\max(n) = 15$) sería suficiente con representaciones binarias de 4 dígitos:

$$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$\text{bin}(15) = 1111$$

Pero si el valor del elemento mas grande de n fuera 16 sería indispensable números binarios de 5 dígitos, ya que con 4 dígitos sólo podríamos representar el número 15:

$$16 < 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$\text{bin}(16) = 10000$$

Si sucediera el supuesto anterior ($\max(n) = 16$), cualquier número menor sería representado con el mismo número de dígitos (5) pero agregando ceros a la derecha:

$$5 < 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$\text{bin}(5) = 00101$$

A partir del paso No.3 el proceso de A.G. se vuelve iterativo.

3.- Cálculo del problema directo y de la función de costo.

Para cada uno de los modelos de la población es necesario calcular el problema directo con el que se obtiene la respuesta teórica de dicho modelo. Esta respuesta teórica es comparada contra los datos mediante una norma de error, esta norma de error puede ser alguna de la familia de normas L o cualquier otra.

$$d_{\text{calc}_i} = g(m_i) \quad \dots 5.3$$

$$f(d_{\text{obs}_i}, m_i) = d_{\text{obs}_i} - g(m_i) \quad \dots 5.4$$

donde:

d_{calc_i} es el vector que contiene la respuesta teórica calculada con el modelo m_i ,

$g(m_i)$ es el funcional que relaciona los parámetros del modelo y su respuesta teórica (problema directo).

d_{obs} es el vector que contiene los datos observados.

$f(d_{\text{obs}_i}, m_i)$ es la expresión con la que se calcula el desajuste, error, misfit o función de costo (norma).

Si la norma elegida fuera la norma L_2 la expresión 5.4 podría ser vista de acuerdo a la sección 4.3 como:

$$f(d_{obs}, m_i) = \left[\sum_i e_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_i d_{obs} - d_{calc}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para cada uno de los modelos se guarda el valor de la función de costo en un vector que se llamará \overline{cost} :

$$\overline{cost} = \begin{bmatrix} cost_1 \\ cost_2 \\ \vdots \\ cost_n \end{bmatrix}$$

donde:

$cost_1$ es el valor de la función de costo para el primer modelo y así sucesivamente hasta $cost_n$ que es el valor del n -ésimo modelo.

5.- Selección.

El primer paso de la selección es conocida, en algunos textos, cómo selección elite, y consiste en sustituir el modelo cuya función de costo sea peor (la más grande), por el modelo que hasta el momento tenga la mejor función de costo (la más cercana a cero).

$$Mbin_{peo} = Mbin_{mej}$$

donde:

peo es el índice del modelo cuya función de costo fue la más grande

mej es el índice del modelo cuya función de costo fue la más pequeña.

Por otro lado también se guarda el mejor modelo hasta el momento en la posición n , y dado que este permanecerá intacto en los procesos de cruce y mutación, se garantiza que para cada una de las iteraciones (generaciones) al menos se tenga un modelo igual o mejor que en la generación anterior.

$$Mbin_n = Mbin_{mej}$$

donde:

$Mbin_n$ es el modelo n -ésimo expresado en binario.

El siguiente paso es conocido como reproducción y consiste en establecer la probabilidad de que un modelo sea escogido en la nueva población según su función de costo. En los seres vivos, esta probabilidad es análoga con su habilidad para sobrevivir ante sus depredadores, de tal manera que entre más capacidad tenga un individuo para enfrentar a sus depredadores o huir de ellos, éste tendrá mas posibilidad de sobrevivir, y

por tanto de reproducirse. En nuestro caso, la única manera de “calificar” las cualidades de cada uno de los modelos es a través de su función de costo. Por lo que entre más cercana a cero sea ésta, el modelo tendrá más probabilidades de sobrevivir y presentarse en la siguiente generación. Este procedimiento se puede implementar de muchas maneras y quizá la más sencilla sea a través de una “ruleta sesgada” (Goldberg, 1989). Esta técnica consiste en sumar los inversos de las funciones de costo de cada uno de los modelos, y dividir cada uno de ellos entre esta suma, con lo cual se tiene para cada uno de los modelos una probabilidad de reproducción que únicamente depende de su función de costo.

$$sum = \sum_{i=1}^{n\ mod} \frac{1}{cost_i}$$

$$\overline{Pr} = \begin{bmatrix} \frac{sum}{cost_1} \\ \frac{sum}{cost_2} \\ \vdots \\ \frac{sum}{cost_{n\ mod}} \end{bmatrix}$$

donde \overline{Pr} es el vector que contiene la probabilidad de reproducción para cada uno de los modelos.

Dada su naturaleza, la sumatoria de todos los elementos del vector P_r es igual a uno:

$$\sum_{i=1}^{n\ mod} Pr_i = 1$$

por lo que las probabilidades de reproducción de los modelos puede ser visualizada como una gráfica de pastel.

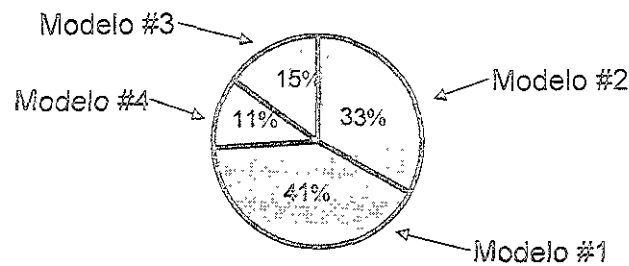


Figura 5.3 Gráfica de pastel de las probabilidades de reproducción para una población de 4 modelos.

En la figura 5.1 se presenta una gráfica de pastel para un problema hipotético de una población de 4 modelos cuyos desajustes fueron:

$$\overline{cost} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.1 \\ 0.22 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

En esta figura se ve que la mayor probabilidad de reproducción corresponde al modelo #1, que es el modelo que obtuvo un desajuste más pequeño, mientras que la menor probabilidad de reproducción corresponde al modelo #4 cuyo desajuste es el más grande.

Para obtener la nueva población solo bastaría llevar a cabo un procedimiento estocástico a partir del cual y con base en su probabilidad se determinara cuantas veces se repite un modelo en especial. Este procedimiento se llama de "ruleta sesgada", precisamente por que la gráfica de pastel de la figura 5.1 puede ser vista como una ruleta que se debe girar $nmod$ veces y cada vez la ruleta aleatoriamente designará el modelo que se reproducirá en la nueva población, con lo que se obtendrá un nuevo vector $Mbin$ al cual se le asociará un nuevo vector $cost$ con el respectivo costo de cada modelo.

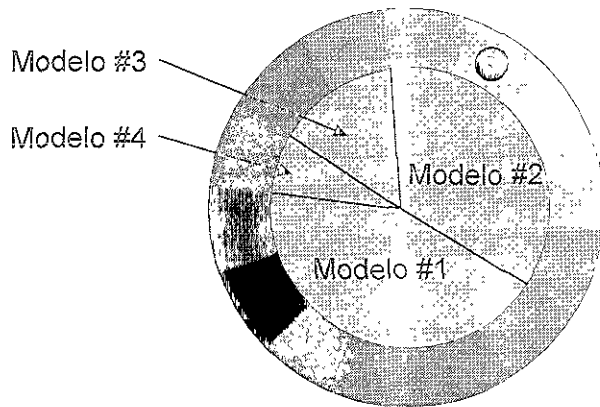


Figura 5.4 Ruleta sesgada con la probabilidad de reproducción del ejemplo anterior.

En la figura 5.2 se observa que la esfera dentro de la ruleta determina que el modelo #2 será repetido en la siguiente generación.

6.- Cruza.

Se agrupan los modelos por parejas (padres) y se selecciona aleatoriamente un bit, el cual será la marca para partir ambas cadenas y generar 2 cadenas o individuos nuevos (hijos), las cuales contendrán combinaciones aleatorias de la información contenida en las cadenas originales (padres), simulando así los procesos de reproducción sexual en los seres vivos:

$$Mbin_j^{nuevo} = \begin{bmatrix} Mbin_1 /* / Mbin_{n\ mod} \\ Mbin_2 /* / Mbin_{n\ mod-1} \\ \vdots \\ Mbin_{n\ mod-1} /* / Mbin_2 \\ Mbin_{n\ mod} /* / Mbin_1 \end{bmatrix}$$

donde.

/* / es el símbolo usado aquí para representar la operación de cruza antes descrita.

7.- Mutación.

La mutación es un procedimiento sencillo que consiste en elegir aleatoriamente algunos modelos y cambiar la paridad en alguno de sus bits elegido al azar, esto es si el bit en cuestión tiene el valor de uno antes de la mutación, después de ella tendrá un valor

de cero, y por el contrario si antes tenía el valor de cero después de la mutación valdrá uno. La cantidad de modelos que se debe mutar depende del problema y en realidad no existe una regla determinada, sin embargo se ha observado que mutar una pequeña cantidad de modelos es apropiado para la mayoría de los problemas ($< 5\%$).

Una modificación reportada como de gran éxito es propuesta por *Yamanaka et al., 1996*, donde la cantidad de modelos mutados es incrementada de acuerdo con la homogeneización de la población, esto es entre mas modelos parecidos incluya la población mayor será la cantidad de modelos mutados. En la evolución de los seres vivos, el proceso de mutación tiene un papel muy importante. Se cree que los fenómenos de mimetismo, desarrollados por una gran cantidad de especies animales, es el resultado de mutaciones benéficas experimentadas por algunos individuos de la población durante la evolución, y luego seleccionadas naturalmente para ser transmitidas a sus descendientes.

8.- Acelerador del proceso.

El proceso de selección provoca que conforme avanzan las iteraciones sea cada vez más probable que se repitan modelos. En un esquema tradicional de A.G. para cada uno de los modelos de la generación (aunque sean repetidos) se calcula el problema directo. El proceso acelerador consiste en conservar en una memoria temporal todas las combinaciones de parámetros de una iteración anterior a la presente y también conservar aquellas combinaciones de las cuales ya se ha calculado el desajuste en la presente iteración, de tal manera que aquellas combinaciones que se repitan no pasaran a través del problema directo y, dado que en muchas ocasiones el problema directo ocupa una gran cantidad de tiempo de cómputo, este procedimiento permite ahorrarlo en buena medida ($\approx 30\%$).

5.5 Estimación de la Incertidumbre con métodos globales.

Uno de las críticas mas frecuentes a los métodos de inversión estocásticos como los planteados en este trabajo (A.G. y S.A.), es la imposibilidad de medir la incertidumbre o el error en los parámetros del modelo resultado de la inversión. En contraste, los métodos tradicionales de inversión lineal permiten tener un control muy cercano de la incertidumbre que posee cierto modelo solución, esto se logra calculando la matriz de resolución de los parámetros como se vio en el capítulo 4 sección 8.2. En los métodos globales estocásticos no es práctico obtener la matriz de resolución ya que en el proceso de inversión no se lleva a cabo el cálculo de las derivadas parciales de la función de error

con respecto a los parámetros. Sin embargo, cuando se usa un método global de inversión es posible hacer una estimación de la incertidumbre sobre el valor de los parámetros resultado de la inversión. El procedimiento consiste en retener todos los modelos que estén por debajo de cierto desajuste, y obtener con ellos el valor promedio y desviación estándar de cada parámetro. Lo anterior equivale a encontrar diversas zonas en la superficie de costo (capítulo 4 sección 4) donde el desajuste es pequeño y por lo tanto son modelos, en la medida de los criterios establecidos, aceptables. En la figura 5.5 se muestra una superficie de costo supuesta, donde se observan zonas inundadas hasta cierto valor. Dicho valor representa el límite de desajuste por debajo del cual los modelos serán retenidos.

Si se cuenta con una estimación del error en las observaciones (por ejemplo el derivado de la desviación estándar de un apilado de varias observaciones del mismo fenómeno) se puede establecer que sólo aquellos modelos cuya respuesta teórica esté contenida dentro de la zona que define la incertidumbre de las observaciones, sean considerados para el cálculo del promedio y desviación estándar de cada parámetro.

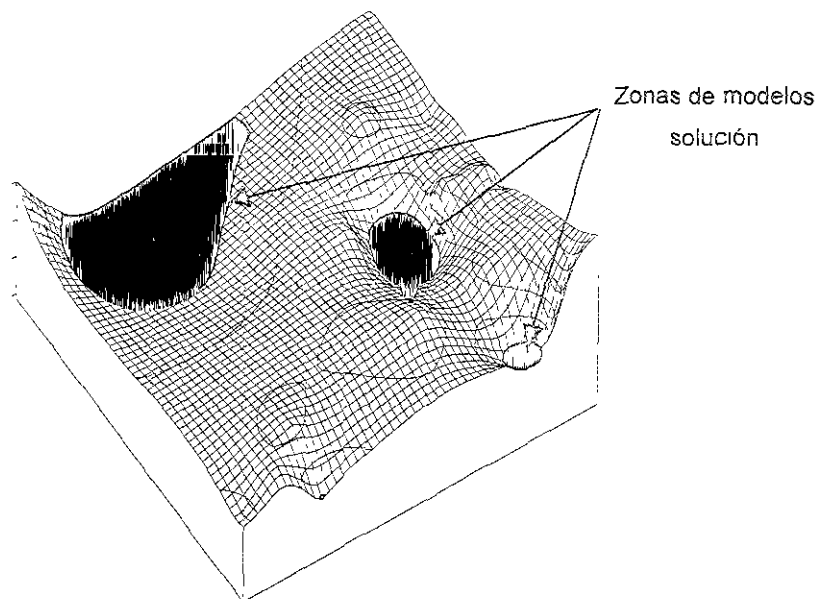


Figura 5.5 Superficie de costo, las zonas oscuras representan las regiones donde se encuentran las combinaciones de parámetros que son solución de acuerdo a los criterios de semejanza y área de error.

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.

VI.- Inversión de Curvas de Dispersión de Eventos de Subducción

VI. INVERSIÓN DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE EVENTOS DE SUBDUCCIÓN

Como se mostró en el capítulo 3 la dispersión de ondas superficiales, calculada a partir de registros sísmicos, posee información precisa respecto al medio donde se propagan dichas ondas. Esta información es posible extraerla a través de un proceso de inversión. Usualmente la inversión de curvas de dispersión se lleva a cabo mediante la expansión en series de Taylor de la expresión para su cálculo, lo que implica linealizar el problema para resolverlo a través de un esquema de inversión lineal (P.ej. *V.I. Keilis-Borok, 1989. Chávez-Pérez et al., 1991*).

Sin embargo es bien conocido que la inversión de curvas de dispersión de ondas superficiales es un problema fuertemente no lineal y multiparamétrico, (*Lomax y Sneider, 1995; Yamanaka e Ishida, 1996*) por lo que la solución inversa a partir de un método lineal implica fuerte dependencia del modelo inicial escogido.

A través del uso de un método de inversión global es posible resolver el problema sin usar ninguna linealización. Además, debido al tipo de búsqueda llevado a cabo por estos métodos, la solución prácticamente no está ligada a un modelo inicial.

En el presente capítulo se usarán dos métodos de inversión global analizados en el capítulo 5 (Algoritmos Genéticos y Simulated Annealing) y se aplicarán a la solución del problema inverso de datos de dispersión de velocidad de grupo de ondas de Rayleigh.

6.1 Inversión Sintética.

Con efecto de probar los métodos globales de inversión señalados, es pertinente llevar a cabo una inversión sintética. Para el caso en cuestión, una inversión sintética consiste en generar sismogramas sintéticos a partir de un modelo conocido. De estos sismogramas se puede obtener un apilado de curvas de dispersión y suponer que estas curvas provienen de observaciones reales. Enseguida estas curvas son usadas como objetivo para llevar a cabo el proceso de inversión. Si el resultado de la inversión es un modelo que se asemeja considerablemente a aquel con el cual generamos las observaciones podemos entonces afirmar que los métodos de inversión probados son adecuados para resolver el problema inverso que nos ocupa (*figura 6.1*).

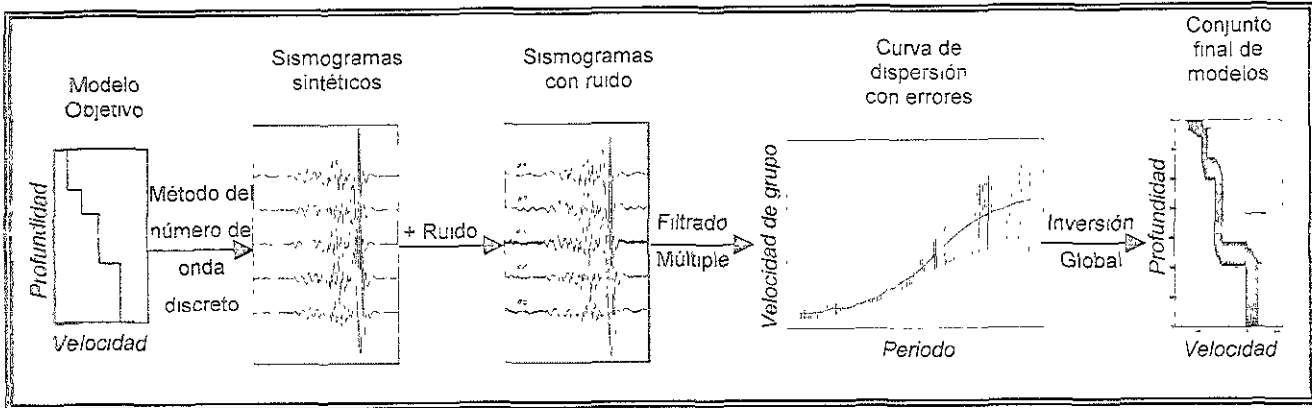


Figura 6.1 Representación del proceso de una inversión sintética

6.1.1 Diseño de la inversión sintética.

Para la inversión sintética se generaron 5 sismogramas sintéticos de componente vertical usando el programa *axitra* basado en el método del número de onda discreto (*Bouchon, 1977*) (figura 6.2 a). Este método implica el cálculo de las funciones de Green para un modelo de capas planas dado, el cual es convolucionado con una función de fuente. En este trabajo se usó un modelo promedio a partir del propuesto por *Campillo et. al., 1996*, para el centro sur de la República Mexicana (tabla 6.1), mientras que se consideró una fuente puntual de características sencillas.

Espesor (Km.)	Velocidad β (Km./s)
5	3.1
12	3.3
28	3.75
∞	4.75

Tabla 6.1 Modelo promedio para el centro sur de la República Mexicana.

Para este modelo, se consideró constante la relación de Poisson (sólido de Poisson) $\left(\nu = \frac{1}{4}\right)$ para todas las capas, y la densidad de cada capa fue calculada cómo $\rho = 0.32\alpha + .77$ (*Bertheussen, 1977*).

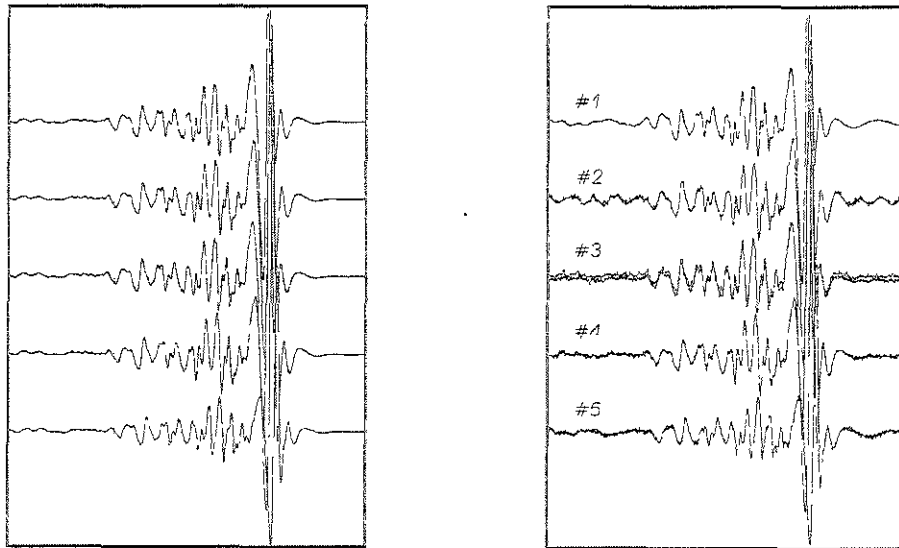


Figura 6.2 Sismogramas sintéticos calculados a partir del modelo mostrado en la tabla 6.1. a) Sin ruido b) Con ruido.

Cada sismograma sintético calculado difería sutilmente de los demás debido a que se supuso que la distancia fuente–receptor era ligeramente diferente para cada uno de los 5 sismos supuestos. En una segunda etapa se agregó ruido aleatorio diferente para cada uno de los 5 sismogramas (figura 6.2 b).

En la tercera etapa se calculó la curva de dispersión apilada de los 5 sismogramas perturbados (figura 6.2 b) para períodos entre 5 y 40 segundos. Este procedimiento se realizó con un programa basado en la teoría de filtrado múltiple y apilado logarítmico (Campillo et al., y Shapiro et al., 1997) discutida brevemente en la sección 3.6 de este trabajo. Este procedimiento permite obtener, además de una curva de dispersión promedio, la incertidumbre para cada período calculado.

Tratando de simular el error que puede existir en la localización epicentral de terremotos reales, se consideró, para el cálculo de la curva de dispersión promedio, un factor aleatorio de error en la distancia fuente receptor para cada uno de los 5 sismos (Tabla 6.2 columna 3). En la tabla 6.2, se muestran los parámetros de distancia epicentro-estación, factor aleatorio de error en la localización del epicentro, la relación señal-ruido y el período del ruido coherente para cada uno de los 5 sismogramas sintéticos.

Sismograma sintético	Distancia epicentro-estación (Km)	Factor de error en la localización (Km)	Relación señal-Ruido (%)	Período del ruido coherente (s)
Evento #1	1000	7.0	70%	45
Evento #2	1005	2.0	70%	18
Evento #3	1001	4.0	70%	1
Evento #4	1011	0.0	90%	200
Evento #5	1020	-14.0	60%	35

Tabla 6.2 Características de los diferentes sismogramas usados en la inversión sintética.

En la figura 6.4 se muestra, en un diagrama velocidad de grupo contra periodo, el resultado de los procesos de filtrado múltiple y apilado logarítmico, donde las barras verticales indican la incertidumbre alrededor del valor promedio de velocidad de grupo para cada periodo de cálculo.

La última etapa de la inversión sintética consiste en encontrar, a través de los métodos de inversión de algoritmos genéticos y *simulated annealing*, valores de espesor (h) y velocidad (β), con los cuales, a través del problema directo se genere un conjunto de curvas que cumpla con ciertos criterios. El problema directo usado durante todo este trabajo es una combinación de los programas Surface 85 y Reigen 85 del conjunto de programas "Computer programs in seismology" (Herrmann, 1987), los cuales calculan la velocidad de fase y a partir de ella, la velocidad de grupo de un modelo de capas planas dado.

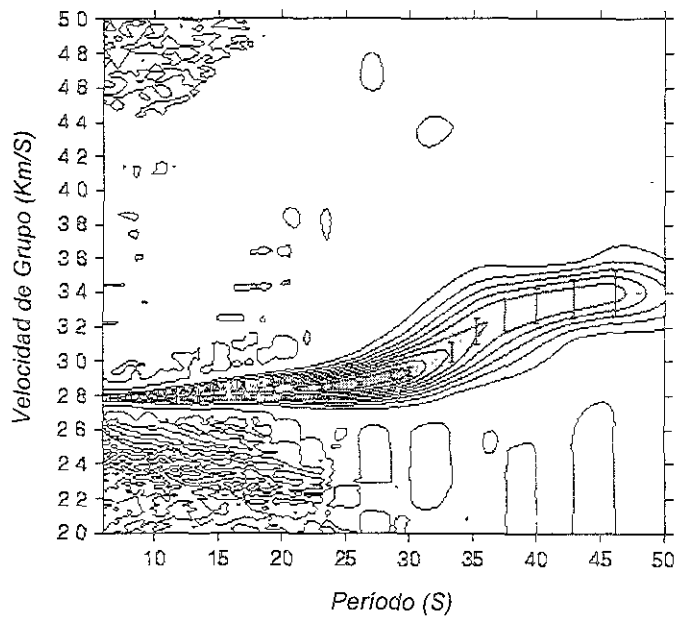


Figura 6.4 Curva de dispersión apilada de los 5 sismogramas sintéticos de la figura 6.2 b.

6.1.2 Criterios de aceptación de los modelos.

Para las diferentes inversiones se calculó la incertidumbre de los resultados usando el procedimiento descrito en la sección 5.5. Para calcular el promedio y la desviación estándar de cada parámetro, se retuvo un conjunto de modelos que atendían a la combinación de dos criterios:

- **Área de error.** El área de error es la zona que queda delimitada entre la respuesta teórica del modelo probado y el área que definen las incertidumbres para cada periodo. Esta área se le llamará banda de incertidumbre. Para que un modelo sea aceptado como solución se deberá cumplir que su área de error sea menor a un porcentaje de la banda de incertidumbre.
- **Semblanza.** La semblanza es una medida de desajuste (misfit), y para este trabajo cumple una doble función. Por un lado será la función de costo que guíe la convergencia del proceso de inversión, y por otro lado,

será un criterio de aceptación de los modelos de tal modo que un modelo deberá tener un valor de semejanza menor a cierto valor establecido a priori para ser considerado como solución. La semejanza se calcula como:

$$e = 0.5 - \frac{\overline{d_{obs}} \otimes \overline{d_{calc}}}{\left(\overline{d_{obs}} \otimes \overline{d_{obs}} \right) + \left(\overline{d_{calc}} \otimes \overline{d_{calc}} \right)}$$

donde el signo \otimes indica la crosscorrelación.

En la figura 6.5 se muestra un caso hipotético de una curva de dispersión calculada (línea continua) que es comparada contra la banda de incertidumbre (área achurada). La región que se encuentra entre la curva y el área achurada, es el área de error que posee la respuesta teórica del modelo comparado.

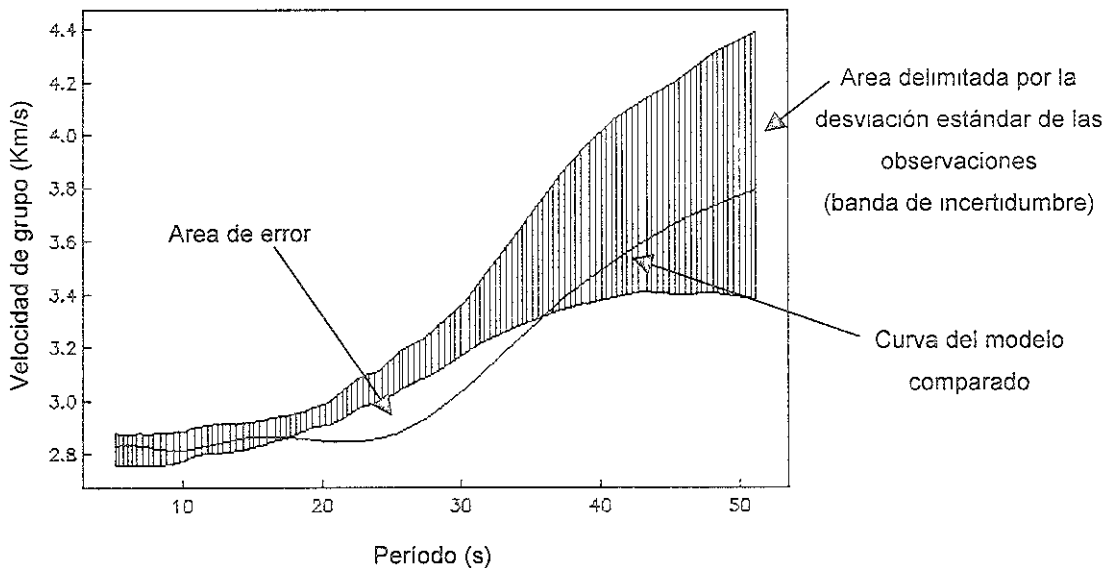


Figura 6.5 Ejemplo de la determinación del área de error

Para la selección de modelos en la inversión sintética se usaron como criterios de área de error y semejanza máxima los valores de 20 % y 0.00005 respectivamente.

6.1.3 Parametrización del problema inverso.

Para llevar a cabo la inversión con ambos métodos (A.G. y S.A.) se requieren ciertos parámetros que dictan el espacio de búsqueda, el tiempo y en cierta medida la convergencia del proceso (*Secciones 5.3.1 y 5.4.2 de este trabajo*).

En el caso de la inversión con algoritmos genéticos es necesario establecer los valores mínimos de los parámetros que la inversión puede considerar, además es necesario establecer un número de posibles variaciones así como un intervalo de discretización para cada parámetro. Con estos tres valores es posible establecer los valores máximos que puede tomar cada parámetro dentro de la inversión. Por otro lado es necesario establecer la probabilidad inicial de mutación (PM), probabilidad de Cruza (PC), No. de Modelos por cada generación (Población), Iteraciones máximas (ITERMAX), error máximo considerado (err) por debajo del cual la inversión termina.

En la Tabla 6.3 se muestran todos los parámetros considerados para la inversión sintética con Algoritmos genéticos.

PM=0.1, PC=1.0, Población =200, ITERMAX=100, err=1x10 ⁻¹¹				
Parámetro	Valor Mínimo	Intervalo de discretización	No. de Posibles Cambios.	Valor Máximo
β_1	2.70	0.05	11	3.20
β_2	2.80	0.10	9	3.60
β_3	3.50	0.10	11	4.50
β_4	4.50	0.10	10	5.40
h_1	3.00	0.50	7	6.00
h_2	9.00	0.50	13	15.0
h_3	20.00	1.0	11	30.0

Tabla 6.3 Parámetros de la inversión con algoritmos genéticos.

Para llevar a cabo la inversión con simulated annealing, es también necesario establecer valores límites para los parámetros (esto es, el valor máximo y mínimo que puede tomar cada uno de los parámetros) y un modelo inicial. Además es necesario

establecer con sumo cuidado, la temperatura inicial (T_0), el factor de reducción de temperatura (RT); un valor por cada parámetro (VM) que está relacionado con el tamaño máximo de la perturbación para ese parámetro, pero que se autoajustará de acuerdo a las necesidades de la búsqueda; un número (n_1) que determinará cuantas iteraciones se llevarán a cabo antes de modificar el paso de búsqueda (VM) y un número (n_2) que será igual al número de iteraciones realizadas antes de ajustar la temperatura. Finalmente es también necesario considerar un error máximo (err) por debajo del cual la inversión termina. Si este criterio nunca es alcanzado la inversión acabará hasta que se cumpla un número máximo de modelos calculados NQMAX. En la tabla 6.4 se consideran todos los parámetros necesarios para llevar a cabo la inversión con el método de simulated annealing.

$T_0=3$,RT=0.9 , $n_1=3$, $n_2=5$,err= 1×10^{-11} , NQMAX=20000			
Parámetro	Valor Mínimo	Valor Máximo	VM
β_1	2.70	3.20	.10
β_2	2.80	3.60	.10
β_3	3.50	4.50	.10
β_4	4.50	5.40	.10
h_1	3.00	6.00	.50
h_2	9.00	15.0	.50
h_3	20.0	30.0	.50

Tabla 6.4 Parámetros de la Inversión con simulated annealing.

6.1.4 Resultados de la inversión sintética.

Atendiendo a los criterios de área de error y semejanza mencionados, el conjunto de modelos aceptados por algoritmos genéticos se muestra en la *figura 6.6*.

Con todos los modelos aceptados se puede obtener un modelo promedio, que represente en cierta medida el resultado de la inversión. Sin embargo este modelo

promedio debe ser parte del conjunto de modelos aceptados¹, por lo que se hace un procedimiento para encontrar, de todos aquellos modelos aceptados, aquel que se parece mas al promedio

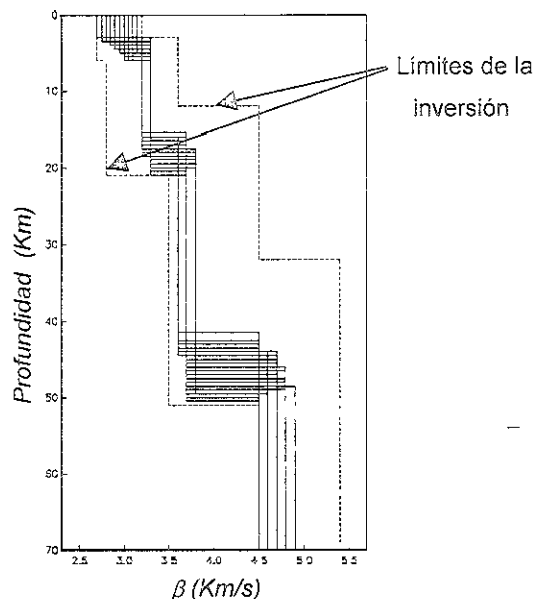


Figura 6.6 Conjunto de modelos aceptados (535) resultado del proceso de inversión con algoritmos genéticos. Las líneas continuas representan los modelos aceptados, y las líneas discontinuas el valor límite (inferior y superior) de cada parámetro durante la inversión

En la figura 6.7 se muestra el modelo promedio (línea continua), comparado con el modelo de Campillo et al., 1996 (línea discontinua), con el que se generaron las observaciones sintéticas.

¹ El modelo elegido debe ser parte del conjunto de modelos aceptados dado que es una manera de tener la certeza de que cumple con los criterios establecidos (semblanza y área de error).

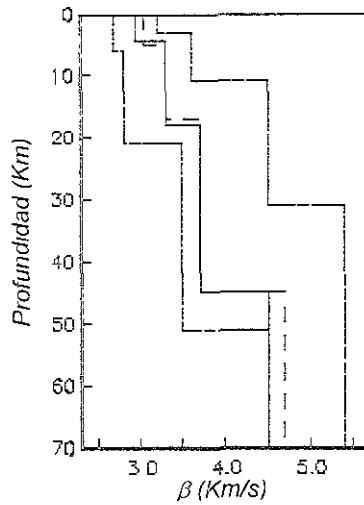


Figura 6.7 Comparación del modelo promedio resultado de la inversión con algoritmos genéticos (línea continua) y del modelo de la tabla 6.1 (línea discontinua). También se muestran nuevamente los límites de la inversión.

...

En la figura 6.8 Se muestra la respuesta teórica del modelo promedio y se compara contra las observaciones sintéticas.

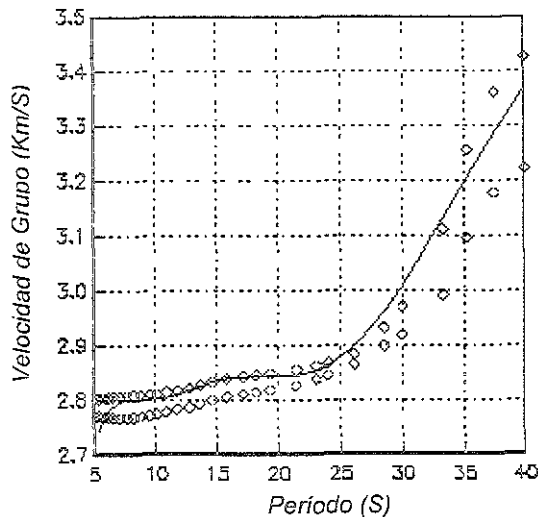


Figura 6.8 Curva de dispersión del modelo promedio(línea continua) comparada contra las observaciones sintéticas (rombos)

Por otro lado el conjunto de modelos aceptados por el método de inversión de simulated annealing se muestra en la *figura 6.9*.

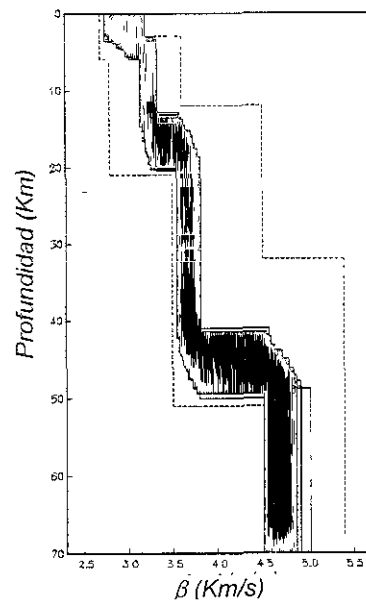


Figura 6.9 Conjunto de modelos aceptados por el método de simulated annealing

En la *figura 6.10* se muestra el modelo que más se acerca al promedio.

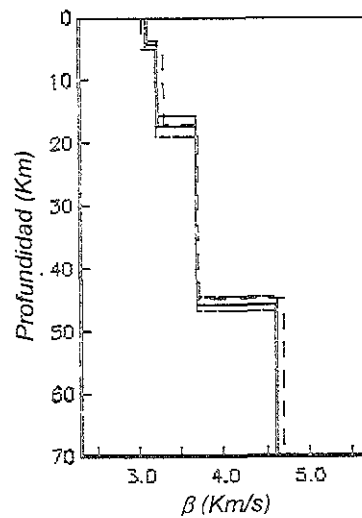


Figura 6.10 Comparación del modelo promedio resultado de la inversión con simulated annealing (línea continua) y del modelo de la tabla 6.1 (línea discontinua)

Para el caso del modelo promedio, obtenido a partir del conjunto de modelos solución del método de simulated annealing, en la *figura 6.11* se muestra la respuesta teórica y se compara contra las observaciones.

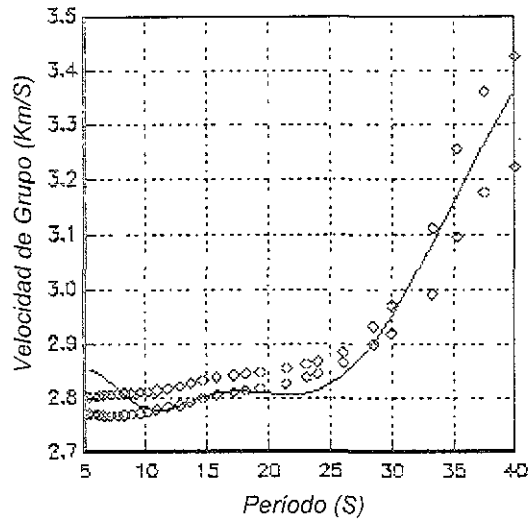


Figura 6.11 Respuesta teórica del modelo promedio resultado de la inversión con el método de simulated annealing

Comparando las *figuras 6.6* y *6.9*, y las *figuras 6.7* y *6.10*, se puede concluir que ambos métodos convergen a soluciones muy parecidas y a su vez soluciones que concuerdan en gran medida con el modelo sintético propuesto. Es así como podemos concluir que los dos métodos de inversión son capaces de encontrar, de manera eficaz, soluciones para el problema inverso planteado. Por otro lado, con estos resultados se constata, de manera relativa, la utilidad de llevar a cabo el apilado de las curvas de dispersión con efecto de encontrar una curva más consistente y que además muestra las incertidumbres para cada período de análisis.

6.2 Inversión de curvas de dispersión a partir de datos registrados.

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos a partir de la inversión con datos reales registrados por instrumentos de banda ancha.

6.2.1 Selección de Eventos.

Para el análisis considerado en este trabajo, se usaron algunos de los eventos registrados por la red de estaciones de banda ancha del Servicio Sismológico Nacional (S.S.N.). Se plantearon dos trayectorias de interés epicentro-estación para

el centro-sur de la República Mexicana. Estas trayectorias corresponden de manera general a:

Trayectoria 1: Sismos ocurridos en la costa del estado de Guerrero (en el centro del estado) y registrados en la estación CUIG de banda ancha del S.S.N. ubicada en la Ciudad Universitaria de la Universidad Nacional Autónoma de México (México, D.F.) (*figura 6.12*).

Trayectoria 2: Sismos ocurridos cerca de la costa de Oaxaca. Y registrados en la estación PLIG de banda ancha del S.S.N. ubicada en la Ciudad de Iguala Gro (*figura 6.13*).

Los eventos fueron considerados atendiendo a los siguientes criterios:

- 1.- Eventos con magnitud menor a 7.5 grados en la escala de Richter, sucedidos entre 1994 y 1997 ya que sismos mayores presentan demasiada complejidad para su análisis.
- 2.- Profundidad del foco menor a 40 Kms ya que los eventos ocurridos en este intervalo excitan las frecuencias adecuadas para analizar la corteza terrestre.
- 3.- Ubicación de los epicentros que correspondan a las trayectorias planteadas.

Los eventos escogidos de acuerdo a los criterios anteriores fueron analizados cuidadosamente observando su espectro y filtrando para los períodos de interés de este trabajo (de 5 a 50 seg.). Adicionalmente se contó con 9 registros (sucedidos entre 1991 y 1993) usados para el estudio reportado en el artículo de *Campillo et al.*, 1996.

Como resultado de este proceso de selección, para la primer trayectoria se contaron con diez eventos cuyos epicentros se encontraron entre los 16.5° y 17.5° de latitud norte y los 98.5° y 101.5° de latitud Oeste. En la *tabla 6.5* se describen las características de los 10 eventos considerados en esta trayectoria y en la *figura 6.12* se muestran las localizaciones de los eventos y de la estación CUIG. Para la segunda trayectoria fueron considerados cuatro eventos cuyos epicentros se encontraron entre los 15.5° y 16.5° de latitud norte y los 95.5° y 98.5° de latitud Oeste *tabla 6.6* y *figura 6.13*.

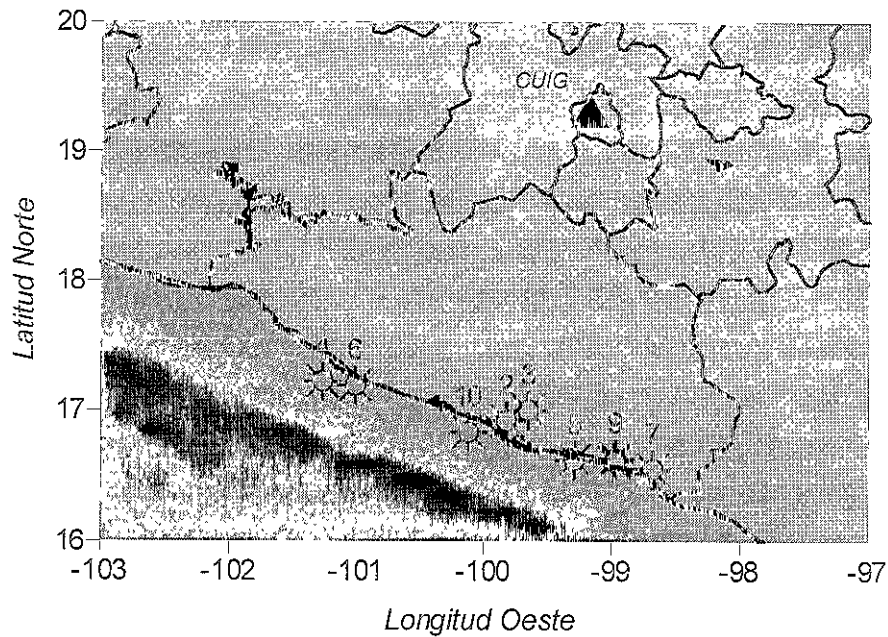


Figura 6.12. Localización de los eventos usados para la trayectoria 1 (Tabla 6.5) y localización de la estación CUIG

#	Fecha dd/mm/año	Latitud (°N)	Longitud (°W)	Prof. (Km.)	Magnitud
1	21/04/1991	16.61	98.98	16.0	4.2
2	28/05/1991	16.92	99.82	27.2	3.6
3	9/01/1992	17.00	99.65	30.2	4.7
4	31/03/1992	17.22	101.27	11.0	5.1
5	24/12/1992	16.62	99.29	18.4	4.8
6	31/03/1993	17.19	101.01	6.0	4.8
7	15/05/1993	16.55	98.68	15.6	5.6
8	15/05/1993	16.55	98.68	15.6	5.9
9	24/10/1993	16.63	98.97	34.6	6.5
10	5/07/1998	16.832	100.12	5.0	4.9

Tabla 6.5 Características de los 10 eventos considerados para la trayectoria 1.

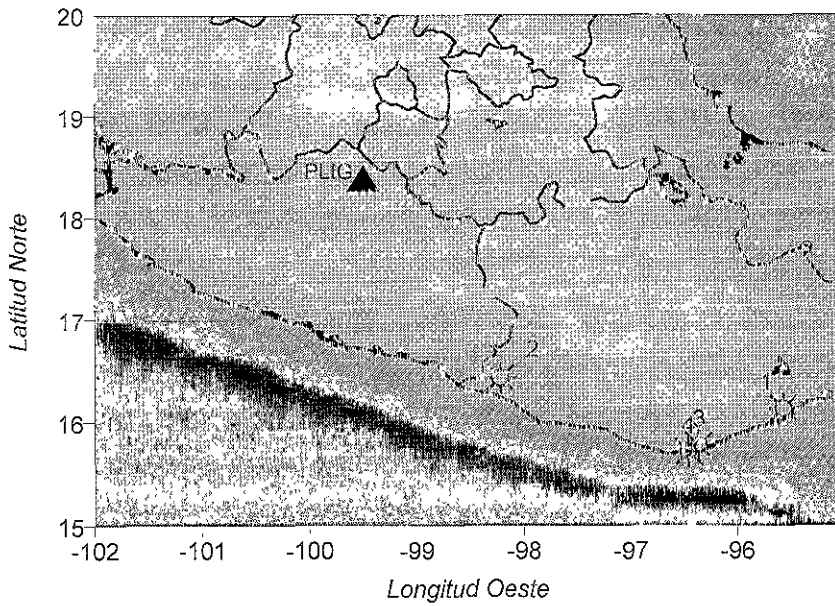


Figura 6.13. Localización de los eventos usados para la trayectoria 2 (Tabla 6.6) y localización de la estación PLIG

#	Fecha dd/mm/año	Latitud ² (°N)	Longitud (°W)	Prof. (Km.)	Magnitud
1	8/01/1997	16.13	95.57	36.0	4.6
2	21/01/1997	16.43	98.22	20.0	4.7
3	3/02/1998	15.77	96.36	32.9	6.4
4	3/03/1998	15.71	96.46	12.3	4.9

Tabla 6.6 Características de los 4 eventos considerados para la trayectoria 2.

² Las localizaciones de los tres primeros eventos se llevó a cabo con registros obtenidos en la estación Huatulco del S.S.N. Para el cuarto evento se usó la localización original del S.S.N.

6.2.2 Tratamiento de los datos.

Analizando el espectro de Fourier de cada uno de los eventos se pudo determinar un rango de frecuencias confiable para cada trayectoria. Enseguida para cada una de las trayectorias se calculó una curva de dispersión utilizando la técnica descrita en la sección 3.6. Esto es, se usaron el total de los eventos considerados para cada trayectoria llevando a cabo un apilamiento logarítmico de las curvas de dispersión y calculando una banda de error definida por la desviación estándar de cada punto. Este procedimiento aumentó de manera importante la confiabilidad de los datos. Para ilustrar lo anterior en las figuras 6.14, 6.15, 6.16 y 6.17 se muestran los período-velocidad de grupo para los eventos listados como 1, 2, 3, 4 en la tabla 6.5, y en la figura 6.18 la curva de dispersión apilada para el total de eventos listados en la misma tabla.

En las figuras mencionadas es difícil trazar una curva que tenga la garantía de representar el modo fundamental, ya que la máxima amplitud (colores oscuros) define una banda demasiado ancha para este fin. Es por esta razón que se aplica el método de apilado logarítmico que permite obtener una curva promedio y la incertidumbre alrededor de ella.

En la figura 6.18 se muestra el resultado del apilado donde se pueden observar líneas verticales que representan la desviación estándar alrededor del valor promedio de velocidad de grupo para los períodos de cálculo.

La figura 6.19 es el resultado del apilado mencionado para la trayectoria Huatulco-PLIG.

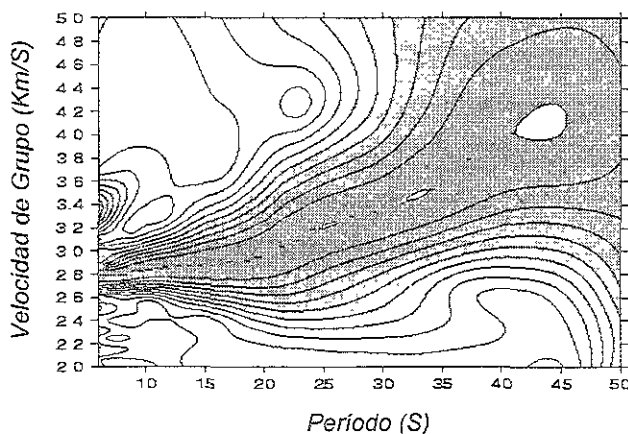


Figura 6.14 Diagrama período-velocidad de grupo para el evento 1 (tabla 6.5) de la trayectoria Costa de Guerrero -CUIG, se muestra la gráfica para períodos entre 5 y 50 segundos por ser un rango confiable.

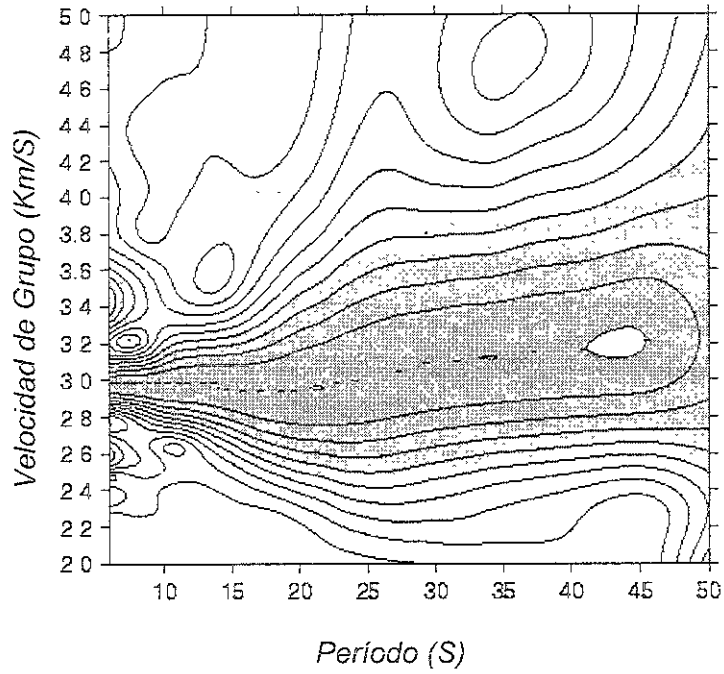


Figura 6.15 Diagrama periodo-velocidad de grupo para el evento 2 (tabla 6.5) de la trayectoria Costa de Guerrero –CUIG.

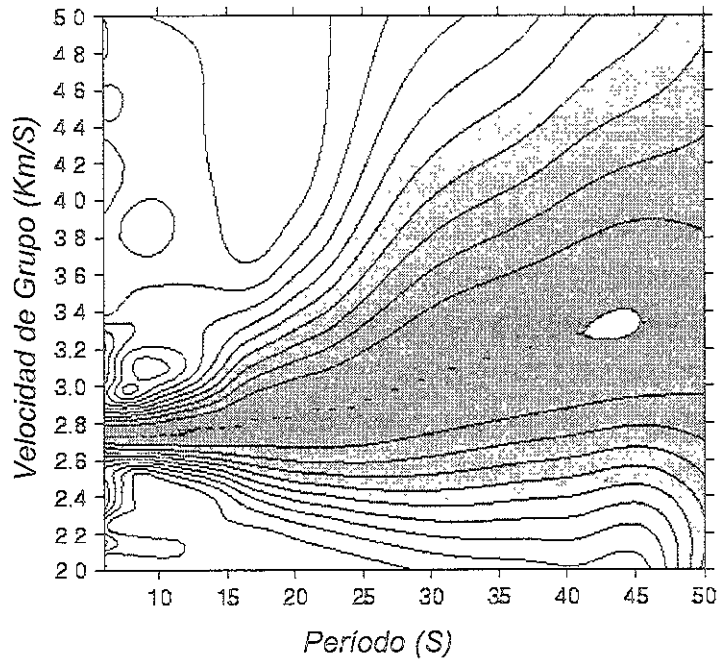


Figura 6.16 Diagrama periodo-velocidad de grupo para el evento 3 (tabla 6.5) de la trayectoria Costa de Guerrero –CUIG.

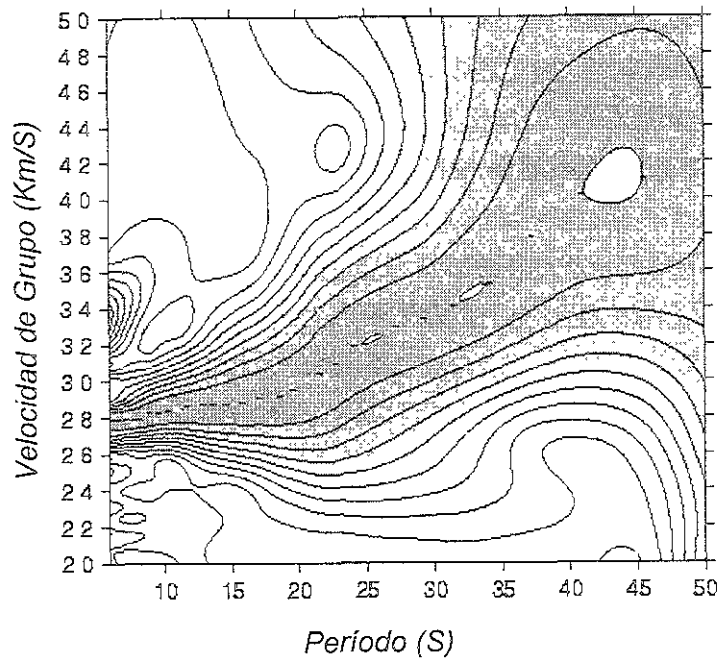


Figura 6.17 Diagrama periodo-velocidad de grupo para el evento 4 (tabla 6.5) de la trayectoria Costa de Guerrero-CUIG, se muestra la gráfica para periodos entre 5 y 50 segundos.

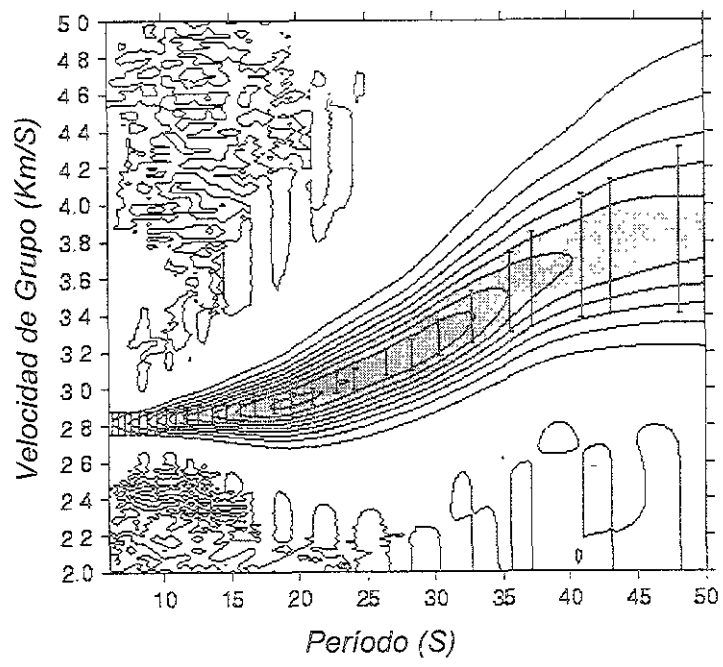


Figura 6.18 Diagrama período-velocidad de grupo del apilado de los diez eventos (tabla 6.5) para la trayectoria 1. Las barras verticales indican la incertidumbre de la velocidad para cada período.

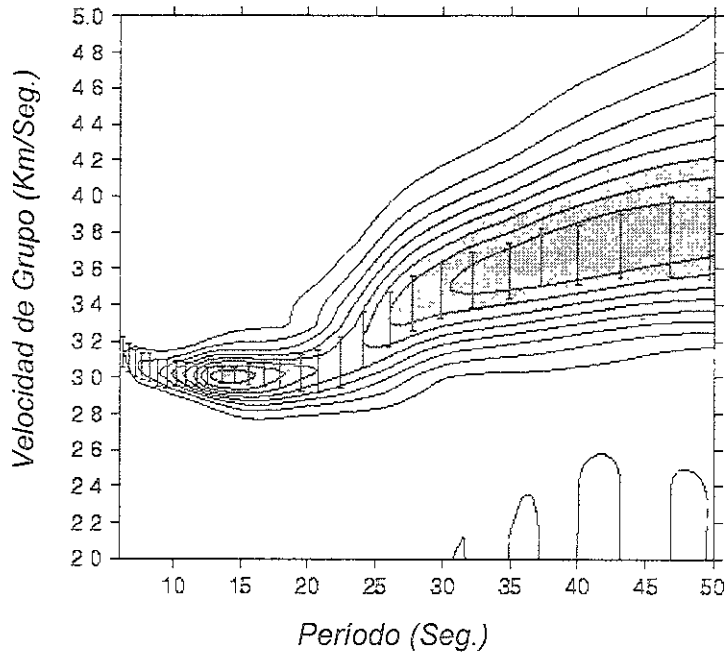


Figura 6.19 Diagrama período-velocidad de grupo del apilado de los cuatro eventos (tabla 6.6) para la trayectoria 2. Las barras verticales indican la incertidumbre de la velocidad para cada período.

6.2.3 Planteamiento del problema Inverso.

El rango de frecuencias usado para el cálculo de las dos curvas de dispersión apiladas (y sus errores), es adecuado para encontrar modelos de corteza terrestre que puedan representar estructuras promedio para los dos diferentes trayectos. De esta manera se realizaron dos inversiones (una con A.G. y otra con S.A.) para cada una de las dos trayectorias planteadas. Los resultados de ambas inversiones para cada trayecto se combinaron para obtener un conjunto de modelos solución mas amplio.

Durante todas las inversiones se consideró un modelo de tres capas sobre un semiespacio. Los límites de variación para cada parámetro (tres espesores y cuatro velocidades) se establecieron alrededor del modelo propuesto por Mi Campillo y colaboradores en 1989 (Campillo et al., 1989). De acuerdo a los trabajos previos de la zona (Valdés et al., 1986, Gornberg et al., 1988, Campillo et al., 1989 y Campillo et al., 1996) se estableció que el intervalo de variación de los parámetros fuera suficientemente grande como para incluir valores que pudieran corresponder a los

resultados de uno u otro trabajo. Dadas las diferencias en los modelos mencionados, el espacio de búsqueda creció de manera considerable (*fig. 6.20*).

Al igual que en la inversión sintética, se consideró todo el modelo como un medio de Poisson lo que implica que la velocidad de ondas P puede calcularse en función de la velocidad de ondas S como: $\alpha = \sqrt{3}\beta$. Por otro lado se usó la relación $\rho = 0.32\alpha + 0.77$ para calcular la densidad en función del valor de la velocidad de propagación de las ondas P.

6.2.4 Inversión de las curvas de dispersión observadas para la trayectoria 1.

Para esta trayectoria y dada la suavidad de la curva, el área máxima de error para aceptar modelos, tanto en el método de A.G. como en el método de S.A., fue establecida como 0%, esto es, un modelo cumplía este criterio si su respuesta teórica estaba completamente contenida en la banda de incertidumbre. Por otro lado la semejanza máxima para aceptar modelos fue establecida con un valor amplio (0.1), ya que en este caso, este hecho, permitía encontrar una gran cantidad de modelos que abarcaran en buena medida la banda de incertidumbre.

6.2.4.1 Inversión con Algoritmos genéticos.

En la *tabla 6.7* se muestran los parámetros usados en la inversión con el método de A.G. Los parámetros de la inversión como son población, No. de iteraciones, probabilidad de cruce, probabilidad de mutación, etc. dependen del problema específico que se trate y del tamaño del espacio de soluciones, por lo que éstos parámetros fueron establecidos después de realizar algunas pruebas con el método de inversión.

En la *figura 6.20* se muestra el conjunto de modelos aceptados durante la inversión con el método de A.G. Debido a la incertidumbre para períodos grandes, en este conjunto sólo se incluyen modelos cuya suma de espesores fue menor a 50 Km. ya que aquellos que sobrepasan esta profundidad para el inicio del semiespacio no son geológicamente posibles dado que el inicio del manto no se espera a una profundidad mayor, sin embargo cabe mencionar que la inversión, debido a la acumulación de espesores, arrojó algunos modelos que sobrepasaban los 50 Km. de profundidad para la interfase del moho. En esta misma figura se muestran con línea discontinua los límites de cada parámetro.

En la *figura 6.21* se muestra la respuesta teórica de todos los modelos aceptados por el proceso de inversión. Se debe observar que la banda de incertidumbre (rombos) es bien cubierta por las curvas teóricas, esto permite pensar que el conjunto de modelos aceptados es muy confiable.

PM=0.1, PC=1.0, Población =300, ITERMAX=200, err=1x10 ⁻¹¹ .				
Parámetro	Valor Mínimo	Intervalo de discretización	No. de Posibles Cambios.	Valor Máximo
β_1	2.00	0.05	31	3.50
β_2	2.50	0.05	31	4.00
β_3	3.00	0.05	31	4.50
β_4	3.50	0.05	31	5.00
h_1	5.00	0.20	26	10.0
h_2	5.00	0.50	31	20.0
h_3	10.0	1.00	26	35.0

Tabla 6.7 Parámetros usados en la inversión con A.G. para la trayectoria 1.

En la *figura 6.22*, se muestra el modelo que más se acerca al promedio con línea continua y alrededor de él la desviación estándar para cada uno de los parámetros. También, con línea discontinua, se muestra el modelo de *Campillo, 1996*. Este modelo (*Campillo, 1996*) fue obtenido básicamente con los mismos datos usados para este trabajo, sin embargo existen algunas diferencias en los resultados. Si bien estas diferencias pudieran deberse en alguna medida a los diferentes métodos de inversión usados en cada trabajo, la fuente principal de ellas es, sin duda, que en aquel estudio no se consideraba aun la corrección por el error sistemático en la estimación de la curva de dispersión de velocidad de grupo (*Shapiro y Sing, 1999*), discutida brevemente en la sección 3.6.2 de este trabajo.

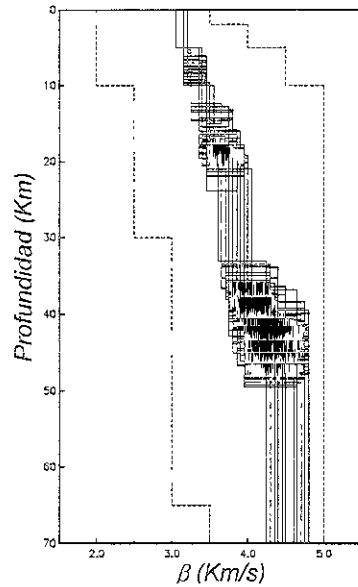


Figura 6.20 Conjunto de modelos aceptados durante la inversión con el método de A.G. para la trayectoria 1.

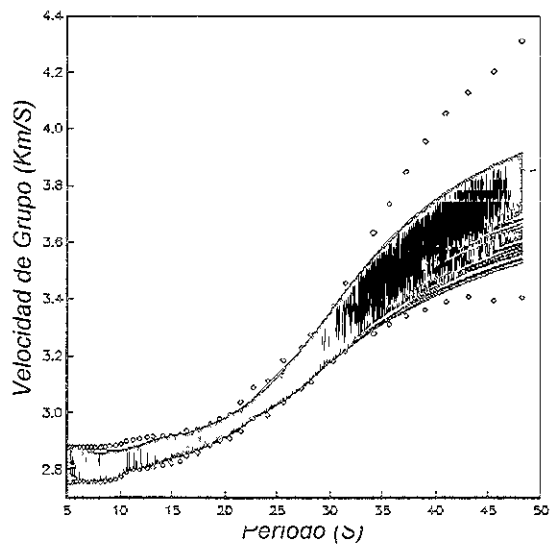


Figura 6.21 Con línea continua se muestra la respuesta teórica de todos los modelos aceptados durante la inversión con el método de A.G.. Con rombos se muestra la banda de incertidumbre.

En la figura 6.23 se presenta la respuesta teórica del modelo promedio (línea continua) y se compara contra la del modelo de Campillo (línea discontinua). También se muestra la banda de tolerancia (rombos).

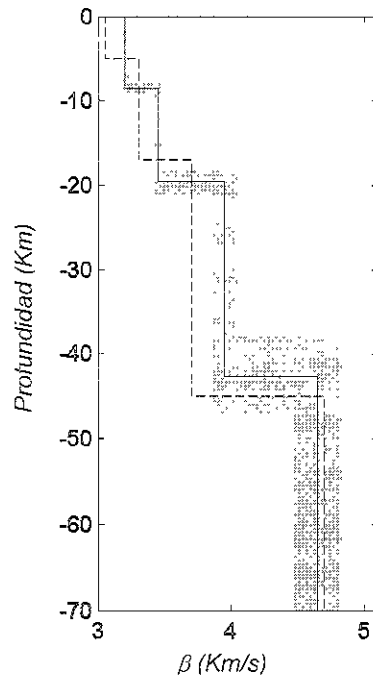


Figura 6.22 Modelo promedio (línea continua) y desviaciones estándar por parámetro resultados de la inversión con A.G.. Con línea discontinua se muestra el modelo de Campillo, 1996.

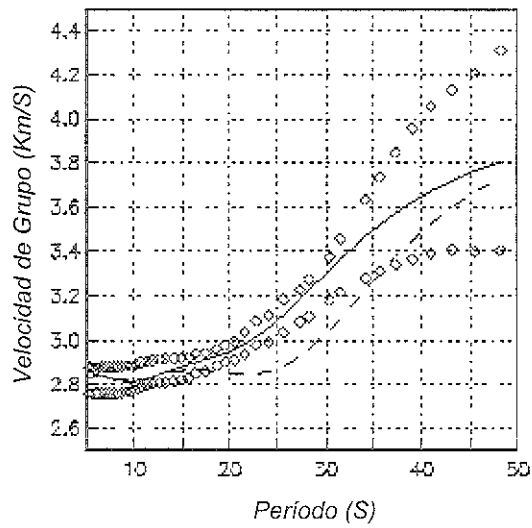


Figura 6.23 Respuesta teórica del modelo promedio (línea continua), comparada con la respuesta teórica del modelo de Campillo (línea discontinua). Con rombos se muestra la banda de tolerancia.

6.2.4.2 Inversión con Simulated annealing.

Como ya se ha dicho la inversión con S.A. también requiere establecer algunos parámetros, como son la temperatura inicial, el número de iteraciones antes de modificar el paso de búsqueda, el número de modelos máximo, etc. Estos valores deben ser establecidos después de llevar a cabo algunas pruebas preliminares. En la tabla 6.8 se exponen todos los parámetros usados en el proceso de inversión.

T ₀ =2 ,RT=0.9 ,n1=7 ,n2=9 ,err=.00001, NQMAX=60000			
Parámetro	Valor Mínimo	Valor Máximo	VM
β_1	2.00	3.50	0.10
β_2	2.50	4.00	0.10
β_3	3.00	4.50	0.10
β_4 ...	3.50	5.00	0.10
h_1	5.00	10.0	0.50
h_2	5.00	20.0	0.50
h_3	10.0	35.0	0.50

Tabla 6.8 Parámetros usados en la inversión con S.A. para la trayectoria 1.

Como se observa en las tablas 6.7 y 6.8 , fueron usados los mismos valores límites para cada parámetro del problema directo (β y h), tanto para la inversión con A.G. como con S.A.

En la figura 6.24 se muestra el conjunto de modelos resultado de la inversión con el método de S.A., también con línea discontinua se muestran los valores límites para cada parámetro.

En la figura 6.25, con líneas continuas, se muestran las respuestas teóricas de cada uno de los modelos aceptados mientras que los rombos definen la banda de incertidumbre.

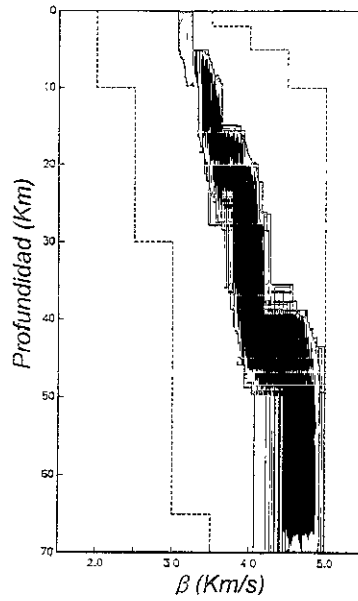


Figura 6.24 Conjunto de modelos aceptados por el proceso de inversión con S.A. para la trayectoria 1.

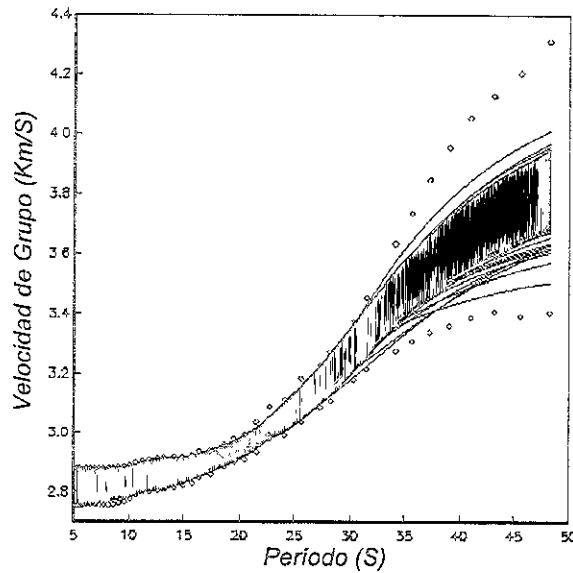


Figura 6.25 Con líneas continuas se muestran las respuestas teóricas de todos los modelos aceptados durante la inversión con el método de S.A.. Los rombos definen la banda de incertidumbre.

La gráfica de la *figura 6.26* muestra el modelo promedio del conjunto de modelos aceptados (línea continua), alrededor de él se muestran las incertidumbres por parámetro, éste modelo es comparado nuevamente con el modelo de Campillo antes citado (línea discontinua).

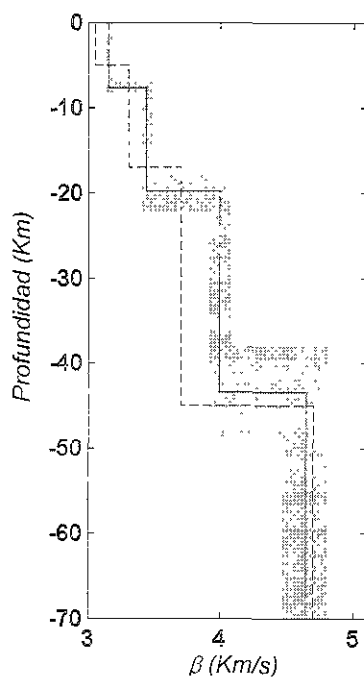


Figura 6.26 Modelo promedio (línea continua) y desviaciones estándar por parámetro resultados de la inversión con S.A.. Con línea discontinua se muestra el modelo de Campillo, 1996.

La respuesta teórica de este modelo promedio se muestra en la *figura 6.27*, donde se compara contra la respuesta teórica del modelo de Campillo y contra la banda de tolerancia. Comparando las figuras 6.22 y 6.26 es posible notar que ambos modelos promedio son muy similares entre sí, sin embargo, a pesar de que los criterios de aceptación de modelos fueron los mismos para ambos métodos de inversión, la incertidumbre (desviación estándar por parámetro) es notablemente mayor para la inversión con el método de S.A. que para la llevada a cabo con A.G.. Esto permite pensar que el espacio de soluciones fue mejor explorado con el método de S.A. que con el método de A.G..

Por otro lado debido al proceso acelerador para el método de A.G. descrito en la sección 5.3.2 paso 8, el método de A.G. tiene un importante ahorro en tiempo de cómputo con respecto al método de S.A. (aproximadamente el 30%).

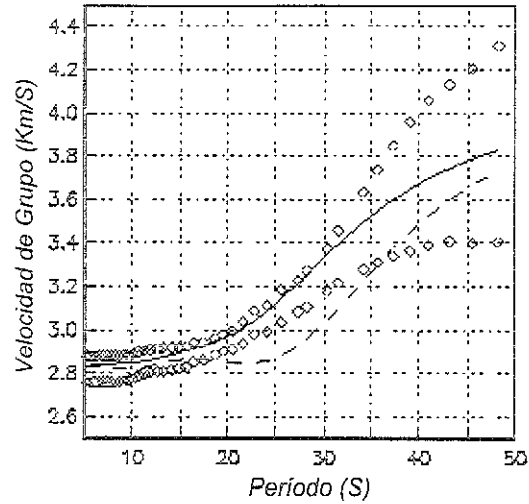


Figura 6.27 Respuesta teórica del modelo promedio (línea continua), comparada con la respuesta teórica del modelo de Campillo (línea discontinua). Con rombos la banda de tolerancia.

6.2.4.3 Combinación de los resultados de ambos métodos.

Los conjuntos de modelos aceptados de ambos métodos, fueron combinados para obtener una nube de modelos que contuviera ambos resultados. En la figura 6.28 se muestra dicha nube

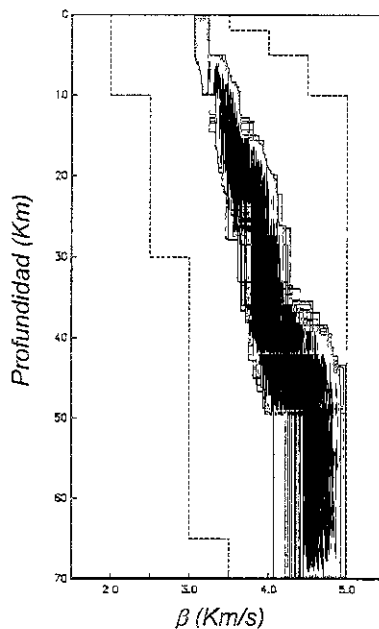


Figura 6.28 Nube de modelos resultante de la combinación de los conjuntos de modelos aceptados por los dos métodos de inversión.

También con esta nube de modelos fue posible calcular el modelo promedio, el cual, junto con las incertidumbres por parámetro, es mostrado en la *figura 6.29* donde nuevamente se compara con el modelo de Campillo.

Como era de esperarse este modelo promedio se parece bastante a los promedios obtenidos de los resultados de cada método por separado. Entonces podemos concluir que este modelo, es una posible aproximación de la corteza promedio entre la costa de Guerrero y Ciudad Universitaria. Sin embargo, de ninguna manera se puede descartar como posible solución cualquier otro modelo de los mostrados en la nube de la gráfica 6.28. Es posible suponer que también un modelo con un número diferente de capas que el aquí usado (3 capas y el semiespacio) pueda ser congruente con las observaciones.

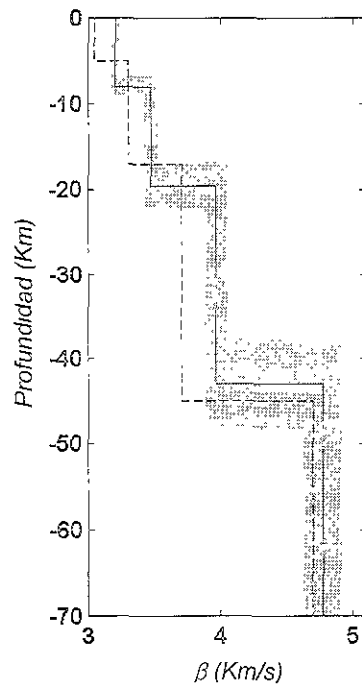


Figura 6.29 Modelo promedio (línea continua) y desviaciones estándar por parámetro resultados de la combinación de los conjuntos de modelos aceptados por el método de S.A. y A.G.. Con línea discontinua se muestra el modelo de Campillo et al., 1996.

6.2.5 Inversión de las curvas de dispersión observadas para la trayectoria 2.

La curva de dispersión observada para la trayectoria 2, es diferente que la observada para la trayectoria 1, por lo que los criterios de aceptación de los modelos en esta trayectoria fueron diferentes. Los criterios de aceptación de los modelos, en este caso, fueron: área de error $< 1 \times 10^{-6}$ y semejanza $< 3.5 \times 10^{-5}$.

6.2.5.1 Inversión con Algoritmos genéticos.

Los parámetros de la inversión en este caso se muestran en la *tabla 6.9*. Como se puede observar en ella, los valores límites para los parámetros (β y h) del problema directo, también en este caso contenían el modelo de *Campillo et al., 1996*; esto es debido a que no se cuenta con otro tipo de información a priori para la zona recorrida por las ondas superficiales sobre esta trayectoria.

PM=0.1, PC=1.0, Población =500, ITERMAX=200, err= 1×10^{-11} .				
Parámetro	Valor Mínimo	Intervalo de discretización	No. de Posibles Cambios.	Valor Máximo
β_1	2.00	0.05	31	3.50
β_2	2.50	0.05	31	4.00
β_3	3.00	0.05	31	4.50
β_4	3.50	0.05	31	5.00
h_1	5.00	0.10	31	8.00
h_2	5.00	0.50	32	20.0
h_3	10.0	1.00	26	35.0

Tabla 6.9 Parámetros de la inversión usados por el método de A.G. para la trayectoria 2.

En las *figuras 6.30 y 6.31* se presentan el conjunto de modelos aceptados durante el proceso de inversión con A.G.; y su respuesta teórica, respectivamente.

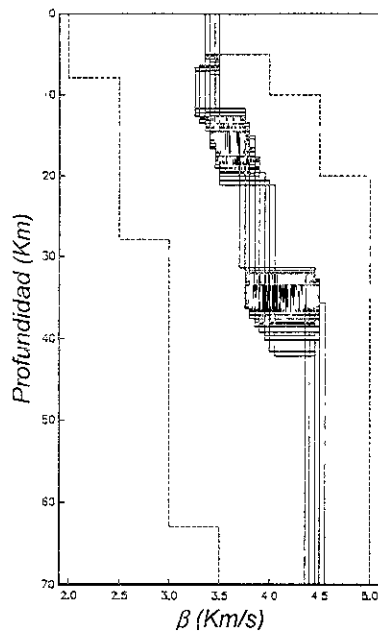


Figura 6.30 Conjunto de modelos aceptados durante el proceso de inversión con el método de A.G. para la trayectoria 2.

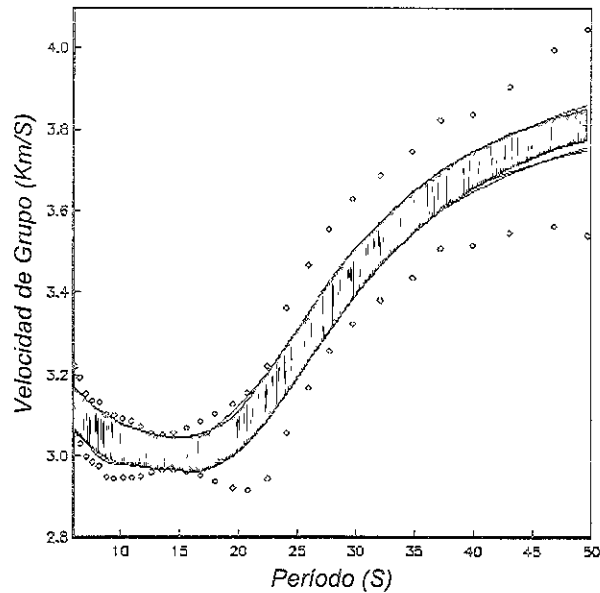


Figura 6.31 Con línea continua se muestra la respuesta teórica de todos los modelos aceptados durante la inversión con el método de A.G.. Con rombos se muestra la banda de incertidumbre para la trayectoria 2.

Para el conjunto de modelos mostrado en la figura 6.30 se calculó el modelo promedio, el cual se muestra, junto con las desviaciones estándar por parámetro, en la figura 6.32. En la figura 6.33 se presenta con línea continua la respuesta teórica de dicho modelo promedio, la cual está comparada contra la banda de tolerancia para la trayectoria 2.

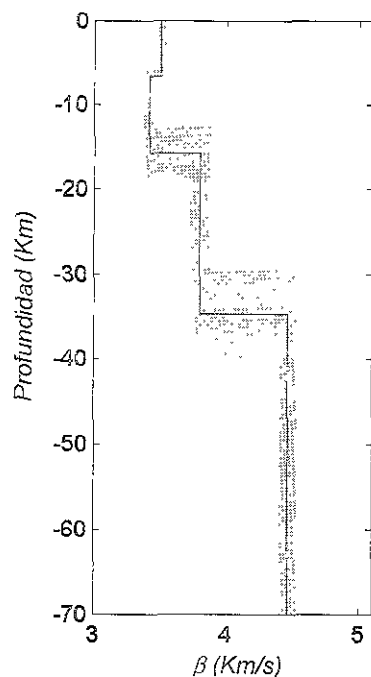


Figura 6.32 Modelo promedio y desviaciones estándar por parámetro resultados de la inversión con A.G. para la trayectoria 2.

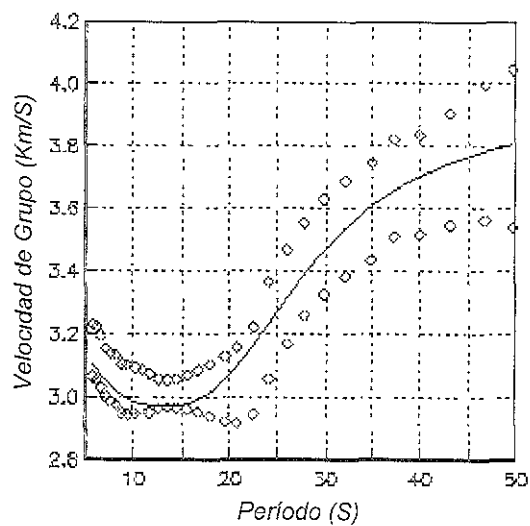


Figura 6.33 Respuesta teórica del modelo promedio mostrado en la figura 6.32. Con rombos, la banda de tolerancia para la trayectoria 2.

6.2.5.2 Inversión con Simulated annealing.

Para la inversión de la trayectoria 2 con el método S.A. se usaron los parámetros mostrados en la tabla 6.10. Cabe mencionar que los valores límites de espesores h y velocidades β fueron los mismos que los usados en el método de A.G.

$T_0=3$, $RT=0.9$, $n_1=5$, $n_2=7$, $err=1 \times 10^{-11}$, NQMAX=100000			
Parámetro	Valor Mínimo	Valor Máximo	VM
β_1	2.00	3.50	0.10
β_2	2.50	4.00	0.10
β_3	3.00	4.50	0.10
β_4	3.50	5.00	0.10
h_1	5.00	8.00	0.50
h_2	5.00	20.0	0.50
h_3	10.0	35.0	0.50

Tabla 6.9 Parámetros de la inversión usados por el método de S.A. para la trayectoria 2.

El conjunto de modelos aceptados durante el proceso de inversión con el método de S.A. se muestra en la *figura 6.34* y en la *figura 6.35* se muestra la respuesta teórica de cada uno de los modelos aceptados. El modelo promedio se presenta en la *figura 6.36*, donde también se muestran las desviaciones estándar para cada uno de los parámetros. En la *figura 6.37* se ha graficado la respuesta teórica del modelo promedio (línea continua), donde éste se compara contra la banda de tolerancia (rombos).

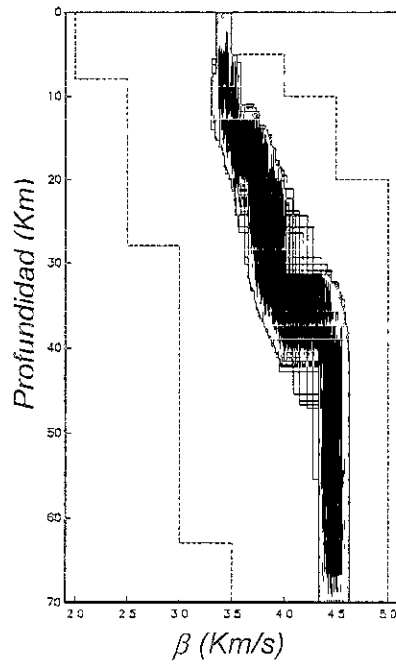


Figura 6.34 Conjunto de modelos aceptados durante el proceso de inversión con el método de inversión de S.A. Con línea discontinua, se grafican los límites de cada parámetro.

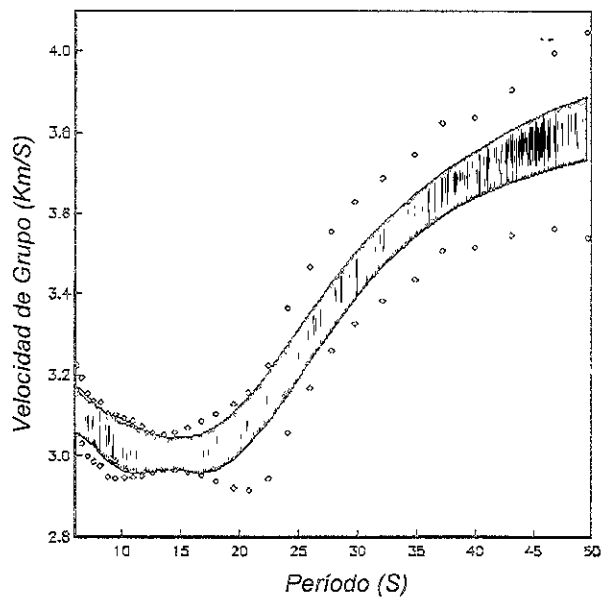


Figura 6.35 Respuesta teórica de cada uno de los modelos aceptados durante el proceso de inversión. Los rombos delimitan la banda de tolerancia.

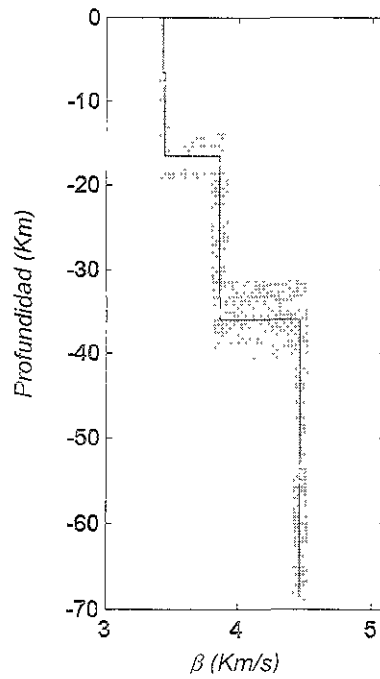


Figura 6.36 Modelo promedio y desviaciones estándar por parámetro, calculados a partir del conjunto de modelos aceptados con el método de S.A.

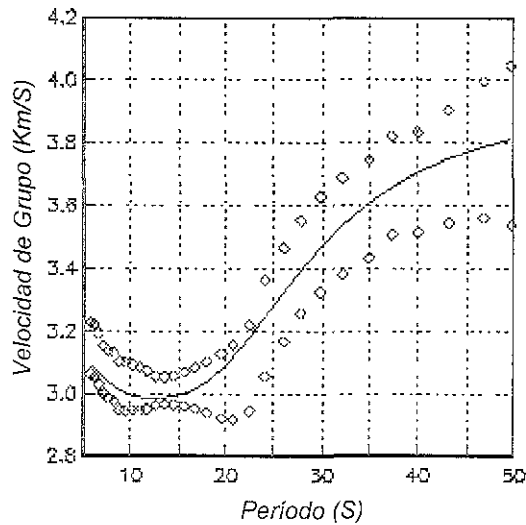


Figura 6.37 Respuesta teórica del modelo promedio mostrado en la figura 6.36.

Comparando las figuras 6.32 y 6.36, se puede concluir que el modelo promedio para los dos métodos es muy similar, aunque como sucedió para la trayectoria 1, la desviación estándar por parámetro es mayor para el resultado del método de S.A. que para A.G. y por lo tanto nuevamente se puede pensar que el

método de S.A. exploró mejor el espacio de soluciones que el método de A.G., ya que S.A. encontró una mayor cantidad de modelos alejados de la media. Es interesante notar que el contraste acústico entre la primera capa y la segunda es verdaderamente pequeño, por lo que se puede suponer que no existe un cambio notable en las propiedades acústicas de la corteza a esa profundidad

6.2.5.3 Combinación de los resultados de ambos métodos.

Para esta trayectoria también se combinaron los resultados de ambos métodos con el fin de obtener una solución mas confiable, en la figura 6.38 se muestra la nube de modelos que contiene los conjuntos de modelos aceptados por los dos métodos de inversión. En la figura 6.39 es presentado el modelo promedio calculado a partir de esta nube, también se muestran las desviaciones estándar por parámetro para dicho promedio.

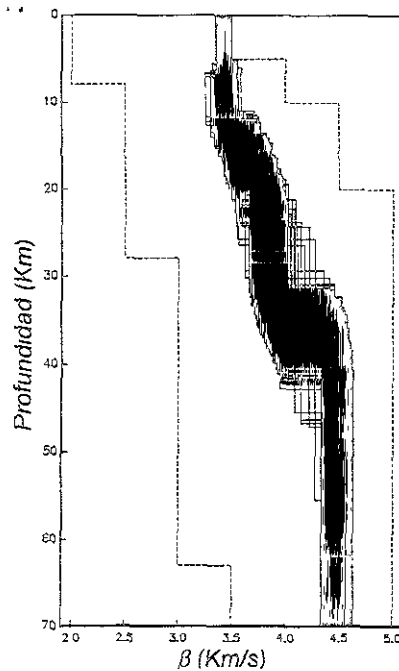


Figura 6.38 Nube de modelos resultado de la combinación del conjunto de modelos aceptados por S.A. y A.G.

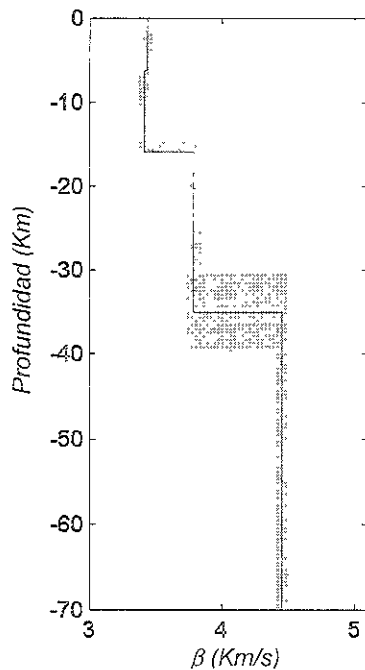


Figura 6.39 Modelo promedio calculado a partir de la nube de modelos mostrada en la figura 6.38. Se muestran también las desviaciones estándar por parámetro.

6.2.6 Discusión de los resultados para las trayectorias 1 y 2.

Como hemos mencionado, la curva observada para la trayectoria 1 difiere significativamente de la curva observada para la trayectoria 2, en la figura 6.40 se muestran las bandas de tolerancia de ambas curvas, con sombreado claro la observada para la trayectoria 1 y con sombreado oscuro la observada para la trayectoria 2

Dadas las observaciones, no es sorprendente que el proceso de inversión arroje modelos promedio también diferentes para ambas trayectorias. De hecho en trabajos previos se ha demostrado que existen fuertes diferencias cuando se estudian fenómenos como la atenuación a lo largo de la costa y perpendicular a ella (Cárdenas *et al.*, 1998). En la tabla 6.10 se han escrito los parámetros del modelo promedio resultante para ambas trayectorias y en la figura 6.41 se comparan gráficamente los dos modelos promedios.

La presencia de una capa de baja velocidad (≈ 3.2 Km/s) para la trayectoria 1, puede atribuirse a la presencia de una capa de calizas terciarias que se encuentra por debajo de los depósitos del eje neovolcánico y que aflora al sur de éste (López-Ramos, 1976). La velocidad correspondiente a esta capa podría estar sobrestimada

debido a que la trayectoria 1 atraviesa también una parte de los depósitos del sistema de volcanes correspondientes al eje neovolcánico. Estos depósitos tienen velocidades de propagación muy pequeñas (*Shapiro et al., 1997*), y podrían estar influyendo en la curva de dispersión observada para períodos cortos. La trayectoria 2 prácticamente no atraviesa la capa de calizas y mucho menos la capa de depósitos volcánicos mencionada. Es por esta razón que, para períodos cortos, la curva de dispersión observada para la trayectoria 2 presenta velocidades de grupo menores que la correspondiente a la trayectoria 1 (*figura 6.40*). Esto concuerda con los modelos arrojados por las diferentes inversiones de cada trayectoria, donde se puede observar (*figura 6.41*) que el modelo para la segunda trayectoria no presenta un contraste acústico importante en los primeros 15 Km., mientras que para la trayectoria 1 el resultado de las inversiones contempla una capa superficial de baja velocidad y aproximadamente 8 Km. de espesor.

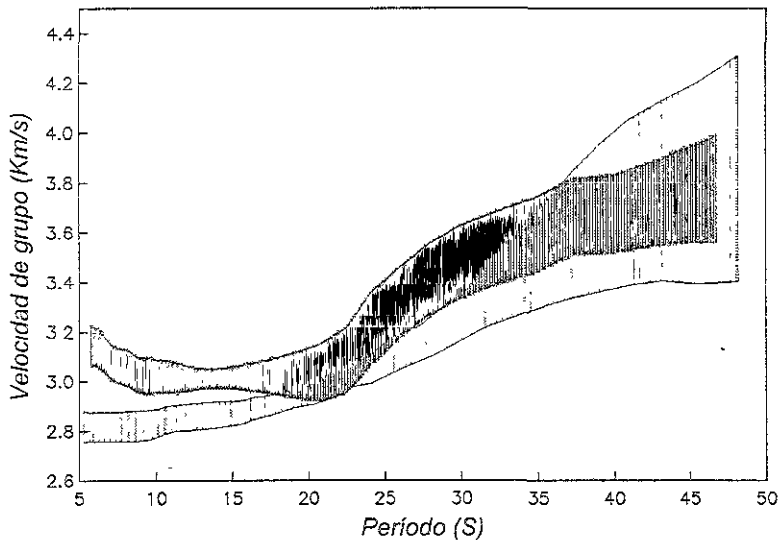


Figura 6.40 Comparación de las bandas de tolerancia para la trayectoria 1 (claro) y para la trayectoria 2 (oscuro).

El modelo para la trayectoria 2 indica que la profundidad del Moho es sensiblemente menor que para la trayectoria 1, esto estaría de acuerdo con la suposición de que la corteza continental se hace más delgada cerca de la costa (*Valdés et al., 1986*). Sin embargo, dadas las grandes incertidumbres en la parte

profunda de los modelos para la trayectoria 1 y 2 (figuras 6.29 y 6.39), los resultados promedio (figura 6.41) no son concluyentes a esta profundidad.

	Trayectoria 1		Trayectoria 2	
	β	h	β	h
Capa 1	3.16	7.72	3.43	6.54
Capa 2	3.43	12.04	3.44	10.10
Capa 3	3.91	23.21	3.86	19.34
Semiespacio	4.64	∞	4.46	∞

Tabla 6.10 Parámetros de los modelos promedio para ambas trayectorias resultados de las inversiones.

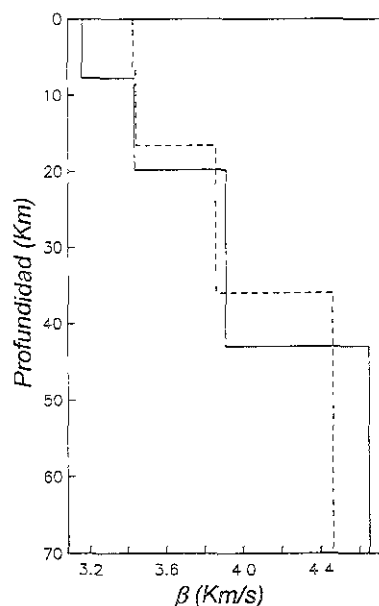


Figura 6.41 Comparación de los modelos promedio para ambas trayectorias. En línea continua el modelo promedio para la trayectoria 1. En línea discontinua el modelo promedio para la trayectoria 2.

A pesar del cuidadoso manejo que se hizo de los datos y del proceso de inversión, los resultados mostrados en este capítulo de ninguna manera son concluyentes, ya que, por un lado, los datos carecen de buena resolución para

algunas partes del modelo y por otro, el proceso de inversión no se puede calificar de infalible. Además las curvas de dispersión de velocidad de grupo, contienen información promedio entre el epicentro y la estación de registro, por lo que si esta última se encuentra a una distancia considerable (como es el caso de este trabajo) la curva de dispersión habrá muestreado con eficiencia, solamente la parte gruesa del modelo sin atender a los pequeños y medianos cambios laterales en las características elásticas de las rocas. Es por estas razones que se vuelve indispensable comparar los resultados tanto con modelos geofísicos previamente establecidos con la misma fuente de información (dispersión de ondas superficiales) como con otros resultados producto del análisis con otras fuentes independientes.

En el siguiente capítulo, se hará la comparación de los resultados mostrados en el presente, con algunos modelos obtenidos por otros trabajos.

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México.

VII.-Modelos Corticales Promedio

VII. MODELOS CORTICALES PROMEDIO

En el capítulo anterior se mostraron los resultados de la inversión de curvas de dispersión de velocidad de grupo para dos trayectorias diferentes localizadas en el sur de la República Mexicana (figuras 6.13 y 6.14). Este capítulo tiene por objetivo establecer una comparación entre los resultados mostrados en este trabajo y algunos modelos del sur de México presentados previamente por otros autores.

7.1 Comparación de los resultados con modelos previos.

En las últimas décadas estudios sismológicos en todo el mundo han sido usados para conocer la estructura cortical en diversas regiones del mundo; México no es la excepción.

J. E. Fix (*Fix, 1975*), usando sismos con epicentro en Chiapas y registrados en Arizona, invirtió curvas de dispersión de ondas superficiales y reportó un modelo promedio para la corteza terrestre a lo largo de los 2000 km. que comprende la trayectoria.

C. Valdés (*Valdés et al., 1986*), a partir de datos de refracción sísmica, analiza la estructura cortical de un perfil que atraviesa desde el norte de Puebla hasta la costa de Oaxaca. Sus resultados son corroborados por el ajuste de un perfil gravimétrico reportado previamente (*Couch y Woodcock, 1981*). Ellos presentan un modelo de tres capas para la corteza continental con un gradiente positivo para cada una de ellas con velocidades de ondas P que van de 4.3 a 4.6, 5.0 a 5.7, y de 6.85 a 7.0 km/s respectivamente.

Gomberg et al., 1988, invirtiendo curvas de dispersión de velocidad de fase, encontraron un modelo para la meseta central mexicana (Central Mexican Plateau), que consta de 4 capas sobre un semiespacio, donde se observa una capa delgada (2 Km) de muy baja velocidad (2.4 Km/s), descansando sobre otra capa de similar espesor y de 2.75 (Km/s).

M. Campillo y otros (Campillo et al., 1989), a raíz de los resultados de *Valdés et al., 1986*, propusieron un modelo cortical promedio entre la costa de Guerrero y la ciudad de México consistente de tres capas de 15 Km. cada una.

Campillo et al., 1996, invirtieron curvas de dispersión de velocidad de grupo con un apilado de 9 eventos con epicentro en la costa de Guerrero y registrados en la estación CUIG del S.S.N.. El modelo inicial de la inversión fue tomado de las

conclusiones del trabajo de *Campillo et al., 1989*. Como resultado de la inversión presentan un conjunto de modelos de tres capas, donde el modelo promedio de éste, difiere significativamente del modelo inicial. Dicho modelo promedio consta de tres capas de 5, 12 y 28 km. con velocidades de ondas S de 3.1, 3.3 y 3.75 km/s respectivamente, mientras que para el semiespacio la velocidad promedio fue de 4.75 km/s.

Fuentes (1997), analizó la estructura cortical para seis trayectorias diferentes trazadas con sismos ocurridos en Colima y Michoacán y registrados en estaciones ubicadas en Guerrero, Morelos, Oaxaca y D.F. Sus resultados muestran diferencias significativas para las diferentes trayectorias

N. Shapiro y otros (Shapiro et. al. 1997) analizaron las ondas superficiales empleando los registros de una red temporal diseñada como parte de un experimento sísmico en 1994. La red consistió de nueve instrumentos de banda ancha con tres componentes que fueron instalados a lo ancho del eje neovolcánico, desde Iguala hasta Teotihuacán. En una inversión de curvas de dispersión de velocidad de grupo para períodos entre 2 y 10 segundos, los autores distinguieron una capa superficial de baja velocidad (1.7 Km/s) al sur del eje neovolcánico, la cual, según las mismas observaciones, no estaría presente en la parte norte.

También, *V. Cruz (Cruz-Atienza, 1999)*, a través de la inversión de funciones de receptor, presenta modelos locales de corteza terrestre bajo CU, donde es posible observar una capa superficial de similares características que la propuesta por *Shapiro et al. (1997)*.

En el presente trabajo, debido a las frecuencias analizadas, no es posible tener resolución para capas delgadas, por lo que la capa superficial de muy baja velocidad reportada en los trabajos de *Shapiro et al., 1997* y *Cruz-Atienza, 1999* no es observada con los datos aquí usados.

Otro trabajo relevante para el estudio de esta zona fue el realizado por *Urrutia et al., 1996*. Ellos analizaron la anomalía gravimétrica de Bouguer, para una zona limitada por los 96° W, 106° W, 18° N y 21° N, a través de la cual trazan varios perfiles Norte-Sur y Este-Oeste. Uno de especial interés para el presente trabajo, es el trazado a través de los 19.7° y con dirección E-W. La inversión a través de un método iterativo de Marquardt arroja para dicho perfil, una profundidad promedio del

Moho de 43.3 ± 5.9 Km. Esta profundidad promedio concuerda de manera aceptable con los resultados presentados en este trabajo.

Los resultados mostrados en el capítulo VI concuerdan de manera aceptable con la mayoría de los trabajos previamente citados. Sin embargo, como se discutió en el final del mismo, los modelos promedio para las trayectorias 1 y 2, a pesar de usar períodos relativamente largos, muestran diferencias significativas que son explicables en el marco tectónico para cada trayectoria.

En la figura 7.1 se muestra una comparación de los resultados de este trabajo para las trayectorias 1 y 2 con los modelos: a) Modelo promedio de Campillo, 1996, b) Modelo obtenido por Fuentes, 1997, para la trayectoria (Copala - CUIG), c) Modelo promedio local para Ciudad Universitaria obtenido a partir de funciones de receptor para un apilado de eventos ocurridos en Sudamérica (Cruz-Atienza, 2000).

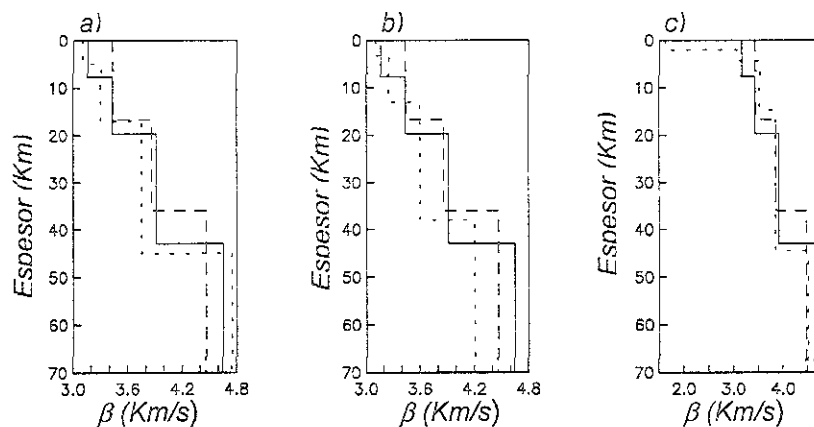


Figura 7.1 Comparación de los modelos para las trayectorias 1 (línea continua) y 2 (línea discontinua) y los modelos a) Campillo 1996, b) Fuentes, 1997 c) Cruz-Atienza, 2000 (línea punteada en cada caso).

Aplicación de algoritmos genéticos y simulated annealing para invertir la
dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza
terrestre en el sur de México.

VIII.-Conclusiones

VIII CONCLUSIONES

En el primer capítulo de este trabajo, se hizo una revisión somera de la teoría de la elastodinámica y se establecieron los elementos básicos de la propagación de ondas sísmicas. En el segundo capítulo se analizó la teoría que sustenta la propagación de las ondas superficiales, y el concepto de dispersión, además de algunas técnicas existentes para el cálculo de las curvas de dispersión. Enseguida, se abordó la teoría de inversión, enfocándose lo más posible a la inversión no lineal, ya que el problema que en este trabajo se aborda es de esta naturaleza. En el siguiente capítulo se analizaron dos métodos de inversión global que son finalmente los elegidos para llevar a cabo la inversión de las curvas de dispersión calculadas, tema que se analiza en el capítulo VII. Por último los resultados son comentados y comparados con aquellos provenientes de otros autores, previamente publicados.

En cuanto a las curvas de dispersión analizadas, es posible concluir que la técnica de apilado logarítmico (sección 3.6) es eficaz para obtener una curva promedio, que recoja en buena medida las observaciones consistentes de diversos registros y que además permita conocer la incertidumbre de la velocidad de grupo en ciertos períodos.

En este trabajo, se usaron dos trayectorias de estudio, una perpendicular a la línea de costa en dirección aproximada Norte-Sur (fig. 6.13) y otra oblicua a la anterior y semiparalela a la línea de costa (fig. 6.14).

En el caso de la trayectoria 1, se obtuvo una curva promedio muy parecida a la presentada por Campillo et al., 1996. Las diferencias entre ambas, se debe a que esta última no presentaba la corrección por el error sistemático en la estimación de la curva de dispersión de velocidad de grupo (Shapiro y Sing, 1999; sección 3.6.3 de este trabajo), mientras que la curva presentada en este trabajo si considera dicha corrección. En esta trayectoria, se observan incertidumbres considerables para períodos grandes, lo que provoca que el proceso de inversión no tenga buena resolución para los parámetros más relacionados con dichos períodos (velocidades y espesores de las últimas capas). Por otro lado sólo se analiza la dispersión para períodos mayores a cinco segundos, por lo que durante la inversión tampoco es posible tener gran resolución en las capas someras. Esta última razón, explica en parte la ausencia en los resultados de una capa superficial de muy baja velocidad (1.7 km/s) reportada en otros trabajos (p.ej. Gomberg et al. 1988; Shapiro et al., 1997

;Cruz-Atienza,2000). Sin embargo los datos son muy consistentes en el intervalo de períodos entre 5 y 30 segundos, lo que permite pensar que los resultados obtenidos para la parte intermedia del modelo (entre 5 y 25 Km. de profundidad) son bastante confiables. Los resultados para la trayectoria 1, confirman en buena medida aquellos publicados en *Campillo et al.,1996*. Las diferencias entre éste y aquel trabajo deben ser atribuidas a el método de medición de la curva de dispersión (*Shapiro y Singh, 1999 y Sección 3.6.3*). Por otro lado en dicho trabajo se usó un método de inversión lineal, seguido de un proceso aleatorio de perturbación de cada parámetro generando así un nuevo modelo. Para el nuevo modelo se calculaba la curva de dispersión y si ésta caía dentro de la banda de incertidumbre se aceptaba el modelo. Este proceso difiere en buena medida de los usados en el presente trabajo, ya que los procesos de A.G. y S.A. tienen la capacidad de guiar la búsqueda hacia los mínimos globales.

Por otro lado y a pesar de contar con pocos datos, se pudo obtener a través de la técnica de apilado logarítmico una curva de dispersión consistente para la trayectoria 2, la cual es considerablemente diferente en ciertos períodos a la curva observada en la trayectoria 1 (ver *figura 6.40*). Por ejemplo entre los 5 y los 18 segundos se observa una diferencia importante, lo que permite sin duda pensar en la existencia de cuando menos una capa de diferentes características en la parte somera del modelo. Para períodos grandes (entre los 35 y los 48 segundos), se observa que la incertidumbre de la curva para la trayectoria 1 es tan grande que abarca por completo la banda de tolerancia de la curva para la trayectoria 2, de ahí, que a pesar de que las profundidades promedio del moho arrojadas por la inversión sean diferentes para ambos modelos, no se pueda concluir con gran certeza al respecto (ver *capítulo 7*). Estos resultados muestran que para la trayectoria 2 no existe una diferencia notable en la velocidad de la primera capa con respecto a la velocidad de la segunda, por lo que el modelo podría ser simplificado a solo dos capas sobre el semiespacio. La ausencia de la capa somera de baja velocidad, para la trayectoria 2, puede ser explicada con el hecho de que esta trayectoria no atraviesa la capa de calizas reportada en trabajos anteriores (P.ej. *López Ramos, 1976; Valdés et al.,1986*).

Para poder ampliar nuestro conocimiento sobre la estructura sísmica de la corteza terrestre bajo nuestro país es necesario analizar otras trayectorias (además de las planteadas aquí). Una trayectoria de especial interés, es aquella que recorren

las ondas desde la zona de Zihuatanejo, hasta la ciudad de Oaxaca, Oax. Dado que esta trayectoria es también paralela a la línea de costa (*figura 8.1*), podríamos esperar que la curva de dispersión apilada fuera muy parecida a la curva observada en la trayectoria 2. Sin embargo, en la *figura 8.2* se puede apreciar que esto no se cumple. Las diferencias pueden deberse a diversos factores entre los que se encuentran el error que se comete en la estimación del tiempo de grupo debido a la profundidad de la fuente (*Leshvin, et al., 1999*) o la presencia de un cuerpo litológico contrastante entre otros. Encontrar la, o las razones correctas que provocan esta diferencia puede ser el objetivo de un posterior trabajo.

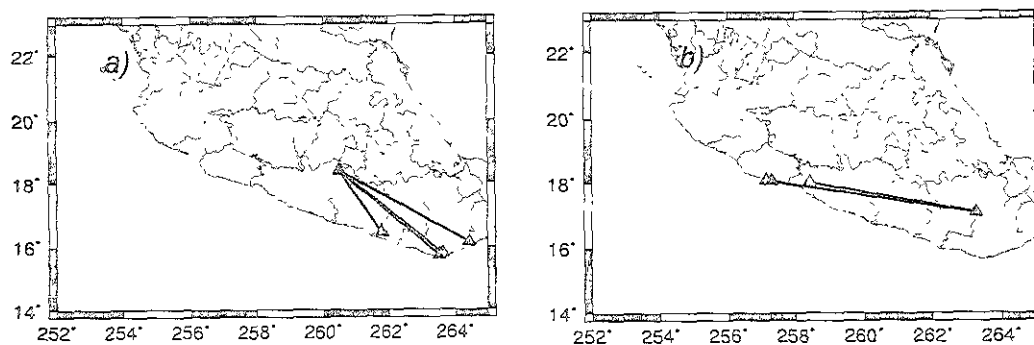


Figura 8.1 a) Trayectoria Huatulco-Iguala, b) Trayectoria Zihuatanejo-Oaxaca.

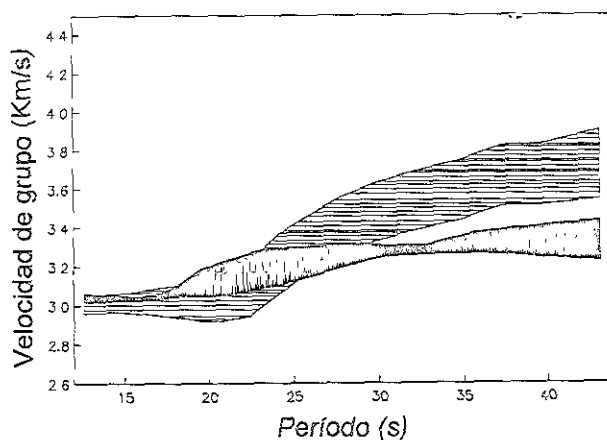


Figura 8.2 Bandas de tolerancia para las trayectorias Zihuatanejo-Oaxaca (sólido) y Trayectoria Huatulco-Iguala (líneas).

A la luz de los resultados arrojados por este trabajo, y de otros previos basados en métodos similares, es posible establecer que la inversión de curvas de

dispersión de velocidad de grupo es un método que, por si sólo, no permite conocer algunos detalles someros o muy finos sobre la distribución de velocidades sísmicas de la corteza terrestre, y siempre será necesario comparar los resultados con otras técnicas geofísicas independientes.

Dada la anterior conclusión, es posible pensar en una metodología que pudiera combinar dos o más técnicas que por separado arrojan diferentes características de la corteza, y que conjuntadas podrían arrojar resultados más veraces. Con este objetivo se propone, para futuras investigaciones, una inversión conjunta de funciones de receptor y curvas de dispersión de velocidad de fase. Una función de receptor es una señal de tiempo-amplitud, resultado de una deconvolución de las componentes radial entre vertical de un sismograma con ciertas características. Esta señal permite tener información local de un modelo de corteza (*analizada en las frecuencias adecuadas*), la cual pudiera ser calibrada o restringida por una curva promedio de velocidad fase entre dos estaciones cercanas. Esta última a diferencia de una curva de dispersión de velocidad de grupo, contiene información promedio de la litología entre ambas estaciones, y no información promedio entre una estación y el epicentro. Dada la naturaleza no lineal de ambos problemas (funciones de receptor y curvas de dispersión), es posible pensar en un esquema de inversión global como los presentados en este trabajo.

Por otra parte, en tanto a los métodos de optimización utilizados en este trabajo, se puede concluir que ambos métodos (simulated annealing y algoritmos genéticos) son apropiados para invertir problemas no lineales como el aquí analizado.

La probabilidad de mutación dinámica (*Yamanaka et al., 1996*) es un procedimiento, dentro del método de A.G., que permite evitar, en cierta medida, la homogeneización prematura. Esta consiste de determinar la probabilidad de mutación en función de que tan homogénea es la población en cierto estado del proceso, entre mayor sea la cantidad de modelos cuyos parámetros se parecen entre sí, será mayor la probabilidad de mutación para toda una generación. La implementación de este procedimiento en el algoritmo usado sin duda fue una herramienta importante para la mejor convergencia del proceso. Por otro lado, en el algoritmo genético usado se consideró una importante modificación descrita en la sección 5.3.2 sección 8, que consiste en reducir de manera importante el número de cálculos del problema directo.

Debido a lo anterior, comparando ambos métodos, se puede decir que algoritmos genéticos es un método cuando menos 30 % más rápido que *simulated annealing*. Sin embargo, este último tiene la ventaja de hacer una exploración más detallada del espacio de soluciones, esto debido a que este método tiene la capacidad de ajustar el paso de búsqueda, ventaja importante sobre el método basado en procedimientos genéticos.

Las anteriores observaciones permiten pensar en el diseño de un método híbrido que pudiera conjuntar las ventajas de ambos procedimientos. Un posible esquema de este método híbrido podría consistir en un proceso de algoritmos genéticos con pocas iteraciones, donde la selección esté determinada por el criterio de *Metropolis* a una temperatura inicial alta. Con el mejor modelo obtenido por este pequeño proceso de A.G. se iniciará un proceso de S.A. hasta obtener un número determinado de modelos aceptados (el mismo que la generación inicial de A.G.). Con estos modelos se iniciará nuevamente un proceso de A.G., disminuyendo ligeramente la temperatura, y se repetirá el mismo esquema hasta alcanzar el criterio de convergencia establecido.

Dado que las generaciones de A.G. son muy pequeñas, la población rápidamente tenderá a homogeneizarse, de tal manera que cuando esto suceda se ahorrará una buena cantidad de tiempo, ya que cuando un modelo se repite en la generación presente o en la inmediata anterior, no es necesario calcular nuevamente el problema directo. Por otro lado, con este esquema se podría aprovechar la capacidad de S.A. para autoajustar el paso de búsqueda de acuerdo al estado del proceso. Este esquema, entonces, podría ser tan eficiente (en tiempo) como A.G. pero con la gran ventaja de hacer una búsqueda más detallada del espacio de soluciones (capacidad intrínseca de S.A.).

BIBLIOGRAFÍA

AKI K. y P.G. Richards (1980). Quantitative Seismology. *W.H. Freeman and Co.*, St. Francisco, Cal.,USA. Vols. I y II

Arreguín-López, M.A. (1996) Análisis e inversión de ondas superficiales a partir de datos de refracción sísmica en la cuenca de la ciudad de México. *Tesis de Licenciatura*. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Berteussen, K. A. (1977). Moho depth determination based on spectral ratio analysis of NORSAR long-period P waves. *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 31, 313-326.

Bouchon, M. y K. Aki. (1977). Discrete wavenumber representation of seismic source wave fields, *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 67, 259-277.

Campillo, M.; S.K. Sing; N. Shapiro, J. Pacheco, and R.B. Hermann (1996). Crustal structure of the Mexican volcanic belt, based on group velocity dispersion. *Geofísica Internacional* , Vol. 35, No.4, 361-370.

Campillo, M., J.C. Gariel, K. Aki y F.J. Sánchez-Sesma (1989). Destructive strong ground motion in Mexico City: Source, site and path effects during the great 1985 Michoacán earthquake. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 79, 1718-1735.

Cárdenas, M. F. Núñez-Cornú, J. Lermo, D. Córdoba, A. González (1998). Seismic Energy attenuation in the region between the coast of Guerrero and México City: differences between paths along and perpendicular to the coast. *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 105, 47-57.

Chávez-Pérez S. y C. Calderón-Macías (1991). Inversión Lineal de Ondas Superficiales. Segundo Informe Técnico de Avance al Departamento del Distrito Federal. *Centro de Investigación Sísmica, A.C. de la Fundación Javier Barros Sierra, A.C. Pp.71-83.*

Chávez-García, F.J., J. Ramos-Martínez y E. Romero-Jiménez (1995). Surface-Wave dispersion analysis in Mexico City. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 85, 1116-1126.

Cruz, V.M. (2000). Inversión global con algoritmos genéticos y cristalización simulada, aplicada a funciones de receptor: modelos estructurales de velocidades, para la corteza terrestre de la parte centro-sur de México. *Tesis de Licenciatura*. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Couch R. y S. Woodcock (1981). Gravity and structure of the continental margins of southwestern Mexico and northwestern Guatemala. *J. Geophys. Res.* Vol 86, 1829-1840.

Dziewonsky A., S. Bloch y M. Landisman (1969). A technique for the Analysis of Transient Seismic Signals. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 59, 427-444.

Field, Edward H. y Klaus Jacob (1995). A Comparison and Test of Various Site-Response Estimation Techniques, Including of Various Site-Response Estimation Techniques, Including three that are not Reference-Site Dependent. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 85, 1127-1143.

Fix, J.E. (1975). The Crust and upper mantle of central Mexico. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* Vol.43, 453-499.

Fong Y.C.(1965) Foundations of solid mechanics. *Prentice-Hall*, New Jersey.

Fuentes, C., 1997. Determinación de la estructura cortical para el Sur de México utilizando dispersión de ondas superficiales. *Tesis de Maestría*. Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Graybill, F.A. (1969). Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth. Publishing Co. Inc., Belmont.

Gallagher K., M. Sambridge y G. Drijkoningen (1991). Genetic Algorithms: An evolution from Montecarlo methods for strongly non-linear geophysical optimization problems. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 108, 281-292.

Goffe, Bill; Ferrier y Rogers, 1994, Global Optimization of Statistical Functions with Simulated Annealing. *Journal of Econometrics*, Vol. 60, 65-100.

Goldberg D.E. (1989) . Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison Wesley. Reading. Massachusetts.

Gomberg, J.S., K. F. Priestley, G. Masters y J. N. Brune (1988). The structure of the crust and upper mantle of northern Mexico. *Geophys. J.*, Vol. 94, 1-20.

Gómez-González, J.M., y C. Calderón-Macias (1992). Extracción de curvas de dispersión en el dominio (p - ω) con datos de refracción sísmica, *Boletín del Centro de Investigación Sísmica, Fundación Javier Barros Sierra*. Vol. 2, 3-16

Herrmann,R.B. (1987). Computer Programs in Seismology, Volume IV: Surface Waves, *Saint Louis University*, Missouri.

Holland, John (1992), Genetic Algorithms, *Scientific American*, July, 44-50

Jackson, D.D.(1972). Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, Vol. 28, 97-109

Graybill, F.A. (1969). Introduction to Matrices with Applications in Statistics, *Wadsworth Publishing Co. Inc.*, Belmont.

Kennett B.L.N. y N.J. Kerry (1979). Seismic waves in a stratified half space. *Geophys. J.R. astr. Soc.* Vol. 57, 557-583.

Keilis-Borok V.I. (ed.) (1989). Seismic Surface Waves in a Laterally Inhomogeneous Earth. *Kluwer Academic Publishers*. The Netherlands.

Kirkpatrick, S.; C.D. Gellat Jr. y M.P. Vecchi (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, Vol. ,220, 671-680.

Lay, T. Y T.C. Wallace (1995) Modern Global Seismology. Edit. *Academic Press*.
St. Diego, Cal., USA

Levenberg, K. (1944). A Method for the solution of certain nonlinear Problems in
least squares, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 2, 164-168.

Levshin, A., M.H. Ritzwoller y J.S. Reovsky(1999). Source Effects on Surface
Wave Group Travel Times and Group Velocity Maps. *Phys. Earth Planet. Inter*, Sometido.

Lines, L.R. y S. Treitel (1984). Tutorial, A review of Least -Squares Inversion and
its Application to Geophysical Problems. *Geophysical Prospecting*, Vol. 32, 159-186

Lomax, A. Y R. Sneider (1995) The contrast in upper mantle shear-wave velocity
between the East European Platform and tectonic Europe obtained with genetic algorithm
inversion of Rayleigh-wave group dispersion. *Geophys. J. Int. Vol.123*, 169-182.

López Ramos (1976). Carta Geológica de México. *UNAM*, México.

Marquardt, D.W. (1963). An algorithm for least estimation of non-linear parameters
Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics Vol. 1, 431-441

McMehan G. y M. J. Yedlin (1981). Analysis of dispersive waves by wave field
transformation. *Geophysics*. Vol. 46, 869-874.

Menke, William (1984). Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory.
Academic Press, Inc. Orlando.

Keilis-Borok, V.I.(1989). Seismic Surface Waves in a Laterally Inhomogeneous
Earth. Ed. Kluwer, Netherland.

Oldrich Novotný (1976). Methods of Computing the Partial Derivates of Dispersion
Curves. *Pageoph*, Vol. 114, 765-774

Rodriguez-Zúñiga J.L. E. Romero-Jiménez, J. Ramos-Martínez Y J.M. Gómez-González.(1995). Dispersión de ondas superficiales y atenuación sísmica en la zona de lago de la cuenca de México. *Unión Geofísica Mexicana. Monografía No. 2.* 131-142.

Rothman D.H. (1985). Nonlinear inversion, statistical mechanics, and residual statics estimation. *Geophysics*, Vol. 50, 2784-2796.

Rothman D.H. (1986). Automatic estimation of large residual static corrections. *Geophysics*, Vol. 51, 332-346

Russell D., R.B. Herrmann y H. Hwang (1988). Application of frequency variable filters to surface-wave amplitude analysis. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 78, 339-354

Ruthen R.(1993). Adapting to complexity. *Scientific American. Enero.*

Sambridge, Malcolm, and Guy Drijoningen,1992. Genetic algorithms in seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.*, Vol. 109, 323-342

Sánchez-Sesma F.J. Apuntes de Física de Ondas y Sismología (no publicados). 1-84

Sen, M.K., y Stoffa, P.L., 1991, Nonlinear one-dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing. *Geophysics*, Vol. 56, 1624-1638.

Sen, M.K., and Stoffa, P.L., 1992, Rapid sampling of model space using genetic algorithms: examples from seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.*, Vol. 108, 281-292.

Sen, M.K., B. Bimalendu, and P.L., Stoffa, 1993, Nonlinear inversion of resistivity sounding data. *Geophysics*, Vol. 58, No.4, 1-12.

Shapiro, N. ; M. Campillo; A. Paul; S.K. Singh; D. Jongmans y F.J. Sánchez-Sesma, 1997. Surface-wave propagation across the Mexican Volcanic Belt and the origin of the long-period seismic-wave amplification in the Valley of Mexico. *Geophys. J. Int.*,

Shapiro N.M. y S.K. Singh (1999). A Systematic error in Estimating Surface-Wave Group-Velocity Dispersion Curves and a Procedure for its Correction. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 89, 1138-1142.

Shibutani T. M. Sambridge y B. Kennett (1996). Genetic algorithm inversion for receiver functions with application to crust and uppermostmantle structure beneath Eastern Australia. *Geoph. Res. Let.* Vol. 23, 1829-1832.

Tarantola, A. Y B. Valette (1982). Inverse Problems = Quest for information. *J. Geophys.* Vol. 50, 159-170.

Tarantola, A. Y B. Valette (1982). Generalized Nonlinear Inverse Problems Using the Least Squares Criterion *Rev. Geophys. and Space Phys.* Vol. 20, 219-232.

Urrutia-Fucogauchi, J. and J. H. Flores-Ruiz (1996). Bouguer Gravity Anomalies and Regional Crustal Structure in Central Mexico. *International Geology Review*, Vol. 38, 176-194.

Valdés, C. M., W. D. Mooney, S. K. Singh, R. P. Mayer, C. Lomnitz, J. H. Luetgert, B. T. Helsley, B. T. R. Lewis y M. Mena. (1986). Crustal structure of Oaxaca, Mexico from seismic refraction measurements. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 76, 547-564.

Vasudevan, Kris; William G. Wilson and, William G. Laidlaw (1991), Simulated annealing statics computation using an order-based energy function. *Geophysics*, Vol. 56, 1831-1839.

Yamanaka, H. y H. Ishida (1996). Application of Genetic Algorithms to an Inversion of Surface-Wave Dispersion Data. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 86, 436-444.

Zhou, Ran, Fumiko Tajima, and Paul L. Stoffa, 1995. Application of genetic algorithms to constrain near-source velocity structure for the 1989 Sichuan Earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 85, 590-605.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Centro de Investigación Sísmica, a su director el Ing. Luis Vieitez Utesa y a José Luis Rodríguez Zúñiga por abrirme las puertas a la Investigación.

Al Dr. Javier F. Pacheco Alvarado Jefe del S.S.N. y al Dr. Sri Krishna Singh Jefe del departamento de Sismología del Instituto de Geofísica por sus comentarios y por todas las facilidades para la realización de este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por proporcionarme los elementos necesarios para mi formación.

A Francisco Sánchez Sesma y Javier Lermo Samaniego por sus valiosos comentarios en torno a esta tesis.

Este trabajo fue patrocinado parcialmente por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y la Secretaría de Obras del Distrito Federal.