

01173 /  
2e

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**TESIS**

**"METODOLOGIA DE UN ANALISIS PREDICTICO  
EN MAQUINARIA ROTATIVA INDUSTRIAL POR  
MEDIO DE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER"**

**PRESENTADA POR:**

**EZEQUIEL ALEJANDRO GUTIERREZ VELAZQUEZ**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERIA**

**( MECÁNICA )**

**DIRIGIDA POR:**

**DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS.**

**Ciudad Universitaria. Septiembre de 1999.**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

274269.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**TESIS**

**“METODOLOGIA DE UN ANALISIS PREDICTIVO EN MAQUINARIA  
ROTATIVA INDUSTRIAL POR MEDIO DE UNA TRANSFORMADA DE  
FOURIER”**

**PRESENTADA POR:**

**ING. EZEQUIEL ALEJANDRO GUTIERREZ VELAZQUEZ**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERIA  
( MECÁNICA )**

**DIRIGIDA POR:**

**DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS.**



**Cd. Universitaria. septiembre de 1999.**

***A ESE SER SUPREMO.***

Señor, gracias por tu magnificencia de estar presente en todo momento de mi vida.

***A MI ESPOSA E HIJOS, IRMA, IRMA ALEJANDRA Y ALEJANDRO.***

Gracias por su confianza, paciencia, cariño y por soportar privaciones y austeridades a la que los he sometido.

A ti esposa, gracias por tu apoyo incondicional en todos los aspectos, por tus palabras de aliento en los momentos cruciales.

Con todo cariño, te dedico esta tesis que es el cúmulo de esfuerzos en mi formación profesional.

***A MI MAMA HERMINIA.***

Aunque no estés presente tu recuerdo vive siempre en mí y estas conmigo, gracias por todo lo que me diste madre.

***A MI TÍA, MARÍA ENCARNACIÓN (CHOLE).***

Gracias por tu apoyo moral y los consejos que me has brindado en forma incondicional.

***AL M. EN. C. SERGIO BERISTAIN.***

El hombre sabio tiene potencia; el hombre de ciencia aumenta su fuerza [Pr.24-5].

Con admiración y respeto por su apoyo, confianza de guiarme a través de estos años en el estudio del campo de las vibraciones.

***AL DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS.***

El corazón inteligente adquiere sabiduría, el oído de los sabios busca la ciencia [Pr.18-15].

El enlace teórico práctico fue gracias a su apoyo en todo momento sin claudicar.

***A MIS MAESTROS.***

**Gracias por compartir sus conocimientos, sus experiencias y sobre todo por brindarme su amistad.**

***A MI AMIGO. LEONARDO ROJAS.***

**Al nacer llegamos a una familia y al crecer tenemos la oportunidad de elegir a nuestros amigos y tu eres para mi un hermano.**

**Gracias por todo.**

## ***A MI ALMA MATER.***

No hay abismos ni fronteras para superarse, solo es necesario perseverar y tener constancia.

Sus aulas y espacios están abiertos sin elitismos ni racismos, las ideologías son diversas.

La libertad prevalece y todo esto te enaltece.

## ***CENTRO DE DISEÑO MECANICO.***

Gracias al CDM el cual esta a cargo del Dr. Marcelo López Parra por el apoyo que me brindó, al permitirme utilizar sus instalaciones y equipo WAVEPAK (analizador de vibraciones).

# METODOLOGIA DE UN ANALISIS PREDICTIVO EN MAQUINARIA ROTATIVA INDUSTRIAL POR MEDIO DE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER.

**CAPITULADO:**

**PROLOGO:**

**INTRODUCCION:**.....7

**I.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE VIBRACION**.....11

1.1.- Cinemática.....11

1.1.1.- Movimiento armónico simple.....11

1.1.2.- Angulo de fase.....15

1.1.3.- Amplitud.....18

1.1.4.- Resonancia.....21

1.1.5.- Frecuencia.....22

1.2- Dinámica.....22

1.2.1.- Vibración libre.....22

1.2.2.- Vibración libre amortiguada.....24

1.2.3.- Vibración forzada amortiguada.....26

1.2.4.- Vibración por fuerzas de inercia.....29

1.2.5.- Vibración torsional.....33

1.2.6.- Vibración no lineal.....34

**II.- VIBRACIONES EN MAQUINAS ROTATIVAS**.....35

2.1.- Introducción.....35

2.2.- Características.....36

2.2.1.- Desplazamiento.....36

2.2.2.- Velocidad.....36

2.2.3.- Aceleración.....36

2.2.4.- Fuerza.....36

2.2.5.- Frecuencia fundamental.....40

2.2.6.- Fuerza dinámica.....40

2.3.- Fallas típicas en máquinas rotativas.....41



2.3.1.- Rodamientos.....	41
2.3.2.- Engranajes.....	43
2.3.3.- Ejes.....	43
2.3.4.-Métodos para detectar fallas.....	43
2.4.- Desalineamiento.....	47
2.4.1.- Causas.....	49
2.4.2.- Efectos.....	49
2.4.3.- Identificación.....	49
<b>III.- DESBALANCEO EN MAQUINAS ROTATIVAS.....</b>	<b>51</b>
3.1.- Descripción, causas, efectos e identificación.....	51
3.2.- Velocidad crítica.....	55
3.2.1.- Velocidades secundarias.....	60
3.2.2.- Velocidad crítica en Ejes Rotativos.....	60
3.2.3.- Elementos influenciados por trabajar por Velocidad Crítica.....	61
3.2.3.1.- Cojinetes.....	61
3.2.3.2.- Elasticidad.....	62
3.2.3.3.- Efecto Giroscópico de los discos.....	63
3.3.- Calidad Requerida en Rotores Rígidos.....	64
3.4.- Determinación del desbalanceo Permisible en Rotores Rígidos.....	64
<b>IV.- MODELO MATEMATICO PARA DIAGNOSTICAR FALLAS EN MAQUINARIA ROTATI- VA INDUSTRIAL.....</b>	<b>67</b>
4.1.- Introducción.....	67
4.2.- Marco teórico.....	68
4.2.1. Definición de la serie de Fourier.....	68
4.2.2. Función periódica unidimensional.....	69
4.2.3. Transformada de Fourier.....	69
4.2.3.1. Interpretación de la transformada de Fourier.....	70
4.2.3.2. La integral de Fourier.....	72
4.2.3.3. Transformada inversa de Fourier.....	73
4.2.4. Propiedades de la transformada de Fourier.....	74
4.2.4.1. Linealidad.....	74
4.2.4.2. Simetría.....	74
4.2.4.3. Escalamiento de tiempo y frecuencia.....	75
4.2.4.4. Tiempo y frecuencia cambiante.....	76
4.2.4.5. Funciones pares e impares.....	77
4.2.4.6. Descomposición de forma de onda.....	78
4.2.4.7. Funciones de tiempo complejas.....	78
4.2.5. Convolución.....	81
4.2.5.1. Integral de convolución.....	81

4.2.5.2. Forma alternativa de la integral de convolución.....81

4.2.5.3. Convolución implicando funciones de impulso.....83

4.2.5.4. Teorema de convolución de tiempo.....85

4.2.5.5. Teorema de convolución de frecuencia.....86

4.2.6. Series de Fourier y forma de ondas muestreadas.....87

4.2.6.1. Series de Fourier como un caso especial de la integral de Fourier.....87

4.2.6.2. Muestreo de forma de onda.....89

4.2.6.3. Teoremas de muestreo.....91

4.2.7. La transformada de Fourier discreta.....95

4.2.8. La transformada de Fourier rápida.....97

4.2.9. Método de superposición.....96

4.3. Desarrollo del modelo matemático.....101

4.4. Interpretación de resultados.....113

**V. CONCLUSIONES.....114**

**BIBLIOGRAFIA.....117**

**APÉNDICES:.....135**

Apéndice A. Movimiento Giroscópico en el impulsor de un turbosoplador.....135

En esta tesis, se presentan los resultados de una serie de investigaciones y experiencias obtenidas en la última década de mi vida. El objetivo principal es el de establecer un marco metodológico que pueda determinar el estado actual de la maquinaria rotativa industrial, y que se logre aprovechar al máximo la materia prima, mano de obra, el tiempo de producción y el de asegurar la viabilidad de una industria, sin olvidar el factor de seguridad tanto de la maquinaria como del personal.

Es importante para el ingeniero pronosticar con certeza, cuando se aproxima una avería de algún componente ó componentes de las máquinas (como por ejemplo: **baleros, engranes, flechas, cojinetes, bandas, chumaceras, entre otros.**). Si dicha avería es causada por una vibración, también es de vital importancia conocer el diagnóstico actual y en general de las máquinas. Así como sus niveles aceptables de vibración, de alarma, frecuencias de chequeo, establecimiento de un sistema continuo de protección contra alta vibración y otros parámetros, con lo cual se podrá lograr la reducción mínima de paros inesperados en las **Unidades Rotativas de sus líneas de producción**, el mejoramiento en la **Calidad del Producto** y el aumento considerable de la **Productividad**.

Para obtener este alcance de **análisis predictivo**, se ha procurado utilizar en esta investigación cuestiones matemáticas en la extensión necesaria, para facilitar a los lectores la comprensión total del fenómeno por medio de un **modelo matemático**.

Esta tesis esta conformada por cuatro capítulos, en el capítulo I, se inicia con conceptos básicos sobre el tema, así como la explicación de conceptos sobre casos de vibraciones.

En el capítulo II, se analiza el fenómeno de vibración que se presenta en una máquina rotativa, provocada por diversos tipos de fallas. Se hace mención del significado de las características de la vibración en el hecho de que sirven para detectar y describir el movimiento indeseable de una máquina.

Cada una de las características nos revela algo significativo sobre la vibración. Las características de **desplazamiento, velocidad y aceleración** de la vibración, al medirse determinan cuanta y cuán severa se manifiesta. Los valores de **desplazamiento, velocidad ó aceleración** de la vibración se denominan como **amplitud de la vibración**.

En lo que se refiere al funcionamiento de la máquina, la **amplitud de la vibración** es la indicación que sirve para determinar los niveles aceptables de vibración en la máquina y su estado actual.

En el capítulo III, se hace un análisis sobre el desbalanceo debido a su importancia (ya que en la mayoría de los casos, se presenta como falla en un 70% en cualquier máquina rotativa). Este fenómeno es una fuente potencial de vibración por lo que se ha tenido gran cuidado en su descripción y la forma de cómo identificarlo, así como las causas que lo originan y los efectos que causa. Se hace una descripción sobre la importancia de eliminar la fuerza centrífuga en rotores rígidos y del cómo ésta influye para originar el efecto giroscópico. Este efecto dió la pauta para estudiar dicho fenómeno y obtener el modelo matemático correspondiente (capítulo IV); además se especifica el grado permisible de desbalanceo en rotores rígidos en forma teórica.

El capítulo IV, se presentan los modelos matemáticos del turbosoplador. Se fundamenta el marco teórico, que servirá como herramienta para obtener una interpretación física de los modelos matemáticos obtenidos, basándose en la teoría de **transformada de Fourier discreta y rápida**, la cual se aplicó a las funciones obtenidas (solución de los modelos matemáticos), resultando un espectro lineal, en donde se analizaron los puntos más importantes para diagnosticar en forma precisa, el estado actual de la maquinaria (turbosoplador). El espectro lineal, se puede obtener por medio de un algoritmo matemático de la transformada de Fourier rápida, la cual no se desarrolló por encontrarse integrada en los equipos de análisis de vibraciones (Como el equipo WAVEPAK propiedad de la UNAM).

Esta metodología se encuentra en el capítulo IV, la cual servirá para futuras investigaciones donde el investigador interesado en el tema tome en cuenta

diferentes variables descritas en ella, y diseñe los componentes de la máquina considerando el **fenómeno de vibración**, finalmente se presentan la conclusiones de este trabajo y un apéndice que describe el fenómeno giroscópico del turbosoplador.

## **INTRODUCCION:**

En la operación de los equipos mecánicos es importante conocer el comportamiento de todas sus piezas y procesos, para maximizar la disponibilidad y el rendimiento de los equipos mediante un buen mantenimiento y operación.

Es bien sabido por cualquier ingeniero o técnico que tenga a su cargo equipos mecánicos, en especial rotatorios, que la mayoría de estos vibran constantemente, lo que puede representar en sí un problema (roturas, desgaste, molestias, paros inesperados). Sin embargo esta característica puede aprovecharse si se utilizan las vibraciones del equipo como medio de comunicación entre el hombre y la máquina. Cada pieza y cada proceso dentro de un equipo mecánico tiene características conocidas por el diseñador.

Las vibraciones de esas piezas, causadas por esos procesos deberán entonces reflejar las características mencionadas; así un rotor pesado vibrará a bajas frecuencias, ó el flujo rápido de vapor creará vibraciones de alta frecuencia en tuberías y ductos.

El análisis de vibraciones en maquinaria es por lo tanto una herramienta que permite:

a) Mejorar diagnósticos de fallas.

b) Realizar diagnósticos mientras las máquinas operan sin necesidad de detenerlas.

c) El efectuar con mayor precisión operaciones tales como el balanceo de rotores, entre otras.

Al realizar la medición a una máquina en el tiempo estimado previene daños catastróficos mediante alarmas o paros automáticos basados en niveles preestablecidos de vibración máxima tolerable.

Este tipo de análisis involucra las siguientes actividades:

- Detección.
- Acondicionamiento.
- Almacenamiento.
- Proceso.
- Presentación.
- Análisis.

La detección de señales de vibración se refiere a la captura del movimiento vibratorio por medio de instrumentos transductores, que lo convierten en señales manejadas o adecuadas para su registro, lectura, medición o análisis.

Almacenamiento se refiere a las actividades de grabación y reproducción, formación de memorias, archivos o historiales.

Dentro de las actividades de proceso, se pueden identificar las siguientes:

--Descomposición espectral, filtrado, digitalización y tratamiento numérico por computadora.

La presentación de señales se refiere a: monitores, carátulas, pantallas, impresoras e indicadores de pluma (registros).

Finalmente el análisis incluye:

--Análisis espectral, análisis de órbitas, análisis de forma de onda, análisis de fase, análisis de vibraciones síncronas, análisis de armónicas y transitorias, análisis modal, entre otros.

El análisis de vibraciones es una herramienta muy útil en las siguientes actividades:

- 1.- Inspecciones rutinarias para mantenimiento.
- 2.- Balanceo dinámico-estático.
- 3.- Vigilancia de equipos (monitoreo).
- 4.- Diagnóstico de fallas de campos.

- 5.- Diagnósticos más complejos, incluyendo actividades en el laboratorio.
- 6.- Vigilancia y diagnóstico automático.
- 7.- Diseño y modificación a equipos.
- 8.- Pruebas de aceptación.

Estas actividades pueden corresponder a equipos como:

- Turbogeneradores.
- Bombas centrífugas.
- Tuberías.
- Ventiladores.
- Motores eléctricos.
- Válvulas.
- Soportería.
- Intercambiadores de calor.
- Calderas.
- Estructuras.
- Cimentaciones.
- etc.

El análisis de vibraciones en todas sus aplicaciones, están relacionadas con la identificación o diagnóstico de fallas en las máquinas rotativas, entre las más comunes se encuentran:

- *Desbalanceo (el 70% de las causas de vibración es ocasionada por el desbalanceo).*
- *Désalineación.*
- *Flexiones permanentes.*
- *Fisuras.*
- *Rozamientos y piezas sueltas en rotores.*



- *Inestabilidad fluidodinámica en chumaceras y sellos.*
- *Resonancias y vibraciones transmitidas entre partes o equipos.*
- *Defectos en baleros, sellos y engranes.*
- *Vibraciones inducidas por flujos.*
- *Vibraciones de cimentación y estructuras y soportes.*
- *Bandas con tensión indebida, etc.*

*Para el control de vibraciones existen diversas técnicas que tienen el objetivo de reducir los niveles de vibración.*

- *Un primer método para control de vibraciones es aislar la fuente que lo produce para que la vibración disminuya. Esto no es siempre posible por diversos factores como son:*
- *Turbulencias, caminos rugosos, inestabilidad de máquinas de combustión, [ 39,43,57] etc.*
- *El otro método es la técnica de balanceo en rotores la cual reducirá al mínimo la vibración dando niveles aceptables, para las condiciones normales de operación.*

*Por lo que a través del presente trabajo se pretende satisfacer los objetivos propuestos.*

# I.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE VIBRACIÓN:

## 1.1. –CINEMATICA.

### 1.1.1.MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

*La vibración constituye el movimiento de un sistema elástico respecto a una posición de equilibrio estático o dinámico que se repite durante un intervalo de tiempo denominado período[ 8 ].*

Estrictamente hablando una vibración se puede definir como una variación temporal del valor de la magnitud característica del movimiento o de la posición de un sistema mecánico, cuando la magnitud es alternadamente mayor o menor que cierto valor promedio ó de referencia.

Si el movimiento se repite exactamente después de transcurrido un cierto tiempo, se trata de una vibración periódica, donde el lapso transcurrido entre repeticiones se conoce como período (T, medido en segundos) y a la secuencia ocurrida durante el período se le denomina ciclo.

El inverso del período es la frecuencia de la vibración (f, medida en 1/s o ciclos por segundo), la que indica que tantas veces se repite el ciclo en la unidad de tiempo.

*Movimiento Armónico Simple. Se refiere a una vibración tal que el desplazamiento, x, del objeto pueda representarse por la función[ 6,3 y 57].*

$$x = x_0 \text{ sen } (2\pi ft)$$

(1.1.1.1)

donde:

$x_0$  = Representa el desplazamiento máximo o amplitud del desplazamiento de la vibración.

$x$  = Desplazamiento.

$f$  = Frecuencia de la vibración.

$t$  = Tiempo transcurrido.

*Lo anterior se ilustra en la Fig. 1.1, donde se aprecia que este tipo de movimiento puede representarse por una senoide, por lo que se conoce también como **movimiento senoidal** [ 57, 5, 6 y 8].*

Como se aprecia en la Fig. 1.1, el movimiento se repite cuando transcurre un periodo  $T$ , es decir, partiendo de  $t=0$ , hasta  $t= T$ :

$$x = x_0 \text{ sen } (2\pi ft)$$

pero;

$$f = 1/T$$

por definición, entonces;

$$x = x_0 \text{ sen } (2\pi ft) = x_0 \text{ sen } (0)$$

Es decir, un ciclo completo.

Como la función senoidal requiere de un argumento expresado en radianes, es convencional definir a la frecuencia circular; de la manera siguiente:

$$\omega = 2\pi f \text{ (rad /s)}$$

donde  $f$  se expresa en 1/s. La ecuación (1.1.1.1), queda entonces:

$$x = x_0 \text{ sen } (\omega t)$$

(1.1.1.1.a)

La Fig. 1.1, representa el movimiento vertical de un punto. La senoide se genera porque se desplaza a la derecha en forma proporcional al tiempo transcurrido,  $t$ ; de no ser así, el punto generaría una línea vertical, repasada tantas veces como se repitiera el ciclo. Vemos entonces que si analizamos dos señales de diferente frecuencia, Fig. 1.2, observaremos que sus ciclos se repiten un mayor o menor número de veces por unidad de longitud horizontal de papel (tiempo transcurrido), dependiendo de su mayor o menor frecuencia (respectivamente)[ 6, 57].

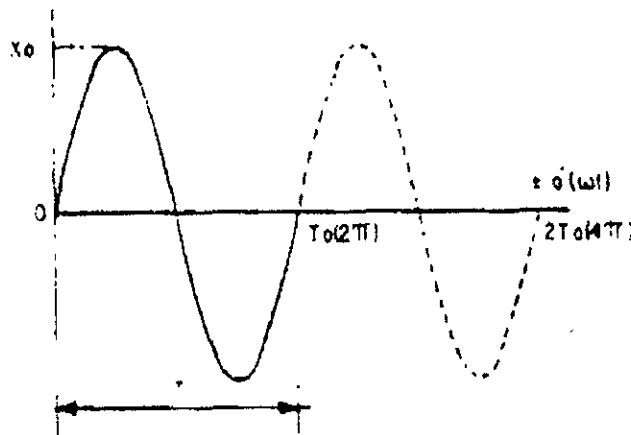


Fig. 1.1. Senoide que representa el movimiento oscilatorio de un punto.

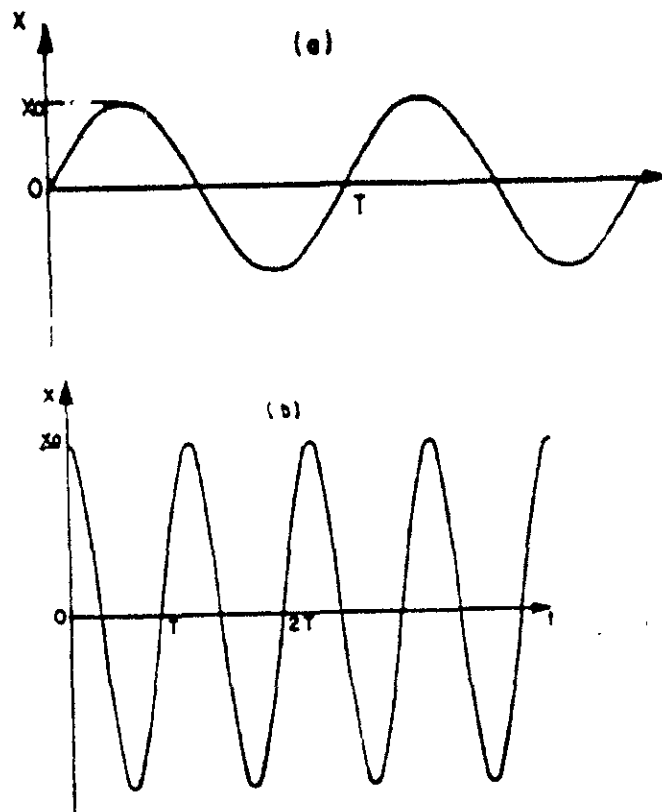


Fig. 1.2. Representación de dos senoides como se verían en la pantalla de un osciloscopio.

- a) Baja frecuencia y menor amplitud,
- b) Alta frecuencia y mayor amplitud.

Este tipo de esquemas pueden observarse en un osciloscopio, el que permite controlar tanto el eje vertical (**amplitud**) como en el eje horizontal (**tiempo transcurrido o periodos**).

La Fig. 1.2., tomada de la pantalla de un osciloscopio, muestra una señal de baja frecuencia y menor amplitud comparada con una de alta frecuencia y mayor amplitud.

La senoide de la Fig. 1.1., también puede obtenerse de la proyección de un vector que gira alrededor de su origen, como se muestra en el diagrama polar de la Fig. 1.3 [3 y 57].

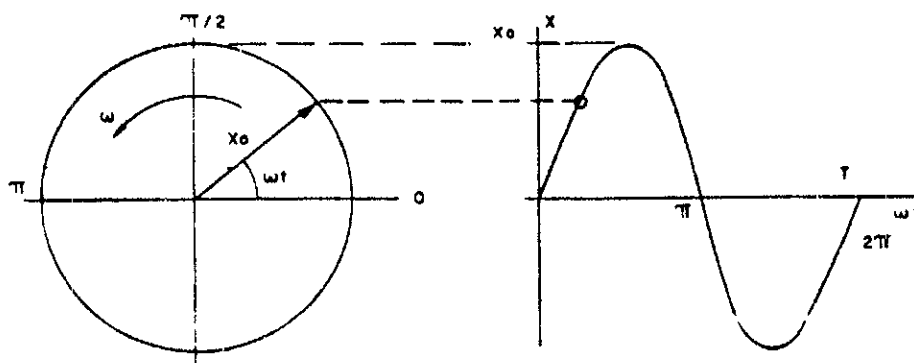


Fig. 1.3. Representación vectorial o polar de una vibración senoidal.

### 1.1.2. ANGULO DE FASE.

Dos vibraciones con la misma frecuencia,  $f$  (ó  $w$ ), pueden no ser simultáneas; es decir, mientras que la vibración  $x_1$ , empieza en  $t_1$ , la vibración  $x_2$ , empezara en  $t_2$ , Fig. 1.4, se dice entonces que las vibraciones estarán fuera de fase o desfasadas un lapso  $(t_1-t_2)$ , [3, 57 y 6]

En el osciloscopio puede ser difícil traslapar exactamente los ejes horizontales de cero amplitud correspondiente a dos señales, para menor el lapso de desfasamiento; ó puede dificultarse esta medición por la presencia del ruido en la señal ó si no se trata de una senoide pura.

Cuando se cuenta con equipos como filtros de los vectores o las lámparas estroboscópicas, pueden ser más fácil medir el desfasamiento mediante un

**ángulo de fase ( $\phi$ )**, que forman los dos vectores de un diagrama polar como es ,mostrado en la Fig. 1.4, [57, 37, 27, 28,17,16 y 1].

Se toma a la vibración  $x_1$ , como referencia:

$$x_1 = x_{1,0} \text{ sen } (w t)$$

la vibración  $x_2$  se expresará:

$$x_2 = x_{2,0} \text{ sen } (w t - \phi)$$

donde:

$$\phi = w (t_2 - t_1) \text{ (rad)}$$

Se dice entonces que la vibración  $x_1$ , esta **adelantada**  $\phi$  ( rad ) con respecto a  $x_2$ , ó que  $x_2$  está **retrasada**  $\phi$  ( rad ) con respecto a  $x_1$ .

El ángulo de fase también puede expresarse en grados multiplicando su valor en radianes por  $( 360/2\pi )$ .

*Una función que por definición está adelantada  $90^\circ$  con respecto a una senoide es cosenoide Fig. 1.5, debe notarse además que un adelanto o retraso de  $180^\circ$  equivale a invertir el signo de una función senoidal o cosenoidal Fig. 1.6,[ 3, 8 y 57].*

Lo anterior resulta muy útil si se considera que la derivada del seno es el coseno y que la derivada del coseno es el valor negativo del seno y que además:

$$\frac{dx}{dt} = x' = v \text{ (velocidad de vibración)}$$

$$\frac{dv}{dt} = x'' = a \text{ (aceleración de vibración)}$$

y de la ecuación (1.1.1.1.a):

$$x = x_0 \text{ sen}(w t) \text{ (desplazamiento)}$$

$$x' = x_0 w \text{ cos}(w t) \text{ (velocidad)}$$

(1.1.2.2)

$$x'' = -x_0 w^2 \text{ sen}(wt) \text{ (aceleración)}$$

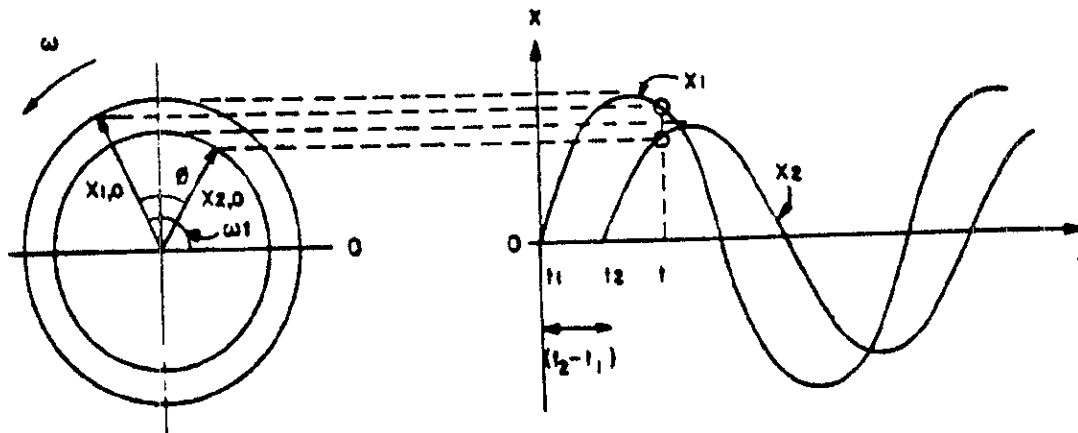


Fig. 1.4. Desfasamiento entre dos vibraciones



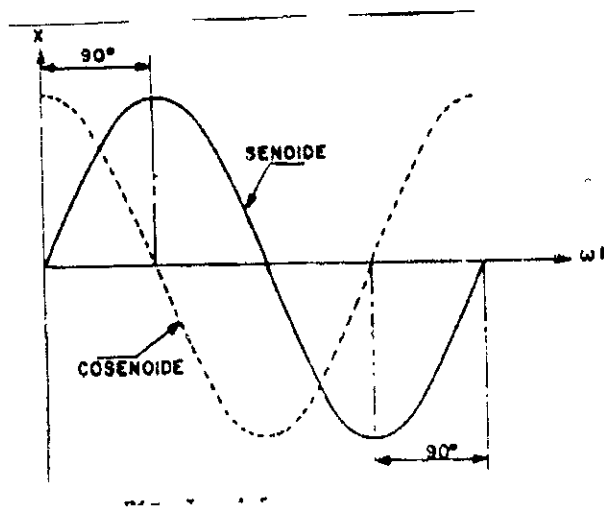


Fig. 1.5. Desfasamiento entre senoide y cosenoide

Estas funciones se muestran en la Fig. 1.6, donde se observa que la aceleración de una vibración está adelantada  $180^\circ$  con respecto a su desplazamiento y  $90^\circ$  con respecto a su velocidad.

*Dos vibraciones con diferente frecuencia tienen un desfase relativo que varía constantemente, por lo que en general se habla de fase únicamente cuando dos vibraciones ó señales tienen la misma frecuencia [ 3, 57].*

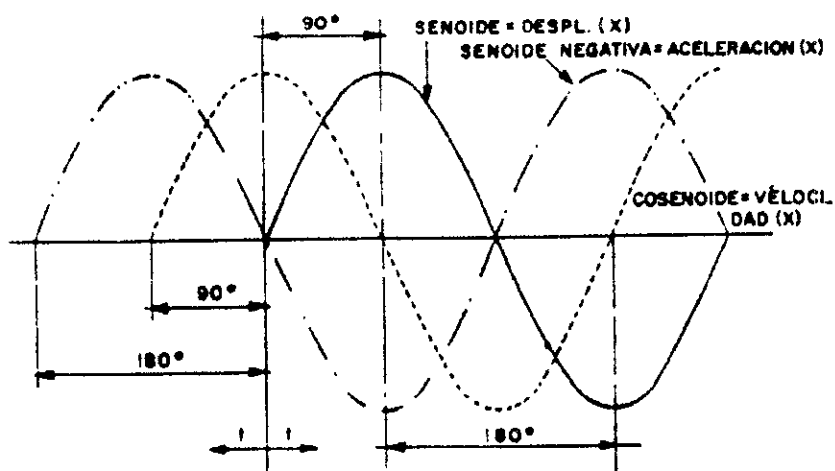


Fig. 1.6. Relaciones de fase entre desplazamiento, velocidad y aceleración de una vibración.

### 1.1.3. AMPLITUD.

La amplitud (vibración) puede referirse a alguno de los siguientes parámetros:

Desplazamiento	$x_0 = X_0$	m
Velocidad	$v_0 = X_0 2\pi f$	m/s
Aceleración	$a_0 = X_0 2\pi f^2$	$m^2/s^2$

donde  $f$  es la frecuencia en Hz ó cps. La relación entre estos tres parámetros se puede obtener del monograma mostrado en la Fig. 1.7.

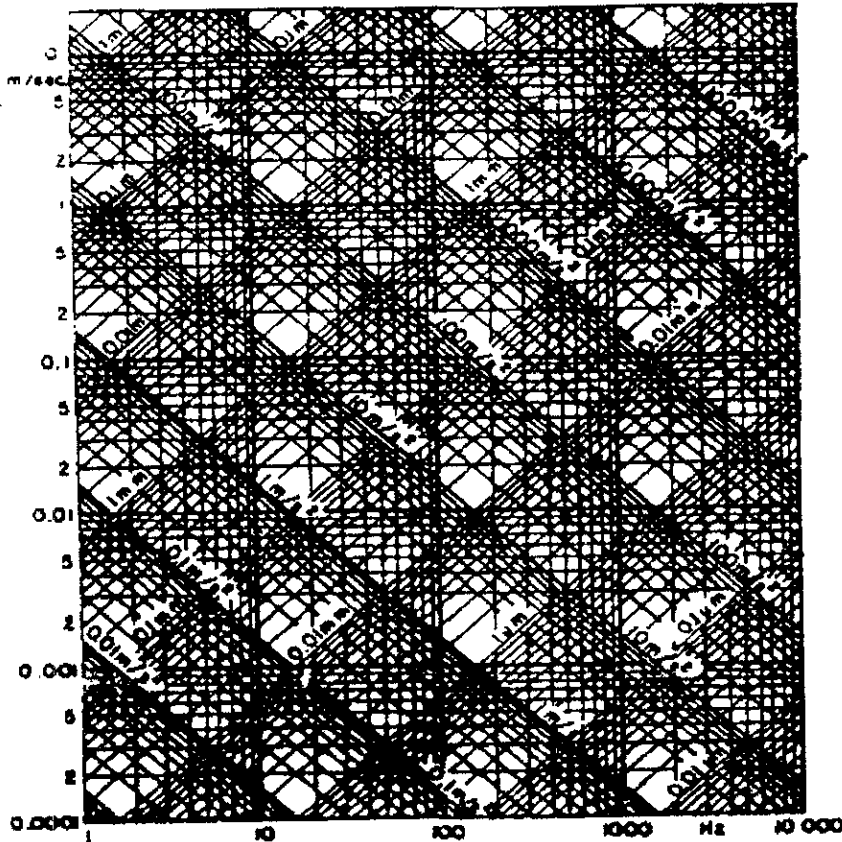


Fig. 1.7. Nomograma que permite determinar cualquier parámetro de la amplitud de una vibración a partir de uno de ellos y de la frecuencia [6].

La amplitud de una vibración se puede medir de varias maneras, como se muestra en la Fig. 1.8, estas son:

- Amplitud, amplitud sencilla o amplitud cero a pico ( $x_0$ ), ( $x_{op}$ ) ó ( $x$ , m o-p).
- Amplitud pico a pico o doble amplitud ( $2x_0$ ) ó ( $x_{pp}$ ) ó ( $x$ , m p-p)
- Amplitud promedio  $|\bar{x}|$ .
- Amplitud media cuadrática o RMS ó valor RMS de amplitud ( $X_{RMS}$ ).

Cuando se trata de señales limpias o filtradas, donde solo existe una frecuencia y la vibración es senoidal, existe una equivalente entre los diferentes valores de amplitud de esa vibración:

Amplitud (o-p)	$=x_0$
Doble amplitud (p-p)	$=2x_0$
Amplitud promedio $ \bar{x} $	$= 0.637 x_0$
Amplitud RMS ( $X_{rms}$ )	$= 0.707 x_0$

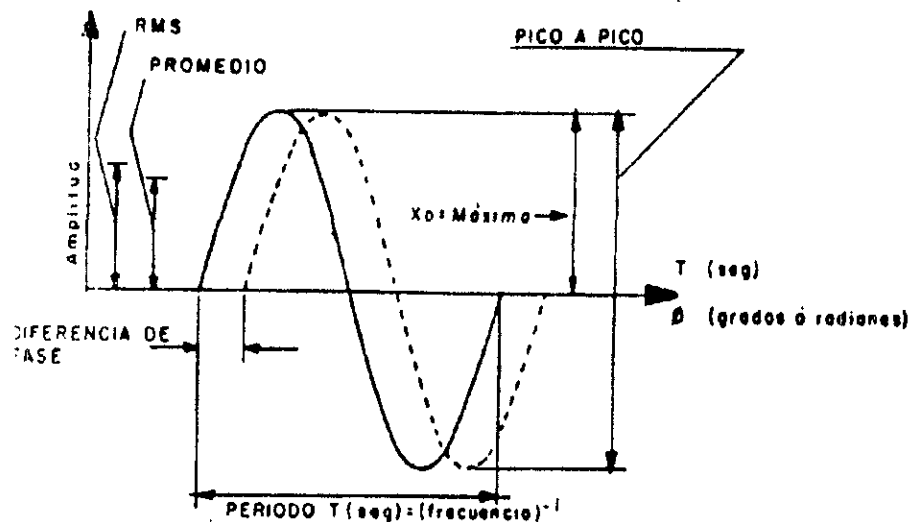


Fig. 1.8. Definición de amplitud de vibración.

AMPLITUD	FORMULA
Máxima	$x_0$
Pico a pico	$2x_0$
Promedio	$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t)] dt$
RMS	$\sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [X(t)]^2 dt}$

#### 1.1.4. RESONANCIA.

*Los efectos vibratorios son muy perjudiciales en los estados denominados de RESONANCIA o en sus proximidades, ya que producen esfuerzos alternativos, que pueden ocasionar el fracaso del material, por lo que el especialista tendrá mucho cuidado en diseñar recurriendo a conocimientos profundos de resistencia de materiales, dinámica de fluidos, etc [ 49].*

La resonancia es [ 1 ] la vibración que tiene lugar bajo la excitación de fuerzas externas es una vibración forzada.

Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si ésta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de Resonancia y ocurren oscilatorias peligrosamente grandes ( $w = w_n = 1$ ) [6].

La falla de estructuras mayores como puentes, edificios ó alas de aviones es una terrible posibilidad, bajo resonancia. Así, el cálculo de las frecuencias naturales es de importancia capital en el estudio de las vibraciones.

### 1.1.5.- FRECUENCIA:

La frecuencia es el número de ciclos completos de movimiento, que se efectúan en un segundo[6].

Existen cinco tipos de frecuencias [ 1 ]; y estas son:

- a) Frecuencia natural ( $f_n$ ), es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre sin fricción (cpm).
- b) Frecuencia natural angular ( $\omega_n$ ) es igual  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  (rad/s).
- c) Frecuencia natural amortiguada ( $\omega_d$ ) es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre sin fricción ( cpm, rad/s, Hz ).
- d) La frecuencia de excitación ( $\omega$ ) es la frecuencia a la que se somete el sistema cuando se saca de su posición de equilibrio.
- e) Frecuencia de velocidad crítica, es la primera frecuencia a que se somete un rotor o eje rotativo y que coincide con su primera frecuencia de resonancia [3,6 y 49].

## 1.2. DINAMICA.

### 1.2.1 VIBRACION LIBRE.

La representación más simple de un sistema vibratorio se le conoce como sistema masa-resorte (Ver Fig.1.9.). Este consiste en una masa,  $m$ , suspendida de un punto fijo por medio de un resorte de rigidez,  $k$ , (la fuerza necesaria para extenderlo una longitud unitaria) [ 5, 6 y 57].

La frecuencia de la vibración libre resultante se encuentra mediante un balance de las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ , y con la segunda ley de Newton, es decir: ( Fig.1.9).

$$-k x = m x'' \quad (1.2.1.1)$$

considerando las expresiones:  $x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ , y sustituyendo en (12.1.1) obtenemos el siguiente resultado:

$$-k x_0 \text{ sen } (w t) = -m x_0 w^2 \text{ sen}(w t)$$

por tanto:

$$w = w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_n \quad (1.2.1.2)$$

donde  $f_n$  ( y  $w_n$ ) es la frecuencia natural (ó la frecuencia circular natural) del sistema y es el único valor que se puede adoptar  $f$ , en ausencia de otras fuerzas externas.

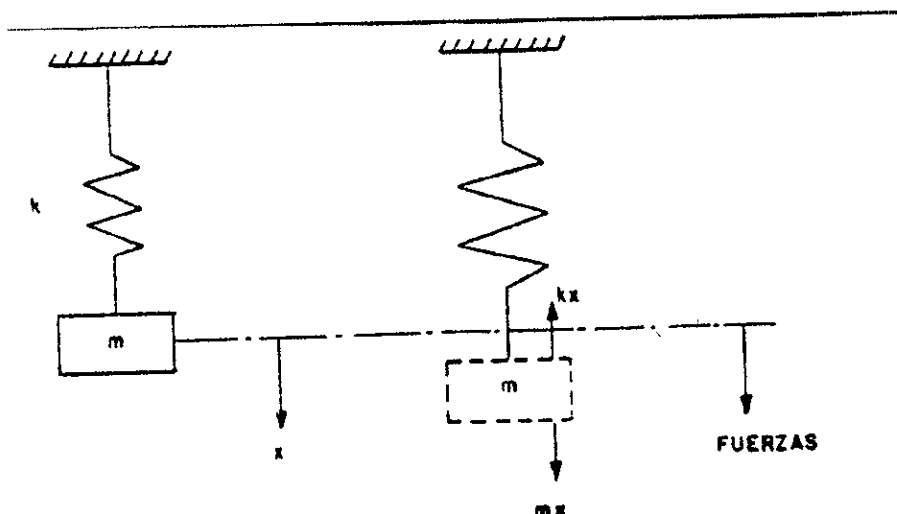


Fig.1.9. Sistema masa-resorte

### 1.2.2.. VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA.

Si al sistema masa resorte le agregamos un amortiguador constante,  $C$  (la fuerza amortiguante generada por una velocidad unitaria), la ecuación (1.2.1.1), se transforma en:

$$mx'' + Cx' + kx = 0 \quad (1.2.2.1)$$

El movimiento armónico simple adquiere mayor importancia cuando se considera que cualquier vibración periódica sin importar su complejidad se puede representar por una suma de senoides de diferentes frecuencias según las series de Fourier ( $X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ ). y la ecuación (1.2.2.1.), resulta [9,10,57,55,56].

$$-m x_0 w^2 \text{sen}(w t) + C x_0 w \text{cos}(w t) + k x_0 \text{sen}(w t) = 0 \quad (1.2.2.2)$$

La fuerza  $C x'$  es una función cosenoidal es decir, fuera de fase  $\pm 90$  grados con respecto a las otras dos. Aunque en el caso anterior las dos fuerzas al oponerse directamente mantenían el equilibrio dinámico, en este caso la fuerza  $C x'$  tiene su máximo relativo valor cuando la suma de  $m x''$  y  $k x$  vale cero. Este desequilibrio dinámico se debe a una extracción de energía por el amortiguador, en cada ciclo de la vibración, si desplazamos a la masa  $m$  una cantidad  $x_i$  y la soltamos, la amplitud de la vibración resultante irá decreciendo en cada ciclo desde  $x_i$ , hasta cero (fig.1.10)[57].

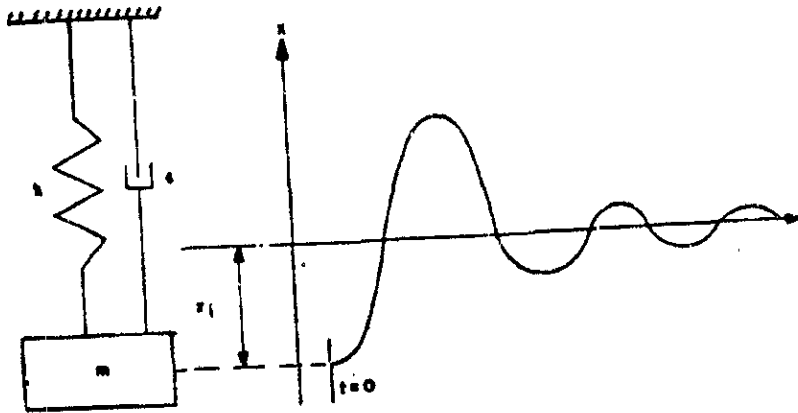


Fig.1.10. Sistema masa-resorte con amortiguador y vibración libre amortiguada correspondiente.

Existe un término conocido como *amortiguamiento crítico*,  $C_c$ , que representa la cantidad de amortiguamiento necesario para impedir más de un ciclo de la vibración, y se expresa [6 y 57] de la manera siguiente:

$$C_c = 2 \sqrt{km} = 2 m \omega_n$$

La frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  de la vibración libre del sistema descrito, es dada por [6, 53 y 57]:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} \left[ 1 - \left( \frac{C}{C_c} \right)^2 \right]} \quad (\text{rad / s})$$

y la amplitud será:

$$x_{n+1} = x_n e^{-\pi C / m \omega_d}$$

donde  $x_{n+1}$  y  $x_n$  son las amplitudes de dos ciclos consecutivos de la vibración.



### 1.2.3. VIBRACION FORZADA AMORTIGUADA.

Si el sistema descrito anteriormente se somete a una fuerza de excitación, también senoidal que actúe sobre la masa, el resultado será una vibración forzada con la frecuencia de la fuerza.

La ecuación de movimiento resulta:

$$Mx'' + cx' + kx = F \quad (1.2.3.1.)$$

considerando el párrafo segundo del punto (1.2.2) para  $x$ , y para  $F$ , resulta:

$$-m x_0 \omega^2 \sin(\omega t) + C x_0 \omega \cos(\omega t) + k x_0 \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (1.2.3.2.)$$

donde  $F_0$  es la amplitud de la fuerza  $F$  y  $\phi$  el ángulo de fase (adelantado) de  $F_0$  con respecto a  $x_0$ . Las fuerzas involucradas en este caso pueden apreciarse en el diagrama polar de la Fig.1.11, debe notarse que todo el diagrama gira a velocidad circular  $\omega$ .

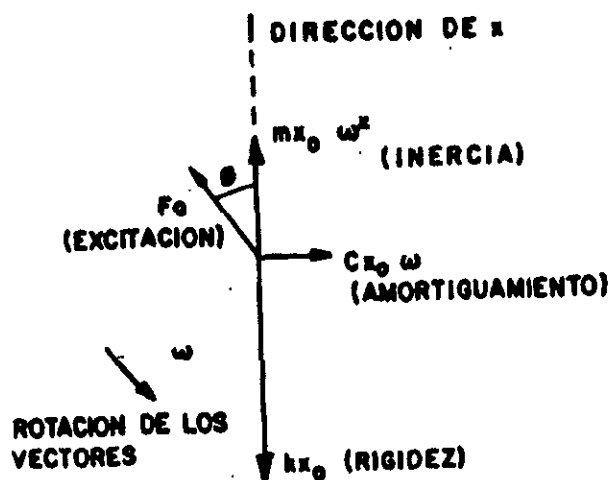


Fig. 1.11. Equilibrio dinámico de fuerzas en una vibración forzada.

de la ecuación (1.2.3.2) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{x_0}{x_E} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \frac{C}{C_c} \frac{w}{w_n}\right)^2}} \quad (1.2.3.4.)$$

$$\text{tang} \phi = \frac{2 \frac{C}{C_c} \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \quad (1.2.3.5)$$

donde:

$$x_E = \frac{F_0}{k}$$

es el desplazamiento estático que se obtendría con la sola aplicación estática de la fuerza  $F_0$ .

Las ecuaciones (1.2.3.3) y (1.2.3.4), se representan en forma gráfica en la Fig. 1.11 para varios valores de la relación de amortiguamiento,  $(C / C_c)$ , a dicha gráfica se le conoce como diagramas de Bode [ 5, 6 y 57].

Nótese que la amplitud del desplazamiento de la vibración (con respecto a la amplitud estática) es mayor para los casos con mayor frecuencia,  $w$ , desde  $w=0$ , hasta  $w=w_n$ . En el punto donde  $(w=w_n)$  conocido como la **resonancia** del sistema, la amplitud puede alcanzar valores muy altos y el ángulo de fase,  $\phi$ , es siempre de 90 grados ver Fig. 1.12, para frecuencias mayores que  $w_n$ , la amplitud decrece tendiendo a cero para vibraciones de muy alta relación de frecuencias. El ángulo de fase oscila entre 0 y 90 grados cuando  $w$  es menor que

$w_n$  y entre 90 y 180 grados cuando  $w$  es mayor que  $w_n$ . El efecto de amortiguamiento ( $C/C_c$ ) es de reducir las amplitudes y provocar cambios menos súbitos en el ángulo de fase con respecto a cambios de frecuencia alrededor de  $w_n$  [6 y 57].

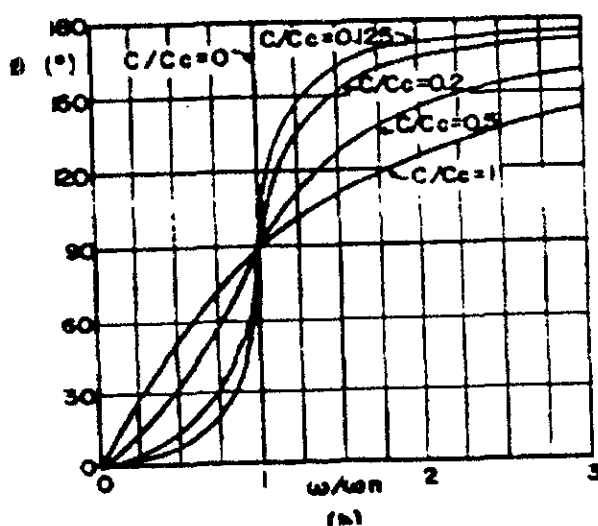
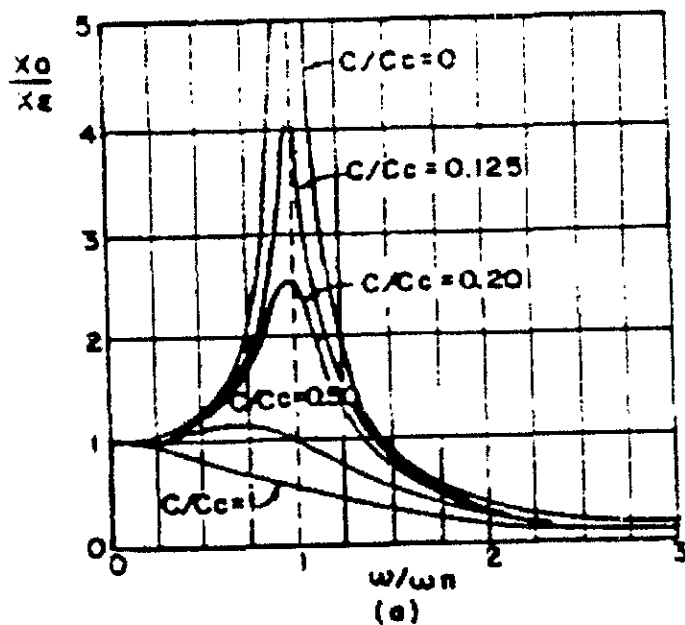


Fig.1.12. Diagramas de Bode mostrando las características generales de Vibración forzada (respuesta

dinámica) de un sistema masa-resorte

### 1.2.4 VIBRACION POR FUERZAS DE INERCIA.

Una variante muy importante de los casos anteriores ocurre cuando la fuerza de excitación depende de la frecuencia, como ocurre en el desbalanceo de rotores [3, 4, 5, 6, 8, 20 y 57].

$$F_0 = e m \omega^2 = e k \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (1.2.4.1)$$

donde:  $e$  es la excentricidad del centro de masas del rotor, la ecuación (2.2.3.3) se transforma en:

$$\frac{x_0}{e} = \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{C}{C_c} \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (1.2.4.2)$$

La ecuación(1.2.4.2) está graficada en la Fig. 1.13, puede notarse que en este caso la amplitud de la vibración es nula cuando  $\omega=0$ , y aumenta conforme  $\omega$  se aproxima a  $\omega_n$ , después de alcanzar un máximo cerca de la resonancia, la amplitud disminuye, tendiendo al valor de la excentricidad,  $e$ , para valores muy altos de la frecuencia  $\omega$ . El ángulo de fase se calcula según la ecuación (1.2.3.4), debe notarse que en este caso la frecuencia  $\omega$  corresponde a la velocidad de giro, y la frecuencia natural,  $\omega_n$  corresponde aproximadamente a la velocidad crítica del rotor.

Las ecuaciones (1.2.2.4), (1.2.4.1) y (1.2.4.2), también pueden representar al movimiento de algunos sensores sísmicos de vibración (Fig.1.14), donde el soporte o armazón del sensor, este rígidamente conectado a la pieza en movimiento cuya vibración se desea medir. Aparentemente en este caso se puede tratar como una vibración libre en la que el soporte (antes fijo), se mueve senoidalmente con amplitud  $x_{1,0}$ . En estas circunstancias  $x$  representa el movimiento relativo de la masa con respecto al soporte móvil, ó sea [3, 6 y 57]:

$$x = x_2 - x_1$$

donde  $x_2$  representa al movimiento absoluto de la masa  $m$ , la ecuación (1.2.2.1) se puede escribir entonces:

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

pero;

$$x_2 = x + x_1$$

de donde;

$$mx'' + cx' + kx = -mx_1''$$

Comparando la última expresión con la ecuación (1.2.3.1), se reconoce la existencia de una fuerza; esto es:

$$F = -m x_1'' = F_0 \text{ sen}(wt + \phi)$$

donde;

$$F_0 = x_{1,0} \omega^2 m$$

y  $\phi$ , es el ángulo de fase entre  $F_0$  ó  $(x_{1,0})$  y  $x_0$ . Esta fuerza corresponde al movimiento del soporte transmitido por el resorte a la masa  $m$ .

*Cualquier masa que se mueva en el espacio con respecto a un punto de referencia fijo o absoluto, experimenta fuerzas inerciales proporcionales a la aceleración de ese movimiento. En nuestro caso el marco de referencia se mueve según la ecuación siguiente [6 y 57]:*

$$x_1 = x_{1,0} \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

por lo que la masa,  $m$ , experimentara fuerzas inerciales:

$$F_0 = x_{1,0} \omega^2 m \text{ sen}(\omega t + \phi)$$

opuestas a la aceleración:

$$x_{1,0} = -x_{1,0} \omega^2 \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

Puede considerarse que la fuerza inercial  $F$  representa el precio que se debe pagar para representar al sistema como si estuviera fijo en el espacio, para así poder utilizar una sola coordenada  $x$  (en vez de dos) para definir el movimiento del sistema.

Para emplear en este caso las ecuaciones (1.2.4.1) y (1.2.4.2), la variable  $x_E$ , deberá ser reemplazada por  $x_{1,0}$ .

La Fig. 1.13, muestra en este caso que la amplitud de la vibración relativa  $x_0$  tiende al valor  $x_{1,0}$  de la vibración del soporte (o de la pieza cuya vibración se desea medir); esto significa que a muy altas frecuencias la masa prácticamente permanece fija en el espacio sin responder a la vibración del soporte.

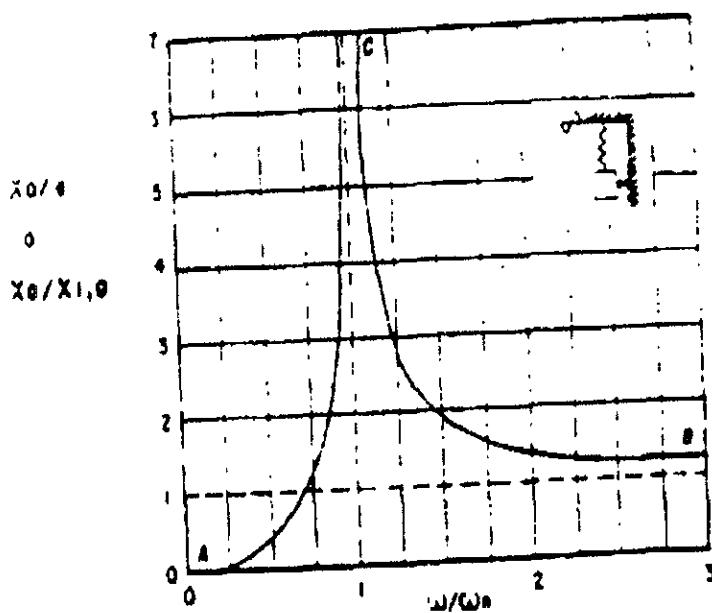


Fig.1.13. Respuesta dinámica de un sistema masa-resorte, en que la fuerza se aplica a través del movimiento del resorte, aplicable también a la respuesta de rotores al desbalanceo.

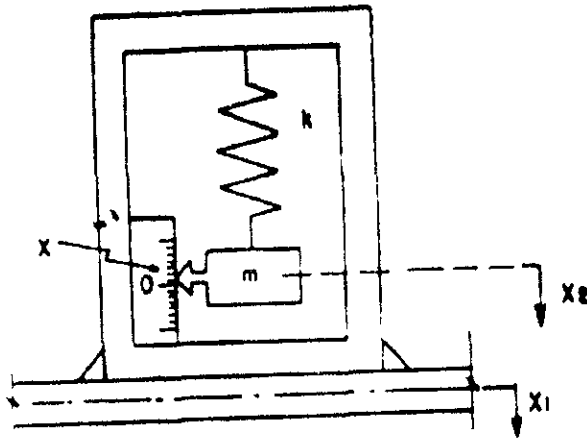


Fig.1.14. Diagrama esquemático de un tipo de sensor sísmico.

### 1.2.5. VIBRACION TORSIONAL.

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de vibraciones son las vibraciones de torsión, ya que ellas aparecen en un sin número de aplicaciones prácticas relacionadas con la transmisión de potencias. Desde la aplicación de máquinas alternativas, pasando por la de los motores de combustión interna, son incalculables los fracasos que se han producido en instalaciones en las que dichos elementos han intervenido [6].

En la técnica naval, al aparecer las turbinas de vapor, con un par constante se eliminaban las vibraciones torsionales. Más tarde, con los grandes motores de combustión de los submarinos, así como los motores rápidos de los dirigibles se volvió nuevamente a prestar atención a este problema, que se puede decir que esta solucionado, en lo que se refiere a las velocidades críticas (**velocidades de resonancia**) [6].



Además, conviene señalar que así como las vibraciones laterales de ejes son denotadas fácilmente, ya que producen ruido y fuerte vibración en los cojinetes, no ocurre lo mismo con las torsionales, que superpuestas al movimiento de rotación del eje, sin excitar generalmente estructuras adyacentes, no son notadas hasta producirse la ruptura del material.

En general, los problemas más complicados corresponden a transmisiones con motores de combustión, por la complejidad de su estructura, cigüeñales, ente otros, movimientos alternativos y rotativos de sus partes, émbolos, bielas, cigüeñales, etc.,.

### **1.2.6.VIBRACION NO LINEAL.**

*El análisis de sistemas lineales sirve para explicar mucho del conducto de sistemas oscilatorios. Sin embargo, ciertos fenómenos oscilatorios que no pueden predecirse ni explicarse por medio de la teoría lineal.*

*En los sistemas lineales estudiados, causa y efecto están relacionados linealmente, es decir, si doblamos la carga, la respuesta se duplica. En un sistema no lineal esta relación causa-efecto ya no es proporcional. Por ejemplo, el centro de una lata de aceite puede moverse proporcionalmente a la fuerza, para cargas pequeñas pero, a cierta carga crítica se disparará en un gran desplazamiento. El mismo fenómeno no se encuentra en pandeo de columnas, oscilaciones eléctricas de circuitos inductivos con un núcleo de hierro, y vibración de sistemas mecánicos con fuerzas restauradoras no lineales.*

*Mucho puede aprenderse acerca de un sistema no lineal, utilizando el método del espacio de estado, y estudiando el movimiento que se presenta en el plano fase[6].*

## CAPITULO II. VIBRACIONES EN MAQUINAS ROTATIVAS.

### 2.1.INTRODUCCION.

*Una máquina ideal no produciría vibraciones, ya que toda la energía se emplearía en el trabajo a realizar. En la práctica, las vibraciones aparecen como consecuencia de la transmisión normal de fuerzas cíclicas por los mecanismos. Los elementos de la máquina reaccionan entre sí y por toda la estructura se disipa energía en forma de vibraciones [1, 16, 17].*

Un buen diseño producirá bajos niveles de vibración. Pero a medida que la máquina se vaya desgastando, se asienten sus cimentaciones y se deformen sus componentes, aparecerán sutiles cambios en las propiedades dinámicas de la máquina. Los ejes se desalínean, los componentes se desgastan, los rotores se desequilibran y los juegos aumentan entre otros cambios. Todo esto se convierte en un aumento de la energía de vibración que, al repartirse por la máquina, excita las resonancias y produce cargas dinámicas adicionales sobre los cojinetes. El círculo causa-efecto se cierra y la máquina avanza hacia su ruptura final.

En el pasado, los ingenieros de planta experimentados podían reconocer por simple palpación y escucha si una máquina marchaba con suavidad o si se avecindaba alguna avería. Hoy por dos razones al menos, no se puede seguir confiando en esa habilidad:

- *En una empresa donde existen varias máquinas trabajando en forma simultánea; es imposible al oído humano detectar por simple escucha la vibración que denote la avería.*
- *En segundo lugar, la mayoría de la maquinaria moderna gira a tal velocidad que la frecuencia de las vibraciones significativas es casi siempre muy alta, siendo necesario el uso de instrumentación para detectarlas y medirlas [ 16 y 17].*

## **2.2.CARACTERISTICAS DE MEDICIÓN DE MAQUINAS ROTATIVAS.**

*Cuando se analizan las máquinas rotativas en la industria se consideran ciertas características (**desplazamiento, velocidad y aceleración**) para su medición ó toma de lectura; es importante saber con que tipo de parámetro se tomarán las primeras lecturas en compresores centrífugos, turbinas de gas y vapor, compresores reciprocantes, compresores de flujo axial, bombas, ventiladores, sopladores, máquinas diesel, turbocargadores y unidades similares [ 16, 17, 19, 21, 27 y 28].*

### **2.2.1.DESPLAZAMIENTO.**

*La distancia total que atraviesa la parte que vibra, desde un extremo a otro se le denomina "desplazamiento de pico a pico". El parámetro de desplazamiento se usa en turbinas hidráulicas [19, 28 y 31].*

### **2.2.2. VELOCIDAD.**

*Una cantidad vectorial que representa el cambio de tiempo de posición para una partícula o cuerpo se denomina velocidad[ 49].*

*EL parámetro de velocidad se usa en chumaceras, motor eléctrico, compresor, turbina de gas, caja de cambios y turbinas hidráulicas.[19, 28 y 31]*

### **2.2.3. ACELERACION.**

*El parámetro aceleración se usa en máquinas reciprocantes, elementos de rodamiento en chumaceras, cojinetes, entre otras [ 19, 28 y 31].*

### **2.2.4. FUERZA:**

*Las fuerzas generadas por máquinas y motores son a menudo inevitables; en la práctica, las vibraciones aparecen como consecuencia de la transmisión normal de fuerzas cíclicas por los mecanismos, sin embargo esto puede reducirse sustancialmente mediante resortes diseñados apropiadamente, llamados aisladores.*

Un sistema elástico sometido a fuerzas externamente aplicadas, se denomina forzado, y el movimiento de oscilación que resulta en el mismo debido a las fuerzas externamente aplicadas, se llama vibración forzada, y se divide en cinco partes, estas son:

- a) *Vibración armónica forzada no amortiguada*  $F(t)=F_1 \text{ sen } (\omega t)$  cuya ecuación diferencial ordinaria en [ 3, 4, 5, 6 y 8].

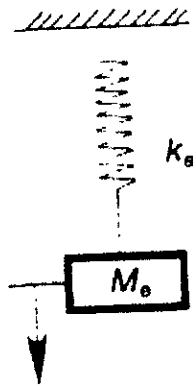


Fig.2.1. Vibración libre con excitación armónica.

$$M_e x'' + k_e x = F_1 \text{ sen } (\omega t)$$

- b) *Vibración forzada causada por fuerzas en rotación no equilibradas*,  $F(t) = F m_0 \omega^2 e \text{ sen } (\omega t)$ . Una fuente obvia de vibración forzada, la constituye el desequilibrio de partes de rotación, cuya ecuación diferencial ordinaria es [3, 4, 5, 6, 7 y 8].

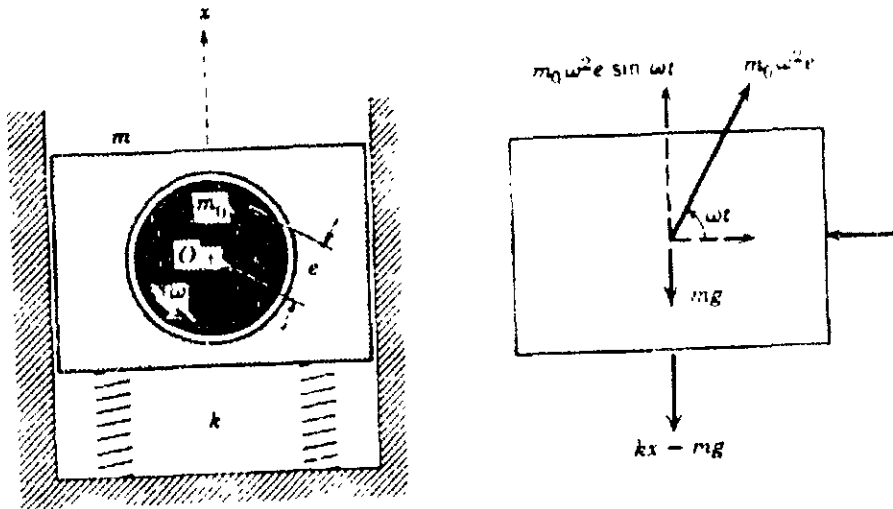


Fig.2.2.Vibración forzada causada por fuerzas en rotación no equilibradas.

$$m\ddot{x} + kx = m_0 \omega^2 e \sin(\omega t)$$

c) Vibración armónica forzada amortiguada  $F(t) = F_1 \sin(\omega t)$ , cuya ecuación diferencial ordinaria es: [3, 4, 5, 6, 7 y 8]

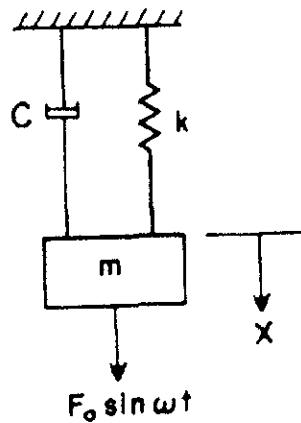


Fig. 2.3. Vibración armónica forzada amortiguada.

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

d) *Vibración forzada amortiguada causada por fuerzas rotatorias no equilibradas*  
 $F(t) = m_0 \omega^2 e \sin(\omega t)$ , cuya ecuación diferencial ordinaria es: [3, 4, 5, 6, 7 y 8]

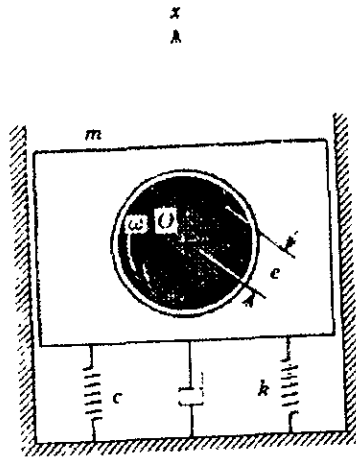


Fig.2.4. Vibración forzada amortiguada causada por fuerzas rotatorias no equilibradas.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 \omega^2 e \sin(\omega t)$$

e) *Fuerzas transmitidas y aislamiento de vibración:*

Consideremos otra vez las fuerzas transmitidas a la base o cimentación de un sistema elástico e incluyamos el efecto de la amortiguación.

Haciendo referencia a la Fig.2.5, la masa se encuentra sometida a la fuerza armónica  $F_1 \sin(\omega t)$ . El movimiento resultante en la dirección  $x$ , será también armónico simple. La fuerza del resorte y la fuerza del amortiguamiento, son respectivamente [3, 4, 5, 6, 7 y 8]:

$$Kx = kX \sin(\omega t - \phi)$$

$$Cx' = cX\omega \cos(\omega t - \phi)$$

Su suma representa la magnitud de la fuerza transmitida total.

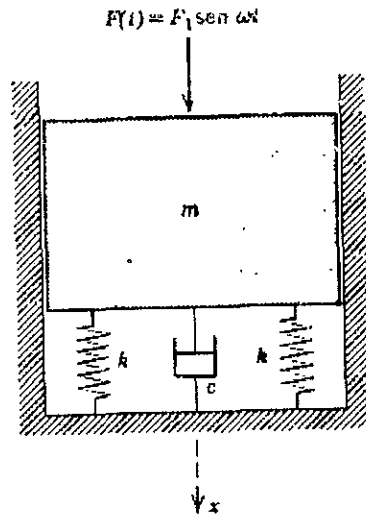


Fig.2.5. Fuerzas transmitidas y aislamiento de vibración.

$$|F_{TR}| = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}$$

## 2.2.5 FRECUENCIA FUNDAMENTAL.

*Es el valor más bajo de toda la frecuencia natural de un sistema oscilante.*

*Ejemplo. Es la frecuencia asociada con el primer modo d vibración*

*Es la frecuencia que sobresale en el espectro de línea (la del giro del motor)[49].*

## 2.2.6 FUERZA DINAMICA.

*Una fuerza cuya duración y amplitud es una función de tiempo.*

*La fuerza dinámica es una fuerza centrífuga generada por desbalanceo rotativo por una masa es especificado por  $F(t) = m_0 \omega^2 e \sin(\omega t)$  [49]*

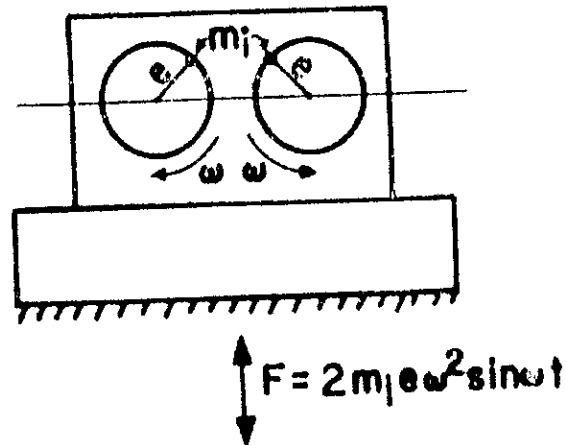


Fig.2.6. Fuerza dinámica

## 2.3. FALLAS TÍPICAS EN MAQUINAS ROTATIVAS.

### 2.3.1.- RODAMIENTOS.

El balero o rodamiento sostiene la flecha en su lugar en las máquinas y permite a la flecha girar con un mínimo de fricción; consiste de dos anillos concéntricos entre los cuales giran libremente bolas o rodillos (aguja, rodillos cilíndricos o esféricos). El balero se lubrica con aceite o grasa.

**a) Las fallas en un balero pueden ser causadas por:**

- a) Defectos de fabricación.
- b) Daño causado durante el montaje del balero en la flecha.
- c) Montaje erróneo.
- d) Carga excesiva.
- e) Velocidad excesiva.
- f) Lubricación incorrecta.
- g) Contaminación del lubricante.
- h) Calor elevado en el lugar.



- i) *Vibraciones producidas en otro lugar (p.e. desalineación), las cuales llegan al balero e impiden su buen funcionamiento [31, 60, 61, 62 y 63].*

El balero que no se daña por ninguna de las causas señaladas tiene una vida útil larga, pero finalmente sufre desgaste y fatiga del material.

**b) Un balero falla por:**

La gran mayoría de las fallas **INTERNAS** en los baleros empiezan como una irregularidad muy pequeña en una de las superficies originalmente perfectamente lisas de una de las pistas o de una de las bolas. Gradualmente esta irregularidad crece y se puede producir una huella larga en la pista; en algunos casos llega a destrozarse el balero, típicamente cuando la carga es grande [31 y 105].

La falla **EXTERNA** empieza típicamente con un aflojamiento del balero en su montaje, ya sea en la flecha o en la carcaza. El balero empieza a patinar y la fricción produce calor y desgaste en la flecha o la carcaza. En poco tiempo el desgaste hace necesario el cambio de la pieza desgastada [31 y 105].

**c) Las consecuencias de falla de un balero son:**

Las consecuencias de la falla de un balero pueden ser varias:

- Daño a otros elementos de una máquina
- Calidad deficiente del producto que pasa por la máquina (muy común en la industria metal-mecánica).
- Tiempo perdido de producción
- costo directo al cambiar el balero defectuoso [31, 105].

La suma de los costos puede a sí llegar a ser considerable y explica el interés por desarrollar métodos para detectar fallas en baleros en su inicio y para evaluar su

desarrollo; cuando esto se logra, se puede programar el cambio del balero antes de llegar a daños mayores y en un momento en la pérdida de producción es mínima o nula.

### **2.3.2. ENGRANAJES.**

*Ruido, calentamiento, partículas en el aceite, e incremento de la vibración son síntomas de un cambio del estado de una caja de engranes. Para detectar qué está pasando en ella se debe observar a todos los síntomas, pero la vibración puede dar mucho más información que los otros [31].*

Es típico que el engranaje sea reductor o incrementador de velocidad, es un equipo cuya reposición o reparación es muy costosa, y crítico porque su descompostura puede parar una línea completa o una planta completa.

### **2.3.3. EJES.**

*Es bien conocido que con la aparición de las máquinas de gran potencia y velocidad se presentó un fenómeno nuevo en los ejes de transmisión de dicha potencia, caracterizado por el hecho de que al ir aumentando su velocidad de rotación adquirirá, para una determinada velocidad, enormes amplitudes de oscilación, de tal modo que si se continuaba con aquella velocidad se producía la fractura del eje, siendo, por otra parte, la curva de deformación semejante a un arco [3, 5 y 8].*

Si se continúa aumentando la velocidad, nuevamente se presenta el mismo fenómeno para otra velocidad, pero con la diferencia que la curva de deformación toma la forma de dos arcos.

### **2.3.4. METODOS PARA DETECTAR FALLAS.**

*El balero dañado produce diferentes síntomas (**calor, ruido, pérdida de metal del balero, y vibraciones, entre otros**), y cada método se basa en uno de los síntomas para informar sobre el estado del mismo. Como el balero dañado produce varios síntomas a la vez puede ser útil usar varios métodos para reconfirmar que el balero está dañado antes de parar y reparar la máquina. A continuación se describen los síntomas y los métodos con sus ventajas y limitaciones [28 y 31].*

#### **a) CALOR.**

Muchos operadores y mecánicos conocen cual es la temperatura normal de los baleros a simple tacto ó midiéndole los grados de temperatura que presentan. Y saben que un incremento de la temperatura puede ser una advertencia de un problema. La temperatura del balero puede incrementarse por daños internos o aflojamiento pero también por causas ajenas al balero como lo siguiente:

***Calor transmitido por la flecha al balero y vibración producida fuera del balero.** En baleros lubricados con grasa es sabido que un exceso de ésta produce calentamiento del balero. Es recomendable vigilar la temperatura de los baleros porque un incremento de ésta debe conocerse así como la causa que lo origina, ya que un balero dañado se reconoce en la práctica produciendo calor; pero esto también no es determinante para decir que un balero esta dañado. Una limitante de este método es que únicamente se puede usar en baleros accesibles o equipados con sensores permanentes de temperatura [31 y 63].*

#### **b) RUIDO.**

Generalmente el ruido producido en una industria se presenta en lugares donde se encuentran varias máquinas, esto impide escuchar con precisión el ruido que produce un balero específicamente. La herramienta más sencilla que se usa para detectarlo es a

través de un desarmador, con el cual se puede escuchar un ruido diferente cuando el balero ya está muy averiado.

*Cuando se usa un estetoscopio, ya sea mecánico o electrónico, el ruido se manifiesta con mayor claridad. El estetoscopio mecánico tiene una barra metálica conectada a una membrana, y la barra se pone en contacto con la superficie de la carcasa de un balero; algunos estetoscopios electrónicos toman la vibración en la superficie con una barra, otros con un sensor equipado con un imán y la señal se escucha en audífonos [28 y 31].*

Tanto el estetoscopio mecánico como el estetoscopio electrónico la calidad de la señal captada depende de la posición del sensor. El sensor equipado con imán produce generalmente señales más claras y confiables.

En algunos casos se escucharán bien los baleros, pero generalmente se requiere de bastante experiencia para interpretar el ruido porque depende tanto del tipo y tamaño del balero como la velocidad de giro. Además la evaluación es totalmente subjetiva y es difícil recordar el ruido escuchado en cierta ocasión y compararlo con el de una valoración subsecuente.

### **c) PERDIDA DE METAL DEL BALERO.**

*El desgaste y los daños de los baleros pueden producir tanto partículas microscópicas como astillas de varios milímetros de largo que se arrastran con el aceite de lubricación y existen varios métodos para detectarlas. Se usan no solamente para baleros sino también para detectar desgaste de piezas metálicas en general; para vigilar el estado de baleros y chumaceras de fricción en lugares inaccesibles (por ejemplo, plantas nucleares, motores de avión y turbinas de gas).*

*Con lubricación forzada, el aceite se analiza a la salida de cada balero o chumacera. Lo más sencillo es el tapón magnético ubicado en el sistema de lubricación que retienen partículas ferrosas relativamente grandes [31].*

Algunos avances tecnológicos en esta materia son el análisis espectrométrico, la ferrografía y el análisis de concentración ferro-magnética, típicamente basados en muestreo del aceite y análisis en el laboratorio.

#### **d) VIBRACIONES INTERNAS PRODUCIDAS EN UN BALERO.**

*Las vibraciones producidas en un balero nuevo son de bajo nivel y parecen de carácter aleatorio. Cuando falla la lubricación el nivel de vibración se incrementa y si una irregularidad empieza a desarrollarse en una pista, se producen dos impactos por cada vuelta de la bola, uno en cada pista [27, 28 y 31].*

Los componentes del balero y la carcaza así como de la estructura donde está montado, tienen sus frecuencias de resonancia. Los impactos producidos en el balero activan las frecuencias de resonancia de los componentes del balero y de su montaje. La medición de la vibración producida en el balero se dificulta por la presencia de varias otras fuentes de vibración. Mientras el defecto del balero todavía es incipiente (que empieza), la vibración causada por desbalanceo, desalineación y engranes puede ocultar la vibración originada en el balero.

#### **e) VIBRACIONES PRODUCIDAS POR FALLA EXTERNA.**

*El balero se puede aflojar en su montaje en la flecha o en su carcaza y empieza a patinar, la fricción producida genera calor y vibración en frecuencia subarmónica (0.5 veces la frecuencia de giro). El desgaste causado por la fricción produce que el balero se afloje en su montaje en la flecha y empiece un aflojamiento y por consecuencia la vibración empiece a crecer en frecuencias armónicas (2,3,4,5,..., veces la frecuencia de giro). Y es posible también en la interarmónicas (1.5,2.5,3.5, ..., veces la frecuencia de giro) [1,20, 28 y 31].*

Sin embargo, la frecuencia de giro no crece hasta que el daño este avanzado provocando que la holgura permita a la flecha girar en forma excéntrica. Es muy

importante detectar la vibración porque al desarrollarse, no solamente daña al balero si no también la flecha.

## f) METODOS PARA DETECCIÓN DE LA VIBRACIÓN EN BALEROS

Los métodos se pueden dividir en dos grupos:

- a) Los que no usan análisis en frecuencia de vibración.
- b) Y los que si lo usan.

### 2.4 DESALINEAMIENTO.

El desalineamiento es otro de los problemas muy comunes en las máquinas rotatorias, se estima que alrededor del 40% de las fallas que se presentan en los equipos rotativos se deben al desalineamiento.

*Existen cuatro clases de desalineamiento de acoplamiento [105] las cuales son:*

1.-Desalineamiento angular, en el que las líneas de los árboles o rotores se interceptan a cierto ángulo, como se muestra en la Fig. 2.7

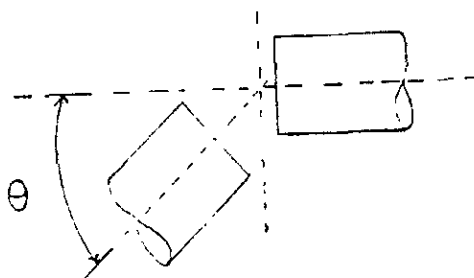


Fig.2.7. Desalineamiento angular.

2.- Desalineamiento paralelo, en el que las líneas de centro se encuentran paralelas entre sí, pero desplazadas una con respecto a la otra como lo muestra la Fig. 2.8

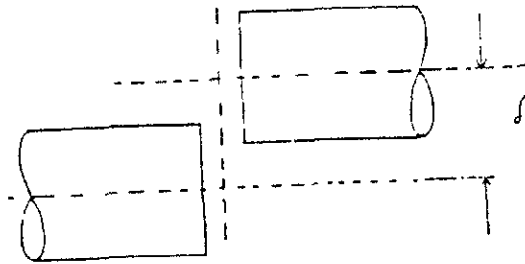


Fig.2.8.Desalineamiento paralelo.

3.- Desalineamiento torsional, existe cuando dos flechas tienen desplazamientos angulares durante la operación, como se muestra en la Fig. 2.9

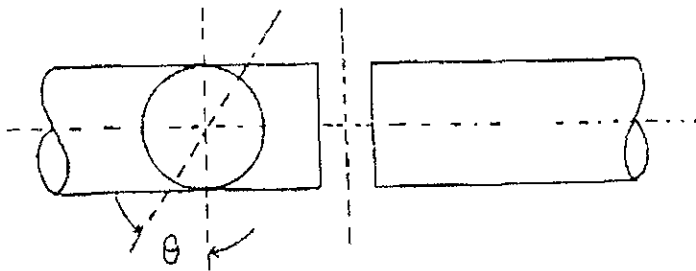


Fig.2.9. Desalineamiento torsional.

4.- Desalineamiento de extremos flotantes, se presenta cuando las dos flechas se mueven axialmente una con respecto de la otra, como se muestra en la Fig. 2.10

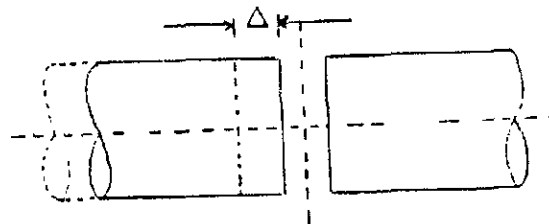


Fig.2.10.Desalineamiento de extremos flotantes

### **2.4.1. CAUSAS DE DESALINEAMIENTO.**

*Las fuentes más importantes de desalineamiento son las siguientes [106]:*

- Mayor incremento de la temperatura de la máquina.
- Métodos inapropiados desalineamiento o prácticas deficientes.
- Deformación de las tuberías debido a la deflexión de las mismas y a la tendencia de los codos a enderezarse cuando trabajan a muy altas temperaturas.
- Atascamiento de las zapatas deslizantes o de las cuñas de las máquinas.
- Variaciones en las condiciones de proceso.
- Asentamiento de la cimentación.

### **2.4.2. EFECTOS.**

*Algunos de los efectos que puede provocar el desalineamiento en los componentes de una máquina son los siguientes [106]:*

- Fallas en los sellos.
- Generación de calor en los componentes de los coples.
- Desgaste externo en coples de engranes.
- Fisuras o destrucción de los rotores.
- Precarga de las chumaceras.
- Fallas en las chumaceras.

### **2.4.3. IDENTIFICACION.**

*Los métodos más comunes empleados para diagnosticar el desalineamiento, además del análisis de vibración a la velocidad de giro, incluye el análisis de las características que a continuación se mencionan [ 25, 26 y 28]:*



- Lectura de fase, las que muestran el modo de vibración o como esta vibrando la máquina.
- Vibraciones axiales ( amplitud y fase).
- Vibraciones armónicas. Particularmente las vibraciones a dos veces la velocidad de giro.
- Diagrama de órbitas.

## CAPITULO III. DESBALANCEO EN MAQUINAS ROTATIVAS.

### 3.1 DESCRIPCIÓN, EFECTOS E IDENTIFICACIÓN:

#### a) DESBALANCE.

Cualquier elemento rotativo es siempre una fuente potencial de vibraciones, puesto que sabemos que únicamente, cuando el eje de giro o línea de cojinetes coincide con el eje principal de inercia de dicho elemento, las fuerzas de inercia no producen ninguna acción perturbadora en los cojinetes de apoyo. En la práctica, esto no se consigue de manera perfecta, por muy rígidas que sean las tolerancias de fabricación, ya que por ejemplo la homogeneidad del material no es absoluta, o puede existir inclusión de gases, así como diferentes temperaturas en la masa, etc.

*Por ello, aunque el diseño de una máquina rotativa sea perfecto, en la práctica aparecen desequilibrios que es preciso corregir hasta un cierto límite mediante métodos experimentales. Este límite es realmente imposible fijarlo concretamente de una manera general, ya que es más bien determinado mediante un compromiso entre el costo de la operación de equilibrado, el deterioro del equipo y muy importante, las molestias que la vibración originada por el desequilibrado, produce en las personas que han de permanecer en el local, donde se encuentre la máquina rotativa. Puede decirse que las personas normales detecten amplitudes de vibración de 0,005 mm y que, desde luego, no las soportan cuando pasan de 0,005 mm [35].*

El desbalanceo puede ser causado por una variedad de razones, como las que a continuación se presentan:

- *Tolerancias de fabricación incluyendo fundición, maquinado y ensamble que provocan una distribución desigual de peso.*

- *Variación del material, tales como: huecos, poros, inclusiones extrañas, densidades y acabados.*

- *Asimetría del diseño.*

- *Asimetría en operación, incluyendo distorsión, cambios dimensionales, fijación de partes, fuerzas aerodinámicas y cambios de temperaturas.*

- *La flexión permanente en el rotor. Los rotores flexionados o permanentes doblados son causa muy común de desbalance.*

- *Variación en el tamaño de pernos, tuercas, remaches y soldaduras.*

- *La excentricidad. Cuando el motor y flecha no se maquinan como bloque.*

- *Desbalance por mal alineamiento de rotores acoplados rígidamente, etc.*

- *Otras fuentes típicas de desbalance [ 1,39 y 57].*

*El desbalance también puede deberse al desplazamiento del peso en elementos giratorios-rotors, álabes, anillos, impulsores o por la pérdida de los propios elementos giratorios. Los rotores de los ventiladores, sopladores, bombas y compresores son particularmente susceptibles a la corrosión y a la erosión, lo que resulta en desbalance [39, 57].*

*Por ejemplo, el agua puede erosionar a los impulsores de las bombas de alimentación de las calderas, la ceniza puede erosionar los ventiladores de tiro inducido, los agentes químicos pueden corroer los impulsores de las bombas de lodos, el polvo puede erosionar los impulsores de los compresores centrífugos y la cavitación puede erosionar a los impulsores de las bombas centrífugas [ 8,39].*

*Otros elementos giratorios se pueden desbalancear debido a la formación desigual de depósitos en el rotor. El incremento gradual resultante en el desbalance puede convertirse en un serio problema, cuando parte de los depósitos llegan a desprenderse. El incremento posterior de las vibraciones puede provocar que otros*

depósitos se desprendan y que se genere un problema de vibraciones mucho más serio.

Existen varios tipos de desbalanceo; algunos de ellos son:

**1.- DESBALANCEO ESTÁTICO:** Existe cuando el eje principal de inercia está desplazado paralelamente al eje de rotación [39, 43].

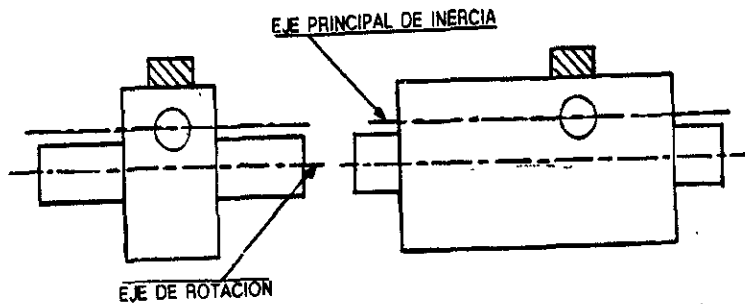


Fig.3.1. Desbalanceo estático.

**2.- EL PAR DE DESBALANCEO TAMBIEN LLAMADO MOMENTO DE DESBALANCEO:** Se presenta cuando el eje principal de inercia intercepta al eje de rotación sobre el eje de gravedad, es decir, cuando dos masas iguales de desbalanceo están posicionadas sobre los extremos del rotor y espaciadas  $180^\circ$  una de otra [39, 43].

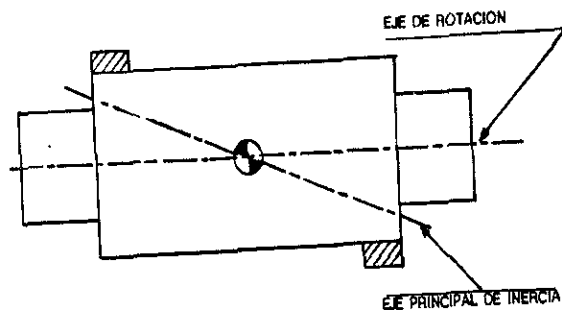


Fig. 3.2. Momento de desbalanceo.

**3.- EL DESBALANCEO DINAMICO:** Se presenta cuando el eje principal de inercia no coincide con el eje de rotación. Este es el tipo más común de desbalanceo en rotores e impulsores [ 39,43].

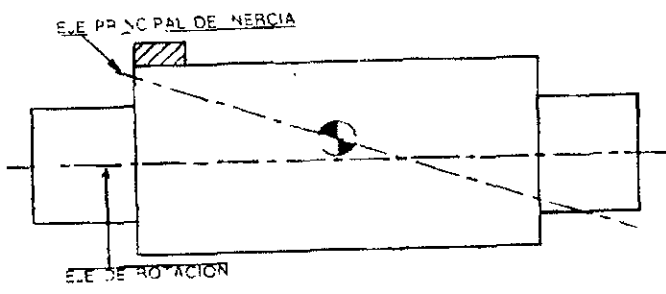


Fig. 3.3.Desbalanceo dinámico.

**-EL DESBALANCEO QUASI-ESTATICO:** Existe cuando el eje principal de inercia intercepta al eje de rotación en un punto diferente al eje de gravedad. Representa la combinación del desbalanceo estático siendo este un caso especial de balanceo dinámico [39, 43].

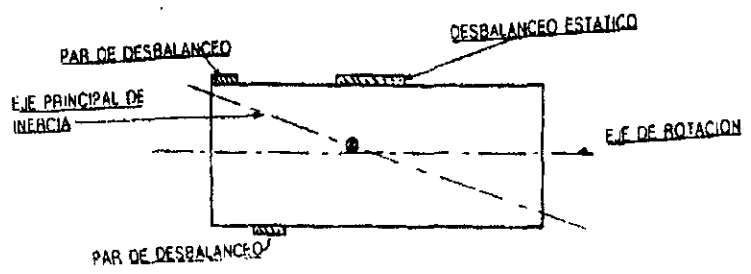


Fig. 3.4.Desbalanceo quasi-estático.

## **b) EFECTOS DEL DESBALANCE [1, 28 y 39].**

Dentro de ciertos niveles la vibración producida es aceptable, pero si estos niveles se exceden se provocan esfuerzos en el rotor y en sus soportes. La vibración debida al desbalance puede producir entre otros los siguientes problemas:

- 1.- Desgaste excesivo en chumaceras, bujes, sellos, coples y engranes.
- 2.- Fallas por fatiga en componentes giratorios tales como rotores, álabes, impulsores y bobinas eléctricas.
- 3.- Fallas por fatiga en componentes estacionarios como soportes de chumaceras, pernos, cimentaciones, tuberías y conductos; producidas por los altos esfuerzos alternativos generados.

Generalmente la disponibilidad de la máquina se reduce cuando existe desbalance; también las vibraciones generadas por la unidad desbalanceada pueden ser transmitidas a las máquinas adyacentes y pueden afectar su precisión o su correcto funcionamiento.

## **c) IDENTIFICACION DEL DESBALANCE [28 y 39].**

La identificación del desbalance se realiza mediante los siguientes pasos:

- 1.- Identificación del desbalance mediante análisis de vibraciones.
- 2.- Identificación del desbalance mediante el análisis de fase.
- 3.- Identificación del desbalance mediante el diagrama de órbitas.

### **3.2. VELOCIDAD CRITICA:**

*El fenómeno de la velocidad crítica puede clasificarse como uno de los de inestabilidad dinámica[3, 5 y 8].*

Considerando primeramente el caso más sencillo, constituido por un eje que se supone sin masa, que lleva en su punto medio un disco circular de masa  $m$  (Fig. 3.5.a.). Para esto se supone que el eje es vertical.

El disco, que suponemos está equilibrado estáticamente, pero no dinámicamente, a causa de dificultades de orden práctico, que hacen que al deformarse el eje no coincida el C.G. del disco con el eje geométrico, tal como lo indica la Fig.3.5.b., en la el C.G. y el centro geométrico del disco están representados por B y A, respectivamente, siendo  $e$  su pequeña excentricidad.

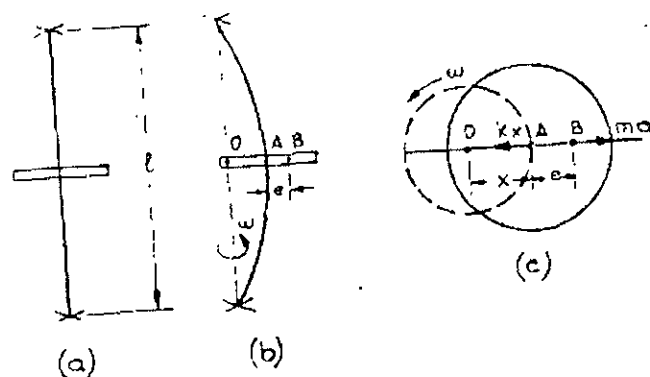


Figura 3.5. Disco equilibrado estáticamente.

Como consecuencia de la excentricidad  $e$ , al girar el eje se produce una fuerza centrífuga de magnitud (Fig. 3.5.b).

$$m(x+e)w^2 = ma \tag{3.2.1}$$

siendo  $w$  la velocidad angular de rotación del eje y  $a$  la aceleración.

La Fig. 3.5.c. representa el plano del disco en la configuración del eje deformado.

Esta fuerza no puede estar equilibrada nada más que por las fuerzas elásticas restauradoras, serán de la forma:

$$F = kx \quad (3.2.2)$$

ya que serán proporcionales al desplazamiento  $x$ . La constante de rigidez  $k$  se puede determinar fácilmente mediante el conocimiento de las dimensiones del eje, de sus características elásticas y de la condición de apoyo de sus extremos. En el caso considerado de una carga en la mitad del eje, si éste está articulado en sus extremos ( $k = \frac{48EI}{l^3}$ ):

Por tanto, de (3.2.1) y (3.2.2).

$$m(x+e)w^2 = kx \quad (3.2.3)$$

$$x = \frac{e}{\frac{k}{mw^2} - 1} \quad (3.2.4)$$

Teniendo en cuenta que ( $w_n^2 = \frac{k}{m}$ ); y además de (3.2.4) se puede poner en la forma siguiente:

$$x = \frac{e}{\frac{w_n^2}{w^2} - 1} \quad (3.2.5)$$



De esta expresión se deduce que  $e \rightarrow \infty$  a medida que  $w$  se acerca a  $w_n$ , produciendo la velocidad crítica cuando:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2.6)$$

Si  $w$  sigue aumentando, la ecuación (3.2.5) muestra que  $x$  y  $e$  son de distinto signo, es decir, que en estas condiciones el C. G.

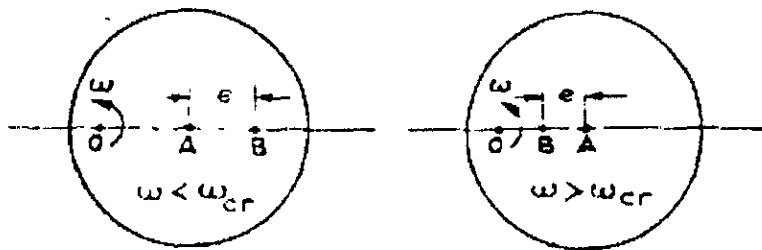


Fig.3.6. Condiciones del centro de gravedad (C.G.).

Se encuentra entre la línea que une los cojinetes de los apoyos y la curva de deflexión. En la Fig.3.6.a y Fig.3.6.b. se indican los dos casos.

Por tanto la ecuación de equilibrio toma la forma siguiente:

$$m(x - e)w^2 = km \quad (3.2.7)$$

y

$$x = \frac{e}{1 - \frac{w_n^2}{w^2}} \quad (3.2.8)$$

De ésta (3.2.8), se deduce que al aumentar  $w$  la deflexión  $x$  decrece. Si se sigue aumentando  $w$  en el límite se llega a que el C.G. coincida con la línea de los cojinetes y, por tanto, el eje flexionado gira alrededor del C.G.. Físicamente debe ocurrir así, pues de otro modo la fuerza centrífuga se haría infinita[8].

El trazado gráfico de (3.2.5) y de (3.2.8) se muestra en la Fig.3.7 La proyección sobre el eje vertical  $O_1, O_2, O_3$ , del punto de la curva correspondiente a las distintas frecuencias  $w_1, w_2, w_3$ , da la deflexión de  $x$ .

Si el eje estuviera perfectamente equilibrado,  $e=0$ , y (3.2.3) podrá ser expresada como  $mw^2 x=kx$ , es decir, las fuerzas elásticas y de inercia están en equilibrio indiferente, ya que son proporcionales a  $x$ , pudiendo el eje girar perfectamente. Este equilibrio indiferente sólo se produce con  $x \neq 0$  para cualquier  $w$ .

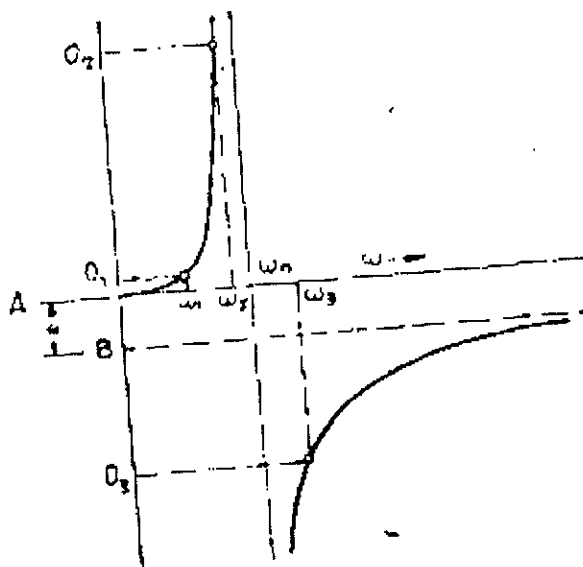


Figura 3.7 Gráfica de relación de frecuencias contra relación de amplitud.

### 3.2.1. VELOCIDADES SECUNDARIAS.

Se ha comprobado experimentalmente en ejes horizontales que, aparte de la velocidad crítica, debida al desequilibrio de masas, se produce otra perturbación para una velocidad mitad de la anterior, es decir [8], para  $(w = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m}})$ .

*Este fenómeno, denominado velocidades críticas secundarias, se produce únicamente en ejes horizontales, es decir, en los que tiene influencia su peso. Es de dos tipos [3 y 8].*

**a) Influencia de la gravedad, combinada con la no-uniformidad de rigidez flexional del eje.**

**b) Influencia de la gravedad con el desequilibrio de masas.**

### 3.2.2 VELOCIDAD CRITICA EN EJES ROTATIVOS.

*En la fabricación de rotores se pretende lograr, que coincida su C.G. con el centro geométrico de su eje, o sea, balancear el rotor para que desaparezca la posibilidad de que surja una fuerza centrífuga que origine la vibración del rotor. Aunque esto se lograra, esta coincidencia se fractura por la deflexión del rotor debido a su propio peso. Sin embargo, lograr esta coincidencia es muy difícil cuando no imposible de tal manera que al desbalance se suma la flexión de la flecha. A una cierta velocidad conocida como la velocidad crítica, la deflexión de la flecha se hace más grande, por esto se hace necesaria la determinación de las velocidades críticas (frecuencias naturales) a fin de evitarlas durante el trabajo del rotor [3, 5 y 8].*

*La respuesta de un rotor a una fuerza de excitación se obtiene resolviendo las ecuaciones de movimiento del sistema las cuales son ecuaciones diferenciales*

*ordinarias no homogéneas en el caso de sistemas discretos y ecuaciones diferenciales parciales en el caso de sistemas continuos [8].*

Las frecuencias naturales de un sistema se obtienen en el proceso de solución de las ecuaciones de movimiento homogeneizadas ya sea por métodos analíticos aproximados (**DUNKERLEY, RAYLEIGH, RAYLEIGH-RITZ**) por métodos numéricos iterativos (**HOLZER, JACOBI, ITERACIÓN MATRICIAL**) o por Matrices de transferencia.

### **3.2.3. ELEMENTOS INFLUENCIADOS POR TRABAJAR POR VELOCIDAD CRITICA.**

Como se ha visto, la velocidad crítica de un eje, es un caso especial de la frecuencia natural de un sistema con varios o aún infinitos grados de libertad. Sin embargo, son muchos los factores que hacen que existan diferencias en los valores determinados teóricamente y los comprobados experimentalmente.

*Los factores más influyentes son[8]:*

- a) Cojinetes.
- b) Elasticidad.
- c) Efecto giroscopio de los discos.

#### **3.2.3.1. COJINETES.**

*Se ha supuesto que el eje es simplemente apoyado y, por tanto, que los cojinetes se adaptan perfectamente a sus deflexiones, no entorpeciendo éstas en ningún sentido. Sin embargo, como ellos (cojinetes) suelen estar fijos, si su longitud comparada con su diámetro es grande, pueden ejercer una influencia que asemeje el apoyo al empotramiento. Ello, naturalmente, reducirá la deflexión del eje, por lo que hará subir la velocidad crítica [8, 60, 61, 62 y 63].*

### 3.2.3.2. ELASTICIDAD:

Si los cojinetes no son rígidos, sino que tienen cierta flexibilidad a sus desplazamientos y ésta es la misma en todas direcciones, como  $k$  evidentemente será menor que con ejes rígidos, la velocidad crítica disminuirá. Si la flexibilidad de los cojinetes no es la misma en las direcciones vertical y horizontal, el problema es más complicado. La fuerza centrífuga  $mw^2 e$  habrá que descomponerla en sus componentes horizontal y vertical:  $mw^2 e \cos(\omega t)$  y  $mw^2 e \sin(\omega t)$ , respectivamente, y las ecuaciones de movimiento serán [8 y 105]:

$$m x'' + k_h x = m w^2 e \cos(\omega t)$$

$$m x'' + k_v x = m w^2 e \sin(\omega t)$$

(3.2.3.2.1)

Las ecuaciones anteriormente escritas muestran que la oscilación horizontal entrará en resonancia para un valor de  $w_1$ .

$$w_1 = w_n = \sqrt{\frac{k_h}{m}}$$

mientras que la vertical lo hará para:

$$w_2 = w_n = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$$

Como, en general, en la práctica  $k_h < k_v, \omega_1 < \omega_2$ . La trayectoria del centro **A** del disco es una elipse horizontal alargada para la primera y una elipse vertical para la segunda.

La Fig. 3.8, representa las dos velocidades críticas del eje.

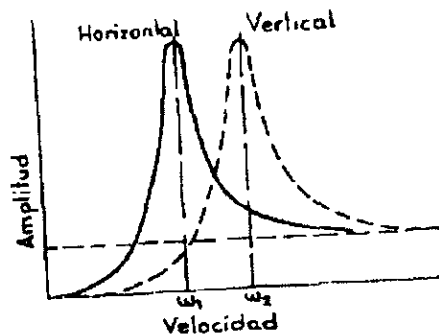


Fig. 3.8. Representación de las dos velocidades críticas en cojinetes no rígidos.

### 3.2.3.3. EFECTO GIROSCÓPICO DE LOS DISCOS.

En un disco de tamaño grande, si su centro no coincide con la luz del eje, o se encuentra en voladizo, las fuerzas centrífugas de sus diversas partículas ya no permanecerán en su propio plano, y tiende a desplazarlo axialmente, por lo que las frecuencias naturales obtenidas en el supuesto único de la deflexión son erróneas. Este efecto no es un verdadero efecto giroscópico, aunque se denomina así porque se observó primeramente en discos con velocidad es muy alta.

No es un efecto giroscópico, ya que éste se produce en discos girando a una gran velocidad, en tanto que el eje se mueve muy lentamente, mientras que en el problema que se considera éste disco gira a la misma velocidad que aquél.

En general, por el hecho de no estar las fuerzas centrífugas de las partículas del disco en su plano, y perpendicularmente al eje de giro, originan un momento que tiende a reducir la deflexión y, por tanto, la frecuencia natural.

### 3.3 CALIDAD REQUERIDA EN ROTORES RIGIDOS.

*Estarán clasificados de acuerdo a grados de calidad especificados por el ingeniero de diseño, estos grados son los utilizados para impulsores y elementos rotativos y son únicos [40 y 88].*

- 1.- Grado de calidad G- 2.5
- 2.- Grado de calidad G- 6.3.

### 3.4.DETERMINACION DEL DESBALANCEO PERMISIBLE EN ROTORES RIGIDOS.

Para saber con precisión la tolerancia de balanceo en rotores rígidos se utilizan los siguientes nomogramas para determinar las cantidades de desbalanceo permisibles en base a las características físicas y de operación del impulsor o elemento rotativo.

*Procedimiento para el del desbalanceo permisible [40 y 88].*

1.1 Obtener datos; peso del impulsor, radio de compensación, grado de calidad y velocidad de operación.

1.2. Del nomograma (Fig.3.9) de acuerdo al grado de calidad específica por diseño, determinar grado de desbalanceo de acuerdo a lo siguiente:

- a).- Localizar velocidad de operación o de servicio en la columna izquierda.
- b)Localizar peso del impulsor en la columna de la derecha.

c) Unir puntos con una recta imaginaria y leer desbalanceo permisible en la columna central.

este desbalanceo está dado en gr-mm.

1.3.- Determinar masa de desbalanceo permisible de la siguiente manera:

Desviación. permisible/Radio de compensación=gr-mm/mm=gramos.



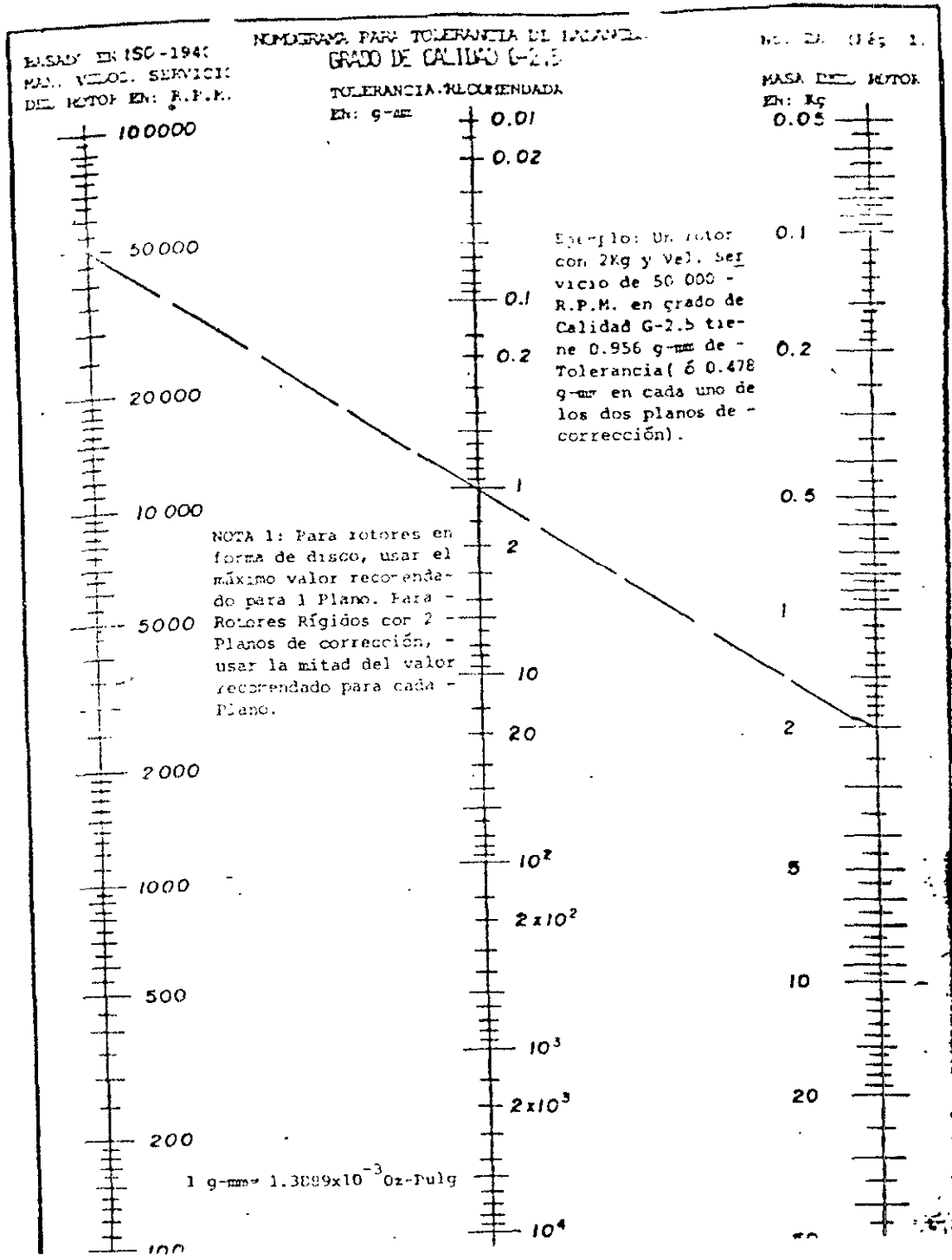


Fig.3.9. Nomograma de calidad de balanceo para impulsores y elementos rotativos.

## CAPITULO IV. MODELO MATEMATICO PARA DIAGNOSTICAR FALLAS EN MAQUINARIA ROTATIVA INDUSTRIAL.

### 4.1.- INTRODUCCION.

Se siguió la siguiente metodología para obtener el modelo matemático:

1. Se recabó la información específica sobre la vibración en las máquinas rotativas industriales en forma general.
2. Se analizaron los conceptos más importantes de la vibración en máquinas rotativas para su estudio, como son:
  - a) Vibraciones en máquinas rotativas.
  - b) Descripción general del desbalanceo en máquinas rotativas.
  - c) El fenómeno giroscópico en impulsores, entre otros.
3. Se seleccionó una máquina rotativa industrial, de la cual se identificaron las variables más importantes, que servirán para ser manejadas en forma apropiada en los modelos matemáticos (Turbosoplador modelo 123450396, marca Evisa, con un motor acoplado en forma directa de 5 hp, marca Siemens, propiedad de la U. N. A. M.
4. Se estableció el marco teórico (Con el empleo de la transformada de Fourier), que ayudará a interpretar los resultados de:
  - a) Obtener los modelos matemáticos.
5. Desarrollo, obtención y solución general de los modelos matemáticos.
6. Se empleo un analizador de frecuencias (Wavepak, propiedad de la U.N.A.M), con el cual se analizará el turbosoplador, y se seleccionarán los puntos más importantes reflejados por el espectro de línea, dando el diagnóstico actual de la máquina.

Nota: El espectro de línea obtenido por el analizador es lo esperado por los modelos matemáticos, que al obtener sus soluciones particulares y aplicando

la transformada de Fourier se obtienen los espectros de frecuencia que da el equipo.

## 4.2. MARCO TEORICO.

4.2.1.- Sea  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real periódica con período  $T$ , y se pueda representar por la serie trigonométrica [ 56 ].

$y(t) = (1/2) a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + \dots + b_1 \text{sen } w_0 t + b_2 \text{sen } 2w_0 t + \dots$ , esto es:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \text{sen}(2\pi n f_0 t)] \quad (4.2.1.1)$$

donde  $f_0$  es la frecuencia fundamental igual a  $1/T_0$ . Los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.1.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \text{sen}(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.1.3)$$

en su forma compleja la serie de Fourier es:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n - j b_n] e^{j 2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j 2\pi n f_0 t} \quad (4.2.1.4)$$

### 4.2.2. FUNCION PERIODICA UNIDIMENSIONAL.

Una función periódica se define como una función para la cual:

$$y(t) = y(t + T) \quad (4.2.2.1)$$

Para todo valor de  $t$ . La constante mínima  $T$  que satisface la relación (4.2.2.1) se llama el período de la función. Mediante repetición de (4.2.2.1), se obtiene [56].

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.2.2)$$

La Fig. 4.1 se muestra una función periódica.

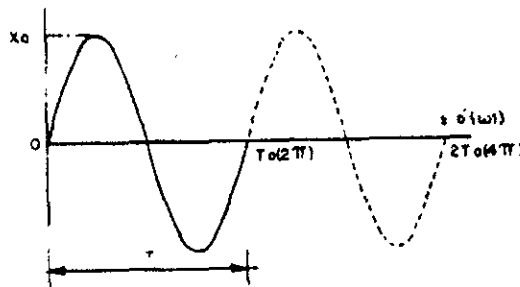


Fig. 4.1. Función periódica

### 4.2.3. TRANSFORMADA DE FOURIER.

Las series de Fourier constituyen un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas.

Puesto que muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, es deseable desarrollar un método de Análisis de Fourier que incluya funciones no-periódicas.

En la tabla. 4.1. se muestran las aplicaciones de la transformada de Fourier.

<b>APLICACIONES MECANICAS.</b>	<b>SONIDO Y ACUSTICA.</b>
<i>Dinámica estructural.</i>	<i>Imagen acústica.</i>
<i>Extinción de la vibración en el ala del avión.</i>	<i>Sonar pasivo.</i>
<i>Diagnóstico de máquinas rotativas.</i>	<i>Procedimiento de antena direccional.</i>
<i>Modelado de una planta de energía nuclear.</i>	<i>Medición de acústica arquitectónica.</i>
<i>Análisis de vibraciones.</i>	<i>Síntesis de música.</i>
<b>INGENIERIA BIOMEDICA.</b>	<b>METODOS NUMERICOS.</b>
<b>INSTRUMENTACION.</b>	<b>RADAR.</b>
<b>ELECTROMAGNETISMO.</b>	<b>COMUNICACIONES.</b>

Tabla 4.1. Sumario de aplicaciones de la transformada de Fourier.

#### 4.2.3.1 INTERPRETACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Una interpretación simplificada de la transformada de Fourier es ilustrada en la Fig.4.2. como demostración, la serie de la transformada de Fourier de una forma de onda es una suma de senoides de diferentes frecuencias. Si esta suma de senoides es la forma de la onda original, entonces nosotros hemos determinado la transformada de Fourier de la forma de la onda.

La representación pictórica de la transformada de Fourier es un diagrama que exhibe la amplitud y la frecuencia de cada una de las senoides determinadas.

La Fig.4.2. también ilustra un ejemplo de la transformada de Fourier de una forma de onda. La transformada de Fourier tiene doble senoides que sumada da la forma de la onda. Como demostración, el diagrama de la transformada de Fourier exhibe amplitud y frecuencia de cada senoides.

Se han exhibido ambas frecuencias senoidales positiva y negativa para cada frecuencia; por consiguiente la amplitud ha estado dividida en dos partes iguales, o sea la transformada de Fourier en tal caso se descompone la forma de onda en sus dos componentes individuales senoidales.

La transformada de Fourier identifica ó distingue las diferentes frecuencias senoidales, que combinada una onda arbitraria. Matemáticamente, esta relación esta dada como:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1.6.1.1)$$

Donde:

$S(f)$  es la forma de onda descompuesta en una suma de senoides.

$s(t)$  es la transformada de Fourier de  $S(f)$  y  $j = \sqrt{-1}$  [55].

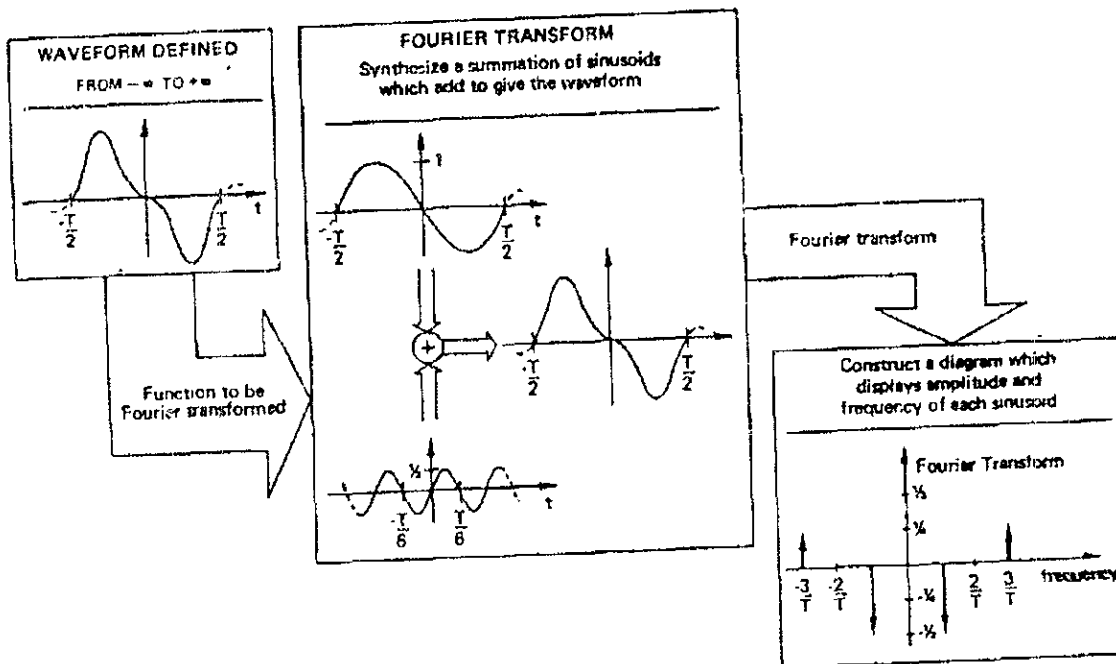


Fig. 4.2. Interpretación de una transformada de Fourier [55].

#### 4.2.3.2. LA INTEGRAL DE FOURIER.

La integral de Fourier esta definida por la siguiente expresión:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.2.3.2.1)$$

Si la integral existe para cada valor del parámetro  $f$ , entonces la ecuación (4.2.3.2.1) define a  $H(f)$  la transformada de Fourier de  $h(t)$ . Típicamente,  $h(t)$  es llamada una función de la variable de tiempo y  $H(f)$  es llamada una función de la variable de frecuencia[55].

En general, la transformada de Fourier es una cantidad compleja:

$$H(f) = R(f) + jI(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)} \quad (4.2.3.2.2)$$

donde:

$R(f)$  es la parte real de la transformada de Fourier,

$I(f)$  es la parte imaginaria de la transformada de Fourier,

$|H(f)|$  es la amplitud o el spectrum de Fourier de  $h(t)$  y es especifica-

do por  $\sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$ ,

$\theta(f)$  es el ángulo de fase de la transformada de Fourier y es especifi-

cado por  $\tan^{-1}[I(f)/R(f)]$

#### 4.2.3.3. TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER.

La transformada inversa de Fourier está definida por:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} dt \quad (4.2.3.3.1)$$

La ecuación (4.2.3.3.1) permite la determinación de una función de tiempo desde su transformada de Fourier. Si las funciones  $h(t)$  y  $H(f)$  son afín por las ecuaciones (4.2.3.2.1) y (4.2.3.3.1), las dos funciones son llamadas parejas de transformada de Fourier, y se indica esta relación por la notación[55]:

$$h(t) \quad \blacklozenge \quad H(f) \quad (4.2.3.3.2)$$



#### 4.2.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

##### 4.2.4.1. LINEALIDAD.

Si  $x(t)$  y  $y(t)$  tienen la transformada de Fourier  $X(f)$  y  $Y(f)$  respectivamente, entonces la suma  $x(t) + y(t)$  tiene la transformada de Fourier  $X(f) + Y(f)$ . Esta propiedad será establecida como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] e^{-j2\pi ft} dt = X(f) + Y(f) \quad (4.2.4.1.1)$$

La pareja de la transformada de Fourier

$$x(t) + y(t) \quad \diamond \quad X(f) + Y(f) \quad (4.2.4.1.2)$$

es de considerable importancia porque ello refleja la aplicabilidad de la transformada de Fourier a un análisis de sistema lineal [55].

##### 4.2.4.2. SIMETRIA.

Si  $h(t)$  y  $H(f)$  son una pareja de la transformada de Fourier, entonces:

$$H(f) \quad \diamond \quad h(-t) \quad (4.2.4.2.1)$$

la pareja de la transformada de Fourier de la ecuación (4.2.4.2.1) es establecida por rescribir la ecuación (4.2.3.3.1); esto es [55]:

$$h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-j2\pi ft} df \quad (4.2.4.2.2)$$

y por intercambiar los parámetros  $t$  y  $f$ ; tenemos que:

$$h(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.2.4.2.3)$$

#### 4.2.4.3. ESCALAMIENTO DE TIEMPO Y FRECUENCIA.

Si la transformada de Fourier de  $h(t)$  es  $H(f)$ , entonces la transformada de Fourier de  $h(kt)$ , donde  $k$  es mayor que cero, es determinada por sustituir  $t' = kt$  en la ecuación de la integral de Fourier; esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(kt) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-j2\pi f'(f/k)} \frac{dt'}{k} = \frac{1}{k} H\left(\frac{f}{k}\right) \quad (4.2.4.3.1)$$

Para  $k$  negativa, el término del lado derecho cambia signo porque los límites de integración son intercambiados. Por lo tanto, el escalamiento de tiempo da por resultado la pareja de la transformada de Fourier:

$$h(kt) \quad \blacklozenge \quad \frac{1}{|k|} H\left(\frac{f}{k}\right) \quad (4.2.4.3.2)$$

#### a) ESCALAMIENTO DE FRECUENCIA.

Si la transformada de Fourier inversa de  $H(f)$  es  $h(t)$ , la transformada de Fourier inversa de  $H(kf)$ , es especificada por la pareja de la transformada de Fourier, donde  $k$  es una constante real por lo que:

$$\frac{1}{|k|} h\left(\frac{t}{k}\right) \quad \blacklozenge \quad H(kf) \quad (4.2.4.3.3)$$

la relación de la ecuación (4.2.4.3.3) es establecida por sustituir  $f' = kf$  dentro de la fórmula inversa [55] :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(kf) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(f') e^{j2\pi f'(t/k)} \frac{df'}{k} = \frac{1}{k} h\left(\frac{t}{k}\right) \quad (4.2.4.3.4)$$

#### 4.2.4.4. TIEMPO Y FRECUENCIA CAMBIANTE.

Si  $h(t)$  es cambiada por una constante  $t_0$ , entonces sustituyendo  $s = t - t_0$ , la transformada de Fourier toma la forma siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-j2\pi f(s+t_0)} ds = e^{-j2\pi ft_0} H(f) \quad (4.2.4.4.1)$$

La pareja de la transformada de Fourier del cambio de tiempo es [55]:

$$h(t - t_0) \quad \blacklozenge \quad H(f) e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.2.4.4.2)$$

#### a) FRECUENCIA CAMBIANTE.

Si  $H(f)$  es sustituida por una constante  $f_0$ , su transformada inversa es multiplicada por  $e^{j2\pi f f_0}$  y se tiene:

$$h(t) e^{j2\pi f f_0} \quad \blacklozenge \quad H(f - f_0) \quad (4.2.4.4.3)$$

La pareja de transformada de Fourier anteriormente escrita se establece al sustituir  $s = f - f_0$  dentro de la relación de transformada inversa de Fourier definida[55]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{j2\pi(s+f_0)t} ds = e^{j2\pi f_0 t} h(t) \quad (4.2.4.4)$$

#### 4.2.4.5. FUNCIONES PAR E IMPAR.

Si  $h_e(t)$  es una función par, es decir,  $h_e(t) = h_e(-t)$ , entonces la transformada de Fourier de  $h_e(t)$  es una función par y es real; esto es:

$$h_e(t) \quad \blacklozenge \quad R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (4.2.4.5.1)$$

esta función par es establecida por las relaciones definidas pertinentes:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \sen(2\pi ft) dt = R_e(f) \quad (4.2.4.5.2)$$

El término imaginario es cero porque la segunda integral es una función impar[55].

#### a) FUNCION IMPAR.

Si  $h_o(t) = -h_o(-t)$ , entonces  $h_o(t)$  es una función impar, y su transformada de Fourier es un función impar e imaginaria:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \sen(2\pi ft) dt = jI_o(f) \quad (4.2.4.5.3)$$

La integral real es cero por que la multiplicación de una función impar por una par es una función impar.

La pareja de transformada de Fourier se establece de La forma siguiente[55]:

$$h_0(t) \quad \blacklozenge \quad jI_0(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} h_0 \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad (4.2.4.5.4)$$

#### 4.2.4.6. DESCOMPOSICION DE FORMA DE ONDA.

Una función arbitraria puede ser siempre descompuesta en una suma de funciones par e impar:

$$h(t) = \frac{h(t)}{2} + \frac{h(t)}{2} = h_e(t) + h_0(t) \quad (4.2.4.6.1)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (4.2.4.6.1) es[55]:

$$H(f) = R(f) + jI(f) = H_e(f) + H_0(f) \quad (4.2.4.6.2)$$

#### 4.2.4.7. FUNCIONES DE TIEMPO COMPLEJAS.

Para comodidad de representación, nosotros hemos considerado este punto solamente para funciones reales de tiempo. La transformada de Fourier ecuación (4.2.3.2.1), la integral inversa ecuación (4.2.3.3.1), y las propiedades de la transformada de Fourier contienen para este caso de  $h(t)$ , una función compleja del tiempo si:

$$h(t) = h_r(t) + jh_i(t) \quad (4.2.4.7.1)$$

donde  $h_r(t)$  y  $h_i(t)$  son la parte real e imaginaria de la función compleja respectivamente, entonces la integral de Fourier de la ecuación (4.2.3.2.1), llegará a ser:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [h_r(t) + h_i(t)] e^{-j2\pi ft} dt = R(f) + jI(f) \quad (4.2.4.7.2)$$

por tanto:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [h_r(t) \cos(2\pi ft) + h_i(t) \sin(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.3)$$

y:

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} [h_r(t) \sin(2\pi ft) - h_i(t) \cos(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.4)$$

similarmente, la formula de inversa, ecuación (4.2.3.3.1), para la función compleja esta dada por:

$$h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [R(f) \cos(2\pi ft) - I(f) \sin(2\pi ft)] df \quad (4.2.4.7.4)$$

$$h_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [R(f) \sin(2\pi ft) + I(f) \cos(2\pi ft)] df \quad (4.2.4.7.5)$$

si  $h(t)$  es real, entonces  $h(t) = h_r(t)$  y las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier son especificadas por las ecuaciones (4.2.4.7.3) y (4.2.4.7.4), respectivamente; esto es:

$$R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [h_r(t) \cos(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.6)$$

$$I_o(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} [h_r(t) \text{sen}(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.7)$$

En este caso,  $R_e(f)$  es una función par porque  $R_e(f) = R_e(-f)$ . Similarmente,  $I_o(-f) = -I_o(f)$  y  $I_o(f)$  es impar.

Para  $h(t)$  puramente imaginaria,  $h(t) = jh_r(t)$  y

$$R_o(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [h_i(t) \text{sen}(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.8)$$

Además;

$$I_e(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} [h_i(t) \text{cos}(2\pi ft)] dt \quad (4.2.4.7.9)$$

$R_o(f)$  es una función impar y  $I_e(f)$  es una función par[55].

## 4.2.5. CONVOLUCION.

### 4.2.5.1. INTEGRAL DE CONVOLUCION.

La convolución de dos funciones es un concepto físico significativo en muy diversos campos científicos. Sin embargo, en este caso es una relación matemática muy importante. Para ser más específico, la integral de convolución es especificada por la siguiente ecuación:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (4.2.5.1.1)$$

La función  $y(t)$  es citada para ser la convolución de las funciones  $x(t)$  y  $h(t)$ . Note que ella es extremadamente difícil para visualizar la operación matemática de la ecuación (4.2.5.1.1)[55].

### 4.2.5.2. FORMA ALTERNATIVA DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCION.

La ecuación (4.2.5.1.1) puede ser escrita equivalentemente como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (4.2.5.2.1)$$

Por lo tanto, cualquiera  $h(\tau)$  o  $x(\tau)$  pueden ser plegada y movida. Para ver gráficamente que las ecuaciones (4.2.5.1.1) y (4.2.5.2.1) sean iguales, considere las funciones ilustradas en la Fig. 4.3. Ello es deseado para convolucionar estas dos funciones. La serie de gráficas en la izquierda de la Fig. 4.3. ilustran la evaluación de la ecuación (4.2.5.1.1); las gráficas de la derecha ilustran la evaluación de la ecuación (4.2.5.2.1). lo anterior define los pasos siguientes:

1. Plegadizo.
2. Desplazamiento.
3. Multiplicación.
4. Integración.



Los pasos anteriores se ilustran en las Figs. 4.3.(b),(c) y (e), respectivamente. Como indica la Fig.4.3.(e), la convolución de  $x(\tau)$  y  $h(\tau)$  es la misma sin tener en cuenta que la función seleccionada es por plegadizo y desplazamiento [55].

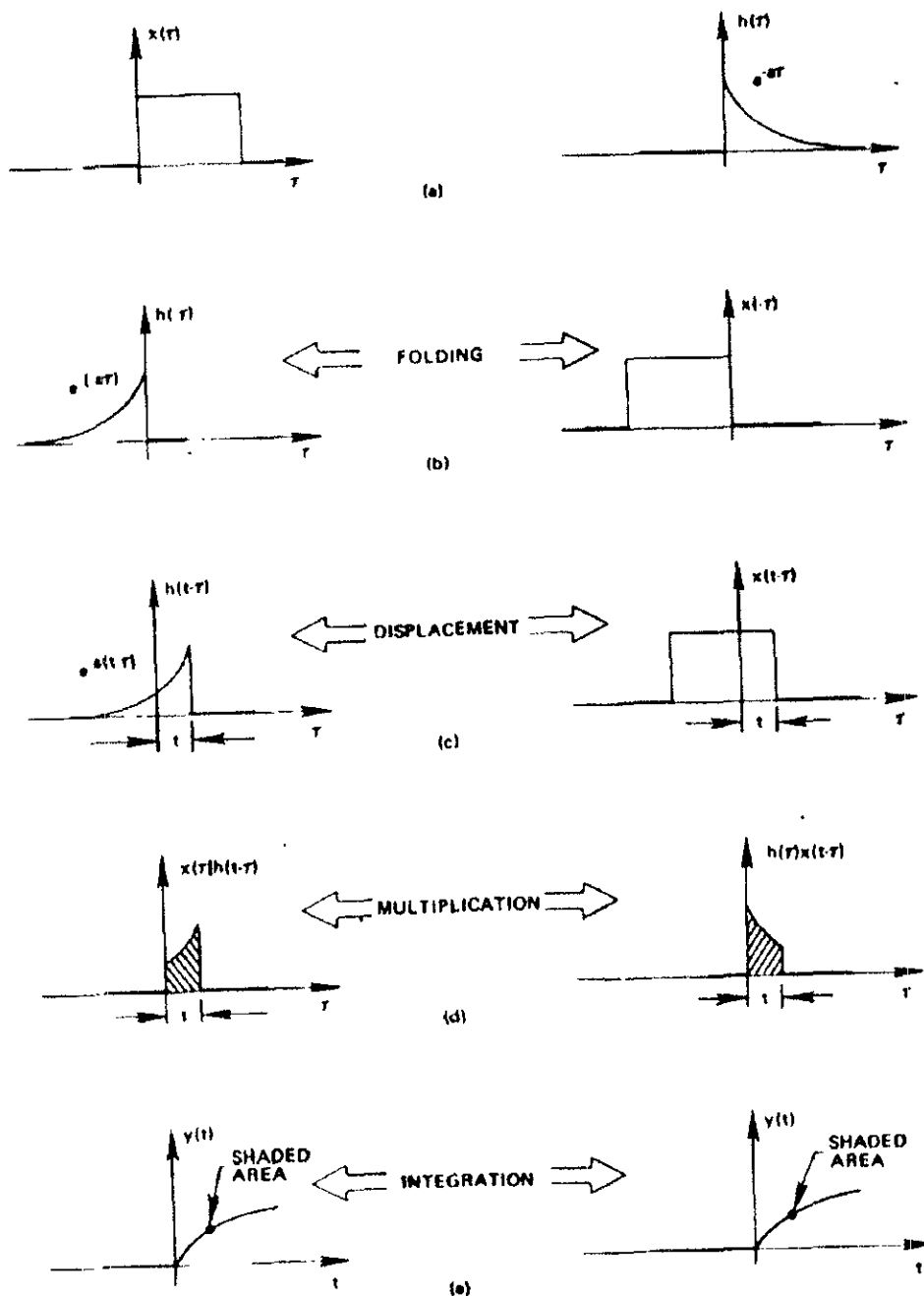


Fig.4.3. Ejemplo gráfico de convolución[55].

### 4.2.5.3. CONVOLUCION IMPLICANDO FUNCIONES DE IMPULSO.

El tipo simple de la integral de convolución para evaluar es cualquiera de  $x(t)$  o  $h(t)$  será una función de impulso. Para ilustrar este punto, sea  $h(t)$  la función singular mostrada en la Fig.4.4.(a), y sea  $x(t)$  la función rectangular mostrada en al Fig.4.4.(b). Por ejemplo estas funciones, ecuación (4.2.5.1.1) llegará a ser:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)] x(t - \tau) d\tau \quad (4.2.5.3.1)$$

si;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - T) x(\tau) d\tau = x(T)$$

entonces la ecuación (4.2.5.3.1) puede ser escrita como:

$$y(t) = x(t - T) + x(t + T) \quad (4.2.5.3.2)$$

la función  $y(t)$  es ilustrada en la Fig.4.4.(c).

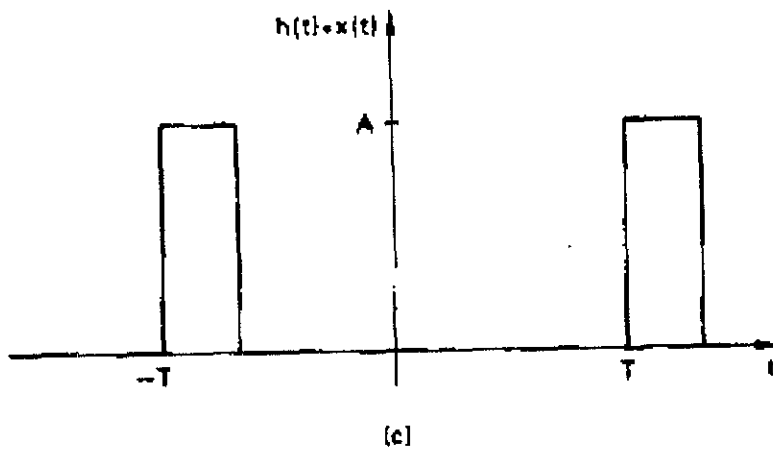
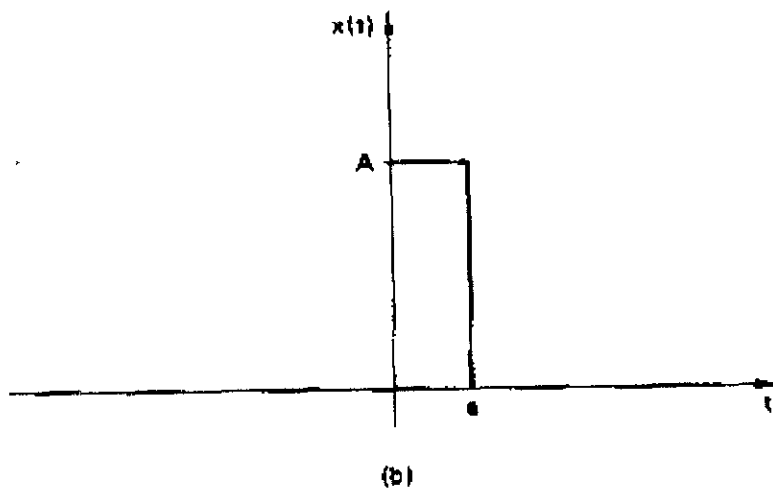
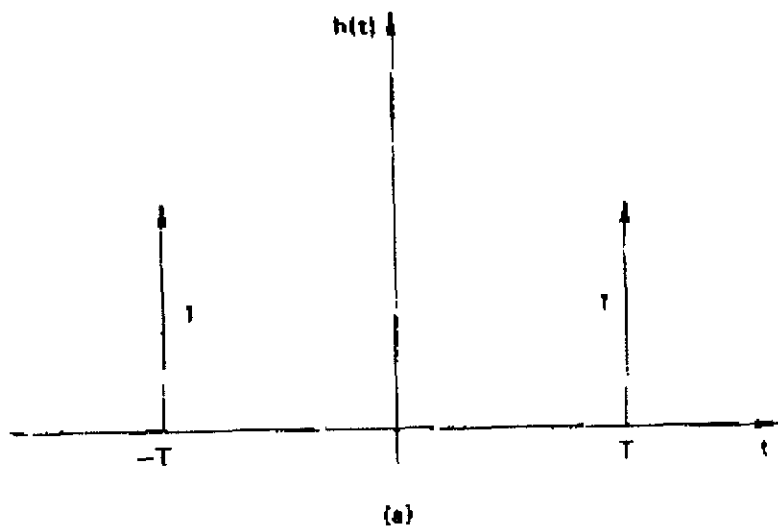


Fig.4.4. Ilustración de convolución involucrando una función de impulso[55].

#### 4.2.5.4. TEOREMA DE CONVOLUCION DE TIEMPO.

Posiblemente la mas importante y poderosa herramienta en el análisis científico moderno es la relación entre la ecuación (4.2.5.1.1) y su transformada de Fourier. Esta relación muestra como el teorema de convolución de tiempo, permite una completa libertad para convolucionar matemáticamente (o visualmente) en el dominio de tiempo por una simple multiplicación en la frecuencia de dominio. Eso es, si  $h(t)$  tiene la transformada de Fourier  $H(f)$  y  $x(t)$  tiene la transformada de Fourier  $X(f)$ , entonces  $h(t) * x(t)$  tienen la transformada de Fourier  $H(f)X(f)$ . El teorema de convolución es de este modo especificado por la pareja de transformada de Fourier; esto es:

$$h(t) * x(t) \quad \blacklozenge \quad H(f)X(f) \quad (4.2.5.4.1)$$

para establecer este resultado, la primera forma de la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (4.2.5.1.1) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.2.5.4.2)$$

y es igual a:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \quad (4.2.5.4.3)$$

sustituyendo por  $\sigma = t - \tau$ , el término del paréntesis, la ecuación anteriormente escrita llega a ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f(\sigma + \tau)} d\sigma = e^{-j2\pi f\tau} H(f) \quad (4.2.5.4.4)$$

La ecuación (4.2.5.4.3) puede ser rescrita como [55]:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} H(f) d\tau = H(f)X(f) \quad (4.2.5.4.5)$$

#### 4.2.5.5. TEOREMA DE CONVOLUCION DE FRECUENCIA.

Se puede ir equivalentemente desde la convolución hasta el dominio de frecuencia por la multiplicación en el dominio de tiempo usando el teorema de convolución de frecuencia:

La transformada de Fourier del producto  $h(t)x(t)$  es igual a la convolución:

$H(f)X(f)$ . El teorema de convolución de frecuencia es:

$$h(t)x(t) \quad \blacklozenge \quad H(f) * X(f) \quad (4.2.5.5.1)$$

para ilustrar este teorema ver la Fig.4.5, [55].

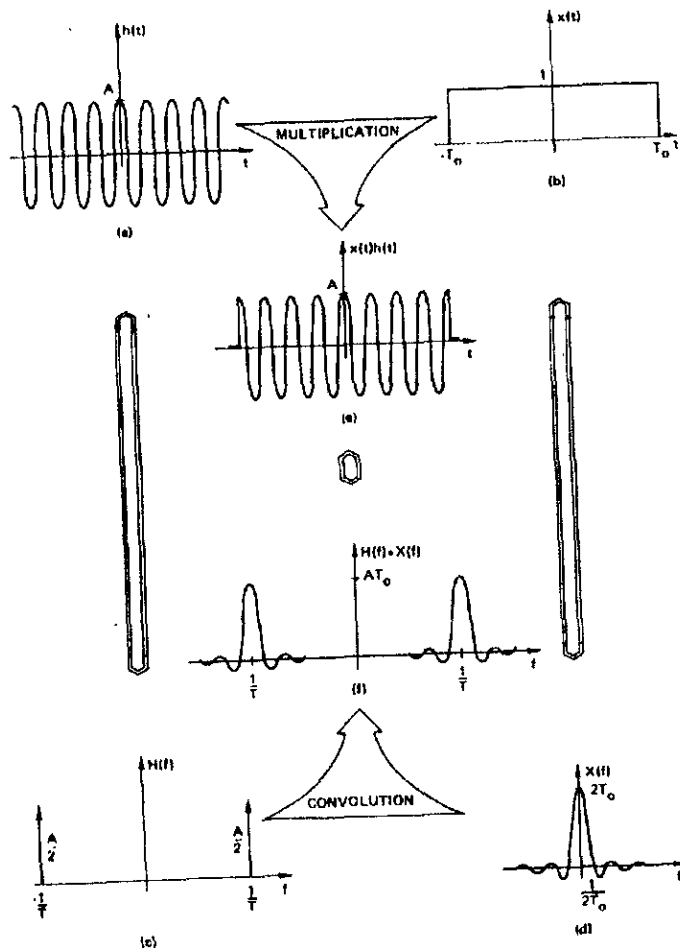


Fig.4.5 Ejemplo gráfico del teorema de frecuencia convolución [55].

## 4.2.6. SERIES DE FOURIER Y FORMAS DE ONDA MUESTREADAS.

### 4.2.6.1. SERIES DE FOURIER COMO UN CASO ESPECIAL DE LA INTEGRAL DE FOURIER.

Considere la función periódica triangular ilustrada en la Fig 4.6.(e). Se sabe que la serie de Fourier de esta forma de onda es un grupo infinito de senoides. Ahora se demostrará que una relación idéntica puede ser obtenida desde la integral de Fourier.

Para llevar a cabo la deducción, se utiliza el teorema de convolución, ecuación (4.2.5.4.1). Note que la forma de onda triangular (período  $T$ ) es simplemente la convolución del triángulo simple mostrado en la Fig.4.6.(a) y la secuencia infinita de impulsos equidistantes ilustrados en la Fig.4.6.(b). La función periódica  $y(t)$  puede entonces ser expresada por:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (4.2.6.1.1)$$

La transformada de Fourier de ambas  $h(t)$  y  $x(t)$  han sido determinadas antes y son ilustradas en las Figs.4.6.(c) y (d), respectivamente. Desde el teorema de convolución, la transformada de Fourier deseada es el producto de estas dos funciones de frecuencia:

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f) \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (4.2.6.1.2)$$

la transformada de Fourier de la función periódica es entonces un grupo de senoides con amplitudes de  $H\left(\frac{n}{T_0}\right)$ . Recordando que las series de Fourier de una función periódica es una suma infinita de senoides con amplitudes especificadas por  $\alpha_n$ , ecuación (4.2.1.4). Note que los límites de integración de la ecuación (4.2.1.4) son desde  $-\frac{T_0}{2}$  a  $\frac{T_0}{2}$  y que:

$$h(t) = y(t) \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \quad (4.2.6.1.3)$$

Por tanto la función  $y(t)$  puede ser remplazada por  $h(t)$  y la ecuación (4.2.1.4) puede ser rescrita en la forma siguiente[55]:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t) e^{-j2\pi n t} dt = \frac{1}{T_0} H(nf_0) = \frac{1}{T_0} H\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (4.2.6.1.4)$$

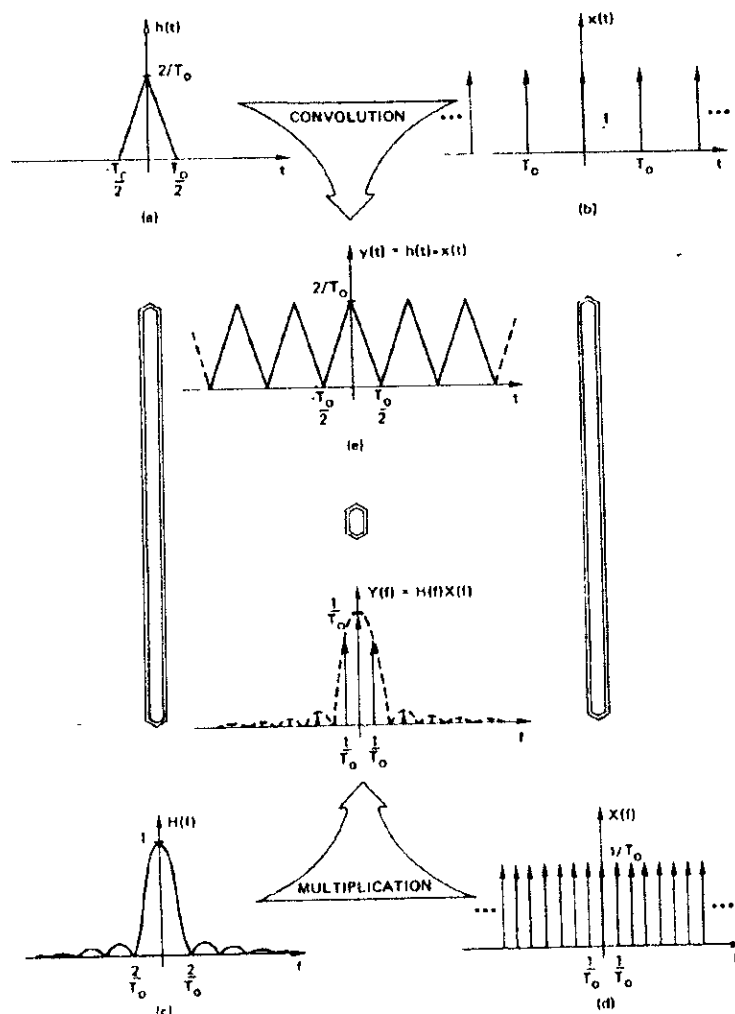


Fig.4.6. Desarrollo del teorema gráfico de convolución de la transformada de Fourier de una forma de onda periódica triangular [55].

#### 4.2.6.2. MUESTREO DE FORMA DE ONDA.

Anteriormente se desarrolló la teoría de transformada de Fourier, basándose en esto, se desarrollaran las herramientas suficientes para investigar en detalle lo teórico además de la interpretación visual del muestreo de forma de onda.

Si la función  $h(t)$  es continua en  $t = T$ , entonces una muestra de  $h(t)$  en igual tiempo para  $T$  es expresada como:

$$\hat{h}(t) = h(t)\delta(t - T) = h(T)\delta(t - T) \quad (4.2.6.2.1)$$

donde el producto puede ser interpretado en el sentido de la teoría de distribución. El impulso que sucede en un tiempo  $T$  tiene un área igual al valor de la función en un tiempo  $T$ . Si  $h(t)$  es continua en  $t = nT$  para  $n = 0, \pm 1, \dots$ , entonces,

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (4.2.6.2.2)$$

$\hat{h}(t)$  es llamada la forma de onda muestreada de  $h(t)$  con un intervalo muestra  $T$ . La  $h(t)$  muestreada es entonces una secuencia de impulsos equidistantes, donde cada una de estas amplitudes es especificada por el valor  $h(t)$  correspondiente al tiempo de acontecimiento del impulso. La Fig.4.5. ilustra gráficamente el concepto de muestreo.

Puesto que la ecuación (4.2.6.2.2) es el producto de la función continua  $h(t)$  y la secuencia de impulsos, se puede emplear el teorema de convolución de frecuencia ecuación(4.2.5.4.4), para derivar la transformada de Fourier de la forma de onda muestreada. Como se ilustra en al Fig.4.7, la función de moestreo (Fig.4.7.(e)) es igual al producto de la forma de onda  $h(t)$  mostrada en la Fig.4.7.(a) y la secuencia de impulsos  $\Delta(t)$  ilustrada en la Fig.4.7.(b). Se llamará a  $\Delta(t)$  la función de muestreo; la notación  $\Delta(t)$  siempre implicará una secuencia infinita de impulsos separados por  $T$ . La transformada de Fourier de



$h(t)$  y  $\Delta(t)$  son mostradas en las Figs.4.7.(c) y (d), respectivamente. Note que la transformada de Fourier de la función de muestreo  $\Delta(t)$  es  $\Delta(f)$ ; esta función es llamada función de frecuencia de muestreo. Desde el teorema de convolución de frecuencia, la transformada de Fourier deseada es la convolución de las funciones de frecuencia ilustradas en las Figs.4.7.(c) y (d). La transformada de Fourier de la forma de onda de muestreo es entonces una función periódica, donde un período es igual, sin una constante, a la transformada de Fourier de la función continua  $h(t)$ .

Si  $T$  es seleccionado demasiado grande, los resultados obtenidos son ilustrados en la Fig.4.8.

Note que mientras el intervalo de muestreo es aumentado [Figs.4.7.(b) y 4.8.(b)], el impulso equidistante de  $\Delta(f)$  llegará a ser más cerrado de espacio [Figs.4.7.(d) y 4.8.(d)]. Por que el espacio disminuido de la frecuencia de impulsos, su convolución de la función de frecuencia  $H(f)$  [Fig.4.8.(c)] resultado en el traslapado de la forma de onda ilustrada en al Fig.4.8.(f) [55]

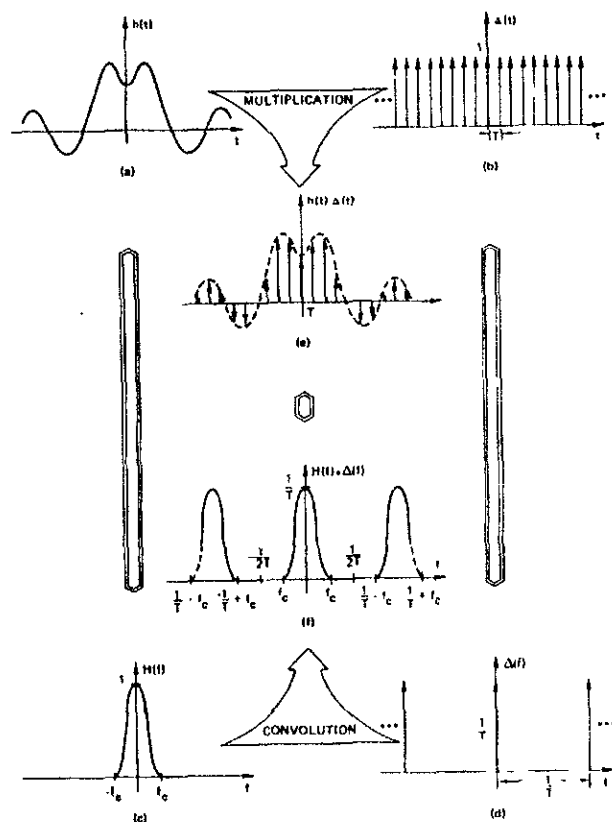


Fig. 4.7. Desarrollo gráfico del teorema frecuencia convolución de la transformada de Fourier de una forma de onda muestreada [55].

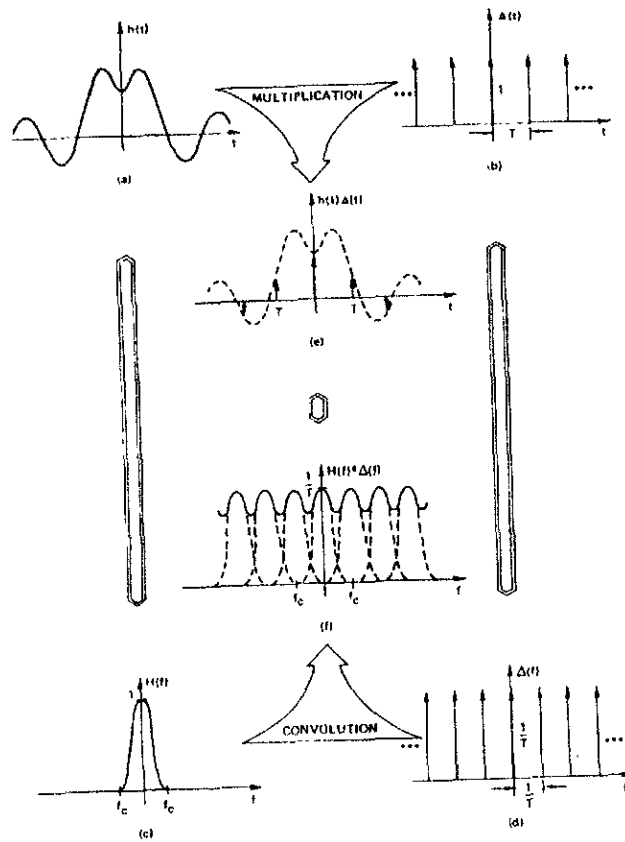


Fig.4.8. Transformada de Fourier ficticia de una forma de onda en una proporción insuficiente [55].

#### 4.6.2.3. TEOREMAS DE MUESTREO.

El teorema de muestreo [55] afirma que si la transformada de Fourier de una función  $h(t)$  es cero para más grandes que una frecuencia cierta  $f_c$ , entonces la función continua  $h(t)$  puede ser únicamente determinada desde un conocimiento de su valor muestreado.

$$\tilde{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \tag{4.6.2.3.1}$$

donde:  $T = \frac{1}{2f_c}$

En particular,  $h(t)$  es especificado por:

$$h(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t - nT)}{\pi(t - nT)} \quad (4.6.2.3.3)$$

la restricciones del teorema son ilustrados en al Fig.4.9. Primero, es necesario que la transformada de Fourier de  $h(t)$  debe ser cero para frecuencias grandes más que  $f_c$ . Como se muestra en la Fig.4.9.(c), el ejemplo de función de frecuencia será de banda limitada en al frecuencia  $f_c$ ; el término de banda limitada es un camino interrumpido de dicho que la transformada de Fourier es cero para  $|f| > f_c$ . La anchura de banda de una señal es la banda de la frecuencia positiva, donde la amplitud es no cero. La anchura de banda de la forma de onda ilustrada en la Fig.4.9.(c). es entonces  $f_c$ . La segunda restricción es que el espacio de muestreo es seleccionado como  $T = \frac{1}{2f_c}$ , que es, la función de impulso de la Fig.4.9.(d) son necesarios para ser separados por  $\frac{1}{T} = 2f_c$ . Esto espacio asegura que cuando  $\Delta(f)$  y  $H(f)$  son convolucionados, no hay muestreo ficticio. Alternativamente, las funciones  $H(f)$  y  $H(f) * \Delta(f)$ , como son ilustradas en las Figs.4.9.(c), y (f), respectivamente, son iguales en el intervalo  $|f| < f_c$ , sin una constante de escalamiento  $T$ . Entonces el muestreo ficticio resulta.

Frecuentemente  $\frac{1}{T} = 2f_c$  es conocido como la relación de muestreo Nyquist.

Especificando que estas dos son verdaderas, el teorema afirma que  $h(t)$  [Fig.4.9.(a)] puede ser reconstruida desde un conocimientos de impulsos ilustrados en la Fig.4.9.(e).

Para construir una prueba del teorema de muestreo, recordemos desde la discusión sobre restricción del teorema que la transformada de Fourier de la función de muestreo es idéntica, sin la constante  $T$ , para la transformada de Fourier de la función no muestreada, en el rango  $-f_c \leq f \leq f_c$ . De la Fig.4.9.(f), la transformada de Fourier de la función de tiempo de muestreo es especificada por  $H(f) * \Delta(f)$ .

Entonces, como se ilustra en las Figs.4.9.(a), (b) y (e), la multiplicación de la función de frecuencia rectangular de amplitud  $T$  con la transformada de Fourier de la forma de onda muestreada es la transformada de Fourier:

$$H(f) = [H(f) * \Delta(f)] \mathcal{Q}(f) \quad (4.6.2.3.4)$$

La transformada de Fourier inversa de  $H(f)$  es la forma de onda original  $h(t)$ , como es mostrada en la Fig.4.9.(f). Pero desde el teorema de convolución,  $h(t)$  es igual a la convolución de la transformada inversa de Fourier de  $H(f) * \Delta(f)$  y de la función de frecuencia rectangular. Entonces,  $h(t)$  es especificada por la convolución de  $h(t)\Delta(t)$  [Fig.4.10.(c)] y  $q(t)$  [Fig.4.10.(d)]:

$$h(t) = [h(t)\Delta(t) * q(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(nT)\delta(t-nT)] * q(t) = T \sum h(nT) \frac{\sin[2\pi f_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)} \quad (4.6.2.3.5)$$

La función  $q(t)$  es especificada por la pareja de transformada de Fourier. La ecuación (4.6.2.3.5) es la expresión deseada para reconstruir  $h(t)$  desde un conocimiento de solo el muestreo de [55]  $h(t)$ .

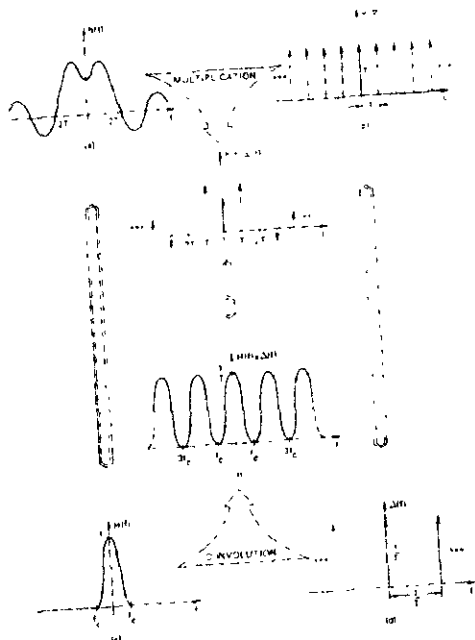


Fig.4.9. Transformada de Fourier de un muestreo de forma de onda en la proporción de muestreo de nyquist [55].

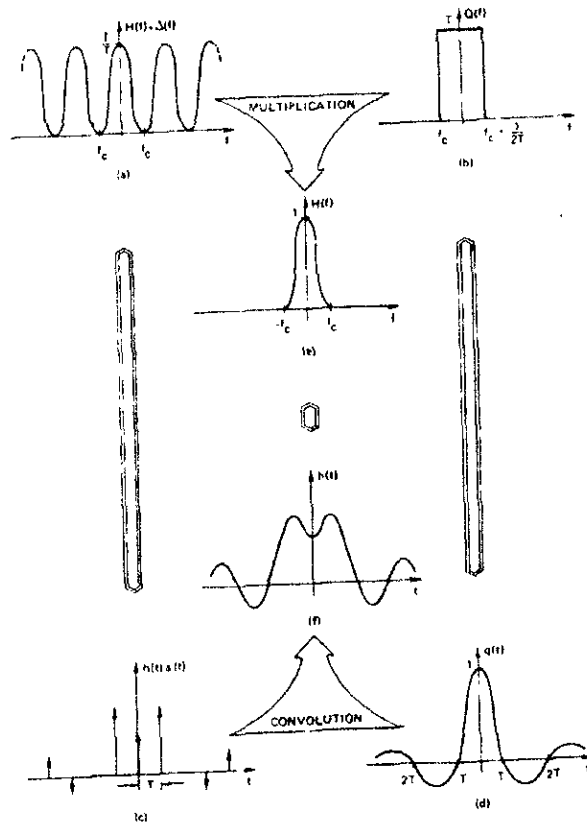


Fig.4.10. Derivación gráfica del teorema de muestreo [55].

### a) TEOREMA DE FRECUENCIA DE MUESTREO.

Análogamente para el muestreo de dominio de tiempo es un teorema de muestreo en la frecuencia de dominio. Si la  $h(t)$  es tiempo limitado, aquello es,

$$h(t) = 0 \quad |t| > T_c \quad (4.6.2.3.6)$$

entonces su transformada de Fourier  $H(f)$  puede ser únicamente determinada desde un muestreo equidistante de  $H(f)$ . En particular,  $H(f)$  es especificada por [55]:

$$H(f) = \frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{2T_c}\right) \frac{\text{sen}\left[2\pi T_c\left(f - \frac{n}{2T_c}\right)\right]}{\pi\left(f - \frac{n}{2T_c}\right)} \quad (4.6.2.3.7)$$

#### 4.2.7- LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA.

Como se sabe la transformada de Fourier discreta es un caso especial de la transformada de Fourier continua. Sin embargo muchas aplicaciones difieren de la transformada de Fourier continua la cual depende de una computadora digital para su implementación, que lleva a usar la transformada de Fourier discreta y por lo tanto también la transformada de Fourier rápida. Ambas se aproximan dando resultados idénticos.

La transformada de Fourier discreta es entonces un caso especial de la transformada de Fourier continua. La transformada de Fourier discreta de la función original  $h(t)$  es:

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT)e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2.7.1)$$

y su transformada de Fourier discreta inversa es dada por [55]:

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2.7.2)$$

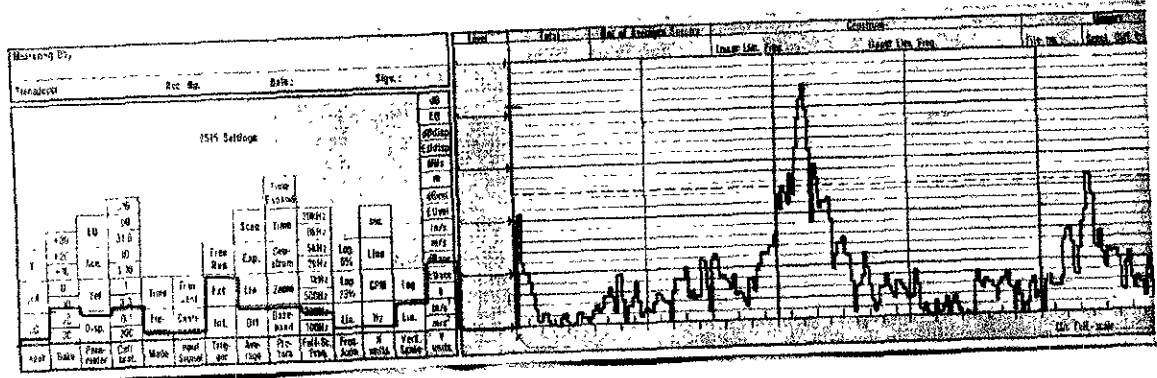
#### 4.2.8. TRANSFORMADA DE FOURIER RAPIDA (FFT).

Para interpretar una FFT no es necesario la enseñanza profunda de su propio algoritmo. Pero de preferencia se necesita un profundo conocimiento de la transformada de Fourier discreta. Con el algoritmo de la FFT se puede calcular más rápidamente la transformada de Fourier discreta.

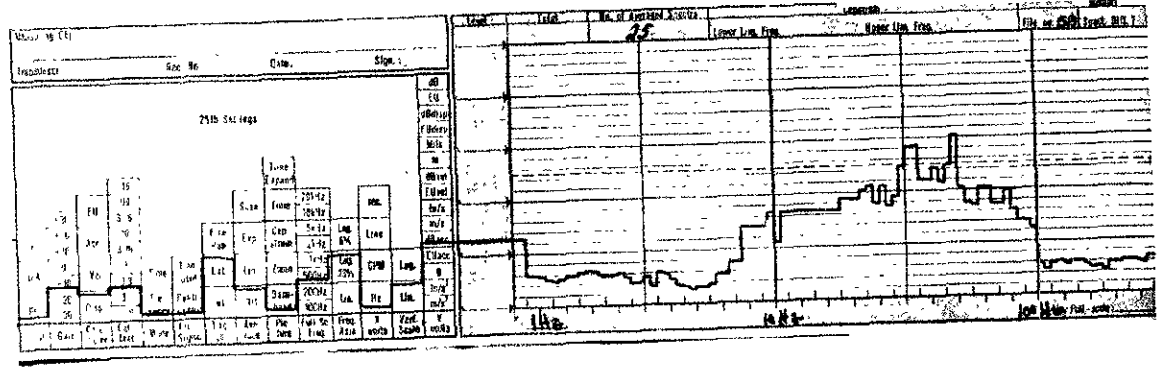
Un ejemplo de matriz de descomposición de factores es usada para justificar intuitivamente el algoritmo de la FFT. La cual es [55 y 56]:

$$X(n) = W^{nk} x_0(k) \quad (4.2.8.1)$$

En forma concisa se tiene una función  $h(t)$  se obtiene su transformada de Fourier  $H(f)$  dentro del intervalo  $(-\infty a \infty)$ , la transformada de Fourier analiza un cierto ancho de banda y se interpreta su gráfica dando un diagnóstico actual de la maquinaria rotativa, como lo ilustra la Fig.4.11, la cual es un ejemplo de una vibración en una pista de un balero, en un esmerilador industrial el cual tiene como velocidad de giro 208 rpm.



(a)



(b)

Fig.4.11. Espectro lineal de frecuencias.

- a) Refleja alta vibración en la pista del balero.
- b) Refleja una baja vibración en la pista del balero.

**4.2.9. METODO DE SUPERPOSICION.**

**Principio de superposición o linealidad. teorema.4.2.9.1.** Sea  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación diferencial homogénea  $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$  en un intervalo, entonces:  $y = c_1y_1(x)$ ,  $y = c_2y_2(x)$

Y  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  son también solución en el intervalo. Donde  $c_1, c_2 \in R$ .

**COROLARIO.** Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre tiene una solución  $y = 0$ , y es la solución trivial de la ecuación. (Este teorema no se aplica si la ecuación no es homogénea o no es lineal [106].

La resolución de la ecuación diferencial no homogénea:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (4.2.9.1)$$

supondremos que las funciones  $p$ ,  $q$  y  $g$  son continuas sobre un intervalo de interés.

En la ingeniería moderna, el problema de resolver la ecuación (4.2.9.1) se menciona con frecuencia como problema de entrada y salida. Suponiendo, por el momento, que la ecuación diferencial (4.2.9.1) representa un cierto sistema mecánico o eléctrico, es natural considerar a la solución  $y = f(x)$  como la salida del sistema. Los coeficientes  $p$  y  $q$  son determinados por el mecanismo físico y el término no homogéneo  $g$  es la función de entrada.

El problema de resolver (4.2.9.1) corresponde a determinar la salida del sistema para diferentes funciones de entrada.

Antes de considerar casos particulares de La ecuación (4.2.9.1), probaremos varios resultados generales sencillos, pero útiles, que simplificarán el trabajo subsecuente.

**Teorema.4.2.9.2.** La diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación diferencial (4.2.9.1),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

es una solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea



$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.2.9.2)$$

Para probar este teorema supongamos, que las funciones  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones de la ecuación (4.2.9.1). Entonces

$$\begin{aligned} L[u_1] &= g, \\ y \\ L[u_2] &= g. \end{aligned}$$

restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$L[u_1] - L[u_2] = 0,$$

o, como  $L$  es un operador lineal,

$$L[u_1 - u_2] = 0,$$

que es el resultado deseado.

**Teorema.4.2.9.3.** Dada una solución  $y_p$  de la ecuación diferencial lineal no homogénea (4.2.9.1),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

entonces cualquier solución  $y = f(x)$  de esta ecuación puede expresarse como:

$$f(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

(4.2.9.3)

donde:  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente.

La combinación lineal (4.2.9.3) es la solución general de la ecuación (4.2.9.1).

Por consiguiente, para encontrar la solución general de la ecuación (4.2.9.1), debemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea (4.2.9.2) y luego, encontrar cualquier solución de la ecuación no homogénea. Como sabemos, la solución general de la ecuación (4.2.9.1) contiene dos constantes arbitrarias y por lo tanto, para especificar una solución única de la ecuación (4.2.9.1), es necesario especificar dos condiciones adicionales, a saber, las condiciones iniciales  $y(x_0) = y_0$  y  $y'(x_0) = y'_0$ .

La solución general de la ecuación homogénea (4.2.9.2) a menudo recibe el nombre de solución complementaria y se denota por  $y_c$ . De aquí que  $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ . Una solución de la ecuación no homogénea  $y_p$  por lo general se le llama solución particular. Note que  $y_p$  no es única ya que, si  $Y$  es una solución de la ecuación no homogénea, entonces  $Y$  más un múltiplo de  $y_1$  o de  $y_2$  aún es una solución de la ecuación no homogénea. Del teorema 4.2.9.3 se deduce que la solución general de la ecuación no homogénea (4.2.9.1) es:

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

(4.2.9.4)

en muchos problemas, el término no homogéneo  $g$  puede ser muy complicado; sin embargo, si  $g$  puede expresarse como la suma de un número infinito de funciones, podemos hacer uso de la linealidad de la ecuación diferencial para remplazar el problema original por varios más simples. Por ejemplo, supongamos que es posible escribir  $g(x)$

como:  $g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)$ ; entonces, la ecuación (4.2.9.1) se transforma en:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x). \quad (4.2.9.5)$$

si podemos encontrar las soluciones particulares  $y_p$  de las ecuaciones diferenciales

$$L[y] = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2.9.6)$$

entonces, por sustitución directa se deduce que:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pm}(x) \quad (4.2.9.7)$$

Es una solución particular de la ecuación (4.2.9.5). Por lo tanto, la solución general de la (4.2.9.5) es de la forma:

$$y = y_c(x) + y_{p1}(x) + \dots + y_{pm}(x) \quad (4.2.9.8)$$

En general, es más fácil encontrar soluciones de las ecuaciones (4.2.9.6) y sumar los resultados que resolver la ecuación (4.2.9.5) como esta. Este método para elaborar la solución de un problema complicado, por medio de la suma de soluciones de problemas más simples, se conoce como método de **superposición** [107].

### 4.3. DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO.

En esta parte se obtendrán los modelos matemáticos teóricos que servirán para estudiar el fenómeno de vibración en el turbosoplador, primeramente será en forma radial, tanto del eje  $x$ , como en del eje  $y$ , así como también del eje  $z$  en forma axial. Con la obtención de los modelos matemáticos de los ejes  $x$  y  $y$ , y con la correspondiente transformación de Fourier se obtendrán los espectros de frecuencia que confirmarán el desbalanceo en el turbosoplador, en el caso del eje  $z$  los espectros de frecuencia confirmarán el desalineamiento entre cojinetes. Por lo tanto las funciones que se obtengan al resolver los modelos y al aplicar las herramientas matemáticas adecuadas ( Método de Superposición, estabilidad Dinámica), y a las soluciones obtenidas  $h(t)$ , se les aplicará una transformada de Fourier Discreta, ayudándose del algoritmo de la transformada de Fourier Rápida, la cual servirá para obtener un espectro lineal, con esto se podrá determinar las condiciones actuales de la maquinaria, siendo que las condiciones mecánicas de una maquinaria son inicialmente desconocidas, será necesario hacer un análisis completo de vibración para detectar cualquier problema existente.

Los datos obtenidos en campo son los siguientes:

1. Velocidad angular del motor en r.p.m = 3600 rpm.
2. Velocidad angular ( $\omega$ ) del eje con impulsor en Hz=60 Hz.
3. Número de balero SKF.
4. Número de bolas ( $Z$ ).
5. Diámetro de la bola ( $d_{bola}$ ).
6. Diámetro de la circunferencia de contacto en el collar exterior ( $D'$ ).
7. Diámetro de la circunferencia de contacto en el collar interior ( $d'$ ).

8. Diámetro medio del balero ( $d_{med}$ ).
9. La carga normal ( $Q$ ).
10. La masa de las bolas ( $m_{bolas}$ ).
11. La masa del eje ( $m_{eje}$ ).
12. La masa del impulsor ( $m_{impulsor}$ ).
13. La masa equivalente del sistema eje-impulsor ( $m_e$ ) =  $m_{eje} + m_{impulsor}$ .

El turbosoplador que se analizó está representado en la Fig. 12.

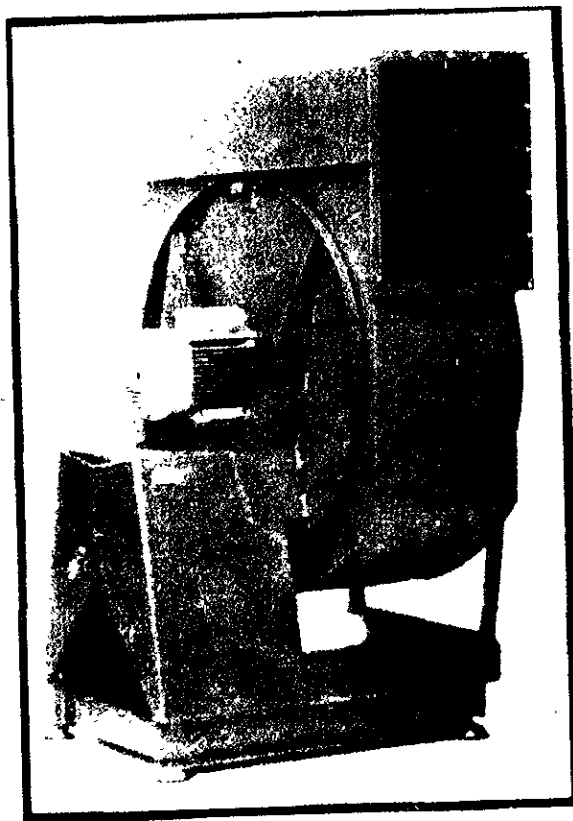


Fig.12. Turbosoplador.

El sistema equivalente de la Fig.12 es el siguiente:

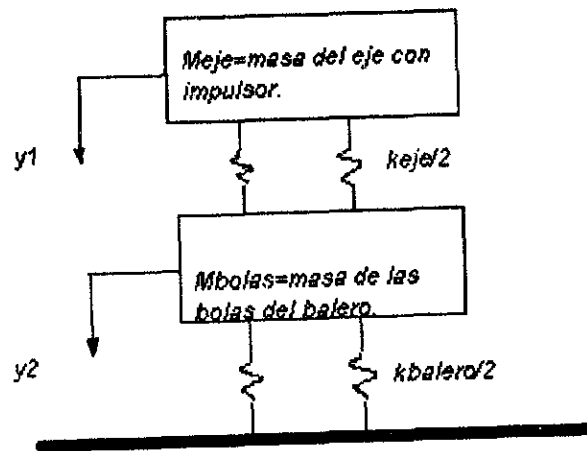
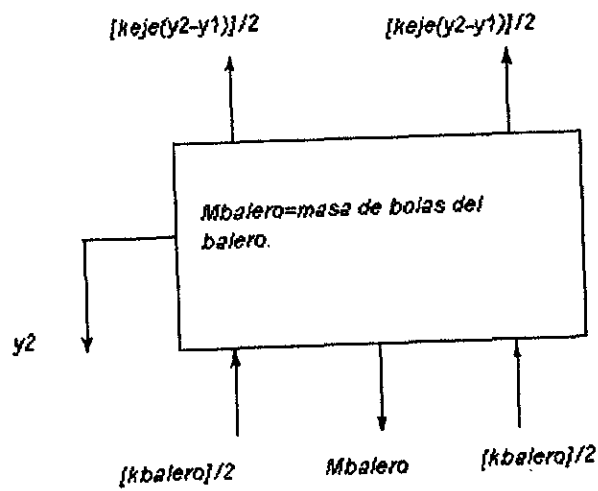
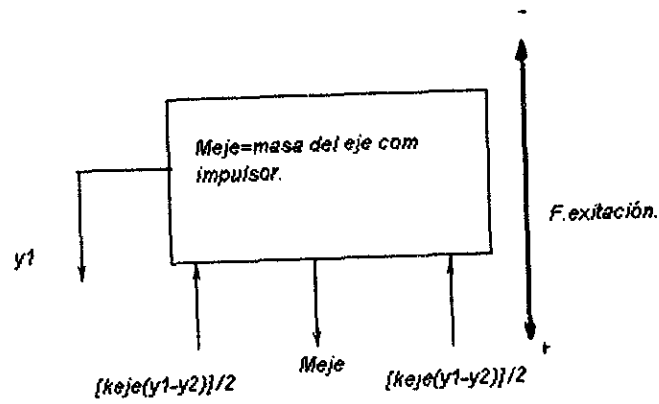


Fig.13. Sistema equivalente masa-resorte del turbosoplador.

Los diagramas de cuerpo libre son los siguientes (sirven para ambos ejes):



De los diagramas de cuerpo libre obtenemos las siguientes ecuaciones:

Aplicando la segunda ley de Newton en eje-impulsor se obtiene lo siguiente:

$$M_{\text{eje}} y_1'' + \frac{k_{\text{eje}}(y_1 - y_2)}{2} + \frac{k_{\text{eje}}(y_1 - y_2)}{2} = M_0 \omega^2 e \text{sen}(\omega t) \quad (4.3.1)$$

Aplicando de nuevo la segunda ley de Newton en balero se obtiene lo siguiente:

$$M_{\text{balero}} y_2'' + \frac{k_{\text{eje}}(y_2 - y_1)}{2} + \frac{k_{\text{eje}}(y_2 - y_1)}{2} + \frac{k_{\text{balero}} y_2}{2} + \frac{k_{\text{balero}} y_2}{2} = 0 \quad (4.3.2)$$

Ahora lo hacemos para el eje "x" la fuerza radial (excitación) es la misma para ambos ejes.

Por la segunda ley de Newton en eje-impulsor se obtiene lo siguiente:

$$M_{\text{eje}} x_1'' + \frac{k_{\text{eje}}(x_1 - x_2)}{2} + \frac{k_{\text{eje}}(x_1 - x_2)}{2} = M_0 \omega^2 e \text{sen}(\omega t) \quad (4.3.3)$$

Por la segunda ley de Newton en el balero se obtiene lo siguiente:

$$M_{\text{balero}} x_2'' + \frac{k_{\text{eje}}(x_2 - x_1)}{2} + \frac{k_{\text{eje}}(x_2 - x_1)}{2} + \frac{k_{\text{balero}} x_2}{2} + \frac{k_{\text{balero}} x_2}{2} = 0 \quad (4.3.4)$$

Las ecuaciones (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) y (4.3.4) son los modelos matemáticos correspondientes a los ejes  $x$  y  $y$ , en forma radial.

En todas las máquinas rotativas industriales, el rotor presenta un movimiento axial, el cual es ejercido por la fuerza centrífuga en el disco, dicha fuerza centrífuga tiende a sacarlo de su posición de equilibrio, en este caso el disco esta situado cerca de uno de los apoyos y especialmente está localizado a la saliente de la flecha, el cual no girará en su propio plano. Entonces en el sistema equivalente de La Fig.14. el rotor tendrá una velocidad que depende de que las fuerzas centrífugas de las diferentes partículas del disco, y que no necesariamente están situadas en un mismo plano, y en consecuencia originan un par que tiende a enderezar la flecha, suponiendo que la máquina está totalmente balanceada y con niveles de vibración aceptables, en caso contrario se presenta el efecto giroscópico, generado por desbalanceo, desalineamiento, deformación de la flecha y por lógica movimiento axial.

Por lo que se obtendrán las ecuaciones de movimiento del eje Z, Auxiliándose del apéndice A. se obtendrán los modelos correspondientes.

El sistema equivalente de la Fig.12, esta representado por la Fig. 14, como se muestra:

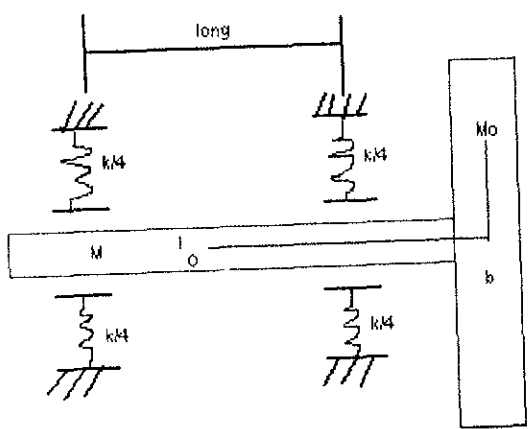


Fig. 14. Sistema eje impulsor apoyado en baleros.

Auxiliándonos de los fundamentos establecidos en el apéndice "A" y figuras, consideremos el movimiento simétrico, del tipo mostrado en la Fig.7.(a),(apéndice



"A") Para escribir las ecuaciones de movimiento en este caso, usaremos las ecuaciones de Euler modificadas [ ecs.(8) del apéndice "A"], y tomaremos como ejes  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , a los ejes OM, ON y O $\zeta$ , respectivamente, en la forma indicada en la Fig.9,(apéndice "A"). Tomamos los ejes O $\zeta$  y ON de tal manera que coincidan con OO y O $_1$ O $_1$  de la Fig.9.(b),(apéndice "A"), que representan, respectivamente, al eje del giroscopio y al eje de rotación del anillo interior NN. Sean  $\Omega_m$ ,  $\Omega_n$  y  $\Omega_\zeta$  las componentes del momentum angular

(Impulso y rotación)  $\Omega$ , y  $w_m'$ ,  $w_n'$  y  $w_\zeta'$  las componentes de la velocidad angular del triedro OMN $\zeta$ , observamos que la posición del triedro OMN $\zeta$  queda definida por completo por los ángulos  $\psi$  y  $\theta$ . Las correspondientes componentes de la velocidad angular en las direcciones Oz y ON son  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\theta}$ , respectivamente. Proyectando estas componentes sobre los ejes móviles OM, ON y O $\zeta$  obtenemos:

$$w_m' = -\dot{\psi} \sin\theta, \quad w_n' = \dot{\theta}, \quad w_\zeta' = \dot{\psi} \cos\theta \quad (4.3.5)$$

Las componentes  $w_m, w_n$ , y  $w_\zeta$  de la velocidad angular del cuerpo del giroscopio se obtienen considerando, además de las componentes (4.3.5), la velocidad angular del giroscopio respecto del triedro OMN $\zeta$ . De aquí, resulta:

$$w_m = -\dot{\psi} \sin\theta, \quad w_n = \dot{\theta}, \quad w_\zeta = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \quad (4.3.6)$$

Usando estos valores de las componentes de la velocidad angular del giroscopio, y observando que para un giroscopio simétrico ON y OM son siempre ejes principales, obtenemos:

$$\Omega_m = -I_1 \dot{\psi} \sin\theta, \quad \Omega_n = I_1 \dot{\theta}, \quad \Omega_\zeta = I(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta) \quad (4.3.7)$$

Sustituyendo estas componentes del momentum angular y las componentes (4.3.5) de la velocidad angular  $w'$  en las ecuaciones [ecs.(8) Apéndice "A"], obtenemos, para las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}
 -I_1 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) + I \dot{\theta} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I_1 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta &= \Lambda_m \\
 I_1 \dot{\theta} - I_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I \dot{\psi} \sin \theta (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) &= \Lambda_n \quad (4.3.8) \\
 I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) &= \Lambda_\zeta
 \end{aligned}$$

donde:  $\Lambda_m$ ,  $\Lambda_n$  y  $\Lambda_\zeta$  son los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre el giroscopio respecto de los ejes OM, ON y  $O\zeta$ , respectivamente.

Supondremos que el giroscopio gira alrededor de su propio eje con una velocidad angular considerable, de manera que  $\dot{\phi}$  sea muy grande en comparación con  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\theta}$ . Despreciando, entonces, los términos de las ecuaciones (4.3.8) que contienen a  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\theta}$  como factores comparados con los términos que contienen a  $\dot{\phi}$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
 -I_1 \dot{\psi} \sin \theta + I \dot{\theta} \dot{\phi} &= \Lambda_m \\
 I_1 \dot{\theta} + I \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta &= \Lambda_n \\
 I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) &= \Lambda_\zeta
 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Supongamos ahora que sobre el giroscopio no actúan fuerzas exteriores; de la tercera de las ecuaciones (4.3.9) deducimos, entonces que  $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$  es constante y, en primera aproximación, no podemos despreciar a

$\dot{\psi} \cos \theta$  en comparación con  $\dot{\phi}$  y suponer  $\dot{\phi} = w$ . Por consiguiente, las dos primeras ecuaciones de (4.3.9) resultan:

$$\begin{aligned} -I_1 \dot{\psi} \sin \theta + I w \dot{\theta} &= 0 \\ I_1 \dot{\theta} + I w \dot{\psi} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Para resolver estas ecuaciones suponemos que el eje del giroscopio forma un ángulo recto con el eje  $z$ , de tal manera que  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\psi = 0$  cuando  $t=0$ . Dando al giroscopio velocidades iniciales pequeñas  $\theta_0$  y  $\psi_0$  por medio de un momentum angular, podemos estudiar, usando las ecuaciones (4.3.10) el movimiento que sigue. Si el desplazamiento correspondiente tiene tendencia a permanecer siempre pequeño, tendremos la prueba de que un giroscopio que gira rápidamente está animado de un movimiento estable. Si suponemos que  $\sin \theta$  difiere de la unidad en una pequeña cantidad solamente, de las ecuaciones (4.3.10) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -I_1 \dot{\psi} + I w \dot{\theta} &= 0 \\ I_1 \dot{\theta} + I w \dot{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Interesa cuando existe una fuerza externa (momento externo) que actúa en el giroscopio  $\Lambda_n$  respecto del eje móvil ON, coincidente con el  $O_1O_1$  de la Fig.7.(b).(apéndice A), luego en lugar de las ecuaciones (4.3.11), escribimos:

$$\begin{aligned} -I_1 \dot{\psi} + I w \dot{\theta} &= 0 \\ I_1 \dot{\theta} + I w \dot{\psi} &= \Lambda_n \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Eliminando  $\theta$  y introduciendo la notación  $p^2 = \frac{I^2 w^2}{I_1^2}$ , encontramos:

$$\ddot{\psi} + p^2 \dot{\psi} = \frac{p^2}{I w} \Lambda_n.$$

La solución de la ecuación general de esta ecuación es:

$$\psi = C_1 + C_2 \cos pt + C_3 \sin pt + \frac{\Lambda_n}{Iw} t.$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (4.3.12) encontramos:

$$\theta = \frac{I_1}{Iw} \psi = -p (C_2 \cos pt + C_3 \sin pt)$$

y por integración se tiene.

$$\theta = - C_2 \sin pt + C_3 \cos pt + C_4$$

las constantes de integración  $C_1, \dots, C_4$  deben determinarse en cada paso particular según las condiciones iniciales del movimiento. Supongamos por ejemplo que para  $t=0$

$$\psi = 0, \quad \theta = \frac{\Pi}{2}, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = 0.$$

luego;

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 p + \frac{\Lambda_n}{Iw} = \psi_0, \quad C_3 + C_4 = \frac{\Pi}{2}, \quad C_2 = 0,$$

y encontramos:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{Iw} \right), \quad C_4 = \frac{\Pi}{2} - \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{Iw} \right).$$

Los ángulos  $\psi$  y  $\theta$  son, entonces:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{I\omega} \right) \operatorname{sen} pt + \frac{\Lambda_n t}{I\omega}, \\ \theta &= \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{I\omega} \right) \cos pt + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{I\omega} \right).\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

Los términos

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{p} \left( \psi_0 - \frac{\Lambda_n}{I\omega} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\Lambda_n t}{I\omega}$$

indican que, debido a la velocidad inicial  $\psi_0$  el eje del giroscopio resulta levemente desplazado de la dirección perpendicular al eje  $z$  y gira alrededor de dicho eje con velocidad angular uniforme

$$w_1 = \frac{\Lambda_n}{I\omega} \quad (4.3.14)$$

sobre esta **precesión regular** están superpuestas pequeñas oscilaciones de alta frecuencia, representadas por los términos trigonométricos de las ecuaciones (4.3.13).

Las ecuaciones del modelo matemático para el eje  $z$  del momento externo son:

$$\begin{aligned}\Lambda_m &= I\dot{\theta} & \dot{\phi} &= -M_m, \\ \Lambda_n &= I\dot{\psi} & \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta &= -M_n, \\ \Lambda_z &= I\ddot{\phi} & &= -M_\zeta.\end{aligned}\quad (4.3.15)$$

Aplicaremos método de superposición correspondiente para obtener las soluciones de funciones  $h(t)$  de  $(-\infty \text{ a } \infty)$ , y obtendremos su transformada de Fourier discreta  $H(f)$ , obteniendo una resolución de espectro de lineal.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias reordenadas son:

$$M_{eje} y_1'' + k_{eje} (y_1 - y_2) = M_0 w^2 e \operatorname{sen}(wt) \quad (4.3.16)$$

$$M_{balero} y_2'' + k_{eye} (y_2 - y_1) + k_{balero} y_2 = 0 \quad (4.3.17)$$

$$M_{eye} x_1'' + k_{eye} (x_1 - x_2) = M_0 w^2 e \operatorname{sen}(wt) \quad (4.3.18)$$

$$M_{balero} x_2'' + k_{eye} (x_2 - x_1) + k_{balero} x_2 = 0 \quad (4.3.19)$$

la solución de las ecuaciones (4.3.16) y (5.3.17) es la solución general,  $y = y_c + y_p$  del sistema no homogéneo, es la función en forma general del modelo matemático para el eje  $y$  en forma radial es el siguiente:

$$y_1 = c_1 \cos(\Psi_1 t) + c_2 \operatorname{sen}(\Psi_1 t) + c_3 \cos(\Psi_2 t) + c_4 \operatorname{sen}(\Psi_2 t) +$$

$$+ \left[ \frac{M_0 e w^2 (k_{eye} + k_{balero} - M_{balero} w^2)}{(k_{eye} - M_{eye} w^2)(k_{eye} + k_{balero} - M_{balero} w^2) - k_{eye}^2} \cos(wt) \right]$$

$$y_2 = \left( \frac{k_{eye} - M_{eye} \Psi_1}{k_{eye}} \right) c_1 \cos(\Psi_1 t) + \left( \frac{k_{eye} - M_{eye} \Psi_1}{k_{eye}} \right) c_2 \operatorname{sen}(\Psi_1 t) +$$

$$+ \left( \frac{k_{eye} - M_{eye} \Psi_2}{k_{eye}} \right) c_3 \cos(\Psi_2 t) + \left( \frac{k_{eye} - M_{eye} \Psi_2}{k_{eye}} \right) c_4 \operatorname{sen}(\Psi_2 t) +$$

$$- \left[ \frac{M_0 e w^2 k_{eye}}{(k_{eye} - M_{eye} w^2)(k_{eye} + k_{balero} - M_{balero} w^2) - k_{eye}^2} \cos(wt) \right] \quad (4.3.20)$$

Se dan condiciones iniciales y calculamos las constantes y obtendremos un caso particular.

Exactamente se procede con las ecuaciones (4.3.18) y (4.3.19) obteniendo la siguiente solución general,  $x = x_c + x_p$  del sistema no homogéneo, es la función general del modelo matemático en el eje  $x$  es el siguiente:

$$x_1 = c_1 \cos(\Psi_1 t) + c_2 \text{sen}(\Psi_1 t) + c_3 \cos(\Psi_2 t) + c_4 \text{sen}(\Psi_2 t) +$$

$$\left[ \frac{M_0 e w^2 (k_{eje} + k_{balero} - M_{balero} w^2)}{(k_{eje} - M_{eje} w^2)(k_{eje} + k_{balero} - M_{balero} w^2) - k_{eje}^2} \cos(wt) \right]$$

$$x_2 = \left( \frac{k_{eje} - M_{eje} \Psi_1}{k_{eje}} \right) c_1 \cos(\Psi_1 t) + \left( \frac{k_{eje} - M_{eje} \Psi_1}{k_{eje}} \right) c_2 \text{sen}(\Psi_1 t) +$$

$$+ \left( \frac{k_{eje} - M_{eje} \Psi_2}{k_{eje}} \right) c_3 \cos(\Psi_2 t) + \left( \frac{k_{eje} - M_{eje} \Psi_2}{k_{eje}} \right) c_4 \text{sen}(\Psi_2 t) +$$

$$\left[ \frac{M_0 e w^2 k_{eje}}{(k_{eje} - M_{eje} w^2)(k_{eje} + k_{balero} - M_{balero} w^2) - k_{eje}^2} \cos(wt) \right] \tag{4.3.21}$$

#### **4.4. INTERPRETACION DE RESULTADOS.**

La interpretación de los modelos obtenidos anteriormente para un caso particular del turbosoplador, fue llevada a cabo por un analizador de frecuencias, propiedad de la UNAM, este estudio experimental se realizó en dos etapas; la primera fue hecha el día 9 de septiembre de 1998, y la segunda el día 8 de marzo de 1999. De los espectros de línea dados por el aparato, se analizaron los puntos más importantes, los cuales sirvieron para analizar el estado actual de la máquina.

#### **Las condiciones del equipo fueron las siguientes:**

1. Calentamiento excesivo en baleros y flecha.
2. No arranca el equipo en funcionamiento normal (anteriormente lo hacia por un corto tiempo). El interruptor térmico se bota impidiendo la marcha normal del motor.

#### **Conclusiones del Análisis de Vibraciones:**

1. Aumento del nivel de vibración (con respecto a la anterior medición).
2. Flecha deformada y posible desalineación entre baleros.
3. Juego excesivo mecánico.
4. Aumento de desequilibrio en el impulsor.

#### **Recomendaciones:**

1. Ver la posibilidad de cambio de flecha.
2. Centrar el rotor dentro de la carcasa.
3. Checar alineación entre baleros.
4. Balancear estáticamente y dinámicamente el impulsor.



## CAPITULO V. CONCLUSIONES.

A través de la presente tesis fueron satisfechos los siguientes objetivos:

- Se estableció un marco metodológico para determinar el estado actual de la maquinaria industrial rotativa.
- Se establecieron, los modelos matemáticos de interés del rotor en forma general, considerando las variables y constantes más importantes.
- Se establecieron los parámetros de alarma de la amplitud de vibración en el turbosoplador.
- Se especificaron las fallas más comunes en el turbosoplador.
- Para diagnosticar el turbosoplador se utilizó un analizador de vibraciones propiedad de la UNAM.(Tecnología de vanguardia).
- Se estudió el fenómeno giroscópico en el turbosoplador.

Se obtuvieron los modelos matemáticos correspondientes al turbosoplador, donde las soluciones se expresaron en forma general, para verificarlo se usó el analizador de vibraciones wavepak (propiedad de la UNAM) para dar una interpretación real de los modelos obtenidos teóricamente para un caso particular (condiciones actuales del turbosoplador), de los espectros lineales obtenidos por el aparato se tomaron los puntos más altos de amplitud de vibración, los cuales permitieron diagnosticar el estado actual del turbosoplador.

Los puntos más importantes que se tomaron en cuenta son los siguientes:

Primer punto:

RPM	1xRPM	2xRPM
3540	0.2845	1.16
3540	1.03296	0.218
3540	0.972	0.201

Segundo punto:

RPM	1xRPM	2xRPM
3540	0.4086	1.019
3540	0.524	0.382
3540	1.216	0.3484

Con los datos obtenidos en las tablas se concluye lo siguiente:

- Se presentó una amplitud de vibración alta en el sentido radial, lo cual indicó la presencia de un desbalanceo.
- Se presentó una amplitud de vibración en el sentido axial, lo cual indicó la presencia de un desalineamiento entre baleros.
- Se presentó una deflexión en la flecha reflejada en los segundos puntos representada en las tablas ( la segunda armónica).
- Hubo una disipación de energía a través de los baleros y flecha y como consecuencia se tuvo una interrupción continua de corriente.

Finalmente con el marco metodológico establecido, se puede incursionar en futuros proyectos como por ejemplo:

1. Mejorar la severidad de vibración en las máquinas rotativas establecida por las normas ISO.2954 ó normas nacionales iguales.
2. Analizar robots industriales, estableciendo sus niveles aceptables de vibración.
3. Analizar y diagnosticar válvulas de control.
4. Analizar y diagnosticar medidores de flujo.
5. Análisis de elemento finito en turbinas.
6. Análisis torsional en turbinas.
7. Análisis de cojinetes magnéticos.
8. Diseño de bombas centrifugas por medio de las técnicas de elemento finito y análisis modal.

Con lo cual se concluye que para analizar una máquina rotativa industrial en una de las líneas de producción, se debe establecer un marco metodológico así como tener una amplia experiencia profesional en el campo, que permita obtener los modelos matemáticos correspondientes y contar con un analizador de vibraciones, para enlazar la teoría con la práctica en este ramo y dar resultados concretos del análisis.

Para rediseñar el sistema se tendrían que analizar las respuestas de amplitud de vibración con otros procedimientos, como por ejemplo análisis modal.

- [1] LIPOVSZKY G. and VARGA G.  
*Vibración testing of de machines and their maintenance*  
Printed in Hungary. Ed. Elsevier. 1990
- [2] Mc. CONNELL K. G.  
*Vibración testing. theory and practice.*  
Printed in the United States of America. Ed. Jonh Willey & Sons, Inc. 1995
- [3] DEN HARTOG J. P.  
*Mecánica de las vibraciones*  
Impreso en México. Ed. C.E.C.S.A. 1987
- [4] . STEIDEL, Jr. R. F.  
*Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*  
Impreso en México. Ed. C.E.C.S.A. 1981
- [5] ROCA V. R. LEÓN L. J.  
*Vibraciones mecánicas*  
Impreso en México. Ed. Limusa. 1985
- [6] THOMSON W. T.  
*Teoría de vibraciones. aplicaciones*  
Impreso en México. Ed. Prentice Hall. 1998
- [7] MABIE H. H.  
*Mecanismos y dinámica de maquinaria*  
Impreso en México. Ed. LIMUSA. 1985
- [8] LAFITA B. F.  
*Vibraciones mecánicas en ingeniería*  
Impreso en Madrid España. Ed. I.N.T.A. 1964

- [9] KÖRNER F. N.  
*Fourier Analysis.*  
Printed in the United States of America. Ed. Cambridge University Press. 1989
- [10] ELLIOTT D. F.  
*Fast transforms. algorithms, analyses, applications*  
Printed in the United States of America. Ed. Academic Press. 1988
- [11] KINSLER L. E.  
*Fundamentos de acústica*  
Printed in the United States of America. Ed. John Willey & Sonc inc. 1967
- [12] LEÓN L. J.  
*Dinámica de máquinas*  
Impreso en México. Ed. Limusa. 1983
- [13] TIMOSHENCO Y YOUNG  
*Dinámica superior*  
Impreso en España. Ed. Urmo. 1971
- [14] MANLEY R. G.  
*Waveform Analysis*  
Printed in the United States of America. Ed. Chapman & Hall Ltd. 1950
- [15] DR. BADGLEY R. H.  
*Machinery vibración seminar*  
*Printed in the United States of America. Ed. Mechanical technology.*  
*incorporated. 1973.*
- [16] BRÜEL&KJAER  
*Mantenimiento predictivo.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S. 1984

- [17] BRÜEL&KJAER.  
*Machine condition monitoring.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S. 1989
- [18] BRÜEL&KJAER.—1982  
*Measuring vibrati3n.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S. 1982
- [19] BRÜEL&KJAER  
*Fiel guide vibrati3n analyzer type 2515.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S. 1987
- [20] TRAMPE B. J.  
*Mechanical vibrati3n and shock measurements*  
Printed in Denmark. Ed. The application of de brüel&kjaer measuring  
Systems. 1973.
- [21] BRÜEL&KJAER  
*Permanent vibrati3n-monitoring.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [22] BRÜEL&KJAER.  
*Piezoelectric accelerometers.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [23] BRÜEL&KJAER  
*Structural testing using modal analysis.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S

- [24] BRÜEL&KJAER  
*dynamic desing verificati3n of a prototype rapid transit train using modal analysis.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [25] BRÜEL&KJAER.—1987  
*Vibrati3n analyzer type 2515.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [26] BRÜEL&KJAER  
*To remain competitive in the nineties and beyond, conditi3n based maintenance and protecti3n is a vital part of your industry's future.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [27] WAVEPAK.  
*Real-time vibrati3n alnalysis*  
Printed in the United States of America. Machine view. 1995
- [28] IRD. MECHANALYSIS.(MANUAL DE CAPACITACI3N INDUSTRIAL).  
▪ *Medici3n de vibraci3n y ruido*  
▪ *Análisis de vibraci3n y ruido*  
▪ *Equilibrado dinámico*  
▪ *Mantenimiento predictivo.*  
Printed in the United States of America. 1978
- [29] IRD.260  
*Balanceadora b150*  
Printed in the United States of America.1987

- [30] BRÜEL&KJAER  
*Vibración measurement and analysis.*  
Printed in Denmark. Ed. K. Larsen & Son A/S
- [31] RASMUSSEN Torbjorn  
*Scanflex.deteccion de fallas en baleros y engranes. [31]*  
Impreso en México. 1988
- [32] FLÄKT  
*Ingeniería de sistemas de ventiladores .revista # 72*  
Impreso en México. Publicado por FLAKT. 1988
- [33] FLÄKT--1998  
*Motores de velocidad variable en ventiladores centrifugos grandes. revista # 72.*  
Impreso en México. Publicado por FLAKT. 1988
- [34] BERISTAIN S.  
*Monitoreo permanente*  
Impreso en México. Instituto Mexicano de Acústica, A.C. # 2. p-9.1993
- [35] CENTRO NACIONAL DE METROLOGIA. DIRECCIÓN DE METROLOGIA  
FISICA.  
*Normas oficiales mexicanas relacionadas con vibraciones mecánicas.*  
Impreso en México. Instituto Mexicano de Acústica, A.C. # 12. p-8.1998
- [36] BERISTAIN S.  
*Vibraciones en el cuerpo humano*  
Impreso en México. Instituto Mexicano de Acústica, A.C. # 12. pp-10,11.1998



[37] DYMAC.

*Instrucción manual for vibración measurements and analysis on rotating and reciprocating machinery with dymac. vibración monitoring and anaysis instruments.*

Printed in the United States of America. Ed. División of Spectral Dynamics.  
1975.

[38] COMISIÓN. FEDERAL DE. ELECTRICIDAD.

*Procedimiento de balanceo de rotores en bancos a baja velocidad.*

Impreso en México. Ed. Central escuela de Celaya. 1991.

[39] MUÑOS Soria José L.

*Control de vibraciones. balanceo de maquinas rotativas: balanceo de rotores rigidos por coeficientes de influencia en uno y dos planos.*

Impreso en México. Profesor-sepi-esime

[40] BYRON J. C.O. S.A.

*Nomogramas de calidad de balanceo para impulsores y elementos rotativos.*

Printed in the United States of America. Ingeniería de manufactura.

[40'] PROCTER&GAMBLE.—1993

*Mecánica II. Vibraciones pp.74-100.*

Impreso en México. C.E.F.A. Planta Vallejo.

[41] BERISTAIN S.

*Prueba de vibraciones*

Impreso en México. 2° congreso mexicano de Acústica pp-195. 1995

[42] TREJO R. V.

*Resonancia vibratoria en turbosoplador*

Impreso en México. 2° congreso mexicano de Acústica pp-201-204. 1995

- [43] BERISTAIN S.  
*Métodos de balanceo para rotores rígidos. (en uno y dos planos)*  
Impreso en México. 3° congreso mexicano de Acústica pp-145-156. 1996
- [44] TREJO R. V.  
*Aislamiento de maquinaria*  
Impreso en México. 3° congreso mexicano de Acústica pp-157-161. 1999
- [46] AGUILAR F.  
*Dinámica de maquinaria*  
Impreso en México. I.M.P. pp.69-76. 1971
- [47] AGUILAR L.N.F  
*Análisis dinámico mediante síntesis modal*  
Impreso en México. Ed. I.M.P. VOL. XXI. # 2. PP.26-33. 198
- [48] TROYANOVSKI B. M.  
*Turbinas de vapor y de gas de las centrales nucleoelectricas*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir moscú 1987
- [49] ARYA S.  
*Desing of structures and foundations for vibrating machines*  
Printed in the United States of America. Ed. gulf pubrishing company. 1979
- [50] MAJOR A  
*Vibración analysis and desing foundations for machines and turbines*  
Printed in Germany. Ed. 1960
- [51] HALL A. S.  
*Diseño de máquinas*  
Impreso en México. Ed. Mc Graw-Hill. 1982

- [52] SETO W. W.  
*Acústica*  
Impreso en México. Ed. Mc. Grall-Hill 1977
- [53] SETO W. W.  
*Vibraciones mecánicas*  
Impreso en México. Ed. Mc. Grall-Hill . 1977
- [54] SPIEGEL M. R  
*Análisis de Fourier*  
Impreso en México. Ed. Mc. Grall-Hill. 1978
- [55] BRIGHAM E. O.  
*The fast fourier transform and its applications*  
Printed in the United States of America. ed. prentice hall signal processing  
series Alan V. Oppenheim. 1988
- [56] HSU H. P.  
*Análisis de Fourier*  
Impreso en México. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.1987
- [57] COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD.  
*Manual de instrumentación para análisis de vibraciones.*  
Impreso en México. Ed. Central escuela de Celaya. 1989.
- [58] GHH.STERKRADE M.A.N  
*Turbomachinery.*  
Printed in West Germany. Ed. GHH.
- [59] SULZER  
*Axial compressors.*  
Printed in Switzerland. Ed. Sulzer Brothers Limited CH-08023 Zürich.1981

- [60] FAG  
*La técnica de los rodamientos.*  
Printed in the United States of America. Ed. FAG. 1984
- [61] TIMKEN  
*Engineering journal. tapered roller bearing.*  
Printed in the United States of America. Ed. Timken. 1978
- [62] FAG. ROLLINS BEARING  
*Standar programme.*  
Printed in the United States of America. Ed. FAG. 1992
- [63] S.K.F  
*Catalogo general.[63]*  
Impreso en Italia. Ed. Stamperia Artistica Nazionale Corso Siracusa.1994
- [64] RAO J. S.  
*The theory of machines and mechanisms*  
Printed in the United States of America. Ed. Wiley eastern limited. vol.1.pp  
511-689. 1983
- [65] THE INTERNATIONAL FEDERATION FOR THE THEORY OF MACHINE  
AND MECHANISMS  
*The theory of machines and mechanisms*  
Printed in the United States of America.The american society of mechanical  
engineers. vol.i y ii. pp 90-118,404-432, pp 1482-1506. 1979
- [66] ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES  
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA ESPAÑA.  
*IV. congreso nacional sobre la teoria de mecanismos y máquinas .1981*

- [67] BARBOLLA R. M.  
*Introducción al análisis real.*  
Impreso en España. Ed. Alhambra Universidad. 1981
- [68] KREYSZIG E.  
*Matemáticas avanzadas para ingeniería*  
Impreso en México. Ed. Limusa. 1982
- [69] DAHLQUIST G.  
*Numerical methods*  
Printed in the United States of America .Ed. Prentice-Hall series in automatic  
Computation. 1974
- [70] DR. CARRERA B. J.  
*introducción al método del elemento finito y sus fundamentos matemáticos*  
Impreso en México. Ed. UNAM. 1998.
- [71] BACHMANN H.  
*Vibration problems in structures*  
Printed in the United States of America. Ed. Birkhäuser .1995
- [72] SCHNEIDER G.  
*Motores térmicos. Motores de pistón y turbinas de gas.*  
Impreso en España. Ed. Urmo. 1981
- [73] ORDOÑEZ R. L.  
*Cinética y problemas selectos*  
Impreso en México. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.  
1997

- [74] JOMES D. S.  
*Funciones generalizadas*  
Impreso en España. Ed. Urmo. 1972
- [75] MARKUSHEVICH A.  
*Teoría de las funciones analíticas tomos I y II.*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir Moscu. 1978
- [76] DENIS P. M.  
*Curso de calculo matricial aplicado tomo II..*  
Impreso en España. Ed. Urmo. 1975
- [77] ORLOY P.  
*Ingeniería de diseño tomos I.II y III.*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir Moscú. 1979
- [78] SHIGLEY J. E.  
*Diseño de ingeniería mecánica*  
Impreso en México. Ed. Mc. Grall-Hill. 1990
- [79] SPOTTS M. F.  
*Proyecto de elementos de máquinas*  
Impreso en España. Ed. Reverte. 1982.
- [80] FAIRES V. M.  
*Diseño de elementos de máquinas*  
Impreso en España. Ed. Momtaner y Simon, S. A. 1997
- [81] NORMA ISO. 2041.  
*Vibration and shock. vocabulary. 1975*

[82] NORMA ISO. 3080.

*Guide for the mechanical balancing of marine main steam turbine machinery for merchant service. 1974*

[83] NORMA ISO. 2373.-

*Mechanical vibration of certain rotating electrical machinery with shaft heights between 80 and 400 mm –measurement and evaluation of the vibration severity. 1987*

[84] NORMA ISO. 2371.

*Field balancing equipment-description and evaluation.-1974*

[85] NORMA ISO. 2631/ 3.-

*Evaluation of human exposure to whole-body vibration  
part 3: evaluation of exposure to whole-body z- axis vertical vibration in the  
frequency range 0.1 to 0.63 hz. 1985*

[86] NORMA ISO. 5349.

*Mechanical vibration- guidelines for the measurement and the assessment  
of human exposure to hand-transmitted vibration. 1986*

[87] NORMA ISO. 5343.-1983

*Criteria for evaluating flexible rotor balance .1983*

[88] NORMA ISO. 1940/ 1.

*Mechanical vibration-balance quality requirements of rigid rotors.  
Part 1: determination of permissible residual unbalance. 1986*

[89] NORMA ISO. 3945.

*Mechanical vibration of large rotating machines with speed range from 10 to  
200 r/s-measurement and evaluation of vibration severity in situ .1985*

- [90] NORMA ISO. 2372.-  
*Mechanical vibration of machines with operating speeds from 10 to 200 rev/ s  
. basis for specifying evaluation standards .1974*
- [91] NORMA ISO. 5406.  
*The mechanical balancing of flexible rotors .1980*
- [92] NORMA ISO. 1925.  
*Balancing-vocabulary.-1981*
- [93] NORMA ISO. 3719.  
*Balancing-machines-symbols for front panels.-1982*
- [94] NORMA ISO. 7919/ 1.  
*Mechanical vibration of non-reciprocating machines measurements on  
rotating shafts and evaluation  
Part 1: general guidelinn.1986*
- [95] NORMA ISO. 2953.-  
*Balancing machines-description and evaluation .-1985*
- [96] NORMA ISO. 7626/ 1.  
*Vibration and shock-experimental determination of mechanical mobility  
Part 1: basic definitions and transducers .1986*
- [97] NORMA ISO. 4863.  
*Resilient shaft couplings- information to be supplied users and manufactures.  
1984*
- [98] NORMA ISO. 2017.  
*Vibration and shock-isolators-procedure for specifying characteristics. 1982*



- [99] NORMA ISO. 2631/ 3.  
*Evaluation of human exposure to whole-body vibration*  
*Part 1: general requirements. 1985*
- [100] NORMA ISO. 8002.-  
*Mechanical vibrations-landvehicles-method for reporting measured data .*  
1986
- [101] NORMA ISO. 7475.  
Balancing machines- enclosures and other safety measures. 1984
- [102] NORMA ISO. 5805.  
*Mechanical vibration and shock affecting man- vocalulary. 1981*
- [103] NORMA ISO. 1940/ 1.  
*Mechanical vibration- balance quality requeriments of rigid rotors-*  
*Part. 1: determination of permisible residual unbalance. 1986*
- [104] CARMONA J. I.  
*Ecuaciones diferenciales*  
Impreso en México. Ed. Alhambra Universidad. 1985
- [105] GORAD S. R. J.  
*Tesis no defendida: Análisis de vibraciones en suspensiones automotrices*  
Tutor : Dr. Carrera Bolaños Jorge. 1996
- [106] DIPRIMA R. C.  
*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.*  
Impreso en México. Ed. Limusa. 1987

- [107] PENNEY E.  
*Ecuaciones diferenciales elementales*  
Impreso en México. Ed. Prentice-Hall. 1986
- [108] MAKARENKO G.  
*Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir Moscú. 1979
- [109] ROSS S. L.  
*Introducción a las ecuaciones diferenciales*  
Impreso en México. Ed. Interamericana. 1987
- [110] ELSGOLTZ L.  
*Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.*  
Impreso en URSS. Ed. Mir Moscú. 1977
- [111] SPIEGEL M. R.  
*Ecuaciones diferenciales aplicadas*  
Impreso en México. Ed. Prentice-Hall. 1987.
- [112] RAINVILLE E. D.  
*Ecuaciones diferenciales*  
Impreso en México. Ed. Interamericana
- [113] RAINVILLE E. D.  
*Ecuaciones diferenciales elementales*  
Impreso en México. Ed. Trillas. 1987.
- [114] KELLS L. M.  
*Ecuaciones diferenciales elementales*  
Impreso en México. Ed. Mc Graw-Hill. 1970

- [115] ZILL D. G.  
*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.*  
Impreso en México. Ed. Iberoamericana. 1982
- [116] BIRKHOFF G.  
*Ordinary difefferential equations*  
Printed in the United States of America. Ed. Wiley. 1989
- [117] TIJONOV A.  
*Ecuaciones de la física matemática*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir Moscú. 1980
- [118] KUDRIÁVTSEV L. D.  
*Curso de análisis matemático*  
Impreso en URRS. Ed. Mir Moscú. 1983
- [119] KAPLAN W.  
*Cálculo y álgebra lineal*  
Impreso en México. Ed. Limusa. 1978
- [120] DUCHATEAU P.  
*Ecuaciones diferenciales parciales.*  
Impreso en México. Ed. Mc Graw-Hill. 1988
- [121] ARFKEN G.  
*Métodos matemáticos para físicos.*  
Impreso en México. Ed. Diana. 1981
- [122] SMIRNOV M. N.  
*Problemas de ecuaciones de la física matemática.*  
Impreso en URSS. Ed. Mir Moscú. 1976

- [123] KOLMOGOROV A. N.  
*Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional*  
Impreso en la URSS. Ed. Mir moscú. 1975.
- [124] WELLS D. A.  
*Dinámica de Lagrange*  
Impreso en Colombia. Ed. Mc Graw-Hill. 1967
- [125] BEER F. P.  
*Mecánica vectorial para ingenieros.*  
Impreso en México. Ed. Mc Graw-Hill. 1979
- [126] SPIEGEL M. R.  
*Teoría y problemas de mecánica teórica con una introducción a las ecuaciones de Lagrange y la teoría Hamiltoniana.*  
Impreso en Colombia. Ed. Mc Graw-Hill. 1976
- [127] HARRIS T. A.  
*Rolling bearing analysis*  
Printed in the United States of America, Ed. John Wiley & Sons, inc. 1991
- [128] CHORLTON F.  
*Tratado de dinámica.*  
Impreso en México. Ed. Logos consorcio. 1976
- [129] *Desarrollo de un programa de mantenimiento predictivo para maquinaria rotativa basado en el análisis de vibraciones.*  
Tesis defendida en I.P.N.

[130] NATIONAL INSTRUMENTS CORPORATION

*Getting Started With Virtual Bench*

Printed in United States of America (Austin). August 1997

[131] NATIONAL INSTRUMENTS CORPORATION

*Computer-based dynamic signal measurements applications for sound and Vibration.*

Printed in the United States of America (Austin). September 1998.

[132] APUNTES DE CLASE. (DR. CARRRERA B. J.)

*Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.*

Impresos en México. 1998.

## APENDICE: A. MOVIMIENTO GIROSCOPICO EN EL IMPULSOR DE UN TURBOSOPLADOR

Las siguientes consideraciones sirvieron para obtener las ecuaciones de movimiento en el eje z del turbosoplador. Ya que este presenta un efecto giroscópico [3, 5, 8, 13, 77 y 109].

### I. ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO.

Es conveniente describir el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un conjunto de ejes de coordenadas que coincidan con los ejes principales fijos al cuerpo y roten con el cuerpo.

Si  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$  y  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  representan las respectivas componentes de los momentos externos y de las velocidades angulares a lo largo de los ejes principales, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} I_1 w_1 + (I_3 - I_2) w_2 w_3 &= \Lambda_1 \\ I_2 w_2 + (I_1 - I_3) w_1 w_3 &= \Lambda_2 \\ I_3 w_3 + (I_2 - I_1) w_1 w_2 &= \Lambda_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de} \\ \text{Euler} \end{array} \quad (1)$$

se demostrará como se obtuvieron las ecuaciones(1), con los siguientes pasos:

1. Paso. determinar la relación entre la variación en el tiempo del momentum angular de un cuerpo con respecto a ejes fijos en el espacio y ejes fijos al cuerpo.

Si los ejes del cuerpo rígido se escogen como ejes principales que tengan las direcciones de los vectores  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  respectivamente, entonces el momentum angular será:

$$\Omega = I_1 \omega_1 e_1 + I_2 \omega_2 e_2 + I_3 \omega_3 e_3$$

Ahora un observador situado en un punto fijo con relación a un sistema coordenado  $x$  y  $z$  de origen  $O$ . Fig.2. ve un vector  $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$  y encuentra que su derivada con respecto al tiempo es:

$$\frac{dA}{dt} i + \frac{dA}{dt} j + \frac{dA}{dt} k$$

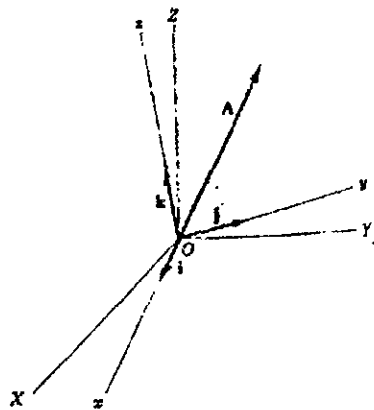


Fig.1.

Posteriormente observa que su sistema coordenado rota con relación a un sistema  $X Y Z$  que se considera fijo en el espacio y cuyo origen también es  $O$ . ¿Cuál será la derivada con respecto al tiempo para un observador que esta fijo con respecto al sistema  $X Y Z$ ?

Si  $\left. \frac{dA}{dt} \right|_F$  y  $\left. \frac{dA}{dt} \right|_M$  representan, respectivamente, las derivadas con respecto al tiempo de A en los sistemas fijos y en movimiento. Se demostrará que existe una cantidad vectorial  $w$  tal que:

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_F = \left. \frac{dA}{dt} \right|_M + w \times A$$

si  $F=s$  y  $M=b$  para nuestro caso, entonces:

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_s = \left. \frac{dA}{dt} \right|_b + w \times A$$

si:

$$\Omega = I_1 w_1 e_1 + I_2 w_2 e_2 + I_3 w_3 e_3, \text{ su derivada es:}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = I_1 \dot{w}_1 e_1 + I_2 \dot{w}_2 e_2 + I_3 \dot{w}_3 e_3$$

ahora:

$$w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$$

$$\Omega = I_1 w_1 e_1 + I_2 w_2 e_2 + I_3 w_3 e_3$$

$$w \times \Omega = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ I_1 w_1 & I_2 w_2 & I_3 w_3 \end{vmatrix} = e_1 [w_2 I_3 w_3 - I_2 w_2 w_3] - e_2 [w_1 I_3 w_3 - I_1 w_1 w_3] + \\ + e_3 [I_2 w_1 w_2 - I_1 w_1 w_2]$$



$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} \Big|_s &= \left\{ I_1 \dot{w}_1 + (I_3 - I_2)w_2w_3 \right\} e_1 + \left\{ I_2 \dot{w}_2 + (I_1 - I_3)w_1w_3 \right\} e_2 + \\ &+ \left\{ I_3 \dot{w}_3 + (I_2 - I_1)w_1w_2 \right\} e_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Utilizando el **Principio del momentum angular**, tenemos:

$$\Lambda = \frac{d\Omega}{dt} \Big|_s \quad (3)$$

donde:  $\Lambda$  es el momento externo total. Escribiéndolo en componentes tenemos:

$$\Lambda = \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 + \Lambda_3 e_3 \quad (4)$$

donde:  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$  son las componentes del momentum externo a lo largo de los ejes principales, usando (19) y los resultados de (18), encontramos:

$$\frac{d\Omega}{dt} \Big|_s = \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 + \Lambda_3 e_3, \text{ sustituyendo se obtiene:}$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 w_1 + (I_3 - I_2)w_2w_3 &= \Lambda_1 \\ I_2 w_2 + (I_1 - I_3)w_1w_3 &= \Lambda_2 \\ I_3 w_3 + (I_2 - I_1)w_1w_2 &= \Lambda_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de} \\ \text{Euler} \end{array} \quad (5)$$

(se asumirá lo siguiente en referencia a las figuras 7, 8, 9 y 10, que servirán para explicar más ampliamente el fenómeno giroscópico que servirá para obtener el tercer modelo matemático y entender el resto del apéndice,  $x' = \xi$ ,  $y' = \eta$ ,  $z' = \zeta$ ,  $x'' = \xi'$ ,  $y'' = \eta'$ ,  $z'' = \zeta'$ ), por lo que se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} I_{\xi} \frac{dw_{\xi}}{dt} + (I_{\zeta} - I_{\eta})w_{\eta}w_{\zeta} &= \Lambda_{\xi} \\ I_{\eta} \frac{dw_{\eta}}{dt} + (I_{\xi} - I_{\zeta})w_{\xi}w_{\zeta} &= \Lambda_{\eta} \\ I_{\zeta} \frac{dw_{\zeta}}{dt} + (I_{\eta} - I_{\xi})w_{\xi}w_{\eta} &= \Lambda_{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

en la ecuación (6) supusimos que los ejes  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  estaban unidos rígidamente al cuerpo móvil, pero es conveniente a veces elegir otras coordenadas  $\xi'$ ,  $\eta'$  y  $\zeta'$  tales que el triedro  $O\xi'\eta'\zeta'$  gire alrededor de O con una velocidad angular  $w'$  distinta de la velocidad  $w$  del cuerpo, obtenemos en lugar de las ecuaciones (6), las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}_1' + (I_3 - I_2)w_2'w_3' &= \Lambda_1' \\ I_2 \dot{w}_2' + (I_1 - I_3)w_1'w_3' &= \Lambda_2' \\ I_3 \dot{w}_3' + (I_2 - I_1)w_1'w_2' &= \Lambda_3' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ecuaciones} \\ \text{de Euler} \\ \text{modificadas} \end{array} \quad (7)$$

o

$$\left. \begin{aligned} I_{\xi'} \frac{dw_{\xi'}}{dt} + (I_{\zeta'} - I_{\eta'})w_{\eta'}w_{\zeta'} &= \Lambda_{\xi'} \\ I_{\eta'} \frac{dw_{\eta'}}{dt} + (I_{\xi'} - I_{\zeta'})w_{\xi'}w_{\zeta'} &= \Lambda_{\eta'} \\ I_{\zeta'} \frac{dw_{\zeta'}}{dt} + (I_{\eta'} - I_{\xi'})w_{\xi'}w_{\eta'} &= \Lambda_{\zeta'} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ecuaciones} \\ \text{de Euler} \\ \text{modificadas} \end{array} \quad (8)$$

en este caso los ejes  $\xi'\eta'\zeta'$  elegidos se mueven respecto del cuerpo y los momentos y productos de inercia pueden no ser constantes, como en las ecuaciones (5), sino variables con respecto al tiempo.

## II. ANGULOS DE EULER:

Para describir la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto usamos 3 coordenadas angulares que se llaman ángulos de Euler estas coordenadas, denotadas por:  $\phi$ ,  $\theta$ , y  $\psi$ .

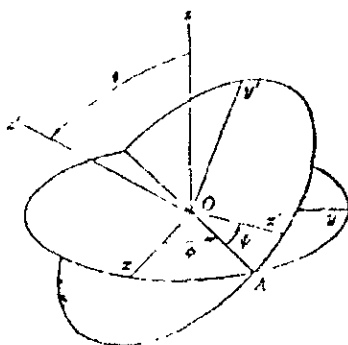


Fig.2.

En esta Fig.2., el sistema de coordenadas  $x$  y  $z$  pueden transformarse al sistema  $x'$   $y'$   $z'$ , mediante rotaciones sucesivas de los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . La línea  $OA$  con frecuencia se llama línea nodal.

En la práctica los ejes  $x'$   $y'$   $z'$  se eligen como los ejes principales o ejes del cuerpo rígido mientras que los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  ó ejes espaciales están fijos en el espacio.

## III. VELOCIDAD ANGULAR Y ENERGIA CINETICA EN FUNCION DE LOS ANGULOS DE EULER:

Las componentes  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  de la velocidad angular a lo largo de los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , en función de los ángulos de Euler están dados por:

$$\left. \begin{aligned} w'_x = w_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ w'_y = w_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ w'_z = w_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Demostraremos las ecuaciones de velocidad angular en función de los ángulos de Euler, siguiendo los siguientes pasos:

I. **PASO.** Usando tres figuras separadas se demostrara la forma, de cómo el sistema coordenado  $x$  y  $z$  de la Fig. 2. Se transforma en el sistema  $x'$   $y'$   $z'$  mediante rotaciones sucesivas de los ángulos de Euler  $\phi$   $\theta$   $\psi$ .

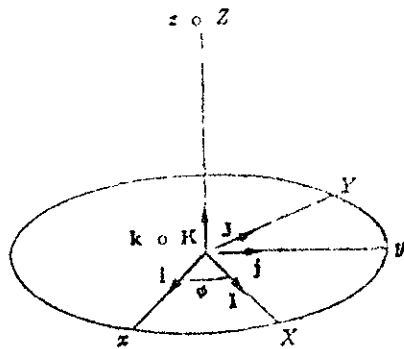


Fig.3.

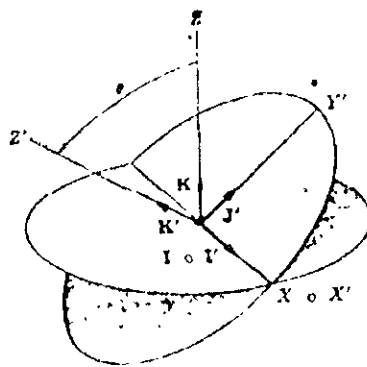


Fig.4.

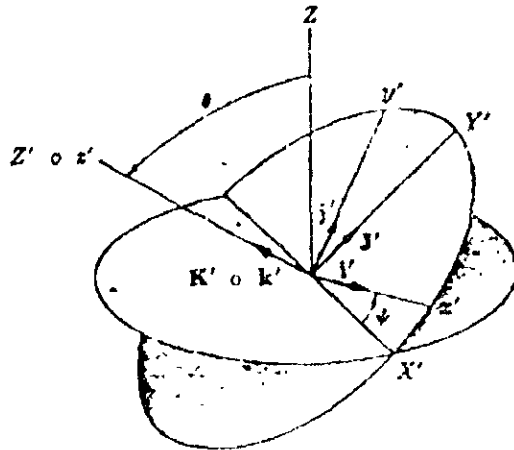


Fig.5.

Solución: Refiriéndonos a las Figs. (3), (4) y (5),. La Fig.5. indica la rotación de los ejes  $x$  y  $y$  y un ángulo  $\phi$  para llevar a los ejes  $X$  y  $Y$ , respectivamente, manteniendo el eje  $z$  igual al eje  $Z$ .

En la Fig.4 se indica la rotación del eje  $X$  un ángulo  $\theta$  de manera que los ejes  $Y$  y  $Z$  de la Fig.3, se transforman en los ejes  $Y'$  y  $Z'$ , respectivamente, de la Fig. 4.

En la Fig.5, los ejes  $Z'$  o  $z'$  se rotan en un ángulo  $\psi$  de manera que los ejes  $X'$   $Y'$  se transforman, respectivamente, en los ejes  $x'$  y  $y'$ .

En las figuras se han indicado los vectores unitarios sobre los ejes  $x, y, z; X, Y, Z; X', Y', Z';$  y  $x', y', z'$  por:

$i, j, k; I, J, K; I', J', K'; e i', j', k'$ . Respectivamente.

II. PASO. Encontramos las relaciones entre los vectores.

Usando la siguiente propiedad: A es un vector cualquiera, entonces:

$$A=(A \bullet i)i+(A \bullet j)j+(A \bullet k)k$$

a) De la Fig.3, se tiene:

$$i=(i \bullet I)I+(i \bullet J)J+(i \bullet K)K=\cos \phi \ I - \operatorname{sen} \phi \ J$$

$$j=(j \bullet I)I+(j \bullet J)J+(j \bullet K)K=\operatorname{sen} \phi \ I + \cos \phi \ J$$

$$k=(k \bullet I)I+(k \bullet J)J+(k \bullet K)K=K$$

b) De la Fig.4. se tiene:

$$I=(I \bullet I')I'+(I \bullet J')J'+(I \bullet K')K'=I'$$

$$J=(J \bullet I')I'+(J \bullet J')J'+(J \bullet K')K'=\cos \theta \ J' - \operatorname{sen} \theta \ K'$$

$$K=(K \bullet I')I'+(K \bullet J')J'+(K \bullet K')K'=\operatorname{sen} \theta \ J' + \cos \theta \ K'$$

c) de la Fig.5. se tiene:

$$I'=(I' \bullet i')i'+(I' \bullet j')j'+(I' \bullet k')k'=\cos \psi \ i' - \operatorname{sen} \psi \ j'$$

$$J'=(J' \bullet i')i'+(J' \bullet j')j'+(J' \bullet k')k'=\operatorname{sen} \psi \ i' + \cos \psi \ j'$$

$$K'=(K' \bullet i')i'+(K' \bullet j')j'+(K' \bullet k')k'=k'$$

El tercer miembro de los incisos (a), (b) y (c) se obtienen por medio de una matriz de transformación considerando los ángulos de EULER.

III. **PASO.** Ahora expresaremos los vectores unitarios  $i, j, y k$  en función de  $i', j'$  y  $k'$ . Partiendo de los incisos (a), (b) y (c) del paso II se tiene:

$$i = \cos\phi I - \sin\phi J, \quad j = \sin\phi I + \cos\phi J, \quad k = K \quad (10)$$

$$I = I', \quad J = \cos\theta J' - \sin\theta K', \quad K = \sin\theta J' + \cos\theta K' \quad (11)$$

$$I' = \cos\psi i' - \sin\psi j', \quad J' = \sin\psi i' + \cos\psi j', \quad K' = k' \quad (12)$$

Entonces, sustituyendo respectivamente se tiene:

$$i = [\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \cos\theta \sin\psi]i' + [-\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\theta \cos\psi]j' + \sin\phi \sin\theta k' \quad (13)$$

$$j = [\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \cos\theta \sin\psi]i' + [-\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\theta \cos\psi]j' - \cos\phi \sin\theta k' \quad (14)$$

$$k = \sin\theta \sin\psi i' + \sin\theta \cos\psi j' + \cos\theta k' \quad (15)$$

Ahora obtenemos la velocidad angular en función de los ángulos de EULER.

Expresaremos ahora la velocidad angular  $w$  del giroscópio con respecto al sistema de referencia OXYZ como la suma de tres velocidades angulares parciales que corresponden, respectivamente, a la precesión, nutación y spin del giroscópio. De las Figs. (3), (4) y (5). Se obtiene:

$$w = w_\phi k + w_\theta I' + w_\psi K' = \dot{\phi}k + \dot{\theta}I' + \dot{\psi}K' \quad (16)$$

De las ecuaciones (12), (13) y (14) se tiene:

$$w = [\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi] i' + [\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi] j' + [\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}] k' \quad (17)$$

como:

$w = w_x i' + w_y j' + w_z k'$ , se obtienen las componentes de la

velocidad angular  $w_1, w_2, w_3$

a lo largo de los ejes  $x', y', z'$  en función de los ángulos de EULER y son:

$$\left. \begin{aligned} w'_x = w_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ w'_y = w_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ w'_z = w_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

#### IV. MOVIMIENTO DE SPIN DE UN TROMPO:

Un ejemplo interesante del movimiento de un cuerpo rígido es el de un cuerpo rígido simétrico que tiene un punto sobre el eje de simetría fijo en el espacio y tiene un movimiento de SPIN en un campo gravitacional.

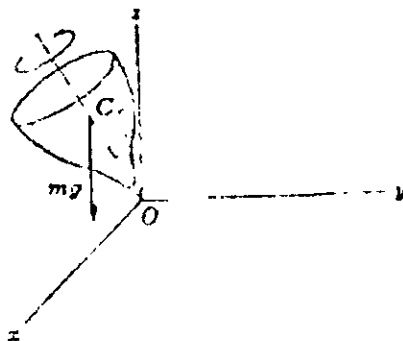


Fig 6.



## V. CINEMATICA DE LA ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO.

La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo representa un problema muy simple en la dinámica; pero cuando el eje de rotación también se mueve el problema se complica mucho más. El caso especial en que el eje de rotación pasa siempre por el mismo punto es de particular interés práctico, pues esta relacionado con la teoría del giroscopio, que tiene una cantidad de importantes aplicaciones técnicas.

Para hacer girar un cuerpo alrededor de un punto fijo puede usarse dispositivos como los indicados en la Fig.7.(a) y (b). En la Fig.7.(a), se ha apoyado un cuerpo de revolución de tal manera que el centro de rotación  $O$  permanece prácticamente inmóvil. Este es el tipo de apoyo que se encuentra en un trompo. En la Fig.9.b. un disco circular  $M$  puede girar libremente alrededor de su eje geométrico  $OO$ , soportado por cojinetes en el anillo  $MN$ . Este anillo a su vez, puede girar alrededor del eje  $O_1O_1$ , montado en el anillo  $PP$ , que puede girar libremente alrededor del eje fijo  $O_2O_2$ . Los tres ejes se cortan en un punto, y el correspondiente punto del disco  $M$  permanece fijo en el espacio. Este tipo de soporte es uno de los más comunes en aplicaciones giroscópicas.

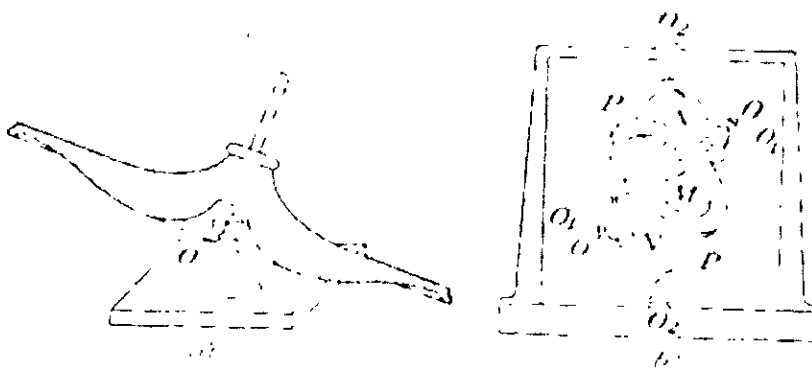


Fig.7.

Para definir la posición de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto fijo necesitamos tres coordenadas. En general, nos será más conveniente tomar los tres ángulos  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , como se muestra en la Fig.8. El origen de coordenadas  $O$  es el punto fijo alrededor del cual el cuerpo gira, las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que pasan por este punto, están fijas en el espacio, y los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , que también pasan por dicho punto, gira con el cuerpo.

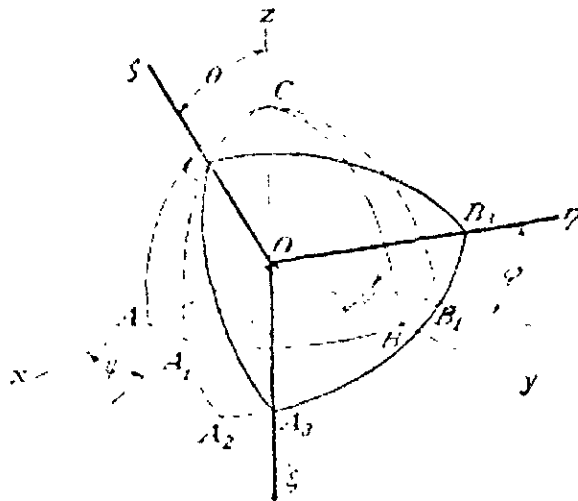


Fig.8.

## VI.- MOVIMIENTO LIBRE DE UN GIROSCOPIO.

Consideremos ahora el movimiento de un giroscopio simétrico, cuya forma sea la de un cuerpo de revolución, como el mostrado en la Fig.7.(a). El eje de revolución se denomina **eje del giroscopio o eje de giro** y el correspondiente momento de inercia  $I$  se denomina momento de inercia axial. Tomando como origen el punto de apoyo  $O$ , usaremos nuevamente el sistema de coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  (Fig.9), que se mueve con el giroscopio.

En eje  $\zeta$  coincide con el eje del giroscopio, de manera que  $I_\zeta = I$ . Por razones de simetría debe ser  $I_\xi = I_\eta = I$ , que se llama **momento de inercia ecuatorial**.

Consideremos ahora el movimiento de este giroscopio simétrico suponiendo que sobre él no actúen fuerzas exteriores. El cuerpo representado en la Fig.7.(a). es un ejemplo del mismo, siempre que el punto de apoyo O coincida con el centro de gravedad del cuerpo. En este caso la fuerza de gravedad está siempre equilibrada por la reacción del punto de apoyo, y si se da al cuerpo un impulso inicial se moverá como si no hubiera fuerzas actuantes sobre él. En tal caso, las ecuaciones (5) de Euler resultan:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 + (I - I_1) w_2 w_3 &= 0 \\ I_1 \dot{w}_2 - (I - I_1) w_1 w_3 &= 0 \\ I \dot{w}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

o

$$\begin{aligned} I_1 \frac{dw_\xi}{dt} + (I - I_1) w_\eta w_\zeta &= 0, \\ I_1 \frac{dw_\eta}{dt} + (I - I_1) w_\xi w_\zeta &= 0, \\ I \frac{dw_\zeta}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Haciendo referencia a la Fig.9, demostraremos que el movimiento que satisface a estas ecuaciones puede describirse de la manera siguiente: el giroscopio, unido rígidamente al sistema móvil de coordenadas  $\xi, \eta$  y  $\zeta$ , gira con velocidad angular  $w$  alrededor de su eje  $O\zeta$ , formando un ángulo  $\theta$  constante con el eje vertical fijo  $z$ . Al mismo tiempo, el plano  $zO\zeta$  que contiene el eje del giroscopio gira con velocidad angular  $w_1$  constante alrededor del eje  $z$ . Suponiendo que el plano móvil  $\xi\zeta$  coincide inicialmente con el plano fijo  $xz$ , deducimos que mientras que el ángulo  $\theta$  permanezca constante, los otros dos ángulos  $\phi$  y  $\psi$  que

definen la posición del giroscopio variarán con el tiempo en la forma representada en las ecuaciones:

$$\psi = w_1 t, \quad \phi = wt \quad (21)$$

El giroscopio tiene dos velocidades angulares, a saber:  $w$  alrededor de su propio eje  $\zeta$ , y  $w_1$ , alrededor del eje  $z$ . Proyectando estas velocidades sobre los ejes móviles  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  de la Fig.9, obtenemos:

$$\begin{aligned} w_x &= -w_1 \sin \theta \cos \phi = -w_1 \sin \theta \cos wt, \\ w_{y'} &= w_1 \sin \theta \sin \phi = w_1 \sin \theta \sin wt \\ w_z &= w + w_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (22)$$

o

$$\begin{aligned} w_\xi &= -w_1 \sin \theta \cos \phi = -w_1 \sin \theta \cos wt, \\ w_\eta &= w_1 \sin \theta \sin \phi = w_1 \sin \theta \sin wt, \\ w_\zeta &= w + w_1 \cos \theta. \end{aligned} \quad (23)$$

sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (20), vemos que se satisface la tercera ecuación, dado que se supuso que  $w$ ,  $w_1$  y  $\theta$  son constantes. Sumando las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$Iw + (I - I_1)w_1 \cos \theta = 0 \quad (24)$$

lo que requiere que:

$$w_1 = \frac{I\omega}{(I_1 - I)\cos\theta} \quad (25)$$

Vemos que suponiendo constante al ángulo  $\theta$  y tomando para  $\psi$  y  $\phi$  las expresiones (21), podemos satisfacer las tres ecuaciones de movimiento (20), siempre que satisfaga la ecuación (24). Esto indica el movimiento supuesto representa la solución buscada del movimiento de un giroscopio simétrico, libre de la acción de fuerzas exteriores. Este movimiento del giroscopio se denomina **precesión regular**, y la velocidad angular  $w_1$  se denomina **velocidad de precesión**.

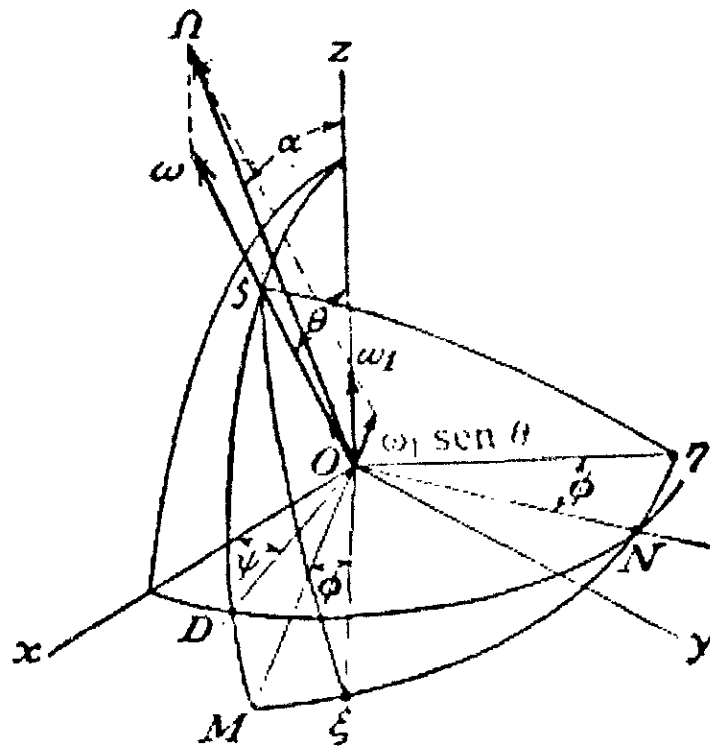


Fig.9.

## VII.- MOMENTO GIROSCOPICO DE UN GIROSCOPIO SIMETRICO.

En el modelo matemático se estudio la solución de las ecuaciones de Euler e investigando los movimientos giroscópicos producidos por las fuerzas dadas. Supongamos que conocemos el movimiento de un giroscopio y queremos encontrar las fuerzas exteriores que deben ser aplicadas para producir dicho movimiento. Conociendo el movimiento, podemos calcular sin dificultad los miembros izquierdos de las ecuaciones de Euler y obtener de esta manera, las componentes del momento exterior resultante que actúa sobre el giroscópio.

El momento de igual magnitud y signo opuesto al anterior representa la acción del giroscopio sobre sus cojinetes, y se denomina momento giroscópico (consideremos algunos casos).

Consideremos, el caso de la precesión regular. Un giroscopio simétrico gira con una velocidad angular  $w$  constante alrededor de su eje, mientras que dicho eje describe, con velocidad angular uniforme  $w_1$ , un cono de precesión, cuyo ángulo en el vértice es  $2\theta$ . Usaremos nuevamente las ecuaciones del movimiento (7) y como sistema de ejes móviles al triedro  $OMN\zeta$ . Para calcular las proyecciones de la velocidad angular del triedro sobre estos ejes tenemos que considerar solamente la velocidad angular  $\psi = w_1$  alrededor del eje fijo  $z$ . Proyectando esta velocidad, obtenemos:

$$\begin{aligned} w_m &= -w_1 \operatorname{sen} \theta, \\ w_n &= 0, \\ w_{z'} &= w_1 \operatorname{cos} \theta \end{aligned} \tag{26}$$

o

$$\begin{aligned} w_{m'} &= -w_1 \operatorname{sen} \theta, \\ w_{n'} &= 0, \\ w_{\zeta'} &= w_1 \operatorname{cos} \theta. \end{aligned} \tag{27}$$

Para calcular las componentes de la velocidad angular del giroscopio tenemos que considerar también la velocidad angular  $w$  respecto del triedro  $OMN\zeta$ , lo que da:

$$w_m = -w_1 \operatorname{sen} \theta, \quad w_n = 0, \quad w_{z'} = w + w_1 \cos \theta \quad (28)$$

o

$$w_m = -w_1 \operatorname{sen} \theta, \quad w_n = w_\zeta = w + w_1 \cos \theta \quad (29)$$

Los correspondientes valores de las componentes del momentum angular del giroscopio son:

$$\Omega_m = -I_1 w_1 \operatorname{sen} \theta, \quad \Omega_n = 0, \quad \Omega_{z'} = I(w + w_1 \cos \theta). \quad (30)$$

o

$$\Omega_m = -I_1 w_1 \operatorname{sen} \theta, \quad \Omega_n = 0, \quad \Omega_\zeta = I(w + w_1 \cos \theta). \quad (31)$$

Sustituyendo las expresiones (27) y (31) en las ecuaciones (7), encontramos que las componentes del momento resultante que actúa sobre un giroscopio, son:

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= 0, \\ \Lambda_n &= I w w_1 \operatorname{sen} \theta + (I - I_1) w_1^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ \Lambda_{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

o

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= 0, \\ \Lambda_n &= I w w_1 \operatorname{sen} \theta + (I - I_1) w_1^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ \Lambda_\zeta &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Puede verse que el momento giroscópico actúa, en este caso, en el plano  $zO\zeta$  y que su magnitud es:

$$M_n = -M_n = -[I\omega + (I - I_1)\omega_1 \cos\theta]\omega_1 \sin\theta \quad (34)$$

En las aplicaciones prácticas la velocidad angular  $\omega$  del giroscopio alrededor de su propio eje es muy grande, y el primer término dentro del corchete, que es siempre positivo, tiene un valor grande comparado con el segundo. Esto indica que el momento giroscópico (34) es negativo, o sea que siempre actúa de manera que el vector  $\omega$  vaya a coincidir con el vector  $\omega_1$  de la Fig. 10.

Si la velocidad angular  $\omega$  del giroscopio es tal que:

$$I\omega + (I - I_1)\omega_1 \cos\theta = 0 \quad (35)$$

Si satisface la condición (24), el momento giroscópico se anula.

En el caso general del movimiento de un giroscopio, la posición del triedro  $OMN\zeta$  esta definida por los ángulos  $\psi$  y  $\theta$  de la Fig. 10. Las componentes de su velocidad angular sobre los ejes  $z$  y  $ON$  son  $\psi$  y  $\theta$ , respectivamente, y encontramos que:

$$w_{m'} = -\dot{\psi} \sin\theta, \quad w_n = \dot{\theta}, \quad w_{z'} = \dot{\psi} \cos\theta. \quad (36)$$

o

$$w_{m'} = -\dot{\psi} \sin\theta, \quad w_n = \dot{\theta}, \quad w_\zeta = \dot{\psi} \cos\theta. \quad (37)$$



Las correspondientes componentes de la velocidad angular del giroscopio son:

$$w_m = -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad w_n = \dot{\theta}, \quad w_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad (38)$$

o

$$w_m = -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad w_n = \dot{\theta}, \quad w_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad (39)$$

y las componentes de su momentum angular son:

$$\Omega_m = -I_1 \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad \Omega_n = I_1 \dot{\theta}, \quad \Omega_z = I(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \quad (40)$$

o

$$\Omega_m = -I_1 \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad \Omega_n = I_1 \dot{\theta}, \quad \Omega_z = I(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \quad (41)$$

Las ecuaciones (7) dan, entonces,

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= -I_1 \frac{d}{dt} (\psi \operatorname{sen} \theta) + \mathcal{A}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I_1 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta, \\ \Lambda_n &= I_1 \dot{\theta} + \psi \operatorname{sen} \theta (I \dot{\phi} + (I - I_1) \dot{\psi} \cos \theta), \\ \Lambda_z &= I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (42)$$

o

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= -I_1 \frac{d}{dt} (\psi \operatorname{sen} \theta) + \mathcal{A}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I_1 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta, \\ \Lambda_n &= I_1 \dot{\theta} + \psi \operatorname{sen} \theta (I \dot{\phi} + (I - I_1) \dot{\psi} \cos \theta), \\ \Lambda_z &= I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (43)$$

si el movimiento del giroscopio es conocido, los ángulos  $\phi$ ,  $\psi$  y  $\theta$  serán todas funciones conocidas de  $t$ . Sustituyéndolas en los miembros derechos de las ecuaciones (42), obtenemos las componentes  $\Lambda_m$ ,  $\Lambda_n$  y  $\Lambda_\zeta$  del momento resultante que actúa sobre el giroscopio. Las componentes del momento giroscopio serán:  $M_m = -M_m$ ,  $M_n = M_n$  y  $M_\zeta = M_\zeta$ .

En el caso de un giroscopio cuya velocidad angular alrededor de su propio eje sea muy grande, podemos despreciar las componentes  $\Omega_m$  y  $\Omega_n$  del momentum angular, comparadas con  $\Omega_\zeta$ , así como a  $\psi$  y  $\theta$  en comparación con  $\phi$ . Las ecuaciones (42) resultan entonces:

$$\begin{aligned} M_m &= I\dot{\theta} & \phi &= - & M_m, \\ M_n &= I\dot{\psi} & \phi \sin \theta &= - & M_n \\ M_{z'} &= I\dot{\phi} & &= - & M_{z'} \end{aligned} \quad (45)$$

o

$$\begin{aligned} M_m &= I\dot{\theta} & \phi &= - & M_m, \\ M_n &= I\dot{\psi} & \phi \sin \theta &= - & M_n \\ M_\zeta &= I\dot{\phi} & &= - & M_\zeta \end{aligned} \quad (46)$$

Estas ecuaciones coinciden con las dadas generalmente en las teorías giroscópicas elementales, donde se supone que el impulso de rotación del giroscopio está representado por un vector dirigido según su eje.

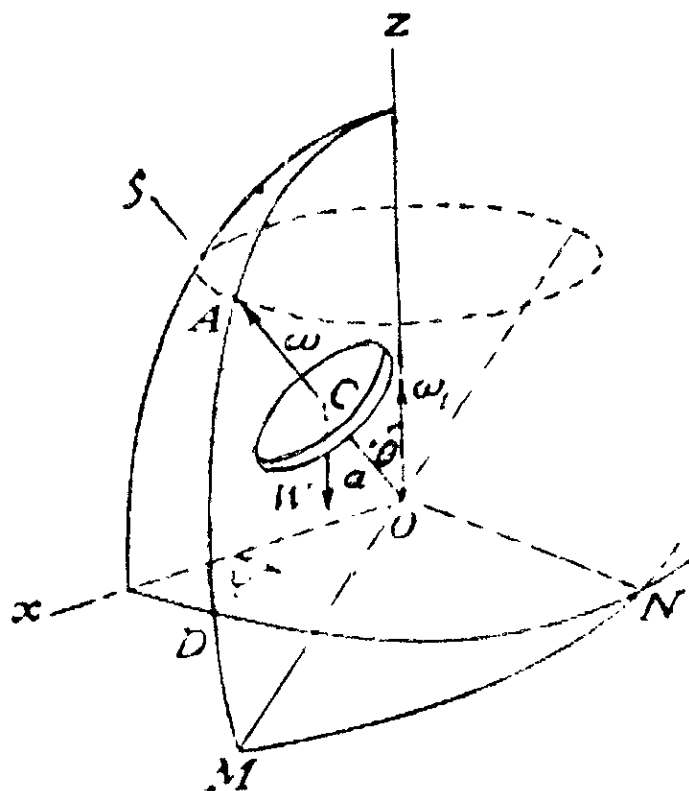


Fig.10.