00365

1

2ej

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Σ-PRODUCTOS DE ESPACIOS TOPOLOGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

JOSE JUAN ANGOA AMADOR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

MEXICO, D. F. 1999

A mis padres

A ti que con ausencias y presencias
construiste nuestro lugar

Agradecimientos

Es para mi importante, resaltar el trabajo del maestro y amigo Ángel Tamaríz, ya que no sólo logró formar un grupo de trabajo en nuestra universidad, sino que construyó una fuerte ralación entre nuestras universidades (UNAM, UAP).

También es importante notar que mi trabajo es resultado de un trabajo colectivo. Agradezco a Manuel, Armando , Agustín y Fidel, miembros de este grupo de trabajo, su tiempo gastado en mis dudas.

A mis sinodales: Oleg Okunev, Mijail Tkachenko, Sergey Antonyan, Ángel Tamaríz, Salvador García, Agustín Contreras, Fidel Casarrubias, que con gran responsabilidad y sabiduria revisaron y propusieron importantes mejoras a mi trabajo.

Contenido

Introducción

En el año de 1959 H.H. Corson [10] publicó un resultado clásico, a saber: Los Σ-producto de espacios métricos separables son colectivamente normales. Posteriormente Gul'ko [17] y Rudin demuestran que se pueden tomar cualesquiera espacios métricos y llegar a la misma conclusión. En los trabajos de Kombarov [25], [26], encontramos condiciones en espacios métricos generalizados (p-espacios paracompactos), y Čech-completos paracompactos, para concluir la normalidad en los Σ-productos de este tipo de familias. Así llegamos a los teoremas de Yajima, en donde tenemos resultados análogos pero con familias de Σ-espacios paracompactos o espacios semi-estratificables. Sin embargo, en el proceso de llegar a estos resultados, se obtienen interesantes resultados acerca de la naturaleza de estos subespacios densos de los productos topológicos. Es nuestro interés presentar no sólo los resultados clásicos mencionados arriba, sino otros de diferente tipo, en los que la naturaleza de los Σ-productos es presentada. Es conocido que ningún Σ-producto no trivial es paracompacto (ver teorema 4.2), sin embargo es interesante buscar condiciones para obtener propiedades cercanas. En el primer capítulo de este trabajo presentamos tanto la notación como los resultados básicos que nos serán útiles en el posterior desarrollo del mismo. Una rápida mirada a este capítulo nos muestra el amplio rango de resultados que se deben revisar y entender, estos van desde propiedades de funciones cardinales hasta propiedades generales de normalidad, normalidad colectiva, paracompacidad y otros.

En el segundo capítulo, desarrollamos el cálculo de algunas funciones cardinales para Σ-productos. En este capítulo, las evaluaciones desarrolladas son conocidas en la literatura matemática, sin embargo una presentación exhaustiva de ellas no se encontró. Es de notar la coincidencia de algunas de estas evaluaciones con las correspondientes al producto; además de que dichas evaluaciones dependen sólo de la evaluación correspondiente en los factores y el cardinal del conjunto que indica la familia en cuestión que se multiplica. En el tercer capítulo, analizamos algunos teoremas de factorización que nos permitirán llegar a interesantes expresiones de la Čech-compactación y la real-compactación de un Σ-producto. Dichas expresiones muestran que bajo ciertas condiciones sobre los factores, la Čech-compactación y la real-compactación de un Σ-producto coinciden con el producto de la familia. Además en este capítulo analizamos algunas propiedades de seudocompacidad en Σ-productos, obteniendo que con factores compactos, los Σ-productos son numerablemente compactos y en particular son seudocompactos. En el cuarto y sexto capítulo de este trabajo desarrollamos los resultados clásicos de Kombarov y Yajima, así como un interesante teorema de Lecheng Yang en donde la condición para llegar a la normalidad es a través de la paracompacidad numerable y no con la estrechez numerable como es el caso de los teoremas de Kombarov y Yajima.

En el capítulo cuarto también mostramos algunas conocidas propiedades de los Σ-productos a saber: Ningún Σ-producto no trivial es paracompacto, ya que todos los Σ-productos no triviales contienen a $[0, \omega_1)$ como subespacio cerrado. En este capítulo cuatro, iniciamos una larga cadena de teoremas en los que se busca dar condiciones para alcanzar la normalidad o la normalidad colectiva o ambas en un Σ-producto. Así pues demostramos un teorema de Kombarov (teorema 4.9) que nos permite concluir, como un caso particular, el teorema de Gul'ko-Rudin. Creo impotante hacer notar que en este teorema, y los restantes del capítulo sexto, se demuestran para familias de espacios paracompactos, las cuales tienen la propiedad que sus caras numerables también son paracompactos y pertenecen a la misma familia.

En el capítulo sexto intentamos presentar unificadamente la notación de todos los teoremas. Estos son presentados en orden de publicación, lo cual nos permite observar analogías y diferencias, pero sobre todo observar el desarrollo de los conceptos. Presenta singular dificultad entender las construcciones realizadas en estos teoremas ya que en su publicación original se obvian algunos pasos en las demostraciones; para una mejor comprensión de éstas se detallaron estos pasos realizando las construcciones omitidas.

Finalmente en el capítulo quinto desarrollamos sendos teorema de Kombarov y otro de Yajima en donde la condición de separabilidad ó separabiliad hereditaria nos provee condiciones para obtener normalidad o normalidad colectiva en Σ-productos. Además, en este mismo capítulo, desarrollamos un interesante ejemplo de G. Gruenhage y T. Daniel [**11**], en donde se muestra que no basta tener caras numerables paracompactas perfectamente normales y primero numerables para asegurar que los Σ-productos sean normales. Es de resaltar, la contrastante sencillez de los conceptos involucrados en este ejemplo con la gran importancia de él.

Mencionaremos que los resultados que tratan directamente propiedades de los Σ-productos los desarrollamos de la manera más detallada posible, no así con los resultados que sólo usamos para justificar alguna argumentación que presupone algún resultado de topología general o un resultado especializado pero que no involucra directamente *a los Σ-productos.*

El objetivo principal de este trabajo es presentar de manera organizada y sistemática los resultados clásicos de los Σ-productos y otros no tan clásicos, de tal manera que se ostente una visión básica y general del tema. Pero además, resolvemos algunos problemas cuya solución no encontramos en la literatura afín, como es el caso de las funciones cardinales en Σ-productos.

CAPÍTULO 1

Propiedades elementales de los Σ-productos

1. Definiciones Básicas

En este capítulo desarrollaremos las propiedades elementales de los Σ-productos. Propiedades que usaremos a lo largo de todo el trabajo. También estableceremos las definiciones y notaciones básicas, que serán necesarias posteriormente.

Todos nuestros espacios serán al menos T_1 y tendrán más de un elemento. Denotaremos por *Card* a la clase de los números cardinales. Si α es un cardinal infinito denotamos como α^+ al cardinal sucesor de α. Es decir, α^+ indicará al mín $\{\gamma \in Card : \gamma > \alpha\}$. Sean δ y λ ordinales límites, y $\{\gamma_\nu : \nu < \delta\}$ una sucesión creciente de ordinales en λ. Diremos que la sucesión $\{\gamma_\nu : \nu < \delta\}$ es cofinal en λ si y sólo si $\cup_{\nu<\delta}\gamma_\nu = \lambda$. Ahora bién, denotamos $\mathrm{cf}(\lambda)$ como la cofinalidad de λ que defininmos como

$$\text{mín}\{\delta : \text{existe una sucesión creciente } \{\gamma_\nu : \nu < \delta\} \text{ cofinal en } \lambda\}.$$

Un cardinal infinito α es regular si $\mathrm{cf}(\alpha)= \alpha$ y es singular si no es regular. Si α y β son ordinales tales que $\alpha \leq \beta$, entonces

$$\begin{aligned}
[\beta]^{<\alpha} &= \{A \subseteq \beta : |A| < \alpha\},\\
[\beta]^{\leq\alpha} &= \{A \subseteq \beta : |A| \leq \alpha\},\\
[\beta]^{\alpha} &= \{A \subseteq \beta : |A| = \alpha\}.
\end{aligned}$$

Si A es un conjunto denotaremos como $P(A)$ al conjunto potencia de A. Si α es un cardinal infinito, definiremos al logaritmo de α (y lo denotaremos como $\log(\alpha)$) como el mínimo cardinal β tal que $\alpha \leq 2^\beta$. Esta definición es útil para expresar la densidad del producto de una familia de espacios en función del conjunto de índices y las densidades de los factores (ver teorema 1.21).

Denotaremos con *Top* a la clase de espacios topológicos, y en lo que sigue el termino espacio, salvo si se aclara otra cosa, significara espacio topológico. Una función cardinal es una función $f : Top \to Card$, tal que si X es homeomorfo a Y, entonces $f(X) = f(Y)$. A continuación definimos las funciones cardinales que usaremos en este trabajo.

Si X es un espacio, $|X|$ denotará a la cardinalidad de X y en el caso que X sea a lo más numerable, entonces denotará a $\aleph_0$. El peso de X es

$$\omega(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } X\} + \aleph_0.$$

La densidad de X es

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } X\} + \aleph_0.$$

La densidad hereditaria de X es

$$hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \text{ es subespacio de } X\}.$$

La amplitud de X es

$$s(X) = \sup\{|S| : S \text{ es discreto de } X\} + \aleph_0.$$

La extensión de X es

$$e(X) = \sup\{|S| : S \text{ es discreto y cerrado en } X\} + \aleph_0.$$

La estrechez de X es

$$t(X) = \min\{\kappa \geq \aleph_0 : \text{si } A \subseteq X \text{ y } p \in cl_X(A), \text{ existe } A' \subseteq A \text{ con } |A'| \leq \kappa \text{ y } p \in cl_X A'\}.$$

Una familia $\{O_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ de conjuntos abiertos de X es una familia celular si $O_\gamma \neq \emptyset$ para todo $\gamma < \alpha$ y $O_{\gamma_1} \cap O_{\gamma_2} = \emptyset$ siempre y cuando $\gamma_1 \neq \gamma_2$. La celularidad de X es

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular}\}.$$

Sea $\mathcal{F} = \{A_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{F}$ es una red de X si para todo $x \in X$ y para cualquier conjunto abierto O de X tal que $x \in O$, existe $A_\gamma \in \mathcal{F}$ el cual cumple que $x \in A_\gamma \subseteq O$. El peso red de X es

$$nw(X) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ es una red de } X\} + \aleph_0.$$

Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva entonces diremos que X puede ser condesado en Y, y también que f es una condensación. El i-peso de X es

$$iw(X) = \min\{w(Y) : X \text{ puede ser condensado en } Y\} + \aleph_0.$$

Sea $\mathcal{V}$ una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X. $\mathcal{V}$ es una π-base de X si para cualquier conjunto abierto O no vacío de X existe $O' \in \mathcal{V}$ tal que $O' \subseteq O$. El π-peso de X es

$$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una } \pi\text{-base de } X\} + \aleph_0.$$

El grado de Lindelöf de X es

$$l(X) = \min\{\kappa \in \mathit{Card} : \text{toda cubierta abierta de } X \text{ tiene una subcubierta de cardinalidad } \leq \kappa\} + \aleph_0.$$

El grado hereditario de Lindelöf de X es

$$hl(X) = \sup\{l(Y) : Y \text{ es subespacio de } X\}.$$

En general, si ϕ es una función cardinal definimos la función cardinal

$$h\phi(X) = \sup\{\phi(Y) : Y \text{ es subespacio de } X\},$$

la cual se llamará la función hereditaria de ϕ y tendra la propiedad de ser una función monótona, es decir para todo subespacio Y de X, se tiene $h\phi(Y) \leq h\phi(X)$.

El cardinal infinito κ es un calibre de X si para toda familia de abiertos no vacíos de X indicada por κ, digamos $\{O_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, existe $A \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{O_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$. El cardinal κ es precalibre de X si para toda familia de abiertos no vacíos de X indicada por κ, digamos $\{O_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, existe $A \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. El número de Šanin de X es

$$\check{S}(X) = \min\{m \in \mathit{Card} : m \text{ es infinito y } m^+ \text{ es calibre de } X\}.$$

Análogamente Precal(X) está definido como

$$\mathrm{Precal}(X) = \min\{m \in \mathit{Card} : m \text{ es infinito y } m^+ \text{es precalibre de } X\}.$$

Sea $x \in X$ y $\mathcal{V}$ una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X. $\mathcal{V}$ es una base local de x, si para toda vecindad abierta O de x, existe $O' \in \mathcal{V}$ tal que $x \in O' \subseteq O$. $\mathcal{V}$ es una $\pi-$base local de x, si para toda vecindad abierta O de x, existe $O' \in \mathcal{V}$ tal que $O' \subseteq O$. $\mathcal{V}$ es una seudo-base local de x si $\cap\mathcal{V} = \{x\}$. Ahora bién, sea $x \in X$, el carácter local de x es

$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base local de } x\}.$$

Y el carácter de X es

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0.$$

El π-carácter local de x es

$$\pi\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una } \pi\text{-base local de } x\}.$$

El π-carácter de X es

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0.$$

El seudocarácter local de x es

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una seudo-base local de } x\}.$$

El seudocarácter de X es

$$\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0.$$

Algunas relaciones entre las funciones cardinales que hemos definido y que usaremos a lo largo de este trabajo son: si X es un espacio, entonces (ver R. Hodel [18] pgs. 14-17)

$$\begin{array}{rcccl} \psi(X) & \leq & iw(X), & & \\ \psi(X) & \leq & \chi(X) & \leq & w(X), \\ nw(X) & \leq & w(X). & & \end{array}$$

Si $\alpha \in Card$ y $\mathcal{F} = \{X_\lambda : \lambda < \alpha\}$ es una colección de espacios denotaremos por $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$, o simplemente $\prod$ cuando en el contexto sea claro quiénes son los factores del producto, al espacio producto de la familia $\mathcal{F}$. Si $A \subseteq \alpha$, la función proyección $P_A : \prod \to \prod_{\lambda \in A} X_\lambda$ esta definida como $P_A(f) = f\restriction_A$. Si $A = \{\lambda\}$, escribiremos P_λ en lugar de $P_{\{\lambda\}}$. Además, al conjunto $\prod_{\lambda \in A} X_\lambda$, se le denotará como $\prod_A$. Recordaremos que la colección

$$\{\cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda) : O_\lambda \subset X_\lambda \text{ es un conjunto abierto de } X_\lambda,\ F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$$

es una base de la topologia del espacio producto $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ (esta base es la llamada base canónica del producto). Si $O = \cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ es un abierto canónico de $\prod$, al conjunto F se denotará como $sop(O)$ (el soporte de O).

Si $a \in \prod$ denotaremos con $a(\lambda)$ a $P_\lambda(a)$, es decir a la λ-esima coordenada de a. Si $A \subseteq \alpha$, denotaremos por $\mathcal{X}_A$ al conjunto

$$\{x \in \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda : x(\lambda) = a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin A\}.$$

No es difícil demostrar que $\mathcal{X}_A$ es homeomorfo a $\prod_A$.

Definición 1.1. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios, $a \in \prod$, y $\mathcal{F}$ un filtro de α. El $\Sigma_\mathcal{F}$-producto de $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ basado en a, es el conjunto*

$$\Sigma_\mathcal{F}(a) = \{x \in \prod : \{\lambda < \alpha : x(\lambda) = a(\lambda)\} \in \mathcal{F}\}.$$

Notemos que que las familias

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \alpha : |\alpha \setminus A| < \aleph_0\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{A \subseteq \alpha : |\alpha \setminus A| \leq \aleph_0\},$$

$$\mathcal{F}_3^\delta = \{A \subseteq \alpha : |\alpha \setminus A| \leq \delta\} \textit{ donde } \delta < \alpha\}$$

son filtros de α. *En particular denotaremos* $\Sigma_0(a) = \Sigma_{\mathcal{F}_1}(a)$, $\Sigma(a) = \Sigma_{\mathcal{F}_2}(a)$ *y* $\Sigma_\delta(a) = \Sigma_{\mathcal{F}_3^\delta}(a)$. *Si no hay posibilidad de confusión, es decir, si la propiedad topológica analizada no depende del punto base, simplemente escribiremos* Σ_0, Σ *y* Σ_δ *respectivamente. Llamaremos* σ*-producto a los conjuntos* Σ_0. *Llamaremos* Σ*-producto a los conjuntos del tipo* Σ. *Finalmente, se llamaran* Σ_δ*-producto a los conjuntos* Σ_δ.

Si fijamos $a \in \prod$ y $x \in \prod$, definimos el soporte de x con respecto a a, y lo denotamos como $sop(x)$, al conjunto $\{\lambda < \alpha : x(\lambda) \neq a(\lambda)\}$. $\mathcal{F}_1$ es un filtro de α (llamado filtro de Fréchet) bastante importante lo cual veremos en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2. *Sean* α *un cardinal infinito,* $\mathcal{F}$ *un filtro de* α, $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios y* $a \in \prod$. *Entonces* $\Sigma_{\mathcal{F}}(a)$ *es denso en* $\prod$ *si y sólo si* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$. *En particular* $\Sigma_0(a)$ *y* $\Sigma(a)$ *son densos en* $\prod$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. Denotamos $\alpha \setminus A$ como $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Afirmamos que $B \setminus A \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{F}$ (es decir $B \cap \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{F}$), ya que si $B \setminus A = \emptyset$, para algún $B \in \mathcal{F}$, entonces $B \subseteq A$, o sea $A \in \mathcal{F}$, lo cual no puede ser. Sea O_{λ_i} un conjunto abierto no vacío de X_{λ_i} tal que $a(\lambda_i) \notin O_{\lambda_i}$ para cada $i = 1, ..., n$. Si asumimos que $\Sigma_{\mathcal{F}}(a)$ es denso en $\prod$, entonces existe

$$x \in (\cap_{i=1}^n P^{-1}(O_{\lambda_i})) \cap \Sigma_{\mathcal{F}}(a).$$

Entonces $(\alpha \setminus sop(x)) \in \mathcal{F}$, y podemos encontrar $\lambda_i \in (\alpha \setminus sop(x))$ para algún $i = 1, ..., n$. Entonces $x(\lambda_i) \in O_{\lambda_i}$, y además $x(\lambda_i) = a(\lambda_i)$, lo cual es imposible.

Ahora bién, si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Sea $O = \cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ donde O_λ es un conjunto no vacío de X_λ para cada λ en F, y $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Sea x_λ un elemento arbitrario de O_λ para cada $\lambda \in F$, entonces definimos $x \in \prod$ como

$$x(\lambda) = \begin{cases} x_\lambda & \text{si } \lambda \in F \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F. \end{cases}$$

Es claro que $x \in O$, y como $(\alpha \setminus F) \in \mathcal{F}$, entonces $x \in (O \cap \Sigma_{\mathcal{F}}(a)) \neq \emptyset$. □

COROLARIO 1.3. *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios y* $a \in \prod$. *Entonces* $\Sigma_0(a)$ *es denso en* $\Sigma(a)$.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue directamente del teorema 1.2 □

En este trabajo nos avocaremos al estudio de los Σ-productos, y sólo consideraremos resultados más generales para Σ_δ-productos, o resultados para los σ-productos, cuando lo creamos conveniente. Obsérvese que si $\alpha \leq \aleph_0$, entonces $\Sigma = \prod$. En este caso diremos que Σ es trivial. En todo lo que sigue sólo consideraremos Σ-productos no triviales. Es decir, en el caso más general, siempre consideraremos Σ-productos en productos con un número mayor que $\aleph_0$ de factores no triviales.

2. Algunas propiedades de los Σ-productos

Iniciamos esta sección, presentando una forma interesante de expresar cualquier Σ-producto.

TEOREMA 1.4. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Si Σ es un Σ-producto, entonces existe una familia $\{I_n\}_{n<\aleph_0}$ de subconjuntos ajenos de α y Σ-productos Σ_n de las familias $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I_n}$ tales que*

$$\Sigma \textit{ es homeomorfo a } \prod_{n<\aleph_0} \Sigma_n.$$

Además para todo $n \in N$, Σ_n es homeomorfo a un subespacio cerrado en Σ.

DEMOSTRACIÓN: Como $\alpha > \aleph_0$, entonces $|\alpha \times \aleph_0| = \alpha$. Como $\alpha \times \aleph_0 = \cup_{n<\aleph_0}\alpha \times \{n\}$, la colección $\{\alpha \times \{n\} : n < \omega\}$ es una partición de $\alpha \times \aleph_0$. La función biyectiva entre $\alpha \times \aleph_0$ y α junto con la partición anterior inducen una partición $\{I_n\}_{n<\aleph_0}$ de α. Notemos que $|I_n| = \alpha$. Si a es el punto base de Σ, denotamos por Σ_n al Σ-producto de la familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I_n}$ con punto base $P_{I_n}(a)$. Demostraremos que estos Σ-productos cumplen lo pedido.

Sea $f : \Sigma \to \prod_{n<\aleph_0} \Sigma_n$ definida como $f(x) = x'$ en donde para cada n, $P_n(x') = P_{I_n}(x)$. f es un homeomorfismo. Bajo este homeomorfismo $f(\mathcal{X}_{I_n} \cap \Sigma)$ es un cerrado en $\prod_{n<\aleph_0} \Sigma_n$, el cual es homeomorfo a Σ_n. □

El siguiente resultado nos será útil.

TEOREMA 1.5. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios, A_α la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad α, y Σ un Σ-producto de la familia $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$. Entonces A_α está inmerso cerradamente en Σ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A_\alpha = \alpha \cup \{*\}$ donde $* \notin \alpha$. Supongamos que a es el punto base y sea $b_\lambda \in X_\lambda \setminus \{a_\lambda\}$. Definimos la función $g : A_\alpha \to \Sigma$ como $g(\delta) = x_\delta$, para cada $\delta < \alpha$ donde

$$x_\delta(\lambda) = \begin{cases} a(\lambda) & \text{si } \lambda \neq \delta \\ b_\lambda & \text{si } \lambda = \delta, \end{cases}$$

y $g(*) = a$. Para concluir que g, sólo hay que demostrar la continuidad en $*$. Sea $O = \cap_{\lambda\in H} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ un abierto canónico de $\prod$ tal que $a \in O$. Es claro que $g((\alpha \setminus H) \cup \{*\}) \subseteq O$. Tenemos que $g(A_\alpha) = \{x_\delta : \delta < \alpha\} \cup \{a\}$. Comprobar que g es una función abierta en su imagen, no es difícil, ya que bastará demostrar que si $H \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $V = \cap_{\lambda\in H} P_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ es un abierto canónico de $\prod$, tal que $a(\lambda) \in V_\lambda$ y $b_\lambda \notin V_\lambda$ para todo $\lambda \in H$, entonces $g((\alpha \setminus H) \cup \{*\}) = V \cap g(A_\alpha)$.

Sólo resta demostrar que $g(A_\alpha)$ es cerrado en Σ. Pero esto es sencillo, ya que $\{x_\delta : \delta < \alpha\}$ es un conjunto discreto y su único punto de acumulación en Σ es a. □

Continuamos esta sección probando que los Σ-productos basados en puntos diferentes pueden ser topológicamente no equivalentes. Por ejemplo

Para todo $\lambda < \alpha$, definamos $X_\lambda = [0,1] \cup \{x_\lambda\}$, como una copia de $[0,1]$ más el punto aislado $x_\lambda \notin [0,1]$. Tomamos en $\prod$ los puntos a y b, los cuales están definidos por:

$$\begin{array}{ll} a(\lambda) = x_\lambda & \text{para todo } \lambda < \alpha, \\ b(\lambda) = 0 & \text{para todo } \lambda < \alpha. \end{array}$$

Veamos que $\Sigma(a)$ y $\Sigma(b)$ no son homeomorfos. En efecto, $a \in \Sigma(a)$, pero $a \notin \Sigma(b)$ y además la componente conexa de a en $\Sigma(a)$ es $\{a\}$. En efecto, supongamos que $C_a \subseteq \Sigma(a)$ es la componente conexa de a en $\Sigma(a)$. Si $z \in C_a \setminus \{a\}$, entonces existe $\lambda_0 < \alpha$ tal que $a(\lambda_0) \neq z(\lambda_0)$. $P_{\lambda_0}(C_a)$ es conexo en $[0,1] \cup \{x_{\lambda_0}\}$, $a(\lambda_0)$, $z(\lambda_0) \in P_{\lambda_0}(C_a)$ y $z(\lambda_0) \in [0,1]$. Así que $P_{\lambda_0}(C_a) \cap [0,1]$ y $\{x_{\lambda_0}\}$, son conjuntos abiertos de $P_{\lambda_0}(C_a)$ no vacíos y ajenos que particionan a $P_{\lambda_0}(C_a)$, lo cual es imposible ya que tal conjunto es conexo. Por otro lado, las componentes conexas de $\Sigma(b)$ contienen más de un punto. En efecto, sea $x \in \Sigma(b)$. Sea $\lambda_0 \in \alpha \setminus sop(x)$, aqui $sop(x)$ se calcula respecto a b. Podemos definir $C = \prod_{\lambda<\alpha} C_\lambda$, donde

$$C_\lambda = \begin{cases} [0,1] & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \{x(\lambda)\} & \text{si } \lambda \neq \lambda_0. \end{cases}$$

C es conexo ya que es un producto de conexos. Como $x \in C$ y además C es infinito, entonces C_x no puede ser un conjunto singular. Como bajo un homeomorfismo las componentes conexas van a componentes conexas, $\Sigma(a)$ y $\Sigma(b)$ no pueden ser homeomorfos.

Enseguida un teorema que nos proporciona condiciones que nos aseguran la invarianza del Σ-producto respecto al punto base.

TEOREMA 1.6. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios homogéneos. Si $a, b \in \prod$, entonces $\Sigma(a)$ y $\Sigma(b)$ son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\lambda < \alpha$, denotamos con $f_\lambda : X_\lambda \to X_\lambda$ al homeomorfismo que cumple $f_\lambda(a(\lambda)) = b(\lambda)$. Como $\prod_{\lambda<\alpha} f_\lambda : \prod \to \prod$ es un homeomorfismo, para concluir la demostración del teorema, bastará demostrar que $(\prod_{\lambda<\alpha} f_\lambda)(\Sigma(a)) = \Sigma(b)$. Sea $z \in \prod$. Como $(\prod_{\lambda<\alpha} f_\lambda)(z)(\lambda) = b(\lambda)$ si y sólo si $z(\lambda) = a(\lambda)$, entonces tendremos que $(\prod_{\lambda<\alpha} f_\lambda)(z) \in \Sigma(b)$ si y sólo si $z \in \Sigma(a)$. □

En el siguiente teorema podremos observar que algunos Σ-productos son, en realidad, espacios de funciones continuas.

TEOREMA 1.7 (Corson). *Sean α un cardinal infinito no numerable, $X_\lambda = \mathbb{R}$ para todo $\lambda < \alpha$ y $a \in \prod$. Entonces, existe un espacio de Lindelöf X tal que $C_p(X)$ es homeomorfo a $\Sigma(a)$.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos a X como $\alpha \cup \{z\}$ donde $z \notin \alpha$. Una base para la topología de X es $\{\{\lambda\} : \lambda < \alpha\} \cup \{X \setminus A : A \in [\alpha]^{\aleph_0}\}$. Es claro que el espacio X es un espacio de Lindelöf. Definimos a $C_0(X) = \{f \in C(X) : f(z) = 0\}$. Ahora veremos que Σ es homeomorfo con $C_0(X)$. Como $\mathbb{R}$ es grupo topológico, entonces es homogéneo, así que, por el teorema 1.6 podemos suponer que $a(\lambda) = 0$ para todo $\lambda < \alpha$. Sea $\theta : \Sigma \to \mathbb{R}^X$ definida como $\theta(x) = f_x$ donde $x \in \Sigma(a)$ y

$$f_x(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) & \text{si } \lambda \in Sop(x) \\ 0 & \text{si } \lambda \notin Sop(x) \text{ o } \lambda = z. \end{cases}$$

Entonces $f_x\restriction_\alpha = x$, y además $f_x(z) = 0$. Veamos primero que f_x es continua, para esto es suficiente demostrar que es continua en z. Sea O un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ que contenga a cero. Es claro que $f_x(\{z\} \cup (\alpha \setminus Sop(x))) = \{0\} \subseteq O$. Por lo tanto, θ es en efecto una función con valores en $C_0(X)$. Ahora veamos que θ es un homeomorfismo entre Σ y $C_0(X)$. Si $\theta(x_1) = \theta(x_2)$, entonces $f_{x_1} = f_{x_2}$ o sea $f_{x_1}\restriction_\alpha = f_{x_2}\restriction_\alpha$, es decir $x_1 = x_2$. Ahora bien, si $f \in C_0(X)$, queremos demostrar que $f\restriction_\alpha \in \Sigma$. Como $0 \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, entonces existe $B_n \subseteq \alpha$ numerable, tal que $\{z\} \cup (\alpha \setminus B_n) \subseteq f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$. Pero $Sop(f\restriction_\alpha) = \{\lambda < \alpha : f(\lambda) \neq 0\}$, así que es claro que $Sop(f\restriction_\alpha) = \cup_{n \in N} B_n$. Por lo tanto $f\restriction_\alpha \in \Sigma$. Finalmente, sea $O = (\cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)) \cap \Sigma$, en donde $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $O_\lambda \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto para cada $\lambda \in F$. Afirmamos que $\theta(O) = (\cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)) \cap C_0(X)$ (aquí $(\cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)) \subseteq \mathbb{R}^X$). Es decir, $f_x\restriction_\alpha (\lambda) \in O_\lambda$ para todo $\lambda \in F$, si $x \in O$; y $f\restriction_\alpha (\lambda) \in O_\lambda$ para todo $\lambda \in F$, si $f \in C_0(X)$ y $f(\lambda) \in O_\lambda$ para todo $\lambda \in F$. Lo cual es cierto por las definiciones del abierto O, de f_x y porque $F \subset \alpha$. Ahora sea $W = (\cap_{\lambda \in J} P_\lambda^{-1}(W_\lambda)) \cap C_0(X)$, donde $J \in [X]^{<\aleph_0}$ y $W_\lambda \subsetneq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Veamos primero el caso en que $z \notin J$. Afirmamos que $\theta^{-1}(W) = (\cap_{\lambda \in J} P_\lambda^{-1}(W_\lambda)) \cap \Sigma$, lo cual es claro ya que $J \subseteq \alpha$. En el caso en que $z \in J$, entonces tenemos que $\theta^{-1}(W) = (\cap_{\lambda \in J \setminus \{z\}} P_\lambda^{-1}(W_\lambda)) \cap \Sigma$. Así que θ es un homeomorfismo.

Ahora bién, $C(X)$ es homeomorfo a $C_0(X) \times \mathbb{R}$, mediante la función, $F(f) = (f - f(z), f(z))$. Para concluir bastará observar que Σ es homeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$. (véase el lema 4.5 del capítulo 4). □

Es importante notar que si $\{G_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de grupos topológicos y $\overline{0} \in \prod_{\lambda<\alpha} G_\lambda$, entonces $\Sigma(\overline{0})$ es también un grupo topológico con las operaciones definidas coordenada por coordenada. Para comprobar esto basta observar que si $x, y \in \prod_{\lambda<\alpha} G_\lambda$, entonces $Sop(x \cdot y) \subseteq Sop(x) \cup Sop(y)$ y $Sop(x^{-1}) = Sop(x)$.

A pesar que dos Σ-productos de un producto $\prod$ basados en puntos diferentes no son necesariamente homeomorfos, como vimos al principio de esta sección, comparten muchas propiedades topológicas como veremos a lo largo de esta tésis.

3. Principios combinatorios

Demostraremos uno de los principios combinatorios más importante y que nos será muy útil en el siguiente capítulo, el lema de la raíz, también conocido como el lema del Δ-sistema.

TEOREMA 1.8. *Sea $\kappa > \aleph_0$ un cardinal regular. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos finitos tal que $|\mathcal{A}| = \kappa$. Entonces, existen $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ y F un conjunto (posiblemente vacío) tales que $|\mathcal{A}'| = \kappa$ y $F = A_1 \cap A_2$ donde A_1 y A_2 son cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}'$.*

DEMOSTRACIÓN: Para todo $n < \aleph_0$ definimos a las familias $\mathcal{A}_n$ como

$$\{A \in \mathcal{A} : |A| = n\}.$$

Es claro que

$$\mathcal{A} = \cup_{n<\aleph_0} \mathcal{A}_n.$$

Como κ es un cardinal regular y $\kappa = \cup_{n<\aleph_0} |\mathcal{A}_n|$, podemos concluir que existe $n_0 < \aleph_0$ tal que $|\mathcal{A}_{n_0}| = \kappa$. Así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen la misma cardinalidad n. Demostaremos el teorema realizando inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ y $F = \emptyset$. Supongamos que el teorema es válido para n. Ahora supongamos que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen cardinalidad $n + 1$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subfamilias de $\mathcal{A}$ ajenas dos a dos. No es complicado verificar que en esta colección de subfamilias se cumplen las hipótesis del lema de Zorn. Así que existe un elemento maximal en $\mathcal{F}$; sea $\mathcal{A}'$ tal elemento. Si $|\mathcal{A}'| = \kappa$, está es la familia buscada, siendo $F = \emptyset$.

Supongamos ahora que $|\mathcal{A}'| < \kappa$. Entonces $|\cup \mathcal{A}'| = \lambda < \kappa$. Si

$$\cup \mathcal{A}' = \{p_\gamma : \gamma < \lambda\},$$

definimos para todo $\gamma < \lambda$ a $\mathcal{A}_\gamma$ como $\{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}' : p_\gamma \in A\}$. Es claro que $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'| = \kappa$. Usando la maximalidad de $\mathcal{A}'$ tenemos que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}' = \cup_\gamma \mathcal{A}_\gamma$. La regularidad de κ nos lleva a concluir la existencia de un $\gamma_0 < \lambda$ tal que $|\mathcal{A}_{\gamma_0}| = \kappa$. Resumiendo, existe una subfamilia $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ y $p \in \cup\mathcal{A}'$ tales que $|\mathcal{A}_0| = \kappa$ y $p \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}_0$. Definimos a la familia $\mathcal{A}_0'$ formada por conjuntos de cardinalidad n, como

$$\{A \setminus \{p\} : A \in \mathcal{A}_0\}.$$

Es claro que a la familia $\mathcal{A}_0'$, se le puede aplicar la hipótesis inductiva, entonces existe una subfamilia $\mathcal{A}_1'$ de $\mathcal{A}_0'$ y un conjunto F', tales que $|\mathcal{A}_1'| = \kappa$ y $F' = A_1' \cap A_2'$ para *cualesquiera distintos* A_1', A_2' *elementos de* $\mathcal{A}_1'$. *Finalmente tenemos, que la familia* buscada es $\{A : A \setminus \{p\} \in \mathcal{A}_1'\}$ y el conjunto F es $F' \cup \{p\}$. □

TEOREMA 1.9. *Si $\beta > \alpha$, donde β es un cardinal regular, y si $\mathcal{G} = \{F_\delta\}_{\delta<\beta}$ es una familia de subconjuntos finitos de α, entonces existe $A \subset \beta$ con $|A| = \beta$ y $F \subset \alpha$ finito tal que $F = F_\delta$ para todo $\delta \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Igual que en la demostración del teorema anterior, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{G}$ tienen cardinalidad n. Realizando inducción sobre n: Si $n = 0$ tomamos $F = \emptyset$. Supongamos que para n se cumple el teorema, y que los elementos de $\mathcal{G}$ tienen $n+1$ elementos. Ahora, para todo $\delta < \beta$ definimos $\alpha_\delta = \max F_\delta$. Sea $A(\alpha_\delta) = \{\gamma < \beta : \max F_\gamma = \alpha_\delta\}$. Usando la regularidad de β, obtenemos $\delta_0 < \beta$ tal que $|A(\alpha_{\delta_0})| = \beta$. Combinando estos resultados tenemos que $\alpha_\delta \in F_\gamma$ para todo $\gamma \in A(\alpha_\delta)$. Si usamos la hipótesis inductiva para la familia $\{F_\gamma \setminus \{\alpha_{\delta_0}\}\}_{\gamma \in A(\alpha_\delta)}$, obtenemos la familia $A' \subset A(\alpha_{\delta_0})$ y $F' \subset \alpha$ con las propiedades: $|A'| = \beta$ y $F' = F_\gamma \setminus \{\alpha_{\delta_0}\}$ para todo $F_\gamma \in A'$. Finalmente la familia y el conjunto buscados son A' y $F = F' \cup \{\alpha_{\delta_0}\}$ □

4. Paracompacidad, normalidad, propiedad de Lindelöf.

En esta sección presentaremos algunas propiedades de espacios paracompactos, normales,colectivamente normales o Lindelöf.

TEOREMA 1.10. *Si X es un k-espacio tal que para todo $K \subseteq X$ compacto tenemos que $t(K) \leq \beta$, entonces $t(X) \leq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $C \subseteq X$ no vacío, denotaremos por $[C]_\beta$ al conjunto $\cup\{cl_X(A) : A \subseteq C, |A| \leq \beta\}$ y lo llamaremos la β-clausura de C. Entonces $t(X) \leq \beta$ si y sólo si para todo $C \subseteq X$ no vacío, $[C]_\beta$ es cerrado en X. Con estos hechos, sea $C \subseteq X$ no vacío. Queremos demostrar que $[C]_\beta$ es cerrado en X. Para esto bastará demostrar que $[C]_\beta \cap K$ es cerrado en K para cualquier $K \subseteq X$ compacto. Como $t(K) \leq \beta$, bastara demostrar que si $\emptyset \neq [C]_\beta \cap K$, entonces es una β-clausura en K. Proponemos que $[C]_\beta \cap K = [[C]_\beta \cap K]^K_\beta$(la expresión derecha de la igualdad significa la β-clausura en K del conjunto $[C]_\beta \cap K$). Sea $z \in [C]_\beta \cap K$, entonces $z \in cl_X(A) \cap K$ donde $A \subseteq C$ con $|A| \leq \beta$, así que

$$z \in cl_K(cl_X(A) \cap K) = cl_X(A) \cap K.$$

Como $t(K) \leq \beta$, existe $A' \subseteq cl_X(A) \cap K \subseteq [C]_\beta \cap K$ con $|A'| \leq \beta$ y $z \in cl_K(A') \subseteq [[C]_\beta \cap K]^K_\beta$. Ahora sea $m \in [[C]_\beta \cap K]^K_\beta$, entonces existe $A'' \subseteq [C]_\beta \cap K$ con $|A''| \leq \beta$ y $m \in cl_K(A'')$. Para cada $x \in A''$ existe $A_x \subseteq C$ con $|A_x| \leq \beta$ y $x \in cl_X(A_x) \cap K$. Tomamos $A = \cup_{x \in A'} A_x$. Es claro que $A \subseteq C$ y $|A| \leq \beta$, y como $x \in cl_X(A_x) \subseteq cl_X(A)$ para todo $x \in A''$, entonces $A'' \subseteq cl_X(A)$. Así que $m \in cl_K(A'') \subseteq cl_X(A'') \subseteq cl_X(A)$, y por tanto $m \in [C]_\beta$ y trivialmente $m \in K$. $\square$

Ahora presentamos algunos teoremas sobre paracompacidad.

TEOREMA 1.11. *Si X es un espacio paracompacto y $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\beta}$ es una cubierta de cerrados localmente finita, entonces existe una cubierta $\mathcal{O} = \{O_\gamma\}_{\gamma<\beta}$ de abiertos, localmente finita, tal que $F_\gamma \subseteq O_\gamma$ para toda $\gamma < \beta$.*

DEMOSTRACIÓN: Para toda $x \in X$ definimos un abierto V_x en X con la propiedad de intersectar sólo un número finito de elementos de $\mathcal{F}$ y $x \in V_x$. Para este abierto definimos $I_x \subseteq \beta$ finito, con la propiedad: $\delta \in I_x$ si y sólo si $F_\delta \cap V_x \neq \emptyset$.

Es fácil ver que para todo $n \in N$, si $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$, entonces $\cup_{i=1,...,n} V_{x_i}$ intersecta sólo un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.

Ahora consideramos la cubierta $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x\in X}$. Usando la paracompacidad obtenemos una cubierta abierta $\mathcal{W} = \{W_\mu\}_{\mu<\theta}$ de X localmente finita que es refinamiento de $\mathcal{V}$. Ahora definimos $O_\gamma = \cup_{W_\mu \cap F_\gamma \neq \emptyset} W_\mu$. Como $\mathcal{W}$ es una cubierta tenemos que $F_\gamma \subseteq O_\gamma$. Afirmamos que $\{O_\gamma\}_{\gamma<\beta}$ es localmente finita: sean $x \in X$ y Z_x un abierto de X tal que $x \in Z_x$ y además Z_x sólo intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{W}$. Igual, como antes, definimos $L_x = \{\mu \in \theta : W_\mu \cap Z_x \neq \emptyset\}$. De igual manera obtenemos $Z_x \subseteq \cup_{\mu \in L_x} W_\mu$. Como $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$, entonces por cada $\mu \in L_x$ existe un $x_\mu \in X$ tal que $W_\mu \subseteq V_{x_\mu}$, que nos lleva a $V_{x_\mu} \subseteq \cup_{\gamma \in I_{x_\mu}} F_\gamma$ y a $Z_x \subseteq \cup_{\mu \in L_x}(\cup_{\gamma \in I_{x_\mu}} F_\gamma)$. Afirmamos que si $\gamma \notin \cup_{\mu \in L_x} I_{x_\mu}$ entonces $Z_x \cap O_\gamma = \emptyset$. En efecto, si $w \in Z_x \cap O_\gamma$, tendríamos un $\mu < \theta$ tal que $w \in W_\mu$ y $W_\mu \cap F_\gamma \neq \emptyset$. Entonces $\mu \in L_x$, luego $W_\mu \subseteq V_{x_\mu}$. Así que $V_{x_\mu} \cap F_\gamma \neq \emptyset$ y concluiríamos que $\gamma \in I_{x_\mu}$, lo cual no puede ser. $\square$

Ahora presentamos dos teoremas acerca de la normalidad colectiva.

TEOREMA 1.12. *Y es colectivamente normal si y sólo si para toda famila discreta de cerrados $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ en Y, existe una una cubierta abierta σ-localmente finita $\mathcal{U}$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $\gamma < \theta$ que cumple la condición $cl_Y(U) \cap F_\delta = \emptyset$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Demostremos la necesidad. Supongamos que Y es colectivamente normal y sea $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ una familia discreta de cerrados. Por definición existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{O} = \{O\gamma\}_{\gamma<\theta}$ tal que $F_\gamma \subseteq O_\gamma$ para todo $\gamma < \theta$. Como Y es normal, para toda $\gamma \in \theta$, existe un abierto Z_γ en X tal que $F_\gamma \subseteq Z_\gamma \subseteq cl_Y(Z_\gamma) \subseteq O_\gamma$; además como $\cup_{\gamma<\theta} F_\gamma$ es cerrado y ajeno a $Y \setminus (\cup_{\gamma<\theta} Z_\gamma)$, tomamos abiertos ajenos A, B tales que $(\cup_{\gamma<\theta} F_\gamma) \subseteq A$ y $(Y \setminus (\cup_{\gamma<\theta} Z_\gamma)) \subseteq B$. Podemos definir $\mathcal{U}_1 = \{Z_\gamma\}_{\gamma<\theta}$, $\mathcal{U}_2 = \{B\}$, y finalmente $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Resulta que $\mathcal{U}$ es la cubierta buscada.

Demostraremos ahora la suficiencia, sea $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ una familia discreta de cerrados, y sea $\mathcal{U} = \cup_{n\in N} \mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de Y donde cada $\mathcal{U}_n$ es localmente finita y cumple que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $\gamma < \theta$ tal que $cl_Y(U) \cap F_\delta = \emptyset$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$. Definimos

$$S_\gamma(n) = \{U \in \mathcal{U}_n : cl_Y(U) \cap F_\delta = \emptyset \text{ para todo } \delta \in \theta \setminus \{\gamma\}\}$$

y tomamos al conjunto $U_\gamma(n) = \cup_{U \in S_\gamma(n)} U$. Con esta definición se tiene que

$$Y = \cup_{\gamma<\theta}(\cup_{n\in N} U_\gamma(n))$$

ya que si $x \in Y$, entonces existe $n \in N$ y $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$; como por hipotésis existe $\gamma < \theta$ con la propiedad que $cl_Y(U) \cap F_\delta = \emptyset$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$, entonces $x \in U_\gamma(n)$. Pero además, como $\mathcal{U}_n$ es localmente finita, tenemos que $cl_Y(U_\gamma(n)) = \cup_{U \in S_\gamma(n)} cl_Y(U)$, entonces $cl_Y(U_\gamma(n)) \cap F_\delta = \emptyset$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$. Observemos que para todo $n \in N$ y $\gamma \in \theta$ se cumple que

$$\begin{aligned}\cup_{j\leq n}(\cup_{\delta\neq\gamma} cl_Y(U_\delta(j))) &= \cup_{j\leq n}(\cup_{\delta\neq\gamma}(\cup_{U\in S_\delta(j)} cl_Y(U))) \\ &= \cup_{j\leq n}(\cup_{U\in \cup_{\delta\neq\gamma} S_\delta(j)} cl_Y(U)) \\ &= \cup_{j\leq n}(cl_Y(\cup_{U\in\cup_{\delta\neq\gamma} S_\gamma(j)} U)).\end{aligned}$$

Este conjunto es cerrado, así que el conjunto

$$V_\gamma(n) = U_\gamma(n) \setminus \cup_{j\leq n}(\cup_{\delta\neq\gamma} cl_Y(U_\delta(j)))$$

es abierto. Finalmente tomamos $V_\gamma = \cup_{n\in N} V_\gamma(n)$. Afirmamos que la familia de abiertos $\{V_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ es ajena dos a dos y además $F_\gamma \subseteq V_\gamma$. Demostraremos la primera afirmación; sean $\gamma, \delta < \theta$ diferentes, si $x \in V_\gamma \cap V_\delta$ entonces $x \in V_\gamma(n) \cap V_\delta(m)$. Supongamos que $m \geq n$. Como $x \in U_\gamma(n) \cap U_\delta(m)$, entonces

$$x \in \cup_{j\leq n}(\cup_{\mu\neq\delta} cl_Y(U_\mu(j))).$$

Pero esto es imposible ya que $x \in V_\delta(m)$.

Sea $z \in F_\gamma$, entonces $z \in U_\delta(m)$ para algún $\delta < \theta$ y algún $m \in N$ (podemos suponer que m es el mínimo con esta propiedad); así que $z \in F_\gamma \cap cl_Y(U_\delta(m))$ y por tanto $\gamma = \delta$. Si $z \in cl_Y(U_\mu(j))$con $\mu \neq \gamma$ y $j \leq m$, entonces $z \in F_\gamma \cap cl_Y(U_\mu(m))$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $F_\gamma \subseteq V_\gamma$. Y finalmente concluimos que Y es colectivamente normal (ver R. Engelking [**12**] pg. 305). □

TEOREMA 1.13. *Si Y es un espacio normal tal que para toda familia discreta de cerrados $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ en Y, existe una familia $\mathcal{U}$ de abiertos σ-localmente finita tal que $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\mathcal{U}$, y para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $\gamma < \theta$ tal que $cl_Y(U) \cap F_\delta = \emptyset$ para toda $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$. Entonces Y es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ y $\mathcal{U}$ como en las hipotésis del teorema. Sean A y B abiertos ajenos tales que $\cup\mathcal{D} \subseteq A$, $Y \setminus (\cup\mathcal{U}) \subseteq B$ y $A \cap cl_Y(B) = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} \cup \{B\}$ es σ-localmente finita y la clausura de cualquier miembro de ella intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{D}$, por el teorema 1.12 concluimos que Y es colectivamente normal. □

Recordar que un espacio Y es colectivamente Hausdorff si para cualquier conjunto cerrado discreto D en Y, existe una familia de conjuntos abiertos de Y disjuntos $\{O_y : y \in D\}$ tal que $y \in O_y$ para cada $y \in D$. Si cambiamos en los teoremas 1.12 y 1.13 la familia discreta de cerrados por un conjunto cerrado discreto, y cambiamos normalidad por regularidad y colectivamente normales por colectivamente Hausdorff, realizando análogas contrucciones obtenemos las demostraciones de los siguientes teoremas.

TEOREMA 1.14. *Sea Y un espacio regular. Entonces Y es colectivamente Hausdorff si y sólo si para todo cerrado y discreto $D = \{y_\gamma : \gamma < \theta\}$ de Y, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y que es σ-localmente finita, la cual cumple que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $\gamma < \theta$ tal que $y_\delta \notin cl_Y(U)$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$*

TEOREMA 1.15. *Sea Y un espacio regular tal que para todo conjunto cerrado y discreto $D = \{y_\gamma : \gamma < \theta\}$ de Y, existe una familia σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos, tal que $D \subseteq \cup\mathcal{U}$ y para todo $U \in \mathcal{U}$ existe un $\gamma < \theta$ el cual cumple que $y_\delta \notin cl_Y(U)$ para todo $\delta \in \theta \setminus \{\gamma\}$. Entonces Y es colectivamente Hausdorff.*

Presentamos ahora algunos resultados para espacios de Lindelöf.

LEMA 1.16. *Si X es un espacio Lindelöf y $\{x_t\}_{t\in T} \subseteq X$ donde $|T| > \aleph_0$ entonces existe $x_0 \in X$, tal que toda vecindad W de x_0 cumple que*

$$|\{t \in T : x_t \in W\}| > \aleph_0.$$

Es decir, $e(X) \leq \aleph_0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que tal $x_0 \in X$ no existe. Entonces para todo $x \in X$ existe W_x abierto de X tal que $x \in W_x$ y $|\{t \in T : x_t \in W_x\}| \leq \aleph_0$. La colección $\mathcal{F} = \{W_x\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ numerable tal que $\cup\mathcal{H} = X$. Sea $t_0 \in T \setminus \cup_{W_x\in\mathcal{H}}\{t \in T : x_t \in W_x\}$. Resulta que $x_{t_0} \notin W_x$ para toda $W_x \in \mathcal{H}$, lo cual es una contradicción. □

5. Funciones cardinales en productos

En esta sección enunciaremos, en algunos casos demostraremos, resultados básicos respecto al comportamiento de algunas funciones cardinales en los espacios producto.

Primero enunciaremos un importante teorema acerca de estas funciones cardinales en los productos topológicos (ver I. Juhász [**22**] pgs. 102-104).

TEOREMA 1.17. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios y sea*

$$\phi \in \{w, nw, iw, \chi, \psi\}.$$

Entonces $\phi(\prod) = \alpha \cdot sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda)$.

Ahora demostremos un lema.

LEMA 1.18. *Si X, Y son espacios y $f : X \to Y$ es una función continua sobreyectiva y abierta, y si $\phi \in \{\pi w, \pi\chi\}$, entonces $\phi(Y) \leq \phi(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero $\phi = \pi\chi$. Sea $z \in Y$ y $x \in X$ tal que $f(x) = z$. Sea $\mathcal{B}(x)$ una π-base local de x en X tal que $|\mathcal{B}(x)| \leq \pi\chi(x, X)$. Afirmamos que $\mathcal{B}'(z) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}(x)\}$ es una π-base local de z en Y. Notemos que $f(B) \neq \emptyset$ ya que $B \neq \emptyset$. Sea $z \in O$, en donde O es un abierto de Y. Tenemos que $x \in f^{-1}(O)$ que es abierto en X. Sea $B' \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B' \subseteq f^{-1}(O)$. Entonces $f(B') \subseteq O$. Con esto podemos concluir que $\pi\chi(z, Y) \leq \pi\chi(x, X)$, o sea $\pi\chi(Y) \leq \pi\chi(X)$.

De manera semejante se demuestra que si $\mathcal{B}$ es una π-base de X, entonces $\mathcal{B}' = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una π-base de Y, y se concluye que $\pi w(Y) \leq \pi w(X)$. □

Ahora pasemos a los teoremas sobre el π-peso y el π-caracter en productos.

TEOREMA 1.19. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Si $\phi \in \{\pi w, \pi\chi\}$, entonces $\phi(\prod) \leq \alpha \cdot sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda)$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cuando $\phi = \pi w$. Tomamos $\mathcal{B}_\lambda$ una π-base del factor X_λ tal que $|\mathcal{B}_\lambda| \leq \pi w(X_\lambda)$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{\cap_{\lambda\in F} P^{-1}(B_\lambda) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0} \text{ y } B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda \text{ para cada } \lambda \in F\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B}$ es una π-base de $\prod$. Bastará demostrar que cualquier básico canónico en $\prod$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$. Sea $O = \cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ donde $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y O_λ es abierto en X_λ para cada $\lambda \in F$. Para todo $\lambda \in F$, tomamos $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ tal que $B_\lambda \subseteq O_\lambda$. Es claro que $\cap_{\lambda\in F} P^{-1}(B_\lambda) \subseteq O$. Como $|\mathcal{B}| \leq \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \pi w(X_\lambda)$, $\pi w(\prod) \leq \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \pi w(X_\lambda)$.

De manera semejante se demuestra que si $z \in \prod$ y $\mathcal{B}(z(\lambda))$ es una π-base local de $z(\lambda)$ en X_λ tal que $|\mathcal{B}(z(\lambda))| \leq \pi\chi(z(\lambda), X_\lambda)$, entonces

$$\mathcal{B}(z) = \{\cap_{\lambda\in F} P^{-1}(B_\lambda) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0} \text{ y } B_\lambda \in \mathcal{B}(z(\lambda))\}$$

es una π-base local de z en $\prod$, por tanto concluimos que

$$\pi\chi(\textstyle\prod) \leq \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \pi\chi(X_\lambda).$$ □

TEOREMA 1.20.

(1) *Sean X un espacio y D cualquier subconjunto denso de X, entonces $\pi\chi(D) \leq \pi\chi(X)$ y $\pi w(D) \leq \pi w(X)$.*

(2) *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Entonces $\pi\chi(\Sigma) \leq \pi\chi(\prod)$ y $\pi w(\Sigma) \leq \pi w(\prod)$*

DEMOSTRACIÓN:

(1) Como D es denso en X, entonces $\pi\chi(z, D) \leq \pi\chi(z, X)$ para todo $z \in D$ (ver R. Hodel [**18**] pag. 17). Así que $\pi\chi(D) \leq \pi\chi(X)$. También vale la relación $\pi w(z, D) \leq \pi w(z, X)$ para todo $z \in D$. En efecto, es fácil comprobar que si $\mathcal{B}$ una π-base local de z en X, entonces $\mathcal{B}' = \{B \cap D : B \in \mathcal{B}\}$, familia de abiertos en D, es una π-base local de z en D. Y de igual manera que antes concluimos que $\pi w(D) \leq \pi w(X)$

(2) Usamos lo anterior y que Σ es denso en $\prod$. □

La densidad en los productos tiene una expresión interesante (para una demostración ver W. W. Comfort y S. Negrepontis [**9**] pg. 78), que es el siguiente resultado fundamental:

TEOREMA 1.21 (Hewitt, Marczewski, Pondiczery). *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios topológicos con dos conjuntos abiertos ajenos y no vacios en X_λ para todo $\lambda < \alpha$. Entonces $d(\prod) = \log(\alpha) \cdot sup_{\lambda<\alpha} d(X_\lambda)$.*

A continuación presentamos útiles resultados de calibres y precalibres.

LEMA 1.22.

(1) *Si κ es un cardinal regular y si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces κ es calibre de X_λ para todo $\lambda < \alpha$ si y sólo si κ es calibre de $\prod$.*

(2) *Si κ es un cardinal regular y si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces κ es precalibre de X_λ para todo $\lambda < \alpha$ si y sólo si κ es precalibre de $\prod$.*

(3) *Si Y es un subespacio denso de X y κ es un calibre de Y, entonces κ es calibre de X.*

(4) *Si Y es un subespacio denso de X, entonces κ es precalibre de X si y sólo si κ es precalibre de Y*

DEMOSTRACIÓN:

(1) Si κ un cardinal regular que además es calibre para todo X_λ con $\lambda < \alpha$. Sea $\{O_\eta\}_{\eta<\kappa}$ una familia de abiertos canónicos no vacíos de $\prod$, donde $O_\eta = \bigcap_{\lambda\in F_\eta} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\eta)$, $O_\lambda^\eta \subset X_\lambda$ es un conjunto abierto no vacío y $F_\eta \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Por el teorema 1.8, existen $J_0 \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $A_0 \in [\kappa]^\kappa$ tal que $J_0 = F_{\eta_1} \cap F_{\eta_2}$ para todo $\eta_1, \eta_2 \in A_0$ distintos. Supongamos que $J_0 = \emptyset$. Para cada $\eta \in A_0$ y $\lambda \in F_\eta$ tomamos $z_\lambda \in O_\lambda^\eta$, y para cada $\lambda \notin \cup\{F_\eta : \eta \in A_0\}$, sea $r_\lambda \in X_\lambda$ arbitrario. Definimos $x \in \prod$ como

$$x(\lambda) = \begin{cases} z_\lambda & \text{si } \lambda \in F_\eta \text{ y } \eta \in A_0 \\ r_\lambda & \text{si } \lambda \notin \cup\{F_\eta : \eta \in A_0\}. \end{cases}$$

Resulta que $x \in \cap\{O_\eta : \eta \in A_0\}$. Supongamos ahora que $J_0 \neq \emptyset$ y $J_0 = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \in [\alpha]^{\aleph_0}$. Por hipótesis tenemos que para λ_1 existe $A_1 \in [A_0]^\kappa$, tal que

$$\cap\{P_{\lambda_1}(O_\eta) : \eta \in A_1\} \neq \emptyset.$$

Inductivamente construimos $A_{i+1} \in [A_i]^\kappa$ tal que

$$\cap\{P_{\lambda_{i+1}}(O_\eta) : \eta \in A_{i+1}\} \neq \emptyset$$

para todo $1 \leq i+1 \leq n$. Denotamos simplemente por A al conjunto A_n. Es claro que $|A| = \kappa$, y como $A \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\cap\{P_{\lambda_i}(O_\eta) : \eta \in A_i\} \subseteq \cap\{P_{\lambda_i}(O_\eta) : \eta \in A\}$. Por tanto existe $z_i \in \cap\{P_{\lambda_i}(O_\eta) : \eta \in A\}$. Para cada $\eta \in A$ y $\lambda \in F_\eta \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, tomamos $r_\lambda \in O_\lambda^\eta$ y para cada $\lambda \notin \cup\{F_\eta : \eta \in A\}$, tomamos un $r_\lambda \in X_\lambda$ arbitrario, y definimos $x \in \prod$ como

$$x(\lambda) = \begin{cases} z_i \text{ si } \lambda = \lambda_i \\ r_\lambda \text{ si } \lambda \notin J_0. \end{cases}$$

Es claro que $x \in \cap\{O_\eta : \eta \in A\}$ y por lo tanto κ es un calibre de $\prod$.

Ahora sea κ un calibre de $\prod$ y $\{O_\lambda^\eta : \eta < \kappa\}$ una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X_λ. Entonces $\{P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\eta) : \eta < \kappa\}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos. Entonces existe $A \in [\kappa]^\kappa$ y

$$z \in \cap\{P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\eta) : \eta \in A\}.$$

Es claro que $z(\lambda) \in \cap\{O_\lambda^\eta : \eta \in A\}$.

(2) La demostración es análoga a la realizada en el inciso anterior: Sea κ un cardinal regular que es precalibre de X_λ para todo $\lambda < \alpha$. Sea $O_\eta = \bigcap_{\lambda\in F_\eta} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\eta)$ para todo $\eta < \kappa$, en donde $F_\eta \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $O_\lambda^\eta \subset X_\lambda$ es un conjunto abierto no vacío. Usando el teorema 1.8 concluimos que existen $J_0 \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $A_0 \in [\kappa]^\kappa$, tales que $F_{\eta_1} \cap F_{\eta_2} = J_0$ para todo $\eta_1, \eta_2 \in A_0$ distintos. Supongamos que $J_0 = \emptyset$. De igual modo que en 1, existe $x \in \cap\{O_\eta : \eta \in A_0\}$. Supongamos que $J_0 \neq \emptyset$ y que $J_0 = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Como $\{P_{\lambda_1}(O_\eta) : \eta \in A_0\}$ es una familia de abiertos no vacíos de X_{λ_1}, usando la hipótesis, obtenemos un conjunto $A_1 \in [A_0]^\kappa$, tal que $\{P_{\lambda_1}(O_\eta) : \eta \in A_1\}$ tiene la propiedad de la interseccion finita. Asi que existe $A_n \in [A_{n-1}]^\kappa$, tal que $\{P_{\lambda_n}(O_\eta) : \eta \in A_n\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Afirmamos que si $A = A_n$, se cumple lo deseado; en efecto, si $\{O_{\eta_1}, \ldots, O_{\eta_t}\} \subseteq \{O_\eta : \eta \in A\}$; por construcción, es posible definir

$$z_i \in \cap\{P_{\lambda_i}(O_{\eta_j}) : j = 1, \ldots, t\},$$

ya que $A \subsetneq A_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Para cada $\eta \in F_\eta$ y $\lambda \in F_\eta \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ tomamos $x_\lambda \in O^\eta_\lambda$, y para cada $\lambda \notin \cup\{F_\eta : \eta \in A\}$ tomamos un arbitrario $x_\lambda \in X_\lambda$, y definimos $x \in \prod$ como

$$x(\lambda) = \begin{cases} z_i \text{ si } \lambda = \lambda_i \\ x_\lambda \text{ si } \lambda \notin J_0 \end{cases}$$

Concluimos que $x \in \cap_i O_{\eta_i}$.

Ahora sea κ un cardinal regular tal que sea un precalibre para $\prod$ y $\{O^\eta_\lambda\}_{\eta<\kappa}$ una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X_λ, entonces

$$\{P^{-1}_\lambda(O^\eta_\lambda)\}_{\eta<\kappa}$$

es una familia de conjuntos abiertos no vacía de $\prod$. Sea $A \in [\kappa]^\kappa$, tal que $\{P^{-1}_\lambda(O^\eta_\lambda) : \eta \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. De aqui, no es complicado demostrar que la familia $\{O^\eta_\lambda : \eta \in A\}$, tiene la propiedad de la intersección finita.

(3) Sea $\{O_\eta : \eta < \kappa\}$ una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X, como Y es denso en X, entonces $\{Y \cap O_\eta : \eta < \kappa\}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos de Y. Sea $A \in [\kappa]^\kappa$, tal que

$$\cap\{Y \cap O_\eta : \eta \in A\} \neq \emptyset,$$

luego entonces

$$\cap\{O_\eta : \eta \in A\} \neq \emptyset.$$

(4) Si κ es precalibre de X y $\{O_\delta \cap Y\}_{\delta<\kappa}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos de Y, entonces existe $A \in [\kappa]^\kappa$, tal que $\{O_\delta : \delta \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora sea $\{O_\delta \cap Y\}_{\delta \in F}$ donde $F \in [A]^{<\aleph_0}$. Como $\cap\{O_\delta\}_{\delta\in F} \neq \emptyset$, por la densidad tenemos que $\emptyset \neq (\cap\{O_\delta\}_{\delta\in F}) \cap Y = \cap\{O_\delta \cap Y\}_{\delta\in F}$. Entonces concluimos que κ es precalibre de Y.

Ahora supongamos que κ es precalibre de Y y sea $\{O_\delta\}_{\delta<\kappa}$ una familia de abiertos no vacíos de X. Por la densidad, $\{O_\delta \cap Y\}_{\delta<\kappa}$ es una familia de abiertos no vacíos de Y. Entonces existe $A \in [\kappa]^\kappa$, tal que $\{O_\delta \cap Y : \delta \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora sea $\{O_\delta\}_{\delta\in F}$, donde $F \in [A]^{<\aleph_0}$. Como

$$\emptyset \neq \cap\{O_\delta \cap Y\}_{\delta\in F} = (\cap\{O_\delta\}_{\delta\in F}) \cap Y$$

entonces $\cap\{O_\delta\}_{\delta\in F} \neq \emptyset$. Y concluimos que κ es precalibre de X.

□

Es importante aclarar que el inverso de la parte (3) del lema 1.22 no es cierto. Este ejemplo lo desarrollamos más adelante, ver capítulo 2 sección 5.

Ahora, presentamos algunos teoremas acerca de la estrechez.

TEOREMA 1.23. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios y β es un cardinal tal que $\alpha \leq \beta$ y $t(\prod_F)$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ con $\alpha \leq \beta$, entonces $t(\prod) \leq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x \in \prod$ y $A \subset \prod$, tales que $x \in cl_{\prod}(A)$. Vamos a demostrar que existe $A_0 \subset A$, tal que $x \in cl_{\prod}(A_0)$ y $|A_0| \leq \beta$.

Si $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, recordemos que Π_F es el conjunto $\prod_{\lambda\in F} X_\lambda$, así tenemos que $P_F(\prod) = \Pi_F$. Por hipótesis se cumple que $t(\Pi_F) \leq \beta$, y por la continuidad de P_F tenemos que $P_F(x) \in cl_{\Pi_F}(P_F(A))$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Entonces, para cada $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, existe $M_F \subset P_F(A)$ tal que $P_F(x) \in cl_{\Pi_F}(M_F)$ y $|M_F| \leq \beta$. Para cada $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, definimos $A_F \subset A$ de la manera siguiente: por cada $z \in M_F$, escogemos $z' \in P_F^{-1}(z) \cap A$, entonces $A_F = \{z' : z \in M_F\}$. Estos conjuntos cumplen que $|A_F| \leq \beta$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Tomemos $A_0 = \cup_{F \in [\alpha]^{<\aleph_0}} A_F$, y notemos que $|A_0| \leq \alpha \cdot \beta = \beta$. Sólo resta demostrar que $x \in cl_{\prod}(A_0)$. Consideremos $x \in O = \cap_{\lambda \in K} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$, donde $K \subset \alpha$ es finito y O_λ es un subconjunto abierto de X_λ con $O_\lambda \neq X_\lambda$. Por la construcción, $P_K(x) \in cl_{\Pi_K}(M_K)$. Como $P_K(x) \in P_K(O)$, el cual es abierto en Π_K , entonces $P_K(O) \cap M_K \neq \emptyset$. Sea $z \in P_K(O) \cap M_K$. Tomamos su $z' \in A_K$, y como $z'(\lambda) = z(\lambda) \in o_\lambda$ para todo $\lambda \in K$, tenemos que $z' \in O$, y finalmente $O \cap A_0 \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in cl_{\prod}(A_0)$. □

Usando el resultado anterior, obtenemos una evaluación de la estrechez de productos topológicos.

TEOREMA 1.24. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces*

$$t(\prod) = \alpha \cdot \ sup\{t(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa = \alpha \cdot \sup\{t(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$. Como la estrechez es monótona, entonces $\sup\{t(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} \leq t(\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda)$. Si D es el espacio discreto de dos puntos, entonces $t(D^\alpha) = \alpha$ (ver R. Hodel [**18**] pg. 44). Pero D^α está inmerso en $\prod$, y usando monotonía obtenemos $t(D^\alpha) \leq t(\prod)$. Entonces tenemos que $\kappa \leq t(\prod)$.

Ya que $t(\Pi_F) \leq \kappa$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y además $\alpha \leq \kappa$, por el teorema 1.23 tenemos que $t(\prod) \leq \kappa$. Así que finalmente $t(\prod) = \kappa$. □

CAPÍTULO 2

Funciones Cardinales en Σ-productos

1. La cardinalidad de un Σ-producto

Las funciones cardinales en los Σ-productos dependen fundamentalmente del conjunto de índices y del comportamiento de la función cardinal en los factores; debido a esto, pueden coincidir en dos Σ-espacios que no son homeomorfos, y pueden coincidir con el producto Tychonoff completo, coincidencia que en general entre espacios y subespacios densos no sucede necesariamente.

A continuación calcularemos y daremos algunas acotaciones de funciones cardinales en Σ-productos. Antes de entrar en materia, unas aclaraciones y definiciones. Todas los espacios considerados aqui tienen más de un punto y al menos son T_1.

DEFINICIÓN 2.1. *Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X de cardinalidad α, y si $\aleph_0 \leq \kappa \leq \alpha$, entonces diremos que $\mathcal{C}$ es una familia κ-casi-ajena si satisface*

(1) *si $C \in \mathcal{C}$ entonces $| C | \geq \kappa$,*
(2) *para todo $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ distintos, $|C_1 \cap C_2| < \kappa$.*

$\mathcal{C}$ es casi-ajena si es $\aleph_0$-casi-ajena.

DEFINICIÓN 2.2. *Si $\aleph_0 \leq \kappa \leq \alpha$, entonces definimos*

$\mathcal{S}(\alpha,\kappa) = mín\{\beta \geq \aleph_0 :$ *no existe $\mathcal{C} \subseteq P(\alpha)$ tal que $\mathcal{C}$ es κ-casi-ajena y $|\mathcal{C}| = \beta$* $\}$.

Denotaremos por $\alpha^{\underline{\beta}}$ al número cardinal $\sup\{\alpha^\lambda : \lambda < \beta\}$. Es claro que $\alpha^{\underline{\aleph_0}} = \alpha$. Enseguida enunciaremos un teorema (ver W. W. Comfort y S. Negrepontis [9] pg. 287) que nos servirá en nuestros cálculos posteriores.

TEOREMA 2.3. *Si κ es un cardinal infinito y $\alpha \geq 2$, entonces $\mathcal{S}(\alpha^{\underline{\kappa}},\kappa) = (\alpha^\kappa)^+$.*

Si en particular $\kappa = \aleph_0$ y $\alpha \geq \aleph_0$ entonces $\mathcal{S}(\alpha^{\underline{\aleph_0}},\aleph_0) = \mathcal{S}(\alpha,\aleph_0) = (\alpha^{\aleph_0})^+$. Es decir para $\alpha \geq \aleph_0$, existe una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, casi-ajena, de cardinalidad $\alpha^{\aleph_0}$.

Obsérvese que si $\mathcal{C}$ es casi-ajena podemos suponer que sus elementos tienen cardinalidad $\aleph_0$. En efecto, por cada $C \in \mathcal{C}$ escogemos $C' \subseteq C$ tal que $| C' | = \aleph_0$ (notar que esto es posible ya que $| C | \geq \aleph_0$). Esta construcción cumple que si $C, D \in \mathcal{C}$ son distintos, entonces $| C' \cap D' | < \aleph_0$. Si suponemos que $C' = D'$, entonces $| C' \cap D' | = \aleph_0$, pero $(C' \cap D') \subseteq (C \cap D)$, así que $C' \neq D'$, por lo cual $\mathcal{C}' = \{C' : C \in \mathcal{C}\}$ es casi-ajena y $| \mathcal{C}' | = | \mathcal{C} |$.

Recordar que dada una familia de espacios $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$, $S \in [\alpha]^{\aleph_0}$, $a \in \prod$ y consideraremos al conjunto $\mathcal{X}_S = \{x \in \prod : x(\lambda) = a(\lambda)$ si $\lambda \notin S\}$. Tenemos que $\mathcal{X}_S \subseteq \Sigma$ y además $\mathcal{X}_S$ es homeomorfo a $\prod_{\lambda \in S} X_\lambda$.

Con estos preliminares estamos preparados para calcular la cardinalidad de los Σ-productos.

TEOREMA 2.4. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Entonces*

$$|\Sigma| = \alpha^{\aleph_0} \cdot sup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} |\Pi_S|.$$

DEMOSTRACIÓN: Como es fácil ver, $\Sigma = \bigcup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} \mathcal{X}_S$. Entonces

$$|\Sigma| \leq |[\alpha]^{\aleph_0}| \cdot \sup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} |\mathcal{X}_S| = \alpha^{\aleph_0} \cdot \sup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} |\Pi_S|.$$

Por otro lado $\mathcal{X}_S \subseteq \Sigma$ para todo $S \in [\alpha]^{\aleph_0}$, así que $|\prod_S| \leq |\Sigma|$. Entonces

$$\sup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} |\Pi_S| \leq |\Sigma|$$

Si demostramos que $|\Sigma| \geq \alpha^{\aleph_0}$ podremos concluir la igualdad que queremos. Por el teorema 2.3, existe una familia $\mathcal{C} \subseteq [\alpha]^{\aleph_0}$ que es $\aleph_0$-casi ajena con $|\mathcal{C}| = \alpha^{\aleph_0}$. Sea $\mathcal{C} = \{C_\delta\}_{\delta<\alpha^{\aleph_0}}$. Para cada $\lambda < \alpha$ escogemos $b_\lambda \in X_\lambda \setminus \{a(\lambda)\}$ y definimos $\mathcal{F} = \{f_\delta \ : \ \delta < \alpha^{\aleph_0}\}$ como

$$f_\delta(\lambda) = \begin{cases} a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin C_\delta \\ b_\lambda & \text{si } \lambda \in C_\delta. \end{cases}$$

Obsérvese que $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$. Deseamos probar que $|\mathcal{F}| = \alpha^{\aleph_0}$. Para hacerlo, es suficiente demostrar que si $\delta_1 \neq \delta_2$ entonces $f_{\delta_1} \neq f_{\delta_2}$. Si $\delta_1 \neq \delta_2$ tenemos que $C_{\delta_1} \neq C_{\delta_2}$, ya que $C_{\delta_1} \cap C_{\delta_2}$ es finito. Entonces $C_{\delta_1} \setminus C_{\delta_2} \neq \emptyset$. Por definición $f_{\delta_1}(\lambda) = b_\lambda$ y $f_{\delta_2} = a(\lambda)$, por lo cual $f_{\delta_1} \neq f_{\delta_2}$. De esto resulta que $|\Sigma| \geq \alpha^{\aleph_0}$. Por todo lo anterior obtenemos que

$$|\Sigma| = \alpha^{\aleph_0} \cdot \sup_{S\in[\alpha]^{\aleph_0}} |\Pi_S|$$

□

Notemos que la diferencia entre el cardinal de un Σ-producto y la cardinalidad del producto puede ser muy grande. Por ejemplo, sea $\prod = D^{2^{\aleph_0}}$ donde D es el discreto de dos puntos, y sea Σ cualquier Σ-producto en él. Entonces $|\prod| = 2^{2^{\aleph_0}}$ y $|\Sigma| = 2^{\aleph_0}$.

2. Funciones de tipo peso y carácter en Σ-productos

En esta sección calcularemos el peso, el carácter, el peso red, el i-peso o peso débil, el π-peso, el seudocarácter y el π-carácter de un Σ-producto.

Para los Σ-productos tenemos un resultado análogo al teorema 1.17.

TEOREMA 2.5. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios y sea*

$$\phi \in \{w, nw, iw, \chi, \psi\}.$$

Entonces $\phi(\Sigma) = \alpha \cdot sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda) = \phi(\prod)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi \in \{w, nw, iw, \chi, \psi\}$. Como ϕ es monótona así que obtenemos

$$\phi(X_\lambda) \leq \phi(\Sigma) \leq \phi(\prod) = \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda).$$

De la desigualdad de la izquierda obtenemos que $\sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda) \leq \phi(\Sigma)$. La demostración concluirá si probamos que $\alpha \leq \phi(\Sigma)$.

Consideremos $\phi = nw$. Para cada $\lambda < \alpha$, escogemos V_λ subconjunto abierto de X_λ y $b_\lambda \in V_\lambda$ tales que $a(\lambda) \notin V_\lambda$. Podemos tomar $F = \{f_\lambda\}_{\lambda<\alpha} \subseteq \Sigma$ en donde f_λ está definido como

$$f_\lambda(\xi) = \begin{cases} a(\xi) & \text{si } \xi \neq \lambda \\ b_\lambda & \text{si } \xi = \lambda. \end{cases}$$

Veamos que F es discreto en Σ. Sea $f_\lambda \in F$, es claro que $\{f_\lambda\} = P_\lambda^{-1}(V_\lambda) \cap \Sigma(a) \cap F$. Entonces $nw(F) = |F|$. Usando monotonía, y como $|F| = \alpha$, obtenemos que $\alpha = nw(F) \leq nw(\Sigma(a))$.

Para cuando $\phi = \psi$. Sea $z \in \Sigma$ y sea $\mathcal{B}(z)$ una familia de abiertos de Σ tal que $\cap\mathcal{B}(z) = \{z\}$. Supongamos que $|\mathcal{B}(z)| < \alpha$. Podemos tomar a los elementos de $\mathcal{B}(z)$ de la forma $\Sigma \cap B$ en donde B es un básico canónico de $\prod$. Entonces $|\cup\{sop(B) : B\cap\Sigma \in \mathcal{B}(z)\}| \leq |\mathcal{B}(z)| \cdot \aleph_0 < \alpha$. Sea $\lambda_0 \in \alpha \setminus (\cup_{B\in\mathcal{B}(z)} sop(B))$. Ahora escogemos $x_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0} \setminus \{z(\lambda_0)\}$ y definimos

$$x(\lambda) = \begin{cases} z(\lambda) & \text{si } \lambda \neq \lambda_0 \\ x_{\lambda_0} & \text{si } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

Notemos que $x \in \Sigma$, $x \neq z$ y $P_{\lambda_0}(B \cap \Sigma(a)) = X_{\lambda_0}$ para todo $B \cap \Sigma \in \mathcal{B}(z)$. Pero $x \in \cap\mathcal{B}(z)$. Así que $\mathcal{B}(z)$ no es seudo-base local de z en Σ. Por tanto $\alpha \leq \psi(z, \Sigma) \leq \psi(\Sigma)$.

Para concluir la demostración del teorema, usemos las relaciones enunciadas en el capítulo 1:

$$\alpha \leq \psi(\Sigma) \leq iw(\Sigma)$$
$$\alpha \leq \psi(\Sigma) \leq \chi(\Sigma) \leq w(\Sigma)$$

□

Las funciones cardinales $\pi w, \pi\chi$, cumplen análoga fórmula, pero su demostración utiliza distintos argumentos, ya que estas funciones no son monótonas. En efecto, $\pi\chi(\beta(\omega)) = \pi w(\beta(\omega)) = \aleph_0$ pero $\pi\chi(\beta(\omega) \setminus \omega) = \pi w(\beta(\omega) \setminus \omega) = 2^{\aleph_0}$. También implicaremos las igualdades

$$\pi w(\prod) = \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \pi w(X_\lambda),$$

$$\pi\chi(\prod) = \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \pi\chi(X_\lambda).$$

Es interesante notar que si X es regular y S es denso siempre se tiene que $\pi w(S) = \pi w(X)$. En este teorema veremos que para los Σ-productos, se puede prescindir de la regularidad y de todas formas obtener la igualdad.

TEOREMA 2.6. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios y $\phi \in \{\pi w, \pi\chi\}$. Entonces $\phi(\Sigma) = \alpha \cdot sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda) = \phi(\prod)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.20 tenemos las desigualdades

$$\pi\chi(\Sigma) \leq \pi\chi(\prod) \text{ y } \pi w(\Sigma) \leq \pi w(\prod).$$

Además la función $P_\lambda\restriction_\Sigma$ es continua abierta y sobreyectiva. Así que por el lema 1.18, concluimos que $\phi(X_\lambda) \leq \phi(\Sigma)$ para todo $\lambda < \alpha$, esto es

$$\sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda) \leq \phi(\Sigma).$$

Para verficar la igualdad bastará demostrar que

$$\alpha \leq \phi(\Sigma(a)).$$

Procederemos de manera similar que en la demostración del teorema 2.5. Sea $z \in \Sigma$ y $\mathcal{B}$ una familia de abiertos no vacíos de Σ de la forma $B \cap \Sigma$, en donde B es un básico canónico de $\prod$. Si suponemos que $|\mathcal{B}| < \alpha$, demostraremos que $\mathcal{B}$ no es una π-base local de z. Sea $|\mathcal{B}| < \alpha$, entonces localizamos $\lambda_0 \in \alpha \setminus (\cup_{B \in \mathcal{B}} sop(B))$, $x_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0} \setminus \{z(\lambda_0)\}$ y V_{λ_0} abierto de X_{λ_0} tales que $z(\lambda_0) \in V_{\lambda_0}$ pero $x_{\lambda_0} \notin V_{\lambda_0}$. Definimos $W = P_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$. Tenemos que $B \cap \Sigma \not\subseteq W$ para todo $B \cap \Sigma \in \mathcal{B}$, sin embargo $z \in W$. Podemos concluir que no existen π-bases locales de z de cardinalidad menor que α. Por tanto $\alpha \leq \pi\chi(\Sigma)$. Ahora si $\mathcal{B}$ es como antes, también localizamos $\lambda_0 \in \alpha \setminus (\cup_B sop(B))$, y $V_{\lambda_0} \subsetneq X_{\lambda_0}$. Si $W = P_\lambda^{-1}(V_{\lambda_0})$ es fácil ver que $B \cap \Sigma(a) \not\subseteq W$ para todo $B \cap \Sigma \in B$. Usando estos resultados y argumentos análogos que antes, obtenemos que $\alpha \leq \pi w(\Sigma)$. □

Este último teorema se puede reescribir de la siguiente forma.

TEOREMA 2.7. *Sean* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios y*

$$\phi \in \{\pi w, \pi\chi\}.$$

Entonces $\phi(\Sigma_0) = \alpha \cdot sup_{\lambda<\alpha}\phi(X_\lambda) = \phi(\prod)$.

DEMOSTRACIÓN: Sólo haremos notar que $\Sigma_0(a)$ es denso en $\Sigma(a)$, y que todas las construcciones del anterior teorema, se pueden realizar en $\Sigma_0(a)$. □

3. Densidad y celularidad

Observemos primero que los subconjuntos numerables de los Σ-productos propios nunca son densos (*i.e.* los Σ-productos propios nunca son separables). En efecto, supóngase que $A \subseteq \Sigma$ es numerable donde $A = \{g_n\}_{n \in N}$. El conjunto

$$\mathcal{L} = \cup_{n<\aleph_0} sop(g_n)$$

es numerable. Como $\alpha > \aleph_0$, podemos tomar $\gamma \in \alpha \setminus \mathcal{L}$. Si O_γ es un conjunto abierto en X_γ tal que $a(\gamma) \notin O\gamma$ (recordemos que estamos considerando a Σ basado en a), entonces tenemos que $P_\gamma^{-1}(O_\gamma) \subseteq \Sigma \setminus A$. Respecto a la densidad de los Σ-productos tenemos:

TEOREMA 2.8. *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios y sea*

$$\gamma = sup_{\lambda<\alpha} d(X_\lambda).$$

Entonces $d(\Sigma) = \alpha \cdot \gamma$.

DEMOSTRACIÓN: Para $\lambda < \alpha$ sea $P_\lambda : \Sigma \longrightarrow X_\lambda$ la proyección canónica, ésta es continua y sobreyectiva, así que $d(\Sigma) \geq d(X_\lambda)$. Por tanto

$$d(\Sigma) \geq \sup_{\lambda<\alpha} d(X_\lambda) = \gamma.$$

Veamos que $d(\Sigma) \geq \alpha$. Para cada $\xi < \alpha$ escogemos $b_\xi \in X_\xi \setminus \{a(\xi)\}$ y V_ξ un conjunto abierto en X_ξ que cumple $a(\xi) \notin V_\xi$ y $b_\xi \in V_\xi$. Sea $W_\xi = P_\xi^{-1}(V_\xi)$ él cual es abierto en $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$. Para un subconjunto denso D en $\Sigma(a)$ y $f \in D$, consideremos el conjunto $H_f = \{\xi < \alpha : f \in W_\xi\}$. Afirmamos que $|H_f| \leq \aleph_0$, ya que si $f \in W_\xi$, entonces $f(\xi) \in V_\xi$, y por tanto $\xi \in sop(f)$ el cual es numerable.

Además, $\alpha = \cup_{f\in D} H_f$, ya que si $\xi < \alpha$, $W_\xi \cap D \neq \emptyset$. Calculando cardinalidades tenemos que

$$\alpha = |\cup_f H_f| \leq |D| \cdot \aleph_0 = |D|.$$

(Observe que por los comentarios anteriores al teorema, se debe tener que $|D| > \aleph_0$). Por lo tanto $\alpha \cdot \gamma \leq d(\Sigma)$.

Para demostrar la otra desigualdad bastará demostrar que existe $K \subseteq \Sigma$ denso con $|K| \leq \alpha \cdot \gamma$. Para $\xi < \alpha$, sea K_ξ un subconjunto denso en X_ξ con $|K_\xi| \leq d(X_\xi)$. Proponemos

$$K = \{f_{(d_j),J} : J \in [\alpha]^{<\aleph_0}, d_j \in K_j \text{ para cada } j \in J\} \subseteq \Sigma$$

donde

$$f_{(d_j),J}(\xi) = \begin{cases} a(\xi) & \text{si } \xi \notin J \\ d_j & \text{si } \xi = j \in J \end{cases}$$

Podemos reescribir K como $\bigcup_{J\in[\alpha]^{<\aleph_0}} K_J$ con

$$K_J = \{x \in \Sigma : x(\xi) \in K_\xi \text{ si } \xi \in J \text{ y } x(\xi) = a(\xi) \text{ si } \xi \notin J\}$$

Calculando cardinalidades tenemos que

$$|K| = |\cup_{J\in[\alpha]^{<\aleph_0}} K_J| \leq \Sigma_{J\in[\alpha]^{<\aleph_0}} \sup_{j\in J}|K_j| \leq \alpha \cdot \sup_{\xi<\alpha}|K_\xi| = \alpha \cdot \gamma.$$

Finalmente veamos que K es denso en Σ. Un abierto básico es de la forma $O = \cap_{j\in J} P_j^{-1}(O_j)$ con $J \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Escogemos $d_j \in (O_j \cap K_j)$ para cada $j \in J$ y obtenemos $f_{(d_j),J} \in O$. □

Si X_λ es el discreto de dos puntos para todo $\lambda < 2^{\aleph_0}$ y Σ es cualquier Σ-producto de esta familia, aplicando las fomulas anteriores tenemos: $d(\prod_{\lambda<2^{\aleph_0}} X_\lambda) = \log(2^{\aleph_0}) = \aleph_0$ y $d(\Sigma) = 2^{\aleph_0}$, asi que $d(\prod_{\lambda<2^{\aleph_0}} X_\lambda) < d(\Sigma)$. Recuerde que en general si Y es un subespacio denso de un espacio X, $d(X) \leq d(Y)$, pues cualquier denso de Y es denso de X. Pero con este ejemplo, mostramos que en general la densidad del producto Tychonoff y el Σ-producto puede no coincidir.

Observemos que también para los Σ-productos la ecuación

$$\phi(\Sigma) = \alpha \cdot \sup_{\lambda<\alpha} \phi(X_\lambda)$$

se cumple para $\phi = d$. Lo cual no se cumple para el caso del producto.

Pasemos ahora a considerar la celularidad de los Σ-productos.

Es fácil demostrar que si Y es un subespacio denso de X entonces $c(Y) = c(X)$. Asi que tenemos:

TEOREMA 2.9. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces*

$$c(\Sigma) = c(\prod) = sup_{J\in[\alpha]^{<\aleph_0}} c(\Pi_J).$$

DEMOSTRACIÓN: Σ es denso en $\prod$, entonces $c(\Sigma) = c(\prod)$. Para la segunda igualdad, como la proyección $P_J : \prod \to \Pi_J$, donde $J \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, es continua y sobreyectiva, si $\{O_\xi\}_{\xi\in A}$ es una familia celular de Π_J, entonces $\{P_J^{-1}(O_\xi)\}_{\xi\in A}$ es una familia celular de $\prod$, y $|\{O_\xi\}_{\xi\in A}| = |\{P_J^{-1}(O_\xi)\}_{\xi\in A}|$. Así que $c(\Pi_J) \leq c(\prod)$ y por tanto

$$\sup\{c(\Pi_J) : J \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} \leq c(\prod).$$

Denotemos

$$\kappa = \sup\{c(\Pi_J) : J \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}.$$

Si

$$\kappa < c(\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda),$$

entonces existe una familia celular $\mathcal{G} = \{G_\xi\}_{\xi<\kappa^+}$ de $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$; podemos suponer que tal familia está compuesta por abiertos canónicos. Sea $G_\xi = \cap_{\lambda\in F_\xi} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\xi)$ donde $F_\xi \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, $O_\lambda^\xi \subset X_\lambda$ es un abierto de X_λ para cada $\lambda \in F_\xi$. Por el lema de la raíz (Teorema 1.8) existen $J_0 \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $A \subseteq \kappa^+$ con $|A| = \kappa^+$, tales que $F_{\xi_1} \cap F_{\xi_2} = J_0$ para cualesquiera $\xi_1, \xi_2 \in A$ diferentes. Notemos que $J_0 \neq \emptyset$, ya que la familia $\mathcal{G}$ es celular. Afirmamos que $\{P_{J_0}(G_\xi)\}_{\xi\in A}$, es una familia celular de X_{J_0}. En efecto, si $x_0 \in P_{J_0}(G_{\xi_1}) \cap P_{J_0}(G_{\xi_2})$, escogemos arbitrarios $l_\lambda \in O_\lambda^{\xi_1}$ para $\lambda \in F_{\xi_1} \setminus F_{\xi_2}$, $t_\lambda \in O_\lambda^{\xi_2}$ para $\lambda \in F_{\xi_2} \setminus F_{\xi_1}$, $r_\lambda \in X_\lambda$ para $\lambda \notin F_{\xi_1} \cup F_{\xi_2}$. S ea $x \in \prod$ definido como

$$x(\lambda) = \begin{cases} x_0(\lambda) & \text{si } \lambda \in J_0 \\ l_\lambda & \text{si } \lambda \in F_{\xi_1} \setminus F_{\xi_2} \\ t_\lambda & \text{si } \lambda \in F_{\xi_2} \setminus F_{\xi_1} \\ r_\lambda & \text{si } \lambda \notin F_{\xi_1} \cup F_{\xi_2} \end{cases}$$

Es claro que $x \in G_{\xi_1} \cap G_{\xi_2}$, lo cual es una contradicción. Así que la familia $\{P_{J_0}(G_\xi)\}_{\xi\in A}$ *es celular y por tanto* $\kappa^+ \leq c(\Pi_{J_0})$, lo cual *no* es posible dada la definición de κ. □

Es importante hacer notar que la segunda igualdad en el teorema anterior no puede ser mejorada, ya que la linea de Suslin es un espacio topológico de celularidad numerable cuyo cuadrado no tiene celularidad numerable (ver R. Hodel [**18**] pg 43).

4. Las funciones hereditarias hc, hl y hd

Sabemos que las funciones hereditarias son interesantes por su monotonía, es decir se comportan bien en los subespacios. En esta sección veremos que la función amplitud, la cual es la función hereditaria de la celularidad, hl y hd en los Σ-productos y en el producto Tychonoff completo coinciden.

Ahora iniciamos la evaluación de la función amplitud en los Σ-productos.

TEOREMA 2.10. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios y*

$$\gamma = sup\{s(X_\lambda) : \lambda < \alpha\},$$

entonces

$$s(\prod) = s(\Sigma_0) = s(\Sigma) = \alpha \cdot sup\{s(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0} \leq \alpha \cdot 2^\gamma$$

.

DEMOSTRACIÓN: Como s es monótona

$$\sup\{s(\Pi_F) : F\ [\alpha]^{<\aleph_0}\} \leq s(\Sigma_0) \leq s(\Sigma) \leq s\left(\prod\right).$$

Ahora demostraremos que $\alpha \leq s(\Sigma_0)$. Para $\lambda < \alpha$, sea $b_\lambda \in X_\lambda \setminus \{a(\lambda)\}$ y sea $h_\lambda \in \Sigma(a)$ definida por

$$h_\lambda(\xi) = \begin{cases} a(\lambda) & \text{si } \lambda \neq \xi \\ b_\lambda & \text{si } \lambda = \xi. \end{cases}$$

Tenemos que $H = \{h_\lambda\}_{\lambda<\alpha} \subset \Sigma_0$ tiene cardinalidad α y es discreto, como ya se probó en la demostración del teorema 2.5. Por lo tanto $\alpha \leq s(\Sigma_0)$, en resumen

$$\alpha \cdot \sup\{s(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} \leq s(\Sigma_0).$$

Para concluir las igualdades bastará demostrar que

$$s(\prod) \leq \alpha \cdot \sup\{s(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}.$$

Sea $Z = \{t_\xi : \xi < \beta\}$ un conjunto discreto de $\prod$. Para todo $\xi < \beta$, tomamos $O_\xi = \cap_{\lambda\in F_\xi} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\xi)$ un abierto canónico de $\prod$ tal que $O_\xi \cap Z = \{t_\xi\}$. Para cada cada $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, definimos $\mathcal{F}_F = \{O_\xi : F_\xi \subset F\}$. Afirmamos que para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, el conjunto $Z_F = \{P_F(t_\xi) : O_\xi \in \mathcal{F}_F\}$ es discreto en $\prod_F$. Bastará demostrar que para todo $t_\xi \in Z$ se tiene que $Z_F \cap P_F(O_\xi) = \{P_F(t_\xi)\}$. Pero si $P_F(t_\xi), P_F(t_{\xi'}) \in Z_F \cap P_F(O_\xi)$ y distintos, entonces $t_\xi, t_{\xi'} \in O_\xi$, lo cual no es posible. Pero además, $Z = \cup_{F\in[\alpha]^{<\aleph_0}}\{t_\xi : O_\xi \in \mathcal{F}_F\}$, entonces $|Z| \leq \alpha \cdot \sup\{s(\prod_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$. Y finalmente $s(\prod) \leq \alpha \cdot \sup\{s(\prod_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$.

La desigualdad $s(\prod) \leq \alpha \cdot 2^\gamma$, fue demostrada por Hajnal y Juhaz (ver I. Juház[**22**] pgs.109-112). □

Aprovecharemos la construcción del conjunto H en él teorema anterior, que nos provee de un subconjunto de Σ_0 discreto y de cardinalidad α, para realizar las demostraciónes de los siguientes teoremas.

TEOREMA 2.11. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces*

$$\alpha \cdot sup\{hl(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} = hl(\Sigma_0) = hl(\Sigma) = hl(\Pi)$$

DEMOSTRACIÓN: Aquí también la monotonía es usada para obtener

$$hl(\Pi) \geq hl(\Sigma) \geq hl(\Sigma_0) \geq \sup\{hl(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}.$$

Como $H \subset \Sigma_0$ es discreto y de cardinalidad α, $l(H) = \alpha$; de aqui que

$$hl(\Sigma_0) \geq \alpha \cdot \sup\{\Pi_F : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$$

Demostraremos ahora que $hl(\prod) \leq \alpha \cdot \sup\{hl(\prod_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$. Sea $Y \subset \prod$ y $\mathcal{F} = \{O_\delta \cap Y : \delta < \beta\}$ una cubierta de conjuntos abiertos de Y, donde $O_\delta = \cap_{\lambda\in F_\delta} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\delta)$ es un abierto canónico de $\prod$. Para cada $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, tomamos $\mathcal{F}_F = \{O_\delta : F_\delta \subset F\}$, $\mathcal{F}'_F = \{P_F(O_\delta) : O_\delta \in \mathcal{F}_F\}$ y $Y_F = \{x \in \prod : x \in O_\delta \text{ y } O_\delta \in \mathcal{F}_F\}$. Por las definiciones tenemos que $\mathcal{F}'_F$ es una cubierta de $P_F(Y_F)$. Obtenemos $\mathcal{F}_F^1 \subset \mathcal{F}'_F$ cubierta de $P_F(Y_F)$ tal que $|\mathcal{F}_F^1| \leq hl(\prod_F)$. Sea $\mathcal{H}_F = \{O_\delta \cap Y \in \mathcal{F} : P_F(O_\delta) \in \mathcal{F}_F^1\}$. Si

$$\mathcal{H} = \cup_{F\in[\alpha]^{<\aleph_0}} \mathcal{H}_F.$$

Es fácil ver que $\mathcal{H}$ es una cubierta de Y. Y como $|\mathcal{H}| \leq \alpha \cdot \sup\{hl(\prod_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$, obtenemos la desigualdad deseada. □

TEOREMA 2.12. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces*

$$\alpha \cdot sup\{hd(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} = hd(\Sigma_0) = hd(\Sigma) = hd(\Pi)$$

DEMOSTRACIÓN: Considerando de nuevo al subcojunto discreto H de Σ_0 construido en la demostración del teorema 2.10, tenemos que $d(H) = \alpha$. Así que $\alpha \leq hd(\Sigma_0)$. Ahora por la monotonía de la función hd se cumple que

$$\sup\{hd(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0} \leq hd(\Sigma_0) \leq hd(\Sigma) \leq hd(\Pi).$$

Por tanto

$$\alpha \cdot \sup\{hd(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\} \leq hd(\Sigma_0).$$

Bastara demostrar que $hd(\prod) \leq \alpha \cdot \sup\{hd(\prod_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}$. Sea $Y \subset \prod$. Para cada $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, tomamos un conjunto denso $D_F \subset P_F(Y)$ tal que

$$|D_F| \leq d(P_F(Y)) \leq hd(\Pi_F).$$

Por cada $y \in D_F$ tomamos $x_y \in Y$ tal que $P_F(x_y) = y$. Tomamos $D'_F = \{x_y \in Y : y \in D_F\}$ y $D = \cup_{F \in [\alpha]^{<\aleph_0}} D'_F$. Es claro que

$$|D| \leq \alpha \cdot \sup\{hd(\Pi_F) : F \in [\alpha]^{<\aleph_0}\}.$$

Demostraremos que D es denso en Y. Sea $O = \cap_{\lambda \in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ un conjunto abierto canónico no vacío de $\prod$. Entonces existe $y \in P_F(O) \cap D_F$, por tanto existe $x_y \in Y$ tal que $P_F(x_y) = x$, entonces $x_y \in D'_F$, es claro que $x_y \in O$. □

5. Calibres y precalibres en Σ-productos

En esta sección calcularemos el número de Šanin y el precalibre de los Σ-productos, encontrando interesantes fórmulas.

TEOREMA 2.13. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces*

$$Precal(\Pi) = mín\{\kappa \in Card : \kappa \text{ es infinito y } \kappa^+ \text{ es precalibre de } X_\lambda \text{ para todo } \lambda < \alpha\}$$

y

$$\check{S}(\Pi) = min\left\{\kappa \in Card : \kappa \text{ es infinito y } \kappa^+ \text{ es calibre de } X_\lambda \text{ para todo } \lambda < \alpha\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Usando el lema 1.22, obtenemos las dos igualdades. □

Si además demostramos los siguientes lemas, lograremos una evaluación del número de Šanin de un Σ-producto.

LEMA 2.14. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios y $\aleph_0 < \beta \leq \alpha$, entonces β no es calibre de Σ.*

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos que existe una familia $\mathcal{F}$ de abiertos en $\prod$ no vacíos indicada por β, la cual cumple que la intersección de cualquiera de sus subfamilias indicada por β, tiene una intersección vacía con Σ. Para tal fin tomemos $P_\delta^{-1}(V_\delta) = O_\delta$ donde V_δ es un abierto no vacío en X_δ con $a(\delta) \notin V_\delta$ para cada $\delta < \beta$. Entonces $\mathcal{F} = \{O_\delta\}_{\delta<\beta}$ es una familia de abiertos no vacíos en $\prod$; esta familia cumple lo deseado. En efecto, si $\{O_{\delta_\epsilon}\}_{\epsilon<\beta}$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ de cardinalidad β y $z \in (\cap\{O_{\delta_\epsilon}\}_{\epsilon<\beta}) \cap \Sigma$, entonces $\{\delta_\epsilon\}_{\epsilon<\beta} \subseteq Sop(z)$, pero $\left|\{\delta_\epsilon\}_{\epsilon<\beta}\right| = \beta$ y $|Sop(z)| \leq \aleph_0$. Lo cual es una contradicción. □

LEMA 2.15. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios, entonces*

$$\check{S}(\Sigma) \geq \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Notar que si $\aleph_0 \leq \check{S}(\Sigma) < \alpha$, entonces $\check{S}(\Sigma)^+ \leq \alpha$. Además por definición, $\check{S}(\Sigma)^+$ es un calibre de Σ, lo cual, por el lema anterior, es imposible. $\square$

LEMA 2.16. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios y* γ *es un cardinal regular que es calibre de* Σ, *entonces* γ *es calibre de* X_λ *para todo* $\lambda < \alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Si γ es calibre de Σ, por la densidad, γ es calibre de $\prod$, por tanto, por el lema 1.22, γ es un calibre de X_λ para todo $\lambda < \alpha$. $\square$

LEMA 2.17. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios, entonces*

$$\check{S}(\Sigma) \geq min\left\{m \in Card : m \geq \alpha \text{ y } m^+ \text{ es calibre de } X_\lambda \text{ para todo } \lambda < \alpha\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se obtiene la demostración usando los dos últimos lemas. $\square$

TEOREMA 2.18. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios, entonces*

$$\check{S}(\Sigma) = min\left\{m \in Card : m \geq \alpha \text{ y } m^+ \text{ es calibre de } X_\lambda \text{ para todo } \lambda < \alpha\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por lo anterior bastará demostrar que si $m \geq \alpha$ y m^+ es un calibre de X_λ para todo $\lambda < \alpha$, entonces m^+ es un calibre de Σ. Para esto bastará tomar una familia arbitraria de básicos canónicos, digamos $\mathcal{O} = \{O_\zeta\}_{\zeta<m^+}$ donde $O_\zeta = \cap_{\delta\in F_\zeta} P_\delta^{-1}\left(O_\delta^\zeta\right)$, $F_\zeta \subset \alpha$ finito y O_δ^ζ es abierto de X_δ para todo $\delta \in F_\zeta$. Notemos que $\mathcal{O} = \cup_{n<\aleph_0} \mathcal{C}_n$ donde $\mathcal{C}_n = \{O_\zeta \in \mathcal{O} : |F_\zeta| = n\}$. Por la regularidad de m^+, para alguna n, $|\mathcal{C}_n| = m^+$. Así que podemos suponer que para todo $\zeta < m^+$, $|F_\zeta| = n$. Usando el lema 1.9, aseguramos que existen $A \subset m^+$, $f \subset \alpha$, $f \neq \emptyset$, tales que $f = F_\zeta$ para cualesquiera $\zeta \in A$. Como m^+ es un calibre de $\prod_{\delta\in f} X_\delta$, entonces existe $B \subset A$ con $|B| = m^+$ y $x_f \in \cap_{\zeta\in B} P_f(O_\zeta)$. Definimos $x \in \Sigma(a)$ como

$$x(\delta) = \begin{cases} x_f(\delta) & \text{si } \delta \in f \\ a(\delta) & \text{si } \delta \notin f \end{cases}$$

Resulta entonces que, por la construcción, $x \in \cap_{\zeta\in B} O_\zeta$. $\square$

Usando el lema 2.13, podemos concluir el siguiente teorema:

TEOREMA 2.19. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios, entonces*

$$Precal(\Sigma) = Precal\left(\prod\right);$$

o sea, $Precal(\Sigma) = mín\{\kappa \in Card. : \kappa^+ \text{ es precalibre de } X_\lambda \text{ para todo } \lambda < \alpha\}$.

EJEMPLO 2.20. *Antes de finalizar esta sección, presentaremos un espacio topológico y un calibre de él, el cual no es calibre de un subespacio denso del espacio dado. Notemos que $\aleph_1$ es un calibre de $[0,\omega_0)$. En efecto, si*

$$\mathcal{F} = \{(a_\delta, b_\delta] : a_\delta, b_\delta < \omega_0 \text{ y } \delta < \aleph_1\}$$

es una familia de abiertos básicos de $[0,\omega_0)$. Tomamos $F_\delta = \{a_\delta, b_\delta\}$ para todo $\delta < \aleph_1$, estamos en condiciones de usar el teorema 1.9 y concluir la existencia de $A \subset \aleph_1$ con $|A| = \aleph_1$ y de $F = \{a,b\} \subset \omega$ tales que $a = a_\delta, b = b_\delta$ para todo $\delta \in A$. Por tanto si $\mathcal{F}' = \{(a_\delta, b_\delta] : \delta \in A\}$, entonces

$$\cap\mathcal{F}' = (a,b] \neq \emptyset$$

Sea $Y = [0,\omega_0)^\alpha$, donde $\alpha > \aleph_1$, si Σ es un Σ-producto de Y. Por el lema 1.22, tenemos que $\aleph_1$ es un calibre de Y, por el lema 2.14, $\aleph_1$ no puede ser calibre de Σ. Aun más, si $\aleph_0$ fuera calibre de Σ, por lema 2.16, $\aleph_0$ sería calibre de $[0,\omega_0)$, pero la familia $\{(\delta,\omega_0) : \delta < \omega_0\}$, cumple que cualquiera de sus subfamilia de cardinalidad $\aleph_0$ tiene intersección vacía. Por todo lo anterior y usando el teorema 2.18 , tenemos

$$\check{S}(Y) = \aleph_0 \text{ pero } \check{S}(\Sigma) > \aleph_1$$

Así que en general el número de Šanin del producto y del Σ-producto pueden no coincidir, sin embargo combinando los teoremas 2.13 y 2.18 obtenemos que en general

$$\check{S}(\prod) \leq \check{S}(\Sigma)$$

6. La estrechez en Σ-productos

Presentaremos ahora una acotación para la estrechez de Σ. Antes de demostrar un teorema más general, demostremos el lema siguiente.

LEMA 2.21. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, $\beta \in$ Card tal que $\beta < \alpha$ y $t(\Pi_F) \leq \beta$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, entonces $t(\Sigma_\beta) \leq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \Sigma_\beta$ y sea $x \in cl_{\Sigma_\beta}(A)$, donde $A \subset \Sigma_\beta$. Demostraremos que existe $A_0 \subset A$ con $|A_0| \leq \beta$ y además $x \in cl_{\Sigma_\beta}(A_0)$. Diseñaremos una construcción inductiva. Para $n = 0$, como $|sop(x)| \leq \beta$, escogemos $R_0 = sop(x)$, así que $|R_0| \leq \beta$. Ahora supóngase que ya se tiene $R_n \subset \alpha$ con $|R_n| \leq \beta$. Por el teorema 1.23, $t\left(\prod_{R_n}\right) \leq \beta$. Como $P_{R_n}(x) \in cl_{\prod_{R_n}}(P_{R_n}(A))$, existe $M_n \subset P_{R_n}(A)$, con $|M_n| \leq \beta$ y $P_{R_n}(x) \in cl_{\prod_{R_n}}(M_n)$. Ahora construimos $T_n \subset A$, de la manera siguiente: por cada $z \in M_n$, escogemos $z' \in P_{R_n}^{-1}(z) \cap A$, y $T_n = \{z' : z \in M_n\}$. Es claro que $|T_n| \leq \beta$. Pero también $P_{R_n}(x) \in Cl_{\prod_{R_n}}(P_{R_n}(T_n))$, ya que si $P_{R_n}(x) \in O$ y O es un abierto de $\prod_{R_n}$, entonces existe $z \in M_n \cap O$; para $z' \in T_n$ se cumple que $P_{R_n}(z') = z \in O$, así que $O \cap P_{R_n}(T_n) \neq \emptyset$. Sea $R_{n+1} = R_n \cup (\cup_{z' \in T_n} sop(z'))$. Como $|sop(z')| \leq \beta$ para todo $z' \in T_n$, tenemos que $|R_{n+1}| \leq \beta$.

Ahora definimos $A_0 = \cup_{n<\aleph_0} T_n$; por construcción tenemos $|A_0| \leq \beta$. Sólo resta demostrar que $x \in cl_{\Sigma_\beta}(A_0)$. Sea $V = \left(\cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right) \cap \Sigma_\beta$, un abierto de Σ_β que contiene a x donde $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$. Tenemos un primer caso: $F \subset \cup_{n<\aleph_0} R_n$. Entonces, existe n_0 tal que $F \subset R_{n_0}$. Por construcción $P_{R_{n_0}}(x) \in P_{R_{n_0}}(V)$, entonces existe $z \in M_{n_0} \cap P_{R_{n_0}}(V)$. Tomamos $z' \in P_{R_{n_0}}^{-1}(z) \cap A$. Como $P_{R_{n_0}}(z') = z$ y $z \in P_{R_n}(V)$, entonces $z'_{n_0} \in V$, así que $V \cap A_0 \neq \emptyset$.

Caso dos, si $F_1 = F \setminus \cup_{n<\aleph_0} R_n \neq \emptyset$. Consideramos los conjuntos

$$F_2 = F \cap (\cup_{n<\aleph_0} \dot{R_n}),$$
$$V_1 = \left(\cap_{\lambda\in F_1} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right) \cap \Sigma_\beta,$$
$$V_2 = \left(\cap_{\lambda\in F_2} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right) \cap \Sigma_\beta.$$

Es claro que $V = V_1 \cap V_2$ si $F_2 \neq \emptyset$; en caso contrario $V = V_1$. Notemos además que si $\lambda \in F_1$ entonces $\lambda \notin sop(x)$, y por tanto $a(\lambda) = x(\lambda) \in O_\lambda$. Ahora bien si $F_2 = \emptyset$, tomamos $z_0' \in T_0$ y como $F = F_1$ y $sop(z_0') \cap F = \emptyset$, para todo $\lambda \in F$, $z_0'(\lambda) = a(\lambda) \in O_\lambda$. Finalmente $z_0' \in V$. Si ahora $F_2 \neq \emptyset$, procediendo como en el primer caso, obtenemos $z_{n_0}' \in T_{n_0} \cap V_2$, pero también $z_{n_0}' \in V_1$, ya que para todo $\lambda \in F_1$, $\lambda \notin sop(z_{n_0}')$, o sea $z_{n_0}'(\lambda) = a(\lambda) \in O_\lambda$, y finalmente $z_{n_0}' \in V$. □

Ahora podemos suprimir la hipótesis que limita a β.

TEOREMA 2.22. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios topológicos, $\beta \in Card$ y para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ se tiene que $t(\Pi_F) \leq \beta$, entonces $t(\Sigma_\gamma) \leq \beta$ para todo $\gamma \leq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha \leq \beta$, usamos el lema 1.23, y tenemos que $t\left(\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda\right) \leq \beta$. Ahora, usando la monotonía y que $\Sigma_\gamma \subseteq \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$, concluimos que $t(\Sigma_\gamma) \leq \beta$.

Si $\beta < \alpha$, usamos el lema 2.21 para concluir que $t(\Sigma_\beta) \leq \beta$. Como $\Sigma_\gamma \subseteq \Sigma_\beta$, aplicamos monotonía para concluir que $t(\Sigma_\gamma) \leq \beta$. □

COROLARIO 2.23. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios métricos. Entonces*

$$t(\Sigma) = \aleph_0.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, tenemos que $\prod_{\lambda\in F} X_\lambda$ es métrico, así que

$$t(\prod_{\lambda\in F} X_\lambda) = \aleph_0.$$

Usando el teorema 2.22, tenemos que $t(\Sigma(a)) = \aleph_0$. □

7. El grado de Lindelöf en los Σ-productos

El lema de Le Donne (ver [**30**] pg. 96), nos proporciona una acotación del grado de Lindelöf de un Σ-producto. Enseguida presentamos un teorema que mejora tal lema.

TEOREMA 2.24. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios, y $\beta < \alpha$. Si para todo $S \in [\alpha]^\beta$, $l(\Pi_S) \leq \beta^+$, entonces $l(\Sigma_\beta) = \beta^+ \cdot sup\{l(\Pi_S) : S \in [\alpha]^\beta\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Para $M \subseteq \alpha$ recordar que

$$\mathcal{X}_M = \{x \in \Sigma : sop(x) \subseteq M\}.$$

Si $|M| \leq \beta^+$, podemos escribir $M = \{m_\gamma\}_{\gamma<\beta^+}$. Entonces $\mathcal{X}_M = \cup_{\gamma<\beta^+} \mathcal{X}_{M_\gamma}$, donde $M_\gamma = \{m_\delta : \delta < \gamma\}$, ya que si $z \in \mathcal{X}_M$ y $sop(z) = \{m_{\gamma_\delta}\}_{\delta<\beta}$, entonces $\gamma_0 = \sup\{\gamma_\delta\}_{\delta<\beta} < \beta^+$, y además $sop(z) \subseteq M_{\gamma_0}$, así que $z \in \mathcal{X}_{M_{\gamma_0}}$; la otra contención es trivial.

Usando la hipotésis del teorema, obtenemos que $l(\mathcal{X}_{M_\gamma}) \leq \beta^+$. Si $\mathcal{O} = \{V_\mu\}_{\mu\in A}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{X}_M$, entonces $\mathcal{O}_\gamma = \left\{V_\mu \cap \mathcal{X}_{M_\gamma}\right\}_{\mu\in A}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{X}_{M_\gamma}$. Sea $A_\gamma \subseteq A$ tal que $|A_\gamma| \leq \beta^+$ y $\left\{V_\mu \cap \mathcal{X}_{M_\gamma}\right\}_{\mu\in A_\gamma}$ es una cubierta de $\mathcal{X}_{M_\gamma}$. Tomamos $\{V_\mu\}_{\mu\in\cup_\gamma A_\gamma}$, Afirmamos que esta familia es una cubierta de $\mathcal{X}_M$. En efecto, si $x \in \mathcal{X}_M$ entonces $x \in \mathcal{X}_{M_{\gamma_0}}$ para alguna $\gamma_0 \leq \beta^+$, y existe $\mu \in A_{\gamma_0}$ tal que $x \in V_\mu \cap \mathcal{X}_{M_{\gamma_0}}$. Como $|\cup_\gamma A_\gamma| \leq \beta^+$, concluimos que $l(\mathcal{X}_M) \leq \beta^+$.

En el caso en que $\alpha \leq \beta^+$, $\mathcal{X}_\alpha = \Sigma_\beta$, de lo dicho en el parrafo anterior el teorema queda demostrado. Veamos el caso en que $\alpha > \beta^+$. Para este caso demostraremos que si $\{U_\varphi\}_{\varphi\in\Delta}$ es una familia de básicos canónicos con $\Sigma_\beta \subseteq (\cup_{\varphi\in\Delta}U_\varphi)$, entonces existe $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que $|\Delta'| \leq \beta^+$ y además $(\cup_{\varphi\in\Delta'}U_\varphi) \supseteq \Sigma_\beta$. Para cada $\varphi \in \Delta$, U_φ es de la forma $\cap_{\lambda\in K_\varphi} P_\lambda^{-1}(O_\lambda^\varphi)$ donde $K_\varphi \subseteq \alpha$ es finito y $O_\lambda^\varphi \subset X_\lambda$ es abierto para cada $\lambda \in K_\varphi$.

Usando inducción transfinita probaremos que para todo $\gamma < \beta^+$ existen $I_\gamma \subseteq \alpha$ y $\Delta_\gamma \subseteq \Delta$ tales que

1. $|I_\gamma| \leq \beta^+, |\Delta_\gamma| \leq \beta^+$,
2. si $\beta < \gamma$ entonces $I_\beta \subseteq I_\gamma$,
3. $I_{\gamma+1} \supseteq \cup_{\varphi\in\Delta_\gamma} K_\varphi$,
4. $\mathcal{X}_{I_\gamma} \subseteq \cup_{\varphi\in\Delta_\gamma} U_\varphi$.

Para $\gamma = 0$, seleccionamos $I_0 \subset \alpha$ tal que $|I_0| \leq \beta^+$. Por el resultado que demostramos, existe $\Delta_0 \subseteq \Delta$ tal que $|\Delta_0| \leq \beta^+$ y además $\mathcal{X}_{I_0} \subseteq \cup_{\varphi\in\Delta_0} U_\varphi$.

Supongamos que hemos realizado la construcción para todo $\xi < \gamma < \beta^+$. Definimos

$$I_\gamma = \cup_{\xi<\gamma}\left(I_\xi \cup \left(\cup_{\varphi\in\Delta_\xi} K_\varphi\right)\right).$$

Es claro que $|I_\gamma| \leq \beta^+$. Usando los mismos argumentos que antes, es posible obtener $\Delta_\gamma \subseteq \Delta$ tal que $|\Delta_\gamma| \leq \beta^+$ y $\mathcal{X}_{I_\gamma} \subseteq \cup_{\varphi\in\Delta_\gamma} U_\varphi$. Por construcción 1,2 y 4 se cumplen, y como para el caso $\gamma + 1$ usaríamos el mismo esquema, entonces se cumple 3.

Con estas familias de conjuntos ya construidas, definimos $\overline{\Delta} = \cup_{\gamma<\beta^+}\Delta_\gamma$ e $I = \cup_{\gamma<\beta^+} I_\gamma$. Afirmamos que $\mathcal{X}_I \subset \cup_{\varphi\in\overline{\Delta}} U_\varphi$, ya que si $z \in \mathcal{X}_I$, $sop(z) \subseteq I$, entonces para cada $\lambda \in sop(z)$ existe $\gamma_\lambda < \beta^+$, que cumple $\lambda \in I_{\gamma_\lambda}$. Como $|sop(z)| \leq \beta$, tenemos que $\gamma_0 = \left(sup_{\lambda\in sop(z)}\gamma_\lambda\right) < \beta^+$, y por 2 tenemos que $sop(z) \subseteq I_{\gamma_0}$. Lo que nos lleva a concluir que $z \in \mathcal{X}_{I_{\gamma_0}}$. Entonces existe $\varphi \in \Delta_{\gamma_0} \subset \overline{\Delta}$ tal que $z \in U_\varphi$.

Es más, aseguramos que $\Sigma_\beta(a) \subseteq \cup_{\varphi\in\overline{\Delta}} U_\varphi$. En efecto, sea $x \in \Sigma_\beta(a)$. Si $sop(x) \cap I = \emptyset$, entonces $a(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$ y $a \in \mathcal{X}_I$. Si $sop(x) \cap I \neq \emptyset$, podemos definir :

$$q(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) & \text{si } \lambda \in sop(x) \cap I \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin sop(x) \cap I \end{cases}$$

Notemos que $q \in \mathcal{X}_I$, además $q(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$. En resumen, podemos decir que siempre existe $q \in \mathcal{X}_I$, tal que $q(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$. Por construcción, existe $\varphi \in \Delta_\gamma \subseteq \overline{\Delta}$ tal que $q \in U_\varphi$. Como $K_\varphi \subset I_{\gamma+1} \subset I$, entonces $q(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in K_\varphi$, así que $x \in U_\varphi$; y como $|\overline{\Delta}| \leq \beta^+$, queda demostrado que

$$l(\Sigma_\beta) \leq \beta^+.$$

Es claro que la igualdad se demostrará si probamos que

$$\alpha \cdot \sup\{l(\Pi_S) : S \in [\alpha]^\beta\} \leq l(\Sigma_\beta).$$

Pero la funcion cardinal es monótona en conjuntos cerrados. Como $\prod_S$ es un conjunto cerrado en Σ_β para todo $S \in [\alpha]^\beta$, así que

$$\sup\{l(\Pi_S) : S \in [\alpha]^\beta\} \leq l(\Sigma_\beta).$$

La demostración estaría completa si $\beta^+ \leq l(\Sigma_\beta)$. Para todo $\lambda < \alpha$, sea O_λ un conjunto abierto de X_λ, tal que $b_\lambda \notin O_\lambda$ pero $a(\lambda) \in O_\lambda$. Es claro que $\mathcal{F} = \{P_\lambda^{-1}(O_\lambda) : \lambda < \alpha\}$ es una cubierta de conjuntos abiertos de Σ_β. Sea $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}'| \leq \beta$. Definimos $p \in \Sigma_\beta$, como

$$p(\lambda) = \begin{cases} b_\lambda & \text{si } P_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{F}' \\ a(\lambda) & \text{si } P_\lambda^{-1}(O_\lambda) \notin \mathcal{F}' \end{cases}$$

Es claro que $p \notin \cup\mathcal{F}'$, así que $|\mathcal{F}'|$, no es cubierta de Σ_β, asi que $\beta^+ \leq l(\Sigma_\beta)$ □

En esta sección, obtendremos σ-productos que son espacios topológicos Lindelöf. Sin embargo en capítulos posteriores demostraremos que ningún Σ-producto es paracompacto. Así que estos Σ-productos no llegan a paracompactos pero tienen un subespacio denso Lindelöf.

Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios y $a \in \prod$, tomemos $\sigma_n = \{x \in \Sigma_0(a) : |sop(x)| \leq n\}$ para todo $n \in N$. Así que $\Sigma_0(a) = \cup_{i\in N}\sigma_i$. También usaremos la notación siguiente, sea $A \subset \alpha$ y $n \in N$ denotaremos

$$\sigma_n^A = \{x \in \Sigma_0(a) : |\{\lambda \in \alpha \setminus A : x(\lambda) \neq a(\lambda)\}| \leq n\},$$

o bien si $A = \{\lambda\}$ para algún $\lambda < \alpha$, tomaremos $\sigma_n^{\{\lambda\}} = \sigma_n^\lambda$

TEOREMA 2.25. *Si $\mathcal{F} = \{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, tales que $l(\Pi_F) = \aleph_0$ para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, entonces $l(\Sigma_0) = \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN: Afirmamos que para toda $\lambda < \alpha$ y $n \in N$ se tiene que $\sigma_n^\lambda \times X_\lambda$ es Lindelöf. Para $n = 0$, $\sigma_0^\lambda \times X_\lambda$ es homeomorfo a X_λ. Ahora supongamos que $\sigma_n^\lambda \times X_\lambda$ es Lindelöf. Sea $\mathcal{O} = \{O_\xi : \xi < \beta\}$ una cubierta de $\sigma_{n+1}^\lambda \times X_\lambda$ formada por conjuntos abiertos canónicos en $\prod$. Sea $\mathcal{O}' = \{O_{\xi_i} : i \in N\} \subset \mathcal{O}$, tal que $\sigma_n^\lambda \times X_\lambda \subset \cup\mathcal{O}'$. Tomamos $O_{\xi_i} = \cap_{\delta\in F_{\xi_i}} P_\delta^{-1}(O_\delta^{\xi_i}) \times W_{\xi_i}$, donde $F_{\xi_i} \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, $O_\delta^{\xi_i}$ es un conjunto abierto en X_δ y W_{ξ_i} es un conjunto abierto en X_λ. Para cada $\delta \in F_{\xi_i}$, tomamos

$$H_\delta^{\xi_i} = \{(x, z) \in \sigma_{n+1}^\lambda \times X_\lambda : x(\delta) \notin O_\delta^{\xi_i}, P_{\alpha\setminus\{\lambda\}}(x) \in \sigma_n^\lambda, z \in X_\lambda\}.$$

Si tomamos $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F} \setminus \{X_\delta, X_\lambda\}) \cup ((X_\delta \setminus O_\delta^{\xi_i}) \times X_\lambda)$, esta familia tambien cumple que sus caras finitas son Lindelöf. Si el factor δ de la familia $\mathcal{F}_1$, lo tomamos igual a $(X_\delta \setminus O_\delta^{\xi_i}) \times X_\lambda)$, entonces su correspondiente $\sigma_n^\delta \times ((X_\delta \setminus O_\delta^{\xi_i}) \times X_\lambda)$ es homeomorfo a $H_\delta^{\xi_i}$. Usando la hipótesis inductiva tenemos que $H_\delta^{\xi_i}$ es Lindelöf. El teorema queda demostrado si

$$\sigma_{n+1}^\lambda \subset \cup\mathcal{O}' \cup (\cup_{i\in N}(\cup_{\lambda\in F_{\xi_i}} H_\delta^{\xi_i})).$$

Sea $(x, z) \in \sigma_{n+1}^\lambda$. Supongamos que $(x, z) \notin \cup\mathcal{O}'$, entonces $x \notin \sigma_n^\lambda$, así que $|\{\gamma \in \alpha\setminus\{\lambda\} : x(\gamma) \neq (\gamma)\}| = n+1$. Es claro que $x \neq a$, ya que $a \in \sigma_n^\lambda$. Sea $a \in O_{\xi_i}$, como $x \notin O_{\xi_i}$, entonces existe $\delta \in F_{\xi_i}$ tal que $x(\delta) \notin O_\delta^{\xi_i}$ y $a(\delta) \in O_\delta^{\xi_i}$. Luego $x(\delta) \neq a(\delta)$. Combinando estos resultados tenemos $|\{\gamma \in \alpha \setminus \{\lambda, \delta\} : x(\gamma) \neq a()\gamma\}| = n$; lo cual nos lleva a que $(x, z) \in H_\delta^{\xi_i}$ y así finalizar la demostración. □

8. Σ-productos Fréchet-Urysohn

Para finalizar este capítulo, enseguida presentamos una interesante aplicación del teorema 2.22, el teorema de Kombarov-Malykhin, en el que se dan condiciones para que un Σ-producto sea *Fréchet-Urysohn*. Recordaremos que un espacio topológico X es *Fréchet-Urysohn* si para todo $M \subseteq X$ y $x \in cl_X(M)$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in N} \subseteq M$ que converge a x.

TEOREMA 2.26 (Kombarov-Malyhin). *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda < \alpha}$ *es una familia de espacios topológicos primero númerables. Entonces* Σ *es Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN: Como los productos numerables de espacios primero numerables es primero numerable, tenemos que la estrechez de productos finitos de primero numerables es numerable. Sea $x \in \Sigma$ y $M \subset \Sigma$ tal que $x \in cl_\Sigma(M)$, por lo anterior podemos hallar $M_0 \subset M$ numerable tal que $x \in cl_\Sigma(M_0)$. Denotamos por H al conjunto $\cup_{z \in M_0} sop(z)$. H es numerable. Afirmamos que $cl_\Sigma(M_0) \subset \mathcal{X}_H$. En efecto, si $v \in cl_\Sigma(M_0) \setminus \mathcal{X}_H$, existe un $\lambda_0 \in \alpha \setminus H$ tal que $v(\lambda_0) \neq a(\lambda_0)$. Sea O_{λ_0}, un subconjunto abierto de X_{λ_0} con $v(\lambda_0) \in O_{\lambda_0}$ pero $a(\lambda_0) \notin O_{\lambda_0}$.Tenemos que $P_{\lambda_0}^{-1}(O_{\lambda_0}) \cap M_0 = \emptyset$, lo cual no puede ser ya que $v \in P_{\lambda_0}^{-1}(O_{\lambda_0})$. Como $\prod_H$ es homeomorfo a $\mathcal{X}_H$, el cual es primero númerable, tenemos una base local numerable en $\mathcal{X}_H$ para el punto x. Denotémosla como $\mathcal{B}(x) = \{O_n \cap \mathcal{X}_H : n \in N\}$, donde O_n es un abierto de Σ para cada $n \in N$. Podemos suponer que la sucesión de abiertos O_n es decreciente. Sea $x_n \in O_n \cap M_0$. Es fácil ver que $\{x_n\}_{n < \aleph_0}$ converge a x. □

CAPÍTULO 3

Propiedades del tipo compacidad en Σ-productos

1. Teoremas de factorización

En esta sección desarrollaremos algunos teoremas de factorización que se cumplen en Σ-productos. Estos resultados nos permitirán concluir que la compactación de Stone-Čech y la realcompactación de Hewitt de un Σ-productos de una familia de espacios compactos y de una familia de realcompactos separables o de caras finitas Lindelöf respectivamente coinciden con el producto de las familias. A continuación un teorema de R. Engelking (ver pg. 118 [**12**]).

TEOREMA 3.1 (Engelking). *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios separables, Y un espacio Hausdorff en donde los puntos son G_δ, y $f : \Sigma \to Y$ una función continua. Entonces, existen $S \subseteq \alpha$ numerable y una función continua $f_0 : X_S \to Y$ tales que $f = f_0 \circ P_S\restriction_\Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero que para todo $x \in \Sigma$, existe $S_x \subsetneq \alpha$ numerable tal que, si $x' \in \Sigma$ y $x(\lambda) = x'(\lambda)$ para todo $\lambda \in S_x$, entonces $f(x) = f(x')$. Sea $\{O_n\}_{n\in N}$ una sucesión de abiertos en Y tal que

$$\cap_{n\in N} O_n = \{f(x)\}.$$

Entonces existe $V_n = \cap_{\lambda\in F_n} P_\lambda^{-1}(W_\lambda^n)$ donde $F_n \subseteq \alpha$ es finito y $W_\lambda^n \subsetneq X_\lambda$ es abierto, tales que $x \in V_n$ y $f(V_n) \subseteq O_n$ para todo $n \in N$. Definimos $S_x = \cup_{n\in N} F_n$. Probaremos que S_x cumple lo pedido. Sea $x' \in \Sigma$ tal que $x'(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in S_x$. Como para todo $n \in N$ y $\lambda \in F_n$ tenemos que $x'(\lambda) = x(\lambda) \in W_\lambda^n$, entonces tenemos que $x' \in V_n$ para todo $n \in N$, y por tanto $f(x') \in O_n$ para todo $n \in N$, así que $f(x') \in \cap_{n\in N} O_n$, o sea $f(x') = f(x)$. Ahora, construiremos inductivamente las siguientes familias: $\Omega_n \subseteq \Sigma$ numerable y $S_n \subsetneq \alpha$ también numerable, tales que $P_{S_n}(\Omega_{n+1})$ es denso en X_{S_n}. Procedemos a construir el paso 1, definimos $\Omega_1 = \{a\}$ (donde a es el punto base del Σ-producto) y $S_1 = S_a$, para continuar es necesario definir los objetos del paso 2. Sea $D_\lambda \subseteq X_\lambda$ un denso numerable para $\lambda \in \alpha$. Para $F \in [S_1]^{<\aleph_0}$ definimos $Z_F = \{x \in \Sigma(a) : x(\lambda) \in D_\lambda \text{ si } \lambda \in F \text{ y } x(\lambda) = a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin F\}$. Con esto podemos formar el conjunto numerable

$$\Omega_2 = \cup_{F\in[S_1]^{<\aleph_0}} Z_F.$$

Demostremos que $P_{S_1}(\Omega_2)$ es denso en X_{S_1}. Sea $O = \cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(W_\lambda)$ donde $F \in [S_1]^{<\aleph_0}$ y $\emptyset \neq W_\lambda \subsetneq X_\lambda$ es abierto. Sea $d_\lambda \in W_\lambda \cap D_\lambda$ para $\lambda \in F$, y definimos $m \in \Sigma$ tal que

$$m(\lambda) = \begin{cases} d_\lambda & \text{si } \lambda \in F \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F. \end{cases}$$

Es claro que $m \in Z_F \subseteq \Omega_2$, pero también $P_{S_1}(m) \in O$. Sea $S_2 = S_1 \cup (\cup_{x\in\Omega_2} S_x)$. Ahora supongamos que se tiene construido hasta el paso n, entonces definimos $\Omega_{n+1} = \cup_{F\in[S_n]^{<\aleph_0}} Z_F$ y $S_{n+1} = \cup_{i=1,\ldots,n+1}(\cup_{x\in\Omega_i} S_x)$. Ya con estas familias, se puede demostrar la propiedad de que $P_{S_n}(\Omega_{n+1})$ es denso en X_{S_n} para todo $n \in N$, usando similar demostración que para el caso 1.

Demostraremos ahora que $P_S^{-1}(P_S(\Omega))$ es denso en $\Sigma(a)$ en donde $\Omega = \cup_{n\in N}\Omega_n$ y $S = \cup_{n\in N} S_n$. Sea $O = \cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(W_\lambda)$ donde $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ y $\emptyset \neq W_\lambda \subsetneq X_\lambda$ abierto. Si $F \subseteq S$ entonces existe $n \in N$, tal que $F \subseteq S_n$. Para $d_\lambda \in W_\lambda \cap X_\lambda$, sea $z \in \Sigma$ definido como

$$z(\lambda) = \begin{cases} d_\lambda & \text{si } \lambda \in F \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F. \end{cases}$$

Entonces $z \in \Omega_{n+1} \subseteq \Omega$, y también $z \in O$, así que trivialmente $z \in P_S^{-1}(P_S(\Omega)) \cap O$. Si $F \setminus S \neq \emptyset$ y $F \cap S \neq \emptyset$, tomamos d_λ igual que antes y tomamos $x_\lambda \in W_\lambda$ arbitrario. Si $F \cap S \subseteq S_n$, definimos $z', z \in \Sigma$ de la manera siguiente

$$z' = \begin{cases} x_\lambda & \text{si } \lambda \in F \setminus S \\ d_\lambda & \text{si } \lambda \in F \cap S \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F, \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} d_\lambda & \text{si } \lambda \in F \cap S \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F \cap S. \end{cases}$$

Se tienen las propiedades

$$z \in \Omega_{n+1} \subseteq \Omega,\ z' \in O,\ P_S(z') = P_S(z)$$

y finalmente $z' \in O\cap\, P_S^{-1}(P_S(\Omega))$. Por último, si $F \cap S = \emptyset$ y x_λ como antes, definimos

$$z' = \begin{cases} x_\lambda & \text{si } \lambda \in F \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F. \end{cases}$$

Ahora notemos que $z' \in O$ y $P_S(z') = P_S(a)$, y por construcción $a \in \Omega$. Finalmente obtenemos que $z' \in O\cap\, P_S^{-1}(P_S(\Omega))$ y de aquí la densidad de $P_S^{-1}(P_S(\Omega))$ en $\prod$.

Definimos la inmersión $i : X_S \to \Sigma$ de la siguiente manera $i(x) = x'$ donde

$$x'(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) & \text{si } \lambda \in S \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin S \end{cases}$$

y $f_0 : X_S \to Y$ definida como $f_0 = f \circ i$. Finalmente demostraremos que $f_0(P_S\restriction_\Sigma) = f$. Bastará demostrar que para todo $x \in P_S^{-1}P_S(\Omega)$, se cumple $f_0(P_S\restriction_\Sigma)(x) = f(x)$. Tenemos que $f_0(P_S\restriction_\Sigma)(x) = f_0(P_S(y))$ donde $y \in \Omega$. Entonces existe $n \in N$ tal que $y \in \Omega_n$, así que $S_y \subseteq S_{n+1} \subseteq S$. Por tanto $y(\lambda) = a(\lambda)$ para todo $\lambda \notin S$, o sea $i(P_S(y)) = y$, de donde $f_0(P_S(y)) = f(y)$. Por otro lado $P_S(y) = P_S(x)$; en particular $y(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in S_y$, y por la propiedad de S_y concluimos que $f(x) = f(y)$, o lo que es lo mismo $f_0(P_S\restriction_\Sigma)(x) = f(x)$ □

Este teorema admite una generalización natural. Para este propósito dámos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.2. *Sean Y un espacio topológico, α un cardinal infinito y A un subconjunto de Y. Diremos que A es un conjunto del tipo G_α de Y, si A es la intersección de a lo más α subconjuntos abiertos de Y.*

TEOREMA 3.3. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos tales que $d(X_\lambda) \leq \gamma$, Y un espacio topológico T_2 en donde los puntos son G_γ y $f : \Sigma_\gamma \to Y$ una función continua. Entonces existe $S \subseteq \alpha$ con $|S| \leq \gamma$ y una función continua $f_0 : X_\gamma \to Y$ tal que $f = f_0 \circ P_S\restriction_{\Sigma_\gamma}$.*

DEMOSTRACIÓN: Realizando los cambios pertinentes a la demostración de teorema anterior, obtenemos para cada $x \in \Sigma_\gamma$ un conjunto S_x, con $|S_x| \leq \gamma$ tal que si $x' \in \Sigma_\gamma(a)$ y $x'(\lambda) = x(\lambda)$ para todo $\lambda \in S_x$ entonces $f(x') = f(x)$. Podemos construir para todo $0 \leq \delta < \gamma$, $\Omega_\delta \subseteq \Sigma_\gamma(a)$ y $S_\delta \subseteq \alpha$ tales que $|\Omega_\delta| \leq \gamma$, $|S_\delta| \leq \gamma$ y si $\mu < \delta$, entonces $P_{S_\mu}(\Omega_\delta)$ es denso en X_{S_μ}.

Sea D_λ denso de X_λ con $|D_\lambda| \leq \gamma$. Si $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ definimos

$$Z_F = \{x \in \Sigma_\gamma(a) : x(\lambda) \in D_\lambda \text{ si } \lambda \in F \text{ y } a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin F\}.$$

Sea $S_0 = S_a$ y $\Omega_0 = \{a\}$. Si $\delta < \gamma$, entonces $S_\delta = \cup_{\mu<\delta} S_\mu$ y

$$\Omega_\delta = \cup_{\mu<\delta}\left(\cup_{F\in[S_\mu]^{<\aleph_0}} Z_F\right).$$

Comprobemos que si $0 \leq \mu < \delta < \gamma$ y

$$O = \cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda),$$

donde $F \in [S_\mu]^{<\aleph_0}$ y $O_\lambda \subsetneq X_\lambda$ es un conjunto abierto, entonces $O \cap P_{S_\mu}(\Omega_\delta) \neq \emptyset$. Para esto, definimos $d_\lambda \in O_\lambda \cap D_\lambda$ y $l \in \Sigma_\gamma(a)$ como

$$l(\lambda) = \begin{cases} d_\lambda & \text{si } \lambda \in F \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin F \end{cases}.$$

Es claro que $F \in [S_\mu]^{<\aleph_0}$ y $S_\mu \subseteq S_\delta$. Por tanto $l \in \Omega_\delta$, pero también $P_{S_\mu}(l) \in O$. Además es claro que $|\Omega_\delta| \leq \gamma$ y $|S_\delta| \leq \gamma$ para todo $\delta < \gamma$. Entonces definimos

$$\Omega = \cup_{\delta<\gamma}\Omega_\delta \text{ y } S = \cup_{\delta<\gamma} S_\delta.$$

Analogamente se tiene que $P_S^{-1}(P_S(\Omega))$ es denso en $\Sigma_\gamma(a)$. También la función $i : X_S \to \Sigma_\gamma$ definida por

$$i(x)(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) & \text{si } \lambda \in S \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin S \end{cases}$$

es una inmersión. Definimos $f_0 = f \circ i$. Las demostraciones restantes se realizan de manera similar que en la demostración del teorema 3.1. □

COROLARIO 3.4. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos separables, Y un espacio topológico Hausdorff en donde los puntos son G_δ y $f : \Sigma \to Y$ una función continua. Entonces f se puede extender continuamente a $\prod$. En particular todo Σ-producto de espacios topológicos separables esta C-encajado (y C^*-encajado) en $\prod$.*

DEMOSTRACIÓN: Usando el teorema 3.1, con la misma notación, definimos $\overline{f} = f_0 \circ P_S$. Sea $x \in \Sigma$, entonces $\overline{f}(x) = f_0(P_S\restriction_\Sigma)(x) = f(x)$ o sea $\overline{f}\restriction_\Sigma = f$. Para demostrar la última afirmación bastará observar que $\mathbb{R}$ es Hausdorff y sus puntos son de tipo G_δ. □

Si X es un espacio topológico Tychonoff se denotará por $\beta(X)$ y $\nu(X)$ a la compactación de Stone-Čech y realcompactacion de Hewit de X, respectivamente.

TEOREMA 3.5. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *es una familia de espacios topológicos Tychonoff separables y compactos (respectivamente, realcompactos), entonces* $\beta(\Sigma) = \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ *(respectivamente,* $\upsilon(\Sigma) = \prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$*).*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el corolario 3.4: Como Σ es denso y C-encajado (y C^*-encajado) en $\prod$, y $\prod$ es compacto (realcompacto) entonces $\beta(\Sigma) = \prod$ $(\upsilon(\Sigma) = \prod)$. □

Veremos en lo que sigue un teorema análogo al anterior para una familia de espacios Lindelöf. En particular demostraremos que el teorema anterior es válido para el caso de espacios compactos sin ninguna restricción en su densidad. Para obtener estos, primero veremos a continuación otro teorema de factorización para Σ-productos. En las hipotésis de este teorema se pide que el espacio Y tenga diagonal G_δ, y en el teorema 3.1 pedimos que el espacio tenga puntos G_δ. Es pertinente aclarar que si un espacio tiene diagonal G_δ, entonces sus puntos son G_δ. En efecto, sea Δ la diagonal de $Y \times Y$ con $\Delta = \cap_{i\in N} O_i$ donde los O_i son conjuntos abiertos de $Y \times Y$. Para todo $i \in N$ existen V_i y W_i conjuntos abiertos de Y, tales que $V_i \times W_i \subseteq O_i$ y $\Delta = \cap_{i\in N} V_i \times W_i$. Si $x \in Y$, no es dificil mostrar que $\cap_{i\in N}(V_i \cap W_i) = \{x\}$. Sin embargo el recíproco no es cierto, por ejemplo, todos los puntos en el espacio $[0, \omega_1)$ son del tipo G_δ, pero si su diagonal fuera G_δ, él sería metrizable (cualquier linealmente ordenado con diagonal G_δ es metrizable).

TEOREMA 3.6. *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios topológicos, tales que* $\prod_{\lambda\in F} X_\lambda$ *es Lindelöf para todo* $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, *y sea* Y *un espacio topológico* T_2 *cuya diagonal en* $Y \times Y$ *es un* G_δ. *Si* $f : \Sigma \to Y$ *es una función continua, entonces existe* $S \subseteq \alpha$ *numerable y una función continua* $f_0 : X_S \to Y$ *tales que* $f = f_0 \circ P_S{\restriction}_\Sigma$.

DEMOSTRACIÓN: Antes que nada demostraremos que si α' esta constituido por los $\lambda' < \alpha$, para los cuales existen $x_0, x_1 \in \Sigma_0$, con la propiedad que $f(x_0) \neq f(x_1)$, y $P_{\alpha\setminus\{\lambda'\}}(x_0) = P_{\alpha\setminus\{\lambda'\}}(x_1)$, entonces α' es numerable. Supongamos que α' no es numerable. Tenemos que $\Delta = \cap_{n\in N} O_n$ donde O_n es un abierto de $Y \times Y$. Ahora bien, para cada $\lambda' \in \alpha'$ sean $x_0^{\lambda'}, x_1^{\lambda'} \in \Sigma_0(a)$ tales que cumplen $f\left(x_0^{\lambda'}\right) \neq f\left(x_1^{\lambda'}\right)$, pero $P_{\alpha\setminus\{\lambda'\}}\left(x_0^{\lambda'}\right) = P_{\alpha\setminus\{\lambda'\}}\left(x_1^{\lambda'}\right)$. Si tomamos $H_n = Y \times Y \setminus O_n$ y

$$L_n = \left\{\lambda' \in \alpha' : \left(f\left(x_0^{\lambda'}\right), f\left(x_1^{\lambda'}\right)\right) \in H_n\right\},$$

entonces tenemos que $\alpha' = \cup_{n\in N} L_n$; esto es porque $\left(f\left(x_0^{\lambda'}\right), f\left(x_1^{\lambda'}\right)\right) \notin \Delta$ para todo $\lambda' \in \alpha'$. Como estamos suponiendo que α' no es numerable, entonces existe $n_0 < \omega$ tal que L_{n_0} no es numerable. Si $H = H_{n_0}$ y $\alpha'' = L_{n_0}$, entonces $H \subseteq Y \times Y \setminus \Delta$, H es cerrado en $Y \times Y$, $\left(f\left(x_0^{\lambda'}\right), f\left(x_1^{\lambda'}\right)\right) \in H$ para todo $\lambda' \in \alpha''$ y $|\alpha''| > \aleph_0$. Por el lema 1.16 y el teorema 2.25, existe $x_0 \in \Sigma_0$, para el cual, en cualquier vecindad W canónica de x_0, existe un conjunto infinito $A(W) \subseteq \alpha''$, tal que para todo $\lambda' \in A(W)$, $x_0^{\lambda'} \in W$. Si $W = \cap_{\lambda\in F} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$, como siempre, con $F \subseteq \alpha$ finito y O_λ abiertos de X_λ, entonces $A(W) \setminus F$ es infinito, y si $\lambda' \in A(W) \setminus F$, podemos comprobar que $x_1^{\lambda'} \in W$, ya que $x_0^{\lambda'} \in W$, y como $F \subseteq \alpha \setminus \{\lambda'\}$, entonces para todo $\lambda \in F$ tenemos que $x_1^{\lambda'}(\lambda) = x_0^{\lambda'}(\lambda) \in O_\lambda$. Podemos concluir, que existe un conjunto infinito $A'(W) \subseteq A(W)$, tal que para todo $\lambda' \in A'(W)$, $x_1^{\lambda'}(\lambda)$ y $x_0^{\lambda'}(\lambda)$ pertenecen a W. Ahora bién, como$(f(x_0), f(x_0)) \in \Delta \subseteq Y \times Y \setminus H$, entonces existen V_1, V_2 abiertos de Y tales que $(f(x_0), f(x_0)) \in V_1 \times V_2 \subseteq Y \times Y \setminus H$. Si $V = V_1 \cap V_2$, entonces $(f(x_0), f(x_0)) \in V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq Y \times Y \setminus H$. Entonces $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x_0. Por construcción tenemos que para todo $\lambda' \in A'(f^{-1}(V)) \subseteq \alpha''$, $x_1^{\lambda'}$ y $x_0^{\lambda'}$ pertenecen a V , así que $\left(f\left(x_0^{\lambda'}\right), f\left(x_1^{\lambda'}\right)\right) \in Y \times Y \setminus H$. Por otro lado $\left(f\left(x_0^{\lambda'}\right), f\left(x_1^{\lambda'}\right)\right) \in H$. Esta contradicción implica que α' es numerable.

Ahora mostraremos por inducción que si x_0 y x_1 son elementos de Σ_0 para los cuales existe $B \subseteq \alpha \setminus \alpha'$ finito tal que $P_{\alpha\setminus B}(x_0) = P_{\alpha\setminus B}(x_1)$ entonces $f(x_0) = f(x_1)$. Por construcción si $|B| = 1$, y $\{\lambda\} = B$, entonces $\lambda \notin \alpha'$, y se concluye lo pedido. Ahora supongamos que vale para n, y sean $x_0, x_1 \in \Sigma_0$ y $B = \{\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}\} \subseteq \alpha \setminus \alpha'$, tales que $|B| = n+1$ y $P_{\alpha\setminus B}(x_0) = P_{\alpha\setminus B}(x_1)$. Definimos

$$x(\lambda) = \begin{cases} x_0(\lambda) & \text{si } \lambda \neq \lambda_{n+1} \\ x_1(\lambda) & \text{si } \lambda = \lambda_{n+1}. \end{cases}$$

Si $B_1 = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ entonces $P_{\alpha\setminus B_1}(x_1) = P_{\alpha\setminus B_1}(x)$, así que por hipótesis inductiva tenemos que $f(x_1) = f(x)$, pero

$$P_{\alpha\setminus\{\lambda_{n+1}\}}(x_0) = P_{\alpha\setminus\{\lambda_{n+1}\}}(x).$$

Aplicando el caso 1, obtenemos que $f(x_0) = f(x)$, y finalmente $f(x_1) = f(x_0)$. Como en la demostración del anterior teorema, sea $i : X_{\alpha'} \to \Sigma$ la inclusión. Podemos definir $f_0 = f \circ i$, con esto ya logramos la continuidad de f_0, de manera analoga a la demostración anterior teorema, podremos concluir la demostración si $f_0(P_{\alpha'}\restriction_\Sigma)$ y f coinciden en el denso Σ_0. Para demostrar esto sea $x \in \Sigma_0$, $x_1 = P_{\alpha'}\restriction_\Sigma(x)$. Como

$$i(x_1)(\lambda) = \begin{cases} x_1(\lambda) & \text{si } \lambda \in \alpha' \\ a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin \alpha' \end{cases}$$

(a es el punto base del Σ-producto), si denotamos $x_2 = i(x_1)$ y $B = Sop(x) - \alpha'$, entonces $x(\lambda) = x_2(\lambda)$ para todo $\lambda \notin B$. Es claro que B es finito, así que $f(x) = f(x_2) = f(i(x_1)) = f_0(P_{\alpha'}\restriction_\Sigma(x))$. Cuando $B = \emptyset$ entonces $x = x_2$ y se concluye lo mismo. □

Es importante comentar que los teoremas 3.1 y 3.6 no se cumplen si cambiamos Σ por Σ_0. En efecto, sea $\Sigma_0(\bar{0})$ el Σ_0-producto de $\{0,1\}^\alpha$, donde $\{0,1\}$ es el discreto de dos puntos, $\alpha > \aleph_0$ y $\bar{0}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda < \alpha$. Sea $f : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = s, \text{ donde } s \in N \text{ y } x(s) = 0, \text{ pero } x(s') = 1 \text{ si } s' < s.$$

f está bién definida y además es continua. Si $f_0 : X_S \to Y$ fuera una función continua donde S es numerable, tal que $f = f_0\left(P_S\restriction_{\Sigma_0(\bar{0})}\right)$, entonces, $\bar{f} = f_0 \circ P_S$ extendería continuamente a f. Ahora tomemos $a \in \{0,1\}^\alpha$, donde

$$a(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda < \aleph_0 \\ 0 & \text{si } \lambda \geq \aleph_0. \end{cases}$$

Y sea $a_n \in \{0,1\}^\alpha$ definida como

$$a_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq n \\ 0 & \text{si } \lambda > n. \end{cases}$$

No es difícil mostrar que $a_n \to a$ en $\{0,1\}^\alpha$ y que $\bar{f}(a_n) = n$. Por continuidad $\{\bar{f}(a_n)\}$ debería converger en $\mathbb{R}$, pero esto no es posible.

Siguiendo el mismo camino que en la demostración del teorema 3.1 obtenemos los siguientes corolarios:

COROLARIO 3.7. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios toplógicos T_1 tales que para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, $\prod_{\lambda\in F} X_\lambda$ es Lindelöf. Sea Y un espacio topológico T_2 cuya diagonal en $Y \times Y$ es un G_δ. Si $f : \Sigma(a) \to Y$ es una función continua, entonces f se puede extender a $\prod$. En particular todo Σ-producto de espacios topológicos compactos esta C-encajado y C^*-encajado en $\prod$.*

DEMOSTRACIÓN: La misma que se realizó en el corolario 3.4. Para la segunda parte bastará observar que una familia de compactos cumple las hipótesis pertinentes, y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene diagonal G_δ. □

COROLARIO 3.8. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios topológicos compactos, entonces $\beta(\Sigma) = \prod$.*

Como todo espacio Lindelöf es realcompacto, entonces tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.9. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ familia de espacios topológicos $T_{3\frac{1}{2}}$, tales que para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ X_F es Lindelöf ,entonces $\nu(\Sigma) = \prod_{\lambda\in\alpha} X_\lambda$.*

2. Seudocompacidad en Σ-productos

Como veremos más adelante un Σ-producto nunca es paracompacto, sin embargo, con adecuados factores se logran obtener Σ-productos que tienen algunas propiedades parecidas a la compacidad.

DEFINICIÓN 3.10. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es ω-acotado si todo conjunto numerable infinito de X tiene clausura compacta.*

TEOREMA 3.11. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios compactos, entonces Σ es ω-acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Para $A \subseteq \Sigma$ numerable infinito definimos $J = \cup\{Sop(x) : x \in A\}$. Obtenemos inmediatamente que $J \in [\alpha]^{\aleph_0}$. Definimos

$$C = \left\{x \in \prod : x(\lambda) = a(\lambda) \text{ si } \lambda \in \alpha \setminus J\right\}$$

(a es el punto base de Σ). Por su definición C cumple que es producto de compactos, así que él es compacto, y además $C \subseteq \Sigma$. Concluiremos la demostración si probamos que $A \subseteq C$. Para esto, sea $x \in A$, entonces $Sop(x) \subseteq J$. Ahora, si $\lambda \in \alpha\setminus J$ entonces $\lambda \notin Sop(x)$, en otras palabras $x(\lambda) = a(\lambda)$. □

Es conocido (ver J.E. Vaughan [44]) que ω-acotado implica numerablemente compacto y esta propiedad implica seudocompacidad. Por lo cual es claro el siguiente corolario.

COROLARIO 3.12. *Cualquier Σ-producto de espacios compactos es numerablemente compacto, y en particular seudocompacto.*

Analizaremos ahora en los Σ-productos algunas propiedades que generalizan y relativizan a la seudocompacidad. En lo que resta de esta sección los espacios serán Tychonoff. Enseguida una serie de definiciones:(como es usual denotaremos como $C(X,\mathbb{R}^\kappa)$ al conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}^\kappa$)

DEFINICIÓN 3.13. *Sean X un espacio topológico, κ un cardinal infinito y $A \subseteq X$. Diremos que A es C_κ-compacto en X, si $f(A)$ es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^\kappa$ para todo $f \in C(X, \mathbb{R}^\kappa)$*

DEFINICIÓN 3.14. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Si X es C_κ-compacto en X, diremos que X es κ-seudocompacto. Es decir, si $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}^\kappa$ para toda $f \in C(X, \mathbb{R}^\kappa)$. Obsérvese que ω-seudocompacidad es equivalente a la seudocompacidad (en* [**15**] *se menciona el resultado de Hewitt: X es seudocompacto si y sólo si $f(X)$ es acotado para toda $f \in C(X)$).*

DEFINICIÓN 3.15. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos y sea κ un cardinal infinito con $\kappa \leq \alpha$, Un subconjunto Y de $\prod$ se dirá que es κ-denso si para todo $J \in [\alpha]^\kappa$, $P_J(Y) = \prod_{\lambda \in J} X_\lambda$.*

Ahora enunciaremos, un importante teorema de factorización de Arkhangel'skiĭ. Antes, la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.16. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos no vacíos de X es llamada una π-base de f en x, si para toda vecindad abierta W de $f(x)$ en Y se tiene que*

$$x \in cl_X (\cup\{B \in \mathcal{B} : f(B) \subseteq W\}).$$

DEFINICIÓN 3.17. *Dada una función continua $f : X \to Y$ y $x \in X$. El π-carácter de f en x se denota como $\pi\chi(f, x)$, y es el*

$$mín\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es } \pi\text{-base de } f \text{ en } x\}$$

DEFINICIÓN 3.18. *El π-carácter de f se denotará como $\pi\chi(f)$ y es el*

$$sup\{\pi\chi(f, x) : x \in X\}$$

TEOREMA 3.19. *Sean Y un espacio topológico T_3, $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos, $D \subseteq \prod$ denso, $f : D \to Y$ una función continua y $\gamma \geq \aleph_0$. Si $hd(P_L(D)) \leq \gamma$ para todo $L \in [\alpha]^\gamma$, entonces existen:*

(1) $L' \in [\alpha]^\gamma$,
(2) *$E \subseteq P_{L'}(D)$ cerrado en $P_{L'}(D)$,*
(3) *$F \subseteq D$ cerrado en D tal que $P_{L'}(E) = F$,*
(4) *Una función continua $\phi : E \to Y$, tal que $f(x) = \phi(P_{L'}(x))$ para todo $x \in F$,*
(5) *Si $Z = \{d \in D : \pi\chi(f; d) \leq \gamma\}$ entonces $Z \subseteq F$. En particular si Z es denso en D entonces $F = D$ y $f = \phi \circ (P_{L'} \restriction_D)$.*

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

COROLARIO 3.20. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos tales que $w(X_\lambda) \leq \gamma \leq \alpha$ para todo $\lambda < \alpha$. Si $D \subseteq \prod$ es denso, $f : D \to Y$ es una función continua con $\chi(Y) \leq \gamma$ y Y es un espacio topológico T_3, entonces existen $L \in [\alpha]^\gamma$ y $\phi : P_L(D) \to Y$ tales que $f = \phi \circ P_L \restriction_D$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A \in [\alpha]^\gamma$ entonces $w\left(\prod_{\lambda \in A} X_\lambda\right) \leq |A|\,\gamma = \gamma$. Como

$$hd\left(\prod_{\lambda \in A} X_\lambda\right) \leq w\left(\prod_{\lambda \in A} X_\lambda\right)$$

y como para todo $x \in D$, $\chi(f(x), Y) \leq \gamma$, entonces existe una base local $\mathcal{B}$ de $f(x)$ en Y tal que $|\mathcal{B}| \leq \gamma$. Sea $\mathcal{B}' = \{f^{-1}(O)\}_{O \in \mathcal{B}}$. Como $f(x) \in O$ para todo $O \in \mathcal{B}$, entonces $x \in O'$ para todo $O' \in \mathcal{B}'$. Sea V una vecindad de $f(x)$ en Y, y $O' \in \mathcal{B}'$ tal que $f(O') \subseteq V$. Por lo anterior tenemos que $x \in O'$, y O' existe ya que $\mathcal{B}$ es una base local de $f(x)$; así que $\mathcal{B}'$ es una π-base de f en x. Como $|\mathcal{B}'| \leq \gamma$, entonces $\pi\chi(f, x) \leq \gamma$. Por el teorema anterior obtenemos que existe una función continua $\phi : P_L(D) \to Y$, la cual cumple que $f = \phi \circ P_L\restriction_D$. □

Ahora un interesante lema en donde los tres conceptos definidos antes están relacionados (ver S. García-Ferreira, M. Sanchis, A. Tamariz [**15**]).

TEOREMA 3.21. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos compactos y sea κ un cardinal infinito con $\kappa \leq \alpha$ y $w(X_\lambda) \leq \kappa$ para todo $\lambda < \alpha$. Si $Y \subseteq \prod$ denso, entonces son equivalentes las proposiciones:*

(1) *Y es κ-seudocompacto.*
(2) *Y es C_κ-compacto en $\prod$.*
(3) *Y es κ-denso en $\prod$.*

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $f \in C(\prod, \mathbb{R}^\kappa)$, entonces $f\restriction_Y \in C(Y, \mathbb{R}^\kappa)$, por tanto $f\restriction_Y(Y) = f(Y)$ es compacto en $\mathbb{R}^\kappa$, así que Y es C_κ-compacto en $\prod$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $J \in [\alpha]^\kappa$. Como Y es denso en $\prod$ y P_J es sobreyectiva entonces $P_J(Y)$ es denso en $\prod_{\lambda\in J} X_\lambda$. Ahora si $f \in C\left(\prod_{\lambda\in J} X_\lambda, \mathbb{R}^\kappa\right)$, tenemos que $f \circ P_J \in C(\prod, \mathbb{R}^\kappa)$, entonces $f \circ P_J(Y)$ es compacto en $\mathbb{R}^\kappa$ y por tanto $P_J(Y)$ es C_κ-compacto en $\prod_{\lambda\in J} X_\lambda$. Además, $w\left(\prod_{\lambda\in J} X_\lambda\right) \leq \kappa$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\prod_{\lambda\in J} X_\lambda$ con $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Ahora, usando el teorema 1.2.(6)(S. Garcia-Ferreira, M. Sanchis, A. Tamariz [**15**]), obtenemos que toda cubierta de $P_J(Y)$ formada con abiertos de $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta finita, y esto es suficiente para concluir que $P_J(Y)$ es compacto en $\prod_{\lambda\in J} X_\lambda$, que también es compacto. Entonces $P_J(Y)$ es denso y cerrado en $\prod_{\lambda\in J} X_\lambda$. Por tanto $P_J(Y) = \prod_{\lambda\in J} X_\lambda$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $f \in C(Y, \mathbb{R}^\kappa)$. Por el corolario 3.20 concluimos la existencia de $J \in [\alpha]^\kappa$ y $\phi : P_J(Y) \to \mathbb{R}^\kappa$ tal que $\phi \circ P_J = f$. Como $P_J(Y) = \prod_{\lambda\in J} X_\lambda$, concluimos que $\phi(P_J(Y))$ es compacto, o sea $f(Y)$ es compacto en $\mathbb{R}^\kappa$, por tanto, finalmente, Y es κ-seudocompacto. □

TEOREMA 3.22. *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces Σ no es $\aleph_1$-denso en $\prod$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $J \subsetneq \alpha$ con $|J| = \aleph_1$. Supongamos que

$$P_J(\Sigma(a)) = \prod_{\lambda\in J} X_\lambda.$$

Sea $d_\lambda \in X_\lambda \setminus \{a(\lambda)\}$(donde a es el punto base del Σ-producto) para todo $\lambda < \alpha$. Ahora tomamos $z \in \prod_{\lambda\in J} X_\lambda$, donde $z(\lambda) = d_\lambda$ para $\lambda \in J$. Si $z \in P_J(\Sigma)$, existiría un $z' \in \Sigma$ tal que $z(\lambda) = z'(\lambda)$ para todo $\lambda \in J$. Esto llevaría a que $J \subseteq Sop(z')$, lo cual no es posible ya que $|Sop(z')| \leq \aleph_0$. □

Notar que si $\alpha > \beta$, donde α, β son cardinales infinitos y si X es α-seudocompacto, entonces X es β-seudocompacto ya que si $f \in C\left(X, \mathbb{R}^\beta\right)$ podemos incluir $\mathbb{R}^\beta$ en $\mathbb{R}^\alpha$, digamos mediante i, y entonces $i \circ f \in C(X, \mathbb{R}^\alpha)$; por hipotésis tenemos que $i \circ f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}^\alpha$. Como además i es inmersión, $f(X)$ y $i \circ f(X)$ son homeomorfos, y finalmente $f(X)$ es compacto.

COROLARIO 3.23. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos, entonces Σ no es κ-seudocompacto para todo*

$$\kappa \geq max\{\aleph_1,\ sup\{w(X_\lambda) : \lambda < \alpha\}\}.$$

En particular ningún Σ-producto de espacios segundo numerable es κ-seudocompacto para $\kappa > \aleph_0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\kappa \geq max\{\aleph_1, sup\{w(X_\lambda) : \lambda < \alpha\}\}$ y Σ es κ-seudocompacto. Usando la nota hecha antes de este corolario tendríamos que Σ sería $\aleph_1$-seudocompacto y por el teorema 3.21, obtendriamos que Σ es $\aleph_1$-denso, lo cual ya vimos que no es posible. □

3. Imágenes Continuas de Σ-productos

Para finalizar este capítulo, como una aplicación de los teoremas de factorización precedentes, mostraremos dos resultados que describen sendos tipos de espacios, que son imagenes continuas de algunos Σ-productos.

TEOREMA 3.24. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios tales que $w(X_\lambda) = \aleph_0$ y $f : \Sigma(a) \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si $\chi(Y) = \aleph_0$, entonces $hd(Y) = \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN: Usando el corolario 3.20, implicamos la existencia de $L \in [\alpha]^{\aleph_0}$ y $\phi : P_L(\Sigma) \to Y$ tales que $f = \phi \circ (P_L\restriction_\Sigma)$. Como $w(X_L) = \aleph_0$ y $P_L(\Sigma) = X_L$, entonces $w(P_L(\Sigma)) = \aleph_0$ y por tanto $hd(P_L(\Sigma)) = \aleph_0$. Como f es sobreyectiva, también ϕ lo es, y si $Y' \subseteq Y$, $\phi^{-1}(Y') \subseteq P_L(\Sigma)$. Entonces $d(\phi^{-1}(Y')) = \aleph_0$. Sea $Z \subseteq \phi^{-1}(Y')$ un denso numerable de $\phi^{-1}(Y')$. Afirmamos que $\phi(Z)$ es un denso numerable de Y'. Es claro que es numerable; sea $O = V \cap Y'$ abierto no vacío de Y' (donde V es un abierto no vacío de Y), como $\emptyset \neq \phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(Y')$, y por continuidad, $\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(Y')$ es un abierto no vacío de $\phi^{-1}(Y')$. Entonces existe $z \in Z \cap (\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(Y'))$, por construcción tenemos $\phi(z) \in \phi(Z) \cap O$. □

TEOREMA 3.25. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios compactos tales que $w(X_\lambda) = \aleph_0$ para cada $\lambda < \alpha$ y sea $f : \Sigma(a) \to Y$ una función continua sobreyectiva. Si $\chi(Y) = \aleph_0$, entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Usando el corolario 3.20, implicamos la existencia de $L \subseteq \alpha$ con $|L| = \aleph_0$ y de $\phi : P_L(\Sigma(a)) \to Y$ tal que $f = \phi \circ (P_L\restriction_{\Sigma(a)})$. Como $P_L(\Sigma(a)) = X_L$ y f es sobreyectiva, entonces ϕ es sobreyectiva y $\phi(X_L) = Y$. Por tanto Y es compacto. □

Ahora usando el teorema de factorización 3.6, podemos obtener el siguiente teorema:

TEOREMA 3.26. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos tal que para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ se cumple que $l(X_F) = \aleph_0$. Sea M un espacio métrico. Si M es imagen continua de Σ entonces M es separable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \Sigma \to M$ una función continua y sobreyectiva. Como M tiene diagonal G_δ en $M \times M$ y es T_2, aplicando el teorema 3.1, existe $J \in [\Lambda]^{\aleph_0}$ y

$f_0 : X_J \to M$, tales que $f = f_0 \circ P_J \lceil_\Sigma$. Resulta que $M = f(\Sigma) = f_0(P_J(\Sigma)) = f_0(X_J)$. Podemos considerar al σ-producto

$$D = \{x \in X_J : |\{\lambda \in J : x(\lambda) \neq a(\lambda)\}| < \aleph_0\}$$

Sabemos que D es denso en X_J. Consideremos para cada $F \in [J]^{<\aleph_0}$ al conjunto $D_F = \{x \in D : Sop(x) \subseteq F\}$. Por hipotésis $l(D_F) = \aleph_0$. Es claro que $D = \cup_{F \in [J]^{<\aleph_0}} D_F$. Podemos concluir que $l(D) = \aleph_0$; en efecto, sea $\mathcal{C} = \{O_\alpha \cap D\}_{\alpha \in \Gamma}$ una cubierta abierta de D (donde O_α es abierto de X_J). Ahora, para $F \in [J]^{<\aleph_0}$, tomamos $\mathcal{C}_F = \{O_\alpha \cap D_F\}_{\alpha \in \Gamma}$. Esta familia es una cubierta de D_F. Sea $\mathcal{C}'_F \subseteq \mathcal{C}_F$ subcubierta numerable de D_F. Si $\mathcal{A} = \cup_{F \in [J]^{<\aleph_0}} \mathcal{C}'_F$, $\mathcal{A}$ es numerable y además es cubierta de D.

Ahora bien, f_0 es sobreyectiva por lo cual $f_0(D)$ es denso en M. Además, tenemos que $l(f_0(D)) = \aleph_0$. Sea $M' = f_0(D)$, y sea $\mathcal{H} = \{W_\delta\}_{\delta \in \Phi}$ una cubierta abierta de M', y $\mathcal{B} = \{f_0^{-1}(W_\delta)\}_{\delta \in \Phi}$. $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta de D, Ahora sea $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ una subcubierta numerable de D. Afirmamos que si $\mathcal{H}' = \{W_\delta : f_0^{-1}(W_\delta) \in \mathcal{B}'\} \subseteq \mathcal{H}$, ésta es subcubierta numerable de M'. En efecto, si $z \in M'$, existe $x \in D$ tal que $f_0(x) = z$ y $f_0^{-1}(W_\delta) \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in f_0^{-1}(W_\delta)$. Entonces $z \in W_\delta \in \mathcal{H}'$. En resumen tenemos que M' es denso en M , Lindelöf y métrico, como $d(M') = l(M')$ (ver R. Hodel **[18]**), entonces M' es separable, y por tanto M también. □

CAPÍTULO 4

Paracompacidad y teorema de Kombarov

1. Paracompacidad

En esta sección demostraremos el importante resultado que afirma que ningún Σ-producto es paracompacto.

Para tal efecto demostraremos que cualquier Σ-producto contiene como subespacio cerrado al espacio de ordinales numerables $[0, \omega_1)$ con su topología del orden, el cual no es paracompacto (vease en A. García-Máynez, A. Tamariz **[14]** pgs.181-182 y R. Engelking **[12]** pgs 322). Los siguientes resultados se deben a C. Przymusiński (vease **[34]** pgs 819).

De aquí en adelante usaremos los hechos siguientes: el número de factores en cualquier producto de espacios es estrictamente mayor que $\aleph_0$, y cada factor tiene más de un punto. Con estas precauciones, aseguramos que los Σ-productos sean subespacios propios del producto.

TEOREMA 4.1. *Los Σ-productos contienen al espacio $[0, \omega_1)$ como subespacio cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios topológicos, y $a \in \Pi_{\lambda<\alpha} X_\lambda$. Sean $S \subseteq \alpha$ con $S = \{s_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ con $s_\delta \neq s_\gamma$ si $\delta \neq \gamma$. Y para cada $\delta < \omega_1$ tomamos $q_\delta \in X_{s_\delta} - \{a(s_\delta)\}$. Para $\beta < \omega_1$ definimos $x_\beta \in \Pi_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ como

$$x_\beta(s) = \begin{cases} q_\delta & \text{si } s = s_\delta \text{ y } \delta < \beta \\ a(s) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Sea $A = \{x_\beta\}_{\beta<\omega_1}$. Queremos demostrar que A es cerrado en Σ. Notemos que para cada $\beta < \omega_1$ $sop(x_\beta) = \{s_\delta\}_{\delta<\beta}$ tiene cardinalidad numerable, así que $A \subseteq \Sigma$. Ahora bien, supongamos que $z \in cl_{\Sigma(a)}(A)$, y $sop(z) \setminus S \neq \emptyset$. Sea $\lambda \in sop(z) \setminus S$. Se tiene que $z(\lambda) \neq a(\lambda)$, entonces podemos encontrar un abierto O_λ de X_λ tal que $z(\lambda) \in O_\lambda$ pero $a(\lambda) \notin O_\lambda$. Como $\lambda \notin S$, $x_\beta(\lambda) = a(\lambda)$ para toda β, entonces $x_\beta \notin P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ para toda β, lo cual es imposible ya que $z \in P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ y $z \in cl_{\Sigma(a)}(A)$. Así que podemos concluir que

$$sop(z) \subseteq S.$$

Ahora supongamos que $s_\gamma \in sop(z)$, y $z(s_\gamma) \neq q_\gamma$. Podemos encontrar un abierto O_{s_γ} de X_{s_γ} tal que $z(s_\gamma) \in O_{s_\gamma}$ pero $O_{s_\gamma} \cap \{a(s_\gamma), q_\gamma\} = \emptyset$. Sea $\zeta \leq \gamma$; por construcción $x_\zeta(s_\gamma) = a(s_\gamma) \notin O_{s_\gamma}$, entonces $x_\zeta \notin P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma})$. Si $\gamma < \zeta$, tenemos que $x_\zeta(s_\gamma) = q_\gamma \notin O_{s_\gamma}$, entonces $x_\zeta \notin P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma})$, lo cual nos lleva a concluir que $A \cap P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma}) = \emptyset$, pero $z \in P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma})$, lo cual es una contradicción. Así que, para todo $s_\gamma \in sop(z)$, debemos tener que $z(s_\gamma) = q_\gamma$.

Supongamos ahora que $s_\gamma \in sop(z)$ y que $\delta < \gamma$ pero $s_\delta \notin Sop(z)$. Entonces $z(s_\delta) = a(s_\delta)$. Elegimos dos abiertos $O_{s_\delta}, O_{s_\gamma}$ en X_{s_δ}y X_{s_γ} respectivamente, con las propiedades siguientes: $a(s_\delta) \in O_{s_\delta}$ pero $q_\delta \notin O_{s_\delta}$ y $q_\gamma \in O_{s_\gamma}$ pero $a(s_\gamma) \notin O_{s_\gamma}$.

Con estas definiciones, si $O = P_{s_\delta}^{-1}(O_{s_\delta}) \cap P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma})$, entonces $z \in O$. Además si $\zeta \leq \delta < \gamma$, $x_\zeta(s_\gamma) = a(s_\gamma) \notin O_{s_\gamma}$; por lo que tenemos que $x_\zeta \notin O$. Si ahora $\delta < \zeta$, entonces $x_\zeta(s_\delta) = q_\delta \notin O_{s_\delta}$ y de igual manera $x_\zeta \notin O$, pero esto no es posible porque $z \in cl_{\Sigma(a)}(A)$. Por lo tanto, si $s_\gamma \in sop(z)$ y $\delta < \gamma$, entonces $s_\delta \in sop(z)$. Como $sop(z)$ es numerable y S no lo es, entonces $S \setminus sop(z) \neq \emptyset$. Sea

$$\beta = \min\{\gamma : \ s_\gamma \in \setminus sop(z)\}.$$

Afirmamos que $z = x_\beta$. En efecto, si $\lambda < \alpha$ pero $\lambda \notin S$, entonces $\lambda \notin sop(z)$, de aquí que $x_\beta(\lambda) = a(\lambda) = z(\lambda)$. Ahora, si $\lambda = s_\gamma \in S$, puede suceder que $\gamma < \beta$, pero en tal caso $s_\gamma \in sop(z)$, así que $z(s_\gamma) = q_\gamma = x_\beta(s_\gamma)$. Y finalmente, si $\beta \leq \gamma$: cuando $\beta = \gamma$, $s_\gamma \notin sop(z)$; pero también si $\beta < \gamma$ y $s_\gamma \in sop(z)$, por lo demostrado en el parrafo anterior, $s_\beta \in sop(z)$, lo cual no es posible. Entonces, de cualquier forma se cumple que $s_\gamma \notin sop(z)$, y obtenemos $x_\beta(\lambda) = x_\beta(s_\gamma) = a(s_\gamma) = z(s_\gamma)$. De aquí se obtiene la igualdad $z = x_\beta$.

Hemos demostrado que A es cerrado en Σ. Sólo resta demostrar que A es homeomorfo a $[0, \omega_1)$. Es natural definir la función $\theta : A \to [0, \omega_1)$ como

$$x_\beta \to \beta.$$

La función θ es claramente biyectiva. Resta demostrar que θ es continua y abierta. Sea $\gamma < \delta < \beta < \omega_1$. Seleccionamos O_{s_γ} y O_{s_δ} abiertos de X_{s_γ} y X_{s_δ} respectivamente tales que: $q_\gamma \in O_{s_\gamma}$ pero $a(s_\gamma) \notin O_{s_\gamma}$ y $a(s_\delta) \in O_{s_\delta}$ pero $q_\delta \notin O_{s_\delta}$. Es claro que $x_\delta \in O = P_{s_\gamma}^{-1}(O_{s_\gamma}) \cap P_{s_\delta}^{-1}(O_{s_\delta})$. Ahora bién, si $\eta \leq \gamma$ entonces $x_\eta(s_\gamma) = a(s_\gamma) \notin O_{s_\gamma}$, o sea que $x_\eta \notin O$; y si $\delta < \beta \leq \eta$ entonces $x_\eta(s_\delta) = q_\delta \notin O_{s_\delta}$, o sea $x_\eta \notin O$. Podemos concluir entonces que

$$\theta(x_\delta) = \delta \in \theta(O \cap A) \subseteq (\gamma, \beta)$$

y de ahí la continuidad de θ.

Finalmente mostremos que θ es abierta . Sea $O = \cap_{\lambda \in K} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$, donde $O_\lambda \subset X_\lambda$ es abierto y K es finito. Queremos demostrar que $\theta(O \cap A)$ es abierto en $[0, \omega_1)$. Para esto, sea $x_\beta \in O \cap A$, y veamos los siguientes casos :

1. Si $K \cap S = \emptyset$ y $\lambda \in K$, entonces $x_\beta(\lambda) = a(\lambda) \in O_\lambda$. Pero como para todo $\lambda \in K$, $\lambda \notin S$, entonces, para todo $x_\gamma \in A$ tenemos que $x_\gamma(\lambda) = a(\lambda) \in O_\lambda$, así que $O \cap A = A$ y finalmente $\theta(O \cap A) = \omega_1$.
2. $K \cap S \neq \emptyset$. Este caso lo dividimos en:
   (a) $\beta \leq \gamma$ para todo $s_\gamma \in K \cap S$, entonces $x_\beta(s_\gamma) = a(s_\gamma) \in O_{s_\gamma}$. Afirmamos que
   $$\beta \in [0, \beta + 1) \subseteq \theta(O).$$
   Para esto bastará demostrar que si $\zeta < \beta$, entonces $x_\zeta \in O$. Si $\lambda \in K - S$
   $$x_\zeta(\lambda) = x_\beta(\lambda) = a(\lambda) \in O_\lambda.$$
   Si $\lambda \in K \cap S$, digamos que $\lambda = s_\gamma$, tenemos $\zeta < \beta \leq \gamma$, entonces $x_\zeta(\lambda) = x_\zeta(s_\gamma) = a(s_\gamma) = x_\beta(s_\gamma) \in O_{s_\gamma} = O_\lambda$. Así que cualquiera que sea el caso $x_\zeta \in O$.
   (b) Si existe $\gamma < \beta$ tal que $s_\gamma \in K \cap S$, definimos
   $$\gamma_0 = \max\{\gamma < \beta : s_\gamma \in K \cap A\}.$$
   Afirmamos que
   $$\beta \in (\gamma_0, \beta + 1) \subseteq \theta(O).$$

Para esto será suficiente demostrar que si $\gamma_0 < \zeta < \beta$ entonces $x_\zeta \in O$. Para $\lambda \in K - S$, usando el mismo argumento que antes tenemos que $x_\zeta(\lambda) = a(\lambda) = x_\beta(\lambda) \in O_\lambda$. Sea ahora $\lambda \in K \cap S$, digamos que $\lambda = s_\gamma$. Cuando suceda que $\beta \leq \gamma$, obtenemos $x_\zeta(s_\gamma) = a(s_\gamma) = x_\beta(s_\gamma) \in O_{s_\gamma} = O_\lambda$. Finalmente si $\gamma < \beta$ entonces $\gamma \leq \gamma_0 < \zeta$ y de esto tenemos que $x_\zeta(s_\gamma) = q_\gamma = x_\beta(s_\gamma) \in O_\lambda$.

Así que finalmente concluimos que $\theta(O)$ es abierto. □

Como corolario del teorema anterior tenemos:

TEOREMA 4.2. *Ningún Σ-producto propio es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si Σ fuera paracompacto, como $A \subseteq \Sigma(a)$ es cerrado (para la definición de A vease la demostración del teorema 4.1), entonces A sería paracompàcto y también $[0, \omega_1)$ □

Podemos generalizar el anterior resultado de la siguiente manera:

TEOREMA 4.3. *Si $\alpha \geq \beta^+$ y $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios, entonces Σ_β contiene a $[0, \beta^+)$ como un subespacio cerrado, y por tanto Σ_β no es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Se obtiene la demostración siguiendo paso a paso la anterior demostracion. Σ_β no es paracompacto ya que la paracompacidad la heredan los subespacios cerrados y $[0, \beta^+)$ no es paracompacto ya que es numerablemente compacto y si fuera paracompacto, entonces sería compacto. □

2. Normalidad y teorema de Kombarov

Despues de lo visto en la sección anterior, surge la siguiente pregunta natural: ?'Bajo que condiciones un Σ-producto es normal? En esta sección se expondrán algu nas condiciones suficientes bajo las cuales los Σ -productos son normales. En particular demostraremos parte de un interesante resultado de Kombarov sobre la normalidad de Σ-productos de p-espacios paracompactos. Como corolario obtendremos los resultados clásicos de Corson, Gul'ko y Rudin sobre la normalidad de Σ-productos de espacios metrizables. La demostración completa del teorema de Kombarov se obtendrá en la seccion 1 del capítulo 6.

Primero veamos un ejemplo de un Σ-producto no normal (En la sección 2 del capítulo 6 veremos un ejemplo más elaborado).

EJEMPLO 4.4. *Sea $a \in [0, \omega_1]^{\omega_1+1}$. Demostraremos que $\Sigma(a)$ no es normal. Para esto definimos $\hat{a}(\alpha) = a(\alpha)$ para $\alpha < \omega_1$. Notar que $\hat{a} \in [0, \omega_1]^{\omega_1}$ y por tanto $\Sigma(\hat{a}) \subset [0, \omega_1]^{\omega_1}$. Afirmamos que $\Sigma(a)$ es homeomorfo a $\Sigma(\hat{a}) \times [0, \omega_1]$. Como las proyecciones $P_{[0,\omega_1)} : \Sigma(a) \to \Sigma(\hat{a})$ y $P_{\omega_1} : \Sigma(a) \to [0, \omega_1]$ son continuas, la función $\theta : \Sigma(a) \to \Sigma(\hat{a}) \times [0, \omega_1]$ definida como $\theta(z) = \left(P_{[0,\omega_1)}(z), P_{\omega_1}(z)\right)$, es continua. Además, θ es biyectiva, ya que si $(\hat{z}, \alpha) \in \Sigma(\hat{a}) \times [0, \omega_1]$, definimos $\tau(\hat{z}, \alpha) = z$ donde $z(\beta) = \hat{z}(\beta)$ si $\beta < \omega_1$ y $z(\omega_1) = \alpha$. τ es la función inversa de θ. Resta demostrar que θ es abierta. Sea*

$$O = \left(\Pi_{\lambda \in J} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right) \cap \Sigma(a)$$

donde O_λ es abierto, $O_\lambda \subset [0, \omega_1]$ para todo $\lambda \in J$ y $J \in [[0, \omega_1]]^{<\aleph_0}$. Pero $\theta(O) = P_{[0,\omega_1)}(O) \times P_{\omega_1}(O)$ el cual es un abierto; ya que ambas proyecciones *son abiertas. Finalmente si $\Sigma(a)$ fuera normal entonces $\Sigma(\hat{a}) \times [0,\omega_1]$ sería normal, y todo cerrado de él, por ejemplo $[0,\omega_1) \times [0,\omega_1]$ (vease el teorema 4.1) también, pero tal conjunto no es normal (ver por ejemplo Przymusiński T. C.[**34**]pg. 785).*

Podemos generalizar la técnica usada en el ejemplo anterior para obtener el siguiente resultado.

LEMA 4.5. *Si $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$, $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de espacios y $a \in \Pi_{\lambda<\alpha} X_\lambda$, entonces $\Sigma_\beta(a)$ es homeomorfo a $\Sigma_\beta(\hat{a}) \times \Pi_{\lambda\in F} X_\lambda$ para alguna $\hat{a} \in \prod_{\lambda\in\alpha\setminus F}$.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\hat{a} \in \Pi_{\lambda\in\alpha-F} X_\lambda$ de la siguiente manera:

$$\hat{a}(\lambda) = a(\lambda) \text{ para cada } \lambda \in \alpha \setminus F.$$

Denotamos $\Sigma_\beta(\hat{a})$ al Σ_β-producto de la familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\alpha\setminus F}$ con punto base $\hat{a}$. La función $\Psi : \Sigma_\beta(a) \to \Sigma_\beta(\hat{a}) \times \Pi_{\lambda\in F} X_\lambda$ definida como $\Psi(z) = (P_{\alpha-F}(z), P_F(z))$ es un homeomorfismo. □

Un teorema clásico sobre los Σ -productos, es el Teorema de H. H. Corson que fue demostrado en [**10**]. A continuación lo enunciamos, pero demostraremos un resultado más general debido a Gul'ko y Rudin(ver una versión en [**34**]).

TEOREMA 4.6 (Corson). *Cualquier Σ -producto de espacios métricos completos es normal.*

Este teorema fue mejorado enunciandose en general para espacios métricos:

TEOREMA 4.7 (Gul'ko-Rudin). *Cualquier Σ -producto de espacios métricos es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos usar el corolario 2.23 del capítulo 2 para conluir que los Σ-productos de espacios métricos tienen estrechez numerable. Ahora usando el teorema de Kombarov (Teorema 4.9) podemos concluir el teorema de Gul'ko-Rudin. □

En esta sección iniciaremos la demostración del importantísimo Teorema de Kombarov que es una generalización de los anteriores teoremas. La conclución de la demostración se realizará en la sección 1 del capítulo 6. Antes unos lemas.

LEMA 4.8. *Para $\lambda < \beta^+$, sea D_λ el espacio discreto formado por dos puntos, y sea $b \in \Pi_{\lambda<\beta^+} D_\lambda$. Si $\{X_\delta\}_{\delta<\alpha}$ es una familia de espacios donde $\alpha \geq \beta^+$ y $a \in \Pi_{\delta<\alpha} X_\delta$, entonces $\Sigma_\beta(a)$ contiene a $\Sigma_\beta(b)$ como un subespacio cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S \subseteq \alpha$ tal que $|S| = \beta$. Escogemos $c_\delta \in X_\delta \setminus \{a(\delta)\}$ para cada $\delta \in S$, y definimos

$$A = \{x \in \Sigma_\beta(a) : \ x(\delta) \in \{a(\delta), c_\delta\} \text{ si } \delta \in S,\ x(\delta) = a(\delta) \text{ si } \delta \notin S\}$$

No es difícil demostrar que A es cerrado en $\Sigma_\beta(a)$. Sea $S = \{s_\lambda\}_{\lambda<\beta^+}$. Definimos la función $\Psi : \Sigma_\beta(b) \to A$ como $\Psi(x) = z$ en donde

$$z(\delta) = \begin{cases} a(\delta) & \text{si } \delta \in S, \delta = s_\lambda \text{ y } x(\lambda) = b(\lambda) \\ c_\delta & \text{si } \delta \in S, \delta = s_\lambda \text{ y } x(\lambda) \neq b(\lambda) \\ a(\delta) & \text{si } \delta \notin S. \end{cases}$$

Ya que estamos asumiendo que todos los espacios son T_1, entonces $\{a(\delta), c_\delta\}$ es homeomorfo a D_δ, de hecho $\prod_{\delta\in S}\{a(\delta), c_\delta\}$ es homeomorfo a $\prod_{\lambda<\beta^+} D_\lambda$ mediante un homeomorfismo Φ tal que $\Phi\restriction_{\Sigma_\beta(a)} = \Psi$, por tanto Ψ es un homeomorfismo. □

TEOREMA 4.9 (Kombarov). *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de p− espacios paracompactos y* $a \in \Pi_{\lambda<\alpha} X_\lambda$. *Entonces son equivalentes :*

(1) $t(\Sigma(a)) = \aleph_0$
(2) $\Sigma(a)$ *es normal.*
(3) $\Sigma(a)$ *es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Ya que los p-espacios están incluidos en la clase de los Σ -espacios, (1) implica (2) es consecuencia del teorema 6.4, y (2) si y sólo si (3) lo es del teorema 6.2. Finalmente, veamos que (2) implica (1), y concluiremos la demostración del teorema. Denotaremos por Z_β un Σ_β*−producto* de una familia de espacios discretos de dos puntos D_λ, donde $\lambda < \beta^+$. Por el Teorema de T. Nogura [**32**](pg. 361) tenemos que para K compacto, $K \times [0, \beta^+)$ es normal si y sólo si $t(K) \leq \beta$. Además en [**16**] (pg. 444) , se demuestra que todo p-espacio es un k−espacio. Por el Lema 2.21, bastará demostrar que si $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es una familia de p—espacios paracompactos y $\Sigma_\beta(a)$ es un Σ_β − *producto* normal, entonces para todo $F \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ se cumple que $t(\Pi_{\lambda\in F} X_\lambda) \leq \beta$. Por el Lema 4.5, sabemos que $\Sigma_\beta(a)$ es homeomorfo a $\Sigma_\beta(\hat{a}) \times \Pi_{\lambda\in F} X_\lambda$, así que éste es normal. Además $\Sigma_\beta(\hat{a}) \times \Pi_{\lambda\in F} X_\lambda$ contiene como subespacio cerrado un conjunto de tipo $Z_\beta \times \Pi_{\lambda\in F} X_\lambda$ (ver el Lema 4.8), que tiene que ser también normal. Como $\Pi_{\lambda\in F} X_\lambda = \Pi F$ es un p—espacio (ver [**16**] pg. 442), entonces es un k—espacio. Para cada $K \subseteq \Pi_F$ compacto, tenemos que $Z_\beta \times K$ es cerrado en $Z_\beta \times \Pi_F$, así que $Z_\beta \times \Pi_F$ es normal, pero este a su vez contiene al cerrado $[0, \beta^+) \times K$ (teorema 4.3), así que $t(K) \leq \beta$ y de esto se obtiene que $t(\Pi_F) \leq \beta$ (ver Teorema 1.10). Por lo tanto $t(\Sigma_\beta(a)) \leq \beta$. □

Usando el hecho de que todo espacio compacto y todo espacio paracompacto Čech-completo es un p-espacio, obtenemos los corolarios siguientes.

COROLARIO 4.10. *Si* Σ *es* Σ*-producto de espacios compactos, entonces son equivalentes:*

(1) Σ *es normal*
(2) Σ *es colectivamente normal*
(3) $t(\Sigma) = \aleph_0$

COROLARIO 4.11. *Para un* Σ*-producto* Σ *de espacios Čech-completos y paracompactos, son equivalentes:*

(1) Σ *es normal*
(2) Σ *es colectivamente normal*
(3) $t(\Sigma) = \aleph_0$

Ahora usando el hecho de que un producto finito de espacios Fréchet-Uryson tiene estrechez númerable tenemos:

COROLARIO 4.12. *Si* Σ *es un* Σ*-producto de espacios Čech-completos paracompactos Fréchet-Uryson entonces* Σ *es colectivamente normal.*

CAPÍTULO 5

Normalidad de Σ-productos de espacios separables

1. Teorema de Kombarov-Malyhin

En este capítulo damos nuevas condiciones, y de distinta naturaleza que en el anterior capítulo, que permiten implicar la normalidad de un Σ-producto.Veamos el teorema de Kombarov-Malyhin [**28**], en la versión de R. Engelgking [**12**] p. 118.

TEOREMA 5.1. *Sea $\mathcal{F} = \{X_\lambda : \lambda < \alpha\}$ una familia de espacios tales que para todo $F \in [\alpha]^{\aleph_0}$, Π_F es hereditariamente separable y normal. Entonces todo Σ-producto de $\mathcal{F}$ es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Σ un Σ-producto de $\mathcal{F}$ con punto base a. Sea $G \subseteq \Sigma$. Denotaremos por $S(G)$ al conjunto $\cup_{x\in G} sop(x)$. Sean A y B dos conjuntos cerrados ajenos de Σ.

Contruiremos inductivamente familias crecientes de conjuntos numerables

$$\mathcal{B} = \{B_n \subseteq B : n \in N\}$$

$$\mathcal{A} = \{A_n \subseteq A : n \in N\}$$

$$\mathcal{H} = \{H_n \in [\alpha]^{\aleph_0} : n \in N\}$$

Tales que para todo $n \in N$

$$P_{H_{n-1}}(A) \subseteq cl_{X_{H_{n-1}}}\left(P_{H_{n-1}}(A_n)\right)$$

$$P_{H_{n-1}}(B) \subseteq cl_{X_{H_{n-1}}}\left(P_{H_{n-1}}(B_n)\right)$$

$$S(A_n) \cup S(B_n) \subseteq H_{n+1}$$

Para $\lambda_0 < \alpha$, tomamos $H_0 = \{\lambda_0\}$. Como Π_{H_0} es hereditariamente separable, existe un subconjunto denso numerable A_1' de $P_{H_0}(A)$. Entonces existe un conjunto numerable $A_1 \subseteq A$ tal que $P_{H_0}(A_1) = A_1'$. Como

$$cl_{\Pi_{H_0}}(A_1') \cap P_{H_0}(A) = P_{H_0}(A),$$

tenemos que $P_{H_0}(A) \subseteq cl_{\Pi_{H_0}}(P_{H_0}(A_1))$. Para definir B_1 se realizan análogas construcciones que para A_1. Finalmente definimos

$$H_1 = H_0 \cup S(A_1) \cup S(B_1).$$

Ahora supongamos que hemos realizado la construcción para el caso n. Como en el caso 1, existen conjuntos numerables $C_{n+1} \subseteq A$ y $D_{n+1} \subseteq B$, tales que

$$P_{H_n}(A) \subseteq cl_{\Pi_{H_n}}\left(P_{H_n}(C_{n+1})\right) \text{ y } P_{H_n}(B) \subseteq cl_{\Pi_{H_n}}\left(P_{H_n}(D_{n+1})\right).$$

Entonces definimos $A_{n+1} = A_n \cup C_{n+1}$ y $B_{n+1} = B_n \cup D_{n+1}$, y $H_{n+1} = H_n \cup S(A_{n+1}) \cup S(B_{n+1})$.

Sea $S_o = \cup\mathcal{H}$, $A_0 = \cup\mathcal{A}$ y $B_0 = \cup\mathcal{B}$. Afirmamos que

$$P_{S_0}(A) \subseteq cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(A_0)) \text{ y } P_{S_0}(B) \subseteq cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(B_0)).$$

En efecto, sea $z \in A$ y sea $V = \cap_{\lambda\in M} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ un conjunto abierto canónico de X_{S_0} donde $M \in [S_0]^{<\aleph_0}$ y para todo $\lambda \in M$, O_λ es un abierto de X_λ tal que $P_{S_0}(z)(\lambda) \in O_\lambda$. Existe $H_n \in \mathcal{H}$ tal que $M \subseteq H_n$. Sabemos que $P_{H_n}(z) \in cl_{\Pi_{H_n}}(A_n)$. Entonces existe $a_n \in A_n$ tal que $P_{H_n}(a_n)(\lambda) \in O_\lambda$ para todo $\lambda \in M$. Los mismos argumentos valen para concluir la segunda relación.

La demostración del teorema se concluye si probamos que $cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(A_0))$ y $cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(B_0))$ son ajenos. En efecto, como Π_{S_0} es normal estos conjuntos cerrados tienen una separación, digamos que están separados por los conjuntos abiertos P y Q de Π_{S_0}. Es claro que $P_{S_0}^{-1}(P) \cap \Sigma$ y $P_{S_0}^{-1}(Q) \cap \Sigma$ son una separación de A y B en Σ. Supongamos que

$$y' \in \left(cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(A_0))\right) \cap \left(cl_{\Pi_{S_0}}(P_{S_0}(B_0))\right)$$

Definimos $y \in \Sigma$ como

$$y(\lambda) = \begin{cases} y'(\lambda) \text{ si } \lambda \in S_0 \\ a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin S_0. \end{cases}$$

Sea $y \in O = \left(\cap_{\lambda\in L} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right) \cap \left(\cap_{\lambda\ L'} P_\lambda^{-1}(O_\lambda)\right)$ un abierto canónico de $\prod$, donde $L \in [S_0]^{<\aleph_0}$, $L' \in [\alpha \setminus S_0]^{<\aleph_0}$, O_λ son conjuntos abiertos de X_λ para todo $\lambda \in L \cup L'$. Además tenemos que $y(\lambda) \in O_\lambda$ si $\lambda \in L'$ y $a(\lambda) \in O_\lambda$ si $\lambda \in L$. Si $L = \emptyset$, entonces $A_0 \subseteq O$ y $B_0 \subseteq O$, lo cual significa que $O \cap A_0 \neq O \cap B_0$. Pero si $L \neq \emptyset$, existen $n \in N$, $a_n \in A_n$, $b_n \in B_n$ y $H_n$tales que $P_{H_n}(a_n)(\lambda) \in O_\lambda$ y $P_{H_n}(b_n)(\lambda) \in O_\lambda$ para todo $\lambda \in M$. Como

$$a_n(\lambda) = b_n(\lambda) = a(\lambda),$$

para todo $\lambda \in L'$ ya que $sop(a_n)$ y $sop(b_n)$ son subconjuntos de S_0, concluimos que $a_n \in A_0 \cap O$ y $b_n \in B_0 \cap O$, así que de cualquier forma $y \in cl_\Sigma A_0 \cap cl_\Sigma B_0$ o sea $y \in A \cap B$, lo cual no es posible. □

Para concluir esta sección demostraremos que en Σ-productos de familias de espacios separables la normalidad y la normalidad colectiva coinciden. Antes recordemos que si κ es un cardinal infinito, un espacio topólogico es κ-colectivamente normal si toda colección discreta, de a lo más κ conjuntos cerrados, es separada por conjuntos abiertos disjuntos. Enseguida enunciaremos un importante teorema (ver los comentarios de A. Bešlasgić en [4] pps. 80 y 81).

Teorema 5.2. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Si Π es normal, entonces Π es κ-colectivamente normal si y sólo si Π_I es κ-colectivamente normal para todo $I \in [\alpha]^{<\aleph_0}$.*

También usaremos el teorema (ver T. C. Przymusiński [34] p. 796).

Teorema 5.3 (Alas). *Sean κ un cardinal infinito y X un espacio topógico. X es numerablemente paracompacto y κ-colectivamente normal si y sólo si $X \times A_\kappa$ es normal. (A_κ es la compactación por un punto de κ con la topologia discreta).*

Ahora demostraremos el siguiente teorema

Teorema 5.4. *Si Σ es un Σ-producto de un producto de α factores, entonces Σ es normal si y sólo si Σ es α-colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que Σ es normal. Por el teorema 1.4, Σ es un producto numerable de espacios cerrados. Pensemos que Σ es $\Pi_{n<\aleph_0}\Sigma_n$. Por el teorema 1.5, A_α esta inmerso cerradamente en todo Σ-producto de una familia de α elementos. Si consideramos $I \in [\aleph_0]^{<\aleph_0}$, entonces el producto $\Pi_{n\in I}\Sigma_n \times A_\alpha$ es un conjunto cerrado en Σ, y por tanto es un espacio normal. Por el teorema 5.3 concluimos que $\Pi_{n\in I}\Sigma_n$ es α-colectivamente normal, y por el teorema 5.2 tenemos que Σ es α-colectivamente normal. □

Usando el teorema 2.9, podemos concluir que si tenemos una familia de espacios con celularidad numerable, la celularidad del producto es numerable. Como la densidad de un espacio es mayor o igual a su celularidad, tendremos que cualquier familia de espacios separables tiene un producto de celularidad numerable. Veamos el siguiente teorema, que nos permitirá concluir el resultado anuciado.

TEOREMA 5.5. *Sea Σ un Σ-producto de α espacios de celularidad numerable. Si Σ es normal, entonces todo subconjunto de Σ, discreto y cerrado es a lo más numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.9, $c(\Sigma) = \aleph_0$, y por el teorema 5.4, Σ es α-colectivamente normal. Como $\aleph_1 \leq \alpha$, entonces Σ es $\aleph_1$-colectivamente normal. Sea D un subconjunto discreto y cerrado de Σ. Si $|D| > \aleph_0$, tomamos $D_0 \subset D$ tal que $|D_0| = \aleph_1$. Afirmamos que la familia $\mathcal{D} = \{\{d\} : d \in D_0\}$ es una familia discreta de cerrados. En efecto, sea $x \in \Sigma$. Si $x \in D_0$, existe O_x, vecindad abierta de x, tal que $O_x \cap D_0 = \{x\}$, pero si $x \in D \setminus D_0$, de todas formas $O_x \cap D_0 = \emptyset$. Ahora, si $x \in \Sigma \setminus D$, como x es punto interior de $\Sigma \setminus D$, existe O_x, vecindad abierta de x, tal que $O_x \cap D = \emptyset$. Así que la familia D_0 es separada por alguna familia $\mathcal{O}$ de abiertos ajenos de Σ. Pero la celularidad de Σ es numerable, entonces $|\mathcal{O}| \leq \aleph_0$, luego $|D_0| \leq \aleph_0$, lo cual no es posible. □

TEOREMA 5.6. *Si Σ es un Σ-producto de espacios separables, entonces Σ es normal si y sólo si Σ es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que Σ es normal. Sea $\mathcal{F} = \{F_\delta : \delta < \kappa\}$ una familia discreta de conjuntos cerrados. Si $x_\delta \in F_\delta$, afirmamos que $D = \{x_\delta : \delta < \kappa\}$ es un conjunto cerrado discreto. En efecto, sea $z \in \Sigma \setminus D$, sabemos que existe O_z, una vecindad abierta de z, que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}$, sea F_{δ_z} tal elemento. Si V_z una vecindad abierta de z, tal que $x_{\delta_z} \notin V_z$. Podemos concluir que $(O_z \cap V_z) \cap D = \emptyset$. Por el teorema 5.5, $|D| \leq \aleph_0$. Por tanto $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$. Por el teorema 5.4, Σ es $\aleph_0$-colectivamente normal. Por tanto $\mathcal{F}$ es separada por abiertos ajenos de Σ. □

2. Un Σ-producto no-normal

En esta sección presentaremos un interesante ejemplo de una familia de espacios topólogicos (ver T. Daniel y G. Gruenhage [**11**]) en donde las caras numerables de su producto son paracompactas perfectamentamente normales y primero numerables pero tal familia tiene un Σ-producto no-normal. En los caítulos 4 y 6 tenemos que las familias en las que encontramos la normalidad o normalidad colectiva de sus Σ-productos, tienen sus caras numerables paracompactas, así que este ejemplo muestra que no es suficiente esta propiedad.

Antes presentaremos un importante espacio que nos servira para hacer la construcción principal (ver S. Todorčević [37]). Por cada $\alpha \in \omega_1$ escogemos una función $\alpha^* : \omega \to \alpha$ que sea no decreciente y no acotada, la elección será realizada de la manera siguiente.

No es difícil ver que el conjunto de los ordinales limites de ω_1 es un conjunto estacionario (ver K. Kunen [24] ps 76-86). Sea $\mathrm{Fn}(\omega,\omega_1)$ el conjunto de las funciones de dominio algún subconjunto finito de ω y rango en ω_1. Afirmamos que podemos escoger un conjunto estacionario $\omega_1 \setminus T$ en ω_1 y para cada $\alpha \in T$ un α^* de tal manera que para cada $\sigma \in \mathrm{Fn}[\omega,\omega_1]$ no decreciente, existe un $\alpha \in T$ tal que α^* es una extensión de σ. En efecto, tomemos como conjunto estacionario en ω_1 al conjunto de los ordinales limites, y sea T el conjunto de ordinales sucesores en ω_1. Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos

$$A_\alpha = \{\sigma \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega_1) : \sigma \text{ no es decreciente, } \alpha = \max\{\sigma(n) : \text{para } n \in \mathrm{Dom}\sigma\}\}$$

Como A_α es numerable, podemos indicarlo con ω: $A_\alpha = \{\sigma_n : n < \omega\}$. Demostraremos por inducción que para todo $n < \omega$, existe $\alpha_n \in T$ y α_n^* (con las propiedades antes descritas) tal que es extensión de σ_n. Sea $\mathrm{Dom}\sigma_1 = \{n_1^1, \ldots, n_{r_1}^1\}$ donde $n_i^1 < n_{i+1}^1$ para toda $1 \le i < r_1$. Tomamos $\alpha_1 = \alpha + 1$, y definimos a α_1^* como

$$\alpha_1^*(m) = \begin{cases} \sigma_1(n_1^1) & \text{si } 0 \le m \le n_1^1 \\ \sigma_1(n_i^1) & \text{si } n_{i-1}^1 < m \le n_i^1 \quad \text{para } 1 < i \le r_1 \\ \sigma_1(n_{r_1}^1) & \text{si } n_{r_1}^1 \le m < \omega. \end{cases}$$

Supongamos que tenemos construido el paso k. Si

$$\mathrm{Dom}\sigma_{k+1} = \{n_1^{k+1}, \ldots, n_{r_{k+1}}^{k+1}\} \text{ donde } n_i^{k+1} < n_{i+1}^{k+1} \text{ para todo } 1 \le i < r_{k+1}.$$

Definimos α_{k+1}^* como

$$\alpha_{k+1}^*(m) = \begin{cases} \sigma_{k+1}(n_1^{k+1}) & \text{si } 0 \le m \le n_1^{k+1} \\ \sigma_{k+1}(n_i^{k+1}) & \text{si } n_{i-1}^{k+1} < m \le n_i^{k+1} \quad \text{para } 1 < i \le r_{k+1} \\ \alpha_k + 1 & \text{si } n_{r_{k+1}}^{k+1} < m \le \omega. \end{cases}$$

Es claro que $F_n(\omega,\omega_1) = \cup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. Inversamente si $\alpha = \delta + 1$, usando el mismo camino que antes definimos $\alpha^* = \delta_1^*$. Y así completamos el modo de asignar α^* para $\alpha \in T$. Para $\alpha \in \omega_1 \setminus T$ la elección de su correspondiente α^* se puede realizar arbitrariamente. Denotamos por Z al conjunto $\{\alpha^* : \alpha \in \omega_1\}$. Dotamos a este conjunto de la topologia siguiente: Si ${}^n\omega_1$ es el conjunto de la funciones con dominio el ordinal finito n y rango en ω_1, para $\sigma \in {}^n\omega_1$, denotamos como $[\sigma]$ al conjunto $\{\alpha^* \in Z : \alpha^*\restriction_n = \sigma\}$. En Z existe una relación de orden natural: $\alpha^* \le \beta^*$ si y sólo si $\alpha^*(n) \le \beta^*(n)$ para todo $n < \omega$. Para α^* denotamos como $R(\alpha^*)$ al conjunto $\{\beta^* \in Z : \alpha^* \le \beta^*\}$. Sea $\alpha^* \in Z$; una base de vecindades para este punto será definida como $\{B(\alpha,n) : n < \omega\}$ donde $B(\alpha,n)$ es el conjunto $R(\alpha^*) \cap [\alpha^*\restriction_n]$. Es importante notar que para todo $\alpha \in \omega_1$ se cumple que $R(\alpha^*) \cap \{\beta^* : \beta < \alpha\} = \emptyset$. En efecto, sea $\alpha^* \le \beta^*$ con $\beta < \alpha$. Como $\alpha^*(n) \le \beta^*(n) < \beta < \alpha$ para todo $n < \omega$, tendremos que α^* es acotada, lo cual no es posible. El anterior resultado, nos permite concluir que para todo $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\{\beta^* : \alpha \le \beta < \omega_1\}$ es abierto en Z, ya que su complemento no se intersecta con $B(\alpha, n)$ para todo $n < \omega$.

En Todorčević [37] se prueba que potencias finitas de Z son espacios primero numerables, paracompactas y perfectamente normales. Además en T. C. Przymusiński [34]p.800-811, se presentan los siguientes resultados.

TEOREMA 5.7 (Morita). *El producto de un espacio perfectamente normal y un espacio métrico es perfectamente normal.*

TEOREMA 5.8 (Rudin y Starbird). *Si Y es paracompacto y M es métrico. Son equivalentes*

1. *$Y \times M$ es normal.*
2. *$Y \times M$ es paracompacto.*
3. *$Y \times M$ es numerablemente paracompacto.*

Como ω^ω es métrico, implicamos que $Z \times \omega^\omega$ es paracompacto y perfectamente normal. Sea $X_\alpha = \omega \cup \{x'\}$ para todo $\alpha < \omega_1$, donde x' es un punto que no pertenece a ω, el cual es tomado como un punto aislado en cada uno de los factores. Sea Σ_1 el Σ-producto de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ con punto base a definido como $a(\alpha) = x'$ para toda $\alpha < \omega_1$. Afirmamos que $\Sigma = Z \times \Sigma_1$ este es un Σ-producto de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \cup \{Z\}$. En efecto, si $\alpha^* \in Z$ arbitrario, entonces Σ es el Σ-producto de la familia en cuestion con punto base (α^*, a). No es difícil ver que X_α es homeomorfo a ω y que las caras numerables de Σ son homeomorfas a $Z \times \omega^\omega$ o a ω^ω; por lo anterior tenemos que las caras numerables de Σ son primero numerables paracompactas y perfectamente normales. En lo que sigue demostraremos que Σ es no normal.

Ahora construiremos dos cerrados ajenos en Σ que no pueden ser separados por abiertos ajenos. Para cada $\alpha \in \omega_1$ definimos $f_\alpha \in \Sigma_1$ como

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} \min\{n : \alpha^* \notin B(\beta, n)\} & \text{si } \beta < \alpha \\ x' & \text{si } \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

Tomemos $p_\alpha = (\alpha^*, f_\alpha)$ para todo $\alpha \in \omega_1$. Afirmamos que si $H = \{p_\alpha : \alpha \in T\}$ y $F = \{p_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus T\}$, entonces H y F son conjuntos ajenos, cerrados y discretos de Σ que no pueden ser separados en Σ.

Para demostrar esta afirmación tomamos $p = (\alpha^*, y) \in \Sigma$. Primero veamos que si $y(\delta) = x'$ para algún $\delta < \alpha$, entonces p es un punto aislado de $H \cup F$. Para comprobar esto, tomamos $W = (B(\alpha, 0) \times P_\delta^{-1}(\{x'\})) \cap \Sigma$. Es claro que $p \in W$; veamos que $W \cap (H \cup F) = \emptyset$. Si $q = (\beta^*, f_\beta) \in W \cap (H \cup F)$, entonces $\beta^*(0) = \alpha^*(0)$, $\beta^* \geq \alpha^*$ y $f_\beta(\delta) = x'$; entonces $\delta \geq \beta$, o sea $\alpha > \beta$. Pero esto último implica que $\beta^* \notin B(\alpha, n)$ para todo $n < \omega$. Lo cual no es posible. Ahora supongamos que para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $y(\delta) < \omega$. Este caso se divide en

1. $y(\alpha) = n < \omega$. En este caso, $(\alpha^*, y) \in W = (B(\alpha, n) \times P_\alpha^{-1}(\{n\})) \cap \Sigma$. Si $q = (\beta^*, f_\beta) \in W \cap (H \cup F)$, entonces $\beta^* \in B(\alpha, n)$ y $f_\beta(\alpha) = n$, pero esto implica que $\beta^* \notin B(\alpha, n)$. Lo cual es una contradicción.
2. $y(\alpha) = x'$. Sea $W = B(\alpha, 0) \times P_\alpha^{-1}(\{x'\}) \cap \Sigma_1$. Si $q = (\beta^*, f_\beta) \in W$ y $q \in (H \cup F)$. Entonces $\beta \geq \alpha$. Pero si $\beta > \alpha$, entonces $f_\beta(\alpha) \in \omega$, lo cual no es posible ya que $f_\beta(\alpha) = x' \notin \omega$. Así que $\beta = \alpha$.

En resumen, para todo punto $q \in \Sigma$, existe una vecindad abierta W de él tal que $|W \cap (H \cap F)| \leq 1$. Esto es suficiente para concluir que H y F son conjuntos cerrados y discretos en Σ.

Para continuar la demostración enunciemos el siguiente resultado (ver K. Kunen **[24]** p. 80), el cual usaremos repetidas veces

LEMA 5.9 (Fodor). *Sean κ un ordinal regular mayor que ω, S un subconjunto estacionario de κ y $f : S \to \kappa$ una función tal que $f(\gamma) < \gamma$ para todo $\gamma \in S$. Entonces existe $\delta < \kappa$, tal que $f^{-1}(\delta)$ es un conjunto estacionario.*

Ahora bién demostremos que H y F no pueden ser separados en Σ. Sea U una vecindad abierta de F. Afirmamos que $cl_\Sigma(U) \cap H \neq \emptyset$.

Obsérvese primero que cualquier abierto básico en Σ_1, se puede denotar mediante $\alpha \in \omega_1$, $\sigma \in \mathrm{Fn}(\alpha, \omega)$ y $G \in [\omega_1 \setminus \alpha]^{<\aleph_0}$, de la siguiente manera

$$U(\sigma, G) = \{x \in \Sigma_1 : x(G) = \{x'\}, x\restriction_{\mathrm{Dom}\sigma} = \sigma\}.$$

En efecto, $U(\sigma, G) = (\bigcap_{\delta \in \mathrm{Dom}\sigma}(P_\delta^{-1}(O_\delta)) \cap (\bigcap_{\delta \in G} P_\delta^{-1}(O_\delta))$, con $O_\delta = \{\sigma(\delta)\}$ si $\delta \in \mathrm{Dom}\sigma$ y $O_\delta = \{x'\}$ si $\delta \in G$.

Iniciemos la demostración de que $cl_\Sigma(U) \cap H \neq \emptyset$. Si $\alpha \in \omega_1 \setminus T$, como $p_\alpha = (\alpha^*, f_\alpha) \in F$, es un punto interior de U, entonces $p_\alpha \in B(\alpha, n_\alpha) \times U(\sigma_\alpha, G_\alpha) \subseteq U$ para algún $n_\alpha < \omega$, $\sigma_\alpha \in \mathrm{Fn}(\alpha, \omega)$ y $G_\alpha \in [\omega_1 \setminus \alpha]^{<\aleph_0}$. La notación se justifica ya que $f_\alpha \in U(\sigma_\alpha, G_\alpha)$ y como $G_\alpha \cap \mathrm{Dom}\sigma_\alpha = \emptyset$, $f_\alpha\restriction_{\mathrm{Dom}\sigma_\alpha} = \sigma_\alpha$, entonces para todo $\delta \in \mathrm{Dom}\sigma_\alpha$ tenemos que $\delta < \alpha$, así que $\sigma_\alpha \in \mathrm{Fn}(\alpha, \omega)$ y $G_\alpha \in [\omega_1 \setminus \alpha]^{<\aleph_0}$.

Sea $\phi_0 : (\omega_1 \setminus T) \to \omega_1$ definida como $\phi_0(\alpha) = n_\alpha$. Esta función cumple las hipótesis del lema 5.9. Así que existen $S' \subseteq (\omega_1 \setminus T)$ conjunto estacionario y $n' < \omega$ tal que para todo $\alpha \in S'$ se cumple $n_\alpha = n'$. Ahora definimos $\phi_1 : S' \to \omega_1$ como $\phi_1(\alpha) = |\mathrm{Dom}\sigma_\alpha|$. Ya que ϕ_1 cumple las hipótesis del lema 5.9, obtenemos $S_0 \subseteq S'$ estacionario y $n_0 < \omega$ tal que para todo $\alpha \in S_0$ tenemos que $|\mathrm{Dom}\sigma_\alpha| = n_0$. Ahora definimos $\phi_2 : S_0 \to \omega_1$ como $\phi_2(\alpha) = (n_{(\alpha,1)})$ donde $n_{(\alpha,1)}$ es el primer elemento de $\mathrm{Dom}\sigma_\alpha$, como $\mathrm{Dom}\sigma \subseteq \alpha$, entonces tenemos que $\phi_2(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S_0$. Así que existe $S_1 \subseteq S_0$ estacionario y n_1 tal que para todo $\alpha \in S_1$ las funciones σ_α tienen como primer elemento de su dominio a n_1.

De esta forma en un número finito de pasos obtendremos un conjunto estacionario $S \subseteq (\omega_1 \setminus T)$ tal que para todo $\alpha \in S$ se cumple:

1. $n_\alpha = n'$; y
2. existe $A \subseteq \omega_1$ tal que $\mathrm{Dom}\sigma_\alpha = A$.

Ahora sea $\psi_0 : S \to \omega_1$ definida como $\psi_0(\alpha) = |\mathrm{Im}\sigma_\alpha|$, obtenemos $C_0 \subseteq S$ conjunto estacionario y $m_0 < \omega$ tal que $|\mathrm{Im}\sigma_\alpha| = m_0$ para todo $\alpha \in C_0$. Si $A = \{\delta_1, \ldots, \delta_{n_0}\}$, definimos a $\psi_1 : C_0 \to \omega_1$ como $\psi_1(\alpha) = \sigma_\alpha(\delta_1)$. Con los mismos argumentos que antes, obtenemos $C_1 \subseteq C_0$ conjunto estacionario y $m_1 < \omega$ tal que $\sigma_\alpha(\delta_1) = m_1$ para todo $\alpha \in C_1$. De esta forma, en un número finito de pasos obtendremos una función $\sigma \in \mathrm{Fn}[\omega_1, \omega]$ y un conjunto estacionario $C \subset (\omega_1 \setminus T)$ tal que $\sigma = \sigma_\alpha$ para todo $\alpha \in C$.

Ahora bien, podemos descomponer a σ como $\sigma_1 \cup \sigma_2$ donde $\sigma_1 = \{(\delta, 0) : \delta \in L_1\}$ y $\sigma_2 = \{(\delta, k_\delta) : \delta \in L_2 \text{ y } k_\delta \geq 1\}$ donde $L_1 = \sigma^{-1}\{0\}$ y $L_2 = A \setminus L_1$. Si $\sigma_1 \neq \emptyset$, afirmamos que para toda $\delta \in L_1$ y $\alpha \in C$, existe $n(\delta, \alpha)$, tal que $\delta^*(n(\delta, \alpha)) > \alpha^*(n(\delta, \alpha))$. En efecto, si $\delta^* \leq \alpha^*$, entonces $\alpha^* \in B(\delta, 0)$. Pero $f_\alpha(\delta) = \sigma(\delta) = 0$, o sea $\alpha^* \notin B(\delta, 0)$. Supongamos que $L_1 = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r\}$. Con el mismo método que antes, aplicando el lema 5.9, podemos definir $\varphi : C \to \omega_1$ como $\varphi(\alpha) = n(\epsilon_1, \alpha)$ con $\epsilon_1 \in L_1$. De este modo concluimos la existencia de un conjunto estacionario $H_1 \subseteq C$ y $g_1 < \omega$ tal que $n(\epsilon_1, \alpha) = g_1$ para todo $\alpha \in H_1$. Así en un número finito de pasos obtendremos un conjunto estacionario $Z \subseteq (\omega_1 \setminus T)$ y $z' < \omega$ tal que $z' > n(\epsilon_i, \alpha) = g_i$ para todo $1 \leq i \leq r$ y $\alpha \in Z$.

Tomamos $j > \max(\{z', n'\} \cup \{k_\delta : \delta \in L_2\})$. Ahora definimos $\tau_0 : Z \to \omega_1$ como $\tau_0(\alpha) = \alpha^*(0)$, obtenemos un conjunto estacionario $Z_0 \subseteq Z$ y $q_0 < \omega$, tales que $\alpha^*(0) = q_0$ para todo $\alpha \in Z_0$. Y aplicando una vez más el lema 5.9 en j ocasiones obtenemos un conjunto estacionario $B \subseteq (\omega_1 \setminus T)$ y $\{q_i < \omega : 0 \leq i \leq j\}$, tales que

$\alpha^*(i) = q_i$ para todo $\alpha \in B$ y $0 \leq i \leq j$. Así que podemos definir $\sigma' \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ como $\sigma'(i) = q_i$ para $0 \leq i \leq j$.

Con estas contrucciones tenemos que para todo $\alpha \in B$

1. $\alpha^*\restriction_j = \sigma'$
2. Para todo $\epsilon_i \in L_1$, existe $n_{\epsilon_i} < j$ tal que $\sigma'(n_{\epsilon_i}) < \epsilon_i^*(n_{\epsilon_i})$. En efecto, como $n(\epsilon_i, \alpha) < j$, podemos tomar a $n_{\epsilon_i} = n(\epsilon_i, \alpha)$, pero además $\epsilon_i^*(n_{\epsilon_i}) > \alpha^*(n_{\epsilon_i}) = \sigma'(n_{\epsilon_i})$.

Afirmamos que para todo $\delta \in L_2$ tenemos que $\alpha^* \geq \delta^*$. En efecto, como $\sigma_2(\delta) = k_\delta = f_\alpha(\delta) > 0$, asi que $\alpha^* \in B(\delta, 0)$, o sea $\alpha^* \geq \delta^*$. Pero además $\alpha^* \in B(\delta, k_\delta - 1)$, entonces $\alpha^*\restriction_{k_\delta - 1} = \delta^*\restriction_{k_\delta - 1}$.

Otra propiedad importante que obtenemos con estas construcciones es la siguiente: Si $\beta < \omega_1$, $\beta^*\restriction_j = \sigma'$, $\mathrm{Dom}\sigma \subseteq \beta$ y $\beta^* \geq \delta^*$ para todo $\delta \in L_2$, entonces $f_\beta\restriction_{\mathrm{Dom}\sigma} = \sigma$. En efecto, como para todo $\delta \in \mathrm{Dom}\sigma$, tenemos que $\delta < \beta$, entonces $f_\beta(\delta) = \min\{n < \omega : \beta^* \notin B(\delta, n)\}$.

Ahora bién si $\delta \in L_1$ entonces $\sigma(\delta) = 0$ y existe $n_\delta < j$ tal que $\sigma'(n_\delta) < \delta^*(n_\delta)$, pero $\beta^*(n_\delta) = \sigma'(n_\delta)$, por tanto $\beta^*(n_\delta) < \delta^*(n_\delta)$ es decir $\beta^* \notin B(\delta, 0)$. Por tanto concluimos que $f_\beta(\delta) = 0$ para todo $\delta \in L_1$.

Ahora tomamos $\delta \in L_2$. Como $\sigma(\delta) = k_\delta < j$, entonces $\beta^*(k) = \sigma'(k) = \alpha^*(k)$ para todo $0 \leq k \leq k_\delta$ y todo $\alpha \in B$. Sabemos que $\alpha^* \geq \delta^*$ para todo $\delta \in L_2$. Combinando estos resultados, tenemos que:

1. $\beta^*(k) = \delta^*(k)$ para todo $0 \leq k < k_\delta$. Ya que si $\beta^*(k) > \delta^*(k)$ para alguna $0 \leq k < k_\delta$, entonces $f_\alpha(\delta) < k_\delta$ para toda $\alpha \in B$, pero $f_\alpha(\delta) = \sigma(\delta) = k_\delta$.
2. $\beta^* \in B(\delta, k)$ para todo $0 \leq k < k_\delta$ (por el inciso 1).
3. $\beta^* \notin B(\delta, k_\delta)$. Por lo anterior, de suceder lo contrario tendríamos que para todo $\alpha \in B$: $\alpha^* \in B(\delta, k_\delta)$, o sea $f_\alpha(\delta) > k_\delta$, lo cual no es posible.
4. Así que $f_\beta(\delta) = k_\delta = \sigma(\delta)$.

Usando los resultados obtenidos hasta aquí, tenemos las importantes relaciones:

i $[\sigma'] \cap R(\alpha^*) \subseteq B(\alpha, n_\alpha)$ para todo $\alpha \in B$,

ii $\cup_{\alpha \in B}(([\sigma'] \cap R(\alpha^*) \times U(\sigma, G_\alpha) \subseteq B(\alpha, n_\alpha) \times U(\sigma_\alpha, G_\alpha) \subseteq U$ para todo $\alpha \in B$.

Hasta aquí ya hemos fijado un conjunto estacionario B, un natural j y funciones σ y σ' tales que para todo $\alpha \in B$ $\sigma_\alpha = \sigma$, $\alpha^*\restriction_j = \sigma'$. Ahora eligiremos una colección numerable de elementos en $[\omega_1]^{<\aleph_0}$ convenientes. Realizaremos una construcción inductiva de la siguiente forma. Tomamos un arbitrario $\alpha_0 \in B$, y $\alpha_0 \cup G_{\alpha_0}$, es un conjunto acotado en ω_1, es fácil ver que el conjunto F_{α_0} definido como $\{\beta < \omega_1 : \beta > (\alpha_0 \cup G_{\alpha_0})\}$ es un cerrado no acotado en ω_1. Por tanto $B \cap F_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Sea $\alpha_1 \in B \cap F_{\alpha_0}$, Ahora sea $F_{\alpha_1} = \{\beta < \omega_1 : \beta > \alpha_1 \cap G_{\alpha_1}\}$ y $\alpha_2 \in B \cap F_{\alpha_1}$. Así que tenemos una sucesion $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ estrictamente creciente de ordinales en B y otra sucesión de conjuntos finitos ajenos $\{G_{\alpha_n}\}_{n<\omega}$ en ω_1. Sea $\gamma = \sup\{\alpha_n : n < \omega$. Sea $\gamma' : j+1 \to \omega_1$ definida como

$$\gamma'(k) = \begin{cases} \sigma'(k) & \text{si } 0 \leq k < j \\ \gamma & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Sea $\delta \in T$ tal que $\delta^*\restriction_{j+1} = \gamma'$. Afirmamos que $\delta^* \geq \alpha_n^*$ para todo $n < \omega$. En efecto, como $\sigma' = \alpha_n^*\restriction_j$ para todo $n < \omega$, entonces $\delta^*(k) = \alpha_n^*(k)$ para $k < j$. Pero δ^* es no decreciente y $\delta^*(j) = \gamma$, entonces para todo $k \geq j$ tenemos que

$\delta^*(k) \geq \gamma \geq \alpha_n > \alpha_n^*(k)$ y concluimos $\delta^* \geq \alpha_n^*$ para todo $n < \omega$. Por tanto

$$\delta^* \in \cap_{n<\omega}([\sigma'] \cap R(\alpha_n^*)) \subseteq \cap_{n<\omega} B(\alpha_n, j).$$

Como $n_{\alpha_n} < j$ para todo $n < \omega$, tenemos que $B(\alpha_n, j) \subseteq B(\alpha_n, n_\alpha)$, y por tanto $\delta^* \in B(\alpha_n, n_\alpha)$ para todo $n < \omega_1$. Afirmamos que $f_\delta \restriction_{\mathrm{Dom}\sigma} = \sigma$. Por los resultados anteriores será suficiente demostrar que $\mathrm{Dom}\sigma \subseteq \delta$, pero $\mathrm{Dom}\sigma \subset \alpha_n < \gamma < \delta$.

Finalmente definimos $q_n = (\delta^*, l_n)$, donde

$$l_n(\beta) = \begin{cases} f_\delta(\beta) & \text{si } \beta < \delta \text{ y } \beta \notin G_{\alpha_n} \\ x' & \text{de cualquier otra manera .} \end{cases}$$

Afirmamos que $p_\delta \in cl_\Sigma U \cap H$. Para demostrar esto será suficiente probar que $p_\delta \in cl_\Sigma U$. Primero veamos que $q_n \in U$ para todo $n < \omega$. Pero para demostrar esto es suficiente demostrar que $l_n \in U(\sigma_{\alpha_n}, G_{\alpha_n})$. Si $\beta \in \mathrm{Dom}\sigma_{\alpha_n} = \mathrm{Dom}\sigma$, sabemos que $l_n(\beta) = f_\delta(\beta) = \sigma(\beta) = f_{\alpha_n}(\beta)$. Ahora si $\beta \in G_{\alpha_n}$, entonces $l_n(\beta) = x' = f_{\alpha_n}(\beta)$, por tanto $q_n \in B(\alpha_n, n_{\alpha_n}) \times U(\sigma_n, G_{\alpha_n}) \subseteq U$.

Para concluir este ejemplo, demostraremos que si $p_\delta \in B(\delta, n_\delta) \times U(\sigma_\delta, G_\delta)$, existe un $n < \omega$ tal que $l_n \in U(\sigma_\delta, G_\delta)$. Como $\mathrm{Dom}\sigma_\delta$ es un conjunto finito de ω_1 y la sucesión $\{G_{\alpha_n}\}_{n<\omega}$ de conjuntos ajenos de ω_1 es infinita, entonces existe $n_0 < \omega$, tal que $\mathrm{Dom}\sigma_\delta \cap G_{\alpha_{n_0}} = \emptyset$. Afirmamos que $l_{n_0} \in U(\sigma_\delta, G_\delta)$. En efecto, si $\beta \in \mathrm{Dom}\sigma_\delta$, entonces $\beta < \delta$, por tanto $l_{n_0}(\beta) = f_\delta(\beta) = \sigma_\delta(\beta)$. Además, como $\alpha_{n_0} < \delta$, si $\beta \in G_\delta \subseteq (\omega_1 \setminus \delta) \subseteq (\omega_1 \setminus \alpha_{n_0})$, entonces $g_{n_0}(\delta) = x'$. Así que finälmente $q_{n_0} \in B(\delta, n_\delta) \times U(\sigma_\delta, G_\delta)$.

CAPÍTULO 6

Σ-productos de Σ-espacios paracompactos y de espacios semi-estratificables

1. Paracompacidad y Normalidad

En este capítulo, presentaremos una serie de teoremas de Yajima, en los que se generaliza el teorema de Kombarov (Teorema 4.9). Las técnicas empleadas en la demostración de los teoremas que trataremos en este capítulo, son bastante complejas. Hemos tratado de unificar las notaciones en las pruebas de los teoremas estudiados y hemos intentado escribir las demostraciones de tal forma que sea más sencilla su lectura. La fuerza de los teoremas que veremos en este capítulo se hace más notoría al tener presente el ejemplo de Daniel y Gruenhage (ver capítulo 5 sección 2).

Es conocido que un Σ-espacio paracompacto Y tiene una familia $\mathcal{F} \subset P(Y)$ σ-discreta y una cubierta $\mathcal{C}$ de conjuntos compactos cerrados tales que, si $C \in \mathcal{C}$ y $C \subseteq U$ con U abierto de Y, entonces $C \subseteq F \subseteq U$, para algún $F \in \mathcal{F}$ (ver G.Gruenhage [**16**]pg. 450). Sin embargo, usaremos con más frecuencia el suguiente lema proporcionado por K. Nagami [**31**], que dice:

LEMA 6.1. *Si X es un Σ-espacio, entonces existe un conjunto Ω y una familia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ de cubiertas de cerrados de X localmente finitas, cumpliendo las condiciones siguientes:*

(1) $\mathcal{F}_n = \{F(\beta_1\beta_2...\beta_n) : \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \Omega\}$ *para cada* $n \in N$
(2) $F(\beta_1\beta_2...\beta_n) = \cup_{\beta_{n+1}\in\Omega} F(\beta_1\beta_2...\beta_n\beta_{n+1})$
(3) *Para* $x \in X$ *existe una sucesión* $\{\beta_n\}_{n\in N} \subseteq \Omega$ *que cumple:*
   (a) $x \in \cap_{n\in N} F(\beta_1\beta_2...\beta_n)$.
   (b) *Si* $x \in U$ *donde* U *es un abierto de* X, *entonces existe* $n \in N$ *tal que* $x \in F(\beta_1\beta_2...\beta_n) \subseteq U$.
   (c) *Si* $\{K_n\}_{n\in N}$ *es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos en* X *tal que* $K_n \subseteq F(\beta_1\beta_2...\beta_n)$ *para cada* $n \in N$, *entonces* $\cap_{n\in N} K_n \neq \emptyset$.

A la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ se le llama Σ-red espectral de X, y si

$$x \in \cap_{n\in N} F(\beta_1, ..., \beta_n)$$

a la sucesión $\{F(\beta_1\beta_2...\beta_n)\}_{n\in N}$ se le llama Σ-red local de x. Es importante hacer notar que los productos de familias numerables de Σ-espacios paracompactos es nuevamente un Σ-espacio paracompacto (ver K. Nagami [**31**] teorema 3.13). También es importante advertir que si X es paracompacto, entonces $\cap_{n\in N} F(\beta_1, ..., \beta_n)$ es compacto (ver G. Gruenhage [**16**] pgs. 450-453).

En lo que sigue de este capítulo, los espacios considerados serán regulares, salvo cuando se diga lo contrario, además proponemos una notación que será común en varios teoremas.

Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de Σ-espacios y $a \in \Pi_{\lambda<\alpha} X_\lambda$. Como hemos hecho hasta ahora, denotaremos por Σ al Σ-producto $\Sigma(a)$, y al producto $\prod_{\lambda<\alpha} X_\lambda$ por $\prod$. Si $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$, denotaremos por $X_\xi = \Pi_{\lambda\in R_\xi} X_\lambda$. También, P_ξ denotará a la proyección de Σ en X_ξ. Si además $R_\gamma \subseteq R_\xi$, denotaremos con P_γ^ξ a la proyeccíon de X_ξ sobre X_γ. Y finalmente si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n}$ es una matriz de $n \times n$, denotaremos a $\xi_- = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n-1}$, y en general $\xi_k = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,k}$ para $k \leq n$, en particular ξ_0 será la matriz vacía.

Con el siguiente teorema de Y. Yajima ([**39**] pgs.690-693), iniciamos una secuela de teoremas que tienen una construcción común, en los cuales la paracompacidad y la normalidad juegan un papel importante, ya que las más de las veces pasar a las caras numerables (que en este caso serán espacios paracompactos) del producto, nos dará la pauta de las demostraciones.

TEOREMA 6.2 (Y. Yajima). *Si Σ es un Σ-producto de Σ-espacios paracompactos, entonces Σ es normal si y sólo si Σ es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de Σ-espacios paracompactos. Supongamos que Σ es normal. Usaremos el Teorema 1.22 para concluir que Σ es colectivamente normal. Sea $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ una familia discreta de cerrados en Σ. Construiremos por inducción:

1. para cada $n \in N$ una familia de abiertos localmente finita $\mathcal{G}_n$ en Σ, tal que para todo $U \in \mathcal{G}_n$, $cl_X(U)$ intersecta a lo más un miembro de $\mathcal{D}$;
2. para cada $n \in N$ una familia Δ_n de matrices de $n \times n$. Y para cada $\xi \in \Delta_n$ un conjunto de indices $\Omega(\xi)$, tales que si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ y si $1 \leq k \leq n$, entonces $\xi_{k-1} \in \Delta_{k-1}$ y $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \ldots, \beta_{kn} \in \Omega(\xi_{k-1})$;
3. para cada $\xi \in \Delta_n$, un conjunto $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$;
4. para cada $\xi \in \Delta_n$, una Σ-red espectral $\{\mathcal{F}_k\}_{k<\aleph_0}$ en X_ξ con
$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k) : \text{ con } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \Omega(\xi)\},$$
tal que, si $\mu = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n-1} \in \Delta_{n-1}$, $\beta_{in} \in \Omega(\mu_{i-1})$, $\beta_{nj} \in \Omega(\mu)$ para $1 \leq i,j \leq n$ y
$$\left(\left(\cap_{k=1,\ldots,n} P_{\mu_{k-1}}^{-1}\left(F\left(\beta_{k1}\beta_{k2}\ldots\beta_{kn}\right)\right)\right) \cap (\cup\mathcal{D})\right) \nsubseteq \cup\mathcal{G}_n,$$
entonces $(\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \Delta_n$;
5. para cada $n \in N$, una familia localmente finita de abiertos en Σ
$$\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\},$$
tal que si $\xi \in \Delta_n$ con $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ y si
$$E(\xi) = \cap_{k=1,\ldots,n} P_{\xi_{k-1}}^{-1}\left(F\left(\beta_{k1}\beta_{k2}\ldots\beta_{kn}\right)\right),$$
entonces tenemos que $E(\xi) \subseteq H(\xi)$ y
$$P_{\xi_-}^{-1} P_{\xi_-}(H(\xi)) = H(\xi);$$
6. para cada $\xi \in \Delta_n$, un $\mathcal{D}(\xi) \subseteq \mathcal{D}$ numerable , y $x(\xi, F) \in E(\xi) \cap F$ para cada $F \in \mathcal{D}(\xi)$, tales que
$$R_\xi = R_{\xi_-} \cup \left(\cup_{F\in\mathcal{D}(\xi)} sop\left(x(\xi, F)\right)\right).$$

De manera natural definimos $\Delta_0 = \{\xi_0\}$ en donde ξ_0 es la matriz vacía, y como R_{ξ_0} tomamos un elemento arbitrario de $[\alpha]^{\aleph_0}$. Como cada X_λ es un Σ-espacio paracompacto, X_{ξ_0} es un Σ-espacio paracompacto, por lo cual existe un conjunto de indices $\Omega(\xi_0)$ tal que

$$\{F(\beta_1\beta_2...\beta_k) : k \in N \text{ y } \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \in \Omega(\xi_0)\}$$

es una Σ-red espectral en X_{ξ_0}. Además tomamos $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset\}$, y de manera convencional definimos $E(\xi_0) = H(\xi_0) = X$. Construiremos los conjuntos requeridos en 1-6 para $n = 1$. Sea $\Gamma_1 = \{(\beta) : \beta \in \Omega(\xi_0)\}$, y si $\eta = (\beta) \in \Gamma_1$ definimos $E(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(F(\beta))$. Notemos que $P_{\xi_0}\left(P_{\xi_0}^{-1}(F(\beta))\right) = F(\beta)$ ya que P_{ξ_0} es sobreyectiva. Luego entonces la familia $\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1\}$ es una cubierta de cerrados de X_{ξ_0} localmente finita. Usando el Teorema 1.11, ya que X_{ξ_0} es paracompacto, hallamos una familia de abiertos $\{G(\eta) : \eta \in \Gamma_1\}$ localmente finita y con $P_{\xi_0}(E(\eta)) \subseteq G(\eta)$. Si $H(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(G(\eta))$, obtenemos que

$$E(\eta) \subseteq P_{\xi_0}^{-1}(P_{\xi_0}(E(\eta))) \subseteq P_{\xi_0}^{-1}(G(\eta)) = H(\eta).$$

La familia de abiertos $\{H(\eta) : \eta \in \Gamma_1\}$ es localmente finita, y además

$$P_{\xi_0}^{-1}(P_{\xi_0}(H(\eta))) = P_{\xi_0}^{-1}\left(P_{\xi_0}\left(P_{\xi_0}^{-1}(G(\eta))\right)\right) = P_{\xi_0}^{-1}(G(\eta)) = H(\eta).$$

Ahora, definimos

$$\Gamma_1^+ = \{\eta \in \Gamma_1 : E(\eta) \text{ intersecta a lo más un número finito de elementos de } \mathcal{D}\}$$

Si $\Gamma_1^+ = \emptyset$, entonces definimos a $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset\}$. En el caso en que Γ_1^+ sea no vacío la construcción será la siguiente. Para cada $\eta \in \Gamma_1^+$, sean $F_{\gamma_1}, ..., F_{\gamma_s}$ los únicos elementos en $\mathcal{D}$ tales que $E(\eta) \cap F_{\gamma_i} \neq \emptyset$. Como Σ es normal y los F_{γ_i} son ajenos y $\mathcal{D}$ es discreta, entonces existen abiertos $\{G_{\gamma_0}, ..., G_{\gamma_s}\}$ en Σ tales que $F_{\gamma_i} \subseteq G_{\gamma_i}$ si $i > 0$, y $\left(\cup_{\gamma \in \theta - \{\gamma_1, ..., \gamma_s\}} F_\gamma\right) \subseteq G_{\gamma_0}$. Además $cl_X(G_{\gamma_i}) \cap G_{\gamma_j} = \emptyset$ para $i \neq j$ y $0 \leq i, j \leq s$. Sea $\mathcal{G}(\eta) = \{G_{\gamma_i} \cap H(\eta)\}_{i=1,..,s}$. Esta familia cumple lo siguiente

1. la clausura de todo elemento de $\mathcal{G}(\eta)$ se intersecta con a lo más un elemento de $\mathcal{D}$;
2. $E(\eta) \cap (\cup \mathcal{D}) \subseteq \cup \mathcal{G}(\eta)$;
3. $\cup \mathcal{G}(\eta) \subseteq H(\eta)$.

Ahora podemos definir $\mathcal{G}_1 = \cup_{\eta \in \Gamma_1^+} \mathcal{G}(\eta)$. Como cada $\mathcal{G}(\eta)$ es finita, $\cup \mathcal{G}(\eta) \subseteq H(\eta)$ para todo $\eta \in \Gamma_1^+$, y además por construcción tenemos que $\{H(\eta)\}_{\eta \in \Gamma_1^+}$ es localmente finita, entonces $\mathcal{G}_1$ es localmente finita. Es claro que para cada elemento de $\mathcal{G}_1$, su clausura intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{D}$. Así que $\mathcal{G}_1$ cumple 1. Sea $\Gamma_1^- = \Gamma - \Gamma_1^+$. Ahora bién, si $\Gamma_1^- = \emptyset$, entonces $\Gamma = \Gamma_1^+$. Por construcción $\{E(\eta)\}_{\eta \in \Gamma}$ es una cubierta de Σ, y podemos concluir que $\cup \mathcal{D} \subseteq \cup \mathcal{G}_1$; usando el Teorema 1.12 obtenemos que Σ es colectivamente normal. Si $\Gamma_1^- \neq \emptyset$, definimos a Δ_1 como Γ_1^-. Para cada $\eta \in \Delta_1$ podemos escoger un conjunto infinito numerable $\mathcal{D}(\eta) \subseteq \mathcal{D}$ y $x(\eta, F) \in E(\eta) \cap F$ para todo $F \in \mathcal{D}(\eta)$. Completamos ahora la definición de R_η. Sea

$$R_\eta = R_{\xi_0} \cup \left(\cup_{F \in \mathcal{D}(\eta)} sop(x(\eta, F))\right) \subseteq \alpha.$$

Finalmente $\Omega(\eta)$ será el conjunto de indices para la Σ-red espectral de X_η.

Ahora supongamos que tenemos construidos todos los objetos requeridos en 1-6 para $1 \leq i \leq n$. Construyamoslos para el caso $n + 1$. El trabajo es el mismo que para $n = 1$. Cuando sea el caso lo haremos notar y proseguiremos la demostración. Para $\xi \in \Delta_n$, sea

$$\Gamma_{n+1}(\xi) = \{\eta = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n+1} : \eta_- = \xi,\ \beta_{i\ n+1} \in \Omega(\xi_{i-1}),\ \beta_{n+1\ j} \in \Omega(\xi) \text{ para } 1 \le i, j \le n+1\}$$

Para cada $\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)$, definimos:

$$E(\eta) = \cap_{i=1,..,n+1} P^{-1}_{\xi_{i-1}} \left(F\left(\beta_{i1}\beta_{i2}...\beta_{i\ n+1}\right)\right).$$

Como

$$P_\xi(E(\eta)) \subseteq P_\xi\left(P^{-1}_\xi\left(F\left(\beta_{n+1\ 1}...\beta_{n+1\ n+1}\right)\right)\right) = F\left(\beta_{n+1\ 1}...\beta_{n+1\ n+1}\right),$$

entonces la familia

$$\left\{cl_{X_\xi}\left(P_\xi(E(\eta))\right) : \ \eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)\right\} \cup \{X_\xi\}$$

es una cubierta de cerrados localmente finita en X_ξ, el cual es paracompacto. Usando el Teorema 1.11 , obtenemos la familia de abiertos $\{G(\eta)\}_{\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)}$ localmente finita tal que $cl_{X_\xi}\left(P_\xi(E(\eta))\right) \subseteq G(\eta)$ para todo $\Gamma_{n+1}(\xi)$. Como $F(\beta_{i\ 1}..\beta_{i\ n}\beta_{i\ n+1}) \subseteq F(\beta_{i\ 1}...\beta_{i\ n})$, $E(\eta) \subseteq E(\xi) \subseteq H(\xi)$; por lo cual $P_\xi(E(\eta)) \subseteq P_\xi(H(\xi))$.

Sea $H(\eta) = P^{-1}_\xi(G(\eta) \cap P_\xi(H(\xi)))$. Entonces $E(\eta) \subseteq H(\eta)$. Además como $H(\eta) \subseteq P^{-1}_\xi(G(\eta))$, la familia $\{H(\eta) : \eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)\}$ es localmente finita. Sólo comprobemos que $P^{-1}_\xi(P_\xi(H(\eta))) \subseteq H(\eta)$. En efecto, sea

$$z \in P^{-1}_\xi(P_\xi(H(\eta))),$$

entonces $P_\xi(z) = P_\xi(w)$ donde $w \in H(\eta)$. Entonces $P_\xi(w) \in G(\eta) \cap P_\xi(H(\xi))$, o sea $z \in P^{-1}_\xi(G(\eta) \cap P_\xi(H(\xi)))$=$H(\eta)$. Sea

$$\Gamma^+_{n+1}(\xi) = \{\eta \in \Gamma_{n+1} : E(\eta) \text{ intersecta a lo más un número finito de elementos de } \mathcal{D}\}$$

Si $\Gamma^+_{n+1}(\xi) = \emptyset$, tomamos a $\mathcal{G}_{n+1}(\xi) = \emptyset$. En caso contrario, igual que en el caso $n = 1$, para todo $\eta \in \Gamma^+_{n+1}(\xi)$ existe una familia finita de abiertos $\mathcal{G}(\eta)$ tal que:

1. para todo elemento de $\mathcal{G}(\eta)$ su clausura intersecta con $\mathcal{D}$ en a lo más un elemento;
2. $E(\eta) \cap (\cup\mathcal{D}) \subseteq \cup\mathcal{G}(\eta)$;
3. $\cup\mathcal{G}(\eta) \subseteq H(\eta)$.

Y definimos a $\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ como:

$$\cup\left\{\mathcal{G}(\eta) : \eta \in \Gamma^+_{n+1}(\xi)\right\}.$$

Finalmente definimos a $\mathcal{G}_{n+1}$ como:

$$\cup\left\{\mathcal{G}_{n+1}(\xi) : \xi \in \Delta_n\right\}.$$

Para $\xi \in \Delta_n$ sea $\Gamma^-_{n+1}(\xi) = \Gamma_{n+1}(\xi) \setminus \Gamma^+_{n+1}$. Sea

$$\Delta_{n+1} = \cup\left\{\Gamma^-_{n+1}(\xi) : \xi \in \Delta_n\right\}.$$

Si $\Delta_{n+1} = \emptyset$, afirmamos que $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\{\mathcal{G}_l : l \le n+1\}$, y entonces concluimos que Σ es colectivamentente normal. En efecto, supongamos que

$$z \in \cup\mathcal{D} \setminus \cup\{\mathcal{G}_l : l \le n+1\}.$$

En X_{ξ_0} existe una Σ-red local para $P_{\xi_0}(z)$. Sea $\{F(\beta_{11}\beta_{12}...\beta_{1k})\}_{k \in N}$ tal Σ-red local. Tomamos a $\xi^1 = (\beta_{11})$. Afirmamos que $\xi_1 \in \Delta_1$; en efecto, supongamos que

$\xi_1 \in \Gamma_1^+$, como $E(\xi^1) = P_{\xi_0}^{-1}(F(\beta_{11}))$ y $P_{\xi_0}(z) \in F(\beta_{11})$, entonces $z \in E(\xi^1)$. Ahora bién, ya que $E(\xi^1) \cap (\cup\mathcal{D}) \subseteq \cup\mathcal{G}(\xi^1) \subseteq \mathcal{G}_1$, entonces $z \in \cup\{\mathcal{G}_l : l \leq n+1\}$, lo cual no es posible. Sea ahora $j \leq n$ y supongamos que tenemos una Σ-red local $\{F(\beta_{t1}\beta_{t2}..\beta_{tl})\}_{k\in N}$ para $P_{\xi^{t-1}}(z)$ en $X_{\xi^{t-1}}$, donde $\xi^{t-1} = (\beta_{rs})_{r,s=1,..,t-1} \in \Delta_t$ y $t \leq j$. Sea $\{F(\beta_{j1}\beta_{j2}...\beta_{jt})\}_{k\in N}$ una Σ-red local de $P_{\xi^{j-1}}(z)$ en $X_{\xi^{j-1}}$. Afirmamos que si $\xi^j = (\beta_{rs})_{r,s=1,..,j}$, entonces $\xi^j \in \Delta_j$. En efecto, supongamos que $\xi^j \in \Gamma_{j-1}^+(\xi^{j-1})$. Como $P_{\xi^{t-1}}(z) \in F(\beta_{t1}\beta_{t2}...\beta_{tj})$ con $1 \leq t \leq j$, entonces $z \in E(\xi^{j-1}) \cap (\cup\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{G}_j(\xi^{j-1}) \subseteq \mathcal{G}_j$ lo que es imposible. Así que $\xi^j \in \Delta_j$. Si $\{F(\beta_{(n+1)1}...\beta_{(n+1)k})\}_{k\in N}$es una Σ-red local de $P_{\xi^n}(z)$ en X_{ξ^n}, entonces $\xi^{n+1} = (\beta_{rs})_{r,s=1,..,n+1} \in \Delta_{n+1}$. Por tanto Σ es colectivamente normal.

Supongamos ahora que $\Delta_{n+1} \neq \emptyset$. Como en el caso 1, para cada $\eta \in \Delta_{n+1}$, existe un subconjunto infinito numerable $\mathcal{D}(\eta) \subseteq \mathcal{D}$ y $x(\eta, D) \in E(\eta) \cap D$ para cada $D \in \mathcal{D}(\eta)$.

Si para toda $n \in N$, $\Delta_n \neq \emptyset$, definimos $\mathcal{G} = \cup_{n\in N}\mathcal{G}_n$. Demostraremos que $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\mathcal{G}$, ya que usando el Teorema 1.12 podemos concluir que Σ es colectivamente normal.

Con este fin, supongamos que $z \in (\cup\mathcal{D}) \setminus (\cup\mathcal{G})$. Realizando la misma construcción que antes, tendremos una sucesión $\{\beta_{i\,j}\}_{(i,j)\in N\times N}$ tal que para todo $n \in N$, la matriz $\xi^n = (\beta_{i\,j})_{i,j=1,..,n} \in \Delta_n$ y $\{F(\beta_{n\,1}...\beta_{n\,k})\}_{k\in N}$ es una Σ-red local para $P_{\xi^{n-1}}(z)$ en $X_{\xi^{n-1}}$. Sea $\{\beta_{1\,k}\}_{k\in N} \subseteq \Omega(\xi_0)$ tal que $\{F(\beta_{1\,1}..\beta_{1\,k})\}_{k\in N}$ es una Σ-red local para $P_{\xi_0}(z)$ en X_{ξ_0}.

Como cada $\mathcal{D}(\xi^n)$ es infinito numerable podemos escoger $D_n \in \mathcal{D}(\xi^n)$ de tal manera que la familia $\{D_n\}_{n\in N}$ sea discreta. Denotamos $x_i = x(\xi^i, D_i)$ para cada $i \in N$. Para cada $n, k \in N$ con $n \leq k$ definimos $L_{nk} = \{P_{\xi^{n-1}}(x_i) : i \geq k\} \subseteq X_{\xi^{n-1}}$. Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

1. $L_{nk} \subseteq F(\beta_{n1}...\beta_{nk})$, ya que para todo $i \geq k$ se tiene
$$x_i \in E(\xi^i) = \cap_{j=1,..,i} P_{(\xi^i)_{j-1}}^{-1}(F(\beta_{j1}...\beta_{ji})) \subseteq P_{(\xi^i)_{k-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}...\beta_{ki}))$$
y también
$$P_{(\xi^i)_{k-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}...\beta_{ki})) \subseteq P_{(\xi^i)_{k-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}..\beta_{kn})),$$
por lo cual
$$P_{\xi^{n-1}}(x_i) \in P_{\xi^{n-1}}\left(P_{(\xi^i)_{k-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}..\beta_{kn}))\right)$$
$$\subseteq P_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}..\beta_{kn}))\right),$$
pero
$$P_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}^{-1}(F(\beta_{k1}...\beta_{kn}))\right) = F(\beta_{k1}..\beta_{kn}).$$
Entonces $P_{\xi^{n-1}}(x_i) \in F(\beta_{k1}...\beta_{kn})$.
2. $cl_{X_{\xi^{n-1}}}(L_{nk}) \subseteq F(\beta_{n1}...\beta_{nk})$;
3. también $cl_{X_{\xi^{n-1}}}(L_{n\,k+1}) \subseteq cl_{X_{\xi^{n-1}}}(L_{nk})$ ya que $L_{n\,k+1} \subseteq L_{nk}$.

Ahora, usando las propiedades de Σ-red, obtenemos que si
$$K_n = \cap_{k\in N} cl_{X_{\xi^{n-1}}}(L_{nk}),$$
entonces $K_n \neq \emptyset$. Como $X_{\xi^{n-1}}$ es un Σ -espacio paracompacto, los conjuntos $\cap_{k\in N}$ $F(\beta_{n1}...\beta_{nk})$ son compactos, así que los K_n son compactos en $X_{\xi^{n-1}}$. Tomemos

al conjunto $B = \cup_{n \in N} R_{\xi^n} \subseteq \alpha$; B es numerable, y para cada $n < \aleph_0$ definimos a S_n como el conjunto de los $z \in \Pi_B$ tales que $z(\lambda) = a(\lambda)$ si $\lambda \notin R_{\xi^n}$. Podemos demostrar que S_n es homemomorfo a X_{ξ^n} a traves de la función $P^B_{\xi^n}\lceil_{S_n}: S_n \to X_{\xi^n}$. Si $T_n = \left(P^B_{\xi^n}\lceil_{S_n}\right)^{-1}(K_{n+1})$, entonces T_n es compacto en Π_B para todo $n < \aleph_0$. Además para $i \geq k \geq n+1$ se tiene que $P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}(P_{\xi^n}(x_i)) = P_{\xi^{n-1}}(x_i) \in L_{nk}$, así que $P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}(L_{n+1\ k}) \subseteq L_{nk}$, y de esto obtenemos

$$P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\left(cl_{X_{\xi^n}}(L_{n+1\ k})\right) \subseteq cl_{X_{\xi^{n-1}}}(L_{nk}).$$

Por tanto $\cap_{k \in N} P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\left(cl_{X_{\xi^n}}(L_{n+1\ k})\right) \subseteq K_n$, lo que implica que

$$P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}(K_{n+1}) \subseteq K_n.$$

Si $w \in T_{n+1}$, entonces $\left(P^B_{\xi^n}\lceil_{S_n}\right)(w) \in K_{n+1}$. Por lo cual $P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\left(P^B_{\xi^n}\lceil_{S_n}\right)(w) \in K_n$. Pero $P^B_{\xi^{n-1}}(w) = P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\left(P^B_{\xi^n}\lceil_{S_n}\right)(w)$. De todo esto concluimos que $w \in T_n$. Así que tenemos una familia decreciente de cerrados no vacios en un compacto con la propiedad de la intersección finita, a saber $\{T_n\}_{n \in N}$. Entonces podemos concluir que $\cap_{n \in N} T_n \neq \emptyset$. Sea $t \in \cap_{n \in N} T_n$. Tomamos $z_{n+1} = P^B_{\xi^n}(t) \in K_{n+1}$. Resulta que

$$P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}(z_{n+1}) = P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\left(P^B_{\xi^n}(t)\right) = P^B_{\xi^{n-1}}(t) = z_n$$

Definimos $\overline{z} \in X$ de la siguiente manera

$$\overline{z}(\lambda) = \begin{cases} a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin B \\ z_n(\lambda) & \text{si } \lambda \in R_{\xi^{n-1}}. \end{cases}$$

Para cualquier abierto W que contenga a $\bar{z}$, existen un conjunto finito $H \subseteq \alpha \setminus B$, y un abierto U_n de X_{ξ^n} que contiene a z_{n+1}, y para cada $\lambda \in H$ un abierto U_λ en X_λ que contiene a $a(\lambda)$ tal que

$$\bar{z} \in U = P^{-1}_{\xi^n}(U_n) \cap \left(\cap_{\lambda \in H} P^{-1}_\lambda(U_\lambda)\right) \subseteq W$$

Como $z_{n+1} \in K_{n+1}$, entonces $U_n \cap L_{n+1\ k} \neq \emptyset$ para todo $k \geq n+1$. Sea $P_{\xi^n}(x_{i_k}) \in U_n \cap L_{n+1\ k}$, con $i_{k+1} > i_k$ para todo $k \geq n+1$. Por construcción tenemos que $\{x_{i_k}\}_{k \in N} \subseteq P^{-1}_{\xi^n}(U_n)$, pero además $sop(x_{i_k}) \subseteq R_{\xi^{i_k}} \subseteq B$, entonces tenemos que $x_{i_k}(\lambda) = a(\lambda) \in U_\lambda$ para todo $\lambda \in H$. Finalmente obtenemos que $\{x_{i_k}\}_{k \in N} \subseteq U$, por tanto $\{x_{i_k}\}_{k \in N} \subseteq U \cap (\cup_{n \in N} D_n)$. Como esto puede realizarse para cualquier vecindad de $\overline{z}$, la familia $\{D_n\}_{n \in N}$ no puede ser discreta. □

Para probar el siguiente teorema, también de Yajima, demostraremos primero un lema , y usaremos una buena cantidad de afirmaciones demostradas en el teorema anterior.

LEMA 6.3. *Sean X un espacio tal que $t(X) = \aleph_0$, $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos del espacio Y y $f: Y \to X$ una función continua. Si $f(\mathcal{D}) = \{f(D)\}_{D \in \mathcal{D}}$ es no discreta con respecto al punto $x \in X$, entonces existe $M \subseteq \cup\mathcal{D}$ numerable tal que $\{f(M \cap D)\}_{D \in \mathcal{D}}$ es no discreta respecto al punto x.*

DEMOSTRACIÓN: En el caso en que $x \in \cup_{D \in \mathcal{D}} cl_X(f(D))$, escogemos $D_0 \in \mathcal{D}$, tal que $x \in cl_X(f(D_0))$. Notar que $x \in cl_X\left(\cup_{D \in \mathcal{D}-\{D_0\}} f(D)\right)$, ya que como $f(\mathcal{D})$ no es discreta respecto a x, toda vecindad de x intersecta, además de $f(D_0)$, a otro elemento de $f(\mathcal{D})$. Podemos proponer $H_1 \subseteq f(D_0)$, $H_2 \subseteq \cup_{D\in\mathcal{D}-\{D_0\}} f(D) = f\left(\cup_{D\in\mathcal{D}\setminus\{D_0\}} D\right)$ subconjuntos numerables, tales que $x \in cl_X(H_1) \cap cl_X(H_2)$. Sean

$$M_1 \subseteq D_0 \text{ y } M_2 \subseteq \cup_{D\in\mathcal{D}\setminus\{D_0\}} D$$

conjuntos numerables tales que $f(M_1) = H_1$ y $f(M_2) = H_2$. Notar que $x \in cl_X(f(M_1)) \cap cl_X(f(M_2))$. Afirmamos que si $M = M_1 \cup M_2$, este cumple que la familia $\{f(M \cap D)\}_{D\in\mathcal{D}}$ es no discreta en x. Para demostrar esto, sea V una vecindad de x. Si $z_i \in M_i$ son tales que $f(z_i) \in V \cap f(M_i)$ para $i = 1, 2$, entonces $z_1 \in M \cap D_0$ y $z_2 \in \cup_{D\in\mathcal{D}\setminus\{D_0\}} (D \cap M)$.

Ahora si $x \notin \cup_{D\in\mathcal{D}} cl_X(f(D))$, por la hipotésis tenemos que

$$x \in cl_X(\cup_{D\in\mathcal{D}} f(D)),$$

y existe

$$H \subseteq \cup_{D\in\mathcal{D}} f(D)$$

numerable con $x \in cl_X(H)$. Sea $M \subseteq \cup_{D\in\mathcal{D}} D$, también numerable, tal que $f(M) = H$. Sea V cualquier vecindad de x. Supongamos que V intersecta sólo a $f(M \cap D')$ donde $D' \in \mathcal{D}$, pero existe V' vecindad de x, tal que $V' \cap f(D') = \emptyset$. Entonces $(V \cap V') \cap f(M) = \emptyset$, ya que si $f(z) \in (V \cap V') \cap f(M)$ con $z \in M$ existe $D'' \in \mathcal{D}$ tal que $z \in D''$. Si $D' \neq D''$ entonces $f(z) \in V \cap f(M \cap D'')$, lo cual no es posible, entonces $D' = D''$. Pero entonces $f(z) \in V' \cap f(D')$, que también es imposible. Ahora, si $V \cap f(M \cap D) = \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$, entonces $V \cap f(M) = \emptyset$.Pero $H = f(M)$ y $x \in cl_X(H)$. Por lo tanto $\{f(M \cap D)\}_{D\in\mathcal{D}}$ es no discreta respecto a x. □

TEOREMA 6.4. *Si Σ es un Σ-producto de Σ-espacios paracompactos con $t(\Sigma) = \aleph_0$ entonces Σ es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar lo deseado, usaremos también la caracterización de la normalidad colectiva proporcionada por el Teorema 1.12. Sea $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ una familia discreta de cerrados en Σ. De manera semejante a la demostración del anterior teorema se construirá:

1. para cada $n \in N$ una familia de abiertos localmente finita $\mathcal{G}_n$ en Σ, tal que para todo $U \in \mathcal{G}_n$, $cl_X(U)$ intersecta a lo más un miembro de $\mathcal{D}$;
2. para cada $n \in N$, una familia Δ_n de matrices de $n \times n$;
3. para cada $\xi \in \Delta_n$, un $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$, tal que $R_{\xi_-} \subseteq R_\xi$;
4. para cada $\xi \in \Delta_n$, un conjunto de indices $\Omega(\xi)$ y una Σ-red espectral para X_ξ
$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1\beta_2...\beta_k) : \text{ con } \beta_1, \beta_2, ...\beta_k \in \Omega(\xi)\};$$
5. una familia de abiertos $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$ de X_{ξ_-} tal que $E(\xi) \subseteq H(\xi)$ para toda $\xi \in \Delta_n$, en donde para cada $\xi \in \Delta_n$, si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ entonces
$$E(\xi) = \cap_{k=1,..,n} \left(P^{\xi_-}_{\xi_{k-1}}\right)^{-1} (F(\beta_{k1}..\beta_{kn}))$$
y tal que la familia $\left\{P^{-1}_{\xi_-}(H(\xi)) : \xi \in \Delta_n\right\}$ es localmente finita en Σ.

Los elementos de Δ_n se construirán de tal forma que

1. para cada $\xi \in \Delta_n$, si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ y $1 \leq k \leq n$, tendremos que $\xi_{k-1} \in \Delta_{k-1}$ y $\beta_{k1}, .., \beta_{kn} \in \Omega(\xi^{k-1})$.

2. Si $\mu = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n-1} \in \Delta_{n-1}$, $\beta_{nj} \in \Omega(\mu)$, $\beta_{in} \in \Omega(\mu_{i-1})$ para $1 \leq i, j \leq n$ y además $\left(\cap_{i=1,..,n} P^{-1}_{\mu_{i-1}}(F(\beta_{i1},..\beta_{in}))\right) \cap (\Sigma \setminus (\cup \mathcal{G}_n)) \neq \emptyset$ entonces $(\beta_{ij})_{i,j=1,..,n} \in \Delta_n$.

Los conjuntos R_ξ se construirán de la siguiente forma:

1. para cada $\xi \in \Delta_n$, existe $x_\xi \in E(\xi)$ y $M_\xi \subseteq \cup\mathcal{D}$ numerable tal que la familia $\{P_{\xi_-}(D \cap M_\xi)\}_{D\in\mathcal{D}}$ es no discreta en x_ξ,
2. para cada $\xi \in \Delta_n$, $R_\xi = R_{\xi_-} \cup (\cup_{x\in M_\xi} Sop(x))$.

Igual que antes definimos $\Delta_0 = \{\xi_0\}$ donde ξ_0 es la matriz vacía y R_{ξ_0} es un arbitrario elemento de $[\alpha]^{\aleph_0}$, así que ya podemos definir X_{ξ_0} y también localizar $\Omega(\xi_0)$ que indica una $\Sigma-red$ espectral en X_{ξ_0}. Pero estamos interesados en construir el paso 1. Sea $\Gamma_1(\xi_0) = \{(\beta) : \beta \in \Omega(\xi_0)\}$ y para $\eta = (\beta) \in \Gamma_1$, definimos $E(\eta) = F(\beta)$. Sea

$$\Phi(\xi_0) = \left\{x \in X_{\xi_0} : \text{ tal que } \{P_{\xi_0}(D)\}_{D\in\mathcal{D}} \text{ es no discreta en } x\right\}.$$

También definimos $\Gamma_1^+(\xi_0) = \{\eta \in \Gamma_1(\xi_0) : E(\eta) \cap \Phi(\xi_0) = \emptyset\}$ y $\Gamma_1^-(\xi_0) = \Gamma_1(\xi_0) - \Gamma_1^+(\xi_0)$. Análogas consideraciones a las del teorema 6.2 se harán aquí. Si $\Gamma_1^+(\xi_0) = \emptyset$, entonces definimos $\mathcal{G}_1 = \emptyset$. Pero si $\Gamma_1^+(\xi_0) \neq \emptyset$, entonces para cada

$$z \in \cup\{E(\eta) : \eta \in \Gamma_1^+(\xi_0)\}$$

existe un abierto V_z que contiene a z, tal que intersecta a lo más un elemento de $\{P_{\xi_0}(D)\}_{D\in\mathcal{D}}$. Como X_{ξ_0} es normal podemos pedir que $cl_{X_{\xi_0}}(V_z)$ intersecte a lo más un elemento de $\{P_{\xi_0}(D)\}_{D\in\mathcal{D}}$. Sea $\{A_\beta\}_{\beta\in C}$ un refinamiento localmente finito de

$$\left\{V_z : z \in \cup\{E(\eta) : \eta \in \Gamma^+(\xi_0)\}\right\} \cup \left\{X_{\xi_0} - \cup_{\eta\in\Gamma_1^+(\xi_0)} E(\eta)\right\}.$$

Podemos escoger $C' \subseteq C$ tal que $\cup_{\eta\in\Gamma_1^+(\xi_0)} E(\eta) \subseteq \cup\{A_\beta\}_{\beta\in C'}$ y además de tal forma que $cl_{X_{\xi_0}}(A_\beta)$ intersecte a lo más un elemento de $\{P_{\xi_0}(D)\}_{D\in\mathcal{D}}$ (por ejemplo $\beta \in C'$ si y solo si $A_\beta \subseteq V_z$ para algún $z \in \cup_{\eta\in\Gamma_1^+(\xi_0)} E(\eta)$). Finalmente, definimos a $\mathcal{G}_1$ como $\left\{P^{-1}_{\xi_0}(A_\beta)\right\}_{\beta\in C'}$, $\mathcal{G}_1$ cumple:

1. $\mathcal{G}_1$ es localmente finita en Σ,
2. la clausura de cada elemento de $\mathcal{G}_1$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{D}$,
3. $\cup_{\eta\in\Gamma_1^+(\xi_0)} E(\eta) \subseteq \cup\{P_{\xi_0}(G)\}_{G\in\mathcal{G}_1}$.

Solamente demostremos que se cumple la afirmación 2. Si $\left(cl_X\left(P^{-1}_{\xi_0}(A_\beta)\right)\right)$ intersectara digamos a D_{γ_1} y D_{γ_2}, entonces $P_{\xi_0}\left(\left(cl_X\left(P^{-1}_{\xi_0}(A_\beta)\right)\right)\right)$ intersectaría a $P_{\xi_0}(D_{\gamma_1})$ y a $P_{\xi_0}(D_{\gamma_2})$, pero

$$P_{\xi_0}\left(\left(cl_X\left(P^{-1}_{\xi_0}(A_\beta)\right)\right)\right) \subseteq cl_{X_{\xi_0}}\left(P_{\xi_0}\left(P^{-1}_{\xi_0}(A_\beta)\right)\right) = cl_{X_{\xi_0}}(A_\beta).$$

Si $A_\beta \subseteq V_z$, entonces $cl_{X_{\xi_0}}(V_z)$ intersectaría a $P_{\xi_0}(D_{\gamma_1})$ y a $P_{\xi_0}(D_{\gamma_2})$, lo cual no es posible. Esto demuestra la afirmación 2.

Usando nuevamente el Teorema 1.11 podemos concluir la existencia de la familia localmente finita de abiertos $\{H(\eta)\}_{\eta\in\Gamma_1^-(\xi_0)}$ con $E(\eta) \subseteq H(\eta)$.

Para concluir el paso 1 , definamos $\Delta_1 = \Gamma_1^-(\xi_0)$. Si $\Delta_1 = \emptyset$, entonces $\Gamma_1(\xi_0) = \Gamma_1^+(\xi_0)$ y por tanto $\mathcal{G}_1$ sería cubierta de Σ, usando el teorema 1.12, tendríamos que Σ sería colectivamente normal. Supongamos ahora que $\Delta_1 \neq \emptyset$, entonces para $\eta \in$

Δ_1 existe $x_\eta \in E(\eta) \cap \Phi(\xi_0)$, usando el lema 6.3, implicamos la existencia de $M_\eta \subseteq \cup\mathcal{D}$ numerable, tal que, en x_η, la familia $\{P_{\xi_0}(D \cap M_\eta)\}_{D\in\mathcal{D}}$ no es discreta. Sea $R_\eta = (\cup\{sop(x) : x \in M_\eta\}) \cup R_{\xi_0}$.

Ahora construiremos los conjuntos requeridos para el caso $n+1$. Suponemos realizada la construcción para toda $0 \leq i \leq n$. Cuando la construcción se remita al caso 1 lo haremos notar y la omitiremos. Para cada $\xi \in \Delta_n$, definimos al conjunto $\Phi(\xi)$ como

$$\left\{x \in X_\xi : \{P_\xi(D)\}_{D\in\mathcal{D}} \text{ no es discreta en } x\right\}.$$

Si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n}$, el conjunto $\Gamma_{n+1}(\xi)$ es definido como

$$\{\eta = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n+1} : \beta_{i\;n+1} \in \Omega(\xi_{i-1}), \beta_{n+1\;j} \in \Omega(\xi) \text{ para } 1 \leq i,j \leq n+1\}.$$

Para cada $\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)$ definimos $E(\eta) = \cap_{i=1,..,n+1}\left(P^{\xi}_{\xi_{i-1}}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}...\beta_{i\;n+1}))$, y además $\Gamma^+_{n+1}(\xi) = \{\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi) : E(\eta) \cap \Phi(\xi) = \emptyset\}$ y $\Gamma^-_{n+1}(\xi) = \Gamma_{n+1}(\xi) - \Gamma^+_{n+1}(\xi)$. Si $\Gamma^+_{n+1}(\xi) = \emptyset$, definimos a $\mathcal{G}_{n+1}(\xi) = \emptyset$. Supongamos que $\Gamma^+_{n+1}(\xi) \neq \emptyset$. Como $F(\beta_{i1}..\beta_{in}\beta_{i\;n+1}) \subseteq F(\beta_{i1}..\beta_{in})$, entonces

$$\left(P^{\xi}_{\xi_{i-1}}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}...\beta_{in}\beta_{i\;n+1})) \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_{i-1}}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}..\beta_{in})) =$$

$$\left(P^{\xi_-}_{\xi_{i-1}}P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}..\beta_{in}))$$

y este último es igual a $\left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}\left(\left(P^{\xi_-}_{\xi_{i-1}}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}..\beta_{in}))\right)$. Pasando a las intersecciones tenemos que, para para $\eta \in \Gamma^+_{n+1}$

$$E(\eta) \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(E(\xi)) \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(H(\xi)).$$

La familia $\left\{E(\eta) : \eta \in \Gamma^+_{n+1}(\xi)\right\}$ es localmente finita en X_ξ ya que

$$E(\eta) \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_{i-1}}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}...\beta_{i\;n+1}))$$

que es localmente finita en X_ξ. Como en el caso 1 obtenemos una familia de abiertos localmente finita $\{A_\beta\}_{\beta\in C'}$ en X_ξ. Podemos añadir que $A_\beta \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(H(\xi))$ y de igual manera cumplirá que $cl_{X_\xi}(A_\beta)$ intersecta con a lo más un elemento de la familia $\{P_\xi(D)\}_{D\in\mathcal{D}}$. De igual forma definimos $\mathcal{G}_{n+1}(\xi) = \left\{P_\xi^{-1}(A_\beta)\right\}_{\beta\in C'}$. Ahora esta familia cumple:

1. $\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ es localmente finita en Σ;
2. la clausura de cualquier elemento de $\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{D}$;
3. cada $A \in \mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ cumple: $A = P_\xi^{-1}P_\xi(A) \subseteq P_{\xi_-}^{-1}(H(\xi))$;
4. $\cup\left\{E(\eta) : \eta \in \Gamma^+_{n+1}\right\} \subseteq \cup\left\{P_\xi(G) : G \in \mathcal{G}_{n+1}(\xi)\right\}$.

Sólo verificaremos que se cumple la afirmación 3. Supongamos que $A = P_\xi^{-1}(A_\beta)$, entonces $P_\xi^{-1}P_\xi(A) = P_\xi^{-1}P_\xi\left(P_\xi^{-1}(A_\beta)\right) = P_\xi^{-1}(A_\beta) = A$. Por otro lado $A = P_\xi^{-1}(A_\beta) \subseteq P_\xi^{-1}\left(\left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(H(\xi))\right) = P_{\xi_-}^{-1}(H(\xi))$.

Finalmente definimos a $\mathcal{G}_{n+1} = \cup_{\xi\in\Delta_n}\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$. Como, para cada $\xi \in \Delta_n$, $\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ es localmente finita en Σ, y la familia $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$ es localmente finita en Σ, usando que para todo $A \in \mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ este cumple que $A \subseteq P_{\xi_-}^{-1}(H(\xi))$, podemos concluir que la familia $\mathcal{G}_{n+1}$ es localmente finita. Sea $\Delta_{n+1} = \cup_{\xi\in\Delta_n}\Gamma_{n+1}^{-}(\xi)$.

Si $\Delta_{n+1} = \emptyset$, afirmamos que $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup_{l\leq n+1}\mathcal{G}_l$, y de aquí concluimos que Σ es colectivamente normal. En efecto, supongamos que $z \in \cup\mathcal{D} - \cup_{l\leq n+1}\mathcal{G}_l$. Sea $\{F(\beta_{11}\beta_{12}...\beta_{1k})\}_{k\in N}$ una Σ-red local de $P_{\xi_0}(z)$ en X_{ξ_0}. Tomamos a $\xi^1 = (\beta_{11})$, afirmamos que $\xi^1 \in \Delta_1$. En efecto, si $\xi^1 \in \Gamma_1^+$, ya que $P_{\xi^0}(z) \in F(\beta_{11})$, entonces $P_{\xi^0}(z) \in E(\xi^1)$. Por construcción, obtenemos que $z \in \mathcal{G}_1$, lo cual no puede suceder. Supongamos que para $j \leq n$, tenemos que $\{F(\beta_{t1}\beta_{t2}...\beta_{tk})\}_{k\in N}$ es una Σ-red local de $P_{\xi^{t-1}}(z)$ en $X_{\xi^{t-1}}$, donde $\xi^{t-1} = (\beta_{rs})_{r,s=1,..,t-1} \in \Delta_{t-1}$ y $t \leq j \leq n$. Sean $\{F(\beta_{(j+1)1}\beta_{(j+1)2}...\beta_{(j+1)k})\}_{k\in N}$ una Σ-red local de $P_{\xi^j}(z)$ en X_{ξ^j} y $\xi^{j+1} = (\beta_{rs})_{r,s=1,..,j+1}$. Afirmamos que $\xi^{j+1} \in \Delta_{j+1}$, supongamos que $\xi^{j+1} \in \Gamma_{j+1}^{+}(\xi^j)$. Analogamente, como $P_{\xi^{t-1}}(z) \in F(\beta_{t1}...\beta_{t(j+1)})$ para $1 \leq t \leq j+1$, entonces

$$P_{\xi^j}(z) \in \cap_{t=1,..,j+1}\left(\left(P_{\xi^{t-1}}^{\xi^j}\right)^{-1}\left(F\left(\beta_{t1}...\beta_{t(j+1)}\right)\right)\right) = E\left(\xi^{j+1}\right).$$

Lo cual significa que $P_{\xi^j}(z) = P_{\xi^j}(u)$ donde $u \in A$ y $A \in \mathcal{G}_{j+1}(\xi^j)$, es decir $z \in P_{\xi^j}^{-1}(P_{\xi^j}(A)) = A$, lo cual no es posible. Ahora sea

$$\{F(\beta_{(n+1)1}...\beta_{(n+1)k})\}_{k\in N}$$

una Σ-red local de $P_{\xi^n}(z)$ en X_{ξ^n}, podemos concluir que $\xi^{n+1} = (\beta_{rs})_{r,s=1,...,n+1} \in \Delta_{n+1}$, por tanto $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup_{l\leq n+1}\mathcal{G}_l$.

Supongamos que $\Delta_{n+1} \neq \emptyset$, en paticular si $\Gamma_{n+1}^{-}(\xi) \neq \emptyset$ para alguna $\xi \in \Delta_n$, usando el Teorema 1.11 y las construcciones realizadas, podemos construir la familia de abiertos en Σ localmente finita $\left\{P_{\xi}^{-1}(H(\eta))\right\}_{\eta\in\Gamma_{n+1}^{-}(\xi)}$ tal que $E(\eta) \subseteq H(\eta) \subseteq \left(P_{\xi_-}^{\xi}\right)^{-1}(H(\xi))$. Asi que las familias $\{H(\eta) : \eta \in \Delta_{n+1}\}$ y $\{E(\eta) : \eta \in \Delta_{n+1}\}$ cumplen lo pedido.

Para concluir la contrucción, sea $\eta \in \Delta_{n+1}$, como $E(\eta) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset$ para alguna $\xi \in \Delta_n$, designamos $x_\eta \in E(\eta) \cap \Phi(\xi)$. Por el lema 6.3 existe $M_\eta \subseteq \cup\mathcal{D}$ numerable, tal que $\{P_\xi(D \cap M_\eta)\}_{D\in\mathcal{D}}$ no es discreta en x_η. Ahora, sea $R_\eta = R_\xi \cup (\cup\{Sop(x) : x \in M_\eta\})$, elegimos $\Omega(\eta)$ de tal manera que si

$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1..\beta_k) : \beta_1, .., \beta_k \in \Omega(\eta)\},$$

entonces $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in N}$ es una $\Sigma-red$ espectral de X_η. Con estas definiciones se cumplen todas las propiedades pedidas en la constrcción para el caso n+1.

Si para toda $n \in N$ su correspondiente Δ_n es no vacía, definimos

$$\mathcal{G} = \cup_{n\in N}\mathcal{G}_n.$$

El teorema queda demostrado: si $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\mathcal{G}$. Supongamos que $z \in \cup\mathcal{D} - (\cup\mathcal{G})$. Ya que $\Delta_n \neq \emptyset$ para toda $n \in N$, podemos construir $\{\beta_{ij}\}_{(i,j)\in N}$ tal que $\xi^n = (\beta_{ij})_{i,j=1,..,n} \in \Delta_n$ y $\{F(\beta_{n1}..\beta_{nk})\}_{k\in N}$ es una $\Sigma-red$ local de $P_{\xi^{n-1}}(z)$ en $X_{\xi^{n-1}}$, para toda $n \in N$.

Ahora para cada $m \geq n$ definimos $L_{nm} = \left\{P_{\xi_-^n}^{\xi_-^k}(x_{\xi^k}) : k \geq m\right\}$, entonces $\left\{cl_{X_{\xi_-^n}}(L_{nm})\right\}_{m\geq n}$ es una familia decreciente de cerrados. Como

$$x_{\xi^k} \in E\left(\xi^k\right) = \cap_{i=1,..,k}\left(P_{\xi_{i-1}^k}^{\xi_-^k}\right)^{-1}(F(\beta_{i1}..\beta_{ik})),\text{ entonces}$$

$P_{\xi^n}^{\xi^k}(x_{\xi^k}) \in F(\beta_{n1}..\beta_{nk}) \subseteq F(\beta_{n1}...\beta_{nm})$, entonces $cl_{X_{\xi^n}}(L_{nm}) \subseteq F(\beta_{n1}...\beta_{nm})$. Sea $K_n = \cap_{m\in N} cl_{X_{\xi^n}}(L_{nm})$, tenemos que $K_n \neq \emptyset$. Como en la demostración del teorema anterior $K_n \subseteq \cap_{m\in N} F(\beta_{n1}...\beta_{nm})$, así que K_n es compacto. Además si $k \geq m \geq n+1$

$$P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}\left(P_{\xi^{n+1}}^{\xi^k}(x_{\xi^k})\right) = P_{\xi^n}^{\xi^k}(x_{\xi^k})$$

entonces $P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}(L_{n+1\ m}) \subseteq L_{nm}$, y como

$$P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}\left(cl_{X_{\xi^{n+1}}}(L_{n+1\ m})\right) \subseteq cl_{X_{\xi^n}}\left(P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}(L_{n+1\ m})\right)$$

obtenemos $P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}(K_{n+1}) \subseteq K_n$. Podemos realizar analogo trabajo al de la demostración del teorema anterior para concluir que existen, para todo $n \in N, z_{n+1} \in K_{n+1}, z_n \in K_n$ tal que $P_{\xi^n}^{\xi^{n+1}}(z_{n+1}) = z_n$. También de manera análoga definimos $B = \cup_{n\in N} R_{\xi^n}$ y

$$\overline{z}(\lambda) = \begin{cases} a(\lambda) & \text{si } \lambda \notin B \\ z_n(\lambda) & \text{si } \lambda \in R_{\xi^n} \end{cases}$$

Demostraremos que $\mathcal{D}$ no es discreta en $\overline{z}$.

En efecto, sea $\overline{z} \in U = P_{\xi^n}^{-1}(U_n) \cap \left(\cap_{\lambda\in H} P_\lambda^{-1}(U_\lambda)\right)$, donde $z_{n+1} \in U_n$ y U_n es un abierto en X_{ξ^n}, $H \in [\alpha - B]^{<\aleph_0}$ y $a(\lambda) \in U_\lambda$, donde U_λ es un conjunto abierto del factor X_λ. Como $U_n \cap L_{n+1\ k} \neq \emptyset$ para todo $k \geq n+1$, podemos encontrar $i_k \in N$ tal que $i_k \geq n+1$ y $P_{\xi^n}^{\xi^{i_k}}(x_{i_k}) \in U_n$, entonces existen $w'_{lk} \in P_{\xi^{i_k}}(D_{lk} \cap M_{\xi^{i_k}}) \cap \left(P_{\xi^n}^{\xi^{i_k}}\right)^{-1}(U_n)$ donde $w'_{lk} = P_{\xi^{i_k}}(w_{lk})$ y $w_{lk} \in D_{lk} \cap M_{\xi^{i_k}}, D_{lk} \in \mathcal{D}$ para $l = 1, 2$ y $D_{1k} \neq D_{2k}$. Afirmamos que $w_{lk} \in U$ para $l = 1, 2$. Primero observemos que $Sop(w_{lk}) \subseteq B$, así que $w_{lk}(\lambda) = a(\lambda) \in U_\lambda$ para todo $\lambda \in H$, resta demostrar que $P_{\xi^n}(w_{lk}) \in U_n$, pero $P_{\xi^n}(w_{lk}) = P_{\xi^n}^{\xi^{i_k}}\left(P_{\xi^{i_k}}(w_{lk})\right) = P_{\xi^n}^{\xi^{i_k}}(w'_{lk}) \in U_n$. Y como toda vecindad abierta de $\overline{z}$, contiene abiertos de este tipo la demostración concluye. □

Si cambiamos regularidad por normalidad, colectivamente Hausdorff por colectivamente normal, realizamos una contrucción análoga a la del teorema 6.2, y usamos los Teoremas 1.14 y 1.15, obtenemos la demostración del siguiente Teorema.

TEOREMA 6.5. *Si Σ es un Σ-producto de $\Sigma-$espacios paracompactos, entonces Σ es colectivamente Hausdorff*

2. Paracompacidad y normalidad en espacios semiestratificables

En lo que sigue demostraremos un teorema similar al que hemos demostramos para Σ-espacios, pero ahora será para espacios semiestratificables. Es importante hacer notar, que la clase de los Σ-espacios y la de los espacios semiestratificables tienen en común a los σ-espacios (ver Gary Gruenhage [**16**]pgs. 456-458). Antes los preliminares pertinentes.(ver G. Gruenhage [**16**] pgs, 453-468)

DEFINICIÓN 6.6. *Un espacio topológico* $(Z, \mathcal{T}_Z)$ *es semiestratificable, si existe una función* $g : Z \times N \to \mathcal{T}_Z$ *(para todo* $z \in Z$ *y* $n \in N$, $g(z,n)$ *es un abierto de* Z*) tal que:*

(1) $\cap_{n\in N} g(z,n) = \{z\}$, *para cada* $z \in Z$, *y*
(2) *si* $\{x_n\}_{n\in N}$ *es una sucesión en* Z *y* $z \in \cap_{n\in N} g(x_n, n)$, *entonces* $\{x_n\}_{n\in N}$ *converge a* z *en* Z.

Llamaremos a la función g (y a toda función que cumpla lo anterior) *función semiestratificable* de Z

Usaremos los siguientes resultados de espacios semiestratificables, véase por ejemplo G. Gruenhage [**16**], G. D. Creede [**6**]:

1. Todo espacio semiestratificable es subparacompacto.
2. Todo espacio semiestratificable es perfecto (todo abierto es un F_σ).
3. El producto numerable de semiestratificables es semiestratificable.
4. Si los subproductos finitos de $\{X_n\}_{n\in N}$ son paracompactos y perfectamente normales, entonces $\prod_{n\in N} X_n$ es paracompacto.

Para la demostración del siguiente teorema usaremos la siguiente notacion. Ahora Δ_n denota un conjunto de matrices de $1 \times n$, es decir $n-$adas , y si $\xi = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \Delta_n$, $\xi_- = (\beta_1, ..., \beta_{n-1})$ y $\xi \oplus \beta = (\beta_1, .., \beta_n, \beta)$.

DEFINICIÓN 6.7. *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $R \subseteq \alpha$ *numerable y* $S \subseteq \Pi$. *Diremos que* S *es* $R-$*cilindricamente abierto (cerrado) si* $P_R(S)$ *es abierto (cerrado) en* X_R*,y además* $P_R^{-1}(P_R(S)) = S$.

A continuación un lema que nos prepara para el teorema principal de esta sección

LEMA 6.8. *Si* $\{X_\lambda\}_{\lambda<\aleph_0}$ *es una familia de espacios semiestratificables, la cual cumple que cualquier producto finito es paracompacto, entonces* $\Pi_{\lambda<\aleph_0} X_\lambda$ *es paracompacto*

DEMOSTRACIÓN: Como los productos finitos son paracompactos y semiestratificables, entonces los productos finitos son paracompactos y perfectamente normales. Así que podemos concluir que $\Pi_{\lambda<\aleph_0} X_\lambda$ es paracompacto □

Ahora demostraremos el siguiente teorema de Yajima.

TEOREMA 6.9 (Yajima). *Si* Σ *es un* Σ*-producto de espacios semi-estratificables, tal que cualquier producto finito es paracompacto y* $t(\Sigma) = \aleph_0$ *entonces* Σ *es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios semiestratificables que cumpla las hipótesis del teorema. Si $R \subset \alpha$ es numerable, por la monótonia de la estrechez tenemos que $t(X_R) = \aleph_0$, además X_R es paracompacto. Ahora sean A, B cerrados ajenos de Σ; si para algún $R \in [\alpha]^{\aleph_0}$, tenemos que $cl_{X_R}(P_R(A)) \cap cl_{X_R}(P_R(B)) = \emptyset$, como X_R es normal , tendriamos la existencia de abiertos disjuntos O, V tales que $cl_{X_R}(P_R(A)) \subseteq O$ y $cl_{X_R}(P_R(B)) \subseteq V$. Entonces $P_R^{-1}(O)$ y $P_R^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos de Σ, pero $A \subseteq P_R^{-1}(cl_{X_R}(P_R(A)))$ y $B \subseteq P_R^{-1}(cl_{X_R}(P_R(B)))$, o sea Σ es normal. Entonces podemos suponer que para todo $R \in [\alpha]^{\aleph_0}$ siendo A y B cerrados ajenos de Σ, se tiene $cl_{X_R}(P_R(A)) \cap cl_{X_R}(P_R(B)) \neq \emptyset$. Derarrollaremos la demostración en forma análoga a la demostración de los anteriores teoremas. Construiremos

1. para cada $n \in N$ un conjunto Δ_n de n-adas, tal que si $\xi \in \Delta_n$, entonces $\xi_- \in \Delta_{n-1}$
2. para cada $n \in N$ una colección de abiertos de Σ, $\mathcal{G}_n$, localmente finita, donde la clausura de cada elemento de $\mathcal{G}_n$ no intersecta A o B. Donde para cada $\mu \in \Delta_{n-1}$ existe $\mathcal{G}(\mu)$ familia de abiertos en Σ tales que $\mathcal{G}_n = \cup_{\mu \in \Delta_{n-1}} \mathcal{G}(\mu)$ y todo $U \in \mathcal{G}(\mu)$ es R_μ-cilindricamente abierto en Σ.
3. Para cada $\xi \in \Delta_n$, un $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$
4. Para cada $\xi \in \Delta_n$ existen subconjuntos $E(\xi)$, $H(\xi)$ de Σ, que son R_{ξ_-}-cilindricamente cerrados y abiertos respectivamente, en Σ, además $E(\xi) \subseteq H(\xi)$, y la familia $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$ es localmente finita en Σ.
5. Para cada $\mu \in \Delta_{n-1}$, se cumple:
$$P_\mu(E(\mu)) \subseteq P_\mu(\cup \mathcal{G}(\mu)) \cup P_\mu(\cup \{E(\xi) : \xi \in \Delta_n \text{ y } \xi_- = \mu\}).$$
6. Para cada $\xi \in \Delta_n$, una función semiestratificable g_ξ de X_ξ, tal que
$$P^\xi_{\xi_-}(g_\xi(x,m)) \subseteq g_{\xi_-}\left(P^\xi_{\xi_-}(x), m\right)$$
para todo $x \in X_\xi$ y $m \in N$.
7. Para cada $\xi \in \Delta_n$ un $x_\xi \in X_{\xi_-}$, tal que:
   (a) $P_{\xi_-}(E(\xi)) \subseteq g_{\xi_-}(x_\xi, n)$.
   (b) Existen $A(\xi) \subseteq A, B(\xi) \subseteq B$ numerables.
   (c) $x_\xi \in cl_{X_{\xi_-}}(A(\xi)) \cap cl_{X_{\xi_-}}(B(\xi))$.
   (d) $R_\xi = R_{\xi_-} \cup (\cup \{sop(y) : y \in A(\xi) \cap B(\xi)\})$

Iniciamos definiendo $\Delta_0 = \{\xi_0\}$, donde ξ_0 es la 0-ada vacía, y $E(\xi_0) = H(\xi_0) = \Sigma$; ahora seleccionamos un arbitrario $R_{\xi_0} \in [\alpha]^{\aleph_0}$. En el espacio X_{ξ_0} tomamos una función semiestratificable g_{ξ_0} y definimos $\Phi_0(\xi_0) = cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(A)) \cap cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(B))$, que es un cerrado no vacío de X_{ξ_0}. Si $X_{\xi_0} - \Phi_0(\xi_0) = \emptyset$, se toma a $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset\}$. En caso contrario, sea $x \in X_{\xi_0} - \Phi_0(\xi_0)$. Supongamos que $x \notin cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(A))$, entonces existe V_x, abierto, tal que $V_x \cap P_{\xi_0}(A) = \emptyset$. Por la normalidad de X_{ξ_0} se puede pedir que $cl_{X_{\xi_0}}(V_x) \cap P_{\xi_0}(A) = \emptyset$. En resumen podemos definir a $\mathcal{W}$ como $\{V_x : x \in X_{\xi_0} - \Phi_0(\xi_0)\}$. Entonces $X_{\xi_0} - \Phi_0(\xi_0) \subseteq \cup\mathcal{W}$. Además para cada elemento de $\mathcal{W}$ su clausura no intersecta a $P_{\xi_0}(A)$ o a $P_{\xi_0}(B)$. Obtenemos la cubierta abierta $\mathcal{W} \cup \{g_{\xi_0}(x,1) : x \in \Phi_0(\xi_0)\}$ de X_{ξ_0}. Refinando esta cubierta obtenemos una cubierta de cerrados localmente finita, sea $\mathcal{F}(\xi_0)$ tal cubierta de cerrados. Denotamos

$$\mathcal{F}_+(\xi_0) = \{F \in \mathcal{F}(\xi_0) : \text{ existe } W_F \in \mathcal{W} \text{ tal que } F \subseteq W_F\}$$

Usando el teorema 1.11, obtenemos una familia de abiertos localmente finita

$$\{G_F : F \in \mathcal{F}(\xi_0)\},$$

tal que $F \subseteq G_F$. Para los $F \in \mathcal{F}_+(\xi_0)$ podemos pedir además que $G_F \subseteq W_F$. Definimos $\mathcal{G}(\xi_0) = \left\{P^{-1}_{\xi_0}(G_F) : F \in \mathcal{F}_+(\xi_0)\right\}$, para estos conjuntos vale $P^{-1}_{\xi_0}(G_F) \subseteq P^{-1}_{\xi_0}(W_F)$. Entonces $cl_X\left(P^{-1}_{\xi_0}(G_F)\right) \subseteq cl_X\left(P^{-1}_{\xi_0}(W_F)\right)$ que no intersecta a A o a B, y en este caso tenemos que $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}(\xi_0)$. También definimos $\mathcal{F}_-(\xi_0) = \mathcal{F}(\xi_0) - \mathcal{F}_+(\xi_0)$. Como $\Phi_0(\xi_0) \neq \emptyset$, tomamos $x \in \Phi_0(\xi_0)$; entonces existe $F \in \mathcal{F}(\xi_0)$ tal que $x \in F$. Si además $F \in \mathcal{F}_+(\xi_0)$, entonces $x \in W_F$, la cual no intersecta a $P_{\xi_0}(A)$ o a $P_{\xi_0}(B)$, lo cual no puede ser, asi que $\mathcal{F}_-(\xi_0) \neq \emptyset$. Si denotamos $\Gamma_1(\xi_0)$ un conjunto que nos permite indicar al conjunto $\mathcal{F}_-(\xi_0)$, definimos $\Delta_1 = \{(\alpha) : \alpha \in \Gamma_1(\xi_0)\}$ en consecuencia $F_{(\alpha)} = F_\alpha \in \mathcal{F}_-(\xi_0)$. Ahora bién , si $\eta = (\beta) \in \Delta_1$, definimos $E(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(F_\eta)$ y $H(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(G_{F_\eta})$, los cuales trivialmente son R_{ξ_0}-cilindricamente cerrados y abiertos respectivamente. Veamos que se cumple la condición 5: si $z \in P_{\xi_0}(E(\xi_0)) = X_{\xi_0}$ y $z \in F \in \mathcal{F}_+(\xi_0)$, entonces $z \in G_F = P_{\xi_0}P_{\xi_0}^{-1}(G_F) \subseteq P_{\xi_0}(\cup\mathcal{G}(\xi_0))$; pero si $F \in \mathcal{F}_-(\xi_0)$, entonces $F = F_\eta$ para algún $\eta \in \Delta_1$, entonces $z \in F_\eta = P_{\xi_0}P_{\xi_0}^{-1}(F_\eta)$, por tanto $P_{\xi_0}(E(\xi_0)) \subseteq P_{\xi_0}(\cup\mathcal{G}(\xi_0)) \cup P_{\xi_0}(\cup\{E(\eta) : \eta \in \Delta_1\})$. Terminemos la constucción. Sea $\eta \in \Delta_1$. Como $F_\eta \in \mathcal{F}_-(\xi_0)$, entonces existe $x_\eta \in \Phi_0(\xi_0)$ tal que $F_\eta \subseteq g_{\xi_0}(x_\eta, 1)$. Recordar que $t(X) = \aleph_0$, luego entonces $t(X_{\xi_0}) = \aleph_0$. Como $x_\eta \in cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(A)) \cap cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(B))$. Sean $A'(\eta)$ y $B'(\eta)$ subconjuntos numerables de $P_{\xi_0}(A)$ y $P_{\xi_0}(B)$ respectivamente tales que

$$x_\eta \in cl_{X_{\xi_0}}(A'(\eta)) \cap cl_{X_{\xi_0}}(B'(\eta))$$

Entonces existen $A(\eta) \subseteq A$, $B(\eta) \subseteq B$, numerables, tales que

$$P_{\xi_0}(A(\eta)) = A'(\eta) \text{ y } P_{\xi_0}(B(\eta)) = B'(\eta).$$

Entonces

$$x_\eta \in cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(A(\eta))) \cap cl_{X_{\xi_0}}(P_{\xi_0}(B(\eta))).$$

Podemos definir $R_\eta = R_{\xi_0} \cup (\cup\{Sop(y) : y \in A(\eta) \cup B(\eta)\})$. Como X_η es semiestratificable, existe una función semistratificable g'_η de X_η. Sea $x \in X_\eta$, como $g_{\xi_0}\left(P_{\xi_0}^\eta(x), m\right)$ es una vecindad abierta de $P_{\xi_0}^\eta(x)$ para todo $m \in N$, entonces existe V_x^m, abierto de X_η, tal que $x \in V_x^m$ y $P_{\xi_0}^\eta(V_x^m) \subseteq g_{\xi_0}\left(P_{\xi_0}^\eta(x), m\right)$. Entonces definimos $g_\eta(x, m) = V_x^m \cap g'_\eta(x, m)$, que resulta ser una función semiestratificable. Con estas definiciones es faácil comprobar las restantes propiedades para $n = 1$.

Supongamos que para $1 \leq i \leq n$, tenemos realizada la costrucción. Para las construcciones en el paso $n + 1$. Igual que antes, sea $\xi \in \Delta_n$, y $\Phi_n(\xi) = cl_{X_\xi}(P_\xi(A)) \cap cl_{X_\xi}(P_\xi(B))$, el cual es un conjunto cerrado y no vacío. Ahora definimos $F_\xi = P_{\xi_-}(E(\xi)), G_\xi = P_{\xi_-}(H(\xi))$. Por la hipotésis tenemos que F_ξ y G_ξ son cerrado y abierto respectivamente, y además $P_{\xi_-}^{-1}(F_\xi) = E(\xi)$, $P_{\xi_-}^{-1}(G_\xi) = H(\xi)$. Como $F_\xi \subseteq G_\xi$, también $\left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \setminus \Phi_n(\xi) \subseteq \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(G_\xi) \setminus \Phi_n(\xi)$. Para cada $z \in \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \setminus \Phi_n(\xi)$, existe W_z, abierto en X_ξ , con las siguientes propiedades:

$$z \in W_z \subseteq \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(G_\xi) \setminus \Phi_n(\xi) \text{ y } cl_{X_\xi}(W_z) \text{ no intersecta a } P_\xi(A) \text{ o a } P_\xi(B).$$

Tomamos $\mathcal{W} = \left\{W_z : z \in \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \setminus \Phi_n(\xi)\right\}$. Esta familia cumple que

$$\left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \setminus \Phi_n(\xi) \subseteq \cup\mathcal{W} \subseteq \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(G_\xi) \setminus \Phi_n(\xi).$$

Sea $K_n = \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \cap \Phi_n(\xi)$, como $\left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi)$ es paracompacto y

$$\left\{\left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) \cap W : W \in \mathcal{W}\right\} \cup \left\{g_\xi(x, n+1) \cap \left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi) : x \in K_n\right\}$$

es una cubierta abierta de $\left(P_{\xi_-}^\xi\right)^{-1}(F_\xi)$, entonces existe un refinamiento de cerrados localmente finito ya que todos los factores son regulares (ver R. Engelking [**12**] pgs.300-303), sea $\mathcal{F}(\xi)$ tal refinamiento. Ahora denotamos

$$\mathcal{F}_{+}(\xi) = \{F \in \mathcal{F}(\xi) : \text{existe } W_F \in \mathcal{W} \text{ tal que } F \subseteq W_F\}$$

y $\mathcal{F}_{-}(\xi) = \mathcal{F}(\xi) - \mathcal{F}_{+}(\xi)$. En esta parte de la demostración haremos las siguientes adevertencias. Si $\mathcal{F}_{+}(\xi) = \emptyset$, entonces definimos a $\mathcal{G}(\xi) = \emptyset$. Cuando $\mathcal{F}_{+}(\xi) \neq \emptyset$, realizaremos la construcción siguiente, notemos que $\mathcal{F}(\xi)$ es una familia de cerrados en X_ξ que es localmente finita en X_ξ. Por la paracompacidad, implicamos la existencia de una familia $\{G_F : F \in \mathcal{F}(\xi)\}$ de abiertos de X_ξ localmente finita tal que $F \subseteq G_F$ para todo $F \in \mathcal{F}(\xi)$. Podemos pedir además que $G_F \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(G_\xi)$, y para los $F \in \mathcal{F}_{+}(\xi)$ podemos pedir que $F \subseteq G_F \subseteq W_F$. Así que podemos definir $\mathcal{G}(\xi) = \left\{P_\xi^{-1}(G_F) : F \in \mathcal{F}_{+}(\xi)\right\}$ y a $\mathcal{G}_{n+1}$ como

$$\cup\{\mathcal{G}(\xi) : \xi \in \Delta_n\}.$$

Como para los $F \in \mathcal{F}_{+}(\xi)$ para alguna $\xi \in \Delta_n$, su correspondiente G_F es subconjunto de $\left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}(G_\xi)$ y como las familias $\{G_\xi : \xi \in \Delta_n\}$ y $\{G_F : F \in \mathcal{F}_{+}(\xi)\}$ son localmente finitas, concluimos que la familia $\mathcal{G}_{n+1}$ es localmente finita. Ahora bién, sea $\Gamma_{n+1}(\xi)$ un conjunto que indica a $\mathcal{F}_{-}(\xi)$. Sea

$$\Delta_{n+1}(\xi) = \{\xi \oplus \delta : \delta \in \Gamma_{n+1}(\xi)\}.$$

Finalmente definimos a Δ_{n+1} como $\cup\{\Delta_{n+1}(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$.

Si $\Delta_{n+1} = \emptyset$, afirmamos que $\Sigma \subseteq \cup_{l \leq n+1}\mathcal{G}_l$, y por tanto Σ es normal. Supongamos que existe $z \in \Sigma \setminus (\cup_{l \leq n+1}\mathcal{G}_l)$. Observemos que por contrucción, existe $F \in \mathcal{F}(\xi_0)$ tal que $P_{\xi_0}(z) \in F$, es claro que $F \notin \mathcal{F}_{+}(\xi_0)$, ya que, en tal caso $z \in \mathcal{G}(\xi_0)$. Por tanto $F = F_{\xi^1}$ para alguna $\xi^1 \in \Delta_1$, entonces $z \in E(\xi^1)$. Ahora supongamos que para $1 \leq j < n$, existen $\xi^j \in \Delta_j$ tales que $\xi^j_- = \xi^{j-1}$ y $z \in E(\xi^j)$. Como $P_{\xi^{n-1}}(z) \in P_{\xi^{n-1}}\left(E\left(\xi^{n-1}\right)\right)$. Si

$$P_{\xi^{n-1}}(z) \in P_{\xi^{n-1}}\left(\cup\mathcal{G}\left(\xi^{n-1}\right)\right)$$

entonces

$$z \in P^{-1}_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}\left(\cup\mathcal{G}\left(\xi^{n-1}\right)\right)\right) = \cup\mathcal{G}\left(\xi^{n-1}\right);$$

pero esto no puede suceder. Por tanto $P_{\xi^{n-1}}(z) \in P_{\xi^{n-1}}(E(\xi))$ para alguna $\xi \in \Delta_n$, que cumple que $\xi_- = \xi^{n-1}$, tomemos a $\xi = \xi^n$. Como $E(\xi^n)$ es $R_{\xi^{n-1}}$-cilindricamente cerrado, obtenemos que $z \in E(\xi^n)$. Por lo anterior $P_{\xi^{n-1}}(z) \in P_{\xi^{n-1}}(E(\xi^n)) = F_{\xi^n}$, entonces $\left(P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\right)^{-1}(P_{\xi^{n-1}}(z)) \in \left(P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\right)^{-1}(E(\xi^n)) = \left(P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\right)^{-1}(F_{\xi^n})$. Por tanto

$$P_{\xi^n}(z) \in \left(P^{\xi^n}_{\xi^{n-1}}\right)^{-1}(F_{\xi^n}).$$

Entonces existe $F \in \mathcal{F}(\xi^n)$ tal que $P_{\xi^n}(z) \in F$. Si $F \in \mathcal{F}_{+}(\xi^n)$, entonces $P_{\xi^n}(z) \in G_F$, es decir $z \in \cup\mathcal{G}(\xi^n)$, lo cual no puede pasar. Entonces $F \in \mathcal{F}_{-}(\xi^n)$. Es decir $\Delta_{n+1} \neq \emptyset$. Por tanto $\Sigma \subseteq \cup_{l \leq n+1}\mathcal{G}_l$, o de otra forma, Σ es normal. Así que supongamos que $\Delta_{n+1} \neq \emptyset$. Sea $\eta \in \Delta_{n+1}$, entonces $\eta = \xi \oplus \delta$, donde $\xi \in \Delta_n$ y $\delta \in \Gamma_{n+1}(\xi)$. Definimos $E(\eta) = P_\xi^{-1}(F_\delta)$ y $H(\eta) = P_\xi^{-1}\left(G_{F_\xi}\right)$. Por la contrucción tenemos que existe $x_\eta \in K_n$ tal que $F_\delta \subseteq g_\xi(x_\eta, n+1)$. Como $x_\eta \in \Phi_n(\xi)$, ya que la estrechez de X es numerable, existen $A(\eta)$ y $B(\eta)$, subconjuntos numerables de A y B respectivamente, tales que

$$x_\eta \in cl_{X_\xi}\left(P_\xi\left(A\left(\eta\right)\right)\right) \cap cl_{X_\xi}\left(P_\xi\left(B\left(\eta\right)\right)\right).$$

Definimos

$$R_\eta = R_\xi \cup \left(\cup\left\{Sop\left(y\right) : y \in A\left(\eta\right) \cup B\left(\eta\right)\right\}\right)$$

La función semiestratificable g_η se contruye de igual manera que en el caso 1. Para terminar, sólo verifiquemos la propiedad 5. Sea $\xi \in \Delta_n$. Es suficiente demostrar que

$$P_\xi\left(E\left(\xi\right)\right) \subseteq \left(P^{\xi}_{\xi_-}\right)^{-1}\left(F_\xi\right).$$

Recordar que $F_\xi = P_{\xi_-}\left(E\left(\xi\right)\right)$. Sea $z \in P_\xi\left(E\left(\xi\right)\right)$, entonces $z = P_\xi\left(w\right)$, donde $w \in E\left(\xi\right)$. Por lo tanto

$$P^{\xi}_{\xi_-}\left(z\right) = P^{\xi}_{\xi_-}\left(P_\xi\left(w\right)\right) = P_{\xi_-}\left(w\right).$$

Lo cual implica lo afirmado.

Si suponemos que $\Delta_n \neq \emptyset$ para toda $n \in N$, entonces definimos $\mathcal{G} = \cup\, \mathcal{G}_n$. Demostraremos que $\Sigma \subseteq \cup\mathcal{G}$, para poder concluir la normalidad de Σ. Sea $z \in \Sigma \setminus \cup\mathcal{G}$. Realizando análogo trabajo que en el caso finito, obtenemos una sucesión $\left\{\xi^n\right\}_{n\in N}$ tal que $\xi^n \in \Delta_n$, $\xi^{n+1}_- = \xi^n$ y $z \in E\left(\xi^n\right)$ para toda $n \in N$. Afirmamos que para todo $m \geq 1$ la sucesión $\left\{P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(x_{\xi^n}\right)\right\}_{n\geq m}$ converge a $P_{\xi^{m-1}}\left(z\right)$ en $X_{\xi^{m-1}}$. Observemos que

$$P_{\xi^{m-1}}\left(z\right) = P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(P^{\xi^{n-1}}\left(z\right)\right) \in P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(P^{\xi^{n-1}}\left(E\left(\xi^n\right)\right)\right) \subseteq$$

$$P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(g_{\xi^{n-1}}\left(x_{\xi^n}, n\right)\right)$$

Usando la propiedad 7 varias veces, y usando que

$$P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}} = P^{\xi^{m}}_{\xi^{m-1}} \circ \ldots \circ P^{\xi^{n-2}}_{\xi^{n-3}} \circ P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{n-2}}$$

se tiene

$$P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(g_{\xi^{n-1}}\left(x_{\xi^n}, n\right)\right) \subseteq g_{\xi^{m-1}}\left(P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(x_{\xi^n}, n\right)\right).$$

Ahora aplicando la definición tenemos la convergencia de $\left\{P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(x_{\xi^n}\right)\right\}_{n\geq m}$ a $P_{\xi^{m-1}}\left(z\right)$.

Ahora sea $R = \cup\left\{R_{\xi^n} : n \in N\right\}$. Si $a \in \prod$ es el punto base de Σ. Tomamos a $\bar{z} \in \Sigma$ tal que

$$P_R\left(\bar{z}\right) = P_R\left(z\right) \text{ y } P_{\alpha - R}\left(\bar{z}\right) = P_{\alpha - R}\left(a\right).$$

Afirmamos que $\bar{z} \in A \cap B$. Tomamos un abierto U de la forma

$$P^{-1}_{\xi^n}\left(U_n\right) \cap \left(\cap_{\lambda\in H} P^{-1}_\lambda\left(U_\lambda\right)\right),$$

donde U_n es un abierto de X_{ξ^n} y $P_{\xi^n}\left(z\right) \in U_n$ para algún n, y U_λ es un conjunto abierto del factor X_λ tal que $a\left(\lambda\right) \in U_\lambda$ para $\lambda \in H$, con $H \in \left[\alpha - R\right]^{<\aleph_0}$. Bastará demostrar que U intersecta A e intersecta B, para concluir la afirmación. Por la convergencia recien demostrada, tenemos un $k \geq n+1$ tal que $P^{\xi^{k-1}}_{\xi^n}\left(x_{\xi^k}\right) \in U_n$. Por la continuidad de $P^{\xi^{k-1}}_{\xi^n}$, existe U_k conjunto abierto en $X_{\xi^{k-1}}$, tal que

$P_{\xi^n}^{\xi^{k-1}}(U_k) \subseteq U_n$ y $x_{\xi^k} \in U_k$. Por la propiedad 8.c, existen $w \in A(\xi^k) \subseteq A$ y $w' \in B(\xi^k) \subseteq B$ tales que $P_{\xi^{k-1}}(w), P_{\xi^k}(w') \in U_k$. Entonces $P_{\xi^n}^{\xi^{k-1}}(P_{\xi^{k-1}}(w))$, $P_{\xi^n}^{\xi^{k-1}}(P_{\xi^k}(w')) \in U_n$, o lo que es lo mismo $P_{\xi^n}(w)$, $P_{\xi^n}(w') \in U_n$, o bién w, $w' \in P_{\xi^n}^{-1}(U_n)$. Por la contrucción, $sop(w)$ y $sop(w')$ son subconjuntos de R. Por tanto $w(\lambda) = w'(\lambda) = a(\lambda)$ para todo $\lambda \in H$. Podemos entonces concluir que w, $w' \in U$. Pero esto no es posible ya que A y B son ajenos. □

Para concluir esta sección, enseguida demostraremos un Teorema de Y. Yajima[41] pgs. 5-7.

TEOREMA 6.10 (Yajima). *Si Σ es un Σ-producto de espacios semiestratificables, tal que cualquier producto finito es paracompacto. Entonces Σ es normal si y sólo si Σ es colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 6.8, cualquier producto numerable de la familia dada es paracompacto y semiestratificable. Supongamos que Σ es normal. Sea $\mathcal{D} = \{F_\gamma\}_{\gamma<\theta}$ una familia discreta de conjuntos cerrados en Σ. Para cada $n \in N$, construiremos:

1. Un conjunto Δ_n de n-adas, tal que si $\xi \in \Delta_n$, entonces $\xi_- \in \Delta_{n-1}$.
2. Una familia $\mathcal{G}_n$ de conjuntos abiertos en Σ que es σ-localmente finita en Σ. Y la clausura de cada elemento de $\mathcal{G}_n$ intersecta con a lo más un elemento de $\mathcal{D}$.
3. Para cada $\xi \in \Delta_n$, un $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$.
4. Para cada $\xi \in \Delta_n$, existen $E(\xi)$ y $H(\xi)$ subconjuntos de Σ, que son $R_\xi-$cilindricamente cerrados y abiertos respectivamente en Σ. Además $E(\xi) \subseteq E(\xi_-)$ y $E(\xi) \subseteq H(\xi)$. Y la familia $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$ es σ-localmente finita en X.
5. Para cada $\eta \in \Delta_{n-1}$. El conjunto $(\cup\mathcal{D}) \cap E(\eta)$, es cubierto por
$$(\cup\{\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n-1\}) \cup (\cup\{E(\xi) : \xi \in \Delta_n \text{ y } \xi_- = \eta\})$$
6. Para cada $\xi \in \Delta_n$, existe una función g_ξ semiestratificable de X_ξ, tal que
$$P_{\xi_-}^{\xi}(g_\xi(x,m)) \subseteq g_{\xi_-}\left(P_{\xi_-}^{\xi}(x), m\right)$$
para todo $x \in X_\xi$ y $m \in N$.
7. Para cada $\xi \in \Delta_n$, un $x_\xi \in X$ y $F_\xi \in \mathcal{D}$ tales que
   (a) $x_\xi \in F_\xi \cap E(\xi_-) \setminus \cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n-1\}$
   (b) $P_{\xi_-}(E(\xi)) \subseteq g_\xi(P_{\xi_-}(x_\xi), n)$
   (c) $R_\xi = R_{\xi_-} \cup sop(x_\xi)$
   (d) $F_\xi \cap E(\xi)$ es cubierto po $\mathcal{G}_n$.

Definimos a $\Delta_0 = \{\xi_0\}$, donde ξ_0 es la $0-$ada vacía y a $E(\xi_0)$ y $H(\xi_0)$ como Σ Escogemos un arbitrario $R_{\xi_0} \in [\alpha]^{\aleph_0}$. Ya que X_{ξ_0} es semiestratificable, escogemos en él una función semiestratificable g_{ξ_0}. Ahora realizaremos la construcción para $n = 1$. Sea
$$\mathcal{W}_1(\xi_0) = \{g_{\xi_0}(P_{\xi_0}(x), 1) : x \in \cup\mathcal{D}\}.$$
Como X_{ξ_0} es perfecto, entonces para cada $m \in N$ existe un cerrado S_m en X_{ξ_0} tal que
$$\cup\mathcal{W}_1(\xi_0) = \cup\{S_m : m \in N\}.$$

Sea

$$\mathcal{S}_m = \{S_m \cap O : O \in \mathcal{W}_1(\xi_0)\}.$$

Es claro que $\mathcal{S}_m$ es una cubierta abierta del espacio paracompacto S_m. Sea $\mathcal{S}'_m$ un refinamiento cerrado de $\mathcal{S}_m$ localmente finito. Sea $\mathcal{F}_1(\xi_0) = \cup \mathcal{S}'_m$. Es claro que $\mathcal{F}_1(\xi_0)$ es una familia de cerrados de X_{ξ_0} que es σ-localmente finito, refina a $\mathcal{W}_1(\xi_0)$ y $\cup\mathcal{F}_1(\xi_0) = \cup\mathcal{W}_1(\xi_0)$. Usando nuevamente la paracompacidad de X_{ξ_0} y que $\mathcal{S}'_m \cup \{X_{\xi_0}\}$ es una cubierta de cerrados localmente finita de X_{ξ_0}, obtenemos una familia de abiertos de X_{ξ_0} $\mathcal{H}_m = \{G_D : D \in \mathcal{S}'_m\}$ localmente finita, tal que $D \subseteq G_D$ para todo $D \in \mathcal{S}'_m$. Tomamos $\mathcal{H}_1(\xi_0) = \cup\mathcal{H}_m$. Esta familia $\mathcal{H}_1(\xi_0)$ es σ-localmente finita, la cual cumple cumple que $D \subseteq G_D$ para todo $D \in \mathcal{F}_1(\xi_0)$. Sea $\Gamma_1(\xi_0)$ un conjunto que nos permite indicar a $\mathcal{F}_1(\xi_0)$. Ahora definimos $\Delta_1 = \{(\beta) : \beta \in \Gamma_1(\xi_0)\}$. Y para $\eta \in \Delta_1$, si $\eta = (\beta)$ entonces tomamos $E(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(D_\beta)$ y $H(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(G_{D_\beta})$. Además $D_\beta \subseteq g_{\xi_0}(P_{\xi_0}(x_\eta), 1)$, para alguna $x_\eta \in \cup\mathcal{D}$. Seleccionamos $F_\eta \in \mathcal{D}$ tal que $x_\eta \in F_\eta$. Tomamos $R_\eta = R_{\xi_0} \cup sop(x_\eta)$. La construcción de la función semiestratificable g_η de X_η es la misma que se realizó en el teorema anterior. Recordar que $\mathcal{D}$ es una familia discreta, entonces $E(\eta) \cap F_\eta \subseteq H(\eta) \setminus (\cup\{F \in \mathcal{D} : F \neq F_\eta\})$, así que finalmente, usando la normalidad de Σ, tenemos que

$$E(\eta) \cap F_\eta \subseteq U_\eta \subseteq cl_\Sigma(U_\eta) \subseteq H(\eta) \setminus (\cup\{F \in \mathcal{D} : F \neq F_\eta\})$$

para algún conjunto abierto U_η. Definimos $\mathcal{G}_1 = \{U_\eta : \eta \in \Delta_1\}$. $\mathcal{G}_1$ es σ-localmente finita, ya que la familia $\{H(\eta) : \eta \in \Delta_1\}$ es σ-localmente finita.

Supongamos que hemos realizado la construcción para todo $1 \leq i \leq n$. Sea $\xi \in \Delta_n$, definimos $\mathcal{W}_{n+1}(\xi)$ como

$$\{g_\xi(P_\xi(x), n+1) \cap P_\xi(E(\xi)) : x \in (\cup\mathcal{D}) \cap (E(\xi) \setminus (\cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..n\}))\}$$

Si $\mathcal{W}_{n+1}(\xi)$ es vacío, denotaremos a $\Delta_{n+1}(\xi) = \emptyset = \mathcal{G}_{n+1}(\xi)$. En caso contrario, como $E(\xi)$ es R_ξ−cilindricamente cerrado, entonces $P_\xi(E(\xi))$ es cerrado. Además X_ξ es semiestratificable. Sea $\mathcal{W}'$ igual a

$$\cup\{g_\xi(P_\xi(x), n+1) : x \in (\cup\mathcal{D}) \cap (E(\xi) \setminus (\cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..n\}))\}.$$

Entonces $\mathcal{W}'$ es un F_σ. De igual forma que en el caso 1, obtenemos una familia $\mathcal{F}'$ de cerrados en X_ξ, que es σ−locamente finita y que además refina a la familia

$$\{g_\xi(P_\xi(x), n+1) : x \in (\cup\mathcal{D}) \cap (E(\xi) \setminus (\cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..n\}))\}.$$

Sea $\mathcal{F}_{n+1}(\xi)$ la familia

$$\{S \cap P_\xi(E(\xi)) : S \in \mathcal{F}'\}.$$

Es claro que esta familia cumple:

1. $\cup\mathcal{W}_{n+1}(\xi) = \cup\mathcal{F}_{n+1}(\xi)$
2. $\mathcal{F}_{n+1}(\xi)$ refina a $\mathcal{W}_{n+1}(\xi)$
3. $\cup\mathcal{F}_{n+1}(\xi) \subseteq P_\xi(E(\xi))$
4. $\mathcal{F}_{n+1}(\xi)$ es σ−localmente finita

Igual que en el caso 1, por la paracompacidad de X_ξ, obtenemos la familia de conjuntos abiertos de X_ξ

$$\{G'_D : D \in \mathcal{F}_{n+1}(\xi)\},$$

la cual es $\sigma-$localmente finita y además $D \subseteq G'_D$. Si ahora $G_D = G'_D \cap P_\xi(H_\xi)$, como $P_\xi(H(\xi))$ es $R_\xi-$cilindricamente abierto, $P_\xi(H(\xi))$ es un conjunto abierto de X_ξ, y entonces

$$\{G_D : D \in \mathcal{F}_{n+1}(\xi)\}$$

es una familia de conjuntos abiertos $\sigma-$localmente finita tal que $D \subseteq G_D \subseteq P_\xi(H(\xi))$.

Sea $\Gamma_{n+1}(\xi)$ un conjunto que nos permite indicar a $\mathcal{F}_{n+1}(\xi)$. $\Delta_{n+1}(\xi)$ es el conjunto de las $(n+1)-$adas

$$\{\xi \oplus \beta : \beta \in \Gamma_{n+1}(\xi)\}.$$

Sea $\eta \in \Delta_{n+1}(\xi)$, digamos que $\eta = \xi \oplus \beta$. Definimos $E(\eta) = P_\xi^{-1}(D_\beta)$ y $H(\eta) = P_\xi^{-1}(G_{D_\beta})$. Notar que

$$P_\xi^{-1}(G_{D_\beta}) \subseteq P_\xi^{-1}(P_\xi(H(\xi))) = H(\xi).$$

Luego entonces $H(\eta) \subseteq H(\xi)$.

Ya que $D_\beta \subseteq g_\xi(P_\xi(x_\eta), n+1) \cap P_\xi(E(\xi))$ para alguna

$$x_\eta \in (\cup\mathcal{D}) \cap (E(\xi) \setminus (\cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..n\})),$$

entonces existe $F_\eta \in \mathcal{D}$ tal que $x_\eta \in F_\eta$. Con estos objetos, definimos a R_η como

$$R_\xi \cup sop(x_\eta).$$

La definición de g_η se realizá de igual manera que en el teorema anterior. Similarmente, como Σ es normal, entonces existe un abierto U_η tal que

$$F_\eta \cap E(\eta) \subseteq U_\eta \subseteq cl_X(U_\eta) \subseteq H(\eta) \setminus \cup\{F \in \mathcal{D} : F \neq F_\eta\}$$

Sea $\mathcal{G}_{n+1}(\xi) = \{U_\eta : \eta \in \Delta_{n+1}(\xi)\}$. Finalmente definimos

$$\Delta_{n+1} = \cup\{\Delta_{n+1}(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$$

y

$$\mathcal{G}_{n+1} = \cup\{\mathcal{G}_{n+1}(\xi) : \xi \in \Delta_n\}.$$

Supongamos que $\Delta_{n+1} \neq \emptyset$, comprobemos que se cumple lo pedido. Como $\mathcal{G}_{n+1}(\xi)$ es $\sigma-$localmente finita para todo $\xi \in \Delta_n$, podemos escribir $\mathcal{G}_{n+1}(\xi) = \cup\mathcal{O}_m(\xi)$ y $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\} = \cup\mathcal{M}_l$, donde $\mathcal{O}_m$ y $\mathcal{M}_l$ son colecciones localmente finitas para todo $m, l \in N$. Sea

$$\mathcal{T}_{ml} = \{U_\eta \in \mathcal{O}_m(\xi) : \eta \in \Delta_{n+1},\ \eta_- = \xi,\ H(\xi) \in \mathcal{M}_l\}.$$

Las familias $\mathcal{T}_{ml}$ son localmente finitas ya que $U_\eta \subseteq H(\xi)$ cuando $\eta_- = \xi$. Además

$$\cup\{\mathcal{T}_{ml} : m, l \in N\} = \mathcal{G}_{n+1}.$$

Las restantes propiedades se deducen de la construcción. Si $\Delta_{n+1} = \emptyset$, afirmamos que $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\{\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n\}$. En efecto sea $z \in \cup\mathcal{D}\setminus\cup\{\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n\}$. Como $z \in \cup\mathcal{D}$, entonces $P_{\xi_0}(z) \in \mathcal{W}_1(\xi_0)$. Así que existe $\beta \in \Gamma_1(\xi_0)$ tal que $P_{\xi_0}(z) \in D_\beta$, en donde $D_\beta \in \mathcal{F}_1(\xi_0)$. Sea $\xi^1 = (\beta) \in \Delta_1$, entonces $z \in E(\xi^1)$. Ahora supongamos que para todo j, tal que $1 \leq j < n$, existe $\xi^j \in \Delta_j$, la cual cumple que $z \in E(\xi^j)$ y $\xi^j_- = \xi^{j-1}$. Como $z \in \cup\mathcal{D}-\cup\{\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n\}$, entonces $P_{\xi^j}(z) \in \mathcal{W}_j(\xi^j)$. Sea $D_\beta \in \mathcal{F}_j(\xi^j)$, con $\beta \in \Gamma_j(\xi^j)$ y $P_{\xi^j}(z) \in D_\beta$. Tomamos $\xi^{j+1} = \xi^j \oplus \beta$, es claro que $z \in E(\xi^{j+1})$, $\xi^{j+1} \in \Delta_{j+1}$ y también $\xi^{j+1}_- = \xi^j$. Entonces existe $\xi^{n+1} \in \Delta_{n+1}$, lo cual no puede ser. Por tanto $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\{\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n\}$. Así que Σ es colectivamente normal.

Ahora supongamos que $\Delta_n \neq \emptyset$ para todo $n \in N$. Denotamos a $\mathcal{G}$ como

$$\cup\{\mathcal{G}_n : n \in N\}.$$

Si $\cup\mathcal{D} \subseteq \cup\,\mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es σ-localmente finita, usando el teorema 1.13 podemos finalmente concluir que Σ es colectivamente normal. Supongamos ahora que $z \in \cup\mathcal{D} - \cup\mathcal{G}$. Entonces existen $\xi^n \in \Delta_n$ para todo $n \in N$, tales que $\xi^{n+1}_- = \xi^n$ y $z \in E(\xi^n)$. Si $m \geq 1$, afirmamos que la sucesión $\{P_{\xi^{m-1}}(x_{\xi^n})\}_{n\geq m}$ converge a $P_{\xi^{m-1}}(z)$. En efecto, basta observar que si $n \geq m$, entonces

$$P_{\xi^{m-1}}(z) = P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}(z)\right) \subseteq P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}\left(E\left(\xi^n\right)\right)\right) \subseteq$$

$$P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(g_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}\left(x_{\xi^n}\right), n\right)\right)$$

Realizando análogo proceso que en la demostración del anterior teorema obtenemos

$$P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(g_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}\left(x_{\xi^n}\right), n\right)\right) \subseteq g_{\xi^{n-1}}\left(P^{\xi^{n-1}}_{\xi^{m-1}}\left(P_{\xi^{n-1}}\left(x_{\xi^n}\right)\right), n\right)$$

O sea $P_{\xi^{m-1}}(z) \in g_{\xi^{n-1}}\left(P_{\xi^{m-1}}\left(x_{\xi^n}\right), n\right)$. Sea

$$R = \cup\{R_{\xi^n} : n \in N\},$$

y sea $y \in \Sigma$ tal que $P_R(y) = P_R(z)$ y $P_{\alpha-R}(y) = P_{\alpha-R}(a)$. Entonces $y \in \Sigma$. Además, usando la misma demostración que en el teorema 6.9, $\{x_{\xi^n}\}$ converge a y. Como $\{F_{\xi^n} : n \in N\} \subseteq \mathcal{D}$, que es una familia discreta, y $x_{\xi^n} \in F_{\xi^n}$, entonces $|\{F_{\xi^n} : n \in N\}| < \aleph_0$. Pero por otro lado, si $m < n$ con $n, m \in N$, entonces

$$F_{\xi^m} \cap E(\xi^m) \subseteq \cup\mathcal{G}_m.$$

Usando varias veces que $E(\eta) \subseteq E(\eta_-)$, tenemos que $E(\xi^n) \subseteq E(\xi^m)$. Por tanto

(1) $F_{\xi^n} \cap E(\xi^n) \setminus \cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n-1\} \subseteq F_{\xi^n} \cap E(^m) \setminus \cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, .., m\}$
(2) Como $x_{\xi^n} \in F_{\xi^n} \cap E(\xi^n) \setminus \cup\{\cup\mathcal{G}_i : i = 1, ..., n-1\}$,

tenemos que si $x_{\xi^n} \in F_{\xi^m}$, entonces $x_{\xi^n} \in F_{\xi^m} \cap E(\xi^m)$. Por tanto $x_{\xi^n} \in \cup\mathcal{G}_m$, lo cual no es posible por (1) y (2). Por tanto se obtiene la conclución del Teorema. □

3. Normalidad y paracompacidad numerable en Σ−productos

En esta sección analizaremos la relación entre normalidad y paracompacidad numerable en los Σ-productos. En el texto Products of normal spaces de T. C. Przymusiński [**34**] pgs 814-815, encontramos el teorema:

TEOREMA 6.11 (Zenor-Nagami). *Sea $\{X_i\}_{i<\aleph_0}$ una familia de espacios. Si para todo $I \in [\aleph_0]^{<\aleph_0}$ se tiene que X_I es normal, entonces son equivalentes*

(1) $\prod_{i<\aleph_0} X_\lambda$ *es normal*
(2) $\prod_{i<\aleph_0} X_\lambda$ *es numerablemente paracompacto.*

Combinando el teorema 1.4 y el teorema 6.11 obtenemos la demostración del siguiente teorema

TEOREMA 6.12. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de espacios. Si Σ es un Σ-producto propio normal, entonces Σ es numerablemente paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.4, Σ es homeomorfo a un producto numerable de Σ-productos que son hoemomorfos a subespacios cerrados de Σ. Digamos que Σ es homeomorfo a $\Pi_{n<\aleph_0}\Sigma_n$. Como cada Σ_n es cerrado, entonces para todo $I \in [\aleph_0]^{\aleph_0}$ tenemos que $\Pi_{n\in I}\Sigma_n$ es cerrado en Σ y por tanto es normal; así que por el teorema 5.9 concluimos que Σ es numerablemente compacto. □

En los teoremas de Yajima hemos presentado condiciones para alcanzar la normalidad en los Σ-productos, sin embargo la hipótesis de la estrechez numerable juega un papel importante. En el siguiente teorema de Lecheng Yang (ver [**43**] pps. 949-953) se presenta cómo obtener la normalidad a través de la paracompacidad numerable; en este sentido, este teorema es diferente a los anteriores. Antes un lema técnico:

LEMA 6.13. *Sean Y un espacio numerablemente paracompacto y regular, E y F subconjuntos ajenos de Y. Si F es cerrado en Y y si existen conjuntos abiertos U_n de Y para todo $n \in N$ tales que $E \subseteq \cap_{n\in N}U_n$ y $\cap_{n\in N}cl_Y(U_n)\cap F = \emptyset$, entonces E y F son separados por conjuntos abiertos en Y.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\{U_n\}_{n\in N}$, E y F con las propiedades enunciadas en las hipótesis del teorema. Ahora sea $\mathcal{F}$ la familia

$$\{Y \setminus F\} \cup \{Y \setminus (cl_Y(U_n) : n \in N\}.$$

$\mathcal{F}$ es una cubierta abierta numerable de Y. Como Y es numerablemente paracompacto, existe un refinamiento localmente finito de $\mathcal{F}$; sea $\mathcal{C} = \{U_\delta\}_{\delta<\beta}$ tal refinamiento. Para cada $x \in E$ existe $U_{\delta_x} \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U_{\delta_x} \subseteq (Y \setminus F$. Usando la regularidad tenemos que para $x \in E$, existe V_{δ_x} tal que

$$x \in V_{\delta_x} \subseteq cl_Y(V_{\delta_x}) \subseteq U_{\delta_x} \subseteq (Y \setminus F).$$

Como la familia $\{V_{\delta_x} : x \in E\}$ es localmente finita, entonces obtenemos:

1. $\cup_{x\in E}cl_Y V_{\delta_x}$ es cerrado.
2. $\cup_{x\in E}cl_Y V_{\delta_x} \subseteq (Y \setminus F)$.
3. $E \subseteq (\cup_{x\in E}(V_{\delta_x}))$

Si

$$A = \cup_{x\in E}(V_{\delta_x}),\ B = Y \setminus (\cup_{x\in E}cl_Y V_{\delta_x}).$$

Entonces $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$ con A y B ajenos. □

Como en los anteriores teoremas de Yajima, para demostrar el teorema de Lecheng Yang primero necesitamos enunciar un importante Lema para σ-espacio (ver K. Nagami [**31**]):

LEMA 6.14. *Si Y es un σ-espacio, entonces existe una familia $\{\mathcal{F}_n : n \in N\}$ de cubiertas de Y, cerradas y localmente finitas que cumplen:*

1. *$\mathcal{F}_n = \{F(\beta_1...\beta_n) : \beta_1, ..., \beta_n \in \Omega\}$ para toda $n \in N$.*
2. *$F(\beta_1...\beta_n) = \cup\{F(\beta_1...\beta_n\beta) : \beta \in \Omega\}$ para cada $\beta_1, ...\beta_n \in \Omega$.*
3. *Para cada $y \in Y$ existe una sucesión $\{\beta_n \in \Omega : n \in N\}$ tal que*

$$y \in \cap_{n\in N}F(\beta_1...\beta_n),$$

y para toda vecindad abierta V de y, existe algún $m \in N$ tal que $F(\beta_1...\beta_m) \subseteq V$.

Como en el lema 6.1, a la familia de cubiertas $\{\mathcal{F}_n : n \in N\}$ de Y se le llama σ-red espectral de Y, y a la sucesión $\{\beta_n \in \Omega : n \in N\}$ se le llama σ-red local de y en Y. Salvo que se diga lo contrario, usaremos la misma notación que en las demostraciones de los teoremas 6.2 y 6.4. Ahora iniciaremos la demostración del teorema de Lecheng Yang.

TEOREMA 6.15 (Lecheng Yang). *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de σ-espacios paracompactos. Si Σ es un Σ-producto de tal familia, entonces Σ es normal si y sólo si Σ es numerablemente paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ una familia de σ-espacios paracompactos. Por el teorema 6.12, tenemos que es suficiente demostrar que la paracompacidad numerable implica la normalidad. Sean A y B conjuntos cerrados ajenos no vacíos de Σ. Observando la demostración del teorema 1.12, podemos concluir que para lograr una separación de A con B, es suficiente construir una cubierta σ-localmente finita $\mathcal{G}$ de conjuntos abiertos de Σ tal que la clausura de cualquier elemento de $\mathcal{G}$ es ajeno con A o con B. Así que construiremos para cada $n \in N$

1. una familia localmente finita de abiertos $\mathcal{G}_n$ en Σ, tal que para todo $U \in \mathcal{G}_n$, $cl_X(U)$ es ajena con A o con B;
2. una familia Δ_n de matrices de $n \times n$;
3. para cada $\xi \in \Delta_n$, un $R_\xi \in [\alpha]^{\aleph_0}$, tal que $R_{\xi_-} \subseteq R_\xi$;
4. para cada $\xi \in \Delta_n$, un conjunto de indices $\Omega(\xi)$ y una σ-red espectral para X_ξ:
$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1\beta_2...\beta_k) : \text{ con } \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \in \Omega(\xi)\};$$
5. una familia de abiertos $\{H(\xi) : \xi \in \Delta_n\}$ de Σ localmente finita tal que $E(\xi) \subseteq H(\xi)$ para cada $\xi \in \Delta_n$, en donde para cada $\xi \in \Delta_n$, si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,...,n}$ entonces
$$E(\xi) = \cap_{k=1,...,n} \left(P_{\xi_{k-1}}\right)^{-1} (F(\beta_{k1}...\beta_{kn}).$$

Los elementos de Δ_n se contruirán de tal forma que

1. para cada $\xi \in \Delta_n$, si $\xi = (\beta_{ij})_{i,j=1,...,n}$ y $1 \leq k \leq n$, entonces $\xi_{k-1} \in \Delta_{k-1}$ y $\beta_{k1}, \beta_{k2}, ..., \beta_{kn} \in \Omega(\xi_{k-1})$; y
2. para cada $\eta = (\beta_{ij})_{i,j=1,...,n-1} \in \Delta_{n-1}$, $E(\eta)$ es cubierto por
$$\mathcal{G}_n \cup \{E(\xi) : \xi \in \Delta_n \text{ con } \xi_- = \eta\}.$$

Los conjuntos R_ξ se construirán de la siguiente forma:

1. Para cada $\xi \in \Delta_n$, existe $x_\xi \in A \cap E(\xi)$ si n es impar, y $x_\xi \in B \cap E(\xi)$ si n es par.
2. $R_\xi = R_{\xi_-} \cup sop(x_\xi)$.

Sea ξ_0 la matriz vacía. Tomamos un arbitrario $R_{\xi_0} \in [\alpha]^{\aleph_0}$. Como X_{ξ_0} es un σ-espacio paracompacto, sea $\Omega(\xi_0)$ un conjunto de indices tal que las familias
$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1...\beta_k) : \beta_1, ...\beta_k \in \Omega(\xi_0)\}$$
forman una σ-red espectral de X_{ξ_0}.

Definimos
$$\Gamma_1(\xi_0) = \{(\beta) : \beta \in \Omega(\xi_0)\}.$$
Si $(\beta) = \eta \in \Gamma_1$, tomamos a
$$E(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(F(\beta)).$$

Denotamos

$$\Delta_1(\xi_0) = \{\eta \in \Gamma_1(\xi_0) : A \cap E(\eta) \neq \emptyset\}.$$

Como $\mathcal{F}_1$ es una cubierta de X_{ξ_0}, entonces $\{E(\eta) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0)\}$ es una cubierta de Σ; así que $\Delta_1(\xi_0) \neq \emptyset$.

Notemos que

$$P_{\xi_0}\left(P_{\xi_0}^{-1}(F(\beta))\right) = F(\beta);$$

luego entonces la familia de cerrados en X_{ξ_0}

$$\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0)\},$$

es localmente finita. Si tomamos $\mathcal{S}_1(\xi_0)$ como

$$\cup\{E(\eta) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0) \setminus \Delta_1(\xi_0)\},$$

entonces es claro que $\mathcal{S}_1(\xi_0)$ es un conjunto cerrado. Además $P_{\xi_0}(\mathcal{S}_1(\xi_0))$ es cerrado en X_{ξ_0}, y se cumple la relación $\mathcal{S}_1(\xi_0) = P_{\xi_0}^{-1}(P_{\xi_0}(\mathcal{S}_1(\xi_0)))$. Como X_{ξ_0} es un σ-espacio paracompacto entonces tenemos que es perfectamente normal (ver G. Gruenhage[**16**] pp. 446), es decir todos los conjuntos cerrados son del tipo G_δ. Como $\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0)\}$ es localmente finita en X_{ξ_0}, entonces existe una familia $\{W_n : n \in N\}$ de abiertos en X_{ξ_0} tal que

$$\cup\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0) \setminus \Delta_1(\xi_0)\} = \cap\{W_n : n \in N\}.$$

Pero X_{ξ_0} es paracompacto y $\cup\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0) \setminus \Delta_1(\xi_0)\}$ es un conjunto cerrado en X_{ξ_0}. Entonces, para todo $n \in N$, existe un conjunto abierto V_n de X_{ξ_0} tal que

$$\cup\{P_{\xi_0}(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0) \setminus \Delta_1(\xi_0)\} \subseteq V_n \subseteq cl_{X_{\xi_0}}(V_n) \subseteq W_n.$$

Entonces

$$\mathcal{S}_1(\xi_0) \subseteq \cap\left\{P_{\xi_0}^{-1}(V_n) : n \in N\right\} \subseteq \cap\left\{P_{\xi_0}^{-1}\left(cl_{X_{\xi_0}}(V_n)\right) : n \in N\right\}.$$

Pero

$$\mathcal{S}_1(\xi_0) = \cap\left\{P_{\xi_0}^{-1}(W_n) : n \in N\right\}.$$

Luego entonces

$$\mathcal{S}_1(\xi_0) = \cap\left\{P_{\xi_0}^{-1}\left(cl_{X_{\xi_0}}(V_n)\right) : n \in N\right\}$$

y también

$$\mathcal{S}_1(\xi_0) = \cap\{P_{\xi_0}^{-1}(V_n) : n \in N\},$$

así que

$$\cap\{cl_\Sigma\left(P_{\xi_0}^{-1}(V_n)\right) : n \in N\} \subset \cap\{P_{\xi_0}^{-1}\left(cl_{X_{\xi_0}}(V_n)\right) : n \in N\}.$$

Por tanto

$$\cap\{cl_\Sigma\left(P_{\xi_0}^{-1}(V_n)\right) : n \in N\} \cap A = \emptyset,$$

aplicando el lema 6.13, obtenemos G_{ξ_0} abierto de Σ tal que

$$\mathcal{S}_1(\xi_0) \subseteq G_{\xi_0} \subseteq cl_\Sigma(G_{\xi_0}) \subseteq (\Sigma \setminus A).$$

Podemos tomar $\mathcal{G}_1 = \{G_{\xi_0}\}$ y $\Delta_1 = \Delta_1(\xi_0)$.

Para completar la construcción en el caso 1, sea $\{L(\eta) : \eta \in \Gamma_1(\xi_0)\}$ una familia localmente finita de conjuntos abiertos de X_{ξ_0} tal que $P_{\xi_0}(E(\eta)) \subseteq L(\eta)$ para todo $\eta \in \Gamma_1(\xi_0)$ (tal familia existe por el teorema 1.11) . La familia $\{H(\eta) : \eta \in \Delta_1\}$ de conjuntos abiertos de Σ, donde $H(\eta) = P_{\xi_0}^{-1}(L(\eta))$, es localmente finita y además $E(\eta) \subseteq H(\eta)$. Sean $\eta \in \Delta_1$ y $x_\eta \in A \cap E(\eta)$; tomamos $R_\eta = R_{\xi_0} \cup sop(x_\eta)$. Como X_η es σ-espacio, tomamos a $\Omega(\eta)$ como el conjunto de indices tal que

$$\mathcal{F}_k = \{F(\beta_1 ... \beta_k) : \beta_1, ..., \beta_k \in \Omega(\eta)\}$$

es una σ-red espectral de X_η. No es complicado comprobar todas las propiedades enunciadas para las familias propuestas para el caso 1.

Supongamos construidos los objetos con las propiedades enunciadas antes para toda $1 \leq i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que n es impar. Tomamos $\xi \in \Delta_n$ y

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}(\xi) = \{\eta = (\beta_{ij})_{i,j=1,...,n+1} : \eta_- = \xi,\ \beta_{i,n+1} \in \Omega(\xi_{i-1}) \\ \text{y } \beta_{n+1,j} \in \Omega(\xi) \text{ para } 1 \leq i,j \leq (n+1)\}. \end{aligned}$$

Para cada $\eta = (\beta_{ij})_{i,j=1,...,n+1} \in \Gamma_{n+1}(\xi)$, definimos

$$E(\eta) = \cap_{i=1,...,n+1} P_{\xi_{i-1}}^{-1}\left(F\left(\beta_{i1} ... \beta_{i(n+1)}\right)\right).$$

Observemos que $P_\xi(E(\eta))$ es un conjunto cerrado en X_ξ para toda $\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)$. De hecho $P_\xi(E(\eta)) = \cap\left\{x \in X_\xi : x|_{\xi_{i-1}} \in F\left(\beta_{i1} ... \beta_{i(n+1)}\right)\right\}$, lo cual demuestra que el conjunto en cuestion es cerrado.

Tenemos que:

1. $E(\eta) \subseteq E(\xi)$ para todo $\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)$,
2. La familia de conjuntos cerrados $\{P_\xi(E(\eta)) : \eta \in \Gamma_{n+1}(\xi)\}$ es localmente finita en X_ξ, y
3. $P_\xi^{-1}(P_\xi(E(\eta))) = E(\eta)$.

Como en el caso 1, tomemos $\Delta_{n+1}(\xi)$ como la familia de matrices

$$\{\eta \in \Gamma_{n+1}(\xi) : E(\eta) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Denotamos como $S_{n+1}(\xi)$ al conjunto

$$\cup\{E(\eta) : \eta \in \Gamma_{n+1}(\xi) \setminus \Delta_{n+1}(\xi)\}.$$

También logramos las relaciones

$$S_{n+1}(\xi) = P_\xi^{-1}(P_\xi(S_{n+1}(\xi))).$$

Ahora usando la perfecta normalidad de X_ξ, como en el caso 1, existe una familia $\{V_n : n \in N\}$ de conjuntos abiertos de X_ξ tal que

$$S_{n+1}(\xi) = \cap\left\{P_\xi^{-1}(cl_{X_\xi}(V_n)) : n \in N\right\} \subseteq (\Sigma \setminus B).$$

Usando el Lema 6.13, para todo $\xi \in \Delta_n$, existe un conjunto G_ξ abierto de Σ, tal que

$$S_{n+1}(\xi) \subseteq G_\xi \subseteq cl_X(G_\xi) \subseteq \Sigma \setminus B.$$

Como $S_{n+1}(\xi) \subseteq E(\xi) \subseteq H(\xi)$. Podemos pedir que $G_\xi \subseteq H(\xi)$. Así que podemos definir a:

$$\mathcal{G}_{n+1} = \{G_\xi : \xi \in \Delta_n\},$$

y a Δ_{n+1} como

$$\cup\left\{\Delta_{n+1}(\xi):\xi\in\Delta_n\right\}.$$

Si $\Delta_{n+1}=\emptyset$, afirmamos que $\cup_{i=1,..,n+1}(\cup\mathcal{G}_i)=\Sigma$. En efecto, sea $x\in\Sigma\setminus(\cup_{i=1,..,n+1}(\cup\mathcal{G}_i))$. Sea $\{\beta_{1j}\in\Omega(\xi_0):j\in N\}$, una σ-red local de $P_{\xi_0}(x)$ en X_{ξ_0}. Si $\xi^1=(\beta_{11})\notin\Delta_1$, como $P_{\xi_0}(x)\in F(\beta_{11})$, entonces $x\in E(\xi^1)$; más exactamente, $x\in\mathcal{S}_1(\xi_0)$, esto es $x\in G_{\xi_0}$. Supongamos que podemos construir, para cada $1\leq k<n+1$, una σ-red local $\left\{\beta_{kj}\in\Omega\left(\xi^{k-1}\right):j\in N\right\}$ de $P_{\xi^{k-1}}(x)$ en $X_{\xi^{k-1}}$, con $\xi^k=(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,k}\in\Delta_k$. Sea $\left\{\beta_{(n+1)j}\in\Omega(\xi^n):j\in N\right\}$ una σ-red local de $P_{\xi^n}(x)$ en X_{ξ^n}. Si $\xi^{n+1}=(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n+1}$, afirmamos que $\xi^{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi^n)$. En caso contrario, por construcción, tenemos que $x\in\mathcal{S}_{n+1}(\xi^n)$; o sea $x\in\cup\mathcal{G}_{n+1}$, lo cual no es posible. Pero tampoco es posible que $\xi^{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi^n)$ ya que estamos suponiendo que $\Delta_{n+1}=\emptyset$. Así que debe de cumplirse que $\cup_{i=1,..,n+1}(\cup\mathcal{G}_i)=\Sigma$.

Notemos que trivialmente $\cup_{i=1,\dots,n+1}\mathcal{G}_i$ es σ-localmente finita, así que A y B están separados en Σ.

Supongamos ahora que $\Delta_{n+1}\neq\emptyset$.

Para concluir la construcción, notemos que por el teorema 1.11 existe una familia $\{W(\eta):\eta\in\Gamma_{n+1}(\xi)\}$ de conjuntos abiertos de X_ξ localmente finita tal que $P_\xi(E(\eta))\subseteq W(\eta)$. Finalmente, definimos $H(\eta)$ para toda $\eta\in\Delta_{n+1}$ como $P_\xi^{-1}(W(\eta))\cap H(\xi)$. Por construcción, existe $x_\eta\in B\cap E(\eta)$ para toda $\eta\in\Delta_{n+1}$. Sea $R_\eta=R_\xi\cup sop(x_\eta)$ y sea $\Omega(\eta)$ tal que

$$\{F(\beta_1...\beta_k):\beta_1,...,\beta_k\in\Omega(\eta)\},\ k\in N\}$$

es una σ-red espectral de X_η. Comprobemos que si $\xi\in\Delta_n$, entonces $E(\xi)$ es cubierto por $\mathcal{G}_n\cup\{E(\eta):\eta\in\Delta_{n+1}\text{ y }\eta_-=\xi\}$. Para tal fin, tomamos $x\in E(\xi)$. Supongamos que $P_\xi(x)\in F\left(\beta_{(n+1)1}...\beta_{(n+1)(n+1)}\right)$ donde $\beta_{(n+1)1},...\beta_{(n+1)(n+1)}\in\Omega(\xi)$. Como

$$P_{\xi_{k-1}}(x)\in F(\beta_{k1}...\beta_{kn})=\cup\{F(\beta_{k1}...\beta_{kn}\beta):\beta\in\Omega(\xi_{k-1})\},$$

podemos suponer que

$$P_{\xi_{k-1}}(x)\in F\left(\beta_{k1}...\beta_{kn}\beta_{k(n+1)}\right)\text{ para alguna }\beta_{k(n+1)}\in\Omega(\xi_{k-1}).$$

Si $\eta=(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n+1}$, tenemos que $\eta_-=\xi$. Supongamos que $\eta\notin\Delta_{n+1}$, entonces $x\in\cup\mathcal{G}_n$, ahora si $\eta\in\Delta_{n+1}$, por construcción tenemos que $x\in E(\eta)$. Y de esto último concluimos que $E(\xi)$ está cubierto por $\mathcal{G}_n\cup\{E(\eta):\eta\in\Delta_{n+1}\text{ y }\eta_-=\xi\}$.

Podemos suponer que para todo $n\in N$, tenemos la construcción anunciada. Afirmamos que si $\mathcal{G}=\cup_{n<\omega}\mathcal{G}_n$, entonces $\mathcal{G}$ es una cubierta σ-localmente finita de Σ, y con esto concluimos la separación de A y B en Σ. Supongamos que $x\in\Sigma\setminus\cup\mathcal{G}$. Igual que antes podemos construir una familia de indices $\{\beta_{ij}:i,j\in N\}$ tal que para todo $n\in N$:

1. Si $\xi^n=(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, entonces $\xi^n\in\Delta_n$.
2. $\{F(\beta_{n1}...\beta_{nk}):\beta_{n1},...,\beta_{nk}\in\Omega\left(\xi^{n-1}\right)\}$ es una σ-red local del punto $P_{\xi^{n-1}}(x)$ en $X_{\xi^{n-1}}$.

Como $x_{\xi^n}\in E(\xi^n)$, si $n>m\geq1$, tenemos que

$$x_{\xi^n}\in E(\xi^n)\subseteq P_{\xi^m}^{-1}\left(F\left(\beta_{(m+1)1}...\beta_{(m+1)n}\right)\right).$$

Así que, si $n > m$

$$P_{\xi^m}(x_{\xi^n}) \in F\left(\beta_{(m+1)1}\cdots\beta_{(m+1)n}\right).$$

Para un $m \geq 1$ fijo, la sucesión $\{P_{\xi^m}(x_{\xi^n}) : n > m\}$ tiene como limite a $P_{\xi^m}(x)$. En efecto, sea V una vecindad abierta en X_{ξ^m} de $P_{\xi^m}(x)$, entonces existe $F\left(\beta_{(m+1)1}\cdots\beta_{(m+1)k}\right)$ que está contenido en V. Pero si $s > k$, tenemos

$$F\left(\beta_{(m+1)1}\cdots\beta_{(m+1)s}\right) \subseteq F\left(\beta_{(m+1)1}\cdots\beta_{(m+1)k}\right) \subsetneq V.$$

Así que para $n > \max\{k, m\}$, tenemos que $P_{\xi^m}(x_{\xi^n}) \in V$.

Si $a \in \Sigma$ es el punto base del Σ-producto, tomamos $R = \cup_{n\in N} R_{\xi^n}$ y $z \in \Sigma$, tal que

$$z(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) \text{ si } \lambda \in R \\ a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin R. \end{cases}$$

Afirmamos que la sucesión $\{x_{\xi^n} : n \in N\}$, tiene como limite a z. Sea $z \in U = P_{\xi^m}^{-1}(U_m) \cap (\cap_{\lambda \in H} U_\lambda)$, donde $P_{\xi^m}(x) \in U_m$, U_m es un abierto de X_{ξ^m}, $H \in [\alpha \setminus R]^{<\aleph_0}$ y $a(\lambda) \in U_\lambda$, donde U_λ es un abierto de X_λ. Tenemos que para algún N_0, si $n > N_0 > m$, entonces $P_{\xi^m}(x_{\xi^n}) \in U_m$. Como

$$sop(x_{\xi^n}) \subseteq R_{\xi^n} \subset R,$$

entonces $x_{\xi^n}(\lambda) = a(\lambda)$ para todo $\lambda \in H$. Así que $x_{\xi^n} \in U$ para todo $n > N_0$. Entonces, z es punto limite de A y B. Por tanto $z \in (A \cap B)$. Lo cual no es posible. Así que concluimos la demostración del teorema. □

Para concluir este capítulo, presentaremos un corolario importante (ver Lecheng Yang [**43**]). Primero damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.16. *Sean Y un espacio topológico y $\mathcal{G} = \{G_\gamma : \gamma < \delta\}$ una cubierta abierta de Y. Diremos que $\mathcal{H} = \{H_\gamma : \gamma < \delta\}$ es un acortamiento de $\mathcal{G}$, si $\mathcal{H}$ es una cubierta de Y y además $cl_Y(H_\gamma) \subseteq G_\gamma$ para todo $\gamma < \delta$. Un espacio Y se dice que es acortable si toda cubierta de él tiene un acortamiento.*

En Y. Yajima [**42**] tenemos el siguiente resultado

TEOREMA 6.17. *Sea Σ un Σ-producto de Σ-espacios paracompactos. Entonces son equivalentes:*

1. *Σ es colectivamente normal.*
2. *Σ es normal.*
3. *Σ es acortable*

Ahora bien usando los teoremas 6.15 y 6.17 obtenemos el siguiente resultado

COROLARIO 6.18. *Si Σ es un Σ-producto de σ- espacios paracompactos, entonces son equivalentes*

1. *Σ es colectivamente normal.*
2. *Σ es normal.*
3. *Σ es acortable.*
4. *Σ es numerablemente paracompacto.*

Bibliografía

[1] O. T. Alas, *On a characterization of collectionwise normality*, Canad. Math. Bull., 14 (1971) 13-15

[2] A.V. Arkhangel'skii, *Topological Spaces Functions*, Kluwer Academic Publishers., 1989.

[3] A.V. Arkhangel'skii, *Continuous mappings, factorization theorems, and function spaces*, Trans. Moscow Math. Soc., (1985)

[4] A. Bešlagić, *Normality in products*, Top. and its Appl., 22 (1986) 71-82.

[5] K. Chiba, *On the weak B-property of Σ-products*,Math. Japonica, 27 (1982) 737-746.

[6] G. D. Creede, *Concerning Semi-stratifiable Spaces*, Pacific J. Math., 32 (1970) 47-54.

[7] W.W. Comfort, *Topological Groups*, Handbook of set theoretic topology, Elsevier Science Publishers B. V., 1984.

[8] W.W. Comfort, S. Negrepontis, *Chain Conditions in Topology*,Cambridge University Press, 1982.

[9] W.W. Comfort, S. Negrepontis, *The theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag Berlin Heildelberg New York, 1974.

[10] H.H. Corson, *Normality in subset of product spaces*, Amer. J. Math., 81 (1959), 785-796.

[11] T. Daniel, G. Gruenhage, *Some nonnormal Σ-products*, Top. and its Appl., 43 (1992) 19-25.

[12] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlin:Helderman, 1989.

[13] Engelking, R. *On functions defined on Cartesian Products*, Fundamenta Math., 59 (1966) 221-231.

[14] Garcia-Maynez y A. Tamariz, *Topología General*, Porrua, 1988.

[15] S. García-Ferreira, M. Sanchis y A. Tamariz-Mascarúa, *On C_α-compact subset*, Top. and Appl. 77 (1997) 139-160.

[16] G. Gruenhage, *Generalized Metric Spaces*, Handbook of set-theoretic Topology (eds. K. Kunen y J. E. Vaughan). Elsevier Science Publishers. B. V. 1984. 423-501.

[17] S.P. Gul'ko, *On propiertes of subset of Σ-products*, Soviet Math. Dokl., 18 (1977) 1438-1442

[18] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology (eds. K. Kunen y J. E. Vaughan). Elsevier Science Publishers. B. V. 1984. 1-61.

[19] R. Hodel, *Spaces defined by sequences of open covers which guarentee that certain sequences have cluster points*, 39 (1972) 253-263.

[20] T. Hoshida, *Products of normal spaces with Lašnev spaces*, Fund. Math., 124 (1984) 144-153.

[21] Juhasz, I., *Cardinal Functions in Topology*, Math Centre Tracts 34, Math. Centrum, Amsterdam, 1971.

[22] Juhasz, I., *Cardinal Fucntions in Topology –Ten years Later*, Math Centre Tracts 123, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.

[23] Kamke,E., *Theory of Sets*, Dover Publications Inc.,1950.

[24] Kunen, K., *Set Theory, an Introduction to Independent Proofs*, North Holland Publ. Co. Amsterdam-New York, 1980.

[25] A.P. Kombarov, *On Σ-products of topological spaces*, Soviet Math. Dokl., 12 (1971) 1101-1104.

[26] A.P. Kombarov, *On the products of normal spaces, uniformities on Σ-products*, Soviet Math. Dokl., 13 (1972) 1068-1071.

[27] A.P. Kombarov, *On tightness and normality of Σ-products*, Soviet Math. Dokl., 19 (1978) 403-407.

[28] A.P. Kombarov y V.I. Malyhin, *On Σ-products*, Soviet Math. Dokl., 213 (1973) 1780-1783.

[29] N. Kemoto, Y. Yajima, *Remarks on Normality of Σ-products*, Top. Proc., 19 (1994) 161-168.

[30] A. Le Donne, *Shrinking property in Σ-products of paracompact p-spaces*, Top. and its Appl., 19 (1985) 95-101.

[31] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math., 65 (1969) 169-192.

[32] T. Nogura, *Tightness of compact Hausdorff spaces and normality of product spaces*, J. Math. Soc. Japan, 2 (1976) 360-362.

[33] H. Ohta, *On normal non-rectangular products*, J. Math. Oxford, 32 (1981) 339-344.

[34] T.C. Przymusiński, *Products of Normal spaces*, Handbook of set theoretic topology, Elsevier Science Publisher B.V.,(1984) 781-825.

[35] A. Tamariz, F. Casarrubias, F. Hernandez, *Notas sobre espacios de Funciones Continuas.*

[36] H. Teng, *On problem of Yajima*, Top. and its Appl., 38 (1991) 39-43.

[37] S. Todorčević, *A topology on sequences of countable ordinals*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 39 (1991) 137-140.

[38] H. Teng, *On a problem of Y. Yajima*, Top. and Appl., 38 (1991) 39-43.

[39] Y. Yajima, *The normality of Σ-products and the perfect κ-normality of Cartesian Products*, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984) 689-699.

[40] Y. Yajima, *On Σ-products of Σ-spaces*,Fundamenta Math., 33 (1984) 29-37.

[41] Y. Yajima,*On Σ-products of semi-stratifiable spaces*, Top. and its Appl., 25 (1987) 1-11.

[42] Y. Yajima, *The shrinking property of Σ-products*, Tsukuba J. Math.,13 (1989) 83-98.

[43] L. Yang, *Countable paracompactess of Σ-products*, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994) 949-956.

[44] J. E. Vaughan, *Countably compact and sequentially compact spaces*, Handbook of set theoretic topology, Elsevier Science Publisher B.V.,(1984) 569-602.

[45] Willard,S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

Índice Analítico