

61

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INVERSIÓN GLOBAL CON ALGORITMOS GENÉTICOS Y
CRISTALIZACIÓN SIMULADA, APLICADA A FUNCIONES DE
RECEPTOR: MODELOS ESTRUCTURALES DE VELOCIDADES
PARA LA CORTEZA EN LA REPÚBLICA MEXICANA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
INGENIERO GEOFÍSICO

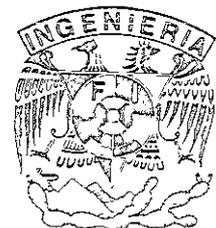
PRESENTA:

VÍCTOR MANUEL CRUZ ATIENZA

DIRECTOR M C JOSE LUIS RODRIGUEZ ZÚÑIGA

MÉXICO, D.F.

Febrero del 2000





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-I-170

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

SR. VICTOR MANUEL CRUZ ATIENZA
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M.C. José Luis Rodríguez Zúñiga y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Geofísico:

INVERSION GLOBAL CON ALGORITMOS GENETICOS Y CRISTALIZACION SIMULADA,
APLICADA A FUNCIONES DE RECEPTOR: MODELOS ESTRUCTURALES DE VELOCIDADES
PARA LA CORTEZA EN LA REPUBLICA MEXICANA

RESUMEN
INTRODUCCION

I ASPECTOS TEORICOS SOBRE LA FISICA DE LAS ONDAS Y LOS SISTEMAS LINEALES

II FASES SISMICAS EN EL INTERIOR DE LA TIERRA

III DECONVOLUCION DE COMPONENTES (H/V): FUNCIONES DE RECEPTOR

IV TEORIA DE INVERSION EN GEOFISICA: METODOS LOCALES VS. METODOS GLOBALES

V ALGORITMOS GENETICOS Y CRISTALIZACION SIMULADA COMO METODOS DE INVERSION GLOBAL

VI INVERSION DE FUNCIONES DE RECEPTOR CON ALGORITMOS GENETICOS Y CRISTALIZACION SIMULADA

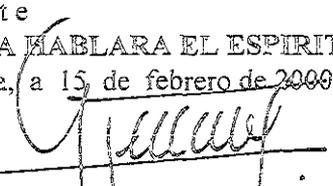
VII COMPARACION DE RESULTADOS CON OTRAS FUENTES DE INFORMACION GEOFISICA

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS
BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 15 de febrero de 2000
EL DIRECTOR


ING. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB*RLLR*gtg

INVERSIÓN GLOBAL CON ALGORITMOS GENÉTICOS Y
CRISTALIZACIÓN SIMULADA, APLICADA A FUNCIONES DE
RECEPTOR: MODELOS ESTRUCTURALES DE VELOCIDADES
PARA LA CORTEZA EN LA REPÚBLICA MEXICANA.

Victor Manuel Cruz Atienza

Febrero del 2000

- *Tierra santa madre Tierra -*
(romance)

*Se dice que cuando vino
por vez primera el hombre,
la Tierra, vieja y sabia,
tembló cual tul de cobre.*

*Unos cuentan que su miedo
a la duda sucumbía
que al hombre, pobre hombre,
sus adentros corroía.*

- *Tierra celeste y bronce,
déjanos palpar tu vientre,
que si no hoy, será mañana,
que logremos conocerte.*

*Del misterio no sabía
hasta entonces nadie nada.
Sin embargo, ya temía
que por dentro la miraran.*

- *Con el alba que clarea,
por montañas y cañadas,
herrarás hasta el cansancio
sin lograr asir mi alma.*

*Testarudo, casi ciego,
con sus ojos a lo lejos,
hombre terco ya con canas
columbró su esqueleto.*

- *Tierra santa madre Tierra,
¿era este tu tesoro?,
cuantos años han pasado,
vale más la luz del oro.*

*Lo que él ya nunca supo,
hombre ciego, hombre tonto,
es que esa Tierra hermosa
no era algo, sino todo.*

Victor Manuel Cruz Atienza.

ÍNDICE GENERAL

Resumen 6

Introducción 7

1	Aspectos teóricos sobre la física de las ondas y los sistemas lineales 9
1.1	Teoría de esfuerzos 10
	i) El medio continuo 10
	ii) Concepto de esfuerzo 11
	iii) Tensor de esfuerzos 13
	iv) Fórmula de Cauchy 14
	v) Simetría del tensor de esfuerzos 17
1.2	Teoría de deformaciones 20
	i) Concepto de deformación 20
	ii) Tensor de deformaciones 21
	iii) Tensor de deformaciones en coordenadas cartesianas 24
1.3	Teoría de la elasticidad 26
	i) Ecuaciones constitutivas 26
	ii) Ley de Hooke y módulos elásticos 26
	iii) Ecuación de Navier 28
1.4	Propagación de ondas 32
	i) Solución de la ecuación de onda 32
	ii) Ondas de cuerpo y funciones potenciales del desplazamiento 35
	iii) Principio de Fermat y Ley de Snell 38
	iv) Ondas SH en una interfase 42
	v) Ondas P y SV en una interfase 48

- 1.5 **Sistemas lineales** 52
 - i) Transformada de Fourier 52
 - ii) Convolución 55
 - iii) Sistemas lineales 57
 - iv) Deconvolución 59

2 Fases sísmicas en el interior de la Tierra 61

- 2.1 **Fases sísmicas** 62
- 2.2 **Modelos globales terrestres** 63
- 2.3 **Nomenclatura de las ondas de cuerpo** 65

3 Deconvolución de componentes (H/V): Funciones de Receptor 70

- 3.1 **Funciones de receptor** 71
 - i) Introducción, modelos heterogéneos 71
 - ii) Antecedentes del fenómeno modelado 72
 - iii) Ecuación de registros telesísmicos 73
 - iv) Análisis del contenido de una función de receptor 76
- 3.2 **Estructuras inclinadas** 79
- 3.3 **Identificación de fases** 82

4	Teoría de inversión en geofísica: métodos locales vs. métodos globales	89
----------	---	-----------

4.1	Introducción, determinación de la estructura terrestre	90
4.2	Teoría de inversión	92
	i) Teoría de inversión	92
	ii) Formulación de un problema inverso	93
	iii) Problema inverso lineal	95
4.3	Solución por mínimos cuadrados	99
4.4	Métodos de búsqueda local	103
	i) Solución de sistemas de ecuaciones	104
	ii) Modelado de funciones de receptor con métodos locales	113
4.5	Métodos de búsqueda global	116

5	Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada como métodos de inversión global	121
----------	--	------------

5.1	Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithms)	124
	i) Principios e historia	124
	ii) El método	125
5.2	Cristalización Simulada (Simulated Annealing)	135
	i) Principios e historia	135
	ii) El método	136

6 Inversión de Funciones de Receptor con Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada 142

- 6.1 Introducción 144
- 6.2 Los datos 146
- 6.3 Selección de modelos considerando el error en los datos 149
- 6.4 Inversión sintética 152
- 6.5 Estación Zacatecas (ZAIG) 156
 - i) Marco geológico 156
 - ii) Inversión individual de los tres grupos de eventos 158
 - iii) Inversión simultánea de los tres grupos de eventos 163
- 6.6 Estación Ciudad Universitaria (CUIG) 167
 - i) Marco geológico 167
 - ii) Inversión simultánea de los cuatro grupos de eventos 168
 - iii) Inversión individual de los cuatro grupos de eventos 174
- 6.7 Estación Tuzandépetl (TUIG) 187
 - i) Marco geológico 187
 - ii) Inversión del apilado de Sudamérica 187

7 Comparación de resultados con otras fuentes de información geofísica 193

- 7.1 Comparación en Zacatecas (ZAIG) 194
- 7.2 Comparación en Ciudad Universitaria (CUIG) 196
- 7.3 Comparación en Tuzandépetl (TUIG) 199

Resumen

Este trabajo puede dividirse en dos grandes secciones. Una abarca del capítulo primero al quinto, y la otra del sexto a las conclusiones. En la primera sección se exponen las bases teóricas empleadas en la investigación que encierra la segunda. En esta última, se reúne el tratamiento de los datos a partir de los cuales se desprendieron todos los resultados e inferencias propuestas y discutidas al final.

En los capítulos teóricos, que son precisamente los que comprende la primer sección, se expusieron, entre otros temas: la teoría de la elasticidad, la física de las ondas, los sistemas lineales, la estructura global de nuestro planeta, las funciones de receptor, la teoría de inversión, la solución de sistemas de ecuaciones, y los métodos de optimización global utilizados en la investigación (Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada). De esta manera se conformó un extenso marco teórico que soporta y justifica cada herramienta utilizada, así como cada supuesto hecho durante la investigación.

A partir de los registros telesísmicos compilados en tres estaciones del Servicio Sismológico Nacional: Zacatecas (ZAIG), Ciudad Universitaria (CUIG), y Tuzandépetl (TUIG), se construyeron series de tiempo denominadas "funciones de receptor", cuya característica principal es la de poseer exclusivamente la información sísmica proveniente de la estructura geológica localizada abajo del receptor. Empleando dos esquemas de optimización global, Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada, se modelaron dichas funciones resolviendo el problema inverso formulado con esa finalidad. Los resultados fueron tres diferentes modelos estructurales de velocidades de propagación, espesores de capas, y relaciones de Poisson para la corteza y el manto superior, uno para cada sitio. Al final, se compararon entre sí dichos modelos, y con aquéllos propuestos anteriormente por otros autores para las respectivas regiones de la República Mexicana.

Introducción

Conocer el interior de la Tierra es uno de los principales propósitos de un sismólogo. Existen muchas respuestas a la pregunta: ¿cómo es y cómo funciona nuestro planeta?. La búsqueda incesante de nuevos métodos que provean mayor certidumbre y veracidad a esas respuestas, ha permitido desechar hipótesis que en otro momento se tomaron como explicaciones verosímiles y por ello convincentes. El avance de la teoría y de las técnicas, aun en un período de *ciencia normal*¹ como el que atraviesa actualmente la sismología, ha permitido a los sismólogos deslindar y entender fenómenos con gran claridad argumentando explicaciones mucho más sólidas cada vez.

Hasta ahora el hombre ha sido incapaz de conocer, a través de observaciones directas, la manera como está conformado nuestro planeta a profundidades mayores de ~20 km. Desde hace mucho tiempo se han buscado alternativas que permitan salvar esta dificultad. Es bien sabido que la sismología constituye una de las disciplinas mejor dotadas de recursos para encontrar respuestas a la pregunta expuesta en el párrafo anterior. Esfuerzos encaminados a responderla, cuando menos en lo que respecta a la estructura de la corteza y el manto superior, han permitido el diseño de metodologías que facilitan el modelado de dichas regiones. Por bien fundamentadas que sean, ninguna se libra de las dificultades que se presentan al modelar un fenómeno físico. Esto se debe a los supuestos y omisiones teóricas de los cuales necesariamente tuvieron que partir para poder constituirse. En términos matemáticos, una de las consecuencias inmediatas de éste y otros agentes inherentes al modelado de fenómenos físicos, es el comportamiento no lineal de los modelos teóricos que los predicen. De ahí que, para poderlos manipular y aprovechar al máximo, se requiera de herramientas numéricas poderosas.

Gracias a las cualidades de los registros telesísmicos es posible construir, a partir de ellos, ciertas series temporales que contienen de manera enfatizada la información sísmica capturada por las ondas al propagarse a través de la estructura que se localiza debajo del receptor. Esto quiere decir que, en estas series, se discrimina toda señal "contaminante" que provenga de la fuente sísmica, del trayecto profundo, y del instrumento de registro. Dichas series, denominadas "funciones de receptor", son precisamente las observaciones que en este trabajo, al igual que en muchos otros (*por mencionar algunos: Langston, 1979; Owens et al., 1984; Shibutani et al., 1996*), se usaron para inferir la constitución de la corteza y el manto superior.

¹ Se les conoce como períodos de ciencia normal, a los lapsos en la historia de la ciencia durante los cuales los conocimientos aportados fueron desprendidos de un paradigma no cuestionado a lo largo de dichos períodos (*Chalmers, 1982*).

Lo que distingue a esta investigación del resto son, principalmente, las herramientas matemáticas con las que fueron modeladas las funciones de receptor. Se trata de dos esquemas numéricos de optimación global que en los últimos años han cobrado gran importancia en la resolución de problemas inversos, donde la minimización (o maximización) de funciones es el objetivo. Dichos métodos se conocen como algoritmos genéticos ("genetic algorithms", GA), y cristalización simulada ("simulated annealing", SA). Sin lugar a dudas, el auge que a partir de la segunda mitad de este siglo fueron tomando se debe a la capacidad que ambos tienen para resolver problemas altamente no lineales y con múltiples soluciones.

En México, uno de los campos que no ha sido agotado desde el punto de vista sismológico, es la determinación de la estructura cortical en diferentes puntos geográficos de nuestro país. Es verdad que existen trabajos donde se emplearon múltiples técnicas para establecer dicha estructura (*entre otros: Gombert et al., 1988; Campillo et al., 1989 y 1996; Valdés-González y Mayer, 1996; Urrutia-Fucugauchi y Flores-Ruiz, 1996*). Sin embargo, la información generada sigue siendo insuficiente. Sobre todo si se sabe que de un buen modelo cortical dependen muchas cosas, como la localización precisa de los focos sísmicos, la determinación adecuada de los mecanismos de ruptura, o simplemente una mejor fundamentación de la evolución tectónica y situación actual de las placas que interactúan en México. Por todo esto, quedan plenamente justificadas las razones que motivaron la realización de este trabajo, en el que se estudiaron telesismos registrados en tres estaciones pertenecientes al Servicio Sismológico Nacional: Zacatecas (ZAIG), Ciudad Universitaria (CUIG), y Tuzandépetl (TUIG).

Antes de llegar al tratamiento de las observaciones en cada estación, fue necesario hacer una revisión teórica detenida de todas las implicaciones del fenómeno modelado, así como de las herramientas matemáticas y numéricas empleadas. De esta manera, conformado el marco teórico como un preámbulo a la investigación, se llevaron a cabo los modelados correspondientes a las tres estaciones, confrontando los resultados entre sí, y con aquéllos anteriormente propuestos por otros autores para cada sitio

1.1 Teoría de esfuerzos.

i) El medio continuo.

El concepto de "medio continuo" se deriva de la siguiente idea matemática: entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto implica que, por cercanos que se encuentren dichos números, siempre habrá una infinidad de números intermedios. Este axioma matemático se asocia fácilmente con los conceptos de tiempo y espacio. Recordemos que el transcurso del tiempo se representa a través de una recta real, o de igual forma que cualquier dimensión espacial. Así, podemos imaginar un sistema de referencia espacial tridimensional que esté afectado por el transcurso del tiempo, donde cada eje de referencia, por ejemplo del sistema Cartesiano, conste del conjunto real. En este caso hablaríamos de un marco de referencia continuo cuatro-dimensional.

Para definir formalmente el concepto de "continuo" asociado a la materia, y por lo tanto poder hablar de una distribución continua de materia, se debe recurrir a las cantidades físicas de densidad de masa, de energía y de *momentum*.

Pensemos en una porción de materia cuya masa esté bien definida y que ocupe un lugar del espacio llamado E_0 . Consideremos un punto P cualquiera dentro de E_0 y una secuencia de subespacios convergentes hacia P denominados E_1, E_2, \dots, E_n , tal y como se muestra en la figura 1.1. Sean V_n y M_n el volumen y la masa correspondientes al n -ésimo subespacio. Ahora, si se demuestra que en el punto P el valor del límite de la función *densidad de masa* (ecuación 1.1-1), cuando " n " tiende a infinito, existe² y es igual al valor real de la densidad de masa en ese punto, entonces dicha función es continua en P . Es importante darse cuenta que esta condición es necesaria más no suficiente para que también sea derivable en ese lugar. Ahora bien, si suponemos que la función *densidad de masa* es continua y derivable en todos los puntos contenidos en E_0 , entonces se dice que la porción de materia acotada por E_0 posee una distribución continua de masa.

$$\rho(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{V_n}, \quad \text{donde } V_n \rightarrow 0 \quad (1.1-1)$$

Una consideración similar se puede llevar a cabo para el contenido de energía y de *momentum* en dicha porción E_0 . Si se cumplen también las mismas condiciones para

² Deben considerarse todas las direcciones de aproximación hacia P para verificar la existencia del límite.

estas últimas dos cantidades físicas, entonces E_0 representa un dominio de material continuo, es decir, una porción de medio continuo.

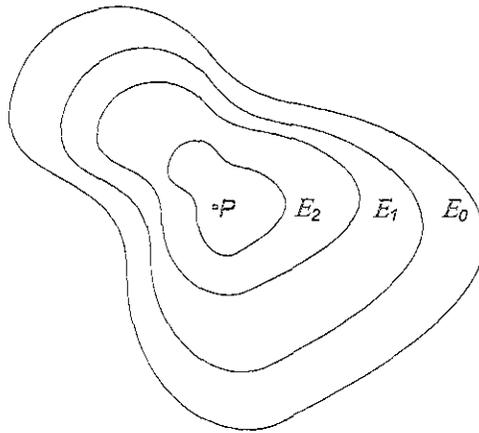


Fig. 1.1 Secuencia de dominios espaciales convergentes hacia P .

Cabe destacar que un medio continuo, para que así lo sea, no depende del hecho de ser homogéneo o heterogéneo. En el primer caso, se ve que la sucesión de cocientes implicados en la expresión (1.1-1), conforme V_n tiende a cero, son exactamente iguales entre sí e iguales al valor del límite. En el segundo caso, el de un material heterogéneo como lo es la atmósfera, cuya densidad varía con la altura, es claro que no existirán dichas igualdades. Este hecho, sin embargo, no implica la indefinición del límite. En otras palabras, en un medio continuo las propiedades intensivas³, como lo son la densidad, el peso específico, la temperatura, etc. deben cumplir necesariamente con las condiciones de continuidad y derivabilidad anteriormente descritas (ya sea en el tiempo o en el espacio, según sea la propiedad en cuestión).

ii) Concepto de esfuerzo.

La parte de la mecánica del medio continuo correspondiente a la teoría de esfuerzos se aboca al estudio de la interacción que existe entre las partes que componen a un medio. Esto es, pretende conocer la manera como se ve afectada una porción determinada por todo el resto del material. Es el concepto de "esfuerzo" la única vía o herramienta que posee la mecánica del medio continuo para describir dicha interacción.

³ Estas propiedades son puntuales, es decir, su valor no depende de la cantidad de sustancia presente.

Para definir este concepto, imaginemos nuevamente una porción de materia E cualquiera y una subporción delimitada por S contenida en E (figura 1.2). Nos interesa expresar la interacción que existe entre el material contenido dentro de S y el que se encuentra afuera. Esta interacción se puede dividir en dos tipos: la que es provocada por fuerzas

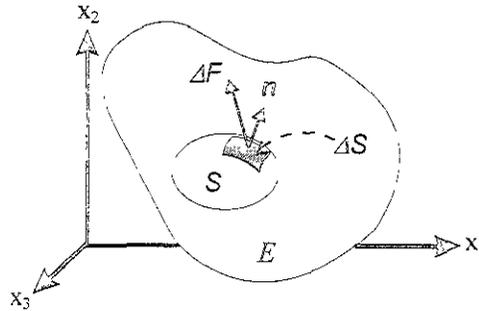


Fig. 1.2 Principio del esfuerzo.

de acción a distancia, como son la fuerza gravitacional y las fuerzas electromagnéticas conocidas como *fuerzas de cuerpo*, y la que es debida a las fuerzas que actúan a través de la superficie fronteriza S , llamadas *fuerzas de superficie*. Imaginemos una pequeña fracción de la superficie fronteriza llamada ΔS . Naciendo de ahí, un vector unitario normal a ΔS llamado n con sentido hacia el exterior de S . Ahora bien, el material que se encuentra afuera de S (en contacto con la cara positiva de S) ejerce una fuerza ΔF sobre el que se encuentra adentro (en contacto con la cara negativa de S) y viceversa. Queda claro que la magnitud y dirección de estas fuerzas con sentido opuesto, dependen tanto del tamaño y localización de la fracción de superficie ΔS , como de la orientación de la misma. Si resultara que al hacer que ΔS tienda a cero, el cociente $\Delta F/\Delta S$ tiende a un límite definido dF/dS (ecuación 1.1-2) y además que el momento de las fuerzas actuando en ΔS desaparece en el límite, decimos que dicho límite es un *vector de esfuerzos* o de *tracciones* y se representa como $\overset{n}{T}$. Sus unidades son de fuerza por unidad de área.

$$\overset{n}{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \tag{1.1-2}$$

Según lo anterior, el concepto de esfuerzo está íntimamente relacionado a una superficie. Esta dependencia es tan grande que dejaría de tener sentido la idea de esfuerzo si es que se desconoce la superficie con respecto a la cual está definido. Ya se mencionó anteriormente la correspondencia unívoca que existe entre la localización y orientación de ΔS , con la forma resultante que adquiera el esfuerzo asociado.

iii) Tensor de esfuerzos.

Para definir el tensor de esfuerzos imaginemos tres superficies perpendiculares entre sí (dS_1 , dS_2 y dS_3), que confinan una subporción diferencial de medio continuo. Las normales n_1 , n_2 y n_3 a dichas superficies son paralelas a los tres ejes coordenados cartesianos x_1 , x_2 y x_3 respectivamente (figura 1.3). De este modo, la interacción del medio suscitada en cada una de las tres superficies queda representada por el vector de esfuerzos (o tracciones) asociado a cada una de ellas: T_1, T_2 y T_3 (figura 1.3), donde la i va desde 1 hasta 3, y representa a cada una de las tres componentes de los tres vectores, ecuación (1.1-3).

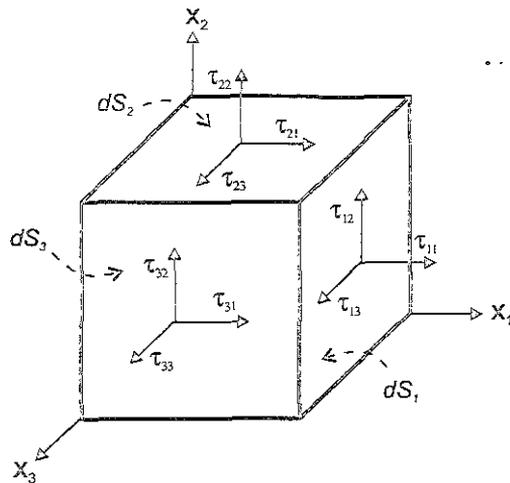


Fig. 1.3 Notación de las componentes del esfuerzo.

Si agrupamos las nueve componentes que forman a estos vectores, mostradas en dicha ecuación, se crea una matriz cuadrada de tres por tres que, dadas las leyes de transformación con las que cumple, constituye un tensor de 2^{do} orden. A éste se le

conoce con el nombre de *tensor de esfuerzos* y queda representado por τ_{ij} . Formalmente, un tensor de 2^{do} orden es un sistema de cantidades que posee nueve componentes con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 y nueve componentes con respecto a los ejes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ de tal manera que dichas cantidades están relacionadas entre sí según la siguiente ley característica de transformación:

$$\bar{\tau}_{km} = \tau_{jl} \cdot \beta_{kj} \cdot \beta_{ml}$$

A partir de esta entidad matemática (el tensor de esfuerzos), es posible conocer las tracciones en cualquier parte del medio, siempre y cuando se cumplan los siguientes supuestos: que los esfuerzos estén definidos en todo el medio y que el campo de esfuerzos sea continuo.

La *fórmula de Cauchy*, como se verá en el siguiente apartado, nos va a permitir precisar dicho estado en cualquier punto.

$$\begin{aligned} T_i^{n_1} &= \left(T_1^{n_1}, T_2^{n_1}, T_3^{n_1} \right) = \left(\tau_{n_1,1}, \tau_{n_1,2}, \tau_{n_1,3} \right) \\ T_i^{n_2} &= \left(T_1^{n_2}, T_2^{n_2}, T_3^{n_2} \right) = \left(\tau_{n_2,1}, \tau_{n_2,2}, \tau_{n_2,3} \right) \\ T_i^{n_3} &= \left(T_1^{n_3}, T_2^{n_3}, T_3^{n_3} \right) = \left(\tau_{n_3,1}, \tau_{n_3,2}, \tau_{n_3,3} \right) \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

Hay que notar que en la ecuación (1.1-3), las direcciones normales están representadas por los vectores n_1, n_2 y n_3 a diferencia de como aparecen expresadas en las componentes del esfuerzo de la figura 1.3, en donde tales direcciones se muestran con los números 1, 2 ó 3 en el primer dígito de los subíndices de las componentes, por semejanza con los nombres de los ejes coordenados.

iv) Fórmula de Cauchy.

La Fórmula de Cauchy nos dice que si se conocen los esfuerzos $T_i^{n_1}, T_i^{n_2}$ y $T_i^{n_3}$ a través de tres planos perpendiculares entre sí de un cuerpo, esto es, si se conoce el tensor de

esfuerzos, se pueden caracterizar las tracciones en cualquier elemento de superficie del medio cuya normal n_i sea conocida.

Si se eligen los tres planos perpendiculares a los tres ejes coordenados, entonces el tensor de esfuerzos queda definido por τ_{ij} (donde los contadores i y j van desde 1 hasta 3). Ahora, en términos generales, las componentes del vector de tracciones $\overset{n}{T}_i$ a través del plano cuya normal es n_j están dadas en función del tensor de esfuerzos de la siguiente manera:

$$\overset{n}{T}_i = n_j \cdot \tau_{ji} \tag{1.1-4}$$

Para demostrar esta relación tan simple, la Fórmula de Cauchy, imaginemos los tres planos perpendiculares antes mencionados y un cuarto plano oblicuo cualquiera con normal n_i , que en conjunto definen un tetraedro como se muestra en la figura 1.4. Supongamos que las dimensiones de este volumen son infinitesimales por lo que el plano oblicuo será dS y los tres restantes dS_1 ,

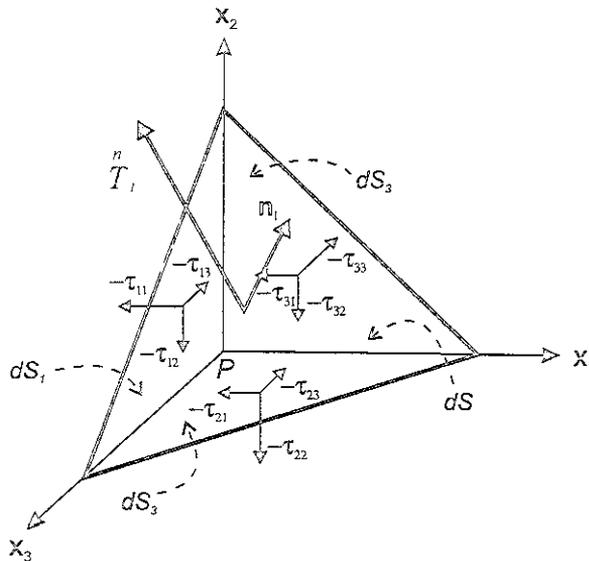


Fig. 1.4 Tracciones superficiales en un tetraedro.

dS_2 y dS_3 dependiendo del eje coordenado al que sean normales (figura 1.4). Observando la cara dS_1 se ve que ésta es la proyección, sobre el plano coordenado x_2 - x_3 , de la superficie dS . Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dS_1 &= dS \cdot \cos(x_1, n_1) \therefore \\ dS_1 &= dS \cdot n_1 \end{aligned} \quad (1.1-5)$$

Por otro lado, el volumen del tetraedro es

$$dv = \frac{1}{3} h \cdot dS \quad (1.1-6)$$

donde h es la distancia en dirección normal del vértice P a la base dS . Las fuerzas, en la dirección positiva del eje x_1 que actúan sobre las tres superficies coordenadas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} F_1^{dS_1} &= (-\tau_{11} + \varepsilon_1) \cdot dS_1 \\ F_1^{dS_2} &= (-\tau_{21} + \varepsilon_2) \cdot dS_2 \\ F_1^{dS_3} &= (-\tau_{31} + \varepsilon_3) \cdot dS_3 \end{aligned} \quad (1.1-7)$$

donde τ_{11} , τ_{21} y τ_{31} son los esfuerzos en esa dirección que existen en el vértice P opuesto a dS , y las “ ε ” están incluidas porque las tracciones están actuando en una posición infinitesimalmente distante de P y no en P . Por otro lado, la fuerza actuando en el triángulo normal a n_1 tiene una componente $(\overset{n}{T}_1 + \varepsilon) \cdot dS$ en dirección positiva del eje x_1 , y las fuerzas de cuerpo, una componente en la misma dirección igual a $(X_1 + \varepsilon) \cdot dv$. Estas últimas fuerzas están también referidas al punto P por lo que se incluyeron nuevamente las correcciones “ ε ”.

La ecuación de movimiento que rige el estado dinámico de nuestro elemento de materia es la siguiente:

$$\oint \overset{n}{T} \cdot dS + \int X \cdot dv = \frac{d}{dt} \int \bar{v} \cdot \rho \cdot dv \quad (1.1-8)$$

donde $\overset{n}{T}$ representa a las fuerzas superficiales por unidad de área, X representa a las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen, \bar{v} a la velocidad del elemento, y ρ a la masa por unidad de volumen (densidad). De esta manera, si aplicamos la ecuación (1.1-8) para

todas las fuerzas actuando en el elemento, utilizando las ecuaciones (1.1-5), (1.1-6) y (1.1-7) se tiene que

$$\begin{aligned} &(-\tau_{11} + \varepsilon_1)n_1 \cdot dS + (-\tau_{21} + \varepsilon_2)n_2 \cdot dS + (-\tau_{31} + \varepsilon_3)n_3 \cdot dS + \\ &+ (\overset{n}{T}_1 + \varepsilon) \cdot dS + (X_1 + \varepsilon') \frac{1}{3} h \cdot dS = \rho \overset{1}{V} \frac{1}{3} h \cdot dS. \end{aligned} \quad (1.1-9)$$

Dividiendo toda la ecuación entre dS , y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ vemos que todas las " ε " y algunos términos desaparecen, obteniendo el siguiente resultado

$$\overset{n}{T}_1 = \tau_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 + \tau_{31}n_3 \quad (1.1-10)$$

que es la primer componente de la ecuación (1.1-4). Siguiendo un mecanismo similar, se puede llegar al mismo resultado para las otras dos componentes $\overset{n}{T}_2$ y $\overset{n}{T}_3$ del vector de tracciones para la superficie dS , quedando de esta manera deducida y demostrada la Fórmula de Cauchy.

v) Simetría del tensor de esfuerzos.

Si uno desea verificar que un elemento diferencial de materia se encuentra en equilibrio estático, debe analizar dos situaciones: la sumatoria de fuerzas y la sumatoria de momentos que actúen sobre el elemento. Si se cumple que ambas sumatorias son cero, entonces se dice que dicha porción de materia se encuentra en equilibrio estático. Para demostrar que el tensor de esfuerzos es simétrico, esto es que

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (1.1-11)$$

supondremos que un cubo infinitesimal con lados dx_1 , dx_2 y dx_3 , como el que se muestra en la figura 1.5, se encuentra en dicho equilibrio. Desarrollaremos la sumatoria de momentos y la igualaremos con cero. De esta ecuación de equilibrio podremos demostrar la validez de la equidad (1.1-11). El análisis se llevará a cabo sólo con respecto al eje x_3 . Los resultados obtenidos podrán deducirse de manera similar para los otros dos ejes. Los

esfuerzos y las fuerzas de cuerpo existentes que producen un momento con respecto al eje en estudio, se muestran en la figura 1.5. Nótese que la fuerza $\tau_{11} \cdot dx_2 \cdot dx_3$ actúa en

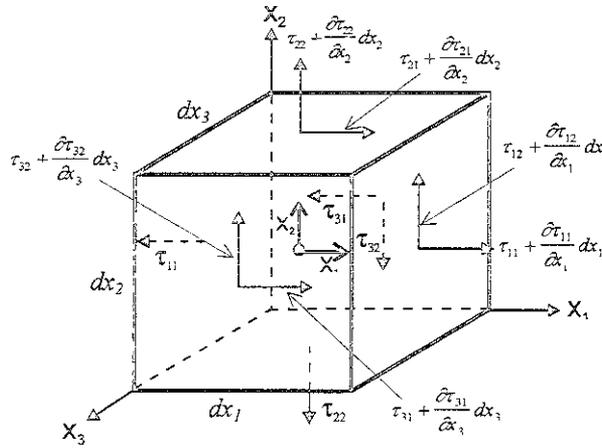


Fig. 1.5 Esfuerzos y fuerzas de cuerpo que contribuyen al momento con respecto al eje x_3 .

el lado izquierdo, mientras que la fuerza $[\tau_{11} + (\partial\tau_{11}/\partial x_1) \cdot dx_1] dx_2 \cdot dx_3$ actúa en el lado opuesto, de manera similar que para el resto. Estas expresiones parten de asumir la continuidad de los esfuerzos en el medio. La fuerza de cuerpo está dada por $X_i \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$. Ahora bien, teniendo el cuidado apropiado con las distancias perpendiculares que separan a cada línea de acción de las fuerza, del eje x_3 , la ecuación de equilibrio nos queda:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{11} dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \\
 & + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dx_1 - \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 dx_2 + \\
 & - \left(\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \tau_{22} dx_1 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \\
 & + \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} + \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} + \\
 & - \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2} + \tau_{31} dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2} + \\
 & - X_1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.1-12}$$

Si dividimos toda la ecuación entre $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$ y calculamos los límites cuando $dx_1 \rightarrow 0$, $dx_2 \rightarrow 0$, $dx_3 \rightarrow 0$ entonces obtenemos el siguiente resultado particular

$$\tau_{12} = \tau_{21}. \quad (1.1-13)$$

Como ya se dijo, si se lleva a cabo un análisis semejante con respecto a los otros dos ejes cartesianos x_1 y x_2 , entonces se llegaría al resultado general expresado en la ecuación (1.1-11).

1.2 Teoría de deformaciones.

i) Concepto de deformación.

La deformación es el fenómeno que sufre un material, cuando bajo la acción de fuerzas, la posición relativa de las partículas que lo componen cambia.

Si se somete una porción de materia a cierta tensión, nuestra experiencia nos dice que la forma de dicha porción debe cambiar. De la misma manera, si vemos que un cuerpo se deforma, sólo si intuimos la presencia de alguna fuerza podremos explicar aquel fenómeno. Esto es, la condición necesaria para la existencia de deformaciones en un medio es la existencia de esfuerzos, y viceversa. De ahí que el movimiento de un cuerpo rígido (indeformable) no induzca esfuerzos.

Existen varias formas de cuantificar la deformación. Por ejemplo: si se estira una barra cuya longitud inicial es L_0 hasta alcanzar una longitud final L , la deformación sufrida puede medirse haciendo uso de cocientes adimensionales que eliminen la longitud total del objeto de la medida de deformación final. Algunos de estas razones se muestran en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{L - L_0}{L_0} \\ \varepsilon' &= \frac{L - L_0}{L}\end{aligned}\tag{1.2-1}$$

La deformación puede describirse matemáticamente de la siguiente forma. Sea un cuerpo que ocupe un espacio S . En un marco de referencia Cartesiano, la posición de cada partícula de ese cuerpo está definida por sus coordenadas. Cuando el cuerpo es deformado, cada partícula tomará una nueva posición y por consiguiente también nuevas coordenadas. Por ejemplo. Imaginemos una partícula que originalmente esté localizada en el punto P con coordenadas (a_1, a_2, a_3) y que, después de haber sido deformado el cuerpo en el que se encuentra, se localice en el punto final Q con coordenadas (x_1, x_2, x_3) . Se define como vector de desplazamiento u_i a aquél que una dichos puntos (figura 1.6). De esta manera, sus componentes en notación indicial son:

$$u_i = x_i - a_i.\tag{1.2-2}$$

Si el desplazamiento se conoce para todos los puntos en el cuerpo, entonces, se puede reconstruir el cuerpo deformado a partir del original. De aquí se desprende que la deformación puede ser descrita a partir del campo de desplazamiento. Esta deformación va a conocerse si las coordenadas finales (x_1, x_2, x_3) son funciones conocidas de las coordenadas iniciales (a_1, a_2, a_3) o viceversa. Esto es que,

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(a_1, a_2, a_3) \\a_i &= a_i(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{1.2-3}$$

Tomando estas consideraciones e introduciéndolas a la ecuación (1.2-2), podemos decir que si el vector desplazamiento está asociado con cada partícula en el estado inicial, entonces se puede escribir que

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = x_i(a_1, a_2, a_3) - a_i.\tag{1.2-4}$$

Si el desplazamiento está asociado con las partículas en el estado deformado, entonces decimos que

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3).\tag{1.2-5}$$

ii) Tensores de la deformación.

La descripción del cambio de la distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo, es la clave en el análisis de la deformación. Consideremos un elemento infinitesimal que una al punto $P = (a_1, a_2, a_3)$ con el punto vecino $P' = (a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$ en un medio (figura 1.6). El cuadrado de la distancia ds_0 que separa a P de P' en la configuración inicial, es decir antes de ser deformado, está dado por

$$ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2\tag{1.2-6}$$

Cuando el cuerpo es deformado, las posiciones de P y P' cambian y se sitúan en los puntos $Q(x_1, x_2, x_3)$ y $Q'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ respectivamente (figura 1.6). El cuadrado de la nueva distancia ds que separa a Q de Q' es

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{1.2-7}$$

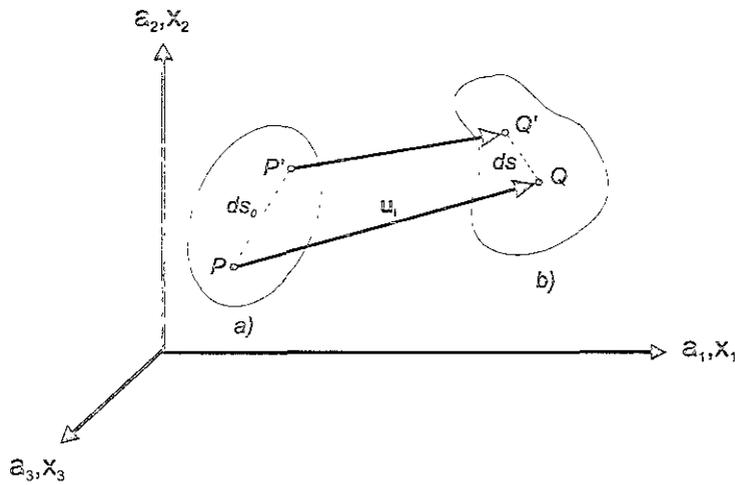


Fig. 1.6 Deformación de un cuerpo, mostrando los vectores desplazamiento para dos partículas, a) cuerpo en estado original con coordenadas (a_1, a_2, a_3) y b) cuerpo en estado deformado con coordenadas finales (x_1, x_2, x_3) .

De las relaciones unívocas entre la posición final e inicial de una partícula, expresadas en la ecuación (1.2-3), tenemos que

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j \\ da_i &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \end{aligned} \tag{1.2-8}$$

de tal manera que si introducimos la delta de Kronecker⁴ y sustituimos adecuadamente las igualdades de la ecuación (1.2-8) en las ecuaciones (1.2-6) y (1.2-7), entonces el cuadrado de las distancias infinitesimales (inicial y final) entre los puntos nos quedan:

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= \delta_{ij} da_i da_j = \delta_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx_l dx_m \\ ds^2 &= \delta_{ij} dx_i dx_j = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l da_m \end{aligned} \tag{1.2-9}$$

la diferencia entre estas expresiones puede ser escrita de los dos siguiente modos, después de haber realizado algunos cambios adecuados en la simbología de los índices.

$$\begin{aligned}
 ds^2 - ds_0^2 &= \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \partial_{ij} \right) da_i da_j, \\
 ds^2 - ds_0^2 &= \left(\partial_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j,
 \end{aligned}
 \tag{1.2-9}$$

Ahora bien, si definimos a los tensores de deformación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{a) ; } E_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \partial_{ij} \right) \\
 \text{b) ; } e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\partial_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.2-9}$$

entonces podemos escribir que

$$\begin{aligned}
 ds^2 - ds_0^2 &= 2 \cdot E_{ij} da_i da_j, \\
 ds^2 - ds_0^2 &= 2 \cdot e_{ij} dx_i dx_j.
 \end{aligned}
 \tag{1.2-10}$$

El tensor E_{ij} definido en la expresión (1.2-9)-a, se conoce con el nombre de *tensor de deformaciones de Green* o bien *tensor de deformaciones en coordenadas Lagrangianas*.

Al tensor e_{ij} expresado en (1.2-9)-b se le llama *tensor de deformaciones de Almansi* o bien *tensor de deformaciones en coordenadas Eulerianas*.

La diferencia entre los tensores E_{ij} y e_{ij} arriba mostrados, es que los sistemas de referencia con respecto a los cuales están definidos son a_i y x_i , respectivamente. Es importante señalar que al igual que el tensor de esfuerzos, los tensores de deformaciones son simétricos, y serán iguales a cero si $ds^2 - ds_0^2 = 0$ según las ecuaciones (1.2-10).

⁴ El operador delta de Kronecker (δ_{ij}) es un símbolo cuyo valor será igual a uno si $i = j$, o igual a cero si $i \neq j$.

iii) Tensor de deformaciones en coordenadas cartesianas.

Volviendo a escribir la ecuación (1.2-2) donde se definió al vector desplazamiento pero con otro índice, tenemos

$$u_\alpha = x_\alpha - a_\alpha \quad (1.2-11)$$

que obteniendo las derivadas parciales en ambos lados de la igualdad y despejando los términos de "x" y de "a" nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}, \\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} &= \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.2-12)$$

que sustituyendo en el tensor de Green, queda reducido a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right] \\ E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right] \end{aligned} \quad (1.2-13)$$

Haciendo una sustitución similar pero para el tensor de Almansi, queda reducido a lo siguiente

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(-\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j} \right) \right] \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (1.2-14)$$

Si uno considera al tensor Euleriano ec. (1.2-14), en donde las componentes del vector desplazamiento están en función de las coordenadas posteriores a la deformación "x_i" y dichas componentes u, son tales que el valor de sus primeras derivadas es muy pequeño

y por lo tanto los productos de estas derivadas parciales son insignificantes, entonces, este tensor se reduce al llamado *tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy* que queda expresado en la siguiente ecuación:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \quad (1.2-15)$$

Es importante introducir una notación muy usada en el manejo de este tensor. Esta notación emplea las letras u, v, w para referirse a las tres componentes del vector desplazamiento u_1, u_2, u_3 respectivamente. De igual forma para las variables independientes se usa x, y, z en lugar de x_1, x_2, x_3 respectivamente.

1.3 Teoría de la elasticidad.

i) Ecuaciones constitutivas.

Una ecuación constitutiva es aquella que describe alguna propiedad de un material. Se le dio ese nombre porque el comportamiento que modela dicha ecuación es el resultado de la constitución interna del material. Por ejemplo, una relación entre el esfuerzo y la deformación describe las propiedades mecánicas del material, por lo tanto, esta relación es una ecuación constitutiva. Existen otras también constitutivas, como son aquellas que modelan la transferencia de calor de un material o su resistencia eléctrica, entre otras, pero que se alejan del tema central de este trabajo.

La ecuación de este tipo que abordaremos en el siguiente apartado es la que describe el comportamiento mecánico de un material idealmente elástico. Esta ecuación se conoce como *Ley de Hooke* y es de gran importancia desde el momento que integra por vez primera las dos teorías que se han desarrollado hasta ahora: la de esfuerzos con la de deformaciones.

ii) Ley de Hooke y módulos elásticos.

Como ya se dijo en el párrafo anterior, esta ley rige el comportamiento de materiales idealmente elásticos. Esto quiere decir que las deformaciones sufridas por estos materiales serán siempre proporcionales a la magnitud de los esfuerzos que las provoquen. En otras palabras, el tensor de esfuerzos es linealmente proporcional al tensor de deformaciones, como se muestra en la siguiente ecuación que expresa, de una forma generalizada, dicha ley.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \quad (1.3-1)$$

Donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, e_{kl} es el tensor de deformaciones y C_{ijkl} es un tensor que contiene constantes de proporcionalidad. Estas constantes, también conocidas como constantes elásticas, constituyen un tensor de cuarto orden C_{ijkl} donde los cuatro subíndices varían de 1 hasta 3, por consiguiente tiene 81 elementos. Dadas las simetrías de los tensores de esfuerzos (*ecuación 1.1-11*) y de deformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jkl} \\ C'_{ijkl} &= C'_{ijlk} \end{aligned} \tag{1.3-2}$$

Bajo estas condiciones, C_{ijkl} tiene un máximo de 36 constantes independientes. Esto se puede ver más claramente si expandimos el sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas diferentes por cada ecuación, que condensa la expresión (1.3-1). Esto se debe a la simetría de los dos tensores mencionados, el de esfuerzos y el de deformaciones, que por ende poseen sólo seis componentes diferentes.

Para la mayoría de los sólidos elásticos, la cantidad de constantes elásticas independientes necesarias para caracterizarlos es mucho menor que 36. Esta reducción tan importante puede llevarse a cabo si las propiedades del material presentan simetría, esto es, si el material es isótropo. Una definición rigurosa de esta propiedad física dice que, un material es isótropo, si los valores de las constantes contenidas en C_{ijkl} son exactamente los mismos independientemente de la orientación del sistema de referencia. Se puede demostrar para un material de esta naturaleza que solamente son necesarias dos constantes elásticas independientes para caracterizarlo. A esta conclusión llegaron Navier en 1821 y Cauchy en 1823. Ellos dedujeron la siguiente ecuación que define al tensor de constantes elásticas para sólidos isótropos en donde sólo aparecen dos constantes

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{1.3-3}$$

Si se desea expresar el tensor de esfuerzos en función del tensor de deformaciones, entonces la Ley de Hooke particularizada para materiales isótropos suele escribirse en términos de las dos constantes de Lamé, λ y μ (1.3-3), como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} \tag{1.3-4}$$

La constante μ recibe el nombre de *módulo de rigidez* o *resistencia al esfuerzo cortante*. Como su nombre lo indica, éste representa la relación que existe entre el esfuerzo de cizalla y la deformación correspondiente. Por ejemplo, en un caso particular se podría tener que $\mu = 0.5(\sigma_{12}/e_{12})$. Por otro lado, la constante λ no tiene una representación física definida, sin embargo, más adelante veremos de que manera se relaciona con otros módulos elásticos

La ecuación constitutiva (1.3-4) puede transformarse de tal manera que sean las deformaciones las que queden expresadas en función de los esfuerzos. En este caso, las dos constantes elásticas independientes que se acostumbra usar son E y ν tal y como se ve en la ecuación que sigue:

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right]. \quad (1.3-5)$$

La constante E recibe el nombre de *módulo de Young* y establece la relación que hay entre un esfuerzo normal y la deformación sufrida en esa dirección. Por ejemplo, en dirección del eje x_1 tenemos que $E = \sigma_{11}/e_{11}$. La constante ν que también aparece en (1.3-5) se conoce con el nombre de *relación de Poisson*. Esta relación compara las deformaciones en dos direcciones principales⁵ que necesariamente son perpendiculares entre sí. Por ejemplo, se puede calcular la relación de Poisson haciendo $\nu = e_{22}/e_{11}$.

Como ya se dijo, cualquier medio ideal que cumpla con los supuestos mencionados de homogeneidad e isotropía, puede caracterizarse con solamente dos constante elásticas independientes. Esto quiere decir que debe haber relaciones matemáticas bien establecidas entre módulos elásticos que permitan deducir los unos a partir de los otros. En la ecuación (1.3-6) se presentan algunas de estas relaciones que son de gran utilidad en el manejo de las ecuaciones de la elasticidad.

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)}. \end{aligned} \quad (1.3-6)$$

iii) Ecuación de Navier.

La ecuación de Navier no es más que la ecuación del movimiento particularizada para un medio sólido, infinito, perfectamente elástico, homogéneo e isótropo; en donde los

⁵ Las direcciones principales son aquellas en las que deben estar los ejes coordenados para que los esfuerzos de cizalla se anulen, esto es que $\sigma_{ij}=0$ para toda $i \neq j$

esfuerzos y las deformaciones son infinitesimales. La ecuación general del movimiento para un sólido se deriva de la segunda ley de la dinámica de Newton. Esta ley dice que, en un sistema de referencia inercial, la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la variación en el tiempo de su momento lineal. Esto es que:

$$\sum F_i = \frac{\partial}{\partial t}(m \cdot v_i). \quad (1.3-7)$$

Donde m es la masa del cuerpo y v_i es el vector velocidad del mismo⁶. Si consideramos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, descritas en la sección 1.1-(ii) y las incluimos en la ecuación anterior, además expresamos a la masa en términos de la densidad y el volumen como $m = \rho \cdot dV$, entonces la ecuación (1.3-7) se transforma en la ecuación (1.1-8) que aparece en la sección 1.1-(iv):

$$\oint_S T \cdot dS + \int V X \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int V v_i \cdot \rho \cdot dV. \quad (\text{repetida 1.3-8})$$

Empleando la Fórmula de Cauchy (ecuación 1.1-4), introducimos el tensor de esfuerzos en la integral de superficie. Si aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss que dice

$\int F \cdot dS = \int (\nabla \cdot F) dV$ a la misma integral nos queda, después de agrupar términos, que

$$\int \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV = \int \frac{\partial}{\partial t} (v_i \rho) dV \quad (1.3-9)$$

e igualando los integrandos, ya que ambas integrales están definidas sobre el mismo volumen, y escribiendo a la derivada de la velocidad como la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, tenemos finalmente que

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.3-10)$$

⁶ No se pierda de vista que la aceleración del cuerpo esta dada por $a_i = \partial v_i / \partial t$, que es con la que se acostumbra expresar dicha Ley.

Ahora bien, siguiendo con la deducción de la ecuación de Navier, debemos particularizar esta ecuación del movimiento (1.3-10) únicamente para sólidos elásticos e isótropos. Esto se logra si expresamos al tensor de esfuerzos τ_{ij} en función de las deformaciones según la Ley de Hooke ya particularizada que aparece en la ecuación (1.3-4). Sin embargo, antes de hacer esta modificación, debemos aclarar que sólo se van a considerar, por simplicidad durante el desarrollo, los componentes del esfuerzo, la deformación, y el desplazamiento, en dirección paralela al eje x_1 (o eje x). Al final se podrá extrapolar el resultado para las otras dos direcciones ya que las deducciones son semejantes. Se utilizará la siguiente notación: para el desplazamiento $u_i = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$, y para las variables independientes y ejes coordenados $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Si expandimos la ecuación (1.3-10) para $i=1$ y $j=1,2,3$ y utilizamos la nueva nomenclatura tenemos que

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3-11)$$

y si escribimos los componentes del tensor de esfuerzos, como ya se mencionó antes, tal cual lo indica la Ley de Hooke (1.3-4), y simultáneamente sustituimos el tensor de deformaciones infinitesimales (ecuación 1.2-15) para expresar a las deformaciones en términos de los desplazamientos, entonces tenemos ...

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3-12)$$

que reacomodando adecuadamente sus términos nos queda la ecuación final:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.3-13)$$

Si desarrolláramos las otras dos ecuaciones restantes en las direcciones x_2 y x_3 (que son muy parecidas a ésta), y las escribimos todas ellas en notación indicial empleando los subíndices i, j, k , entonces se podrían condensar las tres ecuaciones en una sola. Esta ecuación general está dada por:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.3-14)$$

pero se acostumbra escribiría empleando el operador *nabla*⁷ (∇), siendo ésta la forma más conocida de la ecuación de Navier:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{X} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.3-15)$$

donde $\nabla^2 \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u})$. Si despreciamos las fuerzas de cuerpo \vec{X} anulándolas, entonces recibe el nombre de ecuación de Navier reducida.

⁷ Este operador vectorial se define como: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

1.4 Propagación de ondas.

i) Soluciones de la ecuación de onda.

Diferentes formas de la ecuación de onda pueden derivarse manipulando la ecuación de Navier (1.3-15). Sin embargo, su forma más general es la siguiente:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi, \tag{1.4-9}$$

donde V es una constante. Cualquier función $\Psi = f(x - Vt)$ cuyas primeras dos derivadas sean continuas, es una solución de la ecuación (1.4-1). Esta solución Ψ es general para el caso unidimensional⁸ y proporciona una cantidad infinita de soluciones particulares. Algunas de ellas podrían ser las funciones $e^{k(x-Vt)}$, $\text{sen}(x - Vt)$ ó $(x - Vt)^3$. La onda modelada por cada una de las funciones anteriores se propaga sobre el eje x .

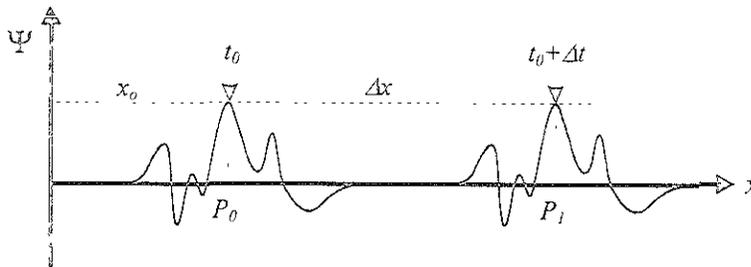


Fig. 1.7 Cambio de posición por el paso del tiempo de una onda

Es posible demostrar que la constante V , que aparece en todas ellas, es igual a la velocidad con que viaja la onda. Para esto, véase en la figura 1.7 cómo el máximo de la forma de onda alcanza el punto P_0 del eje x en el tiempo t_0 . Si la abscisa correspondiente a ese punto es x_0 , entonces el valor de la función ahí es

$$\Psi_0 = f(x_0 - Vt_0).$$

Si en el tiempo $t_0 + \Delta t$ el máximo de la forma de onda alcanza el punto P_1 , correspondiente en el eje x al valor $x_0 + \Delta x$, entonces tenemos que la función en P_1 vale

⁸ Recibe el nombre de solución de D'Alembert.

$$\Psi_1 = f\{x_0 + \Delta x - V(t_0 + \Delta t)\}.$$

Dado que la función adquiere el mismo valor (máximo) en las posiciones e instantes recién mencionados, esto es que $\Psi_0 = \Psi_1$ en $t=t_0$ y $t=t_0+\Delta t$, entonces se puede escribir que

$$x_0 - Vt_0 = x_0 + \Delta x - V(t_0 + \Delta t)$$

y por lo tanto que

$$0 = \Delta x - V\Delta t.$$

Esto quiere decir que la constante V es igual al cociente del incremento de la distancia entre el incremento del tiempo $\Delta x/\Delta t$, que es precisamente la velocidad con que viajó la forma de onda en el lapso estudiado. Ahora bien, una función $g(t+Vt)$ también es solución de (1.4-1), y describe una onda que viaja en el sentido negativo del eje x . Por esto, una solución más general para el caso unidimensional de la ecuación de onda es

$$\Psi = f(x - Vt) + g(x + Vt). \quad (1.4-2)$$

Si pensamos que las ondas descritas por esta ecuación, que viajan en dirección del eje x , se propagan en un sistema de referencia tridimensional, es claro que el valor de la función Ψ no depende de la posición en un plano perpendicular a este eje. Por ejemplo, para el plano $x=x_0$, $\Psi = cte$. Esto quiere decir que la función Ψ es igual para cualquier valor de y o de z . A las ondas que cumplan con esta cualidad se les conoce como ondas planas. Implícitamente se está suponiendo que la fuente que dio origen a la perturbación se encuentra infinitamente alejada. A cada uno de los planos, que son perpendiculares al eje x en este caso particular, se le conoce como frente de onda. Si definimos como la fase de una onda al argumento $(x-Vt)$, entonces, formalmente podemos decir que, un frente de onda es aquel plano⁹ donde el valor de la fase de cierta onda es el mismo.

Hay que notar que la onda está viajando en la dirección normal al frente de onda. Esto sucederá siempre y cuando el material sea isótropo. A la línea imaginaria que señala esta dirección se le llama trayectoria de la onda.

⁹ En nuestro caso que se refiere exclusivamente a ondas planas, ya que también existen ondas esféricas o cilíndricas cuyos frentes de ondas corresponden a superficies esféricas o cilíndricas respectivamente, que no estudiaremos.

Consideremos un caso más general en el que la trayectoria x' de la onda plana es una línea cuyos cosenos directores son (l, m, n) , y los ángulos que forma con respecto a los ejes coordenados son diferentes de cero. Se puede demostrar que la distancia entre el

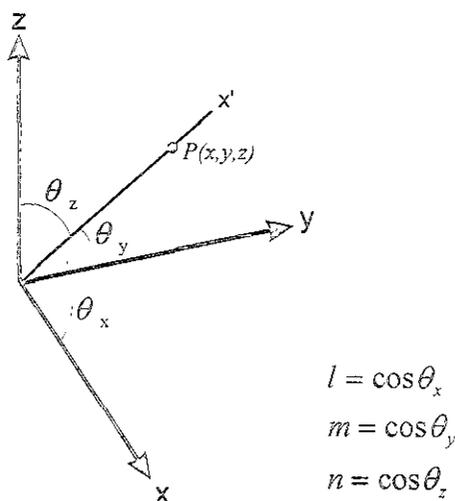


Fig. 1.8 Dirección oblicua de una trayectoria cualquiera x' .

origen y el punto P (figura 1.8) es $x' = lx + my + nz$, donde x, y, z son las coordenadas del punto. Por lo tanto, podemos escribir finalmente la ecuación (1.4-2) de una forma más general que considere cualquier dirección de propagación como:

$$\Psi = f(xl + ym + zn - Vt) + g(xl + ym + zn + Vt) \tag{1.4-3}$$

Como ya se dijo, las funciones f y g de la ecuación (1.4-3) pueden tomar diversas formas. Sin embargo, la solución más conveniente es una función exponencial que contenga la fase que ya establecimos, de la siguiente manera:

$$\Psi = A e^{i\omega[(xl + ym + zn)/V - t]} \tag{1.4-4}$$

donde los cosenos directores de la dirección de propagación $l, m, y n$ (figura 1.8), necesariamente deben cumplir con la condición $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ para satisfacer la ecuación de onda (1.4-1).

ii) Ondas de cuerpo y funciones potenciales del desplazamiento.

La propagación de ondas en un medio provoca cambios en su estado de esfuerzos y por lo tanto, deformaciones en el material que lo compone. Este fenómeno puede caracterizarse estudiando el campo vectorial del desplazamiento \vec{u} que sufren las partículas del medio. Para esto es importante saber que, en el caso particular de un sólido elástico infinito, solamente dos tipos de ondas se propagan en su interior (ondas de cuerpo): las ondas compresionales u ondas tipo P, y las ondas de cizalla u ondas tipo S. Para entender claramente qué caracteriza a cada una, imaginemos una porción cúbica muy pequeña de medio, durante la propagación de las ondas (figura 1.9). Para el caso en que sólo se propaguen ondas tipo P, la deformación sufrida por dicha porción cúbica es provocada por la acción de esfuerzos normales ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \delta_{ij}$). Dicha deformación queda ilustrada en la figura 1.9-a, donde el estado final deformado se indica con la línea discontinua. Hay que apreciar cómo claramente el volumen del cubo disminuye durante su deformación, está habiendo una contracción de la materia por unidad de volumen, está cambiando su densidad. Sin embargo, ninguna de las partículas que lo comprenden rota entorno a su propio eje. Por esta razón se dice que el campo de desplazamiento generado por la propagación de una onda tipo P es "irrotacional", esto es que $\nabla \times \vec{u} = 0$. En el otro caso, cuando se propaga una onda tipo S, la deformación sufrida por la misma porción cúbica es provocada por la acción de esfuerzos tangenciales (σ_{ij} , para $i \neq j$). El cambio de forma inducido puede verse en la figura 1.9-b. En este caso, las partículas rotan entorno a sí mismas, por lo que no podemos decir que el campo de desplazamientos asociado es irrotacional como en el caso anterior. Sin embargo, el volumen de la porción no cambia durante esta deformación. Se dice que la tasa de expansión o de contracción por unidad de volumen es cero, lo cual implica, siguiendo la definición de la divergencia, que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Entonces, el campo vectorial generado por la

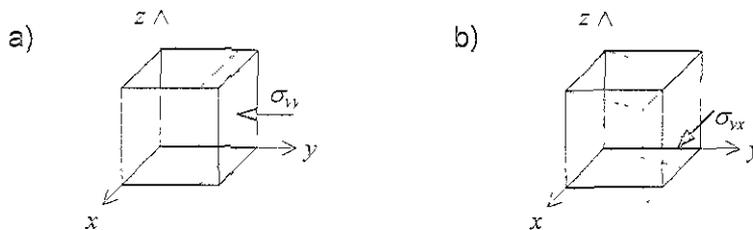


Fig. 1.9 a) deformación de una porción cúbica de materia debida a la propagación de una onda tipo P, b) deformación de la misma porción debida a la propagación de una onda tipo S.

propagación de ondas tipo S es un campo solenoidal. La velocidad con que se transmiten los esfuerzos normales, asociados a las ondas P, se denomina α y es mayor que la velocidad con que se transmiten los esfuerzos tangenciales que dan origen a las ondas S, llamada velocidad β .

En síntesis, el movimiento de las partículas provocado por la propagación de una onda tipo P siempre es paralelo a la dirección de propagación de la onda, es decir, perpendicular al frente de onda (figura 1.10). Por el contrario, si es una onda S la que se propaga, el movimiento de las partículas está contenido en el plano que define dicho frente de onda.

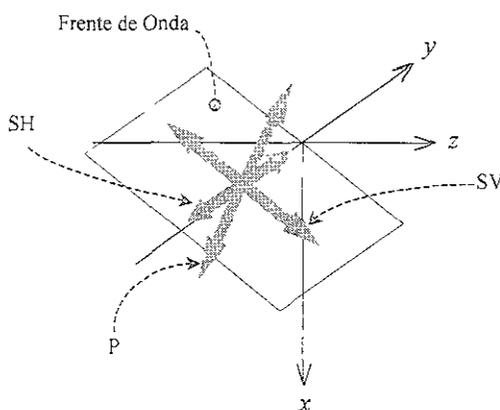


Fig. 1.10 Direcciones del desplazamiento provocado por ondas S y P.

Para facilitar el análisis de las ondas S, y poder entender otros fenómenos más complejos relacionados con la incidencia crítica¹⁰ y postcrítica de ondas en interfases, se ha convenido descomponer al desplazamiento debido a estas ondas (paralelo al frente de onda) en dos componentes polarizados perpendicularmente entre sí, como se muestra en la figura 1.10. Ambos están contenidos en el frente de onda, sin embargo, uno es horizontal y se llama componente SH. El otro es perpendicular al anterior y se llama componente SV.

El teorema de Helmholtz establece que un campo vectorial, como lo es el del desplazamiento, puede construirse a partir de un potencial escalar ϕ y otro vectorial \vec{Y} , de la siguiente manera:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla\phi(\vec{x}, t) + \nabla \times \vec{Y}(\vec{x}, t) \tag{1.4-5}$$

donde cada función de esta ecuación depende de la posición \vec{x} en el espacio, y del tiempo t .

El teorema también dice que esta construcción será posible sólo si se conocen tanto la divergencia como el rotacional del campo \vec{u} , ya que ambos potenciales dependen de dichos valores. Es importante decir que la condición para que el potencial vectorial \vec{Y} quede unívocamente definido es que su divergencia sea cero.

En el caso del campo de desplazamiento, si se propagan simultáneamente los dos tipos de ondas, podemos deducir, con lo que se ha dicho hasta ahora, que se debe cumplir lo siguiente: $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ (por la presencia de ondas P), y que $\nabla \times \vec{u} \neq 0$ (por la presencia de ondas S), lo cual genera un campo vectorial denominado complejo.

Dada la separación de las ondas S en sus componentes SH y SV mencionada antes, el potencial vectorial, que es el que corresponde a la propagación de ondas tipo S, también debe separarse en dos partes. Si consideramos la orientación del sistema de referencia mostrada en la figura 1.10 estas partes son:

$$\vec{Y}(x, z, t) = \underbrace{\vec{\psi}(x, z, t)}_{\text{Potencial SV}} + \underbrace{\nabla \times \vec{\gamma}(x, z, t)}_{\text{Potencial SH}} \quad (1.4-6)$$

donde

$$\vec{\psi}(x, z, t) = (0, \psi(x, z, t), 0)$$

$$\text{y} \quad \vec{\gamma}(x, z, t) = (0, \gamma(x, z, t), 0)$$

están en la misma dirección. El potencial escalar ϕ de la ecuación (1.4-5) corresponde a la propagación de ondas compresionales u ondas P. Si sustituimos la ecuación (1.4-6) en la ecuación (1.4-5) tenemos finalmente que el campo de desplazamiento queda definido como

$$\vec{u}(x, z, t) = \underbrace{\nabla \phi(x, z, t)}_{\text{Potencial P}} + \underbrace{\nabla \times \vec{\psi}(x, z, t)}_{\text{Potencial SV}} + \underbrace{\nabla \times \nabla \times \vec{\gamma}(x, z, t)}_{\text{Potencial SH}}. \quad (1.4-7)$$

¹⁰ Ángulo con que incide una onda en una interfase a partir del cual comienzan a aparecer ondas evanescentes, cuya amplitud decrece con la profundidad y viajan guiadas por la interfase.

iii) Principio de Fermat y Ley de Snell.

Hasta ahora hemos hablado de la propagación de ondas en un medio infinito. Se han definido formalmente los tipos de ondas que existen en esta condición, además de haberse establecido las ecuaciones que rigen su comportamiento. Ahora nos interesa analizar qué es lo que sucede en un medio elástico semi-infinito.

Al incidir una onda en una interfase¹¹ que separa dos medios elásticos, parte de su energía se queda en el medio del cual provino la onda incidente (ondas reflejadas), y parte atraviesa al otro medio (ondas refractadas). La ley que describe el comportamiento y la relación que guardan las ondas que intervienen, se conoce como Ley de Snell (la relación de amplitudes se tratará más adelante). Existen varios caminos para deducirla. Se puede derivar a partir de un análisis geométrico muy simple, o sino de un principio fundamental de la propagación de ondas: el principio de Fermat.

El principio de Fermat dice: la trayectoria que tome un rayo¹² entre dos puntos será aquella para la cual el tiempo de propagación sea estacionario (mínimo). Es decir, será la trayectoria entre dos puntos para la cual la derivada del tiempo de propagación con respecto a cualquier parámetro que defina a dicha trayectoria, sea cero. Si T es el tiempo de propagación entre los puntos A y C (figura 1.11), y p es cualquier parámetro que define a la trayectoria de la onda que viaja de A a C , entonces este principio establece que:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (1.4-8)$$

Ahora veamos cómo esta ecuación efectivamente define la trayectoria de tiempo mínimo, siguiendo el ejemplo que muestra la figura 1.11. Ahí se muestra una de las tantas trayectorias que puede tomar un rayo para viajar de A a C . En este ejemplo tan sencillo, es posible concluir a simple vista que la trayectoria de tiempo mínimo no es la que está trazada. La trayectoria de tiempo mínimo (que para este caso correspondería a una de menor longitud) sería una que estuviera contenida en el plano x - z . Sería parecida a la que obtendríamos si se recorre el punto intermedio B paralelamente al eje y y hasta dicho

¹¹ Superficie que define la frontera entre dos medios con diferentes propiedades elásticas, por ejemplo, con diferente velocidad de propagación de las ondas

¹² Línea imaginaria perpendicular al frente de onda que define la trayectoria del movimiento ondulatorio.

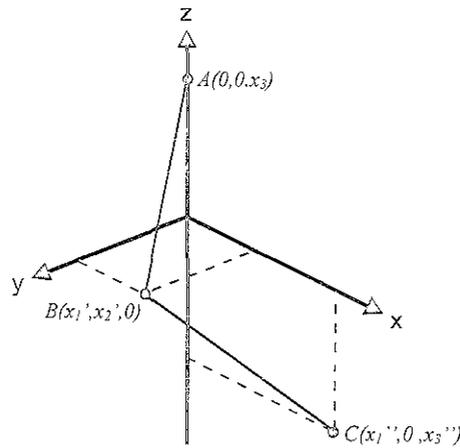


Fig. 1.11 Trayectoria de un rayo que viaja de A a C pasando por B, utilizada para mostrar el principio de Fermat.

plano, dada la ubicación de los puntos inicial y final. Esto se puede concluir matemáticamente empleando la ecuación (1.4-8) de la siguiente manera. Supongamos que el plano x-y define el contacto entre el medio 1 con velocidad de propagación V_1 , y el medio 2 con velocidad V_2 . Entonces el tiempo total desde A hasta C es

$$T = \frac{AB}{V_1} + \frac{BC}{V_2} = \frac{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}{V_2}.$$

Si derivamos esta función que define al tiempo de la trayectoria, siguiendo la ecuación (1.4-8), con respecto al parámetro x_2' (que es el de interés en este ejemplo) y la igualamos a cero, tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial x_2'} = \frac{x_2'}{V_1} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x_2'}{V_2} ((x_1'' - x_1')^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

lo cual implica que la coordenada x_2' del punto B debe ser cero para que se cumpla la ecuación, que es justo lo que esperábamos.

Para deducir la Ley de Snell pensemos en la trayectoria que acabamos de encontrar utilizando el principio de Fermat. Esta trayectoria está contenida en el plano x-z (figura

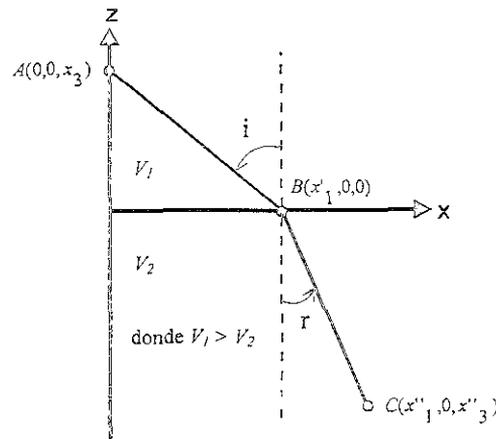


Fig. 1.12 Esquema que muestra el cambio en la dirección de la trayectoria provocado por la presencia de la interfase representada por el eje x. Este cambio de dirección está regido por la Ley de Snell.

1.12). Para este caso, el tiempo que le toma a la onda para propagarse desde A hasta C está dado por

$$T = \frac{AB}{V_1} + \frac{BC}{V_2} = \frac{\sqrt{x_1'^2 + x_3^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2}}{V_2}$$

Si tomamos en esta ocasión al parámetro x_1' para aplicar la ecuación (1.4-8), entonces tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{x_1'}{V_1} (x_1'^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x_1'' - x_1'}{V_2} [(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2]^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{1.4-9}$$

Analizando trigonométricamente la geometría de la figura 1.12, se puede ver fácilmente que

$$\frac{x_1'}{(x_1'^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{sen } i \quad ; \quad \frac{x_1'' - x_1'}{[(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2]^{\frac{1}{2}}} = \text{sen } r$$

que si sustituimos en la ecuación (1.4-9), tenemos por último la ecuación que expresa a la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } i}{V_1} = \frac{\text{sen } r}{V_2} \tag{1.4-10}$$

La generalización de esta ley puede escribirse como $\text{sen } \gamma / V = p$, donde γ es el ángulo que forme cualquier onda con una interfase y p es una cantidad llamada parámetro de rayo que se conserva constante en todas las ondas que se estén propagando en un medio, producto de una misma fuente.

De esta ley pueden derivarse conclusiones de suma importancia fácilmente. Definamos al ángulo que forma una onda con una interfase, como el ángulo que forman la normal a la interfase y el rayo de la onda (figura 1.12). Entonces es fácil darse cuenta, a partir de la Ley de Snell, de que el ángulo entre una onda de cierto tipo y la interfase en la que incide es igual al ángulo con que se refleja la onda del mismo tipo. O también saber que la onda refractada (transmitida al otro medio) formará un ángulo mayor que el que formaba la onda incidente si la velocidad del medio en que se propaga es mayor que la del medio del cual provino la onda incidente, entre otras conclusiones.

La Ley de Snell puede entenderse físicamente si definimos otro concepto denominado *velocidad de fase*. Supongamos una situación en la que un frente de onda incide con una superficie libre formando un ángulo cualquiera. Para alguien que ve cómo se propaga dicha onda de cuerpo desde la superficie, la velocidad aparente que muestra la onda es mayor que la velocidad con la que verdaderamente se propaga en el medio. Esto se puede ver mejor si se analiza la figura 1.13.

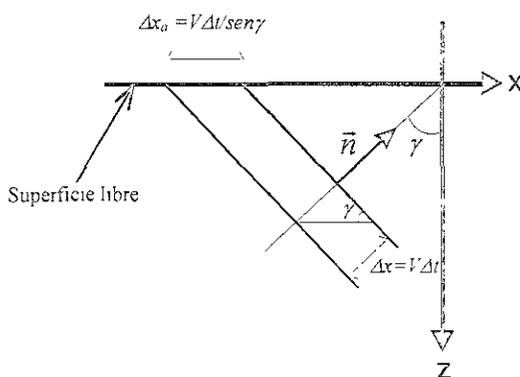


Fig. 1.13 Esquema donde se aprecia cómo la velocidad de fase de ondas de cuerpo es mayor que la velocidad con que se propaga la onda en el medio.

En esta figura se puede ver a un frente de onda en dos instantes diferentes separados por un lapso Δt . Dado que el seno de un ángulo mayor de cero grados y menor de

noventa grados siempre es menor uno, entonces la distancia $\Delta x_a = (V\Delta t / \text{sen } \gamma)$ siempre será mayor que la distancia $\Delta x = V\Delta t$. Por esta razón, y sabiendo que ambas distancias serán recorridas por el frente de onda en el mismo tiempo Δt , entonces la velocidad aparente observada en la superficie x_a , llamada velocidad de fase y representada por la letra "c" y escrita como

$$c = \frac{V}{\text{sen } \gamma}, \quad (1.4-11)$$

es mayor que la velocidad V con que se propaga en ese medio la onda. Si se compara esta cantidad con las cantidades de la ecuación (1.4-10), podemos concluir que la velocidad de fase es igual al inverso del parámetro de rayo, esto es que: $c = 1/p$. Por lo tanto, c también es un parámetro que se conserva constante en todas las ondas de cuerpo que existan, provocadas por una misma fuente.

iv) Ondas SH en una interfase.

En este apartado analizaremos lo que sucede con las amplitudes de las ondas asociadas a la incidencia de una onda SH en una interfase que separa a dos medios elásticos diferentes. Nos referimos a las relaciones que guardan las amplitudes de las ondas SH incidente, SH reflejada y SH refractada. Es posible demostrar que sólo son estas tres ondas las que aparecen en el caso SH con interfase entre dos medios sólidos elásticos. De esta demostración se hablará al final de este apartado. Regresando a la deducción de las relaciones entre las amplitudes, emplearemos algunos antecedentes que hasta ahora se han establecido. Se estudiará exclusivamente el caso más elaborado, el de una interfase entre dos medios sólidos elásticos. La incidencia de una onda SH en superficies libres, rígidas o en contacto con fluidos, se omitirán por ser menos complicados y generales.

Tratándose de una onda plana SH, usar el potencial vectorial (ecuación 1.4-6) para deducir los coeficientes de reflexión y refracción no es conveniente. Esto se debe a que

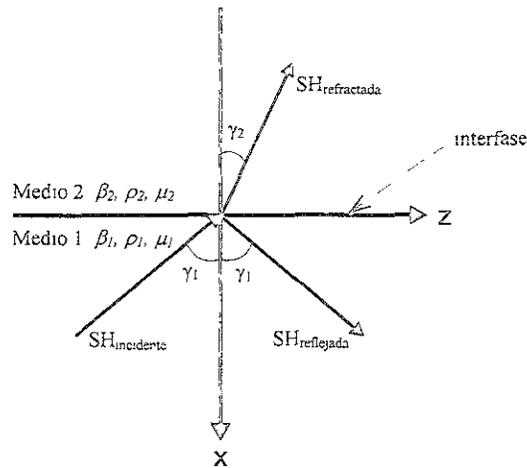


Fig. 1.14 Onda SH incidente en una interfase entre dos medios sólidos elásticos con sus respectivas ondas reflejada y transmitida.

el componente horizontal del desplazamiento es por si solo una función escalar satisfactoria con la cual se puede trabajar. De ahí se deriva que a este tipo de ondas se les denomine ondas escalares en contraste con las ondas tipo P y tipo SV, conocidas como ondas vectoriales. Si consideramos el sistema de referencia mostrado en la figura 1.14, el campo de desplazamiento generado por las tres ondas que intervienen posee sólo una dirección:

$$\vec{u} = (0, v, 0) \text{ donde } v = v(x, z, t).$$

Las condiciones de frontera que deben cumplirse en la interfase son tales que, tanto el campo de desplazamientos, como los esfuerzos generados por el medio 1, deben ser iguales a los generados por el medio 2, esto es que:

$$v_1 = v_2 \tag{1.4-12}$$

y que

$$\sigma_{xy}^1 = \sigma_{xy}^2 \tag{1.4-13}$$

todo esto en $x = 0$.

Los subíndices de (1.4-12) y los superíndices de (1.4-13) se refieren a cada uno de los dos medios.

Proponiendo una expresión para el campo de desplazamiento del medio 1 que sea solución de la ecuación de onda (1.4-1), tenemos que

$$v_1 = \underbrace{A_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_1 - x \text{Cos} \gamma_1}{\beta_1} \right)}}_{\text{Onda SH incidente}} + \underbrace{A_2 e^{i\omega \left(t - \frac{x \text{Cos} \gamma_1 + z \text{Sen} \gamma_1}{\beta_1} \right)}}_{\text{Onda SH reflejada}}, \quad (1.4-14)$$

donde A_1 y A_2 son las amplitudes de la onda incidente y reflejada respectivamente. De manera similar para el medio 2, se tiene que

$$v_2 = \underbrace{B_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_2 - x \text{Cos} \gamma_2}{\beta_2} \right)}}_{\text{Onda SH refractada}}. \quad (1.4-15)$$

donde B_1 es la amplitud de la onda refractada.

Sustituyendo las expresiones (1.4-14) y (1.4-15) en la condición de frontera (1.4-12), factorizando y reduciendo términos, nos queda la siguiente ecuación:

$$(A_1 + A_2) e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_1}{\beta_1} \right)} = B_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_2}{\beta_2} \right)}, \quad \dots$$

donde gracias a la Ley de Snell sabemos que $\beta_1 / \text{Sen} \gamma_1 = \beta_2 / \text{Sen} \gamma_2 = c$. Por esta razón, los argumentos de las exponenciales son iguales, y entonces podemos eliminar las exponenciales, quedándonos:

$$(A_1 + A_2) = B_1 \quad (1.4-16)$$

Por otro lado, en una superficie horizontal con respecto al sistema de referencia, como lo está nuestra interfase en este ejemplo (figura 1.14), los únicos esfuerzos que pueden existir en ella dado que se propagan sólo ondas SH, son los esfuerzos σ_{xy} . Es decir, aquellos esfuerzos contenidos en un plano perpendicular al eje x y con dirección paralela al eje y (que no aparece en la figura). Según la ecuación constitutiva que establece la Ley de Hooke (ecuación 1.3-4):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} \quad (\text{repetida 1.3-4})$$

tenemos que el esfuerzo de interés σ_{xy} queda definido al particularizar la ecuación anterior como

$$\sigma_{xy} = 2\mu \cdot e_{xy} \quad (1.4-17)$$

Si recordamos la definición del tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy que aparece en el segundo apartado de este capítulo (ecuación 1.2-15):

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (\text{repetida 1.2-15})$$

entonces tenemos que la componente del tensor de deformaciones que nos interesa es

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.4-18)$$

que si sustituimos en (1.4-17) nos queda la expresión que buscamos para el único esfuerzo que existe en la interfase:

$$\sigma_{xy} = \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.4-19)$$

Si particularizamos la ecuación (1.4-19) para cada uno de los dos medios, llevamos a cabo las derivadas parciales de (1.4-14) y (1.4-15) correspondientes como lo indica la ecuación (1.4-19), sustituimos en la ecuación (1.4-13) que postula la segunda condición de frontera y, finalmente factorizamos y reducimos los términos adecuados, tenemos la ecuación

$$(A_1 - A_2) \frac{i\omega\mu_1 \text{Cos}\gamma_1}{\beta_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen}\gamma_1}{\beta_1} \right)} = B_1 \frac{i\omega\mu_2 \text{Cos}\gamma_2}{\beta_2} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen}\gamma_2}{\beta_2} \right)} \quad (1.4-20)$$

Por la Ley de Snell, al igual que se hizo para obtener la ecuación (1.4-16), podemos eliminar las exponenciales. Además, existen otros factores iguales en ambos lados de la ecuación que también podemos eliminar. Haciendo todo esto, al final nos queda:

$$A_1 - A_2 = B_1 \underbrace{\left(\frac{\mu_2 \beta_1 \cos \gamma_2}{\mu_1 \beta_2 \cos \gamma_1} \right)}_K \quad \text{entonces} \quad A_1 - A_2 = K \cdot B_1. \quad (1.4-21)$$

Si suponemos que se conoce la amplitud de la onda incidente A_1 , entonces el sistema de ecuaciones formado por (1.4-16) y (1.4-21) se puede resolver para A_2 y B_1 , que son las amplitudes de las ondas reflejada y refractada respectivamente, como ya se dijo.

Resolviendo el sistema mencionado tenemos que la amplitud de la onda refractada queda expresada en función de la de la onda incidente de la siguiente manera:

$$B_1 = \frac{2 \cdot A_1}{K + 1}, \quad (1.4-22)$$

por otro lado, la amplitud de la onda reflejada se puede expresar de la misma forma como:

$$A_2 = A_1 \left(\frac{1 - K}{K + 1} \right). \quad (1.4-23)$$

Usualmente se manejan los conceptos de coeficientes de reflexión y de transmisión. Estos coeficientes no son más que los factores por los que hay que multiplicar la amplitud de la onda incidente para conocer la amplitud de las demás ondas. De esta forma, podemos presentar nuestros resultados obtenidos como:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de transmision} \quad T &= \frac{2}{K + 1} \\ \text{Coeficiente de reflexion} \quad R &= \frac{1 - K}{K + 1} \end{aligned}$$

y así hemos terminado nuestro ejercicio en donde quedan explícitamente relacionadas las amplitudes de las ondas.

Retomando el porqué de la existencia exclusiva de estas tres ondas en el ejemplo anterior, debemos decir que la demostración con la cual se evidencia este hecho se sale del alcance de este trabajo. Sin embargo, el procedimiento es similar al del caso SH con interfase libre, en donde sólo aparecen la onda SH incidente y la onda SH reflejada. Analicemos este caso y veamos cómo es condición necesaria la existencia de la onda SH reflejada para que se cumplan las ecuaciones que rigen este problema:

La condición de frontera que debe cumplirse en la interfase libre es que los esfuerzos inducidos por el medio sean cero. Imaginemos un sistema de referencia igual al de la figura 1.14. Encontrando el valor de dicho esfuerzo de manera igual a como se hizo en el ejercicio anterior, podemos escribir esta condición de frontera considerando únicamente a la onda incidente, que es la única que con certeza sabemos que existe, como

$$\sigma_{xy} = A_i \frac{i\omega\mu\text{Cos}\gamma_i}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z\text{Sen}\gamma_i - x\text{Cos}\gamma_i}{\beta}\right)} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0. \quad (1.4-24)$$

Para que esta ecuación se cumpla debemos restarle, a su miembro izquierdo, la misma cantidad algebraica que lo compone. Esto es, debemos suponer forzosamente la presencia de una segunda onda. Hay dos posibles soluciones, debido a que $x=0$ en la ecuación (1.4-24): una que siga en la misma dirección de la onda incidente, y otra que se refleja hacia abajo. La única solución posible físicamente es la segunda. Forzando a que la ecuación (1.4-24) se cumpla, tenemos que

$$\sigma_{xy} = A_i \frac{i\omega\mu\text{Cos}\gamma_i}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z\text{Sen}\gamma_i}{\beta}\right)} - \underbrace{A_r \frac{i\omega\mu\text{Cos}\gamma_r}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z\text{Sen}\gamma_r}{\beta}\right)}}_{\text{Correspondiente a la onda reflejada}} = 0 \quad (1.4-25)$$

que implícitamente establece una función del desplazamiento asociada a la onda reflejada igual a:

$$v^{(r)} = A_r e^{i\omega\left(t - \frac{z\text{Sen}\gamma_r + x\text{Cos}\gamma_r}{\beta}\right)}$$

Si observamos la ecuación (1.4-25), podemos también concluir que tanto el ángulo γ_i como la amplitud A_i de la onda incidente deben ser iguales a los que pertenecen a la onda reflejada γ_r y A_r .

v) Ondas P y SV en una interfase.

Este apartado es de gran importancia para la justificación teórica del presente trabajo. Los supuestos de los cuales partimos para llevar a cabo la construcción de una *función de receptor*, contemplan primordialmente la incidencia de ondas tipo P en la base de la corteza terrestre y sus subsecuentes conversiones al refractarse y reflejarse durante su ascenso hacia la superficie.

En el caso que se va a desarrollar, la onda que incide en la interfase es una onda tipo P. Las ondas que surgen a partir de dicha incidencia son cuatro: dos reflejadas (una P y otra SV) y dos refractadas (también una P y otra SV). Si fuera SV la onda incidente, aparecerían cuatro ondas similares de los mismos tipos en la interfase.

El objetivo del siguiente desarrollo es mostrar la manera en que debe abordarse el manejo de los dos tipos restantes de ondas de cuerpo. Esto con el fin de obtener las relaciones que existen entre las amplitudes de dichas ondas. Las ondas P y SV poseen características diferentes que las ondas tipo SH. Los campos de desplazamiento que generan, que son perpendiculares entre sí (apartado 1.4-ii) tienen, cada uno, dos componentes que están íntimamente ligados entre los dos tipos de ondas. Por esta razón, las funciones que describen dichos desplazamientos son vectoriales a diferencia de la que define a las ondas SH, que es escalar. De todo esto se desprende la necesidad de definir primero los potenciales que aparecen en la ecuación (1.4-7) para deducir, a partir de ellos, los campos del desplazamiento correspondientes a cada medio. Una vez hecho esto, el resto del desarrollo necesario para encontrar los coeficientes de transmisión y reflexión en la interfase es exactamente el mismo que para el caso SH. La única diferencia se encuentra en la condición de frontera en la que los esfuerzos deben igualarse (ecuación 1.4-27), ya que en este caso son dos componentes del tensor de esfuerzos los que aparecen en la interacción de los medios.

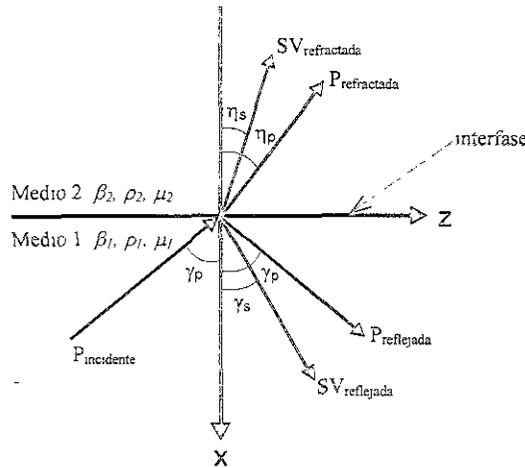


Fig. 1.15 Onda P incidente en una interfase entre dos medios sólidos elásticos con sus respectivas ondas P y SV reflejadas y transmitidas.

En la figura 1.15 aparecen todas las ondas que deben contemplarse en el problema, y el sistema de referencia que usaremos. El campo de desplazamiento que existe en ambos medios tiene solamente las componentes:

$$\vec{u} = (u, 0, w) \text{ donde } u = u(x, z, t) \text{ y } w = w(x, z, t).$$

Si definimos al campo de desplazamiento del medio 1 como \vec{u}_1 y al del medio 2 como \vec{u}_2 , entonces tenemos que en la interfase $x=0$ se deben cumplir las siguientes condiciones de frontera.

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \tag{1.4-26}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^1 &= \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{xz}^1 &= \sigma_{xz}^2 \end{aligned} \tag{1.4-27}$$

Para encontrar los campos de desplazamiento, tomamos la expresión (1.4-7) que depende de los potenciales. Para el medio 1

$$\vec{u}_1(x, z, t) = \nabla \phi_1(x, z, t) + \nabla \times \vec{\psi}_1(x, z, t), \tag{1.4-28}$$

donde los potenciales toman la siguiente forma exponencial (propuestas anteriormente para el desplazamiento en el caso SH):

$$\phi_1 = \underbrace{A_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p - x \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} \right)}}_{\text{Onda P incidente}} + \underbrace{A_2 e^{i\omega \left(t - \frac{x \text{Cos} \gamma_p + z \text{Sen} \gamma_p}{\alpha_1} \right)}}_{\text{Onda P reflejada}}$$

$$\psi_1 = \underbrace{A_3 e^{i\omega \left(t - \frac{x \text{Cos} \gamma_p + z \text{Sen} \gamma_p}{\beta_1} \right)}}_{\text{Onda SV reflejada}} \quad \text{donde } \vec{\psi}_1(x, z, t) = (0, \psi_1(x, z, t), 0).$$

El gradiente y el rotacional correspondientes a estas dos funciones potenciales está dado por las expresiones

$$\nabla \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \hat{i} + \underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}}_{\text{Es cero}} \hat{j} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{\psi}_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \hat{k}$$

que una vez desarrolladas algebraicamente y sustituidas en la ecuación (1.4-28), arrojan el campo de desplazamiento para el medio 1:

$$\vec{u}_1 = \left\{ \frac{A_1 i \omega \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p - x \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} \right)} - \frac{A_2 i \omega \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p + x \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} \right)} - \frac{A_3 i \omega \text{Sen} \gamma_p}{\beta_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p + x \text{Cos} \gamma_p}{\beta_1} \right)} \right\} \hat{i} +$$

$$- \left\{ \frac{A_1 i \omega \text{Sen} \gamma_p}{\alpha_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p - x \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} \right)} - \frac{A_2 i \omega \text{Sen} \gamma_p}{\alpha_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p + x \text{Cos} \gamma_p}{\alpha_1} \right)} + \frac{A_3 i \omega \text{Cos} \gamma_p}{\beta_1} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \gamma_p + x \text{Cos} \gamma_p}{\beta_1} \right)} \right\} \hat{k}.$$

Si consideramos ahora los potenciales correspondientes a las ondas que se propagan en el medio 2:

$$\phi_2 = \underbrace{B_2 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_p - x \text{Cos} \eta_p}{\alpha_2} \right)}}_{\text{Onda P refractada}}$$

$$\psi_2 = \underbrace{B_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_s - x \text{Cos} \eta_s}{\beta_2} \right)}}_{\text{Onda SV refractada}} \quad \text{donde} \quad \vec{\psi}_2(x, z, t) = (0, \psi_2(x, z, t), 0)$$

entonces se puede obtener, de la misma manera que para los potenciales del medio 1, la siguiente expresión para el campo de desplazamiento del medio 2:

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 = & \left\{ \frac{B_1 i \omega \text{Sen} \eta_s}{\beta_2} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_s - x \text{Cos} \eta_s}{\beta_2} \right)} + \frac{B_2 i \omega \text{Cos} \eta_p}{\alpha_2} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_p - x \text{Cos} \eta_p}{\alpha_2} \right)} \right\} \hat{i} + \\ & + \left\{ \frac{B_1 i \omega \text{Cos} \eta_s}{\beta_2} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_s - x \text{Cos} \eta_s}{\beta_2} \right)} - \frac{B_2 i \omega \text{Sen} \eta_p}{\alpha_2} e^{i\omega \left(t - \frac{z \text{Sen} \eta_p - x \text{Cos} \eta_p}{\alpha_2} \right)} \right\} \hat{k}. \end{aligned}$$

Tal y como se mencionó arriba, lo que resta en este desarrollo para terminar de deducir los coeficientes de reflexión y transmisión, es restringir el problema aplicando las condiciones de frontera mostradas en las ecuaciones (1.4-26) y (1.4-27). Los componentes del tensor de esfuerzos deben obtenerse de la misma manera como fueron obtenidos para el caso SH, empleando la Ley de Hooke y el tensor de deformaciones infinitesimales. Dado que el principal objetivo de este desarrollo es mostrar el manejo que debe hacerse de los potenciales para conocer los campos del desplazamiento, entonces se remite al lector que desee conocer los valores explícitos de los coeficientes mencionados al libro: Quantitative Seismology Theory and Methods, de Keiiti Aki y Paul G. Richards, páginas 148-151

1.5 Sistemas lineales.

1) Transformada de Fourier.

La transformación de entidades matemáticas es un recurso muy utilizado en diversos campos de la ciencia con el fin de facilitar la resolución de problemas. En particular, la transformación de Fourier es de gran importancia por la gama tan amplia de aplicaciones que tiene. Para entender las implicaciones que posee esta herramienta matemática, empecemos por definir ciertos conceptos sobre los que está soportada.

Existen diversas series matemáticas que sirven para aproximar funciones. La *serie de Fourier* permite representar cualquier señal periódica $x(t)$, como una combinación lineal de funciones senoidales y cosenoidales de diferentes períodos. La forma trigonométrica general de esta serie es la siguiente:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \quad (1.5-1)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

T es el período de $x(t)$ y $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$ que es la frecuencia angular de $x(t)$. Utilizando las identidades trigonométricas convenientes se puede llegar, a partir de la ecuación (1.5-1), a la siguiente forma alternativa de la serie:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right). \end{aligned}$$

La forma trigonométrica de la serie de Fourier permite visualizar fácilmente a la señal periódica que representa como una sumatoria de funciones senoidales y cosenoidales afectada por coeficientes reales. Sin embargo, la manipulación matemática de la serie es más versátil y conveniente si se encuentra en su forma exponencial compleja. Dicha forma aparece a continuación.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad (1.5-2)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt. \quad (1.5-3)$$

La notación empleada en la integral significa que ésta debe evaluarse sobre un período de la función $x(t)$.

De la misma manera como la serie de Fourier descompone en una sumatoria de funciones cosenoidales a una función periódica, la transformada de Fourier opera sobre las funciones que transforma. La diferencia fundamental radica en que las funciones que descompone la transformación no son necesariamente periódicas. Descomponer una función periódica con una serie de Fourier es equivalente a descomponerla efectuando su transformación. De hecho, para el caso de funciones periódicas, la serie de Fourier se puede considerar como un caso especial de la transformada de Fourier. Puede demostrarse de manera muy simple, empleando el teorema de la convolución, cómo la transformada de Fourier de una función periódica es un conjunto infinito de funciones senoidales con una amplitud igual a la que determinan los coeficientes α_n propios de la serie de Fourier. La cantidad de armónicos (funciones senoidales que constituyen la serie) necesarios para representar dichas funciones por completo es infinita. Sin embargo, como ya se dijo, la transformación de Fourier¹³ también puede descomponer funciones no periódicas, que en el dominio de la frecuencia son funciones continuas definidas para toda f .

Matemáticamente, la transformación de Fourier se puede deducir a partir de la forma exponencial compleja de la serie de Fourier (ecuación 1.5-2). Si se sustituye (1.5-3) en (1.5-2) y se hace tender el período T de la función $x(t)$ a infinito se está obligando a que

¹³ Conocida como el espectro de la función, que se encuentra en el dominio de la frecuencia

dicha función deje de ser periódica, entonces la frecuencia $\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow 0$. Esto provoca que el producto $n\omega_0$ de la exponencial, tienda a ser la variable continua ω . De esta manera la sumatoria se vuelve una integral y entonces se define a la transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.5-3)$$

donde $f(t)$ es precisamente la función que deseamos transformar, e $i = \sqrt{-1}$.

Habitualmente, la notación que se emplea para señalar la transformación de una función $x(t)$ cualquiera, es la siguiente:

$$F[x(t)] = X(\omega)$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$.

En realidad, la definición (1.5-3) de la transformada no tiene una aplicación inmediata en el procesamiento de información geofísica ya que en la mayoría de los casos los datos obtenidos son discretos. Es decir, las observaciones están digitalizadas en series temporales o espaciales. Por esta razón se ha desarrollado toda una teoría que permite obtener la transformada de Fourier de dichas series discretas. El algoritmo que efectúa esta operación recibe el nombre de FFT (Fast Fourier Transform).

Para llevar a cabo la transformación de señales discretas se debe tener una serie de cuidados para garantizar que durante el procesamiento de los datos, no se cree o se destruya información. El teorema del muestreo dice: si la transformación de Fourier $F(\omega)$ de una función $f(t)$ es cero para todas las frecuencias que no pertenezcan al intervalo $[-f_c, f_c]$ definido por una frecuencia dada f_c , entonces la función continua $f(t)$ puede ser completamente recuperada a partir de los valores de las muestras del espectro $F(\omega)$. Para que esto sea cierto, deben cumplirse dos restricciones. La primera ya fue descrita en el postulado del teorema: la banda de frecuencias donde el espectro de la función sea diferente de cero esté definida por una frecuencia dada simétrica con respecto al origen, esto es, en $|f| > f_c$. La segunda restricción es que el periodo de muestreo T cumpla con que $1/T \geq 2f_c$, es decir, que el lapso que separa a una muestra

de la siguiente tome como máximo valor $f_c/2$, ya que de lo contrario, a la hora de obtener la transformada de la función habría un traslape y por ende pérdida de información conocido como *aliasing*. A la frecuencia límite correspondiente a ese periodo de muestreo, a partir de la cual comienza a perderse información de la señal original, se le conoce con el nombre de *frecuencia de Nyquist*, y se denota como $f_N = 1/2T$.

ii) Convolución.

La convolución de dos funciones es una operación muy recurrida en diversos campos de la geofísica. Como en muchas otras relaciones matemáticas, visualizar las implicaciones que encierra la operación que la define no es fácil. Para ser más claros, la convolución de dos funciones está dada por la expresión

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (1.5-4)$$

donde la función $y(t)$ es la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$. Nótese la dificultad que presenta la visualización geométrica de la operación matemática que denota la integral de (1.5-4).

El proceso de convolución puede describirse gráficamente en cuatro pasos:

- 1.- *Plegamiento*. Tomar la imagen especular de $h(\tau)$ con respecto del eje ordenado.
- 2.- *Desplazamiento*. Correr $h(-\tau)$ tanto como valga la cantidad t .
- 3.- *Multipliación*. Multiplicar la función corrida $h(t - \tau)$ por $x(\tau)$.
- 4.- *Integración*. Calcular el área por debajo del producto de dichas funciones que es el valor de la convolución en el tiempo t .

De la misma manera como existe un algoritmo que obtiene la transformada de Fourier para funciones discretas, también existe una expresión equivalente a (1.5-4) para convolucionar series discretas en el dominio del tiempo. Se conoce con el nombre de suma-convolución y su representación matemática es la siguiente:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k-i)T] \quad (1.5-5)$$

donde las funciones $x(kT)$ y $h(kT)$ son funciones periódicas con período N .

Posiblemente, la más importante y poderosa herramienta en el análisis científico moderno es la relación que existe entre la convolución de dos funciones (ecuación 1.5-4) y la transformada de Fourier (ecuación 1.5-3). Esta relación queda establecida por el *teorema de convolución* que dice: Si $h(t)$ y $x(t)$ tienen las transformadas de Fourier $H(\omega)$ y $X(\omega)$ respectivamente, entonces la convolución $h(t) * x(t) = y(t)$ tiene la transformada de Fourier $H(\omega) \cdot X(\omega) = Y(\omega)$. Este teorema se escribe como

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(\omega) \cdot X(\omega). \quad (1.5-6)$$

La deducción de este postulado se obtiene si se transforman ambos lados de la ecuación (1.5-4), como se muestra a continuación,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt$$

que es equivalente a cambiar el orden de integración como

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau. \quad (1.5-7)$$

Haciendo el cambio de variable $\sigma = t - \tau$, el término entre corchetes queda como

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-i\omega(\sigma + \tau)} d\sigma = e^{-i\omega\tau} H(\omega)$$

que sustituyendo en la ecuación (1.5-7) queda finalmente:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} H(\omega) d\tau \quad (1.5-8)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

La demostración en dirección contraria se hace de manera similar.

iii) Sistemas lineales.

En el apartado 1.5-(i) se dijo que la mayoría las observaciones geofísicas, y en particular las sísmicas, están representadas por series temporales. Se trata de señales que toman un determinado valor a cada intervalo constante de tiempo. Entonces, se define como *sistema*, a la entidad matemática que acepte una o más señales de entrada, opere sobre ellas, y produzca una o más señales de salida. La notación más común que se emplea para describir dicha relación entre el sistema y las señales de entrada y salida es:

$$y = H[x].$$

Esto quiere decir que el sistema H opera sobre la señal de entrada x para producir la respuesta o señal de salida y . Esta operación matemática puede representarse gráficamente a través de un diagrama de flujo como se muestra en la figura 1.16.

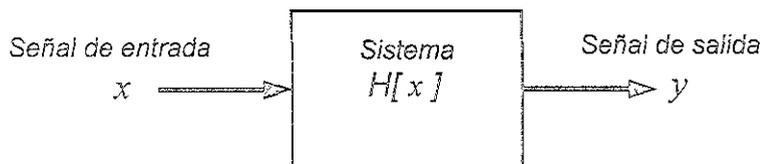


Fig. 1.16 Representación gráfica de la operación de un sistema.

Si un sistema H es *homogéneo*, entonces, multiplicar la señal de entrada por una constante es equivalente a multiplicar la señal de salida por la misma constante. Matemáticamente un sistema es homogéneo si:

$$H[ax] = aH[x] \quad (1.5-9)$$

donde a es una constante.

Si un sistema H posee la *propiedad de adición*, entonces, la salida producida por la suma de dos señales de entrada es igual a la suma de las dos salidas producidas por cada una de las dos señales de entrada. La propiedad de adición de un sistema dice que:

$$H[x_1 + x_2] = H[x_1] + H[x_2]. \quad (1.5-10)$$

Un sistema que cumpla con estas dos propiedades, es decir, que sea homogéneo y que tenga la propiedad de adición, se dice que satisface el *principio de superposición*. Entonces, se define como *sistema lineal* a todo sistema que satisfaga el principio de superposición.

Supongamos que, tanto las señales de entrada y salida como el sistema, son funciones continuas en el tiempo. Entonces, se conoce como la *respuesta al impulso unitario* de un sistema, a la señal de salida (respuesta) que se tiene si se emplea una función *delta de Dirac* $\delta(t)$ como señal de entrada al sistema. Ésta es una caracterización muy importante y conveniente de un sistema lineal, ya que la respuesta $y(t)$ de un sistema para cualquier señal continua de entrada $x(t)$ está dada por la ecuación (1.5-4), que precisamente define a la convolución de dos funciones, en donde la función $h(t - \tau)$ denota la respuesta del sistema al impulso unitario en el tiempo τ .

Si partimos de lo antes dicho y empleamos el teorema de la convolución (*relación 1.5-6*), y además seguimos la notación que hasta ahora hemos utilizado para las funciones de entrada, salida y sistema, entonces, se puede decir que la señal de salida, o respuesta del sistema H , está dada en el dominio de la frecuencia, por:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega). \quad (1.5-11)$$

Partiendo de la ecuación anterior se puede definir como *función de transferencia* $H(\omega)$ de un sistema lineal, al cociente de la transformada de Fourier de la señal de salida, entre la transformada de Fourier de la señal de entrada. Esto se obtiene despejando de la ecuación (1.5-11):

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \quad (1.5-12)$$

Por otra parte, pero igualmente importante, puede demostrarse que la función de transferencia $H(\omega)$ es igual a la transformada de Fourier de la respuesta al impulso unitario del sistema. Entonces, el cociente mostrado en la ecuación anterior es de suma importancia ya que en él se emplean exclusivamente los espectros de las señales de entrada y salida para conocer al sistema.

iv) Deconvolución.

En la ecuación 1.5-12 queda definido el concepto de función de transferencia, está implicada la operación inversa a la convolución. Esta operación es aquella que, a partir de la respuesta del sistema y del sistema mismo que le dio origen, puede obtener la señal de entrada. Veamos el siguiente ejemplo: nosotros podemos remover la función de transferencia de un sismómetro $h(t)$ que ha actuado como filtro en la señal de entrada $x(t)$, de la señal de salida $y(t)$, que representa al sismograma. Se puede escribir dicho sismograma como la convolución

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (1.5-13)$$

Para lograr la remoción del efecto provocado por el sismodetector, requerimos de un filtro inverso $h^{-1}(t)$ que, convolucionado con la respuesta al impulso unitario del aparato, arroje una función delta de Dirac:

$$h^{-1}(t) * h(t) = \delta(t). \quad (1.5-14)$$

Si se aplica dicho filtro inverso al sismograma, es decir, a la ecuación (1.5-13), entonces se eliminará la parte no deseada, dejando solamente el movimiento real descrito por el terreno, tal y como se muestra en la siguiente ecuación:

$$h^{-1}(t) * y(t) = h^{-1}(t) * h(t) * x(t) = \delta(t) * x(t) = x(t). \quad (1.5-15)$$

Esto será posible en la medida que podamos crear el filtro inverso. Utilizando la transformada de Fourier en la ecuación (1.5-14), tenemos que dicho filtro está dado por

$$H^{-1}(\omega) \cdot H(\omega) = 1 \Rightarrow H^{-1}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}. \quad (1.5-16)$$

Dado que el espectro del filtro inverso es igual al cociente de la unidad dividida entre el espectro de la respuesta al impulso unitario del sismómetro, entonces, en el dominio de la frecuencia podemos efectuar la deconvolución deseada y así eliminar el efecto provocado por el detector de la siguiente manera:

$$\frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = X(\omega) \quad (1.5-17)$$

donde esta ecuación resulta ser igual a la ecuación (1.5-12).

En otras palabras, el simple despeje efectuado en la ecuación (1.5-11) para llegar a la ecuación (1.5-12) implica un proceso de deconvolución, de remoción de efectos, ya que en el cociente se está empleando la expresión del espectro de un filtro inverso.

Es importante mencionar que para la construcción de un filtro de esta naturaleza, debe tomarse en cuenta la posibilidad de que sufra inestabilidades. Existen varios criterios para garantizar que esto no suceda. En general, estos criterios analizan la ubicación de los polos dentro del plano complejo. Es decir, estudian los valores para los cuales el cociente que expresa al filtro inverso se indefine, para los cuales el denominador se anula. En este trabajo, el rigor matemático con el que se debe abordar este tema sobrepasa los alcances del mismo, razón por la cual no se entrará en detalles. Sin embargo, tal y como se verá en el capítulo sexto, la deconvolución llevada a cabo en el procesamiento de los datos empleados contempla un artificio numérico que procura su estabilidad, conocido como nivel de agua o "water level". De lo único que se asegura este procedimiento es de evitar que valores muy pequeños, casi nulos, del denominador en el cociente espectral provoquen inestabilidades importantes durante la deconvolución.

Finalmente debe señalarse que los conceptos manejados y descritos en esta sección dedicada a los sistemas lineales, son exclusivamente aquéllos que serán utilizados de manera recurrente a lo largo del presente trabajo. No se pretendió hacer una revisión exhaustiva del tema.

2.1 Fases sísmicas.

Hasta ahora, gran parte del contenido de este trabajo han sido las base teóricas que soportan el fenómeno de la propagación de ondas elásticas en medios continuos, homogéneos, e isótropos. Sin embargo, la sismología normalmente trabaja con registros reales, es decir, con datos provenientes del interior de la Tierra donde estrictamente ninguno de estos supuestos teóricos se cumple. A pesar de ser así, los sismólogos utilizan toda esta teoría, junto con su experiencia, para llevar a cabo interpretaciones confiables y admisibles de los registros sísmicos. Con estas interpretaciones se pretende obtener información sobre la estructura interna del planeta. Los resultados propuestos en los capítulos finales de este trabajo están encaminados a esclarecer la composición de la corteza terrestre bajo la República Mexicana. Estos resultados fueron inferidos a partir del procesamiento y modelado de una gran cantidad de registros sísmicos, llamados también sismogramas.

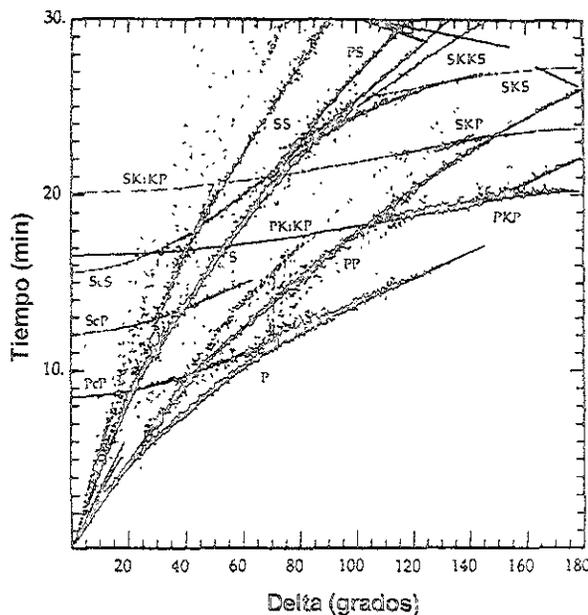


Fig. 2.1 Seis mil tiempos de arribo de fases registradas para diferentes distancias epicentrales de terremotos someros. Las fases fueron nombradas usando un trazado convencional de trayectorias a través de la Tierra. (De Kennett y Engdahl, 1991).

En los sismogramas está registrada la vibración provocada por el arribo de un terremoto a la superficie de la Tierra. La información contenida en ellos es una mezcla muy compleja de los efectos acumulados desde el origen del terremoto, en la fuente sísmica, hasta su llegada al sismógrafo donde es registrado. Mientras más podamos distinguir y cuantificar

estos efectos contenidos en dicha vibración, más podremos entender y conocer la estructura de la Tierra y sus procesos dinámicos. Los procedimientos empleados normalmente para identificar la procedencia de las fases u ondas en un sismograma son: determinar su comportamiento en función de la distancia que separa a la fuente del sismógrafo, medir el tipo de movimiento que inducen en la superficie y establecer su consistencia entre diferentes eventos.

Catalogar sistemáticamente los tiempos de viaje de todas las fases identificadas en muchos sismogramas, provee información muy útil para determinar la estructura del interior del planeta. Cerca de 3000 estaciones sísmicas distribuidas en todo el mundo han reportado ininterrumpidamente los tiempos de arribo de las fases más importantes al International Seismological Center (ISC) desde 1964. La base de datos de este centro posee más de 7 millones de tiempos registrados que han sido atribuidos a más de 25 tipos de fases diferentes, cada una de ellas asociada a un rasgo estructural específico del interior de la Tierra.

En la figura 2.1 se muestra una gran cantidad de estos tiempos como una función de la distancia epicentral. Se aprecian claramente alineamientos que definen ramas, cada una para una diferente fase, como las correspondientes a las ondas P y S directas, u otras que tienen trayectorias más complicadas. El hecho de que dichas ramas sean coherentes y prominentes demuestra que, en términos generales, la Tierra posee una simetría radial en su estructura de velocidades de propagación de las ondas. Por otro lado, algunos de los arribos indefinidos como los que se encuentran dispersos en la gráfica (figura 2.1), son manifestaciones de heterogeneidades tridimensionales de la velocidad. Asumiendo que existe la simetría radial recién mencionada, se pueden predecir los tiempos de arribo de muchas fases sísmicas con un alto grado de precisión. Esto provee las bases para muchos de los procedimientos utilizados en la localización de epicentros.

2.2 Modelos globales terrestres.

La determinación de un modelo estructural de velocidades para nuestro planeta, es de gran importancia en muchos ámbitos de las ciencias abocadas a la Tierra. La conformación de un modelo global de esta naturaleza se lleva a cabo a partir de las curvas o ramas presentadas en la figura 2.1. Para esto, una vez que se han definido bien cada una de ellas, se realiza el modelado de la estructura de velocidades de ondas P y S en función de la profundidad, empleando métodos de inversión, tal y como se explica

ampliamente en el capítulo dedicado a la Teoría de Inversión en Geofísica (capítulo 4). En este proceso de modelado no sólo se consideran las ondas de cuerpo, sino también las ondas superficiales de periodo largo y las oscilaciones libres del planeta. Estas observaciones han llevado a los sismólogos dedicados a esta labor, a determinar modelos unidimensionales de velocidades elásticas con sus respectivas densidades para todo el planeta. Uno de los modelos más aceptados y usados se muestra en la figura 2.2 (Dziewonski y Anderson, 1981). Este modelo, que difiere de aquéllos desarrollados en los años treinta, muestra las discontinuidades más relevantes del interior de la Tierra: el núcleo interno sólido, el núcleo externo fluido, el manto inferior y el manto superior; proporcionando información de cada zona, como lo es la velocidad de propagación de las ondas P y S , y la densidad. La corteza es la capa más superficial y delgada. Por estas razones no se alcanza a ver con claridad a la escala en que está hecha la figura. Una deficiencia que presentan los modelos generales es que no expresan la complejidad que sabemos que tiene un sistema dinámico y evolutivo como lo

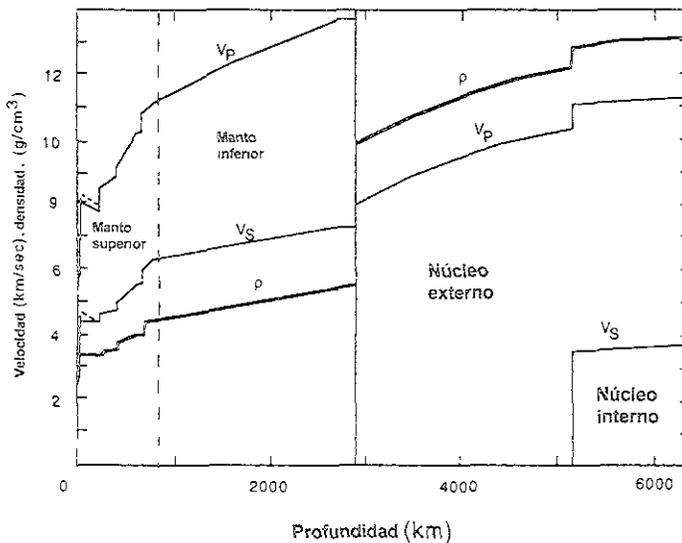


Fig. 2.2 Modelo terrestre global para velocidad P , velocidad S y densidad ρ , como funciones de la profundidad de la Tierra. (Tomada de Dziewonski y Anderson, 1981).

es nuestro planeta. Por esta razón, los sismólogos están preocupados por construir modelos tridimensionales que permitan conocer la estructura interna con más detalle y a otras escalas. Cabe señalar que el objetivo central de este trabajo es determinar la estructura de esa delgada capa superficial, casi cáscara, llamada corteza terrestre, en algunos sitios de interés de nuestro territorio.

2.3 Nomenclatura de las ondas de cuerpo.

El contenido de información y las características básicas de un sismograma dependen de manera muy importante de la distancia epicentral. Esto es, de la distancia que separa al epicentro del receptor. A una distancia pequeña, el carácter del sismograma está influenciado principalmente por los detalles de la estructura altamente compleja de la corteza. A distancias epicentrales grandes, el sismograma está dominado por las estructuras relativamente simples del manto y del núcleo, así como por efectos más locales derivados de la estructura cortical que se encuentra por debajo del receptor. Existe una clasificación general de los sismogramas basada en la distancia epicentral a la que fueron registrados: 1) sismogramas de *distancias locales*, con trayectorias menores a 100 km., 2) sismogramas de *distancias regionales*, con trayectorias que van de $100 \leq X \leq 1400$ km ($1^\circ \leq \Delta \leq 13^\circ$), donde Δ es la distancia en grados; 3) sismogramas de *distancias del manto superior*, con trayectorias que van de $13^\circ \leq \Delta \leq 30^\circ$; y 4) sismogramas de *distancias telesísmicas*, con trayectorias de $\Delta \geq 30^\circ$. Conforme esta distancia es mayor, la profundidad que alcanzan las ondas al propagarse es también mayor. Por lo tanto, la información del interior de la tierra que tiene un sismo al arribar a la superficie depende directamente de ese factor. Es por eso que la nomenclatura de las fases presentes en un sismograma depende también de la distancia epicentral.

La energía sísmica (dada una distancia epicentral fija) puede viajar siguiendo diversas trayectorias, desde la fuente que le dio origen, hasta el receptor donde es registrada. Esta energía logra alcanzar la superficie a pesar de dirigirse inicialmente hacia el interior debido, por un lado, a la curvatura de la Tierra, y por el otro, a que la velocidad de propagación de las ondas aumenta con la profundidad. Si recordamos el significado y las implicaciones de la ley de Snell (*ecuación 1.4-10*) queda claro que por ésta las ondas se ven obligadas a arquear su trayectoria retornando a la superficie (figura 2.5). Las ondas de cuerpo estudiadas con más frecuencia son las ondas *P* y *S* directas, cuyas trayectorias son las más simples que puede haber. Ellas describen el recorrido de tiempo mínimo entre la fuente y el sismógrafo. Si el rayo correspondiente a una onda tipo *P* directa sale de la fuente con un ángulo respecto a la vertical menor de 90° (figura 2.3-a), esto es, por abajo de un plano horizontal imaginario, entonces dicha fase se etiqueta con la letra mayúscula *P*, o con la letra *S* si la onda fuera tipo *S*. En cambio, si las mismas ondas hubieran salido de la fuente con un ángulo mayor de 90° (figura 2.3-a) entonces, los

nombres que recibirían dichas fases serían las letras minúsculas *p* y *s*. Los rayos de este segundo tipo que viajan a la superficie, se reflejan ahí, y suben finalmente al receptor, corresponden a ondas conocidas con el nombre de *ondas o fases de profundidad*. A cada sección de la trayectoria de un rayo se le etiqueta con una letra. Por ejemplo, en el caso de estas ondas, a la sección que va desde la fuente hasta la superficie donde son reflejadas, se le asigna una letra como ya vimos (*p* o *s*), y a la sección siguiente que va de la superficie al receptor, otra letra diferente (figura 2.3-b). De esta manera, los nombres de las trayectorias de ondas no directas constan de una sucesión de letras correspondientes a cada una de las secciones que las conformen.

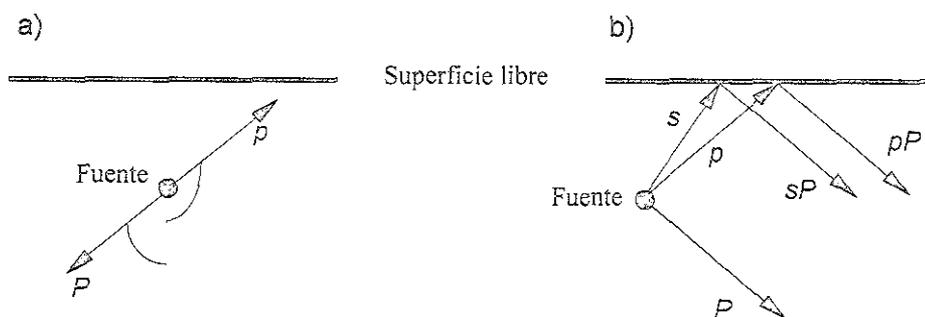


Fig. 2.3 a) Nomenclatura de rayos que depende del ángulo con que salgan de la fuente, b) geometría de las ondas profundas con sus respectivas nomenclaturas.

Para las ondas de profundidad que posean exclusivamente una sección de su trayectoria, entre la reflexión en la superficie y el receptor, existen sólo cuatro posibles casos: *pP*, *sS*, *pS*, y *sP*.

En los sismos locales y regionales, esto es para $\Delta \leq 13^\circ$, se emplea una nomenclatura especial para describir los recorridos. En la figura 2.4 se muestra un esquema básico de la estructura de la corteza con diferentes trayectorias. Los arribos de ondas directas son nombrados como P_g y S_g . Las fases que viajan por debajo del Moho¹⁴ o a lo largo de él, son llamadas P_n y S_n . Las reflexiones en el Moho están etiquetadas como PmP , PmS , SmP o SmS . Hay que notar que cada una de las secciones de los trayectos está nombrada y que la *m* denota la reflexión en el Moho. La discontinuidad que se encuentra entre la superficie libre y el Moho se conoce con el nombre de *discontinuidad de Conrad* (figura 2.4) y aparece en la figura por ser un rasgo estructural que en muchos lugares de la corteza terrestre se observa. Muchos autores asocian dicha discontinuidad con la

transformación de las rocas debida al metamorfismo regional de las mismas. Los arribos asociados a esta interfase se denotan como P^* y S^* .

A distancias epicentrales de $\Delta \geq 13^\circ$ las ondas se internan más en las profundidades de la Tierra alcanzando así, otras interfases donde se ven reflejadas. El nombre de estas ondas incluye letras que hacen referencia a dichas interfases. Por ejemplo, una onda tipo P que viaja hacia el interior, se refleja en el núcleo y sube a la superficie, se

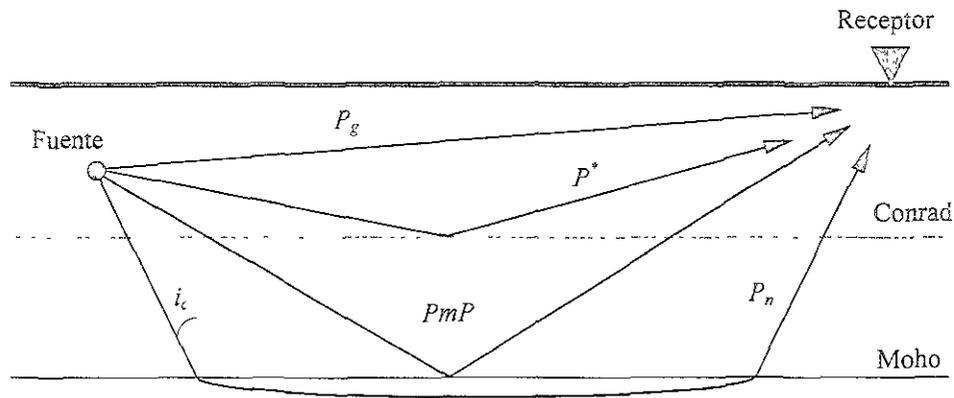


Fig. 2.4 Sección simplificada de la corteza donde se muestran algunas trayectorias de fases comúnmente observadas, con sus respectivos nombres. Nomenclatura exclusiva para sismos locales y regionales.

nombra: PcP , donde la c (core) hace mención al núcleo reflector (ver figura 2.6). Las reflexiones en la superficie libre no se denotan con ninguna letra. Es preferible denotar únicamente las secciones previa y posterior a la reflexión en la superficie libre de la trayectoria, con una P o una S . Este tipo de fases son conocidas como *reflexiones de superficie*. Algunas trayectorias comunes que presentan estas fases son: PP , PS , y PPP , donde los primeros dos casos sufrieron sólo una reflexión, y el tercero dos en la superficie libre (figura 2.5). Algunas combinaciones que existen de reflexiones en el núcleo y en la superficie libre pueden ser las siguientes: $PcPPcP$, $ScSScS$ (ScS_2), o $ScSScSScS$ (ScS_3). Si son generadas por fases de profundidad entonces se pueden presentar los casos: $pPcP$ y sPP , por ejemplo (ver figuras 2.5 y 2.6).

El hecho de que diversas trayectorias puedan existir geoméricamente no significa que todos sus arribos sean detectables. Por ejemplo, el coeficiente de reflexión de una onda P

¹⁴ Discontinuidad elástica descubierta por Mohorovicic en 1909 que define el contacto entre la corteza y el manto.

para una incidencia vertical en el núcleo es casi cero ya que el contraste acústico es pequeño. Por el contrario, un ángulo de incidencia grande proporciona un coeficiente de

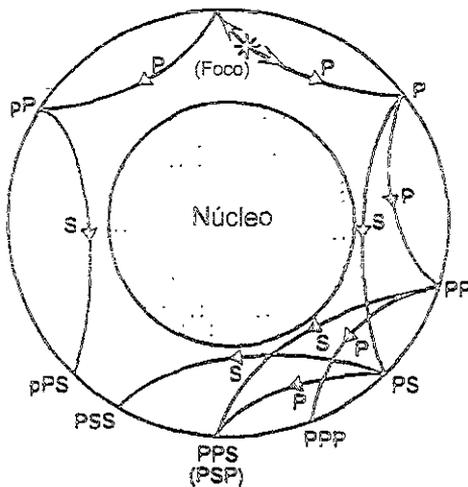


Fig. 2.5 Trayectorias de varias reflexiones superficiales observadas en la Tierra (modificada de Bullen y Bolt, 1985).

reflexión grande. Otro ejemplo se da en el rango de distancia $103^\circ < \Delta < 140^\circ$ conocido como la zona de sombra del núcleo, que es ocasionada por una dramática caída de la velocidad que aparece yendo de la base del manto hacia el interior del núcleo. Las ondas de cuerpo que atraviesan el núcleo tienen su propia nomenclatura. Las fases tipo *P* que atraviesan el núcleo externo (que es fluido), se denotan con una *K* (de Kernwellien, que significa núcleo en alemán). De esta manera, una onda *P* que llegue hasta el núcleo externo, lo atraviese, y salga nuevamente como *P*, se denota por *PKP* (o abreviado *P'* ver figura 2.6). De forma similar es posible tener fases *PKS*, *SKS*, y *SKP*. Las fases generadas por ondas tipo *P* que atraviesan el núcleo interno sólido se denotan con la letra mayúscula *I*, por ejemplo, la trayectoria *PKIKP* (ver figura 2.6), si es una onda *S* la que atraviesa el núcleo interno entonces se usa la letra mayúscula *J*, por ejemplo *PKJKP*. Una reflexión exterior en el núcleo interno se refiere con la letra minúscula *i*, por ejemplo la trayectoria *PKiKP*.

La frontera entre el núcleo y el manto es un fuerte reflector tanto por la parte exterior de la interfase como por la parte interior. Se había visto que una reflexión exterior se denota como *PcP*. Pero una reflexión interna en esa frontera sufrida por una ondas *P* se nombra con la repetición de la letra mayúscula *K* de la siguiente manera: *PKKP*, *SKKS*, *SKKP* o *PKKS* (ver figura 2.6). Si existen reflexiones múltiples en el interior, la nomenclatura se

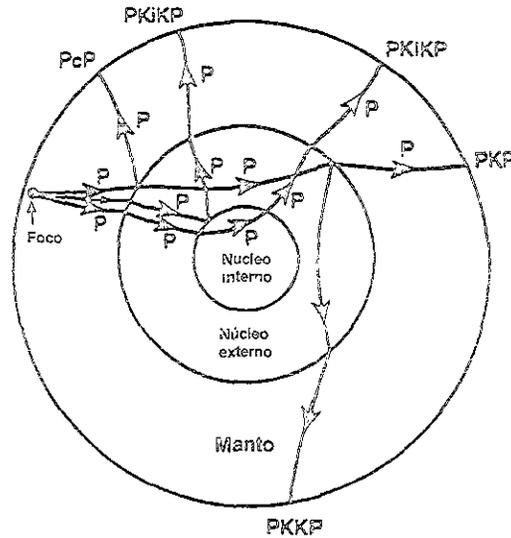


Fig. 2.6 Trayectorias de varias fases que atraviesan el núcleo externo e interno. La interfase manto-núcleo está a 2886 km., la interfases entre el núcleo interno y externo está a 5150 km. (modificada de Bullen y Bolt, 1985).

puede abreviar como P_mKP o S_mKP donde la m es el número de secciones de la trayectoria, y $m-1$ es la cantidad de reflexiones. En observaciones realizadas, se han hecho arreglos sísmicos que proveen observaciones detalladas donde se han detectado hasta trayectorias tan complejas como la $P7KP$.

En este capítulo se ha descrito la nomenclatura empleada en la sismología para referirse a una amplia gama de fases sísmicas que se propagan en el interior de la Tierra durante un terremoto. De esta manera se ilustró la complejidad que encierra un sismograma como los que se emplearon en este trabajo con el fin de conocer la estructura de la corteza en México.

3.1 Funciones de receptor.

i) Introducción, modelos heterogéneos.

En el capítulo anterior se estudió la manera en que los sismólogos han podido determinar modelos globales para la estructura del interior de la Tierra. Se analizaron y clasificaron las trayectorias de diferentes fases con el fin de entender el significado y la utilidad que tiene el manejo de sus tiempos de arribo. Sin embargo, ha sido ampliamente reconocido que los modelos de capas simples y tan generales son una aproximación muy pobre de la estructura que presenta normalmente la corteza terrestre. Las diferencias tan obvias entre la corteza continental y la corteza oceánica, o la geología a veces indescifrable expuesta en superficie, son pruebas fehacientes de la complejidad que caracteriza su estructura. Los procesos geológicos que provocan la formación de capas planas, como la sedimentación, los flujos de lava, y la precipitación química, son eventos que afectan regiones y volúmenes espaciales limitados, que, aunados a los movimientos tectónicos de la corteza, deforman las estructuras subyacentes. Se han hecho grandes esfuerzos por conocer la corteza en muchas regiones del planeta. Por un lado, a través de innumerables campañas de exploración geofísica en búsqueda de recursos naturales, y por el otro, con la investigación que las ciencias abocadas al estudio de la Tierra han hecho por comprender su evolución y constitución. De todo esto se ha desprendido una gran cantidad de modelos regionales en dos y tres dimensiones que intentan justificar con mayor exactitud las observaciones

Las ondas telesísmicas P han sido modeladas, desde mediados de los años 60's, para estimar la estructura de la Tierra abajo de sitios de registro aislados (*Phinney, 1964; Burdick y Langston, 1977; Langston, 1979*). La mayor parte de estos estudios emplearon datos de periodo largo para determinar características estructurales muy generales. Estos datos se han modelado tanto en el dominio de la frecuencia (*Phinney, 1964; Kurita, 1973*) como en el dominio del tiempo (*Jordan y Frazer, 1975; Langston, 1981*). Sin embargo, es lógico pensar que, al haber usado sismógrafos estándares de periodo largo y haber digitalizado manualmente los sismogramas, no se alcanzó la resolución que demanda la complejidad de la corteza. Por esta razón, se introdujeron sismógrafos de banda ancha en el análisis de registros telesísmicos (*Owens et al., 1984. Owens, 1987*), detectando frecuencias mucho más altas que permiten modelar estructuras con mucha mejor resolución. Aunado a esto, se desarrollaron nuevas técnicas para procesar formas de ondas telesísmicas contribuyendo también a la calidad de los modelos

ii) Antecedentes del fenómeno modelado.

En este trabajo se emplea una técnica específica que permite modelar la estructura debajo del receptor utilizando las primeras ondas telesísmicas tipo P , y sus conversiones en la corteza. Para esto, las respuestas de la corteza y del manto superior, contenidas en las componentes del sismograma, deben aislarse de los efectos proporcionados por la fuente y el trayecto, que también influyen en la forma del mismo. La eliminación de dichos efectos indeseados se lleva a cabo con una deconvolución de las componentes del registro. Antes de explicar ampliamente este procedimiento con el que se ecualizan varios registros para compensar las diferencias provocadas por las funciones de fuente y trayecto, se debe entender la naturaleza del fenómeno que va a modelarse.

Al tratarse de telesismos, las distancias epicentrales son considerablemente grandes $\Delta \geq 30^\circ$ (ver sección 2.1-iii). Por esta razón, el tiempo de viaje y las distancias que recorren son lo suficientemente grandes para que un tren de ondas P de varios minutos arribe a la base de la corteza antes que la primer onda tipo S . Además, la energía liberada en el foco alcanza una profundidad importante en el manto, lo que obliga que el ángulo de incidencia del frente de onda al llegar a la corteza sea pequeño. Durante su ascenso a la superficie desde el Moho, existe una reducción paulatina de los ángulos que se forman entre dicho frente y las diversas interfaces que va atravesando (ver figura 3.1-a). Así, el desplazamiento en la superficie libre provocado por la incidencia de ondas P , quedará grabado predominantemente en la componente vertical del sismograma; de igual forma, el desplazamiento provocado por la incidencia de ondas S (convertidas), quedará predominantemente en las componentes horizontales del registro.

Antes de proceder con el método, es importante mencionar un procedimiento previo que debe hacerse con los registros sísmicos. Analizando en planta a un telesismo durante su recorrido a través de la corteza dentro de un marco de referencia cardinal, vemos que, en general, la proyección horizontal de su trayectoria (suponiendo paralelismo y horizontalidad de las capas) forma cierto ángulo, medido desde el norte en dirección de las manecillas del reloj, con la línea norte-sur del marco de referencia. A este ángulo se le conoce con el nombre de back-azimuth (figura 3.1-b). Los tres componentes de un registro corresponden a las direcciones $n-s$, $e-w$, y vertical del movimiento. Sin embargo, el método estudiado requiere de las proyecciones radial y transversal del desplazamiento. Por esta razón es necesario rotar los componentes horizontales $n-s$ y $e-w$, a las direcciones recién mencionadas, ver figura 3.1-b. De esta manera, en un caso

ideal donde incidían ondas P en la base de una estructura de capas planas y horizontales, únicamente aparecerían arribos de fases en los componentes radial y vertical del desplazamiento, en contraste con el componente transversal donde no habría registro alguno. De hecho, la amplitud del componente transversal, antes del arribo de las ondas superficiales y de cuerpo polarizadas horizontalmente, puede tomarse como un indicador de la estructura tridimensional.

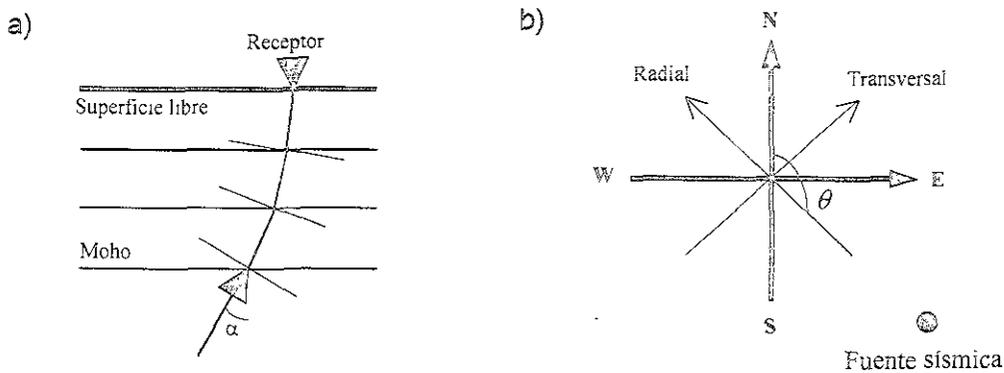


Fig. 3.1 a) Frente de onda telesísmico incidiendo con un ángulo pequeño en la base de la corteza, b) Sistema de referencia cardinal en cuyo origen se encuentra una estación sísmica, θ es el back-azimuth (siempre medido de esa forma) del sismo que debe considerarse para rotar los componentes del registro.

iii) Ecuación de registros telesísmicos.

Con base en lo anterior, se puede estudiar el método utilizado en este trabajo, el cual consiste en lo siguiente. Langston en 1979 (Langston, 1979) propuso un procedimiento para ecualizar la información de diferentes telesismos, eliminando los efectos de fuente y trayecto que se encuentran en los registros telesísmicos y así construir funciones de receptor, o series de tiempo que respondan exclusivamente a las fases S convertidas en la estructura que se encuentra por debajo de la estación.

Teóricamente, los componentes del desplazamiento en el dominio del tiempo generados por un frente de ondas plano P que incide casi verticalmente en la base de un paquete estratificado, se pueden expresar de la siguiente manera (Langston, 1979):

$$\begin{aligned}
 D_V &= I(t) * S(t) * E_V(\bar{t}) \\
 D_R &= I(t) * S(t) * E_R(t) \\
 D_T &= I(t) * S(t) * E_T(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1-1}$$

donde $S(t)$ es la función de fuente en el dominio del tiempo, $I(t)$ es la respuesta al impulso unitario del instrumento y $E_V(t)$, $E_R(t)$ y $E_T(t)$, son respectivamente las respuestas vertical, radial y transversal de la estructura al impulso unitario, es decir, son las funciones de transferencia de la estructura en cada dirección.

Si se estudian dichas componentes en sismogramas telesísmicos tanto reales como sintéticos, es notable que la componente vertical de los registros se comporta principalmente como una función impulsiva, correspondiente a la onda P directa, convolucionada con las respuestas del instrumento y de la fuente, además de una sucesión de fases con amplitudes mucho menores correspondientes, la mayoría, a reverberancias y fases convertidas en interfases profundas (Burdick y Helmberger, 1974). Por lo tanto, el esquema de ecualización propuesto por Langston supone que la respuesta vertical de la corteza es aproximadamente igual a

$$E_V(t) \approx \delta(t) \quad (3.1-2)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Obviamente existen errores en esta aproximación, sin embargo, éstos son tolerables si se compara con las ventajas que proporciona (Owens et al., 1983). Si se introduce la suposición (3.1-2) en la componente vertical de las ecuaciones (3.1-1), tenemos que

$$D_V(t) \approx I(t) * S(t). \quad (3.1-3)$$

Esta aproximación será más exacta en la medida que no existan contrastes de velocidad importantes en interfases intermedias del modelo, aproximadamente mayores a 2 Km/s (Langston, 1979). De existir éstas, generarían fases convertidas y múltiples de considerable amplitud que harían más complejo al componente vertical del desplazamiento.

En la ecuación (3.1-1) se supuso que los tres componentes del desplazamiento poseen el mismo efecto de fuente y de instrumento. Entonces, utilizando la ecuación (3.1-3) se pueden deconvolucionar estos efectos de los componentes radial y transversal, aislando las funciones de transferencia, o sistemas, correspondientes a la estructura en las direcciones horizontales (ver secciones 1.5-iii y 1.5-iv ecuaciones 1.5-12 y 1.5-17). El cociente espectral que efectúa de manera aproximada esta operación, para las funciones de transferencia de la estructura en direcciones radial y transversal, es.

$$E_R(\omega) = \frac{D_R(\omega)}{I(\omega) \cdot S(\omega)} \approx \frac{D_R(\omega)}{D_V(\omega)} \quad (3.1-4)$$

$$E_T(\omega) = \frac{D_T(\omega)}{I(\omega) \cdot S(\omega)} \approx \frac{D_T(\omega)}{D_V(\omega)}$$

Con el fin de controlar el contenido de frecuencias en las funciones de receptor, se emplea una campana Gaussiana que juega el doble papel de filtro pasa bajas, y señal de entrada para el sistema del que se trate, ya sea $E_R(\omega)$ o $E_T(\omega)$. Para el caso de la función de receptor radial se tiene que

$$E'_R(\omega) = \frac{D_R(\omega)}{D_V(\omega)} \cdot G(\omega) \quad (3.1-5)$$

donde $E'_R(\omega)$ es la función de receptor radial de la Tierra, y la $G(\omega)$ es el espectro de la campana Gaussiana cuya expresión en el dominio del tiempo es

$$G(t) = \xi \exp - \left[\pi \left(\frac{t - t_s}{t_p} \right) \right]^2 \quad (3.1-6)$$

donde t_s y t_p son el desfase temporal y el periodo característico de la campana respectivamente, y la ξ es una constante de normalización que depende de t_p .

El cociente mostrado en la ecuación (3.1-5) es numéricamente inestable. Esto se debe a la división que supone el procedimiento de deconvolución, en la que puede haber números muy pequeños como denominador, esto es, en el espectro del componente vertical. Para evitar dicha inestabilidad, se aplica un artefacto numérico conocido como nivel de agua (water-level) cuya única función es fijar un valor mínimo que pueda tomar dicho espectro. La expresión que establece este nivel se muestra a continuación

$$E'_R(\omega) = \frac{D_R(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega)}{\Phi_{SS}(\omega)} \cdot G(\omega) \quad (3.1-7)$$

donde

$$\Phi_{SS}(\omega) = \max \left\{ D_V(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega), c \cdot \max [D_V(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega)] \right\}.$$

La constante c determina el nivel de agua y $\bar{D}_V(\omega)$ representa el complejo conjugado de $D_V(\omega)$. Normalmente, el parámetro c toma el valor de 0.01 (Langston, 1979).

Originalmente, la técnica presentada para estimar la deconvolución (ecuación 3.1-7), fue sugerida por Helmberger y Wiggins (1971) y por Dey-Sarkar y Wiggins (1976).

Las curvas resultantes de esta manipulación matemática, ya sea la función de receptor radial o la función de receptor transversal, no son más que una versión escalada de su correspondiente componente del desplazamiento, con los múltiplos que arribaron al receptor como P eliminados (Ammon, 1991).

iv) Análisis del contenido de una función de receptor.

En el trabajo anteriormente citado de Charles Ammon (1991), se analizan los componentes del desplazamiento radial y vertical para la incidencia de una onda P desde el punto de vista del trazado de rayos. Él dice que dichos componentes en el dominio del tiempo están definidos por

$$Z(t) = \sum_{k=0}^n z_k s(t - t_k)$$

$$R(t) = \sum_{k=0}^n r_k s(t - t_k)$$

donde $Z(t)$ y $R(t)$ representan los componentes vertical y radial del movimiento respectivamente, $s(t)$ es la función de fuente. t_k es el tiempo con que arriba el k -ésimo rayo ($k=0$ es la onda P directa), y la suma hasta n , representa la suma de n rayos que alcanzan el receptor. La magnitud del k -ésimo rayo en cada componente está dada por z_k y r_k . Estos dos componentes, para un modelo simple de una capa horizontal sobre un semiespacio en el dominio de la frecuencia, y considerando únicamente tres arribos: el de la onda P directa, el de la conversión Ps , y el del primer múltiple P , se expresan como

$$R(\omega) = r_0 \left[1 + \hat{r}_p e^{-i\omega t_p} + \hat{r}_s e^{-i\omega t_s} \right] \quad (3.1-8)$$

$$Z(\omega) = z_0 \left[1 + \hat{z}_p e^{-i\omega t_p} + \hat{z}_s e^{-i\omega t_s} \right] \quad (3.1-9)$$

en donde $\hat{r}_p = r_p/r_0$ y $\hat{r}_s = r_s/r_0$ de manera análoga que para las amplitudes normalizadas del componente vertical. Dado un ángulo de incidencia muy pequeño, como el que describen los telesismos en la base de la corteza, se puede asumir que la amplitud de la onda convertida \hat{z}_s registrada en el componentes vertical es muy pequeña. Además, se sabe que las amplitudes normalizadas para la P directa son iguales, esto es que $\hat{r}_p = \hat{z}_p$. Por lo tanto, introduciendo estas consideraciones en las dos ecuaciones anteriores (3.1-8) y (3.1-9), sustituyéndolas en el cociente espectral definido en la ecuación (3.1-5), que se puede reescribir siguiendo la nueva nomenclatura como

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{Z(\omega)},$$

y tomando exclusivamente los términos de grado menor que dos de la expansión $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\dots$ utilizada para el denominador; se tiene que la función de transferencia en dirección radial del modelo estudiado $H(\omega)$, es

$$H(\omega) = \frac{r_0}{z_0} \left[1 + \hat{r}_s e^{-i\omega t_s} \right], \quad (3.1-10)$$

cuya expresión en el dominio del tiempo (ecuación 3.1-11) nos muestra lo que se había dicho anteriormente del contenido de una función de receptor: es una versión escalada del componente horizontal correspondiente, con los múltiples P removidos; comparar ecuación (3.1-10) con ecuación (3.1-8).

$$h(t) = \frac{r_0}{z_0} \left[\delta(t) + \hat{r}_s \delta(t - t_s) \right]. \quad (3.1-11)$$

Esta demostración matemática puede ilustrarse comparando los componentes radial y vertical de un sismograma sintético, con la función de receptor obtenida a partir de ellos. Para un modelo simple, como el que se había supuesto anteriormente de una capa sobre un semiespacio, donde el espesor de la capa es de 40 km, se tiene que la función de receptor y los componentes correspondientes son:

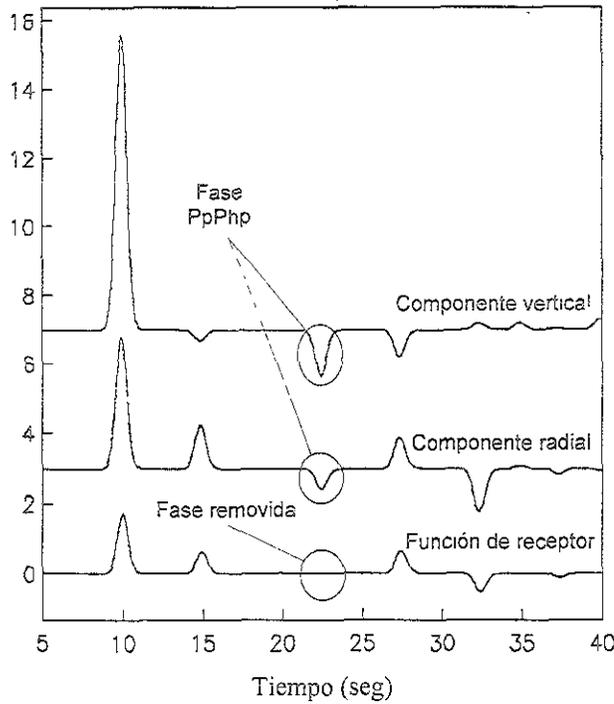


Fig. 3.2 Componentes radial y vertical del desplazamiento para un modelo simple (ver texto), comparados con la función de receptor obtenida a partir de ellos. Nótese la remoción de las fases que arribaron como P a la superficie.

Para nombrar con propiedad y sin confusión a cada una de las fases relevantes que aparecen en una función de receptor se va a seguir, a lo largo del trabajo, la nomenclatura que aparece en la figura 3.3. En esta figura también se muestran las trayectorias que describen los rayos asociados a dichas fases. La interfase denominada "h" podría representar al Moho, interfase que en este trabajo es un objeto de estudio relevante.

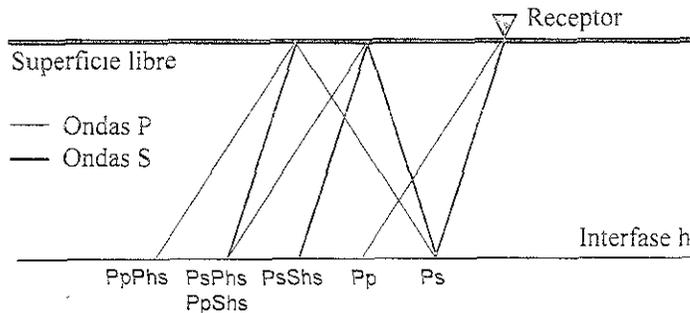


Fig. 3.3 Trayectorias correspondientes a las fases directas y primeros múltiples en una capa sobre un semiespacio. Se muestra también la convención usada para la nomenclatura de cada fase.

Si se analiza con cuidado la nomenclatura que aparece en la figura 3.3, las letras mayúsculas, a excepción de la primera, representan el tipo de onda reflejado en la superficie libre; las letras minúsculas que suceden a la primera letra, representan al tipo de onda refractado en la superficie "h"; las letras minúsculas que suceden a la letra "h", representan el tipo de onda reflejado en la superficie del mismo nombre; y la primer letra, que siempre es "P", representa a la onda incidente del semiespacio.

3.2 Estructuras inclinadas.

Recientemente, el análisis de funciones de receptor obtenidas a partir de registros de banda ancha ha sido aplicado en sitios donde la suposición de homogeneidad y horizontalidad de la estructura no se apega al marco tectónico y geológico existente (Ammon, 1985; Owens et al., 1988; Lapp et al., 1990; Zhang y Langston, 1995; Bump y Sheehan, 1998). Por esta razón se han estudiado los efectos que provoca, en las funciones de receptor radiales y transversales, la existencia de interfases inclinadas con respecto a la superficie libre (Langston, 1977; Owens y Crosson, 1988). En 1992, J. F. Cassidy realizó una serie de experimentos numéricos (Cassidy, 1992) que lograron identificar y cuantificar dichos efectos, estableciendo las relaciones de dependencia que hay entre una función de receptor obtenida sobre una estructura inclinada, y la posición relativa entre el epicentro telosísmico y la estación sísmica (back-azimuth y distancia epicentral).

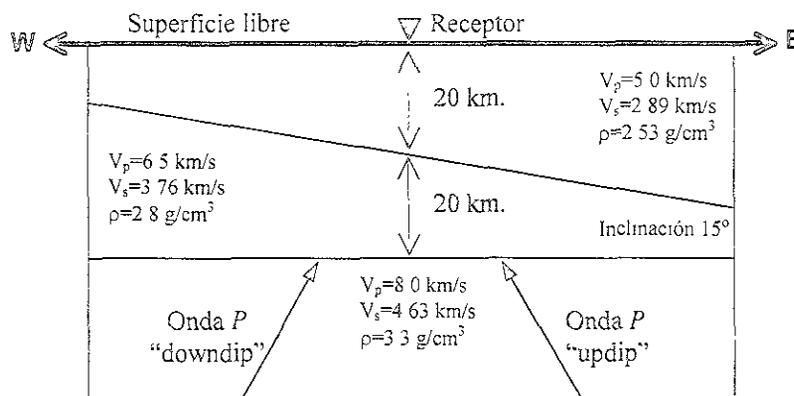


Fig. 3.4 Modelo de corteza utilizado en el ejemplo para ilustrar los efectos producidos por la capa inclinada en las funciones de receptor radial y transversal, (tomado de Cassidy, 1992).

ESTA TESIS NO DEBE
 SER QUITADA DE LA BIBLIOTECA

Para entender con claridad estos efectos, analicemos un caso particular de dos capas sobre un semiespacio, donde la frontera intermedia está inclinada 15° hacia el este y la más profunda es horizontal, como se muestra en la figura 3.4.

Las fases que aparecen más adelante en las funciones de receptor sintetizadas para este ejemplo, serán indicadas de la siguiente manera: con la letra "H", las fases convertidas en la frontera horizontal, y con la letra "I", las convertidas en la frontera inclinada. En términos generales, la existencia de una interfase inclinada por debajo del detector afecta a las funciones de receptor de tres maneras diferentes:

1) Las amplitudes y los tiempos de arribo de las fases convertidas P_s dependen tanto del BAZ (back-azimuth) como del Δ (distancia epicentral); las ondas P viajando en dirección "updip", esto es con un BAZ de 90° en nuestro ejemplo (figura 3.4), generan las amplitudes y los tiempos de arribo más grandes en las fases P_s (ver figura 3.5); las ondas P viajando en dirección "downdip", es decir con un BAZ de 270° (figura 3.4), generan las amplitudes y tiempos de arribo más pequeños para las fases P_s (ver figura 3.5). La variación de la amplitud de dichas fases depende principalmente del ángulo de inclinación de la estructura, mientras que la variación de sus tiempos de arribo depende tanto del mismo ángulo, como de la profundidad de la interfase. En general, las fases P_s originadas a grandes profundidades experimentarán grandes variaciones en sus tiempos

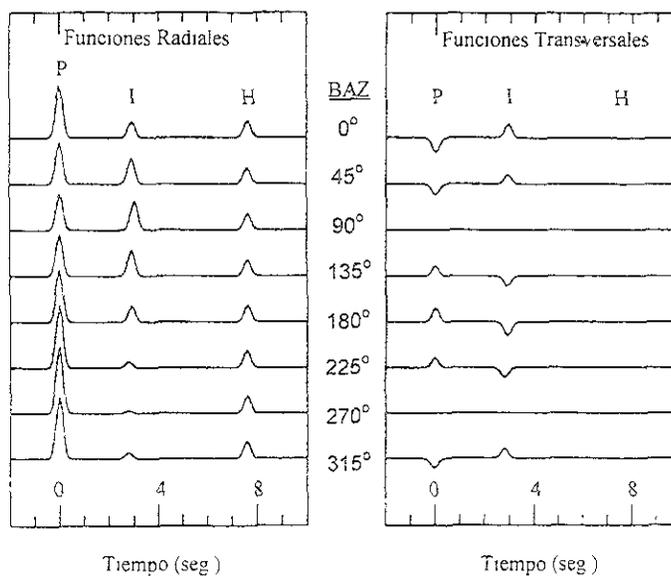


Fig. 3.5 Variación azimutal provocada por una interfase inclinada (ver figura 3.4) en las funciones de receptor radiales y transversales. La letra "P" representa a la fase P directa, la "I" a la fase P_s convertida en la interfase inclinada, y la "H" a la fase P_s convertida en la frontera horizontal. La distancia epicentral utilizada es de $\Delta = 45^\circ$. (Tomado de Cassidy, 1992).

de arriba dado un incremento ya sea del BAZ o del Δ . Las variaciones en dichos tiempos para diferentes BAZ no se aprecian bien en la figura 3.5 ya que la inclinación de la interfase es pequeña. Además, sólo se presentan las fases directas P_s ; la variación temporal es mucho más notoria en los sucesivos múltiplos que no aparecen en dicha figura.

2) La amplitud de la onda P directa en las funciones de receptor radiales, depende del BAZ con que incida el frente de ondas en la base de la estructura. Esta dependencia se hace más clara para inclinaciones mayores de 30° , o para interfases inclinadas que presenten un contraste acústico importante. Como se puede ver en la figura 3.5, la amplitud mínima de la onda P directa aparece cuando el frente de ondas incide en dirección "updip". Por el contrario, la máxima amplitud aparece cuando viaja en dirección "downdip". No hay que perder de vista que esto es así de claro para un modelo tan simple como el que se está estudiando. Si se tratara de un modelo que tuviera múltiples interfases inclinadas en diferentes direcciones, el patrón de dependencia sería mucho más complicado.

3) Las capas inclinadas deflecan las ondas P y S del plano radial-vertical, introduciendo de esta manera un componente transversal en el movimiento del terreno. Las amplitudes de la función transversal son cero para incidencias de ondas P en dirección "updip" o "downdip", y son máxima en las direcciones perpendiculares a ésta, es decir, con $BAZ=0^\circ$ y $BAZ=180^\circ$ en nuestro ejemplo. Nótese la aparición de los arribos de la onda P directa y de la conversión P_s en la interfase inclinada, dentro de la función de receptor transversal (figura 3.5). También es importante distinguir en esa figura que, las fases P_s convertidas en la interfase horizontal prácticamente no son deflectadas por la interfase inclinada. De ahí que su efecto en la función de receptor transversal sea insignificante.

Todos estos efectos que aparecen en las funciones de receptor ante la presencia de estructuras de este tipo, son una herramienta poderosa para complementar el análisis y el modelado de estas curvas. Si se dispone de una buena cobertura azimutal, es posible hacer comparaciones cualitativas entre todas las funciones para deducir la existencia, en el caso de que así lo indiquen las evidencias, de una estructura más complicada que un simple modelo de capas paralelas y horizontales. En el modelado de estas funciones también es de gran importancia identificar el origen de las fases más prominentes que aparezcan. Esto es, saber la trayectoria que debió tomar cada rayo para generar cada

una de las fases. Esto reduce la incertidumbre de que el modelo que responda mejor a las funciones de receptor observadas sea el apropiado.

3.3 Identificación de fases.

Como ya se dijo en la sección anterior, resulta importante saber de dónde proviene cada una de las fases que aparecen en una función de receptor. En una función generada a partir de un modelo tan simple como el que se usó en la figura 3.2, identificar dichas fases es sencillo. Sin embargo, para modelos que contengan una mayor cantidad de capas ya no resulta tan obvio. Por esta razón, y con el afán de aportar más veracidad a los resultados que del modelado de las observaciones se obtengan, se desarrolló un programa computacional que permite generar funciones de receptor sintéticas de manera aproximada, aportando la información necesaria de cada fase que permite identificar su procedencia. Estas funciones son aproximadas debido a que la cantidad de trayectorias que considera es limitada, depende de la cantidad de interfases que posea el modelo. Dichas trayectorias fueron previamente seleccionadas por ser las que, en la mayoría de los casos, debieran arribar a la superficie libre con mayor amplitud. Cabe destacar que este algoritmo no fue ideado con la finalidad de introducir otro procedimiento que permita crear sismogramas sintéticos, equivalente a los propuestos por Haskell (*Haskell, 1962*) o Kennett (*Kennett, 1983*), sino que estuvo basado exclusivamente en consideraciones físicas que permitieran identificar las fases más relevantes en una función de receptor. A continuación se describe la manera como funciona este programa.

El programa, nombrado FUNREC, comienza por calcular los tiempos de arribo de cada una de las fases que fueron seleccionadas utilizando las trayectorias que describen los rayos correspondientes. Antes de explicar cómo lo hace, es importante decir cuáles son aquellas que considera FUNREC. El total de las trayectorias está dividido en cinco grupos por la semejanza en sus recorridos. Estos recorridos quedan ilustrados en la figura 3.6, donde aparecen esquemáticamente representados los rayos de las ondas dentro de un modelo particular de tres capas sobre un semiespacio, con las conversiones que sufren al reflejarse o refractarse. La trayectoria que se encuentra en cada cuadro, es solamente una de las que comprenden a cada grupo. Por ejemplo, en el caso de los grupos uno y dos, el resto de las trayectorias de cada grupo que no aparecen en la figura, son aquellas donde la conversión de la onda se da en las

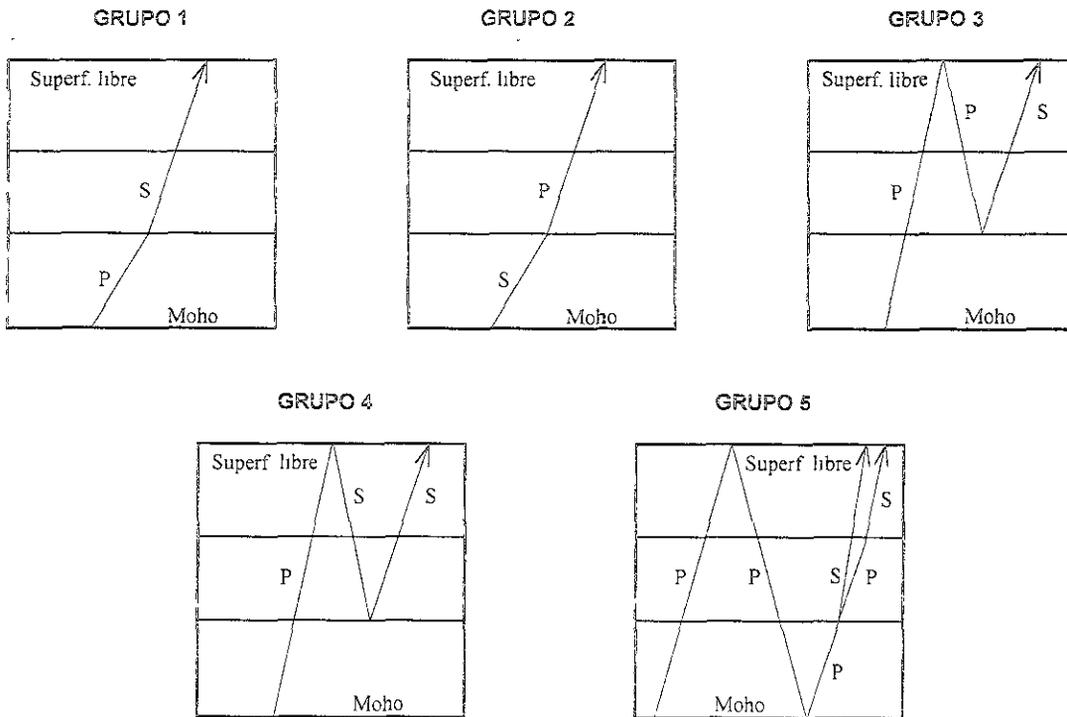


Fig. 3.6 Diagrama que muestra las trayectorias seleccionadas en el programa subdivididas en cinco grupos. Para cada grupo de ondas aparece sólo una de las trayectorias que lo comprenden. Para deducir el resto correspondiente a cada grupo, ver texto.

interfases restantes. En el caso de los grupos tres y cuatro, las demás trayectorias son aquellas donde la segunda reflexión se lleva a cabo en el resto de las interfases. Y finalmente, en el caso del grupo cinco que es el más grande y complicado, todas las demás trayectorias que no aparecen son las que sufren la segunda reflexión en las interfases restantes, sin dejar la conversión posterior que tienen en las sucesivas interfases suprayacentes.

Cabe destacar que, dentro del resto de las interfases que deben considerarse para deducir las demás trayectorias, está incluida la que define el contacto de la última capa con el semiespacio (Moho). Así quedan incluidos los múltiplos de primer orden $PpPms$ o $PpSms$ entre otros. La cantidad de trayectorias está en función de la cantidad de capas que tenga el modelo. De esta manera, para un modelo que tenga "n" capas, la cantidad de trayectorias consideradas es: $5n + (n-1) + (n-2) + \dots + [n - (n-1)]$. No hay que olvidar que en todos los casos, el tipo de onda incidente desde el semiespacio es P, por las razones que ya fueron argumentadas en la sección (3.1-ii).

Ahora bien, el cálculo de los tiempos de arribo se hace obteniendo el parámetro de rayo que describen las ondas dentro del modelo a partir de las propiedades elásticas

previamente definidas y del ángulo de incidencia desde el semiespacio. Así, se calculan las distancias que recorren las ondas P y S en todas las capas. Conociendo además las velocidades de propagación α y β en todo el modelo, entonces se dividen las distancias calculadas entre las velocidades correspondientes para saber los tiempos buscados. Es importante mencionar la corrección temporal que debe hacerse a los tiempos de arribo de cada fase por haber comenzado su recorrido a través del modelo en tiempos y sitios diferentes (ver figura 3.7). La figura 3.7 muestra claramente cómo los múltiplos $PSSmp$ y $PPmp$ entran al modelo antes que la fase Pp directa. En el caso del primer múltiple mencionado, el tiempo Δt es precisamente el lapso que debe restarse al tiempo total de recorrido de dicha fase, para que el tiempo relativo entre ella y la onda P directa que aparezca en la función de receptor sea el correcto. Una corrección similar debe hacerse para cada una de las otras trayectorias.

El siguiente paso es construir las amplitudes finales para todas las fases, multiplicando los coeficientes de transmisión y reflexión asociados a cada interfase. Por ejemplo, para construir la amplitud de la fase directa P_s , se considera una amplitud inicial unitaria para la onda P incidente del semiespacio, se multiplica dicha amplitud por el coeficiente de transmisión, entre el semiespacio y la última capa que implica una conversión $P-S$, se multiplica el resultado de esa operación por el coeficiente de transmisión $S-S$ entre la segunda y tercera capa, y se guarda esa cantidad. Nótese que no se multiplicó por el último coeficiente de transmisión $S-S$ entre la primera y segunda capa. Así como se

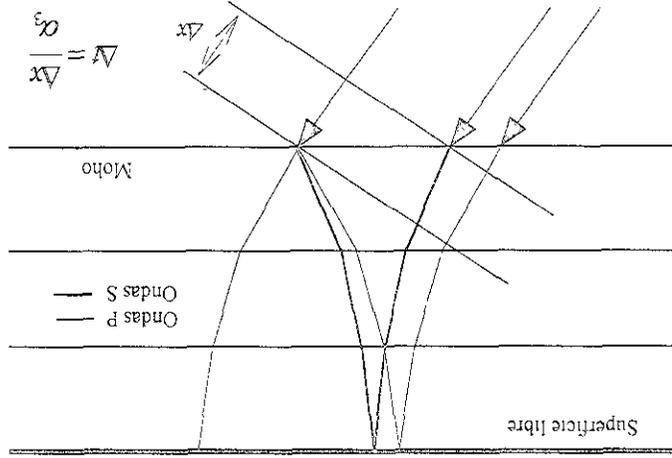


Fig. 3.7 Figura donde se muestra la corrección temporal para la fase $PSSmp$. Corrección que debe aplicarse también a cada una de las otras trayectorias consideradas por FUNREC para que los tiempos relativos entre las fases dentro de las funciones de receptor sean los correctos. α_3 es la velocidad de propagación para las ondas P en el semiespacio

mostró para este caso sencillo, se construyen todas las amplitudes restantes, sin incluir el último coeficiente de transmisión justo antes de llegar al receptor. Todos los coeficientes que se emplearon fueron calculados a partir de las propiedades elásticas del modelo y de las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión referidos al final de la sección (1.4-v). Una vez calculadas todas las amplitudes, se separan en dos grupos. Por un lado aquellas fases que arribaron a la primera capa, al final de su recorrido, como onda P , y por el otro, las que arribaron al mismo punto como onda S . Entonces el programa crea dos series temporales de impulsos. Dichos impulsos están ubicados, dentro de la serie, en el sitio que indiquen los respectivos tiempos de arribo, y sus amplitudes son precisamente aquellas que ya fueron calculadas.

A partir de este momento, gran parte del resto del programa queda esbozado en la figura 3.8, que dice lo siguiente. Una vez que se tienen las dos series impulsivas, una para los arribos P y otra para los arribos S , se utilizan ambas series por separado como entrada para la función de transferencia de un modelo que contiene a una capa sobre un semiespacio. Las propiedades y dimensión de la capa en la función de transferencia mencionada son las mismas que posee la primera capa de nuestro modelo estratificado, y las propiedades del semiespacio, para la función de transferencia, son las propiedades que tiene la segunda capa del mismo modelo estratificado. Así, proporcionándole además el ángulo con que inciden cada una de las fases a la primera capa del modelo en

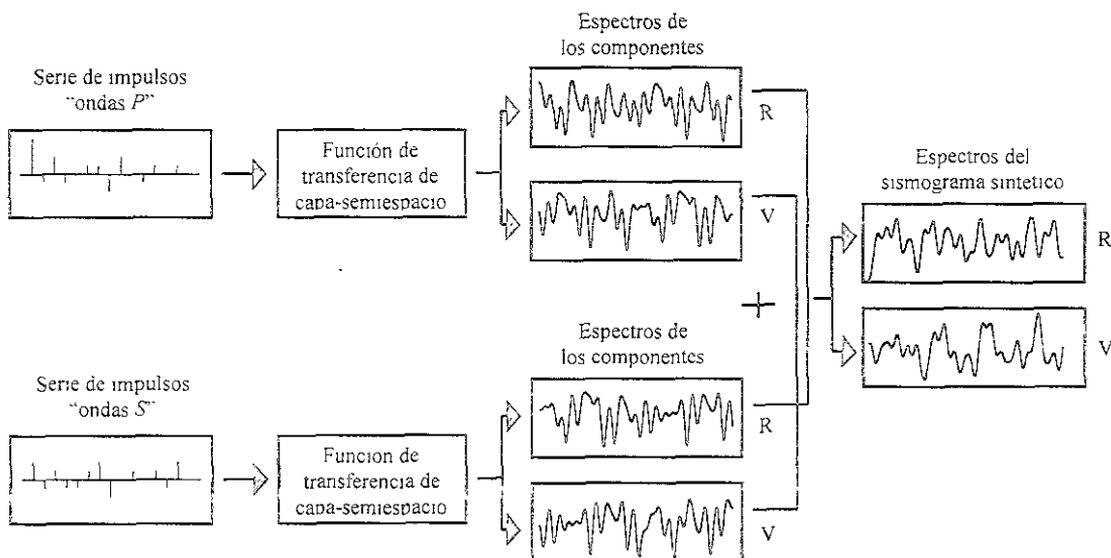


Fig. 3.8 Diagrama que esquematiza parte del funcionamiento del programa FUNREC (ver texto). Partiendo de dos series temporales impulsivas, se generan las componentes radial y vertical de un sismograma sintético. La parte restante del programa opera con dichas componentes para generar una función de receptor.

cuestión, se obtienen las cuatro componentes correspondientes a los dos sismogramas generados, uno para las incidencias S y otro para las incidencias P . Los espectros de los dos componentes radiales se suman, así como los espectros de los dos componentes verticales. De esta manera, al final se tienen la componente radial y la componente vertical del sismograma sintético para el modelo estratificado, incluyendo solamente las trayectorias consideradas por FUNREC.

Lo único que resta del programa es, a partir de los componentes radial y vertical del desplazamiento, construir la función de receptor radial. Esto se lleva a cabo efectuando la operación mostrada en la ecuación 3.1-5, donde no se incluye el nivel de agua por tratarse de un problema sintético. En este caso el cociente se comporta de manera estable.

FUNREC, para elaborar la función de receptor, parte directamente de los espectros de los componentes. Sin embargo, al igual que en un caso con información real en donde se tienen inicialmente los componentes en el dominio del tiempo para luego trasladarlos al dominio de la frecuencia, en la figura 3.9 partimos de los componentes temporales del sismograma con el fin de esquematizar todo el proceso. En esta figura se muestra simbólicamente el cociente espectral y el filtrado con el espectro de la campana gaussiana. Al final, a través de la transformación inversa de Fourier, se obtiene la función de receptor aproximada que proporciona el programa descrito.

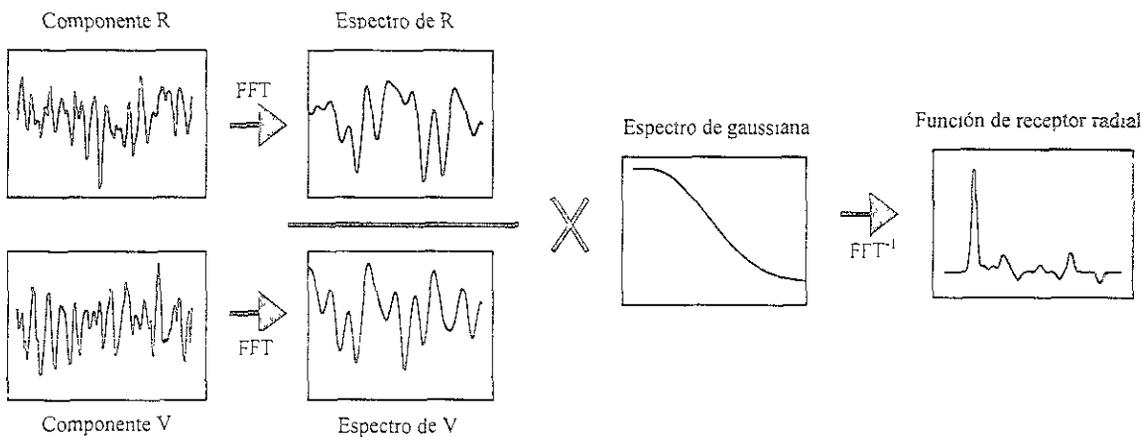


Fig. 3.9 Diagrama donde se muestra cómo FUNREC lleva a cabo la construcción de la función de receptor. No utiliza el nivel de agua por tratarse de un caso sintético, donde no existe inestabilidad del cociente. Comparar este diagrama con la ecuación 3.1-5.

En seguida se muestra una comparación (figura 3.10) entre una función de receptor obtenida con FUNREC y otra obtenida con el método de las matrices de propagación de

Kennett (Kennett, 1983). Ambas funciones fueron generadas con el mismo modelo, definido en la tabla 3.1.

En dicha comparación se puede apreciar la enorme semejanza que existe entre las dos curvas. Esta aproximación será así de buena mientras la complejidad del modelo no sea muy grande. De lo contrario, los grupos de trayectorias seleccionados comenzarán a ser insuficientes para reproducir con tal fidelidad el fenómeno. No hay que perder de vista que el objetivo de este programa es identificar la procedencia de las fases más importantes que aparecen en una función de receptor. Por esta razón, FUNREC genera un archivo donde se especifica el tiempo de arribo para cada fase junto con la amplitud que posee en el instante previo a incidir, al final de su recorrido, en la primera capa. Además, a cada pareja tiempo-amplitud la asocia al número de grupo y dentro del grupo, al número de arribo del que se trate cada pareja. De esta manera se puede saber con precisión cual fue la trayectoria descrita por todas las fases consideradas.

Capa	Velocidad de Ondas P(Km/s)	Velocidad de Ondas S(Km/s)	Espesor (Km)	Densidad (gr/cm ³)
1	6.75	3.90	15.00	3.5
2	7.10	4.10	15.00	3.7
3	7.44	4.30	15.00	3.9
Semiespacio.	8.31	4.80	∞	4.4

Tabla 3.1 Modelo de tres capas sobre un semiespacio utilizado para generar las dos funciones de receptor radiales mostradas en la figura 3.10. Una de ellas construida con FUNREC y la otra con la técnica de las matrices de propagación de Kennett (Kennett, 1983)

Haciendo un análisis espectral de las dos funciones de receptor mostradas en la figura 3.10, notamos que la aproximación de FUNREC es igualmente buena en el dominio de la frecuencia. La semejanza de los espectros de fase es muy grande, mientras que la de los espectros de amplitud, aun sin dejar de ser buena, no lo es tanto como la anterior. El desajuste de los espectros de fase pareciera ser ligeramente mayor para frecuencias más altas (3 Hz.) en contraste con los espectros de amplitud, cuyo desajuste se mantuvo del mismo orden en todas las frecuencias analizadas (0-3 Hz.).

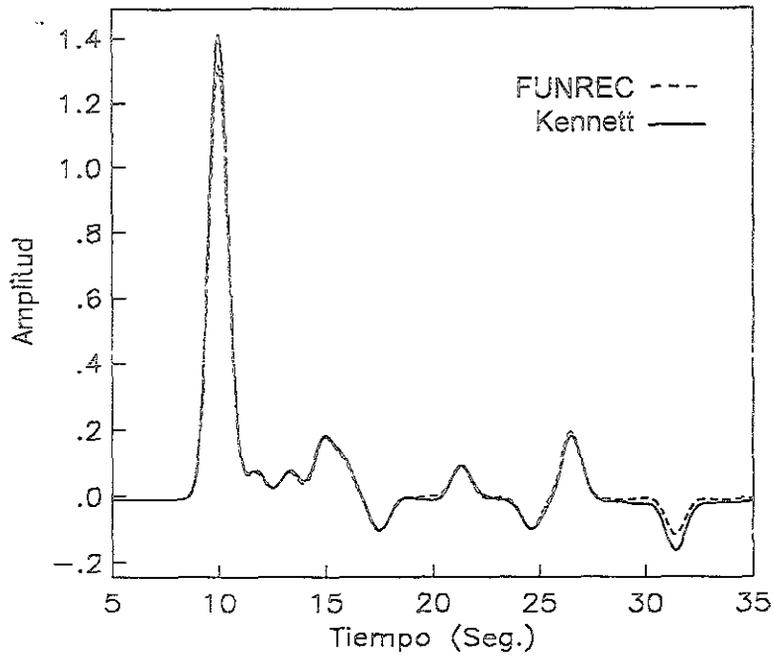


Fig. 3.10 Comparación de dos funciones de receptor radiales para el mismo modelo (tabla 3.1) Una obtenida con FUNREC, y la otra con el método de las matrices de propagación de Kennett (Kennett, 1983).

4.1 introducción, determinación de la estructura terrestre.

Las ondas sísmicas al propagarse en el interior de la Tierra van acumulando mucha información. Su comportamiento, que es matemáticamente predecible gracias a los modelos teóricos desarrollados, permite determinar la estructura interna del planeta con mucha resolución, estableciendo ciertas propiedades elásticas de las rocas. Un modelo es una representación matemática de un fenómeno físico observado. Los modelos están asociados a conjuntos de parámetros o cantidades físicas que normalmente describen alguna cualidad física del material o su distribución y forma tridimensional en una región determinada.

La sismología, al tener la posibilidad de establecer dicha distribución para ciertas propiedades físico-elásticas del interior, como lo es la densidad, la velocidad de propagación, la compresibilidad o las dimensiones espaciales de aparatos geológicos, conforma la disciplina científica mejor dotada de recursos para proporcionar modelos estructurales del interior del planeta con la más alta resolución.

La parte superficial de la corteza se ha estudiado ampliamente con técnicas desarrolladas por la industria del petróleo. Incluso, experimentos de reflexión semejantes a los que se emplean en la búsqueda de yacimientos han sido utilizados con el fin de investigar sus partes más profundas y entender así su evolución tectónica. No cabe duda que la corteza, a pesar de ser la parte más superficial y delgada del planeta, posee estructuras muy complicada, tal y como se describió en el capítulo precedente. No obstante, la parte superior del manto encierra una complejidad comparable. En dicha zona hay enormes variaciones en la presión y la temperatura que ocasionan cambios súbitos en el comportamiento elástico de los minerales. Estas variaciones son provocadas principalmente por los procesos tectónicos que tienen lugar a esta profundidad. Como es de esperarse, la resolución de los modelos va perdiéndose conforme aumenta la profundidad de investigación. Para explorar la estructura de la corteza profunda y del manto superior, son los sismos naturales la única herramienta que poseen los sismólogos para muestrear y posteriormente modelar estas regiones.

Al igual que para el manto superior y la corteza, los terremotos son la fuente de información utilizada para investigar las capas más profundas del planeta: el manto inferior y el núcleo. Hoy en día existen buenas caracterizaciones de sus propiedades promedio en función de la profundidad. Sin embargo, sólo hasta los últimos años se han

hecho intentos por definir y entender lo que parecen ser pequeñas heterogeneidades laterales en estas zonas tan alejadas de la superficie.

Es importante que el lector tenga claras las dimensiones medias relativas que hay entre las diferentes capas conocidas del planeta (figura 4.1). Por esta razón, a continuación se proporcionan las profundidades de las discontinuidades elásticas principales del interior de la Tierra: en la corteza se puede encontrar la discontinuidad de Conrad entre los 15 y 20 km; contacto entre corteza y manto (Moho) que puede estar entre los 5 y 70 km; contacto entre manto superior y manto inferior a 660 km; contacto entre manto y núcleo a 2,889 km (discontinuidad en la composición química más importante de la Tierra); contacto entre núcleo externo y núcleo interno a 5,155 km; por último el centro del planeta a una profundidad de 6,371 km

En este capítulo se describirá la manera como pueden utilizarse los registros sísmicos para determinar modelos estructurales del interior de la Tierra. Se hablará sobre la teoría de inversión en general, y se abordarán algunos métodos empleados por dicha teoría con el fin de optimar la búsqueda de los mejores modelos estructurales. Se establecerá

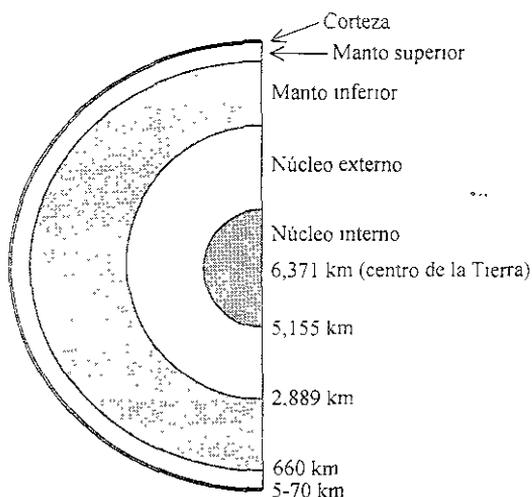


Fig. 4.1 Corte de la Tierra donde se muestran las profundidades a las que se encuentran las principales discontinuidades reveladas por la sismología.

una clasificación de los métodos separándolos en dos grupos: los métodos de inversión local, y los de inversión global. Quedarán claramente explicadas las diferencias que existen entre ambos, así como las limitaciones y virtudes que posee cada uno de ellos.

4.2 Teoría de inversión.

i) Teoría de inversión.

La teoría de inversión es una conjunción de técnicas matemáticas que sirve para obtener información útil del mundo, inferida a partir de las observaciones que se tengan de éste. Dicha teoría está determinada por las observaciones y por los cuestionamientos que matemáticamente podamos formular en torno a ellas. Las observaciones, o "datos", son conjuntos de mediciones hechas de fenómenos naturales. Los cuestionamientos quedarán resueltos en términos de valores numéricos que adopten ciertas propiedades específicas del mundo. Estas propiedades serán llamadas "parámetros del modelo". Por razones que más adelante quedarán aclaradas, en la teoría de inversión se parte de la existencia de una entidad matemática llamada modelo que relaciona (vincula) a los parámetros del modelo con los datos.

El concepto de "teoría inversa" se emplea como el opuesto al de "teoría directa". Este último está definido como el proceso en que se predicen los resultados de ciertas mediciones partiendo de algún principio general (modelo) y de una serie de condiciones (parámetros del modelo) establecidas *a priori*. La teoría directa constituye la metodología que pretende explicar matemáticamente las observaciones a partir de la perturbación deliberada de los valores que definen a los parámetros del modelo. En contraste con lo anterior, la teoría inversa parte de las observaciones (datos) y del marco teórico que establezca un modelo, para determinar como finalidad última, los valores de sus parámetros. El propósito de la inversión es obtener una estimación de los valores de los parámetros a través de un proceso iterativo que concluye cuando se consigue un ajuste satisfactorio entre la respuesta del modelo y los datos observados (Lines y Treitel, 1984).

Con el fin de ilustrar claramente las diferencias que hay entre el planteamiento y la solución de un problema directo y de un problema inverso, podemos estudiar el fenómeno de la variación de la temperatura en el interior de la Tierra. Supongamos que la temperatura se incrementa de manera lineal con la profundidad. Partiendo de esto, la temperatura T se relaciona con la profundidad z de la siguiente manera: $T(z) = az + b$, donde a y b son constantes. Si sabemos que $a = 0.1$ y $b = 25$, entonces uno puede resolver el problema directo, esto quiere decir, determinar la recta correspondiente a la variación de la temperatura simplemente evaluando la fórmula para diferentes profundidades. El problema inverso correspondiente a este ejemplo podría ser determinar las constantes a y b partiendo de una serie de lecturas de temperatura hechas en un pozo

a diferentes profundidades. Queda claro que el problema consiste en ajustar una línea recta con las observaciones.

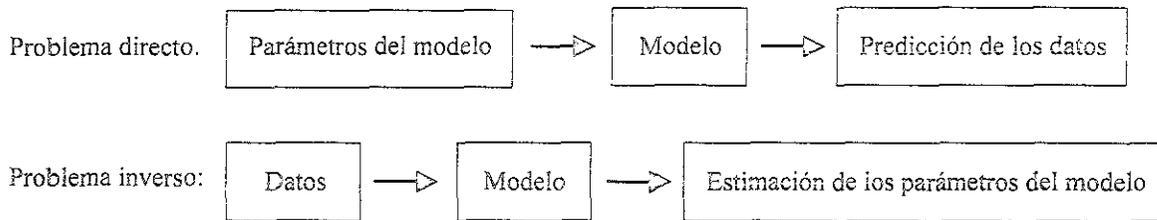


Fig. 4.2 Diagramas de flujo de los problemas directos e inversos. Ver texto.

La teoría de inversión en geofísica puede verse como el intento por ajustar la respuesta matemática de un modelo específico terrestre, con una serie finita de observaciones obtenidas de la naturaleza. Hay que tener presente que las ecuaciones matemáticas que definen al modelo dependen de cierto número de parámetros, y que son precisamente éstos los que deseamos estimar a partir de los datos observados.

Esquemáticamente se pueden representar ambos problemas como se muestra en la figura 4.2. Es fundamental distinguir que, en la teoría inversa, el fin último es determinar valores numéricos desconocidos correspondientes a los parámetros que determinan al modelo, no definir o constituir al modelo en sí.

ii) Formulación de un problema inverso.

Lo primero que debe hacerse es establecer la manera como se manejarán por un lado los datos, y por el otro los parámetros del modelo. Normalmente, los datos no son más que una sucesión de valores numéricos equidistantes espacial o temporalmente. Por esta razón es posible manejarlos como si fueran los componentes de un vector de dimensión N que contuviese toda la serie de N lecturas. De manera similar, los parámetros del modelo pueden considerarse como las componentes de otro vector de dimensión M .

$$\text{Datos: } \vec{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_N].$$

$$\text{Parámetros del modelo: } \vec{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_M].$$

El principio fundamental del que parte cualquier problema inverso es el siguiente: *los parámetros del modelo y los datos están de alguna forma relacionados. A dicha relación que los vincula se le conoce como modelo.* Normalmente, el modelo se expresa a través de una o más ecuaciones. Estas ecuaciones son a las que deben responder simultáneamente tanto los datos como los parámetros del modelo.

En problemas reales, los datos y los parámetros del modelo están relacionados de manera complicada. Sin embargo, en términos generales la relación que guardan puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{d}, \vec{m}) &= 0 \\ f_2(\vec{d}, \vec{m}) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_L(\vec{d}, \vec{m}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.2-1}$$

donde L es la cantidad de ecuaciones necesarias para representar al modelo. Estas ecuaciones, que sintetizan la relación que hay entre los datos y los parámetros del modelo, pueden escribirse de manera compacta como el vector de ecuaciones $\vec{f}(\vec{d}, \vec{m}) = 0$. El propósito fundamental de la teoría de inversión es resolver o “invertir” estas ecuaciones en función de los parámetros del modelo. No se requiere de casi nada, excepto que las ecuaciones $\vec{f}(\vec{d}, \vec{m}) = 0$ contengan la información suficiente para determinar unívocamente los valores de los parámetros. Hasta ahora se ha planteado de manera general el esquema de inversión que debe desarrollarse para cualquier tipo de modelo. Como se verá en los siguientes apartados, existen metodologías que particularizan dicho esquema para resolver exclusivamente problemas de inversión cuyos modelos matemáticos son lineales o cuando menos linealizables a través de aproximaciones numéricas. Esta ramificación va a constituir una familia de métodos denominados “de búsqueda local”, capaces de enfrentar principalmente problemas lineales durante la inversión. Sin embargo, también existen modelos matemáticos altamente no lineales. En estos casos el esquema de inversión debe plantearse de manera completamente diferente, dando lugar a métodos de inversión denominados “de búsqueda global”, cuyo rastreo de la solución se deriva de otras filosofías. De estos

métodos se hablará más adelante, una vez que se hayan estudiado los de búsqueda local.

iii) Problema Inverso lineal.

Desde ahora hasta que se aborden los problemas altamente no lineales, se estudiarán exclusivamente los planteamientos de inversión desarrollados a partir de modelos matemáticos de comportamiento lineal o casi-lineal¹⁵, esto es, a partir de modelos que puedan expresarse, de una forma u otra, a través de un sistema de ecuaciones lineales como el que se muestra en la ecuación (4.2-1).

En general, las ecuaciones que describen al modelo pueden ser complicadas. Sin embargo, en muchos problemas toman formas simples que permiten llegar a expresiones matemáticas que sintetizan fácilmente la relación que guardan los datos con los parámetros del modelo. La forma implícita lineal es aquella que posee al funcional F dependiendo intrínsecamente tanto de los datos como de los parámetros:

$$\bar{f}(\bar{d}, \bar{m}) = 0 = F \begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{m} \end{bmatrix},$$

donde F es una matriz con dimensión $LX(M+N)$. Por otro lado, está la forma lineal explícita, en la que los datos pueden quedar como términos independientes del sistema, acuñándose un nuevo funcional G que opera exclusivamente sobre los parámetros del modelo:

$$\bar{f}(\bar{d}, \bar{m}) = 0 = \bar{d} - G\bar{m}, \quad (4.2-2)$$

donde las letras \bar{d} , G y \bar{m} corresponden al vector de datos, a la matriz denominada "Kernel o núcleo de los datos" y al vector de parámetros del modelo, respectivamente.

Los problemas de inversión más simples son los que pueden representarse a través de la ecuación lineal explícita (4.2-2): $G\bar{m} = \bar{d}$. Por esto, dicha ecuación constituye el punto de partida para los métodos de resolución de problemas inversos lineales (métodos de búsqueda local). Las diferencias entre los diferentes métodos que existen básicamente

dependerán de la manera como se intente resolver el sistema de ecuaciones implícito en (4.2-2).

Antes de proceder al estudio de algunos métodos de búsqueda local, se presentan dos ejemplos sobre problemas de inversión reales (lineales), sobre fenómenos naturales que pueden modelarse con un sistema de ecuaciones lineales.

El primero trata de estimar los valores de los coeficientes de una cuadrática que ajusten mejor con una serie de lecturas de la temperatura a diferentes profundidades en la Tierra. Este ejemplo es parecido al que fue usado en la sección 4.2-i. Siguiendo la nomenclatura ya establecida, el vector de datos \mathbf{d} contiene N lecturas de temperatura, esto es, $\mathbf{d} = [T_1, T_2, T_3, \dots, T_N]$. Asumiendo que (en contraste con el ejemplo de la sección mencionada) la temperatura varía cuadráticamente con la profundidad, entonces tenemos que $T = a + bz + cz^2$. Por lo tanto, el vector de parámetros del modelo queda definido por $\mathbf{m} = [a, b, c]$. De esta forma se puede establecer el sistema de ecuaciones que debemos resolver en función de los parámetros a , b y c .

$$\begin{aligned}
 T_1 &= a + bz_1 + cz_1^2 \\
 T_2 &= a + bz_2 + cz_2^2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 T_N &= a + bz_N + cz_N^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.2-3}$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas como la ecuación explícita matricial $G\mathbf{m} = \mathbf{d}$:

$$\begin{bmatrix}
 1 & z_1 & z_1^2 \\
 1 & z_2 & z_2^2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & z_N & z_N^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b \\
 c
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 T_N
 \end{bmatrix}.$$

¹⁵ Modelos que a través de manipulaciones matemáticas, como lo son las expansiones en series, se comportan de manera lineal y es posible expresarlos como sistemas de ecuaciones lineales

Es importante notar que a pesar de que las ecuaciones son lineales en los parámetros del modelo y en los datos, no lo son en las variables auxiliares “z” que conocemos de antemano por ser las profundidades a las que fueron hechas las observaciones, lo cual no impide que podamos desarrollar la ecuación explícita lineal del problema y resolverla. El segundo ejemplo trata de la tomografía acústica. Esta técnica busca determinar el valor de ciertas propiedades elásticas de un medio heterogéneo en distintos lugares del mismo, a partir de los tiempos de viaje que registren una serie de ondas propagadas estratégicamente en su interior. Supongamos que un muro consta de la unión de 16 bloques de igual tamaño (figura 4.2), donde la velocidad de propagación para las ondas

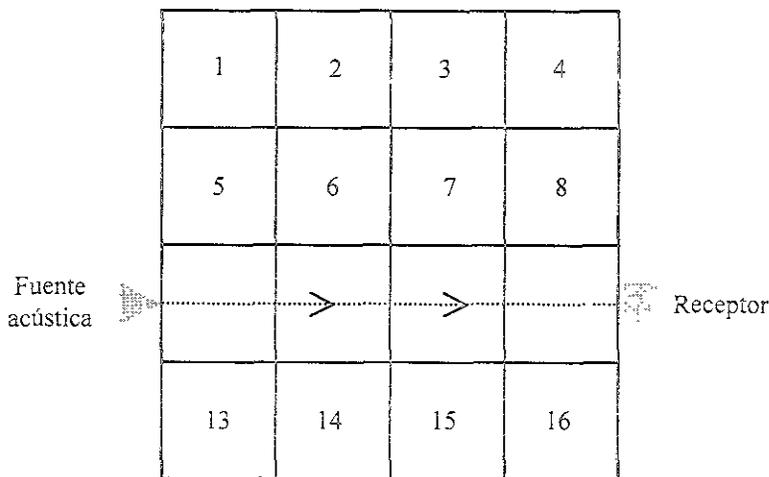


Fig. 4.2 Muro compuesto por 16 bloques con diferentes propiedades elásticas cada uno. Se muestra una sola trayectoria de las 8 posibles en las direcciones horizontal y vertical para las cuales se tomaron los tiempos de viaje. (Tomado de Menke W., 1984)

elásticas en cada uno es diferente. El problema consiste en determinar las características elásticas de los diferentes tipos de bloques a partir de los tiempos de viaje que muestren las ondas acústicas al atravesar el muro a través de los “renglones” y “columnas” que lo componen.

Los datos en este experimento son 8 lecturas de tiempos de viaje que forman el vector $\vec{d} = [t_1, t_2, t_3, \dots, t_8]$. El modelo supone que cada bloque está compuesto por un material homogéneo, y que los tiempos de viaje son proporcionales ya sea al alto o al ancho de cada bloque, donde la constante de proporcionalidad es la *lentitud* s_i . De esta forma se tiene un total de 16 diferentes parámetros por determinar para conformar el vector

$m = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_{16}]$. Dicho modelo se puede expresar como un sistema de 8 ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4 \\
 t_2 &= hs_5 + hs_6 + hs_7 + hs_8 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 t_8 &= hs_4 + hs_8 + hs_{12} + hs_{16}
 \end{aligned}
 \tag{4.2-4}$$

que expresado de manera matricial siguiendo la forma explícita lineal queda:

$$\begin{bmatrix}
 h & h & h & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & h & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 s_1 \\
 s_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 s_{16}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 t_1 \\
 t_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 t_{16}
 \end{bmatrix},$$

donde "h" es tanto el ancho como el alto de todos los bloques que forman el muro. Con estos dos ejemplos quedaron concretamente planteados dos problemas reales de inversión lineal. A continuación se verá de qué manera es posible obtener alguna solución o cuando menos alguna información acerca de los parámetros del modelo, fin último de un proceso de inversión.

4.3 Solución por mínimos cuadrados.

El método más simple para resolver el problema inverso lineal por excelencia, $Gm = d$, está basado en mediciones de la dispersión que hay entre los datos observados d^{obs} y los datos sintetizados $d^{sin} = Gm^{est}$, a partir de un conjunto de parámetros estimados m^{est} . Mediante este método se buscan los valores de los parámetros que hagan que los datos sintetizados sean lo más parecidos a los datos observados. Para poder evaluar este parecido se define una función de error, o de desajuste, que determina la diferencia que hay entre cada pareja de datos: $e_i = d_i^{obs} - d_i^{sin}$. El mejor ajuste entre los datos observados y los datos sintetizados provendrá del conjunto de parámetros que hagan que la función que aparece en seguida (4.3-1), denominada longitud euclidiana de un vector (en este caso de "e"), adquiera el valor mínimo:

$$E = \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad (4.3-1)$$

La función que se seleccione para evaluar el desajuste entre los datos sintetizados y los datos reales va a ser determinante en la solución que se obtenga del problema. Por ejemplo, existe una serie de funciones de este tipo, llamadas también normas, cuya expresión general es la siguiente:

$$\text{Norma } L_n = \left[\sum_i |e_i|^n \right]^{1/n}, \quad (4.3-2)$$

en donde el valor que adquiera la "n" determinará la norma de la que se trate, ya sea la L_1 , L_2 o la norma que sea. Si se analiza con cuidado dicha familia de normas, el lector se dará cuenta que mientras mayor es el orden de la norma, el valor final de ésta se verá muy afectado por los datos más dispersos, aquellos que se alejen más de la tendencia general. Por el contrario, si se trata de una norma de orden inferior, como la norma L_1 ó la norma L_2 , entonces el valor final de la función de error dependerá más equitativamente de todas las diferencias y no solamente de las de mayor magnitud. Esto quiere decir que, en el caso donde existan unos cuantos datos dispersos o erróneos, éstos no afectarán de manera significativa el valor del desajuste que indique la norma. A los métodos de

inversión capaces de converger hacia una solución sin verse afectados por observaciones alejadas de la tendencia general se les conoce como *métodos robustos*.

Siguiendo con la solución por mínimos cuadrados, se decía que ésta parte de la evaluación de una función de error que habíamos llamado longitud euclidiana del vector "e". Si no olvidamos que la respuesta de un modelo a un conjunto de parámetros está dada por $d^{sin} = Gm^{est}$, entonces la diferencia que define al vector e puede expresarse como:

$$e = Gm^{est} - d^{obs}, \tag{4.3-3}$$

de tal forma que la longitud euclidiana (ecuación 4.3-1) pueda expresarse a través del producto interior del vector e que, empleando la ecuación (4.3-3), nos queda:

$$E = e^T e = (d - Gm)^T (d - Gm). \tag{4.3-4}$$

Si encontramos el valor de los parámetros que hagan que esta función sea mínima, entonces diremos que ese conjunto de valores es la solución de nuestro problema, ya que proporciona la respuesta sintética más parecida a los datos observados. El valor mínimo de la función E se obtiene derivándola con respecto a los parámetros e igualando dicha expresión con cero, esto es:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0. \tag{4.3-5}$$

Sustituyendo la expresión (4.3-4) en (4.3-5), y desarrollando el álgebra se tiene

$$\frac{\partial}{\partial m} (m^T G^T G m - d^T G m - m^T G^T d + d^T d) = 0. \tag{4.3-6}$$

Efectuando la diferenciación con respecto a m nos quedan las denominadas "ecuaciones normales":

$$G^T G m = G^T d, \tag{4.3-7}$$

que expresadas en función de los parámetros del modelo estimados, producen la solución general por mínimos cuadrados del problema inverso lineal $Gm = d$:

$$m^{est} = [G^T G]^{-1} G^T d. \quad (4.3-8)$$

Un ejemplo que sirve para ilustrar la validez de esta solución podría ser el problema en el que se desea ajustar una serie de datos con una parábola, situación que ya fue planteada en uno de los ejemplos de la sección 4.2-iii. Ahí se decía que el sistema de ecuaciones lineales a resolver para los parámetros era el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_N & z_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix}, \quad (4.3-9)$$

donde a, b y c, que son los parámetros del modelo, corresponden a los coeficientes de la ecuación cuadrática $d_i = a + bz_i + cz_i^2$, d_i son los datos conocidos asociados a las variables auxiliares z_i , que también son conocidas en el problema. Hay que recordar que el sistema de ecuaciones (4.3-9) proviene de desarrollar, para este problema en particular, la ecuación general $Gm = d$.

Construyendo por partes la ecuación (4.3-8) tenemos que

$$G^T G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_N & z_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}. \quad (4.3-10)$$

Por otro lado también tenemos que

$$G^T d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{bmatrix} \quad (4.3-11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.3-10) y (4.3-11) en la ecuación (4.3-8) se tiene que la solución por mínimos cuadrados para el ajuste con una parábola es:

$$\underbrace{\vec{m}^{\text{est}}}_{\vec{x}} = \underbrace{[G^T G]^{-1}}_{A^{-1}} \underbrace{G^T \vec{d}}_{\vec{b}} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{bmatrix} \quad (4.3-12)$$

Está claro que para poder conocer los valores numéricos de los parámetros estimados (coeficientes de la cuadrática) hace falta sustituir los valores que demandan las matrices en la ecuación (4.3-12), además de invertir la matriz cuadrada que está contenida en la solución. Es muy importante notar que, a diferencia del sistema original rectangular surgido de plantear el problema de inversión en forma matricial (ecuación 4.3-9), la solución general lograda a través del criterio de mínimos cuadrados (ecuación 4.3-12) siempre consistirá en un sistema de ecuaciones cuadrado sin importar el problema del que se trate. Siguiendo la nomenclatura que indican los corchetes en la ecuación anterior, se puede expresar dicho sistema de ecuaciones de la forma algebraica más habitual:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (4.3-13)$$

Haber reducido el problema de minimizar la función objetivo $E = e^T e$ a través del criterio de mínimos cuadrados a un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, permite resolver dicho problema empleando cualquier técnica matemática abocada a la resolución de este tipo de sistemas. Por ello, en seguida se hará una breve revisión de los métodos numéricos más conocidos y utilizados.

4.4 Métodos de búsqueda local.

Una de las condiciones necesarias para que la solución del problema inverso lineal planteada en la sección 4.3 (ecuación 4.3-8) conduzca a un resultado definido y verosímil, es que el problema tenga solución única. Aunque normalmente son los problemas lineales los que presentan esta propiedad, existen también otros que aún siendo moderadamente no lineales son de naturaleza semejante. Para abordar estos problemas existe una serie de métodos que son capaces de resolverlos explorando muy peculiarmente el dominio de soluciones. La forma en que dichos métodos encuentran la solución puede visualizarse mejor si se piensa que operan iterativamente. En ellos, la búsqueda de la solución comienza en un punto determinado del dominio de soluciones, esto es, proponiendo un conjunto inicial de valores para las incógnitas (parámetros) del problema, a partir del cual comenzará su convergencia empleando diferentes criterios de aproximación según sea el método que esté usándose. En la figura 4.3 se muestra

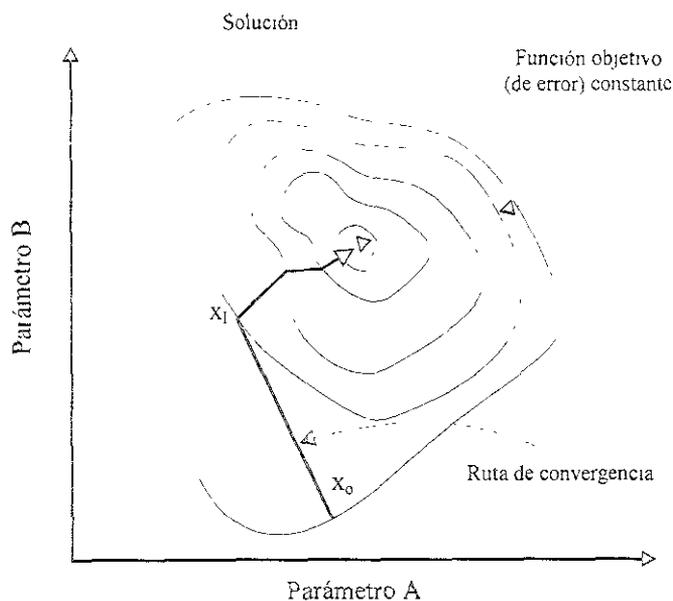


Fig. 4.3 Ruta de convergencia de un método local dentro de un espacio de soluciones bidimensional. A partir de la aproximación anterior surge la siguiente.

gráficamente la manera como convergen estos métodos que, por depender de una solución inicial, restringen su búsqueda a las vecindades de dicha solución, es decir, a un sector muy localizado del amplio dominio de soluciones. De ahí reciben el nombre de métodos de búsqueda local.

Probablemente la debilidad más importante de estos algoritmos es la dependencia tan grande que hay entre la solución inicial de la cual parten, y el resultado del proceso. Si se trata de un problema de inversión no lineal con solución no única, es decir, con una vastedad de mínimos en la función de error, entonces los métodos locales divergirán o se estancarán en soluciones parciales que se encuentran más cercanas al valor inicial de los parámetros. Además, la mayoría de los algoritmos ni siquiera pueden enfrentar dichos problemas ya que parten de expresar al modelo matemático como un sistema de ecuaciones lineales, lo que es imposible en los casos de funciones fuertemente no lineales, incluso cuando se linealizan con expansiones truncadas de primer grado ya que el error por truncamiento es mayor que el orden mismo de la aproximación.

A continuación se estudiarán los métodos numéricos más empleados para resolver el sistema de ecuaciones del planteamiento por mínimos cuadrados (ecuación 4.3-8), además de otros diseñados para minimizar la función de error en problemas de inversión lineales o moderadamente no lineales. Normalmente el método de búsqueda local recibe el nombre del método numérico que se esté empleando.

i) Solución de sistemas de ecuaciones.

En el apartado 4.3 se vio que al abordar un problema de inversión lineal empleando el criterio de mínimos cuadrados la solución de dicho problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales cuadrado de dimensión $n \times n$, como el que aparece en la ecuación (4.3-13), donde n es la cantidad de parámetros o incógnitas.

Una clasificación general de los métodos que existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados es la que aparece en la siguiente tabla 4.1. Tal y como aparecen en dicha tabla, dichos métodos se clasifican en dos grupos: los **métodos directos** y los **métodos indirectos** o **iterativos**. A continuación se presenta una breve explicación de cada uno.

El método del primer grupo más difundido para solucionar un sistema de ecuaciones algebraico es aquel en el que las incógnitas van siendo eliminadas sucesivamente haciendo ciertas operaciones elementales (conocidas como *operaciones elementales de renglón*) entre las ecuaciones que comprenden al sistema. Estas operaciones son las siguientes:

- a) Multiplicar cualquier renglón de la matriz de coeficientes aumentada por una constante.
- b) Sumar el múltiplo de un renglón con el múltiplo de cualquier otro renglón y sustituir cualquiera de los dos.
- c) Cambiar el orden de los renglones.

Solución de sistemas de ecuaciones	
Métodos directos	Métodos indirectos o iterativos
Eliminación Gaussiana	Jacobi
Gauss-Jordan	Gauss-Seidel
Escalamiento	Relajación
Descomposición LU	Sobrerelajación
Cholesky	Newton
	Newton modificado
	Quasi-Newton
	Máxima pendiente
	Gradiente conjugado

Tabla 4.1 Métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales explicados en esta sección

Los métodos directos son aquellos que siguen el mismo principio de eliminación, pero cada uno con peculiaridades que lo distinguen. Por ejemplo, existe un esquema particular de eliminación sistemática conocido como Eliminación Gaussiana. Dicho esquema de eliminación realiza los siguientes pasos:

1. Aumentar la matriz A de coeficientes $n \times n$ con el vector \vec{b} de términos independientes para formar una matriz $n \times (n+1)$.
2. Intercambiar renglones si es necesario para hacer que el coeficiente a_{11} sea el mayor de toda la primer columna.
3. Crear ceros desde el segundo hasta el último renglón en la primera columna, restando a_{i1}/a_{11} veces el primer renglón del i -ésimo renglón.

4. Repetir las mismas operaciones explicadas en los pasos 2 y 3 del segundo hasta el penúltimo renglón, colocando los coeficientes de mayor magnitud en la diagonal principal intercambiando renglones (considerando únicamente los renglones del j hasta el n), y entonces restar a_{ij} / a_{jj} veces el j -ésimo renglón del i -ésimo creando ceros en todas las posiciones de la j -ésima columna por debajo de la diagonal.
5. Una vez que se tiene como resultado una matriz triangular superior, se lleva a cabo una sustitución hacia atrás para conocer el valor de todas las incógnitas.

El método de Gauss-Jordan que es una variante del de Eliminación Gaussiana, es adecuado para resolver de 15 a 20 ecuaciones simultáneas. En él, los elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal se hacen cero al mismo tiempo que se hacen cero los que están por debajo de la diagonal. Normalmente los coeficientes de la diagonal se hacen uno durante dichas reducciones, convirtiendo así la matriz de coeficientes en la matriz identidad. Cuando esto se ha logrado, los elementos correspondientes a la columna derecha, la de los términos independientes, son el vector solución del sistema.

Cuando la matriz de coeficientes posee números de diferentes órdenes, se produce un error considerable de redondeo a la hora de hacer las reducciones habituales. Para evitar esto, antes de comenzar la eliminaciones se escala renglón por renglón de tal forma que las cantidades de cada uno sean de magnitud comparable. Se puede dividir todo el renglón entre la magnitud mayor que haya en dicho renglón, dentro de la matriz sin ampliar, afectando también al elemento del vector independiente \bar{b} . Este método se conoce como el de Escalamiento y evita o disminuye errores de redondeo en sistemas que poseen soluciones exactas.

Otra modificación del método general de eliminación es la Descomposición LU. Consiste en expresar a la matriz de coeficientes A como la multiplicación de dos matrices triangulares, una inferior L y otra superior U . Existen muchas formas de descomponer una matriz de esta manera, sin embargo, el procedimiento que sigue el método de Descomposición LU permite llegar a la solución del sistema fácilmente. La razón por la que este método es muy recurrido en programación, es porque el espacio de memoria necesario puede ser economizado. No hay necesidad de guardar los ceros que aparezcan en cualquiera de las dos matrices triangulares, y los unos de la diagonal principal de la triangular superior tampoco. Las fórmulas generales para obtener los

elementos de las dos matrices L y U correspondientes a la matriz de coeficientes A de un sistema de n ecuaciones son:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j \leq i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad i > j, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Para $j=1$, la regla para l se reduce a

$$l_{i1} = a_{i1}$$

y para $i=1$, la regla para u se reduce a

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}.$$

En las ecuaciones anteriores las letras u corresponden a los coeficientes de la matriz triangular superior y las letras l a los coeficientes de la matriz triangular inferior. Una vez descompuesta la matriz de coeficientes en las matrices L y U , todo está listo para obtener la solución para cualquier vector de términos independientes \vec{b} dado. La matriz L es un registro de todas las operaciones que deben efectuarse a la matriz A para obtener la matriz U . Entonces, para llegar a la solución del sistema se deben aplicar estas mismas operaciones al vector \vec{b} para obtener un nuevo vector \vec{b}' . Una vez hecho esto, se aumenta la matriz U con el vector \vec{b}' y se hace una sustitución para atrás obteniendo la solución buscada. Las ecuaciones generales para reducir el vector \vec{b} son:

$$b'_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$b'_1 = b_1 / l_{11}.$$

En contraste con los métodos directos de eliminación se tienen los métodos indirectos o iterativos que resuelven los mismos sistemas de ecuaciones pero de una manera más eficiente, sobre todo si el sistema por resolver es poroso, esto es, si contiene una gran cantidad de ceros como coeficientes. Dichos métodos, además de ser económicos en

cuanto a memoria de almacenamiento requerida por la computadora, pueden ser aplicados en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.

El primer método de los que se verán de esta familia se conoce como el método de Jacobi. En él, para resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, se deben acomodar los renglones del sistema de tal forma que los elementos de mayor amplitud se encuentren en la diagonal principal de la matriz de coeficientes ampliada. Una vez reordenado el sistema, se despeja de cada renglón la incógnita situada en la diagonal principal, quedando el sistema de la siguiente forma matricial:

$$x^{(n+1)} = b - Ax^{(n)},$$

donde el vector b contiene la parte inhomogénea, y la matriz A los coeficientes del sistema (sin ampliar). Una vez hecho esto, las aproximaciones sucesivas para la solución se obtienen a partir de un vector solución inicial que será sustituido en cada una de las ecuaciones para generar una nueva serie de valores de las incógnitas. Numéricamente esto se logra empleando la siguiente expresión:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La condición suficiente para garantizar la convergencia del método es que el número que se encuentre en la diagonal principal dentro de cada renglón sea mayor, en valor absoluto, que la suma del resto de los elementos del mismo renglón. Expresando dicha condición en forma matemática se tiene

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Una modificación sencilla de este método conduce a otro conocido como el algoritmo de Gauss-Seidel. Este algoritmo hace que la convergencia hacia la solución del sistema sea más rápida. La modificación consiste en calcular la aproximación de la variable en turno por sustitución, de la misma manera que en el método anterior, pero en este caso

utilizando siempre la aproximación más reciente del resto de las variables que se requieran. Este proceso iterativo queda matemáticamente expresado como

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4-1)$$

Existe otro método iterativo que converge más rápido que el de Gauss-Seidel. Se conoce como el método de *Relajación*, y aunque provee ciertas ventajas, desafortunadamente no es fácil de adaptar a una aplicación de cómputo. Sin embargo, este método tuvo una gran importancia histórica por establecer nuevas bases para el desarrollo de otros más poderosos. Su esencia consiste en mejorar el error que vaya acarreado cada una de las variables durante el proceso iterativo. En contraste con el método de Gauss-Seidel, en éste no se despejarán las incógnitas sino que se colocarán todos los términos del sistema al lado izquierdo, igualándolos con cero. Después, se divide cada una de las ecuaciones entre su coeficiente más grande (en valor absoluto) cambiándolo a signo negativo en caso de que no lo sea ya. De esta manera se tiene en cada ecuación a una de las incógnitas con coeficiente unitario. A continuación se elige un conjunto inicial de valores para las variables del sistema y se evalúan obteniendo una serie de resultados, que por ser la primera aproximación, serán diferentes de cero en cada ecuación. A cada uno de éstos se le llama residuo R . El método recibe el nombre de relajación porque hará los cambios pertinentes a la variable en cuya ecuación se haya obtenido el residuo más grande con el fin de hacer que este residuo se relaje, esto es, que valga cero. El valor que debe tomar la incógnita es precisamente el valor del residuo, ya que con el menos uno que posee como coeficiente (la variable), en el momento de evaluarla, dicha ecuación valdrá cero mientras que el resto de las ecuaciones cambiarán sus residuos. El proceso seguirá iterando hasta lograr que todos valgan cero. Obviamente la solución del sistema serán las cantidades finales que adopten todas las variables y que hagan que simultáneamente todas las ecuaciones valgan cero.

A pesar de que el método de relajación no se usa hoy en día, gracias a él se pudo acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel a través de una *Sobrerrelajación* del mismo. La relación iterativa general del método de Gauss-Seidel está expresada en la ecuación (4.4-1). Esta ecuación, factorizando y utilizando una equivalencia algebraica, puede expresarse como:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

La cantidad que se está sumando a $x_i^{(k)}$ en el miembro derecho de esta ecuación, es precisamente el incremento del residuo que lo relaja a cero. Es claro que en los dos métodos se está aplicando la relajación de diferentes maneras. La **Sobrerrelajación** puede aplicarse al método de Gauss-Seidel, si en lugar de sumarle el segundo término (a cual a $x_i^{(k)}$, se le suma un múltiplo de éste. Puede demostrarse que dicho múltiplo no debe ser mayor que 2 para evitar la divergencia, y que el factor de sobrerrelajación óptimo w se encuentra entre 1.0 y 2.0. La ecuación iterativa toma la siguiente forma:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Existen métodos iterativos que pueden resolver tanto problemas lineales como moderadamente no lineales. Con el término moderadamente nos referimos a aquellas funciones de comportamiento suave, con solución única y que no presentan diversidad de máximos, mínimos o puntos de inflexión. De lo contrario, a menos que la búsqueda de la solución se comience en un punto del dominio muy cercano a ella, los métodos fracasarían estancándose en regiones alejadas de la solución del sistema. Pensemos primero en el problema unidimensional, donde se debe encontrar la solución de una sola ecuación, o función no lineal $g(x)$. Estos métodos comienzan por linealizar el problema. Dicha función puede aproximarse truncando su expansión de Taylor de la siguiente manera:

$$g(x^{k+1}) \approx g(x^k) + g'(x^k) (x^{k+1} - x^k)$$

Dado que se desea encontrar la solución de dicha ecuación, al igualarla a cero resultan las siguientes expresiones

$$g'(x^k) (x^{k+1} - x^k) = -g(x^k) \Rightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{g(x^k)}{g'(x^k)} \quad (4.4-2)$$

que como vemos, proporcionan la siguiente aproximación del valor de la incógnita a partir de su valor anterior. La forma en que converge dicho método, conocido como el de *Newton*, se puede visualizar fácilmente de manera gráfica con un simple análisis de la expresión anterior (ecuación 4.4-2). Para el caso n-dimensional, es decir para un sistema de n ecuaciones, la solución queda expresada, por analogía con la ecuación (4.4-2), mediante una matriz Jacobiana "J" que posee las derivadas de las ecuaciones del sistema con respecto a los parámetros o incógnitas del problema:

$$J^k(x^{k+1} - x^k) = -g^k, \quad (4.4-3)$$

donde el superíndice "k" de la matriz Jacobiana y del vector de funciones g representa al conjunto de parámetros o incógnitas x^k que será sustituido en ellos para evaluar la siguiente aproximación x^{k+1} . Existen casos para los cuales encontrar las derivadas contenidas en la matriz J en cada aproximación representa un costo importante. Por esta razón se emplea un método conocido como *Newton modificado* que mantiene fija la matriz J durante las iteraciones, evaluándola exclusivamente para el valor inicial de las incógnitas x^0 . Esto se puede escribir como:

$$J^0(x^{k+1} - x^k) = -g(x^k).$$

El ritmo de convergencia de este método es mas lento que el de *Newton*. Nuevamente, con un análisis elemental de la ecuación anterior (llevada al caso unidimensional) se puede ver geoméricamente el porqué de su convergencia lenta. Emplea tangentes paralelas en lugar de actualizarlas para cada aproximación. Este método fácilmente puede divergir, sobre todo si las derivadas de las funciones (J) cambian rápidamente.

El método *quasi-Newton* actualiza la matriz Jacobiana pero sin recalcular las derivadas en los valores de la aproximación actual, sino que utiliza información generada en el paso en el que se encuentre. Por ejemplo, después de la primer iteración se conocen los vectores $\Delta x = x^1 - x^0$ y $\Delta g = g(x^1) - g(x^0)$. De esta manera la siguiente matriz $J = J^1$ se ajusta de tal forma que satisfaga $J^1 \Delta x = \Delta g$, como se muestra a continuación:

$$J^1 = J^0 + \frac{(\Delta g - J^0 \Delta x)(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T (\Delta x)}.$$

Este procedimiento es un poco más costoso que el de Newton modificado, que mantiene fija a la matriz J en J^0 .

Con un planteamiento similar al del método de Newton, convirtiendo a la matriz Jacobiana en un múltiplo de la matriz identidad (I/α), se llega a una expresión que sintetiza el algoritmo conocido con el nombre de máxima pendiente (o *steepest descent*). Este método, utilizado para minimizar funciones como podría ser la del error entre las observaciones y los sintéticos, determina las sucesivas aproximaciones empleando el gradiente de la función minimizada, esto es, incrementa los parámetros (incógnitas) en la dirección hacia la cual decrece más rápidamente la función objetivo. Si la función por minimizar es $P(x_i)$, entonces la expresión iterativa que describe la aproximación del método es la siguiente:

$$x^{k+1} - x^k = -\alpha g(x^k) \quad \Rightarrow \quad x^{k+1} = x^k - \alpha g(x^k),$$

donde

$$g(x_i) = \nabla P(x_i) = \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

y α es un escalar. A pesar de que este método asegura que en cada iteración la búsqueda encontrará una solución mejor, muchas veces no se alcanza el valor exacto del mínimo de la función en un tiempo finito. Además, su convergencia es lenta debido a que muchas veces la dirección de máxima pendiente no es la más eficiente para alcanzar la solución esperada. Por esta razón, existen otros métodos que suponen que la función objetivo es perfectamente cuadrática en cada punto, esto les da la capacidad de elegir direcciones de convergencia $d(x^k)$ mejores que la que indica el gradiente de la función $-g(x^k)$. Tal es el caso del método de **gradiente conjugado**, uno de los más usados. Como ya se dijo, en él la dirección de convergencia estará determinada por el vector definido por $d(x^k) = -g(x^k) + \beta d(x^{k-1})$, que como se ve, comparándolo con el del método anterior, posee un término o vector de corrección que involucra un nuevo parámetro β . Dicho parámetro se define como $\beta = g_k^T (g_k - g_{k-1}) / g_{k-1}^T g_{k-1}$ debido a que posee una notoria propiedad en el caso lineal, esto es cuando $g = Ax - b$: donde la

nueva dirección d^k es A-ortogonal¹⁶ a todas las direcciones que haya tomado previamente. Esto último garantiza que la solución exacta del problema se alcanzará en n iteraciones y de manera más rápida. La siguiente expresión sintetiza la operación del método:

$$x^{k+1} - x^k = \alpha d(x^k) \quad \Rightarrow \quad x^{k+1} = x^k + \alpha d(x^k).$$

Como se dijo anteriormente, los últimos cuatro métodos iterativos estudiados son capaces de resolver problemas moderadamente no lineales. Los métodos de Newton modificado y de steepest descent usan menos información que el de Newton ya que el primero emplea sólo a J^o y el segundo sólo g . Por estas razones, su costo computacional, al converger más lentamente, es mayor que el de los métodos restantes, quasi-Newton y gradiente conjugado.

ii) Modelado de funciones de receptor con métodos locales.

En los años 80's se publicaron trabajos donde la teoría de inversión comenzaba a ser aplicada al modelado de las novedosas funciones de receptor, técnica propuesta por Langston en 1979. En ellos se formularon esquemas de inversión lineal para inferir modelos cuantitativos de la estructura por debajo del receptor. Se usaron pues, métodos numéricos de búsqueda local como los que se estudiaron en la sección anterior (4.4-i).

La construcción de una función de receptor implica el cálculo de un sismograma sintético, problema numérico altamente no lineal (Ammon, et al., 1990). Por esta razón, cualquier planteamiento numérico de búsqueda local para resolver este problema de manera inversa demanda comenzar el proceso con una solución inicial muy cercana a la solución "real" del problema (Ammon, et al., 1990; Owens, et al., 1984).

En el trabajo que Owens y compañía llevaron a cabo en 1984, se plantea el proceso iterativo a partir de una expansión de Taylor truncada, de manera semejante al método iterativo de Newton explicado en la sección anterior (4.4-i). Ellos minimizan la diferencia entre la función de receptor observada y la sintética. Esto se puede escribir, después de linealizar el problema con la expansión antes mencionada, como:

¹⁶ A-ortogonal significa que el producto interior de todos los vectores generados vale cero y que está ponderado por A de la siguiente forma: $(d^k)^T A d^{k-1} = 0$.

$$dR_i = R_i^{obs} - R_i(p_k) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial R_i}{\partial p_k} dp_k,$$

donde la función de receptor radial teórica es $R_i(p_k)$; el subíndice "i" denota la muestra en el dominio del tiempo; la " p_k " los parámetros iniciales del modelo; y por último la R_i^{obs} la función de receptor radial observada. En este esquema iterativo de inversión, el conjunto de parámetros p_k es corregido con el incremento dp_k sucesivamente, hasta que algún criterio de convergencia se haya satisfecho. Sin lugar a dudas, este procedimiento elemental padece de serias debilidades al enfrentar un problema con las características que tiene el que se desea resolver, problema multiparamétrico altamente no lineal.

Por esta razón, en 1990 C.J. Ammon, G.E. Randall y G. Zandt propusieron una técnica depurada de búsqueda local de la solución. Su parametrización consta exclusivamente de las velocidades "S" de propagación para una cierta cantidad de capas con espesor constante. El desarrollo comienza exactamente igual que el de Owens, et al., 1984, es decir, con una expansión de Taylor truncada. Si el problema directo está dado por

$$d_j = F_j[m] \quad j = 1, 2, 3, \dots, N,$$

donde d_j representa los datos y F_j el funcional que opera sobre los parámetros del modelo m para generar una forma de onda, entonces la aproximación truncada de dicho funcional se puede escribir como

$$F_j[m] \approx F_j[m_0] + (D, \delta m) \Rightarrow (D, \delta m) \approx F_j[m] - F_j[m_0], \quad (4.4-4)$$

donde el lado derecho de la segunda ecuación es un vector residual de formas de onda, y el izquierdo es el producto interno de la matriz D , que contiene las derivadas parciales del funcional F en m_0 , y el vector de correcciones δm . (Comparar la ecuación (4.4-4) con las ecuaciones (4.4-2) y (4.4-3)). Shaw and Orcutt (1985) y Constable et al. (1987) propusieron una simple modificación algebraica de la ecuación anterior que consiste en sumar a ambos lados el producto interior (D, m_0) resultando:

$$(D, m)_j \approx d_j - F_j[m_0] + (D, m_0)_j. \quad (4.4-5)$$

Esta nueva ecuación, en contraste con la ecuación (4.4-4), se resuelve para los parámetros del modelo m y no para el vector de corrección δm . Además, implica una disminución del trade-off en los parámetros a la hora de minimizar el desajuste de los datos para diferentes normas. Por último, el método que proponen introduce una condición que procura la simplicidad de los modelos finales, dado que este criterio (el de simplicidad) siempre es deseable en una inversión. Para esto se restringe la inversión empleando una norma de suavidad del modelo (Constable et al., 1987). La aproximación no anula las discontinuidades de primer orden del modelo, sin embargo, sí produce un suavizamiento general de las velocidades en el modelo final. Para introducir la condición de suavidad, utilizaron las segundas diferencias de los parámetros para diferentes modelos de prueba, alterando la ecuación (4.4-5) como sigue:

$$\begin{bmatrix} D \\ \sigma \Delta \end{bmatrix} m \approx \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dm_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4-6)$$

donde r es el vector residual dado por $d_i - F_j[m_0]$ y la matriz Δ contiene las segundas diferencias del modelo m . El parámetro ajustable σ controla el trade-off entre el ajuste de las formas de onda y el suavizado del modelo. Para más detalles ver Ammon, et al. (1990).

A pesar de todo el esfuerzo por mejorar la búsqueda de soluciones para el problema de inversión de funciones de receptor, inevitablemente el modelo inicial a partir del cual comenzará a convergir el método, deberá estar muy próximo a la solución "real" del problema. De lo contrario, el proceso corre el gran riesgo de caer en un mínimo local, correspondiente a una solución parcial del problema del cual no es capaz de salir.

Todavía en 1997 sigue habiendo intentos por modelar problemas de esta complejidad empleando métodos locales. En el trabajo de Ozalaybey, et al. (1997) se estudian simultáneamente la dispersión de ondas superficiales y las funciones de receptor. Aquí, toman el trabajo de Ammon, et al. (1990) recién abordado, para modificarlo introduciendo una restricción más, a parte de la del suavizado que ya está contenida. Se trata de insertar condiciones *a priori* en el sistema de ecuaciones implícito en la ecuación (4.4-6) proporcionadas por mediciones de la velocidad de fase de ondas superficiales. Las nuevas restricciones, una vez introducidas, producen el sistema

$$\begin{bmatrix} D \\ \sigma\Delta \\ F \end{bmatrix}^{-1} m \approx \begin{bmatrix} r_r \\ 0 \\ r_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dm_0 \\ 0 \\ Fm_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4-7)$$

donde el término introducido F es una matriz de restricción construida a partir de las derivadas parciales de la velocidad de fase de las ondas superficiales, y los vectores r_r y r_c contienen a la función de receptor y al residuo de la velocidad de fase respectivamente. Si el lector necesita mayor detalle del desarrollo de este método y sus alcances, puede consultar la referencia Ozalaybey, et al. (1997).

A continuación se abordará otra familia de métodos de optimación (búsqueda) diseñados para resolver problemas altamente no lineales. Se trata de los ya mencionados métodos de búsqueda global, entre los que se encuentran aquellos que se emplearon en este trabajo para el modelado de las funciones de receptor.

4.5 Métodos de búsqueda global.

En los apartados precedentes 4.3 y 4.4 quedó claro que los métodos de optimación local no son los más apropiados para resolver problemas multiparamétricos no lineales, a pesar de contar con herramientas para abordarlos (algunos de ellos). La razón fundamental por la cual sucede esto es precisamente aquella que los distingue, en términos generales, de los algoritmos de optimación global: durante su búsqueda exploran exclusivamente un pequeño sector del dominio de soluciones, restringido a la vecindad que circunda la solución inicial. De ahí se deriva que si la solución "real" del problema, es decir, el mínimo absoluto de la función objetivo se encuentra alejada del sitio de la solución inicial, jamás se alcanzará la deseada ya que habrá mínimos relativos interpuestos en su camino, lugares donde quedarán atrapados inequívocamente estos métodos. Como ya se dijo en apartados anteriores, los métodos más usados correspondientes a este grupo son la inversión de matriz implicada en el planteamiento por mínimos cuadrados (apartado 4.3), o los algoritmos que emplean el gradiente de la función objetivo como lo es el de máxima pendiente (*Steepest descent*) o el de **gradiente conjugado** (apartado 4.4-i). En general, los métodos de búsqueda local explotan la escasa información derivada de la comparación de una pequeña cantidad de modelos, evitando así una búsqueda extensiva en el espacio de modelos (*Sambridge y Drijkoningen, 1992*).

Los métodos de búsqueda global, como su nombre lo indica, exploran todo el dominio de soluciones a lo largo del proceso de inversión. Hacen un rastreo "global" en el espacio finito de modelos. De esta manera, a pesar de existir soluciones parciales del problema, es mayor la probabilidad de que la solución final corresponda al mejor ajuste entre los datos observados y los datos sintéticos. Esta clase de métodos, en contraste con los anteriores, no requieren de la información proporcionada por las derivadas de la función objetivo debido a que en ellos no se linealiza el problema. Por el contrario, los algoritmos de optimización global emplean procesos estocásticos para explorar el espacio de soluciones y así encontrar los mejores modelos.

Se conoce como espacio de soluciones de un problema de optimización dado al dominio de modelos que, acotado previamente, define el rango de variación donde el valor de cada parámetro podrá moverse libremente. Si se tiene un problema definido por un sólo parámetro, entonces se hablaría de un espacio de soluciones unidimensional. Análogamente, si se trata de un problema multiparamétrico de n parámetros, se hablaría

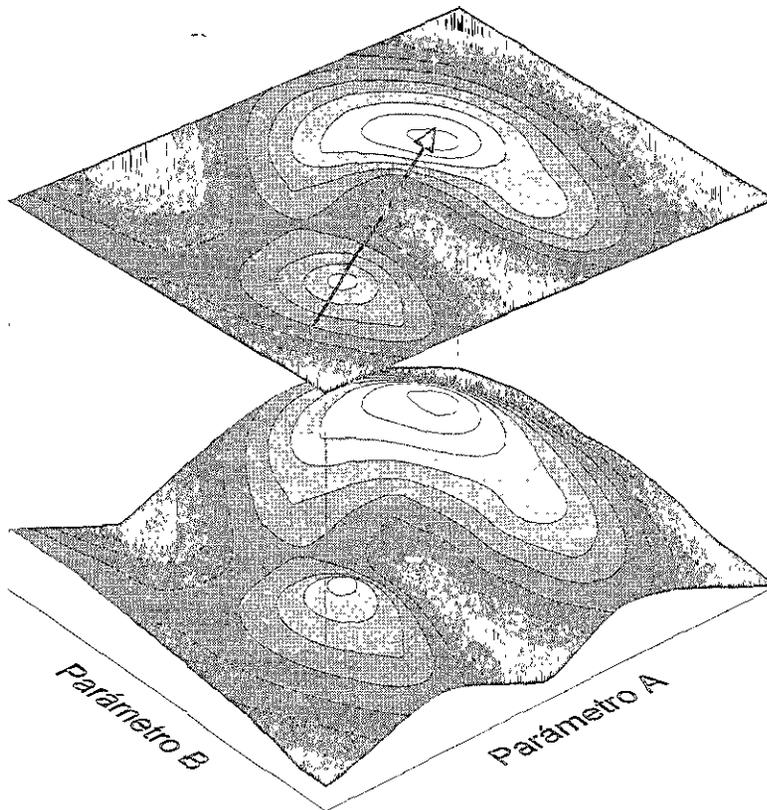


Fig. 4.4 Función objetivo (superficie de costo) definida sobre un espacio de soluciones bidimensional. Se aprecian dos soluciones, una parcial (máximo relativo, parte inferior) y una absoluta (máximo absoluto, parte superior).

de un espacio n -dimensional de soluciones. Para entender este concepto claramente, pensemos en un problema cuyo dominio sea bidimensional. El proceso de inversión asociado a este problema puede reducirse a la búsqueda del valor máximo de una función que defina el ajuste entre los datos observados y los sintéticos para cada modelo (conocida como función objetivo o función de costo). De esta manera, dicha función objetivo, para el caso bidimensional, describiría una superficie como la que se muestra en la figura 4.4. Tal y como se puede ver en ella, se trata de una superficie no lineal con dos máximos, uno mayor que el otro. Existen “dos soluciones”: una absoluta y una parcial. Los ejes horizontales representan a los dos parámetros asociados al problema. De esta manera, cualquier punto contenido en el plano que definen dichos ejes constituye un modelo determinado. Aquel punto ubicado exactamente abajo del máximo absoluto de la superficie de costo será la solución óptima del problema inverso.

En la parte superior de la figura 4.4 se muestra una trayectoria de convergencia cualquiera. En ella, para poder alcanzar el máximo absoluto, se debe atravesar antes uno relativo. Si esta ruta de aproximación fuera la que tuviera que recorrer un método de búsqueda local, invariablemente quedaría atrapado en la primer solución parcial, tal y como ya se había mencionado, por las razones expuestas en secciones anteriores.

El más conocido de los métodos globales es el de Monte Carlo (MC). Éste realiza una búsqueda puramente aleatoria no direccionada. Es decir, el método, al generar un nuevo modelo, no aprovecha la información obtenida por haber muestreado previamente a otros (Gallagher, *et al.*, 1992). Esta deficiencia no impide que su búsqueda sea a lo largo y ancho de todo el dominio de soluciones definido, característica que lo distingue como uno de los métodos de optimación global. MC realiza una selección aleatoria de modelos dentro de todo el dominio de soluciones (plano horizontal de la figura 4.4 para el caso bidimensional), evaluando para cada uno el valor de la función objetivo, esto es, un valor que determina el grado de dispersión (de desajuste) que hay entre los datos sintetizados a partir del modelo en cuestión, y los datos observados, hasta encontrar algún modelo que satisfaga cierto criterio de terminación. La aleatoriedad no encauzada es el rasgo más característico de este método, el que lo distingue por excelencia.

Por otro lado existen dos métodos de optimación global que han cobrado un gran auge en los últimos años; esto debido a su eficacia al resolver problemas mutiparamétricos altamente no lineales. Se trata de Genetic Algorithms (GA) y de Simulated Annealing (SA), que en español se conocen como “Algoritmos Genéticos” y “Cristalización Simulada” respectivamente. En términos muy generales, la diferencia que hay entre estos

métodos y el de MC es que, al igual que en el caso de algunos de optimación local, el proceso desarrolla una búsqueda encauzada, una búsqueda "inteligente". En gran parte, el poder de convergencia de estos dos algoritmos radica en que la optimación depende esencialmente de eventos aleatorios. Esto conlleva que el mecanismo de búsqueda no responda a reglas determinísticas que obliguen al proceso a alejarse de un punto específico del espacio de soluciones de una manera predeterminada. Sin lugar a dudas, como ya se dijo hace un momento, el poder de GA y SA radica en los procesos estocásticos que comprenden. Sin embargo, el criterio de convergencia que emplea cada uno está inspirado en fenómenos naturales que por sí solos ya poseen una fuerza sorprendente para hacer que una optimación sea exitosa. Antes de describir brevemente en que consisten dichos fenómenos, destacando las características que los diferencian, es importante subrayar que GA y SA están relacionados básicamente entre sí por compartir su naturaleza estocástica, y por resolver problemas de optimación complejos de múltiples soluciones usando mecanismos probabilísticos (*Sambridge y Drijkonigen, 1992*).

De la misma manera que la naturaleza garantiza la adaptación y evolución de las especies en nuestro planeta, Algoritmos Genéticos lo hace con los modelos que intervienen en un proceso de modelado inverso. Para esto, GA expresa a través de cadenas binarias todos los modelos por complejos y largos que sean. Esto le permite la manipulación de muchos de ellos empleando procedimientos elementales inspirados en el modo como los sistemas biológicos evolucionan para generar individuos mejores. Dichos procedimientos, que han sostenido la evolución de las especies durante millones de años, son básicamente tres: la selección natural, la cruce (reproducción sexual) y la mutación de información genética. Una explicación más detallada de la forma en que GA opera con estos conceptos aparece en el siguiente capítulo.

Por otro lado, Simulated Annealing toma su filosofía de un fenómeno natural que no aparece en eventos biológicos, sino durante el proceso de cristalización que sufren las sustancias inorgánicas. Cuando un sólido es calentado hasta su punto de fusión, los átomos que lo componen se encuentran completamente desordenados por la excitación que les produce el estado de energía tan alto que posee el material. La temperatura es la cantidad física cuantificable que revela tanto la cantidad de energía como el ordenamiento microscópico de la sustancia. Una temperatura alta corresponde a un alto contenido de energía y desorden. El enfriamiento paulatino del material permite que alcance poco a poco su estado de ordenamiento máximo, esto es, que alcance el estado de energía

mínima tal que sus moléculas cristalicen en arreglos perfectamente geométricos y regulares. Basándose en este hecho, SA optimiza funciones como podría ser la función objetivo asociada a un proceso de inversión (figura 4.4). En el próximo capítulo se abordará su funcionamiento de manera más detallada, así el lector podrá compararlo con GA y en general con los métodos de búsqueda local.

5 Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada como métodos de inversión global.

Hasta el momento el lector debe tener ya una visión general de lo que significa resolver un problema de inversión, y de las herramientas que normalmente son utilizadas con este objeto. En el capítulo anterior se estudiaron los conceptos involucrados con este asunto, deteniéndonos hacia la parte final en los métodos de búsqueda local más importantes, así como de manera escueta en los de búsqueda global. Fue breve la discusión de los métodos de optimación global porque precisamente es en este capítulo donde se dará una explicación más cuidadosa: en primer plano, de Genetic Algorithms (GA) y en segundo, de Simulated Annealing (SA), ya que fueron los algoritmos empleados en el desarrollo de esta investigación.

El lector también se preguntará porqué se incluyó el tratamiento de SA en el contenido de este capítulo cuyo nombre no le hace referencia alguna. La razón es que paralelamente al modelado de los datos empleando GA, comenzamos a probar este otro método de optimación. Al ver que la calidad de los resultados era comparable con la que hasta entonces se tenían, se decidió complementar las inferencias que arrojaran ambos y así asegurar un poco más la veracidad de nuestras conclusiones.

En las últimas páginas del capítulo 4 señalamos los rasgos que distinguen a los métodos de búsqueda global de los de búsqueda local. Para esto se utilizó una superficie de costo (función objetivo¹⁷) con espacio de soluciones bidimensional (figura 4.4) que contuviera dos máximos, uno relativo y otro absoluto. En ella aparece una de las tantas rutas de aproximación hacia el máximo absoluto que pueden trazarse. Hay que notar que el ajuste de los modelos que contiene dicha ruta puede comenzar a empeorar, aun cuando los valores de los parámetros se aproximen sucesivamente a los valores que se encuentran bajo el máximo absoluto. En esta situación, métodos iterativos de búsqueda local como lo son "steepest descent" o gradiente conjugado (sección 4.4-i), que se desplazan sobre la superficie de costo desde un modelo inicial únicamente en la dirección hacia donde mejora la función de costo, no podrían superar los altibajos que se interpongan entre su posición dentro del dominio de soluciones y la posición de la solución "real". Además, suponiendo que alcanzaran el máximo relativo (solución parcial), les sería imposible abandonarlo en aras de alcanzar el más alto de todos. Esto debido a que en todas las direcciones empeora la función de costo.

Entendiendo estas limitaciones, presentes en los métodos de optimación local, es como se justifica el uso de otro tipo de algoritmos cuya filosofía descansa en ideas y principios

¹⁷ Función cuyas ordenadas indican el ajuste que presentan los datos observados y la respuesta sintética de los diferentes modelos (superficie alabeada figura 4.4) existentes en el dominio de soluciones (plano horizontal figura 4.4).

completamente diferentes. Métodos de optimación que puedan encontrar la mejor solución a pesar de que existan muchas otras soluciones parciales, métodos que rastreen todo el espacio de modelos. Tal y como se dijo al final del capítulo 4, son los de búsqueda global los que poseen estas características. Por lo tanto, a continuación aparece una revisión detallada del funcionamiento de GA y SA, algoritmos que pertenecen a este grupo y que arrojaron resultados consistentes en el presente trabajo. Recordemos que gran parte del poder que tienen para optimar la función objetivo radica en el carácter puramente estocástico que poseen ambos, carácter que se traduce en mecanismos de búsqueda que no responden a conjuntos de reglas determinísticas que fuercen al proceso a alejarse de cierta región del dominio por razones predeterminadas. Se trata de dos algoritmos que emplean criterios probabilísticos para resolver problemas de optimación muy complejos con múltiples soluciones (*Sambridge y Drikkoningen, 1992*).

5.1 Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithms).

i) Principios e historia.

La mayor parte de los organismos vivos han evolucionado principalmente gracias a dos fenómenos primordiales: la selección natural y la reproducción sexual. El primero determina cuáles miembros de una población sobreviven para reproducirse, y el segundo, asegura la cruce y combinación de genes entre dos individuos diferentes. La mezcla de información genética permite que las criaturas evolucionen mucho más rápido que como lo harían si su información fuera exclusivamente una réplica de la de un solo padre, modificada ocasionalmente por alguna mutación. Por otro lado, la selección es más simple aun. Si un organismo falla ante una prueba natural que se le imponga, como lo sería reconocer a un depredador, éste muere. Así, exclusivamente aquellos individuos capaces de reconocerlo tendrán mayores posibilidades de sobrevivir y seguir procreándose.

Durante miles de años el hombre ha seleccionado y cruzado seres vivos de diferentes especies para contar con mejores cosechas, con mejor ganado o con flores más hermosas y exóticas, por ejemplo. Sin embargo, trasladar estos procedimientos a un programa de cómputo no es tan fácil como parece. El problema principal consiste en diseñar un "código genético" que permita representar la esencia de un problema, de la misma forma como el ADN representa y contiene la esencia de una persona o de un ratón (Holland, 1992).

Los primeros intentos por vincular la programación con la evolución de las especies se realizaron en los últimos años de la década de los cincuenta y en los primeros de la siguiente. Los resultados fueron muy pobres ya que los científicos se apoyaron en conceptos de la biología que existían en aquella época, en los que se ponía todo el énfasis en el proceso de mutación, despreciando a la cruce de información genética como herramienta necesaria para procrear mejores individuos. Hans J. Bremerman en estos años propuso un tipo de mezcla de información genética que resultó poco eficiente, con muchas limitaciones. A mediados de los años sesenta, John H. Holland desarrolló el primer algoritmo genético que, al contener tanto la cruce como la mutación de información, fue el que más se apegó al esquema de evolución natural de las especies. En la década siguiente, Holland se dedicó a diseñar códigos genéticos que logran representar la esencia de cualquier problema (Holland, 1975).

Trabajos posteriores, que incluyeron a la mutación como otro mecanismo medular en el proceso de evolución, aportaron elementos para consolidar esta teoría como uno de los

algoritmos de optimación más poderosos (Goldberg, 1989; Berg, 1990). Así, GA ha sido utilizado en diversas áreas de la investigación, tales como la optimación de funciones, problemas de ordenamiento, y programación automática. En los últimos años se han realizado numerosos trabajos con GA en el ámbito de la sismología. Stoffa y Sen (1991, 1992), aplicaron GA a la inversión de registros de ondas planas para obtener la estructura de la velocidad para la propagación de ondas compresionales y de densidades a partir de datos de reflexión. Por otro lado, Sambridge y Drijkoningen (1992) mostraron el poder de GA en contraste con el método de Monte Carlo con un problema de optimación multiparamétrico donde se invierten registros de refracción para obtener modelos unidimensionales de velocidades. Kennett y Sambridge (1992) resuelven el problema de la localización hipocentral empleando GA. Además de éstos, existen trabajos sismológicos aún más recientes. Entre otros, el que realizó Zhou et al. (1995) para restringir la estructura cercana a la fuente, o el de Yamanaka y Ishida, (1996) donde invierten las curvas de dispersión de ondas superficiales. Por último, el trabajo que realizó Shibutani et al. (1996) con GA para invertir funciones de receptor proponiendo un modelo estructural de la corteza y manto superior, trabajo cuyos objetivos y procedimientos se asemejan a los que se emplearon en esta investigación.

ii) El método.

El método quedará bien explicado a través de un ejemplo teórico representativo. Supongamos que el problema a resolver es el siguiente: los parámetros que se desea determinar con el proceso de inversión quedan representados por el vector de incógnitas m . La función de costo, que determina el ajuste entre los datos observados y la respuesta sintética de un modelo dado, es no lineal y está dada por $\Phi(m)$. Lo siguiente es definir el esquema de codificación para los parámetros. Éste va a estar determinado por dos factores: la extensión necesaria de la búsqueda en el espacio de modelos, y la resolución que se desee (Stoffa y Sen, 1991). De esta manera, la extensión deberá definirse parámetro a parámetro estableciendo un par de fronteras a_i y b_i para cada uno, tales que restrinjan los valores que pueda tomar el i -ésimo parámetro x_i , como $a_i < x_i < b_i$. La resolución la dará el intervalo de discretización d_i que se elija, siguiendo la ecuación:

$$d_i = \frac{(b_i - a_i)}{N_i}, \quad (5.1-1)$$

donde N_i es la cantidad de posibles valores que podrá tomar el parámetro durante el proceso (Sambridge y Drijkonigen, 1992). Así, todos los modelos permitidos, m , definidos por el conjunto de parámetros x_i , están restringidos al dominio de valores

$$x_i = a_i + jd_i \quad \text{para } j = 0,1,2,\dots,N_i. \quad (5.1-2)$$

GA trabaja sobre una población inicial de Q modelos seleccionados aleatoriamente. Dichos modelos se construyen haciendo combinaciones azarasas de valores de los parámetros. Si recordamos la superficie de la figura 4.4, la generación inicial se asemejaría a una lluvia de partículas esparcida al azar sobre esta superficie. Cada modelo debe codificarse en binario de tal forma que la cadena resultante sea exclusiva y característica de cada uno. Haciendo una analogía con la genética, dichas cadenas constituyen los cromosomas asociados a los individuos de la población inicial (figura 5.1). La codificación en binario no se lleva a cabo directamente con los valores de los parámetros, que en general pertenecen al conjunto de los números reales. Lo que se codifica en la práctica son números enteros que indican la posición de cada valor real dentro de un arreglo bidimensional. De esta forma, si suponemos, por ejemplo, que se trata de un problema con sólo tres parámetros, dos individuos (modelos) cualesquiera podrían ser (15,3,8) y (7,20,6). Las cadenas binarias correspondientes se muestran en la figura 5.1, donde los subconjuntos de unos y ceros, delimitados por las líneas discontinuas, son la traducción de los números enteros decimales que poseen los dos modelos del ejemplo.

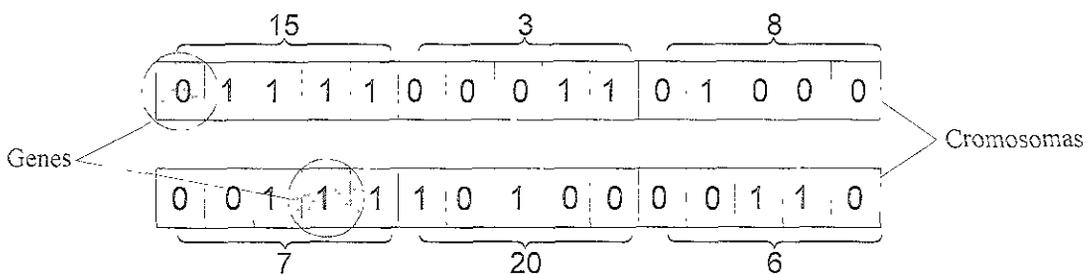


Fig. 5.1 Diagrama de dos cadenas binaras producto de la codificación de los dos modelos contenidos en el texto. Cada cadena corresponde a un cromosoma, y cada bit, ocupado por un cero o por un uno, a un gen.

La codificación binaria que se ha descrito es una de tantas posibles de las que se pueden implantar en diferentes algoritmos genéticos (Holland, 1975). Únicamente los modelos de la generación inicial son construidos aleatoriamente. Los modelos de todas las generaciones posteriores se crean a partir de los tres mecanismos evolutivos esenciales: la selección, la cruce y la mutación.

La secuencia iterativa que comprende el algoritmo se desarrolla en el siguiente orden. Primero, a cada uno de los individuos de la población actual (población inicial aleatoria únicamente en la primer iteración) se le determina su calidad. Para el caso del modelado inverso de un fenómeno observado, se evalúa, por modelo, el ajuste que poseen su respuesta sintética empleando el problema directo y los datos observados del fenómeno que se esté modelando. Es decir, se calcula la función de costo $\Phi(m)$ para cada individuo. De esta manera, una vez que haya terminado el ciclo que asigna una calificación a cada modelo, se tienen los elementos necesarios para llevar a cabo la *selección* de los individuos más aptos, los que poseen mejores ajustes.

Selección.

Para ser precisos, la selección de modelos se efectúa por medio de un criterio probabilístico. Esto quiere decir que, la selección o eliminación de un modelo estará sujeta a su probabilidad de sobrevivencia, la que, a su vez, dependerá de la bondad del modelo. En otras palabras, de la población de Q individuos y de sus respectivas funciones de costo $\Phi(m_k)$ ($k=1, \dots, Q$), se determina una probabilidad de selección para cada modelo $P_s(m_k)$ que dependerá de su calidad. La forma en que esta probabilidad es determinada depende del algoritmo genético que se trate. En el que empleamos para esta investigación, la probabilidad de selección de cada modelo se establece a partir de una operación aritmética entre el desajuste promedio de la población, el desajuste del peor modelo, el desajuste del modelo en cuestión, y la cantidad de individuos de la generación actual, de la siguiente manera:

$$P_s(m_k) = \frac{\Phi_{max}}{Q \cdot (\Phi_{max} - \Phi_{prom})} - \frac{\Phi(m_k)}{Q \cdot (\Phi_{max} - \Phi_{prom})}, \quad (5.1-3)$$

donde Φ_{max} , y Φ_{prom} son las funciones de costo máxima y promedio de la generación, y Q es la cantidad de individuos de la población.

Para entender el procedimiento de selección podemos imaginar una ruleta como las que se usan en los casinos. Cada casilla corresponderá a un modelo específico de la población. La única diferencia consiste en que las dimensiones de las casillas de nuestra ruleta no son iguales entre sí, se trata de una ruleta sesgada (Goldberg, 1989). Las dimensiones de las casillas dependerán precisamente de la probabilidad de selección de cada modelo. Por ejemplo, si la probabilidad de un individuo es del 60%, entonces su casilla será más grande (proporcionalmente) que la de aquél con probabilidad del 20%. Lo que hace el algoritmo genético empleado en este ejercicio es correr la ruleta tantas veces como modelos haya en la población. Así, lo más probable es que aquéllos que tengan una casilla más grande saldrán ganadores (seleccionados) más veces que los que la tengan pequeña. Al término de esto, la población seleccionada seguirá siendo de Q modelos. Por si fuera poco, nuestro algoritmo, en caso de que no seleccione al mejor modelo, se asegura de incluirlo en la siguiente generación reemplazando al peor de todos. Esto último, conocido como "selección elite", fue propuesto por Yamanaka e Ishida (1996).

Otras dos de las expresiones más usadas para determinar la probabilidad de selección de los modelos (Sambridge y Drijckoningen, 1992) en problemas donde se minimice la función de desajuste, son:

$$P_r(m_k) = a - b\Phi(m_k), \tag{5.1-4}$$

que describe una distribución de probabilidades lineal, y

$$P_r(m_k) = A \exp[-B \Phi(m_k)], \tag{5.1-5}$$

que corresponde a la distribución exponencial. Los valores que acostumbran tomar las constantes a , b , A y B son los siguientes:

$$b = Q^{-1}(\Phi_{max} - \Phi_{prom})^{-1}, \quad a \geq b\Phi_{max}$$

$$B = (\Phi_{\sigma})^{-1}, \quad A = \left[\sum_k \exp(-B\Phi_k) \right]^{-1},$$

donde Φ_{max} , Φ_{prom} y Φ_{σ} son las funciones de costo máxima, promedio, y la desviación estándar de todos los desajustes de la población inicial, respectivamente.

Stoffa y Sen (1991) propusieron otro tipo de selección basada en una probabilidad que denominaron de actualización (update). Este criterio probabilístico es usado para decidir qué modelos pertenecientes a la generación anterior deben sustituir a ciertos modelos de la generación actual. El mecanismo es muy sencillo. Para cada modelo actual se compara su desajuste con el desajuste de un modelo elegido al azar de la generación recién pasada. Si el desajuste del modelo actual es menor, entonces éste siempre se conserva. Si no, existe un valor P_u que establece la probabilidad de sustitución del modelo anterior por el actual. Este procedimiento controla la influencia de los ajustes de generaciones previas en la población del momento. El valor óptimo al que llegaron Stoffa y Sen para P_u fue del 90%.

Cruza.

Una vez que se tiene la nueva población de Q modelos seleccionados, se lleva a cabo la *reproducción sexual (cruza)* de los individuos. De manera opuesta a la procreación asexual, en donde la información genética de un hijo es una réplica exacta de la de un solo padre, los descendientes derivados de la reproducción sexual poseen información de ambos padres. En los procesos de reproducción biológica, cada uno de los dos progenitores aporta una célula llamada gameto, que posee la peculiaridad de contener únicamente la mitad de la información genética que posee el resto de las células del organismo. Así, al llevarse a cabo la fecundación, ambos gametos se fusionan para integrar el cigoto, que en el caso de la mayoría de las especies animales estaría compuesto por un óvulo y un espermatozoide.

La reproducción sexual tiene la *ventaja biológica de promover la variación genética* entre los miembros de una especie. ya que como se dijo, la descendencia es el producto de los genes aportados por ambos progenitores, en vez de ser la copia genética de un solo individuo. De una forma muy similar a la que se presenta en el mundo animal sexuado, los algoritmos genéticos engendran nuevos modelos a partir de la generación progenitora: de manera aleatoria, se integran $Q/2$ parejas de individuos, semejantes a la que se muestra en la figura 5.1. Cada pareja es potencialmente capaz de cruzarse. Para determinar cuáles de ellas llevarán a cabo la cruce, se le asocia a cada una un número al azar entre cero y uno. Si dicho número es menor que el valor de P_c (conocido como probabilidad de

cruza¹⁸), entonces la pareja correspondiente efectuará el apareamiento. De lo contrario, la pareja se conservará intacta para la siguiente generación

El mecanismo de cruce entre los dos modelos es muy simple. Aleatoriamente se elige un gen que se encuentre en la misma posición en ambas cadenas, las cadenas se bisecan en ese punto (figura 5.2-a), y se intercambia una de las partes (figura 5.2-b) Siguiendo con la analogía del fenómeno biológico, cada una de estas partes juega el papel de gameto, ya que posee (cada parte) solamente una porción de la información genética de un padre. Asimismo, al valor que toma cada gen (bit), un cero o un uno en nuestra codificación binaria, se le conoce como alelo.



Fig. 5.2 Mecanismo de cruce entre dos modelos cualesquiera (tomados de la figura 5.1): a) partición de los dos cromosomas en un gen seleccionado aleatoriamente, b) intercambio y unión de las partes (gametos) para generar dos nuevos individuos (cromosomas).

Si se analizan los 6 bloques binarios resultantes, de cinco genes cada uno (figura 5.2-b), veríamos que los números decimales correspondientes cambian para cada modelo. Compárense las cantidades decimales asociadas a la figura 5.1 con las siguientes dos triadas para el modelo de arriba se tiene (15,19,6) y para el de abajo (7,4,8).

El propósito de cruzar dos cadenas diferentes en un algoritmo genético es explorar nuevas regiones del dominio de soluciones donde quizás haya máximos absolutos (figura 4.3). Esto significa que el proceso puede crear un modelo hijo que caiga en una región externa a la que se esté explorando del dominio, región que forzosamente tendrá una

¹⁸ Este valor determina el porcentaje de individuos por generación que se reproducirán.

función de costo media cuando menos del orden del promedio correspondiente a la región de la cual provino el modelo, debido al proceso de selección (Holland, 1992). La probabilidad de que un hijo caiga afuera de la región a la que pertenecen sus padres depende de la distancia que haya, dentro de las cadenas binarias de los progenitores, entre los unos y ceros que definen dicha región. Por ejemplo, el hijo que provenga de una cadena que muestre la región¹⁹ (1 0 * * * *), la abandonará solamente si el bit de cruza aleatorio cae en la segunda posición de la cadena, una posibilidad entre cinco para cromosomas que contengan seis genes (Holland, 1992). Esta probabilidad podría ser mucho menor si la cantidad de bits fuera más grande, digamos de 1000. En este caso se hablaría de una probabilidad de 1 entre 999, que ya es considerablemente más chica.

Mutación.

Finalmente, otro fenómeno genético esencial para la evolución: la *mutación*. La mutación, al igual que la reproducción sexual, garantiza la diversidad genética en una población. Se le puede definir como un cambio hereditario en la secuencia del ADN (cromosomas de Ácido Desoxirribonucleico) de un organismo. La mutación afecta el carácter de los genes. Establece *alelos* alternativos, esto es, valores diferentes en los genes, lo que abre la posibilidad de que aparezcan nuevos *fenotipos*²⁰. Los cambios evolutivos sólo son posibles cuando existen *fenotipos* alternativos. En una población grande, el éxito o fracaso de un nuevo gen mutante depende principalmente de su *ventaja selectiva*. Esto se refiere a la capacidad que dicho gen confiere a su poseedor para dejar un gran número de descendientes vivos en la siguiente generación respecto a los poseedores de los *alelos* tradicionales. La mutación, regresando al dominio de modelos, puede provocar que la búsqueda salga de la región en que se halle localizada. Supongamos que la población de modelos durante una inversión se encuentra confinada a los alrededores de un máximo local, como el que aparece en la parte inferior de la superficie de la figura 4.3. Entonces, la mutación oportuna de un gen podría engendrar un individuo que se encuentre en las faldas del máximo absoluto con la misma altura cuando menos que el resto de la población. Es decir, con el mismo desajuste o con uno menor que el promedio. Simplemente por esta razón, la probabilidad de que este mutante sobreviva, y por ende se reproduzca, será semejante o mayor a la de la mayoría. Puede

¹⁹ Donde cada asterisco puede tomar el valor de cero o uno.

²⁰ Un fenotipo es la expresión física o química de los genes en un organismo.

sucedier, entonces, que la búsqueda migre de una región a otra del espacio de soluciones (plano horizontal, figura 4.3).

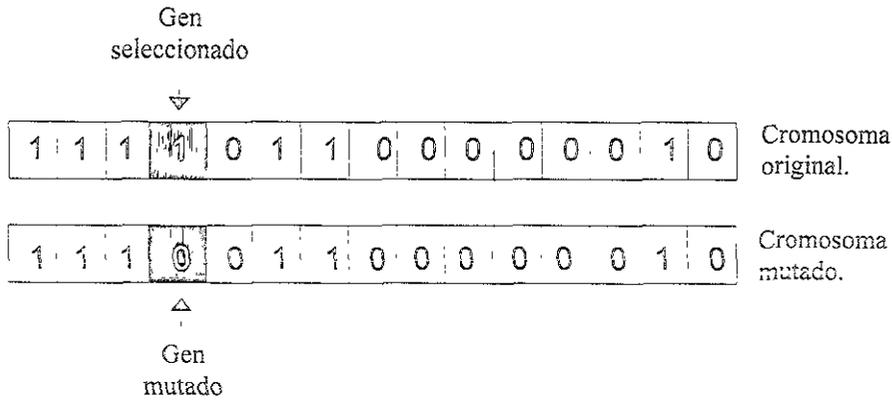


Fig. 5.3 Diagrama que muestra el mecanismo de mutación para un cromosoma. Se elige un bit aleatoriamente (parte superior) y se cambia su paridad (parte inferior).

En un algoritmo genético, la mutación se lleva a cabo simplemente modificando el alelo de un gen: si éste es un cero se cambia por un uno, y si es un uno por un cero (figura 5.3). Tal y como fue seleccionado aleatoriamente el bit para la partición en la cruce, se elige en el proceso de mutación el gen (bit) que será mutado. En términos computacionales, la mutación de un gen significa el cambio de paridad de un bit seleccionado al azar dentro de la cadena binaria. Si comparamos los valores decimales asociados a los 3 bloques binarios del cromosoma original (figura 5.1) con los del mutado (figura 5.3), tenemos que el primer número es totalmente distinto: cromosoma original (15,3,8), cromosoma mutado (7,3,8). El ejemplo deja claro que este fenómeno fomenta la diversidad genética de las poblaciones, condición indispensable para que la evolución exista. La cantidad de modelos mutados, al igual que en la cruce, dependerá de un parámetro probabilístico P_m llamado probabilidad de mutación. Si P_m vale 2%, aproximadamente ese porcentaje de individuos sufrirá una mutación.

Con el fin de prevenir un problema del que se hablará más adelante, la convergencia prematura, implantamos a nuestro algoritmo genético una probabilidad de mutación P_m dinámica (Yamanaka y Ishida, 1996). En esencia, lo que hace esta modificación es incrementar la probabilidad de mutación conforme se vaya homogeneizando la población. De esta manera, si se encuentra toda ella agrupada en torno a una solución parcial, la probabilidad de salir de esa región aumenta al disponer más modelos mutados. Para determinar la homogeneidad de los individuos en las generaciones se calcula el

coeficiente promedio de variación γ (para cada parámetros de los individuos de una población) como

$$\gamma = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\sigma_i}{\bar{x}_i} \right),$$

donde M es la cantidad de parámetros, \bar{x}_i es el promedio del i -ésimo parámetro, y σ_i es la desviación estándar. Una forma de definir P_m en función de γ es la siguiente:

$$P_m = \begin{cases} P_m & \text{para } \gamma > 0.1 \\ 0.1 & \text{para } 0.02 < \gamma < 0.1 \\ 0.2 & \text{para } \gamma < 0.02 \end{cases},$$

donde P_m es la probabilidad de mutación inicial.

Una vez que se llegó a este punto, se tiene una población de Q modelos que ha sido evaluada, seleccionada, cruzada y finalmente mutada. El siguiente paso, que se repetirá hasta que el proceso de inversión concluya, es considerar a dicha generación y a todas las subsecuentes como si fueran la primera (aquella cuyos individuos se formaron aleatoriamente) para someterlas de la misma forma a los mecanismos que presiden la evolución natural de las especies.

Con la mutación concluye la secuencia de operaciones numéricas que define a un algoritmo genético. Al ser un proceso iterativo, dicha secuencia se repetirá hasta satisfacer algún criterio de error o de estancamiento del método. En la figura 5.4 se presenta un diagrama de flujo donde queda sintetizado el orden secuencial del proceso. Este diagrama de flujo está particularizado para el caso del modelado inverso de alguna forma de onda. De ahí que aparezcan las curvas dentro de los cuadros.

Un problema importante que puede presentarse con GA es la convergencia prematura. Dicho problema ocurre cuando el proceso llega al punto en el que la población se homogeneiza en torno a una solución parcial, de tal forma que ni la cruce ni la mutación de información genética puedan proveer la diversidad necesaria de individuos para salir de esa región del dominio de soluciones. Una de las razones más importantes por las que esto sucede, es el empleo de una población finita de modelos que por ende acarrea errores de procedencia estocástica (Sen y Stoffa, 1992).

El conflicto aparece cuando el tamaño de la población usada es demasiado pequeño para obtener el grado de definición requerido, o cuando sus dimensiones no cubren adecuadamente el espacio de soluciones. Stoffa y Sen (1991) encontraron ciertos

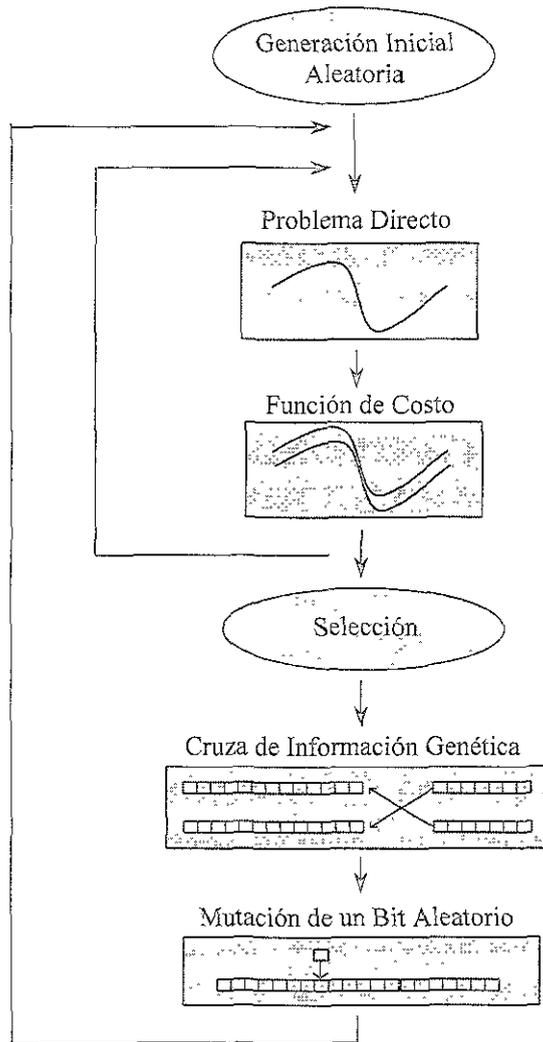


Fig. 5.4 Diagrama de flujo de un algoritmo genético particularizado para la inversión de formas de onda. El ciclo interno evalúa el desajuste de cada modelo para la generación actual; el ciclo externo, el de las iteraciones, repite sucesivamente los procesos evolutivos de selección, cruza y mutación para cada población

valores específicos "ideales" para los parámetros probabilísticos evolutivos que propician una convergencia adecuada. Estos valores son los siguientes: $P_c = 60\%$, $P_m = 1\%$ y $P_u > 60\%$. Sin embargo, también encontraron que a pesar de poderse generalizar la aplicación de dichos valores, el tamaño de la población es fundamental para favorecer la

convergencia al máximo absoluto, y que el tamaño óptimo depende íntimamente de la parametrización del problema.

5.2 Cristalización Simulada (Simulated Annealing).

Tal y como se mencionó en la introducción de este capítulo, el método de SA fue incorporado a los trabajos en un estadio avanzado. Por esta razón, el manejo del algoritmo no es tan profundo y amplio como el que se tiene de GA, con el que llevamos varios años de aplicación. Sin embargo, a continuación se hará una revisión de SA, en términos semejantes a los empleados con GA.

i) Principios e historia.

En la sección 4.5 se hizo una descripción de los fundamentos termodinámicos del método. Se dijo que la idea central de este algoritmo había sido tomada de un fenómeno que ocurre durante el enfriamiento (templado) paulatino de una sustancia inorgánica inicialmente en estado líquido. Cuando un sólido es calentado hasta su punto de fusión, los átomos que lo componen se encuentran completamente desordenados por la excitación que les produce el estado tan alto de energía que posee el material. La temperatura es el parámetro físico que revela tanto la cantidad de energía como el ordenamiento microscópico de la sustancia. Una temperatura alta corresponde a un alto contenido de energía y desorden. El enfriamiento lento del material permite que alcance poco a poco su estado de ordenamiento máximo, esto es, que alcance su estado base de mínima energía de tal modo que sus moléculas cristalicen en arreglos estructurales perfectamente geométricos y regulares (*Sen y Stoffa, 1991*). Para ejemplificar este fenómeno podemos pensar en la cristalización tan perfecta que se produce en la mayoría de los cuerpos magmáticos intrusivos (diques y batolitos, por ejemplo). En ellos, celdas unitarias moleculares tienen tiempo suficiente para acresionarse lentamente unas con otras y formar retículas geométricamente perfectas que, una vez visibles, reproducen exactamente la forma microscópica de la sustancia sólida cristalina. En contraste, si el magma aflorara a la superficie y sufriera un enfriamiento súbito, como el que experimentan las lavas almohadilladas al encontrarse con el agua, entonces la sustancia se solidifica sin alcanzar su estado de mínima energía, o sea, de máximo ordenamiento.

El resultado es una masa amorfa o policristalina metaestable que en petrología se denomina vidrio o roca afanítica criptocristalina, según sea el caso.

A pesar de ser la cristalización un fenómeno relativamente común en la naturaleza, producto de la disminución paulatina de la temperatura en un sistema físico²¹, dicha temperatura y su disminución no tienen una relación tan evidente con el problema de optimización de funciones. Metropolis *et al.* (1953), en los albores de la computación, introdujo un procedimiento general inspirado en la teoría de la mecánica estadística. Dicho método pudo utilizarse para simular fidedignamente la configuración de una colección de átomos en equilibrio para una temperatura dada (Kirkpatrick *et al.*, 1983). Una explicación detallada de este punto puede encontrarse en el siguiente apartado (5.2-ii). En este algoritmo, durante la búsqueda de mejores soluciones para el problema de minimización, se consideran otras peores bajo un criterio probabilístico. Es en 1983 cuando Kirkpatrick *et al.* publica un trabajo donde se explica ampliamente la primera adecuación del algoritmo de Metropolis *et al.* (1953) para simular el proceso de cristalización de los elementos (parámetros) que determinan un problema combinatorio de optimización. En este artículo se hace una revisión extensiva de todas las implicaciones teóricas que posee su método en el campo de la mecánica estadística y la termodinámica, y se desarrollan una serie de ejemplos donde se aplica el algoritmo para resolver problemas multiparamétricos de optimización.

A raíz de esta publicación, SA comenzó a divulgarse rápidamente para ser aplicado en muchos campos de la investigación. En geofísica, por ejemplo, se realizaron algunos trabajos para estimar la corrección por estática residual de los registros sísmicos de reflexión (Rothman, 1985, 1986; Vasuadevan *et al.*, 1991), para invertir datos de resistividad eléctrica (Sen *et al.*, 1993) y tomografía sísmica (Ammon y Vidale, 1993), o para la interpretación de primeros arribos (Pullammanappallil y Louie, 1994) y de formas de ondas sísmicas (Sen y Stoffa, 1991) entre otros.

ii) El método.

Para entender cabalmente la esencia del método y saber las razones por las que es tan poderoso, es necesario abordar algunos conceptos básicos de la mecánica estadística. La mecánica estadística es la principal disciplina abocada a la física de la materia

²¹ Existen minerales cuya cristalización se da por la precipitación de elementos químicos disueltos en una solución sin necesidad de que haya un enfriamiento paulatino de la sustancia, v.g. la Calcita, el Yeso, etc.

condensada. Se trata de un conjunto de métodos que estudian las propiedades agregadas de grandes cantidades de átomos que se encuentran en estado líquido, sólido o gaseoso (Kirkpatrick et al., 1983). Debido a que la cantidad de átomos que hay en un centímetro cúbico de materia es del orden de 10^{23} , sólo será observado experimentalmente el comportamiento más probable del sistema en equilibrio térmico a una temperatura dada. Supongamos que la distribución espacial de los átomos que conforman al sistema (llamada configuración del sistema) está dada por $\{r_i\}$, y que el comportamiento observable está determinado por el promedio de pequeñas fluctuaciones en torno al comportamiento promedio del sistema. Entonces, la probabilidad de ocurrencia de cada configuración estará dictada por el factor de probabilidad de Boltzmann:

$$P(\{r_i\}) = \exp(-E(\{r_i\})/k_B T), \quad (5.2-1)$$

donde $E(\{r_i\})$ es la energía de la configuración, k_B es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura del sistema. Un fenómeno de gran importancia en la mecánica estadística es aquel que puede sucederle al sistema cuando su temperatura baja lo más posible. Los estados base (mínima energía) de la materia y las configuraciones energéticamente cercanas a ellos son extremadamente raros de encontrar entre todas las configuraciones posibles de un cuerpo macroscópico. Sin embargo, son éstas las configuraciones que dominan sus propiedades a bajas temperaturas, debido a que conforme disminuye la temperatura, la distribución probabilística de Boltzmann se colapsa hacia la parte del dominio correspondiente a los estados de menor energía (figura 5.5) (Kirkpatrick et al., 1983).

En la práctica, las temperaturas bajas no son condición suficiente para alcanzar los estados de mínima energía de la materia. Los experimentos que determinan dichos estados en una sustancia (por ejemplo, cuando se cristaliza un mineral en el laboratorio), lo consiguen templando cuidadosamente al material: primero se funde, y luego se le baja la temperatura lentamente dejando que pase bastante tiempo a una temperatura muy próxima a la de solidificación. Si esto no sucede, permitiendo que la sustancia abandone su estado de equilibrio térmico con un enfriamiento súbito o parcial, entonces el cristal resultante tendrá muchos defectos (en caso de que la sustancia no forme un vidrio), caracterizado por el desorden metaestable de sus moléculas.

Encontrar la estructura molecular del estado base de un sistema cuando es posible evaluar la energía del sistema, es un problema de optimación. Sin embargo, tal y como ya se dijo, el concepto de temperatura y su disminución no posee una analogía tan obvia con la optimación de las configuraciones atómicas de un sistema. En el apartado anterior (5.2-i) se planteó que el método de Metropolis *et al.* podía traducirse en un algoritmo que simulara fidedignamente dichas configuraciones a una temperatura dada. Con tal propósito, dicho algoritmo desplaza a un átomo, en cada paso, una distancia aleatoria y pequeña. Este desplazamiento necesariamente provoca un cambio ΔE en la energía total del sistema que es evaluado. Si ΔE es menor o igual a cero, el desplazamiento del átomo es aceptado y la configuración resultante es tomada como la nueva configuración inicial. En el caso para el que ΔE es mayor que cero (cuando hay un incremento de energía en el sistema), la probabilidad con la que será o no aceptado el desplazamiento está determinada por la siguiente ecuación:

$$P(\Delta E) = \exp(-\Delta E/k_b T), \quad (5.2-2)$$

que es muy parecida a la definición del factor de probabilidad de Boltzman, ecuación (5.2-1). Para saber si es o no admitido el cambio de posición que implicó un aumento de la energía del sistema, se elige aleatoriamente un número entre cero y uno que es comparado con el valor de la probabilidad correspondiente a ese ΔE . Si es menor dicho número, se admite el desplazamiento y se considera a la nueva configuración como la inicial; si es mayor, no es admitido y se regresa a la configuración que se tenía antes del movimiento. Repitiendo sucesivamente este procedimiento se está simulando el movimiento térmico de los átomos del sistema (que se encuentra en equilibrio térmico), a una temperatura fija T dada.

Haciendo una analogía con el problema de inversión, se podrían considerar a los átomos recién mencionados, como los parámetros del modelo en el problema inverso; y a la energía del sistema para una configuración cualquiera, como la función de costo asociada al conjunto de parámetros $\{r_i\}$ dado. De esta manera, con el algoritmo descrito se puede generar una gama de configuraciones (combinaciones de parámetros) correspondientes a la temperatura T del proceso. Esta temperatura es simplemente un parámetro de control que lo único que determina es la forma de la distribución de

Boltzman (figura 5.5) y en consecuencia, el tipo de modelos que van siendo aceptados durante el proceso.

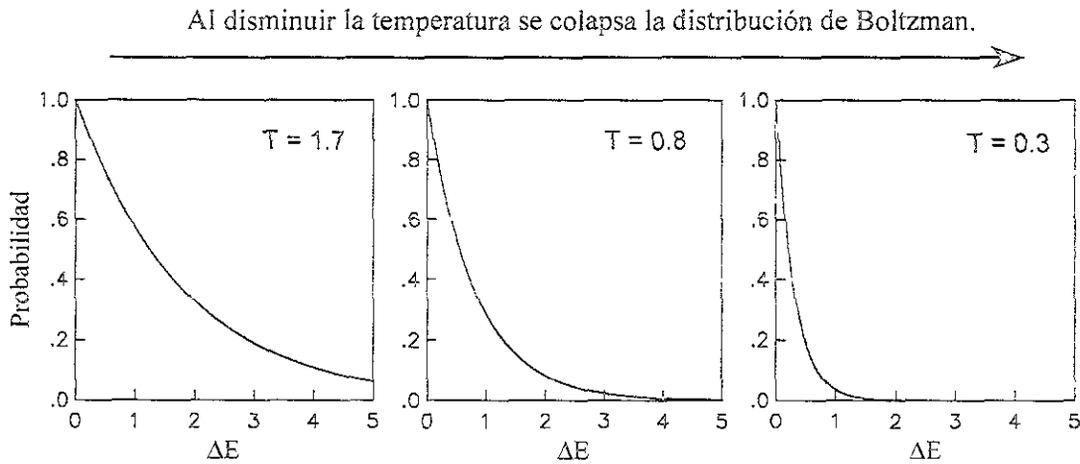


Fig. 5.5 Funciones probabilísticas de Boltzman para diferentes temperaturas. Nótese cómo al decrecer la temperatura, las curva se colapsa hacia la parte de menor energía. Esto implica que, conforme disminuye la temperatura, únicamente las configuraciones que presenten un incremento pequeño en la energía del sistema serán aceptadas

Si lo que se desea es alcanzar el estado base del sistema, es decir, el estado de menor energía y mayor ordenamiento, entonces se debe disminuir muy lentamente la temperatura para simular un proceso cuasiestático. Esto quiere decir en términos matemáticos que, durante el enfriamiento, nuestro sistema experimente una sucesión de estados infinitesimalmente alejados del estado de equilibrio térmico. Si esto se logra, entonces se puede decir que lo más probable es que todas las configuraciones (combinaciones) adoptadas por nuestros parámetros durante el proceso, correspondan al estado actual de energía del sistema y no a otros.

Lo que resta por explicar de manera general es la forma como opera el algoritmo que se empleó específicamente en este trabajo. Aclarar cómo dicho algoritmo lleva a cabo el proceso de "cristalización" del sistema hasta alcanzar soluciones satisfactorias del problema inverso. Del mismo modo que en el apartado 5.1-ii se presentó un diagrama de flujo para GA, en la figura 5.6 se muestra otro correspondiente a SA. En esencia, el programa consta de tres ciclos anidados. El ciclo externo regula la temperatura del sistema. Cada vez que se cumple un ciclo de estos, la temperatura del proceso disminuye al ser multiplicada por un factor $0 < RT < 1$ que normalmente es cercano a 1. De esta manera se lleva a cabo el enfriamiento paulatino que se desea.

El ciclo intermedio se encarga de actualizar los valores, independientes entre sí, de una serie de constantes VM_i (tantas como parámetros del modelo haya). Dichas constantes determinan el máximo incremento que podrá tener cada parámetro a la hora de ser perturbado en el ciclo más interno del proceso. Los valores numéricos que adopten estas

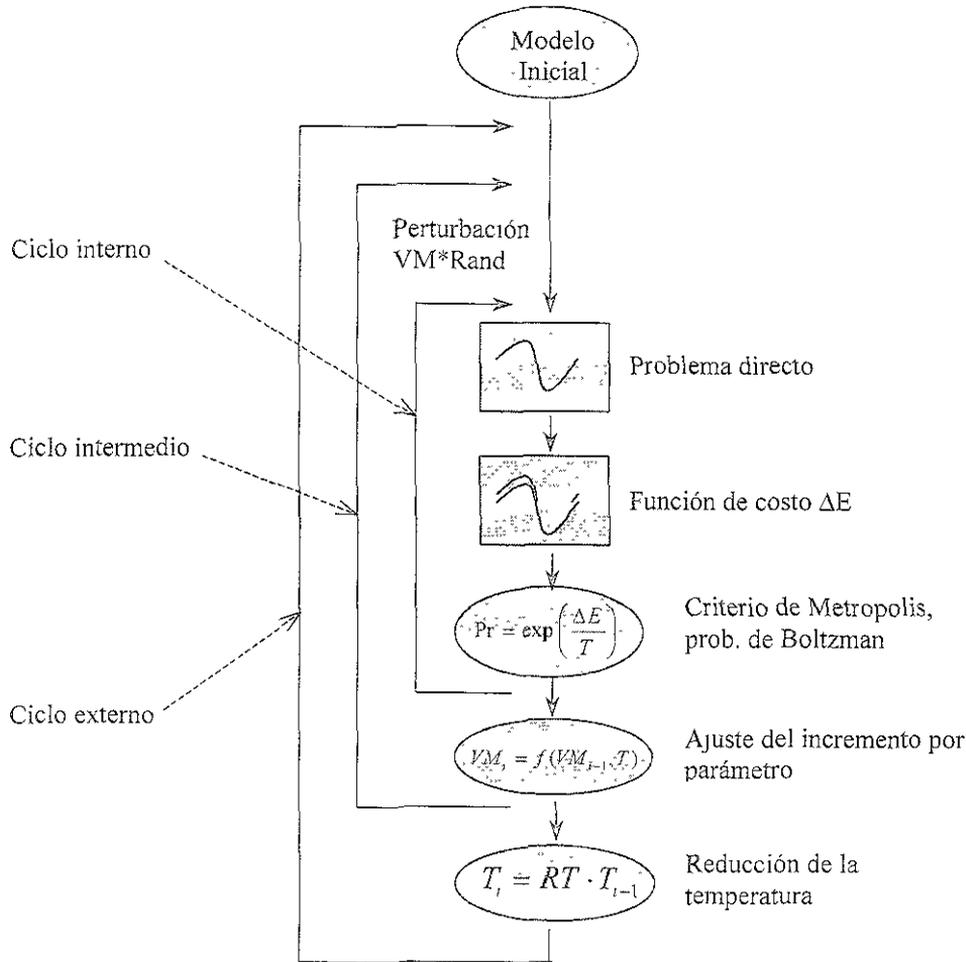


Fig. 5.6 Diagrama de flujo que describe paso a paso el algoritmo de SA empleado en esta investigación. Se distinguen los tres ciclos aludidos en el texto, así como la reducción de la temperatura, el ajuste de las constantes VM , y la asignación de una probabilidad de permanencia para el modelo actual (únicamente para los modelos que incrementen la energía del sistema, ver texto)

constantes dependen de la cantidad de veces que haya o no haya sido aceptado el modelo actual al término de cada secuencia de ciclos internos, según el criterio de Metrópolis (función de probabilidad de Boltzman, figura 5.5). En otras palabras, este ciclo es el que se encarga de establecer las máximas posibles variaciones para cada parámetro del modelo (sistema), propiciando que la cantidad de veces en que se rechace

una nueva configuración del sistema sea muy similar a la cantidad de veces en que sea aceptada.

Para finalizar, en el ciclo interno del algoritmo se perturban los valores de los parámetros empleando los factores VM_i definidos en el ciclo intermedio (el anterior descrito). La perturbación de los parámetros se lleva a cabo cuando se multiplica a cada uno por el resultado del producto de su correspondiente VM_i , por un valor aleatorio entre menos uno y uno. Luego se construye la función de receptor sintética para el modelo generado de esta manera (modelo actual) y se evalúa el cambio de energía en el sistema asociado a la nueva configuración de los parámetros. Dicha variación de energía está determinada por el desajuste que presenta la curva sintética con la observada. Si el desajuste decrece con respecto al anterior, entonces la nueva configuración será aceptada como la actual y perturbada de la misma manera. En este caso se dice que, al pasar a la configuración actual de los parámetros, se produjo un decremento en la energía del sistema. Este decremento ΔE es igual al valor del desajuste. Por el contrario, si la perturbación aleatoria de los parámetros produjo un crecimiento en el desajuste de las curvas, entonces se dice que hubo un incremento en la energía del sistema y a dicha configuración se le asigna una probabilidad de aceptación dada por la distribución de probabilidad de Boltzman (figura 5.5) en el punto correspondiente al ΔE calculado y a la temperatura a la que se encuentre el sistema en ese momento.

Estos ciclos se repiten sucesivamente conforme la temperatura del proceso va disminuyendo. El resultado final es un conjunto de valores para los parámetros cuya respuesta sintética posee un error satisfactoriamente pequeño. En esencia, todos los parámetros y constantes que determinan al proceso de inversión son gobernados por la reducción paulatina de la temperatura del proceso. Conforme disminuye T , lo que se está haciendo es permitir variaciones cada vez más pequeñas en los parámetros del modelo. De esta forma, la búsqueda en el dominio de soluciones que inicialmente se lleva a cabo en todo el espacio, comienza a converger hacia los sectores donde se encuentren los modelos asociados a los mínimos absolutos. Una de las virtudes de este método (SA) es que los valores que van adoptando los parámetros de los modelos, pertenecen al conjunto de los números reales. Es decir, no están sujetos a un conjunto de valores producto de una discretización previamente definida, como sí sucede en el método de GA.

6 Inversión de Funciones de Receptor con Algoritmos Genéticos y Cristalización Simulada.

Todos los temas, conceptos, y métodos desarrollados en el presente trabajo han sido necesarios para construir el marco teórico que comprende las herramientas empleadas en la investigación que en este capítulo será ampliamente descrita. Desde la propagación de ondas, hasta los métodos más vanguardistas del modelado inverso, han sido estudiados detenidamente con el fin de justificar los recursos utilizados en el procesamiento y modelado de registros telesísmicos grabados en tres estaciones de banda ancha del Servicio Sismológico Nacional.

Un breve recorrido por el contenido del trabajo ayudará a refrescar los conceptos medulares que, hasta ahora, han conformado una serie de elementos teóricos consecuentes. Es en este capítulo donde termina la argumentación teórica y comienza el trabajo netamente científico observacional, fundamentado en razonamientos deductivos e inductivos. Trabajo que aspira aportar conocimientos sobre la estructura de la corteza continental en México, a partir de las leyes físico-matemáticas que pretenden modelar la distribución espacial de las propiedades elastodinámicas en el interior de nuestro planeta. Al inicio se abordó el fenómeno de la física de las ondas, desarrollando todo a partir de la teoría de esfuerzos, de deformaciones, y finalmente de la teoría de la elasticidad. También se revisaron los fundamentos matemáticos de los sistemas lineales para justificar la construcción de una función de transferencia a partir de la deconvolución de dos señales en el dominio de la frecuencia.

Una vez deducidas las ecuaciones que rigen el comportamiento de las ondas al propagarse en un medio continuo e incidir en una interfase, se clasificaron las ondas dependiendo de la trayectoria que hayan descrito al viajar en el interior de la Tierra. De esta manera se habló de las principales discontinuidades elásticas que posee nuestro planeta: aquellas que delimitan al núcleo, al manto y a la corteza. Inmediatamente se expuso de manera extensa las implicaciones teóricas que posee la construcción de una función de receptor, analizando cuidadosamente cuál es el contenido de dichas funciones, y que implicaciones se ven reflejadas en su forma dada la presencia de capas inclinadas en la estructura. En ese capítulo se describió un método desarrollado con el fin de identificar las fases que se propagan en el interior de una estructura de capas planas. Herramienta de gran valor para el análisis y entendimiento de las funciones de receptor modeladas.

Habiendo revisado las bases del fenómeno estudiado en el presente, lo siguiente fue abordar el amplio espectro de métodos de modelado inverso, empezando por los de búsqueda local, para terminar con los de búsqueda global. Dos de éstos últimos, el de

Algoritmos Genéticos y el de Cristalización Simulada, merecieron un análisis más detenido por haber sido los que se emplearon en el modelado de esta investigación. Finalmente, se tienen todos los elementos teóricos implicados en el trabajo debidamente expuestos. Lo que resta es emplearlos con sentido común y sin menospreciar la experiencia acumulada hasta el momento.

6.1 Introducción.

Conocer la estructura de la corteza continental es de gran importancia. No sólo por el valioso conocimiento que representa ese hecho aislado, sino también, por la cantidad de aplicaciones que tiene en el ámbito de la sismología. Para poder obtener el tensor de momentos de la fuente sísmica y las profundidades de los centroides de las réplicas de un terremoto (*Courboux, et al., 1997*), o para poder invertir el mismo tensor con datos regionales y reproducir satisfactoriamente las observaciones (*Pacheco y Singh, 1998*), es fundamental contar con un modelo de corteza lo suficientemente detallado para la zona que se esté estudiando.

Por otro lado, los escasos trabajos que han buscado determinar la estructura cortical en México emplean técnicas como el modelado de la dispersión de ondas superficiales (*Fix, 1975; Gombert, et al., 1988; Campillo, et al., 1996*) o el trazado de rayos (*Valdéz-González y Meyer, 1996*), que responden a los rasgos geológicos promedio a lo largo del trayecto entre la fuente sísmica y el receptor. Desafortunadamente, los modelos arrojados por estas técnicas no poseen suficiente resolución como para ayudarnos en diversas situaciones. Con el objeto de profundizar en estos conocimientos, y proponer modelos que respondan a la geología local con más detalle, se aplicaron las dos técnicas de optimización global descritas en el capítulo anterior, Genetic Algorithms (GA) y Simulated Annealing (SA), al modelado de funciones de receptor en tres estaciones de banda ancha (VBB) de la red del Servicio Sismológico Nacional, ver figura 6.1

Cada una de las estaciones fue estratégicamente seleccionada desde un punto de vista tectono-geológico. La estación que está más al norte del arreglo es la de Zacatecas (ZAIG). Se sitúa sobre un antiguo terreno tectónico que no ha sufrido importantes procesos geológicos, al menos desde hace 30 millones de años (*Nieto-Samaniego, et al., 1999*). Dicha estación fungió como punto de referencia en el trabajo por la simplicidad geológica del sitio en el que se encuentra. La segunda estación, yendo hacia el sur, está situada exactamente en la parte sur del Eje Neovolcánico, dentro de las instalaciones de

Ciudad Universitaria (CUIG). Estamos especialmente interesados en este sitio por la extremadamente compleja respuesta sísmica que se ha observado en esta región, inmersa en la cuenca de México. Existen dos principales agentes geológicos que complican el estudio de la estructura en CUIG: la parte más joven y activa del Eje Neovolcánico, y la placa oceánica subducente de Cocos. Finalmente, la estación que se encuentra al sudeste del conjunto, en la planicie costera del Golfo de Veracruz, Tabasco y Campeche (TUIG). Este lugar yace sobre una cuenca sedimentaria de gran espesor, aproximadamente entre 15-18 Km (Shapiro et al., 1999). La historia tectónica y la situación actual de esta región es más estable. Sin embargo, debido a la amplificación de las ondas que produce la presencia de dicha cuenca, existe un considerable riesgo sísmico en la zona. Definir la estructura cortical en TUIG, así como en los otros dos sitios, y comparar los tres escenarios tectono-geológicos, son algunos de los principales objetivos de este trabajo.

Hoy en día hay muchas investigaciones que emplean las funciones de receptor para analizar y modelar la estructura cortical, del manto superior, o de placas subducentes (p. ej., Langston, 1981; Owens, 1987; Lapp, et al., 1990; Baker, et al., 1996; Shibusani, et al., 1996; Ozalaybey, et al., 1997; Bump y Sheehan, 1998). Tal y como estudiaron y demostraron Ammon y compañía en 1990 (Ammon et al., 1990), la inversión de funciones de receptor es un problema altamente no-lineal y de solución no única. La falta de información sobre las velocidades absolutas de la estructura que poseen estas funciones, provoca un acoplamiento de parámetros (trade-off) entre la profundidad y las velocidades de los modelos. En esta investigación, atendiendo este grave problema, se ha usado toda la información *a priori* existente en cada sitio con el fin de restringir lo más posible la búsqueda de soluciones en el espacio de modelos durante las inversiones. La aplicación de esta técnica debe usarse para complementar, mejorar o verificar otras teorías o modelos geofísicos que a su vez proporcionen información inicial para encausar la búsqueda

Por otro lado, considerando el error que poseen nuestras observaciones, se implantó un método para seleccionar un conjunto de modelos que responde al error y consistencia en los datos. Este método evalúa la dispersión de las observaciones apiladas calculando su desviación estándar y empleando simultáneamente dos criterios de selección para cada modelo. Los detalles se explicarán más adelante.

Finalmente, como se ha venido diciendo a lo largo de este trabajo, para contrarrestar los problemas de no-unicidad y no-linealidad que posee la inversión de nuestras

observaciones, se emplearon los dos esquemas de optimización global que ya fueron ampliamente descritos en el capítulo anterior, Algoritmos Genéticos (GA) y Cristalización Simulada (SA), para integrar los resultados finales. Casi todos los trabajos realizados donde se invierten funciones de receptor utilizan métodos de búsqueda local. Dichos métodos parten de aproximaciones numéricas (Owens, et al., 1984; Ammon, et al., 1990; Ozalaybey, et al., 1997). En el capítulo 4 se demostró que, en estos casos, si la solución inicial no está cerca del mínimo absoluto, los métodos de búsqueda local muy probablemente quedarán atrapados en mínimos locales, arrojando soluciones parciales e inadecuadas del problema. En cambio, los métodos GA y SA exploran todo el dominio de soluciones confiriendo más veracidad a nuestras conclusiones.

6.2 Los datos.

En el presente análisis fueron usadas tres estaciones de banda ancha de tres componentes, pertenecientes a la red telemétrica del Servicio Sismológico Nacional. Todas las estaciones que comprende dicha red consisten de un sismómetro de banda ancha Strabeisen modelo STS-2 y un acelerómetro de balance de fuerzas Kinematics modelo FBA-23 conectado a un digitalizador Quanterra de 24 bits. La localización de las estaciones seleccionadas para este trabajo se muestra en la figura 6.1.

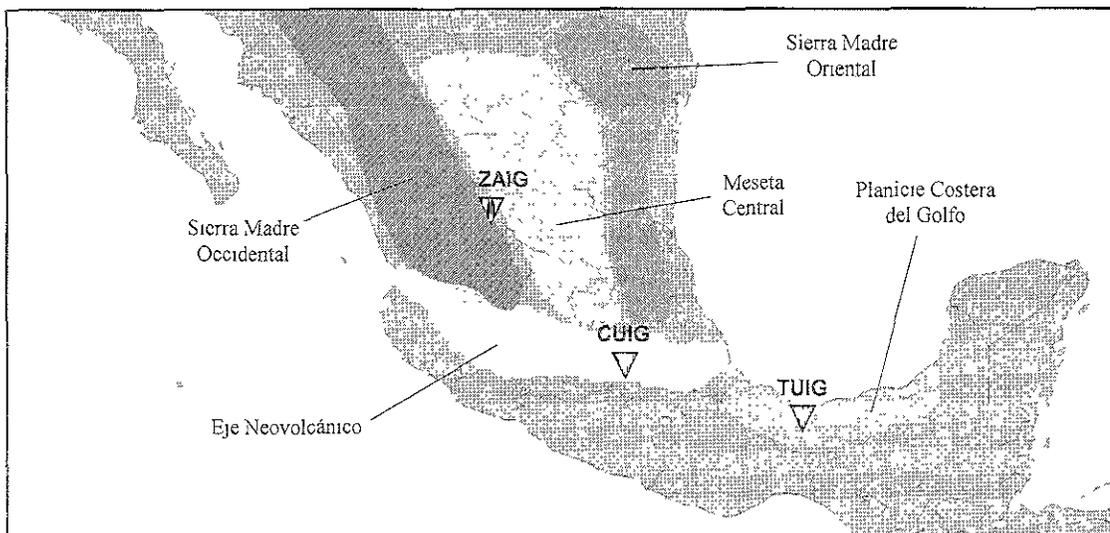


Fig. 6.1 Localización de las tres estaciones estudiadas, ZAIG, CUIG y TUIG, ilustrando los rasgos geológicos más relevantes entorno a los cuales los cuales se encuentran.

La distancia epicentral de todos los eventos procesados para cada estación cae en el rango de manto, es decir, poseen una distancia en grados de $30^\circ < \Delta < 90^\circ$. Se recuperaron todos los eventos grabados desde 1994 hasta Febrero de 1999. El total de eventos registrados por estación es de 25 en Ciudad Universitaria (CUIG), 8 en Zacatecas (ZAIG), y 4 en Tuzandepetl (TUIG). Todos estos fueron seleccionados al descartar aquellos cuya magnitud, complejidad de la fuente, o relación ruido a señal fueran muy pequeñas.

Las localizaciones de los registros telesísmicos empleados en la estación CUIG, poseen una cobertura azimutal que permite agrupar los epicentros en cuatro clusters (grupos) (figura 6.13). Por otro lado, en la estación ZAIG dicha distribución permitió conformar solamente tres grupos epicentrales, mostrados en la figura 6.6. Por último, para la estación restante (TUIG), un solo grupo pudo ser definido (figura 6.18). La idea de agrupar los eventos en enjambres epicentrales es apilar todas las funciones de receptor de cada grupo dentro de un limitado intervalo de distancia epicentral y acimutal, evitando grandes variaciones en los ángulos de incidencia que provocan variaciones no deseadas en las funciones de receptor. Al llevar a cabo los apilados se elimina el ruido incoherente y se

Estación ZAIG

(Grupo 1 – Sudamérica)					
Fecha	Hora	Latitud	Longitud	Profundidad	Magnitud
97/02/09	12:32:36	14.48S	76.27W	33.0Km	6.1Ms
97/05/29	17:02:38	35.96S	102.51W	10.0Km	6.4Ms
98/04/03	22:01:50	8.05S	74.83W	165.0Km	6.6Mw
(Grupo 2 – Islas Fiji)					
97/02/07	08:41:13	19.85S	173.28W	28.0Km	6.2Ms
98/03/29	19:48:16	17.57S	179.06W	537.0Km	7.2Mw
99/02/03	01:13:57	20.20S	174.36W	33.0Km	6.2Ms
(Grupo 3 – Alaska)					
97/12/05	11:26:54	54.84N	162.03E	33.0Km	7.6Ms
99/01/28	08:10:05	53.03N	169.32W	74.4Km	6.4Mb

Tabla 6.1 Fecha, hora, localización y magnitud de todos los eventos empleados en ZAIG clasificados por grupo

Estación CUIG

(Grupo 1 – Sudamérica)					
Fecha	Hora	Latitud	Longitud	Profundidad	Magnitud
94/01/10	15:53:50	13.34S	69.44W	596.0Km	6.9Ms
94/05/10	06:36:28	28.50S	63.09W	601.0Km	6.9Ms
94/06/09	01:15:17	14.36S	68.44W	650.0Km	6.1Mb
94/12/12	07:41:55	17.47S	69.59W	148.0Km	6.3Ms
95/05/02	06:06:05	3.79S	76.91W	97.0Km	6.7Ms
95/07/30	05:11:23	23.34S	70.29W	46.0Km	7.6Ms
97/02/09	12:32:36	14.48S	76.27W	33.0Km	6.1Ms
98/04/01	22:43:00	39.78S	75.15W	9.0Km	6.7Mw
98/05/22	04:48:52	17.33S	64.96W	33.0Km	6.6Ms
(Grupo 2 – Islas Fiji)					
94/03/31	22:40:52	22.05S	179.53W	580.0Km	6.5Ms
95/07/03	19:50:50	29.21S	177.58W	35.0Km	7.2Ms
96/04/16	00:30:54	24.06S	177.03W	111.0Km	6.9Ms
96/08/05	22:38:22	20.69S	178.31W	550.0Km	7.0Ms
97/02/07	08:41:13	19.85S	173.28W	28.0Km	6.2Ms
98/03/29	19:48:16	17.42S	179.24W	539.0Km	6.4Mb
98/05/16	02:22:03	22.14S	179.70W	586.0Km	5.9Mb
(Grupo 3 – Alaska)					
95/05/27	13:03:52	52.62N	142.82E	11.0Km	7.5Ms
95/12/03	18:01:08	44.66N	149.30E	33.0Km	7.9Ms
96/06/10	04:03:35	51.56N	177.63W	33.0Km	7.6Ms
96/06/10	15:24:56	51.47N	176.84W	26.0Km	7.1Ms
99/01/16	10:44:37	56.30N	147.42W	10.0Km	6.1Mb
99/01/28	08:10:05	53.03N	169.32W	74.4Km	6.4Mb
(Grupo 4 – Atlántico)					
95/03/08	03:45:58	16.56N	59.55W	8.0Km	6.3Mb
96/06/02	02:52:09	10.79N	42.25W	10.0Km	7.0Ms
96/12/10	08:36:18	0.87N	30.03W	10.0Km	6.6Ms

Tabla 6.2 Fecha, hora, localización y magnitud de todos los eventos empleados en CUIG clasificados por grupo.

Estación TUIG

(Grupo 1 – Sudamérica)					
Fecha	Hora	Latitud	Longitud	Profundidad	Magnitud
97/11/28	22:53:41	13.74S	68.78W	33.0Km	6.6Ms
98/01/12	10 14:07	31.01S	71.30W	33.0Km	6.2Ms
98/01/30	12:16:09	23.51S	69.83W	43.7Km	6.4Ms
98/09/03	17:37:59	29.29S	71.55W	33.0Km	6.5Ms

Tabla 6.3 Fecha, hora, localización y magnitud de todos los eventos empleados en TUIG clasificados por grupo.

resaltan las fases correspondientes a la señal de mayor amplitud. La magnitud, fechas y localización precisa de cada uno de los eventos aparecen, por estación, en las tablas 6.1, 6.2 y 6.3.

6.3 Selección de modelos considerando el error en los datos.

En la introducción de este capítulo se mencionó un método que fue implantado en los programas de inversión con la finalidad de considerar el error en los datos. La idea central que nos llevó a diseñarlo consiste en encontrar todas las posibles soluciones a nuestro problema tales que satisfagan las observaciones con su correspondiente rango de error. La manera como se evaluó dicho error contenido en los apilados fue calcular, para cada grupo de funciones promediadas, la desviación estándar de todas las trazas en cada abscisa de las funciones. De esta manera, al final se tiene una serie temporal por apilado, donde cada valor de dicha serie corresponde a la desviación estándar de las ordenadas de las funciones promediadas para cada punto del tiempo. Con esta serie calculada se puede definir una banda de error entorno al apilado del grupo de eventos correspondiente. Para hacerlo, se suma y se resta al apilado la serie que posee las desviaciones estándar de las funciones de receptor observadas. Una vez construida esta banda de error, se evalúa el área total que encierran sus fronteras A_B (ver figura 6.2). Ahora bien, una vez entendido esto se pueden describir los dos criterios simultáneos que debe satisfacer un modelo para que sea seleccionado por nuestros programas de inversión. Antes vale la pena aclarar que estos criterios no tienen relación alguna con los que emplean internamente las filosofías de los dos métodos de inversión empleados GA y SA. Simplemente es una adecuación llevada a cabo con el fin de contar, al final de los

procesos de modelado, con una familia numerosa de modelos que respondan a la resolución de nuestros datos. Este mecanismo de selección no está involucrado en ningún sentido con el proceso inspirado en la selección natural llevado a cabo por GA o con la distribución de probabilidad de Boltzman empleada en SA. Por el contrario, es un mecanismo aislado que examina uno a uno todos los modelos generados por los programas durante las inversiones.

El primer criterio de selección consiste en evaluar qué tanto la respuesta sintética del modelo examinado, es decir, su función de receptor teórica, cae dentro o fuera de la banda de error. Para estimar esto, primero se suman las áreas que se encuentren por afuera de la banda de error, definidas por la respuesta sintética del modelo y las fronteras de la banda (figura 6.2). A la superficie resultante le llamaremos A_E . Una vez que se sabe el valor de las áreas externas acumuladas se efectúa el cociente entre dicha área A_E y el área total de la banda A_B . Si el valor de esta división es menor a un cierto porcentaje establecido en el archivo de datos, entonces, el modelo ha satisfecho el primer criterio. Lo ideal sería encontrar la totalidad de modelos cuya respuesta sintética caiga completamente dentro de la banda. Sin embargo, debido a que en algunos puntos la

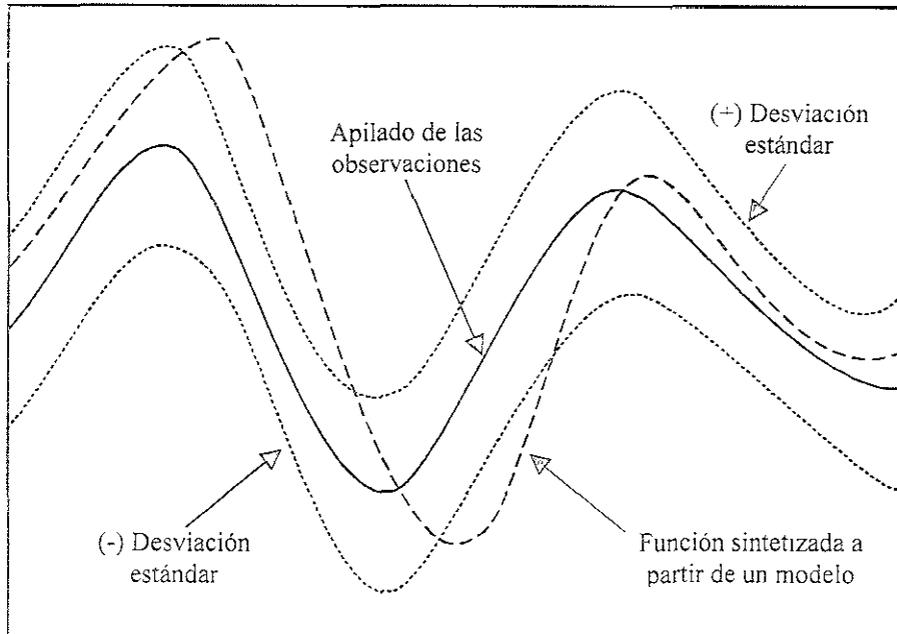


Fig. 6.2 En esta figura se aprecia un acercamiento de las curvas hipotéticas que son usadas para evaluar que tan adentro o que tan afuera se encuentra la curva sintética de la banda de error. Aquí se aprecian las dos fronteras definidas por la suma y la resta de la desviación estándar a la curva apilada, la curva apilada observada, y la curva sintetizada a partir de un modelo. Apréciense las áreas descritas por afuera de la banda entre la curva sintética y la banda de error A_E .

desviación estándar es muy pequeña, encontrar modelos cuya respuesta no abandone la banda de error es imposible. De ahí que se utilice el rango de tolerancia ya descrito donde se comparan A_E y A_B .

Por otro lado, el segundo criterio procura la similitud entre las formas de la curva observada y la curva sintetizada. Es decir, no bastará que la respuesta del modelo caiga la mayor parte dentro de la banda, sino que además, su forma sea lo más parecida a la curva modelada. La razón por la que se decidió implantar también este criterio fue porque puede darse el caso (tal vez un tanto extremo) en el que alguna porción del apilado no describa sinuosidades importantes y la banda de error sea lo suficientemente amplia. En este caso hipotético, la curva sintética podría describir formas algo caprichosas y sin embargo estar dentro de la banda. Así, a pesar de encontrarse el sintético dentro de la banda, su forma no se asemejaría a la del stack. Para evaluar esta similitud se empleó una norma de error conocida como semblanza (ecuación 6.3-1).

$$S(m_i) = 0.5 - \frac{\text{cross}(d_s, d_o)}{\text{auto}(d_s) + \text{auto}(d_o)}, \quad (6.3-1)$$

donde $S(m_i)$ es la semblanza del modelo actual, $\text{auto}(d_s)$ y $\text{auto}(d_o)$ son respectivamente las autocorrelaciones de la señal sintética y la observada, y $\text{cross}(d_s, d_o)$ es la crosacorrelación de las dos señales. Mientras más se parezcan las curvas, la semblanza tenderá a cero. Al igual que en el criterio anterior, en éste se compara la semblanza del modelo examinado con un valor límite introducido en el archivo de datos. Si este último es mayor que la semblanza asociada al modelo, entonces este satisfará el segundo criterio.

Todos los modelos que satisfagan simultáneamente ambas exigencias de calidad, serán almacenados por los programas durante los procesos de inversión. Finalmente, la solución del modelado de una curva apilada será una nube de modelos conformada por la fusión del conjunto de modelos seleccionado por GA con el conjunto de modelos seleccionado por SA. En la totalidad de los casos, estos dos conjuntos de modelos abarcan prácticamente la misma región del dominio de soluciones, lo cual nos alienta a pensar que es ahí donde se encuentra el máximo global del espacio de modelos.

6.4 Inversión sintética.

Para verificar la validez y eficacia del método descrito en el apartado anterior, cuyo objetivo es seleccionar modelos ante la presencia de un error considerable en las observaciones, en esta sección se presenta una inversión sintética que simula el problema ante el cuál nos enfrentaremos en el modelado de los datos reales. La prueba consiste en lo siguiente.

Primero se eligió un modelo de corteza, en este caso el modelo propuesto por M. Campillo y otros (1996) para el trayecto entre la costa del Pacífico y la Cuenca de México. Este modelo consta de tres capas sobre un semiespacio. El valor de los parámetros aparece en la tabla 6.4.

A la función de receptor sintetizada a partir de este modelo se le añadieron cinco cargas diferentes de ruido armónico y aleatorio para generar cinco funciones de receptor considerablemente distintas. Estas curvas representan funciones observadas hipotéticas en una misma estación, provenientes de un mismo azimuth y distancia epicentral. Se dice que provienen de un mismo azimuth ya que a la hora de calcular los sintéticos se especificó que los componentes estén rotados a las direcciones radial y transversal provocando que toda la señal quede contenida en los componentes radial y vertical (esto por tratarse de un sintético). Y decimos la misma distancia epicentral por haber utilizado el mismo ángulo de incidencia en la base de la estructura de capas planas y horizontales.

	Velocidad β (Km/s)	Espesor h (Km)
Capa 1	3.1	5.0
Capa 2	3.3	12.0
Capa 3	3.8	28.0
Semiespacio	4.7	Infinito

Tabla 6.4 Modelo de Campillo (Campillo et al., 1996) para el trayecto entre la costa del Pacífico y la Cuenca de México empleado durante la inversión sintética como el modelo objetivo

Para generar las funciones de receptor sintéticas a partir del modelo de Campillo et al., se utilizó el método de las matrices de propagación de Kennett (Kennett, 1983). Este

algoritmo obtiene las funciones de transferencia (radial y vertical) de una estructura de capas planas y horizontales en la que incide por abajo un frente ondas planas tipo P . Con estas componentes espectrales se lleva a cabo la deconvolución con el nivel de agua y el filtrado Gaussiano descritos en el capítulo 3, sección iii (ecuación 3.1-7). El valor del nivel de agua fue $c=0.01$ y el período del filtro Gaussiano fue de $T_p=3.0s$. El ángulo de incidencia en la base de la estructura fue de $\theta_i=20.0^\circ$ que corresponde a una distancia epicentral aproximadamente de $\Delta=50.0^\circ$. El ruido montado en la función de receptor resultante presentó una relación señal-ruido de 15%, en el caso del ruido armónico. Para cada caso se varió la fase y la frecuencia de la señal añadida. En la figura 6.3 se muestran las cinco señales sintéticas apiladas, por supuesto con el ruido ya incluido, y hasta abajo la función de receptor resultante del apilado con su respectiva banda de error.

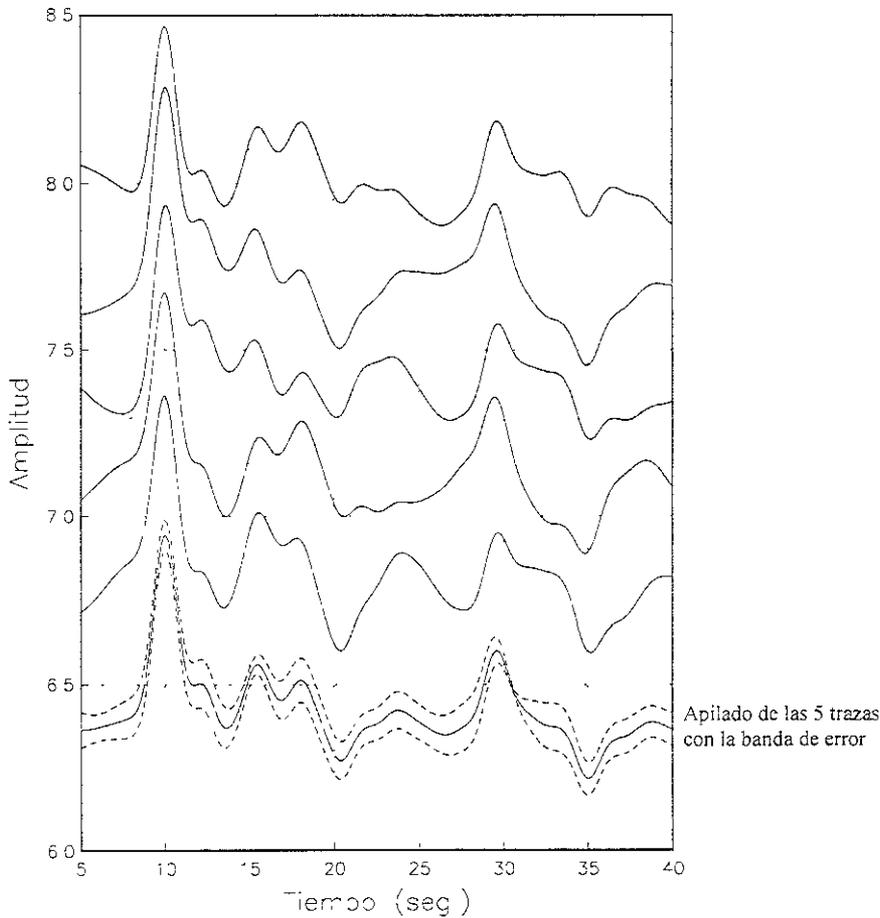


Fig. 6.3 5 funciones de receptor sintetizadas a partir del modelo de Campillo (tabla 6 4) con una carga de ruido agregada para cada una (ver texto). Abajo, la respectiva función apilada con la banda de desviación estándar.

Se llevaron a cabo dos inversiones paralelas de estas supuestas observaciones. Una con Algoritmos Genéticos (GA) y otra con el método de Cristalización Simulada (SA). La parametrización elegida contempló a las velocidades β de las tres capas y con sus

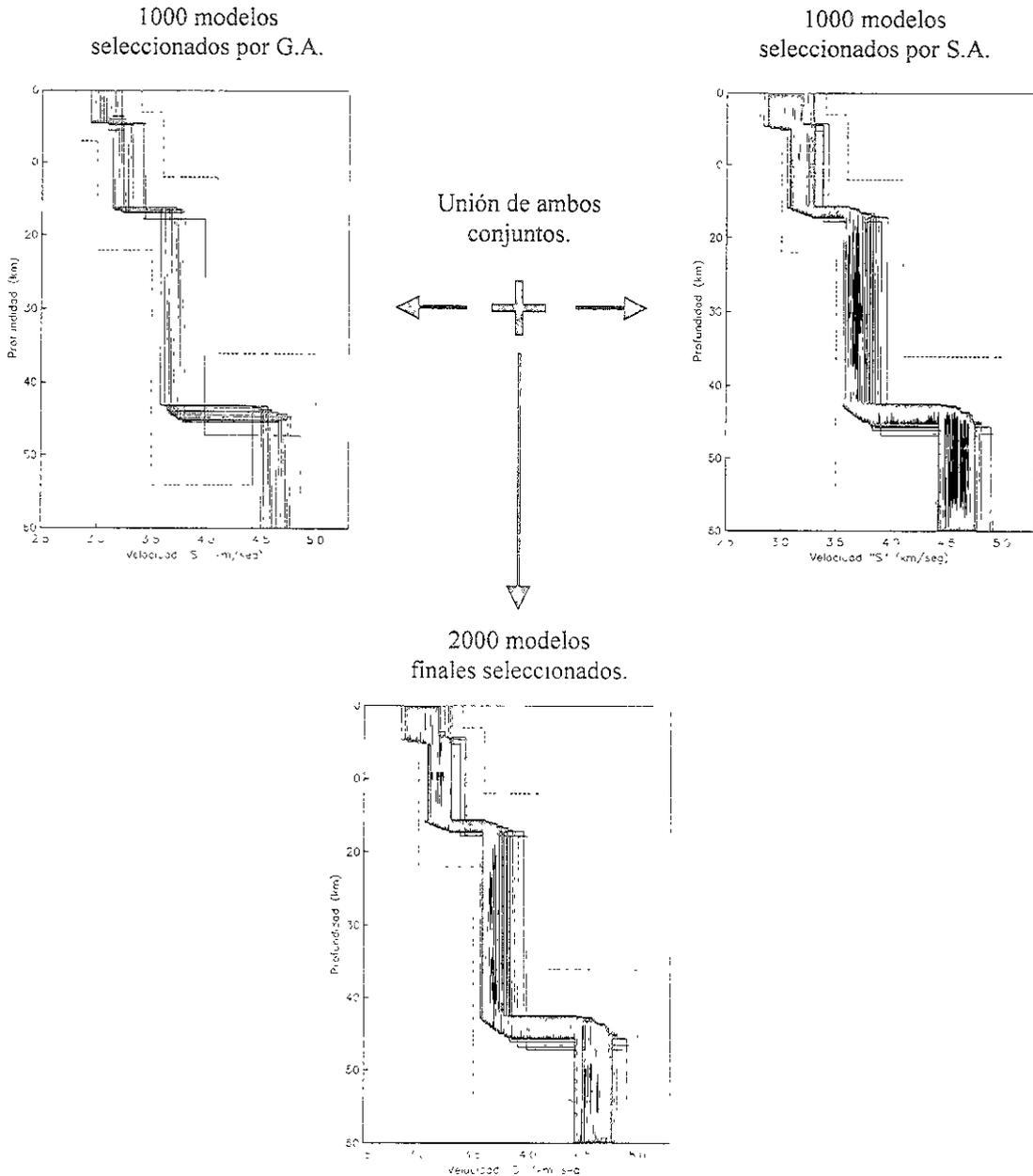


Fig. 6.4 Resultados de las dos inversiones sintéticas llevadas a cabo con GA y SA. En cada uno de los dos recuadros que están en la parte superior se muestran 1000 modelos seleccionados por método. En la parte inferior, la nube final de 2000 modelos producto de la fusión de los dos conjuntos antes mencionados.

respectivos espesores, más la velocidad β del semiespacio. Por lo tanto se tienen siete parámetros a invertir. Las velocidades α se calcularon considerando al medio como un sólido de Poisson, es decir, $\alpha = \beta \cdot \sqrt{3}$, y a las densidades siguiendo la ley propuesta por Berteussen $\rho = 0.32\alpha + 0.77$, (Berteussen, 1977).

Los dos criterios simultáneos de selección impuestos en ambos procesos fueron los mismos. Para la relación entre las áreas A_E y A_B (ver sección 6.3) se utilizó el valor porcentual de 0.2%, y como límite de la semejanza el valor de 0.003. El objetivo central de esta prueba numérica es recuperar valores para los parámetros muy similares a los del modelo seleccionado (tabla 6.4). De ahí que éste reciba el nombre de "modelo objetivo". Si sucede esto, quedaría mostrada la eficacia y validez del método propuesto para el modelado de las funciones de receptor.

Las especificaciones empleadas en la inversión con GA fueron las siguientes: 350 modelos por generación, 200 iteraciones, probabilidad de mutación inicial del 10.0%, y una probabilidad de cruce del 100%. Las especificaciones para la inversión con SA fueron las siguientes: 50,000 modelos probados, temperatura inicial de 2° , y un factor de

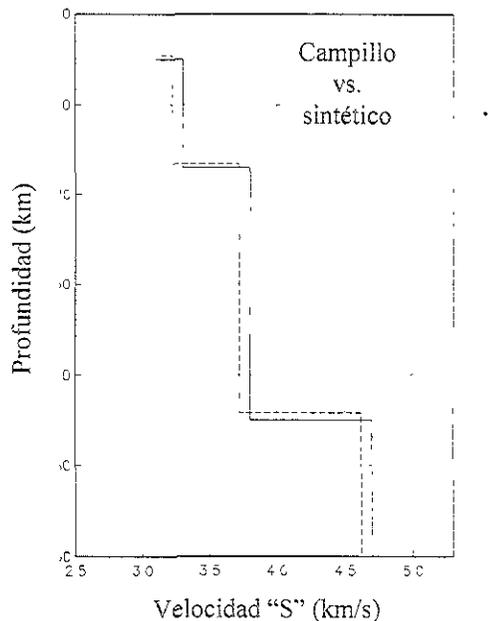


Fig. 6.5 Modelo final, producto del modelado sintético (línea discontinua) comparado con el modelo objetivo de Campillo (línea continua) tabla 6.4

decremento para la temperatura de 0.95 a cada 5 iteraciones. El espacio de modelos donde exploraron ambos métodos fue el mismo. Éste puede apreciarse gráficamente en la figura 6.4 donde se muestran las fronteras inferior y superior con líneas discontinuas.

Los resultados de las inversiones aparecen en la misma figura. El recuadro que se encuentra en la parte superior izquierda muestra 1000 modelos seleccionados por GA durante la inversión. De la misma manera, en la parte superior derecha se encuentran los 1000 modelos seleccionados por SA. Una vez integrados ambos conjuntos de modelos se obtiene, en el recuadro de la parte inferior, la nube final con 2000 modelos, señalando con las líneas discontinuas el espacio explorado que contiene más de 2.3×10^9 modelos en total.

Finalmente se obtuvo el promedio para cada parámetro de la nube final de 2000 modelos. Una vez con el modelo promedio de los 2000 que aparecen en la parte inferior de la figura 6.4 anterior, se busca, empleando la norma L_2 (ver capítulo 4, sección 4.3, ecuación 4.3-2) para los valores de los 7 parámetros, al modelo que dentro de los 2000 mencionados más se parezca al promedio, esto es, al modelo cuya norma L_2 con respecto al modelo promedio sea la más pequeña (en cuanto a los valores de sus parámetros). Esto se hace porque en realidad nunca, durante los procesos de inversión, el modelo promedio fue generado y por lo tanto, examinado por los criterios de selección. En la figura 6.5 se compara al modelo de Campillo con nuestro modelo último, producto del modelado sintético. Es admirable la semejanza que guardan ambos modelos. Hecho que muestra la eficacia del método propuesto.

6.5 Estación Zacatecas (ZAIG).

i) Marco geológico.

La Sierra Madre Oriental y las zonas adyacentes están constituidas principalmente por rocas sedimentarias mesozoicas que se depositaron y evolucionaron sobre un basamento paleozoico y precámbrico. La sierra constituye una faja montañosa orogénica que sigue, en su segmento sur, una trayectoria general noroeste-sureste, y a la altura de Monterrey, se flexiona para seguir una trayectoria este-oeste hacia Torreón. La Sierra Madre está compuesta por estrechos pliegues que poseen, en general, la misma orientación del rumbo de la sierra. Hacia la mesa del centro, los valles son más amplios, los anticlinales menos estrechos, y al occidente son cubiertos paulatinamente por las rocas volcánicas de la Sierra Madre Occidental.

La Sierra Madre Occidental está formada por una extensa meseta volcánica afectada por grabens y fallas normales que la privan, sobretodo en los flancos, de su apariencia homogénea y subhorizontal (Morán, et al., 1984). Esta sierra posee dos importantes secuencia ígneas, cuyo contacto marca un período de calma volcánica. La secuencia más antigua la forman rocas volcánicas principalmente intermedias y cuerpos ígneos cuyas edades varían entre 100 y 45 millones de años producto de la orogenia. La secuencia superior está formada por ignimbríticas riolíticas y riodacíticas en posición generalmente horizontal, con edades que van desde los 34 hasta los 27 millones de años producida por un periodo extensivo asociado al "basin and ranges". El complejo superior constituye la cubierta ignimbrítica continua más extensa en la Tierra, con 250 Km de ancho y más de 1,200 Km de largo.

En la Mesa Central, provincia fisiográfica confinada a ambos lados por la dos sierras madres, existen numerosos afloramientos de secuencias metamórficas que pueden corresponder al Triásico o a las postrimerías del Paleozoico. En la parte sur de esta región, ignimbríticas riolíticas del Eoceno y domos con flujos de lavas andesíticas afloran localmente en Zacatecas, Guanajuato, San Luis Potosí y Aguascalientes (Nieto-Samaniego et al., 1999). Estas formaciones constituyen la parte volumétricamente más importante del vulcanismo del Terciario en la parte sur de la Mesa Central, presentándose en ocasiones domos de hasta dos kilómetros de espesor.

El basamento de toda esta región pertenece a dos de los más grandes dominios paleogeográficos: el Terreno Guerrero, y la secuencia sedimentaria de la Sierra Madre Oriental. El Terreno Guerrero expuesto en la parte sudoeste de la Mesa Central, es una secuencia tipo flysch volcánica-sedimentaria intercalada con lavas almohadilladas que muestran un bajo grado de metamorfismo a pesar de su deformación contráctil tan grande. Siguiendo el trabajo de Nieto-Samaniego y otros (1999), la mesa central presenta un levantamiento promedio topográfico que sobrepasa al de las dos provincias adyacentes correspondientes a las dos sierras. De hecho, este levantamiento central es más pronunciado si se analizan las unidades geológicas expuestas en dichas provincias. Por ejemplo, en la Mesa Central el basamento mesozoico aflora a una altitud entre los 2,000 y los 2,700 m, mientras que en la Sierra Madre Occidental, afloramientos de la misma edad se encuentran a 800 m de altitud, dentro de las depresiones más pronunciadas de la corteza de esta área. La implicación que este hecho tiene en la morfología del Moho la revelan los datos de gravedad. Éstos indican un adelgazamiento de la corteza hacia la parte central del altiplano (33 Km), en contraste con los 37 y 41

kilómetros que muestran bajo la Sierra Madre Oriental y Sierra Madre Occidental respectivamente (Campos-Enriquez et al., 1994).

En el trabajo de Nieto-Samaniego y colaboradores (1999) se presentan tres estructuras geológicas para la corteza correspondientes, cada una, a las tres principales provincias fisiográficas que conforman el norte del país. La estación ZAIG se encuentra en la ciudad de Zacatecas, es decir, en la provincia de la Sierra Madre Occidental pero muy cerca de la Mesa Central. Para esta región, en dicho trabajo se propone una corteza superior constituida, desde la superficie hasta el manto, por 1,000 m de ignimbritas del Mioceno temprano, 500 m de sedimentos mezclados con material ígneo andesítico del Eoceno-Oligoceno, 10 km de batolitos silíceos, y ~31 km de cuerpos plutónicos gabroicos, constituyendo una corteza de aproximadamente 40 km.

ii) Inversión individual de los tres grupos de eventos.

Tal y como ya se dijo en la sección 6.2 del presente capítulo, en la estación ZAIG únicamente se pudieron conformar tres grupos epicentrales. La especificación precisa de

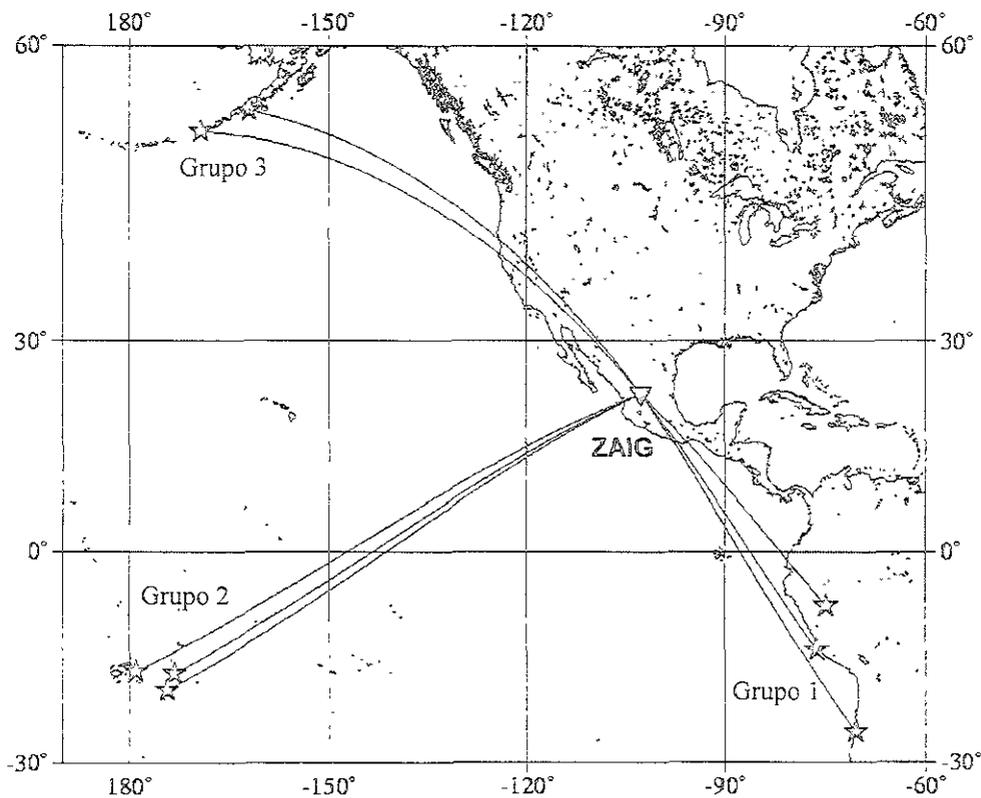


Fig. 6.6 Ubicación geográfica de los tres grupos epicentrales utilizados para el modelado de la corteza en la estación de Zacatecas (ZAIG).

cada evento registrado en esta estación aparece en la tabla 6.1. La ubicación geográfica de los epicentros, con relación a la estación, puede verse en la figura 6.6.

Una vez apiladas las trazas correspondientes a cada grupo, resultan seis funciones de receptor (una radial y una transversal por grupo) con sus respectivas bandas de error (figura 6.7), calculadas como se explicó en la sección 6.3.

En la tabla 6.5 se muestra información promedio sobre los eventos que comprende cada grupo. Se puede apreciar cómo el ángulo de incidencia esperado para los tres grupos difiere considerablemente. Esto se debe a las diferencias en el Δ y en la profundidad promedio de las fuentes en cada cluster (grupo).

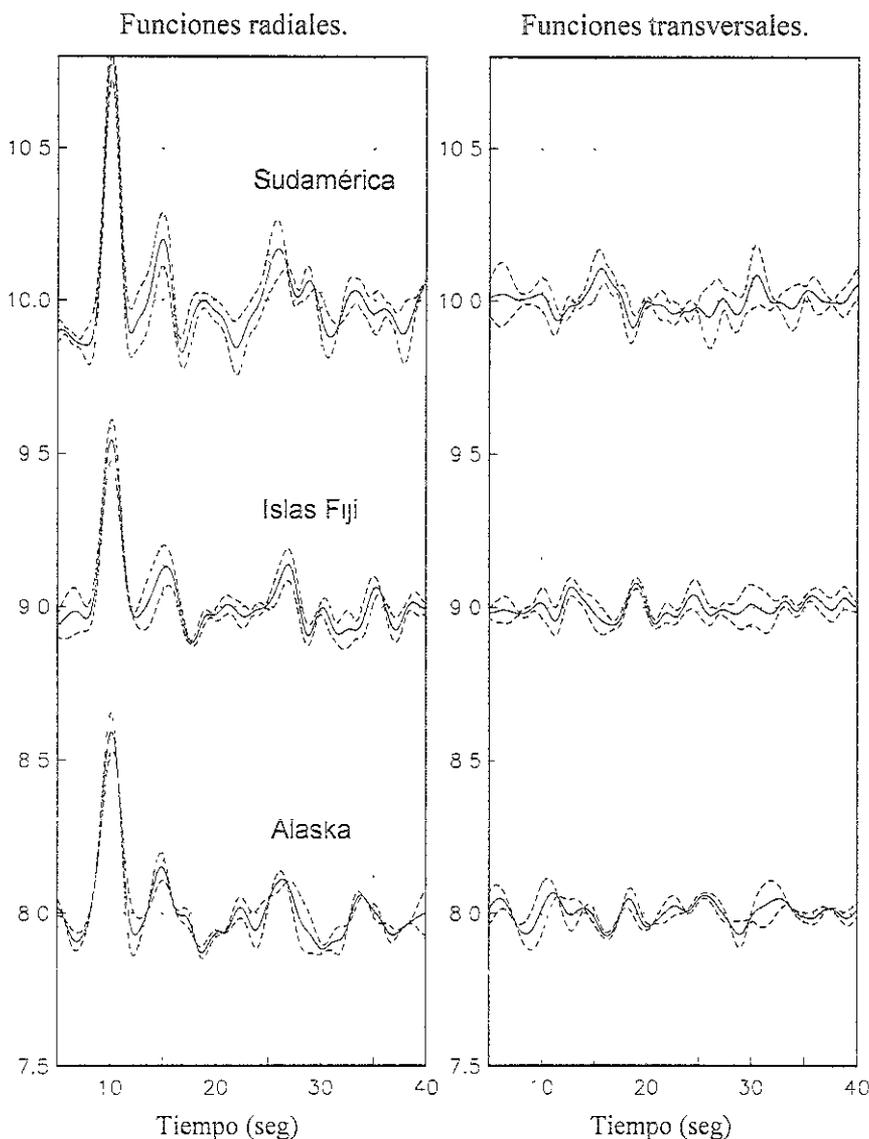


Fig. 6.7 Funciones de receptor apiladas, tanto radiales como transversales, para los tres grupos analizados en la estación ZAIG. Únicamente las funciones radiales fueron modeladas. Las funciones transversales sirvieron exclusivamente para el análisis cualitativo de la estructura.

Los parámetros utilizados para la construcción de las funciones de receptor tanto radiales como transversales, en analogía con los que se indicaron en la prueba sintética, fueron los siguientes: $t_p = 3.0$ s, $t_s = 10.0$ s, $0.005 < c < 0.015$.

La parametrización de los modelos se determinó a partir de la información preexistente de la región y de la simplicidad que muestran las funciones de receptor observadas (figura 6.7). Los modelos consisten en tres capas sobre un semiespacio. Los parámetros a invertir son los tres espesores y velocidades “ β ” de las capas, más la velocidad “ β ” del semiespacio. Esto forma un total de siete parámetros por determinar, para definir la estructura de velocidades de la corteza en el sitio de Zacatecas.

Cada uno de los tres apilados se invirtió inicialmente por separado, tal y como se llevó a cabo la inversión sintética de la sección 6.4. Las curvas se invirtieron hasta el segundo 35, no hasta el segundo 40 como aparece en la figura 6.7. Los parámetros de entrada que requiere cada uno de los dos métodos empleados, GA y SA, tales como la probabilidad de mutación, la probabilidad de cruce, la temperatura inicial del proceso, el factor de reducción de la misma, etc., fueron muy similares entre todos los procesos asociados a los tres grupos, y a su vez, a los especificados claramente en la prueba sintética (sección 6.4).

	Delta (Δ)	Profundidad Fuente (km)	Ángulo de incidencia
Grupo 1 (Sudamérica)	48°	69	32°
Grupo 2 (Islas Fiji)	82°	199	21°
Grupo 3 (Alaska)	66°	53	27°

Tabla 6.5 Información sobre la ubicación promedio de las fuentes sísmicas de los tres grupos, con los ángulos de incidencia en la base de la corteza de los frentes de onda, calculados a partir de las ubicaciones de las fuentes y de un modelo promedio terrestres

Las nubes con 2.000 modelos seleccionados (1,000 por GA y 1,000 por SA) se muestran, por grupo, en la figura 6.8. En ella también se puede apreciar el espacio de soluciones explorado por ambos métodos, indicado por las dos líneas discontinuas. Es importante señalar que dicho espacio fue exactamente el mismo para todos y cada uno de los procesos de inversión llevados a cabo, independientemente del stack o del método de modelado del que se trate. También es interesante observar cómo el conjunto de modelos que define a cada una de las tres nubes no presenta una dispersión importante dentro del

espacio, por el contrario, define claramente una banda constituida, como ya se sabe, por la unión de los dos conjuntos generados individualmente por los métodos ya bien conocidos.

En general, se puede decir que existe una gran semejanza entre las tres nubes mostradas en la figura 6.8. Esto significa que las funciones de receptor observadas no poseen una considerable dependencia acimutal. Sin embargo, si se observa detenidamente el segundo contraste elástico (~12-14 km de profundidad), es claro que su profundidad sí depende levemente del acimut con que haya arribado el frente de onda a la base de la corteza. Según estos resultados se podría pensar en una cierta inclinación de dicha interfase en dirección aproximada hacia el norte-noroeste. Este resultado se verifica cualitativamente con la presencia, en las funciones de receptor transversales, de ciertas fases coherentes entre las funciones que fueron apiladas, es decir, con arribos cuya desviación estándar es muy pequeña (ver figura 6.7). Por ejemplo, la fase que aparece aproximadamente 8 segundos después del primer arribo en los apilados transversales, indica la presencia de algún agente estructural relativamente somero, por no coincidir con los tiempos de arribo de las fases convertidas en el Moho (aprox. 5 y 17 s después del primer arribo), que opere como deflector de las ondas SV, convertidas en esa interfase, del plano *R-Z* (Cassidy, 1992).

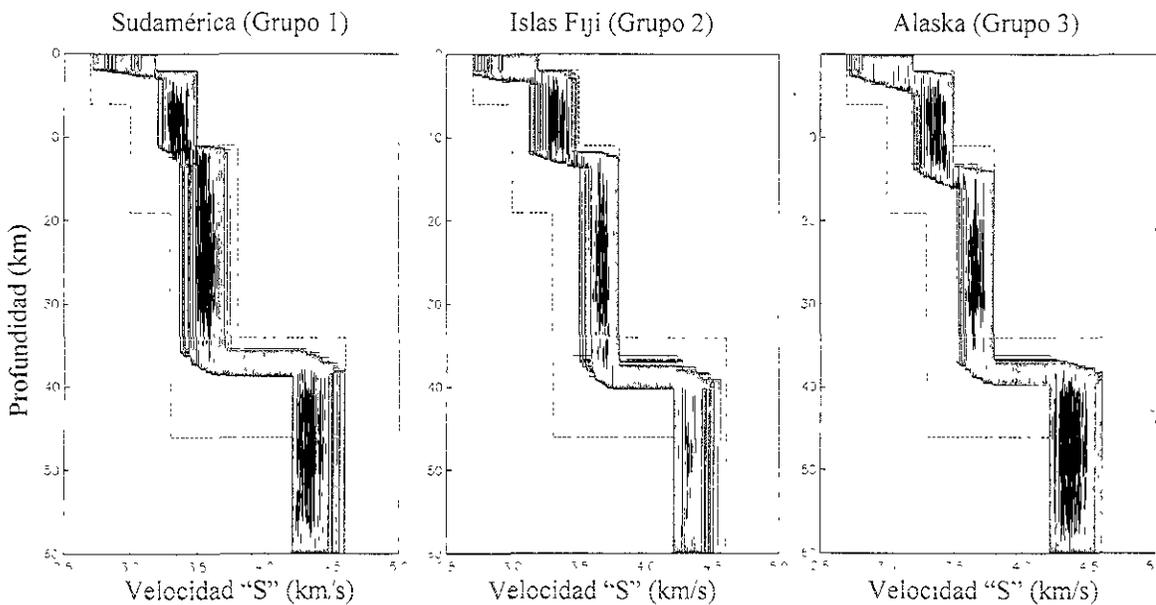


Fig. 6.8 Resultados finales de las tres inversiones individuales. Cada nube posee 2,000 modelos, 1,000 seleccionados por GA y 1,000 por SA. Las líneas quebradas discontinuas definen el espacio de soluciones explorado. Dicho espacio es el mismo en los tres grupos

	Área total de la banda de error.	Porcentaje de tolerancia.	Valor del área externa normalizada.	Valor máximo de la semejanza.
Grupo 1 (Sudamérica)	67.5	30.0%	5.85	0.06
Grupo 2 (Islas Fiji)	49.4	7.0%	1.0	0.02
Grupo 3 (Alaska)	35.1	50.0%	5.07	0.04

Tabla 6.6 Valores que fueron empleados en los procesos de inversión para seleccionar los modelo que aparecen en la figura 6.8. El valor del área normalizada se presenta para tener cantidades comparables entre cada grupo con relación a qué tan estricto fue un criterio con respecto al otro.

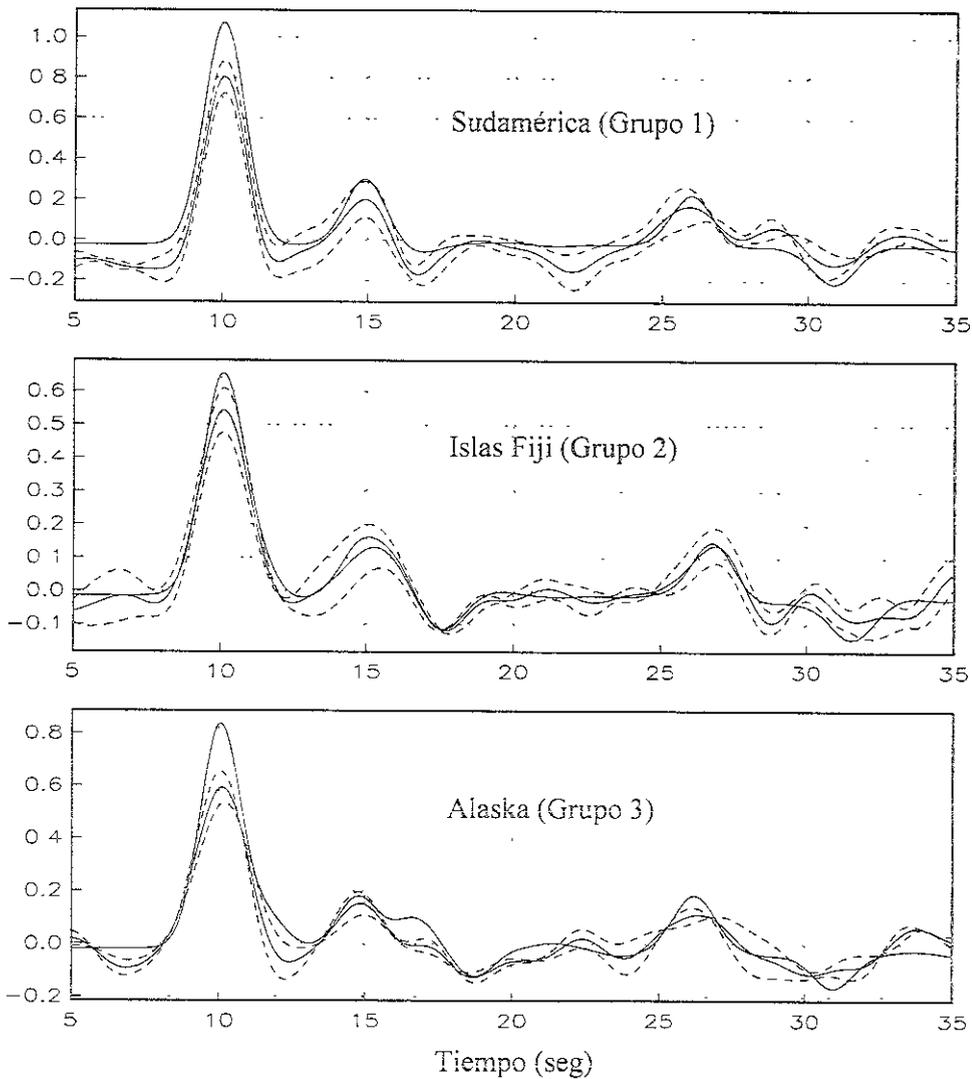


Fig. 6.9 Ajustes entre las respuestas sintéticas arrojadas por los tres modelos promedio de las nubes mostradas en la figura 6.8 y los apilados observados. Estos ajustes son producto de las inversiones individuales de los tres grupos.

Los criterios que se emplearon para la selección de modelos durante los procesos de inversión (descritos en la sección 6.3) se muestran en la tabla 6.6.

A continuación, siguiendo el procedimiento que ya fue explicado en el ejercicio sintético acerca de cómo extraer de cada nube el modelo promedio, se obtuvo éste para los tres conjuntos mostrados en la figura 6.8 y así calcular su respuesta sintética para compararla con el apilado correspondiente. Esta comparación se muestra en la figura 6.9, donde se puede apreciar cómo las respuestas sintéticas abandonan mínimamente las bandas de error definidas por las líneas discontinuas entorno al stack

La semejanza que presentan los tres conjuntos de modelos arrojados por los procesos de modelado individuales nos sugiere realizar una inversión simultánea de las tres funciones de receptor observadas. Este mecanismo nos permitirá contar con una familia última de modelos que respondan simultáneamente a las tres observaciones provenientes de diferentes acimuts. En la siguiente sección se presentan los resultados de este ejercicio.

iii) Inversión simultánea de los tres grupos de eventos.

Con base en los resultados obtenidos en la sección anterior, donde se evidenció la escasa dependencia acimutal de las funciones de receptor en el sitio de ZAIG, nos pareció sensato realizar una macroinversión que modelara simultáneamente las tres funciones radiales observadas en la estación. Partiendo de los criterios de selección mostrados en la tabla 6.6, se propusieron otros muy similares, pero inevitablemente un poco menos rigurosos, para la inversión simultánea. Éstos se presentan en la tabla 6.7 del mismo modo que en la sección anterior, permitiendo así una rápida comparación con los criterios originales.

	Área total de la banda de error.	Porcentaje de tolerancia.	Valor del área externa normalizada.	Valor máximo de la sembianza.
Grupo 1 (Sudamérica)	67.5	30.0%	3.41	0.06
Grupo 2 (Islas Fiji)	49.4	12.0%	1.0	0.03
Grupo 3 (Alaska)	35.1	52.0%	3.07	0.05

Tabla 6.7 Parámetros de selección de modelos que fueron empleados durante la inversión simultánea de los tres apilados. Estos valores pueden ser comparados con los de la tabla anterior (tabla 6.6) para notar la leve disminución en el rigor de los criterios.

Un ensayo preliminar de la macroinversión en donde fueron utilizados exactamente los mismos criterios que en las inversiones individuales no pudo encontrar modelos que los satisficieran a la vez. De ahí que haya sido necesario ampliarlos mínimamente.

Tal y como se ha hecho hasta ahora en cada una de las inversiones, en ésta también se llevaron a cabo dos procesos paralelos, uno con GA y el otro con SA. Ambos algoritmos fueron adaptados para que operaran en las nuevas condiciones. El resultado de la unión de los dos conjuntos de 1,000 modelos arrojados por cada uno aparece en la figura 6.10, donde ya no se muestra el dominio de búsqueda con línea discontinua ya que es el mismo que se uso en la sección anterior.

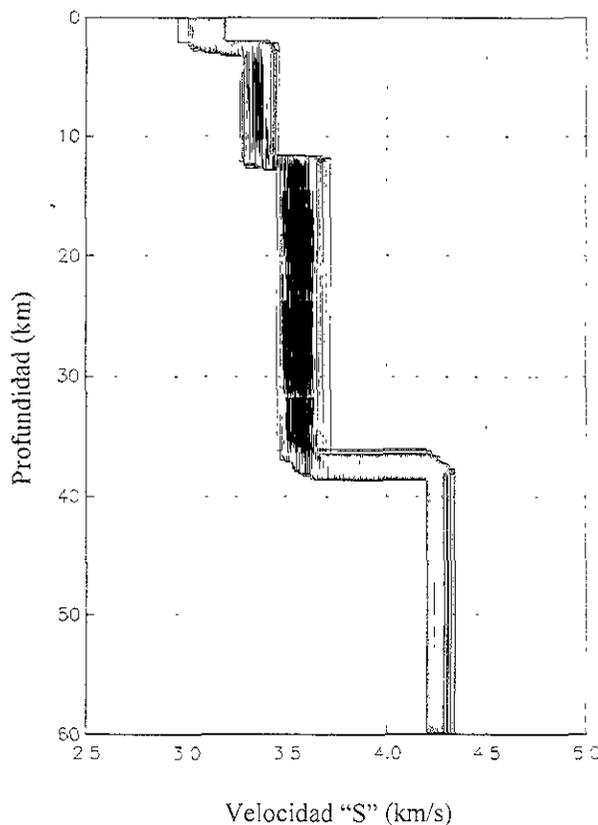


Fig. 6.10 Nube final de 2,000 modelos producto de la inversión simultánea de los tres apilados en Zacatecas.

Si se extrae nuevamente el modelo promedio de la nube resultante usando la norma L2, de la misma forma como se hizo en la prueba sintética (sección 6.4), y se calcula su respuesta sintética (variando el ángulo de incidencia en la base del modelo dependiendo del grupo que se trate) para finalmente compararla con los tres apilados que fueron modelados al mismo tiempo, se tienen los ajustes mostrados en la figura 6.11. Estos ajustes, sin ser malos, no superan la calidad de los alcanzados en la sección anterior

como era de esperarse. Sin embargo, los rasgos de mayor interés como son los arribos de las fases provenientes del Moño ajustan de manera satisfactoria.

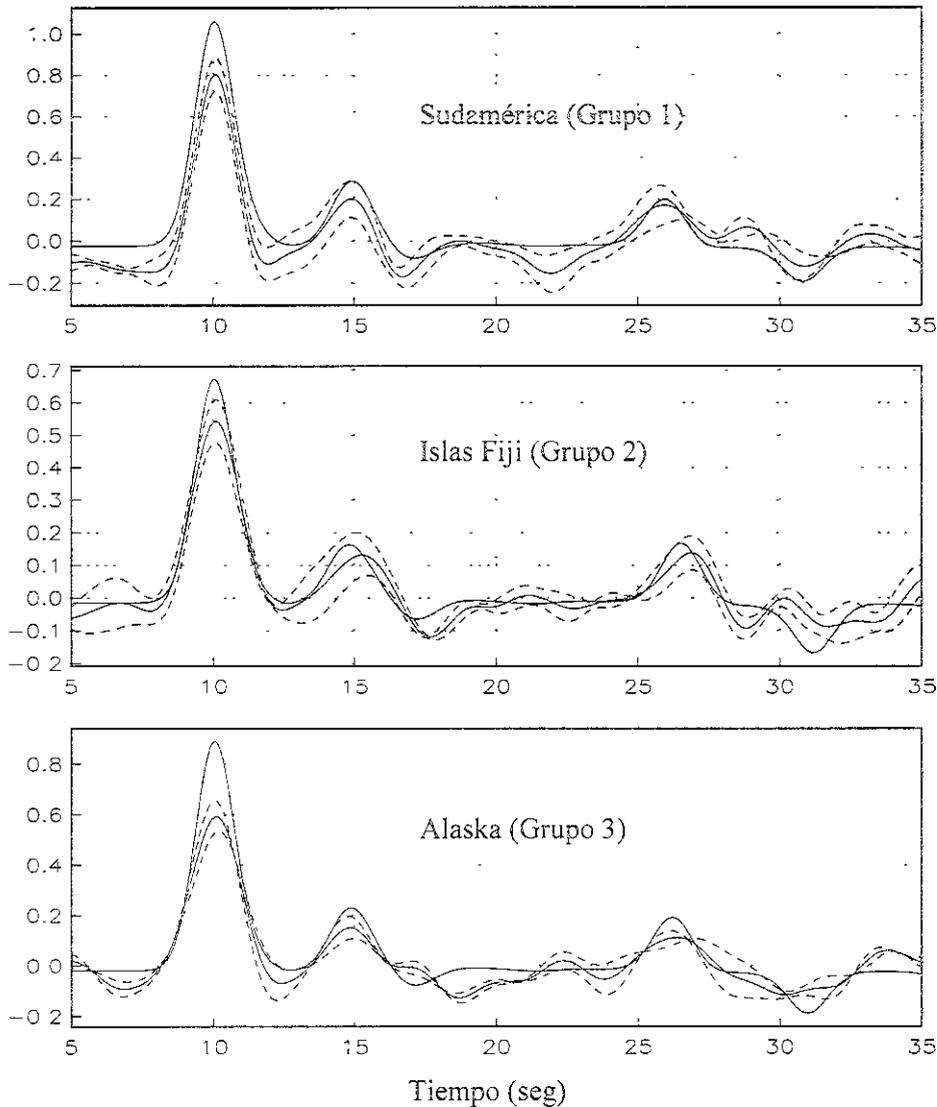


Fig. 6.11 Ajustes entre los sintéticos generados con el modelo promedio de la nube final (figura 6.10) y los tres apilados observados. Cabe señalar que lo único que varía entre los sintéticos es el ángulo de incidencia en la base del modelo promedio. Este ángulo depende del grupo que se trate, es decir, del Δ asociado a éste

El modelo promedio final con el que se construyó la gráfica anterior, resultado último de la inversión simultánea de los tres apilados, es la estructura unidimensional propuesta en este trabajo para el sitio de Zacatecas (ZAIG). Este modelo se muestra en la figura 6.12, y numéricamente en la tabla 6.8. Se puede ver que existe un contraste de impedancias importante entre la base de la corteza y el manto superior, rasgo que era de esperarse por

las amplitudes predominantes que tienen las fases convertidas en dicho contacto sobre las demás.

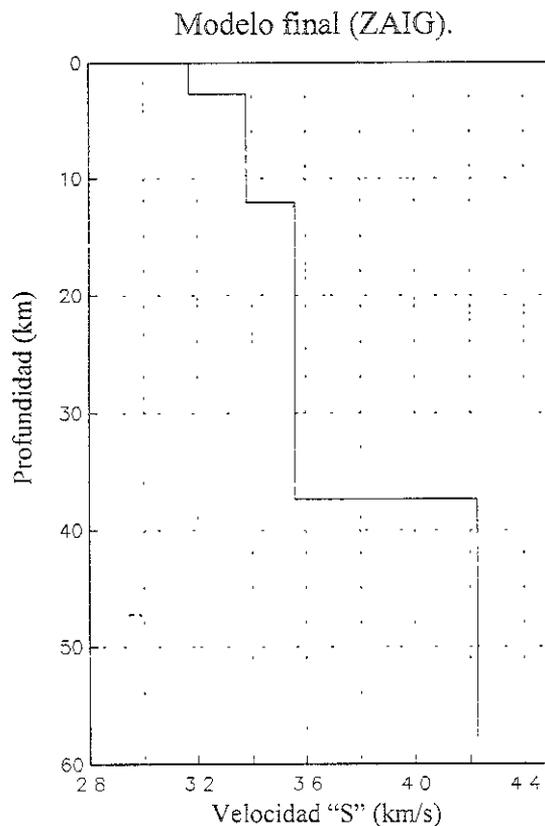


Fig. 6.12 Modelo promedio final para la estructura de velocidades en el sitio de Zacatecas (ZAIG), producto de la inversión simultánea de los tres grupos de eventos.

En la tabla 6.8 aparecen los valores numéricos del modelo final para el sitio ZAIG mostrado en la figura 6.12. Las velocidades de propagación para las ondas “P” fueron calculadas asumiendo un sólido de Poisson, es decir, suponiendo una relación de $\alpha = 1.73 \beta$.

	Espesor (km)	Velocidad β (km/s)	Velocidad α (km/s)
Capa 1	2.9	3.18	5.51
Capa 2	9.1	3.37	5.84
Capa 3	25.4	3.56	6.17
Semiespacio	∞	4.23	7.33

Tabla 6.8 Valores numéricos del modelo final para el sitio ZAIG (figura 6.12). Las velocidades de las ondas “P” fueron calculadas asumiendo un sólido de Poisson durante las inversiones.

Este resultado es muy consistente con uno de los trabajos más recientes hecho en esa región (Nieto-Samaniego, *et al.*, 1999). En el siguiente capítulo se confrontarán y discutirán brevemente ambos resultados.

6.6 Estación Ciudad Universitaria (CUIG).

i) Marco geológico.

El Eje Neovolcánico Transmexicano constituye una franja volcánica del Cenozoico Superior que cruza transversalmente la República Mexicana a la altura del paralelo 20. Está formado por una gran variedad de rocas volcánicas que fueron emitidas por una enorme cantidad de aparatos volcánicos, algunos de los cuales representan las elevaciones topográficas más importantes, como lo son el Pico de Orizaba, el Popocatepetl, el Iztaccíhuatl, el Nevado de Toluca, el Nevado de Colima, etc. Los principales volcanes que se encuentran en esta provincia son estratovolcanes de dimensiones muy variables. Todos ellos fueron creados por emisiones alternantes de productos piroclásticos y derrames lávicos. Uno de los rasgos que caracterizan al Eje Neovolcánico es la enorme cantidad de conos cineríticos monogenéticos asociados a cada estrato volcán. Dicho conos están constituidos principalmente por acumulaciones de cenizas y piroclastos.

El origen del Eje Neovolcánico ha sido relacionado principalmente con la subducción de la Placa de Cocos por debajo de la corteza continental de México (Pardo y Suárez, 1995). A la profundidad del manto superior, dicha placa sufre una fusión parcial que origina los magmas emitidos a lo largo del eje. La composición calcoalcalina de estos magmas confirma esta hipótesis, sin embargo, la oblicuidad del eje con respecto a la trinchera de Acapulco es un rasgo poco común en este tipo de escenarios. Se ha tratado de justificar este hecho de varias maneras que para los fines de este trabajo no son relevantes.

El Valle de México se localiza al sur del Eje Transmexicano, muy cerca de la región volcánicamente activa del Popocatepetl. Muchos estudios se han realizado en el valle con el fin de entender cuáles son las causas de la gran amplificación y duración de los sismos en esta región (*p. ej.*, Singh *et al.*, 1988; Singh *et al.*, 1995). En términos generales se sabe que existe una discontinuidad (Conrad, ver sección 2.1-(iii)) aproximadamente a 15 km de profundidad que probablemente represente el contacto entre rocas metamórficas del paleozoico y del mesozoico. Más hacia la superficie, está otro contacto (~5 km de profundidad) entre las rocas metamórficas del mesozoico y una formación de calizas del Cretácico. Dicha formación aflora en ambos costados del Eje Neovolcánico. Finalmente

llegan los primeros ~2 km de profundidad donde se sabe existe la mayor complejidad geológica y una caída muy importante en la impedancia del medio (Shapiro *et al.*, 1997). Resumiendo las formaciones que comprenden esta capa superficial, se puede hablar principalmente de tres horizontes geológicos. En orden ascendente (Singh *et al.*, 1995), hay una capa de aproximadamente 1 km de espesor de depósitos volcánicos del Oligoceno, luego otra más reciente del Mioceno algo más delgada, y finalmente una intercalación de depósitos volcánicos de tobas y derrames volcánicos con depósitos finos lacustres (lutitas). Estos últimos depósitos, que son los que provocan una parte importante de la amplificación y larga duración de los sismos en el Valle de México, pueden tener un espesor de entre 10 hasta más de 100 m.

ii) Inversión simultánea de los cuatro grupos de eventos.

En esta estación se conformaron cuatro “clusters”, cuya información específica por evento aparece en la tabla 6.2 de la sección 6.2. La información promedio sobre los eventos que comprende cada grupo se muestra en la tabla 6.9.

	Delta (Δ)	Profundidad Fuente (km)	Ángulo de incidencia	Back Azimuth
Grupo 1 (Sudamérica)	46°	246.0	32°	141°
Grupo 2 (Islas Fiji)	87°	347.0	19°	245°
Grupo 3 (Alaska)	71°	31.0	24°	322°
Grupo 4 (Atlántico)	50°	9.0	32°	91°

Tabla 6.9 Información sobre la ubicación promedio de las fuentes sísmicas de los tres grupos, con los ángulos de incidencia en la base de la corteza de los frentes de onda, calculados a partir de las ubicaciones de las fuentes y de un modelo promedio terrestres

La ubicación geográfica de los epicentros, con relación a la estación CUIG, aparece en la figura 6.13. En ella se ve que la cercanía de los eventos por grupo es variable. Mientras que para los grupos 1 y 2 es considerablemente grande, en los grupos 3 y 4 no lo es tanto.

Los parámetros utilizados para la construcción de las funciones de receptor tanto radiales como transversales fueron los siguientes: $t_p = 3.0$ s para los grupos 1, 3 y 4, $t_p = 3.5$ s para

el grupo 2, y $t_s = 10.0$ s y $0.005 < c < 0.015$ igualmente para los cuatro grupos. La razón por la cual se eliminaron más altas frecuencias en las funciones del grupo 2 fue para eliminar ciertas fases no deseadas que provocaban variaciones considerables en las funciones apiladas.

La parametrización de los modelos en esta estación fue determinada a partir de la fusión de dos modelos preexistentes bien conocidos. *Campillo et al, (1996)* propusieron un modelo estructural promedio para el trayecto que une la costa de Guerrero y la Ciudad de México a partir de datos de dispersión de ondas superficiales. Dicho modelo fue el que se usó en este trabajo para llevar a cabo la prueba sintética (tabla 6.4). Por otro lado, debido a la falta de resolución local que posee el método que utilizaron, se insertó un paquete

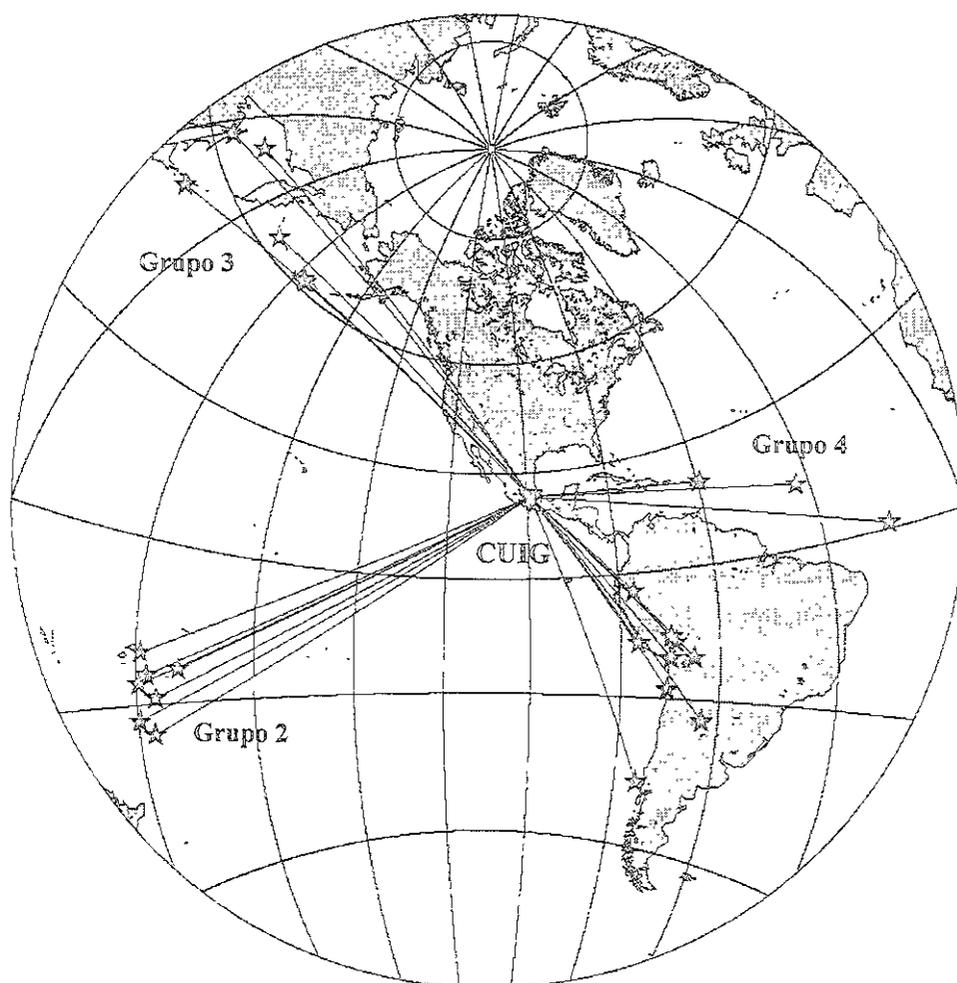


Fig.6.13 Distribución de los eventos registrados en la estación CUIG clasificados por grupos de apilamiento.

superficial de muy baja velocidad propuesto por Shapiro y otros (1997). Este paquete superficial se asocia a toda la acumulación, con aproximadamente 2.0 km de espesor, de materiales volcánicos: cenizas, piroclastos y derrames lávicos fracturados. Por todo esto, los modelos propuestos en este trabajo consisten de cuatro capas sobre un semiespacio. Los parámetros a invertir son los cuatro espesores y velocidades " β " de las capas, más la velocidad " β " del semiespacio. Esto forma un total de nueve parámetros por determinar, y

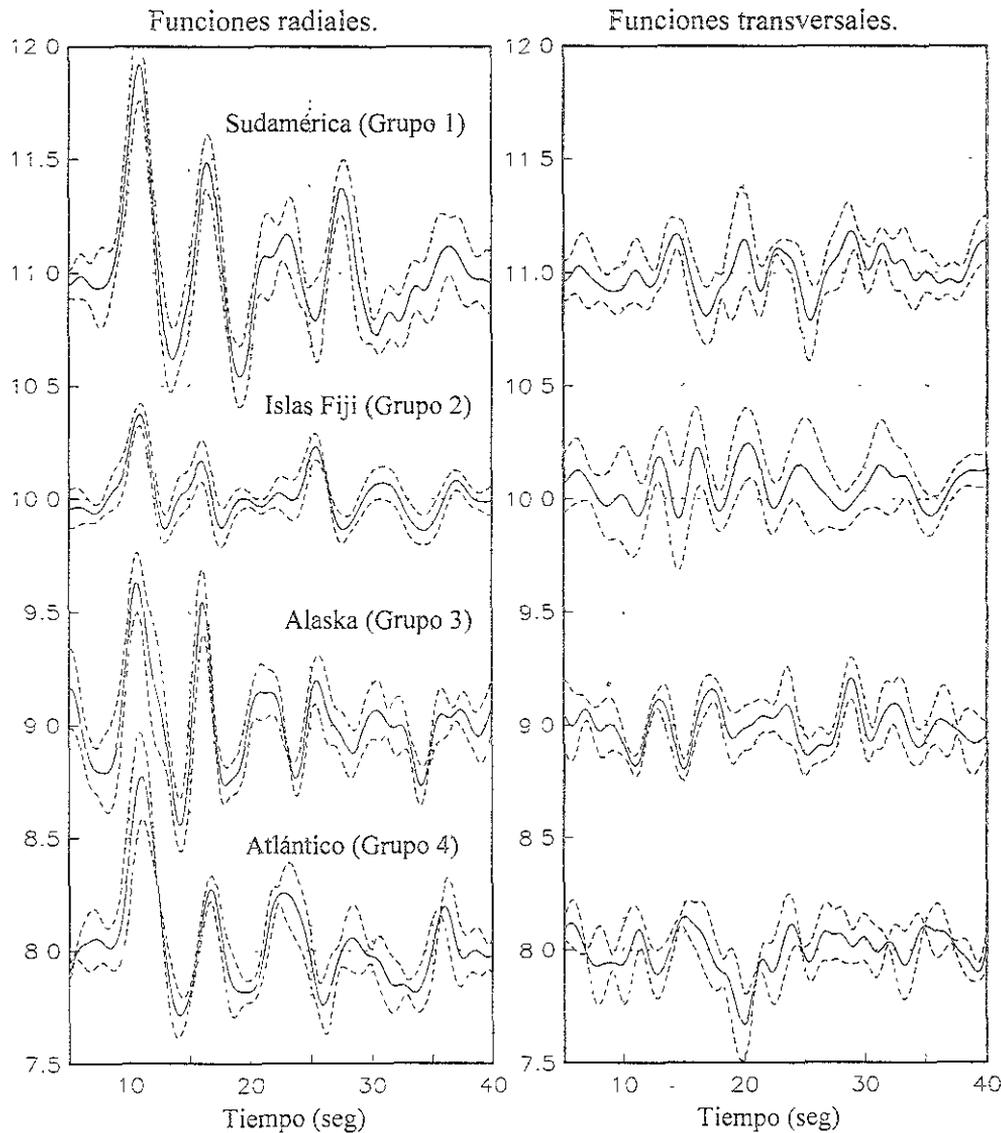


Fig. 3.14 Funciones de receptor apiladas (líneas continuas) con sus respectivas bandas de error (líneas discontinuas) para cada uno de los cuatro grupos formados en torno a la estación CUIG.

así definir la estructura de velocidades de la corteza en el sitio de Ciudad Universitaria. Inicialmente se realizó una serie de inversiones individuales para cada grupo. Erróneamente se creyó que al igual que en la estación ZAIG, en las inmediaciones del Eje

Neovolcánico la dependencia de las funciones de receptor con el acimut de los eventos no iba a ser determinante, o cuando menos, que no se tenía la resolución suficiente en los datos como para ver dicha dependencia con claridad y poderla modelar.

Si se analizan cuidadosamente las funciones de receptor apiladas para cada grupo (figura 6.14), es claro que sí existen diferencias importantes entre ellas. Sin embargo, antes de analizar y modelar los datos de Zacatecas, que fungieron como marco de referencia gracias a la naturaleza geológica de la región, se creía que dichas variaciones se podrían justificar únicamente por las diferencias en los ángulos de llegada de los cuatro frentes de onda, o por efectos cercanos a la fuente que no pudieron ser deconvolucionados.

Por ende, partiendo de ciertos valores para los criterios de selección de modelos determinados en las pruebas preliminares individuales, se llevó a cabo la macroinversión simultánea de los cuatro grupos de observaciones. Inicialmente fue imposible encontrar algún modelo que satisficiera los ocho criterios a la vez, tal y como pasó en los primeros intentos de la inversión simultánea en ZAIG. Entonces, se fueron modificando dichos criterios, prueba tras prueba, siendo cada vez menos estrictos hasta que fue posible hallar un conjunto de modelos (figura 6.15) que, entonces sí, satisficieran los criterios. Los valores últimos empleados se muestran en la tabla 6.10.

	Área total de la banda de error.	Porcentaje de tolerancia.	Valor del área externa normalizada.	Valor máximo de la semblanza.
Grupo 1 (Sudamérica)	157.4	6.0%	1.0	0.04
Grupo 2 (Islas Fiji)	79.2	40.0%	3.35	0.21
Grupo 3 (Alaska)	138.7	22.0%	3.23	0.14
Grupo 4 (Atlántico)	140.9	17.0%	2.53	0.13

Tabla 6.10 Parámetros de selección de modelos que fueron empleados durante la inversión simultánea de los cuatro apilados. Compárese estos valores con los de la tabla siguiente (tabla 6.11) correspondientes a las inversiones individuales de los grupos de eventos de CUIG.

El problema consistió, como se verá claramente con las siguientes gráficas, en que esa paulatina reducción del rigor de los criterios llegó a ser tan baja, que los ajustes arrojados por el modelo promedio de dicho conjunto son inútiles.

En la figura 6.16 aparecen dichos ajustes, uno para cada grupo. Del mismo modo que en ZAIG, la curva sintética de cada ajuste fue creada a partir del mismo modelo estructural variando únicamente el ángulo de incidencia del frente de ondas en su base. Éste dependió del grupo del que se haya tratado. El modelo usado es el promedio del conjunto mostrado en la figura 6.15.

Los peores ajuste de la figura 6.16 son claramente los que corresponden a los grupos 2 y 3. Las líneas discontinuas verticales señalan los tiempos de llegada de los múltiples $PpPms$, tales que son muy semejantes, por un lado, entre los stacks de los grupos 2 y 3, y por el otro, entre los stacks de los grupos 1 y 4. Los procesos de inversión mostraron que

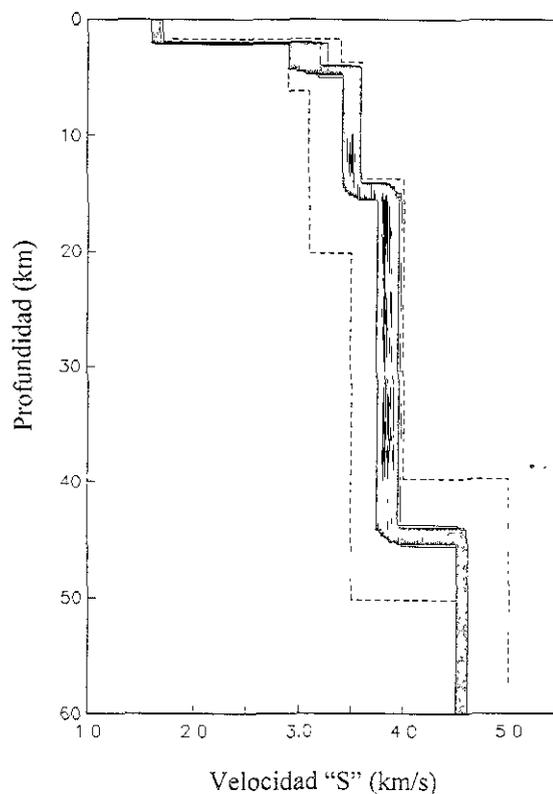


Fig. 6.15 Nube de modelos arrojados por la inversión simultánea en CUIG.

estas diferencias tan grandes en las llegadas no se pueden justificar con los diferentes ángulo de incidencia en la base de la estructura. En otras palabras, estos resultados nos impiden pensar que sólo un modelo estructural de corteza exista dentro del cono sólido muestreado por los sismos entorno a la estación. Aparentemente existen diferencias sustanciales en la estructura que dependen del acimut con que arriben los sismos al receptor.

Otra evidencia importante que soporta esta hipótesis es la amplitud y polaridades que tienen ciertas fases en las funciones de receptor transversales (figura 6.14). Dichas amplitudes son considerablemente mayores que las observadas en la estación ZAIG,

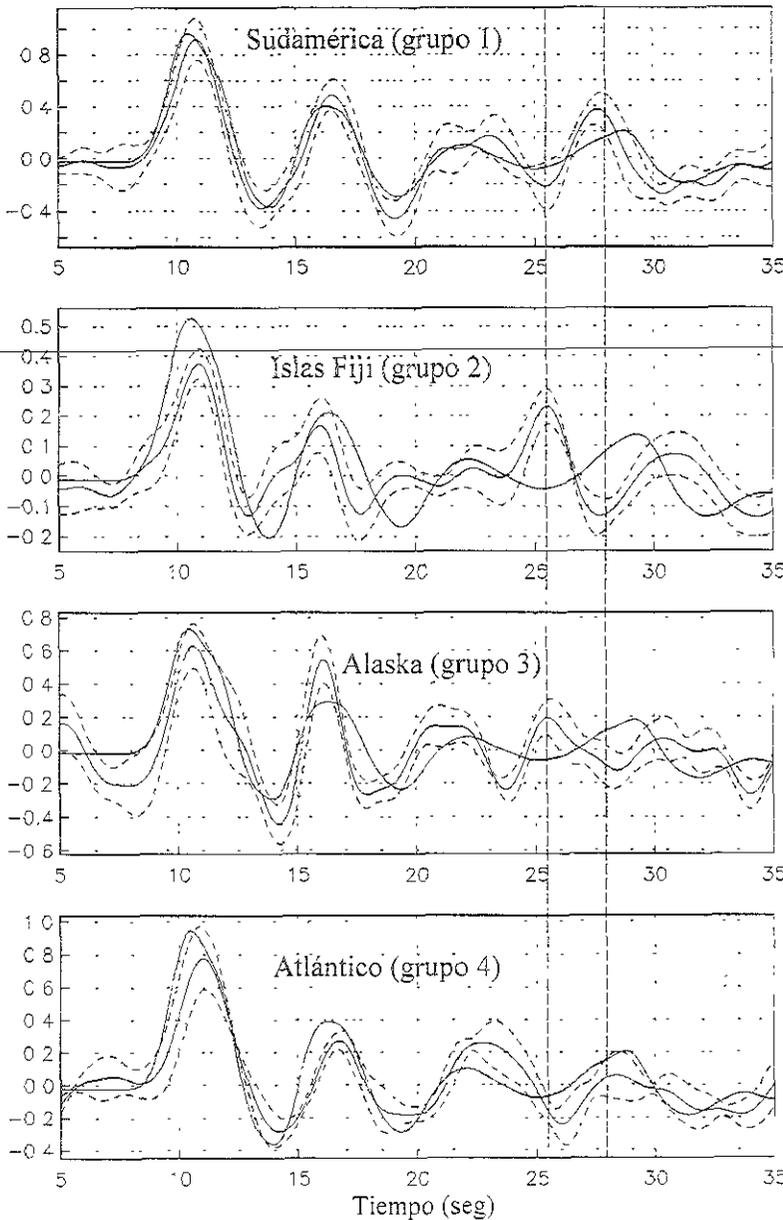


Fig. 6.16 Ajustes del modelo promedio producto de la inversión simultánea en CUIG. Apréciase la falta de calidad de los mismos, sobre todo en los ajustes de los grupos 2 y 3. Las líneas discontinuas verticales señalan la diferencia tan marcada en los tiempos de arribo de la fase PpPms entre los grupos 1,4 y 2,3.

figura 6.7 (en comparación con las respectivas funciones radiales). Entonces, siguiendo las implicaciones que deben tener estos hechos (véase capítulo 3, sección 3.2), es

posible que halla agentes estructurales, tales como la presencia de interfases inclinadas o irregularidades importantes en el mocho que deflequen ciertas ondas convertidas en la corteza, quedando polarizadas por afuera del plano $R-V$. Toda esta gama de observaciones nos obligó a detallar más el análisis de los datos con el fin de obtener conclusiones mejor justificadas y más precisas. En la siguiente sección se presentan los resultados arrojados por el modelado de los cuatro grupos de eventos por separado, incluyendo algunas modificaciones en la parametrización y el espacio de búsqueda del problema.

iii) Inversión individual de los cuatro grupos de eventos.

Los resultados generados en la sección anterior dieron la pauta para abordar los apilados por separado. El objetivo principal es llegar a conocer cuatro diferentes modelos estructurales que respondan, cada uno de ellos, a las observaciones hechas en cada acimut de entrada al receptor. Inicialmente se llevaron a cabo inversiones de los cuatro apilados con la misma parametrización diseñada para el modelado simultáneo. Los resultados fueron hasta cierto punto alentadores. Se encontró que en la parte de la estructura correspondiente a las velocidades, espesores y contrastes de impedancia en la corteza, es decir, en las cuatro capas que superyacen al semiespacio, las similitudes fueron extraordinarias entre los cuatro modelos promedio extraídos de cada stack. Por el contrario, la profundidad del Moho varió desmesuradamente entre ellos, aproximadamente 7 km entre el más somero y el más profundo. Considerando las distancias horizontales que separan al receptor de los puntos en que entran a la corteza los diferentes frentes de onda de cada grupo, puntos a los que se puede asociar aproximadamente dicha profundidad, parece demasiado grande el desnivel que presenta el Moho. En este último aspecto es en el que dejan de ser del todo positivos los resultados.

Entonces, surgió la idea de contemplar a las velocidades " β " de los modelos y a la relación de Poisson " ν " que guardan la velocidad compresional y la de cizalla, como los posibles responsables de aquellas diferencias tan importantes en los apilados, y no únicamente a las discrepancias en las profundidades de las interfases. Esta idea es viable desde el punto de vista geológico, ya que se trata de una estación ubicada en el corazón de un enjambre volcánico en plena actividad, que por ende, justifica la existencia de

cambios súbitos en la constitución física de las rocas del manto superior y corteza profunda entre dos puntos relativamente cercanos.

Atendiendo a esta realidad geológica, se decidió ampliar hacia abajo el límite inferior para las velocidades del semiespacio en los procesos de modelado (entre 4.0 y 5.0 km/s, ver tabla 6.12). Además se invirtió, junto con las velocidades β y los espesores de las 4 capas del modelo, la relación de Poisson (ν) del semiespacio, modificación que pretende modelar la constitución elástica de materiales que puedan encontrarse en condiciones de presión y temperatura diferentes. Bien sabido es, que un material a alta temperatura y baja presión se comporta como un "semifluido", y por lo tanto posee una relación de Poisson más alta que otro material en condiciones normales a esas profundidades.

Por otro lado, siguiendo el trabajo de G. Zandt y C. Ammon (*Zandt y Ammon, 1995*), donde se propone un método para establecer la relación de Poisson promedio de la corteza basado en los tiempos de arribo de las fases P directa, P_s y P_pPms convertidas en el Moho, se calculó dicha relación a partir de las funciones de receptor de los cuatro grupos. En todos los casos resultó ser considerablemente más elevada ($\nu \approx 0.275$) que la de un sólido Poissoniano ($\nu = 0.25$). Comparando este valor de 0.275 con los que reportan Zandt y Ammon para diferentes regiones del mundo en el trabajo mencionado arriba, corresponde perfectamente con los que ellos encontraron para la parte central de México ($\nu > 0.27$). De esta manera se fijó el valor de ν encontrado, durante todos los procesos de inversión, para las cuatro capas superiores de los modelos probados.

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \quad (6.1)$$

La relación que guarda ν con el cociente de las dos velocidades de las ondas de cuerpo se muestra en la ecuación 6.1. De ahí que para el valor de ν obtenido a partir de nuestros datos ($\nu \approx 0.275$) corresponda una relación entre α y β de: $\alpha = 1.8\beta$.

En el caso del semiespacio, el rango de valores para ν que fue explorado es el siguiente: $0.23 < \nu < 0.30$.

En la tabla 6.11 aparecen los valores empleados por los dos métodos globales de inversión, GA y SA, para seleccionar los modelos solución. Claramente, éstos son mucho más estrictos que los que tuvieron que emplearse con anterioridad en la inversión simultánea (tabla 6.10, comparar).

	Área total de la banda de error.	Porcentaje de tolerancia.	Valor del área externa normalizada.	Valor máximo de la semejanza.
Grupo 1 (Sudamérica)	157.4	2.0%	1.0	0.025
Grupo 2 (Islas Fiji)	79.2	12.0%	3.02	0.09
Grupo 3 (Alaska)	138.7	14.0%	6.17	0.11
Grupo 4 (Atlántico)	140.9	10.0%	4.48	0.05

Tabla 6.11 Criterios de selección de modelos empleados en los cuatro procesos de inversión independientes. Comparar dichos criterios con los que se emplearon para la inversión simultánea (tabla 6.10).

Los rangos de variación para cada parámetro invertido están en la tabla 6.12. Ahí aparecen los valores de los límites inferior y superior que determinaron dichos rangos, y a su vez el espacio de soluciones explorado por los métodos de optimación. Para el caso de las velocidades en el semiespacio puede verse cómo se amplió el rango de búsqueda con relación al que se usó durante la inversión simultánea (figura 6.15). Además se muestran los valores que tomaron las relaciones de Poisson también del semiespacio, parámetro que no fue considerado durante el modelado simultáneo de las cuatro curvas.

	Velocidades (km/s)		Espesores (km)		Relación de Poisson	
	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior
Capa 1	1.5	1.8	1.7	2.2	0.275 (fijo)	
Capa 2	2.9	3.3	2.0	4.0	0.275 (fijo)	
Capa 3	3.1	3.5	10.0	14.0	0.275 (fijo)	
Capa 4	3.5	4.0	19.0*	30.0*	0.275 (fijo)	
Semiespacio	4.0	5.0	∞		0.23	0.30

Tabla 6.12 Espacio de soluciones a través de los límites que definen los rangos de variación para los parámetros invertidos. (*) En la capa 4, los grupos 2 y 3 variaron su espesor entre 19 y 27 km, mientras que los grupos 1 y 4 variaron su espesor entre 26 y 30 km.

Las nubes de modelos que resultaron de los procesos de inversión, una vez que fueron sumadas las soluciones arrojadas por los dos métodos de búsqueda tal y como se llevó a cabo en la prueba sintética de la sección 6.4 (figura 6.4), no mostraron una diferencia

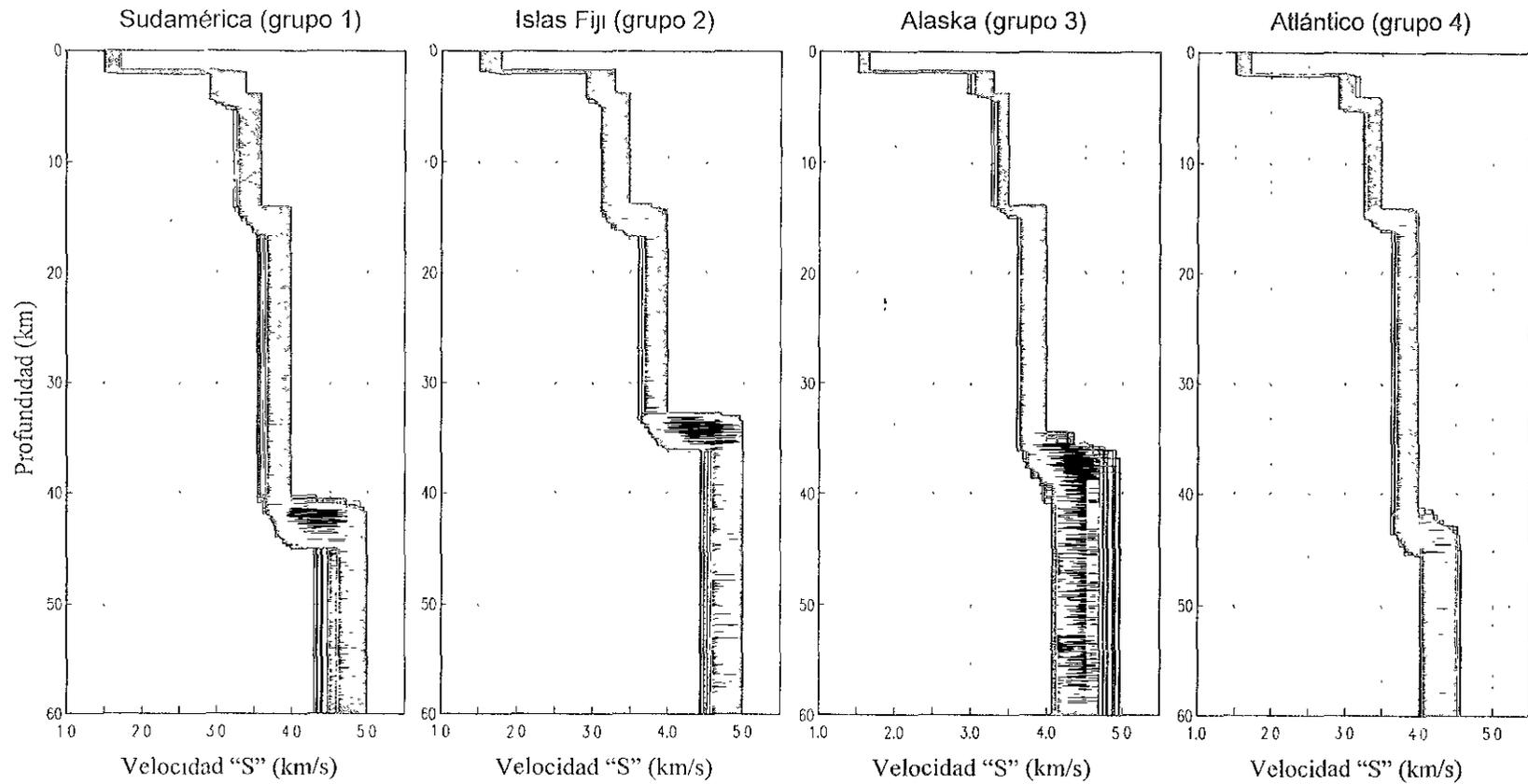


Fig. 6.17 Nubes de modelos solución de las cuatro inversiones individuales correspondientes a los cuatro grupos de sismos modelados. Apréciase la variación en la profundidad del Moho en función del acimut de cada cluster, las diferencias en las velocidades del semiespacio, y la similitud que guardan los modelos corticales (cuatro capas superiores) en las cuatro nubes.

notable como se esperaba, en comparación con aquéllas obtenidas antes de cambiar la parametrización del problema recién descrita. Con esto se quiere decir que los cambios abruptos en las profundidades del Moho siguen estando presentes. Sin embargo, además de que los ajustes mejoraron, se extrajo información valiosa sobre la constitución del manto superior. Los conjuntos (nubes) de modelos solución de las inversiones individuales para los cuatro grupos en CUIG se presentan en la figura 6.17. En ella se puede apreciar a primera vista la dependencia tan grande que hay entre la profundidad del Moho y el acimut con el que arribaron las ondas al receptor. Además, la gran similitud que guardan las cuatro nubes en lo que respecta al modelo cortical, es decir, a las cuatro capas que yacen sobre el semiespacio, y por último, las diferencias en las velocidades de cortante para el manto.

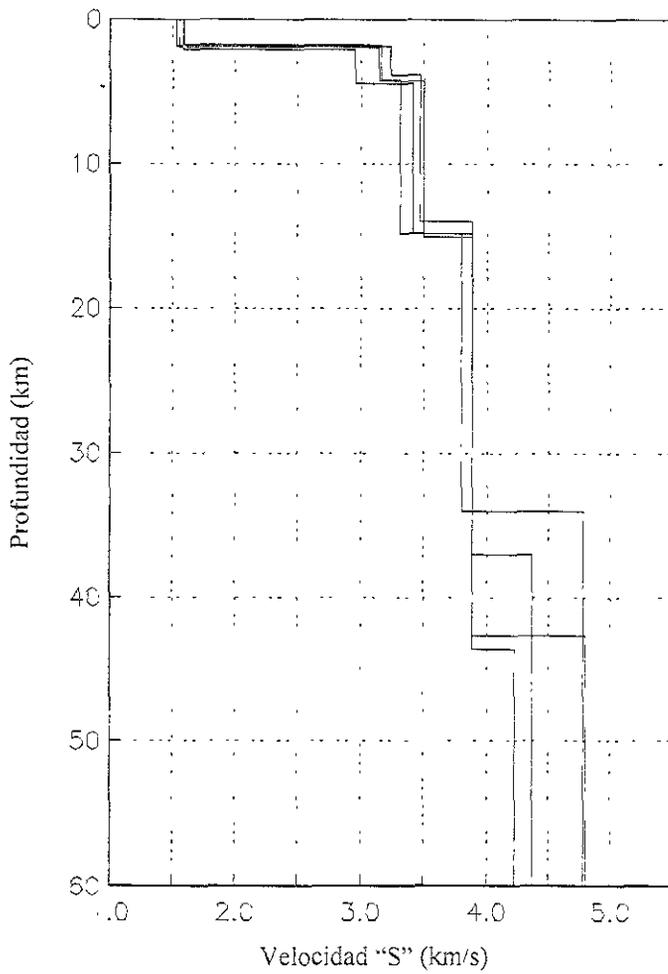


Fig 6.18 Modelos promedio correspondientes a las cuatro nubes mostradas en la figura anterior (figura 6.17).

Todas estas apreciaciones pueden verse de una manera más inmediata si se extrae de cada nube su modelo promedio. En la figura 6.18 aparecen dichos modelos, y no aquéllos que más se les parezcan de su respectiva nube empleando la norma L2, tal y como se hizo para la estación ZAIG. La razón es porque los modelos promedio presentaron un mejor ajuste con las observaciones, motivo suficiente para ser éstos los considerados.

En el caso del apilado proveniente del Atlántico, la velocidad promedio para el semiespacio resultó ser la más baja. Curiosamente la trayectoria que describen los sismos de este grupo atraviesa la región volcánicamente activa del Popocatepetl. Por otro lado, la relación de Poisson del semiespacio obtenida para este caso fue la más elevada $\nu = 0.295 \pm 0.0052$, valor que relaciona a α con β de la siguiente manera: $\alpha = 1.85\beta$.

		Capa 1	Capa 2	Capa 3	Capa 4	Semiespa.
Grupo 1 (Sudamérica)	β (km/s)	1.55 ± 0.038	3.14 ± 0.128	3.50 ± 0.070	3.88 ± 0.086	4.80 ± 0.121
	h (km)	1.97 ± 0.094	2.34 ± 0.285	10.79 ± 0.568	27.62 ± 0.979	∞
	ν	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.273 ± 0.008
Grupo 2 (Islas Fiji)	β (km/s)	1.59 ± 0.069	3.16 ± 0.095	3.31 ± 0.090	3.79 ± 0.077	4.78 ± 0.131
	h (km)	1.81 ± 0.077	2.39 ± 0.287	10.66 ± 0.588	19.21 ± 0.274	∞
	ν	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.290 ± 0.005
Grupo 3 (Alaska)	β (km/s)	1.52 ± 0.016	3.25 ± 0.053	3.47 ± 0.025	3.88 ± 0.068	4.37 ± 0.147
	h (km)	1.84 ± 0.034	2.08 ± 0.081	10.17 ± 0.143	23.08 ± 0.817	∞
	ν	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.269 ± 0.039
Grupo 4 (Atlántico)	β (km/s)	1.58 ± 0.044	2.96 ± 0.054	3.42 ± 0.048	3.88 ± 0.063	4.23 ± 0.102
	h (km)	2.08 ± 0.064	2.39 ± 0.247	10.38 ± 0.337	28.78 ± 0.680	∞
	ν	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.275 (fijo)	0.295 ± 0.005

Tabla 6.13 Valores numéricos con sus respectivas desviaciones estándar de los cuatro modelos promedio mostrados en la figura 6.18. La simbología es la siguiente: β (velocidad de cortante), h (espesor de la capa), ν (relación de Poisson).

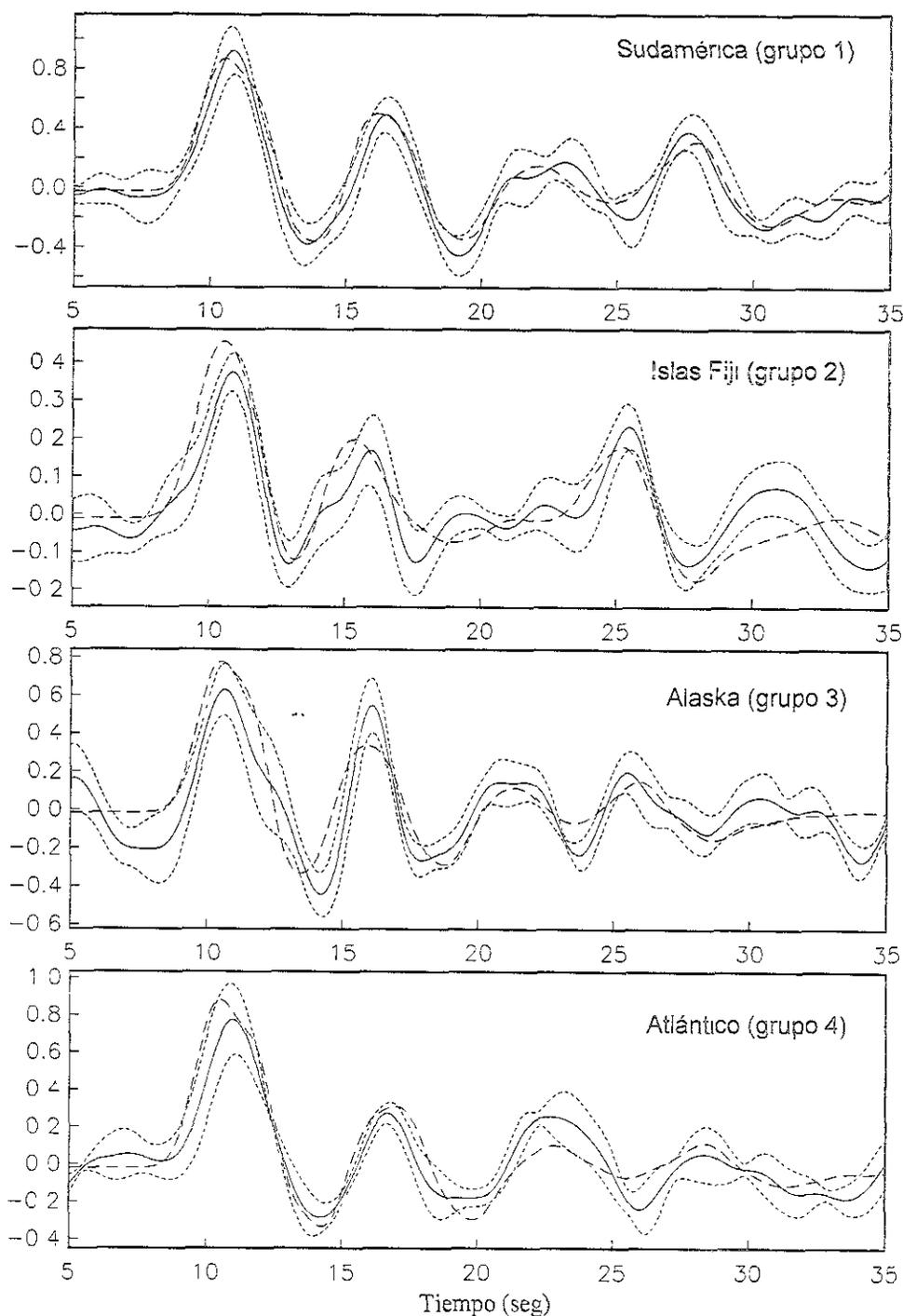


Fig. 6.19 Ajustes entre las observaciones de los cuatro grupos (líneas continuas) y las funciones de receptor sintetizadas (líneas discontinuas) a partir de los modelos promedio de la figura 6.18 (tabla 6.13). Con líneas punteadas se indican las bandas de desviación estándar por grupo.

Este valor correspondería a un material cuyas propiedades elásticas son las de un sólido “semifluido”, probablemente por las temperaturas altas que existen en el manto superior dentro de una zona con dicha actividad. Además, el modelo solución promedio para este

grupo, proveniente del Atlántico, muestra la mayor profundidad del Moho (~44 km), hecho que podría justificarse pensando en una necesaria compensación isostática por debajo de los elevados volcanes.

En la tabla 6.13 se muestran los valores numéricos de los cuatro modelos promedio con sus desviaciones estándar, incluyendo la relación de Poisson del semiespacio.

Si se calculan las funciones de receptor sintéticas a partir de los cuatro modelos promedio y se comparan con las observaciones, claramente encontramos ajustes mucho mejores que los que se presentaron calculando los sintéticos del modelo promedio único arrojado por la inversión simultánea (figura 6.16). En la figura 6.19 aparecen los ajustes entre las observaciones y las respuestas de los cuatro modelos mencionados.

Empleando el programa diseñado para la identificación de fases, que quedó explicado en la sección 3.3 (capítulo 3), se puede conocer la distancia horizontal que separa al receptor, en este caso la estación CUIG, del punto en la base de la corteza donde entran a ella las fases $PpPms$ para cada grupo. Con esa información, más el back-acimut promedio de cada grupo, se pueden ubicar dentro de un mapa visto en planta dichos puntos entorno a la estación. Además, es aproximadamente correcto asociar con estos sitios en la base de la corteza, la profundidad del Moho que indican los modelos promedio, como se indica en el siguiente esquema (figura 6.20).

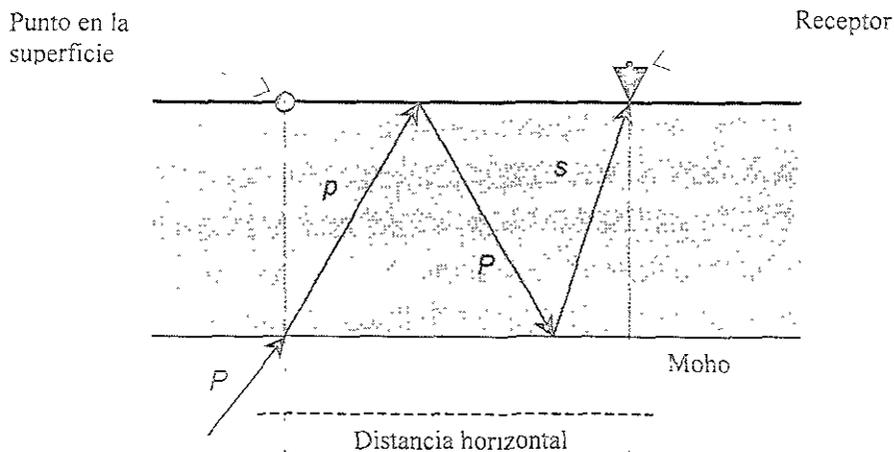


Fig. 6.20 Esquema que muestra el punto en la superficie donde se asigna, en la figura siguiente (6 21), la profundidad del Moho de los modelos promedio.

Siguiendo la figura 6.20, es claro que la profundidad del Moho no queda completamente determinada tan sólo por el sitio donde el múltiple $PpPms$ entra a la corteza, sino también por la reflexión que sufre en el Moho y por otras fases de gran amplitud convertidas ahí mismo como lo es la fase Ps . Sin embargo, por ser la fase $PpPms$ una de las que arriban

con mayor amplitud al receptor y con un retraso temporal considerable, es correcto decir que representa una de las que mayormente contribuyen a la determinación de la profundidad y contraste acústico del Moho. En otras palabras, esta fase posee una particular sensibilidad hacia estos dos parámetros. Por estas razones, el mapa de la figura 6.21 mencionado anteriormente tiene un sentido realmente válido, siempre y cuando se considere a la profundidad del Moho asociada a cada punto, como el "promedio" de dicha profundidad entre el punto en la superficie y el receptor. Es obvio que la longitud de dicha distancia dependerá del ángulo de incidencia en la base de la corteza con que arribe el frente de ondas, y de los contrastes acústicos del modelo empleado.

En la figura 6.21 también se incluye la topografía del terreno para visualizar la localización de los volcanes y las elevaciones más importantes. De esta manera tener una idea más clara de la relación que pudiera existir entre las morfologías del Moho y de la superficie de la Tierra.

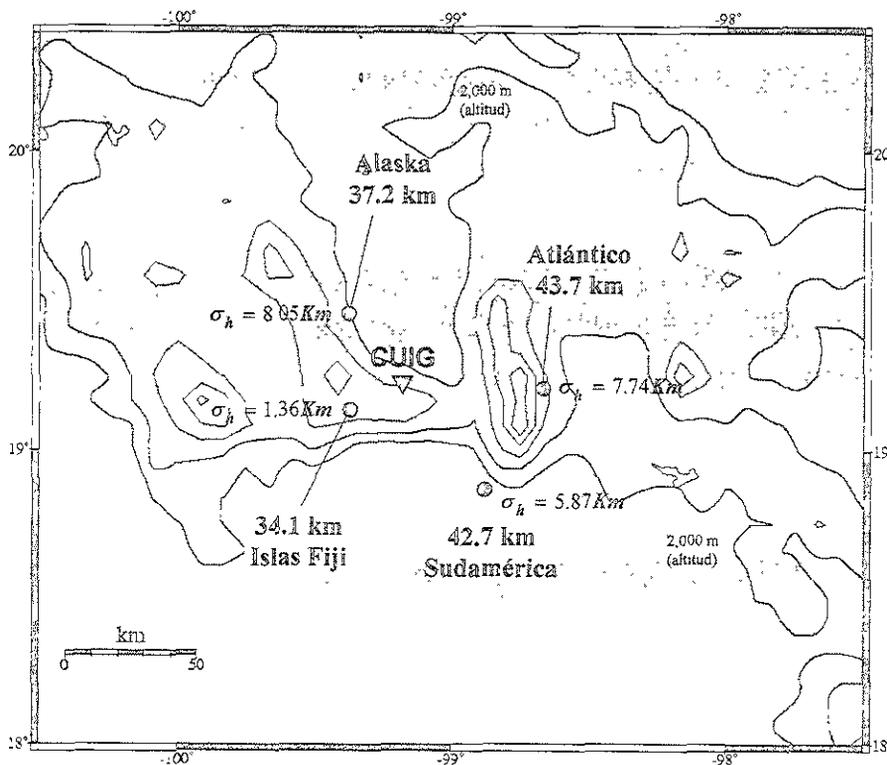


Fig. 6.21 Vista en planta de la estación CUIG y de las profundidades del Moho asociadas a los puntos en la base de la corteza donde los múltiples PpPms entran a la corteza para cada grupo, empleando los cuatro modelos finales mostrados en la figura 6.18 (ver texto). Las curvas de nivel muestran la topografía del terreno con un desnivel de 400 m entre cada una. Las σ_h representan las desviaciones estándar de las distancias horizontales a las cuales entraron los múltiples citados a la corteza para cada grupo

En la figura 6.22 se integran los resultados obtenidos para el sitio de Ciudad Universitaria incluyendo en tercera dimensión tanto las topografías del Moho y de superficie, como los valores para la Relación de Poisson en el manto superior determinados con las inversiones. Con esta figura se tiene una mejor noción de la distribución espacial del modelo estructural final que facilita la interpretación geológica de los resultados. Es importante notar cómo los valores más altos para la Relación de Poisson coinciden con la dirección (aproximadamente E-W) que describen la Sierra Chichinautzin y los volcanes activos más cercanos.

Si se consulta la carta gravimétrica de la República Mexicana (*de la Fuente, et al., 1994*), difícilmente pueden cuestionarse las profundidades propuestas en este trabajo. En dichas cartas existen incertidumbres tan grandes, tanto en las correcciones hechas a los datos como por el mallado de las lecturas, que los valores presentados de anomalía de Bouguer poseen un error que imposibilita hablar de cambios geológicos tan abruptos como los que se pretende justificar. Una de las correcciones que no está contemplada por la anomalía de Bouguer simple (anomalía presentada en dichas cartas), y que es probablemente la más importante en una región topográficamente caprichosa como la que constituye al Eje Neovolcánico, es la corrección por rugosidad, llamada también de terreno. Una muestra de ello es la asociación tan clara que existe entre los mínimos gravimétricos y las partes topográficamente más altas. No hay que perder de vista que la anomalía simple de Bouguer sólo contempla la corrección por aire libre (elevación) y la corrección por placa de Bouguer (por defecto de masa). Si por el contrario se hubieran hecho todas las correcciones pertinentes (anomalía de Bouguer completa), y a pesar de ello siguieran existiendo dichas anomalías, entonces sí se podrían asociar, a un nivel regional, con variaciones en la topografía del Moho consecuencia de una compensación isostática.

En 1996, Urrutia-Fucugaichi y Flores-Ruiz (1996) realizaron un análisis espectral de la anomalía de Bouguer en el Eje Neovolcánico, para determinar la geometría y profundidad de las fuentes gravimétricas involucradas con sus observaciones. Una vez determinadas, a través de una continuación analítica, eliminaron los efectos más someros (residuales) asociados con las frecuencias más altas de sus espectros para aislar la señal proveniente de profundidades mayores (efecto regional). Con la señal filtrada, modelaron el espesor de la corteza empleando un método iterativo por diferencia de densidades (ver referencia). Su resultado es un mapa de isoprofundidad para esta zona cuya resolución, desde el punto de vista cuantitativo, es cuestionable. Los expertos en el manejo de información potencial saben los riesgos y debilidades que existen en el proceso de

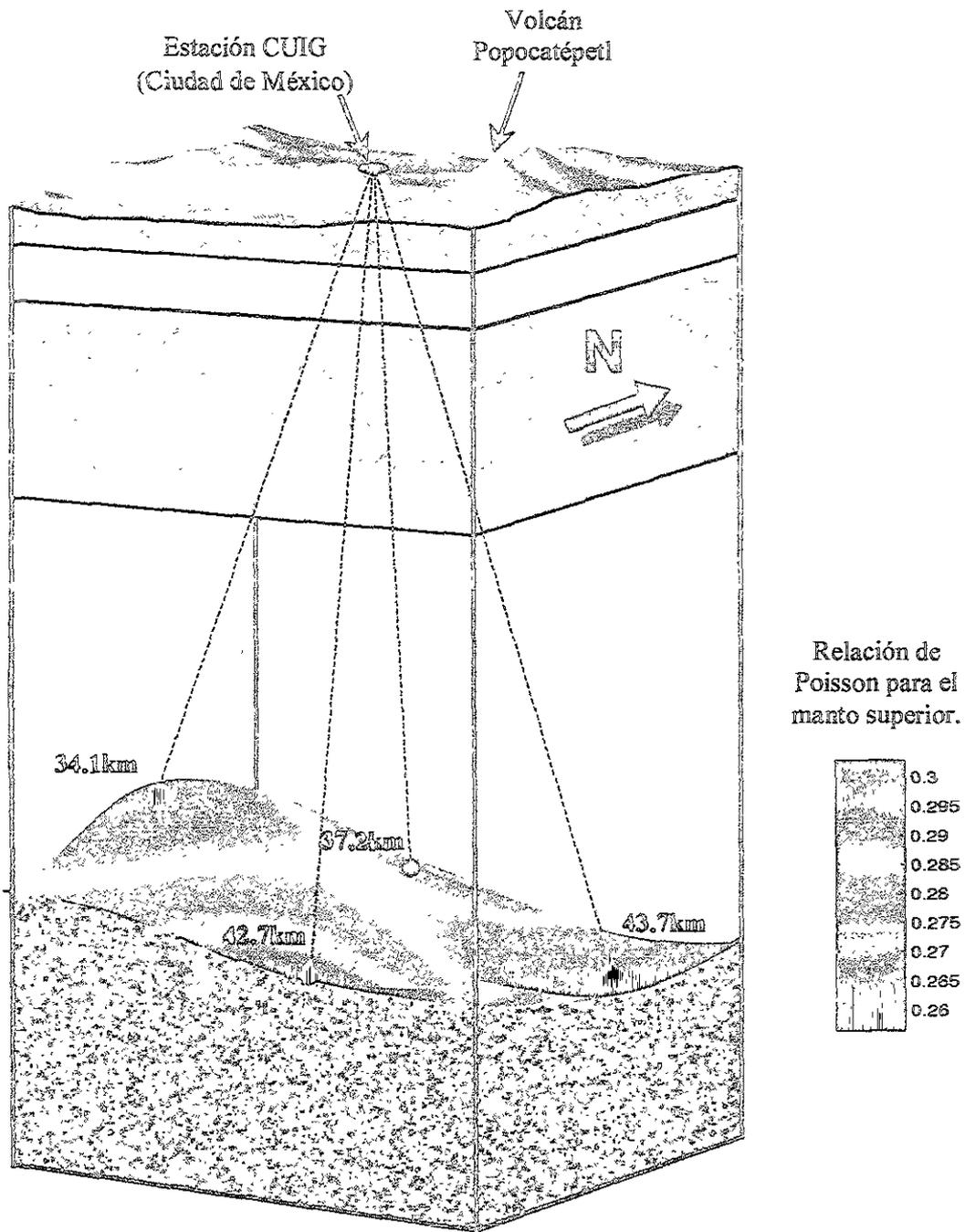


Fig. 6.22 Vista tridimensional de la morfología del Moho debajo de la Ciudad de México interpolando las profundidades arrojadas por las inversiones para cada grupo de eventos. Además, en tonalidades sobre la superficie del Moho, aparecen los valores para la relación de Poisson en el manto superior también invertidos durante el modelado. (Figura realizada en colaboración con Arturo Iglesias).

separación de una señal en sus componentes residual y regional, sobre todo cuando no se cuenta con información absoluta provenientes de la perforación de pozos o de

experimentos sísmicos (Jacobsen, 1987). En este caso, los perfiles sísmicos empleados están muy al sur de la zona estudiada. Por otro lado, se encuentra uno de los problemas más graves que se presentan siempre que se lleva a cabo el modelado de información gravimétrica. Se trata del acoplamiento de parámetros. El "trade off" de la profundidad, las densidades, y las dimensiones de las fuentes, inequívocamente provoca la no unicidad de las soluciones. "Normalmente, las interpretaciones hechas con datos potenciales están:

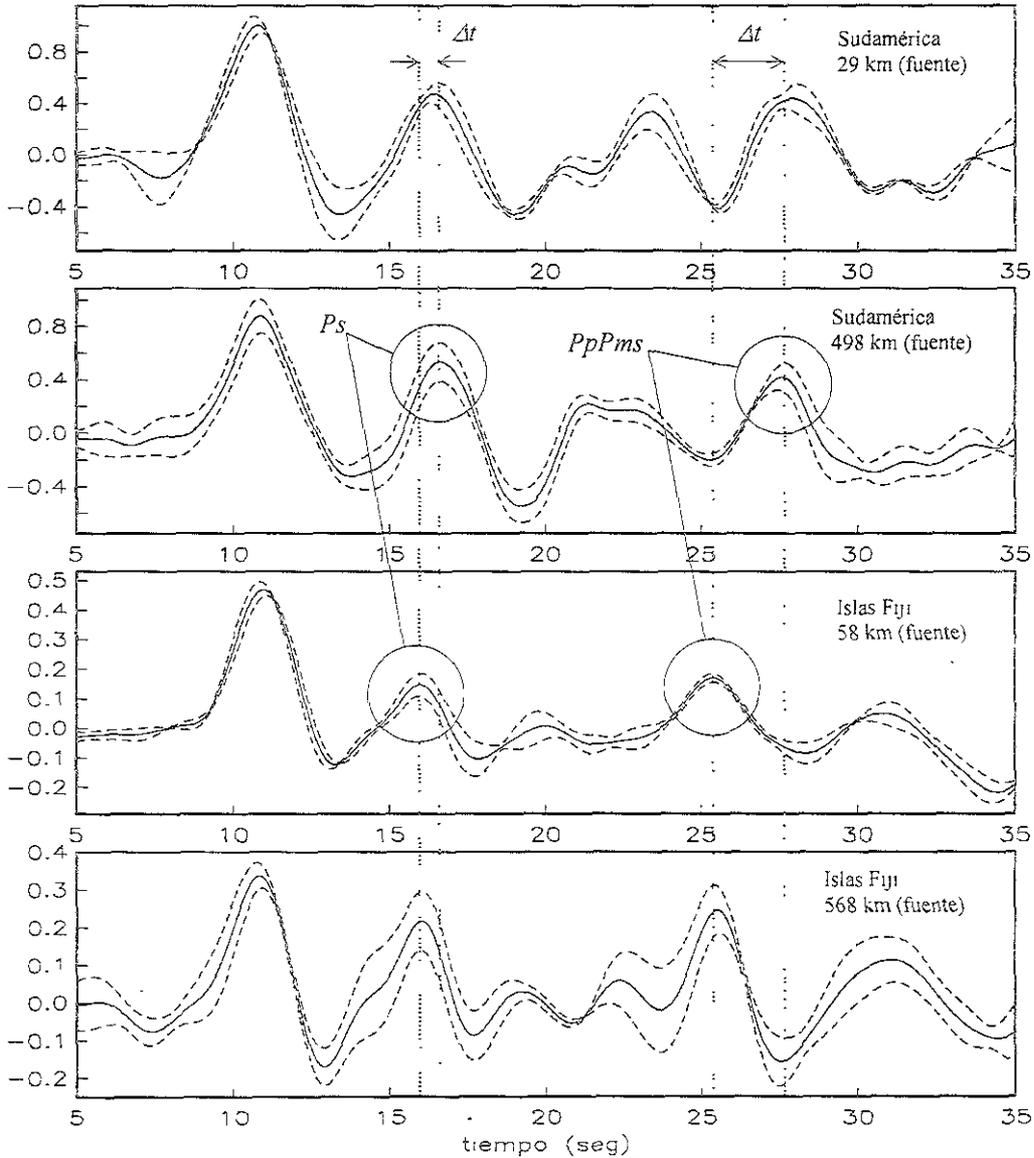


Fig. 6.23 Subapilados para los grupos 1 y 2 según las profundidades de las fuentes de los mejores eventos registrados. Notar la diferencia en los tiempos de arribo de las fases P_s y P_pP_{ms} entre ambos grupos. Las líneas sinuosas discontinuas representan la desviación estándar de las funciones de receptor apiladas.

limitadas a aproximaciones cualitativas que simplemente proporcionan la localización en el mapa de los cuerpos anómalos bajo la superficie” (Stanley, 1990). Por todo lo anterior, los resultados presentados por Urrutia y Flores son válidos desde un punto de vista cualitativo y regional, imposibilitando la confrontación de nuestros resultados con los suyos. A pesar de todo, si se localizan los mismo cuatro puntos que aparecen en las figuras 6.21 y 6.22, en el mapa de isopropundidad propuesto por ellos, y se interpolan los valores que el estudio gravimétrico arrojó, la única similitud que se encuentra con relación a los resultados obtenidos en el presente, es que la profundidad mayor en ambos trabajos aparece en el flanco este, lugar por donde arriban los sismos del Atlántico (grupo 4).

Más allá de lo cuestionable que puedan ser, por un lado el método que se empleó en este trabajo para modelar la corteza de la Tierra en la estación CUIG, y por otro los argumentos que tratan de justificar las variaciones tan grandes en la profundidad del Moho, existe una realidad inequívoca que, pudiendo ser más contundente si se contara con una mayor cantidad de registros telesísmicos, nos revela algo extraño. Nos referimos a los datos.

Haciendo una selección meticulosa de los registros más consistentes entre sí en los grupos 1 y 2, sitios en donde se cuenta con mayor cantidad de eventos, se apilaron dos subgrupos por cada uno, separándolos según su profundidad de la fuente. Es decir, se hicieron dos apilados por grupo: uno con los mejores eventos someros y otro con los mejores eventos profundos, tanto en Sudamérica como en las Islas Fiji. No hay que olvidar que estos dos grupos son los que mostraron mayor discrepancia entre sí en cuanto a la profundidad del Moho. Los resultados aparecen en la figura 6.23. En ella se muestran las profundidades promedio de los eventos (focos) en cada apilado, y dos líneas verticales que señalan el enorme desfase que hay de los arribos P_s y P_pP_{ms} entre ambos grupos.

A esta realidad nos referimos anteriormente. No cabe duda que pasa algo en algún sitio, de tal forma que se induce esta anomalía tan marcada entre los registros provenientes de uno y otro grupo.

Ciertamente es posible plantear otros escenarios geológicos que permitan justificar estas observaciones. Probablemente la manera como se identificaron los arribos de la figura 6.23 no sea la correcta, a pesar de haber usado el sentido común, la experiencia aportada por otros trabajos, y el programa identificador de fases. También es probable que los supuestos implicados en cada una de las herramientas empleadas no se aproximen del todo a la realidad. Sin embargo, con las observaciones e información *a priori* que se tiene,

y empleando los modelos y esquemas matemático que ya fueron expuestos, creemos que los resultados presentados son los más simples y convincentes.

No se puede dejar de decir que, sin duda, un resultado valioso al que se llegó en este trabajo es el problema que queda planteado: cómo justificar las observaciones obtenidas que parecen ser consistentes.

6.7 Estación Tuzandépetl (TUIG).

i) Marco geológico.

En el flanco este del sector sur de la Sierra Madre Oriental (SMO) está expuesta una gruesa secuencia de rocas sedimentarias mesozoicas que descansan sobre un basamento metamórfico que aflora principalmente en el flanco occidental de la misma sierra. Este basamento metamórfico, constituido por esquistos, gneises y filitas, derivados principalmente de rocas sedimentarias, se ha atribuido al Paleozoico y Precámbrico.

El Golfo de México es una cuenca compuesta por depósitos oceánicos que se formó como parte de un proceso de extensión y "rifting" del supercontinente Pangea (Salvador, 1991). En la parte norte de dicha cuenca, el espesor de los sedimentos puede superar los 18 km (Hardin, 1962; Antoine y Pyle, 1970). Más al norte, en la costa del golfo, el espesor de los sedimentos es considerablemente menor, aproximadamente de 10 km (Feng et al., 1994). La estación utilizada en este trabajo se encuentra localizada en las inmediaciones de la Planicie Costera del Golfo (PCG) que comprende a los estados de Veracruz, Tabasco y Campeche. Esta planicie costera se encuentra rodeada por el Eje Neovolcánico al norte, por la plataforma de Yucatán al este, por la Sierra Norte de Chiapas al sur, y por la Sierra Juárez al oeste. A pesar de que existen gran cantidad de estudios geológico y geofísicos en esta región, llevados a cabo por Pemex y por el Instituto Mexicano del Petróleo, el espesor de los depósitos sedimentarios no se conoce con precisión. Por lo tanto, el contar con más información al respecto serviría para entender mejor la evolución tectónica de la zona y para evaluar el riesgo sísmico existente, que como ya demostraron (Shapiro et al., 1999) es de gran importancia debido a la amplificación que sufren las ondas en esta región.

ii) Inversión del apilado de Sudamérica.

En esta estación únicamente se pudieron rescatar cuatro registros telesísmicos de calidad provenientes todos de Sudamérica. Las localizaciones y magnitudes de cada evento aparecen en la tabla 6.3 de la sección 6.2.

En las últimas tres décadas, la región de la Planicie Costera del Golfo se ha convertido, y en especial las ciudades de Coatzacoalcos y Minatitlán, en un importante centro para la industria petrolera. Recientemente han ocurrido terremotos con magnitudes hasta de 6.5

	Delta (Δ)	Profundidad Fuente (km)	Ángulo de incidencia	Back Azimuth
Grupo 1 (Sudamérica)	48°	173	32°	149°

Tabla 6.14 Información promedio de los sismos pertenecientes al único grupo apilado que se modeló en TUIG.

grados en dicha región, por esto, la estimación de la estructura cortical ha tomado importancia, ya que conociéndola se podrá hacer una estimación más real del riesgo sísmico y de movimientos fuertes provocados por futuros terremotos (Shapiro et al., 1999).

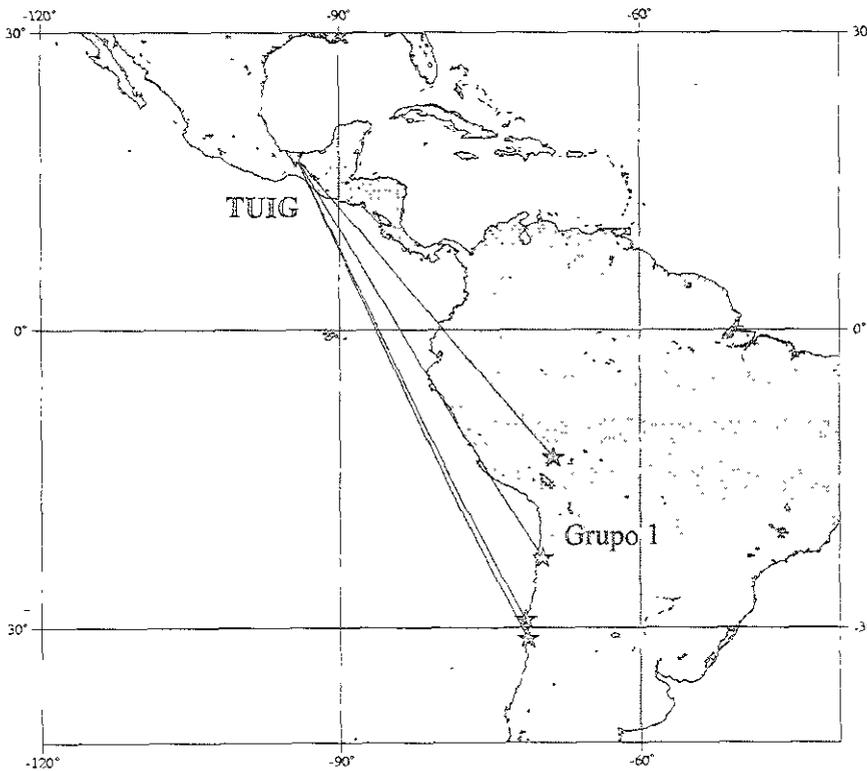


Fig. 6.24 Distribución epicentral de los eventos modelados en la estación TUIG.

Los epicentros de los terremotos que fueron empleados en este trabajo aparecen en el mapa de la figura 6.24.

Las funciones de receptor calculadas a partir de los cuatro registros fueron calculadas con un periodo para el filtro gaussiano de $T_p=2.5s$ (ver sección 3.1-iii), es decir, se filtraron con un pasa-bajas con frecuencia de corte de 0.4hz. Los apilados tanto de las funciones de receptor radiales como de las transversales aparecen en la figura 6.25. Ambas gráficas están a la misma escala para que las amplitudes sean comparables. La complejidad de las mismas (gran cantidad de fases), en comparación con las correspondientes a las otras estaciones, se debe a que su contenido de frecuencias es considerablemente mayor gracias al filtrado recién descrito.

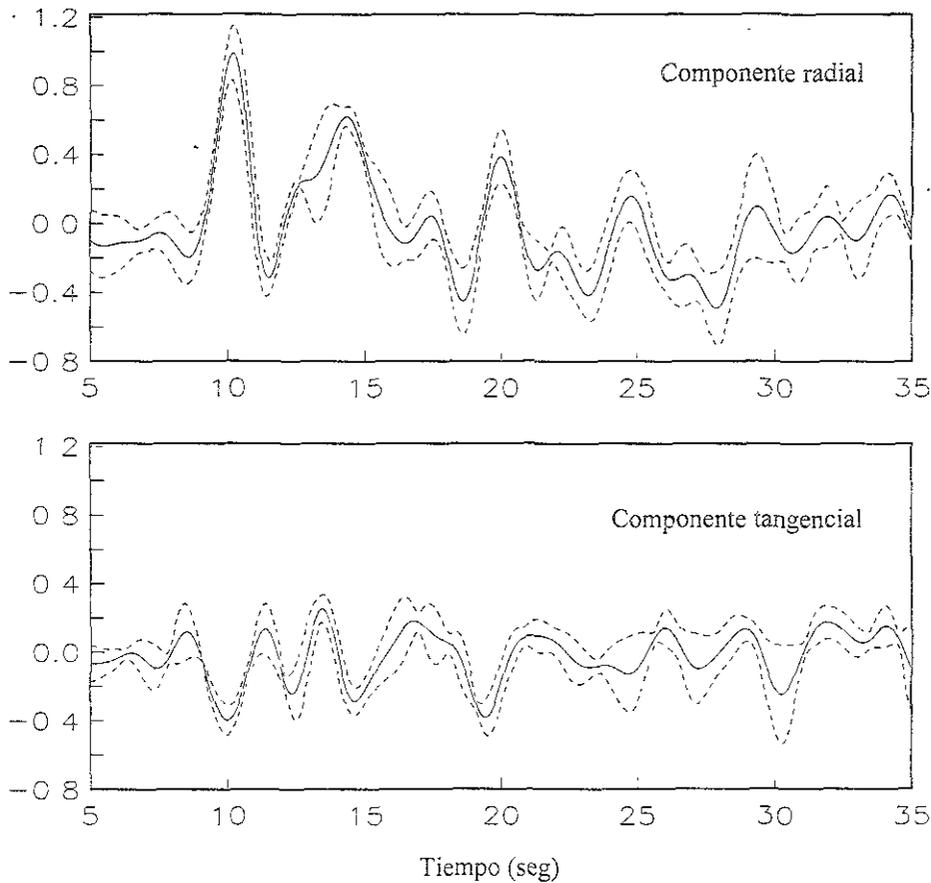


Fig. 6.25 Apilados a la misma escala de las funciones de receptor calculadas en la estación de Tuzandéptl (TUIG) Arriba, apilado de las funciones radiales; abajo, de las transversales. Las líneas punteadas definen la banda de error establecida por la desviación estándar de los datos promediados

La parametrización del problema fue pensada en función de un modelo previo que se extrajo del modelado inverso de la dispersión de ondas superficiales (Shapiro et al.,

1999), y de la información estructural que se tiene de la zona. Los modelos constaron de 15 parámetros: las ocho velocidades " β " incluyendo la del semiespacio, y los siete espesores de las capas.

Si se compara la ventana de tiempo invertida en este trabajo (para la estación de TUIG), con la ventana invertida en el artículo de Shapiro et al. (1999) para la misma estación, es claro que se utilizaron los mismos datos y el mismo procedimiento. La única diferencia radica en que aquí se modelaron 5 segundos más de las funciones de receptor. En el artículo citado se usaron nada más los primeros 30 segundos. Este hecho, más aparte que el intervalo de búsqueda para la segunda capa en el caso de este trabajo se redujo en cuanto a su límite superior con respecto a lo presentado en el artículo, provocaron que

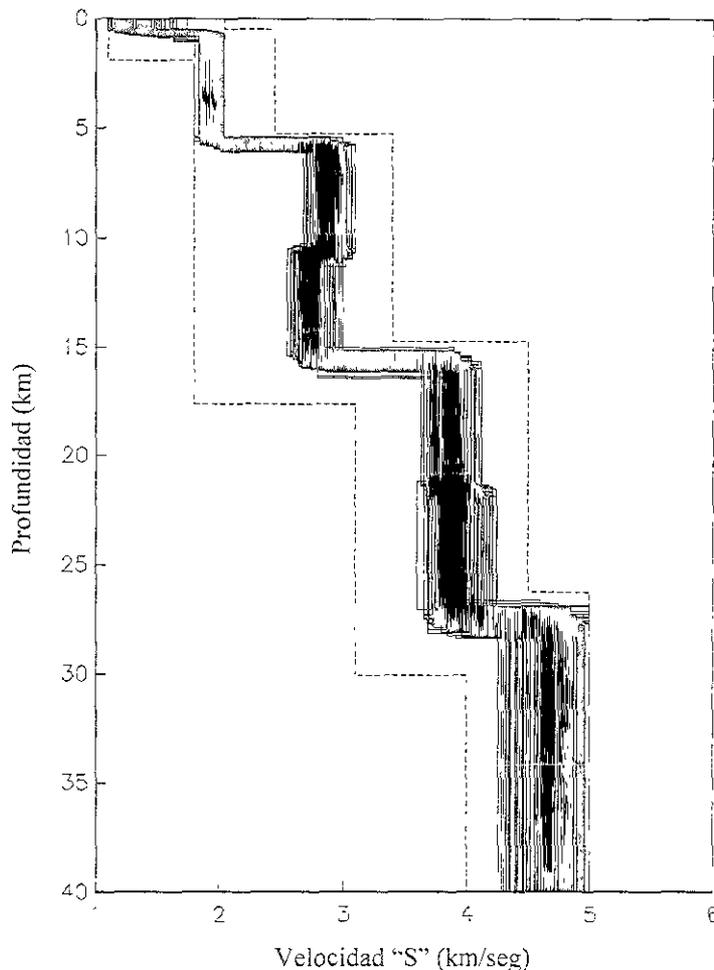


Fig. 6.26 Nube de 2.000 modelos arrojada por los dos métodos de inversión, GA y SA, al invertir el apilado radial de la figura 6.25. El contraste acústico que sobresale a una profundidad de aproximadamente 16 km marca el final de los depósitos sedimentarios.

las soluciones al problema cambiaran ligeramente. Esencialmente siguen siendo las mismas, sin embargo, el contraste acústico que se presenta alrededor de los 6 km de profundidad, no fue tan claro en la inversión realizada para el artículo. Por lo demás, se

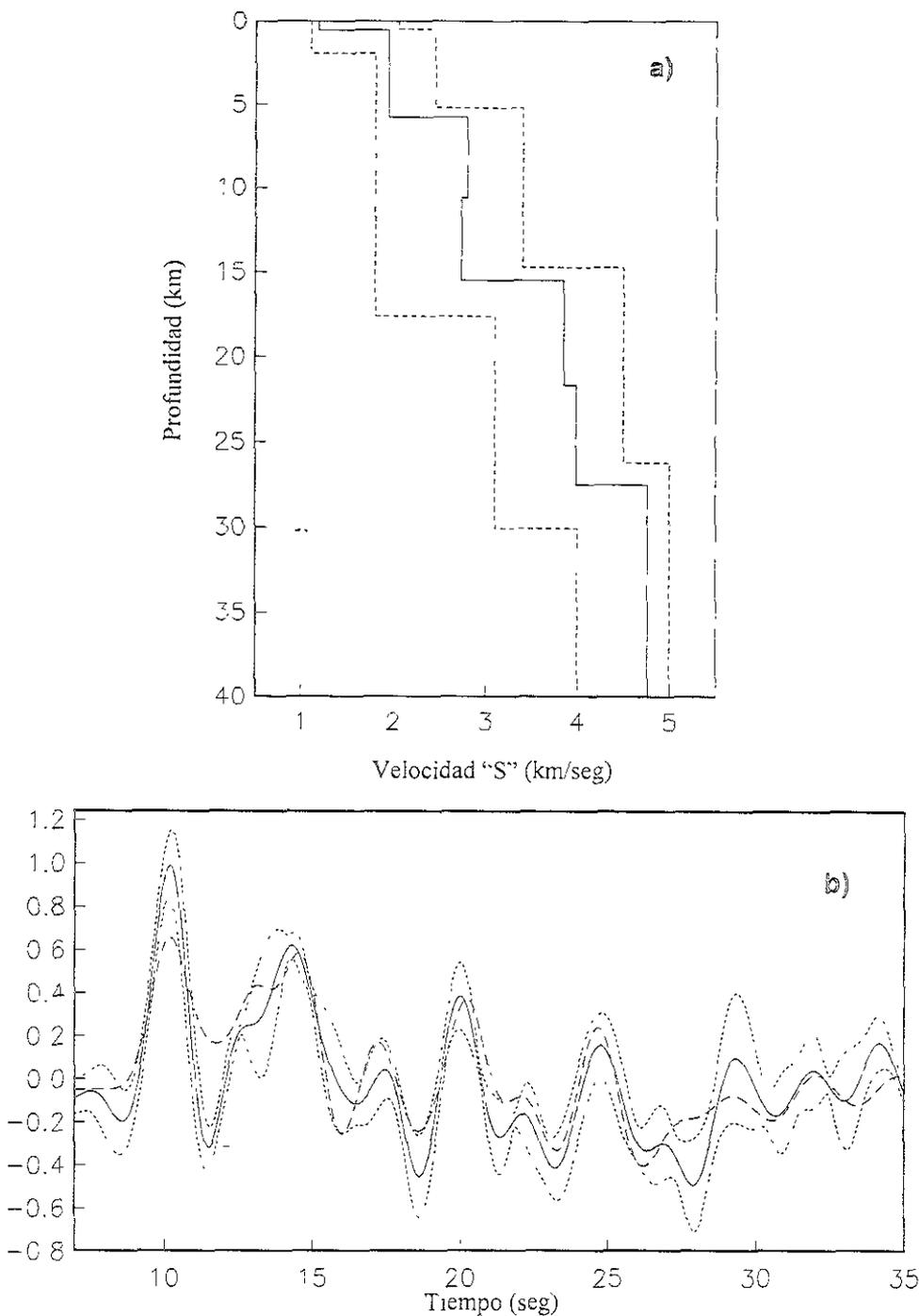


Fig. 6.27 a) Modelo promedio de las inversiones hechas en TUIG del apilado de sudamérica; b) ajuste de dicho modelo promedio con las observaciones y las bandas de error (dos líneas finamente discontinuas).

sigue modelando la cuenca sedimentaria de aproximadamente 16 km de grosor. La nube de 2,000 modelos arrojada por los dos métodos de inversión, GA y SA, aparece en la figura 6.26. El espesor de los sedimentos descritos en la sección dedicada al marco geológico puede estimarse en la figura 6.26. A una profundidad de aproximadamente 16 km, se encuentra un contraste elástico importante que representa precisamente el término de dicho paquete sedimentario de baja velocidad causante de la amplificación y del bloqueo de las fases *Lg* (Shapiro et al, 1999).

	Espesor (km)	Velocidad β (km/s)	Velocidad α (km/s)
Capa 1	0.5	1.2	2.08
Capa 2	5.3	1.95	3.38
Capa 3	5.0	2.8	4.85
Capa 4	4.7	2.7	4.68
Capa 5	6.0	3.85	6.67
Capa 6	6.0	4.0	6.93
Semiespacio	∞	4.75	8.23

Tabla 6.15 Valores numéricos del modelo final para el sitio TUIG (figura 6.27). Las velocidades de las ondas "P" fueron calculadas asumiendo un sólido de Poisson durante las inversiones.

El modelo promedio del conjunto mostrado en la figura pasada (de manera explícita en la tabla 6.15), junto con el ajuste del mismo, se muestran en la figura 6.27. Ahí se puede ver que dicho modelo, que conserva los rasgos principales de la nube de la cual proviene, ajusta satisfactoriamente bien con las observaciones. Con esto se quiere decir que este modelo logra ver prácticamente todos los arribos registrados en los primeros 35 segundos de la función de receptor observada, a pesar de que las amplitudes, en algunos casos, no se reproduzcan del todo bien (por ejemplo la onda *P* directa).

Una comparación de este resultado con otros modelos geofísicos propuestos para la región se presentan en el próximo capítulo.

7.1 Comparación en Zacatecas (ZAIG).

En 1975 James E. Fix (Fix, 1975) utilizó una red de sismógrafos instalada en Arizona para registrar una serie de eventos ocurridos en las cercanías de Chiapas. A partir de los 18 terremotos detectados, Fix conformó seis curvas de dispersión para la velocidad de grupo, mismas que empleó para el modelado de la estructura de cortante para la corteza y manto superior, empleando un esquema de inversión por mínimos cuadrados.

A pesar de que en dicha investigación Fix empleó la dispersión de las ondas superficiales para su modelado, es decir, observaciones sísmicas que acumulan la información estructural promedio del trayecto entre la fuente y el detector, los dos modelos arrojados por sus inversiones (uno para ondas de Love y otro para ondas de Rayleigh), no difieren de manera importante del modelo final propuesto en el presente trabajo. Una comparación gráfica puede verse en la figura 7.1, donde aparece un solo modelo de Fix producto de promediar los dos antes mencionados que son muy similares entre sí. En la comparación de la figura, la similitud más notoria es en las velocidades de las capas. En cuanto a las diferencias en las profundidades, y en particular la del Moho (alrededor de ~6 km), hay que recordar que las funciones de receptor modeladas en el presente poseen alta resolución unidimensional por debajo de la estación, en contraste con el procedimiento de Fix, por lo que es considerablemente más fiable nuestro resultado en ese aspecto.

Por otro lado, existe un trabajo más reciente desarrollado por Gomberg y compañía (Gomberg, et al., 1988) en donde empleando nuevamente la dispersión de las ondas superficiales de Love y de Rayleigh, pero ahora en su velocidad de fase, también establecen la estructura de la corteza y manto superior. En él utilizan los tiempos de arribo de algunas fases para restringir el espacio de soluciones en los procesos de inversión, por mínimos cuadrados, que efectuaron con las curvas de dispersión.

Con un arreglo de tres estaciones localizado al norte de México, se registraron 20 eventos con diversos azimuts, principalmente provenientes del pacífico sur. Apareando dos de las tres estaciones de la manera más conveniente, se emplearon los registros para obtener las curvas para la velocidad de fase. Al final, llegaron a tres modelos estructurales diferentes debido a la dependencia que existe, cuando se emplea un método de inversión local como es el caso, entre el modelo inicial y el final (ver capítulo 4). Los modelos iniciales difirieron en la velocidad para el semiespacio " S_n " con 4.47 km/s, 4.33 km/s y 4.3 km/s. Sin embargo, para facilitar la comparación de sus resultados con el modelo final obtenido en nuestro trabajo, se redujo la cantidad de capas presentada por Gomberg en

sus modelos finales. a un conjunto que con la menor cantidad de ellas se apegara lo más posible a los tres modelos simultáneamente. Esta comparación puede verse gráficamente en la figura 7.1.

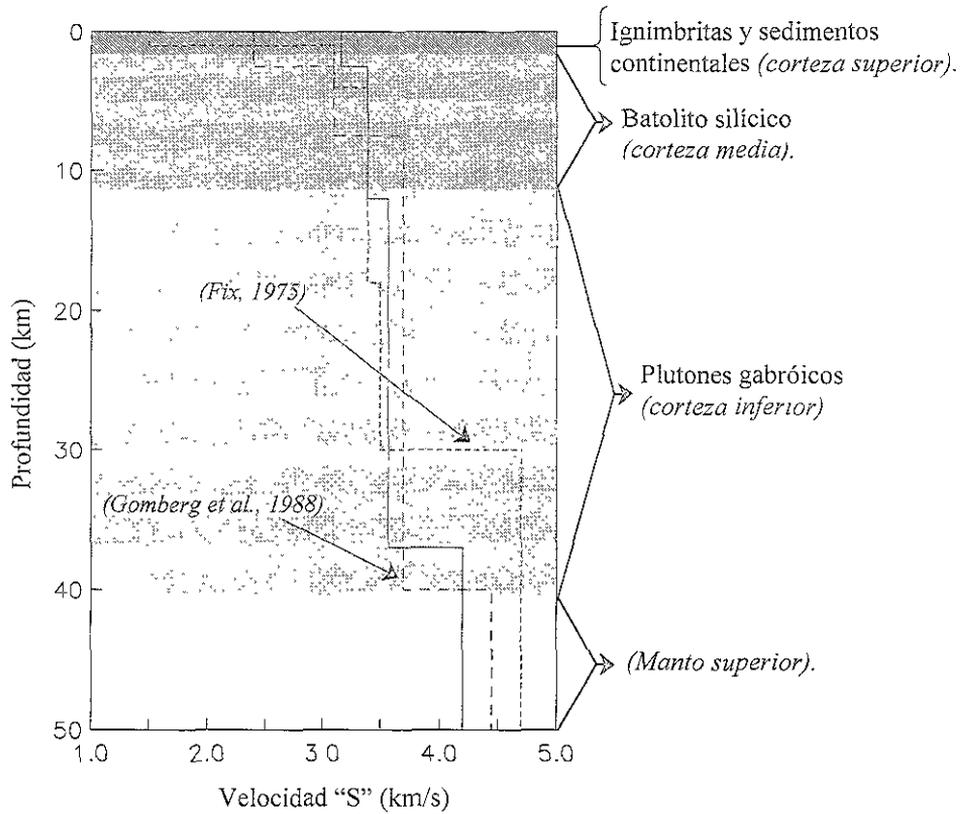


Fig. 7.1 comparación del modelo propuesto en este trabajo (línea continua) con tres modelos previos. Dos generados a partir de la dispersión de ondas superficiales (ver texto), y el otro expresado por las regiones sombreadas (Nieto-Samaniego et al , 1999).

La mayor discrepancia entre los tres modelos de velocidades en la figura 7.1 se encuentra en las partes superficial y profunda. De los primeros dos trabajos comparativos, las observaciones empleadas por Gombert *et al.* para su modelado, que son la velocidad de fase con tres estaciones distribuidas al norte de la república, es de mayor confiabilidad que las empleadas por Fix que modeló la velocidad de grupo para trayectorias demasiado grandes. Sin embargo, el método de inversión usado por Gombert, al ser lineal, depende extraordinariamente del modelo inicial del cual partió cada búsqueda. Por esto, y por tratarse de la dispersión de las ondas superficiales que inequívocamente se ve afectada por la totalidad de estructuras que atraviesen las ondas al propagarse, es difícil pensar que los modelos comparativos correspondan, como sí sucede en el caso de los modelos

obtenidos con funciones de receptor, a la estructura unidimensional que se encuentra debajo de la estación.

Por otro lado, en el trabajo citado en el capítulo anterior de *Nieto-Samaniego et al., 1999*, aunque no asocian velocidades de propagación a las diferentes capas que conforman la corteza, desde su punto de vista proponen un modelo geológico para la región de Zacatecas a partir de toda la información geofísica disponible. Dicho modelo aparece en la misma figura (7.1), donde las regiones sombreadas con distintos tonos representan los espesores de las diferentes unidades geológicas. Ahí mismo se especifican, siguiendo a los autores del trabajo citado arriba, las litologías asociadas a cada formación.

El parecido que hay entre el modelo obtenido en el presente trabajo (línea continua, figura 7.1) y aquél propuesto por *Nieto-Samaniego et al.* (regiones sombreadas, figura 7.1) es muy grande en cuanto a los espesores de las capas. Esto es significativo ya que fueron establecidos dichos espesores con base en toda la información geofísica disponible, a partir de un perfil gravimétrico (*Campos-Enriquez et al., 1994*), y de la anomalía de Bouguer (*Molina-Garza y Urrutia-Fucugauchi, 1993*), entre otros.

Para finalizar, el modelo generado en este trabajo es el resultado de un proceso de inversión global, que permitió precisar las profundidades y velocidades de propagación que tienen las unidades geológicas que hoy se cree, con base en todos los trabajos geofísicos realizados en la región, que existen en el sitio de Zacatecas.

7.2 Comparación en Ciudad Universitaria (CUIG).

Establecer la estructura cortical en el corazón del Eje Neovolcánico probablemente sea una de las tareas más difíciles. Existen varios trabajos encaminados a resolver este problema, sin embargo, ninguno emplea técnicas de alta resolución unidimensional como lo es la inversión global de funciones de receptor. En 1989 y después en 1996, M. Campillo y otros (*Campillo et al., 1989; Campillo et al., 1996*) modelaron la estructura cortical promedio entre la costa de Guerrero y la Ciudad de México. Para esto, en el primer trabajo se emplearon los resultados de un estudio de refracción realizado en Oaxaca (*Valdés et al., 1986*), llegando a un modelo final de tres capas de 15 km sobre el semiespacio (ver figura 7.2). En el segundo trabajo, Campillo y otros emplearon las curvas de dispersión para la velocidad de grupo de las ondas superficiales generadas por nueve sismos de subducción bajo la costa occidental de México. Con base en la desviación estándar presentada por el apilado de los nueve modos fundamentales para la

velocidad de grupo de ondas de Rayleigh correspondientes a todos los eventos, se definió un área de error sobre la cual caen las respuestas sintéticas de todos los modelos solución. Para su selección se hicieron 60,000 perturbaciones aleatorias de un modelo inicial basado en el que fue mencionado arriba (Campillo et al., 1989), para rescatar finalmente un total de 1,000 modelos. La estructura promedio propuesta en este trabajo también se muestra en la figura 7.2.

Relacionados con la parte más superficial de la estructura en el Valle de México, existe una enorme cantidad de trabajos. Gran parte de ellos motivados por la gran amplificación y duración de los terremotos en el valle (Ordaz y Singh, 1992; Singh et al., 1995). Singh y otros (Singh et al., 1995) sugieren que dicha amplificación es causada por la tan baja velocidad de cortante que existe en las capas volcánicas superiores, cuyo espesor ya se estimaba de aproximadamente 2 km.

En 1997, N. Shapiro y compañía (Shapiro et al., 1997) realizaron un experimento para estudiar la propagación de ondas a través del Eje Neovolcánico (MVB) colocando un arreglo temporal de nueve estaciones de banda ancha de forma transversal al mismo. Los datos revelaron que, con relación a las estaciones localizadas al norte del MVB, los registros de la parte sur mostraron una amplificación importante en una ancha banda de frecuencias. Después de realizar una inversión del modo fundamental para la velocidad de grupo de ondas de Rayleigh en la parte sur del MVB, se confirmó la hipótesis formulada dos años antes por Singh y otros acerca de la existencia del complejo depósito volcánico de baja velocidad. De esta manera se determinó una velocidad $\beta = 1.7 \text{ km/s}$ y un espesor de 2 km para la capa superficial. Esta capa de dos kilómetros de profundidad aparece en la figura 7.2 como la franja sombreada superior. Puede verse la enorme cercanía que existe entre esta interfase a 2 km y la primer interfase que posee el modelo final nuestro que se presenta (línea continua).

La profundidad del Moho se ha inferido también a partir de información gravimétrica de la parte central de México (Urrutia-Fucugauchi y Flores-Ruiz, 1996). Una explicación del contenido de este trabajo se presenta en el capítulo anterior, sección 6.6. Ahí se explica porqué la comparación entre los resultados del presente, y los de dicho trabajo donde se modela el campo potencial gravimétrico, no puede llevarse al nivel de la resolución que las funciones de receptor permiten en cuanto a la profundidad local del Moho. Sin embargo, Urrutia y Flores proponen una profundidad promedio de $\sim 42 \text{ km}$ para la zona central del Eje Neovolcánico, que es precisamente la que aparece en la figura 7.2 con la sombra señalada con la letra "f". Al igual que en la parte superficial de la estructura, el

parecido con la profundidad del Moho propuesta por Urrutia y Flores es enorme, esta profundidad es prácticamente la misma que la del modelo obtenido en esta tesis a partir con conjunto de datos más confiable, el de Sudamérica.

Uno de los resultados importantes del presente trabajo, es que nuestra investigación revela una posible irregularidad en la forma del Moho. Por lo tanto, es en cierta medida absurdo reducir dichos resultados a un solo modelo. También hay que tener presente que de la misma manera como aparecen esas diferencias tan marcadas en cuanto a las profundidades del Moho y las velocidades del manto superior en los cuatro modelos finales arrojados por nuestra investigación, se encontró una enorme semejanza entre estos modelos en sus partes media y superior.

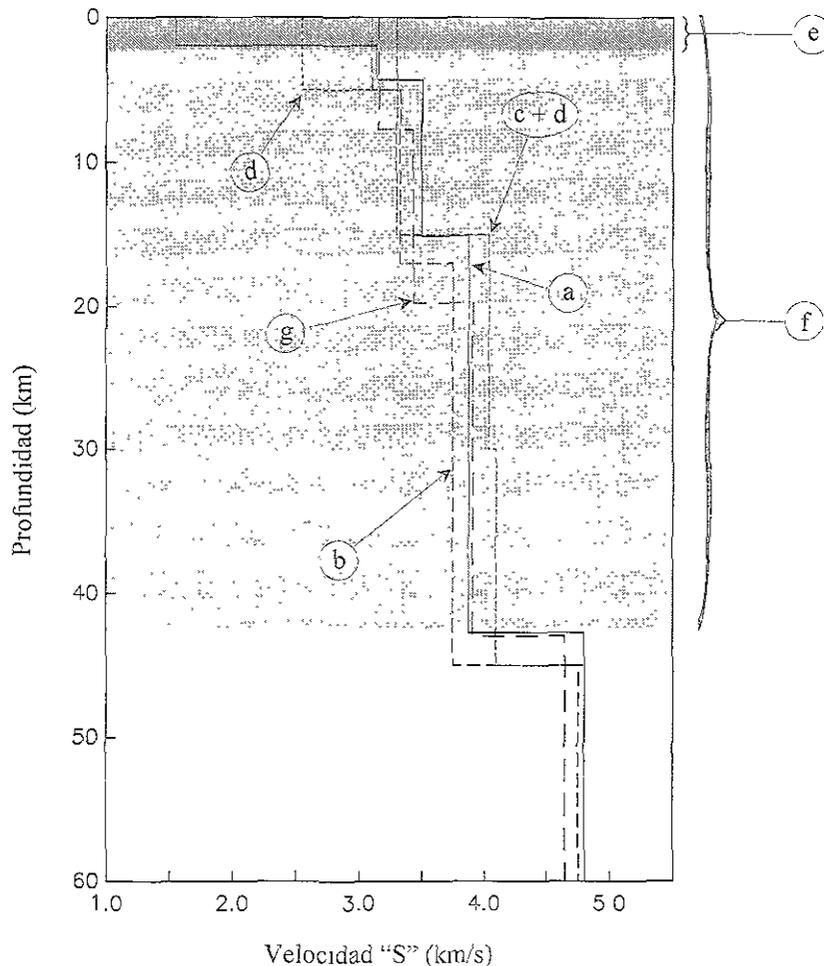


Fig. 7.2 Modelos de corteza propuestos para la parte central de México: a) Modelo propuesto en este trabajo; b) Campillo et al., 1996; c) Campillo et al., 1989; d) Valdés et al., 1986; e) Shapiro et al., 1997; f) Urrutia-Fucugauchi y Flores-Ruiz, 1996, g) Iglesias-Mendoza, 2000. (Consultar texto para explicación).

Paralelamente con este trabajo, Arturo Iglesias-Mendoza realizó su tesis (Iglesias-Mendoza, 2000) modelando las curvas de dispersión para la velocidad de grupo de las ondas de Rayleigh para el trayecto que va de la costa de Guerrero a la estación de Ciudad Universitaria (CUIG). Aparentemente, dicho trabajo se semeja mucho al de Campillo *et al.*, 1996, sin embargo, goza de algunas diferencias que lo hacen ser más confiable. Por un lado, consta de diez eventos apilados, es decir, uno más de los que empleó Campillo. Además, Iglesias-Mendoza realiza un procedimiento de corrección durante el cálculo de las curvas de dispersión (Shapiro y Singh, 1999) que no contemplaron Campillo *et al.* Por último, la diferencia probablemente más importante, es que los métodos de inversión que empleó fueron los mismos dos esquemas de optimización global que se emplearon en el presente trabajo, GA y SA, mientras que el método empleado por Campillo *et al.* parte de un esquema de búsqueda local (Campillo *et al.*, 1996) El modelo final propuesto por Iglesias-Mendoza aparece en la figura 7.2 distinguido con la letra "g", donde se compara con el resto de los modelos descritos anteriormente, incluyendo el que se propone en esta tesis (modelo "a").

7.3 Comparación en Tuzandépetl (TUIG).

Dado el interés económico debido a la abundancia de recursos petroleros que existe en la Planicie Costera del Golfo (PCG), comprendida por los estados de Veracruz, Tabasco y Campeche, Pemex principalmente han realizado o promovido una gran cantidad de trabajos de exploración geológica y geofísica en la región. Sin embargo, poco se sabe de las dimensiones que tiene la extensa capa de sedimentos en la que se encuentran dichos recursos. Algunos trabajos proponen dimensiones entre 10 y 12 km (Camargo-Zanoguera, 1980; Angeles-Aquino, 1994) de espesor de sedimentos (ver figura 7.3).

En 1999, Shapiro y otros (Shapiro *et al.*, 1999) preocupados por el riesgo sísmico que pudiera provocar la existencia de la capa sedimentaria de tal magnitud, llevaron a cabo un estudio empleando la dispersión de ondas superficiales y las funciones de receptor para determinar con más precisión la estructura cortical en esa zona. Además, demostraron que existe una amplificación importante de las ondas dentro de la planicie costera con relación a otras estaciones localizadas fuera de ella así como un bloqueo de las ondas L_g , lo cual provoca un campo de ondas lejano especialmente extraño, atípico en registros de eventos sísmicos regionales.

Los modelos arrojados por las inversiones hechas en el artículo citado anteriormente se muestran en la figura 7.3. Es importante decir que aquel resultado derivado de las funciones de receptor es muy parecido al que se incluye en esta tesis ya que fueron generados ambos por el autor de la misma a partir de los mismos datos.

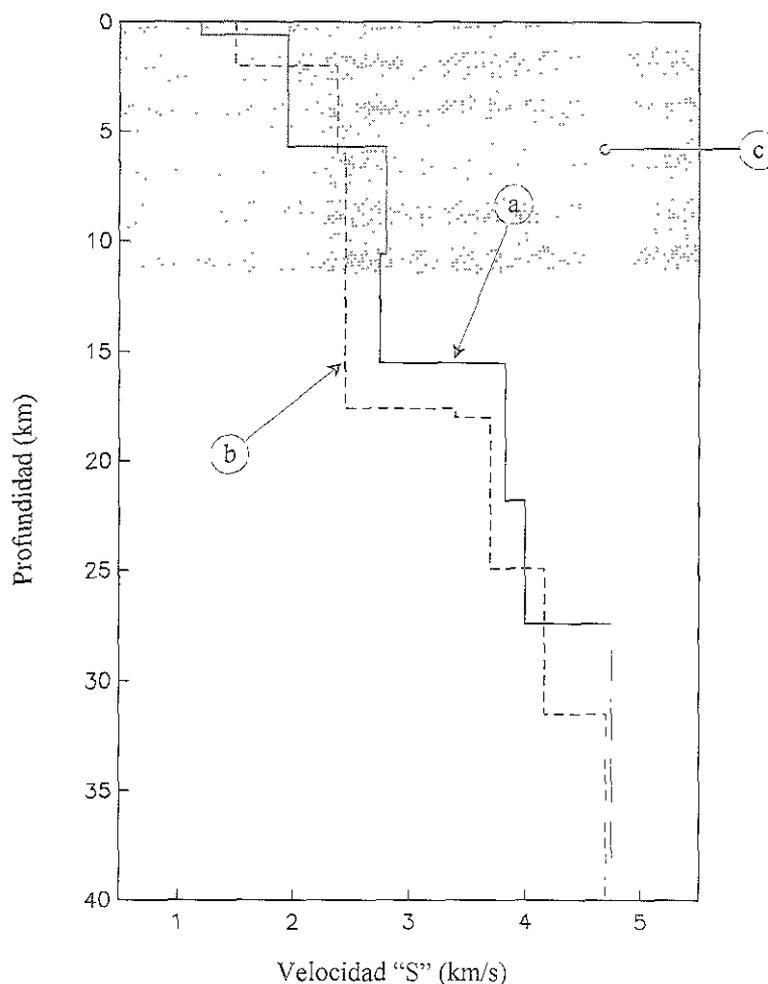


Fig. 7.3 Comparación de tres modelos para la zona de la Planicie Costera del Golfo (PCG): a) Modelo cortical propuesto en este trabajo; b) modelo cortical propuesto por Shapiro et al., 1999; c) Espesor de sedimentos por Camargo-Zanoguera, 1980; (ver texto).

El hecho más importante que revelan estos resultados es que en contraste con lo que se creía antes, el depósito sedimentario responsable de la amplificación de las ondas y del bloque del tren L_g (Shapiro et al., 1999) es considerablemente mayor, aproximadamente entre 6 y 8 km mayor. Además, es en esa cuenca sedimentaria donde yace gran cantidad de recursos petroleros por demás importantes para el país.

Conclusiones y perspectivas.

Tanto en la introducción como en el capítulo 6, que contiene el modelado de las observaciones, se dijo que una de las razones principales que motivaron la realización de este trabajo fue la necesidad de contar con modelos estructurales para la corteza que respondan a la geología local de diferentes sitios en la República Mexicana. Para demostrar que la técnica utilizada en el procesamiento de los registros telúsmicos efectivamente proporciona datos que permiten obtener modelos locales, se llevó a cabo una revisión exhaustiva de dicha técnica. Técnica que lleva a la construcción de las llamadas "funciones de receptor". En ese mismo capítulo se aclararon los efectos que, diferentes escenarios geológicos, pudieran tener sobre los datos.

El primer sitio de estudio, localizado en Zacatecas (estación ZAIG), sirvió como punto de referencia y calibración del método por las condiciones geológicas que lo caracterizan. Tal y como se esperaba, las funciones de receptor obtenidas mostraron simplicidad, sugiriendo una estructura cortical con pocos contrastes acústicos. Revisando los trabajos que existen en la zona, y contrastándolos con las ideas que nuestras observaciones habían revelado, se llegó a una parametrización basada en un modelo de tres capas planas y paralelas sobre el semiespacio. La calidad de los ajustes logrados por los métodos de optimación global, para cada uno de los tres apilados, corroboraron las hipótesis iniciales dando pauta a la realización de una inversión simultánea de las observaciones. El modelo promedio final de dicha inversión, sin mostrar ajustes tan buenos como los anteriores, predice razonablemente bien las fases más prominentes de las funciones observadas. Por esta razón pensamos que a pesar de haberse inferido la posible existencia de una leve inclinación en la segunda interfase de la corteza, el modelo final de capas planas responde satisfactoriamente a las funciones promediadas. Además, dicho modelo se apega mucho a los modelos más recientes que se tenían de la estructura en esta región.

Por otro lado, el análisis hecho en Ciudad Universitaria (estación CUIG) resultó ser mucho más complicado de lo que se esperaba. La dependencia acimutal tan marcada que mostraron las funciones de receptor, inmediatamente nos sugirió un escenario estructural que requeriría de mucho más cuidado para ser entendido. Los resultados que arrojaron las inversiones de los cuatro apilados mostraron que las diferencias tan grandes entre las funciones provenían principalmente de la corteza profunda y del manto superior. Solamente variaciones importantes en la profundidad del Moho y en la velocidad de

propagación " β " del semiespacio, pudieron justificar las observaciones. En cuanto al modelo de corteza, la inserción de una capa superficial aproximadamente de 2 km de espesor con una velocidad baja de propagación correspondiente a los materiales que forman al Eje Neovolcánico (*Shapiro et al., 1997*) en el modelo cortical de Campillo *et al.* (*Campillo et al., 1996*), favoreció enormemente a los procesos de modelado. Los espesores de las tres primeras capas, y las velocidades de propagación de las cuatro capas sobre el semiespacio, resultaron sorprendentemente parecidas en las inversiones individuales de los cuatro apilados. En general, los resultados obtenidos en el corazón del Eje Neovolcánico muestran que, probablemente por la gran actividad asociada a los procesos actuales de vulcanismo y tectonismo, no se pueda hablar de una morfología bien caracterizada de la interfase que define el contacto entre la corteza y el manto. Posiblemente se trate de una región inestable cuya forma y constitución dependen más de los procesos recién mencionados, que de una compensación isostática o de otros agentes menos determinantes. A pesar de todo, si se considera el modelo promedio del apilado más consistente y numeroso, el de Sudamérica, el parecido con los modelos preexistentes es muy grande.

Con relación al análisis realizado en la tercera y última estación, TUIG, ubicada en la Planicie Costera del Golfo de México, se había dicho en el capítulo sexto que existe poca información sobre la estructura cortical en dicha zona a pesar de la amplificación que ahí sufren las ondas. La explicación que hasta ahora se ha dado de este fenómeno es la presencia de un enorme depósito sedimentario que abarca más de la mitad del ancho de la corteza (*Shapiro et al., 1999*). El modelo final obtenido define con precisión el espesor de dicho paquete sedimentario en alrededor de 16 km, magnitud que anteriormente se creía mucho más pequeña.

Si se comparan entre sí las funciones de receptor observadas en las tres estaciones, la función correspondiente a la estación TUIG contrasta con las demás por el numeroso contenido de fases que presenta. Esto se debe a que el filtro con el que fue construida (con $T_p = 2.5$ s; ver capítulo 3 sección iii), hace que la función sea susceptible a rasgos estructurales de menor escala. En otras palabras, permite tener mayor resolución durante los procesos de modelado. Esto se hizo precisamente para conocer con más detalle los espesores de los depósitos sedimentarios, y de la corteza.

En general, si se comparan los modelos estructurales que resultaron de este trabajo, correspondientes a cada uno de los tres sitios estudiados, las profundidades del Moho varían de la siguiente manera en ZAIG, ~37 km, en CUIG, ~42 km; y en TUIG, ~27 km. Si

recordamos los escenarios geológicos donde se encuentra cada uno, es notable la correspondencia que existe entre dichas profundidades y sus localizaciones dentro del continente. En las estaciones ZAIG y CUIG, ubicadas una en el altiplano central casi en la Sierra Madre Occidental y la otra al centro del Eje Neovolcánico, respectivamente, la profundidad del Moho, mayor de 35 km en ambos casos, contrasta con la de la estación más cercana a la costa, TUIG. Esto es congruente con la idea de un adelgazamiento de la corteza continental hacia sus linderos. Sin embargo, es sabido que el Golfo de México, al tratarse de un margen continental pasivo tipo Atlántico, sufre un adelgazamiento de la corteza continental paulatino mar adentro, a lo largo de una extensión mayor a 70 km (Vera-Torres, 1994). En consecuencia, los ~27 km de espesor de la corteza en Tuzandépetl no son excesivos.

Por otro lado, existe una correlación entre las tres capas que conforman la corteza en Zacatecas y las tres primeras capas en Ciudad Universitaria, sin contar la más superficial de ~1.97 km correspondiente al Eje Neovolcánico. Se observa un leve engrosamiento conjunto de las dos inferiores en CUIG de unos ~3.5 km. El resto de la diferencia entre ambos sitios es debido a cambios en las geologías someras más locales.

Una de las posibles líneas a seguir en el análisis de los registros en Ciudad Universitaria es emplear un modelo matemático, como problema directo en los procesos de inversión, que considere la existencia de interfases inclinadas. Esto último atendiendo a la posibilidad de que el Moho sea una superficie plana y con cierta pendiente, idea que consideramos poco probable y bastante simplista.

Pensando en las tres estaciones, y en otras futuras que pudiera haber, es preciso incrementar la base de datos para contar con observaciones más fiables.

Con el fin de comprobar la eficacia de los dos métodos de optimación global, GA y SA, se llevó a cabo una prueba sintética lo más apegada a los procesos de inversión realizados con los datos. Los resultados de ésta fueron muy exitosos. Después, al hacer las inversiones para cada estación, se vio que invariablemente las soluciones arrojadas por ambos métodos eran esencialmente las mismas. Estos hechos confirmaron la validez de los algoritmos ante el problema inverso de las funciones de receptor. No hay que olvidar que, como se aclaró en los capítulos dedicados a la teoría de inversión y a dichas funciones, el problema es altamente no lineal con solución no única. Por ello, en este trabajo quedó demostrado que el modelado inverso de un problema con esas características no rebasa las facultades de los esquemas numéricos empleados. Sin embargo, este trabajo reafirmó un propósito que hacía tiempo queríamos llevar a cabo en

el Centro de Investigación Sísmica de la Fundación Javier Barros Sierra: crear, a partir de ambos algoritmos, GA y SA, un programa que reuniera todas sus cualidades. Es decir, un método de optimación global que gozara, por un lado, de los mecanismos genéticos de la evolución natural de las especies, y por el otro, de un proceso de enfriamiento paulatino que empleara la distribución probabilística de Boltzman (criterio de Metrópoli) para procurar que los modelos probados adquirieran su estado de menor energía.

En este momento, al término del trabajo, ya se tiene una primera versión del algoritmo híbrido. Uno de los objetivos que se persiguen con éste es reducir el tiempo de cómputo explorando todo el espacio de modelos por grande que sea. La idea central es contar con un método de optimación global que cumpla de la manera más eficiente el papel que jugaron siempre de forma paralela los dos métodos de los cuales se desprende. Así se evitaría en adelante, realizar procesos de modelado análogos, obteniendo mejores resultados.

En términos generales, la estructura del método híbrido es la siguiente. Se pretende aprovechar la fuerza que posee Algoritmos Genéticos durante las primeras iteraciones con una población pequeña de modelos, para mejorar rápidamente la función de costo del mejor de ellos. Al término de esto, pasando el mando al esquema de Cristalización Simulada, se haría que, conforme itera un cantidad de veces pequeña, se conforme una nueva población de modelos con la misma dimensión que la inicial, pero con una discretización completamente aleatoria de los parámetros. Esta nueva población sería devuelta a GA para que sea repetido el ciclo. Así queda resuelta una limitación importante de GA: que los parámetros de los modelos puedan tomar exclusivamente valores definidos por una discretización deliberada inicialmente. Además, las probabilidades de supervivencia que se les asigna a los modelos durante la selección en GA depende, en el nuevo algoritmo, de la temperatura actual del proceso de acuerdo con la distribución de Boltzman (criterio de Metrópolis). De esta manera, al disminuir la temperatura, tanto en la parte correspondiente a GA como en la de SA, los modelos aceptados responderán al estado en el que se encuentre el proceso.

Por otro lado, cuando se trate de ajustar observaciones que contengan incertidumbre debido al error en las mismas, se emplearán los criterios que se usaron en esta investigación, expuestos en el capítulo sexto, con una variante propuesta por Lomax y Snieder (*Lomax y Snieder, 1995*). Esta variante consiste en intercambiar la función de costo de aquellos modelos que logren mejorar un valor umbral del desajuste definido previamente, por dicho valor umbral. Con esto se garantiza que el método agote todas las

HEMEROGRÁFICAS

- Ammon, C. J. (1985). Time domain teleseismic P waveform modeling and the crust and upper mantle structure beneath Berkeley, California. M. S. Thesis, State University of New York, Binghamton, pp. 97.
- Ammon, C. J. (1991). The isolation of receiver effects from teleseismic P waveforms. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 81, 2504-2510.
- Ammon, C. J. y J. E. Vidale. (1993). Tomography without rays. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 83, 509-528.
- Ammon, C. J., G. E. Randall, y G. Zandt. (1990). On the nonuniqueness of receiver function inversions. *J. Geophys. Res.*, 95, 15303-15318.
- Ángeles-Aquino, H. J., J. Reyes-Núñez, J. M. Quezada-Muñetón, y J. J. Meneses-Rocha. (1994). Tectonic evolution, structural styles, and oil habitat in Campeche Sound, Mexico. *Transaction of the Gulf Coastal Association of Geological Societies*, XLIV.
- Baker, G. E., J. B. Minster, G. Zandt, y H. Gurrola. (1996). Constraints on crustal structure and complex Moho topography beneath Piñon Flat, California, from teleseismic receiver functions. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 86, 1830-1844.
- Berg, E. (1990). Simple convergent genetic algorithm for inversion of multiparameter data: 60th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1126-1128.
- Berteussen, K. A. (1977). Moho depth determination based on spectral ratio analysis of NORSAR long-period P waves. *Phys. Earth Planet Inter.*, 31, 313-326.
- Bullen, K. E. y Bolt, B. A. (1985). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge Univ. Press, New York.
- Bump, H. A., y A. F. Sheehan. (1998). Crustal thickness variations across the northern Tien Shan from teleseismic receiver functions. *Geophys. Res. Lett.*, 25, 1055-1058.
- Burdick, L. J. y C. A. Langston. (1977). Modeling crustal structure through the use of converted phase in teleseismic body-wave forms. *Bull. Seismol Soc. Am.*, 67, 677-691.
- Burdick, L. J. y D. V. Helmberger. (1974). Time functions appropriate for deep earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 64, 1419-1428.
- Camargo-Zanoguera, A. (1980). Aplicación de la gravimetría y magnetometría a la exploración petrolera de las plataformas continentales mexicanas. *Boletín de la Asociación Mexicana de Geólogos Petroleros*

- Campillo M., S. K. Singh, N. Shapiro, J. Pacheco y R. B. Herrmann. (1996). Crustal structure south of the Mexican volcanic belt, based on group velocity dispersion. *Geofísica Internacional*, 35, 361-370.
- Campillo, M., J. C. Gariel, K. Aki y F. J. Sánchez-Sesma. (1989). Destructive strong ground motion in Mexico City: source, site and path effects during the great 1985 Michoacán earthquake. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 79, 1718-1735.
- Campos-Enriquez, J. O., T. Kerdan, D. J. Morán-Zenteno, J. Urrutia-Fucugauchi, E. Sánchez-Castellanos, R. Alday-Cruz. (1994). Estructura de la litósfera superior a lo largo del Trópico de Cancer (abs): *Unión Geofísica Mexicana, Boletín Informativo, GEOS*, 12, 75-76.
- Cassidy, J. F. (1992). Numerical experiments in broadband receiver function analysis. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 1453-1474.
- Constable, S. C. R., R. L. Parker, y C. G. Constable. (1987). Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52, 289-300.
- Courboux, F., M. A. Santoyo, J. F. Pacheco, y S. K. Singh. (1997). The 14 September 1995 (M=7.3) Copala, Mexico, earthquake: a source study using teleseismic, regional, and local data. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 87, 999-1010.
- Dey-Sarkar, S. K. y R. A. Wiggins. (1976) Source deconvolution of teleseismic *P* wave arrivals between 14° and 40°. *J. Geophys. Res.*, 81, 3633-3641.
- Dziewonski, A. M., y Anderson. D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet* 25, 297-356.
- Fix, J. E. (1975). The crust and upper mantle of central Mexico. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 43, 453-499.
- Gallagher, K., M. Sambridge, y G. Drijkoningen (1991). Genetic algorithms: an evolution from Monte Carlo methods for strongly non-linear geophysical optimization problems. *Geophys. Res. Lett.*, 18, 2177-2180.
- Gombert, J. S., K. F. Priestley, T. G. Masters y J. N. Brune. (1988). The structure of the crust and upper mantle of northern Mexico. *Geophysical Journal*, 94, 1-20
- Haskell, N. A. (1962). Crustal reflection of plane *P* and *SV* waves. *J. Geophys. Res.*, 67, 4751-4767.
- Helmberger, D. y R. A. Wiggins. (1971). Upper mantle structure of midwestern United States. *J. Geophys. Res.*, 67, 3229-3245.

- Holland, J. H. (1992). Genetic Algorithms, -computer programs that "evolve" in ways that resemble even their creators do not fully understand. *Scientific American*, July.
- Jacobsen, B. Holm. (1987). A case for upward continuation as a standard separation filter for potential-field maps. *Geophysics*, 52, 1138-1148.
- Jordan, T. H. y L. N. Frazer. (1975). Crustal and upper mantle structure from *Sp* phases. *J. Geophys. Res.*, 80, 1504-1518.
- Kennett, B. L. y Engdahl, E. R. (1991). Travel times for global earthquake location and phase identification. *Geophys. J.* 105, 427-465.
- Kennett, B. L. y M. S. Sambridge. (1992). Earthquake location – genetic algorithm for teleseisms. *Phys. Earth. Planet. Interiors*, 75, 103-110.
- Kennett, B. L. N., (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt, y M. P. Vecchi. (1983). Optimization by simulated annealing *Science*, 220, 671-680.
- Kurita, T. (1973). A procedure for elucidating fine structure of the crust and upper mantle from seismological data. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 63, 189-204.
- Langston, C. A. (1977). The effect of planar dipping structure on source and receiver responses for constant ray parameter. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 67, 1029-1050.
- Langston, C. A. (1979). Structure under Mount Rainier, Washington, inferred from teleseismic body waves. *J. Geophys. Res.*, 84, 4749-4762.
- Langston, C. A. (1981). Evidence for the subducting lithosphere under southern Vancouver Island and western Oregon from teleseismic *P* waves conversions. *J. Geophys. Res.*, 86, 3857-3866.
- Lapp, D. B., R. S. Crosson, y T. J. Owens. (1990). *P*-waveform analysis for local subduction geometry south of Puget Sound, Washington. *Pure App. Geophys.*, 133, 349-365.
- Lines, L. R. y S. Treitel. (1984). Tutorial a review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophysical Prospecting*, 32, 159-186.
- Lomax, A y R. Snieder. (1995). The contrast in upper mantle shear-wave velocity between the East European Platform and tectonic Europe obtained with genetic algorithm inversion of Rayleigh-wave group dispersion. *Geophys. J. Int.*, 123, 169-182.
- Metropolis, N., A. Rosenbluth, M. Teller, y E. Teller. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21, 1087-1092.

- Molina-Garza, R. y J. Urrutia-Fucugauchi. (1993). Deep crustal structure of central Mexico derived from interpretation of Bouguer gravity anomaly data. *Journal of Geodynamics*, 17, 181-201.
- Nieto-Samaniego A. F., L. Ferrari, S. A. Alaniz-Álvarez, G. Labarthe-Hernández, y J. Rosas-Elguera. (1999). Variation of Cenozoic extension and volcanism across the southern Sierra Madre Occidental volcanic province, México. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 111, 2-18.
- Ordaz, M. y S. K. Singh. (1992). Source spectra and spectral attenuation of seismic waves from Mexican earthquakes, and evidence of amplification in the hill zone of Mexico City. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 24-43.
- Owens, T. J. y R. S. Crosson. (1988). Shallow structure effects on broadband teleseismic P waveforms. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 78, 96-108.
- Owens, T. J., G. Zandt, y S. R. Taylor (1984). Seismic evidence for an ancient rift beneath the Cumberland Plateau, Tennessee: a detailed analysis of broadband teleseismic P waveforms. *J. Geophys. Res.*, 89, 7783-7795.
- Owens, T. J., R. S. Crosson, y M. A. Hendrickson. (1988). Constraints on the subduction geometry beneath western Washington from broadband teleseismic waveform modeling. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 78, 1319-1334.
- Owens, T. J., S. R. Taylor, y G. Zandt. (1983). Isolation and enhancement of the response to local seismic structure from teleseismic P-waveforms. Rep. UCID-19809, 33 pp., Lawrence Livermore Natl. Lab., Livermore, Calif.
- Owens, Thomas J. (1987). Crustal structure of the Adirondacks determined from broadband teleseismic waveform modeling. *Journal of Geophysical Research*. 92, 6391-6401.
- Ozalaybey, S., M. K. Savage, A. F. Sheehan, J. N. Louie, y J. N. Brune. (1997). Shear-wave velocity structure in the Northern Basin and Range Province from the combined analysis of receiver function and surface waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 87, 183-199.
- Pacheco, J. F. y S. K. Singh (1998). Source parameters of two moderate Mexican earthquakes estimated from a single-station, near-source recording, and from MT inversion of regional data: a comparison of the results. *Geofísica Internacional*, 37, 95-102.
- Pardo, M. y G. Suárez. (1995). Shape of the subducted Rivera and Cocos plates in southern Mexico: Seismic and tectonic implications. *J. Geophys. Res.*, 100, 12,373-12,373

- Phinney, R. A. (1964). Structure of the earth's crust from spectral behavior of long-period body waves. *J. Geophys. Res.*, 69, 2997-3017.
- Pullammanappallil, S. K. y J. N. Louie. (1994). A generalized simulated-annealing optimization for inversion of first-arrival times. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 84, 1397-1409.
- Rothman, D. H. (1985). Nonlinear inversion, statistical mechanics and residual statics estimation. *Geophysics*, 50, 2784-2796.
- Rothman, D. H. (1986). Automatic estimation of large residual statics corrections. *Geophysics*, 51, 332-446.
- Sambridge, M. y G. Drijkoningen. (1992). Genetic algorithms in seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.*, 109, 323-342.
- Sen, M. K. y P. L. Stoffa. (1991). Nonlinear one-dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing. *Geophysics*, 56, 1624-1638.
- Sen, M. K. y P. L. Stoffa. (1992). Rapid sampling of model space using genetic algorithms: examples from seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.*, 108, 281-292.
- Sen, M. K., B. B. Battacharya, y P. L. Stoffa. (1993). Nonlinear inversion of resistivity sounding data. *Geophysics*, 58, 1-12.
- Shapiro, N. M., M. Campillo, A. Paul, S. K. Singh, D. Jongmans, y F. J. Sánchez-Sesma. (1997). Surface wave propagation across the Mexican Volcanic Belt and the origin of the long-period seismic-wave amplification in the Valley of Mexico. *Geophys. J. Int.*, 128, 151-166.
- Shapiro, N. M., J. Pacheco, S. K. Singh, A. Camargo-Zanoguera, y V. M. Cruz-Atienza. (1999). Seismic wave propagation across de gulf coastal plain of Veracruz, Tabasco, and Campeche (Mexico): crustal structure, Lg blockage, and seismic-wave amplification (en proceso).
- Shapiro N. M. y S. K. Singh. (1999). A systematic error in estimating surface-wave group-velocity dispersion curves and a procedure for its correction. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 89, 1138-1142.
- Shaw, P. R. y J. A. Orcutt. (1985). Waveform inversion of seismic refraction and applications to young Pacific crust. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 82, 375-414.
- Shibutani, T., M. Sambridge y B. Kennett. (1996). Genetic algorithm inversion for receiver functions with application to crust and uppermost mantle structure beneath Eastern Australia. *Geophys. Res. Lett.*, 23, 1829-1832.
- Singh K. S., E. Mena, y R. Castro. (1988). Some aspects of the source characteristics and round motion amplification in and near Mexico City from acceleration data of the

- September, 1985, Michoacan, Mexico earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 78, 451-477.
- Singh K. S., R. Quaas, M. Ordaz, F. Mooser, D. Almora, M. Torres y R. Vázquez. (1995). Is there truly a "hard" rock site in the Valley of Mexico?. *Geophys. Res. Lett.*, 22, 481-484.
 - Stoffa, P. y M. K. Sen. (1992). Seismic waveform inversion using global optimization. *J. Seismic. Exploration*, 1, 9-27.
 - Stoffa, P. L. y M. K. Sen. (1991). Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms: inversion of plane-wave seismograms. *Geophysics*, 56, 1794-1810.
 - Urrutia-Fucugauchi, J. y J. H. Flores-Ruiz. (1996). Bouguer gravity anomalies and regional crustal structure in central Mexico. *Int. Geology Review*, 38, 176-194.
 - Valdés, C. M., W. D. Mooney, S. K. Singh, R. P. Mayer, C. Lomnitz, J. H. Luetgert, B. T. Hellsley, B. T. R. Lewis y M. Mena. (1986). Crustal structure of Oaxaca, Mexico from seismic refraction measurements. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 76, 547-564.
 - Valdés-González, C. y R. P. Mayer. (1996). Seismic structure between the Pacific coast and Mexico City from the Petatlán earthquake ($M_s=7.6$) aftershocks. *Geofísica Internacional*, 35, 377-401.
 - Vasuadevan, K., W. G. Williams, y W. G. Laidlaw. (1991). Simulated annealing statics computation using an order-based energy function. *Geophysics*, 56, 1831-1839.
 - Yamanaka, H. y H. Ishida. (1996). Application of genetic algorithms to an inversion of surface-wave dispersion data. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 86, 436-444.
 - Zandt, G. y C. Ammon. (1995). Continental crust composition constrained by measurements of crustal Poisson's ratio. *Nature*, 374, 152-154.
 - Zhang, J., y C. A. Langston (1995). Dipping structure under Dourbes, Belgium, detected by receiver function modeling and inversion. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 85, 254-268.
 - Zhou, R., F. Tajima, y P. L. Stoffa. (1995). Application of genetic algorithms to constrain near-source velocity structure for the 1989 Sichuan Earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 85, 590-605.

BIBLIOGRÁFICAS

- Aki, K. y P.G. Richards. Quantitative seismology, theory and methods. Edit. W. H. Freeman and Company, New York, U.S.A., p.p. 130-152, 1980.

- Antoine, J. W., y T. E. Pyle. "Crustal studies in the Gulf of Mexico", Tectonophysics, v. 10, p.p. 477-494, 1970.
- Brigham, E. O. The Fast Fourier Transform. Edit. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.E.A., 1974.
- de la Fuente Duch, M. F., J. M. Mena, y C. L. Aiken. Cartas Gravimétricas de la República Mexicana. Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Geofísica e Instituto de Geología, México D. F., 1994.
- Feng, J., R. T. Bufler, y M. A. Kominz. "Laramide orogenic influence on late Mesozoic-Cenozoic subsidence history, western deep Gulf of Mexico basin", Geology, v.22, p.p. 359-362, 1994.
- Fung, Y. C. A first course in continuum Mechanics. Edit. Prentice-Hall, 2nd ed., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1977.
- Gerald, C. F. Applied numerical analysis. Edit. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A., p.p. 114-122, 1978.
- Goldberg, D. E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Edit. Addison Wesley Publishing Company, U.S.A., 1989.
- Hardin, G. "Notes of Cenozoic sedimentation in the Gulf Coastal geosyncline", Geology of the Gulf Coastal and Central Texas and guidebook of excursions, Houston Geological Society, Houston, USA, p.p. 1-153, 1962.
- Holland, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan Press, U.S.A., 1975.
- Iglesias-Mendoza, A. (2000). Aplicación de Algoritmos Genéticos y Simulated Annealing para invertir la dispersión de ondas superficiales: modelos promedio de la corteza terrestre en el sur de México Tesis Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Menke, W. Geophysical data analysis: discrete inverse theory. Edit. Academy Press, Orlando, Florida, U.S.A., 1984.
- Morán Zenteno, Dante J., y colaboradores. Geología de la República Mexicana. UNAM-INEGI, 2da ed., México D. F., 1984.
- Salvador A. "Origin and development of the Gulf of Mexico Basin", The Gulf of Mexico Basin, Geological Society of America, v. J, p.p. 389-494, 1991.
- Solomon, E. P., C. A. Ville, y P. W. Davis. Biología. Edit. Interamericana, México D.F., México, p.p. 1101-1106, 1987.

- Stanley H., Ward. Geotechnical and environmental geophysics. Investigations in geophysics no. 5, V. 1, p.p. 116-123, 1990.
- Vera-Torres, Juan A. Estratigrafía. Principios y métodos. Edit. Rueda, p.p. 676-679, Madrid, España, 1994.
- Wolford, J., G. M. Smith, y M. L. James. Applied numerical methods for digital computation with FORTRAN. Edit. International Textbook Company, Scranton, Pennsylvania, p.p. 184-221, 1967.
- Kulhánek, Ota. Introduction to digital filtering in geophysics. Edit. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, p.p. 9-19, 1976.
- Sheriff, R. E. y L. P. Geldart. Exploración sísmológica. Historia, teoría y obtención de datos. V. 1, Edit. Noriega Limusa, México, p.p. 51-70, 1991.
- Levi, Enzo. Elementos de mecánica del medio continuo. Edit. Limusa, México, 3^{era} ed., 1977.

Agradecimientos

En ocasiones nos sentimos incapaces de expresar lo importante que resulta la presencia de algunas personas en ciertos momentos de nuestras vidas. Sobre todo si se trata de períodos en los que uno comienza a descubrirse como individuo y a reconocer aspectos de la vida que la hacen fascinante. En esas etapas, que son estrictamente personales, dichos individuos cobran una relevancia muy especial. Dejan de ser colaboradores y pasan a ser entrañables amigos. Es por eso que quiero utilizar el colofón de este largo trabajo para expresar mi más sincero y profundo agradecimiento, en primer lugar, a dos grandes pensadores de la sismología y de la vida que, incondicionalmente desde el primer momento en que acudí a ellos, me brindaron su más comprometido y bienintencionado apoyo. Me refiero a Javier Pacheco Alvarado y Nicolai Shapiro. Dos personas a quienes me atrevo a calificar, desde una perspectiva muy personal, como entrañables amigos. Pensando en las mismas razones que acabo de dar hace un momento, quiero expresar también el honor que representa para mí contar con la atención y confianza del Dr. Sri Krishna Singh que, hoy por hoy, significa una de mis mayores motivaciones.

Aludiendo a ese grupo tan reducido de personas que determinan fuertemente nuestras vidas, debo decir que, sin la incorruptible y grandísima lealtad de mi amigo Arturo Iglesias, que desde hace muchos años a mantenido a mi lado, no habría podido alcanzar, sin duda alguna, lo poco o mucho que hasta ahora he conseguido. De la misma manera, las extensas y profundas disertaciones que he celebrado frente a Carlos Ortiz, sobre el sentido que tiene lo que hacemos en nuestras vidas y en especial nuestra labor científica, han hecho que mis esfuerzos cobren otra dimensión. También, muchas gracias amigo.

En lo anterior me referí claramente a los hallazgos de vida más importantes que durante mis últimos años de estudio he tenido. Ahora, para cerrar con los nombres que más directamente estuvieron detrás de este trabajo, faltaría mencionar la profundísima gratitud y entereza que he sentido, y sentiré por siempre, gracias al apoyo incondicional y absoluto de mis tres familiares queridos y de mi abuela.

Por otro lado, también quiero agradecer el apoyo que me brindó el Centro de Investigación Sísmica, lugar donde incurrí por primera vez al mundo de la investigación; al Servicio Sismológico Nacional por facilitarme todos los registros sísmicos que utilicé para el trabajo; a todo el Departamento de Sismología del Instituto de Geofísica por abrirme las puertas al ofrecirme un espacio de trabajo extraordinario, y por último, a la Facultad de

Ingeniería que me aportó, durante la carrera, gran parte de los conocimientos con los que pude llevar a cabo este trabajo.

Debo decir que esta investigación fue parcialmente patrocinada por el CONACyT, a través del proyecto 26184-T desarrollado en el Centro de Investigación Sísmica durante los últimos años.