00365 8
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"ALGUNOS PRINCIPIOS COMBINATORIOS EN EL MODELO NUCLEO"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

MAT. DIEGO ROJAS REBOLLEDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

MEXICO, D. F. 1999

274589

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A la memoria de Santiago,
que tanto gustaba
de estas historias...

Prefacio

El presente texto se inició bajo la motivación de presentar un trabajo de investigación que trate el punto medular de una de las principales áreas de la teoría moderna de los conjuntos: el universo construible.

Desde el momento en que el universo construible aparece como una posibilidad real para modelar el mundo de los objetos matemáticos, se presenta válido el hecho de estudiar, desde la matemática misma, tanto sus propiedades intrínsecas, como el comportamiento de algunos objetos matemáticos (distinguidos y reconocidos) que en él habitan. Es por esto que el presente trabajo encuentra una motivación todavía mayor en el estudio de algunos principios (o propiedades) que refieren a ciertos objetos del universo construible, y que dan respuesta (al menos parcial) a varios problemas clásicos(Souslin, Cantor y Kurepa).

Es así como este trabajo de tesis intenta aparecer, por un lado, como un texto bien armado en el cual se expone de manera detallada la construcción del universo construible y sus propiedades básicas, encontrando (para esto) soluciones a ciertos pasos claves (comunmente omitidos en la bibliografía) para dar continuidad a una exposición clara del universo construible. Por otro lado, se exponen y presentan de manera detallada algunas propiedades que versan sobre ciertos cardinales de dicho universo, las cuales resultan tener implicaciones más allá de la mera especulación conjuntista. Es decir, en su esencia están implícitos resultados que salen de la teoría de los conjuntos hacia otras ramas e intereses matemáticos. Además, se pretende que este texto funcione como una introducción a las pruebas de consistencia relativas según el método de Modelos Internos. Por último, podemos decir que con este trabajo intentamos ofrecer a los estudiantes de posgrado que cursen sus primeras materias de teoría de conjuntos, un texto autocontenido que facilite el entendimiento de estos temas y que ayude a encontrar en estos, al menos un poco del exquisito sabor de la teoría moderna de los conjuntos.

En el primer capítulo aparecen las nociones básicas, necesarias para llevar a cabo un desarrollo completo de los capítulos posteriores. Se debe poner especial atención en la sección 3, que refiere a los conjuntos c.n.a. y estacionarios, pues las demostraciones que ahí aparecen servirán como introducción para entender las demostraciones que se llevarán a cabo en el capítulo 3.

El segundo capítulo es central; se hace un estudio exhaustivo de la construcción del universo construible, las nociones involucradas, y su carácter de modelo interno de ZFE+HGC+(V=L). La definición de la noción de definibilidad que se ofrece, es la que propone Karp en [Karp 1967], según la cual se hace una "conjuntización" de la sintaxis, similar a la aritmetización de la sintaxis desarrollada por Gödel para demostrar los teoremas de incompletud. Además presentamos una definición alternativa, ligada a la definición original de Gödel [Gödel 1940], donde se definen los estratos de la jerarquía construible en términos de la cerradura de un conjunto de operaciones (las recursivas primitivas). Esta segunda definición, se agrega para dar una demostración clara y completa del lema 4.2 (Cap. 2), el cual aparece en varias ocasiones como necesario para demostrar ciertas afirmaciones importantes, como por ejemplo, el lema de condensación. Ahora, es necesario demostrar que ambas definiciones en realidad coinciden. Es por esto que se debe poner especial atención en los resultados de la parte final de la sección 2.3, pues la construcción y seguimiento de las demostraciones aparecen como originales. También la demostración del lema 4.2 es una demostración que no aparece como tal en la bibliografía correspondiente.

En el capítulo final se introduce el Principio de Jensen, demostrando ahí, su independencia de la teoría de los conjuntos, y sus primeras implicaciones, como lo son las soluciones parciales a los problemas de Souslin y de Cantor. También se presentan siete versiones equivalentes a este principio, algunas de las cuales no aparecen en la bibliografía, con la intención de motivar un mayor entendimiento de lo que afirma dicho principio. Después, se agregan dos extensiones propias del principio de Jensen, con la finalidad de seguir el propósito de estudiar características del universo construible y el papel que juega, via estas extensiones, para resolver otros problemas matemáticos, como el problema de Kurepa.

Por último, quiero expresar mi gratitud hacia las personas e instituciones que durante estos tres años de estudios me brindaron apoyo. De la Dirección de Intercambio Académico de la UNAM, recibí una gran ayuda económica, tanto en los dos años en los que cursé los créditos de la Maestría, como en mi proyecto de tesis. También agradezco a la Universidad Autónoma

de Baja California Sur, y a la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV, muy en particular a su bello grupo de investigadores con los que tuve el gusto de disfrutar grandes momentos. Una vez más, el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias abrió su puerta del conocimiento y pasión en voz de Santiago Ramírez, Carlos Torres, José Alfredo Amor y Rafael Rojas, hacia mi preparación. A ustedes, muchas gracias. Muy importante fue la aparición, en las aulas de la facultad, de Luis Miguel Villegas, quien con sus ganas de disfrutar de la teoría de los conjuntos me ofreció clarificar la elección del camino que ahora elijo y adoro. Como siempre, debo decir que a mi hermosa Erica le debo este trabajo, pues sin conocer de axiomatizaciones, ni de cardinales mayores, disfruta conmigo del paraíso cantoriano.

Diego Rojas R.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan todas las definiciones y resultados básicos que requerimos para los capítulos posteriores. Es recomendable poner atención a las secciones 3, 4 y 5, pues aunque se trate de cuestiones básicas, en éstas aparecen conceptos fundamentales.

A lo largo del capítulo se demostrarán aquellos resultados cuyas demostraciones involucren métodos y conceptos que se usarán en otros capítulos.

1.1 Teoría de los conjuntos

Se entiende que la teoría de los conjuntos es la colección de todas aquellas afirmaciones verdaderas que refieren a "conjuntos".

¿Qué son, pues, los conjuntos?, ¿cómo se enuncian dichas afirmaciones? y ¿qué significa que una proposición tal sea verdadera?

En esta sección se introduce la noción axiomática de conjunto. También se introduce un lenguaje formal, en el cual es posible expresar las afirmaciones acerca de los conjuntos, se define la noción de verdad para estos enunciados conjuntistas con respecto a una estructura. Además, es necesario hacer algunas aclaraciones con respecto a colecciones de conjuntos llamadas clases. Por último, se presenta alguna notación conjuntista que usaremos.

La noción de conjunto que se maneja actualmente, gracias a las aportaciones de Zermelo, Fraenkel y Skolem, es la noción axiomática de conjunto. Así, se entenderá por *conjunto* aquella colección que se pueda generar a partir de otros conjuntos aplicando los axiomas de la teoría de los conjuntos.

La necesidad de establecer un lenguaje, con el propósito de hacer clara la idea de enunciar propiedades conjuntistas, se asoma como necesaria respuesta a las preguntas ¿cómo se expresan las propiedades que refieren a los conjuntos?, ¿según que lenguaje?.

A continuación definimos el lenguaje de primer orden para la teoría de los conjuntos. A partir de éste, podremos enunciar formalmente los axiomas de la teoría de los conjuntos (ZFE).

1.1 Definición. El *lenguje para la teoría de los conjuntos (LTC)* se compone de un conjunto de símbolos y reglas para la formación de expresiones gramaticalmente correctas (fórmulas):

1. *Símbolos del lenguaje*:
   (a) *Símbolos de puntuación*: (,).
   (b) *Símbolos de relación*: $\in$, $\approx$.
   (c) *Símbolos de variable*: Para cada número natural n, v_n es un símbolo de variable.
   (d) *Símbolos lógicos*: $\neg$, $\wedge$, $\exists$.
2. *Fórmulas*:
   (a) *Fórmulas primitivas*: Si x, y son símbolos de variable, entonces las expresiones $(x \in y)$ y $(x \approx y)$ son fórmulas primitivas.
   (b) *Fórmulas*:
      i. Las fórmulas primitivas son fórmulas.
      ii. Si ϕ, ψ son fórmulas, entonces las expresiones $(\neg\phi)$ y $(\phi \wedge \psi)$ son fórmulas.
      iii. Si ϕ es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces la expresión $(\exists x \phi)$ es una fórmula.

Las convenciones sobre uso de parentesis, las interpretaciones de los símbolos lógicos y del símbolo $\approx$ son las usuales. De igual manera, las abreviaciones introducidas por los conectivos $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists!$. La interpretación del símbolo $\in$ dependerá de la estructura, sin embargo, a lo largo de este libro, no estaremos interesados más que en aquellas estructuras que interpreten al símbolo $\in$ como la pertenencia de conjuntos (*estructuras estandar*).

A continuación se definen los axiomas que componen la teoría de los conjuntos (ZFE) en términos del lenguaje LTC. También definimos, ahí mismo, las diferentes subteorías de ZFE que se mencionarán en el texto:

1.2 Definición. La teoría ZFE, es aquella que parte de los axiomas:

1. **Axioma de Extensionalidad:**

$$\forall x \forall y (\forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \to (x \approx y)).$$

2. **Axioma de Par:**

$$\forall x \forall y \exists z \forall u ((u \in z) \leftrightarrow ((u \approx x) \vee (u \approx y))).$$

3. **Axioma de Unión:**

$$\forall x \exists z \forall u ((u \in z) \leftrightarrow \exists y ((y \in x) \wedge (u \in y))).$$

4. **Axioma de Potencia:**

$$\forall x \exists z \forall u ((u \in z) \leftrightarrow \forall v ((v \in u) \to (v \in x))).$$

5. **Axioma de Infinito:**

$$\exists x (\exists y (y \in x) \wedge \forall y ((y \in x) \to \exists z ((z \in x) \wedge (y \in z)))).$$

6. **Axioma esquema de Subconjunto.** Para cualquier fórmula $\phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC, el siguiente es una instancia del esquema de separación:

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n \forall x \exists y \forall u ((u \in y) \leftrightarrow ((u \in x) \wedge \phi(u, p_1, \ldots, p_n))).$$

7. **Axioma esquema de reemplazo.** Para cualquier fórmula $\phi(x, y, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC, el siguiente es una instancia del esquema de reemplazo:

$$\begin{aligned}[\forall p_1 \ldots \forall p_n [\forall x \exists y (\phi(x, y, p_1, \ldots, p_n) \wedge \forall z (\phi(x, z, p_1, \ldots, p_n)\\ \to y = z)) \to \forall u \exists v (\forall x \in u)(\exists y \in v) \phi(x, y, v_1, \ldots, v_n)]]^L\end{aligned}$$

8. **Axioma de Regularidad:**

$$\forall x (\exists y (y \in x) \to \exists y ((y \in x) \wedge \forall z ((z \in y) \to \neg (z \in x)))).$$

9. **Axioma de Elección:**

$$\forall x \exists y (y \subseteq x \times x \wedge \text{“}y \text{ bien ordena a } x\text{”}).$$

La teoría ZF es aquella que parte de los axiomas 1-8. Es decir, abusando de notación, "ZF+Axioma de Elección=ZFE".

La teoría ZF^- es aquella que parte de los axiomas 1-3 y 5-8, es decir, "ZF^- + Axioma de Potencia = ZF".

Tal como mencionamos arriba, entenderemos por conjunto, toda aquella colección de la que se pueda afirmar su existencia en ZFE. Los conjuntos son, pues, los objetos del discurso de ZFE, es decir, los valores que toman las variables. De igual manera, se podría pensar en la noción de conjunto restringido a las subteorías ZF y ZF^-.

Denotaremos con V a la colección de todos los conjuntos. Dado que la existencia de V no se puede afirmar en ZFE (suponiendo que ZFE es consistente), pues si fuera el caso, entonces ZFE sería inconsistente (el argumento es la paradoja de Russell u otras). Entonces V, es una colección que no es un conjunto, pero que se puede definir en ZFE, es decir, la fórmula $x \approx x$ define a la colección V. Cualquier objeto del discurso de ZFE (conjunto) que satisfaga a $x \approx x$ está en V y viceversa.

A este tipo de colecciones de conjuntos, que no son conjuntos, les llamaremos *clases propias*. Formalmente, una colección de conjuntos C es una clase si existe una fórmula $\phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC y existen conjuntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$C = \{x | \phi(x, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Así, es claro que todo conjunto es una clase. Pues dado un conjunto A, si consideramos la fórmula $(v_0 \in v_1)$ de LTC y al mismo conjunto A, entonces

$$A = \{x | (x \in A)\}.$$

Pero, no toda clase es un conjunto, el ejemplo típico, es el que se mencionó arriba, la clase

$$V = \{x | (x \approx x)\}.$$

Aquellas clases que no son conjuntos se les llama *clases propias*.

Es importante mencionar, que constantemente nos estaremos refiriendo a clases propias en nuestro discurso formal. Por ejemplo, usaremos expresiones de la forma $\forall x(x \in M \rightarrow \psi(x))$, donde por M entendemos una determinada clase propia. No debe causar estrañeza estos abusos de notación, pues por este tipo de expresiones se entiende la expresión (refiriéndonos al ejemplo): $\forall x(\Phi_M(x) \rightarrow \psi(x))$, donde la fórmula Φ_M es la que define a la clase M. Es decir $M = \{x | \Phi_M(x)\}$.

Los términos *relacional* y *funcional*, se usan para refirirnos a la contraparte, en el contexto de las clases propias, de los términos *relación* y *función*.

A continuación, pasaremos a definir las nociones necesarias dirigidas a establecer las ideas de *verdad* y *modelo.*

1.3 Definición. Sea M una clase, sea E un relacional binario sobre M. Se dice que el par $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$ es *una estructura para LTC.*

Para el caso en que M sea una clase propia, al par $\langle M, E\rangle$ se le puede llamar *estructura clase.* Además, observe que para el caso en que M sea una clase propia, el par no está bien definido, pero para el caso que nos ocupa, esto es irrelevante.

Es prudente recalcar que las estructuras que estarán involucradas en el desarrollo de este libro, serán aquellas en las que el relacional E coincida con la relación de pertenencia restringida a M. En estos casos se denotará a la estructura con el par $\langle M, \in\rangle$. A este tipo de estructuras se les llama estructuras *estandar.*

1.4 Definición. Dada una estructura $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$ para LTC, dada una fórmula $\phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC (con todas sus variables libres entre $v_0, \ldots,$ v_n), y dados $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementos de M, definimos la relación metateórica

$$\mathcal{M} \models \phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

($\mathcal{M}$ satisface a ϕ para $a_0, a_1, \ldots, a_n$), en términos de la complejidad sintáctica de ϕ, de la siguiente manera:

1. (a) $\mathcal{M} \models a_i \in a_j$ si y sólo si $a_i E a_j$.
   (b) $\mathcal{M} \models a_i \approx a_j$ si y sólo si $a_i = a_j$.
2. (a) $\mathcal{M} \models \neg\phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si no se cumple $\mathcal{M} \models \phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
   (b) $\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si se cumple $\mathcal{M} \models \alpha(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ y también $\mathcal{M} \models \beta(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
3. $\mathcal{M} \models \exists x \psi(x, a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si existe un elemento a de M, tal que se cumple $\mathcal{M} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$.

Observe que la definición anterior, para el caso de estructuras estandar y para el caso en que $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ es un enunciado σ, es equivalente a afirmar el enunciado que se obtiene de σ al acotar todos los cuantificadores que aparecen en σ, por M. A este respecto regresaremos en la sección 5, donde definiremos las nociones de relativización y absolutez.

1.5 Definición. Dado un conjunto Γ de enunciados de LTC, σ un enunciado de LTC y $\mathcal{M} = \langle M, \in\rangle$, una estructura para LTC,

1. σ es *verdadero en* $\mathcal{M}$, si
$$\mathcal{M} \models \sigma.$$

2. $\mathcal{M}$ es *un modelo* de Γ ($\mathcal{M} \models \Gamma$) si todo enunciado ϕ de Γ es verdadero en $\mathcal{M}$.

Las nociones conjuntistas de *par, potencia, unión, intersección* y *diferencia*, serán denotadas de la manera usual por la expresiones:

$\{x, y\}$, $P(x)$, $\bigcup x$, $\bigcap x$, y $x \setminus y$,

respectivamente. El producto cartesiano de los conjuntos A y B será denotado como usualmente se acostrubra: $A \times B$, y el conjunto de las funciones de A en B, se denotará con: ${}^{A}B$.

Se debe observar que estas mismas nociones pueden ser extendidas dentro del discurso de las clases propias. En estos casos la notación será la misma. De igual manera, las nociones de *n-ada ordenada, n-producto cartesiano* y *n-potencia*, serán denotadas de la manera usual.

En cuanto a las nociones conjuntistas que refieren a relaciones y funciones, *el dominio, el rango* y *el campo* de una relación serán denotados por las expresiones:

$\mathrm{dom}(R)$, $\mathrm{rango}(R)$, y $\mathrm{campo}(R)$,

respectivamente. Estas expresiones corresponden a su definición formal en el lenguaje de la teoría de los conjuntos.

Por último, aclaramos que las nociones de *función inyectiva* y *función suprayectiva* no tendrán una notación fija, en ocaciones se usará la expresión $f : A \leftrightarrow B$ para expresar el hecho de que f es biyectiva. Los términos *encaje* y *función 1-1* se usarán como sinonimos del término "función inyectiva". A diferencia de la mayoría de los textos de Teoría de Conjuntos, usaremos la expresión: $f[X]$ para referirnos a la imagen del conjunto X bajo f, en lugar de $f''X$. La restricción de una función f a un conjunto X, será denotada por: $f|_X$.

1.2 Ordinales, inducción y recursión

En esta sección, se hace mención al concepto de número ordinal (ya conocido por el lector) sólamente para aclara notación y no dejar definiciones en el vacío. También se enuncian los teoremas de inducción y recursión, teoremas a los que se hará constante referencia en varias demostraciones. Iniciamos con el preambulo necesario para definir estas nociones:

2.1 Definición. Dado un conjunto P y una relación binaria $<$ sobre P,

1. la relación $<$ es *un orden parcial en* P, si para todo $p, q, r \in P$, se tiene que $\neg(p < p)$ y para todo $p, q \in P$, si $p < q$ y $q < r$ entonces $p < r$;

2. la relación $<$ es *un orden lineal en* P u *orden total en* P, si el par $\langle P, < \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado y para todo $p, q \in P$, se tiene que: $(p < q)$ o $(q < p)$ o $(p = q)$;

3. la relación $<$ es *un buen orden en* P, si el par $\langle P, < \rangle$ es un conjunto linealmente ordenado y para todo $X \subseteq P$, si X no es vacio, entonces $(\exists a \in X)(\forall x \in X)[(a < x) \vee (a \approx x)]$.

Se dice que una función $f : P \longrightarrow Q$, donde $\langle P, <_P \rangle$ y $\langle Q, <_Q \rangle$ son ordenes parciales, *preserva el orden*, si para todo $x, y \in P$, se tiene que

$$x <_P y \;\;\Leftrightarrow\;\; f(x) <_Q f(y).$$

Cuando además los ordenes $<_P$ y $<_Q$ son lineales, a una función con la propiedad descrita arriba, se le llama *creciente*. Así, a una función f entre ordenes parciales, se le llama *isomorfismo*, si f es biyectiva y f, además, *preserva el orden*. En tal caso, se dice que los conjuntos son *isomorfos*.

Para la definición de número ordinal, se requiere de la noción de conjunto *transitivo*: un conjunto T es transitivo, si y sólo si

$$\forall x(x \in T \rightarrow x \subseteq T).$$

2.2 Definición. Un *número ordinal* es un conjunto x que es transitivo y bien ordenado bajo la relación de pertenencia restringida a x $(\in |_x)$.

Se usará indistintamente la expresión $\alpha < \beta$ para referirse a $\alpha \in \beta$. Es decir, la relación de buen orden $\in$ (en ordinales) se sustituirá, en ocaciones, por $<$.

Observe que la propiedad de "ser ordinal" puede ser expresada en el lenguaje de la teoría de los conjuntos por la fórmula $\mathrm{On}(x)$ definida por:

$$\forall y \forall z(y \in x \wedge z \in y \rightarrow z \in x) \ldots$$
$$\ldots \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow (y = z \vee y \in z \vee z \in y)).$$

La primera linea indica que x es transitivo y la seguna indica que x está bien ordenado bajo la relación de pertenencia (restringida a x).

Así, la colección ON formada por todos los números ordinales, corresponde a:

$$\mathrm{ON} = \{\alpha | \mathrm{On}(\alpha)\}.$$

Esta clase resulta ser una clase propia, pues de hecho, la relación $<$ resulta ser un buen orden para ON y la misma clase ON es transitiva.

Si α es un conjunto, se define el conjunto *sucesor de* α ($S(\alpha)$ o $\alpha + 1$), como el conjunto definido por: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. En el caso en que α sea un ordinal, también lo es $S(\alpha)$ y más aún, $\alpha < S(\alpha)$. En caso de que α no sea un ordinal sucesor, se dice que α es un *ordinal límite.* Las fórmulas suc(x) y lim(x), escritas a continuación, definen las nociones de "ser ordinal sucesor" y "ser ordinal límite", respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathrm{suc}(x) &\equiv \mathrm{On}(x) \wedge (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \in y \vee z = y). \\ \lim(x) &\equiv \mathrm{On}(x) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z) \end{aligned}$$

Ahora, si A es un conjunto de ordinales, se define *el supremo de A* (sup(A)), como la unión de A, es decir: $\sup(A) = \bigcup A$. De igual manera, si A es una clase no vacía de ordinales, se define el *ínfimo de A* (inf(A)) como la intersección ($\bigcap A$) de A. Más aún, si A es un conjunto no vacío de ordinales, entonces el conjunto sup(A) es un ordinal, y si A es una clase no vacía de ordinales, entonces el conjunto inf(A) es un ordinal que pertenece a la misma clase A.

En términos del siguiente lema (que no demostraremos) se define el *tipo de orden* de un conjunto bien ordenado X (to(X)), como aquel ordinal al que es isomorfo:

2.1 Lema. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.* ||

Consideraremos al ordinal $\emptyset$ como un ordinal límite. El axioma de infinito implica indirectamente la existencia de un primer ordinal límite distinto de $\emptyset$. Se le llama ω a dicho ordinal, y a los ordinales menores que ω se les llama *ordinales finitos* o *números naturales.*

A continuación enunciamos los teoremas de Inducción y Recursión transfinita. Su demostración quedará referida a la bibliografía correspondiente.

2.1 Teorema.(Inducción en ON).
Sea $C \subseteq$ ON *una subclase de* ON *tal que*

1. $\emptyset \in C$;

2. $\alpha \in C \Rightarrow (\alpha + 1) \in C$;

3. $\lim(\alpha) \wedge (\forall \beta \in \alpha)(\beta \in C) \rightarrow (\alpha \in C)$.

Bajo estas hipótesis, se tiene que $C =$ ON. ||

2.2 Teorema.(Recursión en ON).
Sea $F : V \to V$ un funcional. Existe un único funcional $G : \mathrm{ON} \to V$ tal que para todo ordinal α, se tiene que

$$G(\alpha) = F(G|_{\alpha}). \quad \|$$

Constantemente se hará referencia a estos teoremas, ya sea para demostrar que la clase ON satisface cierta propiedad, ya sea para definir "por inducción" un funcional sobre ON. En este último caso se hace uso del teorema 2.2 para asegurar la existencia de la definición "recursiva" de un funcional que refiera a la clase ON.

2.3 Definición. Dado un conjunto x, se define *la cerradura transitiva de x* ($\mathrm{ct}(x)$) por recursión sobre ω, de la siguiente manera:

i) $A_0 = x$;
ii) $A_{n+1} = \bigcup A_n$;
iii) $\mathrm{ct}(x) = \bigcup\{A_n | n \in \omega\}$.

Es haciendo uso de los teoremas anteriores, que definiremos las operaciones de suma, producto y exponenciación para ordinales:

2.4 Definición. (Por inducción).
Sean α y β números ordinales.

1. Se define la suma $\alpha + \beta$, de la siguiente manera:
   (a) $\alpha + 0 = \alpha$;
   (b) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$;
   (c) $\alpha + \delta = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha + \beta$, cuando $\lim(\beta)$.
2. el producto $\alpha \cdot \beta$ se define recursivamente, de la siguiente manera,
   (a) $\alpha \cdot 0 = 0$;
   (b) $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \beta$;
   (c) $\alpha \cdot \delta = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha \cdot \beta$, cuando $\lim(\delta)$.
3. la exponencición α^{β} se define recursivamente, de la siguiente manera,
   (a) $\alpha^0 = 1$;
   (b) $\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha$;
   (c) $\alpha^{\delta} = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha^{\beta}$, cuando $\lim(\delta)$.

Se debe observar que las operaciones de suma y producto ordinal no son conmutativas.

A continuación, enunciamos unas generalizaciones de los teoremas anteriores. En primer lugar, los teoremas de "Demostración por $\in$-inducción" y "Definición por $\in$-inducción":

2.3 Teorema. *Sea A una clase transitiva, $C \subseteq A$ una subclase de A y F un funcional definido en V.*

1. (Demostración por $\in$-inducción). *Bajo las siguientes hipótesis:*

   (a) $\emptyset \in C$;

   (b) $(\forall x \in A)((\forall z \in x)(z \in C)) \to (x \in C)$,

   se concluye que $C = A$.

2. (Definición por $\in$-inducción). *Existe un funcional G definido en A, tal que*

$$G(x) = F(G|_x).$$

Y más aún, dicho funcional es el único con esa característica. ||

Para definir otra extensión del teorema 2.2, requerimos de las siguientes definiciones:

2.5 Definición. Sea A una clase y R un relacional binario en A:

1. Se dice que R es *bien fundado en A*, si

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \to (\exists y \in X)(\forall z \in X)\neg R(z, y)].$$

2. Se dice que R es *limitado por la izquierda en A*, si existe $x \in A$ tal que la clase

$$\mathrm{seg}_{(A,R)}(x) = \{y | R(y, x)\}$$

   es un conjunto.

3. Se dice que R es *extensional en A*, si

$$(\forall x, y \in A)[(\forall z \in A)(R(z, x) \leftrightarrow R(z, y)) \to x = y].$$

2.4 Teorema. (Esquema General de Recursión).
Sea A una clase transitiva y R un relacional bien fundado en A, que además

sea limitado por la izquiera. Si F es un funcional definido en $A \times V$, entonces existe un único funcional $G : A \to V$ tal que:

$$(\forall x \in A)[G(x) = F(x, G|_{\mathrm{seg}_{(A,R)}(x)})]. \quad \|$$

Por último, definimos la noción de Jerarquía acumulativa y en particular la jerarquía de los conjuntos bien fundados.

2.6 Definición. Una sucesión de conjuntos $\langle W_\alpha | \alpha \in \mathrm{ON}\rangle$ definida en toda la clase ON es una jerarquía acumulativa, si

1. $(\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON})(\alpha < \beta \to W_\alpha \subseteq W_\beta)$;

2. $(\forall \delta \in \mathrm{ON})(\lim(\delta) \to W_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} W_\alpha)$.

En particular, se define (por recursión sobre ON) la jerarquía acumulativa de los *conjuntos bien fundados* $\langle V_\alpha | \alpha \in \mathrm{ON}\rangle$, de la siguiente manera:

1. $V_0 = \emptyset$;

2. $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$;

3. para δ límite, se define $V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$.

Observe que en realidad, ésta es una jerarquía acumulativa. Ahora, afirmar que $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} V_\alpha$ es justamente el universo de los conjuntos, es decir, que:

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} V_\alpha,$$

es equivalente a afirmar el axioma de regularidad. Es por esto que en ZFE se puede demostrar dicha igualdad.

Se define el *rango* de un conjunto x, como el mínimo ordinal α tal que

$$x \in V_{\alpha+1}$$

En general, para un jerarquía comulativa cualquiera $W = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} W_\alpha$, para $x \in W$ se define el $W - rango$ de x, como el mínimo ordinal α, tal que $x \in W_{\alpha+1}$.

1.3 Cardinales y otros conjuntos

Para esta sección, se ha reservado la definición de número cardinal, así como la definición de sus operaciones, y los resultados básicos que le refieren. Es de particular importancia poner atención en aquellos resultados que garantizan la existencia de ciertos conjuntos (fundamentales para el desarrollo de la parte final de este texto) llamados *conjuntos cerrados no acotados* y *conjuntos estacionarios.*

3.1 Definición. Se dice que un ordinal α es un *número cardinal*, si α no es biyectable con ningún ordinal menor que él.

De esta definición se desprende rapidamente, el hecho de que los números naturales y ω mismo, son números cardinales. Aquellos cardinales mayores que ω reciben el nombre de *cardinales no numerables.*

La *cardinalidad* de un conjunto X (denotada por $|X|$) se define como aquel cardinal con el que X es biyectable. Claramente, si κ es un cardinal, entonces $|\kappa| = \kappa$.

La clase CARD de los cardinales, es de nuevo una clase propia, que además es bien ordenada bajo la pertenencia. Así, dado un cardinal κ, se define el cardinal *sucesor de* κ (κ^+), como el mínimo cardinal mayor que κ. A los cardinales infinitos, se les distingue entre cardinales límite y cardinales sucesor, los sucesor son aquellos de la forma κ^+ y los límites, los restantes. Se debe observar que si X es un conjunto de cardinales, entonces el conjunto $\sup X$ es de nuevo un cardinal.

A continuación damos la enumeración (inductiva) canónica $\langle \aleph_\alpha | \alpha \in \mathrm{ON}\rangle$ de los cardinales infinitos:

1. $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;

2. $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$;

3. $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta | \beta < \alpha\}$, si $\lim(\alpha)$.

Se acostumbra usar el término $\aleph_\alpha$ cuando se refiere al cardinal, y se usa el término ω_α para referirse al tipo de orden. En general no debe causar mucha confusión el uso indistinto de estos términos cuando el contexto lo puede aclarar. Observe que un cardinal $\aleph_\alpha$ es sucesor, si y sólo si su subíndice (α) lo es.

Las operaciones aritméticas entre cardinales se definen de la siguiente manera:

3.2 Definición. Si, κ y λ son cardinales, entonces se define:

1. $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$;
2. $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$;
3. $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

A diferencia de las operaciones suma y producto entre ordinales, las operaciones de suma y producto para cardinales, sí son conmutativas, además de ser asociativas y distributivas. En relación a la definición 2.3, definimos un conjunto que se usará en el último capítulo:

3.3 Definición. Dado un cardinal infinito κ, *se define el conjunto de los conjuntos hereditariamente de cardinal menor que* κ, H_κ, de la siguiente manera:

$$H_\kappa = \{x|\ |\mathrm{ct}(x)| < \kappa\}.$$

A continuación, definimos algunas de las nociones fundamentales referente a los cardinales y que aparecera constantemente en el presente texto:

3.4 Definición. Dados dos ordinales límite γ y α, y A un subconjunto de α:

1. A es *no acotado en* α, si $\bigcup A = \alpha$;
2. si $\gamma < \alpha$, entonces γ es *un punto límite de* A, siempre que $\gamma \neq \emptyset$ y el conjunto $A \cap \gamma$ es no acotado en γ;
3. A es *cerrado en* α, si A tiene a todos sus puntos límite;
4. una función $f : \gamma \to \alpha$ es *cofinal en* α, si f preserva el orden y el rango de la función es un subconjunto (de α) no acotado en α.
5. *la cofinalidad de* α, es el mínimo ordinal γ tal que existe una función cofinal de γ en α. Este ordinal siempre existe y se denota por $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Observe que siempre que α sea un cardinal, entonces $\mathrm{cf}(\alpha)$ también lo es. En general, la noción de cofinalidad se restringe a los cardinales. En tal caso, se dice que un cardinal κ es *regular*, si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, y se dice que κ es *singular, si* $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

A continuación, definimos los conceptos de *conjunto cerrado no acotado* y de *conjunto estacionario*, con los que se trabajará en el capítulo 3. También, en esta última parte de la presente sección, establecemos algunos resultados básicos referentes a estos conceptos.

3.5 Definición. Sea κ un cardinal regular no numerable, y sea A un subconjunto de κ, se dice que A es un *conjunto cerrado no acotado de* κ (c.n.a. de κ) si A es cerrado en κ y no acotado en κ.

Los siguientes resultados acerca de los conjuntos c.n.a. será referidos en secciones posteriores.

3.1 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable, sea $\gamma < \kappa$, y sea $\{C_\nu | \nu < \gamma\}$ una familia de c.n.a.'s de κ. El conjunto*

$$C = \bigcap_{\nu<\gamma} C_\nu$$

es un c.n.a. de κ.

Demostración:
El hecho de que C es cerrado es casi directo, pues si α es un punto límite de C, entonces α es un punto límite de C_ν para cada $\nu < \gamma$.

Para demostrar que C es no acotado en κ, considere la familia de funciones $\{f_\nu : \kappa \longrightarrow \kappa | \nu < \gamma\}$, donde para cada $\nu < \gamma$, f_ν está definida por:

$$f_\nu(\beta) = \min\{\lambda \in C_\nu | \lambda > \beta\}.$$

Luego, considere la función $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ definida por:

$$g(\beta) = \bigcup\{f_\nu(\beta) | \nu \in \gamma\}.$$

(Observe que $(\forall\beta < \kappa)(\beta < g(\beta) < \kappa)$.) Por último, para cada $\beta < \kappa$, considere la sucesión de ordinales $\langle\alpha_n(\beta) | n \in \omega\rangle$, definida por recursión de la siguiente manera:

$$\alpha_0(\beta) = \beta; \;\; \alpha_{n+1}(\beta) = g(\alpha_n(\beta)).$$

Y definimos

$$\alpha(\beta) = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n(\beta).$$

Claramente se tiene que para cada $\beta < \kappa$, $\beta < \alpha(\beta) < \kappa$, y para cada $\nu < \gamma$:

$$\bigcup(C_\nu \cap \alpha(\beta)) = \alpha(\beta),$$

pues si $\lambda < \alpha(\beta)$, entonces $\lambda < \alpha_n(\beta)$ para algún $n \in \omega$, por lo tanto $\lambda < \alpha_{n+1}(\beta) = g(\alpha_n(\beta))$, pero para cada $\nu < \gamma$, se tiene que

$$\alpha_n(\beta) < f_\nu(\alpha_n(\beta)) \leq g(\alpha_n(\beta)) = \alpha_{n+1}(\beta) < \alpha(\beta),$$

así, $\lambda < \alpha_n(\beta) < f_\nu(\alpha_n(\beta)) \in \alpha(\beta)$, y como $f_\nu(\alpha_n(\beta)) \in C_\nu$, se concluye que para toda $\nu < \gamma$, $C_\nu \cap \alpha(\beta)$ es no acotado en $\alpha(\beta)$. Luego, como cada C_ν es cerrado en κ, se tiene que $\alpha(\beta) \in C_\nu$ (para toda $\nu < \gamma$) y por lo tanto que $\alpha(\beta) \in C$ para toda $\beta < \kappa$, concluyendo así, que (como $\beta < \alpha(\beta)$) C es no acotado en κ. ||

En relación a este lema, la intersección de κ subconjuntos c.n.a. de κ no tiene porque ser un c.n.a., pero lo que sí se puede asegurar es que la *intersección diagonal* de κ subconjuntos c.n.a. de κ es un c.n.a. Dada una familia $\{C_\nu | \nu < \kappa\}$ de subconjuntos c.n.a. de κ, se define la *intersección diagonal* de dicha familia, como el conjunto:

$$C = \{\alpha \in \kappa | \alpha \in \bigcap_{\nu<\alpha} C_\nu\}.$$

3.2 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si $\{C_\nu | \nu < \kappa\}$ es una familia de c.n.a. de κ, entonces la intersección diagonal C de dicha familia es un c.n.a. de κ.*

Demostración:
C es no acotado: Sea $\beta < \kappa$, dado que $\bigcap_{\nu<\beta} C_\nu$ es un c.n.a. de κ (lema anterior), se tiene que existe $\xi < \kappa$ tal que $\xi \in \bigcap_{\nu<\beta} C_\nu$ y $\beta \leq \xi$. Definimos $\alpha_0 = \xi$ y para cada $n \in \omega$, definimos α_{n+1} como aquel ordinal que existe en el c.n.a. $\bigcap_{\nu<\alpha_n} C_\nu$ y que es mayor o igual que α_n. Por último, se define $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$. Claramente $\alpha \in C$ y $\beta \leq \alpha$.

C es cerrado: Sea α un punto límite de C, queremos demostrar que $\alpha \in C_\nu$, para todo $\nu < \alpha$. Sea $\nu < \alpha$, como el conjunto $X = \{\xi \in C | \nu < \xi < \alpha\}$ está contenido en C_ν y $\bigcup(X \cap \alpha) = \alpha$, el hecho de que C_ν es cerrado, asegura que $\alpha \in C_\nu$. ||

Los siguientes resultados establecen formas de obtener conjuntos no acotados (c.n.a.) en términos de cierto tipo de funciones, las funciones normales:

3.6 Definición. Sea α un ordinal límite y sea $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ una función de α en α.

1. Se dice que f es *continua*, si para todo ordinal límite γ menor que α, se tiene que
$$f(\gamma) = \bigcup_{\beta<\gamma} f(\beta).$$
2. Se dice que f es *normal*, si f es continua y estrictamente creciente $(\forall \beta, \gamma(\beta < \gamma \rightarrow f(\beta) < f(\gamma))$.

3.3 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ una función normal. El conjunto*

$$\{\alpha \in \kappa | f(\alpha) = \alpha\}$$

es un c.n.a. de κ.

Demostración:
Sea $A = \{\alpha \in \kappa | f(\alpha) = \alpha\}$ y sea $\gamma < \kappa$ un punto límite de A, así,

$$f(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A\cap\gamma} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A\cap\gamma} \alpha = \gamma.$$

Por lo tanto $\gamma \in A$, y queda demostrado el hecho de que A es cerrado en κ.

Para demostrar que A es no acotado, tome $\gamma < \kappa$ arbitrario, considere la siguiente sucesión definida por recursión:

$$\alpha_0 = \gamma; \ \ \alpha_{n+1} = f(\alpha_n),$$

y el ordinal $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$. Ahora, dado que f es creciente, $\alpha \geq \gamma$. Pero además, la continuidad de f implica que:

$$f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta) = \bigcup_{n\in\omega} f(\alpha_n) = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_{n+1} = \alpha,$$

es decir, hemos encontrado $\alpha \in A$ tal que $\gamma \leq \alpha$. $\|$

También hay otras formas de obtener conjuntos c.n.a en términos de funciones:

3.4 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable, y sea $h : \kappa \longrightarrow \kappa$. El conjunto A definido por*

$$A = \{\alpha \in \kappa | (\forall\beta < \alpha)(h(\beta) < \alpha)\},$$

es un c.n.a. de κ.

Demostración:
Sea γ un punto límite de A. Como $\bigcup(A \cap \gamma) = \gamma$, para cada $\nu < \gamma$, existe un ordinal $\lambda_\nu \in A \cap \gamma$ tal que $\nu < \lambda_\nu$, así, $h(\nu) < \lambda_\nu < \gamma$ para toda $\nu < \gamma$. Lo cual implica que A es cerrado en κ.

Para demostrar que A es no acotado en κ, considere $\gamma \in \kappa$ arbitrario, y la siguiente sucesión:

$$\alpha_0 = \gamma; \quad \alpha_{n+1} = \min\{\lambda \in \kappa | h[\alpha_n] \subseteq \lambda\}.$$

Si $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$, entonces $\alpha \geq \gamma$ y $\alpha \in A$. $\|$

Un resultado que se usará mucho en el capítulo 3, es el siguiente:

3.5 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si X es un subconjunto no acotado de κ, entonces el conjunto formado por todos los puntos límite de X es un c.n.a. de κ.*

Demostración:
Sea A el conjunto de puntos límite de X. El conjunto A es no acotado en κ: Sea $\gamma < \kappa$. Por recursión sobre ω definimos: $\beta_0 = \gamma$, una vez definido β_n, sabemos que existe $\alpha \in X$ tal que $\beta_n < \alpha$, y definimos β_{n+1} como dicha α.

Ahora, sea $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$, y puesto que

$$\{\beta_n | n \in \omega \setminus \{\emptyset\}\} \subseteq X \cap \beta,$$

entonces $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n \leq \bigcup(X \cap \beta) \leq \beta$, es decir, $\beta = \bigcup(X \cap \beta)$, lo cual implica que $\beta \in A$, pero como $\beta > \gamma$, hemos demostrado que A es no acotado en κ.

El conjunto A es cerrado en κ:
Sea $\gamma < \kappa$ un punto límite de A. Demostraremos que $\gamma \in A$, es decir, que γ es un punto límite de X. Sea $\beta \in \gamma$, buscamos $\nu \in (X \cap \gamma)$ tal que $\beta < \nu$. Por la elección de γ, sabemos que existe $\lambda \in A$ tal que $\beta < \lambda < \gamma$, así, $\bigcup(X \cap \lambda) = \lambda$ y $(\beta < \lambda < \gamma)$. Luego, existe $\nu \in (X \cap \lambda)$ tal que $\beta \leq \nu$. Pero como $X \cap \lambda \subseteq X \cap \gamma$, se tiene que dicho $\nu \in (X \cap \gamma)$ y $\beta \leq \nu$. Concluyendo así, que γ es un punto límite de X, es decir, que $\gamma \in A$ siempre que γ sea un punto límite de A. $\|$

Otro tipo de conjuntos importantes, que está implícito en el principio diamante, es el de conjunto estacionario:

3.7 Definición. Sea κ un cardinal regular no numerable. Se dice que un conjunto $E \subseteq \kappa$ no acotado es *estacionario en κ*, si la intersección de E con culaquier c.n.a. de κ es no vacía.

3.6 Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable, sea E un conjunto estacionario en κ y sea C un c.n.a de κ. El conjunto intersección $E \cap C$ es estacionario en κ.*

Demostración:
Si D es un c.n.a cualquiera de κ, entonces sabemos (por el lema 3.1) que $C \cap D$ es de nuevo un c.n.a de κ, así, $E \cap (C \cap D) \neq \emptyset$, es decir, $(E \cap C) \cap D \neq \emptyset$. $\|$

El importante Teorema de Fodor (que a continuación se presenta) establece una estrecha relación entre las nociones de conjunto estacionario y de *función regresiva:*

3.8 Definición. Sea γ un ordinal, sea $E \subseteq \gamma$ y sea $f : E \longrightarrow \gamma$. Se dice que la función f es regresiva si para todo $\alpha \in E$ distinto de cero, se tiene que $f(\alpha) < \alpha$.

3.1 Teorema. (Teorema de Fodor). *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $E \subseteq \kappa$ estacionario en κ. Si $f : E \longrightarrow \kappa$ es regresiva, entonces existe $\beta \in E$ tal que el conjunto*

$$\{\alpha \in E | f(\alpha) = \beta\},$$

es estacionario en κ.

Demostración:
Supóngase, por el contrario, que para cada $\beta \in \kappa$, el conjunto

$$\{\alpha \in E | f(\alpha) = \beta\},$$

no es estacionario en κ. Así, para cada $\beta \in \kappa$, existe C_β un conjunto c.n.a. de κ, tal que

$$(\forall \alpha \in C_\beta \cap E)(f(\alpha) \neq \beta).$$

Ahora, sea C la intersección diagonal de la familia $\{C_\beta | \beta < \kappa\}$. Según el lema 3.2, el conjunto C es un c.n.a. de κ, así, como E es estacionario en κ, debe existir un ordinal α, distinto de cero, tal que $\alpha \in C \cap E$. Por lo tanto, según la definición de C (y por el lema 3.6), se tiene que $\alpha \in C_\beta$ para toda $\beta < \alpha$, lo cual implica que $f(\alpha) \geq \alpha$. Pero como esto último contradice el hecho de que f es regresiva, hemos terminado la demostración. ||.

Por último, se enuncia el teorema de Ulam que refiere al concepto de conjunto estacionario y que será usado en un par de ocaciones. No daremos su demostracion, pero puede ser encontrada en [Jech 1978], [Devlin 84] y [Kunen 80].

3.2 Teorema. (Ulam). *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $E \subseteq \kappa$ estacionario en κ. Existe una familia $A = \{E_\nu | \nu < \kappa\}$ de subconjuntos estacionarios en κ tal que los elementos de A son mutuamente ajenos y la unión de A es E.*

1.4 Teoría de modelos

En la sección 1.1 (definición 1.5) se definió la noción de verdad para enunciados de LTC respecto a una estructura estándar. También se observó que afirmar la verdad de un enunciado σ respecto a una estructura $\langle M, \in\rangle$ es equivalente a afirmar el enunciado que se obtiene al acotar todos los cuantificadores de σ por la clase M. A continuación definimos la noción de relativización directamente ligada con este hecho.

4.1 Definición. Sea M una clase. Para cualquier fórmula ϕ del lenguaje LTC, se define ϕ^M, la *relativización de ϕ a M*, por inducción sobre la construcción de ϕ, de la siguiente manera:

1. $(x \approx y)^M$ como $(x \approx y)$;
2. $(x \in y)^M$ como $(x \in y)$;
3. $(\phi \wedge \psi)^M$ como $\phi^M \wedge \psi^M$;
4. $(\neg\phi)^M$ como $\neg(\phi)^M$;
5. $(\exists x\phi)^M$ como $\exists x(x \in M \wedge \phi^M)$.

En este último caso se acostumbra escribir $(\exists x \in M)\phi^M$, de igual manera, para el caso del cuantificador universal, se define $(\forall x\phi)^M$ como:

$$\forall x(x \in M \rightarrow \phi^M)$$

y se denota por $(\forall x \in M)\phi^M$.

De esta manera, la noción de verdad, de un enunciado σ con respecto a una estructura M, se puede expresar de forma tal que "σ es verdadero en M", si y sólo si se puede afirmar el enunciado ϕ^M. Bajo este mismo espíritu, se extiene la idea de modelo diciendo que "M es modelo" de un conjunto de enunciados Γ , si todo enunciado de Γ es "verdadero en M". Observe que en el primer caso, lo que se pide (en la definición) es afirmar el enunciado σ^M, mientras que en el segundo se pide "demostrar" (a partir de la teoría en cuestión) cada uno de los enunciados relativizados de Γ. Más adelante, cuando se defina la noción de modelo interno, y su relación con las pruebas de consistencia relativa, se tendrá una mayor seguridad con respecto a esta definición de la noción de verdad. Por el momento, pasaremos a definir la indispensable noción de absolutez:

4.2 Definición. Sea $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ [1] una fórmula de LTC y sean M, N clases tales que $M \subseteq N$.

1. Se dice que ϕ es *U-absoluta para* M, N si
$$(\forall \vec{x} \in M)(\phi^M(\vec{x}) \rightarrow \phi^N(\vec{x}));$$

2. se dice que ϕ es ***D-absoluta para*** M, N si
$$(\forall \vec{x} \in M)(\phi^N(\vec{x}) \rightarrow \phi^M(\vec{x}));$$

3. se dice que ϕ es ***absoluta para*** M, N si
$$(\forall \vec{x} \in M)(\phi^N(\vec{x}) \leftrightarrow \phi^M(\vec{x})).$$

4. En el caso en que $N = V$, se dice que ϕ es ***absoluta para*** M si
$$(\forall \vec{x} \in M)(\phi(\vec{x}) \leftrightarrow \phi^M(\vec{x})).$$

Es una observación directa, el advertir que cualquier fórmula primitiva es absoluta para cualquier clase M. Para afirmar la absolutez de otras fórmulas, es necesario asegurar la transitividad de M, y en otros casos es necesario estudiar la estructura lógica de las fórmulas, con respecto a esto último, se dedica la sección 5 del presente capítulo.

De la definición anterior es trivial que se puede afirmar que las fórmulas de la forma $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, y cualquier fórmula sin cuantificadores, son M, N absolutas, siempre y cuando ϕ y ψ lo sean. También se debe advertir que en caso de que M y N sean transitivas, y ϕ sea absoluta para M, N, la fórmula $(\exists x \in y)\phi$ también lo es.

Como último resultado preliminar concerniente al concepto de absolutez, enunciamos el siguiente lema, cuya demostración es directa:

4.1 Lema. *Sean M, N clases tales que $M \subseteq N$, sea Γ un conjunto de enunciados de LTC, y sean ϕ, ψ fórmulas de LTC, tales que M, N son modelos de Γ y tales que en Γ se demuestra:*
$$\forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})).$$

[1] Con esta notación entenderemos que todas las variables libres de ϕ están entre $x_0, \ldots, x_n$. En adelante se abusará de la notación escribiendo $\phi(\vec{x})$ en lugar de $\phi(x_0, \ldots, x_n)$, pensando a $\vec{x}$ como un vector de n-variables.

Bajo estas hipótesis, se tiene que ϕ es absoluta para M, N si y sólo si ψ lo es. ‖

A continuación presentamos cuatro teoremas fundamentales de la teoría de modelos, dos *Teoremas del isomorfismo*, el *Teorema del Colapso*, el *Principio de Reflexión* y el *Lema fundamental de modelos internos.*

4.3 Definición. Dadas dos estructuras $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$,

1. las estructuras son isomorfas ($\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$), si existe una biyección:

$$\pi : M_1 \longleftrightarrow M_2,$$

tal que para todo $x, y \in M_1$, se tiene que $R(x, y)$ si y sólo si: $R(\pi(x), \pi(y))$;

2. $\mathcal{M}_1$ es una *subsetructura de* $\mathcal{M}_2$, si $M_1 \subseteq M_2$ y $R_1 = R_2 \cap M_1 \times M_1$;

3. $\mathcal{M}_1$ es una *subsetructura elemental de* $\mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$), si $\mathcal{M}_1$ es una subsetructura de $\mathcal{M}_2$ y para cualquier fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ y cualquier $a_0, \ldots, a_n \in M_1$ se tiene que

$$\mathcal{M}_1 \models \phi[a_0, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \phi[a_0, \ldots, a_n].$$

4.1 Teorema. (Teorema 1 del isomorfismo)
Si $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \in \rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, \in \rangle$ son dos estructuras (estandar) isomorfas por π (es decir, $\pi : \mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$), entonces para cualquier fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ y para cualquier $a_0, \ldots, a_n \in M_1$, se tiene que:

$$\mathcal{M}_1 \models \phi[a_0, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \phi[\pi(a_0), \ldots, \pi(a_n)]. \quad \|$$

La demostración de este teorema es directa (por inducción sobre la construcción de ϕ) haciendo uso de la definición de isomorfismo.

4.2 Teorema. (Teorema 2 del isomorfismo)
Si $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \in \rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, \in \rangle$ son dos estructuras (estandar) transitivas e isomorfas por π, entonces $M_1 = M_2$ y $\pi = \mathrm{id}|_{M_1}$.

Demostración: (Por $\in$-inducción)
Sea $x \in M_1$ y supóngase que $(\forall z \in x)(\pi(z) = z)$. Buscamos demostrar que $\pi(x) = x$. Sea pues $z \in x$, luego, se tiene que $z = \pi(z) \in \pi(x)$ y por lo tanto $x \subseteq \pi(x)$.

Ahora, sea $t \in \pi(x)$, así (por la transitividad de M_2) se tiene que $t \in M_2$ y por lo tanto, existe $z \in M_1$ tal que $\pi(z) = t$, es decir, $\pi(z) \in \pi(x)$. Luego (dado que π es un isomorfismo), se tiene que $z \in x$, y por lo tanto, dado que $t = \pi(z) = z \in x$ (hipótesis inductiva), se concluye que $\pi(x) = x$. Así, $\pi = \mathrm{id}|_{M_1}$ y $M_1 = M_2$. ||

4.3 Teorema. (Teorema del Colapso)
Sea A una clase, y R un relacional bien fundado, limitado por la izquierda y extensional en A. Existe una clase transitiva M y un único isomorfismo

$$\pi : \langle A, R\rangle \cong \langle M \in\rangle,$$

y más aún, si $B \subseteq A$ es una subclase transitiva de A, entonces $\pi|_B = \mathrm{id}|_B$.

Demostración:
En virtud del teorema general de recursión aplicado a la estructura $\langle A, R\rangle$ se sabe que existe un funcional $\pi : A \to \pi[A]$, tal que para toda $x \in A$

$$\pi(x) = \pi|_{\mathrm{seg}_{(A,R)}(x)} = \{\pi(y)|(y \in A) \wedge R(y,x)\}.$$

Sea $M = \pi[A]$, es directo de la definición de π que M es una clase transitiva. Para demostrar que π es un isomorfismo de estructuras demostraremos, en primer lugar, que π es 1-1. Suponiendo que no fuera así, se podría definir $x \in A$ de manera que:

$$x = R - \min\{x \in A|(\exists y \in A)(y \neq x \wedge \pi(x) = \pi(y)\},$$

así, si $y \in A$ es tal que $(y \neq x)$ y $\pi(x) = \pi(y)$, como R es extensional, se tendría que

$$\{z \in A|R(z,x)\} \neq \{z \in A|R(z,y)\}$$

y por lo tanto se podría suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $u \in A$ tal que $R(u,x)$ y $\neg R(u,y)$. Si se define $t = \pi(u)$, se tendría que $\pi(u) \in \pi(x) = \pi(y)$, y por lo tanto que $\pi(u) = \pi(w)$ para algún $w \in A$ tal que $R(w,y)$. De donde se concluiría que $u \neq w$ y $R(w,x)$, contradiciendo así la minimalidad de x. El hecho de que la biyección π es en realidad un isomorfismo, se sigue directamente de la definición de π. La unicidad de este isomorfismo se obtiene aplicando el teorema 2 del isomorfismo.

Por último, si $B \subseteq A$ es una subclase transitiva de A, entonces se tiene, en primer lugar, que $x \cap A = x$ para todo $x \in B$, lo cual implica que $\pi(x) = \pi[x]$ para toda $x \in B$. De aquí que $\pi(x) = \{\pi(z)|z \in x\}$. Luego, haciendo uso de la hipótesis de $\in$-inducción: $[(\forall z \in x)(\pi(z) = z)]$, se tendría que

$\pi(x) = \{z|z \in x\} = x$. Concluyendo así (por $\in$-inducción) que $\pi|_B = \mathrm{id}|_B$.
$\|$

4.4 Teorema. (Principio Generalizado de reflexión)
Sea $\langle W_\alpha|\alpha \in \mathrm{ON}\rangle$ una jerarquía acumulativa de conjuntos transitivos definible en LTC, es decir, tal que existe una fórmula $\psi(x,\alpha)$ con la propiedad de que: $W_\alpha = \{x|\psi(x,\alpha)\}$. Si

$$W = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} W_\alpha$$

y $\phi(x_0,\dots,x_n)$ es una fórmula de LTC, entonces

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha(\exists\beta > \alpha)[\lim(\beta) \wedge (\forall\overrightarrow{x} \in W_\beta)(\phi^W(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \phi^{W_\beta}(\overrightarrow{x}))].$$

Demostración:
Sea $\phi(\overrightarrow{x})$ una fórmula, y sea $\phi_0(\overrightarrow{x_0}),\dots,\phi_n(\overrightarrow{x_n})$ la sucesión de construcción de ϕ. Para cada $i = 1,\dots,n$ se define, por casos, la función $f_i(\overrightarrow{x_i})$ de tal manera que $f_i(\overrightarrow{x_i}) = 0$ si la fórmula $\phi_i(\overrightarrow{x_i})$ es primitiva, o negación de una fórmula anterior (de dicha sucesión) o conjunción de fórmulas anteriores. En caso de que $\phi_i(\overrightarrow{x_i})$ sea de la forma $\exists y\phi_j(y,\overrightarrow{x_i})$ (con $j < i$), se define

$$f_i(\overrightarrow{x_i}) = \min\{\gamma|(\exists y \in W)\phi_j^W(y,\overrightarrow{x_i}) \rightarrow (\exists y \in W_\gamma)\phi_j^{W_\gamma}(y,\overrightarrow{x_i})\}.$$

Ahora, dado $\alpha \in \mathrm{ON}$, se elije un ordinal límite β, tal que $\alpha < \beta$ y tal que para cada $i = 1,\dots n$, se tenga que

$$(\forall\overrightarrow{x_i} \in W_\beta)(f_i(\overrightarrow{x_i}) < \beta).$$

Demostraremos, por inducción sobre la construcción de ϕ, que para dicho β, se tiene que:

$$(\forall\overrightarrow{x_i} \in W_\beta)(\phi_i^W(\overrightarrow{x_i}) \leftrightarrow \phi^{W_\beta}(\overrightarrow{x_i})).$$

Para el caso en que ϕ_i sea primitiva, el resultado es trivial. De igual manera, para el caso en que ϕ_i sea una negación o una conjunción la hipótesis de inducción implica trivialmente el resultado. Supondremos, pues, que ϕ_i es de la forma $\exists y\phi_j(y,\overrightarrow{x_i})$ (con $j < i$). Ahora, sea $\overrightarrow{x_i} \in W_\beta$ tal que $\phi_i^W(\overrightarrow{x_i})$, así, se tiene que existe $y \in W$ tal que $\phi_j^W(y,\overrightarrow{x_i})$. Pero como $f_i(\overrightarrow{x_i}) < \beta$ también debe existir $y \in W_\beta$ tal que $\phi_j^W(y,\overrightarrow{x_i})$. Así, al aplicar la hipótesis de inducción se cumple que:

$$(\exists y \in W_\beta)\phi_j^W(y,\overrightarrow{x_i}),$$

que es lo mismo que afirmar $\phi_i^{W_\beta}$.

Ahora supondremos que para el mismo $\overrightarrow{x_i}$ se tiene que $\phi_i^{W_\beta}$, pero la hipótesis de inducción y el hecho de que $W_\beta \subseteq W$ implican directamente que

$$(\exists y \in W)\phi_j^W(y, \overrightarrow{x_i}),$$

es decir, que $\phi_i^W(\overrightarrow{x_i})$. Por lo tanto se ha demostrdo (por inducción sobre la construcción de ϕ) el teorema. $\|$

Corolario 1. (Principio de Reflexión)
Si $\phi(\overrightarrow{x})$ es una fórmula de LTC, entonces el siguiente enunciado:

$$\forall\alpha(\exists\beta > \alpha)[\lim(\beta) \wedge (\forall\overrightarrow{x} \in V_\beta)(\phi(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \phi^{V_\beta}(\overrightarrow{x}))]$$

es un teorema de ZF. $\|$

Para el último teorema de esta sección, se define la noción de modelo interno. Esta idea es fundamental para el desarrollo de las demostraciones de consistencia relativa que se darán en capítulos posteriors. En el siguiente capítulo se definirá un modelo interno, modelo en el cual se centra el trabajo del presente texto.

4.4 Definición. Sea M una clase propia y transitiva, sean T y S teorías de LTC (es decir, un conjunto de enunciados de LTC, posiblemente un subconjunto de axiomas de ZFE). Se dice que $\langle M, \in\rangle$ es un *modelo interno de T según S*, si para cada $\sigma \in T$, se puede afirmar σ^M en S, es decir, si $S \vdash \sigma^M$, para cada $\sigma \in T$.

En particular, estaremos trabajando con un modelo interno de T según ZF, donde T es una extensión de ZF. Bajo la construcción de modelos internos, es decir, la definición en LTC de la clase transitiva que resultará ser dicho modelo interno, subyace un método para obtener resultados de consistencia relativa. El siguiente teorema establece de modo general esta idea.

4.5 Teorema. (Lema fundamental de modelos internos)
Sean Γ y Σ conjuntos de enunciados de LTC, ϕ un enunciado también de LTC, y sea M una clase tal que:

1. $\Gamma \vdash \exists x(x \in M)$;

2. $\Gamma \vdash \sigma^M$, *para todo* $\sigma \in \Sigma$.

Bajo estas hipótesis, se tiene que:

1. *Si* $\Sigma \vdash \phi$, *entonces* $\Gamma \vdash \phi^M$;

2. *Si* Γ *es consistente, entonces* Σ *también lo es.*

Demostración:
1. Sea ϕ un enunciado de LTC tal que $\Sigma \vdash \phi$, y sea $\phi_0, \ldots, \phi_n$ una demostración de ϕ, es decir, $\phi_n = \phi$ y para cada $i = i, \ldots, n$, ϕ_i es un enunciado de Σ, un axioma lógico, o se obtuvo de anteriores aplicando una regla de inferencia. Así, si se considera a la sucesión $\phi_0^M, \ldots, \phi_n^M$ de fórmulas relativizadas, es claro que si $\phi_i \in \Sigma$ o ϕ_i es un axioma lógico, entonces $\Gamma \vdash \phi_i^M$. De igual manera, si ϕ_i se obtuvo a partir de $\phi_0, \ldots, \phi_{i-1}$ aplicando una regla de inferencia, entonces ϕ_i^M se obtiene a partir de $\phi_0^M, \ldots, \phi_{i-1}^M$ aplicando la misma regla. Así, el argumento inductivo garantiza que $\phi_n^M = \phi^M$ es teorema de Γ.
2. Si Σ es inconsistente, entonces existe ϕ un enunciado de LTC tal que en Σ se demuestra $\phi \wedge (\neg\phi)$, luego, aplicando 1., se tiene que en Γ es teorema $(\phi \wedge (\neg\phi))^M$, pero según la definición de relativización, se tiene que:

$$\Gamma \vdash \phi^M \wedge \neg(\phi)^M.$$

Es decir, que Γ es inconsistente. $\|$

Así, según la notación de este teorema, para $\Sigma = \Gamma \cup \{\sigma\}$ (donde σ es algún enunciado de LTC), se tiene que la consistencia de Γ implica la consistencia de $\Gamma \cup \{\sigma\}$, y por lo tanto que $\Gamma \nvdash \neg\sigma$ siempre y cuando Γ sea consistente. Es así, como se relaciónan las nociones de modelo interno y de consistencia relativa.

1.5 La jerarquía de Lévy

En secciones anteriores se ha establecido que para ciertas estructuras, ciertas fórmulas del lenguaje LTC son absolutas, por ejemplo, las fórmulas primitivas de LTC, que son absolutas para las estructuras *estandar*.

La noción de absolutez está relacionada con la estructura lógica de las fórmulas de LTC. A. Lévy dió una clasificación de las fórmulas de LTC en la cual se establece esta relación.

5.1 Definición. (por recursión sobre ω):

1. Una LTC-fórmula es Σ_0 y Π_0 si todos sus cuantificadores son acotados.

2. Una LTC-fórmula Φ es Σ_{n+1} (Π_{n+1}) si es de la forma

$$\exists\overrightarrow{x}\Psi(\overrightarrow{x}) \quad ((\forall\overrightarrow{x}\Psi(\overrightarrow{x}))),$$

donde Ψ es una fórmula Π_n (Σ_n).

Para establecer la conexión entre la clasificación anterior y la noción de absolutez, es necesario definir una contraparte semántica de dicha clasificación.

5.2 Definición. Sea T una subteoría de ZF (que en particular puede ser ZF) y sea Φ una LTC-fórmula.

1. Φ es Σ_n^T (Π_n^T), si existe una LTC-fórmula Ψ en Σ_n (Π_n) tal que

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$$

2. Φ es Δ_n^T si es ambas, Σ_n^T y Π_n^T.

El siguiente teorema relaciona la jerarquía de Lévy con la noción de absolutez.

5.1 Teorema. *Sea* T *una subteoría de* ZF *(posiblemente* ZF*). Sea M una clase transitiva tal que Θ^M para todo axioma Θ de T, y sea Φ una fórmula cualquiera de LTC. Bajo estas hipótesis, se puede afirmar lo siguiente:*

1. Si Φ es Σ_0^T, entonces Φ es absoluta (para M).

2. Si Φ es Σ_1^T, entonces Φ es U-absoluta.

3. Si Φ es Π_1^T, entonces Φ es D-absoluta.

4. Si Φ es Δ_1^T, entonces Φ es absoluta.

Demostración:
1. Supongamos que las variables libres de Φ estan entre las variables de $\overrightarrow{v}$ y sea $\Psi(\overrightarrow{v})$ una fórmula Σ_0 tal que,

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi.$$

Luego, como T es una subteoría de ZF, por generalalización se tiene que

$$T \vdash \forall\overrightarrow{v}(\Phi \leftrightarrow \Psi).$$

Además, como se tiene que Θ^M para todo Θ en T, aplicando la parte (1) el Lema fundamental de modelos internos (teorema 4.5), se tiene que

$$T \vdash (\forall \overrightarrow{v}(\Phi \leftrightarrow \Psi))^M.$$

(Con la notación del teorema 4.5, se aplica a $T = \Gamma = \Sigma$.) Lo que significa que

$$T \vdash (\forall \overrightarrow{v} \in M)(\Phi^M \leftrightarrow \Psi^M).$$

Ahora, para demostrar que

$$(\forall \overrightarrow{v} \in M)(\Phi^M \leftrightarrow \Phi)$$

(es decir, que Φ es absoluta) podremos suponer, sin perdida de generalidad, que Φ es una fórmula Σ_0. Pues del lema 4.1 (aplicado al hecho de que $T \vdash \forall \overrightarrow{v}(\Phi \leftrightarrow \Psi)$) se sigue que Ψ es absoluta si y sólo si Φ lo es.

Continuamos la demostración por inducción sobre la construcción de Φ: si Φ es una fórmula primitiva la demostración es trivial, pues sabemos que las fórmulas primitivas de LTC son absolutas para estructuras estandar. Si Φ es de la forma $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ o de la forma $\neg\Phi_0$ también se sigue trivialmente que Φ es absoluta haciendo uso de la hipotesis de inducción y aplicando la definición de relativización para la negación y la conjunción. Para el caso en que Φ es de la forma $(\exists x \in y)\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v})$ se tiene que $(\Phi(y, \overrightarrow{v}))^M$ es de la forma

$$\exists x \in M(x \in y \wedge (\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}))^M).$$

De aquí que dadas y y $\overrightarrow{v}$ en M, si $(\Phi(y, \overrightarrow{v}))^M$ entonces

$$(\exists x \in y)(\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}))^M.$$

Así, para alguna $x \in y$ se cumple $(\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}))^M$, que por hipótesis de inducción, es equivalente a $\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v})$. Por lo tanto, se tiene

$$(\exists x \in y)\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}),$$

que es equivalente a $\Phi(y, \overrightarrow{v})$. Luego, dadas y y $\overrightarrow{v}$ en M, si $\Phi(y, \overrightarrow{v})$, entonces $(\exists x \in y)\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v})$, así, para algún $x \in y$ se cumple que $\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v})$, pero como M es transitiva, $y \in M$ y $x \in y$ se tiene que $x \in M$. Por lo tanto, haciendo uso de la hipótesis de inducción se concluye que $(\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}))^M$, lo que implica que $(\exists x \in y)(\Phi_0(x, y, \overrightarrow{v}))^M$, que es equivalente a $(\Phi(y, \overrightarrow{v}))^M$.

2. Por el mismo argumento que en la parte (1), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Φ es Σ_1. Sea $\Phi(\overrightarrow{v})$ la fórmula $(\exists \overrightarrow{u})\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

donde Φ_0 es una fórmula Σ_0. Ahora si se supone que para algún $v \in M$, se cumple $(\Phi(\overrightarrow{v}))^M$, se tiene que para algún $\overrightarrow{u} \in M$, $(\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^M$. Luego, aplicando la parte 1 a la fórmula anterior (que es Σ_0), se concluye $\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Por lo tanto, se tiene $(\exists \overrightarrow{u})\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, es decir, $\Phi(\overrightarrow{v})$.

3. De igual manera que antes, supondremos que Φ es Π_1. Sea $\Phi(\overrightarrow{v})$ la fórmula $(\forall \overrightarrow{u})\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ donde Φ_0 es Σ_0. Supongamos que $\Phi(\overrightarrow{v})$ para algún $\overrightarrow{v} \in M$. Entonces en particular se tiene que para todo $\overrightarrow{u} \in M$ se cumple $\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, así, aplicando el resultado (1) a esta fórmula, se concluye $(\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^M$. De lo anterior se sigue $(\forall \overrightarrow{u} \in M)\Phi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^M$, que es equivalente a $\Phi(\overrightarrow{v})^M$.

4. Se deduce de los anteriores. $\|$

A continuación, ofrecemos un catálogo de fórmulas Σ_0

5.2 Teorema. *Las siguientes fórmulas (escritas formalmente en* LTC*) son* Σ_0 *(y por lo tanto absolutas para modelos transitivo:*

(a) $x = y$,	(b) $x \in y$,
(c) $x \subseteq y$,	(d) $y = \{x\}$,
(e) $y = \{x_1, x_2\}$,	(f) $y = \{x_1, ..., x_n\}$,
(g) $y = (x_1, x_2)$,	(h) $y = (x_1, ..., x_n)$,
(i) $y = (x)_i^n$ (para toda $i = 1, ...n$),	(j) $z = x \cap y$,
(k) $z = x \cup y$,	(l) $y = \bigcup x$,
(m) $y = \bigcap x$,	(n) $y = x \setminus z$,
(o) $y = x \cup \{x\}$,	(p) *"x es un par ordenado"*,
(q) *"x es una n-ada"*,	(r) *"x es una relación sobre y"*,
(s) *"x es una función"*,	(t) $y = \mathrm{dom}(x)$,
(u) $y = \mathrm{rango}(x)$,	(v) $y = x(z)$,
(w) $y = x[z]$,	(x) $y = x|z$,
(y) $y = x \times z$,	(z) $y = x^{-1}$,
(aa) $\mathrm{On}(x)$,	(bb) $\lim(x)$,
(cc) $\mathrm{sucesor}(x)$,	(dd) *"x es un número natural"*,
(ee) *"x es una sucesión"*,	(ff) $x : y \rightarrow z$,
(gg) $x : y \leftrightarrow z$	

Demostración:
Demostraremos el teorema para algunas de las fórmulas. Para (a) y (b), el teorema es trivial. Para (c), considérese la fórmula $(\forall z \in x)[z \in y]$. Para (e), considérese la fórmula

$$(\forall x \in y)(x = x_1 \vee x = x_2) \wedge (x_1 \in y \wedge x_2 \in y).$$

Para (g), considérese la fórmula

$$(\exists z \in y)(z = \{x_1\}) \wedge (\exists z \in y)(z = \{x_1, x_2\}) \wedge (\forall z \in y)(z = \{x_1\} \vee z = \{x_1, x_2\}).$$

Para , (k), (l) y (o), las siguientes fórmulas:

$$(\forall w \in z)(w \in x \vee w \in y) \wedge (x \subseteq z \wedge y \subseteq z);$$

$$(\forall w \in x)(w \subseteq y) \wedge (\forall z \in y)(\exists w \in x)(z \in w);$$

$$(x \in y) \wedge (x \subseteq y) \wedge (\forall w \in y)(w \in x \vee w = x).$$

Para (p), considérese la fórmula:

$$(\exists z \in w)(\exists y \in w)(w = \bigcup x \wedge x = (y, z)).$$

Para (r), la fórmula:

$$(\forall w \in x)(\exists v \in y)(\exists u \in y)[w = (u, v)].$$

Para (t), la fórmula:

$$(\forall u \in y)(\exists v \in \bigcup\bigcup x)[(u, v) \in x] \wedge (\forall u \in \bigcup\bigcup x)(\forall v \in \bigcup\bigcup x)[(u, v) \in x \to u \in y].$$

Para (y), la fórmula:

$$(\forall u \in y)(\forall v \in z)[(u, v) \in x] \wedge (\forall w \in x)(\exists u \in y)(\exists v \in z)[w = (u, v)].$$

Por último, para (aa) y (cc), considérense las fórmulas:

$$(\forall z \in x)(\forall y \in z)(y \in x) \wedge (\forall z \in x)(\forall y \in x)(z = y \vee z \in y \vee y \in z);$$

$$\mathrm{OR}(x) \wedge (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \in y \vee z = y). \quad \|$$

Corolario 1. *La fórmula "x es un conjunto finito" es Σ_1.*

Demostración: Observe que la relación "x es finito" se define con la fórmula:

$$\exists n \exists f(\mathrm{Nat}(n) \wedge f : x \leftrightarrow n)$$

donde $\mathrm{Nat}(n)$ es la Σ_0-fórmula que define la relación de ser número natural y $f : x \leftrightarrow n$ define la relación "f es una función biyectiva de x en n". Luego, por el teorema anterior se tiene que tanto $\mathrm{Nat}(n)$ como $f : x \leftrightarrow n$ son Σ_0 y por lo tanto, la fórmula deseada es Σ_0. $\|$

El siguiente teorema ofrece varias propiedades de cerradura para los niveles de la jerarquía de Lévy, estas propiedades se usarán bastante en lo sucesivo.

5.3 Teorema. *Sea T una teoría para el lenguaje de la teoría de conjuntos. Sean Φ, Ψ fórmulas de LTC.*

1. *Si* Φ, Ψ *son* Σ_0^T, *también lo son* $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\neg\Phi$.

2. *Si* Φ *es* Σ_n^T (Π_n^T), *entonces* $\neg\Phi$ *es* Π_n^T (Σ_n^T).

3. Φ *es* Δ_n^T *si y sólo si* Φ *y* $\neg\Phi$ *son* Σ_n^T.

4. *Si* Φ, Ψ *son* Σ_n^T, *también lo son* $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\exists x\Phi$, $(\exists x \in y)\Phi$.

5. *Si* Φ, Ψ *son* Π_n^T, *también lo son* $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\forall x\Phi$, $(\forall x \in y)\Phi$.

6. *Si* Φ, Ψ *son* Δ_n^T, *también lo son* $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\neg\Phi$.

7. *Si* $m < n$, *entonces* $\Sigma_m^T \cup \Pi_m^T \subseteq \Delta_n^T$.

Demostración:
1. Se sigue trivialmente.

Los siguientes incisos del Teorema se demostrarán por inducción sobre n:
2. Suponiendo que Φ es Σ_1^T, existe $\Phi_0(x)$ en Σ_0 tal que:

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \exists x \Phi_0(x).$$

Así, $T \vdash \neg\Phi \leftrightarrow \forall x \neg\Phi_0(x)$, donde (por el inciso 1) $\neg\Phi_0(x)$ es Σ_0. Por lo que $\neg\Phi$ es Π_1.
En general, si

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \exists x \Phi_0(x),$$

con Φ_0 una fórmula Π_{n-1}, entonces

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \forall x \neg\Phi_0(x).$$

Pero por hipótesis inductiva, $\neg\Phi_0$ está en Σ_{n-1}, y por lo tanto, Φ es Π_n. El caso en que Φ es Π_n es totalmente análogo.
3. Se sigue directamente del inciso anterior.
4. y 5. Sean $\Phi_0(z,x)$ y $\Psi_0(u)$ fórmula Σ_0, tales que:

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \exists z \Phi_0(z,x)$$

$$T \vdash \Psi \leftrightarrow \exists u \Psi_0(u).$$

Así,

$$T \vdash \Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \exists z \exists u(\Phi_0(z,x) \wedge \Psi_0(u)),$$

$$T \vdash \Phi \vee \Psi \leftrightarrow \exists z \exists u(\Phi_0(z,x) \vee \Psi_0(u)),$$

$$T \vdash \exists x\Phi \leftrightarrow \exists z \exists x(\Phi_0(z,x))$$

$$T \vdash (\exists x \in y)\Phi \leftrightarrow \exists z \exists x(x \in y \wedge \Phi_0(z, x))$$

En los cuatro casos, las fórmulas de la derecha del bicondicional, son (por 1.) Σ_0. Por lo tanto, las cuatro fórmulas del lado izquierdo del condicional, son Σ_1. De aquí, se sigue también el caso $n = 1$ del inciso 5., aplicando el inciso 2., por ejemplo, si Φ y Ψ son Π_1, entonces $\neg\Phi$ y $\neg\Psi$ son Σ_1, tomando en cuenta lo recien demostrado, se sigue que $\Phi \wedge \Psi$ es Σ_1, al tomar la negación de esta última fórmula, se tiene la fórmula equivalente $\Phi \vee \Psi$, que por 2. es Π_1.

En el caso general de inducción, para demostrar 4. se hace uso de la hipótesis de inducción de 5. (y viceversa), y la conclusión se sigue de igual manera que en el caso $n = 1$.

6. Esta propiedad se sigue directamente de 3, 4. y 5.

7. Para demostrar esta propiedad, se debe observar, que es suficiente con agregar cuantificadores (ya sea $\exists$ o $\forall$ según sea necesario) que cuantifiquen una variable nueva que no aparece en la fórmula equivalente, ya sea al inicio de la cadena de cuantificadores no acotados o al final de ésta. $\|$

5.1 Lema. *La fórmula*

$$\mathrm{BF}(x, y) \equiv \text{"}x \text{ es una relación bien fundada sobre } y\text{"},$$

es Δ_1^{ZF}

Demostración:

Recuerde que la definición de relación bien fundada BF(E, X), es:

$$\Phi(E, X) \wedge \forall A[A \subseteq X \wedge A \neq \emptyset \rightarrow (\exists a \in A)(\forall x \in A)\neg E(x, a)],$$

donde $\Phi(E, X)$ es la fórmula Σ_0 (dada por el teroema 5.2) que define la relación "E es una relación sobre X". Ahora, con ayuda de los teoremas 5.2 y 5.3, se concluye que esta fórmula es Π_1. Por otro lado, en ZF se puede demostrar que una relación E es bien fundada sobre un conjunto X, si y sólo si

$$\exists f[f : X \rightarrow \mathrm{OR} \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in X)(E(x, y) \rightarrow f(x) < f(y))].$$

De aquí que (por los teoremas 5.2 y 5.3) la fórmula es Σ_1^{ZF} y por lo tanto Δ_1^{ZF}. $\|$

Dada una fórmula Φ de LTC, usaremos la siguiente notación:

1. $\Phi((x)_0, \overrightarrow{z})$ para denotar a la fórmula,

$$(\exists u \in x)(\exists a \in u)(\exists b \in u)[x = (a, b) \wedge \Phi(a, \overrightarrow{z})]$$

2. $\Phi((x)_1, \overrightarrow{z})$ para denotar a la fórmula,

$$(\exists u \in x)(\exists a \in u)(\exists b \in u)[x = (a, b) \wedge \Phi(b, \overrightarrow{z})]$$

3. $\Phi((x)_i^n, \overrightarrow{z})$ para denotar a la fórmula,

$$(\exists u \in x)(\exists a_0 \in u)(\exists a_1 \in u) \ldots (\exists a_{n-1} \in u)[x = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \\ \wedge \Phi(a_i, \overrightarrow{z})]$$

(En general para una fórmula de LTC de la fórma $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \overrightarrow{z})$ se puede definir la fórmula $\Phi((x)_0^n, (x)_1^n, \ldots (x)_{n-1}^n, \overrightarrow{z}))$

4. $\Phi(x(y), \overrightarrow{z})$ a la fórmula,

$$\mathrm{Fun}(x) \wedge [(\exists w \in x)(\exists u \in w)(\exists v \in u)[(v \neq y) \wedge w = (y, v) \wedge \Phi(v, \overrightarrow{z})] \\ \vee[(\exists w \in x)(\forall u \in w)(\forall v \in u)((v = y) \wedge W = (y, y) \wedge \Phi(y, \overrightarrow{z}))].$$

En términos de las anteriores definiciones, establecemos el siguiente lema, cuya demostración es trivial:

5.2 Lema. *Si $\Phi(x, \overrightarrow{z})$ es una fórmula Σ_0, entonces también lo son las siguientes fórmulas, $\Phi((x)_0, \overrightarrow{z})$, $\Phi((x)_1, \overrightarrow{z})$, $\Phi((x)_i^n, \overrightarrow{z})$ y $\Phi(x(y), \overrightarrow{z})$.* $\|$

5.4 Teorema.(Contracción de cuantificadores).
Sea T una teoría para LTC tal que sus axiomas incluyan a los axiomas de vacio y par. Sea $n \geq 1$ y sea $\Phi(\overrightarrow{z})$ una fórmula de LTC.

1. *Si $\Phi(\overrightarrow{z})$ es Σ_n, entonces existe una fórmula $\Psi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ que es Σ_0 y tal que*
$$T \vdash \Phi(\overrightarrow{z}) \leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots - x_n \Psi(y_1, \ldots, y_n, \overrightarrow{z}).$$

2. *Si $\Phi(\overrightarrow{z})$ es Π_n, entonces existe una fórmula $\Psi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ Σ_0 tal que*

$$T \vdash \Phi(\overrightarrow{z}) \leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots - x_n \Psi(y_1, \ldots, y_n, \overrightarrow{z}).$$

Demostración:
1. Como $\Phi(\overrightarrow{z})$ es una fórmula Σ_n, entonces es de la forma:

$$\exists x_{1,1} \exists x_{1,2} \ldots \exists x_{1,m_1} \forall x_{2,1} \forall x_{2,2} \ldots \forall x_{2,m_2} \ldots - x_{n,1} - x_{n,2} \ldots - x_{n,m_n} \Theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$$

Ahora, sea $\Psi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ la siguiente fórmula:

(y_1 es una m_1-ada)$\wedge$(y_2 es una m_2-ada)$\wedge \ldots \wedge$(y_n es una m_n-ada)

$$\wedge\Theta[(y_1)_0^{m_1},\ldots,(y_1)_{m_1-1}^{m_1},(y_2)_0^{m_2},\ldots,(y_2)_{m_2-2}^{m_2},\ldots,(y_n)_{m_n-1}^{m_n},\vec{z}].$$

De la proposición anterior se concluye que Ψ es Σ_0. Además es claro que,

$$T \vdash \Phi(\vec{z}) \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots - y_n \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n, \vec{z})$$

La demostración del caso 2. es completamente análoga. ||

Las propiedades de clausura, para los niveles de la jerarquía de Lévy, establecidas en el terorema 5.3, se pueden extender, para el caso en que T=ZF, a dos propiedades más:

5.5 Teorema.

1. *Si Φ es una fórmula Σ_n, entonces $(\forall x \in y)\Phi$ es Σ_n^{ZF}.*
2. *Si Φ es una fórmula Π_n, entonces $(\exists x \in y)\Phi$ es Π_n^{ZF}.*

Demostración:
Demostraremos 1. y 2. simultaneamente por inducción sobre n: Si $n = 0$, en ambos casos no hay nada que demostrar. Luego, sea Φ una fórmula Σ_{n+1}. Por el teorema anterior se tiene que existe una fórmula Ψ que es Π_n y tal que:

$$ZF \vdash \Phi \leftrightarrow \exists z \Psi$$

Así, por generalizacón se tiene que:

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\Phi \leftrightarrow (\forall x \in y)\exists z \Psi$$

Ahora quisieramos acotar la variable z por un conjunto u. A continuación definimos este conjunto:
Sea $f : y \rightarrow V$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \{z|\Psi(x,z) \wedge z \text{ de rango minimo}\}, & \text{si } \exists z\Psi(x,z); \\ \emptyset, & \text{si no existe tal } z. \end{cases}$$

Claramente $f(x) \in V$ para toda $x \in y$. Sea $u = \bigcup\limits_{x \in y} f(x)$. Así, se tiene que

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\exists z \Psi \leftrightarrow \exists u (\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$$

Por lo tanto

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\Phi \leftrightarrow \exists u (\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$$

Pero, por hipótesis de inducción aplicada a Ψ (que es una fórmula Π_n), se tiene que $(\exists z \in u)\Psi$ es una fórmula Π_n^{ZF}. Luego, aplicando el teorema 5.3, se tiene que $(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$ es una fórmula Π_n^{ZF}. Por lo que la fórmula $\exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$ es una fórmula Σ_{n+1}^{ZF}, lo cual implica que $(\forall x \in y)\Phi$ es también una fórmula Σ_{n+1}^{ZF}.

Ahora supóngase que Φ es Π_{n+1}. Entonces, por el teorema 5.3, se tiene que $\neg\Phi$ es Σ_{n+1}^{ZF}. Aplicando a esta fórmula el inciso anterior tenemos que $(\forall x \in y)\neg\Phi$ también es una fórmula Σ_{n+1}^{ZF}. De aqui se tiene que $\neg(\exists x \in y)\Phi$ es Σ_{n+1}^{ZF}. Por último, aplicando de nuevo el teorema, se concluye que $(\exists x \in y)\Phi$ es una fórmula Π_{n+1}^{ZF}. $\parallel$

Como parte última de este capítulo, definimos, en referencia a la definición 4.3(3) la noción de subestructura Σ_n (Π_n) elemental:

5.3 Definición. Se dice que $\mathcal{M}$ *es una suestructura* Σ_n*-elemental de* $\mathcal{N}$, si $\mathcal{M}$ cumple la definición de subestructura elemental para fórmulas Σ_n. Este hecho se denota:

$$N \prec_n M.$$

Capítulo 2

El universo construible

Con este capítulo iniciamos el estudio de la teoría construible de los conjuntos. Esta teoría se inicia en 1938 con las contribuciones de Kurt Gödel ([Gödel 1938], [Gödel 1939], [Gödel 1939a] y [Gödel 1940]) encaminadas a establecer la consistencia de la Hipótesis Generalizada del Continuo y del Axioma de Elección con respecto a la consistencia de la teoría de Zermelo-Fraenkel. Para lograr ésto, Gödel construye un modelo interno de ZF, que es a su vez modelo de HGC y AE. Este modelo interno es el que ahora conocemos con el nombre de Universo Construible de Gödel y denotamos con L.

Según Wang (vease [Wang 1993], pp. 128-30.) los primeros indicios hacia la construcción de L, datan de 1930 cuando Gödel comenzó a pensar en el Problema del Continuo de Cantor. Al parecer, Gödel pensó en la teoría ramificada de tipos, como método posible para introducir conjuntos y en particular, para introducir los conjuntos de números en el orden α a la par de la introdución del ordinal α. Es decir, Gödel intentó introducir el conjunto $\mathrm{Def}(L_\beta)$ (este conjunto se define, metateóricamente, como el conjunto de los subconjuntos de L_β que pueden ser definidos en L_β mismo) a partir de L_β y en introducir L_α, cuando α es límite, como la unión de los L_α anteriores. Esta posibilidad dejaría asentada la validez de la hipótesis del continuo en dicho modelo. El problema que aparecía aún, era encontrar el método para introducir los ordinales de manera adecuada.

Wang menciona que en sus pláticas, Gödel dijo haber experimentado durante los siguientes 5 años (hasta 1935) con construcciones cada vez más complicadas. Hasta que se le ocurrió la idea de tomar a los ordinales por medio de su formalización en ZF. Así, fue necesario introducir el concepto de conjunto construible en ZF, definiéndolo en ZF mismo. Después, demostrar que los axiomas de la teoría de conjuntos, incluyendo el Axioma de Elección, se cumplen para el modelo construible. Por último, demostrar que la Hipótesis Generalizada del Continuo también se cumple.

Al parecer (según una plática que sostuvo Gödel con von Newmann en Princeton, 1935), los dos primeros pasos fueron resueltos antes de 1935 y el último, que ya era una clara conjetura, fue establecido hasta 1938 (durante esos tres años Gödel tuvo problemas de salud).

En este capítulo, seguiremos estos pasos, apoyándonos en la demostración de Karp dada en [Karp 1967] y siguiendo el desarrollo de ésta, ofrecido por Devlin en [Devlin 1984].

2.1 El Lenguaje $\mathcal{L}_V$

En esta sección sentaremos las bases para establecer el primer paso mencionado antes, es decir, se introduce un método que permite expresar en el lenguaje de la teoría de los conjuntos, la noción de conjunto construible. En rigor, lo que nos interesa es expresar la noción de "conjunto X-definible" (para ciertos conjuntos X) en el lenguaje de la teoría de los conjuntos (LTC). Metamatemáticamente, dado un conjunto X, se dice que un subconjunto Y de X es X-definible, si existe un fórmula $\phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC, y existen $x_1, \ldots, x_n$ elementos de X, tales que

$$Y = \{u \in X | \langle X, \in\rangle \models \phi[u, x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Así, para lograr definir esta noción metateórica en LTC, es necesario definir relaciones tales como: "ser fórmula de LTC con parámetros en X", "ser satisfacible en $\langle X, \in\rangle$", etc. La idea del método en cuestión es, por un lado, construir un lenguaje análogo a LTC, de tal manera que los símbolos de este lenguaje sean a su vez conjuntos, para que nociones metateóricas como las mencionadas, correspondan a relaciones entre conjuntos. Y por otro lado, demostrar que algunas de estas relaciones (aquellas involucradas en la definición de X-definible) son relaciones definidas por ciertas fórmulas de la jerarquía de levy que poseen ciertas características de absolutez.

Iniciamos pues, con notación que usaremos para definir los lenguajes $\mathcal{L}_X$:

1. La sucesión s con dominio $\{0\}$ y rango $\{x\}$ se denota con $\langle x\rangle$.

2. La sucesión s con dominio $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ y valores $s(i) = x_i$ ($i = 0, \ldots, n-1$), se denota con $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$.

3. Si $s = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$, $r = \langle y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle$ son sucesiones finitas, entonces la concatenación de las sucesiones s, r:

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle$$

se denota con $s^\frown r$.

4. Si s es una sucesión finita, entonces $\| s \|$ denota al máximo elemento del dominio de s. Observe que en este caso se tiene que $\| s \| = \mathrm{dom}(s) - 1$ donde, por supuesto, $\mathrm{dom}(s)$ es un ordinal.

A continuación damos la definición del lenguaje $\mathcal{L}_V$ y posteriormente definiremos "sublenguajes" de éste.

1.1 Definición.(Lenguaje $\mathcal{L}_V$).

1. *Variables*: para cada $n \in \omega$, el conjunt $(2, n)$ es una variable. Que será denotada por v_n.

2. *Símbolos de constante*: para cada conjunto x, el conjunto $(3, x)$ es un símbolo de constante. Que será denotado por x°.

3. *Fórmulas primitivas*: las fórmulas primitivas son las sucesiones de la forma

$$\langle 0, 4, x, y, 1 \rangle \;\text{ y }\; \langle 0, 5, x, y, 1 \rangle,$$

donde x y y son variables o símbolos de constante de $\mathcal{L}_V$. Estas fórmulas serán denotadas por $(x \in y)$ y $(x \approx y)$ respectivamente.

4. Las *fórmulas* del lenguaje se construyen por recursión a partir de las primitivas haciendo uso de las siguientes reglas:

   (a) Si ϕ y ψ son fórmulas de $\mathcal{L}_V$ entonces también lo es la siguiente sucesión:

   $$\langle 0, 6 \rangle^\frown \phi^\frown \psi^\frown \langle 1 \rangle$$

   que será denotada por $(\phi \wedge \psi)$.

   (b) Si ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_V$ entonces también lo es la siguiente sucesión:

   $$\langle 0, 7 \rangle^\frown \phi^\frown \langle 1 \rangle$$

   que será denotada por, $(\neg \phi)$.

(c) Si ϕ es una fórmula y u es una variable de $\mathcal{L}_V$ entonces también lo es la siguiente sucesión:

$$\langle 0, 8, u\rangle^\frown \phi^\frown \langle 1\rangle$$

que será denotada por $(\exists u\phi)$.

Observe que, informalmente, a los símbolos de relación $\in, =$ corresponden los conjuntos $4, 5$ respectivamente, a los símbolos de puntuación (,) los conjuntos $0, 1$ y a los símbolos lógicos $\wedge, \neg$ y $\exists$, los conjuntos $6, 7$ y 8 respectivamente. En este lenguaje, a diferencia de LTC tenemos un conjunto de símbolos de constante, que por cierto es muy grande, uno por cada conjunto. Conforme avancemos en esta sección, incluiremos, para cada conjunto X, un sublenguaje $\mathcal{L}_X$ de $\mathcal{L}_V$, para el cual habrá solamente un símbolo de constante por cada elemento de X.

De la definición anterior se sigue directamente el siguiente lema, lema que establece la expresabilidad en LTC de las relaciones metateóricas básicas:

1.1 Lema. *Las propiedades de $\mathcal{L}_V$: "ser variable de $\mathcal{L}_V$", "ser símbolo de constante de $\mathcal{L}_V$" y "ser fórmula primitiva de $\mathcal{L}_V$". Son definidas (respectivamente) por las siguientes Σ_0 fórmulas de* LTC*:*

1. $\mathrm{Var}(x) \equiv_{def}$ $[x$ es un par ordenado$] \wedge [(x)_0 = 2]$
$\wedge[(x)_1$ es un número natural$]$.

2. $\mathrm{Cte}(x) \equiv_{def}$ $[x$ es un par ordenado$] \wedge [(x)_0 = 3]$.

3. $\mathrm{Prim}(x) \equiv_{def}$ $[x$ es una función$] \wedge [\mathrm{dom}(x) = 5]$
$\wedge[x(0) = 0] \wedge [x(1) = 4 \vee x(1) = 5]$
$\wedge[\mathrm{Var}(x(2)) \vee \mathrm{Cte}(x(2))]$
$\wedge[\mathrm{Var}(x(3)) \vee \mathrm{Cte}(x(3))] \wedge [x(4) = 1]$. ||

(Observe que en realidad las fórmulas del lema anterior son Σ_0.) El siguiente paso es construir una fórmula de LTC que defina la propiedad metateórica de "ser fórmula de $\mathcal{L}_V$". Para lograrlo, es necesario demostrar que las nociones que intervienen en su definición, son expresables en LTC, de hecho, son absolutas para ciertas estructuras. Para lograr esto, hace falta demostrar que las fórmulas que definen dichas nociones están en aquellos estratos de la jerarquía de Lévy que dan ciertas garantias de absolutez.

1.2 Lema. *La propiedad "ser una sucesión finita" es definible por una fórmula Σ_0 de* LTC *(que llamaremos* Sucefin(x)*).*

Demostración:
Sea Sucefin(x) la siguiente fórmula de LTC,

$$[x \text{ es una sucesión}] \wedge (\forall u \in \operatorname{dom}(x))[u \text{ es un número natural}]$$
$$\wedge(\exists v \in \operatorname{dom}(x))(\forall u \in \operatorname{dom}(x))[u \in v \ \vee \ u = v].$$

Claramente esta fórmula define la propiedad mencionada. Ahora, para demostrar que Sucefin(x) es Σ_0, observe que las subfórmulas: $[x$ es una sucesión$]$, $[u$ es un número natural$]$ y $[u \in v \ \vee \ u = v]$ son Σ_0 y que expresiones tales como

$$(\forall u \in \operatorname{dom}(x))\Phi(u)$$

pueden ser reemplazadas por expresiones de la forma,

$$(\forall z \in x)\Phi((z)_0)$$

que son Σ_0 según el lema 5.2 (Cap. 1). Así, se concluye que la fórmula Sucesfin(x) puede ser escrita en LTC como una fórmula Σ_0. ||

A continuación definimos algunas fórmulas de LTC que describen la forma en la que se construyen las fórmulas de $\mathcal{L}_V$

Sea $F_\in(\theta, x, y)$ la siguiente fórmula de LTC,

$$\text{Sucefin}(\theta) \wedge [\operatorname{dom}(\theta) = 5] \wedge [\theta(0) = 0] \wedge [\theta(1) = 4]$$
$$\wedge[\theta(2) = x] \wedge [\theta(3) = y] \wedge [\theta(4) = 1]$$

Sea $F_=(\theta, x, y)$ la siguiente fórmula de LTC,

$$\text{Sucefin}(\theta) \wedge [\operatorname{dom}(\theta) = 5] \wedge [\theta(0) = 0] \wedge [\theta(1) = 5]$$
$$\wedge[\theta(2) = x] \wedge [\theta(3) = y] \wedge [\theta(4) = 1]$$

Sea $F_\wedge(\theta, \phi, \psi)$ la siguiente fórmula de LTC,

$$\text{Sucefin}(\theta) \wedge \text{Sucefin}(\phi) \wedge \text{Sucefin}(\psi)$$
$$\wedge[\operatorname{dom}(\theta) = \operatorname{dom}(\phi) + \operatorname{dom}(\psi) + 3] \wedge [\theta(0) = 1] \wedge [\theta(1) = 6]$$
$$\wedge[\theta(\| \theta \|) = 1] \wedge (\forall i \in \operatorname{dom}(\phi))[\phi(i) = \theta(i + 2)]$$
$$\wedge(\forall i \in \operatorname{dom}(\psi))[\psi(i) = \theta(i + \operatorname{dom}(\phi) + 2)]$$

Sea $F_\neg(\theta, \phi)$ la siguiente fórmula de LTC,

$$\text{Sucefin}(\theta) \wedge \text{Sucefin}(\phi) \wedge [\operatorname{dom}(\theta) = \operatorname{dom}(\phi + 3)]$$
$$\wedge[\theta(0) = 0] \wedge [\theta(1) = 7] \wedge [\theta(\| \theta \|) = 1]$$
$$\wedge(\forall i \in \operatorname{dom}(\phi))[\phi(i) = \theta(i + 2)]$$

Sea $F_\exists(\theta, \phi, u)$ la siguiente fórmula deLTC,

$$\begin{aligned}
&\text{Sucefin}(\theta) \wedge \text{Sucefin}(\phi) \wedge [\text{dom}(\theta) = \text{dom}(\phi) + 4] \\
&\wedge[\theta(0) = 0] \wedge [\theta(1) = 8] \wedge [\theta(2) = u] \\
&\wedge[\theta(\| \theta \|) = 1] \wedge (\forall i \in \text{dom}(\phi))[\phi(i) = \theta(i+3)].
\end{aligned}$$

Observación. De las definiciones de las fórmulas anteriores, se tiene que si x, y son variables o símbolos de constante de $\mathcal{L}_V$, ϕ y ψ fórmulas de $\mathcal{L}_V$ y u una variable de $\mathcal{L}_V$, entonces:

$F_\in(\theta, x, y) \Leftrightarrow \theta$ es la $\mathcal{L}_V$ – fórmula $(x \in y)$.

$F_=(\theta, x, y) \Leftrightarrow \theta$ es la $\mathcal{L}_V$ – fórmula $(x = y)$.

$F_\wedge(\theta, \phi, \psi) \Leftrightarrow \theta$ es la $\mathcal{L}_V$ – fórmula $(\phi \wedge \psi)$.

$F_\neg(\theta, \phi) \Leftrightarrow \theta$ es la $\mathcal{L}_V$ – fórmula $(\neg\phi)$.

$F_\exists(\theta, u, \phi) \Leftrightarrow \theta$ es la $\mathcal{L}_V$ – fórmula $(\exists u\phi)$.

1.3 Lema. *Las LTC-fórmulas $F_\in$, $F_=$, $F_\wedge$, $F_\neg$, $F_\exists$ son Σ_0.*

Demostración:
Dado que todas las subfórmulas que aparecen en las definiciones de estas fórmulas son Σ_0, al aplicar el mismo razonamiento de la demostración del lema anterior (para acotar con un conjunto a los cuantificadores que aparecen en la forma $(\forall i \in \text{dom}(\phi))(\exists i \in \text{dom}(\phi))$), se concluye que las fórmulas son Σ_0. $\|$

Si ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_V$, debe existir una sucesión finita f de $n+1$ en el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_V$ definida por $f(i) = \psi_i$, donde $\psi_n = \phi$ y para cada i, ψ_i es una fórmula primitiva o se obtuvo por una o dos fórmulas de la lista $\psi_1, \ldots \psi_{i-1}$ aplicando alguna de las reglas de generación de fórmulas. Así, la sucesión f describe la forma en que se construyó ϕ. A continuación escribiremos una fórmula $\text{Const}(\phi, f)$ de LTC que dice que ϕ se construyó a partir de la sucesión de fórmulas f.
Sea $\text{Const}(\phi, f)$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
\text{Sucefin}(f) \wedge [\psi_{\|f\|} = \phi] \wedge (\forall i \in \text{dom}(f))[&\text{Prim}(\psi_i) \\
&\vee(\exists j, k \in i)F_\wedge(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \vee (\exists j \in i)F_\neg(\psi_i, \psi_j) \\
&\vee(\exists j \in i)(\exists u \in \text{ran}(\phi)(\text{Var}(u)) \wedge F_\exists(\psi_i, u, \psi_j))].
\end{aligned}$$

1.4 Lema. *La fórmula* $\text{Const}(\phi, f)$ *es* Σ_0.

Demostración:
Sólo es necesario revisar que expresiones de la forma:

$$(\forall i \in \text{dom}(\psi))(\exists j, k \in i)F_\wedge(\psi_i, \psi_j, \psi_k)$$

son Σ_0. Bueno, esta expresión se puede escribir como:

$$(\forall i \in \mathrm{dom}(\psi))(\exists j, k \in i)(\exists a, b, c \in \mathrm{rango}(\psi))[(a = \psi_i) \wedge (b = \psi_j) \\ \wedge (c = \psi_k) \wedge F_\wedge(a, b, c)],$$

que al aplicar las demostraciones anteriores, claramente se reconoce como una fórmula Σ_0. $\|$

Observe que a partir de la definición de $\mathrm{Const}(\phi, f)$ se tiene que,

$$\phi \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_V \Leftrightarrow (\exists f)\mathrm{Const}(\phi, f).$$

De aquí que existe una fórmula Σ_1, a saber: $\exists f \mathrm{Const}(\phi, f)$, que define la noción de ser fórmula de $\mathcal{L}_V$.

Ahora, al analizar la *complejidad lógica de las nociones sintácticas de* $\mathcal{L}_V$, nos interesa fundamentalmente demostrar varios resultados de absolutez referidos a estas nociones. En el caso de las nociones que hemos demostrado son Σ_0 no hay problema (pues son absolutas). Pero para nociones que no son Σ_0, tales como la de ser fórmula de $\mathcal{L}_V$, no es suficiente con saber que el concepto es Σ_1, pues esto sólo garantiza la U-absolutez. Para poder asegurar la absolutez completa se requiere, según el teorema 5.1 del capítulo 1, de una definición Π_1 equivalente.

A continuación escribiremos una fórmula de LTC, $\mathrm{Suc}(u, a, n)$ que define la relación: "u es el conjunto de todas las m-sucesiones de elementos de a para toda $m < n$". Buscamos una definición Σ_1, de tal manera que sea posible demostrar que esta definición Σ_1 sea equivalente, en ZF, a una definición Π_1, para así, concluir que dicha definición es Δ_1^{ZF}, y por lo tanto absoluta para todos los modelos transitivos de ZF.

Obtendremos la definición Σ_1 deseada, haciendo que los elementos de u sean construidos por etapas, construyendo primero las 1-sucesiones, luego las 2-sucesiones, etc. (La función f que aparece en la siguiente fórmula enumera estos conjuntos de sucesiones finitas.)

Sea $\mathrm{Suc}(u, a, n)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}(\exists f)[\mathrm{Sucefin}(f) \wedge (n \text{ es un número natural}) \wedge (\mathrm{dom}(f) = n) \\ \wedge (u = \bigcup \mathrm{ran}(f)) \\ \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(f))(\forall x \in f(i))(\mathrm{Sucefin}(x) \wedge (\mathrm{dom}(x) = i) \\ \wedge (\forall j \in i)(x(j) \in a)) \\ \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(f))(\forall j \in i)(\forall x \in f(j))(\forall p \in a) \\ (i = j + 1 \rightarrow x \cup \{(p, i)\} \in f(i))].\end{aligned}$$

Claramente esta fórmula es Σ_1. Además demostraremos en el siguiente lema que $\mathrm{Suc}(u, a, n)$ es equivalente a una fórmula Π_1 según ZF.

Antes de pasar a este lema es prudente revisar la estructura sintáctica de esta fórmula:

Lo que dicen las tres primeras lineas es que existe una enumeración f de algunos conjuntos de m-sucesiones de elementos de a (con $m < n$), y dado el hecho de que $u = \bigcup \mathrm{ran}(f)$, todos los elementos de u son m sucesiones de elementos de a (con $m < n$). Sólo falta ver que toda m-sucesión de a ($m < n$) es un elemento de u, es decir, si r es una m-sucesión de elementos de a entonces $r \in f(i)$ para algún $i < n$ (por cierto $i = m$). En las últimas dos lineas de la fórmula, se garantiza que f enumera a exactamente todas las m-sucesiones de elementos de a ($m < n$), y que cada m-sucesión de elementos de a está justamente en $f(m)$.

1.5 Lema. *La fórmula de* LTC $\mathrm{Suc}(u, a, n)$ *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Observe que:

$$\mathrm{ZF} \vdash (\forall a)(\forall n \in \omega)(\exists u)\mathrm{Suc}(u, a, n)$$

y obviamente también se tiene que:

$$\mathrm{ZF} \vdash (\forall a)(\forall n)(\forall u)(\forall v)[\mathrm{Suc}(u, a, n) \wedge \mathrm{Suc}(v, a, n) \rightarrow u = v].$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Suc}(u, a, n) \leftrightarrow [(n \text{ es un número natural}) \wedge \forall z[(\neg\mathrm{Suc}(z, a, n)) \vee z = u]].$$

Haciendo uso del teorema 5.3 (Cap. 1), se sigue que la expresión a la derecha del bicondicional es Π_1. ||

Ahora, ya estamos listos para escribir una fórmula de LTC; $\mathrm{Fml}(x)$, tal que :

$$\mathrm{Fml}(x) \Leftrightarrow x \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_V.$$

Tal como mencionamos anteriormente, la forma más obvia de hacer esto es a partir de la fórmula

$$(\exists f)\mathrm{Const}(x, f),$$

así, tomemos a ésta como la fórmula $\mathrm{Fml}(x)$ deseada. En el lema 1.4, se vio que $\mathrm{Const}(x, f)$ es Σ_0, por lo que la fórmula $\mathrm{Fml}(x)$ es Σ_1. Ahora demostraremos que además esta fórmula es equivalente, según ZF, a una fórmula Π_1.

1.6 Lema. *La fórmula* $\mathrm{Fml}(x)$ *de* LTC *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Primeramente, daremos un conjunto $A(x)$ que acote al cuantificador $\exists f$. Sea $A(x)$ el siguiente conjunto,

$$\bigcup_{n\in\mathrm{dom}(x)} {}^{n+1}[\bigcup_{m\in\mathrm{dom}(x)} {}^{m+1}\mathrm{ran}(x)].$$

Por un lado sabemos que

$$((\exists f \in A(x))\mathrm{Const}(x,f)) \to \exists f\mathrm{Const}(x,f),$$

pero además, si $x \in \mathcal{L}_V$ y existe f tal que $Const(x, f)$, entonces

$$f : r \longrightarrow \mathrm{ran}(f);\ (r < \mathrm{dom}(x))$$

tal que para cada $k < r$, se tiene que $f(k) = \psi_k$ donde ψ_k es una fórmula en la construcción de x, lo cual implica que

$$\psi_k : s \longrightarrow \mathrm{ran}(x);\ (s < \mathrm{dom}(x)),$$

así se tiene que

$$f : r \longrightarrow [\bigcup_{m\in\mathrm{dom}(x)} {}^{m+1}\mathrm{ran}(x)],$$

por lo tanto dicha f debe ser un elemento de $A(x)$. De donde se tiene que:

$$\exists f\mathrm{Const}(x,f) \leftrightarrow (\exists f \in A(x))\mathrm{Const}(x,f).$$

Por otro lado, en ZF se puede demostrar que existe dicho conjunto, es decir,

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall x\exists y[y = A(x)].$$

De aquí se sigue que,

$$\begin{aligned}\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Fml}(x) \leftrightarrow \mathrm{Sucefin}(x) \wedge \forall u\forall v[&\mathrm{Suc}(u, \mathrm{ran}(x), \mathrm{dom}(x)+2)\\ &\wedge\mathrm{Suc}(v, u, \mathrm{dom}(x)+2) \to (\exists f \in v)\mathrm{Const}(x,f)].\end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $\mathrm{Fml}(x)$ es equivalente, según ZF a una fórmula Π_1. ||

A continuación se define la restricción del lenguaje $\mathcal{L}_V$ a una clase cualquiera X:

1.2 Definición. Dada una clase X, $\mathcal{L}_X$ es el sublenguaje de $\mathcal{L}_V$ que se obtiene al eliminar todos los símbolos de constante z° tales que $z \notin X$.

En particular se define $\mathcal{L}_u$ cuando u es un conjunto. En el caso particular del conjunto vacio, $\mathcal{L}_\emptyset$ se denota por $\mathcal{L}$. Así, $\mathcal{L}$ es un lenguaje formal análogo a LTC dentro de la misma teoría de conjuntos. En lo que resta de esta sección estaremos particularmenete interesados en los lenguajes $\mathcal{L}_u$ donde u es un conjunto.

1.3 Definición. Dado un conjunto u, se define la fórmula de LTC $\mathrm{Cte}(x, u)$ como la fórmula de LTC,

$$\mathrm{Cte}(x) \wedge ((x)_1 \in u)$$

Las fórmulas $\mathrm{Prim}(x, u)$ y $\mathrm{Fml}(x, u)$ se definen de la misma manera que $\mathrm{Prim}(x)$ y $\mathrm{Fml}(x)$ excepto que donde aparece la fórmula $\mathrm{Cte}(x)$ se reemplaza por $\mathrm{Cte}(x, u)$. Claramente, de esta definición, se sigue que

$$\mathrm{Fml}(x, u) \Leftrightarrow x \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_u.$$

A continuación enunciamos un lema que establece el carácter absoluto (para modelos transitivos de ZF) de las fórmulas anteriores:

1.7 Lema.
(i) *Las fórmulas* $\mathrm{Cte}(x, u)$ *y* $\mathrm{Prim}(x, u)$ *son* Σ_0.
(ii) *La fórmula* $\mathrm{Fml}(x, u)$ *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Para (i) la demostración es directa, pues en el primer caso, tanto $\mathrm{Cte}(x)$ como $(x)_1 \in u$ son Σ_0, y en el segundo caso, se está reemplazando una subfórmula Σ_0 de un fórmula Σ_0 por una subfórmula Σ_0.

Para (ii), observe que el único cambio (con respecto a $\mathrm{Fml}(x)$) que se hace, es reemplazar la subfórmula $\mathrm{Prim}(x)$ de $\mathrm{Const}(\phi, f)$, por la subfórmula $\mathrm{Prim}(x, u)$, que es Σ_0, asi, la fórmula $\mathrm{Const}(\phi, f)$ es Σ_0 y por lo tanto $\mathrm{Fml}(x, u)$ es Σ_1. El proceso que llevamos a cabo para acotar el cuantificador $\exists f$ por $A(x)$ se puede llevar a cabo de la misma manera. Concluyendo así, que $\mathrm{Fml}(x, u)$ es Δ_1. ||

El proposito siguiente es definir una fórmula (que llamaremos $\mathrm{Lib}(\phi, x)$) de LTC tal que:

$\mathrm{Lib}(\phi, x) \Leftrightarrow$ "ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_V$ y x es el conjunto de todas las variables que aparecen libres en ϕ".

Escribimos dicha fórmula, posteriormente estudiaremos su estructura sintáctica.

Sea $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$
\begin{aligned}
&\exists\psi\exists f[\mathrm{Const}(\phi,\psi) \wedge \mathrm{Sucefin}(f) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\psi) \wedge (x = f(\| f \|))\\
&\wedge(\forall i \in \mathrm{dom}(f))[(\exists j, k \in i)[F_\wedge(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \wedge (f(i) = f(j) \cup f(k))]\\
&\quad \vee(\exists j \in i)[F_\neg(\psi_i, \psi_j) \wedge (f(i) = f(j))]\\
&\quad \vee(\exists j \in i)(\exists u \in \mathrm{ran}(\phi))[\mathrm{Var}(u) \wedge F_\exists(\psi_i, u, \psi_j)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge(f(i) = f(j) \setminus \{u\})]\\
&\quad \vee[\mathrm{Prim}(\psi_i) \wedge [[\mathrm{Var}((\psi_i)_2) \wedge \mathrm{Var}((\psi_i)_3) \wedge (f(i) = \{(\psi_i)_2, (\psi_i)_3\})]\\
&\qquad \vee[\mathrm{Var}((\psi_i)_2) \wedge \mathrm{Cte}((\psi_i)_3) \wedge (f(i) = \{(\psi_i)_2\})]\\
&\qquad \vee[\mathrm{Cte}((\psi_i)_2) \wedge \mathrm{Var}((\psi_i)_3) \wedge (f(i) = \{(\psi_i)_3\})]\\
&\qquad \vee[\mathrm{Cte}((\psi_i)_2) \wedge \mathrm{Cte}((\psi_i)_3) \wedge (f(i) = \emptyset)].
\end{aligned}
$$

Ahora revisaremos la estructura sintáctica de esta fórmula. En primer término, la sucesión ψ que aparece, es la que enumera a las fórmulas de la construcción de ϕ. La sucesión f es la que va acumulando, en cada i, el conjunto de variables libres que aparecen en la fórmula ψ_i de la construcción de ϕ.

Revisando con cuidado la estructura sintáctica de la fórmula $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ se observa que dicha fórmula es Σ_1. (Sólo hace falta observar que cada una de las subfórmulas de $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ es Σ_0 o Σ_1.) En el siguiente lema veremos que $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ es, además, equivalente, en ZF, a una fórmula Π_1 de LTC.

1.8 Lema. *La fórmula* $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Claramente,

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Lib}(\phi, x) \leftrightarrow [\mathrm{Fml}(\phi) \wedge \forall z[(\neg \mathrm{Lib}(\phi, z)) \vee z = x]].$$

Ahora, la segunda parte de la conjunción es claramente Π_1 y la primera es equivalente a una fórmula Π_1 en ZF. Por lo tanto, $\mathrm{Lib}(\phi, x)$ es equivalente, en ZF, a una fórmula Π_1. $\|$

Ahora, definiremos una fórmula de LTC ($\mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t)$) que definirá la relación:

"ϕ' es la fórmula (de $\mathcal{L}_V$) que se obtiene al sustituir en la fórmula ϕ (de $\mathcal{L}_V$) todas las apariciones de la variable libre v (de $\mathcal{L}_V$) en la fórmula ϕ, por la constante t (de $\mathcal{L}_V$)".

Para llegar a la definición de esta fórmula necesitamos adoptar un procedimiento similar al usado el la definición de la fórmula $\mathrm{Lib}(\phi, x)$:

Tomar la sucesión ψ tal que $\mathrm{Const}(\phi, \psi)$ (que enumera las fórmulas de la construcción de ϕ). A partir de esta sucesión, ir sustituyendo cada aparición libre de la variable v por la constante t, si aparece un cuantificador sobre v en alguna etapa de la construcción, se deben eliminar todas las sustituciones hechas sobre las apariciones de v que ahora están bajo el alcance del cuantificador.

Para hacer más fácil la definición de esta fórmula es recomendable considerar, primeramente, la restrición de $\mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t)$ a fórmulas primitivas ϕ. Sea $\mathrm{S}(\phi', \phi, v, t)$ la restricción mencionada, definida por:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prim}(\phi') \wedge \mathrm{Prim}(\phi) \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Cte}(t)\\
&\wedge[[F_{=}(\phi, (\phi)_2, (\phi)_3) \wedge [[(\phi)_2 \neq v \wedge (\phi)_3 \neq v \wedge (\phi' = \phi)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 = v \wedge (\phi)_3 \neq v \wedge F_{=}(\phi', t, (\phi)_3)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 \neq v \wedge (\phi)_3 = v \wedge F_{=}(\phi', (\phi)_2, t)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 = v \wedge (\phi)_3 = v \wedge F_{=}(\phi', t, t)]]]\\
&\quad \vee[F_{\in}(\phi, (\phi)_2, (\phi)_3) \wedge [(\phi)_2 \neq v \wedge (\phi)_3 \neq v \wedge (\phi' = \phi)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 = v \wedge (\phi)_3 \neq v \wedge F_{\in}(\phi', t, (\phi)_3)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 \neq v \wedge (\phi)_3 = v \wedge F_{\in}(\phi', (\phi)_2, t)]\\
&\qquad\qquad \vee[(\phi)_2 = v \wedge (\phi)_3 = v \wedge F_{\in}(\phi', t, t)]]].
\end{aligned}
$$

Observe que la fórmula $\mathrm{S}(\phi', \phi, v, t)$ es Σ_0. Ahora, con ayuda de ésta, definimos la fórmula $\mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t)$ deseada:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Fml}(\phi') \wedge \mathrm{Fml}(\phi) \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Const}(t) \wedge \exists\psi\exists\theta[\mathrm{Const}(\phi, \psi)\\
&\wedge \mathrm{Sucefin}(\theta) \wedge (\mathrm{dom}(\theta) = \mathrm{dom}(\psi)) \wedge (\theta_{\|\theta\|} = \phi')\\
&\wedge(\forall i \in \mathrm{dom}(\psi))[(\exists j, k \in i)(F_{\wedge}(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \wedge (F_{\wedge}(\theta_i, \theta_j, \theta_k))\\
&\qquad\qquad \vee(\exists j \in i)(F_{\neg}(\psi_i, \psi_j) \wedge F_{\neg}(\theta_i, \theta_j))\\
&\qquad\qquad \vee(\exists j \in i)(\exists u \in \mathrm{rang}(\phi))(\mathrm{Var}(u) \wedge (u \neq v)\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge(F_{\exists}(\psi_i, u, \psi_j) \wedge F_{\exists}(\theta_i, u, \theta_j))\\
&\qquad\qquad \vee(\exists j \in i)(F_{\exists}(\psi_i, v, \psi_j) \wedge (\theta_i = \psi_i))\\
&\qquad\qquad \vee \mathrm{S}(\theta_i, \psi_i, v, t)]].
\end{aligned}
$$

En esta fórmula, la sucesión θ va haciendo el proceso de sustitución en cada fórmula de la construcción de ϕ, dejando sin sustituir la variable, cuando ésta es acotada.

Obsérvese que en esta definición todos los cuantificadores que aparecen, excepto los dos primeros existenciales, son acotados, y además todas las subfórmulas son Σ_0, de donde se sigue que la fórmula $\mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t)$ es Σ_1. Pero más aún:

1.9 Lema. *La fórmula* $\mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t)$ *de* LTC *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
De nuevo, es claro que:

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Sust}(\phi', \phi, v, t) \leftrightarrow \mathrm{Fml}(\phi) \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Const}(t)$$

$$\wedge\forall\psi[(\neg\mathrm{Sust}(\psi,\phi,v,t))\vee\psi=\phi'].$$

Puesto que la expresión del lado derecho del bicondicional es Π_1, queda demostrado el lema. ||

Con ayuda de las fórmulas que hasta el momento hemos definido, es posible definir (en LTC) la noción de satisfacción (verdad) para los lenguajes $\mathcal{L}_u$. Esto es, definiremos una fórmula $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ tal que,

$\mathrm{Sat}(u,\phi) \Leftrightarrow$ "ϕ es un enunciado de $\mathcal{L}_u$ que es verdadero en la estructura $\langle u,\in\rangle$ bajo la interpretación canónica."

La idea que motiva la definición de esta fórmula es la siguiente:
Sea $f:\omega\longrightarrow P(\mathcal{L}_u)$ tal que $f(0)$ es el conjunto de todas las fórmulas primitivas de $\mathcal{L}_u$, y en general sea $f(i+1)$ el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_u$ que están en $f(i)$ más aquellas que se pueden obtener a partir de las fórmulas de $f(i)$ por una aplicación de alguno de los tres esquemas de construcción. Luego, sea $g:\omega\longrightarrow P(\mathcal{L}_u)$ la función tal que $g(i)$ es el conjunto de las fórmulas de $f(i)$ que no tienen variables libres y que son verdaderas en $\langle u,\in\rangle$. Así, g proporcionará todos los enunciados de $\mathcal{L}_u$ que son verdaderos en $\langle u,\in\rangle$.

La fórmula $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ se obtendrá considerando el proceso descrito, de tal manera que se pueda verificar si ϕ está o no en $g(i)$ (cuando ϕ esté en $f(i)$). Para definir $\mathrm{Sat}(u,\phi)$, primeramente definiremos la restricción de la fórmula para las fórmulas ϕ (de $\mathcal{L}_u$) primitivas.
Sea $\mathrm{E}(u,\phi)$ la siguiente fórmula:

$$(\exists x,y\in u)[(x\in y)\wedge F_{\in}(\phi,x^\circ,y^\circ)]\vee[(\exists x\in u)F_{=}(\phi,x^\circ,x^\circ)].$$

Claramente se tiene que,

$$\mathrm{E}(u,\phi)\Leftrightarrow \mathrm{Prim}(\phi,u)\wedge[\text{“}\phi \text{ es verdadera en la estructura } \langle u,\in\rangle\text{”}].$$

Por otro lado, es facil verificar que la fórmula $\mathrm{E}(u,\phi)$ es Σ_0: es suficiente con observar que expresiones de la forma $(\exists x\in u)F_{=}(\phi,x^\circ,x^\circ)$ se deben sustituir por

$$(\exists x\in u)(\exists y\in \mathrm{ran}(\phi))(y=x^\circ\wedge F_{=}(\phi,y,y)).$$

Finalmente definimos una fórmula, $S(u,\phi)$, que expresa, en LTC, la noción de que ϕ es un enunciado de $\mathcal{L}_u$ verdadero en $\langle u,\in\rangle$. Dado que esta fórmula no será Σ_1, no la consideraremos como la fórmula buscada (pues queremos que ésta sea Δ_1^{ZF}) pero sí como una precursora.
Sea $S(u,\phi)$ la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
&(u \neq \emptyset) \wedge \mathrm{Fml}(\phi, u) \wedge \exists f \exists g[\mathrm{Sucefin}(f) \wedge \mathrm{Sucefin}(g) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)) \\
&\wedge(\phi \in g(\| g \|)) \wedge \forall\psi(\psi \in f(0) \leftrightarrow \mathrm{Prim}(\psi, u)) \\
&\wedge\forall\psi(\psi \in g(0) \leftrightarrow E(u,\psi)) \\
&\wedge(\forall j \in \mathrm{dom}(f))(\forall i \in j)\forall\psi[\psi \in f(i+1) \leftrightarrow (\psi \in f(i)) \\
&\qquad \vee(\exists\theta', \theta \in f(i))F_{\wedge}(\psi, \theta', \theta) \\
&\qquad \vee(\exists\theta \in f(i))F_{\neg}(\psi, \theta) \\
&\qquad \vee(\exists\theta \in f(i))(\exists v \in \mathrm{ran}(\psi))(\mathrm{Var}(v) \wedge F_{\exists}(\psi, v, \theta))] \\
&\wedge(\forall j \in \mathrm{dom}(g))(\forall i \in j)\forall\psi[\psi \in g(i+1) \leftrightarrow (\psi \in g(i)) \\
&\qquad \vee(\exists\theta', \theta \in g(i))F_{\wedge}(\psi, \theta', \theta) \vee (\exists\theta \in f(i))(\theta \notin g(i) \wedge F_{\neg}(\psi, \theta)) \\
&\qquad \vee(\exists\theta \in f(i))(\exists v \in \mathrm{ran}(\psi))(\exists x \in u)(\exists\theta' \in g(i)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad [\mathrm{Var}(v) \wedge F_{\exists}(\psi, v, \theta) \wedge \mathrm{Sust}(\theta', \theta, v, x^{\circ})]]]
\end{aligned}
$$

Claramente esta fórmula $S(u, \phi)$ define la relación de satisfacción requerida, pero tal como mencionamos, esta fórmula no es Σ_1 (en realidad es Π_2). El problema es el cuantificador $\forall\psi$ que aparece cuatro veces y los cuantificadores no acotados $(\exists f, \exists g)$ que aparecen en la subfórmula: $\mathrm{Sust}(\theta', \theta, v, x^{\circ})$. Como quiera que sea, este problema se puede solucionar acotando todos estos cuantificadores, de tal manera que no se pierda la expresabilidad de la noción de verdad.

A continuación definiremos, por pasos, el conjunto que acotará a los cuantificadores no acotados de la fórmula $S(u, \phi)$:

1. Sea $w_1(u, \phi)$ el siguiente conjunto,

$$\bigcup_{m \in \mathrm{dom}(\phi)} {}^{n+1}[9 \cup \{v_i | i \in w\} \cup \{x^{\circ} | x \in u\}]$$

2. Sea $w_2(u, \phi)$ el siguiente conjunto,

$$\bigcup_{n \in \mathrm{dom}(\phi)} {}^{n+1}[w_1(u, \phi)]$$

3. Sea $w(u, \phi) = w_1(u, \phi) \cup w_2(u, \phi)$.

Observe que $w_1(u, \phi)$ contiene a todas las fórmulas (de $\mathcal{L}_u$) de la misma longitud que ϕ, es decir, a todas las fórmulas ψ de $\mathcal{L}_u$ tales que, $\mathrm{dom}(\psi) = \mathrm{dom}(\phi)$, y el conjunto $w_2(u, \phi)$ contiene a todas las sucesiones finitas de fórmulas de $w_1(u, \phi)$ con dominio menor o igual al dominio de ϕ.

Así, es posible acotar con $w(u, \phi)$ a los cuantificadores anteriormente mencionados sin alterar la expresabilidad de la fórmula $S(u, \phi)$, pues las variables cuantificadas bajo estos cuantificadores (f, g, ψ) son sucesiones de fórmulas de longitud menor o igual a la de ϕ, o bien, son fórmulas de longitud menor o igual a la de ϕ.

Sea $S'(u,\phi,w)$ la fórmula que se obtiene de $S(u,\phi)$ al acotar a todos los cuantificadores no acotados por el conjunto $w(u,\phi)$. Después de esto ya estamos listos para definir la fórmula $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ deseada.

Sea $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}&\exists w\exists x\exists y\exists a\exists b\exists t[(a=\{x^\circ|x\in u\})\wedge(t=\omega)\wedge(b=\{v_i|i\in t\})\\ &\quad\wedge\mathrm{Suc}(x,9\cup a\cup b,\mathrm{dom}(\phi)+1)\wedge\mathrm{Suc}(y,x,\mathrm{dom}(\phi)+1)\\ &\quad\wedge(w=x\cup y)\wedge S'(u,\phi,w)]\end{aligned}$$

donde la subfórmula $t=\omega$ debe ser reemplazada por la fórmula:

$$\mathrm{On}(t)\wedge\lim(\mathrm{t})\wedge(\forall i\in t)[(\exists j\in i)(i=j+1)\vee(\forall j\in i)(j\neq i)].$$

Luego, por las observaciones hechas anteriormente, acerca de el conjunto $w(u,\phi)$, es claro que:

$$\mathrm{Sat}(u,\phi)\Leftrightarrow\phi \text{ es un enunciado de } \mathcal{L}_u \text{ que es verdadero en } \langle u,\in\rangle.$$

Además, se tiene que $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ es Σ_1, y más aún:

1.10 Lema. *La fórmula* $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ *de* LTC *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
De las observaciones anteriores, claramente se tiene que,

$$\mathrm{ZF}\vdash\neg\mathrm{Sat}(u,\phi)\leftrightarrow\neg[\mathrm{Fml}(\phi,u)\wedge\mathrm{Lib}(\phi,\emptyset)]\vee\exists\theta[F_\neg(\theta,\phi)\wedge\mathrm{Sat}(u,\theta)].$$

La primera subfórmula del lado derecho de la equivalencia es Δ_1^{ZF} y la segunda es Σ_1, de donde se tiene que, $\neg\mathrm{Sat}(u,\phi)$ es Σ_1^{ZF}, hecho que implica que $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ es Π_1^{ZF}. Por lo tanto la Σ_1-fórmula $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ es Δ_1^{ZF}. $\|$

Generalmente nos referiremos al enunciado $\mathrm{Sat}(u,\phi)$ por la expresión: $\models_u\phi$.

Tal como lo hemos señalado, la colección de conjuntos que constituyen "las fórmulas" de $\mathcal{L}$, proporcionan un análogo de las fórmulas del lenguaje LTC. Dada una fórmula Φ de LTC podemos construir un conjunto ϕ tal que, de acuerdo a la "sintaxis" de $\mathcal{L}$ (desarrollada hasta el momento) tiene la misma estructura lógica que tiene Φ. En este contexto, el siguiente resultado indica cómo es que la noción formal de satisfacción, recien definida, corresponde a la genuina noción de verdad.

1.1 Teorema. *Sea* $\Phi(v_0,\ldots,v_n)$ *una fórmula de* LTC, *y sea* $\phi(v_0,\ldots,v_n)$ *su contraparte en* $\mathcal{L}$ *(en el sentido recién descrito). Así,*

$$\mathrm{ZF}\vdash\forall u(\forall x_0\in u)\ldots(\forall x_n\in u)[\Phi^u(x_0,\ldots,x_n)\leftrightarrow\mathrm{Sat}(u,\phi(x_0^\circ,\ldots,x_n^\circ))].$$

Demostración:
La demostración se hará por inducción sobre la construcción de Φ (y por lo tanto de ϕ). Sea u un conjunto y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in u$.

1. (a) $\Phi(x, y) = x \in y$, así,

$$\Phi^u(x, y) \leftrightarrow (x \in y)^u \leftrightarrow x \in y$$
$$\leftrightarrow E(u, \phi(x^\circ, y^\circ)) \leftrightarrow \mathrm{Sat}(u, \phi(x^\circ, y^\circ)$$

   (b) $\Phi(x, y) = x \approx y$. Este caso es análogo al anterior.

2. (a) $\Phi(x_0, \ldots, x_n) = \Phi_0(x_0, \ldots, x_n) \wedge \Phi_1(x_0, \ldots, x_n)$. En este caso, se tiene que

$$\Phi^u(x_0, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Phi_0^u(x_0, \ldots, x_n) \wedge \Phi_1^u(x_0, \ldots, x_n)$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}(u, \phi_0(x_0^\circ, \ldots, x_n^\circ)) \wedge \mathrm{Sat}(u, \phi_1(x_0^\circ, \ldots, x_n^\circ))$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}(u, \phi(x_0^\circ, \ldots, x_n^\circ)).$$

   (b) $\Phi(x_0, \ldots, x_n) = \neg\Phi_0(x_0, \ldots, x_n)$. Este caso se lleva a cabo de manera similar al anterior.

   (c) $\Phi(x_0, \ldots, x_n) = \exists z \Phi_0(z, x_0, \ldots, x_n)$, así,

$$(\exists z \Phi_0(z, x_0, \ldots, x_n))^u \leftrightarrow (\exists z \in u)\Phi_0^u(z, x_0, \ldots, x_n)$$
$$\leftrightarrow \Phi_0^u(z, x_0, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{Sat}(u, \phi(z^\circ, x_0^\circ, \ldots, x_n^\circ))$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}(u, \exists z \phi(z, x_0^\circ, \ldots, x_n^\circ)). \quad \|$$

Observe que este resultado es un esquema de teoremas para LTC, que establece la equivalencia entre la genuina noción de verdad para una fórmula Φ de LTC, y la noción matemática de satisfacibilidad para una "fórmula" ϕ de $\mathcal{L}$.

Por analogía con LTC, definiremos la "Jerarquía de Lévy" para las fórmulas de $\mathcal{L}_V$. Por razones de conveniencia técnica, sólo serán admitidos, en cada etapa de la jerarquía, un solo cuantificador en lugar de bloques de cuantificadores como lo hicimos para LTC.

1.5 Definición. (por recursión sobre ω):

1. Una fórmula ϕ de $\mathcal{L}_V$ es Σ_0 (o Π_0), si todos los cuantificadores estan acotados, ya sea por una variable o por una constante de $\mathcal{L}_V$.

2. Una fórmula ϕ de $\mathcal{L}_V$ es Σ_{n+1} (Π_{n+1}), si es de la forma $\exists v_m \psi$ ($\neg\exists v_m \psi$), donde ψ es una fórmula Π_n (Σ_n).

A continuación definimos una fórmula de LTC, $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi)$, que define la relación: "ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_V$ que es Σ_0".

Sea $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi)$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fml}(\phi) \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(\phi))[(\phi_i = 0 \wedge \phi_{i+1} = 8 \wedge \mathrm{Var}(\phi_{i+2}))\\ &\qquad \rightarrow (\phi_{i+3} = 0 \wedge \phi_{i+4} = 6 \wedge \phi_{i+5} = 0 \wedge \phi_{i+6} = 4\\ &\qquad \wedge \phi_{i+7} = \phi_{i+2} \wedge (\mathrm{Cte}(\phi_{i+8}) \vee \mathrm{Var}(\phi_{i+8})) \wedge \phi_{i+9} = 1)].\end{aligned}$$

De igual manera definimos $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi, u)$ sustituyendo las apariciones de la subfórmula $\mathrm{Cte}(\phi)$ por $\mathrm{Cte}(\phi, u)$.

Observe que estas dos fórmulas son Σ_1. Pero además:

1.11 Lema. *Las fórmulas* $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi)$ *y* $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi, u)$ *son* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
La demostración es inmediata a partir del hecho de que la subfórmula $\mathrm{Fml}(\phi)$ es Δ_1^{ZF} y de que todas las demás subfórmulas son Σ_0. El mismo razonamiento se aplica para la fórmula $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi, u)$. ||

El siguiente resultado afirma que también existen fórmulas que definen la relación de "ser una fórmula Σ_n (Π_n) de $\mathcal{L}_V$ o de $\mathcal{L}_u$":

1.12 Lema. *Dado* $n \geq 1$, *existen fórmulas* Δ_1^{ZF}: $\mathrm{Fml}^{\Sigma_n}(\phi)$, $\mathrm{Fml}^{\Pi_n}(\phi)$, $\mathrm{Fml}^{\Sigma_n}(\phi, u)$ *y* $\mathrm{Fml}^{\Pi_n}(\phi, u)$, *tales que:*

$\mathrm{Fml}^{\Sigma_n}(\phi) \Leftrightarrow \phi$ *es una fórmula* Σ_n *de* $\mathcal{L}_V$.
$\mathrm{Fml}^{\Pi_n}(\phi) \Leftrightarrow \phi$ *es una fórmula* Π_n *de* $\mathcal{L}_V$.
$\mathrm{Fml}^{\Sigma_n}(\phi, u) \Leftrightarrow \phi$ *es una fórmula* Σ_n *de* $\mathcal{L}_u$.
$\mathrm{Fml}^{\Pi_n}(\phi, u) \Leftrightarrow \phi$ *es una fórmula* Π_n *de* $\mathcal{L}_u$.

Demostración:
Sea Φ_0, la fórmula que sigue del único cuantificador acotado en la fórmula $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi)$. Sea $\mathrm{Fml}^{\Sigma_1}(\phi)$, la fórmula:

$$\mathrm{Fml}(\phi) \wedge [\phi(0) = 0 \wedge \phi(1) = 8 \wedge \mathrm{Var}(\phi(2))] \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(\phi))(i > 2 \rightarrow \Phi_0)$$

y sea $\mathrm{Fml}^{\Pi_1}(\phi)$, la fórmula:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fml}(\phi) \wedge [\phi(0) = 0 \wedge \phi(1) = 7 \wedge \phi(2) = 0 \wedge \phi(3) = 8 \wedge \mathrm{Var}(\phi(4))]\\ &\wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(\phi))(i > 2 \rightarrow \Phi_0).\end{aligned}$$

Claramente estas fórmulas son, al igual que $\mathrm{Fml}^{\Sigma_0}(\phi)$, Δ_1^{ZF}. Así, para cada n, se puede construir Fml^{Σ_n} a partir de las anteriores. ||

A continuación se establece una relación, que existe entre los lenguajes $\mathcal{L}$ y LTC, muy importante y que se usará mucho en las siguientes secciones.

1.13 Lema. *Sea* $\Phi(\overrightarrow{x})$ *una fórmula* Σ_0 *de* LTC, *y sea* $\phi(\overrightarrow{x})$ *su contraparte en* $\mathcal{L}$.

$$\mathrm{ZF} \vdash \ \forall M(\forall \overrightarrow{x} \in M)[\mathrm{Trans}(M) \rightarrow (\Phi(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \mathrm{Sat}(M, \phi(\overrightarrow{x^{\circ}})))]$$

Demostración:
Sean $\Phi(\overrightarrow{x})$ una fórmula Σ_0, M un conjunto transitivo, y $x_1, \ldots, x_n \in M$. Como Φ es Σ_0 y M es transitivo, entonces Φ es absoluta para M, es decir

$$(\forall \overrightarrow{z} \in M)(\Phi(\overrightarrow{z}) \leftrightarrow \Phi^M(\overrightarrow{z}))$$

en particular para $x_1, \ldots, x_n$ se tiene que $(\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Phi^M(x_1, \ldots, x_n))$. Ahora, al aplicar el teorema 1.1 se tiene que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{Sat}(M, \phi(x_1^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ})).$$

Que es lo que se quería demostrar. ||

Por último, terminamos esta sección estableciendo que el conjunto Def(X) es definible en LTC. Más adelante, se demostrarán los resultados de absolutez involucrados en la definición de este conjunto. Primero recordamos su definición metateórica:

1.6 Definición. Sea X un conjunto y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es X-definible, si y sólo si existe una fórmula $\Phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de LTC, y existen $x_1, \ldots, x_n$ elementos de X, tales que

$$Y = \{a \in X | \langle X, \in \rangle \models \Phi(a, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

En vista de los resultados establecidos hasta el momento, en particular, el teorema 1.1, se puede reescribir la definición de "ser X-definible", de la siguiente manera:

1.7 Definición. Sean X un conjunto y Y un subconjunto de X, se dice que Y es X-definible, si existe un fórmula $\phi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$, tal que

$$Y = \{a \in X | \mathrm{Sat}(X, \phi(a^{\circ}))\}.$$

En forma equivalente, si:

$$Y = \{a \in X | \models_X \phi(a^{\circ})\}.$$

Ahora sí, podemos definir el conjunto Def(X):

1.8 Definición. Sea X un conjunto, se define el conjunto Def(X) de la siguiente manera,

$$\mathrm{Def}(X) = \{Y \subseteq X | \text{“}Y \text{es } X - \text{definible”}\}.$$

Por último se establece la expresabilidad de dicha noción en LTC:

1.14 Lema. *La función* Def(X) *está bien definida, y su definición es la siguiente:*

$$\begin{aligned} Z = \mathrm{Def}(X) \leftrightarrow (\forall Y \in Z)(\exists \phi)[&\mathrm{Fml}(\phi, X) \wedge \mathrm{Lib}(\phi, \{v_0\}) \\ &\wedge(Y = \{a \in X | \exists\psi(\mathrm{Sust}(\psi, \phi, v_0, a^\circ) \wedge \mathrm{Sat}(X, \psi))\})] \\ &\wedge \forall Y((\exists\phi)[\mathrm{Fml}(\phi, X) \wedge \mathrm{Lib}(\phi, \{v_0\}) \\ &\wedge(Y = \{a \in X | \exists\psi(\mathrm{Sust}(\psi, \phi, v_0, a^\circ) \wedge \mathrm{Sat}(X, \psi))\}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow (Y \in Z)]. \end{aligned}$$

Demostración:
Es directa, las primeras dos lineas aseguran que $Z \subseteq \mathrm{Def}(X)$ y las otras, que $\mathrm{Def}(X) \subseteq Z$. ||

2.2 El Universo Construible

En esta sección llevaremos a cabo el segundo paso para establecer la consistencia relativa de la Hipótesis Generalizada del Continuo y del Axioma de Elección, con respecto a los axiomas de ZF. Esto es, definiremos la estructra jerárquica L mencionada en la introducción del capítulo, y demostraremos que dicha estructura es modelo de los axiomas de ZF.

En primer lugar, debemos definir la jerarquía de los conjuntos construibles $\langle L_\alpha | \alpha \in \mathrm{ON}\rangle$, en forma rigurosa, haciendo uso de los conceptos definidos en la sección anterior, en segundo lugar estableceremos las propiedades básicas de dicha jerarquía. Por último demostraremos que el universo construible L, definido en términos de la jerarquía construible, es un modelo interno de ZF.

Comenzamos con la definición de la jerarquía construible $\langle L_\alpha | \alpha \in \mathrm{ON}\rangle$:

2.1 Definición. (Por recursión sobre $\alpha \in \mathrm{ON}$) *Jerarquía Construible.*

1. $L_0 = \emptyset$,

2. $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,

3. $L_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma$ para α límite.

Esta jerarquía es una función bien definida (en el sentido de clases) de la teoría de ZF. Por lo tanto, la clase L definida por:

$$L = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{ON}} L_\alpha$$

es una clase bien definida. A esta clase se le llama *el universo construible (de Gödel).*

Así, a los elementos de L se les llaman conjuntos construibles:

Con el siguiente lema establecemos los resultados básicos de la jerarquía construible. Estas propiedades, entre otras cosas, facilitarán la demostración de que L es modelo interno de ZF. En secciones posteriores, se establecerán algunas otras propiedades interesantes de la jerarquía construible.

2.1 Lema. *Sean α, γ y β ordinales. Los siguientes son teoremas de ZF:*

1. *Si $\gamma \leq \alpha$ entonces $L_\gamma \subseteq L_\alpha$.*

2. *L_α es transitivo.*

3. *L es transitiva.*

4. *$L_\alpha \subseteq V_\alpha$.*

5. *$L \cap \alpha = L_\alpha \cap \mathrm{ON} = \alpha$.*

6. *Si $\alpha < \beta$ entonces $\alpha, L_\alpha \in L_\beta$.*

7. *$\mathrm{ON} \subseteq L$.*

8. *Si $\alpha \leq \omega$ entonces $L_\alpha = V_\alpha$.*

9. *Si $\omega \leq \alpha$ entonces $|L_\alpha| = |\alpha|$.*

Demostración:

Demostraremos 1. y 2. simultaneamente por inducción sobre α.

1 y 2. (a) Para $\alpha = 0$ el caso es trivial.

(b) Para α límite, 1. es directo y 2. se sigue de la hipótesis de que L_γ es transitivo para toda $\gamma < \alpha$, pues la unión arbitraria de conjuntos transitivos es transitivo.

(c) Para $\alpha = \beta + 1$, suponemos que 1. y 2. se cumplen para β. Para demostrar que 1. se cumple para α, es suficiente con demostrar que $L_\beta \subseteq L_\alpha$, pues si $\gamma < \alpha$ entonces $\gamma \leq \beta$ y por la hipótesis de inducción habremos terminado. Sea $x \in L_\beta$, entonces por la hipótesis de inducción para 2. se tiene que como L_β es transitivo, entonces $x \subseteq L_\beta$. Luego,

$$x = \{y \in L_\beta | (y \in x)\},$$

pero como la fórmula $y \in x$ es Σ_0 y como (por hipótesis de inducción) L_β es transitivo, el lema 1.13 implica que

$$x = \{y \in L_\beta | \models_{L_\beta} \text{“}y^\circ \in x^\circ\text{”}\}.$$

Así, se cumple que $x \in \mathrm{Def}(L_\beta) = L_\alpha$. Para demostrar 2. en este último caso, sea $y \in x \in L_\alpha$, dado que

$$x \in L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(L_\beta),$$

se deduce que $x \subseteq L_\beta$, así, $y \in L_\beta$, luego, por 1. se concluye que $y \in L_\alpha$.

3. Directo de 2.

4. (Por inducción sobre α).

(a) Para $\alpha = 0$ se tiene que

$$L_0 = V_0 = \emptyset.$$

(b) Para α límite, se cumple que

$$L_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma \quad \text{y que} \quad V_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma.$$

Pero por hipótesis de inducción se sabe que $L_\gamma \subseteq V_\gamma$ para toda $\gamma < \alpha$, por lo tanto

$$L_\alpha \subseteq V_\alpha.$$

(c) Para $\alpha = \beta + 1$, observe que si $L_\beta \subseteq V_\beta$, entonces

$$L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_\alpha.$$

5. Por inducción sobre α demostraremos que $L_\alpha \cap \mathrm{ON} = \alpha$, la otra igualdad se sigue directamente de ésta.

(a) Para $\alpha = 0$ es trivial el hecho de que $L_0 \cap \mathrm{ON} = 0 = L \cap 0$.

(b) Para α límite se tiene que

$$L_\alpha \cap \mathrm{ON} = [\bigcup_{\gamma\in\alpha} L_\gamma] \cap \mathrm{ON} = \bigcup_{\gamma\in\alpha} [L_\gamma \cap \mathrm{ON}],$$

que, por hipotesis de inducción, es igual a $\bigcup_{\gamma\in\alpha}\gamma$ que es justamente α.

(c) Para el caso sucesor, $\alpha = \beta + 1$, suponemos que $L_\beta \cap \mathrm{ON} = \beta$. Ahora, como $L_\beta \subseteq L_\alpha \subseteq \mathcal{P}(L_\beta)$, se cumple que

$$\beta \subseteq L_\alpha \cap \mathrm{ON} \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \cap \mathrm{ON}.$$

De acuerdo a la hipótesis de inducción sabemos que $\mathcal{P}(L_\beta)\cap\mathrm{ON} \subseteq \alpha$, pues si $\gamma \in \mathcal{P}(L_\beta) \cap \mathrm{ON}$, entonces $\gamma \leq \beta \in \alpha$. De donde se concluye que

$$L_\alpha \cap \mathrm{ON} \subseteq \alpha.$$

Para demostrar la otra contención es suficiente con demostrar que

$$\beta \in L_\alpha,$$

pues si $\gamma < \alpha$ entonces $\gamma \leq \beta$, lo que conduciría a que $\gamma \in L_\alpha\cap\mathrm{ON}$ (esto último porque L_α es transitivo y $\gamma \in \mathrm{ON}$). Por hipótesis de inducción:

$$\beta = L_\beta \cap \mathrm{ON} = \{x \in L_\beta | \mathrm{ON}(x)\},$$

pero dado que la fórmula "On(x)" es Σ_0 y dado que L_β es transitivo, podemos aplicar el lema 1.13, para concluir que

$$\beta = \{x \in L_\beta| \models_{L_\beta} \text{"On}(x^\circ)\text{"}\}.$$

Así, $\beta \in \mathrm{Def}(L_\beta) = L_\alpha$. La otra igualdad se sigue directamente del hecho de que para cualquier α, $\alpha \subseteq L_\alpha \subseteq L$.

6. Por 1. es suficiente con demostrar que $\alpha, L_\alpha \in L_{\alpha+1}$, pues si $\alpha < \beta$ entonces $\alpha + 1 \leq \beta$ y por 1. se tendría que $L_{\alpha+1} \subseteq L_\beta$. Así, para demostrar que $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$, considere el siguiente hecho:

$$L_\alpha = \{x \in L_\alpha | x = x\}$$

entonces, por el lema 1.13 se tiene que:

$$L_\alpha = \{x \in L_\alpha| \models_{L_\alpha} \text{"}x^\circ = x^\circ\text{"}\}$$

(pues "$x = x$" es Σ_0 y L_α transitivo). Así, $L_\alpha \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.

La demostración de que $\alpha \in L_{\alpha+1}$ ya la hicimos durante la demostración del inciso anterior:

$$(L_\alpha \cap \mathrm{ON} = \alpha) \rightarrow (\alpha = \{x \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \text{ "On}(x^\circ)\text{"}\})$$

de donde se deduce que: $\alpha \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.

7. Es directo de 6:

$$(\alpha \in \mathrm{ON}) \rightarrow (\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L).$$

8. El caso en que $\alpha < \omega$ lo demostraremos por inducción finita. Para $\alpha = 0$ es trivial, pues $L_0 = 0 = V_0$. Sea $\alpha = n + 1$ y supondremos que $L_n = V_n$, entonces:

$$L_{n+1} = \mathrm{Def}(L_n) = \mathrm{Def}(V_n) \subseteq \mathcal{P}(V_n) = V_{n+1}$$

Ahora, para demostrar que $V_{n+1} \subseteq L_{n+1}$, sea $x \in V_{n+1}$, entonces $x \subseteq V_n = L_n$, por lo tanto, existen $a_1, \ldots, a_m \in L_n$ tales que $x = \{a_1, \ldots, a_m\}$, en consecuencia:

$$x = \{z \in L_n | z = a_1 \vee \ldots \vee z = a_m\},$$

que por el lema 1.13 implica que

$$x = \{z \in L_n | \models_{L_n} \text{ "}z^\circ = a_1^\circ \vee \ldots \vee z^\circ = a_m^\circ\text{"}\}.$$

Por lo tanto, $x \in L_{n+1}$, concluyendo así, que $L_{n+1} = V_{n+1}$. Para el caso $\alpha = \omega$ observe que:

$$V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n = \bigcup_{n<\omega} L_n = L_\omega.$$

9. Por el inciso 5, deducimos, de $\alpha \subseteq L_\alpha$, que $|\alpha| \leq |L_\alpha|$ para toda α. Demostraremos, por inducción sobre $\alpha \geq \omega$, que $|L_\alpha| \leq |\alpha|$: para $\alpha = \omega$ se tiene que

$$|L_\omega| = |V_\omega| = \omega.$$

En el caso en que α es límite, bajo la suposición de que $|L_\gamma| \leq |\gamma|$, se deduce que

$$|L_\alpha| = |\bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma| \leq \sum_{\gamma<\alpha} |L_\gamma| \leq \sum_{\gamma<\alpha} |\gamma| = |\alpha|.$$

Finalmente, para el caso en que $\alpha = \beta + 1$, supondremos que $|L_\beta| = |\beta|$, de donde concluimos que:

$$|L_\alpha| = |\mathrm{Def}(L_\beta)| \leq |L_\beta| \cdot \omega = |\beta| \cdot \omega = |\beta| = |\beta + 1|. \quad \|$$

Finalizamos la sección demostrando que L es un modelo interno de ZF. Es decir, que dado cualquier axioma Φ de ZF, en ZF se demuestra Φ^L.

2.1 Teorema. *La clase L es un modelo interno de* ZF.

Demostración:
Para cada axioma Φ de ZF demostraremos, desde ZF, Φ^L.

I. *(Extensionalidad)^L*. Se debe demostrar que

$$[\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]]^L.$$

Sean $x, y \in L$, debemos demostrar que

$$[\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]^L.$$

Pero esto es si y sólo si

$$(\forall z \in L)[(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)].$$

Dado que L es transitiva, se tiene que $x, y \subseteq L$ y por lo que lo anterior es equivalente a:

$$\forall z[(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)].$$

Pero esto se cumple en virtud del axioma de Extensionalidad.

Observación. Observe que para esta demostración sólo usamos el hecho de que L es transitivo, así, se puede establecer que cualquier clase transitiva (que sea expresable por una fórmula de LTC) es modelo del axioma de extensionalidad.

II. *(Unión)^L*. Se debe demostrar que

$$[\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u))]^L.$$

Esto es, dado $x \in L$ debemos encontrar $y \in L$ tal que

$$(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u)).$$

Pues si se demuestra que para cada $z \in L$ existe $u \in x$ con las características descritas, dicha u debe estar en L, pues L es transitiva. Ahora, por el axioma de unión, sabemos que exisite y tal que $y = \bigcup x$. Luego, dado que $x \in L$ existe un ordinal α tal que $x \in L_\alpha$. Puesto que L_α es transitivo, $y \subseteq L_\alpha$, y por lo tanto:

$$y = \{z \in L_\alpha | (\exists v_1 \in x)(z \in v_1)\};$$

más aún, dado que L_α es transitivo y que la fórmula que define a y en la ecuación anterior es Σ_0, se puede aplicar el lema 1.13 para obtener la siguiente igualdad:

$$y = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \text{“}(\exists v_1 \in x^\circ)(z^\circ \in v_1)\text{”}\},$$

concluyendo así, que

$$y \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L.$$

Pero puesto que $y = \bigcup x$, es cierta la siguiente afirmación:

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u)).$$

En particlar:

$$(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u)).$$

III *(Par)*^{L} se debe demostrar que:

$$[\forall x \forall y \exists z \forall u((u \in z) \leftrightarrow ((u \approx x) \vee (u \approx y)))]^L.$$

Dados $x, y \in L$, buscamos encontrar $z \in L$, tal que:

$$(\forall u \in L)[((u \in z) \leftrightarrow (u = x) \vee (u = y))]^L.$$

Pero como las fórmulas primitivas son absolutas, lo que debemos demostrar para dicha z, es:

$$(\forall u \in L)((u \in z) \leftrightarrow (u = x) \vee (u = y)).$$

Ahora, sabemos (por el axioma de par), que existe z tal que

$$\forall u((u \in z) \leftrightarrow (u = x) \vee (u = y)).$$

Para demostrar que $z \in L$, observe que z es un subconjunto de L_α, así,

$$z = \{u \in L_\alpha | (u = x) \vee (u = y)\},$$

y aplicando el lema 1.13, se deduce que:

$$z = \{u \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \text{“}u = x^\circ \vee u = y^\circ\text{”}\},$$

concluyendo así, que $z \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

IV.*(Infinito)*^{L}. se debe demostrar que

$$[\exists x[\exists y(y \in x) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z)]]^L.$$

Pero por el lema 2.1, inciso 6., sabemos que

$$\omega \in L_{\omega+1} \subseteq L,$$

y como $\omega \neq \emptyset$ y $\forall y \in \omega$ existe $z \in \omega$ (a saber $y+1$) tal que $y \in z$, queda demostrada la relativización de este axioma.

V.*(Potencia)*^{L}. Se debe demostrar que

$$[\forall x \exists y \forall z[z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]]^L.$$

Esto es, dado $x \in L$ debemos encontrar $y \in L$ tal que

$$(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Por el axioma de potencia, sabemos que existe y_1 tal que

$$y_1 = \mathcal{P}(x).$$

Luego, por el axioma de subconjunto aplicado a la fórmula $z \in L$ y al conjunto y_1, existe un conjunto y tal que

$$y = \{z \in y_1 | z \in L\}.$$

Ahora, para demostrar que $y \in L$, sea

$$f : y \longrightarrow ON$$

definida por $f(z) = \min\{\alpha \in \mathrm{ON} | z \in L_\alpha\}$. Por el axioma de reemplazo, $f[y]$ es un conjunto (de ordinales), y por el axioma de unión, $\bigcup f[y] = \alpha$ es un conjunto y por lo tanto un ordinal. Así, por el lema 2.1 (5), sabemos que

$$y \subseteq L_\alpha.$$

Por lo tanto, según la definición de y:

$$y = \{z \in L_\alpha | z \subseteq x\},$$

y al aplicar el lema 1.13 llegamos a que:

$$y = \{z \in L_\alpha | \models_{L\alpha} \text{“}z^\circ \subseteq x^\circ\text{”}\} \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

Por lo tanto, $y \in L$ y claramente

$$(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

VI. *(Regularidad)*^{L}. Se debe demostrar que

$$[\forall x[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge (\forall z \in y)(z \notin x))]]^L.$$

Sea $x \in L$, $x \neq \emptyset$. Debemos encontar $y \in L$ tal que $y \in x$ y:

$$[(\forall z \in y)(z \notin x)]^L.$$

Pero dado que L es transitivo, será suficiente con encontrar y tal que $y \in x$ y tal que

$$(\forall z \in y)(z \notin x).$$

A partir del axioma de Regularidad, existe $y \in x$ tal que

$$(\forall z \in y)(z \notin x),$$

que es lo que se buscaba.

Observación. En la demostración anterior solo usamos el hecho de que L es transitiva y estandar, así, se puede establecer que cualquier estructura, que sea expresable por una fórmula de LTC, transitiva y estandar, es modelo de regularidad.

VII. *(Subconjunto)*^{L}. Sea $\Phi(v_0, \ldots, v_n)$ en LTC, se debe demostrar que

$$[\forall x \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists y \forall z[(z \in y) \leftrightarrow (z \in x) \wedge \Phi(z, a_1, \ldots, a_n)]]^L.$$

Sean $x, a_1, \ldots, a_n \in L$, debemos encontrar $y \in L$ tal que

$$(\forall z \in L)[(z \in y) \leftrightarrow (z \in x) \wedge \Phi^L(z, a_1, \ldots, a_n)].$$

Sea $A = \{x, a_1, \ldots, a_n\}$ y sea

$$f : A \longrightarrow \mathrm{ON}$$

definida por $f(u) = \min\{\alpha \in \mathrm{ON} | u \in L_\alpha\}$, entonces por los axiomas de reemplazo y unión, sabemos que

$$\alpha = \bigcup f[A]$$

es un ordinal. Luego, aplicando el principio generalizado de reflexión a la jerarquía construible, existe un ordinal límite β tal que $\beta > \alpha$ y:

$$(\forall \overrightarrow{z} \in L_\beta)[\Phi^L(\overrightarrow{z}) \leftrightarrow \Phi^{L_\beta}(\overrightarrow{z})].$$

Ahora, sea ϕ la fórmula correspondiente a Φ en $\mathcal{L}$, y sea

$$y = \{z \in L_\beta| \models_{L_\beta} [\phi^{L_\beta}(z^\circ, a_1^\circ, \ldots, a_n^\circ) \wedge (z^\circ \in x^\circ)]\}.$$

Entonces, $y \in \mathrm{Def}(L_\beta) = L_{\beta+1} \subseteq L$ y además por el teorema 1.1:

$$y = \{z \in L_\beta|\Phi^{L_\beta}(z, a_1, \ldots, a_n) \wedge (z \in x)\}.$$

Así, por la elección de β según el principio generalizado de reflección, se cumple que

$$y = \{z \in x|\phi^L(z, a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Por lo tanto, dado que $y \in L$, para cualquier $z \in L$,

$$(z \in y) \leftrightarrow (z \in x) \wedge \Phi^L(z, a_1, \ldots, a_n).$$

VIII. *(Reemplazo)*^{L}. Debemos demostrar que dada una fórmula $\Phi(v_0, \ldots, v_n)$ de LTC, es válida la siguiente afirmación:

$$\begin{aligned}[\forall v_2 \ldots \forall v_n[\forall x \exists y(\Phi(x, y, v_2, \ldots, v_n) \wedge \forall z(\Phi(x, z, v_2, \ldots, v_n) \rightarrow y = z))\\ \rightarrow \forall u \exists v(\forall x \in u)(\exists y \in v)\Phi(x, y, v_2, \ldots, v_n)]]^L\end{aligned}$$

Sean $a_2, \ldots, a_n \in L$ y supongamos que

$$(\forall x \in L)(\exists y \in L)(\Phi^L(x, y, a_2, \ldots, a_n) \wedge (\forall z \in L)\Phi^L(x, z, a_2, \ldots, a_n) \rightarrow y = z)$$

debemos demostrar que dada $u \in L$ existe $v \in L$ tal que

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)\Phi^L(x, y, a_2, \ldots, a_n).$$

Sea $u \in L$ y sea $f : u \longrightarrow \mathrm{ON}$ definida por

$$f(x) = \min\{\alpha \in \mathrm{ON}|(\exists y \in L_\alpha) \wedge \Phi^L(x, y, a_2, \ldots, a_n)\}.$$

De nuevo, por los axiomas de Reemplazo y Unión, sabemos que $\alpha = \bigcup f[u]$ es un ordinal. Ahora, sea $v = L_\alpha$, entonces $v \in L$ y además

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)\Phi^L(x, y, a_2, \ldots, a_n). \qquad \|$$

2.3 Operaciones de Gödel

En esta sección definiremos el universo construible L desde una perspectiva más cercana a la definición que presenta Gödel en su monografía de 1940 [Gödel 1940]. El Teorema fundamental de esta sección establece la equivalencia entre las dos definiciones que se ofrecen en este capítulo. Aunque ya se sabe que ambas definiciones convergen en el mismo universo L, nosotros presentamos una demostración propia de la equivalencia estrato a estrato.

Los resultados de esta sección serán, además, de gran ayuda para demostrar una de las propiedades fundamentales que refiere al caracter absoluto de los estratos de la jerarquía para ciertos estratos (teorema 4.2). Este resultado, que es fundamental para demostrar (entre otros) el teorema de condensación (teorema 6.1), aparece en la bibilografía comunmente sin demostración. Atribuimos esta omisión al hecho de que dicha demostración, tal como la presentamos nosotros, hace uso de ambas definiciones de la jerarquía construible.

Comenzamos con un catálogo de funcionales llamados *Operaciones primitivas de Gödel.*

3.1 Definición. Las siguientes funciones se conocen como *operaciones primitivas de Gödel*:

$\mathcal{F}_1(X,Y) = \{X,Y\}$
$\mathcal{F}_2(X,Y) = X \times Y$
$\mathcal{F}_3(X,Y) = X \setminus Y$
$\mathcal{F}_4(X,Y) = X \cap Y$
$\mathcal{F}_5(X,Y) = \{(u,v) | u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$
$\mathcal{F}_6(X,Y) = \bigcup X$
$\mathcal{F}_7(X,Y) = \mathrm{dom}(X)$
$\mathcal{F}_8(X,Y) = \{(u,v) | (v,u) \in X\}$
$\mathcal{F}_9(X,Y) = \{(u,v,w) | (u,w,v) \in X\}$
$\mathcal{F}_{10}(X,Y) = \{(u,v,w) | (v,w,u) \in X\}$

Observe que, con ayuda del teorema 5.2 (Cap. 1), facilmente se reconocen a estas relaciones como Σ_0. A continuación definimos el mínimo conjunto que es cerrado bajo las diez operaciones anteriores y que contiene a un conjunto dado, este conjunto se ligará adelante, con la noción de definibilidad.

3.2 Definición. Sea M un conjunto, definimos la *cerradura de Gödel* para M ($\mathrm{cl}(M)$), por recursión sobre ω, de la siguiente manera:

$\mathrm{cl}^0(M) = M,$

$\mathrm{cl}^{k+1}(M) = \mathrm{cl}^k(M) \cup \mathcal{F}_1[\mathrm{cl}^k(M) \times \mathrm{cl}^k(M)] \cup \ldots \cup \mathcal{F}_{10}[\mathrm{cl}^k(M) \times \mathrm{cl}^k(M)]$,
$\mathrm{cl}(M) = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{cl}^k(M)$

En el discurso que sigue, entenderemos por *operación de Gödel* (o $G-$ *función*), todas aquellas funciones que se obtengan aplicando reiteradamente la operación de composición, iniciando con las operaciones primitivas de Gödel. El siguiente lema establece la relación que existe entre la cerradura de Gödel (para un conjunto dado) y el conjunto de las imagenes de las G-funciones (definidas en dicho conjunto):

3.1 Lema. *Sea M un conjunto. Los conjuntos*

$$A = \{\mathcal{F}(x_1 \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in M^n \wedge \text{“}\mathcal{F} \text{ es una } G - función\text{''}\}.$$

y $\mathrm{cl}(M)$ *son iguales.*

Demostración:
Demostraremos por inducción finita que: $a \in \mathrm{cl}(M) \Rightarrow a \in A$.

Para $k = 0$, $a \in M$. Pero $\mathcal{F}_6(\mathcal{F}_1(a,a))) = a$. Si $a \in \mathrm{cl}^{k+1}(M)$ y $a \in \mathrm{cl}^k(M)$, entonces, por hipótesis de inducción, $a \in A$. Si $a \notin \mathrm{cl}^k(M)$, entonces

$$a \in \mathcal{F}_i[\mathrm{cl}^k(M) \times \mathrm{cl}^k(M)]$$

(para algún $i = 1, \ldots, 10$), es decir, existen $s, t \in \mathrm{cl}^k(M)$ tal que $a = \mathcal{F}_i(s,t)$. Así, por hipótesis de inducción, $s, t \in A$, esto es, existen $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_t$ G-funciones, tal que $s = \mathcal{F}_s(\overrightarrow{a})$ y $t = \mathcal{F}_t(\overrightarrow{a})$. De donde se tiene que, $\mathcal{F}_i(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t)$ es una G-función y $a = \mathcal{F}_i(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t)(\overrightarrow{a})$. Por lo tanto, $a \in A$ y $\mathrm{cl}(M) \subseteq A$.

La otra contención se demostrará por inducción sobre la construcción de las G-funciones. Sea $\mathcal{F}(\overrightarrow{x}) \in A$, si $\mathcal{F}$ es primitiva, la definición de $\mathrm{cl}(M)$ asegura que $\mathcal{F}(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{cl}(M)$. Si se supone que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son G-funciones (definidas en M) que están en $\mathrm{cl}(M)$ y tales que $\mathcal{F}(\overrightarrow{x}) = \mathcal{F}_i(\mathcal{G}_1(\overrightarrow{x_1}), \mathcal{G}_2(\overrightarrow{x_2}))$, para algún $i = 1, \ldots, 10$, y si $\mathcal{G}_1(\overrightarrow{x}_1)$ y $\mathcal{G}_2(\overrightarrow{x}_2)$ están en $\mathrm{cl}^k(M)$ (para algún $k < \omega$), entonces $\mathcal{F}(\overrightarrow{x})$ está en $\mathrm{cl}^{k+1}(M) \subset \mathrm{cl}(M)$. Por lo tanto, queda demostrada la igualdad entre $\mathrm{cl}(M)$ y A. $\|$

3.3 Definición. Se dice que una fórmula $\phi(\overrightarrow{x})$ es *normal* , si

(i) El símbolo "$\approx$" **no** aparece en la fórmula.

(ii) La presencia del símbolo "$\in$", si ocurre, es en la forma:

$$x_i \in x_j,$$

donde $i \neq j$.

(iii) La presencia del símbolo "$\exists$" aparece en la forma:

$$(\exists x_{m+1} \in x_i)\psi(x_1, \ldots, x_{m+1}),$$

donde $i \leq m$.

A lo que buscamos llegar con los siguientes resultados, es a establecer que a toda fórmulas ϕ, Σ_0 de LTC, corresponde una G-función que está definida en términos de ϕ. Para lograrlo, es necesario establecer ciertos lemas y definiciones previas.

3.2 Lema. *Si $\phi(\overrightarrow{x})$ es una fórmula Σ_0, entonces existe una fórmula normal $\phi_N(\overrightarrow{x})$ tal que*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [\phi(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \phi_N(\overrightarrow{x})]$$

Demostración:
Las fórmulas de la forma $x \approx y$ pueden ser reemplazadas por:

$$(\forall u \in x)(u \in y) \wedge (\forall u \in y)(u \in x).$$

Fórmulas de la forma $x \in x$ pueden ser reemplazadas por:

$$(\exists u \in x)(u \approx x).$$

Por último, se debe observar que las variables que aparecen cuantificadas en ϕ pueden ser renombradas, de tal suerte que la variable con mayor subíndice sea la que aparezca cuantificada. ||

A continuación definimos el concepto de $G - fórmula$, para luego establecer la relación que existe entre algunas fórmulas y las operaciones de Gödel:

3.4 Definición. Dada una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Se dice que ϕ es una $G - fórmula$, si existe una operación (n-aria) de Gödel $\mathcal{F}_\phi$, tal que

$$\mathcal{F}_\phi(a_1, \ldots, a_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

3.1 Teorema. *Si $n > 0$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula Σ_0, entonces ϕ es una G-fórmula.*

Demostración:
Haremos uso del lema 3.2 y demostraremos el resultado para fórmulas normales.

Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula Σ_0 y normal. Supóngase que el teorema es válido para todas las subfórmulas de ϕ.

Caso 1. ϕ es atómica y, por lo tanto, de la forma $x_i \in x_j$. Demostración por inducción para $n \geq 2$:

(a) Para $n = 2$, observe que

$$\{(x_1, x_2)|(x_1 \in a_1) \wedge (x_2 \in a_2) \wedge (x_1 \in x_2)\} = \mathcal{F}_5(a_1, a_2), \text{ y}$$
$$\{(x_1, x_2)|(x_1 \in a_1) \wedge (x_2 \in a_2) \wedge (x_2 \in x_1)\} = \mathcal{F}_8(\mathcal{F}_3(a_1, a_2)).$$

(b) $n > 2$ y $j, i \neq n$. Por hipótesis de inducción, existe $\mathcal{F}$ una G-función, tal que

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1})|[(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in (a_1 \times \ldots \times a_{n-1})] \wedge (x_i \in x_j)\} = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

De aquí se sigue, que:

$$\{(x_1, \ldots, x_n)|[(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge (x_i \in x_j)\} = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \times a_n.$$

(c) $n > 2$ y $j, i \neq n - 1$. Del inciso anterior, se tiene que existe $\mathcal{F}$ una G-función, tal que

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n-1})|[(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge (x_i \in x_j)\} = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n).$$

Observe que, como $(x_1, \ldots, x_n, x_{n-1}) = ((x_1, \ldots, x_{n-2}), x_n, x_{n-1})$, entonces

$$\{(x_1, \ldots, x_n)|[(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge (x_i \in x_j)\} = \mathcal{F}_9(\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n)).$$

(d) $n > 2$, $i = n - 1$ y $j = n$. Por el inciso (a), se cumple que

$$\{(x_{n-1}, x_n)|[(x_{n-1}, x_n) \in (a_{n-1} \times a_n)] \wedge (x_{n-1} \in x_n)\} = \mathcal{F}_5(a_{n-1}, a_n),$$

por lo tanto

$$\{((x_{n-1}, x_n), (x_1, \ldots, x_{n-2}))|[(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge (x_{n-1} \in x_n)\} = \mathcal{F}_5(a_{n-1}, a_n) \times (a_1 \times \ldots \times a_{n-2}).$$

Sea $\mathcal{F}$ la G-función $\mathcal{F}_5(a_{n-1}, a_n) \times (a_1 \times \ldots \times a_{n-2})$. Ahora, observe que

$$((x_{n-1}, x_n), (x_1, \ldots, x_{n-2})) = (x_{n-1}, x_n, (x_1, \ldots, x_{n-2})), \text{ y que}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-2}), x_{n-1}, x_n).$$

Así, se deduce:

$$\{(x_1, \ldots, x_n), |[(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge (x_{n-1} \in x_n)\} = \mathcal{F}_{10}(\mathcal{F}_5(a_{n-1}, a_n)).$$

(e) Completamente análogo al anterior.

Caso 2. $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una negación, de la forma: $\neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$. Por hipótesis de inducción, existe $\mathcal{F}$ una G-función, tal que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n)\} = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n).$$

Pero claramente, de aquí se sigue, que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n)\} \\ = (a_1 \times \ldots \times a_n) \setminus \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n).$$

Esta última función, es facilmente reconocible como G-función.

Caso 3. $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una conjunción, de la forma $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \wedge \beta(x_1, \ldots, x_n)$. Por hipótesis de inducción, sabemos que existen $\mathcal{F}_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{F}_\beta(a_1, \ldots, a_n)$, G-funciones, tales que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \alpha(x_1, \ldots, x_n)\} = \mathcal{F}_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

y

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \beta(x_1, \ldots, x_n)\} = \mathcal{F}_\beta(a_1, \ldots, a_n).$$

Por lo tanto, es claro que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | [(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 \times \ldots \times a_n)] \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n)\} \\ = \mathcal{F}_\alpha(a_1, \ldots, a_n) \cap \mathcal{F}_\beta(a_1, \ldots, a_n).$$

De nuevo, esta última, es facilmente reconocible como G-función.

Caso 4. $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es de la forma:

$$\exists x_{n+1}((x_{n+1} \in x_i) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}).$$

Ahora, por hipótesis de inducción, se sabe que existe $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n)$, una G-función, tal que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in a_1 \times \ldots \times a_n \wedge (x_{n+1} \in x_i \wedge \psi(x_1, \ldots, x_{n+1}))\} \\ = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_{n+1}).$$

Afirmamos que:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in a_1 \times \ldots \times a_n \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n)\} \\ = (a_1 \times \ldots \times a_n) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n, \bigcup a_i)).$$

Veamos, sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y sea $a = a_1 \times \ldots \times a_n$. Así, para toda $x \in a$, se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\phi(x) \leftrightarrow (\exists y \in x_i)\psi(x, y)$$

$$\leftrightarrow \exists y(y \in x_i \wedge \psi(x,y) \wedge y \in \bigcup a_i)$$
$$\leftrightarrow x \in \operatorname{dom}(\{(x,y) \in a \times \bigcup a_i | (y \in x_i \wedge \psi(x,y)\}).$$

Queda demostrada, así, la afirmación, y por lo tanto el teorema. ||

Recuerde que el conjunto Def(M) es el conjunto de todos los subconjuntos de M que se pueden definir a partir de una fórmula relativizada a M y con parametros en M. A continuación se establece una de las dos implicaciones (que demostraremos existen) entre las nociones de definibilidad y de cerradura de Gödel.

3.3 Lema. *Si M es un conjunto, entonces*

$$\operatorname{Def}(M) \subseteq \operatorname{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M).$$

Demostración:
Sea $a \in \operatorname{Def}(M)$. Existe una fórmula ϕ de LTC y existe $(z_1, \ldots, z_n) \in M^n$ tal que

$$a = \{x \in M | \phi^M(z_1, \ldots, z_n, x)\}.$$

Sea $\psi(M, z_1, \ldots, z_n, x) = \phi^M(z_1, \ldots, z_n, x)$. Así,

$$a = \{x \in M | \psi(M, z_1, \ldots, z_n, x)\}.$$

Obsérve que $\psi(M, z_1, \ldots, z_n, x)$ es una fórmula Σ_0. Por lo tanto, gracias al teorema 3.1 recién demostrado, $\psi(M, z_1, \ldots, z_n, x)$ es una G-fórmula, es decir, existe $\mathcal{F}(A, B_1, \ldots, B_n, C)$, una G-función, tal que

$$\mathcal{F}(A, B_1, \ldots, B_n, C) = \{(M, z_1, \ldots, z_n, x) | [(M, z_1, \ldots, z_n, x) \in (M \times B_1 \times \ldots \times B_n \times C)] \wedge \psi(M, z_1, \ldots, z_n, x)\}.$$

Ahora, sean

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{F}_1(M, M) = \{M\} \\ B_1 &= \mathcal{F}_1(z_1, z_1) = \{z_1\} \\ &\ldots \\ B_n &= \mathcal{F}_1(z_n, z_n) = \{z_n\} \\ C &= M \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z_1, \ldots, z_n, M) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}_1(M, M), \mathcal{F}_1(z_1, z_1), \ldots, \mathcal{F}_1(z_n, z_n), M) \\ &= \{(M, z_1, \ldots, z_n, x) | [(M, z_1, \ldots, z_n, x) \in (\{M\} \times \{z_1\} \times \\ &\qquad \ldots \times \{z_n\} \times M)] \wedge \phi^M(z_1, \ldots, z_n, x)\} \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\mathcal{F}_7(\mathcal{F}_8(\mathcal{F}'(z_1,\ldots,z_n,M))) = \{x \in M | \phi^M(z_1,\ldots,z_n,x)\} = a.$$

Por lo tanto, $a \in (\mathrm{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M))$. ∥

La otra contención se cumple para conjuntos transitivos. Pero para demostrar ésto, requerimos del siguiente lema.

3.4 Lema.

1. *Para* $i = 1,\ldots,10$, *la relación* $\mathcal{F}_i(X,Y) = Z$ *es* Σ_0.

2. *Si* $\mathcal{F}$ *es una operación de Gödel y* $\phi(x)$ *es una fórmula* Σ_0 *de LTC, entonces las relaciones*

   (a) $u \in \mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$;

   (b) $(\forall u \in \mathcal{F})\phi(u)$, $(\exists u \in \mathcal{F})\phi(u)$;

   (c) $Z = \mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$;

   (d) $\phi(\mathcal{F})$,

   son Σ_0.

Demostración:
La parte 1. es directa de la definición 3.1 y (tal como se mencionó) del teorema 5.2 del capítulo 1.

La demostración para 2., la haremos por inducción simultanea sobre la construcción de $\mathcal{F}$. La base de inducción se sigue directamente de 1. Ahora, supóngase que $\mathcal{F}$ es de la forma $\mathcal{F}_i(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$ y que tanto $\mathcal{G}_1$ como $\mathcal{G}_2$ cumplen con las propiedades a)-d). Demostraremos, sólamente para los casos $i = 1,2,6$, que $\mathcal{F}$ cumple las propiedades a)-d), los otros casos se demuestran siguiendo el mismo razonamiento:

a) Las relaciónes "$u \in \{\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2\}$", "$(u \in (\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2))$", y "$(u \in \bigcup \mathcal{G}_1)$", están definidas, respectivamente, por las fórmulas:

$(u = \mathcal{G}_1) \vee (u = \mathcal{G}_2)$,
$(\exists x \in \mathcal{G}_1)(\exists y \in \mathcal{G}_2)(u = (x,y))$,
$(\exists y \in \mathcal{G}_1)(u \in y)$.

Ahora, la primera fórmula se reconoce como Σ_0 si se aplica la hipótesis de inducción de c). La segunda y la tercera fórmula también lo son, pues se aplica la hipótesis de inducción de b).

b) Las fórmulas $(\forall u \in \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\})\phi(u)$, $(\forall u \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)\phi(u)$, y $(\forall u \in \bigcup \mathcal{G}_1)\phi(u)$ son, respectivamente, equivalentes a las siguientes fórmulas:

$\phi(\mathcal{G}_1) \wedge \phi(\mathcal{G}_2)$,
$(\forall u \in y)(\text{relación}(y) \wedge \text{dom}(y) = \mathcal{G}_1 \wedge \text{rang}(y) = \mathcal{G}_2 \rightarrow \phi(u))$,
$(\forall u \in y)(y \in \mathcal{G}_1 \rightarrow \phi(u))$.

La primera fórmula es, claramente, Σ_0 al aplicar la hipótesis de inducción de c). La segunda lo es al aplicar la hipótesis de inducción de d), y la última también lo es, si se aplica la hipótesis de inducción de a).

c) En este caso, observemos que la relación "$Z = \mathcal{F}$" puede ser definida por la fórmula:

$$(\forall u \in Z)(u \in \mathcal{F}) \wedge (\forall u \in \mathcal{F})(u \in Z).$$

La cual se reconoce como Σ_0, debido a los incisos a) y b) ya demostrados.

d) En la fórmula $\phi(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ aparece en ϕ en alguna de las siguientes formas:
$u \in \mathcal{F}$,
$\mathcal{F} \in u$,
$Z = \mathcal{F}$,
$(\forall u \in \mathcal{F})$, o
$(\exists u \in \mathcal{F})$.

Si se observa que la fórmula $(\mathcal{F} \in u)$ puede ser reemplazada por la fórmula $(\exists y \in u)(y = \mathcal{F})$, entonces se afirma que cada una de las apariciones de $\mathcal{F}$ en la Σ_0-fórmula ϕ, pueden ser reemplazadas por fórmulas Σ_0, obteniendo así, una Σ_0 fórmula equivalente a $\phi(\mathcal{F})$. ||

Es a partir de este lema, que se puede establecer la igualdad entre los conjuntos: $\text{Def}(M)$ y $\text{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M)$, para M transitivo. Así, dado que el último conjunto es claramente definible en la teoría de los conjuntos, se puede establecer la noción de definibilidad en términos de dichos conjuntos y en particular, para el caso que nos interesa (el de la jerarquía construible), se puede redefinir a la jerarquía construible de la siguiente manera:

$$L_0 = \emptyset; \quad L_{\alpha+1} = \text{cl}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\}) \cap P(L_\alpha);$$

$$L_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha, \text{ si } \lim(\alpha); \quad L = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} L_\alpha.$$

En vista del siguiente teorema, ambas definicione de la jerarquía construible son equivalentes, por lo que, en algunos momentos se usará esta defınción, tal como es el caso de los lemas 4.7 y 4.8 de la siguiente sección.

3.2 Teorema. *Si M es un conjunto transitivo, entonces*

$$\text{Def}(M) = \text{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M).$$

Demostración:
La contención
$$\mathrm{Def}(M) \subseteq \mathrm{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M),$$
se demostró en el lema 3.3.

Para demostrar la otra contención procedemos de la siguiente manera: sea $\mathcal{F}$ una operación de Gödel, sea M un conjunto transitivo y sean $w_1, \ldots, w_n$ en M, tal que $\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n) \subseteq M$. Así, $\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n)$ se puede escribir de la siguiente forma:
$$\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n) = \{u \in M | \phi(u, M, w_1, \ldots, w_n)\},$$
donde $\phi(u, M, w_1, \ldots, w_n)$ es la Σ_0-fórmula (dada por el lema anterior) que define a la relación:
$$\text{“}u \in \mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n)\text{”}.$$
Ahora, como M es transitivo y todas las cotas de los cuantificadores de ϕ son M o u o w_i, entonces todas las cotas de los cuantificadores de ϕ pueden ser reemplazadas por M, obteniendo así que $\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n)$ se puede escribir como:
$$\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n) = \{u \in M | \phi_1^M(u, w_1, \ldots, w_n)\},$$
donde ϕ_1 es la fórmula que se obtuvo al hacer el reemplazo mencionado en ϕ. Lo cual implica, según el lema 1.13 (Cap. 1) que:
$$\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n) = \{u \in M | \models_M \phi_1(u^\circ, w_1^\circ, \ldots, w_n^\circ)\}.$$
De aquí que $\mathcal{F}(M, w_1, \ldots, w_n) \in \mathrm{Def}(M)$, de donde concluimos que:
$$\mathrm{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M) \subseteq \mathrm{Def}(M). \quad \|$$

2.4 El Axioma de Constructibilidad

El axioma de constructibilidad es el enunciado que afirma que todo conjunto es construible. En términos metatóricos este enunciado corresponde a la expresión: “$V = L$”. Pero en términos formales el axioma de constructibilidad es el siguiente:
$$\forall x (\exists \alpha \in \mathrm{ON})(x \in L_\alpha).$$

En esta sección demostraremos que L es un modelo interno de ZF+$V = L$. Para establecer lo anterior, sólo hace falta demostrar que:

$$\mathrm{ZF} \vdash (V = L)^L.$$

Ahora, esto sucede si y solo si ZF $\vdash V^L = L^L$ y dado que $V^L = L$, el trabajo que desarrollaremos en está sección, estará centrado en la demostración de el hecho de que $L^L = L$. Esto se logrará demostrando que L es absoluta para cierta clase de estructuras $\mathcal{M}$ (de LTC) a la que pertenece L, es decir, demostrando que:

$$(L \in \mathcal{M}) \wedge (\forall M \in \mathcal{M})(L^M = L).$$

Para lograrlo, es suficiente mostrar que la propiedad se cumple para todos los estratos de la jerarquía constructiva. Para ello demostramos que existe una fórmula H(x, α) de LTC, que es Δ_1^{ZF} y que es la definición, en LTC, del enunciado metateórico "$x = L_\alpha$". Así, se tendrá que:

$$L = \{y | \exists x \exists \alpha (y \in x \wedge H(x, \alpha))\}.$$

Comenzaremos con los requisitos para poder definir dicha fórmula. En primer término, es necesario definir una fórmula Sucf(x, y) de LTC tal que:

Sucf$(x, y) \Leftrightarrow$ y es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de x.

4.1 Definición. Sea Sucf(x, y) la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned} &\exists f[(f \text{ es una función }) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \omega) \\ &\quad \wedge (f(0) = \emptyset) \wedge (y = \bigcup \mathrm{ran}(f)) \\ &\quad \wedge (\forall n \in \omega)(\forall s \in f(n+1))(\exists t \in f(n))(\exists a \in x)(s = t \cup \{(n, a)\}) \\ &\quad \wedge (\forall n \in \omega)(\forall s \in f(n))(\forall a \in x)(\exists t \in f(n+1))(t = s \cup \{(n, a)\})]. \end{aligned}$$

Observe que la fórmula Sucf(x, y) sí define la propiedad mencionada; f es una función que a cada n asocia el conjunto de todas las n−sucesiones de elementos de x, así $y = \bigcup \mathrm{ran}(f)$ es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de x.

4.1 Lema. *La fórmula* Sucf(x, y) *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
La fórmula Sucf(x, y), tal como aparece en la definición, es Σ_1; para asegurarlo es necesario hacer explícitas las apariciones de ω, como por ejemplo en "$\forall n \in \omega$". Para llevar a cabo esto, agregamos el prefijo

$$\exists w(\mathrm{Omega}(w))$$

(donde Omega(w) es la definición en LTC de ω) a la fórmula Sucf(x,y), para después reemplazar cada aparición de ω por w.

Ahora, se debe encontrar una fórmula Π_1 equivalente a Sucf(x,y) en ZF. Mediante el teorema de recursión, es fácil construir, para cada conjunto x (desde ZF) una función f como la que aparece en Sucf(x,y). Así,

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall x \exists y \mathrm{Sucf}(x,y).$$

También del teorema de recursión se desprende que dicha y debe ser única con esa propiedad, de donde se concluye que

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Sucf}(x,y) \leftrightarrow \forall z[\mathrm{Sucf}(x,z) \rightarrow (z=y)].$$

Por lo que Sucf(x,y) es Δ_1^{ZF}. ||

A continuación se define una fórmula Pot(x,y) tal que,

Pot$(x,y) \Leftrightarrow y$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de x.

4.2 Definición. Sea Pot(x,y) la siguiente fórmula de LTC:

$$\exists z[\mathrm{Sucf}(x,z) \wedge y = \{\mathrm{ran}(u) | u \in z\}].$$

Claramente esta definición de Pot(x,y) tiene la propiedad mencionada. Pero más aún esta fórmula es Δ_1^{ZF}:

4.2 Lema. *La fórmula* Pot(x,y) *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Procedemos de manera similar a la demostración del lema anterior. Tal como aparece, la fórmula Pot(x,y) es Σ_1, solo es necesario verificar que el término

$$y = \{ran(u) | u \in z\},$$

escrito formalmente en LTC, es Σ_1. Por otro lado se tiene que

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall x \exists y \ \mathrm{Pot}(x,y)$$

y dicha y debe ser única. En consecuencia:

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Pot}(x,y) \leftrightarrow \forall z[\mathrm{Pot}(x,z) \rightarrow z=y].$$

De donde se concluye que Pot(x,y) es Δ_1^{ZF}. ||

Para demostrar que existe la fórmula $H(\alpha, x)$ (mencionada al inicio de la sección) con las propiedades descritas, es necesario demostrar que existe una definición Δ_1^{ZF} (en LTC) de la relación:

$$v = \mathrm{Def}(u).$$

Comenzaremos con una primera aproximación de dicha definición (un poco más explícita que la dada en la sección 2).

4.3 Definición. Sea $A(u, v)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in v)\exists\phi[\mathrm{Fml}(\phi, u) \wedge \mathrm{Lib}(\phi, \{v_0\}) \wedge (x \subseteq u) \\
&\wedge(\forall z \in u)(z \in x \leftrightarrow \exists\psi(\mathrm{Sust}(\psi, \phi, v_0, z^\circ) \wedge \mathrm{Sat}(u, \psi)))] \\
&\wedge\forall\phi[(\mathrm{Fml}(\phi, u) \wedge \mathrm{Lib}(\phi, \{v_0\})) \\
&\qquad \rightarrow (\exists x \in v)[(x \subseteq u) \wedge (\forall z \in u)(z \in x) \\
&\qquad\qquad \leftrightarrow \exists\psi(\mathrm{Sust}(\psi, \phi, v_0, z^\circ) \wedge \mathrm{Sat}(u, \psi)))]].
\end{aligned}$$

Claramente $A(u, v)$ define la relación que nos interesa, pero también es claro que esta fórmula no es Σ_1 siquiera. Es necesario acotar los cuantificadores que aparecen no acotados en la definición anterior por una sola cota. Para encontrar esta cota es necesario un desarrollo similar al que se llevó a cabo en la sección 1 para construir la fórmula $\mathrm{Sat}(u, \phi)$, en ese caso se encontró una cota para todos los cuantificadores no acotados de $S(u, \phi)$. Pero como esa cota no es suficientemente grande como para acotar a los cuantificadores de $A(u, v)$, construiremos una extensión de dicha cota, esto es, un conjunto que acote a los cuantificadores de $A(u, v)$ pero que además acote a los de $S(u, \phi)$. Así, redefiniremos a $A(u, v)$ como la fórmula que se obtiene de $A(u, v)$ al sustituir las apariciones de $\mathrm{Sat}(u, \phi)$ por la fórmula $S(u, \phi)$ y a ésta la denotaremos con $B(u, v)$. Ahora, dado que $S(u, \phi)$ es equivalente a $\mathrm{Sat}(u, \phi)$ se tiene que $A(u, v)$ es equivalente a $B(u, v)$.

A continuación buscaremos una cota para todos los cuantificadores no acotados de $B(u, v)$. Sea $C(u, v, w)$ la fórmula que se obtiene al acotar todos los cuantificadores no acotados de $B(u, v)$ por el conjunto w, incluyendo aquellos que aparecen en las subfórmulas "Sust", "Lib" y "Fml". Así, si w es un conjunto, entonces $C(u, v, w)$ será Σ_0.

Se define $K(u)$ a partir de los conjuntos $k_0(u)$, $k_1(u)$, $k_2(u)$, $k_3(u)$ de la siguiente manera:

1. $k_0(u) = 9 \cup \{v_i | i \in \omega\} \cup \{x^\circ | x \in u\}$.

2. $k_1(u) =$" el conjunto de sucesiones finitas de miembros de $k_0(u)$."

3. $k_2(u) =$ " el conjunto de sucesiones finitas de $k_1(u)$."

4. $k_3(u) =$ " el conjunto de sucesiones finitas de subconjuntos finitos del conjunto $\{v_i | i \in \omega\}$."

5. $K(u) = k_1(u) \cup k_2(u) \cup k_3(u)$.

Es claro que este conjunto acota a los cuantificadores no acotados de $B(u, v)$ incluyendo aquellos que aparecen en las fórmulas $S(u, \phi)$, $\mathrm{Fml}(u, \phi)$, $\mathrm{Sust}(\psi, \phi, x, y)$ y $\mathrm{Lib}(\phi, x)$.

A continuación definimos una fórmula, $K(u, w)$, que define a este conjunto en LTC:

4.4 Definición. Sea $K(u, w)$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}(\exists a, b, c, d, e, f)[&[(\forall z \in d)\mathrm{Var}(z) \wedge (\forall i \in \omega)(v_i \in d)]\\ &\wedge(\forall z \in e)\mathrm{Const}(z, u) \wedge (\forall z \in u)(z^\circ \in e)]\\ &\wedge[\mathrm{Sucf}(a, 9 \cup d \cup e)]\\ &\wedge[\mathrm{Sucf}(b, a)]\\ &\wedge[\mathrm{Pot}(f, d) \wedge \mathrm{Sucf}(c, f)]\\ &\wedge[w = a \cup b \cup c]].\end{aligned}$$

De esta definición, claramente se tiene que

$$K(u, w) \Leftrightarrow w = K(u).$$

Ahora, sea $D(u, v)$ la fórmula:

$$\exists w[K(u, w) \wedge C(u, v, w)].$$

Esta fórmula dice que existe un conjunto w que es precisamente $K(u)$. Y además $v = \mathrm{Def}(u)$, puesto que dicho w acota a todos los cuantificadores de la fórmula $B(u, v)$ sin perder su significado semántico. Así, es claro que

$$D(u, v) \Leftrightarrow v = \mathrm{Def}(u).$$

Donde, además, $D(u, v)$ es una fórmula Σ_1 (pues $C(u, v, w)$ es Σ_0 y $K(u, w)$ es Σ_1). Más aún, al igual que con las fórmulas anteriores, también se tiene el siguiente lema:

4.3 Lema. *La fórmula $D(u, v)$ de* LTC *es* Δ_1^{ZF}.

Demostración:
Observe que para cualquier conjunto u se puede demostrar, desde ZF, que existen conjuntos w, v tal que $w = K(u)$ y $v = \mathrm{Def}(u)$, además dichos conjuntos son únicos para u. Así,

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall u \exists! v[D(u, v)],$$

por lo que se tiene que

$$\mathrm{ZF} \vdash D(u,v) \leftrightarrow \forall z[D(u,z) \rightarrow z = v]$$

De donde se concluye que $D(u,v)$ es Δ_1^{ZF}. $\|$

A continuación definimos una fórmula, que llamaremos $E(\alpha, f)$, tal que:

$$E(\alpha, f) \Leftrightarrow f = (L_\gamma | \gamma \leq \alpha).$$

Es decir, f es "la función" de ON en V, tal que $f(\alpha) = L_\alpha$.

4.5 Definición. Sea $E(\alpha, f)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}&\mathrm{On}(\alpha) \wedge (f \text{ es una función }) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \alpha + 1) \wedge (f(0) = \emptyset)\\ &\quad \wedge(\forall \gamma \in \mathrm{dom}(f))[((\lim(\gamma) \wedge \gamma > 0) \rightarrow (f(\gamma) = \textstyle\bigcup_{\delta<\gamma} f(\delta)))\\ &\quad \wedge(\mathrm{sucesor}(\gamma) \rightarrow D(f(\gamma), f(\gamma - 1)))].\end{aligned}$$

Es claro que esta fórmula dice que f es una función con dominio $\alpha + 1$ y tal que para cada $\gamma \leq \alpha$ se tiene que $f(\gamma) = L_\gamma$. Más aún, se tiene el siguiente lema:

4.4 Lema. *La fórmula $E(\alpha, f)$ es Σ_1 y Δ_1^{ZF}.*

Demostración:
Si sustituimos la aparición de la expresión

$$f(\gamma) = \bigcup_{\delta<\gamma} f(\delta)$$

por la fórmula

$$(\forall x \in f(\gamma))(\exists \delta \in \gamma)(x \in f(delta)) \wedge (\forall \delta \in \gamma)(f(\delta) \subseteq f(\gamma)),$$

es claro que se obtiene una fórmula Σ_1, pues la fórmula del primer renglón es Σ_0, la del segundo renglón es Σ_1 [esto es claro si se sustitutye el cuantificador

$$(\forall \gamma \in \mathrm{dom}(f)(\ldots)$$

por

$$\exists w(w = \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall \gamma \in w)(\ldots)]$$

y por el lema anterior se tiene que la fórmula del tercer renglón es Σ_1.

Para comprobar que $E(\alpha, f)$ es Δ_1^{ZF} es necesario demostrar que

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall \alpha \exists f[E(\alpha, f)].$$

Pero, haciendo uso del teorema de recursión, sabemos que para cada ordinal α es posible definir una única función

$$f : \alpha + 1 \longrightarrow \operatorname{ran}(f)$$

tal que $(\forall\gamma \in \operatorname{dom}(f))(f(\gamma) = L_\gamma)$. Así, se tiene que

$$\mathrm{ZF} \vdash E(\alpha, f) \leftrightarrow \forall g[E(\alpha, g) \rightarrow g = f].$$

Y por lo tanto, que $E(\alpha, f)$ es Δ_1^{ZF}. ‖

Según el lema anterior, en el caso en que M sea un modelo interno de ZF, se tiene que

$$[E(\alpha, f)]^M \leftrightarrow f = (L_\gamma^M | \alpha \leq \alpha).$$

Ahora ya estamos en posibilidad de describir una fórmula de LTC que defina la relación metateórica "$x = L_\alpha$".

4.6 Definición. Sea $H(\alpha, x)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\exists f[E(\alpha, f) \wedge (x = f(\alpha))].$$

Es claro que esta fórmula es Σ_1 y que además define la relación mencionada. Pero también es posible demostrar que esta fórmula es absoluta para modelos (clase) transitivos de ZF, es decir, se tiene el siguiente lema:

4.5 Lema. *La fórmula $H(\alpha, f)$ es Δ_1^{ZF}.*

Demostración:
Es claro que

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha\exists! x[H(\alpha, x)].$$

Así, usando el mismo argumento que hemos aplicado antes, se tiene que $H(\alpha, x)$ es Δ_1^{ZF}. ‖

Una vez definida esta fórmula y demostrado el lema anterior, sólo falta demostrar que para cierta clase de modelos de ZF (que incluye a L), el universo constructible es absoluto. Esto se condensa en el siguiente lema y su respectivo corolario.

4.6 Lema. *Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los modelos internos de ZF. Entonces para toda M en $\mathcal{M}$ y para todo $\alpha \in$ ON se tiene que*

$$[H(\alpha, x)]^M \Rightarrow x = L_\alpha.$$

Demostración: En la demostración del lema anterior mencionamos que, a partir del teorema de recursión, es posible demostrar que

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha\exists x[H(\alpha, x)].$$

Así, dada $M \in \mathcal{M}$, el teorema fundamental de modelos internos asegura que

$$\mathrm{ZF} \vdash (\forall\alpha \in M)(\exists x \in M)[H(\alpha, x)]^M.$$

Ahora, sea $\alpha \in \mathrm{ON}$, dado que M es modelo interno de ZF, $\mathrm{ON} \subseteq M$ y por lo tanto $\alpha \in M$. Sea $x \in M$ tal que $H(\alpha, x)^M$, entonces por el lema anterior,

$$\mathrm{ZF} \vdash (\forall\beta \in M)(\forall y \in M)[H(\beta, y) \leftrightarrow [H(\beta, y)]^M],$$

en particular esto es cierto para α y x. Por lo que se tiene que $H(\alpha, x)$ se cumple, lo que implica que $x = L_\alpha$. ||

Corolario 1. *Sea* $M \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha \in \mathrm{ON}$, *entonces*
(i) $L_\alpha^M = L_\alpha$.
(ii) $L^M = L$.
(iii) $L^L = L$.

Demostración:
(i) Dado que $M \in \mathcal{M}$ se tiene que $\alpha \in M$, así, sabemos que existe x en M tal que $[H(\alpha, x)]^M$ y esto, por definición de $H(\alpha, x)$, implica que existe $f = (L_\gamma^M | \gamma \leq \alpha)$ en M tal que $x = f(\alpha) = L_\alpha^M$, pero por el lema anteior sabemos que $x = L_\alpha$, por lo que se concluye que

$$L_\alpha = L_\alpha^M.$$

(ii) Directamente a partir de (i) se tiene que:

$$L^M = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} L_\alpha^M = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} L_\alpha = L.$$

(iii) Este es el caso particular para L, pues $L \in \mathcal{M}$. ||

4.1 Teorema. $\mathrm{ZF} \vdash (V = L)^L$.

Demostración:

$$(V = L)^L \leftrightarrow V^L = L^L,$$

como $V^L = L$, se tiene que

$$(V = L)^L \leftrightarrow L = L^L,$$

pero por el corolario anterior inciso (iii) se tiene que $L^L = L$, así

$$(V = L)^L \leftrightarrow L = L.$$

Y como en ZF es teorema $L = L$, hemos terminado la demostración. ||

Corolario 1. Cons(ZF) $\Rightarrow$ Cons(ZF + V = L).

Demostración:
Aplicar el lema fundamental de modelos internos. ||

Como parte última de esta sección, se lleva a cabo el desarrollo necesario para establecer el caracter absoluto de la fórmula $H(\gamma, x)$ con respecto a los estratos L_α, cuando α es límite y mayor que ω. Este resultado será de gran utilidad en las siguientes secciones, en particular para la demostración del lema de condensación. Inciamos definiendo cierto tipo de conjuntos transitivos:

4.7 Definición. Se dice que un conjunto transitivo M es *adecuado*, si cumple lo siguiente:

(a) M es cerrado bajo operaciones de Gödel.
(b) si $U \in M$, entonces $\{\mathcal{F}_i(x,y) | (x, y \in U) \wedge i = 1, \ldots, 10\} \in M$
(c) $\alpha \in M \;\Rightarrow\; \langle L_\gamma | \gamma < \alpha \rangle \in M$
(d) $\omega \in M$.

Es para estos conjuntos que la fórmula $H(\alpha, x)$ es absoluta:

4.7 Lema. *Si M es un conjunto adecuado, entonces la relación $x = L_\alpha$ es absoluta para M.*

Demostración:
Reescribimos la fórmula $H(\alpha, y)$ que define a la relación $y = L_\alpha$:

$$H(\alpha, y) \;\Leftrightarrow\; \exists f (E(\alpha, f) \wedge (\alpha, y) \in f),$$

donde

$$\begin{aligned} E(f, \alpha) \;\Leftrightarrow\; & \mathrm{On}(\alpha) \wedge \mathrm{Fun}(f) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \alpha + 1) \wedge ((\emptyset, \emptyset) \in f) \\ & \wedge (\forall \gamma \leq \alpha)[\lim(\gamma) \rightarrow (\gamma, \bigcup \mathrm{ran}(f|_\gamma) \in f] \\ & \wedge (\forall \gamma < \alpha)[(\gamma + 1, \mathrm{Def}(f(\gamma))) \in f]. \end{aligned}$$

Demostraremos pues, que la fórmula $H(\alpha, y)$ es absoluta para M. Observe que:

$$\begin{aligned}[H(\alpha,y)]^M \Leftrightarrow (\exists f\in M)[[\mathrm{ON}(\alpha)\wedge \mathrm{Fun}(f)\wedge(\mathrm{dom}(f)=\alpha+1)\\ \wedge((0,0)\in f)\\ \wedge(\forall\gamma\leq\alpha)[\lim(\gamma)\to(\gamma,[\bigcup\mathrm{ran}(f|_\gamma)]^M)\in f]\\ \wedge(\forall\gamma<\alpha)[(\gamma+1,[\mathrm{Def}(f(\gamma))]^M)\in f]\\ \wedge(y,\alpha)\in f].\end{aligned}$$

Dado que las relaciones $\bigcup X$ y $\mathrm{ran}(X)$ son absolutas para M (pues M es transitivo y ambas relaciones son Σ_0), será suficiente con demostrar que:

1) La función $\mathrm{Def}(U)$ es absoluta para M.

2) Para toda $\alpha\in M$, si $\gamma\leq\alpha$ entonces $f|_\gamma\in M$.

3) Para toda $\alpha\in M$, si $\gamma\leq\alpha$ entonces $f(\gamma)\in M$.

Para demostrar 1), recordamos la segunda definición de $\mathrm{Def}(U)$ dada en este capítulo:

$$\mathrm{Def}(U)=\mathrm{cl}(U\cup\{U\})\cap\mathcal{P}(U),$$

donde $\mathrm{cl}(W)=\bigcup\mathrm{ran}(G(W))$ y la función $G(W)$ está definida por recursión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&G_0(W)=W\\ &G_{n+1}(W)=G_n(W)\cup\{\mathcal{F}_i(x,y)|x,y\in G_n(W)\wedge i=1,\dots,10\}.\end{aligned}$$

A continuación, demostraremos que la relación $x\in\mathrm{Def}(U)$ es absoluta para M, de donde concluiremos que la función $\mathrm{Def}(U)$ también lo es. Sean $x,U\in M$, así:

$$x\in\mathrm{Def}(U)\ \Leftrightarrow\ x\subseteq U\wedge(\exists n\in\omega)(x\in G_n(U\cup\{U\})),$$

y por lo tanto:

$$(x\in\mathrm{Def}(U))^M\ \Leftrightarrow\ x\subseteq U\wedge(\exists n\in\omega)([x\in G_n(U\cup\{U\})]^M).$$

Observe que la definición de M adecuado garantiza la existencia en M de todos los ordinales finitos. Además $\omega^M=\omega\in M$. Luego,

$$\begin{aligned}(x\in\mathrm{Def}(U))^M\ &\Leftrightarrow\ x\subseteq U\wedge(\exists n\in\omega)[\exists y(y=G_n(U\cup\{U\})\wedge x\in y)]^M\\ &\Leftrightarrow\ x\subseteq U\wedge(\exists n\in\omega)[(\exists y\in M)([y=G_n(U\cup\{U\})]^M\wedge x\in y)]\end{aligned}$$

Ahora, demostraremos que la función $G(W)$ es absoluta para M:
sean $W,y,n\in M$, así,

$$\begin{aligned}G_n(W)=y\Leftrightarrow\exists f[&\mathrm{Fun}(f)\wedge(n\in\omega)\wedge(\mathrm{dom}(f)=n+1)\wedge(f(0)=W)\\ &\wedge(\forall m<n)(f(m+1)\\ &\qquad=f(m)\cup\{\mathcal{F}_i(x,y)|x,y\in f(m)\wedge i=1,\dots,10\})\\ &\wedge f(n)=y]\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}[G_n(W) = y]^M \Leftrightarrow (\exists f \in M)[&\mathrm{Fun}(f) \wedge (n \in \omega) \wedge (\mathrm{dom}(f) = n+1) \\ &\wedge (f(0) = V) \wedge (\forall m < n)(f(m+1) = f(m) \\ &\qquad\qquad \cup \{\mathcal{F}_i(x,y) | x, y \in f(m) \wedge i = 1, \ldots, 10\}^M) \\ &\wedge f(n) = y].\end{aligned}$$

Pero como para cada $m < n$, la propiedad (b) de ser adecuado implica (haciendo una sencilla demostración por indución finita), $f(m) \in M$, el conjunto

$$\{\mathcal{F}_i(x,y) | (x, y \in f(m)) \wedge i = 1, \ldots, 10\}$$

está en M, en consecuencia:

$$\begin{aligned}[G_n(W) = y]^M \Leftrightarrow (\exists f \in M)[&\mathrm{Fun}(f) \wedge (n \in \omega) \wedge (\mathrm{dom}(f) = n+1) \\ &\wedge (f(0) = W) \wedge (\forall m < n)(f(m+1) \\ &\qquad = f(m) \cup \{\mathcal{F}_i(x,y) | x, y \in f(m) \wedge i = 1, \ldots, 10\}) \\ &\wedge f(n) = y].\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $f(m) \in M$ (para cada $m < n$) y M es cerrada bajo funciones de Gödel, dicha función f, definida en $n+1$, está en M (para cada $n \in \omega$). Por lo tanto,

$$[G_n(W) = y]^M \Leftrightarrow G_n(W) = y,$$

de donde concluimos la absolutez de $G(W)$, para M. Por lo tanto, dado que $U \cup \{U\} \in M$ para toda $U \in M$, se concluye que si $x, U \in M$, entonces

$$(x \in \mathrm{Def}(U))^M \Leftrightarrow x \subseteq U \wedge (\exists n \in \omega)[x \in G_n(U \cup \{U\})).$$

Es decir, la relación $x \in \mathrm{Def}(u)$ es absoluta para M. Luego, se sigue que la relación $Z = \mathrm{Def}(U)$ es absoluta para M.

A continuación, demostraremos (2). Es decir, demostraremos que si α es un elemento de M y $\gamma \leq \alpha$, entonces $f|_\gamma \in M$. Donde la función f es la dada en la definición de $H(\alpha, y)$.

Esta propiedad (2), se deduce del hecho de que:

$$f|_\gamma = \langle L_\nu | \nu < \gamma \rangle,$$

que por hipótesis está en M.

La propiedad (3) se obtiene, dado que $f(\gamma) = \bigcup \mathrm{ran}(f|_\gamma) = L_\gamma$ y las relaciones $\bigcup X$, $\mathrm{ran}(X)$ son absolutas para M, por lo tanto, al aplicar (2), se concluye que $f(\gamma) \in M$.

Así, hemos demostrado la absolutez de la función $x = L_\alpha$, para M adecuado. ||

Observe que en transcurso de la demostración, también hemos demostrado que la fórmula: $E(f, \alpha)$ es absoluta para conjuntos adecuados. Este hecho se usará en la demostración del lema 4.8.

Corolario 1. *Si M es un conjunto adecuado, entonces la relación $x \in L_\alpha$ es absoluta para M.*

Demostración:
Sean $\alpha, x \in M$, luego

$$\begin{aligned} x \in L_\alpha &\Leftrightarrow \exists y(H(\alpha, y) \wedge (x \in y)) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in M)([H(\alpha, y)]^M \wedge (x \in y)). \end{aligned}$$

Esto último se cumple, por un lado, porque $H(\alpha, y)$ es absoluta para M, y por otro lado, porque si existe y tal que $y = L_\alpha$ y $\alpha \in M$, la proposición (3) demostrada arriba, asegura que dicha y es un elemento de M. ||

Corolario 2. *Si M es un conjunto adecuado, entonces*

$$M \models (V = L) \Leftrightarrow M = L_\alpha,$$

para algún ordinal límite α, mayor que ω.

Demostración:
Primero observe que si $\alpha = \mathrm{o}(M) = \mathrm{ON} \cap M$, entonces α es límite y mayor que ω. Ahora, supongase que $M \models (V = L)$, es decir, que

$$(\forall x \in M)(\exists \beta \in M)[x \in L_\beta]^M.$$

Dado que la relación $x \in L_\gamma$ es absoluta para M, se tiene que

$$(\forall x \in M)(\exists \beta \in M)(x \in L_\beta).$$

Así, se tiene que

$$M = \bigcup\{L_\beta | \beta \in \mathrm{o}(M)\} = L_{\mathrm{o}(M)}.$$

Por otro lado, si se supone que $M = L_\alpha$ con α límite mayor que ω, entonces se tiene que

$$(\forall x \in M)(\exists \beta \in M)(x \in L_\beta).$$

De nuevo, por la absolutez de la relación $x \in L_\beta$ (para M), se tiene que

$$(\forall x \in M)(\exists \beta \in M)[x \in L_\beta]^M.$$

Es decir, $M \models (V = L)$. ||

4.8 Lema. *Sea α un ordinal mayor que ω. Si el ordinal α es límite, entonces el conjunto L_α es adecuado.*

Demostración:
Sea $\alpha > \omega$ un ordinal límite.

El hecho de que $\omega \in L_\alpha$ se cumple trivialmente, pues $\alpha > \omega$. Así, queda demostrado que L_α cumple con la propiedad (d).

Para demostrar (a), observe que si $\mathcal{F}_i(X,Y)$ es una operación primitiva de Gödel, y $x, y \in L_\alpha$, entonces $\mathcal{F}_i(x,y) \in L_{\beta+4} \in L_\alpha$, donde $\beta < \alpha$ es el máximo de los L-rangos de x y y.

Para (b), considere $U \in L_\alpha$ y $\mathcal{F}_i(X,Y)$ una operación primitiva de Gödel. Según la demostración anterior, si $x, y \in U$ entonces $\mathcal{F}_i(x,y) \in L_{\beta+4}$, donde β es el L- rango de U. De aquí que el conjunto:

$$Z_i = \{\mathcal{F}_i | x, y \in U\} = \{z | (\exists x \in U)(\exists y \in U)(z = \mathcal{F}_i(x,y))\},$$

es un subconjunto de $L_{\beta+4}$. Por lo tanto, dado que (para cada $i = 1, \ldots, 10$) la fórmula $\phi_i(z)$, definida por:

$$(\exists x \in U)(\exists y \in U)(z = \mathcal{F}_i(x,y)),$$

es Σ_0 (váse el lema 3.4), se concluye que:

$$Z = \{z \in L_{\beta+4} | [\phi_1(z) \vee \ldots \vee \phi_{10}(z)]^{L_{\beta+4}}\}.$$

Lo cual implica, según el teorema 1.1, que:

$$Z \in \mathrm{Def}(L_{\beta+4}) = L_{\beta+5} \in L_\alpha,$$

que es lo que se quería demostrar.

Por último, para demostrar (c), demostraremos, primeramente, que para α límite:

$$((\beta < \alpha) \wedge \lim(\beta)) \Rightarrow f|_\beta = \langle L_\gamma | \gamma < \beta \rangle \in L_\alpha.$$

Observe que si $\alpha = \omega$, entonces para toda $n \in \omega$, $f|_n \in L_\omega$, pues L_ω es cerrado bajo par y unión. Ahora, sea β límite, tal que $\omega < \beta < \alpha$, luego: $f|_\beta = \bigcup A$, donde $A = \{f|_\gamma | \gamma < \beta\}$. Observe que además:

$$A = \{z \in L_\beta | (\exists g \in L_\beta)(\exists \gamma < \beta)(G(g,\gamma) \wedge z = g)\}.$$

Pero según la observación que hicimos al final de la demostración del lema 4.7, se deduce que:

$$A = \{z \in L_\beta | (\exists g \in L_\beta)(\exists \gamma < \beta)(G(g,\gamma) \wedge z = g)^{L_\beta}\},$$

por lo que al aplicar el teorema 1.1, se concluye que:

$$A = \{z \in L_\beta | \models_{L_\beta} \text{“}(\exists g \in L_\beta)(\exists \gamma < \beta)(G(g,\gamma) \wedge z = g)\text{”}\},$$

por lo tanto, $A \in L_{\beta+1}$ y en consecuencia, $f|_\beta = \bigcup A \in L_{\beta+3} \subset L_\alpha$. Quedando así, terminada la demostración por inducción. Ahora, si $\beta \in L_\alpha$ y β es sucesor, claramente se sigue de lo recién demostrado y del hecho de que L_α es cerrado bajo las operaciones de par y de unión, que $f|_\beta \in L_\alpha$. ||

De este lema y del primer corolario al lema 4.7, se sigue directamente el siguiente teorema:

4.2 Teorema. *Si α es un ordinal límite, entonces se tiene que para toda $\gamma < \alpha$,*

$$L_\gamma^{L_\alpha} = L_\gamma. \quad \|$$

2.5 El Axioma de Elección en L.

En esta sección demostraremos que L es un modelo interno de ZF+AE, es decir,

$$\text{ZF} \vdash (AE)^L,$$

lo que nos llevará a establecer la consistencia relativa de ZF + AE.

Para demostrar que $(\text{AE})^L$ es teorema de ZF, es necesario demostrar que

$$\text{ZF} \vdash [\forall A \exists R[(R \subseteq A \times A) \wedge \text{"}R \text{ bien ordena a } A\text{"}]]^L.$$

La demostración de ésto se hara usando el teorema fundamental de los modelos internos. Esto es, demostraremos que

$$\text{ZF} + V = L \vdash \forall A \exists R[(R \subseteq A \times A) \wedge \text{"}R \text{ bien ordena a } A\text{"}]$$

y aplicando el teorema fundamental de modelos internos se concluirá que $(\text{AE})^L$ es teorema de ZF.

En primer término es necesario definir una relación $<_L$ que bien ordene a L, de tal suerte que para cada $\alpha \in \text{ON}$ la restricción de $<_L$ a L_α ($<_{L_\alpha}$) bien ordene a L_α. Así, bajo la hipótesis de que todo conjunto es construible (es decir, $\forall x(\exists \alpha \in \text{ON})(x \in L_\alpha)$) y del hecho de que los L_α son transitivos, se podrá concluir que todo conjunto es bien ordenable.

Para definir la relación de orden $<_L$ de una manera directa, es necesario establecer el siguiente lema:

5.1 Lema. *Sea $\alpha \in$ ON y sea $x \in L_{\alpha+1}$. Existe una fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ y existen ordinales $\gamma_1, \ldots, \gamma_n < \alpha$ tales que*

$$x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, L^\circ_{\gamma_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma_n})\}.$$

Demostración: (Por inducción sobre α).
(a) Para $\alpha = 0$ no es necesario demostrar nada, ya que $\emptyset$ es el único conjunto x posible.
(b) Sea $\alpha > 0$ y supóngase que el lema se cumple para $\beta < \alpha$. Ahora, si $x \in L_{\alpha+1}$, entonces existe (por definición de $L_{\alpha+1}$) una fórmula $\psi(v_0, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$ y existen $p_1, \ldots, p_n$ en L_α tales que

$$x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, p^\circ_1, \ldots, p^\circ_n)\}.$$

Sea γ el máximo de los L-rangos de las p_i, es decir, sea γ el minimo ordinal tal que $p_1, \ldots, p_n \in L_{\gamma+1}$). Así, $\gamma < \alpha$. Así. Por hipótesis de inducción, se tiene que para cada $i = 1, \ldots, n$ existe una fórmula $\psi_i(v_0, \ldots, v_{k(i)})$ de $\mathcal{L}$ y existen ordinales $\gamma^i_1, \ldots, \gamma^i_{k(i)} < \gamma$ tales que

$$p_i = \{z \in L_\gamma | \models_{L_\gamma} \psi_i(z^\circ, L^\circ_{\gamma^i_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma^i_{k(i)}})\}.$$

Ahora, para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $\hat{\psi}_i(v_0, \ldots, v_{k(i)}, v_{k(i)+1})$ como la fórmula de $\mathcal{L}$ que se obtiene al acotar todos los cuantificadores no acotados de ψ_i por $v_{k(i)+1}$. Luego, se cumple que

$$p_i = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} [(z^\circ \in L^\circ_\gamma) \wedge \hat{\psi}_i(z^\circ, L^\circ_{\gamma^i_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma^i_{k(i)}}, L^\circ_\gamma)]\}.$$

Para verificar esto último, es necesario hacer uso del teorema 1.1 y del lema 1.13. Se aplica el teorema 1.1 a la fórmula $\Psi_i(v_0, \ldots, v_n)$ que es la correspondiente a $\psi_i(v_0, \ldots, v_n)$ en LTC, para así concluir que

$$p_i = \{z \in L_\gamma | \Phi_i^{L_\gamma}(z, L_{\gamma^i_1}, \ldots, L_{\gamma^i_{k(i)}})\}.$$

Por otro lado, sea $\hat{\Psi}_i(v_0, \ldots, v_n, v_{n+1})$ la fórmula correspondiente a $\hat{\psi}_i(v_0, \ldots, v_n, v_{n+1})$ en LTC, claramente $\hat{\Psi}$ es Σ_0, así, aplicando el lema 2.15, se tiene que

$$\hat{\Psi}_i(z, L_{\gamma^i_1}, \ldots, L_{\gamma^i_{k(i)}}, L_\gamma) \Leftrightarrow \models_{L_\alpha} \hat{\Psi}_i(z^\circ, L^\circ_{\gamma^i_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma^i_{k(i)}}, L^\circ_\gamma).$$

Pero además, sabemos que la siguiente equivalencia es cierta:

$$\hat{\Psi}_i(z, L_{\gamma_1^i}, \ldots, L_{\gamma_{k(i)}^i}, L_\gamma) \Leftrightarrow \Psi_i^{L_\gamma}(z, L_{\gamma_1^i}, \ldots, L_{\gamma_{k(i)}^i}).$$

Por último, al aplicar el lema 1.13 a la fórmula $x \in y$ de LTC y al conjunto transitivo L_α se concluye que

$$(z \in L_\gamma) \Leftrightarrow [\models_{L_\alpha} \text{“}(z^\circ \in L_\gamma^\circ)\text{”}].$$

Ahora, a partir de la afirmación anterior, deducimos:

$$\begin{aligned} x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} & \exists p_1 \ldots \exists p_n [\psi(z^\circ, p_1, \ldots, p_n) \\ & \wedge \forall v[(v \in p_1) \leftrightarrow (v \in L_\gamma^\circ \wedge \hat{\psi}_1(v, L_{\gamma_1^1}^\circ, \ldots, L_{\gamma_{k(1)}^1}^\circ, L_\gamma^\circ))] \\ & \wedge \ldots\ldots \\ & \wedge \forall v[(v \in p_n) \leftrightarrow (v \in L_\gamma^\circ \wedge \hat{\psi}_n(v, L_{\gamma_1^n}^\circ, \ldots, L_{\gamma_{k(n)}^n}^\circ, L_\gamma^\circ))]]\}. \end{aligned}$$

Por lo que el lema queda demostrado. $\|$

Con ayuda de este lema podemos establecer un buen orden para L. Primeramente se establecen buenos ordenes para las fórmulas de $\mathcal{L}$ y para las sucesiones finitas de ordinales, respectivamente. Esto llevará a la definición de un buen orden para L.

Definimos una relación de orden “$<^\bullet$” para las fórmulas de $\mathcal{L}$, que por cierto son sucesiones finitas de conjuntos. Sea k la función con dominio $9 \cup \{v_n | n \in \omega\}$ definida por

$$k(x) = \begin{cases} n+9, & \text{si } x = v_n [= (2, n)]; \\ x \quad , & \text{si } x \in 9. \end{cases}$$

5.1 Definición. Sean ϕ y ψ en $\mathcal{L}$, entonces $\phi <^\bullet \psi$ si y sólo si

(i) ϕ es un segmento inicial de ψ, o

(ii) $k(\phi(i)) < k(\psi(i))$, donde $i = \min\{i \in \mathrm{dom}(\phi) \cap \mathrm{dom}(\psi) | \phi(i) \neq \psi(i)\}$

Es fácil verificar que esta relacón bien ordena a $\mathcal{L}$. A continuación se define un buen orden $(<^*)$ para las sucesiones finitas de ordinales:

5.2 Definición. Sean s y t sucesiones finitas de ordinales, entonces $s <^* t$ si y sólo si

(i) $\mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t)$, o

(ii) $s(i) < t(i)$, donde $i = \min\{j \in \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) | s(j) \neq t(j)\}$, cuando dicho conjunto es no vacío.

Usando el lema anterior y las relaciones recien definidas, estamos en la posibilidad de definir un buen orden para L:

5.3 Definición. Sean $x, y \in L$, entonces $x <_L y$ si y sólo si
(1) El L-rango de x es menor que el L-rango de y, o
(2) existe α tal que $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$ y sucede alguna de las dos condiciones siguientes:

(2.1) la $<^\bullet$-mínima fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$ para la cual existen ordinales $\gamma_1, \ldots, \gamma_n < \alpha$, tales que

$$x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, L^\circ_{\gamma_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma_n})\}$$

$<^\bullet$-precede a la mínima fórmula $\psi(v_0, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$ tal que existen ordinales $\delta_1, \ldots, \delta_n < \alpha$ y tal que

$$y = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \psi(z^\circ, L^\circ_{\delta_1}, \ldots, L^\circ_{\delta_n})\},$$

o

(2.2) las fórmula ϕ y ψ de (2.1) coinciden, pero la $<^*$-mínima n-sucesión de ordinales $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ menores que α tal que

$$x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, L^\circ_{\gamma_1}, \ldots, L^\circ_{\gamma_n})\}$$

$<^*$-precede a la mínima n-sucesión de ordinales $\langle\delta_1, \ldots, \delta_n\rangle$ menores que α tal que

$$y = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, L^\circ_{\delta_1}, \ldots, L^\circ_{\delta_n})\}.$$

Al igual que en los otros casos, es fácil verificar que la relación $<_L$ en realidad bien ordena a la clase L. El trabajo que se desarrolla a continuación se centra en la investigación de la estructura lógica de este buen orden. Para alcanzar una definición de $<_L$ en LTC, comenzamos definiendo una fórmula que define a la relación metateórica:

"ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}$, t es una sucesión finita de ordinales menores que
α, $n = \text{dom}(t)$, las variables de ϕ son $v_0, \ldots, v_n$ y

$$x = \{z \in L_\alpha | \models_{L_\alpha} \phi(z^\circ, L^\circ_{t(0)}, \ldots, L^\circ_{t(n-1)})\}."$$

5.4 Definición. Sea $N(\alpha, x, \phi, t)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}
&\exists u \exists f \exists n \exists \psi [\mathrm{Fml}(\phi, \emptyset) \wedge \mathrm{Sucefin}(t) \wedge (\mathrm{dom}(t) = n) \\
&\quad \wedge \mathrm{On}(\alpha) \wedge (\forall i \in n)(t(i) \in \alpha) \\
&\quad \wedge \mathrm{Lib}(\phi, u) \wedge (f : n+1 \longleftrightarrow u) \wedge (\forall i \in n+1)(f(i) = v_i) \\
&\quad \wedge \mathrm{Sucefin}(\psi) \wedge (\mathrm{dom}(\psi) = n+1) \wedge (\psi(0) = \phi)
\end{aligned}$$

$$\wedge(\forall i \in n)\mathrm{Sust}(\psi(i+1), \psi(i), v_{i+1}, L^{\circ}_{t(i)}) \wedge (x \subseteq L_\alpha)$$
$$\wedge(\forall z \in L_\alpha)(z \in x \leftrightarrow \exists\theta(\mathrm{Sust}(\theta, \psi(n), v_0, z^\circ) \wedge \mathrm{Sat}(L_\alpha, \theta)))].$$

A continuación definimos una fórmula que define, en LTC, el hecho de que ϕ es la $<^\bullet$-mínima fórmula de $\mathcal{L}$ tal que para alguna sucesión finita t de ordinales, se tiene que $N(\alpha, x, \phi, t)$. Pero antes es necesario definir dos fórmulas $<^\bullet (\phi, \psi)$ y $<^* (s, t)$ de LTC, que definan a las relaciones $<^\bullet$ y $<^*$, respectivamente.

5.5 Definición.
(i) Sea $<^\bullet (\phi, \psi)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}
&\exists f[[\mathrm{Fml}(\phi, \emptyset) \wedge \mathrm{Fml}(\psi, \emptyset) \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(\phi))((\phi(i) = \psi(i)) \\
&\qquad \wedge(\mathrm{dom}(\phi) < \mathrm{dom}(\psi)))] \\
&\vee[f : 9 \cup \{v_i | i \in \omega\} \longleftrightarrow \omega \wedge (\forall a \in \mathrm{dom}(f))((a \in 9) \rightarrow (f(a) = a)) \\
&\qquad \wedge(\forall i \in \omega)((a = v_i) \rightarrow (f(a) = 9 + i)) \wedge (\exists i \in \mathrm{dom}(\phi) \cap \mathrm{dom}(\psi)) \\
&\qquad\quad (\phi(i) \neq \psi(i) \wedge (\forall j \in \mathrm{dom}(\phi) \cap \mathrm{dom}(\psi))(\phi(j) \neq \psi(j) \rightarrow i \leq j) \\
&\qquad\qquad \wedge f(\phi(i)) < f(\psi(i)))]].
\end{aligned}$$

(ii) Sea $<^* (s, t)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sucefin}(s) \wedge \mathrm{Sucefin}(t) \wedge (\forall i \in \mathrm{dom}(s))(s(i) \in \mathrm{ON}) \\
&\qquad \wedge(\forall i \in \mathrm{dom}(t))(t(i) \in \mathrm{ON}) \wedge [(\mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t))] \\
&\vee[(\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t)) \wedge (\exists j \in \mathrm{dom}(s))((\forall i \in j)(s(i) = t(i)) \\
&\qquad \wedge(s(j) < t(j)))].
\end{aligned}$$

5.6 Definición. Sea $M(\alpha, x, \phi)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$(\exists t)N(\alpha, x, \phi, t) \wedge \forall\hat{\phi}[(\exists\hat{t})N(\alpha, x, \hat{\phi}, \hat{t}) \rightarrow ((\phi <^\bullet \hat{\phi}) \vee (\phi = \hat{\phi}))].$$

Ahora definimos una fórmula de LTC que dice que t es la $<^*$-mínima sucesión de ordinales menores que α tal que $N(\alpha, x, \phi, t)$.

5.7 Definición. Sea $P(\alpha, x, \phi, t)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$N(\alpha, x, \phi, t) \wedge (\forall\hat{t})[N(\alpha, x, \phi, \hat{t}) \rightarrow (t \leq^* \hat{t})].$$

5.8 Definición. Sea $Q(x, y, \alpha)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\begin{aligned}
&[[(x \in L_{\alpha+1}) \wedge (y \in L_{\alpha+1}) \wedge (x \notin L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \\
&\quad \wedge[\exists\phi, \psi[M(\alpha, x, \phi) \wedge M(\alpha, y, \psi) \wedge (\phi <^\bullet \psi)]] \\
&\quad \vee\exists\phi[M(\alpha, x, \phi) \wedge M(\alpha, y, \phi)
\end{aligned}$$

$$\wedge \exists s, t[P(\alpha, x, \phi, s) \wedge P(\alpha, y, \phi, t) \wedge (s <^{*} t)]].$$

Después de estas últimas definiciones,podemos describir una fórmula de LTC que defina la relación $<_L$:

5.9 Definición. Sea $\hat{BO}(x, y)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\exists \alpha[(x \in L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \vee (\exists \alpha) Q(x, y, \alpha).$$

Todos los cuantificadores que aparecen no acotados en la fórmula $Q(x, y, \alpha)$ pueden ser acotados por $L_{\max\{\omega, \alpha+4\}}$. Verificar que ésto en realidad sucede, puede aparecer como un trabajo verdaderamente exhaustivo, pues se debe verificar en todas las subfórmulas de $\hat{BO}(x, y)$ (que por cierto son, en su gran mayoría, Σ_1). Pero, en gran parte de ellas (por ejemplo, Sucefin(t), Lib(α, u)) es claro que los existenciales pueden ser acotados por L_ω.

Ahora, sea $R(x, y, \alpha, w)$ la fórmula que se obtiene de $Q(x, y, \alpha)$ al acotar todos los cuantificadores no acotados de $Q(x, y, \alpha)$ por w. Así, $R(x, y, \alpha, w)$ es Σ_0 y además obtenemos una fórmula equivalente a $\hat{BO}(x, y)$ que expresa a la relación $x <_L y$:

5.10 Definición. Sea $BO(x, y)$ la siguiente fórmula de LTC:

$$\exists \alpha[(x \in L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \vee (\exists \alpha)(\exists w)[(w = L_{\max(\omega, \alpha+4)}) \wedge R(x, y, \alpha, w)].$$

Sea $bo(x, y)$ la fórmula de $\mathcal{L}$ correspondiente a la LTC-fórmula $BO(x, y)$.

5.2 Lema. *Sea $\alpha > \omega$, α límite y sean $x, y \in L_\alpha$, entonces*

$$BO(x, y) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} bo(x^\circ, y^\circ).$$

Demostración:
En primer término demostraremos que

$$BO(x, y) \leftrightarrow BO^{L_\alpha}(x, y)$$

para que al aplicar el teorema 1.1 se pueda concluir que

$$BO(x, y) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} bo(x^\circ, y^\circ).$$

Observe que

$$\exists \gamma[(x \in L_\gamma) \wedge (y \notin L_\gamma)] \vee (\exists \gamma)(\exists w)[(w = L_{\max(\omega, \gamma+4)}) \wedge R(x, y, \gamma, w)]$$

es equivalente a

(i) $(\exists\gamma \in L_\alpha)[(x \in L_\gamma) \wedge (y \notin L_\gamma)]$
$\vee(\exists\gamma \in L_\alpha)(\exists w \in L_\alpha)[(w = L_{\max(\omega,\gamma+4)}) \wedge R(x,y,\gamma,w)]$.

Esto se debe a que como α es límite y $x, y \in L_\alpha$, entonces los L-rango de x y y son menores que α. También se usa el hecho de que α es mayor que ω. Pero más aún, dado que α es límite mayor que ω, al aplicar el teorema 4.2 de la sección anterior, se tiene que para toda $\beta < \alpha$:

$$(x = L_\beta)^{L_\alpha} \leftrightarrow (x = L_\beta).$$

De aquí que (i) es equivalente a

$(\exists\gamma \in L_\alpha)[(x \in L_\gamma)^{L_\alpha} \wedge (y \notin L_\gamma)^{L_\alpha}]$
$\vee(\exists\gamma \in L_\alpha)(\exists w \in L_\alpha)[(w = L_{\max(\omega,\gamma+4)})^{L_\alpha} \wedge R^{L_\alpha}(x,y,\gamma,w)]$

(recuerde que $R(x,y,\gamma,w)$ es Σ_0). Así, se concluye que

$$BO(x,y) \leftrightarrow BO^{L_\alpha}(x,y).$$

De donde, al aplicar el teorema 1.1 queda demostrado el lema. $\|$

Con ayuda de este lema es directo demostrar que se puede definir un buen orden para cada L_α donde α es un ordinal límite mayor que ω:

5.3 Lema. *Si α es un ordinal límite mayor que ω y $B_\alpha = \{(x,y) \in L_\alpha^2 | \models_{L_\alpha} bo(x^\circ, y^\circ)\}$, entonces*

$$\text{ZF} \vdash \text{“}B_\alpha \text{ es un buen orden para } L_\alpha\text{”}. \quad \|$$

5.4 Lema. ZF + $V = L \vdash \forall A \exists R[(R \subseteq A \times A) \wedge$ “R bien ordena a A”$]$.

Demostración:
Sea A un conjunto, entonces existe α límite mayor que ω tal que $A \in L_\alpha$. Luego, $B_\alpha|_A \subseteq A^2$ y dado que L_α es transitivo, también se tiene que:

$$\text{“}R_\alpha|_A \text{ bien ordena a } A\text{”}.$$

Corolario 1. ZF + $V = L \vdash$ AE. $\|$

Y aplicando el teorema fundamental de modelos internos se tiene el siguiente teorema y su corolario:

5.1 Teorema. ZF $\vdash (\text{AE})^L$. $\|$

Corolario 1. Cons(ZF) $\to$ Cons(ZF + AE). $\|$

2.6 La Hipótesis Generalizada del Continuo en L.

Para demostrar que en ZF es teorema HGC^L, haremos uso (igual que en la sección anterior) del teorema fundamental de los modelos internos, y demostraremos que HGC es teorema de ZFE+(V = L), es decir, demostraremos (suponiendo $V = L$) que para todo cardinal infinito κ, se cumple que $|P(\kappa)| \leq \kappa^+$. Para lograrlo, es suficiente mostrar que dado un cardinal infinito κ, cualquier subconjunto de κ es un elmento de L_{κ^+} (ver lema 6.2). Ahora, la demostración de este lema se presenta sencilla, una vez que han sido demostrados el lema de condensación y el lema 6.1. Es en el lema de condensación lo que a continuación demostramos:

6.1 Teorema.(Lema de Condensación). *Sea α un ordinal límite. Si*

$$X \prec_1 L_\alpha,$$

entonces existen únicos π y β tales que $\beta \leq \alpha$ y:

(i) $\pi : \langle X, \in\rangle \cong \langle L_\beta, \in\rangle$;
(ii) *si $Y \subseteq X$ y Y es transitivo, entonces $\pi|_Y = id|_Y$.*

Demostración:
Primero demostraremos que si X es un conjunto que satisface las hipótesis del enunciado del teorema, entonces X es extensional, es decir, satisface el axioma de extensionalidad:
Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y sea $\Phi(v_1, v_2)$ la siguiente fórmula Σ_1:

$$\exists z(z \in v_1 \leftrightarrow z \notin v_2),$$

demostraremos que

$$\Phi^X(x, y).$$

Dado que $X \prec_1 L_\alpha$, la siguiente equivalencia se cumple:

$$\Phi^X(x, y) \leftrightarrow \Phi^{L_\alpha}(x, y).$$

Pero como L_α es transitivo, entonces, $\Phi^{L_\alpha}(x, y)$. Así, $\Phi^X(x, y)$. Por lo tanto, hemos demostrado que

$$(\forall x, y \in X)(x \neq y \to (\exists z \in X)(z \in x \leftrightarrow z \notin y)),$$

que es equivalente a *Extensionalidad*^{X}.

Una vez demostrado que X es extensional, demostraremos, a continuación, que se cumple el teorema para el caso en que $\alpha = \omega$: primero observe cómo es que haciendo una simple inducción sobre $m \in \omega$, se puede demostrar que

$$(\forall m \in \omega)(L_m \subseteq X).$$

Veamos: el caso en que $m = 0$ es directo ($\emptyset \subseteq X$). Ahora, sea $x \in L_{m+1}$, entonces existen $a_1, \ldots, a_k \in L_m$ tal que

$$x = \{a_1, \ldots, a_k\},$$

pero por hipótesis de inducción $a_1, \ldots, a_k \in X$. Ahora, consideremos la fórmula $\Phi(v_1, \ldots, v_k)$ de LTC, cuya definición es:

$$\exists x[(y_1 \in x) \wedge \ldots \wedge (y_k \in x) \wedge (\forall z \in x)[(z = y_1) \vee \ldots \vee (z = y_k)]].$$

Dado que Φ es Σ_1 y dado que $X \prec_1 L_\alpha$, se tiene que

$$\Phi^X(a_1, \ldots, a_k) \leftrightarrow \Phi^{L_\alpha}(a_1, \ldots, a_k),$$

y como L_α es modelo de el axioma de par, deducimos que

$$\Phi^{L_\alpha}(a_1, \ldots, a_k).$$

Por lo que se concluye que existe $x \in X$ tal que

$$x = \{a_1, \ldots, a_k\},$$

y como X es extensional, hemos demostrado que $L_{m+1} \subseteq X$. Ahora, ya que mostramos que para toda $m \in \omega$ se cumple $L_m \subseteq X$, entonces es cierto que $L_\omega \subseteq X$. Por lo que si $\alpha = \omega$, se concluye que

$$L_\alpha \subseteq X \subseteq L_\alpha.$$

Así, para $\alpha = \omega$ queda demostrado el teorema. De ahora en adelante supondremos que $\alpha > \omega$.

Como X es extensional, podemos aplicar el lema del colapso (teorema 4.3, Cap. 1) para concluir que existe una única clase transitiva M y un único π tal que:

$$(\pi : X \cong M) \wedge \forall Y[(Y \subseteq X \wedge Y \text{ es transitivo }) \rightarrow \pi|Y = \mathrm{id}|Y)].$$

A continuación demostraremos que $M = L_\beta$ para un (único) ordinal límite $\beta \leq \alpha$:

Obsérvese que como la fórmula $H(u,\gamma)$ que define la relación "$u = L_\gamma$" es Δ_1^{ZF}, entonces el lema de contracción de cuantificadores asegura que existe una fórmula $\Phi(z,u,\gamma)$, Σ_0, de LTC tal que

$$T = \{\text{Vacío, Par}\} \vdash \forall u \forall \gamma (H(u,\gamma) \leftrightarrow \exists z \Phi(z,u,\gamma))$$

Luego, por el lema 4.1 (Cap. 1), y como L_α es modelo de T, $H(u,\gamma)$ es absoluta para L_α si y sólo si $\exists z \Phi(z,u,\gamma)$ lo es. Pero como $H(u,\gamma)$ es absoluta para L_α (pues L_α es adecuado), se concluye que $\exists z \Phi(z,u,\gamma)$ también lo es. De tal modo, se obtiene la siguiente equivalencia:

$$\forall u (\forall \gamma < \alpha)(H(u,\gamma) \leftrightarrow u \in L_\alpha \wedge (\exists z \in L_\alpha)\Phi^{L_\alpha}(z,u,\gamma))$$

lo cual implica que:

$$(1) \qquad \forall \gamma < \alpha (\exists u, z \in L_\alpha)\Phi^{L_\alpha}(z,u,\gamma).$$

Ahora, sea $\gamma \in M$, tal que $\mathrm{On}^M(\gamma)$. Luego, $\mathrm{On}^X(\pi^{-1}(\gamma))$, lo que implica que $\mathrm{On}^{L_\alpha}(\pi^{-1}(\gamma))$, de donde $\pi^{-1}(\gamma) < \alpha$. Así, por (1), se concluye que existen $u, z \in L_\alpha$ tales que $\Phi(z,u,\pi^{-1}(\gamma))$. De nuevo haciendo uso del hecho de que $X \prec_1 L_\alpha$ y aplicando el isomorfismo π, se concluye que

$$(\exists z, u \in M)\Phi^M(z,u,\gamma).$$

Queda demostrado el siguiente hecho:

$$(\forall \gamma \in M)(\exists z \in M)(\exists u \in M)\Phi^M(z,u,\gamma).$$

Pero como Φ es Σ_0 y M es transitivo, lo que en realidad se tiene es que

$$(\forall \gamma \in M)(\exists z \in M)(\exists u \in M)\Phi(z,u,\gamma),$$

que por elección de Φ es equivalente a:

$$(2) \qquad (\forall \gamma \in M)(L_\gamma \in M).$$

Ahora, sea $\beta = o(M) = \mathrm{ON} \cap M$. Como M es transitivo, $\beta \in \mathrm{ON}$, de aquí se sigue que (2) implica que:

$$(\forall \gamma < \beta)(L_\gamma \in M)$$

y por lo tanto que:

$$\bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma \subseteq M.$$

A continuación demostraremos que β es un ordinal límite y que la otra contención también es válida, para así concluir que $L_\beta = M$.

Primero observe que como $L_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma$ y dado que $\exists z\Phi(z, u, \gamma)$ es absoluta para L_α, se tiene que

$$(\forall x \in L_\alpha)[\exists\gamma\exists u\exists z\Phi(z, u, \gamma) \wedge x \in u)]^{L_\alpha}.$$

Luego, aplicando π^{-1} y siguiendo el mismo proceso desarrollado arriba, se concluye que

$$(\forall x \in M)(\exists\gamma \in M)(\exists u \in M)(\exists z \in M)[\Phi(z, u, \gamma) \wedge x \in u)]^{L_\alpha}.$$

Otra vez, puesto que M es transitivo y que tanto Φ como $x \in u$ son Σ_0, lo anterior implica que:

$$(\forall x \in M)(\exists\gamma \in M)(\exists u \in M)(\exists z \in M)[\Phi(z, u, \gamma) \wedge x \in u)],$$

de donde se concluye, por la elección de Φ, que:

$$(\forall x \in M)(\exists\gamma \in M)(x \in L_\gamma).$$

Pero por definición de β,

$$(\forall x \in M)(\exists\gamma < \beta)(x \in L_\gamma).$$

Lo que en otras palabras significa que;

$$M \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} L_\gamma.$$

Por último, demostraremos que $\lim(\beta)$. Como $\lim(\alpha)$, entonces

$$(\forall\gamma < \alpha)[\exists\lambda(\gamma < \lambda)]^{L_\alpha},$$

lo que implica que (haciendo uso de los métodos ya conocidos),

$$(\forall\gamma \in M)[\exists\lambda(\gamma < \lambda)]^{M},$$

que por la elección que hicimos de β y por la absolutez de la fórmula $\gamma < \lambda$, se concluye que

$$(\forall\gamma < \beta)[(\exists\lambda < \beta)(\gamma < \lambda)]^{L_\alpha}.$$

Por lo que $\lim(\beta)$. En conclusión,

$$M = L_\beta.$$

Hasta el momento hemos demostrado que

$$\pi : \langle X, \in\rangle \cong \langle L_\beta, \in\rangle.$$

con $\beta \leq \alpha$ y π únicos. La parte (ii) del teorema, se sigue directamente del teorema del colapso de Mostovski. ||

Más adelante seguiremos usando los métodos de este importante teorema para demostrar, por ejemplo, la validez de ciertos principios en el universo L.

6.1 Lema. *Sea α un ordinal límite mayor que 0, sea $X \subseteq L_\alpha$, y sea $M \subseteq L_\alpha$ constituido por aquellos elementos de L_α que pueden ser definidos en L_α a partir de elementos de X (esto es, $a \in M$ si y sólo si a es el único elemento de L_α tal que $\models_{L_\alpha} \phi(a^\circ)$ para algúna fórmula $\phi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$). Entonces,*

$$X \subseteq M \prec L_\alpha.$$

Además, M es la mínima subestructura elemental de L_α que contiene a X.

Demostración:
Si $\alpha = \omega$, se pueden aplicar argumentos similares a los usados en la primera parte de la demostración de lema de condensación, para demostrar que $M = L_\alpha$ y que la única subestructura elemental de L_α es L_α mismo. Así que en adelante se supondra $\alpha > \omega$. En primer lugar, para cada $x \in X$, x es definible en L_α por la fórmula $x^\circ = v_0$ de $\mathcal{L}_X$, así,

$$X \subseteq M.$$

Para demostrar que $M \prec L_\alpha$ haremos uso del criterio de Tarski para subestructura elemental, es decir, demostraremos que para cualquier fórmula $\phi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$,

$$[\models_{L_\alpha} \exists x\Phi(x^\circ)] \Rightarrow (\exists x \in M)[\models_{L_\alpha} \phi(x^\circ)].$$

Sea $\phi(v_0)$ una fórmula de $\mathcal{L}_X$, y sea $\psi(v_0)$ la fórmula de $\mathcal{L}_X$ definida por:

$$\psi(v_0) \equiv \phi(v_0) \wedge \forall v_1(v_1 <_L v_0 \rightarrow \neg\phi(v_1)).$$

Supóngase que $\models_{L_\alpha} \exists x\phi(x^\circ)$, entonces $\models_{L_\alpha} \exists x\psi(x^\circ)$, pero además, dicha x debe ser única en L_α. Por lo que $x \in M$, pero en virtud de la definición de $\psi(v_0)$ también se tiene que para dicha x, $\models_{L_\alpha} \phi(x^\circ)$. Quedando así demostrado que $M \prec L_\alpha$.

Para demostrar la mimimalidad de M, supondremos que $X \subseteq N \prec L_\alpha$ y demostraremos que $M \subseteq N$. Sea $x \in M$, entonces existe una fórmula $\phi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$ tal que $\models_{L_\alpha} \phi(x^\circ)$, además x es el único elemento de L_α con esta propiedad. Luego, como $M \subseteq L_\alpha$ lo anterior implica que

$$\models_{L\alpha} \exists v_0 \phi(v_0).$$

Pero como N es una subestructura elemental de L_α y $x \in X \subseteq N$, se tiene que

$$\models_N \exists v_0 \phi(v_0).$$

Así, existe $y \in N$ tal que $\models_N \phi(y^\circ)$. Puesto que $N \prec L_\alpha$, lo anterior implica: $\models_{L_\alpha} \phi(y^\circ)$. Pero se observó que x era único en L_α con esta propiedad, así, $x = y$. De donde $x \in N$. ||

Corolario 1. *Sea α un ordinal límite (distinto de 0), sea $X \subseteq L_\alpha$ y sea $M \prec L_\alpha$ definido en el lema anterior. Para dicha M, se cumple:*

$$|M| = \max(|X|, \omega).$$

Demostración:
Como $\mathcal{L}_X$ tiene $\max(|X|, \omega)$ fórmulas, es válido: $|M| \leq \max(|X|, \omega)$. Pero por otro lado, tambien es cierto que: $\max(|X|, \omega) \leq |M|$. ||

Ahora sí, con ayuda de los resultados anteriores, se puede establecer la esencia de la hipótesis generalizada del continuo en L:

6.2 Lema. *Supóngase $V = L$. Sea κ un cardinal. Si x es un subconjunto acotado de L_κ (es decir, existe $\alpha < \kappa$ tal que $x \subseteq L_\alpha$), entonces $x \in L_\kappa$.*

Demostración:
Para $\kappa \leq \omega$ el resultado es trivial, pues en ese caso $L_\kappa = V_\kappa$. Sea $\kappa > \omega$, sea $\alpha < \kappa$ tal que $\omega \leq \alpha$ y $x \subseteq L_\alpha$. Si λ es un ordinal límite tal que $\kappa \leq \lambda$ y $x \in L_\lambda$, según el corolario anterior existe $M \subseteq L_\lambda$ tal que $M \prec L_\lambda$, $L_\alpha \cup \{x\} \subseteq M$ y tal que $|M| = |L_\alpha|$. Ahora, por el lema de condensación, existe un único isomorfismo $\pi : M \cong L_\gamma$ (para un único ordinal $\gamma \leq \lambda$) tal que si $Y \subseteq M$ es transitivo, entonces $\pi|Y = \mathrm{id}|Y$. Así, como $L_\alpha \cup \{x\}$ es un subconjunto transitivo de M, $\pi(x) = x$. Por lo que $x \in L_\gamma$. Pero además:

$$|\gamma| = |L_\gamma| = |\pi[M]| = |M| = |L_\alpha| = |\alpha| < \kappa.$$

De donde se concluye que $\gamma < \kappa$, y por lo tanto que $x \in L\kappa$. ||

6.2 Teorema. ZF + $V = L \vdash$ HGC.

Demostración:
Sea κ un cardinal infinito, y sea $x \subseteq \kappa$. Como $\kappa < \kappa^+$, el lema anterior asegura que $x \in L_{\kappa^+}$. Así, $P(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$. De donde se concluye que

$$\forall\kappa(2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}| = \kappa^+). \quad \|$$

De nuevo, aplicando el lema fundamental de mosdelos internos, se obtienen los siguientes corolarios:

Corolario 1. ZF $\vdash$ (HGC)^L. ||

Corolario 2. *Si* ZF *es consistente, también lo es* ZF+HGC. ||

Por último, el siguiente teorema establece que bajo la hipótesis del axioma de constructibildad (y con ayuda de varios lemas demostrados hasta el momento), existe una gran cantidad de estratos de la jerarquía constructible de conjuntos que son modelos de ZF$^-$:

6.3 Teorema. *Supóngase el axioma de constructibilidad. Si κ es un cardinal regular no numerable, entonces la estructura $\langle L_\kappa, \in\rangle$ es modelo de los axiomas de* ZF$^-$.

Demostración:
La demostración del teorema estará referida a la demostración del teorema 2.1, en el cual se demuestra que L es un modelo interno de ZF.
Los axiomas de Extensionalidad y Regularidad se cumplen en L_κ, pues esta estructura es transitiva y estandar (ver las observaciones, repectivas, en la demostración del teorema 2.1).

La demostración de que los axiomas de Par y Unión se cumplen en L_κ, son las mismas que las respectivas en el teorema 2.1, sólamente es necesario cambiar las apariciones de L, por L_κ. Observe que esto es posible dado que κ es un ordinal límite.

El axioma de infinito se cumple en L_κ pues κ es no numerable, lo cual implica que $\omega \in L_\kappa$.

Para demostrar los axiomas de Subconjunto y Reemplazo relativizados a L_κ, es necesario observar, primero, que dado que κ es un cardinal regular, se cumple en L_κ la siguiente propiedad:

$$\forall X(X \in L_\kappa \leftrightarrow X \subset L_\kappa \wedge |X| < \kappa).$$

Este hecho, se cumple, gracias a la regularidad de κ, y haciendo uso del lema 6.2. Pues si X es un subconjunto de L_κ, cuyo cardinal es menor a κ, entonces existe $\alpha < \kappa$, tal que $X \subseteq L_\alpha$ (aquí se usa la regularidad de κ). Luego, haciendo uso del lema 6.2, se concluye que $X \in L_\kappa$ (observe que aquí se hace uso del axioma de constructibilidad). Por el otro lado, si $X \in L_\kappa$, entonces $X \in L_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$, y por lo tanto el cardinal de X es menor que κ. Por último, es claro que la transitividad de L_κ, implica que $X \subset L_\kappa$.

Así, con ayuda de esta afirmación, demostramos el axioma de Subconjunto relativizado a L_κ. Se debe demostrar que para toda fórmula $\Phi(u, \overrightarrow{v})$, se tiene que

$$[\forall \overrightarrow{p} \forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge \Phi(z, \overrightarrow{p})))]^{L_\kappa}.$$

Sean, pues, $\overrightarrow{p}, x \in L_\kappa$. Así, como L es modelo de Subconjunto, sabemos que existe $y \in L$, tal que:

$$y = \{z \in x | [\phi^{L_\kappa}(z, \overrightarrow{p})]^L\}.$$

Pero como el corolario al lema 4.6 asegura que L_κ es absoluto para L, se cumple:

$$y = \{z \in x | \phi^{L_\kappa}(z, \overrightarrow{p})\}.$$

Para terminar la demostración, sólo falta demostrar que $y \in L_\kappa$. Aquí es donde hacemos uso de la afirmación de arriba: como $y \subseteq L_\kappa$ y como el cardinal de y es menor o igual al cardinal de x, cuyo cardinal es menor que κ (pues $x \in L_\kappa$), el cardinal de el subconjunto y de L_κ es menor que κ, se concluye que $y \in L_\kappa$.

Para el caso del axioma de Reemplazo, se debe demostrar que para cualquier fórmula $\Phi(u, v, \overrightarrow{w})$ de LTC:

$$\begin{aligned}[\forall \overrightarrow{p} [\forall u \exists v [\Phi(u, v, \overrightarrow{p}) \wedge \forall w(\Phi(u, w, \overrightarrow{p}) \to v = w) \\ \to \forall x \exists y (\forall u \in x)(\exists v \in y) \Phi(u, v, \overrightarrow{p})]]^{L_\kappa}\end{aligned}$$

Supóngase que:

$$[\forall \overrightarrow{p} [\forall x \exists y (\Phi(x, y, \overrightarrow{p}) \wedge \forall z(\Phi(x, z, \overrightarrow{p}) \to y = z))]^{L_\kappa},$$

y sean $\overrightarrow{p}, x \in L_\kappa$. Si definimos

$$y = \{v \in L_\kappa | (\exists u \in x) \Phi^{L_\kappa}(u, v, \overrightarrow{p})\},$$

entonces $(\forall u \in x)(\exists v \in y)\Phi^{L_\kappa}(u, v, \overrightarrow{p}))$. Sólo hace falta demostrar que $y \in L_\kappa$, para lograr esto, se debe observar que, al igual que en el caso anterior, y es un subconjunto acotado de L_κ y por lo tanto (lema 6.2) pertenece a L_κ. ||

Capítulo 3

El principio de Jensen

Escudriñando la demostración de la consistencia (relativa) de la negación de la hipótesis de Souslin con respecto a ZF, aparece la posibilidad de aislar cierta propiedad que refiere al comportamiento del primer cardinal no numerable en L. Una vez aislado, este principio afirma la existencia de cierta ω_1-sucesión de subconjuntos de ω_1, que tienen la propiedad de "predecir" el comportamiento de cualquier subconjunto de ω_1 (conforme se avanza en ω_1). Fue así como R. B. Jensen descubrió este principio, y le llamó *Principio Diamante.* Posteriormente, se comenzo a utilizar este principio como un axioma alternativo que permite dar solución a cierto tipo de problemas matemáticos, aún fuera de la teoría de los conjuntos.

Este capítulo se centra en el estudio del principio diamante. En primer lugar se presenta al principio como una solución parcial al *problema de Suslin*, y se establece su validez en el universo construible L. Posteriormente se establecen 7 formas equivalentes de enunciar dicho principio; esta parte ayudará a entender mejor la esencia del principio y a facilitar algunas demostraciones posteriores. También estudiaremos, en este capítulo, algunas relaciones que se pueden establecer entre el principio diamante y la hipótesis del continuo. Luego, se presentan algunos principios combinatorios que resultan ser extensiones del principio diamante, estas extensiones también se cumplen en L. Por último, se llevan a cabo interesantes aplicaciones de estas extensiones.

3.1 La Hipótesis de Souslin.

En esta sección, se definen los conceptos generales que estan relacionados con el problema de Souslin. Se establecen, también, distintas formas de expresar la hipótesis de Souslin, buscando enunciarla de manera tal que se facilite el desarrollo encaminado a dar una solución parcial al problema de Souslin. El resultado fundamental de esta sección, es establecer la equivalencia entre la existencia de cierto tipo de ordenes lineales (llamados lineas de Souslin) y la existencia de un tipo de ordenes parciales (llamados árboles de Souslin). Es por esto que en esta sección también se introduce el concepto de "árbol".

1.1 Definición. Dado $\langle X, \leq \rangle$ un orden lineal:

1. el par $\langle X, \leq \rangle$ es un *orden denso* si y sólo si

$$(\forall x, y \in X)[(x < y) \rightarrow (\exists z \in X)(x < z < y)];$$

2. un subconjunto Y de X es un *intervalo* de X, si y sólo si existen $x, y \in X$ tales que

$$Y = \{z \in X | x < z < y\},$$

(en tal caso, Y se denota por (x, y));

3. decimos que $\langle X, \leq \rangle$ es un *orden completo* si y sólo si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso tal que para todo intervalo I de X y para todo $Y \subseteq I$, si $Y \neq \emptyset$ se cumple que

$$(\exists z \in X)[z = \min\{w \in X | \forall y \in Y(w \geq y)\}]$$
$$\wedge(\exists x \in X)[x = \max\{u \in X | \forall y \in Y(u \leq y)\}],$$

(en tal caso, z es el *supremo* de Y y x el *ínfimo* de Y);

4. se dice que el par $\langle X, \leq \rangle$ es *abierto*, si y sólo si no tiene puntos finales, es decir, si y sólo si

$$(\forall x \in X)(\exists y, z \in X)[(y < x) \wedge (x < z)];$$

5. si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso, diremos que un subconjunto Y de X es un subconjunto *denso en* X, si y sólo si se cumple lo siguiente:

$$(\forall x, z \in X)[x < z \rightarrow (\exists y \in Y)(z < y < x)];$$

6. si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso, se dice que $\langle X, \leq \rangle$ es *separable* si y sólo si existe $Y \subseteq X$ tal que Y es denso en X y numerable;

7. se dice que el orden $\langle X, \leq \rangle$ tiene la *propiedad de Souslin* si y sólo si toda familia de intervalos mutuamente ajenos de X es a lo más numerable.

Es importante en este momento mencionar uno de los resultados clásicos de Cantor, pues puede parecer que a partir de éste es donde se genera el problema de Souslin:

1.1 Teorema. *(Cantor).* Si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso, completo y abierto, que además es separable, entonces $\langle X, \leq \rangle$ es isomorfo a R (con el orden usual de R).

Antes de aclarar lo que se entiende por "el problema de Souslin", observe que las propiedades de separabilidad y souslin (definición 1.1, 6 y 7 respectivamente) están relacionadas de la siguiente manera:

1.1 Lema. *Sea $\langle X, \leq \rangle$ un orden denso. Si $\langle X, \leq \rangle$ es separable, entonces toda familia de intervalos de X ajenos 2-2 es a lo más numerable.*

Demostración:
Si D es el conjunto denso numerable en X, y $A = \{J_i | i \in I\}$ es una familia de intervalos ajenos en X, entonces para cada J_i existe $a_i \in D$ tal que $a_i \in J_i$. Dado que los intervalos de A son ajenos $2-2$, se concluye que el cardinal de A debe ser menor o igual que el cardinal de D. Por lo que A es a lo más numerable. $\|$

Uno podría preguntarse si la implicación inversa tambien se cumple, es decir, si la propiedad de ser separable y el hecho de que en ese orden toda familia de intervalos ajenos 2-2 es a lo más numerable, son equivalente. Esta pregunta fué planteada por Souslin y al respecto se plantea la hipótesis de que en realidad esas dos propiedades son equivalentes (para un orden denso, completo y abierto). A continuación establecemos con mayor claridad estas ideas.

Problema se Souslin. *¿Todo orden denso, completo y abierto, que tiene la propiedad de Souslin, es isomorfo a R?*

La Hipótesis de Souslin es responder afirmativamente a la pregunta anterior, es decir, la hipótesis de Souslin es la siguiente afirmación:

Hipótesis de Souslin. *Si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso, completo y abierto, que tiene la propiedad de Souslin, entonces dicho orden es isomorfo a R.*

Por fines prácticos, demostraremos que la hipótesis de Souslin se puede enunciar eliminando dos hipótesis: la de ser completo y la de ser abierto.

1.2 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Hipótesis de Souslin.

2. *Si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden denso que satisface la propiedad de Souslin, entonces es separable.*

Demostración:
La demostración de que (2) implica (1), es trivial. Para demostrar que (1) implica (2), sea $\langle X, <_X \rangle$ un orden denso que tiene la propiedad de Souslin. Definiremos un encaje (que preserva el orden) de $\langle X, <_X \rangle$ en R. En el caso en que $\langle X, <_X \rangle$ tenga puntos finales (es decir, que no sea abierto) extendemos $\langle X, <_X \rangle$ a un orden denso $\langle \hat{X}, <_{\hat{X}} \rangle$ y abierto: sea $\hat{X} = X \cup (Q \setminus \{0\})$ y definimos $<_{\hat{X}}$ de la siguiente manera,

$$a <_{\hat{X}} b \Leftrightarrow \begin{cases} (a \in Q^- \wedge b \in Q^+) & \vee \\ (a \in Q^- \wedge b \in X) & \vee \\ (a \in X \wedge b \in Q^+) & \vee \\ (a, b \in X \wedge a <_X b) & \vee \\ (a, b \in Q^- \wedge a <_Q b) & \vee \\ (a, b \in Q^+ \wedge a <_Q b). \end{cases}$$

Lo que se hizo fue agregar una "copia" de Q a cada punto final de X (observe que $\hat{X}$ hereda la propiedad de Souslin). Por otro lado, es claro que la identidad en X es un encaje en $\hat{X}$. A continuación, lo que se debe hacer es extender $\hat{X}$ hacia su completación de Dedekind (ésta se obtiene agregando un supremo a cada cortadura de $\hat{X}$, una cortadura es un segmento inicial y propio de $\hat{X}$). Llamemos X^* a la completación de $\hat{X}$. Aplicamos la hipótesis de Souslin (que en este caso es la hipótesis de nuestra demostración) a X^* (observe que X^* es un orden denso y completo que satisface la propiedad de Souslin) para concluir que X^* es isomorfo a R, restringida a X. Así concluimos que existe un encaje f de X en R, a saber la composición de la extensión de $\hat{X}$ a X^* seguida del isomorfismo a R. A continuación definimos, en términos del encaje f, un subconjunto denso y numerable de X. Sea $\langle q_i | i \in \omega \rangle$ una enumeración de los racionales. Para cada $i, j \in \omega$ definimos d_{ij} como $f^{-1}(x)$, donde se elige a x del conjunto $(q_i, q_j) \cap f[X]$ siempre y cuando éste no sea vacío, y en caso de que este conjunto sea vacío definimos d_{ij} eligiendo un elemento de X. Observe que si tomamos $x < y \in X$, entonces existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, luego $f(x) < f(z) \wedge f(z) < f(y)$, por lo que existen $q_i, q_j \in Q$ tales que $f(x) < q_i < f(z) < q_j < f(y)$. Así, $(q_i, q_j) \cap f[X] \neq \emptyset$, por lo que $d_{i,j}$ tiene la propiedad de que su imagen está entre q_i y q_j. De donde se obtiene que $x < d_{ij} < y$, para concluir que $D = \{d_{i,j} | i, j \in \omega\}$ es un conjunto denso numerable de X. $\|$

En consecuencia, la hipótesis de Souslin niega la existencia de conjuntos densamente ordenados que tengan la propiedad de Souslin pero que no sean separables. A continuación damos nombre a dichos conjuntos:

1.2 Definición. Una *línea de Souslin* es un orden denso que no es separable, pero que tiene la propiedad de Souslin.

De aquí que la hipótesis de Souslin puede ser enunciada de la siguiente manera:

No existen las líneas de Souslin.

Ahora, dado que la hipótesis de Souslin es (tal como lo mencionamos en la introducción) un enunciado indecidible para la teoría ZFE (y más aun, indecidible para la teoría ZFE+HGC), la solución al problema de Souslin quedará fuera de nuestro alcance si nuestra teoría conjuntista no se ve involucrada en una evolución axiomática, para la cual las nuevas relaciones entre conceptos, posiblemente agregados, aparezcan a nuestro entendimiento como principios "obviamente" permisibles para la ciencia matemática y en particular para la teoría de los conjuntos. O bien, que nuestros criterios de "obvia" permisibilidad sufran cambios sustanciales, producto de algún tipo de evolución humana.

Pero independiente a la observación anterior es el hecho de que el problema de Souslin tiene respuestas parciales, es decir, que algún modelo (posiblemente modelo clase) de ZFE tiene lineas de Souslin y otro no. Por lo que el analizar el comportamiento del problema de Souslin en el universo construible L, puede aparecer como un estudio matemático, a partir del cual sea posible encontrar ciertas implicaciones importantes para la matemática (y posiblemente para la evolución de la teoría de los conjuntos misma) del axioma de constructibilidad.

Para lograr dar respuesta al problema de Souslin dentro de L, es conveniente enunciar este problema en términos de órdenes parciales, en particular de aquellos que se denominan "árboles":

1.3 Definición. Un *árbol* es un conjunto $\hat{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ parcialmente ordenado en el que para cada $x \in T$ el conjunto

$$\hat{x} = \{y \in T | y <_T x\}$$

está bien ordenado por $\leq_T$.

Un árbol aparece, pues, como un orden parcial en el que para cada "punto" del orden, sólo existe un único "camino hacia abajo". De ahí el nombre de árbol. A continuación definimos algunas nociones importantes acerca de estos ordenes:

1.4 Definición. Sea $\hat{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ un árbol.

1. Para $x \in T$, se define *la altura de* x ($\mathrm{alt}(x)$) como el tipo de orden del conjunto (bien ordenado) $\hat{x}$.

2. Si α es un ordinal, se define el *α-ésimo nivel de T* (T_α) como el conjunto

$$T_\alpha = \{x \in T | \text{alt}(x) = \alpha\}.$$

3. Si α es un ordinal, definimos *la restricción de T a α* ($T|_\alpha$), como:

$$T|_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta,$$

4. Para $x \in T$, se define el conjunto:

$$T(x) = \{y \in T | x \leq_T y\};$$

5. Si $X \subsetneq T$, definimos *la altura de X* ($\text{alt}(X)$) de la siguiente manera:

$$\text{alt}(X) = \sup\{\text{alt}(x) | x \in X\}.$$

6. Una *cadena* de T es un subconjunto C de T tal que $\langle C, <_T |_C\rangle$ es un conjunto linealmente ordenado.

7. Sea $r \subsetneq T$ una cadena de T tal que

$$(\forall x \in r)(\forall y \in T)[(y \leq_T x) \to (y \in r)],$$

en este caso se define a r como una *rama* de T. Si α es el tipo de orden de r se dice que r es una *α-rama.*

8. Una *anticadena* de T es un subconjunto A de T tal que

$$(\forall x, y \in A)[(x \neq y) \to \neg(x \leq_T y \vee y \leq_T x)],$$

cuando $x, y \in T$ satisfacen la propiedad escritra arriba, se dice que x y y son *incomparables en T.*

9. Una cadena (anticadena) en T es *maximal* si y sólo si no está contenida en ninguna otra cadena (anticadena) de T.

Tal como hemos mencionado, en este capítulo se discutiran "soluciones" parciales al problema de Souslin. Para lograr esto, se establecerá primeramente, una correspondencia entre la noción de linea de Souslin y la de "'árbol de Souslin". Esta noción (la de "árbol de Souslin") se define como un tipo especial de árbol dentro de una clase más general. En la siguiente definición se describe una clase general de árboles en la que se incluyen los árboles deseados:

1.5 Definición. Sea κ un cardinal regular y sea $\alpha < \kappa$.

1. Un (α,κ)-*árbol*, es un árbol T que satisface lo siguiente:

   (a) $T_\alpha = \emptyset$,

   (b) $(\forall\gamma < \alpha)(0 < |T_\gamma| < \kappa)$.

2. Un κ-*árbol*, es un (κ,κ)-árbol.

3. Si T es un (α,κ)-árbol, se dice que el árbol T *es normal*, cuando satisface lo siguiente:

   (a) $|T_0| = 1$,

   (b) $(\forall\gamma < \alpha)(\forall x \in T_\gamma)(|\{y \in T_{\gamma+1} | y > x\}| = \aleph_0)$.

   (c) $(\forall x \in T)(\forall\gamma < \alpha)(\mathrm{alt}(x) < \gamma \to (\exists y \in T_\gamma)(x < y))$.

   (d) $(\forall\gamma < \alpha)[\lim(\gamma) \to (\forall x, y \in T_\gamma)(\hat{x} = \hat{y} \to x = y)]$.

Ahora estamos en la posibilidad de definir la noción de *árbol de Souslin* como aquellos ω_1-árboles en los que todas sus cadenas y anticadenas son a lo más numerables.

En la definición 1.5 se determinan, por separado (y en particular para $\kappa = \omega_1$), las nociones de ω_1-árbol y ω_1-árbol normal. Lo que a continuación veremos es que cuando se tiene un árbol de Souslin, se tiene, también, un árbol de Souslin normal. Es decir, el hecho de que exista un ω_1-árbol sin anticadenas ni cadenas no numerables, garantiza la existencia de una árbol con las mismas características (Souslin), pero que además es normal. Este resultado facilita mucho el manejo de la demostración de la equivalencia entre la existencia de líneas y árboles de Souslin.

1.2 Lema. *Sea $\langle T, \leq\rangle$ un árbol de Souslin. Existe T^* tal que $\langle T^*, \leq|_{T^*}\rangle$ es un árbol de Souslin* **normal**.

Demostración:
Definimos $T^1 \subseteq T$ como

$$T^1 = \{x \in T | |T(x)| > \aleph_0\}.$$

Observe que $T^1 \neq \emptyset$, T^1 es un árbol de Souslin, y además $T^1 \cap T_0 \neq \emptyset$. Ahora, tomando $x_0 \in T^1 \cap T_0$ arbitrario, definimos el árbol T^2 como $T^2 = T^1(x_0)$. Una vez más, se debe observar que T^2 es un árbol de Souslin que además (por la regularidad de ω_1) satisface las propiedades a) y c) de normalidad. Para garantizar la *unicidad de límites* (propiedad d)), consideremos lo siguiente:

para cada cadena C en T^2 de la forma $C = \hat{x} = \hat{z}$ agregamos un nodo a_c tal que para toda $z \in C$, $z < a_c$ y tal que:

$$\forall x[(\forall z \in C)(x > z) \rightarrow a_c < x].$$

Por último, para garantizar la existencia de ω sucesores (propiedad b)) se considera el árbol T^3 definido como:

$$T^3 = \{x \in T^2 | \lim(\mathrm{alt}_{T^2}(x))\}.$$

Claramente T^3 es un árbol de Souslin que satisface las propiedades de normalidad (def. 1.5(3)). $\|$

El siguiente teorema establece, con ayuda del lema anterior, que la existencia de lineas de Souslin es equivalente a la existencia de árboles de Souslin. Será pues este teorema el que permita la reformulación de la hipótesis de Souslin en términos de árboles.

1.3 Teorema. *Existe una linea de Souslin, si y sólo si existe un árbol de Souslin.*

Demostración:
$\Leftarrow$) Sea $\langle \hat{T}, <_{\hat{T}} \rangle$ un árbol de Souslin. Sea $\langle T, <_T \rangle$ un árbol de Souslin normal (el lema anterior garantiza su existencia). Considérese el conjunto:

$$L = \{C \subseteq T | C \text{ es una cadena maximal de } T\}.$$

Ahora, como en T todas las cadenas son numerables, sabemos que para cada $C \in L$ existe un ordinal $h(C)$, tal que $h(C) < \omega_1$ y

$$(\forall \alpha < h(C))(|T_\alpha \cap C| = 1) \wedge (\forall \alpha \geq h(C))(T_\alpha \cap C = \emptyset).$$

Además, como T es normal, $h(C)$ no puede ser sucesor, por lo que $h(C)$ es un ordinal límite menor que ω_1. Luego, para cada $C \in L$ y cada $\alpha < h(C)$, definimos $C(\alpha)$ como el único elemento de $T_\alpha \cap C$.

La idea que continúa, es la de demostra que el conjunto L es una línea de Souslin. Así, a continuación demostraremos que bajo la definición de cierto orden $<_L$ en L, el par $\langle L, <_L \rangle$ cumple con las propiedades de Souslin y densidad (mencionadas en las definiciones 1.1(5) y 1.2) pero que no es separable.

Para definir el orden citado en L, consideramos primero, un orden $<_\alpha$ en T_α (para cada $0 < \alpha < \omega_1$) isomorfo al orden usual de los números racionales (recuerde que cada uno de dichos T_α tienen cardinalidad $\aleph_0$).

Pero que además el par $\langle S(x), <_{\alpha+1}\rangle$ sea isomorfo a los racionales (con el orden usual), donde $x \in T_\alpha$ $(0 < \alpha < \omega_1)$ y

$$S(x) = \{y \in T_{\alpha+1} | y > x\}.$$

Luego, definimos el orden $<_L$ en L de la siguiente manera:

$$C <_L D \quad \text{si y sólo si} \quad C(d(C,D)) <_{d(C,D)} D(d(C,D)),$$

donde $d(C,D) = \min\{\alpha < \min(h(C), h(D)) | C(\alpha) \neq D(\alpha)\}$. (Observe que por el hecho de que T es normal, la unicidad de límites asegura que el ordinal $d(C,D)$ siempre es un ordinal sucesor.) Veamos pues que en realidad el orden $<_L$ es un orden denso en L (es claro que éste orden es lineal):

Sean $C, D \in L$ tales que $C <_L D$, así, si $\alpha = d(C,D)$, se tiene que $C(\alpha) <_\alpha D(\alpha)$. Pero debido a la elección del orden $<_\alpha$, se puede garantizar la existencia de un elemento e de T_α, tal que $C(\alpha) <_\alpha e <_\alpha D(\alpha)$. Ahora, si consideramos la cadena E como aquella que se obtiene al extender la cadena $\{x \in T | x \leq e\}$ a una cadena maximal, entonces

$$d(C,E) = \alpha = d(E,D).$$

Concluimos que $C(\alpha) <_\alpha E(\alpha) <_\alpha D(\alpha)$, y por lo tanto, que:

$$C <_L E <_L D.$$

Para demostrar que L cumple con la propiedad de Souslin, definimos, para cada intervalo $I = (C,D)$ en L, una cadena E_I en L, como aquella que se obtiene al extender de manera máxima a la cadena $\{x \in T | x \leq e_I\}$, donde e_I es un elemento de T que tiene la propiedad:

$$C(d(C,D)) <_{d(C,D)} e_I <_{d(C,D)} D(d(C,D)).$$

Claramente $E_I \in I$, así, si I y J son intervalos ajenos en L, entonces $E_I \notin J$ y $E_J \notin I$. Por lo que los elementos e_I y e_J de T, son incomparables en T. Luego, como no existen anticadenas no numerables en T, cualquier familia de intervalos ajenos 2-2 en L, debe ser a lo más numerable.

Por último, para demostrar que L no es separable, supóngase, por el contrario, que existe $A \subseteq L$ numerable y denso en L. Definimos γ como:

$$\gamma = \sup\{d(C,D) < \omega_1 | (C, D \in A) \wedge (C \neq D)\}.$$

(Se debe observar que $\gamma < \omega_1$, pues A es numerable.) Luego, sean $w \in T_\gamma$ y $x, y, z \in S(w)$ ($S(w)$ definido arriba) tales que $x <_{\alpha+1} y <_{\alpha+1} z$, y considere cadenas maximales E_x, E_y, E_z que contengan, repectivamente, a x, y y z. De aquí que las cadenas E_x, E_y y E_z estan ordenadas, en L de la siguiente manera:

$$E_x <_L E_y <_L E_z,$$

pero como además hemos supuesto que A es denso en L, deben existir cadenas C, D en A tales que

$$E_x <_L C <_L E_y <_L D <_L E_z,$$

concluimos: $d(C, D) > \gamma$, una contradicción.

$\Rightarrow$) Sea $\langle L, <_L\rangle$ una línea se Souslin. Construiremos T, un subconjunto del conjunto $\{I \in P(L) | I \text{ es un intervalo en } L\}$, tal que $\langle T, \supseteq\rangle$ sea un árbol de Souslin. La construcción sea hará por niveles:
Sea $T_0 = \{L\}$. Para definir $T_{\alpha+1}$ en términos de T_α, consideremos, primeramente, los siguientes intervalos:

$$I_0 = \{y \in I | y <_L x(I)\};$$
$$I_1 = \{y \in I | x(I) \leq_L y\},$$

donde I es un intervalo de L con al menos dos elementos distintos, y $x(I)$ es un punto interior de I. Definimos $T_{\alpha+1}$ de la siguiente manera:

$$T_{\alpha+1} = \{I_0 | I \in T_\alpha \wedge |I| > 1\} \cup \{I_1 | I \in T_\alpha \wedge |I| > 1\}.$$

Para α límite, definimos:

$$T_\alpha = \{\bigcap r | r \text{ es una } \alpha - \text{rama de } T|_\alpha \text{ y tal que } |\bigcap r| > 1\}.$$

(Recuerde que, en este caso, una rama es una sucesión decreciente de intervalos de L.) Por último, definimos:

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha.$$

Demostraremos, a continuación, que $\langle T, \supseteq\rangle$ es un árbol de Souslin, es decir, demostraremos que:

1. $T_{\omega_1} = \emptyset$.
2. $(\forall\alpha < \omega_1)(0 < |T_\alpha| < \omega_1)$
3. T no tiene cadenas no numerables.
4. T no tiene anticadenas no numerables.

Por reducción al absurdo demostraremos, a continuación, el punto 3: Sea B una cadena no numerable de T (supondremos que B es maximal, pues en caso de que no lo sea, es posible extenderla a una cadena tal). Considere la sucesión: $\langle I_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ la enumeración canónica de los primeros ω_1 elementos de B, y definimos:

$$A_0 = \{\alpha < \omega_1 | (\forall y \in I_{\alpha+1})(y <_L x(I_\alpha))\}.$$
$$A_1 = \{\alpha < \omega_1 | (\forall y \in I_{\alpha+1})(x(I_\alpha) \leq_L y)\}.$$

Así, $A_0 \cup A_1 = \omega_1$ y $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, por lo que se tiene que A_0 o A_1 es no numerable. Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que A_0 es no numerable, y definimos, para $\alpha \in A_0$, el intervalo J_α de L como:

$$J_\alpha = (x(I_\beta), x(I_\alpha)),$$

donde $\beta = \min\{\beta \in A_0 | \beta > \alpha\}$, tendremos que $x(I_\beta) <_L x(I_\alpha)$. Por lo tanto, que la colección $\{J_\alpha | \alpha \in A_0\}$ es una colección de ω_1 intervalos abiertos, distintos y ajenos 2-2 de L. Contradiciendo así, el hecho de que L es una linea de Souslin.

Para demostrar 4. (es decir, que T no tiene anticadenas no numerables), es suficiente con observar que, en caso de que existiera una anticadena tal, de la forma $A = \{I_\alpha | \alpha < \omega_1\}$, es posible elegir elementos $x_\alpha, y_\alpha \in I_\alpha$ (para cada $\alpha < \omega_1$) tales que $x_\alpha <_L y_\alpha$ y que la colección $\{(x_\alpha, y_\alpha) | \alpha < \omega_1\}$ de intervalos abiertos de L, viole la propiedad de Souslin en L, es decir, que sea una colección no numerable de intervalos abiertos y ajenos 2-2 de L.

Observe que el punto 2. se sigue directamente del punto anterior y del hecho de que $|T| > \aleph_0$. Este último hecho se cumple, pues el conjunto $\{x(I) | I \in T\}$ es denso en L y por lo tanto (no separabilidad de L) no numerable. De donde T tampoco lo es.

Por último, el punto 1, se cumple gracias a la validez del punto 2. en T y al hecho de que todas las cadenas son numerables. ||

3.2 El principio Diamante

Hemos llegado a la sección donde aparece y se presenta la primera aplicación del principio de Jensen.

Como veremos en esta sección, el principio de Jensen o principio diamante (como comunmente se conoce), resulta ser independiente de la teoría de los conjuntos, así, el uso que hacemos del principio en esta sección, para demostrar la indemostrabilidad de la hipótesis de Souslin (dentro de la teoría de los conjuntos), ofrece al matemático, una posibilida "axiomática" alternativa para responder a algunas preguntas abiertas de diversas ramas de su actividad.

En términos actuales el principio diamante se puede expresar en distintas formas (en su momento demostraremos algunas de estas equivalencias). La forma más común en que aparece enunciado es la siguiente:

Existe una ω_1-sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ (donde para cada $\alpha < \omega_1$, $S_\alpha \subseteq \alpha$) tal que dado cualquier conjunto $X \subseteq \omega_1$, el conjunto:

$$\{\alpha < \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\},$$

es estacionario en ω_1.

(El término "conjunto estacionario" ha sido definido y brevemente estudiado en los preliminares del presente texto.) Una vez digerido este enunciado, se puede apreciar la fuerza de su afirmación:
"Existe una ω_1-sucesión de subconjuntos de ω_1 que determinan, para un conjunto 'muy grande', el comportamiento de cualquier subconjunto de ω_1, en cada estrato de este conjunto."

Inmediatamente, se puede observar que la existencia de dicha sucesión determina al conjunto "potencia de omega" como un conjunto que está contenido en dicha sucesión y por lo tanto que tiene cardinal menor o igual a $\aleph_1$. En otras palabras, el principio diamante implica directamente la hipótesis del continuo.

Por el momento nos interesa demostrar, haciendo uso del principio diamante, la consistencia (relativa) de la hipótesis de Souslin con respecto a la teoría de los conjuntos. Esta demostración se hará en dos partes, primero demostraremos que el principio diamante se satisface en el universo L de los conjuntos construibles, y después demostraremos que, suponiendo el principio diamante, se puede construir un árbol de Souslin. Antes, enunciamos tres lemas relacionados con los lemas 6.1, 6.2 y el teorema 6.1 del capítulo anterior, para demostrar la validez del principio diamante en L.

2.1 Lema. *Supóngase el axioma de constructibilidad. Si $M \prec L_{\omega_1}$, entonces M es transitivo.*

Demostración:
Sea $x \in M$, así, $x \in L_{\omega_1} = \bigcup_{\gamma<\omega_1} L_\gamma$, lo cual implica que $x \in L_\gamma$ para algún $\gamma < \omega_1$. Luego, como $|L_\gamma| \leq |\gamma| + \omega$ y L_γ es transitivo, entonces x es a lo más numerable, así, existe cuando menos una función suprayectiva de ω sobre x. Sea f la $<_L$-mínima función tal. Observe que $f \subseteq L_\beta$ (con $\beta = \max\{\omega, \gamma\}$), y que dicha $\beta < \omega_1$. Así, el lema 6.2 asegura que $f \in L_{\omega_1}$. Ahora, si $F(f)$ es el predicado:

"f es una función suprayectiva de ω sobre x",
$F(f)$ puede ser expresado en el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega_1}$ por una fórmula Σ_0 de dicho lenguaje, cuya única constante es x^0, y además, la función f (definida arriba) satisface dicha definición. Así, como $M \prec L_{\omega_1}$ y además, $x \in M$, se tiene que $f \in M$. Pero, más aún, $f(n) \in M$ (para cada $n \in \omega$), pues $\omega \subseteq M$. Así, se concluye que $f[\omega] = x \subseteq M$, es decir, M es transitivo. ||

2.2 Lema. *Supóngase $V = L$. Si $M \prec L_{\omega_1}$, entonces $M = L_\alpha$ para algún $\alpha \leq \omega_1$.*

Demostración:
El lema de condensación asegura que existen únicos α y π, tales que $\pi : M \cong L_\alpha$, con $\alpha \leq \omega_1$. Luego, el lema anterior asegura que bajo nuestras hipótesis, M debe ser transitivo, así, como $M \subseteq L_\alpha$ y π tiene la propiedad de comportarse como la identidad cuando se le restringe a conjuntos transitivos, se concluye que $M = L_\alpha$. Que es lo que se quería demostrar. ||

2.3 Lema. *Supóngase $V = L$. Si κ es un cardinal mayor que ω_1, y $M \prec L_\kappa$, entonces existe $\alpha \leq \omega_1$ tal que $M \cap L_{\omega_1} = L_\alpha$.*

Demostración:
Primero observe que $\omega_1 \in M$, pues $\omega_1 \in L_\kappa$ y ω_1 es definible por la fórmula:

$$(\forall x \in u)(\exists f(f : \omega \leftrightarrow x)) \wedge \neg \exists f(f : \omega \leftrightarrow u).$$

Así, $\omega_1^X = \omega_1^{L_\kappa} = \omega_1$. Después, observe que, de igual manera, $L_{\omega_1} \in M$, pues la fórmula $H(\omega_1, x)$ $(x = L_{\omega_1})$ es absoluta para M, L_κ y además, el teorema 4.2 (Cap. 2) asegura que $H(\omega_1, x)$ es absoluta para L_κ, así, $L_{\omega_1}^M = L_{\omega_1}^{L_\kappa} = L_{\omega_1}$. Gracias a esto, se tiene que:

$$M \cap L_{\omega_1} = \{x \in M | (x \in L_{\omega_1})^M\}.$$

Luego, si $\phi(\overrightarrow{x})$ es una fórmula de LTC y $\overrightarrow{x} \in M \cap L_{\omega_1}$, entonces

$$\phi(\overrightarrow{x})^{L_{\omega_1}} \Leftrightarrow (\phi(\overrightarrow{x})^{L_{\omega_1}})^{L_\kappa},$$

además, dado que M es una subestructura elemental de L_κ, se concluye que:

$$(\phi(\overrightarrow{x})^{L_{\omega_1}})^{L_\kappa} \Leftrightarrow (\phi(\overrightarrow{x})^{L_{\omega_1}})^X.$$

pero, según la observación de arriba, esta última fórmula es equivalente a la fórmula: $\phi(\overrightarrow{x})^{M \cap L_{\omega_1}}$. Por lo tanto, se tiene que $M \cap L_{\omega_1}$ es una subestructura elemental de L_{ω_1}. Así, si se aplica este último hecho al lema 2.3, se concluye que existe $\alpha \leq \omega_1$, tal que $M \cap L_{\omega_1} = L_\alpha$. ||

2.1 Teorema. *El axioma de constructibilidad implica el principio diamante* $(V = L \Rightarrow \diamond)$.

Demostración:
Por recursión sobre $\alpha < \omega_1$, definimos la siguiente ω_1-sucesión de pares de subconjuntos de ω_1:

1. $(S_0, C_0) = (\emptyset, \emptyset)$;

2. $(S_{\alpha+1}, C_{\alpha+1}) = (\alpha + 1, \alpha + 1)$;

3. Si, α es límite, definimos (S_α, C_α) como el $<_L$-mínimo par (S, C) tal que:

   (a) $S \subseteq \alpha$,

   (b) C es un c.n.a. de α,

   (c) $(\forall \psi \in C)(S \cap \psi \neq S_\psi)$.
   En caso de que dicho par no exista, se define:
   $(S_\alpha, C_\alpha) = (\alpha, \alpha)$.

Afirmamos que la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond$-sucesión (es decir, que es la sucesión de la cual asegura su existencia el principio $\diamond$).

Demostraremos esta afirmación por reducción al absurdo. Así, se supone la existencia de un conjunto $X \subseteq \omega_1$ y un c.n.a $C \subseteq \omega_1$ en ω_1, tal que:

$$(\forall \alpha \in C)(X \cap \alpha \neq S_\alpha).$$

Sea, pues, (X, C) el $<_L$-mínimo par con dicha propiedad.

Observe ahora, que la sucesión $\langle (S_\alpha, C_\alpha) | \alpha < \omega_1 \rangle$ se define en L_{ω_2} por la fórmula $H(f)$:

$$\begin{aligned}
&(\text{“}f \text{ es una función ”}) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \omega_1) \wedge (\mathrm{rango}(f) \subseteq \omega_1 \times \omega_1) \\
&\wedge (f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)) \wedge (\forall \alpha \in \omega_1)[(\mathrm{sucesor}(\alpha) \to f(\alpha) = (\alpha, \alpha)) \\
&\wedge (\lim(\alpha) \wedge \exists S \exists C((S, C) \subseteq \alpha \times \alpha \wedge \text{c.n.a.}_\alpha(C) \\
&\wedge (\forall \gamma < \alpha)(\gamma \in C \to S \cap \gamma \neq (f(\gamma))_0)) \\
&\to \exists \hat{S} \exists \hat{C}((\hat{S}, \hat{C}) \subseteq \alpha \times \alpha \wedge \text{c.n.a.}_\alpha(\hat{C}) \\
&\wedge (\forall \gamma < \alpha)(\gamma \in \hat{C} \to \hat{S} \cap \gamma \neq (f(\gamma))_0)) \wedge f(\alpha) = (\hat{S}, \hat{C}) \\
&\to (f(\alpha) <_L (S, C))) \\
&\wedge (\lim(\alpha) \wedge \neg(\exists S \exists C((S, C) \subseteq \alpha \times \alpha \wedge \text{c.n.a.}_\alpha(C) \\
&\wedge (\forall \gamma < \alpha)(\gamma \in C \to S \cap \gamma \neq (f(\gamma))_0)) \\
&\to (f(\alpha) = (\alpha, \alpha))]
\end{aligned}$$

De igual manera, es fácil ver que el par (X, C) también es definible en L_{ω_2}. Ahora, sea M un conjunto numerable tal que $\omega_1 \in M$ y tal que $M \prec L_{\omega_2}$ (el lema 6.1 del capítulo 2 y su corolario, garantizan la existencia de dicha subestructura). Luego, el lema de condensación asegura que existe un único $\beta \leq \omega_2$ y un único isomorfismo $\pi : \langle M, \in\rangle \leftrightarrow \langle L_\beta, \in\rangle$ (observe que el ordinal β debe ser menor que ω_1, pues M es numerable). Y el lema 2.3 (anterior) sostiene que existe $\alpha \leq \omega_1$ tal que $M \cap L_{\omega_1} = L_\alpha$ (aquí se usa la hipótesis: $V = L$), así, $M \cap \omega_1 = \alpha$, y este ordinal (α) debe ser el mínimo ordinal numerable que no está en M. Por lo que se tiene que $\pi(\omega_1) = \alpha$, además, como $L_\alpha \subseteq M$ es transitivo, para todo $x \in L_\alpha$, $\pi(x) = x$. Más aún:

$$\begin{aligned}
&\pi(X) = X \cap \alpha,\\
&\pi(C) = C \cap \alpha,\\
&\pi(\langle S_\gamma | \gamma < \omega_1\rangle) = \langle S_\gamma | \gamma < \alpha\rangle,\\
&\pi(\langle C_\gamma | \gamma < \omega_1\rangle) = \langle C_\gamma | \gamma < \alpha\rangle.
\end{aligned}$$

Tal como mencionamos antes, el par (X, C) es definible en L_{ω_2}, así:

$L_{\omega_2} \models$ "(X, C) es el $<_L$-mínimo par de subconjuntos de ω_1, tal que C es un c.n.a. en ω_1 y $(\forall\gamma \in C)(X \cap \gamma \neq S_\gamma)$".

Por la elección de M, se tiene que:

$M \models$ "(X, C) es el $<_L$-mínimo par de subconjuntos de ω_1, tal que C es un c.n.a. en ω_1 y $(\forall\gamma \in C)(X \cap \gamma \neq S_\gamma)$".

Dadas las caracteristicas del isomorfismo π, se concluye que:

$L_\beta \models$ "$(X \cap \alpha, C \cap \alpha)$ es el $<_L$-mínimo par de subconjuntos de α, tal que $C \cap \alpha$ es un c.n.a. en α y $(\forall\gamma \in (C \cap \alpha))((X \cap \alpha) \cap \gamma \neq S_\gamma)$".

Luego, por absolutez de las definición de (X, C), la definición de (X_α, C_α), implica que:

$$X \cap \alpha = S_\alpha \quad \text{y} \quad C \cap \alpha = C_\alpha.$$

Luego, $L_\beta \models$ "$C \cap \alpha$ es no acotado en α, $C \cap \alpha$ es en realidad no acotado en α, esto implica, puesto que C es cerrado en ω_1, que $\alpha \in C$. Por definición del par (X, C), $X \cap \alpha \neq S_\alpha$, concluimos la contradicción:

$$(X \cap \alpha \neq S_\alpha) \wedge (X \cap \alpha = S_\alpha). \quad \|$$

Corolario 1. *La consistencia de la teoría $ZFE + HGC + (V = L) + \diamond$ se deduce de la consistencia de la teoría ZF.*

A continuación, se establece la relación existente entre el principio diamante y la hipótesis de Souslin:

2.2 Teorema. *El principio diamante implica la negación de la hipótesis de Souslin ($\diamond \Rightarrow$ existe un árbol de Souslin).*

Demostración:
Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond$-sucesión. La idea de la demostración es definir un orden $<_T$ en ω_1, tal que el par $\langle \omega_1, <_T \rangle$ sea un ω_1-árbol normal de Souslin. Para lograr ésto, describimos las restriciones $T|_\alpha$ de manera recursiva, de tal suerte que cada uno de estos árboles sea un (α, ω_1)-árbol normal. Construimos por recursión sobre $\alpha \in \omega_1$, el árbol buscado:

1. $T_0 = \{\emptyset\}$

2. $T_1 = \{1, 2\}$

3. Supóngase que $T|_{n+1}$ está descrito, definimos $\langle T|_{n+2}, < \rangle$ como:

$$T|_{n+2} = T|_{n+1} \cup T_{n+1},$$

donde para todo $n \geq 2$, $T_{n+1} = \{(\max T_n) + r | 0 < r \leq 2^n\}$. Por cada elemento de T_n tendremos exactamente dos elementos de T_{n+1} mayores que él, estos se pueden elegir de tal manera que los dos elementos más chicos de T_{n+1} sean sucesores de el mínimo elemento de T_n y así, para el siguiente elemento de T_n, le sucederán los dos elementos más chicos de T_{n+1} que no hayan sido usado como sucesores de elementos de T_n. El resultado de este proceso adquiere la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & 1 & & & & 2 & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ 3 & & 4 & & 5 & & 6 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

4. Para $\alpha \geq \omega$, si $T|_{\alpha+1}$ está descrito, definimos $T|_{\alpha+2} = T|_{\alpha+1} \cup T_{\alpha+1}$ con

$$T_{\alpha+1} = \{\gamma < \omega_1 | \omega\alpha \leq \gamma \leq \omega\alpha + \omega\},$$

y ordenamos los elementos de $T_{\alpha+1}$ en $T|_{\alpha+2}$ de manera similar a como se hizo en el caso finito, es decir, a cada elemento de T_α le suceden dos elementos de $T_{\alpha+1}$, iniciando por el menor de T_α cuyos sucesores son los dos menores de $T_{\alpha+1}$.

5. En el caso en que α es límite, si $T|_\alpha$ está definido, para definir $T|_{\alpha+1}$ consideramos, de nuevo, $T|_{\alpha+1} = \{\gamma < \omega_1 | \omega\alpha <_T \gamma <_T \omega\alpha + \omega\}$ y se elige una α–rama $R(x)$ en $T|_\alpha$ (para cada x en $T|_\alpha$), tal que $x \in R(x)$ (gracias a la normalidad de $T|_\alpha$, es posible elegir estas ramas). Sólo en el caso en que S_α sea una anticadena maximal de $T|_\alpha$ será necesario elegir $R(x)$ de tal suerte que $R(x) \cap S_\alpha \neq \emptyset$, esta elección también es posible, pues en este caso S_α es maximal y por lo tanto x es comparable con algún elemento de S_α. Ahora, sea $\{x_n | n \in \omega\} = \omega\alpha$ una enumeración de $T|_\alpha$. Así, para cada cadena $B(x_n)$ elegimos un ordinal $\gamma \in T_{\alpha+1}$ tal que $B(x_n) \cup \{\gamma\}$ extienda a la cadena $B(x_n)$.

Por último, definimos el árbol $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T|_\alpha$. (Observe que $T = \omega_1$.) Es claro que T es un ω_1–árbol. Solamente falta demostrar que T es, además, de Souslin:

Sea $A \subseteq \omega_1$ una anticadena maximal de T y sean

$C_1 = \{\alpha \in \omega_1 | \omega\alpha = \alpha\}$
$C_2 = \{\alpha \in \omega_1 |$" la cadena $(A \cap T|_\alpha)$ es maximal en $T|_\alpha$" $\}$,
$C = C_1 \cap C_2$

Observe que la función $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$, definida por $f(\alpha) = \omega\alpha$ es una función normal: claramente es estrictamente creciente; la continuidad se sigue de la definición de $\omega\alpha$ para α límite. Así, el lema 3.3 (Cap. 1) asegura que C_1 es un c.n.a. en ω_1.

El conjunto C_2 también es un c.n.a. de ω_1. Para demostrar que C_2 es cerrado, tómese $\gamma < \omega_1$ un ordinal límite, tal que el conjunto $C_2 \cap \gamma$ es no acotado en γ. Se tiene que demostrar que la anticadena $A \cap T|_\gamma$ es maximal en $T|_\gamma$: sea $x \in T|_\gamma$, tal que x es incomparable con todos los elementos de $A \cap T|_\gamma$. En primer lugar, se observa que existe $\beta < \gamma$ tal que $x \in T|_\beta$, luego, existe α tal que $\beta < \alpha < \gamma$ y tal que $A \cap T|_\alpha$ es maximal en $T|_\alpha$, así, $x \in T|_\alpha$ y x es incomparable con todos los elementos de $A \cap T|_\alpha$, por lo tanto $x \in A \cap T|_\alpha \subseteq A \cap T|_\gamma$, y esto último implica que $A \cap T|_\gamma$ es maximal en $T|_\gamma$ y por lo tanto $\gamma \in C_2$, es decir, C_2 es cerrado.

Para demostrar que C_2 es no acotado en ω_1, sea $\beta < \omega_1$ y considere la siguiente sucesión definida por recursión:

$$\alpha_0 = \beta$$

$$\alpha_{n+1} = \min\{\gamma < \omega_1 | (\alpha_n < \gamma) \wedge (\forall x \in T|_{\alpha_n} \setminus A) \\ (\exists y \in (T|_\gamma \cap A))(\text{“}x \text{ es comparable con } y\text{”})\}$$

Observe que α_{n+1} está bien definido, pues siempre existe $\gamma > \alpha_n$ con la propiedad descrita (de no ser así, A no sería maximal en T). Definimos $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ y demostramos que $\alpha \in C_2$, es decir, que $A \cap T|_\alpha$ es maximal en $T|_\alpha$: sea $x \in (T|_\alpha \setminus A)$, entonces $x \in (T|_{\alpha_n} \setminus A)$ (para algún $n \in \omega$), luego, existe $y \in (T|_{\alpha_{n+1}} \cap A)$ tal que x, y son comparebles. En consecuencia, x es comparable (en $T|_\alpha$) con y. Por lo tanto, $A \cap T|_\alpha$ es maximal en $T|_\alpha$, es decir, $\alpha \in C_2$ y $\beta < \alpha$ (C_2 es no acotado en ω_1).

Ahora, el lema 3.1 (Cap. 1) afirma que el conjunto $C = C_1 \cap C_2$ es un c.n.a. de ω_1. De aquí que existe $\alpha \in C$ tal que $A \cap \alpha = S_\alpha$ (recuerde que la sucesión $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ es una $\diamond$–sucesión), luego, como $T|_\alpha = \omega\alpha$, para α límite mayor que ω, y como también $\omega\alpha = \alpha$, $A \cap \alpha$ es una anticadena maximal de $T|_\alpha$, es decir, S_α es una anticadena maximal de $T|_\alpha$. Además, se debe observar que, según la construcción de $T|_{\alpha+1}$ (en este caso α debe ser límite, pues $\alpha = \omega\alpha$), cada elemento de T_α es mayor que algún elemento de S_α. De donde se concluye que S_α es una anticadena maximal del árbol T. Así, como $S_\alpha \subseteq A$ y tanto A como S_α son anticadenas maximales de T, se cumple que $A = S_\alpha = A \cap \alpha$. Por lo tanto, A debe ser numerable, es decir, hemos demostrado que T satisface la propiedad de Souslin y por lo tanto es un árbol de Souslin. ‖

3.3 Algunos principios equivalentes a $\diamond$

El principio diamante puede ser enunciado en distintas formas, cada una de estas formas equivalentes entre si, que enunciaremos a continuación, permiten un acercamiento a la esencia de lo que predica este principio. Estos hechos pueden llegar a aportar a la razón nuevos criterios para discernir acerca de la admisibilidad de esta propiedad, que se atribuye a ω_1, con respecto a la axiomática conjuntista.

Considere los siguientes enunciados:

$\diamond^1$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $S_\alpha \subseteq \alpha$, y para toda $X \subseteq \omega_1$, existe un ordinal infinito α tal que $X \cap \alpha = S_\alpha$.

$\diamond^{1'}$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $\mathcal{P}(\alpha)$ y para toda $X \subseteq \omega_1$, existe un ordinal infinito α tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.

$\diamond^l$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $\mathcal{P}(\alpha)$ y para toda $X \subseteq \omega_1$, existe un ordinal límite α tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.

$\diamond^{\text{‘}}$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $\mathcal{P}(\alpha)$ y para toda $X \subseteq \omega_1$, el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 | (X \cap \alpha) \in S_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

$\diamond^{\times'}$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $P(\alpha \times \alpha)$ y para todo $X \subseteq \omega_1 \times \omega_1$, el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 | (X \cap (\alpha \times \alpha)) \in S_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

$\diamond^{\times}$: existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $S_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$ y para todo $X \subseteq \omega_1 \times \omega_1$, el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 | (X \cap (\alpha \times \alpha)) = S_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

$\diamond^{f}$: existe una sucesión de funciones $\langle h_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ ($h_\alpha : \alpha \to \omega_1$), tal que para toda función $f : \omega_1 \to \omega_1$, el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 | f|_\alpha = h_\alpha\}$ es estacionario.

3.1 Teorema. *Los principios $\diamond^1$, $\diamond^{1'}$, $\diamond^l$, $\diamond^{\text{‘}}$, $\diamond^{\times'}$, $\diamond^{\times}$ y $\diamond^f$ son equivalentes al principio $\diamond$.*

Demostración: a) $\diamond \Rightarrow \diamond^1$: es trivial. $\|$

b) $\diamond^1 \Rightarrow \diamond^{1'}$:

Si $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^1$-sucesión, entonces, es claro que la sucesión $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ definida por $T_\alpha = \{S_\alpha\}$ es una $\diamond^{1'}$-sucesión. $\|$

c) $\diamond^{1'} \Rightarrow \diamond^l$:

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^{1'}$-sucesión. Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos T_α como:

$$T_\alpha = \{Y \cap \alpha | Y \in \bigcup_{n \in \omega} S_{\alpha+n}\}.$$

Claramente T_α es un subconjunto numerable de $P(\alpha)$, pero además, $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^l$-sucesión: sea $X \subseteq \omega_1$, por hipótesis ($\diamond^{1'}$) existe $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$. Si α es límite hemos terminado, si no, entonces sabemos que existe un ordinal límite γ y un natural distinto de cero n, tal que $\alpha = \gamma + n$. Así, dado que

$$X \cap \alpha \in \bigcup_{n \in \omega} S_{\gamma+n},$$

se tiene que $(X \cap \alpha) \cap \gamma \in T_\gamma$, es decir, $X \cap \gamma \in T_\gamma$. $\|$

d) $\diamond^l \Rightarrow \diamond^{\text{‘}}$:

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^l$-sucesión. Defínase una función $h : \omega_1 \to \omega_1$, por $h(\nu) = 2\nu$. Observe que si α es límite, entonces:

$$h|_\alpha : \alpha \longrightarrow \alpha, \quad \text{y} \quad \text{rango}(h|_{\omega_1 \setminus \alpha}) \cap \alpha = \emptyset.$$

Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos $T_\alpha \subseteq P(\alpha)$, de la siguiente manera:

$$T_\alpha = \{h^{-1}[X] | X \in S_\alpha\}.$$

Es claro que T_α es numerable, pero además, $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond'$-sucesión: sea $X \subseteq \omega_1$, se debe demostrar que el conjunto

$$E = \{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha \in T_\alpha\},$$

es estacionario en ω_1. Sea, pues, C un conjunto c.n.a. de ω_1. Observe que se puede encoger a C, de tal manera que:

$$(\forall \alpha \in C)(\lim(\alpha)) \wedge (\forall \alpha, \beta \in C)(\alpha < \beta \rightarrow \alpha + \omega \cdot \omega \leq \beta),$$

y que no pierda su propiedad de ser c.n.a. de ω_1. Así, sin perdida de generalidad, supondremos que C cumple con dichas propiedades. Sea, entonces, $\langle c_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ la enumeración canónica de C. Ahora, sea $Z_0 \subseteq \omega_1$ tal que satisface la siguiente definición por inducción sobre ω_1: $Z_0 \cap c_0 = \emptyset$, si $Z_0 \cap c_\nu$ ha sido definido, considere una enumeración $\langle \tau_n^\nu | n \in \omega \rangle$ del conjunto

$$\{\tau \in \omega_1 | \lim(\tau) \wedge (c_\nu < \tau < c_{\nu+1})\},$$

y una enumeración $\langle X_m^\nu | m < \omega \rangle$ del conjunto

$$\bigcup_{n \in \omega} S_{\tau_n^\nu}.$$

Para cada $m \in \omega$, diremos que $c_\nu + 2m + 1 \in Z_0$ si y sólo si dicho ordinal no pertenece a X_m^ν. Así, queda definido $Z_0 \cap c_{\nu+1}$, y para el caso límite, la definición es la usual. Ahora, sea $Z_1 = h[X]$ y $Z = Z_0 \cup Z_1$, así, $Z \subseteq \omega_1$ y Z_0 consiste de aquellos ordinales en Z que son impares y Z_1 de los elementos de Z que son pares.

Luego, por hipótesis se tiene que existe un ordinal límite α, tal que $Z \cap \alpha \in S_\alpha$. Aseguramos que $\alpha \in C$, en caso de que esto no se cumpliera, se tendría que existe $\nu < \omega_1$ tal que $c_\nu < \alpha < c_{\nu+1}$, así, para algún $n \in \omega$, se tendría que $\alpha = \tau_n^\nu$. Continuando el argumento, dado que $Z \cap \alpha \in S_\alpha$, se debe tener que $Z \cap \alpha = X_m^\nu$ (para algún $m \in \omega$), por lo tanto (según la construcción anterior):

$$\begin{aligned} c_\nu + 2m + 1 \in Z \quad & \text{si y sólo si} \quad c_\nu + 2m + 1 \in Z_0 \\ & \text{si y sólo si} \quad c_\nu + 2m + 1 \notin X_m^\nu \\ & \text{si y sólo si} \quad c_\nu + 2m + 1 \notin Z \cap \alpha \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues como α es límite, $c_\nu + 2m + 1 \in \alpha$. Así, se debe tener que $\alpha \in C$. Pero como

$$X \cap \alpha = h^{-1}[Z_1] \cap \alpha = h^{-1}[Z] \cap \alpha = h^{-1}[Z \cap \alpha],$$

según la definición de T_α, se concluye que $Z \cap \alpha \in T_\alpha$. $\|$

e) $\diamond^{\text{‘}} \Rightarrow \diamond^{\times\text{‘}}$:

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^{\text{‘}}$-sucesión, y sea $h : \omega_1 \longleftrightarrow \omega_1 \times \omega_1$ una función biyectiva con la propiedad de que si α es un ordinal límite menor que ω_1, entonces $h|_\alpha : \alpha \longleftrightarrow \alpha \times \alpha$ sea una biyección. Definimos la sucesión $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ de la siguiente manera:

$$T_\alpha = \begin{cases} \{h[X] | X \in S_\alpha\} & \text{si } \alpha \text{ es límite,} \\ \emptyset & \text{si } \alpha \text{ es sucesor.} \end{cases}$$

Aseguramos que la ω_1-sucesión recien definida, es una $\diamond^{\times\text{‘}}$-sucesión. De la definición de esta sucesión, se sigue directamente que para toda $\alpha \in \omega$, T_α es un subconjunto numerable de $P(\alpha \times \alpha)$.

Ahora, dado un conjunto $X \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ y dado C un subconjunto c.n.a. de ω_1, definimos el conjunto $X^{\text{‘}}$ como: $X^{\text{‘}} = h^{-1}[X]$. Luego, como (por hipótesis) el conjunto:

$$E^{\text{‘}} = \{\alpha < \omega_1 | (X^{\text{‘}} \cap \alpha) \in S_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1 y como el conjunto $\mathrm{L}(< \omega_1)$ formado por los ordinales límites menores que ω_1 es (trivialmente) un c.n.a. de ω_1, se tiene que (gracias al lema 3.6 del capítulo 1) el conjunto $E^{\text{‘}} \cap \mathrm{L}(< \omega_1)$ es estacionario en ω_1. Así, existe un ordinal límite $\alpha_0 \in C$, tal que $(X^{\text{‘}} \cap \alpha_0) \in S_{\alpha_0}$. Como α_0 es límite, la definición de T_{α_0} implica que $h[X^{\text{‘}} \cap \alpha_0]$ es un elemento de T_{α_0}. Pero:

$$\begin{aligned} h[X^{\text{‘}} \cap \alpha_0] &= h[X^{\text{‘}}] \cap h[\alpha_0] \\ &= X \cap (\alpha_0 \times \alpha_0), \end{aligned}$$

así, $X \cap (\alpha_0 \times \alpha_0) \in T_{\alpha_0}$, es decir, el conjunto

$$E = \{\alpha < \omega_1 | X \cap (\alpha \times \alpha) \in T_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1. $\|$

f) $\diamond^{\times\text{‘}} \Rightarrow \diamond^{\times}$.

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^{\times\text{‘}}$-sucesión. Construiremos una sucesión $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ de tal forma que:

1. $T_\alpha \subseteq P((\alpha \times \alpha) \times \omega)$.

2. $|T_\alpha| \leq \aleph_0$.

3. Para toda $X \subseteq ((\omega_1 \times \omega_1) \times \omega)$, el conjunto
$$E_X = \{\alpha \in \omega_1 | X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) \in T_\alpha\}$$
es estacionario en ω_1.

Sea $h : (\omega_1 \times \omega_1) \longleftrightarrow ((\omega_1 \times \omega_1) \times \omega)$ una biyección con la propiedad de que: si α es un ordinal límite menor que ω_1, entonces la restricción de h a $(\alpha \times \alpha)$ $(h|_{(\alpha\times\alpha)})$ es una biyección entre $\alpha \times \alpha$ y $(\alpha \times \alpha) \times \omega$.

Definimos, pues, dicha sucesión: para $\alpha < \omega_1$ sea
$$T_\alpha = \begin{cases} \{h[X] | X \in S_\alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es límite;} \\ \emptyset, & \text{si } \alpha \text{ es sucesor.} \end{cases}$$
Veamos que $\langle T_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ cumple las propiedades mencionadas: los puntos 1. y 2. se cumplen trivialmente, para demostrar que se cumple la propiedad enunciada en el punto 3, considere un conjunto $X \subseteq (\omega_1 \times \omega_1) \times \omega$ arbitrario, la definición del conjunto E_X y un conjunto $C \subseteq \omega_1$ c.n.a. de ω_1. Luego, definimos X' como la imagen inversa del conjunto X bajo la función h (es decir, $X' = h^{-1}[X]$). Observe que, por hipótesis, el conjunto
$$E' = \{\alpha \in \omega_1 | X' \cap (\alpha \times \alpha) \in S_\alpha\}$$
debe ser estacionario en ω_1. Así, al igual que en la demostración del caso anterior, existe α_0 un ordinal límite menor que ω_1, tal que $\alpha_0 \in E' \cap C$. Es decir, existe un ordinal α_0, límite y menor que ω_1 tal que $\alpha_0 \in C$ y $X' \cap (\alpha_0 \times \alpha_0) \in S_{\alpha_0}$. Pero esto último implica que $h[X' \cap (\alpha_0 \times \alpha_0)] \in T_{\alpha_0}$, y como $h[X' \cap (\alpha_0 \times \alpha_0)] = X \cap ((\alpha_0 \times \alpha_0) \times \omega)$ se tiene que $X \cap ((\alpha_0 \times \alpha_0) \times \omega) \in T_{\alpha_0}$, es decir, $E \cap C \neq \emptyset$ y queda demostrado la afirmación del punto 3.

Ahora, para cada $\alpha < \omega_1$ considérese una enumeración $\langle T_\alpha^n | n < \omega \rangle$ de todos los elementos de T_α (en caso de que T_α sea finito se agregan ceros). Observe que $T_\alpha^n \subseteq (\alpha \times \alpha) \times \omega$ y que para todo X subconjunto de $((\omega_1 \times \omega_1) \times \omega)$ y para todo $\alpha \in E_X$, existe $n_\alpha < \omega$ tal que
$$X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^{n_\alpha}.$$
Pero más aún, afirmamos que para cada $X \subseteq ((\omega_1 \times \omega_1) \times \omega)$ existe un conjunto $F \subseteq \omega_1$ estacionario en ω_1 y existe $n_0 \in \omega$, tal que para todo $\alpha \in F$, se tiene que:
$$X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^{n_0}.$$

En otras palabras, se afirma que existen F estacionario en ω_1 y $n_0 \in \omega$ tal que

$$F \subseteq E_X^{n_0} = \{\alpha \in \omega_1 | X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^{n_0}\}.$$

Para demostrar esta afirmación, se define una función $f : E_X \longrightarrow \omega_1$ tal que:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \min\{n \in \omega | X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^n\}, & \text{si } \omega \leq \alpha; \\ 0, & \text{si } \alpha < \omega. \end{cases}$$

Observe que la función f es regresiva, y como el conjunto E_X es estacionario en ω_1, el lema de Fodor garantiza la existencia de un elemento $n_0 \in \omega$ en la imagen de f, tal que el conjunto

$$F = \{\alpha \in E_X | f(\alpha) = n_0\},$$

es estacionario en ω_1.

Ahora, para cada $n \in \omega$ y para cada $\alpha < \omega_1$, definimos el conjunto:

$$U_\alpha^n = \{(\lambda, \gamma) \in \alpha \times \alpha | ((\lambda, \gamma), n) = T_\alpha^n\},$$

y aseguramos que existe $m \in \omega$ tal que la sucesión $\langle U_\alpha^m | \alpha < \omega_1\rangle$, es una $\diamond^\times$-sucesión. Veamos porque: supóngase, por el contrario, que para toda $n \in \omega$, existen $X_n \subseteq (\omega_1 \times \omega_1)$ y existe un conjunto c.n.a. C_n de ω_1, tal que si $\alpha \in C_n$, entonces

$$X_n \cap (\alpha \times \alpha) \neq U_\alpha^n.$$

Así, bajo esta hipótesis, si definimos los conjuntos

$$X = \bigcup_{n \in \omega} (X_n \times \{n\});$$
$$C = \bigcap_{n \in \omega} C_n,$$

se tendría que existe $n_0 \in \omega$ y que existe $\alpha \in C$, tal que

$$X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^{n_0}.$$

Esto último resulta de aplicar la afirmación demostrada arriba (la que garantiza, haciendo uso del lema de Fodor, la existencia de una conjunto estacionario F), a los conjuntos X y C recien definidos (observe que en virtud del lema 3.2 del capítulo 1, el conjunto C es un c.n.a. de ω_1). Pero si $X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega) = T_\alpha^{n_0}$, entonces

$$U_\alpha^{n_0} = \{(\lambda, \gamma) \in \alpha \times \alpha | ((\lambda, \gamma), n) \in [X \cap ((\alpha \times \alpha) \times \omega)]\}.$$

Y por lo tanto, se tendría que:

$$\begin{aligned} U_\alpha^{n_0} &= \{(\lambda,\gamma) \in \alpha \times \alpha | ((\lambda,\gamma),n) \in X\} \\ &= \{(\lambda,\gamma) \in \alpha \times \alpha | ((\lambda,\gamma),n) \in (X_n \times \{n\})\} \end{aligned}$$

Es decir, que $U_\alpha^{n_0} = X_n \cap (\alpha \times \alpha)$ con $\alpha \in C_n$. Concluyendo, así, una contradicción. Por lo tanto, se puede asegurar que, para algún $m \in \omega$, la sucesión $\langle U_\alpha^m | \alpha < \omega_1 \rangle$, es una $\diamond^\times$-sucesión. $\|$

g) $\diamond^\times \Rightarrow \diamond^f$.

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^\times$-sucesión. Definimos la sucesión $\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ donde para cada $\alpha < \omega_1$, A_α es una función de α en α definida de tal suerte que para cada $\gamma < \alpha$:

$$A_\alpha(\gamma) = \begin{cases} \min\{\lambda < \alpha | (\gamma,\lambda) \in S_\alpha\}, & \text{si } \gamma \in \text{dom}(S_\alpha); \\ \emptyset, & \text{si } \gamma \notin \text{dom}(S_\alpha). \end{cases}$$

(Observe que $\text{dom}(S_\alpha) \subseteq \text{dom}(A_\alpha)$ y que en caso de que S_α sea una función, se tiene que $S_\alpha = A_\alpha|_{\text{dom}(S_\alpha)}$.) Aseguramos que la sucesión $\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^f$-sucesión. Veamos: si f es una función de ω_1 en ω_1, entonces, por hipótesis, el conjunto

$$E = \{\alpha < \omega_1 | f \cap (\alpha \times \alpha) = S_\alpha\},$$

es estacionario en ω_1. Luego, el lema 3.4 del capítulo 1, asegura que el conjunto

$$C = \{\alpha < \omega_1 | (\forall \gamma < \alpha)(f(\gamma) < \alpha)\},$$

es un c.n.a. de ω_1, y, de nuevo, gracias al lema 3.6 (Cap. 1), sabemos que el conjunto $E \cap C$ es estacionario. Recordemos que lo que nos interesa demostrar es que el conjunto

$$E' = \{\alpha \in \omega_1 | f|_\alpha = A_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1. Pero esto se sigue del hecho de que $(E \cap C) \subseteq E'$. Para demostrar esto último, observe que si $\alpha \in E \cap C$ entonces $f|_\alpha = f \cap (\alpha \times \alpha)$ y $f \cap (\alpha \times \alpha) = S_\alpha$, es decir,

$$f|_\alpha = S_\alpha.$$

Esto implica que S_α es una función con dominio igual a α, pero arriba se observó (despues de la definición de A_α) que bajo estas hipótesis, el conjunto A_α coincide con S_α que a su vez coincide con $f|_\alpha$. Así, se tiene que $\alpha \in E'$ y por lo tanto, que E' es estacionario en ω_1. $\|$

h) $\diamond^f \Rightarrow \diamond$.

Sea $\langle h_\alpha|\alpha < \omega_1\rangle$ una $\diamond^f$-sucesión. Definimos la siguiente ω_1-sucesión: para $\alpha < \omega_1$, se define,

$$S_\alpha = \{\gamma \in \alpha | h_\alpha(\gamma) > 0\}.$$

Afirmamos que la sucesión $\langle S_\alpha|\alpha < \omega_1\rangle$ recien definida es una $\diamond$-sucesión.

Claramente, para cada $\alpha < \omega_1$, se tiene que $S_\alpha \subseteq \alpha$. Luego, sea $X \subseteq \omega_1$ y considérese la función característica de X en ω_1, es decir, la función $\mathcal{X}_X : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{X}_X(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in X; \\ 0, & \text{si } \alpha \notin X. \end{cases}$$

Ahora, por hipótesis, se tiene que el conjunto:

$$E = \{\alpha \in \omega_1 | \mathcal{X}_X|_\alpha = h_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1, pero como la función $\mathcal{X}_X|_\alpha$ es la misma que $\mathcal{X}_{(X\cap\alpha)}$ (la función característica de $X \cap \alpha$ en ω_1), se tiene que

$$E = \{\alpha \in \omega_1 | \mathcal{X}_{(X\cap\alpha)} = h_\alpha\}.$$

Así, para demostrar que el conjunto

$$E' = \{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1, será suficiente con demostrar que $E \subseteq E'$ (pues E es estacionario en ω_1). Sea pues, $\alpha \in E$, así, $\mathcal{X}_{(X\cap\alpha)} = h_\alpha$, lo cual implica que $X \cap \alpha = S_\alpha$. Hemos demostrado que $E \subseteq E'$, y agregando que E es estacionario, concluimos lo que se buscaba en esta demostración: que E' es estacionario en ω_1. ||

3.4 El principio ◇ y la hipótesis del continuo

Ya se mencionó antes, que el principio diamante implica a la hipótesis del continuo. En esta sección se establecen, además de esta relación, otras relaciones entre la hipótesis del continuo y el diamante.

4.1 Lema. *El principio ◇ implica la hipótesis del continuo.* ($\diamond \Rightarrow$ HC.)

Demostración:
Sea $\langle S_\alpha|\alpha < \omega_1\rangle$ una $\diamond^1$-sucesión. Así, para cada $X \subseteq \omega$ existe $\alpha_X < \omega_1$ tal que $\alpha_X > \omega$ y tal que

$$X \cap \alpha_X = S_{\alpha_X},$$

pero como $X \subseteq \alpha_X$, se tiene que $X = S_{\alpha_X}$. Lo cual implica que $P(\omega) \subseteq \langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ y por lo tanto, que $|P(\omega)| = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. ||

De este lema se desprende una prueba de la indemostrabilidad del principio diamante a partir de los axiomas de ZFE. Pues dado que en ZFE es teorema: "$\diamond \rightarrow$ HC", si fuese el caso de que el diamante es demostrable en ZFE, aplicando la regla del modus ponens, se tendría a la hipótesis del continuo como teorema de ZFE, lo cual se sabe que es falso. Así, del lema anterior se tiene:

Corolario 1. *El principio diamante no es demostrable en ZFE ($ZFE \nvdash \diamond$).*
||

Con métodos que no estan al alcance del presente texto (forcing iterado), es posible demostrar que la hipótesis del continuo no implica al principio diamante, es decir, que existe un modelo de la teoría de los conjuntos para el cual se satisfacen la hipótesis del continuo y la negación del diamante. Sin embargo, se puede ver a la hipótesis del continuo como una forma debilitada del diamante:

4.2 Lema. *La hipótesis del continuo es equivalente a la siguiente afirmación:*

Existe una ω_1-sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $P(\alpha)$, y para cualquier $X \subseteq \omega_1$, se tiene que:

$$(\forall \alpha < \omega_1)(\exists \beta < \omega_1)(\alpha \leq \beta \wedge X \cap \alpha \in S_\beta).$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $AC(\omega_1) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} P(\alpha)$ el conjunto formado por todos aquellos subconjuntos numerables (y por lo tanto, todos aquellos acotados) de ω_1. Dado que se supone válida la hipótesis del continuo, el conjunto $AC(\omega_1)$ tiene cardinal igual a $\aleph_1$. Ahora, sea $h : AC(\omega_1) \longleftrightarrow \omega_1$ una enumeración de los elementos de $AC(\omega_1)$ con la propiedad de que para todo $X \in AC(\omega_1)$, se tiene que $h(X) \geq \min\{\alpha < \omega_1 | X \subseteq \alpha\}$.

Definimos, pues, la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ de forma tal, que

$$\{S_\alpha | \alpha < \omega_1\} = \{\{X\} | X \in AC(\omega_1)\},$$

y que $S_\alpha = \{X\}$ si y sólo si $h(X) = \alpha$. Observe que:

1. Para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto a lo más numerable de $P(\alpha)$.

2. Si $X \subseteq \omega_1$ y $\alpha < \omega_1$, entonces $X \cap \alpha \subseteq \alpha$, luego, $h(X \cap \alpha) = \beta \geq \alpha$, así, $S_\beta = \{X \cap \alpha\}$ (para algún $\beta \geq \alpha$). De donde se concluye que $X \cap \alpha \in S_\beta$.

$\Leftarrow$) Sea $X \in P(\omega)$ y sea $\alpha = \omega + 1$, así, para dicho X y para dicho α, existe un ordinal β mayor que ω, tal que: $X \cap \alpha = X \in S_\beta$, es decir, $X \in S_\beta$. Por lo tanto, se tiene que

$$P(\omega) \subseteq \bigcup_{\beta<\omega_1} S_\beta,$$

lo cual implica que

$$|P(\omega)| \leq |\bigcup_{\beta<\omega_1} S_\beta| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1. \quad \|$$

El último resultado que presentamos en esta sección, aporta un nuevo equivalente del diamante bajo la suposición axiomática de la hipótesis del continuo. El siguiente principio, se conoce con el nombre de *Principio de Ostaszewski* (PO):

Existe una sucesión $\langle A_\alpha | \lim(\alpha) \wedge 0 < \alpha < \omega_1\rangle$ tal que para cada α, A_α es el rango de una ω-sucesión $(a_\alpha : \omega \to \alpha)$ cofinal en α. Y para todo $X \subseteq \omega_1$ no acotado en ω_1, existe α tal que $A_\alpha \subseteq X \cap \alpha$.

4.3 Lema. *El principio diamante implica el principio de Ostaszewski.* ($\diamond \Rightarrow$ PO).

Demostración:
Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ una $\diamond$-sucesión. Para $\alpha < \omega_1$ límite y distinto de cero, sea $a_\alpha : \omega \to \alpha$ una función cofinal en α que cumpla con la propiedad de que si $(\bigcup S_\alpha = \alpha)$, entonces (rango$(a_\alpha) = A_\alpha \subseteq S_\alpha$).

Aseguramos que la sucesión $\langle A_\alpha | \lim(\alpha) \wedge 0 < \alpha < \omega_1\rangle$ es una PO-sucesión: sea $X \subseteq \omega_1$ no acotado en ω_1, y sea C el conjunto c.n.a. de ω_1 formado por todos los puntos límites de X. Ahora, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$E = \{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\},$$

es un conjunto estacionario en ω_1. Así, existe $\alpha \in C$, tal que $X \cap \alpha = S_\alpha$, pero como $\alpha \in C$, en realidad se tiene que:

$$\lim(\alpha) \quad \text{y} \quad \bigcup(X \cap \alpha) = \alpha,$$

es decir, $\bigcup S_\alpha = \alpha$. Por lo tanto, según la definición de A_α, se concluye que $A_\alpha \subsetneq S_\alpha$, es decir, $A_\alpha \subseteq X \cap \alpha$. ||

La implicación inversa se cumple si se supone cierta la hipótesis del continuo, más aun, Shelah ha demostrado que el principio de Ostaszewski no implica la hipótesis del continuo, así, *PO* y $\diamond$ no son equivalentes en ZFE.

4.1 Teorema. *El principio del diamante es equivalente al principio de Ostaszewski junto con la hipótesis del continuo.* ($\diamond \Leftrightarrow$ PO + HC.)

Demostración:
$\Rightarrow$) esta demostración es justamente la del lema anterior, recuerde que, además, el principio $\diamond$ implica a la hipótesis del continuo.

$\Leftarrow$) Sea $\langle S_\alpha | \lim(\alpha) \wedge 0 < \alpha < \omega_1 \rangle$ una PO-sucesión. Gracias a la hipótesis del continuo, se sabe que el conjunto

$$\mathrm{AC}(\omega_1) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} P(\alpha)$$

formado por todos los subconjuntos acotados de ω_1 tiene cardinal $\aleph_1$. Sea $\langle X_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ una enumeración de $\mathrm{AC}(\omega_1)$, tal que cada $X \in \mathrm{AC}(\omega_1)$ aparezca $\aleph_1$ veces en dicha enumeración. Para cada $0 < \alpha < \omega_1$ límite definimos:

$$S_\alpha = \bigcup \{ X_\nu \cap \alpha | \nu \in A_\alpha \},$$

y para α sucesor o cero, definimos $S_\alpha = \emptyset$. Demostraremos que la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^1$-sucesión (en el teorema se demostró que $\diamond^1$ es equivalente a $\diamond$).

Sea $X \subseteq \omega_1$, definimos una ω_1-sucesión $\langle \lambda_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ por inducción sobre ω_1, de la siguiente manera:

$\lambda_0 = \omega$;
$\lambda_{\nu+1} = \min\{ \lambda > \lambda_\nu | X \cap \lambda_\nu = X_\lambda \}$;
$\lambda_\delta = \bigcup_{\nu < \delta} \lambda_\nu$, para $\lim(\delta)$.

Observe que el conjunto $C = \{ \lambda_\nu | \nu < \omega_1 \}$ es un c.n.a. de ω_1: C es no acotado, pues $\lambda_\nu \neq \lambda_\delta$, si $\nu \neq \delta$. C es cerrado, pues para $\gamma < \omega_1$ punto límite de C, existe δ límite, tal que $\alpha = \bigcup_{\nu < \delta} \lambda_\nu = \lambda_\delta \in C$.

Según nuestra hipótesis (PO), existe α límite, tal que $A_\alpha \subseteq C$. Así, como A_α es el rango de una ω-sucesión a_α que es cofinal en α, por un lado se tiene que α debe ser un punto límite de C, y por lo tanto existe δ límite tal que $\alpha = \lambda_\delta$. Por otro lado, para cada $n \in \omega$, $a_\alpha(n) \in C$, asi que debe existir una ω-sucesión $\langle \delta(n) | n \in \omega \rangle$ cofinal en δ, tal que

$$A_\alpha = \{ \lambda_{\delta(n)} | n \in \omega \}.$$

Ahora, según su definición, $S_\alpha = \bigcup\{X_\nu \cap \alpha | \nu \in A_\alpha\}$, por lo que al aplicar lo demostrado arriba, se cumple que

$$\bigcup\{X_\nu \cap \alpha | \nu \in A_\alpha\} = \bigcup_{n\in\omega}(X_{\lambda_{\delta(n)}} \cap \alpha),$$

pero dado que para $n, m \in \omega$, si $n < m$ entonces $X_{\lambda_{\delta(n)}} \subseteq X_{\lambda_{\delta(m)}}$, y además, dado que $(\bigcup_{n\in\omega} \lambda_{\delta(n)}) = \lambda_\delta = \alpha$, podemos concluir que

$$\bigcup_{n\in\omega}(X_{\lambda_{\delta(n)}} \cap \alpha) = \bigcup_{n\in\omega}(X_{\lambda_{\delta(n)}} \cap \lambda_{\delta(n)}) = \bigcup_{n\in\omega} X_{\lambda_{\delta(n)}+1} = X \cap \alpha.$$

Es decir, se ha demostrado que $S_\alpha = X \cap \alpha$, para algún α infinito (en realidad límite) y por lo tanto, se ha demostrato el principio $\diamond^1$ que es equivalente a $\diamond$. $\|$

3.5 Extensiones de $\diamond$

Haciendo algunas modificaciones al principio del diamante se pueden obtener otros principios combinatorios, en algunos casos estas modificaciones pueden llevar a nuevos principios que se satisfacen en el universo construible y que tienen implicaciones que el propio diamante no tiene, en otros casos, las modificaciones pueden llevar a principios contradictorios.

Como primera modificación, se podría pensar en cambiar el término estacionario (del principio $\diamond$) por el término c.n.a. Es decir, modificar $\diamond$ para obtener el siguiente principio:

Existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ (donde para cada $\alpha < \omega_1$, $S_\alpha \subseteq \alpha$) tal que para cualquier conjunto $X \subseteq \omega_1$, el conjunto:

$$\{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\},$$

es un c.n.a. de ω_1.

Llamaremos $\diamond!$ a este principio y demostraremos que es inconsistente con la teoría de conjuntos, es decir, que del conjunto de enunciados: ZF + $\diamond!$ se demuestra una contradicción.

5.1 Teorema. *El enunciado $\diamond!$ es inconsistente con la teoría de los conjuntos.*

Demostración:
Sean X y Y subconjuntos de ω_1, tales que $X \neq Y$; si se supone el enunciado $\diamond!$, tentríamos que los conjuntos:

$C_X = \{\alpha < \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\}$, y
$C_Y = \{\alpha < \omega_1 | Y \cap \alpha = S_\alpha\}$,

son ambos conjuntos c.n.a. de ω_1. Así, el lema 3.1 del capítulo 1, implica que el conjunto $C = C_X \cap C_Y$ es un c.n.a. de ω_1. Pero este conjunto debe ser acotado, pues:

$$C \subseteq \{\alpha < \omega_1 | X \cap \alpha = Y \cap \alpha\},$$

y en caso de que éste no fuese acotado, se tendría que $X = Y$, contradiciendo así, la elección de X y Y. Por lo tanto, C debe ser un c.n.a. acotado, lo cual es absurdo. $\|$

En términos de la versión $\diamond'$ del principio diamante, se puede obtener un principio combinatorio nuevo, si aseguramos que el conjunto estacionario (del cual se asegura su existencia para cada $X \subseteq \omega_1$) contiene a un c.n.a. de ω_1. Llamaremos $\diamond^*$ a este principio y lo enunciamos formalmente:

Existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto numerable de $P(\alpha)$, y para todo $X \subseteq \omega_1$, existe un conjunto c.n.a. C_X de ω_1, tal que

$$C_X \subseteq \{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha \in S_\alpha\}.$$

Tal como demostraremos en el siguiente teorema, este principio no es contradictorio con la teoría de los conjuntos, pues dicho principio se cumple en el modelo L. Por otro lado, es claro que este principio implica al principio diamante en su forma $\diamond'$, pues si un subconjunto de ω_1 contiene un c.n.a., entonces dicho conjunto es estacionario. Pero además, haciendo uso de los métodos de forcing iterado, se puede demostrar que $\diamond^*$ es una extensión propia de $\diamond$, es decir, que el principio diamante no implica al principio $\diamond^*$. Esto se logra, como es de esperarse, garantizando la existencia de un modelo de ZF $+ \diamond + \neg\diamond^*$ (ver [Kunen 80], capítulo VIII).

5.2 Teorema. *El axioma de constructibilidad implica al principio $\diamond^*$ ($V = L \Rightarrow \diamond^*$).*

Demostración:
Considere la siguiente función $f : \omega_1 \to \omega_1$, definida por:

$$f(\alpha) = \min\{\gamma < \omega_1 | (\gamma > \alpha) \wedge (\models_{L_\alpha} \text{“}\alpha \text{ es numerable”})\}.$$

Luego, para cada $\alpha < \omega_1$, se define una ω_1-sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ dada por:

$$S_\alpha = P(\alpha) \cap L_{f(\alpha)}.$$

Observe que, como $|L_{f(\alpha)}| = |f(\alpha)| < \aleph_1$, se tiene que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto numerable de $P(\alpha)$. A continuación demostraremos que la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^*$-sucesión.

Sea $X \subseteq \omega_1$, así, el lema 6.2 del capítulo 2, implica que $X \in L_{\omega_2}$. Ahora, el corolario 1 al lema 6.1 del capítulo 2, asegura que (dado que $\{X\}$ es un subconjunto de L_{ω_2}) existe una subestructura elemental M de L_{ω_2}, mínima, que contiene a $\{X\}$ (es decir, que $X \in M$) y tal que

$$|M| = \max(|\{X\}|, \omega) = \aleph_0.$$

A continuación definimos, por recursión sobre ω_1, una sucesión $\langle N_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ de subestructuras elementales de L_{ω_2}:

(i) $N_0 = M$ (la estructura M mencionada arriba);

(ii) definimos $N_{\nu+1}$ (en términos del lema 6.1 del capítulo 2 y su corolario) como la mímima subestructura elemental de L_{ω_2}, tal que $N_\nu \cup \{N_\nu\} \subseteq N_{\nu+1}$.

(iii) si δ es límite, definimos: $N_\delta = \bigcup_{\nu<\delta} N_\nu$.

Observe que al igual que N_0, el cardinal de todas las subestructuras N_ν es $\aleph_0$. Así, el lema 2.3 asegura que para cada $\nu < \omega_1$, existe α_ν, tal que

$N_\nu \cap L_{\omega_1} = L_{\alpha_\nu}$,

Y por lo tanto: $N_\nu \cap \omega_1 = \alpha_\nu$. Observe que $\alpha_\nu < \omega_1$, pues según el lema 2.3, $\omega_1 \in N_\nu$. Además, dicho α_ν es el primer cardinal numerable que no está en N_ν.

Afirmamos que el conjunto $C = \{\alpha_\nu | \nu < \omega_1\}$ es el c.n.a. de ω_1 que buscamos. Primero debemos demostrar que C es en realidad un c.n.a. de ω_1.

El conjunto C es cerrado:
Sea γ un punto límite de C, es decir, $\gamma < \omega_1$ límite tal que:

$$\bigcup(C \cap \gamma) = \gamma.$$

Para dicha γ se tiene entonces, que

$\bigcup_{\alpha_\nu<\gamma} \alpha_\nu = \gamma.$

Por otro lado, la construcción de las subestructuras N_ν y la definición de los ordinales α_ν, garantizan el hecho de que:

$\alpha_\gamma = \bigcup_{\nu<\gamma} \alpha_\nu.$

Por último, dado que para cada $\nu < \omega_1$, se tiene que $\nu < \alpha_\nu$, concluimos que:

$$\alpha_\gamma = \bigcup_{\nu<\gamma} \alpha_\nu \leq \bigcup_{\alpha_\nu<\gamma} \alpha_\nu = \gamma \leq \alpha_\gamma.$$

Es decir, que $\gamma = \alpha_\gamma$ y por lo tanto que $\gamma \in C$.

El hecho de que C es no acotado, se sigue trivialmente de la observación de que para toda $\nu < \omega_1$, es cierto que $\nu \leq \alpha_\nu$.

Ahora demostraremos que C es el c.n.a. que buscamos es decir, demostraremos que para toda $\alpha \in C$, $X \cap \alpha \in S_\alpha$: sea, pues, $\alpha \in C$, así, existe $\nu < \omega_1$ tal que $\alpha_\nu = \alpha$. Para dicha ν, el lema de condensación asegura que existe $\beta \leq \omega_2$ y un isomorfismo: $\pi : N_\nu \cong L_\beta$, tal que:

$$\pi|_{\alpha_\nu} = \mathrm{id}|_{\alpha_\nu}, \quad \pi(\omega_1) = \alpha_\nu, \quad \pi(X) = X \cap \alpha_\nu.$$

Por lo tanto, $X \cap \alpha_\nu \in L_\beta$. Pero la defınción de la función f, asegura que:

$$\models_{L_{f(\alpha_\nu)}} \text{“}\alpha_\nu \text{ es numerable”}.$$

Por otro lado, como $\pi(\omega_1) = \alpha_\nu$ (es decir, $\omega_1^{L_\beta} = \alpha_\nu$) se tiene que:

$$\models_{L_\beta} \text{“}\alpha_\nu \text{ es no numerable”},$$

así, L_β debe estar contenido propiamente en $L_{f(\alpha_\nu)}$ (pues la relación "no numerable" es D-absoluta), y por lo tanto $\beta < f(\alpha_\nu)$. Luego, como $X \cap \alpha_\nu \in L_\beta$, entonces $X \cap \alpha_\nu \in L_{f(\alpha_\nu)}$. Como claramente $X \cap \alpha_\nu \in P(\alpha_\nu)$, de la definición de S_{α_ν}, se sigue que $X \cap \alpha_\nu \in S_{\alpha_\nu}$. ||

Por último, agregamos al principio $\diamond^*$ una propiedad más, para así obtener el principio $\diamond^+$ que a continuación enunciamos:

Existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, S_α es un subconjunto numerable de $P(\alpha)$, y para todo $X \subseteq \omega_1$, existe un c.n.a. C_X de ω_1, tal que:

$$C_X \subseteq \{\alpha \in \omega_1 | X \cap \alpha \in S_\alpha\} \cap \{\alpha \in \omega_1 | C_X \cap \alpha \in S_\alpha\}.$$

Claramente este principio implica al principio $\diamond^*$ y por lo tanto, al principio diamante. Pero más aun, de nuevo éste es una extensión propia de $\diamond^*$ (para demostrarlo, se hece uso del método de forcing iterado, ver [Kunen 80] Cap. VIII). En particular, el principio $\diamond^+$ implica cierta propiedad de árboles llamada *Hipótesis de Kurepa* (que trataremos en la siguiente sección), mientras que $\diamond^*$ es consistente con la negación de dicha hipótesis, es decir, éste último no la implica. A continuación, demostramos que el principio $\diamond^+$ se satisface en L.

5.3 Teorema. *El axioma de constructibilidad implica al principio* $\diamond^+$. $(V = L \Rightarrow \diamond^+)$.

Demostración:
La demostración de este teorema hace uso de argumentos similares a los usados en el capítulo anterior, sin embargo, en esencia la demostración es bastante distinta. Sea $f : \omega_1 \to \omega_1$ una función definida por:

$$f(\alpha) = \min\{\gamma \in \mathrm{ON} | (\alpha < \gamma) \wedge (\alpha \in L_\gamma) \wedge (L_\gamma \prec L_{\omega_1})\}.$$

Definimos, para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto S_α dado por:

$$S_\alpha = P(\alpha) \cap L_{f(\alpha)}.$$

En primer lugar, se debe observar que las definiciones anteriores definen a estos mismos conjuntos (f y S_α, respectivamente) en L_{ω_2} (pues estas defninciones pueden ser expresadas por fórmulas absolutas cuyos parámetros claramente están en L_{ω_2}). Demostraremos a continuación, que la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^+$-sucesión

Supondremos, por el contrario, que existe $X \subseteq \omega_1$ tal que para todo c.n.a. C de ω_1, existe $\alpha \in C$ tal que no se cumple:

$$(X \cap \alpha \in S_\alpha) \wedge (C \cap \alpha \in S_\alpha).$$

Sea X el $<_L$-mínimo conjunto con dicha propiedad. (Observe que el conjunto X también puede ser definido en L_{ω_2} a partir de esta misma definición.) A continuación definiremos, por recursión sobre ω_1, una familia de subestructuras elementales de L_{ω_2}:

(i) Definimos N_0 como la mínima subestructura elemental de L_{ω_2};

(ii) se define $N_{\nu+1}$ como la mínima subestructura elemental de L_{ω_2} tal que $N_\nu \cup \{N_\nu\} \subseteq N_{\nu+1}$;

(iii) si δ es límite, se define: $N_\delta = \bigcup_{\nu<\delta} N_\nu$.

Al igual que en la demostración del teorema anterior, el corolario 1 al lema 6.1 del capítulo 1 implica que las estructuras N_ν son todas numerables. y de igual manera, el lema 2.3 asegura que para cada $\nu < \omega_1$, existe $\alpha_\nu < \omega_1$, tal que $\alpha_\nu = N_\nu \cap \omega_1$ y dicho α_ν es el mínimo ordinal numerable que no está en N_ν.

Ahora, al hacer uso del lema de condensación, se tiene que para cada $\nu < \omega_1$ existe un único ordinal β_ν y un único isomorfismo $\pi_\nu : N_\nu \cong L_{\beta_\nu}$, tal que:

$\pi_\nu(\omega_1) = \alpha_\nu$, y $\pi_\nu(X) = X \cap \alpha_\nu$.

Sea $B = \{\beta_\nu | \nu < \omega_1\}$. Como B es no acotado en ω_1 (para cada $\nu < \omega_1$, se tiene que $\nu \leq \alpha_\nu < \beta_\nu$), el conjunto formado por los puntos límites de B, es un c.n.a. de ω_1. Llamaremos C a dicho conjunto y demostraremos que C es un contraejemplo a nuestra hipótesis hecha por reducción al absurdo. Es decir, demostraremos que:

$$(\forall \alpha \in C)((X \cap \alpha \in S_\alpha) \wedge (C \cap \alpha \in S_\alpha)),$$

Sea $\alpha \in C$, así, debido a la definición de C, existe un ordinal límite $\gamma < \omega_1$, tal que:

$$\alpha = \bigcup_{\nu < \gamma} \beta_\nu.$$

Pero además, *se tiene que* $\alpha = \alpha_\gamma$, *veamos como es que esto sucede:*

Primero observe que $\alpha_\nu < \beta_\nu$ (para toda $\nu < \omega_1$), pues $\pi_\nu(\omega_1) = \alpha_\nu \in L_{\beta_\nu}$. Por otro lado, observe que para cualquier $\nu < \omega_1$ la definición de L_{β_ν} está dada en términos de N_ν, y dicha definición es absoluta para L_{ω_2}. Así, como $N_{\nu+1}$ es una subestructura elemental de L_{ω_2} y $N_\nu \in N_{\nu+1}$, el axioma de Subconjunto en L_{ω_2}, asegura que $\beta_\nu \in N_{\nu+1}$, y por lo tanto, se tiene que $\beta_\nu < \alpha_{\nu+1}$. Hemos concluido, pues, que para toda $\nu < \omega_1$,

$$\alpha_\nu < \beta_\nu < \alpha_{\nu+1}.$$

Por lo tanto, tomando supremos para $\nu < \gamma$, se concluye que:

$$\alpha_\gamma \leq \alpha \leq \alpha_\gamma.$$

Es decir, hemos demostrado que $\alpha = \alpha_\gamma$.

Ahora, aplicando un argumento similar al usado en la demostración del teorema anterior, se puede concluir que $\beta_\gamma < f(\alpha)$, pues dado que:

$$\models_{L_{f(\alpha)}} \text{“}\alpha \text{ es numerable”},$$

y dado que $\alpha = \alpha_\gamma = \omega_1^{L_{\beta_\gamma}}$, se debe tener que $L_{f(\alpha)}$ contiene propiamente a L_{β_γ}, y por lo tanto, que $\beta_\gamma < f(\alpha)$. Así, del hecho de que $\alpha = \alpha_\gamma$, se sigue que

$$X \cap \alpha = \pi_\gamma(X) \in L_{\beta_\gamma}.$$

Por el hecho de que $\beta_\gamma < L_{f(\alpha)}$, se concluye que:

$$(X \cap \alpha) \in (L_{f(\alpha)} \cap \alpha) = S_\alpha.$$

Ahora, para demostrar que $C \cap \alpha \in S_\alpha$, claramente es suficiente con demostrar que:

$$\{\beta_\nu | \nu < \omega_1\} \in L_{f(\alpha)}.$$

Para demostrar este hecho, hacemos uso del teorema 6.3 para así poder afirmar que $L_{f(\alpha)}$ es modelo de ZF$^-$. Así, como $L_{f(\alpha)}$ es modelo de ZF$^-$, se puede definir dentro de $L_{f(\alpha)}$ una sucesión $\langle M_\nu | \nu < \gamma\rangle$ de subestructuras elementales de L_{β_ν} (en adelante se considerará la igualdad $\beta = \beta_\gamma$), de la siguiente manera:

(i) M_0 se define como la mínima subestructura elemental de L_β;

(ii) $M_{\nu+1}$ se define como la mínima subestructura elemental M de L_β tal que $M_\nu \cup \{M_\nu\} \subseteq M_{\nu+1}$;

(iii) si δ es límite, se define $M_\delta = \bigcup_{\nu<\delta} M_\nu$.

Aún dentro de $L_{f(\alpha)}$, se puede hacer uso del lema de condensación en $L_{f(\alpha)}$, para así definir (para cada $\nu < \gamma$) los isomorfismos:

$$\pi'_\nu : M_\nu \cong L_{\beta'_\nu}.$$

Así, dado que la sucesión de estructuras M_ν y de isomorfismos π'_ν están definidas en $L_{f(\alpha)}$,

$$\{\beta'_\nu | \nu < \gamma\rangle.$$

Lo que a continuación queremos demostrar, es que $\beta'_\nu = \beta_\nu$, para poder concluir que: $\{\beta_\nu | \nu < \gamma\} \in L_{f(\alpha)}$.

Observe que $N_\nu \prec N_\gamma \prec L_{\omega_2}$ (para $\nu < \gamma$), así, es posible redefinir el primer γ-segmento de la sucesión $\langle N_\nu | \nu < \gamma\rangle$ en términos de N_γ en lugar de L_{ω_2}. Es decir, se puede redefinir:

(i) N_0 se define como la mínima subestructura elemental de N_γ;

(ii) $N_{\nu+1}$ se define como la mínima subestructura elemental N de N_γ tal que $N_\nu \cup \{N_\nu\} \subseteq N_{\nu+1}$;

(iii) si δ es un ordinal límite menor que γ, se define $N_\delta = \bigcup_{\nu<\delta} N_\nu$.

Por lo que a partir del isomorfismo $\pi_\gamma \cong L_\beta$ se puede demostrar, por inducción sobre γ, que:

$$\pi_\gamma|_{N_\nu} : N_\nu \cong M_\nu.$$

Luego, a partir de la sucesión de isomorfismos:

$$\pi_\nu^{-1} : L_{\beta_\nu} \cong M_\nu, \quad \pi|_{N_\nu}^{-1} : M_\nu \cong N_\nu, \quad \pi'_\nu : N_\nu \cong L_{\beta'_\nu}.$$

se concluye que:

$$(\pi'_\nu \circ \pi|_{N_\nu}^{-1} \circ \pi_\nu^{-1}) : L_{\beta_\nu} \cong L_{\beta'_\nu},$$

es decir, que las estructuras transitivas $L_{\beta'_\nu}$ y L_{β_ν} son isomorfas. Por lo tanto, el teorema 2 del isomorfismo (teo. 4.2 Cap. 1) asegura que:

$$L_{\beta'_\nu} = L_{\beta_\nu}$$

y por lo consiguiente, que $\beta_\nu = \beta'_\nu$ para cada $\nu < \gamma$. ||

3.6 El principio $\diamond^+$ y la hipótesis de Kurepa

En esta sección final se desarrollará una importante aplicación del principio $\diamond^+$; se establece la existencia de cierto tipo de árboles llamados *árboles de Kurepa* bajo la suposición de $\diamond^+$. Al igual que en el caso de la demostración de la existencia de al menos un árbol de Souslin en términos del principio $\diamond$, en este caso se podrá establecer (gracias al teorema 5.3) la existencia de al menos un árbol de Kurepa en el universo L.

La pregunta por la existencia de dichos árboles, se vislumbra a partir del estudio de cierto tipo de árboles llamados *Aronzajn*. Iniciamos, pues, definiendo la noción de árbol Aronzajn:

6.1 Definición. Sea κ un cardinal regular. Un *árbol κ-Aronszajn*, es un κ-árbol en el que todas sus cadenas son de cardinalidad menor que κ.

Observe que, según esta definición, un κ-árbol es κ-Aronzajn si y sólo si no tiene κ-ramas. También se debe observar que todo árbol de Souslin es ω_1-Aronzajn. Pero a diferencia de los árboles de Souslin, se puede demostrar en ZFC la existencia de al menos un árbol ω_1-Aronzajn:

6.1 Teorema. *Existe un árbol ω_1-Aronszajn.*

Demostración:
Considerese el árbol $\langle T, < \rangle$, donde:

$$T = \{s \in {}^{<\omega_1}\omega | s \text{ es inyectiva}\},$$

y la relación $<$ se define como la contención propia, es decir $s < t$ si y sólo si t extiende como función a s. Observe que la altura de T es ω_1, pues para cada $\alpha < \omega_1$ existe una función inyectiva de α en ω, además, T no tiene cadenas no numerables, pues si existiese una cadena C no numerable en T, entonces $\bigcup C$ sería una función inyectiva de ω_1 en ω, y por último, observe que para

$\omega \leq \alpha < \omega_1$ se tiene que $|T_\alpha| = \aleph_1$. Así, este último hecho, asegura que el árbol T no es un ω_1-árbol, aunque está cercano a ser Aronszajn. Sólo hace falta reducir el cardinal de los niveles T_α a $\aleph_0$. Para lograr esto, definiremos un subárbol T^* de T que cumple con las propiedades que exige la definición de ω_1-árbol.

Primeramente, para cada $\alpha < \omega_1$, definimos una relación $\sim_\alpha$ de equivalencia en el conjunto ${}^\alpha\omega$:
Sean $s, t \in {}^\alpha\omega$. Decimos que $s \sim_\alpha t$ si y sólo si el conjunto $\{\xi < \alpha | s(\xi) \neq t(\xi)\}$ es finito.
Ahora, para cada $\alpha < \omega_1$, definiremos $s_\alpha \in T$ con las siguientes propiedades:

(i) $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$,

(ii) $\alpha < \beta \rightarrow s_\alpha \sim_\alpha s_\beta|_\alpha$,

(iii) $|\omega \setminus \mathrm{ran}(s_\alpha)| = \omega$.

Si definimos $s_0 = \emptyset$ claramente s_0 cumple con las propiedades enunciadas. Suponiendo definido s_α, sea $s_{\alpha+1} = s_\alpha^\frown\langle\alpha, n\rangle$, donde $n \in (\omega \setminus \mathrm{ran}(s_\alpha))$. De la definición de $s_{\alpha+1}$, es directo que (i) y (iii) se cumplen en este caso, y aplicando la transitividad de la relación $\sim_\gamma$ es directo que si $\gamma < \beta (= \alpha + 1)$ entonces $s_\gamma \sim_\gamma s_\beta|_\gamma$.

Ahora, para definir s_α en el caso en que α es límite, suponemos definido s_γ $(\gamma < \alpha)$. Se fija una sucesión numerable $\langle \alpha_n | n \in \omega \rangle$ estrictamente creciente, de ordinales menores que α, cuyo límite sea α. Sea $t_0 = s_{\alpha_0}$ e inductivamente definimos $t_n \in T_{\alpha_n}$ de manera que $(t_n \sim_{\alpha_n} s_{\alpha_n})$ y $t_{n+1}|\alpha_n = t_n$. Luego, sea $t = \bigcup_{n\in\omega} t_n$. Por último definimos s_α como la siguiente función en α:

$$s_\alpha(\alpha_n) = t(\alpha_{2n});\ s_\alpha(\xi) = t(\xi) \text{ cuando } \xi \notin \{\alpha_n | n \in \omega\}.$$

Claramente $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$, y s_α es $1-1$ (esto último se sigue del hecho de que t es $1-1$). Así, s_α satisface (i). Luego, (ii) se sigue de los siguientes hechos (facilmente verificables):

$(\forall\gamma < \alpha)\exists\alpha_n(\gamma < \alpha_n < \alpha)$,

$(\forall\gamma < \alpha)(S_\alpha|_\gamma \sim_\gamma t|_\gamma)$,

$(\forall\gamma < \alpha)(\forall x, y \in {}^\alpha\omega)[(x \sim_\alpha y) \rightarrow (x|_\gamma \sim_\gamma y|_\gamma)$,

$(\forall n \in \omega)(\forall\gamma < \alpha_n)(t_n|_\gamma \sim_\gamma s_\gamma)$,

$(\forall n \in \omega)(t|_{\alpha_n} = t_n)$.

Por último, (iii) se sigue de la siguiente observación:

$$\{t(\alpha_{2n+1}) | n \in \omega\} \subset (\omega \setminus \mathrm{ran}(s_\alpha)).$$

Finalmente, sea

$$T^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{t \in T_\alpha | t \sim_\alpha s_\alpha\}.$$

Haciendo uso de la propiedad (ii) se puede verificar que en realidad T^* es un subárbol de T. Este árbol (T^*) es un ω_1-árbol, pues por la propiedad (i), para cada $\alpha < \omega_1$, $s_\alpha \in T^*_\alpha$ y por lo tanto

$$T^*_\alpha = \{t \in T_\alpha | t \sim_\alpha s_\alpha\} \neq \emptyset$$

Además, $T^*_{\omega_1} \subseteq T_{\omega_1} = \emptyset$. Y por la observación que hicimos al inicio con respecto a que en T no hay cadenas no numerable, se concluye que T^* es un árbol ω_1-Aronszajn. ||

Ahora, también existen (según ZFC) ω_1-árboles que no son Aronzajn, esto es, que tienen ω_1-ramas, más aun, el siguiente es un ejemplo de un ω_1-árbol con $\aleph_1$, ω_1-ramas: $\langle T, \subset\rangle$, donde

$$T = \{s \in {}^{<\omega_1}2 | \text{ "el conjunto } S^{-1}(1) \text{ es finito"}\}.$$

Así, uno podría preguntarse si existen ω_1-árboles con más de $\aleph_1$, ω_1-ramas. Es bajo este espíritu que definimos la noción de árbol de Kurepa:

6.2 Definición. Se dice que un ω_1-árbol T es un *árbol de Kurepa*, si T tiene $\aleph_2$, ω_1-ramas.

Y la hipótesis de Kurepa es la siguiente afirmación:

Hipótesis de Kurepa (HK). *Existe un árbol de Kurepa*

Esta afirmación es, tal como se mencionó al inicio, consistente con la teoría de los conjuntos, pero más aun, es independiente de dicha teoría (la demostración de la consistencia de la negación de la hipótesis de Kurepa, de nuevo, hace uso de los métodos de forcing iterado, ver [Kunen 1984], Cap. VIII). Ahora, para demostrar que HK se cumple en L, hacemos uso del principio $\diamond^+$ (principio que se satisface en L, teorema 5.3), y se demuestra, no exactamente HK, si no, un enunciado equivalente: aquel que afirma la existencia de cierta familia que a continuación definimos:

6.3 Definición. Se dice que un subconjunto $\mathcal{F}$ de $P(\omega_1)$ es una *familia de Kurepa* si $|\mathcal{F}| = \aleph_2$ y para toda $\alpha < \omega_1$ el conjunto:

$$\mathcal{F}_\alpha = \{x \cap \alpha | x \in \mathcal{F}\}$$

es numerable.

El paso siguiente será demostrar que la hipótesis de Kurepa es equivalente a afirmar la existencia de una familia de Kurepa. Pero antes, demostramos un lema que ayuda a clarificar esta demostración:

6.1 Lema. *Existe una familia de Kurepa, si y sólo si existe un conjunto T, tal que $|T| = \omega_1$ y existe una familia $\mathcal{F} \subseteq P(T)$ tal que $|\mathcal{F}| = \omega_2$ y*

$$(\forall X \subseteq T)(|X| < \omega_1 \rightarrow |\mathcal{F}_X| < \omega_1),$$

donde $\mathcal{F}_X = \{X \cap A | A \in \mathcal{F}\}$.

Demostración:
La implicación ($\Rightarrow$) es trivial, pues la misma familia de Kurepa funciona (recuerde que ω_1 es regular).

Para la implicación inversa, considere un conjunto T y una familia $\mathcal{F}$ con las características descritas. Sea $h : T \leftrightarrow \omega_1$ una biyecctión, así, si $\mathcal{F}' = \{h[A] | A \in \mathcal{F}\}$, entonces $|\mathcal{F}'| = \omega_2$. Ahora, dado $\alpha < \omega_1$, observe que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}'_\alpha| = |\{h[A] \cap \alpha | A \in \mathcal{F}\}| &= |\{h[A \cap h^{-1}(\alpha)] | A \in \mathcal{F}\}| \\ &= |\{A \cap h^{-1}(\alpha) | A \in \mathcal{F}\}| \\ &= \mathcal{F}_{h^{-1}(\alpha)} < \omega_1. \end{aligned}$$

Así, se concluye que $\mathcal{F}' \subseteq P(\omega_1)$ es una familia de Kurepa. ||

Ahora sí, demostramos lo prometido:

6.2 Teorema. *Existe un árbol de Kurepa, si y sólo si existe una familia de Kurepa.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea T un árbol de Kurepa, y sea $\mathcal{F} \subseteq P(T)$ el conjunto formado por todas la ω_1-ramas de T. Como $|T| = \omega_1$ y $|\mathcal{F}| = \omega_2$, para demostrar que existe una familia de Kurepa, según el lema anterior sólo hace falta demostrar que para cualquier ω_1-rama numerable, el conjunto $\mathcal{F}_X$ también es numerable. Sea, pues, C una ω_1-rama numerable de T. Ahora, como ω_1 es regular, debe existir $\alpha < \omega_1$ tal que:

$$(\forall x \in X)(\mathrm{alt}(x) < \alpha),$$

así, $|\mathcal{F}_X| \leq |T_\alpha| < \omega_1$.
$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ una familia de Kurepa. Para cada $B \in \mathcal{F}$, defínase $\chi_B : \alpha \rightarrow \{0, 1\}$ como la función característica de B en α, para así obtener el árbol de Kurepa:

$$T = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{\chi_B : B \in \mathcal{F}_\alpha\},$$

donde $<_T$ está definido como la contención $\subset$ de conjuntos. $\|$

Ahora solo falta demostrar que el principio $\diamond^+$ implica la existencia de una familia de Kurepa, es decir, la hipótesis de Kurepa. Esta demostración hace uso de nociones que refieren a los conjuntos H_κ (conjunto de los hereditariamente numerables) definidos en el capítulo primero, el uso de estos conjuntos se centra en el hecho de que para ciertos cerdinales κ, dichos conjuntos son modelos de la teoría ZF$^-$. A continuación se demuestra este hecho, previo un lema que ayudará a la demostración:

6.2 Lema. *Si κ es un cardinal regular no numerable, entonces:*

$$x \in H_\kappa \Leftrightarrow (x \subseteq H_\kappa) \wedge (|x| < \kappa).$$

Demostración:
La implicación $(\Rightarrow)$ es trivial, la otra se sigue (por $\in$-inducción), del hecho de que como:

$$\mathrm{ct}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{ct}(y) | y \in x\},$$

entonces la regularidad de κ implica que $\mathrm{ct}(x) < \kappa$. $\|$

6.3 Teorema. *Si κ es un cardinal regular no numerable, entonces $\langle H_\kappa, \in\rangle$ es modelo de* ZF$^-$.

Demostración:
Los axiomas de Extensionalidad y Regularidad se cumplen en H_κ, pues dicha estructura es transitiva y estandar.

El axioma de Unión se cumple en H_κ, pues si $x \in H_\kappa$, entonces $\mathrm{ct}(\cup x) \subseteq \mathrm{ct}(x)$ y por lo tanto $|\mathrm{ct}(\cup x)| < \kappa$.

Para el axioma de Par, observe que:

$$|\mathrm{ct}(\{x, y\})| = 2 + |\mathrm{ct}(x)| + |\mathrm{ct}(y)| < \kappa.$$

El axioma de Infinito se cumple en H_κ, pues $\omega \in H_\kappa$.

Para demostrar que el axioma de Subconjunto se cumple en H_κ, sólo hace falta observar que:

$$(x \in H_\kappa) \wedge (y \subseteq x) \Rightarrow (y \in H_\kappa).$$

Lo que se cumple claramente.

La demostración de que el axioma de Reemplazo se cumple en H_κ es igual a la demostración de la validez de dicho axioma en L_κ, pues el lema anterior (6.2) garantiza el desarrollo de dicha demostración. $\|$

6.4 Teorema. *El principio $\diamond^+$ implica la hipótesis de Kurepa.*

Demostración:
Se busca demostrar la existencia de una familia $\mathcal{F} \subseteq P(\omega_1)$, tal que $|\mathcal{F}| = \omega_2$ y $|\mathcal{F}_\alpha| \leq \aleph_0$ (para todo $\alpha < \omega_1$).

Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamond^+$-sucesión, definimos una familia $\{M_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ de subestructuras elementales (numerables) de H_{ω_1} de la siguiente manera. Para $\alpha < \omega_1$, sea $M_\alpha \prec H_{\omega_1}$, tal que:

i) M_α sea numerable, y

ii) $(\alpha + 1) \cup (\bigcup_{\beta \leq \alpha} S_\beta) \subseteq M_\alpha$.

La existencia de dicha familia está garantizada por el corolario al lema 6.1 del capítulo anterior. Observe que debido al lema 6.2, se puede garantizar que para cada $\alpha < \omega_1$, M_α es modelo de ZF$^-$. Ahora, sea

$$\mathcal{F} = \{x \subseteq \omega_1 | (\forall \alpha < \omega_1)(x \cap \alpha \in M_\alpha)\}.$$

Observe que $\mathcal{F}|_\alpha \subseteq M_\alpha$, pues si $y \in \mathcal{F}|_\alpha$, entonces $y = x \cap \alpha$ con $x \in \mathcal{F}$, así, $x \cap \alpha \in M_\alpha$. Por lo tanto, dado que M_α es numerable, entonces $\mathcal{F}|_\alpha$ también lo es. Así, para demostrar que $\mathcal{F}$ es una familia de Kurepa, sólo falta demostrar que el cardinal de dicha familia es $\aleph_2$. A continuación demostramos, por reducción al absurdo, este hecho. Supondremos, pues, que el cardinal de $\mathcal{F}$ es $\aleph_1$. Observe que $\omega_1 \in \mathcal{F}$, así, el conjunto formado por aquellos subconjuntos no acotados de ω_1 que pertenecen a $\mathcal{F}$ es no vacio, así, se puede definir una enumeración $\langle x_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ (no necesariamente inyectiva) de los subconjuntos no acotados de ω_1 que pertenecen a $\mathcal{F}$.

Luego, para cada $\nu < \omega_1$, sea B_ν el conjunto de puntos límite de x_ν, recuerde que según el lema 3.6 del capítulo 1, B_ν es un c.n.a. de ω_1. Así, la intersección diagonal B' de la familia $\{B_\nu | \nu < \omega_1\}$ es un c.n.a de ω_1 (ver lema 3.2, Cap. 1), y como el conjunto B'' formado por los ordinales límites menores que ω_1 es también un c.n.a. de ω_1, podemos concluir que el conjunto:

$$B = B' \cap B'' = \{\alpha \in \omega_1 | \lim(\alpha) \wedge (\alpha \in \bigcap_{\nu < \omega} B_\nu)\}$$

es un c.n.a. de ω_1. Ahora, si se aplica el principio $\diamond^+$ al conjunto B, se puede asegurar la existencia de un conjunto c.n.a. C de ω_1, tal que:

$$(\forall \alpha \in C)[(B \cap \alpha \in S_\alpha) \wedge (C \cap \alpha \in S_\alpha)].$$

Sea D la intersección de B y del conjunto de puntos límites de C. Así, D es un c.n.a. de ω_1. Consideramos, ahora, la enumeración monotona $\langle \alpha_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$ del conjunto D. Y definimos, para cada $\nu < \omega_1$, el ordinal:

$$\beta_\nu = \bigcap (C \setminus (\alpha_\nu + 1)).$$

Observe que para toda $\nu < \omega_1$, se concluye que $\alpha_\nu < \beta_\nu < \alpha_{\nu+1}$, pues si $\alpha_{\nu+1} = \beta_\nu$, se tendría que $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1}$, lo cual es falso, y por otro lado, es claro que $\alpha_\nu < \beta_\nu$. Así, como $\alpha_{\nu+1} \in B$, entonces $\alpha_{\nu+1} \in B_\nu$, es decir, $x_\nu \cap \alpha_{\nu+1}$ es no acotado en α_ν. Considere el siguiente conjunto:

$$x = \{\beta_\nu | \nu < \omega_1\},$$

(observe que este conjunto es no acotado en ω_1). Claramente de las observaciones anteriores se sigue que:

$$x \cap \alpha_{\nu+1} = \{\beta_\xi | \xi < \nu + 1\} \subseteq \beta_\nu + 1,$$

Así, como $\alpha_{\nu+1}$ es límite, se cumple que $\beta_\nu + 1 < \alpha_{\nu+1}$ y por lo tanto, se deduce que el conjunto $X \cap \alpha_{\nu+1}$ es acotado en $\alpha_{\nu+1}$. Por lo tanto, dado que $x_\nu \cap \alpha_{\nu+1}$ es no acotado en $\alpha_{\nu+1}$, se tiene que $x \neq x_\nu$ para toda $\nu < \omega_1$.

Habremos terminado la demostración si mostramos que $x \in \mathcal{F}$, pues estaríamos contradiciendo la existencia de la sucesión $\langle x_\nu | \nu < \omega_1 \rangle$. Bajo este espíritu, continuamos la demostración, encaminada a demostrar que $x \in \mathcal{F}$. Según la definición de $\mathcal{F}$, es cierto que $x \in \mathcal{F}$, si $x \cap \alpha \in M_\alpha$ para toda $\alpha \in \omega_1$. Sea $\alpha \in \omega_1$, en caso de que $x \cap \alpha$ sea finito, es directo el hecho de que $x \cap \alpha \in M_\alpha$, pues dado que $\alpha \subseteq M_\alpha$, los axiomas de Par y Unión (en M_α) garantizan la construcción (en M_α) de dicho conjunto. Supondremos pues, que $x \cap \alpha$ es infinito y demostraremos que $x \cap \beta \in M_\alpha$ para cierto $\beta \leq \alpha$ que tenga la propiedad de que el conjunto $(x \cap \alpha) \setminus (x \cap \beta)$ sea finito. Observe que si demostramos lo anterior, entonces se podrá afirmar que $x \cap \alpha \in M_\alpha$, pues M_α es modelo de ZF$^-$.

Sea $\beta \leq \alpha$ definido por $\beta = \bigcup\{\xi \leq \alpha | \bigcup(x \cap \xi) = \xi\}$, es decir, β es el mayor punto límite de $x \cap \alpha$. Por la definición de β, es claro que $x \cap \alpha$ difiere de $x \cap \beta$ en un número finito de puntos. Así, según la observación anterior, sólo falta demostrar que $x \cap \beta \in M_\alpha$.

Para demostrar ésto, primero observe que (como β es un punto límite de $x \cap \alpha$) β es un punto límite de x, y que x es un subconjunto de C, por lo tanto β es a su vez un punto límite de C. Pero como C es c.n.a. de ω_1, se concluye que $\beta \in C$. Así, por la elección de C, en particular se deduce que:

$$(B \cap \beta \in S_\beta) \wedge (C \cap \beta \in S_\beta).$$

Como $\beta \leq \alpha$, la definición de M_α garantiza que tanto $B \cap \beta$ como $C \cap \beta$ son elementos de M_α. Luego, según la definición de β, existe un ordinal λ tal que $\beta = \bigcup_{\nu<\lambda} \beta_\nu$, así, se tiene que:

$$\{\alpha_\nu | \nu < \lambda\} = \{\alpha \in (B \cap \beta) | \alpha = \bigcup((C \cap \beta) \cap \alpha)\},$$

pues $\alpha = \alpha_\nu$ para $\nu < \lambda$, si y sólo si $\alpha < \beta$, $\alpha \in B$ y α es un punto límite de C; pero como $\alpha < \beta$, lo anterior es equivalente a decir que α es un punto límite de $C \cap \beta$. Entonces, como M_α es modelo de ZF$^-$ y en particular es modelo del axioma de subconjunto, el hecho de que $(B \cap \beta), (C \cap \beta) \in M_\alpha$ garantiza la existencia del conjunto $\{\alpha_\nu | \nu < \lambda\}$ en M_α, es decir,

$$\{\alpha_\nu | \nu < \lambda\} \in M_\alpha.$$

Pero como para $\nu < \lambda$, la definición de β_ν es equivalente a:

$$\beta_\nu = \bigcap((c \cap \beta) \setminus (\alpha_\nu + 1)),$$

se concluye (de nuevo haciendo uso del hecho de que M_α es modelo de ZF$^-$) que:

$$x \cap \beta = \{\beta_\nu | \nu < \lambda\} \in M_\alpha. \quad \|$$

Con esto terminamos nuestro estudio del principio de Jensen y de algunas de sus extensiones.

Referencias

Cantor, G.

[Cantor 1955] *Contributios to the founding of the theory of transfinite numbers.* (Dover, New York).

Crossley, J. N.

[Crossley 1967] (ed.) *Sets, models and recursion theory.* (North Holland, Amsterdam).

Devlin, K. J.

[Devlin 1973] *Aspects of Constructibility.* (Springer-Verlag, Berlin).

[Devlin 1974] *The Souslin Problem.* (Springer-Verlag, Berlin)

[Devlin 1977] *The Axiom of Constructibility.* (Spriger-Verlag, Berlin)

[Devlin 1979] Variations on diamond, *The journal of Symbolic Logic* **44**, 51-8.

[Devlin 1984] *Constructibility.* (Springer-Verlag, Berlin).

Drake, F. R.

[Drake 1974] *Set theory; an introduction to large cardinals.* (North Holland, London)

Fleissner, W. G.

[Fleissner 1983] Son of George and $V = L$, *The journal of symbolic logic* **48**, 71-77.

García-Máynez, A y **Tamariz**, A.

[García 1988] *Topología general.* (Porrúa, México)

Gödel, K.

[Gödel 1938] The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis, en: [Gödel 1990] pp. 26-7.

[Gödel 1939] The consistency of the generalized continuum hypothesis, en: [Gödel 1990] p. 27.

[Gödel 1939a] Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, en: [Gödel 1990] pp. 28-32.

[Gödel 1940] The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, en: [Gödel 1990] pp. 33-101.

[Gödel 1947] What is Cantor's continuum problem?, en: [Gödel 1990] pp. 116-187.

[Gödel 1990] Solomon Feferman (ed.) *Collected works.* (Oxford, New York).

Jech, Th.

[Jech 1978] *Set Theory.* (Academic Press, London).

Jensen, B. R.

[Jensen 1971] The fine structure of the constructible jerarchy, *Annals of mathematical logic* **4**, 229-308.

Karp, C.

[Karp 1967] A proof of the relative consistency of the continuum hypothesis, en: [Crossley 1967] pp. 1-32.

Kunen, K.

[Kunen 1980] *Set theory; an introduction to independence proofs.* (North Holland, New York).

Morley, M. D.

[Morley 1973] (ed.) *Studies in model theory.* (The Mathematical Associaion of America, U.S.A.)

Wang, H.

[Wang 1981] Some facts about Kurt Gödel, *The journal of symbolic logic* **46**, 653-9.

[Wang 1991] *Reflexiones sobre Kurt Gödel.* (Alianza-Universidad, Madrid).

[Wang 1993] *Popular lectures on mathematical logic.* (Dover, New York).