11
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA RACIONAL DE OPCIONES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A :
RUTH SELENE FUENTES GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT

MEXICO, D. F. 274474 1999

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Teoría Racional de Opciones

realizado por Ruth Selene Fuentes García

con número de cuenta 9550296-6 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Mogens Bladt Petersen
Propietario	Dr. Pablo Padilla Longoria
Propietario	M.en E. Rafael Gómez-Tagle Morales
Suplente	Dra. Guillermina Eslava Gómez
Suplente	Act. Alberto Molina Escobar

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A. P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

Teoría Racional de Opciones

Ruth S. Fuentes García

A todos los profesores que contribuyen con su trabajo a mi formación académica y humana. En especial al Dr. Mogens Bladt que con su apoyo, paciencia y consejo hizo posible la realización de este trabajo.
Al M. E. Rafael Gómez-Tagle por su tiempo y observaciones que enriquecieron el trabajo. A la Dra. Guillermina Eslava y al Dr. Pablo Padilla por su apoyo y disposición. A Alberto Molina por su invaluable ayuda en el manejo de LaTeX.

A mi hermana Raquel por llenar de alegría nuestra vida,

A mis paderes Noemi y Luis por su apoyo y ejemplo,

A mi abuelo Aurelio por su consejo y confianza,

A mi familia por ser el origen de lo que soy,

A Ram por caminar conmigo,

A mis compañeras de siempre Adriana, Cynthia, Erika, Laura, Karla y Rocío,

A mis amigos que no he nombrado, pero que llevo conmigo y que han compartido conmigo sus experiencias, sus inquietudes y su tiempo.

Índice General

Introducción

Los mercados financieros han sufrido cambios radicales en los últimos años en diversos aspectos, desde el papel del dinero hasta los productos que se intercambian. Cualquier cambio en la forma en la que se procesa y se accesa la información influencia los mercados financieros. La importancia de la tecnología de la información, cuya evolución es irreversible, radica en la transformación de la economía mundial y del mundo de las finanzas con la idea de poner fin a la geografía y hablar de un mercado global. Esto constituye un reto para todos los participantes de la economía mundial, tanto de aquellas economías desarrolladas como para las llamadas emergentes, así como para los proveedores y consumidores de productos financieros.

Los mercados financieros de hoy están estrechamente relacionados, a los riesgos del mercado se añaden los riesgos del país y los conflictos en un mercado particular afectan a muchos otros, como se ha visto en años recientes.

Todo ello es un antecedente para el surgimiento y promoción de los mercados de derivados, es decir, mercados financieros cuyos productos dependen del valor de algún otro bien o servicio. Estos mercados ofrecen a los inversionistas una forma de protegerse de algunos riesgos y proporcionan nuevas estrategias de inversión.

Es entonces importante que a los valores derivados, en sus diversas formas, pueda asignárseles un precio de manera racional y consistente. Estos precios deben cumplir las propiedades que se atribuyan a través de una teoría racional basada en supuestos generales, para cualquier modelo que asigne dichos precios.

Este trabajo busca exhibir las propiedades más generales que deben cumplir los precios de los productos derivados bajo cualquier modelo racional. En el primer capítulo se describe brevemente a los mercados financieros, así como los cambios que han sufrido en la actualidad. Se ubica dentro de éstos a los mercados de derivados, mencionando los pricipales productos a los que se hará referencia en los siguientes capítulos para analizar sus propiedades.

En el segundo capítulo se analiza, bajo algunas suposiciones, el comportamineto de los precios de las opciones y warrants al variar algunos de los elementos que los definen, manteniendo al resto constantes. También se exponen algunas propiedades que deben cumplir dichos precios en el contexto de una teoría racional como cotas para los precios, propiedades de éstos como funciones de algunos elementos que los definen.

En el tercer capítulo se exponen brevemente los ajustes a los precios de opciones cuando la suposición de que la acción subyacente a éstas no paga dividendos o bien que existe una cláusula de protección contra dichos pagos, no se sostiene.

Finalmente, el el cuarto capítulo se presenta una teoría que cumple con las propiedades de los precios de opciones expuestas en los capítulos anteriores, la teoría de precios de opciones a través del modelo de Black-Sholes. Está teoría hace uso de la descripción del comportamiento de los precios de acciones mediante un proceso estocástico de Wiener o Browniano, mismo que se introduce de manera intuitiva, al igual que la solución de la ecuación diferencial estocástica que surge del modelo con el Lema de Ito. El interés de este capítulo no es dar una exposición formal o demostraciones de estos resultados, sino ejemplificar un modelo que cumpla con los resultados obtenidos mostrando algunos a través de un ejemplo real.

Capítulo 1

Mercados Financieros y Mercados de Derivados

§1.1 Mercados e Instituciones Financieras

Los mercados financieros que reúnen a vendedores y compradores para intercambiar instrumentos financieros pueden clasificarse de acuerdo a diversos criterios. Uno es, por ejemplo, de acuerdo al vencimiento de los instrumentos que se negocian, existen así mercados de deuda a corto plazo llamados mercados de dinero y mercados con instrumentos a largo plazo y plazo indefinido, llamados mercados de capitales. Frecuentemente se dividen los mercados financieros en mercados primarios, donde solo participan un número reducido de agencias elegibles que son quienes ponen en circulación los bienes y servicios, y mercados secundarios en los que participa el público en general. Existen, en otra clasificación, mercados *spot* o de operaciones en efectivo donde la entrega de los instrumentos es inmediata y mercados de derivados donde la entrega de los instrumentos negociados es futura. Gracias a las innovaciones tecnológicas no requieren de un lugar físico para operar, sin embargo, en su mayoría existe un centro para el intercambio.

Los participantes de estos mercados financieros incluyen gobiernos nacionales y entidades comerciales, incluyendo éstas a empresas financieras y no financieras. Entre las instituciones financieras que participan en los mercados financieros se encuentran las instituciones de depósito como los bancos, las asociaciones de ahorro (S&L), las cajas de ahorro y uniones de crédito, ejemplo de instituciones que pueden considerarse como empresas cuyos mayores ingresos consisten en depósitos y sus principales productos son préstamos. Su interés fundamental es maximizar sus ganancias a través del diferencial que obtienen de las tasas que se otorgan a los depositantes y las tasas que se cobran a los deudores. En este sentido actúan como *brokers* y su función es básicamente facilitar la obtención de préstamos abatiendo costos. Por otra parte en su carácter de intermediarios financieros, sus actividades involucran la transformación de los instrumentos ofertados en términos de vencimiento, donde las instituciones con mayor volúmen de depósitos tienen la posibilidad de ofrecer una mayor variedad de préstamos e instrumentos de inversión.

Además de las instituciones de depósito existen otras instituciones que participan en los mercados financieros como las compañías aseguradoras, los fondos de pensión, las sociedades de inversión, que son actualmente inversionistas institucionales que proporcionan estabilidad a los mercados financieros, mismos que a partir de 1980 han sufrido cambios acelerados. Estos cambios tienen que ver entre otras cosas con el manejo del riesgo, la incorporación de nuevos instrumentos a los mercados financieros, los recientes y acelerados adelantos en las telecomunicaciones, las nuevas formas de negociación, las facilidades para llevar a cabo cálculos a través del uso de computadoras y las ideas económicas avanzadas de algunos gobiernos que contemplan los libres mercados.

En muchas ocasiones los mercados domésticos no han sido capaces de cubrir las demandas de fondos y ha sido necesario el uso de los euromercados, esto es mercados en los que la deuda no necesariamente se coloca en el mercado base y no se emite en la moneda local. Esto ha sido un antecedente para la globalización de los mercados financieros.

El inversionista, dentro del sistema financiero, busca maximizar sus rendimientos, ya sea como pago de intereses de una inversión en un período determinado, como dividendos o como rendimientos por la apreciación del instrumento de inversión. De igual forma quienes solicitan créditos a las instituciones financieras buscan minimizar los costos dependiendo del tipo de deudas en que incurran. Los individuos se enfrentan por tanto, dentro del sistema financiero, a diversas opciones de posibles portafolios de inversión, de entre los cuales deben buscar invertir en valores y adquirir deudas que les proporcionen un portafolio equilibrado.

En los mercados financieros existen diversos instrumentos de inversión como depósitos bancarios, certificados de depósito, bonos del tesoro, eurobonos, pólizas de seguros de vida, etcétera. Sin embargo, la tendencia a globalizar los mercados financieros junto con el intercambio económico en un libre mercado ha ocasionado que los inversionistas demanden instrumentos financieros que los protejan del riesgo sobre todo en economías donde las condiciones de inestabilidad resultan, por ejemplo, en tasas de interés inestables y riesgos cambiarios importantes. Los mercados financieros han respondido con instrumentos como los swaps, los futuros y las opciones, entre otros.

El tamaño, desarrollo y comportamiento de los sistemas fiancieros pueden influenciar y reflejar la economía real y la producción de bienes y servicios. Para ello es necesario que el mercado sea profundo, integrado y estable. Es interesante reflexionar sobre la economía mexicana; las razones que no permiten un mercado financiero profundo en donde inversionistas institucionales proporcionen estabilidad. Los cambios en mercados financieros importantes en el mundo provocan inestabilidad en el mercado financiero mexicano. Si se piensa por ejemplo en los sistemas de ahorro para el retiro que están vigentes actualmente en nuestro país, se requiere de una inversión con mínimo riesgo, pero con un mayor rendimiento del que ofrecen los instrumentos de bajo riesgo disponibles en la Bolsa Mexicana de Valores. Esto conduce a la demanda de nuevos instrumentos y en consecuencia se podrían analizar las razones que han promovido un mercado de futuros y opciones en México.

Los mercados financieros tienen entonces una estrecha relación con la economía de un país, están dominados por las leyes de la oferta y la demanda, por lo que las instituciones financieras deben cumplir con proveer los instrumentos necesarios para cubrir las necesidades del mercado, que en un panorama de búsqueda de un mercado financiero global, enmarcado en adelantos tecnológicos, implica nuevas necesidades que dan origen a nuevos instrumentos financieros y nuevos mercados como el mercado de opciones, cuyo comportamiento, en términos de la asignación de sus precios, es el objeto de análisis de este trabajo.

§1.2 Mercados de futuros y opciones.

En los últimos años los mercados de futuros y opciones han aumentado su importancia en las finanzas mundiales. En el contexto actual es necesario para un inversionista conocer como trabajan estos mercados, como pueden utilizarse y como se determinan los precios de estos instrumentos. Se ha hecho referencia a futuros y opciones al hablar de los nuevos instrumentos en los mercados financieros y a continuación se describe brevemente en que consisten estos instrumentos.

Un futuro es un contrato en el que se acuerda comprar o vender en una cierta fecha en el futuro y por un precio determinado un bien o valor. Los mercados de futuros pueden encontrar antecedentes desde la Edad Media, en donde cubrían necesidades de comerciantes y agricultores que deseaban evitar riesgos en relación al precio de las cosechas. Los futuros, a diferencia de los forewards, que también forman parte del mercado de derivados, se negocían en un piso de remate y dado que los participantes no necesariamente se conocen, se especifican estándares sobre los lineamientos del contrato, así como un mecanismo que garantice el cumplimiento del mismo. En los contratos de futuros no se especifica una fecha exacta de vencimiento, sino un mes de vencimiento y un período en éste para ejercer el contrato.

Las opciones son contratos que dan el derecho, más no la obligación, de comprar o vender un bien o valor en una fecha futura establecida y por un precio predeterminado. Las opciones que dan el derecho de comprar bienes o valores se denominan *call options* y aquellas que dan el derecho de vender bienes o valores se denominan *put options* . Los contratos de opciones son mucho más recientes que los contratos de futuros, sin embargo, han adquirido una notable aceptación entre los inversionistas. Los contratos de opciones pueden ser, en su clasificación más general, de tipo Europeo o de tipo Americano. Las opciones de tipo Europeo pueden ejercerse solo en la fecha de vencimiento del contrato mientras que las opciones Americanas pueden ejercerse en cualquier fecha, hasta el vencimiento del contrato.

Por ejemplo, se puede considerar un inversionista que compra 100 opciones de compra o call options Europeos sobre acciones de Telmex *L, con un precio de ejercicio de $25. Suponiendo que el precio actual es de $23.35 y que la fecha de vencimiento del contrato es en dos meses con un precio de la opción de $1.25. Dado que las opciones son de tipo europeo el inversionista solo puede ejercer el contrato en la fecha de vencimiento. Si en esta fecha el precio de la acción es menor a $25 el inversionista preferirá no ejercer, pues no tendría caso comprar acciones por un precio mayor al precio actual de mercado. En este caso el inversionista perdería el monto de la inversión inicial que equivaldría a $125. Si el precio de la acción de Telmex *L es mayor a $25 en la fecha de vencimiento entonces el inversionista ejercería la opción.

Suponiendo que el precio de la acción fuera de $29, el inversionista podrá adquirir 100 acciones de por $25. Si puede vender las acciones en el mercado inmediatamente tendría una ganancia de $4 por acción, es decir, un total de $400 ignorando los costos de operación. Si se considera la inversión inicial, la ganancia neta por acción sería de $2.75, esto es, una ganancia neta total de $275. Pero si el precio de la acción es de $26, el inversionista podría ejercer la opción y vender en el mercado inmediatamente con una ganancia de $1 por acción y sin embargo tendría una pérdida total de $25, que de cualquier forma sería mejor que una pérdida de $125. Mientras que el tenedor de opciones call espera que el precio de la acción suba, el tenedor de opciones put espera que se valor decresca.

Suponga ahora que un inversionista adquiere 100 opciones de venta o tipo put europeas sobre acciones de Cemex B con precio de ejercicio de $20. Suponga que el precio actual de la acción es de $23.15, la fecha de vencimiento establecida es dentro de tres meses, con un precio por opción de $2. Por ser opciones de tipo europeo solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento. Si el precio de la acción en dicha fecha es de $15. El inversionista puede comprar 100 acciones de Cemex B por $150, vendiéndolas inmediatamente, bajo los términos del contrato de opción, para obtener una ganancia de $500, ignorando los costos de operación. Si se toma en cuenta la inversión inical, el inversionista tendría una ganancia neta de $300. Por otra parte, si el precio de la acción en la fecha de vencimiento es menor a $20, la opción vence sin valor y el inversionista perdería la inversión inicial de $200.

Los contratos de opción Americanos se diferencian de los anteriores ejemplos únicamente en que el tenedor de dichos contratos podrá ejercerlos en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento.

Los primeros intercambios de contratos de opciones se llevaron a cabo en Europa y Estados Unidos desde el siglo XVIII. Más adelante, a principios de los años 1900's los mercados de opciones comenzaron como un intercambio entre miembros de asociaciones de negociadores y brokers de opciones en los mercados *over-the-counter**, pues los participantes no se reunían físicamente en un piso de remate. Finalmente se formaron los mercados de opciones como el Chicago Board Option Exchange (CBOE), que se formó en abril de 1973.

Por otra parte los mercados, tanto de opciones como de futuros, han reunido a diferentes clases de inversionistas que se benefician del intercambio de estos productos financieros como los hedgers, quienes pueden, por ejemplo, protegerse de la posible baja en los precios de las acciones que poseen o los especuladores, quienes de acuerdo a las expectativas en los precios de las acciones aprovechan las posibles variaciones.

Se ha hablado de contratos de futuros y de opciones, ambos son ejemplos de instrumentos derivados, esto se debe a que su valor depende de los precios de bienes o valores básicos tales como acciones cotizadas en un mercado financiero, índices de los mercados financieros, petróleo, metales, divisas, etcétera. Los contratos de opciones no se negocian por lo general en los pisos de remate y el diseño de estos derivados es muy variado, esto con el fin de satisfacer las necesidades de los inversionistas. Por ejemplo, los bancos que colocan en el mercado los contratos de futuros y opciones, lo hacen como parte de inversiones compuestas por bonos y acciones, con el fin de hacerlas más atractivas.

Los contratos de opciones descritos, se refieren a contratos que negocian quienes los suscriben con los compradores, ya sea en el piso de remates o en los mercados *over-the-counter* . Existen otro tipo de contratos de opciones que se originan de manera diferente, como los *warrants*.

---

*El mercado OTC no es una organización de mercado formal con requeriminetos de membresía. En esencia, es posible operar con cualquier título en el mercado OTC mientras un comprador potencial este dispuesto a tomar una posición respecto a la acción. Esto es, en el mercado OTC los inversionistas y los vendedores negocian directamente, sin necesidad de un agente intermediario. Se realizan en el operaciones con acciones no listadas en uno o más de los mercados establecidos y con acciones listadas en un denominado "*tercer mercado*".

Un *Warrant* es un contrato emitido por una compañía o una institución financiera y que en ocasiones se negocian posteriormente en los pisos de remate. Los *call warrants* son emitidos por las empresas sobre sus propias acciones ofrecidas a menudo junto con bonos. Estos contratos nuevamente dan el derecho más no la obligación de ejercerlos. Cuando se ejerce un warrant, la compañía emite nuevas acciones al tenedor del warrant por el precio de ejercicio especificado en el contrato. Los warrants tienen en ocasiones plazos de vencimiento mayores a los de los contratos de opciones. Las instituciones financieras también emiten *put* y *call warrants* para satisfacer las demandas del mercado, en cuyo caso el valor subyacente es comúnmente un índice o una divisa. Existen otro tipo de opciones que son combinación de opciones call y put.

Capítulo 2

Precios Racionales de Opciones

El interés en una teoría para asignar precios de opciones ha existido desde principios del siglo XX cuando el matemático francés, Louis Bachelier, dedujo una fórmula para los precios de las opciones suponiendo que los precios de las opciones seguían un movimiento Browniano con deriva cero. Desde entonces la teoría sobre precios de opciones ha avanzado con las aportaciones de investigadores como Robert C. Merton y Paul Samuelson, John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein, así como Fischer Black y Myron Scholes, entre otros.

Las opciones son valores especializados y si son considerados como un valor de reclamación contingente, el desarrollo de una teoría que abarque precios de opciones puede verse entonces como un paso hacia una teoría que contemple precios de deudas de empresas, estructuras de riesgo de tasas de interés y una teoría sobre mercados especulativos. Existen algunos factores que son de importancia para el establecimiento de los precios de opciones sobre acciones como: el valor actual de la acción, el valor de la acción al ejercer la opción, la volatilidad del precio de la acción, como medida de la incertidumbre de los movimientos del precio de la acción, el tiempo restante hasta la fecha de vencimiento del contrato, la tasa libre de riesgo y los dividendos esperados durante la vida de la opción.

Para el desarrollo de una teoría de precios racionales de opciones es necesario comenzar con los fundamentos que permitan establecer algunas propiedades de los precios de las opciones, a partir de supuestos suficientemente débiles que proporcionen validez universal. Estas propiedades, a medida que se logre su universalidad, se convierten entonces en condiciones que debe satisfacer cualquier teoría de precios racionales de opciones. El interés de éste trabajo es establecer éstos fundamentos para una teoría de precios de opciones, tomando como base el desarrollo planteado por Robert Merton en su artículo: "Teoría racional de precios de opciones" (1973).

§2.1 Restricciones a los precios racionales de opciones.

Se supone entonces, en primer lugar, que un inversionista prefiere ganar más que menos, esto es necesario para que una fórmula sea consistente. Se supone también que no hay costos de transacción, que todas las ganancias están sujetas al mismo impuesto y que es posible obtener y conceder préstamos con una tasa libre de riesgo. La tasa a la que se obtiene un préstamo la llamaremos *tasa pasiva* y la tasa a la que se concede un préstamo *tasa activa.*

Para plantear las restricciones a los precios racionales de opciones se hará referencia a un warrant de tipo americano, es decir un valor emitido por una empresa que puede ejercerse en cualquier fecha del período de vigencia del contrato; un warrant de tipo europeo cuya diferencia respecto al anterior radica en que únicamente podrá ejercerse en la fecha de vencimiento del contrato. Además se considerará una opción de tipo americano que, a diferencia de un warrant del mismo tipo, es emitido por un individuo conservando lo relativo al derecho de ejercicio y una opción de tipo europeo que tiene los mismos términos que un warrant europeo respecto al derecho de ejercicio, aunque es emitido por un individuo.

Las restricciones que se irán obteniendo serán resultado de la variación de alguno de los aspectos que definen un warrant o una opción, manteniendo todos los demás constantes, o bien de la comparación de warrants al variar los elementos o condiciones del contrato. Los contratos de tipo americano y europeo pueden no tener el mismo valor, como lo ha demostrado Samuelson. En general los contratos pueden variar en aspectos como cláusulas de no disolución o de cambios en el precio de ejercicio. La única diferencia que hay al valuar una opción call y un warrant radica en que el agregado de la oferta de opciones es cero, mientras que el agregado de la oferta de warrants es positivo. Esto significa que la oferta de warrants puede modificar las precios de las acciones al emitirse en cantidades positivas.

Para comenzar el desarrollo de hipótesis y propiedades, en primer término se denotará como:

i. $F(S,\tau;E)$ al valor de un call warrant americano,

ii. $f(S,\tau;E)$ al valor de un call warrant europeo,

iii. $G(S,\tau;E)$ al valor de una opción de venta o *put* americano,

iv. $g(S,\tau;E)$ al valor de una opción de venta o *put* europeo,

v. $C(S,\tau;E)$ al valor de una opción de compra o *call* americano,

vi. $c(S,\tau;E)$ al valor de una opción de compra o *call* europeo

En cada caso E representa el precio de ejercicio del warrant o de la opción, con τ años antes de la fecha de vencimiento de los mismos, cuando el precio por título de una acción común es S.

De la definición de warrant se sigue que, dado que se tiene el derecho más no la obligación de ejercer el contrato,

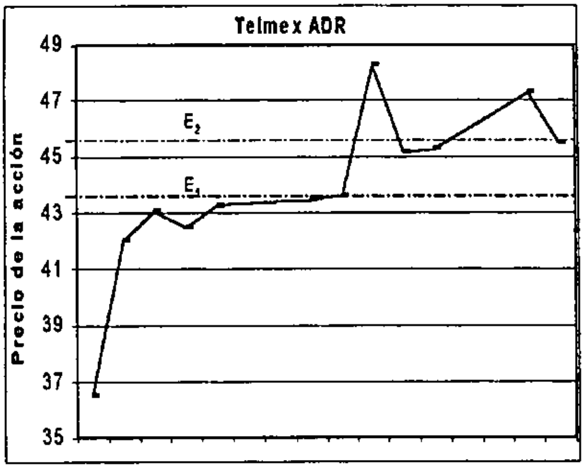
$$F(S,\tau;E) \geq 0; \quad f(S,\tau;E) \geq 0. \tag{R2.1}$$

Si el valor de un warrant, ya sea americano o europeo es mayor o igual que cero, cuando $\tau = 0$, es decir, en la fecha de vencimiento del contrato, ambas clases de contrato deben satisfacer

$$F(S,\tau;E) = f(S,\tau;E) = max(0, S - E) \tag{R2.2}$$

esto significa que el valor de un warrant americano es igual al valor de un warrant europeo en la fecha de vencimiento del contrato. El warrant toma, ya sea el valor cero, o bien, el valor que equivale a la diferencia positiva entre el precio de la acción a la fecha del vencimiento y el precio de ejercicio establecido en el contrato.

Gráfica 2.1:



Más aún, al considerar la posibilidad de arbitraje en el mercado se tiene que

$$F(S, \tau; E) \geq max(0, S - E) \qquad \text{(R2.3)}$$

lo que no necesariamente se cumple en el caso de un warrant europeo.

Para plantear otras restricciones sobre los precios de opciones es necesario definir la dominancia entre valores o portafolios de éstos. Se define a un valor o portafolio A como ***dominante*** sobre un valor o portafolio B, en una fecha conocida en el futuro, si el pago en A es mayor que el pago en B para algunos posibles estados de la naturaleza, entendiendo por éstos las condiciones que pueden darse en el mercado, y es al menos igual al pago de B en todos los posibles estados de la naturaleza.

Suposición 1.

Para una teoría racional de precios de opciones una condición necesaria es que se asigne a las opciones un precio tal que no sea un valor ni dominado ni dominante.

De ésta primera suposición se establece que al considerar dos warrants americanos sobre la misma acción común y con el mismo precio de ejercicio resulta que

$$F(S,\tau_2;E) \geq F(S,\tau_1;E), si \quad \tau_2 > \tau_1 \tag{R2.4}$$

lo que plantea que con los mismos términos, los contratos pueden tomar ya sea el mismo valor o al considerar la diferencia en los tiempos de vigencia no puede suceder que el contrato con más tiempo restante de vida ($(\tau_2 - \tau_1)$ en este caso) tome un valor estrictamente mayor que el otro. Esto no respetaría la *suposición 1*, así que para evitar la dominancia el valor inicial de el warrant con duración τ_2 debe ser mayor o igual que el warrant con duración τ_1. Además se pude ver que

$$F(S,\tau;E) \geq f(S,\tau;E) \tag{R2.5}$$

debido a que el warrant americano permite el ejercicio del contrato en cualquier momento durante la vigencia del contrato, lo que no es posible en el warrant europeo, dejando la posibilidad de que antes de la fecha de vencimiento el warrant americano tome un valor estrictamente mayor que el valor de un warant europeo, en cuyo caso sería un valor dominante.

Tomando dos warrants americanos de manera análoga al caso anterior, variando únicamente los precios de ejercicio de ambos contratos de manera que uno sea mayor que otro entonces debe cumplirse

$$F(S,\tau;E_2) \leq F(S,\tau;E_1)$$

$$f(S,\tau;E_2) \leq f(S,\tau;E_1), \quad si \quad E_2 > E_1 \tag{R2.6}$$

pues para $E_2 > E_1$, gráfica 2.1, es posible que al final de τ años la acción tenga un valor en el mercado S^* tal que se den las siguientes situaciones:

- $S^* > E_2 \Rightarrow max(0, S^* - E_2) < max(0, S^* - E_1)$,
- $S^* = E_2 \Rightarrow 0 = max(0, S^* - E_2) < max(0, S^* - E_1)$,
- $E_2 > S^* > E_1, \Rightarrow 0 = max(0, S^* - E_2) < max(0, S^* - E_1)$,
- $E_1 = S^* \Rightarrow max(0, S^* - E_2) = max(0, S^* - E_1) = 0$,
- $E_1 < S^* \Rightarrow max(0, S^* - E_2) = max(0, S^* - E_1) = 0$.

Ahora, debido a que una acción común pude verse como un warrant americano con $\tau = \infty$ y precio de ejercicio $E = 0$, de las restricciones (R2.4) y (R2.6) se obtiene que

$$S \geq F(S, \tau; E) \qquad \text{(R2.7)}$$

y de (R2.1) y (R2.7), un warrant debe carecer de valor si el precio de la acción es cero,

$$F(0, \tau; E) = f(0, \tau; E) = 0. \qquad \text{(R2.8)}$$

A continuación, además de los elementos ya planteados en las restricciones, se considera un bono o un préstamo a descuento libre de riesgo que paga una unidad monetaria (un peso o un dólar por ejemplo) en τ años. Suponiendo que las tasas de interés (r) actuales y futuras son positivas entonces en una fecha dada,

$$1 = P(0) > P(1) > P(2) > \cdots > P(\tau) \quad para$$

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n \qquad \text{(R2.9)}$$

Con estas restricciones que se han planteado, tomando en cuenta características que permiten hablar en forma general del valor de las opciones, el interés es ahora observar algunas propiedades de éstos valores de las opciones que se refieren ahora como teoremas:

Teorema 2.1. *Si E es el precio de ejercicio de un warrant europeo y si no se efectúan pagos (dividendos) sobre la acción a lo largo de la vida del warrant, o bien existe una cláusula de protección respecto a éstos , entonces,*

$$f(S,\tau;E) \geq max\,[0, S - EP(\tau)]$$

Demostración

Para probarlo se consideran las siguientes dos inversiones. La inversión **A** que consiste en adquirir un warrant europeo $f(S,\tau;E)$ y una cantidad E de bonos a un precio $P(\tau)$ por bono. La inversión total en **A** es $f(S,\tau;E) + EP(\tau)$. La inversión **B** que consiste en adquirir la acción común S con una inversión total de S. Suponiendo que la acción común S al final de τ años toma un valor S^*. Entonces el valor de la inversión **B** es S^* y la inversión **A** puede tomar los siguientes valores:

Si $S^* \leq E$, entonces

$$\begin{aligned} f(S,\tau;E) &= max\,[0, S^* - EP(0)] = max\,[0, S^* - E] = 0, \quad y \\ \mathbf{A} &= 0 + EP(0) \end{aligned}$$

en cuyo caso $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$.

Si $S^* > E$, entonces

$$\begin{aligned} f(S,\tau;E) &= max\,[0, S^* - EP(0)] = max\,[0, S^* - E] = S^* - E, \quad y \\ A &= (S^* - E) + E = S^* \end{aligned}$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

De donde para cumplir con la *Suposición 1*, es necesario que **A** no sea una inversión dominante sobre **B**. Para ello debe cumplirse que

$$f(S,\tau;E) + EP(\tau) \geq S,$$

Es decir, que la inversión inicial de **A** sea al menos tan grande como la de **B**, esto garantiza que **A** no domina a **B**. Finalmente de (R2.1)

$$\begin{aligned} &f(S,\tau;E) \geq 0, \quad y \\ &f(S,\tau;E) \geq S - EP(\tau) \Rightarrow f(S,\tau;E) \geq max\,[0, S - EP(\tau)] \blacksquare \end{aligned}$$

A partir de (R2.5) se tiene que el teorema 2.1 se cumple para un warrant americano con precio de ejercicio fijo durante la vigencia del contrato. Aunque en la práctica las opciones negociadas son en su mayoría de tipo americano, es mucho más sencillo resolver analíticamente las opciones de tipo europeo. Es entonces importante saber cuando las opciones europeas toman el mismo valor que las americanas.

El teorema 2.1 ha restringido las fronteras para el precio racional de una opción respecto a la tercera restricción que se planteo anteriormente (R2.3). Más aún de 2.1 se desprenden otras dos propiedades para los precios racionales.

Teorema 2.2. *Si se sostienen las hipótesis del teorema 2.1, entonces un warrant americano no será ejercido antes del vencimiento del contrato. En cuyo caso el valor del warrant americano es el mismo que el de su contraparte europeo.*

Demostración
Si se ejerce el warrant americano, $F(S,\tau;E) = max(0, S - E)$. Pero por 2.1

$$F(S,\tau;E) \geq max\,[0, S - EP(\tau)]\,, \text{ y por (R2.9)},$$
$$max\,[0, S - EP(\tau)] > max(0, S - E), \text{ para } \tau > 0, \text{ pues } P(\tau) < 1$$

por lo que el warrant vale más "vivo" que "muerto". ∎

El teorema 2.2 resalta el hecho de que la existencia de una diferencia positiva entre los valores de los warrants americanos y europeos, que implica una probabilidad de ejercicio prematuro de un warrant americano, indica cambios no favorables en el precio de ejercicio o falta de cláusulas de protección contra pagos sobre la acción común (dividendos).

Es frecuente afirmar que el warrant debe venderse cuando menos en su valor intrínseco, es decir, en $\max(0, S - E)$, aunque se podría referir como valor intrínseco al $\max\,[(0, S - EP(\tau)]$ por lo que se ha visto en los primeros dos teoremas.

Para ilustrar lo anterior pensemos en un warrant americano con $\tau = 1$ mes y con precio de ejercicio de \$10. Si el precio de la acción es de \$17, el inversionista podría pensar en ejercerla de inmediato, pero si planea conservar la acción por más de un mes, una mejor estrategia sería conservar la opción hasta su vencimiento. Los \$10 se tendrían que pagar un mes después y dado que la acción no paga dividendos, no habría ganancias sacrificadas. Por otra parte, si el precio de la acción llegara a bajar a menos de \$10, el warrant expiraría con valor cero y la acción se compraría en el mercado por un precio menor.

En caso de que el inversionista piense que la acción está sobreapreciada, se podría pensar en ejercer la opción y vender acción, aunque sería mejor estrategia vender la opción, lo que daría una ganancia de cuando menos su valor intrínseco, que sería mayor a \$7.

Teorema 2.3. *Si se sostienen las hipótesis del teorema 1, entonces el valor de un warrant perpetuo ($\tau = \infty$) debe ser igual al precio de la acción común.*

Demostración

Del teorema 2.1, $F(S, \infty; E) \geq max\,[0, S - EP(\infty)]$. Pero $P(\infty) = 0$, pues para tasas de interés positivas, el valor de un préstamo a descuento pagadero en infinito ($e^{-r\tau}, \tau = \infty$), es cero, entonces

$$\begin{aligned} F(S, \infty; E) &\geq S, \text{ pero por (R2.7)} \\ S &\geq F(S, \infty; E) \\ \therefore \quad S &= F(S, \infty; E) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Samuelson y Merton, así como, Black y Scholes han probado está propiedad para sus modelos particulares. Pero el teorema 2.3 muestra que se sostiene independientemente de suposiciones hechas sobre la distribución de los precios de la acción o de condiciones adversas de riesgo.

A partir del teorema 2.1, puede verse que el precio de un warrant determinado racionalmente, es una función de $P(\tau)$. Si no fuera así, al dejar que τ creciera la desigualdad del teorema 2.1 no se cumpliría, pues el warrant podría tener un valor mayor al de la acción común.

Merton propone escribir $F(S, \tau, E, P(\tau))$ como $W(S, \tau, e)$, donde $e = EP(\tau)$, observando que el valor del warrant no depende del precio de ejercicio cuando $\tau = \infty$, y el precio de ejercicio no depende de $P(\tau)$ si $E = 0$, y para ambos casos $e = 0$. De donde un cambio en el precio de ejercicio, es decir, un aumento en la tasa de interés, tal que $EP_1(\tau) < EP_2(\tau)$, por (R2.6), $f(S, \tau; EP_2(\tau)) \leq f(S, \tau; EP_1(\tau))$ es negativo. Por lo que el warrant debe ser una función creciente de la tasa de interés.

Los siguientes dos teoremas se refieren a los efectos de un cambio en el precio de ejercicio en el precio del warrant.

Teorema 2.4. *Si $F(S, \tau; E)$ es el precio de un warrant determinado en forma racional, entonces F es una función convexa del precio de ejercicio E.*

Demostración

Para demostrar convexidad basta mostrar que si

$$E_3 \equiv \lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2, \text{ entonces para cada } \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$
$$F(S, \tau; E_3) \leq \lambda F(S, \tau; E_1) + (1 - \lambda)F(S, \tau; E_2)$$

Para ello se utiliza un argumento de dominancia similar al utilizado para probar el teorema 2.1.

Sea **A** un portafolio que formado por λ warrants con precio de ejercicio E_1 y $(1 - \lambda)$ warrants con precio de ejercicio E_2, donde por convención, $E_2 > E_1$.

Sea **B** un portafolio formado por un warrant con precio de ejercicio E_3.

Si S^* es el precio de la acción común en la fecha de vencimiento del contrato y $E_3 > E_2 > E_1$, entonces por la convexidad del $\max(0, S^* - E)$ el valor del portafolio **A** será mayor o igual que el valor del portafolio **B**,

$$\mathbf{A} = \lambda max(0, S^* - E_1) + (1 - \lambda)max(0, S^* - E_2),$$

$$\mathbf{B} = max(0, S^* - \lambda E_1 - (1 - \lambda)E_2) = max\,(0, S - E_3).$$

Por lo que para evitar la dominancia, debe cumplirse que el valor actual del portafolio **B** sea menor o igual que el valor actual del portafolio **A**, de donde,

$$max(0, S - \lambda E_1 - (1-\lambda)E_2) \leq \lambda max(0, S\text{-}E_1) + (1-\lambda)max(0, S\text{-}E_2)$$

$$f(S,\tau;E_3) \leq \lambda f(S,\tau;E_1) + (1-\lambda) f(S,\tau;E_2)$$

Dado que en ningún momento se utilizó el factor τ en los argumentos, se obtendría el mismo resultado para los warrants que se ejercieran prematuramente, es decir, se sostiene para los warrants americanos. ■

Teorema 2.5. *Si $f(S,\tau;E)$ es un precio de un warrant europeo determinado de manera racional, entonces para $E_1 < E_2$,*

$$-P(\tau)(E_1 - E_2) \leq f(S,\tau;E_2) - f(S,\tau;E_1) \leq 0$$

Más aún, si f es una función diferenciable respecto a su precio de ejercicio,

$$-P(\tau) \leq \frac{\partial f(S,\tau;E)}{\partial E} \leq 0$$

Demostración

De (R2.6) tenemos que $f(S,\tau;E_2) \leq f(S,\tau;E_1)$, para $E_1 < E_2$, de donde

$$f(S,\tau;E_2) - f(S,\tau;E_1) \leq 0.$$

Ahora consideremos dos portafolios, el **A** que consista en un warrant para comprar la acción al precio E_2 y $(E_1 - E_2)$ bonos por un precio $P(\tau)$ por bono; el **B** que consista de un warrant para comprar la acción al precio E_1. Si el precio de ejercicio de la acción en la fecha de vencimiento es S^*, entonces el valor del terminal del portafolio **A** será mayor que el valor terminal del portafolio **B**, si $S^* < E_2$

$$max(0, S^* - E_2) + (E_2 - E_1) \geq max(0, S^* - E_1),$$

y cuando $S^* \geq E_2$,

$$max(0, S^* - E_2) + (E_2 - E_1) = max(0, S^* - E_1).$$

Por ello, para evitar la dominancia el precio actual del portafolio **A** debe ser mayor igual que el valor actual del portafolio **B**, es decir,

$$f(S,\tau;E_1) \leq f(S,\tau;E_2) + P(\tau)(E_1 - E_2).$$
$$\therefore -P(\tau)(E_1 - E_2) \leq f(S,\tau;E_2) - f(S,\tau;E_1) \leq 0$$

Para probar la desigualdad de la derivada

$$\frac{-P(\tau)(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)} \leq \frac{f(S,\tau;E_2) - f(S,\tau;E_1)}{(E_1 - E_2)} \leq 0$$

considerando el límite cuando $E_1 \to E_2$

$$-P(\tau) \leq \frac{\partial f(S,\tau;E)}{\partial E} \leq 0 \quad \blacksquare$$

Si las condiciones del teorema 2.1 se sostienen, entonces el teorema 2.5 se cumple para los warrants americanos. De haber pagos (dividendos), sobre el precio de las acciones, se tiene una desigualdad más débil

$$-(E_1 - E_2) \leq F(S,\tau;E_2) - F(S,\tau;E_1) \leq 0$$
$$-1 \leq \frac{\partial F(S,\tau;E)}{\partial E} \leq 0$$

pues no hay garantía de que no haya ejercicio prematuro de la opción.

Sea $Q(t)$ el precio por título de una acción común al tiempo t y $F_Q(Q,\tau;E_Q)$ el precio de un warrant para adquirir un título de una acción por un precio E_Q, en una fecha futura establecida o antes ésta, a τ años, cuando el precio de la acción común es Q.

Teorema 2.6. *Si $k > 0$, $Q(t) = kS(t)$ y $E_Q = kE$, entonces $F_Q(Q,\tau;E_Q) \equiv kF(S,\tau;E)$, para toda S,τ,E,k.*

Demostración

Sea S^* el valor de una acción común con valor inicial S cuando los warrants expiran o son ejercidos. Se tiene por hipótesis $Q = Q^* \equiv kS^*$ y $E_Q = kE$.

$$\begin{aligned} Q &= max(0, Q^* - E_Q) \\ &= kmax(0, S^* - E), \end{aligned}$$

que es k veces el valor del warrant con precio por acción S. Para que se sostenga la *suposición 1*, un valor no debe dominar al otro, entonces el valor del warrant sobre Q debe venderse en exactamente k veces el valor del warrant sobre S. ■

Las restricciones que éste teorema puede imponer a los precios racionales de las opciones dependen de las suposiciones que se requieran para producir las hipótesis de éste. En el caso en que k títulos de una acción se vendan por k veces el precio de una, lo que el teorema establece es que un warrant para comprar k títulos de una acción común deberá venderse por k veces el precio de un warrant para comprar un solo título de esa misma acción común. Lo anterior permite, siempre que se requiera, al elegir $k = \frac{1}{E}$, estandarizar el problema para facilitar la comparación entre operaciones por montos significativamente diferentes.

También puden considerarse i emisoras de acciones, definiendo $F_i(S_i, \tau_i; E_i)$ el valor del warrant sobre la acción común con precio actual S_i, tiempo τ_i antes de expirar y precio de ejercicio E_i.

Suposición 2.

Si $S_i = S_j = S$, $\tau_i = \tau_j = \tau$, $E_i = E_j = E$, y el rendimiento por unidad monetaria (peso, dólar, etcétera) de las acciones i y j son idénticamente distribuidas, entonces $F_i(S_i, \tau_i; E_i) = F_j(S_i, \tau_i; E_i)$.

Con esta suposición, como tenedor del warrant, la única característica que identifica a la acción común es su distribución de rendimientos.

Definiendo $z_i(t)$ como la variable aleatoria que represente el rendimiento por unidad monetaria invertido en la acción común emitida por la i-ésima empresa en el período t y $Z_i(t) \equiv \prod_{t=1}^{\tau} z_i(t)$ el rendimiento por dólar en el período τ-ésimo.

Teorema 2.7. *Si* $S_i = S_j = S$, $i, j = 1, 2, ..., n$,

$$Z_{n+1}(\tau) \equiv \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i Zi(\tau),$$

para $\lambda_i \in [0, 1]$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *entonces*

$$F_{n+1}(S, \tau; E) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(S, \tau; E)$$

Demostración

Un título del valor $(n+1)$-ésimo contiene λ_i títulos de la acción común emitida por la i-ésima empresa. Por hipótesis el precio del título

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i = S \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = S.$$

Ahora para utilizar un argumento de dominancia se definen: **A** como un portafolio que contenga λ_i warrants sobre la acción común emitida por la i-ésima empresa, para $i = 1, 2, ..., n$ y **B** como un portafolio que contenga un warrant sobre el valor $(n+1)$-ésimo. Si S_i^* es el precio por título de la acción común emitida por la i-ésima empresa en la fecha de vencimiento, para $i = 1, 2, ..., n$. Por definición $S^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^*$.

En la fecha de vencimiento el valor del portafolio **A** está dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i max(0, S_i^* - E)$$

y el valor de **B**

$$max(0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* - E)$$

Por la convexidad de $max(0, S - E)$ el valor del portafolio **A** es mayor o igual que el valor del portafolio **B**, en consecuencia para evitar la dominancia

$$F_{n+1}(S, \tau; E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(S, \tau; E) \quad \blacksquare$$

Este teorema establece que un warrant sobre un portafolio tiene un valor menor que el valor de un portafolio de warrants. Considerando el valor del warrant, la diversificación "hace daño" como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Si las condiciones del teorema 2.7 se sostienen y si además $\{z_i(t)\}$ son idénticamente distribuidos, entonces*

$$F_{n+1}(S,\tau;E) \leqslant F_i(S,\tau;E)$$

para $i = 1, 2, \ldots n$.

Demostración
Se tiene por el teorema 2.7 que

$$F_{n+1}(S,\tau;E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(S,\tau;E)$$

y por hipótesis $z_i(t)$ son idénticamente distribuidos, de ahí que $\{Z_i(t)\}$ también lo sean. Entonces por la *suposición 2* $F_i(S_i,\tau_i;E_i) = F_j(S_i,\tau_i;E_i)$, para $i = 1, 2\ldots, n$. Como $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, entonces

$$F_{n+1}(S,\tau;E) \leqslant F_j(S,\tau;E) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = F_i(S,\tau;E) \quad \blacksquare$$

El teorema 2.1 y su corolario 2.1, de manera general, proponen que cuanto más riesgosa sea la acción, más valioso será el warrant sobre ésta. Lo anterior concuerda con la afirmación ampliamente aceptada de que la diversificación del riesgo o volatilidad reduce el riesgo. Es entonces claro que la definición de riesgo o volatilidad juega un papel importante en la validez de la proposición.

Definimos un valor $Z_1(\tau)$ como más riesgoso que un valor $Z_2(\tau)$ si

$$Z_1(\tau) = qZ_2(\tau) + \epsilon$$

donde las variables aleatorias q, Z_2 y ϵ son mutuamente independientes; $E(q) = 1$ y $E(\epsilon) = 0$.

Teorema 2.8. *El precio de un warrant determinado de manera racional es una función no decreciente del riesgo asociado a la acción común subyacente.*

Demostración
Sea $Z(\tau)$ el rendimiento en el τ-ésimo período de una acción común con precio de un warrant sobre ésta $F_Z(S,\tau;E)$. Definimos $Z_i(\tau) = q_i Z(\tau) + \epsilon_i$

para $i = 1, 2, ..., n$; q_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(q_i) = 1$; ϵ_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(\epsilon_i) = 0$ y ϵ_i, q_j y $Z(\tau)$ son mutuamente independientes, $i, j = 1, 2..., n$.

Por definición, el valor i-ésimo es más riesgoso que el valor Z para $i = 1, 2..., n$. Definiendo la variable aleatoria rendimiento como:

$$Z_{n+1} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\tau) = Z(\tau) + [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_i - 1)]Z(\tau) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i$$

Pero $Z_i(\tau)$ son por construcción idénticamente distribuidas y por el Corolario 2.1, con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{n}$

$$F_{n+1}(S, \tau; E) \leqslant F_i(S, \tau; E)$$

para $i = 1, 2, ..., n$

Ahora bien, $Z_{n+1}(\tau)$ converge en probabilidad a $Z(\tau)$ cuando n tiende a infinito, entonces por la suposición 2

$$\lim_{n\to\infty} F_{n+1}(S, \tau; E) = F_Z(S, \tau; E)$$

por lo que $F_Z(S, \tau; E) \leqslant F_i(S, \tau; E)$. ∎

Con el teorema anterior se observa que cuanto más incierto sea el comportamiento de una acción, más se incrementa el precio de un warrant sobre dicha acción.

En lo que respecta a las propiedades de la distribución de los rendimientos de una acción, al suponer que $\{z(t)\}$ son idénticamente distribuidas, se tiene que la distribución de los rendimientos por unidad monetaria invertidos en una acción común es independiente del nivel inical de la acción. Por lo que se tienen las siguientes propiedades:

Teorema 2.9. *Si la distribución de los rendimientos por unidad monetaria invertidos en una acción común es independiente del nivel inicial de la acción, entonces $F(S, \tau; E)$ es homogénea de grado uno en el precio de la acción por título y en el precio de ejercicio.*

Demostración

Sea $z_i(t)$ el rendimiento por unidad monetaria si el precio inicial de la acción es S_i, para $i = 1, 2$. Definiendo $k = \frac{S_2}{S_1}$ y $E_2 = kE_1$, por el teorema 2.6, $F_2(S_2, \tau; E_2) \equiv kF_1(S_1, \tau; E_1)$.

Se tiene por hipótesis que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ son idénticamente distribuidas, entonces por la *suposición 2*, $F_1(S_1, \tau; E_1) = F_2(S_1, \tau; E_1)$.

Como $S_2 = kS_1$ y $E_2 = kE_1$, entonces $F_2(kS_1, \tau; kE_1) \equiv kF_1(S_1, \tau; E_1)$. ■

Aunque el resultado anterior es similar al que se plantea en el teorema 2.6, el teorema 2.9 impone más restricciónes a la función de precio del warrant. Si se considera que se cumplen las hipótesis del teorema 2.9, se esperaría que, para una fecha determinada, el valor de un warrant con precio de ejercicio E, cuando la acción común tiene un valor S, fuese k veces el valor de un warrant con precio de ejercicio $\frac{E}{k}$ cuando la acción se vende por $\frac{S}{k}$.

Teorema 2.10. *Si la distribución de los rendimientos por unidad monetaria invertida en una acción común es independiente del nivel inicial de la acción, entonces $F(S, \tau; E)$ es una función convexa del precio de la acción.*

Demostración

Para probar la convexidad debe verse que, si

$$S_3 \equiv \lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2,$$

entonces, para toda $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(S_3, \tau; E) \leqslant \lambda F(S_1, \tau; E) + (1 - \lambda) F(S_2, \tau; E).$$

Si consideramos $S_1 = S_2 = 1$, por el teorema 2.4

$$F(1, \tau; E_3) \leqslant \gamma F(1, \tau; E_1) + (1 - \gamma) F(1, \tau; E_2),$$

para $\gamma \in [0, 1]$ y $E_3 = \gamma E_1 + (1 - \gamma) E_2$.

Ahora si $\gamma \equiv \lambda \frac{S_1}{S_3}$, $E_1 \equiv \frac{E}{S_1}$ y $E_2 \equiv \frac{E}{S_2}$, entonces

$$F(1, \tau; E_3) \leqslant [\lambda \frac{S_1}{S_3}] F(1, \tau; E_1) + (1 - [\lambda \frac{S_1}{S_3}]) F(1, \tau; E_2),$$

Multiplicando por S_3 ambos lados de la desigualdad,

$$\begin{aligned} S_3F(1,\tau;E_3) &\leqslant \lambda S_1F(1,\tau;E_1) + (S_3 - \lambda S_1)F(1,\tau;E_2) \\ &\leqslant \lambda S_1F(1,\tau;E_1) + (1-\lambda)S_2F(1,\tau;E_2) \end{aligned}$$

Del teorema 2.9 sabemos que F es homogénea de grado uno en S y E, de donde

$$F(S_3,\tau;S_3E_3) \leqslant \lambda F(S_1,\tau;S_1E_1) + (1-\lambda)F(S_2,\tau;S_2E_2)$$

Por definición de E_1, E_2 y E_3 la expresión anterior se pude reescribir como

$$F(S_3,\tau;E) \leqslant \lambda F(S_1,\tau;E) + (1-\lambda)F(S_2,\tau;E) \quad \blacksquare$$

Las restricciones y propiedades enunciadas hasta este momento se han referido a warrants de compra. En lo que se refiere a las opciones ***put*** u opciones de venta, a partir de su definición, se sigue que en su fecha de vencimiento

$$G(S,0;E) = g(S,0;E) = max(0, E-S) \tag{R2.10}$$

Consideremos ahora dos portafolios **A** y **B** para determinar el precio racional de una opción de venta europea $g(S,\tau;E)$.

Sea **A** un portafolio que asume una posición en largo respecto a una acción común por un precio S, una posición en largo respecto a una opción de venta europea en τ años por $g(S,\tau;E)$ y un préstamo $EP'(\tau)$, donde $P'(\tau)$ es el valor actual de un dólar pagadero en τ años con la tasa pasiva. $P'(\tau)$ puede diferir de $P(\tau)$ si las tasas activas y pasivas son diferentes, de hecho para evitar arbitraje $P'(\tau) \leq P(\tau)$.

El valor del portafolio **A** en la fecha de vencimiento si S^* es el valor que toma la acción en dicha fecha puede tomar los valores:

Si $S^* \leq E \Rightarrow S^* + (E - S^*) - E = 0$

Si $S^* > E \Rightarrow S^* + 0 - E = S^* - E$

Esto significa que la estructura de pagos del portafolio A es idéntica a la de una opción de compra europea sobre la acción común, con el mismo precio de ejercicio y la misma duración. Entonces para evitar la dominancia del portafolio sobre la opción de venta debe cumplirse la siguiente desigualdad

$$S + g(S, \tau; E) - EP'(\tau) \geq f(S, \tau; E) \qquad \text{(R2.11)}$$

Sea ahora B un portafolio que asume una posición en largo respecto a una opción europea en τ años, una posición en corto respecto a una acción común por un precio S y E bonos por un precio $P'(\tau)$.

El valor del portafolio B en la fecha de vencimiento si S^* es el valor que toma la acción en dicha fecha puede tomar los los siguientes valores para valores de S^*:

Si $S^* \leq E \Rightarrow 0 - S^* + E = E - S^*$

Si $S^* > E \Rightarrow (S^* - E) - S^* + E = 0$

Estos valores tienen la misma estructura de pagos que una opción de venta europea con las mismas condiciones, por lo que nuevamente, para evitar la dominancia del portafolio

$$f(S, \tau; E) - S + EP(\tau) \geq g(S, \tau; E) \qquad \text{(R2.12)}$$

Teorema 2.11. *Si la suposición 1 se sostiene y las tasas pasiva y activa del mercado son las mismas de tal forma que $P'(\tau) = P(\tau)$, entonces*

$$g(S, \tau; E) = f(S, \tau; E) - S + EP(\tau)$$

Demostración De (R2.11) y (R2.12)

$$f(S, \tau; E) \leq g(S, \tau; E) + S - EP'(\tau)$$
$$f(S, \tau; E) \geq g(S, \tau; E) + S - EP(\tau)$$

y dado que $P'(\tau) = P(\tau)$, entonces $f(S, \tau; E) = g(S, \tau; E) + S - EP'(\tau)$ ■

Con el teorema 2.11 el valor de una opción de venta europea queda determinado de manera única una vez que lo está una opción de compra europea. De este teorema se obtienen los dos corolarios siguientes.

Corolario 2.2. $EP(\tau) \geq g(S, \tau; E)$

Demostración

Utilizando las restricciones (R2.5) y (R2.7)

$$\begin{aligned} F(S,\tau;E) &\geq f(S,\tau;E) \\ S &\geq F(S,\tau;E) \\ \Rightarrow f(S,\tau;E) - S &\leq 0 \end{aligned}$$

Al tomar la expresión de (R2.12) tenemos que $EP(\tau) \geq g(S, \tau; E)$ ■

Corolario 2.3. *El valor de una opción de venta europea perpetua* ($\tau = \infty$) *es cero.*

Demostración

Una opción de venta es un valor de responsabilidad limitada por lo que $g(S, \infty; E) \geq 0$. Usando el corolario 2.2 $g(S, \infty; E) \leq EP(\infty) = 0$. De donde $g(S, \infty; E) = 0$ ■

A partir de la relación entre una opción de venta europea y una opción de compra europea definida en los mismos términos, las propiedades de una opción de venta se establecen fácilmente. Si $f(S, \tau; E)$ es homegénea de grado uno, también lo es $g(S, \tau; E)$. Si $f(S, \tau; E)$ es una función convexa en S y E, $g(S, \tau; E)$ también es una función convexa en S y E.

Ahora considerando $G(S, \tau; E)$ una opción de de venta americana, su precio también debe satisfacer la condición de arbitraje por lo que

$$G(S,\tau;E) \geq max(0, E - S) \qquad \text{(R2.13)}$$

Además para cumplir la suposición de no dominancia se necesita que

$$G(S,\tau;E) \geq g(S,\tau;E) \qquad \text{(R2.14)}$$

que mantiene una desigualdad estricta si existe una probabilidad positiva de ejercicio prematuro del contrato de opción americana.

Cuando el precio de ejercicio es fijo y existen cláusulas de protección contra pagos de dividendos de la acción, se ha visto que el valor de un warrant europeo y uno americano es el mismo. Sin embargo, aún con estas suposiciones, casi siempre existe una probabilidad positiva de ejercicio prematuro en el caso de una opción de venta americana, razón por la cual se venderá más cara que su equivalente europea. El corolario 2.3 junto con la idea de arbitraje hacen pensar que esto se puede dar.

Entonces a diferencia de las opciones de venta europeas, el valor de las opciones de venta americanas son funciones no decrecientes de la fecha de vencimiento. Una opción de venta americana toma el mismo valor que una opción de venta europea sólo cuando no hay posibilidad de ejercerla antes de su fecha de vencimiento.

Ahora bien, para establecer una cota inferior para las opciones americanas se consideran nuevamente dos portafolios.

Sea **A** un portafolio que asume una posición en largo respecto a una acción común con precio S, una posición en largo respecto a una opción de venta americana con pecio $G(S,\tau;E)$ y un préstamo $EP'(\tau)$. Anteriormente se observo que si las opciones se conservan hasta su fecha de vencimiento, su estructura de pago equivale al de una opción de compra americana (europea). Mas por contener el portafolio una opción de venta americana, se tiene el derecho de ejercerla en cualquier momento antes de su vencimiento.

Entonces si para cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, el portafolio **A** tiene un valor mayor que el valor de un warrant americano habría dominancia, para evitarlo el valor actual del portafolio debe ser mayor o igual que el valor actual del warrant.

El valor del portafolio a T años antes de la fecha de vencimiento, cuando la acción toma el valor S^* esta dado por

$$\begin{aligned} S^* + G(S,T;E) - EP'(T) &= G(S,T;E) + (S^* - E) + E[1 - P'(T)] \\ &> S^* - E \end{aligned}$$

Por lo que para evitar la dominancia del warrant

$$G(S,\tau;E)+S-EP'(\tau)\geq F(S,\tau;E) \tag{R2.15}$$

Sea **B** un portafolio que asuma una posición en largo para una opción de compra americana por un precio $F(S,\tau;E)$, una posición en corto sobre una acción S y E bonos por $EP(\tau)$ unidades monetarias. Si se conserva hasta el vencimiento hemos observado que su estructura de pagos correspondería a la de una opción de venta europea, por lo que debe valer por lo menos lo mismo que la opción de venta en el tiempo de duración intermedio.

Cuando se consideran T años por correr, con un precio S^* para la acción, si $F(S,T;E)<E[1-P(T)]$, lo que podría suceder para valores suficientemente pequeños de S^*

$$\begin{aligned}F(S,T;E)-S^*+EP(T)&=F(S,T;E)+(E-S^*)-E[1-P(T)]\\&<E-S^*\end{aligned}$$

Además de (R2.13) $G(S,T;E)\geq E-S^*$. Entonces un valor intermedio de **B** sería menor que el valor de una opción de venta americana, para un valor suficientemente pequeño de S^*. Esto si el tenedor de la opción decide ejercerla antes de la fecha de vencimiento. Lo que quiere decir que el portafolio B no dominará a la opción de venta aún cuando la desigualdad $F(S,\tau;E)-S+EP(\tau)\geq G(S,\tau;E)$ no se cumpla. En particular si $S^*<E[1-P(T)]$ lo anterior ocurre.

Sin embargo, es posible establecer una desigualdad más débil a partir de este portafolio, dado que

$$F(S^*,T;E)-S^*+EP(T)<F(S^*,T;E)-S^*+E\leq G(S^*,T;E)$$

$$\Rightarrow G(S,\tau;E)\geq F(S,\tau;E)-S+E \tag{R2.16}$$

Entonces no puede determinarse de manera única un valor para una opción de venta americana en la misma forma que se ha hecho para el caso de la opción de venta europea.

Teorema 2.12. *Si para algún $T < \tau$, existe una probabilidad positiva para $f(S,T;E) < E[1 - P(\tau)]$, entonces existe una probabilidad positiva de que una opción de venta americana sea ejercida antes de su fecha de vencimiento y de que su valor exceda a de su equivalente europea.*

Demostración

Para que una opción de venta americana se venda por un valor más alto que el de su equivalente europea, es necesario que exista una posibilidad positiva de ejercicio prematuro de la opción americana. Por ello basta probar que $g(S,\tau;E) < G(S,\tau;E)$.

Si existen valores S^* tales que para algún $T \leq \tau$ cumplan que

$$\begin{aligned} g(S^*,T;E) &< G(S^*,T;E) \\ \Rightarrow g(S^*,\tau;E) &< G(S^*,\tau;E) \end{aligned}$$

por la *suposición 1*.

Ahora por el teorema 2.11 $g(S^*,T;E) = f(S^*,T;E) - S^* + EP(T)$ y de (R2.13) $G(S^*,T;E) \geq max(0, E - S^*)$ de donde

$$E - S^* \geq G(S^*,T;E) > f(S^*,T;E) - S^* + EP(T)$$

pero eso equivale a que

$$\begin{aligned} E - S^* &> f(S^*,T;E) - S^* + EP(T) \\ E[1 - P(T)] &> f(S^*,T;E) \end{aligned}$$

que se tiene por hipótesis, por lo se demuestra el teorema. ∎

Esto concluye que casi siempre existe una probabilidad positiva de ejercicio prematuro de una opción de venta americana, por lo que la valuación de estas opciones no podrá llevarse a cabo tan fácilmente.

Por ejemplo, si el precio de ejercicio de una opción de venta americana es de \$10 y se considera una situación extrema donde la acción valga prácticamente cero. Si el inversionista ejerce inmediatamente la opción, hará una ganancia de \$10, si espera, su ganancia si podría ser menor, pero no mayor, pues no se permiten precios de acciones negativos. Más aún, es mejor recibir \$10 ahora e invertirlos, que recibirlos en el futuro. Entonces la mejor estrategia del inversionista será ejercer la opción de venta inmediatamente.

Capítulo 3

Efectos de los Dividendos en los Precios de Opciones

El interés de éste capítulo es plantear las modificaciones que requiere un contrato de opción para ajustarse al pago de dividendos, pues gran parte de las propiedades consideradas en el capítulo anterior tienen como hipótesis que no existan tales pagos o bien que exista una cláusula de protección contra éstos. Los dos tipos más comunes de dividendos son los que se pagan en efectivo y los que se componen de acciones.

En términos generales, cualquier cambio en la pólitica de inversiones que tenga una empresa afectará el valor de una opción que depende del precio de una acción emitida por dicha empresa, así como cambios en su capital y en su política de pagos.

Por ejemplo, si una empresa cambia sus políticas de inversión con el fin de reducir el riesgo de sus flujos de efectivo y así también el de sus rendimientos, entonces como consecuencia del teorema 2.8, el valor del warrant disminuiría para un cierto nivel de precio de la acción. Los dividendos tienen el efecto de reducir el precio de la acción en la fecha del pago de los mismos.

Si bien una serie de ajustes en el contrato de un warrant o de una opción que protejan al inversionista contra cambios en las políticas de inversión de una empresa, así como de los cambios en su estructura de capital, no son viables sin imponer considerables restricciones a la administración de la empresa, es posible hacer ajustes para protegerlo contra los pagos de dividendos.

Una opción está protegida contra pagos de dividendos si, para una política de inversión fija y una estructura de capital fija, el valor de la opción es invariante respecto a la política de pagos de dividendos que se eliga.

§3.1 Cotas para valores de opciones

Para comparar los precios de opciones con pago de dividendos a las acciones sobre las que están definidos, dando una idea de la necesidad de un ajuste a sus valores, se hará uso de las cotas para sus valores.

Una opción de compra europea $c(S,\tau;E)$ y una americana $C(S,\tau;E)$ otorgan al tenedor el derecho, mas no la obligación, de comprar una acción por un precio E en τ años. Por lo que, al igual que los warrants de compra

$$c(S,\tau;E) \leq S, \quad C(S,\tau;E) \leq S \tag{R3.1}$$

Una opción de venta tanto europea como americana, por razones análogas a las anteriores cumple con

$$g(S,\tau;E) \leq E, \quad G(S,\tau;E) \leq E \tag{R3.2}$$

Una opción de compra europea, al igual que un warrant de compra satisface

$$c(S,\tau;E) \geq max(S - EP(\tau), 0) \tag{R3.3}$$

donde $EP(\tau)$ el valor presente de la cantidad E, acumulado con la tasa libre de riesgo.

Para ejemplificar lo que sucedería de no respetarse la cota, supongamos que $S = \$20$, $E = \$18$ y $\tau = 1$; con la tasa r en el mercado de 25% anual. En ese caso la cantidad

$$S - EP(1) = S - E(e^{-.25}) = 20 - 18(e^{-.25}) = \$5.98$$

Considerando la situación en la que la opción de compra europea se venda por \$5, valor que está por debajo de su cota teórica. Entonces sería posible comprar la opción de compra y vender la acción obteniendo un ingreso de $\$20 - \$5 = \$15$. Si esta cantidad se invierte por un año al 25% anual, en la fecha de vencimiento, si se ejerce la opción se obtendrá una ganancia de $\$19.26 - \$18 = \$1.26$. Si el precio de la acción fuera inferior a \$18, la acción se compraría en el mercado. Por ejemplo, si la acción cuesta \$17.50, se obtendrá una ganancia de \$19.26 – \$17.50 = \$1.76. Lo que significaría que habría dominancia de un portafolio que contemplara una opción de compra europea y E bonos por un precio $P(\tau)$ sobre uno que consistiera en un título de la acción que subyace a la opción de compra.

El análisis de una cota para una opción de venta se puede hacer en forma similar, supongamos dos portafolios. El portafolio **A** que contenga una opción de venta europea y una acción común con precio S. El portafolio B que consta de E bonos por un precio $P(\tau)$. En τ años, si el precio de la acción es S^* se puede dar uno de los dos siguientes casos:

i) Si $S^* \leq E$, $\mathrm{A} = E - S^* + S^* = E = \mathrm{B}$

ii) Si $S^* > E$, $\mathrm{A} = 0 + S^* > E\mathrm{B} = E$

Lo que concluye que para evitar la dominancia de **A** sobre **B**, el valor inicial de **A** debe ser mayor o igual que el valor inicial de **B**.

$$g(S,\tau;E) + S \geq EP(\tau) \Rightarrow g(S,\tau;E) \geq EP(\tau) - S$$

Como el valor de una opción es mayor o igual a cero

$$g(S,\tau;E) \geq max(0, EP(\tau) - S) \qquad \text{(R3.4)}$$

Nuevamente para ejemplificar lo que sucedería de no ser así, supongamos que $S = \$30$, con una tasa en el mercado $r = 25\%$ anual y que $\tau = \frac{1}{2}$. Si existe una opción de venta para ésta acción con precio de ejercicio de \$37. En este caso la cota teoríca para el valor de la opción esta dada por

$$EP(\tau) - S = 37(e^{-.25\frac{1}{2}}) - 30 = 2.65$$

Considerando que la opción se vende por \$2.00, que está por debajo de su cota, se podría solicitar un préstamo por \$32 durante seis meses, para comprar tanto la acción como la opción de venta. Suponiendo que las tasas activa y pasiva son iguales, se tendrán que pagar $32e^{.25\frac{1}{2}} = 36.26$. Si el precio de la acción esta por debajo de \$30 se ejerce la opción de venta obteniendo una ganancia de $\$37 - \$36.26 = \$0.79$. Si el precio de la acción está por arriba del precio de ejercicio, se compra la acción en el mercado y se obtiene una ganancia mayor, por ejemplo si el valor de la acción es de \$39, la ganancia es de $\$39 - \$36.26 = \$2.79$.

Además del teorema 2.11 tenemos que

$$c(S, \tau; E) + EP(\tau) = g(S, \tau; E) + S$$

a ésta relación se le conoce como la paridad *"call-put"*.

Para analizar el impacto del pago de dividendos en el valor de las opciones hay que considerar, en primer lugar, que los pagos de éstos que se efectuaran durante la vida de la opción deben ser estimados. En Estados Unidos por ejemplo, la mayoría de las transacciones que involucran opciones sobre acciones tienen un plazo de menos de ocho meses antes de su fecha de vencimiento. Los dividendos pagaderos durante el periódo de vida de la opción, en ese caso, pueden estimarse con una exactitud adecuada.

Para el análisis de los precios de opciones sobre acciones con dividendos, denotaremos $DP(\tau)$ al valor presente de los dividendos que se pagarán durante la vida de la opción.

Consideraremos nuevamente dos portafolios. El portafolio J que considere una cantidad en efectivo igual a $(D + E)P(\tau)$ y una opción de compra europea. El portafolio K con un título de la acción con precio S.

En τ años si S^* es el precio de la acción puede ocurrir alguna de las siguientes situaciones:

i) Si $S^* \leq E < E + D \Rightarrow \mathrm{J} = D + E \geq S^* + D = \mathrm{K}$

ii) Si $S^* > E \Rightarrow \mathrm{J} = S^* + D = (D + E) + (S^* - E) = S^* + D = \mathrm{K}$

entonces para evitar la dominancia de J sobre K su valor incial debe ser al menos tan grande como el valor inicial de K. Lo anterior junto con el hecho de que su valor es no negativo da como resultado que

$$c(S,\tau;E) \geq max[S-(D+E)P(\tau),0] \qquad \text{(R3.5)}$$

De manera análoga, definiendo un portafolio **L** con una opción de venta europea y una acción con un precio S y **M** con una cantidad de efectivo igual a $(D+E)P(\tau)$, se obtendría que

i) Si $S^* \leq E < E+D \Rightarrow \mathbf{L} = E - S^* + S^* + D = D + E = \mathbf{M}$

ii) Si $S^* > E \Rightarrow \mathbf{L} = S^* + D > E + D = \mathbf{M}$

por lo que para evitar la dominancia del portafolio **L** sobre el **M** su valor inicial debe ser cuando menos igual al de **M**, de donde,

$$g(S,\tau;E) \geq max[0,(D+E)P(\tau)-S] \qquad \text{(R3.6)}$$

El pago de dividendos hace crecer el valor de una opción de compra e incrementa el valor de una opción de venta.

Para establecer una paridad *"call-put"* que contemple el pago de dividendos de la acción, consideremos los portafolios **J** y **L** definidos anteriormente, en τ años, si el precio de la acción es S^*,

i) Si $S^* \leq E \Rightarrow \mathbf{J} = D + E = \mathbf{L}$

ii) Si $S^* > E \Rightarrow \mathbf{J} = S^* + D = \mathbf{L}$

de donde para evitar la dominancia de cualquier portafolio su valor inicial debe ser, entonces

$$c(S,\tau;E) + (D+E)P(\tau) = g(S,\tau;E) + S.$$

Finalmente, en cuanto a si se ejercerán antes de su fecha de vencimiento las opciones de compara americanas, no se puede garantizar que no se ejercerán prematuramente. En ocasiones será óptimo ejercerlas justo antes de la fecha de pago de dividendos, lo que al suceder depreciará el valor de la acción.

Considerando ahora una acción que paga un dividendo en forma continua, con una tasa q. En ese caso, con ésta tasa de dividendos, el precio de la acción al inicio del contrato es S y en la fecha de vencimiento es S^*, entonces si no hubiera pago de dividendos, el contrato comenzaría con un precio $Se^{-q\tau}$ y al vencer el contrato sería S^*. Con este argumento, vemos que la distribución de probabilidad para el precio de la acción sería equivalente en las dos situaciones.

Esto significa que para valuar una opción europea sobre una acción que page un dividendo continuamente, con una tasa q, se reduce el valor actual de la acción a $Se^{-q\tau}$ y se valúa la acción como si no pagara dividendos.

De donde podemos escribir R3.3 y R3.4 como *

$$c(S,\tau;E) \geq max(Se^{-q\tau} - Ee^{-r\tau}, 0) \qquad \text{(R3.7)}$$

$$g(S,\tau;E) \geq max(Ee^{-r\tau} - Se^{-q\tau}, 0) \qquad \text{(R3.8)}$$

De igual forma la paridad *"call-put"*, puede escribirse como

$$c(S,\tau;E) + Ee^{-r\tau} = g(S,\tau;E) + Se^{-q\tau}$$

Las cotas obtenidas en éste capítulo servirán más adelante para determinar el valor de un derivado a través de la ecuación del Black-Scholes.

*Si r es la tasa libre de riesgo, $EP(\tau) = Ee^{-r\tau}$

Capítulo 4

Precios Racionales de Opciones a través del modelo Black-Scholes

Existen numerosas teorías de precios de opciones que satisfacen las restricciones generales de una teoría racional de opciones, planteadas en los capítulos anteriores. Una de estas teorías fue desarrollada por Fischer Black y Myron Scholes en 1973, quienes derivaron una ecuación diferencial que debe satisfacerse por los precios de cualquier derivado que dependan de una acción sin dividendos. Parte de su atractivo consiste en que su resultado final es una fórmula que es función de variables "observables".

Además de suponer que no hay pago de dividendos en acciones, supusieron también que el precio de ejercicio es fijo durante la vida del contrato, que la tasa de interés r del mercado es fija y conocida y que el las transacciones en el mercado son contínuas respecto al tiempo.

El precio de una opción sobre una acción es función del precio de la acción y del tiempo, también puede considerarse función de las variables estocásticas que subyacen al precio de la acción y al tiempo.

Para obtener la expresión de la fórmula de Black-Scholes, primero es necesario asociarle a el precio de la acción un proceso que describa su comportamiento aleatorio.

§4.1 Proceso de Wiener

El hecho de que el precio actual de una acción puede encerrar toda la información contenida en los precios pasados de la misma, es la razón por la que se supone una propiedad Markoviana del precio de las acciones, de no ser así, un analista técnico del mercado podría tener rendimientos sobre el promedio analizando los precios pasados de las acciones.

Un proceso de Markov es un tipo de proceso estocástico donde solamente el valor actual es relevante para predecir su valor futuro. Un tipo particular de proceso estocástico de Markov es el processo de *Wiener* o proceso *Browniano*.

El comportamiento de una variable z, que sigue un proceso de Wiener, puede analizarse a través de los cambios en su valor en intervalos pequeños de tiempo. Considerando un intervalo pequeño Δt y definiendo Δz como un cambio en z durante Δt.

Para que z siga un proceso de Wiener Δz debe cumplir las siguientes propiedades básicas:

i) z(0)=0.

ii) Δz se relaciona con Δt por la ecuación $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$, donde ϵ es una realización de una normal con media cero y varianza uno.

iii) Los valores de Δz para cualesquiera dos intervalos de tiempo Δt son independientes.

De la primera propiedad Δz tiene una distribiución normal con media cero y varianza Δt, esto es, proporcional a la longitud del intervalo. Esto sugiere que intervalos más grandes llevan a más fluctuaciones del proceso en dicho intervalo. La segunda propiedad implica que Δz sigue un proceso Markoviano.

Ahora bien, consideremos el incremento en el valor de z durante un periódo relativmente largo de tiempo que denotaremos T. Este cambio puede escribirse como $z(T) - z(0)$ y puede verse como la suma de los incrementos de z en N intervalos de longitud Δt. Entonces $N = \frac{T}{\Delta t}$ y

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

donde ϵ_i, $i = 1, 2, ..., N$ son realizaciones de una distribución normal estándar. Estos ϵ_i son independientes, por la segunda propiedad.

Dado que la suma de variables aleatorias con distribución normal tiene una distribución normal con media igual a la suma de medias y varianza igual a la suma de varianzas, entonces la media de $z(T) - z(0)$ es cero y su varianza es $N\Delta t = T$.

Al igual que en el cálculo ordinario, nos interesa el límite cuando los cambios pequeños se acercan a cero, entonces podemos escribir la primera propiedad como $dz = \epsilon\sqrt{dt}$.

Hasta aquí el proceso de Wiener planteado tiene deriva cero, lo que significa que el valor esperado de z en cualquier momento futuro es igual a su valor actual. Con una varianza igual a uno que significa que la varianza del cambio de z en un intervalo largo de tiempo de longitud T es igual a T. Este proceso puede tomar valores negativos.

Un proceso de Wiener generalizado para una variable x puede definirse en términos de Δz como sigue:

$$dx = adt + bdz$$

donde a y b son constantes.

Si consideramos solo la primera parte de la ecuación podemos escribir $\frac{dx}{dt} = a$ o bien $x = x_0 + at$ donde x_0 es el valor de x en el tiempo cero. En un intervalo de longitud T el incremento en x está dada por aT. El segundo término bdz añade variabilidad al comportamiento de x, que es b veces un proceso de Wiener.

En un intervalo Δt, Δx, puede escribirse como

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}.$$

donde ϵ es una realización de una variable aleatoria normal estándar. Δx tiene una distribución normal con media $a\Delta t$ y varianza $b^2\Delta t$. Y en un intervalo de tiempo T, análogo al análisis anterior, el cambio en x tiene distribución normal con media aT y varianza b^2T.

De ahí, un proceso de Wiener generalizado tiene deriva promedio por unidad de tiempo a y varianza por unidad de tiempo b^2, a menudo referidas como tasas.

Ahora se quiere ver que el precio de una acción, en la que no existe pago de dividendos, sigue un proceso de Wiener generalizado, esto es, tiene una tasa esperada de deriva constante y tasa de varianza constante.

Otro proceso estocástico donde los parámetros a y b son funciones del valor de una variable x en el tiempo t, es el proceso de Itô,

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz.$$

Si el precio de la acción es S, su tasa de deriva esperada es μS con μ una constante. Esto es, en un intervalo Δt, es incremento esperado en S es $\mu S \Delta t$. μ es la tasa de rendimiento esperado sobre la acción, expresada en forma decimal. Si la tasa de varianza es cero en cualquier momento,

$$dS = \mu S dt$$

o bien

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

de manera que $S = S_0 e^{\mu t}$, donde S_0 es el precio de la acción en el tiempo cero. Lo anterior significa que en ausencia de variabilidad, el precio de la acción crece continuamente con una tasa de interés compuesto μ por unidad de tiempo.

Sin embargo, en la práctica el precio de la acción si presenta variabilidad. Aunque se puede suponer que la varianza del porcentaje de rendimiento para un intervalo pequeño de tiempo Δt es el mismo sin importar el precio de la acción, esto es la tasa de rendimiento es tan incierta para el inversionista si el precio de la acción es \$20 ó \$50.

Definiendo σ^2como la tasa de varianza proporcional al cambio en el precio de la acción. Esto significa que $\sigma^2 \Delta t$ es la varianza del cambio proporcional en el precio de la acción en el tiempo Δt y $\sigma^2 S^2 \Delta t$ es la varianza del cambio que se da en el precio de la acción durante Δt . La tasa de varianza instantánea de S es entonces $\sigma^2 S^2$. Esto sugiere que el precio de una acción S puede representarse por un proceso de Itô, pues éste tiene tasas de deriva esperada instantáneas μS y tasa de varianza intantáneas $\sigma^2 S^2$, que son funciones de S y t.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ó

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

este último es el modelo de uso más común para representar los cambios en los precios de una acción. Las variables μ y σ, se conocen como tasa de rendimiento esperada y volatilidad de los precios de la acción respectivamente.

§4.2 Lema de Itô

Para presentar el Lema de Itô, se plantea un argumento sencillo, haciendo uso de conceptos básicos del cálculo, más que a través de una demostración formal.

Considerando una función, de una variable X, contínua y diferenciable G. Si Δx es un cambio pequeño en x y ΔG el cambio en G resultante. Este cambio en G se puede aproximar por

$$G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \tag{4.1}$$

involucrando un error de orden Δx^2. Si se requiere mayor precisión se puede utilizar la expansión en serie de Tylor para ΔG

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1d^2G}{2dx^2}\Delta x^2 + \frac{1d^3G}{6dx^3}\Delta x^3 + \dots$$

Para una función de G contínua y diferenciable, que dependa de las variables x y y, el resultado análogo a 4.1 es

$$G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y \tag{4.2}$$

y la expansión en serie de Tylor para ΔG es:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1\partial^2 G}{2\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1\partial^2 G}{2\partial y^2}\Delta y^2 + \dots \tag{4.3}$$

El límite cuando Δx y Δy se acercan a cero de la expresión 4.3 da

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\partial x + \frac{\partial G}{\partial y}\partial y \tag{4.4}$$

Cuando la función depende de una variable que sigue un proceso estocástico, se puede extender la ecuación 4.4 para que contemple estas funciones. Si x es tal que sigue un proceso de Itô:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{4.5}$$

Ahora G es una función que depende de x y del tiempo t. Siguiendo 4.3 podemos escribir a G como:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1\partial^2 G}{2\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1\partial^2 G}{2\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots \tag{4.6}$$

La expresión 4.5 puede reducirse a una forma discreta, al mismo tiempo que se eliminan los argumentos de a y b a:

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{4.7}$$

A diferencia de la ecuación 4.3, donde al tomar los límites de argumentos, los términos en Δx^2 fueron eliminados por ser de segundo orden, de 4.6 no podemos eliminarlos. De la ecuación 4.7,

$$\Delta x^2 = b^2\epsilon^2\Delta t + \psi \tag{4.8}$$

donde ψ son términos de orden mayor que Δt , por lo que este término no se puede ignorar.

Por otra parte, la varianza de una distribución normal estándar es uno, de donde

$$\begin{aligned} E(\epsilon^2) - [E(\epsilon)]^2 &= 1 \\ E(\epsilon^2) - 0 &= 1 \\ \Rightarrow E(\epsilon^2) &= 1 \end{aligned}$$

El valor esperado de $\epsilon^2 \Delta t$ es por lo anterior Δt y su varianza es de orden Δt^2. Por ello, $\epsilon^2 \Delta t$ se convierte en una cantidad no estocástica e igual a su valor esperado Δt cuando Δt tiende a cero. De donde el primer término de la ecuación 4.8 se convierte en una cantidad no estocástica e igual a $b^2 dt$ cuando Δt tiende a cero.

Tomando el límite de la ecuación 4.6 cuando Δx y Δt tienden a cero, utilizando el resultado anterior

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \tag{4.9}$$

Substituyendo dx de la ecuación 4.5 se obtiene

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

que es el Lema de Itô, donde G también sigue un proceso de Itô cuya deriva es de

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

y la tasa de varianza es de

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

Anteriormente vimos que se puede expresar el precio de una acción S como

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

con μ y σ constantes, del Lema de Itô, la función G que sigue un proceso de Itô de S y t es

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \tag{4.10}$$

donde G y S están afectadas por la misma fuente de incertidumbre dz.

En el proceso que se ha asociado al precio de la acción, el parámetro μ es el rendimiento esperado por un inversionista en un período corto de tiempo. Este rendimiento está asociado al riesgo que un inversionista debe asumir para obtener mayores rendimientos, de alguna manera representa el riesgo que el inversionista no puede diversificar. Entonces su valor depende del riesgo, además de las tasas de interés. Cuanto más altas sean las tasas de interés en el mercado, mayor debe ser el rendimiento esperado sobre cualquier acción. El parámetro σ representa la volatilidad del precio de la acción.

A partir del Lema de Itô, también se puede obtener el proceso que sigue el lnS, esto es definimos $G = lnS$, dado que $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$; $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ y $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, de 4.10

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \tag{4.11}$$

La ecuación anterior indica que, dado que μ y σ son constantes, G sigue un proceso de Wiener generalizado con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza con tasa constante σ^2. Esto significa, el cambio en G en el intervalo de longitud $T - t$ se distribuye normalmente con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$, si en T el precio de la acción es S^* entonces,

$$lnS^* - lnS \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right] \tag{4.12}$$

§4.3 La Ecuación Diferencial de Black-Scholes

La ecuación diferencial de Black-Scholes es una ecuación que deben satisfacer los precios p de cualquier derivado que dependa del precio de una acción sin dividendos. Esta ecuación se obtiene considerando un portafolio libre de riesgo al adoptar una posición respecto a la opción y otra respecto a la acción, que puede establecerse pues el precio tanto de la acción como de la opción están expuestos al misma fuente de incertidumbre. Para ello se asume que la negociación de valores es contínua y que la tasa de interés libre de riesgo r es la misma y es constante para cualquier vencimiento. También se supondrá que no hay costos de operaciones ni impuestos y que todos los valores son perfectamente divisibles.

Supongamos que p es el precio de una opción de venta o de cualquier otro valor derivado que depende de S, esto es, es una función de S y t,donde S sigue un proceso de la forma

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

entonces de la ecuación 4.10

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\mu S + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial p}{\partial S}\sigma S dz \tag{4.13}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden discretizar como

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\mu S + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial p}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{4.14}$$

Como se ha visto en la sección anterior el proceso de Wiener que involucra a S y a p es el mismo, esto es, $\Delta z (= \epsilon\sqrt{\Delta t})$ es el mismo en las dos ecuaciones anteriores. Escogiendo un portafolio adecuado, se puede eliminar el proceso de Wiener. Este portafolio consiste en una posición en corto respecto a un derivado y una posición en largo respecto a una cantidad de títulos $\frac{\partial p}{\partial S}$ de la acción. Si se define Π como el valor del portafolio,

$$\Pi = (\frac{\partial p}{\partial S})S - p \tag{4.15}$$

El cambio en el valor del portafolio $\Delta\Pi$ en un intervalo de tiempo Δt se puede escribir como

$$\Delta\Pi = (\frac{\partial p}{\partial S})\Delta S - \Delta p \tag{4.16}$$

En esta última ecuación se pueden substituir la expresion 4.14 y la expresión para el proceso de precio

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= (\frac{\partial p}{\partial S})(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta z) - \left(\left(\frac{\partial p}{\partial S}\mu S + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial p}{\partial S}\sigma S\Delta z\right)\\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \end{aligned} \tag{4.17}$$

Como la ecuación anterior no involucra Δz, Π es un portafolio libre de riesgo durante Δt y debe ganar instantáneamente la misma tasa de rendimiento que cualquier otro valor libre de riesgo de la misma duración, de otra forma el portafolio podría convertirse en un valor dominado o dominante, entonces si r es la tasa de interés libre de riesgo, se tiene que $\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$. Substituyendo las expresiones para Π y $\Delta\Pi$,

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(\frac{\partial p}{\partial S}S - p\right)\Delta t \tag{4.18}$$

de donde

$$rp = \frac{\partial p}{\partial S}S - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \tag{4.19}$$

La expresión 4.19 corresponde a la ecuación diferencial de Black-Scholes. Si bien, la ecuación tiene una infinidad de soluciones, que corresponden a cualquier derivado sobre una acción sin pago de dividendos, la expresión para un derivado en particular se obtiene cuando la solución depende de las condiciones de frontera terminales ($\tau = 0$). Esto significa que es aplicable solamente a opciones de tipo europeo, aunque se ha visto en el Capítulo 2 que la valuación de una opción europea es a menudo igual a la de una opción americana.

La fórmula de precios de Black-Scholes se obtiene calculando el precio en un ambiente libre de riesgo, es decir, donde la tasa de redimiento esperada μ es igual a r. Entonces $lnS^* \sim \phi\left[lnS + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right]$.

Considerando una opción de compra europea,

$$c(S,\tau;E) = e^{-r\tau}\mathbf{E}[max(S^* - E, 0)] \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned}
c(S,\tau;E) &= e^{-r\tau}\int_E^\infty (S^* - E)g(S^*)dS^* \\
&= e^{-r\tau}\int_E^\infty (S^* - E)\frac{1}{S^*\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \\
&* \; exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(lnS^* - [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2\right\} dS^*
\end{aligned}$$

Sea $S^* = e^x$, $dS^* = e^x dx$, entonces

$$\begin{aligned}
c(S,\tau;E) &= e^{-r\tau}\int_{lnE}^\infty (e^x - E)\frac{e^x}{e^x\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(x - [lnS + (r\frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2\right\} dx \\
&= e^{-r\tau}\int_{lnE}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(x - [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2 + x\right\} dx \\
&- Ee^{-r\tau}\int_{lnE}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(x - [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2\right\} dx \\
&= e^{-r\tau}\int_{lnE}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(x - [lnS + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2 + (lnS + r\tau)\right\} dx \\
&- Ee^{-r\tau}\int_{lnE}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(x - [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]\right)^2\right\} dx \\
&= S\mathbf{P}[x_1 > lnE] - Ee^{-r\tau}\mathbf{P}[x_2 > lnE]
\end{aligned}$$

Donde $x_1 \sim N([lnS + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau], \sigma^2\tau)$ y $x_2 \sim N([lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau], \sigma^2\tau)$, entonces estandarizando las normales,

$$\begin{aligned} c(S,\tau;E) &= S\mathrm{P}[z > \frac{lnE - [lnS + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau]}{\sigma^2\tau}] \\ &- Ee^{-r\tau}\mathrm{P}[z > \frac{lnE - [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]}{\sigma^2\tau}] \end{aligned}$$

por simetría de la normal

$$\begin{aligned} c(S,\tau;E) &= S\mathrm{P}[z < \frac{-lnE + [lnS + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau]}{\sigma^2\tau}] \\ &- Ee^{-r\tau}\mathrm{P}[z < \frac{-lnE + [lnS + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]}{\sigma^2\tau}] \end{aligned}$$

La solución para el precio de una opción de compra europea de la ecuación diferencial es

$$c(S,\tau;E) = S\phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\phi(d_2)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln\frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\tau^{\frac{1}{2}}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\tau^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dado que se ha supuesto que la acción no paga dividendos, como se ha visto anteriormente, una opción de compra americana no se ejercerá antes de su vencimiento, por lo que el precio de ésta opción es igual a la de su equivalente europea, $c(S,\tau;E) = C(S,\tau;E)$.

Análogamente, si se considera una opción de venta europea, en un ambiente libre de riesgo, su valor está dado por $g(S,\tau;E) = e^{-r\tau}\mathrm{E}[max(0, E - S^*)]$ que resulta

$$g(S,\tau;E) = Ee^{-r\tau}\phi(-d_2) - S\phi(-d_1)$$

Para el caso de una opción de venta americana, dado que no siempre se ejerce hasta la fecha de vencimiento, no existe una fórmula analítica cerrada.

Las fórmulas que se obtienen a partir del Black-Scholes involucran únicamente variables observables y es importante hacer énfasis en las variables de las que no depende. El precio de una opción no depende del rendimiento esperado sobre la acción, lo cual es importante pues no es una variable directamente observable. No depende de las preferencias de riesgo del inversionista, aunque si depende de la tasa de interés y de la volatilidad del precio de la acción, que por ser a menudo un número estable, puede estimarse con exactitud a partir de datos históricos sobre los precios de la acción o de información sobre sus rendimientos.

§4.3.1 Estimación de la Volatilidad

Los datos históricos que se tienen de los precios de una acción son comúnmente observaciones en intervalos fijos de tiempo (diarios,semanales, mensuales). Si se consideran intervalos de igual longitud τ en el intervalo $[0,T]$, donde T es la fecha de vencimiento del contrato. Se observan $n+1$ precios, S_i, al final del i-ésimo intervalo, $i = 0, 1, ..., n$. Esto es $n\tau = T$

Para una primera estimación rápida, cuando no se dispone de datos históricos inmediatamente accesibles, los rendimientos simples que tienen distribución lognormal, pueden usarse. Estos rendimientos están dados por:

$$R_i(\tau) = (\frac{S_i}{S_{i-1}}) - 1$$

De la distribución lognormal, se tiene que *

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(R_i) &= e^{\mu\tau} - 1 \\ \mathbf{V}(R_i) &= e^{2\mu\tau}[e^{\sigma^2\tau} - 1] \end{aligned}$$

Resolviendo para σ^2 se obtiene

*Apéndice A

$$\sigma^2 = \frac{1}{\tau} ln\left(1 + \frac{\mathrm{V}(R_i)}{(\mathrm{E}(R_i)+1)^2}\right) \tag{4.20}$$

Debido a que los rendimientos de inversiones obtenidos por la venta, a inversionistas, de las acciones publicados se obtienen con base en rendimientos simples 4.20 puede proporcionar una estimación de σ^2. Ahora bien si se tienen disponibles datos históricos, el problema se reduce a encontrar el estimador máximo verosímil de σ^2. Definiendo

$$\begin{aligned} r_i &= ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \\ \Rightarrow S_i &= S_{i-1}e^{r_i} \end{aligned}$$

$i = 1, .., n.$

En la sección anterior hemos visto que $lnS^* - lnS \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right]$ entonces ,

$$\begin{aligned} S^* &= Se^{\eta\tau} \\ \Rightarrow \eta &= \frac{1}{\tau} ln(\frac{S^*}{S}) \end{aligned}$$

Por lo que η, que es la tasa de rendimiento compuesta continuamente, se distribuye normalmente con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$.

Regresando a $S_i = S_{i-1}e^{r_i(\tau)}$, $r_i(\tau)$ es la tasa de rendimiento compuesto continuamente en el i-ésimo intervalo. En donde la verosímilitud de las $r_i(\tau)$'s $i = 1, 2, ..., n$ es

$$lnL((\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \sigma^2) = -\frac{n}{2} ln(2\pi\sigma^2\tau) - \frac{1}{2\sigma^2\tau}\sum_{i=1}^{n}(r_i(\tau) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau)^2$$

tomando la derivada de lnL e igualando a cero obtenemos los estimadores máximo verosímiles para $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$, que denotaremos $\hat{\alpha}$ y para σ^2, $\hat{\sigma^2}$ que están dados por

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n} r_i(\tau) \tag{4.21}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n}(r_i(\tau) - \hat{\alpha}\tau)^2 \tag{4.22}$$

Si los datos históricos se han registrado en tiempos irregulares, observando que el intervalo τ es arbitrario, puede cambiarse a la mitad de las observaciones, sin afectar la función de verosimilitud. Supongamos que las primeras n_1 observaciones se registran anualmente y las siguientes n_2 observaciones se registran mensualmente. Si $\tau = 1$ representa un período de un año, el estimador máximo verosímil de σ^2 para las $n_1 + n_2$ observaciones estaría dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(r_i(1) - \overline{r(1)})^2 + \frac{12}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(r_i(1/12) - \overline{r(1/12)})^2$$

donde

$$\overline{r(1)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} r_i(1)$$

$$\overline{r(1/12)} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} r_i(1/12)$$

La estimación de σ, sin embargo, debe hacerse tomando en cuenta que la volatilidad del precio de una acción cambia en el tiempo. Haciendo uso de la distribución asintótica de las varianzas de los estimadores, tenemos que

$$\mathrm{V}[\hat{\alpha}] \approx \frac{\sigma^2}{T}$$

$$\mathrm{V}[\hat{\sigma}^2] \approx \frac{2\sigma^4}{n}$$

Si bien una mayor cantidad de información lleva a una mayor exactitud, para estimar σ^2, para la estimación de α sería más preciso utilizar intervalos lo más largo posible. Una regla que se sugiere es que se tenga información sobre el precio de una acción en un intervalo de tiempo igual al cual se quiere predecir. Esto es, si se desea estimar la volatilidad del precio de una acción en el próximo año, se requiere información histórica de un año. Aunque no existe una regla general para manejar estas circunstancias, depende de la situación particular y de los datos disponibles.

Lo anterior supone que la acción no paga dividendos, en caso de haberlos pordría modificarse el análisis definiendo el rendimiento u_i en el que se paga el dividendo como

$$r_i = ln\frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

donde D es el monto del dividendo. En ocas iones, estos intervalos de tiempo son eliminados del análisis. Esto se hace debido a que los impuestos influyen sobre los rendimientos en el intervalo en que dichos dividendos son pagados.

§4.3.2 Opciones sobre Acciones con Dividendos

La fórmula para precios de opciones de Black-Scholes, que representa una manera relativamente fácil para calcular los precios de opciones, de ahí su uso frecuente, se contínua modificado para resolver las condiciones de las opciones que se estén negociando.

En lo que se refiere a las opciones sobre acciones que pagan dividendos continuamente con una tasa q, es posible analizar las opciones europeas de manera a través de la ecuación de Black-Scholes.

Nuevamente, definiendo p como el precio de un derivado sobre una acción que paga dividendos continuamente, con una tasa q. Suponemos que el precio de la acción sigue un proceso de Wiener generalizado. Entonces retomando el portafolio de la sección 4.3, tenemos que su valor al tiempo Δt es

$$\Delta\Pi = -\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

Al tiempo Δt el capital del tenedor del portafolio gana un capital $\Delta\Pi$ y dividendos por

$$qS\frac{\partial p}{\partial S}\Delta t$$

Sea ΔD como el incremento en el capital del inversionista al tiempo Δt

$$\Delta D = \left(qS\frac{\partial p}{\partial S} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t \tag{4.23}$$

y dado que ésta expresión no depende del proceso de Wiener, el portafolio es instántaneamente libre de riesgo, entonces,

$$\Delta D = r\Pi\Delta t$$

Substituyendo 4.15 y 4.23,

$$\left(qS\frac{\partial p}{\partial S} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t = r(\frac{\partial p}{\partial S}S - p)\Delta t \tag{4.24}$$

de donde

$$rp = \frac{\partial p}{\partial t} + (r-q)\frac{\partial p}{\partial S}S + \frac{1\partial^2 p}{2\partial S^2}\sigma^2 S^2 \tag{4.25}$$

Esta ecuación la deben satisfacer los precios de cualquier derivado y calculando el precio de una opción en un ambiente libre de riesgo, el rendimiento total de la acción debe ser r y los dividendos deben dar un rendimiento de q, de donde la tasa de crecimiento esperada del precio de la acción debe ser $r-q$. Para valuar un derivado sobre una acción que pague un dividendo continuo con una tasa q, el crecimiento esperado del rendimiento de la acción es $r-q$ y el valor esperado de la opción debe descontarse con una tasa r.

Entonces considerando una opción de compra europea, $c(S,\tau;E)$ y una opción de venta europea $g(S,\tau;E)$, en un ambiente libre de riesgo, se obtienen

$$c(S,\tau;E) = Se^{-q\tau}\phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\phi(d_2) \tag{4.26}$$
$$g(S,\tau;E) = Ee^{-r\tau}\phi(-d_2) - Se^{-q\tau}\phi(-d_1) \tag{4.27}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{E} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\tau^{\frac{1}{2}}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\tau^{\frac{1}{2}}$$

Si el dividendo no se paga de manera contínua durante la vigencia del contrato de opción, las fórmulas anteriores siguen siendo válidas, con q el promedio anualizado de los dividendos durante éste período.

§4.3.3 Un ejemplo con Black-Scholes.

Para mostrar como el precio de derivados obtenidos a partir de la fórmula de Black-Scholes cumple con las propidades discutidas en los capítulos previos, se analizarán una serie de precios de ADR's (American Depositary Reciepts) para acciones de Telmex y Tribasa. Los ADR's son certificados negociables registrados, emitidos en los EEUU y custodiados por una dupla compuesta por un banco estadounidense y una institución financiera extranjera, en este caso mexicana, que hacen constar que un número específico de acciones extranjeras se han depositado en una sucursal extranjera (o en otra institución financiera). Las acciones de Telmex y Tribasa se cotizan en el mercado de Nueva York, NYSE (New York Stock Exchange).

Se considerará a la tasa libre de riesgo como la tasa LIBOR (London Interbank Offered Rate), que sería la tasa preferencial (la tasa que un banco carga a la mayoría de sus clientes más solventes) o la tasa en certificados de depósito.

El período de análisis es de un año, a partir del 24 de agosto de 1997 hasta el 24 de agosto de 1998, observando los datos diarios. Los datos se muestran en la gráfica 4.1

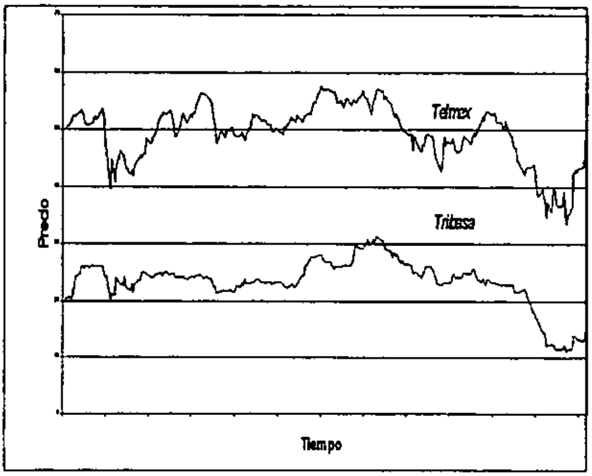
A partir de la estimación considerada en la sección 4.3.1 para la volatilidad con $n = 260$ y $\tau = 1$ y calculando la tasa instantánea libre de riesgo en el período de análisis como

$$\delta = ln\left[\prod_{i=1}^{260}(1 + r_i)\right]$$

donde r_i es la tasa Libor efectiva diaria para el i-ésimo día. Se obtienen los siguientes resultados:

Tasa libre de riesgo	δ	1.84166%
Volatilidad	σ_{Telmex}	3.23049%
	$\sigma_{Tribasa}$	3.45616%

Gráfica 4.1:



Con los resultados anteriores se calcularon los precios para opciones de compra y venta europeas, considerando las acciones sin dividendos, para intervalos de tiempo de 30, 60 y 90 días. Los resultados, en dólares, se muestran en la siguientes tablas:

Telmex ADR. Opciones de Compra

Precio Actual (24/09/98)	Precio de ejercicio	30 días	60 días	90 días
45.125	45.125	0.205	0.313	0.405
	45.50	0.058	0.139	0.216
	46.00	0.005	0.032	0.073

Telmex ADR. Opciones de Venta

Precio Actual (24/09/98)	Precio de ejercicio	30 días	60 días	90 días
45.125	45.125	0.135	0.174	0.198
	45.50	0.363	0.374	0.382
	46.00	0.809	0.766	0.737

Tribasa ADR. Opciones de Compra

Precio Actual (24/09/98)	Precio de ejercicio	30 días	60 días	90 días
14.00	14.00	0.067	0.102	0.132
	14.25	0.003	0.015	0.032
	14.50	0	0.001	0.004

Tribasa ADR. Opciones de Venta

Precio Actual (24/09/98)	Precio de ejercicio	30 días	60 días	90 días
14.00	14.00	0.046	0.059	0.068
	14.25	0.231	0.222	0.216
	14.50	0.478	0.456	0.437

Con los datos anteriores, podemos verificar algunas de las desigualdades planteadas en los anteriormente. Por ejemplo, para las opciones de compra europeas sobre Telmex, con $E_2 < E_1$:

$$c(45.125, 45.125; 30/360) \leq c(45.125, 45.5; 30/360)$$

$$c(45.125, 45.125; 30/360) \leq S$$

$$c(45.125, 45.125; 30/360) \geq max[0, 45.125 - 45.125e^{-(\frac{30}{360}0.01841)}]$$

que se cumplen pues:

$$0.205 \leq 0.058$$
$$0.205 \leq 45.125$$
$$0.205 \geq max[0, 0.0692013]$$

Para el caso de las opciones de venta europeas sobre Tribasa, se puede verificar si:

$$g(14, 14; 90/360) \leq 14e^{-(\frac{90}{360}0.01841)}$$
$$g(14, 14; 90/360) \geq 14e^{-(\frac{90}{360}0.01841)} - S$$
$$g(14, 14; 90/360) = 14e^{-(\frac{90}{360}0.01841)} - S + c(14, 14; 90/360)$$

lo cual se cumple,

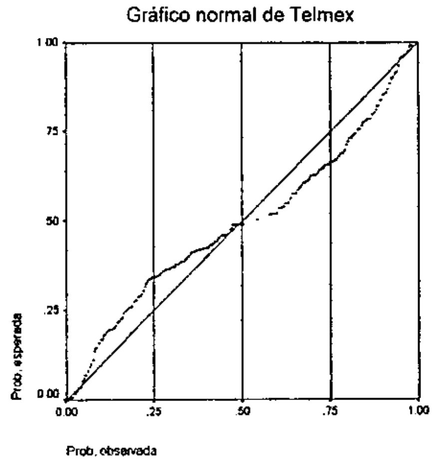
$$0.068 \leq 13.9356898$$
$$0.068 \geq -0.06431024$$
$$0.068 \approx 0.06768976$$

Finalmente, se desea corroborar los supuestos distribucionales que se han hecho sobre el comportamiento de los logrendimientos de las acciones. En primer lugar se verifica la normalidad mediante gráficas normales, es decir, se grafican los cuantiles esperados de una normal estándar contra los cuantiles observados. La independencia de éstos se prueba a través de la función de Autocorrelación, que es una prueba sensitiva. Si esta función no tiene algún patrón o tendencia y no sale de las bandas, entonces no hay correlación y por ser normales, son independientes.

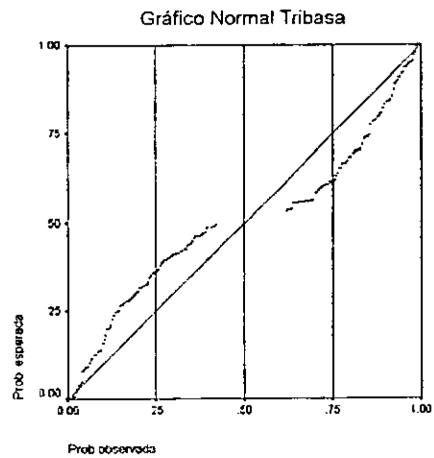
Como se puede observar en las gráficas 4.2a y 4.2b los logrendimientos de las acciones tanto de Telmex como de Tribasa no tienen un comportamiento normal, sin embargo, en la práctica se hace uso del modelo Black-Sholes aún en este caso.

De las funciones de autocorrelación, parece que la independencia, en caso de normalidad, no parece algo que este lejos de sostenerse para los logrendimientos. Sin embargo, no se tiene la normalidad. Aunque en la práctica a menudo no se prueban los supuestos, simplemente se hace uso de los modelos para obtener los precios.

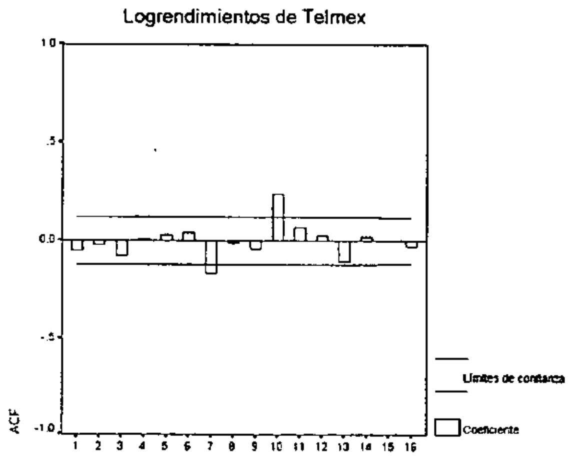
Gráfica 4.2a:



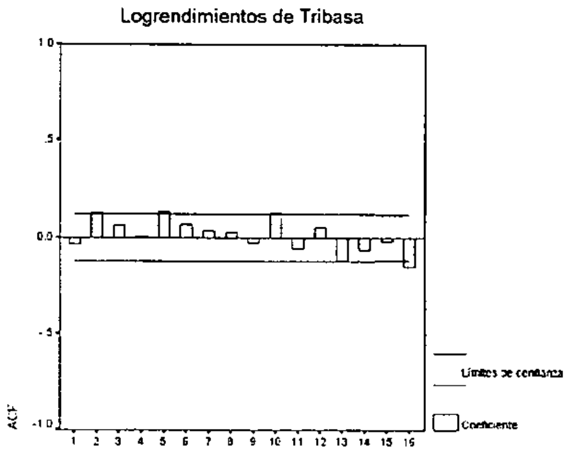
Gráfica 4.2b:



Gráfica 4.3a:



Gráfica 4.3b:



64

Conclusiones

Se ha visto que los precios racionales de opciones tienen cotas y propiedades basadas en supuestos que pueden considerarse generales. La gran variedad de productos derivados que existen o son creados para satisfacer nuevas demàndas tran consigo la necesidad de adaptar los modelos que existen para asignar precios o bien desarrollar otros. Se ha visto en el caso del modelo Black-Sholes que no es posible resolver el problema de asignar precio a todos los tipos de opciones que se han analizado. Por otra parte es también claro que existen factores que no se consideran en dichos modelos como dividendos, riesgos cambiarios, devaluaciones, etcétera.

Por otra parte también se puede estar interesado en probar nuevas formas de describir al precio de una acción mediante algún otro modelo o proceso estocástico diferente, ello podría modificar los modelos para fijar precios de opciones.

Es entonces interesante pensar que se tiene un marco teórico para probar un modelo que pretenda asignar precios a los derivados. Además de propiedades de precios de opciones como funciones del precio de ejercicio, propiedes sobre rendiminentos bajo algunas suposiciones distribucionales, por ejemplo. Todo ello puede ayudar a analizar un nuevo resultado o resolver un problema para un derivado en una circunstancia particular.

Apéndice A

Si X es una variable aleatoria con distribución Normal con media μ y varianza σ^2, sea $Y = e^X$, entonces, $X = lnY$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = e^x = Y$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\mid g'(y) \mid} \\
&= \frac{1}{y} f_X(ln(y); \mu, \sigma^2) \\
&= \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(ln(y) - \mu)^2\}
\end{aligned}
$$

Entonces su esperanza está dada por:

$$
\mathbf{E}(y) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(ln(y) - \mu)^2\} \partial y
$$

Sea $u = ln(y)$, entonces, $\partial y = e^u \partial u$, de donde,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(y) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \mu)^2\} e^u \partial u \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \mu)^2 + u\} \partial u \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[u - (\mu - \sigma^2)]^2 - 2\sigma^2\mu - \sigma^2\} \partial u \\
&= exp\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[u - (\mu - \sigma^2)]^2\} \partial u \\
&= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

De igual forma,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(ln(y)-\mu)^2\}\partial y \\
\mathbf{E}(y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^u}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2\}e^u\partial u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2 + 2u\}\partial u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[u-(\mu+2\sigma^2)]^2 + 2\mu + 2\sigma^2\}\partial u \\
&= exp\{2\mu+2\sigma^2\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[u-(\mu+2\sigma^2)]^2\}\partial u \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

Entonces la varianza de y está dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(y) &= \mathbf{E}(y^2) - [\mathbf{E}(y)]^2 \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\
&= e^{2\mu+\sigma^2}[e^{\sigma^2} - 1]
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] MERTON, R. C. *Theory of Rational Option Pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973).

[2] HULL, JOHN C. *Options, Futures and Other Derivatives.* Prentice Hall, Third Edition, 1997.

[3] CAMPBELL, JHON Y., W LO, ANDREW AND CRAIG MACKUNGLEY, A. *The econometrics of Financial Markets.* Princeton University Press, 1997.

[4] FABOZZI, FRANK J., MODIGLIANI, FRANCO Y FERRI, MICHAEL G. *Mercados e Instituciones Financieras.* Prentice Hall,1996.

[5] O'BRIEN, RICHARD. *Global Financial Integration: The end of Geography.* The Royal Institute of International Affairs, 1992.