

0170
2e



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CONTROL ROBUSTO DESCENTRALIZADO PARA UNA CLASE DE SISTEMAS NO-LINEALES

T E S I S
P R E S E N T A D A P O R :
MONTEMAYOR GARCIA GUSTAVO
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)

Director de tesis: Dr. Yu Tang Xu

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA

274221

1999



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice General

1	Introducción	1
2	Diseño del Control Robusto Descentralizado	5
2.1	Modelo de la clase de sistemas no lineales	5
2.1.1	Ejemplos	10
2.2	Objetivo del control	15
2.3	Diseño del controlador, caso 1	15
2.4	Diseño del controlador, caso 2	24
2.5	Ejemplo numérico: dos péndulos invertidos	28
3	Aplicación al Control de Robots	41
3.1	Modelo del manipulador	42
3.2	Diseño del controlador, caso δ conocida	44
3.3	Diseño del controlador, caso δ desconocida	52
3.4	Resultados de simulación y experimentales	53
3.4.1	Simulación	53
3.4.2	Resultados experimentales	58
4	Conclusiones	63
A	Parámetros de las simulación	71
B	Arreglo experimental: Robot dos grados de libertad	75

Índice de Figuras

2.1	Sistema con dos péndulos invertidos	11
2.2	Manipulador de dos grados de libertad	13
2.3	Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones	30
2.4	Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control	31
2.5	Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares	31
2.6	Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones	32
2.7	Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control	33
2.8	Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares	33
2.9	Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones	34
2.10	Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control	35
2.11	Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares	35
2.12	Simulación dos péndulos invertidos: Estimación de δ	36
2.13	Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones	37
2.14	Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control	37
2.15	Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares	38
2.16	Simulación dos péndulos invertidos: Estimación de δ	38
3.1	Simulación manipulador: Posiciones y velocidades	55
3.2	Simulación manipulador: Señal de error y acción de control	56
3.3	Simulación manipulador: Posiciones y velocidades	56
3.4	Simulación manipulador: Señal de error y acción de control	57
3.5	Simulación manipulador: Estimación de δ	57
3.6	Resultados experimentales: posiciones y velocidades	60
3.7	Resultados experimentales: señal de error y acción de control	60
3.8	Resultados experimentales: comparación entre algoritmos de control (unión 1)	61
3.9	Resultados experimentales: comparación entre algoritmos de control (unión 2)	61
B.1	Diagrama de interconexiones	75
B.2	Actuadores del manipulador	77

Notación

■	fin de prueba
\triangleq	definición
$ \cdot $	valor absoluto de un escalar
$\ \cdot\ $	norma de un vector
$\ \cdot\ _p$	norma p de un vector
$\ \cdot\ _{ip}$	norma p inducida de una matriz
$\lambda_m\{\cdot\}$	mínimo valor propio de una matriz
$\lambda_M\{\cdot\}$	máximo valor propio de una matriz
$\min_i(\cdot)$	valor mínimo para todo i
$\max_i(\cdot)$	valor máximo para todo i
\bar{m}_i	cota superior de la matriz M_i
\underline{m}_i	cota inferior de la matriz M_i
q	vector de coordenadas generalizadas
τ	vector de fuerzas generalizadas
$M(q)$	matriz de inercia en sistemas Euler-Lagrange
$C(q, \dot{q})$	matriz de términos centrífugos y de coriolis en sistemas Euler-Lagrange
$g(q)$	términos relacionados con la energía potencial en sistemas Euler-Lagrange
$Z_i(q, \dot{q})$	término de interconexión del subsistema i
$D_i(q_i, \dot{q}_i)$	término de perturbaciones locales al subsistema i
$Y_i(\cdot)$	matriz llamada regresor en la parametrización lineal del sistema
θ_i^0	vector de parámetros nominales en la parametrización lineal del sistema
e_i	error de seguimiento del subsistema i
\dot{q}_i^r	referencia de velocidad del subsistema i
q_i^d	trayectoria deseada del subsistema i
s_i	señal de referencia del subsistema i

Capítulo 1

Introducción

Muchos sistemas físicos están compuestos por subsistemas de dimensión menor que interactúan entre sí y es la dinámica propia de cada subsistema, junto con la interconexión, lo que forma la dinámica “global” del sistema. Estos sistemas son complejos y en el caso en que el número de subsistemas sea muy elevado, se llega a sistemas de gran escala (*Large-scale systems*) como por ejemplo grandes estructuras espaciales, sistemas de comunicaciones, sistemas de transporte, etcétera; pero no es el tamaño su característica principal sino su estructura interna, que de forma natural puede dividirse en subsistemas. Otra característica importante es la incertidumbre tanto a nivel de los parámetros de cada subsistema, como de las interconexiones. Esta clase de sistemas representa a los sistemas de interés para el presente trabajo, en particular los sistemas que se modelan por las ecuaciones de Euler-Lagrange, siendo un ejemplo importante los robots manipuladores, los cuales sin ser sistemas “grandes” tienen una estructura divisible en subsistemas, con una incertidumbre paramétrica considerable.

El análisis y diseño del control para los sistemas antes mencionados es una tarea muy compleja si se trata al sistema como un todo, pero si se aprovecha su estructura se llega a soluciones eficientes y que son factibles de implantar. Esta clase de soluciones las da el control descentralizado, en el que se considera al sistema como N subsistemas interconectados y se diseña un controlador, por cada subsistema, que sólo depende de los estados locales. Esta clase de control, aplicado a la clase de sistemas de interés, tiene muchas ventajas frente a su contraparte “centralizada”. Por ejemplo, el que se tenga un control por cada subsistema y que éste dependa únicamente de las variables locales, hace que el sistema completo sea más robusto ante fallas en el sistema y la división en el esfuerzo de control da como resultado una eficiencia computacional, ya que se presta de forma natural a una implantación en paralelo. Inclusive se dan casos en los que resulta muy difícil el compartir información entre subsistemas o el concentrar todos los estados o salidas del sistema en un sitio, ya sea porque físicamente las variables del sistema estén muy distantes, o por los costos asociados en la adquisición de estas señales.

Para el caso de un manipulador, el control es una tarea compleja por el alto grado de no linealidad en su modelo dinámico, por la incertidumbre paramétrica y por algunos efectos de los cuales se tiene muy poca información, como la fricción a nivel de las uniones y el cambio en la carga del manipulador. Existen muchas estrategias de control que se han utilizado en manipuladores y posiblemente una de las más usadas en robots industriales es el control independiente en cada unión, es decir un control descentralizado. Esto debido a las características de los primeros manipuladores¹ y del control descentralizado — facilidad de implementación y tolerancia a fallas. Conforme se han ido elevando las expectativas de desempeño de los manipuladores se ha requerido una mayor velocidad de operación con una precisión más grande, lo que ha repercutido en diseños mecánicos más ligeros con actuadores directamente acoplados a los elementos y, por tanto, los controles independientes en cada unión ya no son tan adecuados como antes. Como solución se han implantado estrategias de control más complejas, tanto centralizadas como descentralizadas, y en las que se ha considerado un modelo dinámico del manipulador más completo.

Algunos trabajos previos en el control descentralizado son: [Ioannou86] estableció la estabilidad de sistemas interconectados con parámetros desconocidos, en donde se garantiza la estabilidad si existe una matriz positiva definida, denominada matriz M , que está relacionada con las interconexiones [Khalil96, p. 233]. Ya que los términos de la matriz en cuestión dependen de parámetros desconocidos del sistema, se tiene la desventaja que la positividad de dicha matriz no puede ser probada fácilmente. Asumiendo una condición estructural de las incertidumbres en [Ikeda80, Corless81] se pudo eliminar la condición de la matriz M y establecer la condición *matching*², implicando que las interconexiones entran a cada subsistema en el mismo canal que el control. Bajo esta condición [Gavel89] probó la estabilidad de sistemas con interconexiones de magnitud arbitraria. [Chen91, Ioannou86, Gavel89] asumen que las interconexiones están acotadas por un polinomio de primer orden en los estados, mientras que [Shi92, Feng95] al añadir en la ley de control un polinomio de orden 'p' en los estados del sistema, garantizan la estabilidad de cada subsistema ante la presencia de perturbaciones que se pueden acotar por un polinomio de orden 'p' conocido o desconocido. La mayoría de los trabajos antes citados estudian sistemas lineales.

Cuando se aplica a robots manipuladores, el control descentralizado considera a cada unión como un subsistema, y el acoplamiento no lineal entre uniones constituye los términos de interconexión; que en [Seraji89] se presuponen como términos lentos, variantes en el tiempo y en [Fu92] se les considera acotados por un polinomio de

¹Un sobrediseño mecánico para garantizar la rigidez de los elementos y uniones para cualquier condición de carga especificada, una transmisión de potencia elevada en cada unión y una velocidad de operación baja.

²Pese a ser un anglicismo, se utiliza directamente la palabra *matching* a falta de una traducción que abarque el significado completo del término.

primer orden en los estados. Ya en [Liu99] se toma en cuenta a la interconexión como un término acotado por un polinomio de segundo grado en los estados del sistema y al incorporar en la ley de control un término cúbico de los estados locales del subsistema se demuestra la estabilidad del sistema.

El control de robots cooperativos, en donde varios manipuladores manejan la misma carga, también constituye un problema importante para el control descentralizado. En [Liu96] se plantea el control independiente de dos robot cooperativos para el caso en que no hay comunicación entre los dos controladores, pero con la desventaja de que se requiere del modelo de la interconexión entre manipuladores, es decir la dinámica deseada de la carga. En [Zhu98] se considera el control de múltiples manipuladores con uniones flexibles, donde el sistema global se descompone en subsistemas interconectados utilizando una aproximación parecida al método de Newton-Euler, de forma que la interconexiones entre subsistemas se forman por las fuerzas de reacción en los puntos de contacto entre subsistemas. En [Cavalieri97] se trata la arquitectura distribuida en la implementación de un control descentralizado para un robot manipulador, donde se puede apreciar que es de suma importancia una comunicación eficiente entre todos los controladores del sistema, tanto para fines de supervisión local como para fines de coordinación del sistema.

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de un control robusto descentralizado para la clase de sistemas no lineales que se pueden modelar por las ecuaciones de Euler-Lagrange. En particular se trata el caso del control de un manipulador en donde se plantea la implantación de la ley de control y la obtención de datos experimentales. Los sistemas de interés presentan interconexiones de un orden alto en los estados y se considera que las incertidumbres paramétricas y las interconexiones están dentro del espacio de controlabilidad de la entrada de control, esto es, que cumplen con la condición *matching*. Además la única información que se tiene de las incertidumbres y de las interconexiones es que están acotadas por un polinomio de orden 'p' en los estados del sistema.

Tras el desarrollo del presente trabajo se propuso una estrategia de control que garantiza la estabilidad "práctica" del sistema, es decir que las señales del sistema y del control están global, última y uniformemente acotadas, considerando a las interconexiones como términos acotados por un polinomio de alto orden en los estados del sistema. En el peor de los casos, en el que se desconoce la cota sobre los términos de interconexión y perturbaciones, con la estimación de un parámetro (la cota sobre estos términos) se logra garantizar la estabilidad del sistema. En resultados experimentales y en simulaciones se encontró que el control propuesto se puede implantar fácilmente, que el ajuste de parámetros es directo y que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es robusto a cambios en la cota de los términos de interconexión y de perturbaciones. En [Tang] se resume el desarrollo y los resultados obtenidos en el presente trabajo.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos, el primero de los cuales es una breve introducción en la que a *grosso modo* se enuncia el tema del presente trabajo. En el Capítulo 2, se expone el modelo de la clase de sistemas no lineales de interés, del que se proporciona dos ejemplos: dos péndulos invertidos acoplados por un resorte no lineal y un manipulador planar de dos grados de libertad. A continuación se presenta la ley de control descentralizada robusta y se establecen las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado tanto para el caso 1, en el que se conoce la cota sobre las interconexiones y perturbaciones en el sistema, como para el caso 2 en el que se realiza una estimación de esta cota.

Dentro del Capítulo 3 se aplican los resultados obtenidos en el capítulo anterior a manipuladores articulados, o de revolución, de forma que primero se presenta el modelo de un manipulador y se compara con el modelo general planteado en el Capítulo 2. Después se aplica la ley de control robusta descentralizada y se particularizan las propiedades de estabilidad encontradas en el capítulo anterior. Por último se presentan los resultados experimentales de la implantación de la ley de control en un manipulador planar de dos grados de libertad. Finalmente, en el Capítulo 4 se exponen las conclusiones a las que se llegó en el trabajo realizado, y se enuncian además los posibles desarrollos a futuro.

Capítulo 2

Diseño del Control Robusto Descentralizado

En este capítulo se estudia el modelo de los sistemas no lineales de interés, es decir sistemas no lineales que se modelan por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange y cuya estructura permite representarlos como un conjunto de N subsistemas. A continuación se plantea el diseño de la ley de control, primero para el denominado caso 1, en el que se conoce la cota sobre la incertidumbre paramétrica, perturbaciones e influencia de las interconexiones y después para cuando se desconoce ésta cota, el llamado caso 2, en el que tiene que utilizar una estimación de la cota en cuestión. Por último se presenta un ejemplo numérico del algoritmo de control propuesto.

2.1 Modelo de la clase de sistemas no lineales

Los sistemas físicos contemplados en este trabajo son no lineales y se pueden modelar con las ecuaciones de Euler-Lagrange [Goldstein80, Langhaar62]. Las ecuaciones de Euler-Lagrange, o simplemente de Lagrange en muchas referencias, se derivan de los métodos variacionales, los cuales son una herramienta importante para modelar sistemas que involucran interacciones complejas de diferente tipo energético, tanto de parámetros concentrados como distribuidos.

Que el modelo del sistema esté dado por ecuaciones de Euler-Lagrange indica que se trabaja con sistemas con un número finito de grados de libertad, que tienen restricciones holonómicas que satisfacen el principio del trabajo virtual, y que las fuerzas involucradas varían de una forma continua con respecto a cambios en las coordenadas generalizadas.

En un sistema holonómico, es decir un sistema con restricciones holonómicas, se tiene que el conjunto de todas las posibles “posiciones” que el sistema puede asumir

forma un espacio, el espacio de configuraciones, el cual es conectado¹ y en cualquier punto de éste se pueden efectuar todos los movimientos posibles. En contraparte, en los sistemas no holonómicos las restricciones son tales que sólo se pueden seguir ciertas trayectorias en el espacio de configuraciones. La especificación de una configuración en particular, en sistemas holonómicos de un número finito de grados de libertad, se realiza por medio de una l -upla (x_1, x_2, \dots, x_l) de coordenadas generalizadas, ya que éstas forman un conjunto independiente, y se tiene el mismo número de grados de libertad que de coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden expresar como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (2.1)$$

Donde: $q \in \mathbb{R}^l$ es el vector de coordenadas generalizadas.

$\tau \in \mathbb{R}^l$ es el vector de fuerzas generalizadas que actúan en el sistema.

$L = K - V$, es el Lagrangiano del sistema.

K es la co-energía total de los almacenadores de flujo del sistema.

V es la energía total de los almacenadores de esfuerzo del sistema.

Suposición 2.1 *El Lagrangiano de los sistemas a considerar tiene las siguientes propiedades:*

• V es únicamente función de q

$$V(q) \leq k_b \|q\|^2 + k_c; \text{ con constantes } k_b, k_c \geq 0$$

• K se puede expresar² como una función cuadrática de \dot{q} , i.e. $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$, donde $M(q) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es una matriz que describe la co-energía total del sistema dada por los almacenadores de flujo, en función de las coordenadas generalizadas

La forma cuadrática de K impone propiedades sobre $M(q)$, de forma que se sabe [Craig88, p. 10] que $M(q)$ es positiva definida y simétrica para toda $q \in \mathbb{R}^l$. Además $M(q)$ es una matriz acotada, ya que al ser K la co-energía de un sistema físico, se sabe que (para todo tiempo) la energía del sistema debe de ser una cantidad finita. De esta forma la definición del Lagrangiano queda como:

$$L = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q).$$

¹Cualesquiera dos puntos dentro del conjunto se pueden unir por un arco que pertenece al mismo conjunto.

²Para el caso de sistemas mecánicos, la co-energía cinética de un sistema con un número finito de grados de libertad tiene una forma cuadrática de los elementos de la velocidad generalizada (\dot{q}_i), si las coordenadas generalizadas especifican la configuración del sistema con respecto al mismo marco de referencia Newtoniano con el que se calcula la energía cinética [Langhaar62, p. 234]

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.1), se obtiene un sistema no lineal de 2^{do} orden de l ecuaciones diferenciales ordinarias y aprovechando las propiedades de $M(q)$ y $V(q)$ la k -ésima ecuación es [Spong89, pp. 141-142]

$$\sum_{j=1}^l m_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial q_i} m_{kj}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{\partial}{\partial q_k} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} V(q) = \tau_k,$$

con $k = 1, 2, \dots, l$. Reordenando términos se llega a

$$\sum_{j=1}^l m_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial}{\partial q_i} m_{kj}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} m_{ij}(q) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} V(q) = \tau_k$$

que debido a la simetría de la matriz M se puede expresar como

$$\sum_{j=1}^l m_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} V(q) = \tau_k,$$

con

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right\}$$

Si se define una matriz $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ de forma que cada uno de sus elementos esté dado por

$$c_{kj} \triangleq \sum_{i=1}^l c_{ijk}(q) \dot{q}_i; \quad k, j = 1, 2, \dots, l \quad (2.2)$$

Se llega a

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.3)$$

con

$$g(q) \triangleq \frac{\partial}{\partial q} V(q)$$

Una amplia gama de sistemas no lineales se puede representar por la ecuación anterior y para el presente trabajo, se considera de interés a los sistemas no lineales que estén compuestos por N subsistemas que se puedan representar por una ecuación del tipo (2.3).

De esta forma se plantea el modelo de cada subsistema no lineal como

$$\bar{M}_i(q) \ddot{q}_i + \bar{C}_i(q, \dot{q}) \dot{q}_i + \bar{g}_i(q) = \tau_i, \quad (2.4)$$

donde el subíndice denota al subsistema i ; $i \in [1, N]$. Entonces $q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ representa a las coordenadas generalizadas del subsistema i , y las coordenadas generalizadas del sistema global están dadas por $q \triangleq [q_1^T, q_2^T, \dots, q_N^T]^T$; $q \in \mathbb{R}^n$ con $n = \sum_{i=1}^N n_i$. $\bar{M}_i(q) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es la matriz de inercia y $\tau_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ representa a las fuerzas generalizadas aplicadas al subsistema y por tanto $\tau \triangleq [\tau_1^T, \tau_2^T, \dots, \tau_N^T]^T$ es la fuerza generalizada aplicada al sistema global.

Suposición 2.2 Se considera que $\tau_i = u_i - \bar{Z}_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)$, donde:

- $\bar{Z}_i(q, \dot{q})$ es el término de interconexión en el que se agrupan los efectos, sobre el subsistema 'i', de la fuerza generalizada τ aplicada al sistema global y el de la dinámica del resto del sistema

- $D_i(q_i, \dot{q}_i)$ son las perturbaciones de par o fuerza locales al subsistema 'i'. Este término incluye las perturbaciones a la señal de entrada, como ruido y dinámicas no modeladas, así como también los efectos de la incertidumbre paramétrica propia del subsistema

- u_i es la señal de control del subsistema

La forma de τ_i reconoce los efectos del sistema global sobre cada uno de los subsistemas, ya que de forma general la aplicación de la fuerza generalizada τ trae consigo interacciones entre las diferentes partes del sistema, y dichas interacciones se representan con el término $\bar{Z}_i(q, \dot{q})$. La suposición (2.2) impone una restricción estructural sobre el sistema, ya que las interconexiones y las perturbaciones deben de satisfacer la condición *matching*. Es decir que los efectos del resto del sistema sobre el subsistema i , así como la incertidumbre paramétrica del propio subsistema deben de entrar al modelo en el mismo punto que la señal de control. Con esto se asegura que se puede compensar, vía la ley de control, tanto a la incertidumbre paramétrica como a los efectos de las interconexiones.

Cada subsistema, tras sustituir a τ_i , se representa por

$$\bar{M}_i(q)\ddot{q}_i + \bar{C}_i(q, \dot{q})\dot{q}_i + \bar{g}_i(q) = u_i - \bar{Z}_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i), \quad (2.5)$$

en donde $\bar{M}_i(q)\ddot{q}_i$, $\bar{C}_i(q, \dot{q})\dot{q}_i$ y $\bar{g}_i(q)$ se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \bar{M}_i(q)\ddot{q}_i &= (M_i(q_i) + M_i^*(q))\ddot{q}_i \\ \bar{C}_i(q, \dot{q})\dot{q}_i &= (C_i(q_i, \dot{q}_i) + C_i^*(q, \dot{q}))\dot{q}_i \\ \bar{g}_i(q) &= g_i(q_i) + g_i^*(q), \end{aligned}$$

es decir que se pueden expresar como la suma de dos términos, uno que depende únicamente de q_i y otro que depende de q . Esto es siempre posible ya que $q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ con $i = 1, 2, \dots, N$ y se sabe que $q^T = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_N^T]$, de forma que $q \in \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^N n_i$. De lo que se concluye que se puede separar los términos que únicamente dependen de q_i , si es que existen, y que el resto de los términos agrupados en la matriz o vector estrella ($M_i^*(q)$, $C_i^*(q, \dot{q})$ y $g_i^*(q)$) pueden depender de las coordenadas del sistema global, inclusive de q_i . Por lo que (2.5) se convierte en:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + M_i^*(q)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + C_i^*(q, \dot{q})\dot{q}_i + g_i(q_i) + g_i^*(q) = u_i - \bar{Z}_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.6)$$

Los términos en (2.6) que dependen de q y \dot{q} conforman el efecto que tiene el sistema completo sobre el subsistema, y por tanto se pueden agrupar en un nuevo término de interconexión definido por

$$Z_i(q, \dot{q}) = \bar{Z}_i(q, \dot{q}) + M_i^*(q)\ddot{q}_i + C_i^*(q, \dot{q})\dot{q}_i + g_i^*(q) \quad (2.7)$$

Para que el término $M_i^*(q)\ddot{q}_i$ en (2.7) no implique que Z_i es también función de \ddot{q} se debe hacer otra suposición.

Suposición 2.3 τ_i sólo depende de q y \dot{q} .

Con la suposición anterior y expresando al subsistema i en su forma original (2.4) se tiene que: $\ddot{q}_i = \bar{M}_i^{-1}(q)[\tau_i - \bar{C}_i(q, \dot{q})\dot{q}_i - \bar{g}_i(q)]$, esto es que $\ddot{q}_i = f(q, \dot{q})$, que se cumple para todo q y \dot{q} ya que la inversa de $\bar{M}_i(q)$ siempre existe por ser acotada y positiva definida. Al ser \ddot{q}_i una función de q y \dot{q} se llega a que Z_i sigue siendo solamente función de q y \dot{q} . Por lo que (2.6) se expresa por:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + Z_i(q, \dot{q}) + D_i(q_i, \dot{q}_i) = u_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

El modelo de los sistemas no lineales que son de interés para el presente trabajo está dado por la ecuación (2.8), esta ecuación cumple con varias propiedades dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange y por las suposiciones hechas durante el desarrollo del modelo. A continuación se resumen éstas propiedades:

- La matriz $M_i(q_i)$ satisface:

$$0 < \underline{m}_i I \leq M_i(q_i) = M_i^T(q_i) \leq \bar{m}_i I \quad ; 0 < \underline{m}_i \leq \bar{m}_i$$

- La matriz $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ satisface:

$$\|C_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq k_a \|\dot{q}_i\|$$

$$C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_j = C_i(q_i, \dot{q}_j)\dot{q}_i$$

- El vector $g_i(q_i)$ satisface:

$$\|g_i(q_i)\| \leq k_d \|q_i\| + k_e; \quad \text{con constantes } k_d, k_e \geq 0$$

- La dinámica de cada subsistema se puede parametrizar por una relación lineal:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) \theta_i$$

donde $Y_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i}$ es el regresor y consiste de funciones acotadas de sus argumentos y $\theta_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ es un vector de parámetros. El número de parámetros así como sus características individuales dependen del sistema en específico, pero lo significativo es que (2.8) se puede parametrizar por una relación lineal, de forma que los parámetros del

sistema aparecen como coeficientes de funciones de las coordenadas generalizadas.

- Por la forma en que se definió $C_i(q, \dot{q}_i)$ en (2.2) se tiene que:

$$\dot{q}_i^T (\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)) \dot{q}_i = 0 \quad \forall \dot{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i},$$

con la matriz $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ antisimétrica.

Suposición 2.4 *Se considera que los términos de interconexión y de perturbaciones cumplen con las siguientes propiedades:*

- *El término de interconexión satisface:*

$$\|Z_i(q, \dot{q})\| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} Q_j; \quad Q_j = 1 + \|q_j\| + \|\dot{q}_j\| + \dots + \|q_j\|^p + \|\dot{q}_j\|^p$$

$$c_{ij} \geq 0$$

- *El término de perturbaciones satisface:*

$$\|D_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq d_i Q_i; \quad d_i \geq 0$$

2.1.1 Ejemplos

De forma general el modelo propuesto puede representar un gran número de sistemas no lineales. A manera de ejemplo de estos sistemas, se presentan a continuación dos sistemas. En primer lugar un sistema de dos péndulos invertidos acoplados por medio de un resorte no lineal [Gavel89, Gong96], y después un robot manipulador de dos grados de libertad, con la segunda unión actuada a distancia.

• Dos péndulos invertidos acoplados.

De la Figura 2.1 se puede observar que el sistema consiste en dos péndulos invertidos acoplados por un resorte y que existe un par de control para cada péndulo. Se considera que la masa de cada péndulo está concentrada en su extremo y que el resorte que los acopla no tiene masa, es no lineal y tiene un modelo dado por [Khalil96, p. 9]

$$F_k(y) = k(1 + (sd)A^2y^2)y,$$

En donde $F_k(y)$ es la fuerza ejercida, ' y ' es el desplazamiento del resorte, ' k ' es la constante del resorte, ' A ' es la constante del efecto no lineal y cumple con $|Ay| < 1$. ' sd ' (suave/duro) determina las propiedades del resorte, de forma que si $sd = -1$ se tiene un resorte suave y $sd = 1$ implica un resorte duro.

De acuerdo a la Figura 2.1 la co-energía cinética del sistema es

$$K = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2]$$

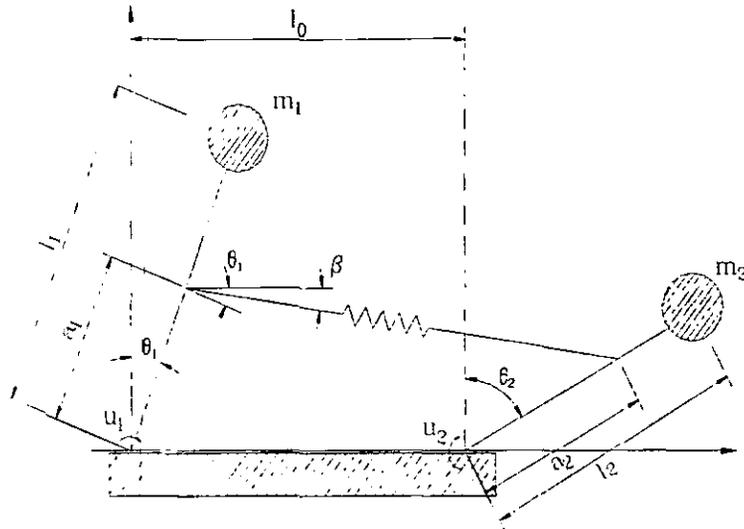


Figura 2.1: Sistema con dos péndulos invertidos

y la energía potencial está dada por

$$V = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Las fuerzas generalizadas que afectan al sistema son

$$\theta_1 : \quad \tau_1 = u_1 + F_k a_1 \cos(\theta_1 - \beta)$$

$$\theta_2 : \quad \tau_2 = u_2 - F_k a_2 \cos(\theta_2 - \beta)$$

Los efectos disipativos (co-contenido) por la fricción viscosa en el eje de rotación de cada péndulo están dados por

$$J = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{\theta}_2^2.$$

Los términos de la energía cinética y potencial forman el Lagrangiano del sistema:

$$L = K - V = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2] - m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2.$$

Al sustituirse el Lagrangiano, el co-contenido y las fuerzas generalizadas en (2.1), la ecuación de Euler-Lagrange, se llega a

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 + b_1 \dot{\theta}_1 = u_1 + F_k a_1 \cos(\theta_1 - \beta)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 + b_2 \dot{\theta}_2 = u_2 - F_k a_2 \cos(\theta_2 - \beta)$$

donde:

$$F_k = k(1 + (sd)A^2(l_k - l_0)^2)(l_k - l_0)$$

$$\beta = \arctan \left[\frac{a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2}{l_0 - a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2} \right]$$

$$l_k = \left[(l_0 + a_2 \sin \theta_2 - a_1 \sin \theta_1)^2 + (a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2)^2 \right]^{1/2}$$

Entonces, el modelo dinámico de ambos péndulos puede ser representado por

$$m_i \ddot{\theta}_i + g_i + Z_i + D_i = u_i, \quad (2.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 < \underline{m}_i l_i^2 < m_i l_i^2 < \overline{m}_i l_i^2 & \quad (\text{término positivo y acotado}) \\ |g_i| \leq m_i g l_i |\theta_i| \quad \forall \theta_i \in \mathbb{R} & \quad (\text{término gravitacional}) \\ \dot{m}_i - 2c_i = 0 \quad ; \quad c_i = 0 & \quad (\text{término centrífugo}) \\ Z_i = F_k a_i \cos(\theta_i - \beta) & \quad (\text{término de interconexión}) \\ D_i = b_i \dot{\theta}_i & \quad (\text{término de perturbaciones}) \end{aligned}$$

Por la forma en que se define F_k , el término de interconexiones se puede acotar por

$$\begin{aligned} |Z_i| & \leq |k a_i \cos(\theta_i - \beta)(l_k - l_0)| + |k A^2 a_i \cos(\theta_i - \beta)(l_k - l_0)^3| \\ & \leq k a_i |l_k - l_0| + k A^2 a_i |l_k - l_0|^3; \quad \text{ya que } |\cos(\theta_i - \beta)| \leq 1 \\ & = k A^2 a_i (|l_k^3| + 3l_0 |l_k^2|) + k a_i (A^2 3l_0^2 + 1) |l_k| + k a_i l_0 (1 + A^2 l_0^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

para el término l_k se tiene que

$$l_k^2 = (l_0 + a_2 \sin \theta_2 - a_1 \sin \theta_1)^2 + (a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2)^2$$

por lo que se puede acotar por

$$\begin{aligned} l_k & \leq |l_0 + a_2 \sin \theta_2 - a_1 \sin \theta_1| + |a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos \theta_2| \\ & \leq |l_0| + a_2 |\sin \theta_2| + a_1 |\sin \theta_1| + a_1 |\cos \theta_1| + a_2 |\cos \theta_2| \\ & \leq |l_0| + a_2 |\theta_2| + a_1 |\theta_1| + a_1 |\theta_1| + a_1 + a_2 |\theta_2| + a_2 \\ & \leq |l_0| + a_1 + a_2 + 2a_1 |\theta_1| + 2a_2 |\theta_2| \end{aligned}$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (2.10)

$$|Z_i| \leq K_{i1} |\theta_1|^3 + K_{i2} |\theta_1|^2 + K_{i3} |\theta_1| + K_{i4} |\theta_2|^3 + K_{i5} |\theta_2|^2 + K_{i6} |\theta_2| + K_{i7}$$

con constantes $K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{i7} \geq 0$. Por lo que se llega a

$$\begin{aligned} |Z_i| & \leq \sum_{j=1}^2 K_{i8} (1 + |\theta_i| + |\theta_i|^2 + |\theta_i|^3); \quad K_{i8} \geq 0 \\ |Z_i| & \leq \sum_{j=1}^2 o_{ij} Q_j; \quad Q_j \triangleq 1 + |\theta_i| + |\dot{\theta}_i| + \dots + |\theta_i|^3 + |\dot{\theta}_i|^3 \\ & \quad o_{ij} \geq 0 \text{ y constante} \end{aligned}$$

Para el término de perturbaciones es fácil ver que se puede acotar por

$$\begin{aligned} |D_i| & \leq b_i |\dot{\theta}_i|; \quad b_i > 0 \\ & \leq o_i Q_i; \quad o_i \geq 0 \text{ y constante.} \end{aligned}$$

Al comparar las propiedades del modelo listadas arriba con las suposiciones (2.1), (2.2) y (2.4) se puede comprobar que el sistema de dos péndulos invertidos, acoplados por un resorte, cae dentro de la clase de sistemas no lineales que son de interés para el presente trabajo.

· Robot manipulador

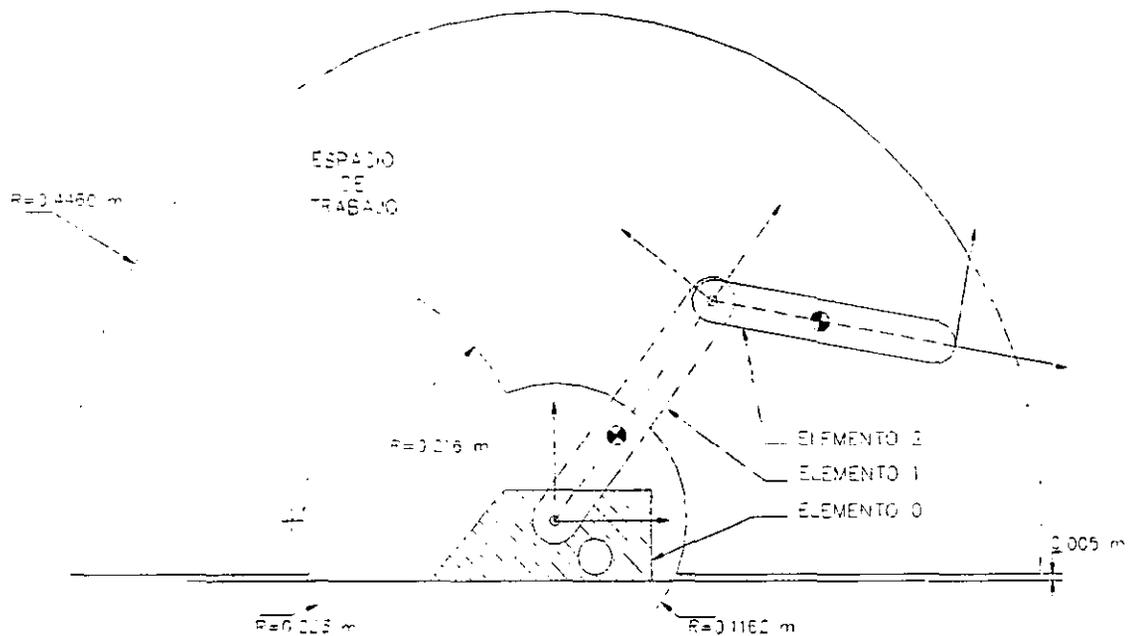


Figura 2.2: Manipulador de dos grados de libertad

El sistema de este ejemplo es un manipulador de dos grados de libertad, cuya configuración cinemática se muestra en la Figura 2.2. Se considera que está formado por uniones y elementos perfectamente rígidos y que son despreciables los efectos de la transmisión de potencia, es decir que no hay pérdidas y que el deslizamiento en los engranes es nulo.

Una característica importante del manipulador es que la segunda unión está actuada a distancia, es decir que el actuador de ésta unión se encuentra a nivel de la primera unión y por una banda se transmite el movimiento. Esta configuración provoca que las coordenadas de las uniones no sean independientes entre sí y que un movimiento en la primera unión no implique un cambio en la orientación del segundo elemento, por esto, las coordenadas del sistema se denotan por ' p ' y no por ' q ' como es lo común en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El modelo dinámico del manipulador [Spong89, p. 148] se representa por

$$M(p)\ddot{p} + C(p, \dot{p})\dot{p} + g(p) = \tau.$$

Desarrollando cada término se tiene

$$\begin{bmatrix} m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 & m_2 l_1 l_{c_2} \cos(p_2 - p_1) \\ m_2 l_1 l_{c_2} \cos(p_2 - p_1) & m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(p_2 - p_1) \dot{p}_2 \\ m_2 l_1 l_{c_2} \sin(p_2 - p_1) \dot{p}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 l_{c_1} + m_2 l_{c_2}) g \cos p_1 \\ m_2 l_{c_2} g \cos p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

en donde:

m_i masa del elemento i

l_i longitud del elemento

l_{c_i} posición del centroide del elemento

I_i momento de inercia del elemento

p_i posición angular de la unión i con respecto a la horizontal

El modelo se puede ordenar en la forma

$$(m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1) \ddot{p}_1 + (m_1 l_{c_1} + m_2 l_{c_2}) g \cos p_1 = \tau_1 - Z_1 \quad (2.11)$$

$$(m_2 l_{c_2}^2 + I_2) \ddot{p}_2 + m_2 l_{c_2} g \cos p_2 = \tau_2 - Z_2, \quad (2.12)$$

donde:

$$Z_1 = m_2 l_1 l_{c_2} \cos(p_2 - p_1) \ddot{p}_2 - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(p_2 - p_1) \dot{p}_2^2$$

$$Z_2 = m_2 l_1 l_{c_2} \cos(p_2 - p_1) \ddot{p}_1 + m_2 l_1 l_{c_2} \sin(p_2 - p_1) \dot{p}_1^2$$

Al igual que en el desarrollo del término de interconexión en el modelo general, se sabe que $\ddot{p}_i = f(p, \dot{p})$ y por tanto se conserva que Z_i es función únicamente de p y \dot{p} .

Es decir que el modelo se puede representar por

$$M_i \ddot{p}_i + g_i = \tau_i + Z_i,$$

y tiene las siguientes características:

$$0 < \underline{m}_i < M_i < \overline{m}_i \quad (\text{término positivo y acotado})$$

$$|g_i| \leq k_d |p_i| + k_e \quad (\text{término gravitacional})$$

$$\dot{M}_i - 2c_i = 0; \quad c_i = 0 \quad (\text{término centrífugo})$$

$$D_i = 0 \quad (\text{término de perturbaciones})$$

El término de interconexión, para el caso del manipulador, se puede acotar por

$$|Z_i| \leq \sum_{j=1}^2 c_{ij} Q_j; \quad Q_j \triangleq 1 + |p_j| + |\dot{p}_j| + |p_j|^2 + |\dot{p}_j|^2$$

$$c_{ij} \geq 0,$$

de forma que el modelo del manipulador de dos grados de libertad cumple con las propiedades que se le piden a la clase de sistemas no lineales con que se está trabajando.

2.2 Objetivo del control

La clase de sistemas no lineales de interés incluyen términos de interconexión y de perturbaciones y se asume que únicamente se conocen cotas sobre estos términos; es decir, que los efectos de las perturbaciones e interconexiones no se pueden cancelar explícitamente vía la ley de control. Más aún, la presencia de estos efectos hace que se pierda el origen como punto de equilibrio del sistema.

Es por eso que el estudio de la estabilidad del sistema en lazo cerrado se va a concentrar en garantizar que las variables del sistema estén últimamente acotadas, y que se pueda reducir tanto como se quiera la cota última por medio de la acción de control. Se debe de cumplir que un error de seguimiento dentro del rango requerido, no implique una acción de control no acotada.

Definición 2.1 Se considera que las soluciones de un sistema $\dot{x} = f(x)$ están últimamente acotadas [Khalil96, p. 211], si existen constantes b y c y para cada $\alpha \in (0, c)$ existe una constante positiva $T = T(\alpha)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| \leq b \quad \forall t \geq t_0 + T$$

y se dice que las soluciones están global y últimamente acotadas, si la condición anterior se cumple para una α arbitrariamente grande.

2.3 Diseño del controlador, caso 1

En este caso se diseña el controlador con el conocimiento de la cota sobre los efectos de las interconexiones, perturbaciones e incertidumbres paramétricas. De esta forma se propone la siguiente ley de control para cada subsistema (2.8):

$$u_i = -K_i s_i + w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 \quad (2.13)$$

donde:

$$w_i = -(\delta S_i)^2 \frac{s_i}{\delta S_i \|s_i\| + \epsilon_i}; \quad \epsilon_i > 0$$

$$S_i \triangleq 1 + \|s_i\| + \dots + \|s_i\|^p$$

$$s_i \triangleq \dot{e}_i + \Lambda_i e_i = \dot{q}_i - \dot{q}_i^r$$

$$e_i \triangleq q_i - q_i^d$$

$$\dot{q}_i^r \triangleq \dot{q}_i^d - \Lambda_i e_i$$

q_i^d es la trayectoria deseada, la cual es acotada y suave. i.e. $(\dot{q}_i^d, \ddot{q}_i^d)$ acotadas.

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 = M_i^0(q_i) \ddot{q}_i^r + \dot{C}_i^0(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i^r + g_i^0(q_i)$$

$M_i^0(q_i)$, $C_i^0(q_i, \dot{q}_i)$, $g_i^0(q_i)$ son los valores nominales del subsistema.

$$K_i, \Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \text{ y } K_i, \Lambda_i > 0$$

Sustituyendo la ley de control propuesta en el subsistema (2.8) y expresando la ecuación en función de s_i se tiene:

$$M_i(q_i)\dot{s}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)s_i = -K_i s_i + w_i - Z_i(q, \dot{q}) + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 - D_i(q_i, \dot{q}_i) - M_i(q_i)\ddot{q}_i^r - C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i^r - g_i(q_i). \quad (2.14)$$

Aprovechando que el sistema se puede parametrizar linealmente

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i^r + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i^r + g_i(q_i) = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i,$$

y agrupando los términos que comparten el mismo regresor:

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 - Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i; \quad \tilde{\theta}_i = \theta_i^0 - \theta_i$$

Se puede expresar a (2.14) como:

$$M_i(q_i)\dot{s}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)s_i + K_i s_i = w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.15)$$

Siendo la ecuación anterior la que se utilizará para representar al sistema en lazo cerrado.

Lema 2.1 *Sea el sistema en lazo cerrado representado por (2.15). Bajo las suposiciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) como propiedades del sistema y para un $\lambda_m\{\Lambda_i\}$ suficientemente grande, entonces se cumple que*

$$\begin{aligned} \|Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)\| &\leq \sum_{j=1}^N \delta_{ij} S_j \\ &\quad ; \text{ para algunas } \delta_{ij} \geq 0 \\ &\quad ; \text{ con } S_j \text{ definido como en (2.13)} \end{aligned}$$

Prueba: A lo largo de la prueba se va a considerar que las constantes k_i son cantidades positivas, es decir que, $k_i \geq 0$; $i = 0, 1, \dots$. Para llegar a la cota de interés primero se tiene que acotar a las variables del sistema, es decir $q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r$, con respecto a $\|s_i\|$.

La clase de sistemas no lineales modelados por (2.8) representa a sistemas físicos, por lo que es intuitivo que la energía total del sistema, en todo tiempo, es finita. De esta forma, a nivel de cada subsistema, se tiene que la energía total debe de ser acotada.

La energía total E_i del subsistema i está dada por [Goldstein80, pp. 62, 74]

$$E_i = K_i(q_i, \dot{q}_i) + V_i(q_i) \leq k_0,$$

donde $K_i(q_i, \dot{q}_i)$ es la co-energía y $V_i(q_i)$ es la energía del subsistema i . Por la suposición (2.1), la ecuación anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i + V_i(q_i) \leq k_0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i \leq k_0 - V_i(q_i). \end{aligned}$$

Obteniendo la norma de ambos lados

$$\left| \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i \right| \leq k_0 + |V_i(q_i)|,$$

y por las propiedades del sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{m}_i \|\dot{q}_i\|^2 &\leq \left| \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i \right| \leq k_0 + K_b \|q_i\|^2 + k_c \\ \Rightarrow \|\dot{q}_i\| &\leq \left(\frac{2}{\underline{m}_i} k_b \|q_i\|^2 + \frac{2}{\underline{m}_i} (k_0 + k_c) \right)^{1/2} \leq \left(\frac{2}{\underline{m}_i} k_b \right)^{1/2} \|q_i\| + \left(\frac{2}{\underline{m}_i} (k_0 + k_c) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

de lo anterior se concluye que

$$\|\dot{q}_i\| \leq k_1 \|q_i\| + k_2 \quad (2.16)$$

con $k_1 = 2k_b/\underline{m}_i$ y $k_2 = 2(k_0 + k_c)/\underline{m}_i$.

Tomando en cuenta la definición $s_i \triangleq \dot{e}_i + \Lambda_i e_i$ y sustituyendo el error de posición ($e_i \triangleq q_i - q_i^d$) se tiene que:

$$\begin{aligned} s_i &= \dot{q}_i - \dot{q}_i^d + \Lambda_i (q_i - q_i^d) = \dot{q}_i + \Lambda_i q_i - (\dot{q}_i^d + \Lambda_i q_i^d) \\ \Rightarrow \Lambda_i q_i &= s_i - \dot{q}_i + (\dot{q}_i^d + \Lambda_i q_i^d). \end{aligned}$$

Obteniendo la norma de ambos lados y aprovechando que la trayectoria deseada es acotada y suave

$$\begin{aligned} \|\Lambda_i q_i\| &= \|s_i - \dot{q}_i + \dot{q}_i^d + \Lambda_i q_i^d\| \\ &\leq \|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + \|\dot{q}_i^d + \Lambda_i q_i^d\| \\ &\leq \|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_3; \quad \|\dot{q}_i^d + \Lambda_i q_i^d\| \leq k_3 \end{aligned}$$

Acotando a $\|\Lambda_i q_i\|$ por $\lambda_m\{\Lambda_i\}\|q_i\|$

$$\begin{aligned} \lambda_m\{\Lambda_i\}\|q_i\| &\leq \|\Lambda_i q_i\| \leq \|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_3 \\ \Rightarrow \lambda_m\{\Lambda_i\}\|q_i\| &\leq \|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.16), la cota sobre $\|\dot{q}_i\|$, en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_m\{\Lambda_i\}\|q_i\| &\leq \|s_i\| + k_1 \|q_i\| + k_2 + k_3 \\ &= \|s_i\| + k_1 \|q_i\| + k_4; \quad k_4 = k_2 + k_3, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|q_i\| \leq \frac{1}{\lambda_m\{\Lambda_i\} - k_1} (\|s_i\| + k_4); \quad \text{y para } \lambda_m\{\Lambda_i\} > k_1. \quad (2.18)$$

La condición de $\lambda_m\{\Lambda_i\} > k_1$ se asegura con una Λ_i suficientemente grande y como Λ_i es un parámetro de la ley de control, se puede garantizar que se cumple la condición al especificar valores grandes para Λ_i . La cota sobre $\|\dot{q}_i\|$ se obtiene de (2.17):

$$\|\dot{q}_i\| \leq \frac{1}{\lambda_m\{\Lambda_i\}} (\|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_3); \quad \text{ya que } \lambda_m\{\Lambda_i\} \geq 0.$$

De (2.16) y sustituyendo la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \|\dot{q}_i\| &\leq k_1\|q_i\| + k_2 \\ &\leq \frac{k_1}{\lambda_m\{\Lambda_i\}} (\|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_3) + k_2 \\ &= \frac{k_1}{\lambda_m\{\Lambda_i\}} (\|s_i\| + \|\dot{q}_i\| + k_5); \quad k_5 = k_3 + \frac{\lambda_m\{\Lambda_i\}}{k_1} k_2 \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{k_1}{\lambda_m\{\Lambda_i\}}\right) \|\dot{q}_i\| \leq \frac{k_1}{\lambda_m\{\Lambda_i\}} (\|s_i\| + k_5) \\ &\Rightarrow \|\dot{q}_i\| \leq \frac{k_1}{\lambda_m\{\Lambda_i\} - k_1} (\|s_i\| + k_5); \quad \text{para } \lambda_m\{\Lambda_i\} > k_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La cota para \dot{q}_i^r y \dot{q}_i^T se obtiene de la definición $\dot{q}_i^r \triangleq \dot{q}_i^d - \Lambda_i e_i$

$$\begin{aligned} \|\dot{q}_i^r\| &\leq \|\dot{q}_i^d\| + \|\Lambda_i e_i\| \\ &= \|\dot{q}_i^d\| + \|\Lambda_i(q_i - q_i^d)\|; \quad e_i = q_i - q_i^d \\ &\leq \|\dot{q}_i^d\| + \|\Lambda_i q_i\| + \|\Lambda_i q_i^d\| \\ &\leq \|\Lambda_i q_i\| + k_6; \quad \|\dot{q}_i^d\| + \|\Lambda_i q_i^d\| \leq k_6 \\ &\leq \lambda_M\{\Lambda_i\} \|q_i\| + k_6 \\ &\leq k_7 \|q_i\| + k_6 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Y de forma similar se llega a

$$\|\dot{q}_i^T\| \leq k_9 \|\dot{q}_i\| + k_8 \quad (2.21)$$

Conociendo las cotas sobre las variables del sistema se puede establecer una cota sobre cada uno de los tres términos en la desigualdad del lema. Para el primer término

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \dot{q}_i^T) \bar{\theta}_i = \bar{M}_i(q_i) \dot{q}_i^r + \bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i^r + \bar{g}_i(q_i),$$

en donde: $\tilde{M}_i(q_i) = M_i^0(q_i) - M_i(q_i)$, $\tilde{C}_i(q_i, \dot{q}_i) = C_i^0(q_i, \dot{q}_i) - C_i(q_i, \dot{q}_i)$ y $\tilde{g}_i(q_i) = g_i^0(q_i) - g_i(q_i)$. Por las propiedades del sistema se sabe que los elementos de Y_i son funciones acotadas en sus argumentos. Asimismo $\tilde{\theta}_i$, el vector que representa la incertidumbre paramétrica, consiste de elementos acotados. De esta forma, de (2.20) y (2.21) se tiene

$$\begin{aligned} \|Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i\| &\leq \|\tilde{M}_i(q_i)\| \|\ddot{q}_i^r\| + \|\tilde{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\| \|\ddot{q}_i^r\| + \|\tilde{g}_i(q_i)\| \\ &\leq k_{12} \|\ddot{q}_i^r\| + k_{10} \|\dot{q}_i\| \|\ddot{q}_i^r\| + k_{11} \|q_i\| + k_{13} \\ &\leq k_{12} \|\ddot{q}_i^r\| + k_{10} \|\dot{q}_i\|^2 + k_{10} \|\ddot{q}_i^r\|^2 + k_{11} \|q_i\| + k_{13} \\ &\leq k_{10} \|\dot{q}_i\|^2 + k_{14} \|\dot{q}_i\| + k_{15} \|q_i\|^2 + k_{16} \|q_i\| + k_{17}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De (2.18) y (2.19) se concluye que $\|q_i\|$ y $\|\dot{q}_i\|$ están acotados por un polinomio de primer grado en $\|s_i\|$, es decir

$$\begin{aligned} \|q_i\| &\leq \alpha_1 \|s_i\| + \alpha_2; \quad \text{para algunas } \alpha_1, \alpha_2 > 0 \\ \Rightarrow \|q_i\|^2 &\leq (\alpha_1 \|s_i\| + \alpha_2)^2 \\ &\leq \delta_1 \|s_i\|^2 + \delta_2 \|s_i\| + \delta_3; \quad \text{para algunas } \delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0. \end{aligned}$$

Con un procedimiento similar para $\|\dot{q}_i\|$, se obtiene que $\|q_i\|^2$ y $\|\dot{q}_i\|^2$ están acotados por un polinomio de segundo grado en $\|s_i\|$. Sustituyendo las cotas sobre $\|q_i\|$, $\|\dot{q}_i\|$, $\|q_i\|^2$ y $\|\dot{q}_i\|^2$ en (2.22) y agrupando términos se llega a:

$$\|Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i\| \leq k_{18} \|s_i\|^2 + k_{19} \|s_i\| + k_{20}. \quad (2.23)$$

Para los dos términos restantes en la desigualdad del lema se tiene de las propiedades del sistema, suposición (2.4), que

$$\begin{aligned} \|Z_i(q, \dot{q})\| &\leq \sum_{j=1}^N c_{ij} Q_j; \quad Q_j = 1 + \|q_j\| + \|\dot{q}_j\| + \dots + \|q_j\|^p + \|\dot{q}_j\|^p \\ \|D_i(q_i, \dot{q}_i)\| &\leq d_i Q_i. \end{aligned}$$

Sustituyendo a $\|q_j\|$ y $\|\dot{q}_j\|$ por sus cotas en las desigualdades anteriores y de forma similar al caso anterior, (2.23), se llega a

$$\begin{aligned} \|Z_i(q, \dot{q})\| &\leq \sum_{j=1}^N a_{ij} S_j; \quad S_i = 1 + \|s_i\| + \|s_i\|^2 + \dots + \|s_i\|^p \\ &a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

$$\|D_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq b_i S_i \quad ; b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Omitiendo la dependencia de los términos se obtiene

$$\|Y_i \tilde{\theta}_i - Z_i - D_i\| \leq \|Y_i \tilde{\theta}_i\| + \|Z_i\| + \|D_i\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_{18}\|s_i\|^2 + k_{19}\|s_i\| + k_{20} + \sum_{j=1}^N a_{ij}S_j + b_iS_i \\
&\leq \sum_{j=1}^N \delta_{ij}S_j; \quad \text{para algunas } \delta_{ij} \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.1 *Sea el sistema en lazo cerrado representado por (2.15). Bajo las suposiciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) y para un $\lambda_m\{\Lambda_i\}$ suficientemente grande, el sistema en lazo cerrado es global, uniforme y últimamente acotado, y la señal de error de cada subsistema converge exponencialmente al conjunto*

$$\begin{aligned}
\{e_i \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i\| \leq r\}; \quad r^2 &= \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h \\
h &> 0 \\
a &\triangleq \left(\frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\overline{m}_i)} \right)
\end{aligned}$$

Prueba: Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^N n_i$ un dominio que contiene al origen y $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva definida, continuamente diferenciable dada por

$$V(s) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i. \quad (2.24)$$

De las propiedades del sistema (2.15), al ser M_i una matriz acotada, se tiene que la función positiva definida cumple con

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^T \underline{m}_i I s_i &\leq V(s) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^T \overline{m}_i I s_i \\
\frac{1}{2} \min_i(\underline{m}_i) \|s\|^2 &\leq V(s) \leq \frac{1}{2} \max_i(\overline{m}_i) \|s\|^2; \quad \|s\|^2 = \sum_{i=1}^N s_i^T s_i
\end{aligned} \quad (2.25)$$

en donde las cotas superior e inferior de $V(s)$ en (2.25) son funciones positivas definidas. Además la cota inferior es radialmente no acotada.

Simplificando el resultado por la simetría de la matriz M_i , la derivada de (2.24) está dada por

$$\dot{V}(s) = \sum_{i=1}^N s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i.$$

Sustituyendo (2.15) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= \sum_{i=1}^N s_i^T [w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) - C_i(q_i, \dot{q}_i) s_i - K_i s_i] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i. \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede ser simplificada por las propiedades del sistema: se sabe que $s_i^T (\dot{M}_i - 2C_i) s_i = 0$, por lo que

$$\dot{V}(s) = - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T (w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \tilde{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)) \quad (2.26)$$

Reordenando esta ecuación, omitiendo las dependencias de los términos y utilizando al lema (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N s_i^T [Y_i \tilde{\theta}_i - Z_i - D_i] \\ &\leq - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N \|s_i\| [\|Y_i \tilde{\theta}_i - Z_i - D_i\|] \\ &\leq - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N \|s_i\| \sum_{j=1}^N \delta_{ij} S_j \\ &\leq - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \max_{i,j}(\delta_{ij}) \sum_{i=1}^N \|s_i\| \sum_{j=1}^N S_j \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Tchebychev y sustituyendo a w_i por el término propuesto en la ley de control (2.13):

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \max_{i,j}(\delta_{ij}) N \sum_{i=1}^N \|s_i\| S_i \\ &= - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \left[\frac{-(\delta S_i)^2 \|s_i\|^2}{\delta S_i \|s_i\| + \epsilon_i} + \delta \|s_i\| S_i \right] ; \delta \triangleq N \max_{i,j}(\delta_{ij}) \\ &= - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\delta \|s_i\| S_i \epsilon_i}{\delta \|s_i\| S_i + \epsilon_i} \right] \\ &\leq - \sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \epsilon ; \quad \epsilon \triangleq \sum_{i=1}^N \epsilon_i. \end{aligned}$$

Del análisis anterior se concluye que

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N -s_i^T K_i s_i + \epsilon \quad (2.27)$$

De (2.25) se despeja $\|s\|^2$

$$\|s\|^2 \geq \frac{2}{\max_i(\overline{m}_i)} V; \quad \max_i(\overline{m}_i) \geq 0$$

Sustituyendo en (2.27) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N -s_i^T K_i s_i + \epsilon \\ &\leq -\min_i(\lambda_m\{K_i\})\|s\|^2 + \epsilon \\ &\leq -\left(\frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\overline{m}_i)}\right) 2V(t) + \epsilon. \end{aligned}$$

De esta forma se llega a una desigualdad diferencial del tipo $\dot{V} \leq -\alpha(V) + b$, con $\alpha(\cdot)$ una función de la clase K, que se puede ordenar como:

$$\dot{V} \leq -2aV(t) + \epsilon; \quad a \triangleq \left(\frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\overline{m}_i)}\right).$$

Resolviendo la ecuación diferencial y por medio del Lema de Comparación se llega a [Khalil96, pp. 84-86]

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-2a(t-t_0)} + (1 - e^{-2a(t-t_0)})\frac{\epsilon}{2a}; \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.28)$$

De la desigualdad anterior se sabe que cuando $t \rightarrow \infty$, $V(t)$ va a converger al conjunto

$$\left\{s(t) \in D \mid V(s(t)) \leq \frac{\epsilon}{2a}\right\}$$

Utilizando a (2.25), se expresa a (2.28) en términos de $s(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min_i(\underline{m}_i)\|s(t)\|^2 &\leq V(t) \leq \frac{1}{2} \max_i(\overline{m}_i)\|s(t_0)\|^2 e^{-2a(t-t_0)} + (1 - e^{-2a(t-t_0)})\frac{\epsilon}{2a} \\ \Rightarrow \|s(t)\|^2 &\leq m_r \|s(t_0)\|^2 e^{-2a(t-t_0)} + (1 - e^{-2a(t-t_0)})\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)}; \quad t \geq t_0 \geq 0 \\ m_r &= \frac{\max_i(\overline{m}_i)}{\min_i(\underline{m}_i)}, \end{aligned}$$

por lo que se llega a

$$\|s(t)\|^2 \leq m_r \left(\|s(t_0)\|^2 - \frac{\epsilon}{a \max_i(\overline{m}_i)} \right) e^{-2a(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)}; \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

De lo anterior se concluye que $\|s(t)\|^2$ converge al conjunto

$$\{s(t) \in D \mid \|s(t)\| \leq r\}; \quad r^2 = \frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)}$$

cuando $t \rightarrow \infty$

Se utiliza la definición $s_i \triangleq \dot{e}_i + \Lambda_i e_i$ para encontrar el comportamiento de la señal de error del sistema, de forma que

$$\begin{aligned} e_i(t) &= (pI + \Lambda_i)^{-1} s_i(t); \quad p \text{ es el operador derivada} \\ \Rightarrow \|e_i(t)\|_\infty &\leq \|(pI + \Lambda_i)^{-1}\|_{i2} \|s_i(t)\|_\infty \end{aligned}$$

donde la norma inducida de $(pI + \Lambda_i)^{-1}$ es

$$\begin{aligned} \|(pI + \Lambda_i)^{-1}\|_{i2} &= \left(\sup_{\omega \geq 0} \left((-j\omega I + \Lambda_i)^{-1} (j\omega I + \Lambda_i)^{-1} \right) \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \end{aligned}$$

Del análisis anterior se concluye que la norma de la señal de error en cada subsistema tiende al conjunto

$$\{e_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i(t)\| \leq r\}; \quad r^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)} \right)$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Si las condiciones iniciales son tales que $\|e_i(t_0)\| \geq r$, entonces la señal de error va a tender al conjunto anterior pero nunca va a entrar a él. Si se redefine este conjunto de la siguiente forma:

$$\{e_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i(t)\| \leq r\}; \quad r^2 \triangleq \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h \quad (2.29)$$

donde $h > 0$ y arbitraria, entonces existe un tiempo finito en el que la señal de error entra al conjunto dado en (2.29) y no lo abandona. Si se redefine el conjunto al que tiende $s(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ como en (2.29), entonces también $s(t)$ entra a un conjunto acotado en un tiempo finito.

Por lo anterior se concluye que $s_i(t)$ y $e_i(t)$ son variables uniforme y últimamente acotadas. De la definición de s_i se llega a que también $\dot{e}_i(t)$ es una variable que converge a un conjunto acotado por lo que todas las señales del sistema y de la ley de control son uniforme y últimamente acotadas.

Puesto que la función dada por (2.24) es positiva definida y está acotada por abajo por una función que es radialmente no acotada, si $D = \mathbb{R}^n$ se tiene que todas las variables del sistema en lazo cerrado están global, uniforme y últimamente acotadas.

Lo anterior significa que las trayectorias del sistema están uniforme y últimamente acotadas para cualquier condición inicial $s(t_0)$. La cota última se puede reducir tanto como se quiera por medio de las variables Λ_i y K_i , no obstante, debe tomarse en cuenta el compromiso entre un error pequeño y una señal de control que no sature a los actuadores del sistema. ■

2.4 Diseño del controlador, caso 2

En esta sección se diseña el controlador robusto descentralizado, para cuando se desconoce la cota sobre los efectos de las interconexiones, incertidumbres paramétricas y perturbaciones. En muchos casos el parámetro δ en (2.13) es difícil de conocer o calcular y como una solución a este problema se plantea el estimarlo. Para esto se propone la siguiente ley de adaptación:

$$\dot{\hat{\delta}}_i = -\sigma_i \hat{\delta}_i + \gamma_i \|s_i\| S_i \quad \text{con } \hat{\delta}_i(t_0) > 0 \quad (2.30)$$

donde $\sigma_i, \gamma_i > 0$ son parámetros de diseño. S_i, s_i están definidos como en (2.13) y $\hat{\delta}_i$ es la estimación de la cota de las incertidumbres e interconexiones del subsistema i . Por utilizar el estimado de δ se modifica el término w_i de la ley de control como sigue:

$$w_i = -(\hat{\delta}_i S_i)^2 \frac{s_i}{\hat{\delta}_i S_i \|s_i\| + \epsilon_i}; \quad \epsilon_i > 0 \quad (2.31)$$

Teorema 2.2 *Sea el sistema en lazo cerrado representado por (2.15), (2.31) y (2.30). Bajo las suposiciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4), y para un $\lambda_m\{\Lambda_i\}$ suficientemente grande, el sistema en lazo cerrado es global, uniforme y últimamente acotado y la señal de error de cada subsistema converge exponencialmente al conjunto*

$$\begin{aligned} \{e_i \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i\| \leq r_e\}; \quad & r_e^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_e}{a_e \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h \\ & h > 0 \\ \epsilon_e \triangleq & \sum_{i=1}^N \epsilon_i + \delta^2 \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \\ a_e \triangleq & \min \left(\left(\frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\overline{m}_i)} \right), \sigma \right); \quad \sigma \triangleq \min_i(\sigma_i) \end{aligned}$$

Prueba: El subíndice 'e' se utiliza para diferenciar los resultados en esta prueba de los obtenidos en la prueba del Teorema 2.1. El error de la estimación de la cota δ se representa por $\tilde{\delta}_i(t) \triangleq \hat{\delta}_i(t) - \delta$.

Sea $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^N n_i$ y $D_2 \subset \mathbb{R}^N$ dos dominios que contienen al origen y $V : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva definida continuamente diferenciable dada por:

$$V_e(s, \tilde{\delta}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i + \frac{\tilde{\delta}_i^2(t)}{2\gamma_i} \right). \quad (2.32)$$

Simplificando la derivada de (2.32)

$$\dot{V}_e(s, \tilde{\delta}) = \sum_{i=1}^N \left(s_i^T M_i(q_i) \dot{s}_i + \frac{1}{2} s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i + \frac{\tilde{\delta}_i(t) \dot{\tilde{\delta}}_i(t)}{\gamma_i} \right).$$

Sustituyendo (2.15) en la ecuación anterior y simplificando el resultado por las propiedades del sistema

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(s, \tilde{\delta}) &= \sum_{i=1}^N \left(-s_i^T K_i s_i + s_i^T (w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^T) \tilde{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q})) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left(-D_i(q_i, \dot{q}_i) + \frac{\tilde{\delta}_i(t) \dot{\tilde{\delta}}_i(t)}{\gamma_i} \right). \end{aligned}$$

De manera similar a la prueba del Teorema 2.1 y omitiendo la dependencia de los términos, la ecuación anterior se puede ordenar como

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N s_i^T [Y_i \tilde{\theta}_i - Z_i - D_i] + \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\delta}_i(t) \dot{\tilde{\delta}}_i(t)}{\gamma_i} \\ &\leq -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N \delta \|s_i\| S_i + \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\delta}_i(t) \dot{\tilde{\delta}}_i(t)}{\gamma_i}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $\delta \triangleq N \max_{i,j} (\delta_{ij})$ se define igual que para el Teorema 2.1. De la definición del error de estimación y tomando en cuenta que δ es una constante, se obtiene

$$\tilde{\delta}_i(t) = \hat{\delta}_i(t) - \delta \Rightarrow \dot{\tilde{\delta}}_i(t) = \dot{\hat{\delta}}_i(t) = -\sigma_i \hat{\delta}_i + \gamma_i \|s_i\| S_i.$$

Sustituyendo el resultado anterior en (2.33):

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N s_i^T w_i + \sum_{i=1}^N \left[\delta \|s_i\| S_i + \frac{\tilde{\delta}_i}{\gamma_i} (-\sigma_i \hat{\delta}_i) + \tilde{\delta}_i \|s_i\| S_i \right] \\ &= -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N (s_i^T w_i + \hat{\delta}_i \|s_i\| S_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} (-\tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i). \end{aligned} \quad (2.34)$$

De la definición de $\tilde{\delta}_i$ y de (2.30) se tiene

$$-\tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i = -\tilde{\delta}_i (\tilde{\delta}_i + \delta) = -\tilde{\delta}_i^2 - \hat{\delta}_i \delta + \delta^2 \leq -\tilde{\delta}_i^2 + \delta^2.$$

Sustituyendo este resultado en (2.34):

$$\dot{V}_e \leq -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \left(s_i^T w_i + \hat{\delta}_i \|s_i\| S_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} (-\tilde{\delta}_i^2 + \delta^2).$$

Sustituyendo a (2.31) en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \left(-s_i^T (\hat{\delta}_i S_i)^2 \frac{s_i}{\hat{\delta}_i S_i \|s_i\| + \epsilon_i} + \hat{\delta}_i \|s_i\| S_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} (-\tilde{\delta}_i^2 + \delta^2) \\ &= -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\delta}_i S_i \|s_i\| \epsilon_i}{\hat{\delta}_i S_i \|s_i\| + \epsilon_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} (-\tilde{\delta}_i^2 + \delta^2) \\ &\leq -\sum_{i=1}^N s_i^T K_i s_i + \sum_{i=1}^N \epsilon_i + \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\gamma_i} (-\tilde{\delta}_i^2 + \delta^2). \end{aligned}$$

Reordenando términos

$$\dot{V}_e \leq \sum_{i=1}^N \left(-s_i^T K_i s_i - \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \right) + \epsilon_e; \quad \epsilon_e = \sum_{i=1}^N \epsilon_i + \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \delta^2. \quad (2.35)$$

Para expresar (2.35) en la forma $\dot{V}_e \leq \alpha(V_e) + b$, donde $\alpha(\cdot)$ es una función clase K, se acotan los dos primeros términos a la derecha de la desigualdad. Para el primer término se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N -s_i^T K_i s_i &\geq -\min_i(\lambda_m\{K_i\}) \|s\|^2 \\ &= -2 \frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\bar{m}_i)} \left(\frac{1}{2} \max_i(\bar{m}_i) \|s\|^2 \right) \\ &\geq -2 \frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\bar{m}_i)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para el segundo término

$$\sum_{i=1}^N -\frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \geq -\min_i(\sigma_i) \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\delta}_i^2}{\gamma_i} = -2 \min_i(\sigma_i) \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\delta}_i^2}{2\gamma_i}. \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.36) y (2.37) en (2.35) se obtiene

$$\dot{V}_e \leq -2a \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i - 2\sigma \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\delta}_i^2}{2\gamma_i} + \epsilon_e,$$

donde:

$$a \triangleq \frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\bar{m}_i)}; \quad \sigma \triangleq \min_i(\sigma_i)$$

Como $V_e = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i + \frac{\tilde{\delta}_i^2(t)}{2\gamma_i} \right)$ entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -2 \min(a, \sigma) V_e + \epsilon_e \\ &= -2a_e V_e + \epsilon_e; \quad a_e \triangleq \min(a, \sigma). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Apartir de aquí, la prueba es del todo similar a la prueba del Teorema 2.1. Resolviendo la ecuación diferencial y por el Lema de Comparación se tiene

$$V_e(t) \leq V_e(t_0) e^{-2a_e(t-t_0)} + (1 - e^{-2a_e(t-t_0)}) \frac{\epsilon_e}{2a_e}; \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.39)$$

expresando la desigualdad anterior en términos de $s(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min_i(\underline{m}_i) \|s(t)\|^2 \leq V_e(t) \leq \frac{1}{2} (\max_i(\overline{m}_i) \|s(t_0)\|^2 + \frac{1}{\gamma_i} \|\tilde{\delta}(t_0)\|^2) e^{-2a_e(t-t_0)} + \\ + (1 - e^{-2a_e(t-t_0)}) \frac{\epsilon_e}{2a_e} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|s(t)\|^2 \leq m_r \left[\|s(t_0)\|^2 + \frac{1}{\gamma_i \max_i(\overline{m}_i)} \|\tilde{\delta}(t_0)\|^2 - \frac{\epsilon_e}{a_e \max_i(\overline{m}_i)} \right] e^{-2a_e(t-t_0)} + \frac{\epsilon_e}{a_e \min_i(\underline{m}_i)},$$

con $m_r \triangleq \frac{\max_i(\overline{m}_i)}{\min_i(\underline{m}_i)}$. De lo anterior se concluye que $\|s(t)\|$ tiende al conjunto

$$\{s(t) \in D \mid \|s(t)\| \leq r_e\}; \quad r_e^2 = \frac{\epsilon_e}{a_e \min_i(\underline{m}_i)},$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Utilizando la definición $s_i \triangleq \dot{e}_i + \Lambda_i e_i$ se sabe que

$$\|e_i(t)\| \leq \frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \|s(t)\|.$$

Del análisis anterior se concluye que la norma de la señal de error en cada subsistema converge, en un tiempo finito, al conjunto

$$\{e_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i(t)\| \leq r_e\}; \quad r_e^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_e}{a_e \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h \quad (2.40)$$

con $h > 0$ arbitraria y ya no lo abandona.

Por tanto, $s_i(t)$ y $e_i(t)$ son variables uniforme y últimamente acotadas. De la definición de s_i se tiene que también $\dot{e}_i(t)$ es una variable que converge a un conjunto acotado, por lo que todas las señales del sistema y de la ley de control son uniforme y

últimamente acotadas. Además, al igual que en el Teorema 2.1 estas propiedades son globales, es decir, las trayectorias del sistema están uniforme y últimamente acotadas para cualquier condición inicial $(s(t_0), \tilde{\delta}(t_0))$. Por medio de la acción de control se puede reducir la cota última, en tanto que los valores de Λ_i y K_i pueden reducir el error siempre con el compromiso entre un error pequeño y una señal de control que no sature a los actuadores del sistema. ■

2.5 Ejemplo numérico: dos péndulos invertidos

Se sabe que (2.15), el sistema en lazo cerrado, es global, uniforme y últimamente acotado y para investigar su comportamiento en el tiempo se simula en MatLab/Simulink el sistema de los dos péndulos invertidos de la Sección 2.1.1 con la ley de control propuesta (2.13).

Se simulan los dos casos contemplados en el diseño del control: el caso de δ conocida y el caso en el que se estima esta cota. Para cada uno de estos casos se hicieron dos simulaciones, una en la que se hace regulación de una posición dada y la otra en la que se hace seguimiento de una señal senoidal. Se toman en cuenta las incertidumbres paramétricas y las perturbaciones, de forma que hay una diferencia entre la masa nominal y la masa real de cada péndulo, así como un cambio abrupto en la posición del resorte en cada péndulo durante la simulación.

El modelo del sistema de dos péndulos invertidos acoplados por un resorte está dado por (2.9). Aplicando la ley de control propuesta se tiene:

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 + Z_1 + D_1 &= u_1 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 + Z_2 + D_2 &= u_2, \end{aligned}$$

con $u_i = -K_i s_i + w_i + Y_i(\theta_i, \dot{\theta}_i, \dot{\theta}_i^r, \ddot{\theta}_i^r) \theta_i^0$, donde:

$$K_1, K_2 \in \mathbb{R} \text{ y } K_1, K_2 > 0$$

$$s_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i = \dot{\theta}_i - \dot{\theta}_i^r; \lambda_i > 0$$

$$e_i = \theta_i - \theta_i^d$$

$$\dot{\theta}_i^r = \dot{\theta}_i^d - \lambda_i e_i$$

θ_i^d es la trayectoria deseada la cual es suave, $(\dot{\theta}_i^d, \ddot{\theta}_i^d)$ acotados.

$$w_i = -(\hat{\delta}_i S_i)^2 \frac{s_i}{\hat{\delta}_i S_i |s_i| + \epsilon_i}; \epsilon_i > 0$$

$$S_i = 1 + |s_i| + |s_i|^2 + |s_i|^3$$

$$Y_i(\theta_i, \dot{\theta}_i, \dot{\theta}_i^r, \ddot{\theta}_i^r) \theta_i^0 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_i & -g \sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i^0 (l_i^0)^2 \\ m_i^0 l_i^0 \end{bmatrix}$$

m_i^0, l_i^0 son los valores nominales del sistema.

$$\dot{\hat{\delta}}_i = -\sigma_i \hat{\delta}_i + \gamma_i |s_i| S_i; \hat{\delta}_i(t_0) > 0$$

Para el caso en que se conoce la cota δ , se tiene que $\sigma_i = \gamma_i = 0$ y $\hat{\delta}_i(t_0) = \delta$. Los parámetros del sistema utilizados para la simulación se encuentran en el Apéndice A.

Los resultados obtenidos durante la simulación son: la posición, la señal de error y la señal de control de cada péndulo. También se incluye el comportamiento del resorte no lineal, el elemento que produce la interconexión entre los dos subsistemas, de forma que se dan las gráficas de su longitud, ángulo con respecto a la horizontal y su posición en cada péndulo. Por último, para el caso en que se utiliza la estimación de la cota sobre las perturbaciones e interconexiones, se grafica el comportamiento en el tiempo de $\hat{\delta}_1$ y $\hat{\delta}_2$. Los resultados de la simulación se pueden ordenar en cuatro grupos:

- a) Caso en que se conoce la cota δ .
Se tiene una señal escalón como referencia de la posición.
Los resultados se muestran en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5.
- b) Caso en que se conoce la cota δ .
La trayectoria deseada es una senoidal con las siguientes características:

$$\begin{aligned}\theta_1^d &= 30 \cos(2\pi t) + 0 \text{ [}^\circ\text{]} \\ \dot{\theta}_1^d &= -30(2\pi) \sin(2\pi t) \text{ [}^\circ\text{/s]} \\ \ddot{\theta}_1^d &= -30(2\pi)^2 \cos(2\pi t) \text{ [}^\circ\text{/s}^2\text{]} \\ \theta_2^d &= 20 \cos(3\pi t) + 0 \text{ [}^\circ\text{]} \\ \dot{\theta}_2^d &= -20(3\pi) \sin(3\pi t) \text{ [}^\circ\text{/s]} \\ \ddot{\theta}_2^d &= -20(3\pi)^2 \cos(3\pi t) \text{ [}^\circ\text{/s}^2\text{]}\end{aligned}$$

Los resultados se muestran en las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8.

- c) Caso en que se utiliza a $\hat{\delta}$, la estimación de δ .
Se utilizan los mismos parámetros en el controlador, con la diferencia de

$$\begin{aligned}\delta_1(t_0) &= 0.100 \\ \sigma_1 &= 5.00 \\ \gamma_1 &= 1.00 \\ \delta_2(t_0) &= 0.100 \\ \sigma_2 &= 5.00 \\ \gamma_2 &= 1.00\end{aligned}$$

Se usa la misma entrada escalón utilizada en el caso a).
Los resultados se muestran en las Figuras 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12.

- d) Caso en que se utiliza a $\hat{\delta}$, la estimación de δ .
Usando la misma señal de referencia que en el caso b).
Los resultados se muestran en las Figuras 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16.

Para todos los casos la posición deseda se muestra en línea discontinua negra y la posición real en línea sólida. En todas las gráficas se observa el resultado de tres simulaciones, cada una con una variante de la ley de control, de forma que:

- En línea roja se presenta el resultado de la simulación al utilizar:
Variante 1 $u_i = -K_i s_i$
- En línea azul se presenta el resultado de la simulación al utilizar:
Variante 2 $u_i = -K_i s_i + w_i$
- En línea verde se presenta el resultado de la simulación al utilizar:
Variante 3 $u_i = -K_i s_i + w_i + Y_i(\theta_i, \dot{\theta}_i, \theta_i^r, \dot{\theta}_i^r) \theta_i^0$

De esta forma se puede observar el comportamiento de la ley de control cuando no se considera los efectos de las perturbaciones (caso en el que $u_i = -K_i s_i$), cuando se compensa estos efectos por medio del término w_i (caso en el que $u_i = -K_i s_i + w_i$) y finalmente, cuando aparte de considerar a los efectos de perturbaciones e interconexiones, se agrega el término $Y_i(\theta_i, \dot{\theta}_i, \theta_i^r, \dot{\theta}_i^r) \theta_i^0$ para compensar la dinámica nominal del sistema.

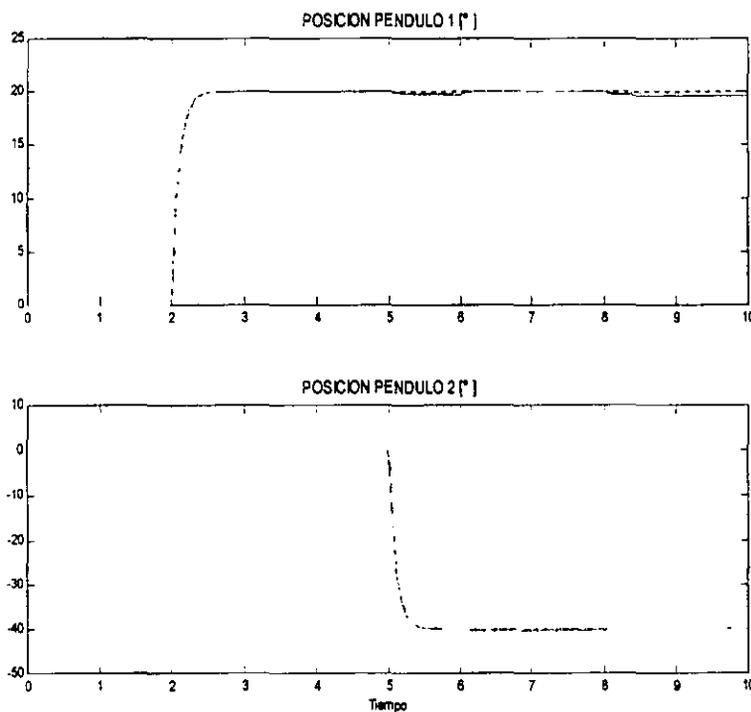


Figura 2.3: Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones

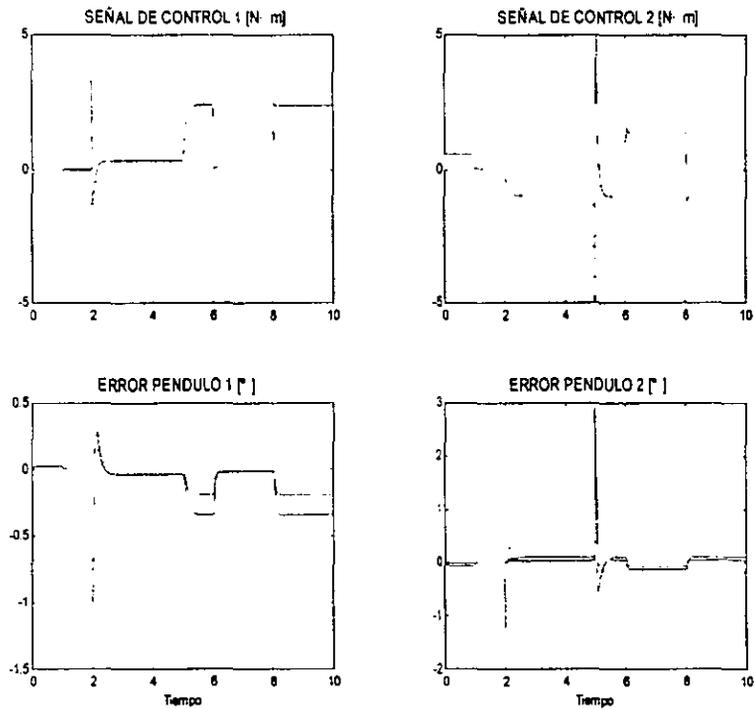


Figura 2.4: Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control

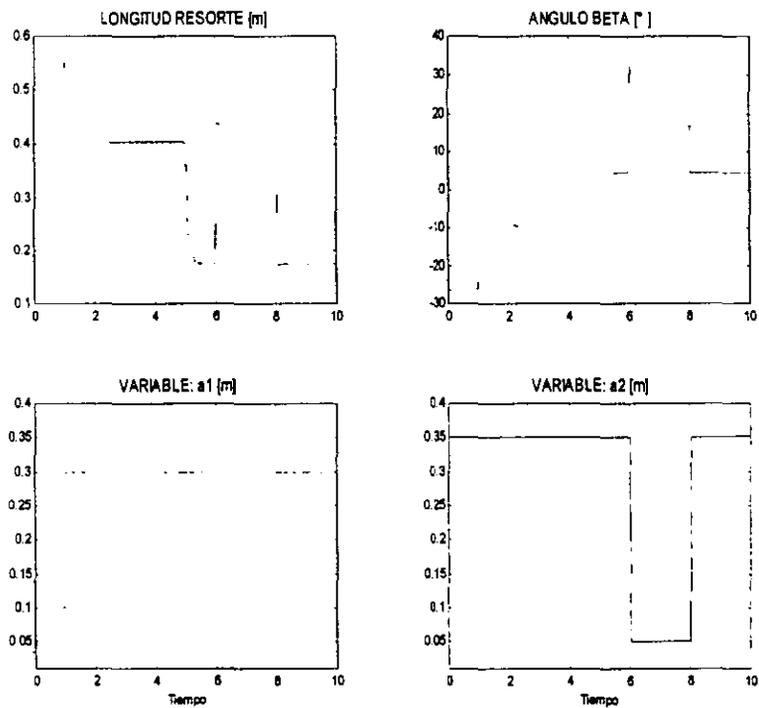


Figura 2.5: Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares

En las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5 se muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado ante una señal de referencia escalón. Como se puede ver en la Figura 2.3 la señal de referencia es un escalón "suavizado", por la restricción de que q_i^d debe de ser suave y acotada. Para las tres simulaciones (las tres variantes de la ley de control) se tienen resultados bastante similares, con la única diferencia en la señal de error; si se observa en la Figura 2.4 la señal de error del péndulo 1 y del péndulo 2, se concluye que la variante 2 y la variante 3 son las que obtienen los mejores resultados, al conseguir un error pico dentro del 8%.

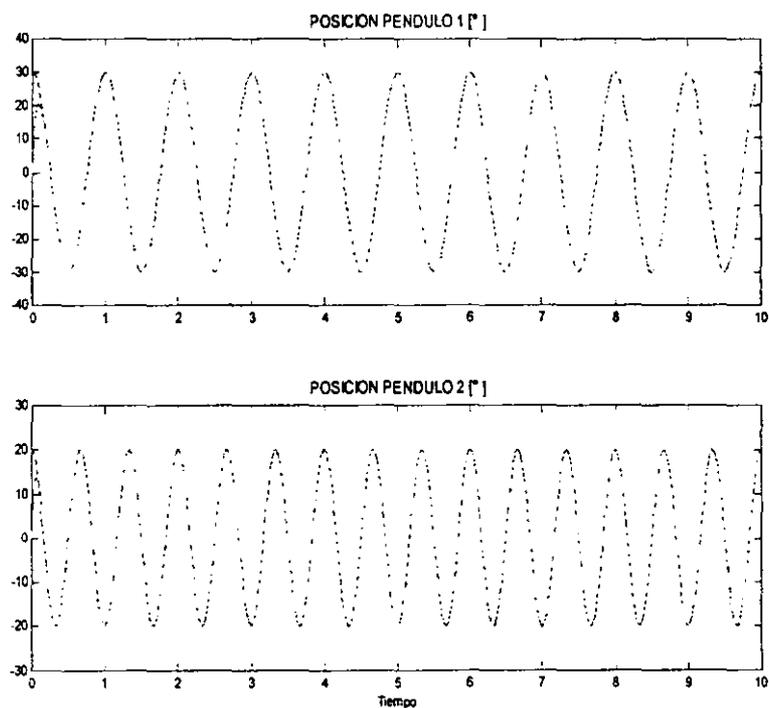


Figura 2.6: Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones

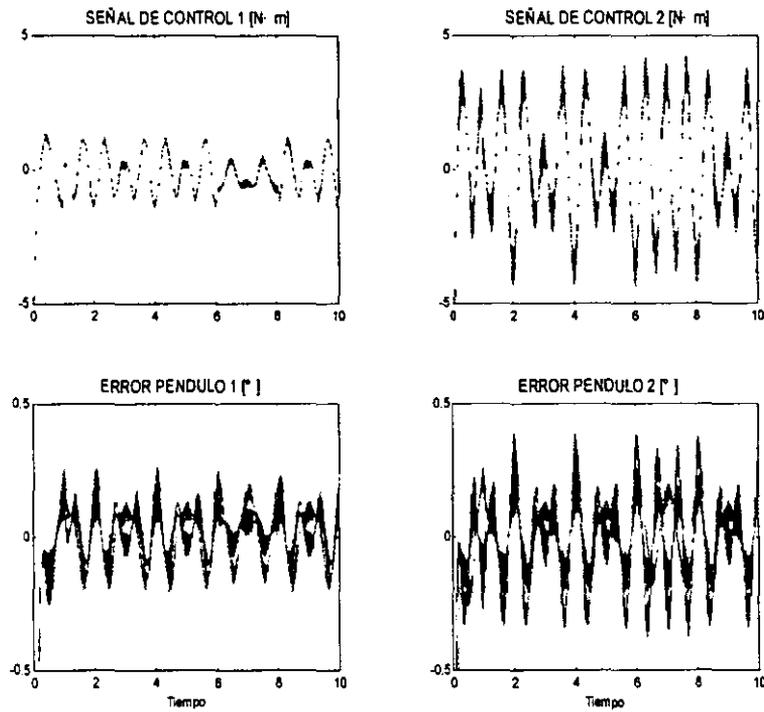


Figura 2.7: Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control

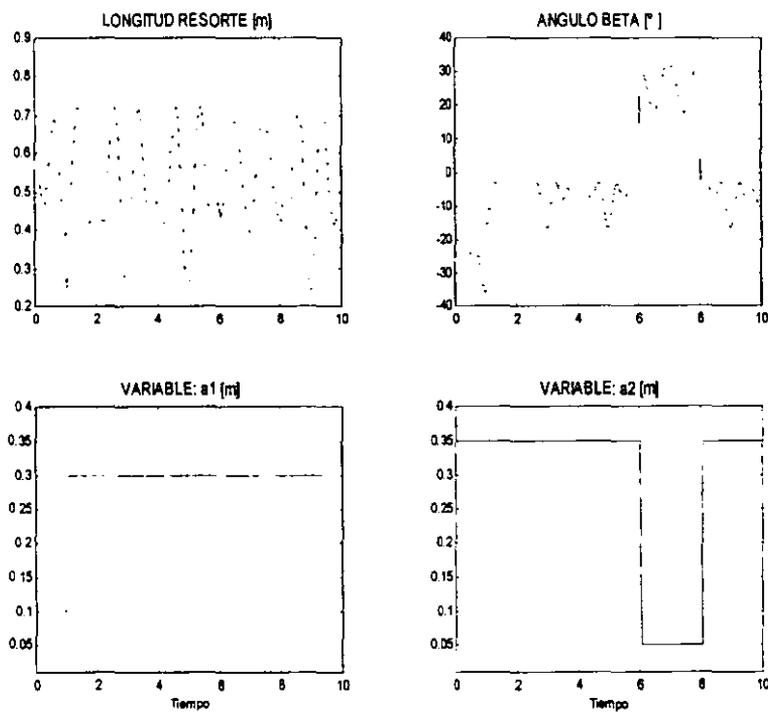


Figura 2.8: Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares

En las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 se muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado, cuando se utiliza una señal senoidal de referencia. La señal de referencia tiene una magnitud y frecuencia diferente para cada péndulo. El comportamiento para las tres variantes de la ley de control es muy similar, todas producen un error de seguimiento que está dentro del 2.5%, pero es la variante 2 la que ofrece el mejor comportamiento, seguida de la variante 3.

A nivel de la señal de control y la señal de error, se tiene diferencias en el comportamiento de cada péndulo, esto se debe a que la masa y la longitud del péndulo 2 es mayor que la del péndulo 1.

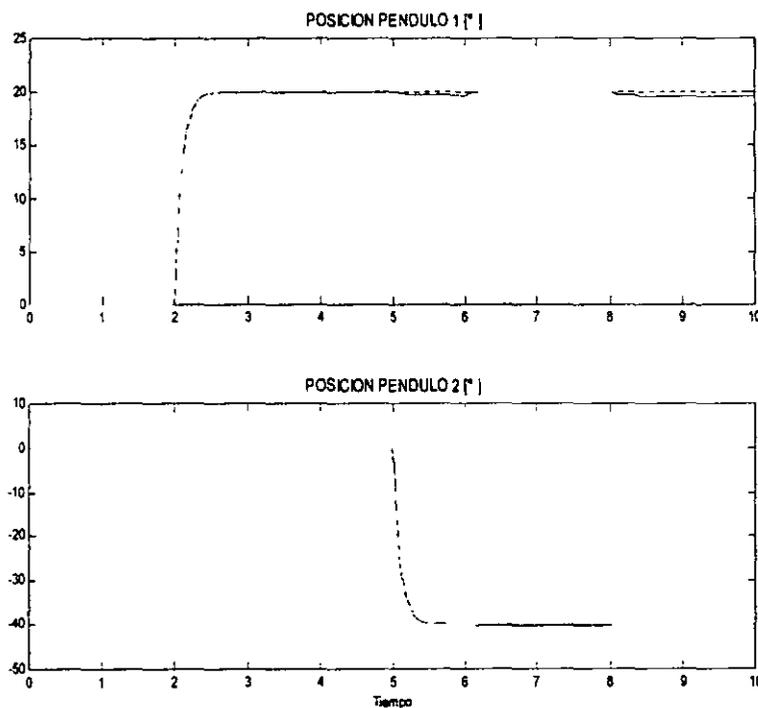


Figura 2.9: Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones

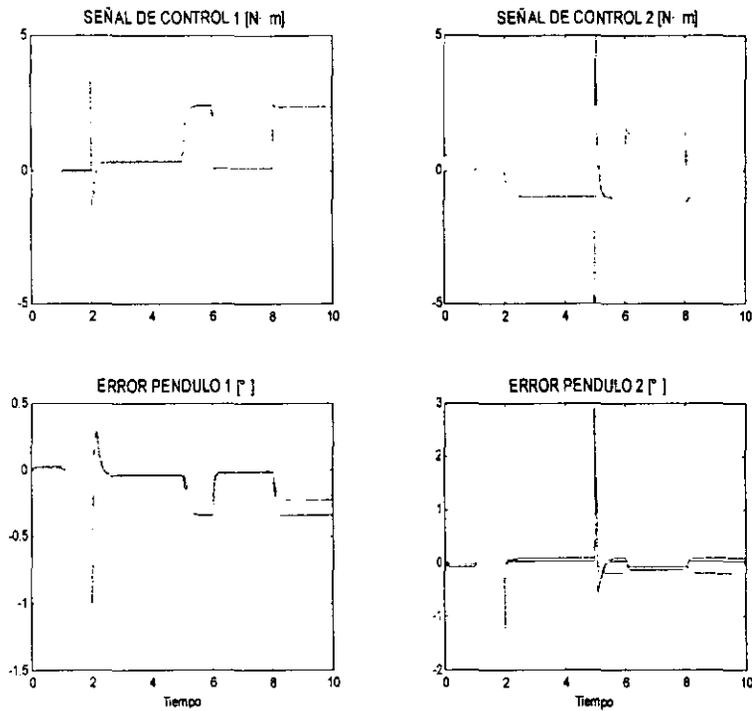


Figura 2.10: Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control

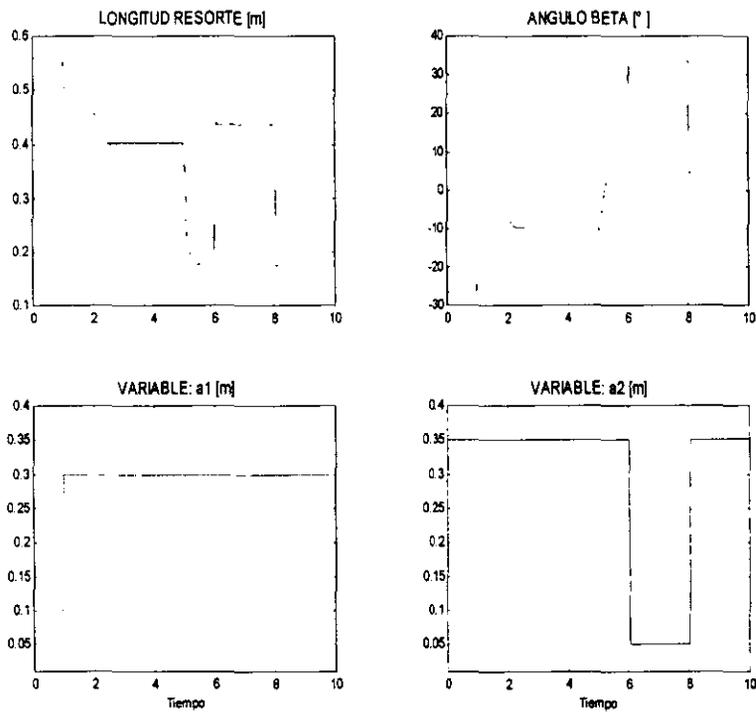


Figura 2.11: Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares

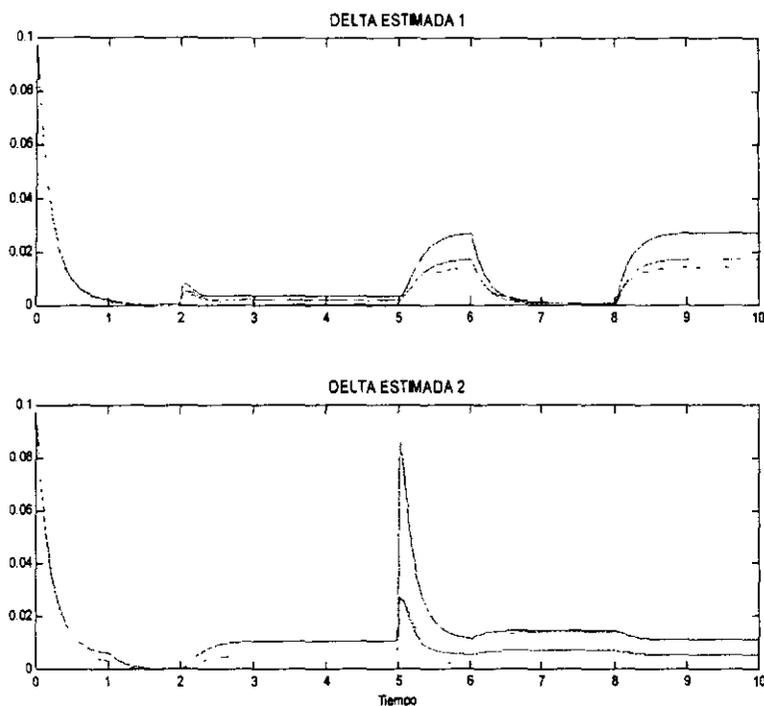


Figura 2.12: Simulación dos péndulos invertidos: Estimación de δ

En las Figuras 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 se muestran los resultados de la simulación cuando se estima la cota sobre las perturbaciones e interconexiones, para una señal de referencia escalón. La señal de referencia es un escalón “suavizado” al igual que en los resultados mostrados en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5. Al comparar los resultados de las simulaciones que usan una señal de referencia escalón, se observa que se tienen resultados muy parecidos; de forma que resulta que el sistema en lazo cerrado es robusto ante cambios en el parámetro δ . de hecho en los resultados mostrados en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5 se maneja una $\delta = 0.1$ constante y se obtienen resultados muy similares en las Figuras 2.9, 2.10 y 2.11, en donde se maneja una $\hat{\delta}_i$ que varia en el tiempo según se puede observar en la Figura 2.12 y que llega a ser cuatro veces menor que $\delta = 0.1$.

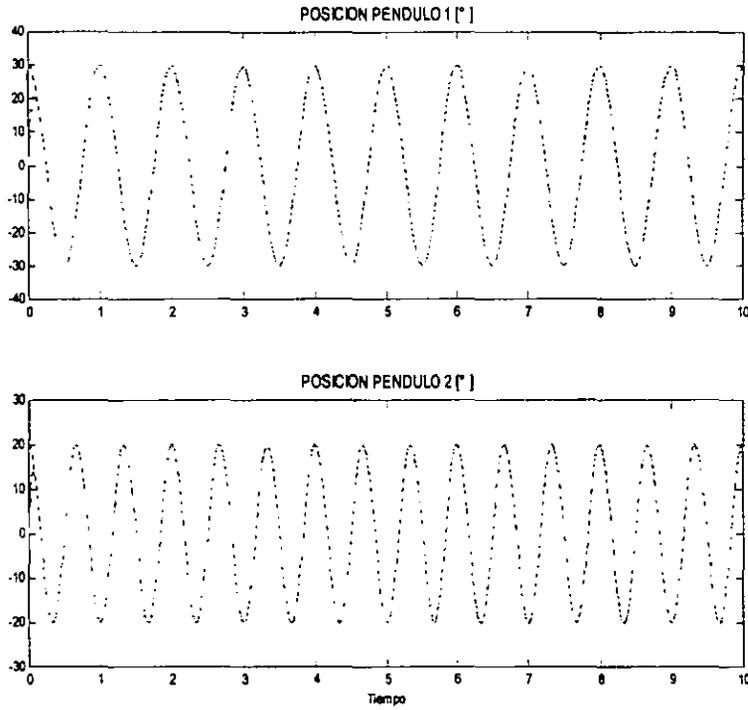


Figura 2.13: Simulación dos péndulos invertidos: Posiciones

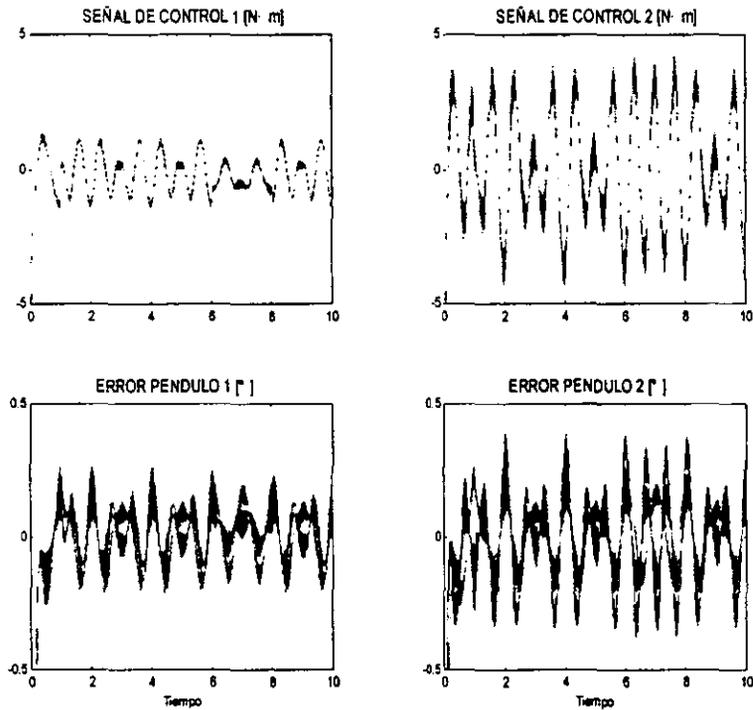


Figura 2.14: Simulación dos péndulos invertidos: Señal de error y acción de control

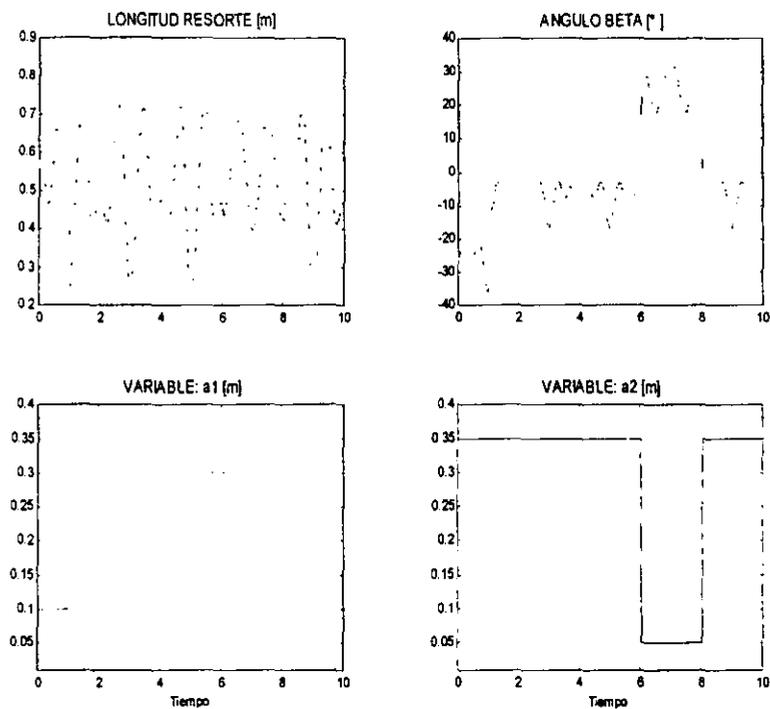


Figura 2.15: Simulación dos péndulos invertidos: Variables auxiliares

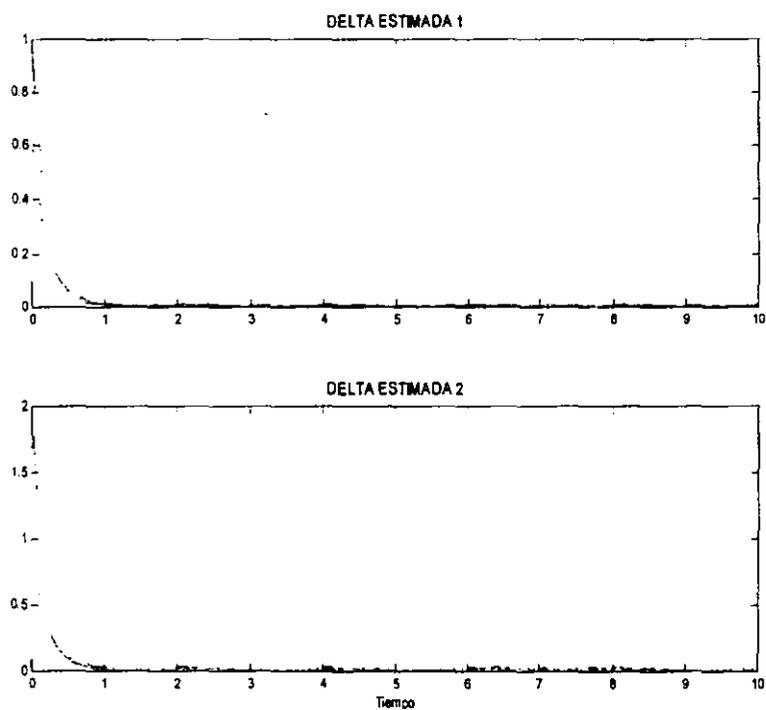


Figura 2.16: Simulación dos péndulos invertidos: Estimación de δ

En las Figuras 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 se muestran los resultados de la simulación para una señal de referencia senoidal y en el caso en que se utiliza a $\hat{\delta}_i$, la estimación de la cota sobre las perturbaciones e interconexiones. Al igual que en el caso en que se tiene una señal de referencia escalón, se tienen resultados extremadamente parecidos entre las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 y las Figuras 2.13, 2.14 y 2.15. Por lo que el sistema en lazo cerrado, la hacer el seguimiento de una trayectoria, es robusto ante cambios en el parámetro δ .

En resumen, en las simulaciones se observa que el control propuesto logra un buen comportamiento, tanto en el seguimiento de una trayectoria, como en la regulación de una posición dada. En cuanto a las variantes de la ley de control, se tienen comportamientos muy parecidos y más aun, pareciera que la compensación de la dinámica nominal es un término que resta efectividad a la compensación de los efectos de las interconexiones, ante la presencia de incertidumbres paramétricas.

Otro resultado interesante es que el sistema en lazo cerrado es bastante robusto ante cambios en el parámetro δ , de forma que en el peor de los casos, cuando se desconoce la cota δ , una alternativa “práctica” a la estimación del parámetro δ es utilizar un mejor estimado en la ley de control.

Capítulo 3

Aplicación al Control de Robots

Dentro de la clase de sistemas no lineales de interés se encuentran los robots manipuladores. Un robot manipulador, para los fines de esta tesis, es un sistema mecánico formado por una secuencia de cuerpos rígidos, llamados elementos, conectados usualmente en serie por medio de uniones. Los elementos se conectan a lo más con otros dos, de forma que no se formen lazos cerrados y al conectarse en serie forman una cadena cinemática abierta; ya que en un extremo de la cadena un elemento se encuentra fijo a una base o soporte, mientras que el otro extremo se encuentra libre y es en este extremo donde se encuentra la herramienta o actuador final, que produce las tareas que realiza el manipulador.

Se considera el caso de elementos y uniones perfectamente rígidas, centrándose en manipuladores articulados (los cuales están formados por uniones giratorias o de revolución). Esta clase de manipuladores constituyen un problema de control complejo pero son sistemas muy ágiles, con una gran capacidad de realizar tareas en un espacio mayor, comparado con su propia dimensión, que los manipuladores con otras configuraciones cinemáticas [Spong89, pp. 8-15], dígase manipuladores con uniones prismáticas. Pese a que el trabajo se centra en los manipuladores articulados, esto no constituye una limitante ya que los resultados pueden ser extendidos [Craig88, p. 8] a manipuladores con uniones prismáticas.

En este capítulo primero se presenta el modelo de los robots de interés y tras listar sus características, se modifica el modelo para expresarlo en el contexto del control descentralizado. Ya en esta forma, se verifican las propiedades que se asumieron en el capítulo 2. A continuación se diseña el control descentralizado robusto, primero para el caso en que se conoce δ , la cota sobre las perturbaciones e interconexiones, y después para el caso en que se estima esta cota. Por último se presentan los resultados experimentales del control propuesto y para el caso en que se conoce δ .

3.1 Modelo del manipulador

El modelo general expuesto en la sección 2.1 se va a particularizar a un sistema mecánico³ cuyo lagrangiano está formado por $L = K - V$, donde K es la energía cinética y V la energía potencial del sistema. El lagrangiano definido de esta forma cumple con la suposición (2.1) y sustituyéndolo en la ecuación de Euler-Lagrange (2.1) y tras un desarrollo [Craig88, p. 8], [Spong89, pp. 129-142] se tiene

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.1)$$

que es el modelo dinámico de un robot manipulador con 'N' uniones, considerando tanto a las uniones como a los elementos rígidos y en donde no se consideran los efectos no lineales en la transmisión de potencia. En (3.1) $q \in \mathbb{R}^N$ es el vector de coordenadas generalizadas, a $M(q) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se le conoce como la matriz de inercia, el término $C(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ representa los efectos centrífugos y de coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^N$ representa los efectos gravitacionales y $\tau \in \mathbb{R}^N$ es el vector de fuerzas generalizadas, es decir el par aplicado a cada unión, considerando que se trata de un manipulador articulado. La ecuación (3.1) tiene muchas propiedades [Craig88, pp. 8-14], las cuales se listan a continuación:

• $M(q)$:

• es una matriz que es función de senos y cosenos de las coordenadas generalizadas.

• $0 < \underline{m}I \leq M(q) = M(q)^T \leq \bar{m}I$

• $|m_{ij}(q)| \leq k_{ij}^0$; $k_{ij}^0 \geq 0$ es una constante.

• Su inversa existe y es positiva definida y acotada.

• Se sabe que $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica.

• $\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0$

• La energía cinética del manipulador se puede describir por $\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$.

• $C(q, \dot{q})\dot{q}$:

• es una función cuadrática de \dot{q}

• $|c_{ij}(q, \dot{q})| = |\sum_{k=1}^N c_{kji}(q) \dot{q}_k| \leq \sum_{k=1}^N k_k |\dot{q}_k|$; $k_k \geq 0$ es una constante

• $g(q)$:

• depende de q sólo en funciones de senos y cosenos, por lo que los términos gravitacionales tienen una cota superior independiente de q

• $|g_i(q)| \leq k_i$; $k_i \geq 0$ es una constante

³No se considera dentro del modelo mecánico a los sensores y actuadores/transmisión de potencia del manipulador, ya que de esta forma es más general el modelo. Pero en el caso de actuadores eléctricos, y en específico motores de corriente directa, se puede incluir sin problemas el modelo de los actuadores/transmisión de potencia; sobre todo en el caso en que la dinámica eléctrica se desprecia, es decir, cuando la constante eléctrica del motor es mucho menor que la constante mecánica de éste y por tanto se puede aproximar el comportamiento a una respuesta inmediata de voltaje a par, siempre que no se sature al actuador.

El control descentralizado que se está proponiendo trata al sistema que se quiere controlar como un conjunto de N -subsistemas y en el caso específico de un robot manipulador de ' N ' uniones, cada unión forma un subsistema que se controla independientemente.

Para el i -ésimo grado de libertad, de (3.1) y considerando un término de perturbaciones locales ($D_i(q_i, \dot{q}_i)$), se tiene una dinámica dada por

$$\sum_{j=1}^N m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N C_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j + g_i(q) = u_i - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad (3.2)$$

reordenando la ecuación anterior, de forma similar que en [Seraji89]

$$m_{ii}(q)\ddot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(q)\ddot{q}_j + c_{ii}(q, \dot{q})\dot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j + g_i(q) = u_i - D_i(q_i, \dot{q}_i)$$

$$m_{ii}(q)\ddot{q}_i + c_{ii}(q, \dot{q})\dot{q}_i + g_i(q) = u_i - D_i(q_i, \dot{q}_i) - \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j \right]$$

Separando los términos que dependen únicamente de $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ se puede expresar cada término a la izquierda de la ecuación anterior como

$$m_{ii}(q)\ddot{q}_i = m_i(q_i)\ddot{q}_i + m_{ii}^*(q)\ddot{q}_i \quad (3.3)$$

$$c_{ii}(q, \dot{q})\dot{q}_i = c_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + c_{ii}^*(q, \dot{q})\dot{q}_i \quad (3.4)$$

$$g_i(q) = g_i(q_i) + g_i^*(q) \quad (3.5)$$

Y entonces (3.2) se expresa como

$$m_i(q_i)\ddot{q}_i + c_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = u_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad ; i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

donde:

$$Z_i(q, \dot{q}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j + m_{ii}^*(q)\ddot{q}_i + c_{ii}^*(q, \dot{q})\dot{q}_i + g_i^*(q) \quad (3.7)$$

Los términos que contienen a \ddot{q}_j no hacen que Z_i dependa también de \ddot{q} ya que, al igual que en el capítulo 2 al ir de (2.6) a (2.8), se sabe que si τ_i depende únicamente de q y \dot{q} ; de (3.1) \ddot{q}_j es función de (q, \dot{q}) y por tanto Z_i es función sólo de q y \dot{q} . Al igual que en el modelo general, se cumple la suposición (2.2) ya que de acuerdo a (3.6), la fuerza generalizada tienen la forma $\tau_i = u_i - D_i(q_i, \dot{q}_i) - Z_i(q, \dot{q})$ donde u_i corresponde al par de control a la unión ' i ', Z_i es el término de interconexiones y D_i es el término de perturbaciones locales a la unión y abarca todos los efectos no modelados del sistema. Y es (3.6) el modelo del manipulador que se va a utilizar.

3.2 Diseño del controlador, caso δ conocida

Se propone la ley de control (2.13) que se expuso en el capítulo 2, con ciertas características dadas por el modelo del manipulador de 'N' grados de libertad, de forma que la ley de control es:

$$u_i = -K_i s_i + w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 \quad ; i = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

Donde: $w_i = -(\delta S_i)^2 \frac{s_i}{\delta S_i |s_i| + \epsilon_i} \quad ; \epsilon_i > 0$

$$S_i \triangleq 1 + |s_i| + |s_i|^2$$

$$s_i \triangleq \dot{e}_i + \lambda_i e_i = \dot{q}_i - \dot{q}_i^r$$

$$e_i \triangleq q_i - q_i^d$$

$$\dot{q}_i^r \triangleq \dot{q}_i^d - \lambda_i e_i$$

$(q_i^d, \dot{q}_i^d, \ddot{q}_i^d)$ es la trayectoria deseada, la cual es acotada y suave.

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 = m_i^0(q_i) \ddot{q}_i^r + c_i^0(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i^r + g_i^0(q_i)$$

$m_i^0(q_i), c_i^0(q_i, \dot{q}_i), g_i^0(q_i)$ son los valores nominales del sistema.

$$K_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ y } K_i, \lambda_i > 0$$

El sistema en lazo cerrado se obtiene al sustituir (3.8) en el sistema (3.6)

$$m_i(q_i) \ddot{q}_i + c_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = -K_i s_i + w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \theta_i^0 - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)$$

expresando la ecuación anterior en término de s_i

$$m_i(q_i) \dot{s}_i + c_i(q_i, \dot{q}_i) s_i + K_i s_i = w_i + Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \bar{\theta}_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad (3.9)$$

donde:

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i^r, \ddot{q}_i^r) \bar{\theta}_i = (m_i^0(q_i) - m_i(q_i)) \ddot{q}_i^r + (c_i^0(q_i, \dot{q}_i) - c_i(q_i, \dot{q}_i)) \dot{q}_i^r + g_i^0(q_i) - g_i(q_i)$$

y es (3.9) la ecuación que se va a utilizar para representar el sistema en lazo cerrado. Debido a que el término de perturbaciones incluye la dinámica no modelada del sistema, aparte de otros fenómenos, es un término al que se le tiene que suponer sus características.

Suposición 3.1 El término de perturbaciones $(D_i(q_i, \dot{q}_i))$, cumple con

$$\begin{aligned} |D_i(q_i, \dot{q}_i)| &\leq d_i Q_i \quad ; \quad d_i \geq 0 \\ &; \quad Q_i = 1 + |q_j| + |\dot{q}_j| + |q_j|^2 + |\dot{q}_j|^2 \end{aligned}$$

La suposición anterior plantea restricciones a los efectos que pueden tomarse como perturbaciones, pero una amplia gama de efectos pueden caer dentro de las perturbaciones, como los efectos de fricción viscosa a nivel de las uniones.

Antes de presentar los resultados de estabilidad de la ley de control propuesta, se requiere exponer ciertas propiedades de la ley de control y de la dinámica a nivel de cada unión.

Lema 3.1 *Considerando las propiedades del sistema (3.1) y para una λ_i suficientemente grande, la señal de control u_i en (3.8) cumple con la siguiente propiedad*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u_j| &\leq \sum_{j=1}^N b_j S_j && ; \quad b_j \geq 0 \\ &&& ; \quad S_j = 1 + |s_j| + |s_j|^2 \end{aligned}$$

Prueba: Se considera a las constantes $k_{lj}, k_j \geq 0$ con $j = 1, 2, \dots, N$; $l = 1, 2, 3, \dots$

De (3.8) se sabe que

$$\sum_{j=1}^N |u_j| \leq \sum_{j=1}^N \left[K_j |s_j| + |w_j| + |Y_j(q_j, \dot{q}_j, \dot{q}_j^r, \ddot{q}_j^r) \theta_j^0| \right] \quad (3.10)$$

Por la definición de S_j , se puede acotar el término w_j por

$$\begin{aligned} |w_j| &= \left| -(\delta S_j)^2 \frac{s_j}{\delta |s_j| S_j + \epsilon_j} \right| \\ &\leq \left| \frac{(\delta S_j)^2}{\delta |s_j| S_j + \epsilon_j} \right| |s_j| \\ &\leq k_{1j} (1 + |s_j| + |s_j|^2) = k_{1j} S_j \end{aligned}$$

Para $|Y_j \theta_j^0|$, usando un procedimiento similar al que se uso para llegar a (2.22) se tiene que

$$\begin{aligned} |Y_j \theta_j^0| &= |m_j^0(q_j) \ddot{q}_j^r + c_j^0(q_j, \dot{q}_j) \dot{q}_j^r + g_i^0(q_j)| \\ &\leq |m_j^0(q_j)| |\ddot{q}_j^r| + |c_j^0(q_j, \dot{q}_j)| |\dot{q}_j^r| + |g_i^0(q_j)| \\ &\leq k_{2j} |\ddot{q}_j^r| + k_{3j} |\dot{q}_j| |\dot{q}_j^r| + k_{4j} \\ &\leq k_{2j} |\ddot{q}_j^r| + k_{3j} |\dot{q}_j|^2 + k_{3j} |\dot{q}_j^r|^2 + k_{4j} \end{aligned}$$

y utilizando (2.20) y (2.21) se llega a

$$\begin{aligned} |Y_j \theta_j^0| &\leq k_{5j} |\dot{q}_j| + k_{3j} |\dot{q}_j|^2 + k_{3j} (k_{6j} |q_j| + k_{7j})^2 + k_{8j} \\ |Y_j \theta_j^0| &\leq k_{3j} |\dot{q}_j|^2 + k_{5j} |\dot{q}_j| + k_{9j} |q_j|^2 + k_{10j} |q_j| + k_{11j} \end{aligned} \quad (3.11)$$

De la definición $s_j \triangleq \dot{e}_j + \lambda_j e_j$ y sustituyendo el error de seguimiento $e_j \triangleq q_j - q_j^d$ se tiene

$$\begin{aligned} s_j &= \dot{q}_j + \lambda_j q_j - (\dot{q}_j^d + \lambda_j q_j^d) \\ \Rightarrow \lambda_j q_j &= s_j - \dot{q}_j + (\dot{q}_j^d + \lambda_j q_j^d) \end{aligned}$$

y aprovechando que la trayectoria deseada es suave y acotada

$$|\lambda_j q_j| \leq |s_j| + |\dot{q}_j| + k_3 \quad ; \quad |\dot{q}_j^d + \lambda_j q_j^d| \leq k_3 \quad (3.12)$$

De igual forma que para el sistema general del Capítulo 2, se tiene que la energía total del sistema es finita para todo tiempo, por lo que se cumple (2.16) y sustituyendo ésta desigualdad en (3.12) se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_j |q_j| &\leq |s_j| + k_1 |q_j| + k_2 + k_3 \quad ; \quad \lambda_j > 0 \\ \Rightarrow |q_j| &\leq \frac{1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_4) \quad ; \quad \text{para } \lambda_j > k_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $k_4 = k_2 + k_3$ y la condición $\lambda_j > k_1$ se asegura con una λ_j suficientemente grande. La cota sobre $|\dot{q}_j|$ se obtiene de (3.12)

$$|q_j| \leq \frac{1}{\lambda_j} (|s_j| + |\dot{q}_j| + k_3)$$

Partiendo de (2.16) y sustituyendo la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} |\dot{q}_j| &\leq k_1 |q_j| + k_2 \\ &\leq \frac{k_1}{\lambda_j} (|s_j| + |\dot{q}_j| + k_5) \quad ; \quad k_5 = k_3 + \frac{\lambda_j k_2}{k_1} \\ \Rightarrow |\dot{q}_j| &\leq \frac{k_1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_5) \quad ; \quad \text{para: } \lambda_j > k_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.14) y (3.13) en (3.11) y recordando que la trayectoria deseada es suave y acotada

$$\begin{aligned} |Y_j \theta_j^0| &\leq k_{3j} \left(\frac{k_1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_5) \right)^2 + k_{5j} \left(\frac{k_1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_5) \right) + \\ &\quad + k_{9j} \left(\frac{1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_4) \right)^2 + k_{10j} \left(\frac{1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_4) \right) + k_{11j} \\ &\leq k_{12j} |s_j|^2 + k_{13j} |s_j| + k_{14j} \\ &\leq k_{15j} S_j \end{aligned}$$

Por lo que (3.10) se acota por

$$\sum_{j=1}^N |u_j| \leq \sum_{j=1}^N \left[K_j |s_j| + |w_j| + |Y_j(q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j^r, \ddot{q}_j^r) \theta_j^0| \right]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u_j| &\leq \sum_{j=1}^N [k_{16j}|s_j| + k_{1j}S_j + k_{15j}S_j] \\ &\leq \sum_{j=1}^N b_j S_j \quad ; \text{ para algunas } b_j \geq 0 \end{aligned}$$

■

Lema 3.2 El término de interconexión (Z_i) en (3.9) para una λ_i suficientemente grande, cumple con la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} |Z_i(q, \dot{q})| &\leq \sum_{j=1}^N a_{ij} S_j \quad ; \quad a_{ij} \geq 0 \\ &\quad ; \quad S_j = 1 + |s_j| + |s_j|^2 \end{aligned}$$

Prueba: A lo de la prueba se considera a las constantes $k_{ij}^l, k_j^l \geq 0$ con $i, j = 1, 2, \dots, N$ y $l = 0, 1, 2, \dots$

De (3.7) se sabe

$$\begin{aligned} |Z_i(q, \dot{q})| &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j + m_{ii}^*(q) \ddot{q}_i + c_{ii}^*(q, \dot{q}) \dot{q}_i + g_i^*(q) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(q) \ddot{q}_j + m_{ii}^*(q) \ddot{q}_i \right| + \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j + c_{ii}^*(q, \dot{q}) \dot{q}_i \right| + |g_i^*(q)| \end{aligned}$$

De las propiedades del sistema se tiene

$$\begin{aligned} |Z_i(q, \dot{q})| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k_{ij}^0 |\ddot{q}_j| + k_{ii}^0 |\ddot{q}_i| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left\{ \sum_{k=1}^N k_k^2 |\dot{q}_k| \right\} |\dot{q}_j| + \left\{ \sum_{k=1}^N k_k^2 |\dot{q}_k| \right\} |\dot{q}_i| + k_i^1 \\ &= \sum_{j=1}^N k_{ij}^0 |\ddot{q}_j| + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N k_k^2 |\dot{q}_k| \right\} |\dot{q}_j| + k_i^1 \\ &\leq \sum_{j=1}^N k_{ij}^0 |\ddot{q}_j| + \sum_{j=1}^N k_k^2 |\dot{q}_j|^2 + k_i^1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por otro lado, de (3.1)

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)]$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\ddot{q}_i| &\leq \|\ddot{q}\| \leq \|M^{-1}(q)\| \{\|\tau\| + \|C(q, \dot{q})\dot{q}\| + \|g(q)\|\} \\
&\leq \frac{1}{m} \left\{ \|\tau\| + k_i^3 \|\dot{q}\|^2 + k_i^4 \right\} \\
&\leq k_i^5 \left\{ \|\tau\| + k_i^3 \sum_{j=1}^N |\dot{q}_j|^2 + k_i^4 \right\} \\
&\leq k_i^5 \sum_{j=1}^N |\tau_j| + k_i^6 \sum_{j=1}^N |\dot{q}_j|^2 + k_i^7
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La ecuación (3.1) representa el sistema global del manipulador y en ese contexto τ_i es⁴ la señal de control aplicada a cada unión, es decir u_i . Utilizando el lema (3.1) se expresa la desigualdad anterior como

$$|\ddot{q}_i| \leq k_i^5 \sum_{j=1}^N b_j S_j + k_i^6 \sum_{j=1}^N |\dot{q}_j|^2 + k_i^7$$

sustituyendo (3.14), la cota sobre $|\dot{q}_j|$

$$\begin{aligned}
|\ddot{q}_i| &\leq \sum_{j=1}^N k_j^8 S_j + k_i^6 \sum_{j=1}^N \left(\frac{k_1}{\lambda_j - k_1} (|s_j| + k_5) \right)^2 + k_i^7 \\
&\leq \sum_{j=1}^N [k_j^8 S_j + k_i^9 S_j] + k_i^7 \\
&\leq \sum_{j=1}^N k_j^{10} S_j
\end{aligned} \tag{3.17}$$

y entonces sustituyendo (3.17) en (3.15)

$$\begin{aligned}
|Z_i(q, \dot{q})| &\leq \sum_{j=1}^N k_{ij}^0 |\ddot{q}_j| + \sum_{j=1}^N k_k^2 |\dot{q}_j|^2 + k_i^1 \\
&\leq \sum_{j=1}^N k_{ij}^0 \sum_{k=1}^N k_k^{10} S_k + \sum_{j=1}^N k_j^{11} S_j + k_i^1 \\
&\leq \sum_{j=1}^N a_{ij} S_j \quad a_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

■

⁴Por la suposición (3.1) el término de perturbaciones no afecta a la cota sobre u_i dada por el lema (3.1), es por eso que no se incluye en la desigualdad

Corolario 3.1 Sea el sistema en lazo cerrado representado por (3.9), bajo la suposición (3.1) y para una λ_i suficientemente grande, entonces el sistema en lazo cerrado es global, uniforme y últimamente acotado y la señal de error de cada subsistema converge exponencialmente al conjunto

$$\begin{aligned} \{e_i \in \mathbb{R} \mid |e_i| \leq r\} & \quad ; \quad r^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_i)} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h \\ & \quad ; \quad h > 0 \\ & \quad ; \quad a \triangleq \left(\frac{K_i}{\max_i(\overline{m}_i)} \right) \end{aligned}$$

Prueba: En la sección (3.1) se trató el modelo de un manipulador de 'N' grados de libertad y sus propiedades, y como se pudo observar el modelo corresponde a la clase de sistemas no-lineales que son de interés para la tesis, y por tanto se cumple la suposición (2.1). De (3.6) y comparado con (2.8) se ve que los 'N' subsistemas de un manipulador tienen la misma forma que el sistema utilizado en el teorema (2.1) y por tanto basta con probar que se cumplen todas las condiciones necesarias del teorema (2.1) para probar este corolario.

De la ecuación (3.6) se puede observar que la suposición (2.2) se cumple, ya que la fuerza generalizada (en este caso el par generalizado) se expresa por

$$\tau_i = u_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)$$

y de (3.8) se sabe que u_i depende únicamente de q_i y \dot{q}_i , por lo que τ_i depende de q y \dot{q} y entonces la suposición (2.3) se cumple.

De la suposición (3.1) se observa que el término de perturbaciones cumple con la suposición (2.4) con

$$\begin{aligned} |D_i(q_i, \dot{q}_i)| & \leq d_i Q_i \quad ; \quad d_i \geq 0 \\ & \quad ; \quad Q_i = 1 + |q_j| + |\dot{q}_j| + |q_j|^2 + |\dot{q}_j|^2 \end{aligned}$$

y del lema (3.2) se obtuvo que

$$\begin{aligned} |Z_i(q, \dot{q})| & \leq \sum_{j=1}^N a_{ij} S_j \quad ; \quad a_{ij} \geq 0 \\ & \quad ; \quad S_j = 1 + |s_j| + |s_j|^2 \end{aligned}$$

por la definición de s_i y e_i se sabe que

$$s_i = \dot{q}_i + \lambda_i q_i - (\dot{q}_i^d + \lambda_i q_i^d)$$

y como la trayectoria deseada es suave y acotada se cumple que

$$|s_i| \leq O_i(|\dot{q}_i| + |q_i| + 1) \quad ; O_i \geq 0$$

por lo que el resultado de lema (3.2) se expresa por

$$|Z_i(q, \dot{q})| \leq \sum_{j=1}^N a_{ij} \left\{ 1 + O_i(|\dot{q}_i| + |q_i| + 1) + [O_i(|\dot{q}_i| + |q_i| + 1)]^2 \right\}$$

que se reordena como

$$|Z_i(q, \dot{q})| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} Q_j \quad ; \quad c_{ij} \geq 0$$

$$; \quad Q_j = 1 + |q_j| + |\dot{q}_j| + |q_j|^2 + |\dot{q}_j|^2$$

por lo que la suposición (2.4) también se cumple.

Entonces se tiene que se cumplen las suposiciones que se tomaron como propiedades del sistema en el teorema (2.1); y como λ_i es un parámetro de diseño, se puede ajustar para que sea tan grande como se requiera por lo que también se cumple la condición sobre este parámetro. Falta por comprobar que las propiedades de cada subsistema sean las de los sistema Euler-Lagrange que se están considerando en el teorema antes mencionado.

De inicio se sabe que el modelo dinámico de un robot manipulador cumple con estas propiedades a nivel del manipulador como un todo, pero se tiene que verificar estas propiedades a nivel de cada unión.

Como $M(q)$ es una matriz positiva definida, simétrica y acotada; se tiene que al ser $m_i(q_i)$ parte del término m_{ii} en la diagonal de $M(q)$, entonces

$$0 \leq \underline{m}_i \leq m_i(q_i) \leq \bar{m}_i$$

Los términos centrífugos y de coriolis se pueden representar por

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \sum_{j,k} c_{kji}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

donde c_{kji} son los símbolos de Cristoffel [Spong89, p. 142].

Y el término $c_{ij}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^N c_{kji}\dot{q}_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k$

entonces

$$c_{ii}(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^N c_{jii}(q)\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{ii}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ji}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_j$$

y como $M(q)$ es una matriz simétrica

$$2c_{ii}(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial m_{ii}}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

De (3.3) se expresa a $m_{ii}(q)$ como dos términos, uno que depende de q_i y otro que depende de q

$$\begin{aligned} 2c_{ii}(q, \dot{q}) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial q_j} [m_i(q_i) + m_{ii}^*(q)] \dot{q}_j \\ &= \frac{d}{dq_i} m_i(q_i) \dot{q}_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial m_{ii}^*(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \dot{m}_i(q_i) + \dot{m}_{ii}^*(q) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Y de (3.4) se tiene que también $c_{ii}(q, \dot{q})$ se puede expresar como dos términos

$$c_{ii}(q, \dot{q}) = c_i(q_i, \dot{q}_i) + c_{ii}^*(q, \dot{q}) \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.18) e igualando términos

$$\begin{aligned} 2c_i(q_i, \dot{q}_i) + 2c_{ii}^*(q, \dot{q}) &= \dot{m}_i(q_i) + \dot{m}_{ii}^*(q) \\ \Rightarrow 2c_i(q_i, \dot{q}_i) &= \dot{m}_i(q_i) = \frac{d}{dq_i} m_i(q_i) \dot{q}_i \\ 2c_{ii}^*(q, \dot{q}) &= \dot{m}_{ii}^*(q) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por lo que $|c_i(q_i, \dot{q}_i)|$ puede ser acotado por

$$|c_i(q_i, \dot{q}_i)| = \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dq_i} m_i(q_i) \dot{q}_i \right| \leq k_i^1 |\dot{q}_i|$$

Se sabe que $|g_i(q)| \leq \|g(q)\| \leq k_b$ pero $g_i(q) = q_i(q) + g_i^*(q)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |g_i(q)| &\leq |q_i(q)| + |g_i^*(q)| \\ &\leq k_c \end{aligned}$$

ya que $g_i^*(q)$, al ser parte de $g_i(q)$, también puede ser acotado por la misma cota que $g_i(q)$.

Si $\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0$, con $N(q, \dot{q}) \triangleq \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ una matriz antisimétrica. Entonces se sabe que $N(q, \dot{q}) = n_{ij}$; $i, j = 1, 2, \dots, N$ cumple con $n_{ii} = 0$, es decir que

$$n_{ii} = \dot{m}_{ii}(q) - 2c_{ii}(q, \dot{q}) = 0$$

pero además de (3.20) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{m}_i(q_i) - 2c_i(q_i, \dot{q}_i) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{q}_i [\dot{m}_i(q_i) - 2c_i(q_i, \dot{q}_i)] \dot{q}_i &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que se verifican todas las propiedades de los 'N' subsistemas.

Como se cumplen todas las condiciones necesarias del teorema (2.1), entonces por medio de éste teorema se sabe que la señal de error en cada unión va a converger al conjunto

$$\{e_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|e_i(t)\| \leq r\} \quad ; r^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\})} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{a \min_i(\underline{m}_i)} \right) + h$$

Donde: $n_i = 1$

$$\min_i(\lambda_m\{\Lambda_i\}) = \min_i(\lambda_i)$$

$$a = \frac{\min_i(\lambda_m\{K_i\})}{\max_i(\bar{m}_i)} = \frac{\min_i(K_i)}{\max_i(\bar{m}_i)}$$

■

3.3 Diseño del controlador, caso δ desconocida

Al igual que en el capítulo 2, se hace necesario el poder estimar la cota δ ya que de la forma en que se define el término de interconexión (3.7) y como se está considerando el término de perturbaciones, es muy difícil que se pueda determinar una cota sobre estos términos; sobre todo si en el mejor de los casos tan sólo se conoce un mejor estimado de los parámetros del modelo del manipulador, e inclusive muchos parámetros (como el momento de inercia de los elementos) se tienen que obtener a través de muchas simplificaciones, debido a la complejidad en el diseño de los elementos.

Otro factor que afecta a la cota δ es el cambio en los parámetros del modelo dinámico del manipulador, al considerarse la carga que pueda llevar éste. Se puede llegar a cambios significativos de los parámetros dinámicos, aun con dispositivos especiales [Rivin88, p. 69] en el diseño mecánico del manipulador, por lo que aumenta las dificultades en el cálculo de la cota en cuestión.

Corolario 3.2 *Sea el sistema en lazo cerrado representado por (3.9), con w_i dado en (2.31) y con la estimación del parámetro δ dada por medio de (2.30). Bajo la suposición (3.1) y para λ_i suficientemente grande, entonces el sistema en lazo cerrado*

es global, uniforme y últimamente acotado y la señal de error en cada unión converge exponencialmente al conjunto

$$\begin{aligned} \{e_i \in \mathbb{R} \mid |e_i| \leq r_e\} & ; r_e^2 = \left(\frac{1}{\min_i(\lambda_i)} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_e}{a_e \min_i(m_i)} \right) + h \\ & ; h > 0 \\ & ; a_e \triangleq \min_i \left(\left(\frac{\min_i(K_i)}{\max_i(\bar{m}_i)} \right), \sigma \right) ; \sigma \triangleq \min_i(\sigma_i) \end{aligned}$$

Prueba: Ya en la prueba del corolario (3.1) se estableció que las propiedades de los subsistemas del modelo del manipulador cumplen con todas las propiedades que se le piden a los subsistemas del modelo general; también se verificaron las suposiciones sobre la fuerza generalizada y los términos de interconexión y de perturbaciones, por lo que es inmediato —por el teorema (2.2)— que se cumple el corolario (3.2). ■

3.4 Resultados de simulación y experimentales

3.4.1 Simulación

El modelo del robot manipulador de dos grados de libertad está dado por (2.11) y (2.12), y aplicando la ley de control propuesta se tiene

$$\begin{aligned} (m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1) \ddot{p}_1 + (m_1 l_{c_1} + m_2 l_{c_2}) g \cos p_1 + Z_1 &= u_1 \\ (m_2 l_{c_2}^2 + I_2) \ddot{p}_2 + m_2 l_{c_2} g \cos p_2 + Z_2 &= u_2 \end{aligned}$$

con $u_i = -K_i s_i + w_i + Y_i(p_i, \dot{p}_i, \dot{p}_i^r, \dot{p}_i^d) \theta_i^0$

Donde: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ y $K_1, K_2 > 0$

$$s_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i = \dot{p}_i - \dot{p}_i^r ; \lambda_i > 0$$

$$e_i = p_i - p_i^d$$

$$\dot{p}_i^r = \dot{p}_i^d - \lambda_i e_i$$

p_i^d es la trayectoria deseada la cual es suave, $(\dot{p}_i^d, \ddot{p}_i^d)$ acotados.

$$w_i = -(\hat{\delta}_i S_i)^2 \frac{s_i}{\hat{\delta}_i S_i |s_i| + \epsilon_i} ; \epsilon_i > 0$$

$$S_i = 1 + |s_i| + |s_i|^2$$

$$Y_i(p_i, \dot{p}_i, \dot{p}_i^r, \dot{p}_i^d) \theta_i^0 = M_i^0 \ddot{\theta}_i^r + G_i^0(p)$$

$m_i^0, l_i^0, l_{c_i}, I_i$ son los valores nominales del sistema.

$$\dot{\hat{\delta}}_i = -\sigma_i \hat{\delta}_i + \gamma_i |s_i| S_i ; \hat{\delta}_i(t_0) > 0$$

Para el caso en que se conoce la cota δ , los parámetros del sistema utilizados en la simulación se muestran en el Apéndice A. En la lista de parámetros utilizados en la simulación se puede observar que se toma en cuenta a los actuadores (motores de

CD) de cada unión, de forma que el controlador genera una señal de voltaje que es convertida en par por los motores de corriente directa. Por simplicidad se desprecia la dinámica de los motores, esto es que se considera nula a la inductancia de los motores.

En cuanto al momento de inercia de los elementos, se toma en cuenta el efecto de la transmisión de potencia, tanto en la posición del centroide, como en el propio momento de inercia; para esto se modelan los elementos como conos huecos invertidos con dos parámetros: r_{i-} y h_{i-} , que son respectivamente el radio y la altura del cono 'i'.

La trayectoria deseada es una senoidal y los resultados de la simulación se dividen en dos grupos, en el primero se considera el caso en que se conoce a δ y en las Figuras 3.1 y 3.2 se muestran los resultados obtenidos. En el segundo grupo se utiliza la estimación de δ , con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned}\delta_1(t_0) &= 1.50 \\ \sigma_1 &= 10.00 \\ \gamma_1 &= 5.00 \\ \delta_2(t_0) &= 1.50 \\ \sigma_2 &= 10.00 \\ \gamma_2 &= 5.00\end{aligned}$$

y para la misma trayectoria senoidal se muestran los resultados de la simulación en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5. Para todos los casos la posición deseada se muestra en línea discontinua y la posición real en línea sólida.

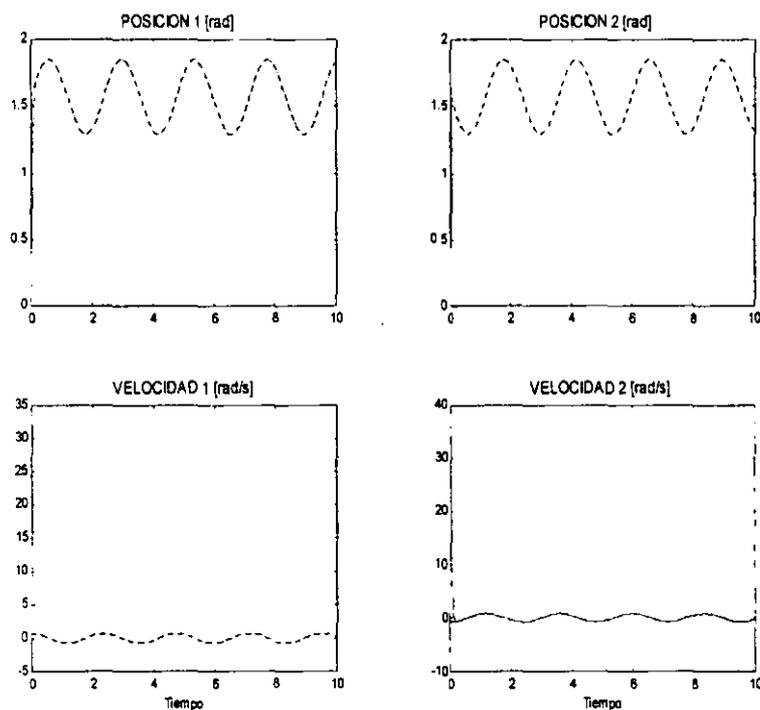


Figura 3.1: Simulación manipulador: Posiciones y velocidades

Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran los resultados de la simulación del robot manipulador de dos grados de libertad, cuando se conoce la cota sobre las perturbaciones e interconexiones. Al comparar estos resultados con los mostrados en las Figuras 3.3 y 3.4, en donde se utiliza la estimación de la cota δ (Figura 3.5), se observa que son muy parecidos los comportamientos y al igual que en la simulación de los dos péndulos invertidos, se tiene que el sistema en lazo cerrado es robusto ante cambios en el parámetro δ .

En ambos casos (δ conocida y δ estimada) se realiza el seguimiento de una trayectoria senoidal con un offset de $\pi/2$ radianes, con una posición inicial de 0 radianes; de esta forma se inicia la simulación con error grande, pero el comportamiento del sistema es tal, que rápidamente alcanza a la trayectoria deseada y logra un error de seguimiento por debajo de $\pm 5\%$.

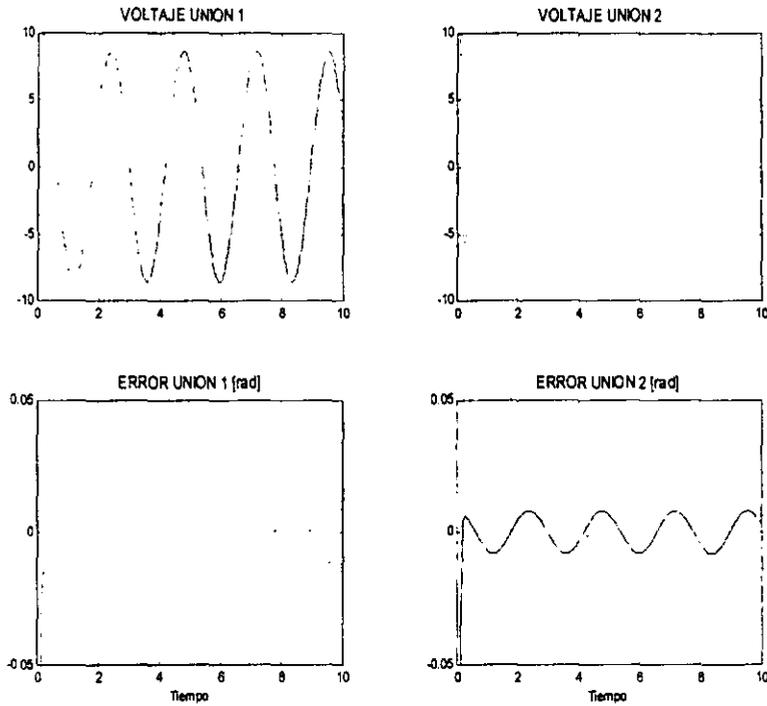


Figura 3.2: Simulación manipulador: Señal de error y acción de control

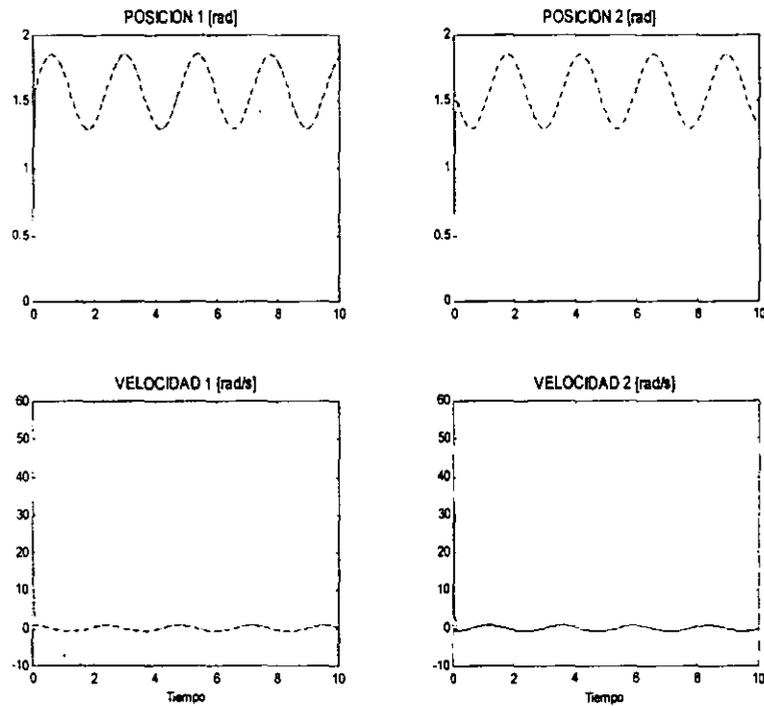


Figura 3.3: Simulación manipulador: Posiciones y velocidades

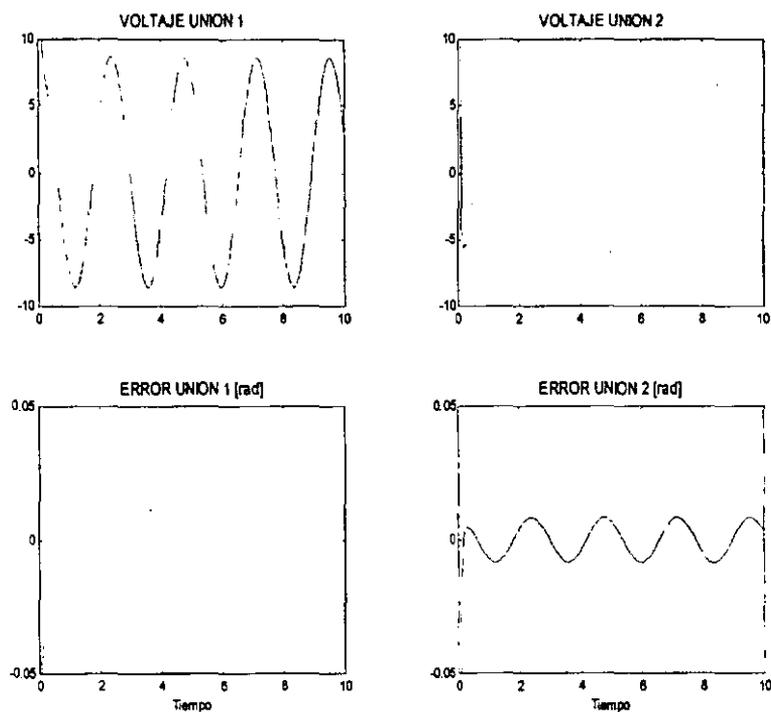


Figura 3.4: Simulación manipulador: Señal de error y acción de control

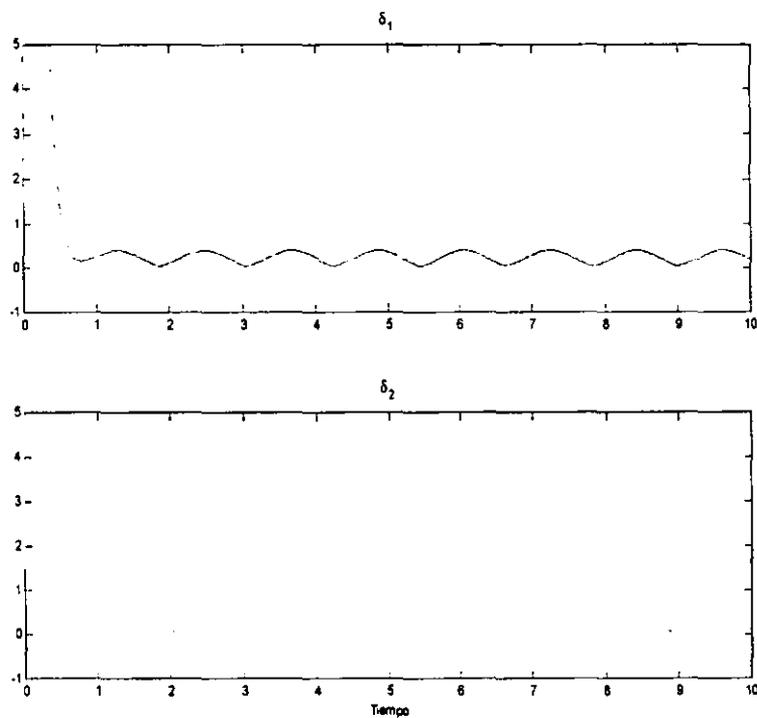


Figura 3.5: Simulación manipulador: Estimación de δ

3.4.2 Resultados experimentales

Se realizaron una serie de pruebas experimentales sobre el manipulador planar de dos grados de libertad, que se encuentra en el Laboratorio de Control de la DEPMI; se implementó⁵ la ley de control (3.8) por medio de una tarjeta dSPACE (DS1102) y la programación del algoritmo se realizó en el lenguaje 'C'.

El modelo del manipulador planar de dos grados de libertad se muestra en el segundo ejemplo de la sección (2.1.1), y en la sección (3.4.1) se dan resultados de la simulación del algoritmo de control aplicado a éste manipulador. Los parámetros del manipulador utilizados en la simulación son los parámetros conocidos del sistema físico, aunque se sabe que son a lo más un mejor estimado de los parámetros reales.

Las pruebas consistieron en hacer el seguimiento de una trayectoria senoidal, que tiene las siguientes características:

$$\begin{aligned} q_1^d &= 0.2793 \sin(\omega t) + \pi/2 \text{ [rad]} \quad ; \omega = 2\pi(0.42 \text{ Hz}) \\ \dot{q}_1^d &= 0.2793\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{q}_1^d &= -0.2793\omega^2 \sin(\omega t) \\ q_2^d &= -0.2793 \sin(\omega t) + \pi/2 \text{ [rad]} \\ \dot{q}_2^d &= -0.2793\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{q}_2^d &= 0.2793\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Los parámetros del controlador fueron:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_2 = 45 \\ \delta_1 &= 2.6 \\ \delta_2 &= 1.9 \\ \epsilon &= 0.1 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 10 \end{aligned}$$

Los resultados experimentales se muestran en las Figuras 3.6 y 3.7.

La facilidad con que se puede implementar un algoritmo de control y el poder comparar el desempeño de diferentes estrategias de control, son dos características importantes del manipulador en que se realizaron las pruebas experimentales; y aprovechando estas características se presenta a continuación la comparación del desempeño del algoritmo de control propuesto con respecto a otros tres algoritmos de control: un PD con compensación gravitatoria, un control adaptable [Slotine87] y un control con una precompensación anticipativa [Spong89, pp. 209-210].

- La señal de control del PD más compensación gravitatoria se obtiene de

$$\begin{aligned} u &= -K_p e - K_d \dot{e} + g \quad ; \quad e = p - p^d \\ & \quad ; \quad g = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_{c2})g \cos p_1 \\ m_2 l_{c2} g \cos p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⁵Ver el apéndice B para una descripción detallada del arreglo experimental

$$K_p = \text{diag}(0.2, 0.2)$$

$$K_d = \text{diag}(0.002, 0.0025)$$

- El control adaptable está dado por

$$\begin{aligned} u &= -Ks + Y\hat{\theta} & ; & \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma Y^T s \\ & & ; & \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{5 \times 5} > 0 \\ & & ; & \quad s = \dot{p} - \dot{p}^r \\ & & ; & \quad \dot{p}^r = \dot{p}^d - \Lambda e \quad ; \Lambda > 0 \\ & & ; & \quad e = p - p^d \end{aligned}$$

$$Y(p, \dot{p}, \dot{p}^r, \dot{p}^r) = \begin{bmatrix} \ddot{p}_1^r & \cos(p_2 - p_1)\ddot{p}_2^r - \sin(p_2 - p_1)\dot{p}_2^r\dot{p}_2 & 0 & 0 & g \cos(p_1) \\ 0 & \cos(p_2 - p_1)\ddot{p}_1^r - \sin(p_2 - p_1)\dot{p}_1^r\dot{p}_1 & \ddot{p}_2^r & g \cos(p_2) & 0 \end{bmatrix}$$

y el vector de parámetros utilizado es

$$\theta = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ m_2 l_1 l_{c2} \\ m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ m_2 l_{c2} \\ m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \end{bmatrix}$$

Se utilizó los siguientes parámetros en el control

$$K = \text{diag}(45, 65)$$

$$\Gamma = \text{diag}(20, 20, 20, 20, 20)$$

$$\Lambda = \text{diag}(15, 15)$$

- El control con una precompensación anticipativa está dado por

$$u = -Ks + Y(p^d, \dot{p}^d, \ddot{p}^d) \theta$$

$$K = \text{diag}(40, 40)$$

$$\Lambda = \text{diag}(20, 20)$$

y el regresor/vector de parámetros es el mismo que en el control adaptable.

Los resultados de la comparación de los algoritmos de control descritos arriba, con el algoritmo de control robusto descentralizado se muestra en las Figuras 3.8 y 3.9. En estas figuras se exponen la señal de control y el error de seguimiento generados por cada algoritmo, y las señales se reconocen de acuerdo a:

Color	Algoritmo
Rojo	Control robusto descentralizado
Azul	Control con precompensación anticipativa
Cyan	Control adaptable
Verde	Control PD + g

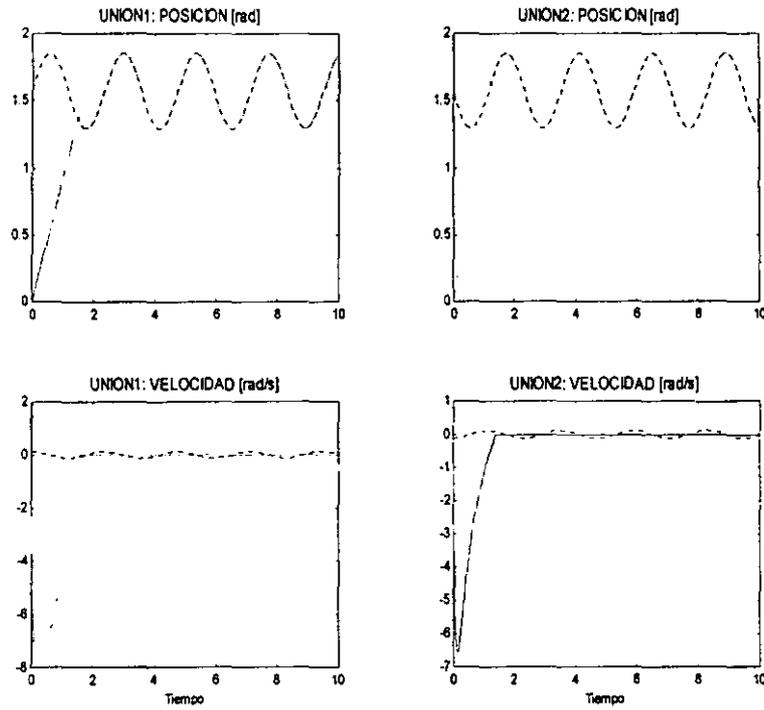


Figura 3.6: Resultados experimentales: posiciones y velocidades

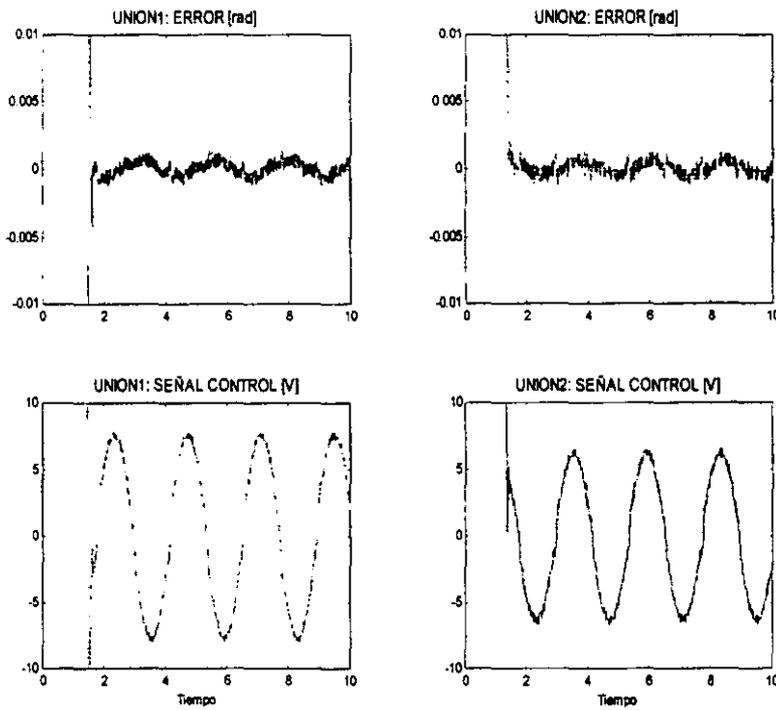


Figura 3.7: Resultados experimentales: señal de error y acción de control

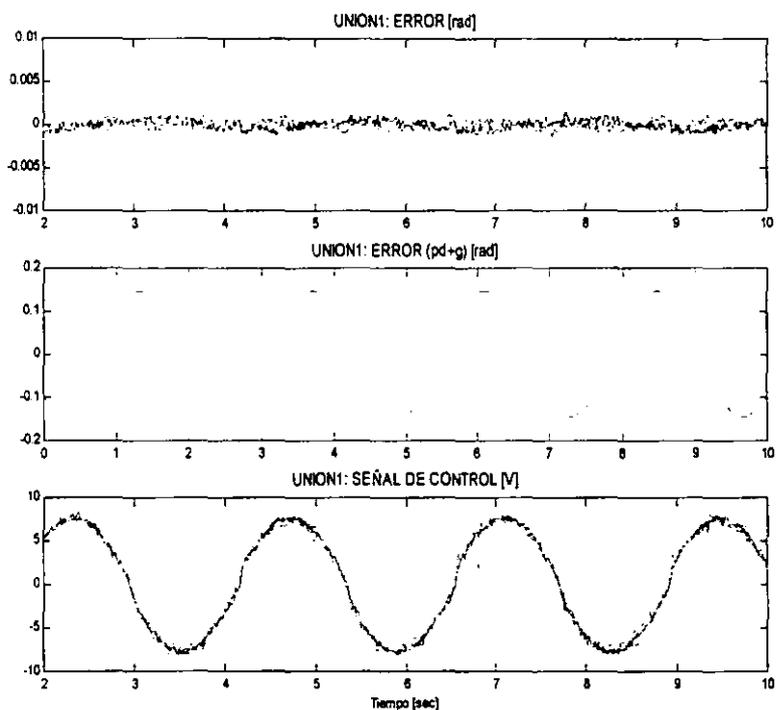


Figura 3.8: Resultados experimentales: comparación entre algoritmos de control (unión 1)

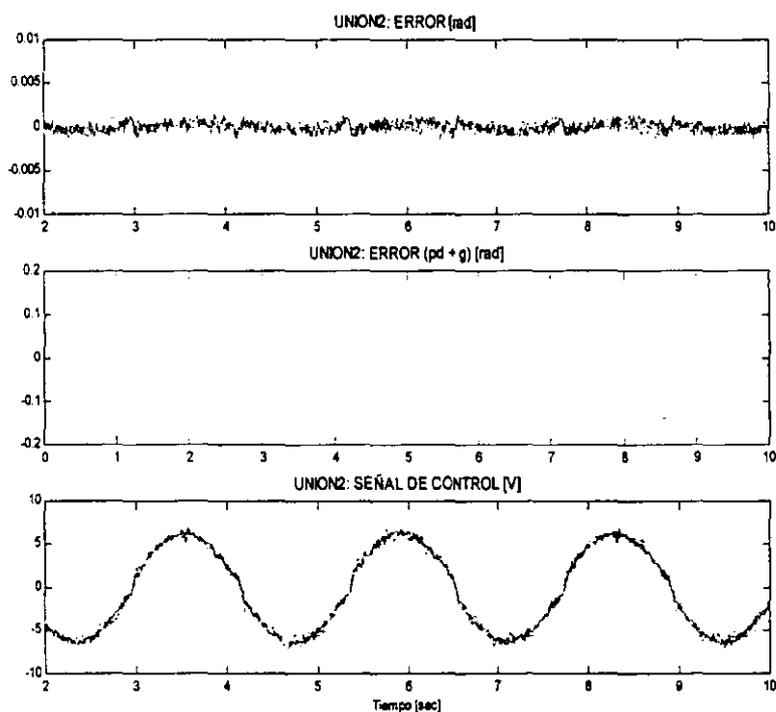


Figura 3.9: Resultados experimentales: comparación entre algoritmos de control (unión 2)

En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran los resultados experimentales y como se puede observar se logra un comportamiento muy bueno, con un error de seguimiento dentro del $\pm 0.4 \%$ con una señal de control que no satura a los convertidores D/A de la tarjeta dSPACE (véase el Apéndice B).

Al igual que en la simulación del robot manipulador, la posición inicial en los experimentos es de 0 radianes, con lo que se comprueba que aún partiendo con error de seguimiento grande, se llega a converger a un error de seguimiento acotado el cual puede disminuirse tanto como lo permita una acción de control que no sature a los convertidores D/A.

Se presentaron ciertas diferencias, a nivel de la magnitud de los parámetros del controlador, entre el comportamiento de la simulación del sistema (Figuras 3.1 - 3.5) y las pruebas experimentales (Figuras 3.6 y 3.7). Se tuvo que incrementar las ganancias del controlador en la simulación, para obtener una señal de error en el rango de los resultados experimentales, y una posible causa es que en la simulación se incluyó a los actuadores de cada unión y entonces pareciera que los datos de los actuadores no corresponden con los valores reales. Al igual que en los resultados de las simulaciones, se observó que el comportamiento del sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a cambios en la cota δ , y conforme se realizaron los experimentos se le podía ajustar como otro parámetro del controlador.

Cap. del curso
de la hoja.

Capítulo 4

Conclusiones

En la tesis se consideró el problema del desarrollo e implementación de un control robusto descentralizado para sistemas no lineales que se modelan por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange. La ley de control propuesta aplicada a los sistemas de interés y cuyas perturbaciones e interconexiones cumplen con la condición *matching* y además están acotadas por un polinomio de alto grado en los estados del sistema, asegura que las variables del controlador y del sistema están uniforme y últimamente acotadas y que el error de seguimiento en cada subsistema converge a un conjunto acotado. Se debe hacer notar que el control propuesto no requiere de un conocimiento exacto del modelo del sistema y, en el caso de sistemas inciertos, sólo se plantea estimar un parámetro.

Se verificó el comportamiento en el tiempo de la ley de control, por medio de simulaciones del modelo de un manipulador de dos grados de libertad y del sistema que sirvió de ejemplo en el Capítulo 2. Los resultados de las simulaciones concuerdan con los resultados teóricos en cuanto a las propiedades de estabilidad de los sistemas en lazo cerrado; es decir se comprobó que todas las señales permanecen acotadas y que la señal de error, si bien no converge a cero, si se puede lograr (por medio de los parámetros del control) que disminuya tanto como se quiera, con el consiguiente aumento en la señal de control.

Un resultado interesante en las simulaciones fue el comportamiento cualitativo de los sistemas, ante el uso de δ y $\hat{\delta}$. Se observó que se obtienen resultados extremadamente parecidos utilizando una cota de las perturbaciones e interconexiones fija y utilizando, con los mismos parámetros en el control, la estimación de la cota en cuestión.

En el caso de la aplicación de la ley de control a robot manipuladores, se verificó que el modelo de un manipulador puede ser expresado en el contexto del control descentralizado y que cada unión forma un subsistema que cumple con las propiedades requeridas por los subsistemas de la clase de sistemas de interés. Los experimentos del control descentralizado ofrecieron resultados muy buenos, a nivel de una señal de control que no saturaba a los actuadores, que resultaba en un error de seguimiento

dentro de un rango del 0.4%. En cuanto a la comparación con los otros algoritmos implementados en el manipulador, se observó que el comportamiento del control con una precompensación anticipativa está en el mismo rango que desempeño que el control descentralizado y son las dos estrategias de control que logran los mejores resultados. Esto habla de un modelo dinámico bastante apegado a la realidad, aunque no se consideraron las características de los actuadores en esta ley de control. El comportamiento del control descentralizado es, como era de esperarse, mejor que el control PD más compensación gravitatoria. De hecho, este control marca un límite inferior, en comportamiento, por arriba del cual están todos los otros controladores. El control adaptable resultó con un desempeño menor que el control descentralizado, posiblemente por la señal de referencia usada en los experimentos, la cual al ser una senoidal pura no permite una convergencia de los parámetros del controlador.

Hay varios aspectos de la tesis que pueden ser extendidos o modificados, en un trabajo a futuro:

La clase de sistemas no lineales tratados en este trabajo está restringida por las propiedades que se le piden a los sistemas de interés, y sobre todo por la condición de *matching*. Es por esto que un posible trabajo a futuro se puede centrar en relajar esta condición [Barmish82, Chen87], con la consecuente ampliación de la clase de sistemas no lineales de interés.

Los resultados experimentales fueron bastante buenos, sin embargo hay que proseguir las pruebas y, sobre todo, realizarlas en otro manipulador, ya que es muy probable que la transmisión de potencia del manipulador en el que se realizaron los experimentos haya contribuido a los buenos resultados. Esto debido a que afecta directamente a los términos de interconexión.

Los problemas asociados a la medición de la velocidad en los manipuladores hacen atractiva la extensión de los resultados obtenidos para el caso en que se realiza el control de un manipulador, con sólo la medición de la posición en las uniones. Resulta interesante comprobar si las propiedades de estabilidad, para el caso en el que se considera medible la velocidad, se conservan para este nuevo caso en el que se estima la velocidad. Sobre todo se debe analizar si se puede extender a resultados globales o si se limitarían a resultados locales.

Un trabajo a futuro que se debe hacer es la aplicación de la ley de control propuesta a más sistemas en específico, como por ejemplo la extensión de los resultados del control de manipuladores al control de manipuladores coordinados, en donde cada subsistema podría ser un manipulador completo y las interconexiones resultarían de las tareas en común que se estuvieran realizando. También es interesante contemplar un modelo más completo de los manipuladores en donde se trataran los efectos de la flexibilidad en las uniones. En sistemas bípedos totalmente actuados, se tiene un modelo muy similar al de un manipulador, y se podría aprovechar las características del control descentralizado para controlar cada pierna de forma independiente.

Existen otros tipos de sistemas en los que también se podrían aprovechar las características del control descentralizado, como en el control sísmico de edificios en donde es muy recomendable que el control de cada piso sólo dependa de las variables locales, tanto por su tolerancia a fallas como por los costos de compartir información a lo largo de todo un edificio.

Bibliografía

- [Barmish82] B.R. Barmish y G. Leitmann, "On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Conditions", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 27, Núm. 1, Feb. 1982, pp. 153-158
- [Berghuis93] H. Berghuis y H. Nijmeijer, "Global Regulation of Robots with only positions measurements", en *Syst. & Control Lett.*, Vol. 21, 1993, pp. 289-293
- [Berghuis94] H. Berghuis y H. Nijmeijer, "Robust Control of Robots via Linear Estimated State Feedback", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, Núm. 10, Oct. 1994, pp. 2159-2162
- [Canudas91] C. Canudas de Wit y N. Fixot, "Robot Control Via Robust Estimated State Feedback", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 36, Núm. 12, Dic. 1991, pp. 1497-1501
- [Chen87] Y. H. Chen, "On the Robustness of mismatched Uncertain Dynamical Systems", en *J. Dynamic. S., Measurement and Control*, Vol. 109, Marzo 1987, pp. 29-35
- [Chen91] Y. H. Chen, G. Leitmann y X.Z. Kai, "Robust Control design for Interconnected systems with time-varying uncertainties", en *Int. J. Control*, Vol. 54, Núm. 5, 1991, pp.1119-1142
- [Cavalieri97] S. Cavalieri, A. Di Stefano y O. Mirabella, "Impact of Fieldbus on Communication in Robotic Systems", en *IEEE Trans. on Robotics and Autom.*, Vol. 13, Núm. 1, Feb. 1997, pp. 30-48
- [Corless81] M. Corless y G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 26, Núm. 5, Oct. 1981, pp. 1139-1144
- [Craig88] John J. Craig, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators", 1988, Addison Wesley.

- [Crandall68] Stephen H. Crandall, Dean C. Karnopp, Edward F. Kurtz y David C. Pridmore-Brown, "Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems", 1968, McGraw-Hill.
- [Feng95] G. Feng y Y. A. Jiang, "Variable Structure Based Decentralized Adaptive Control", *IEE Proc. D Control Theory Appl.*, Vol. 142, Núm. 5, Sept. 1995, pp. 439-443
- [Fu92] L. C. Fu, "Robust Adaptive Decentralized Control of Robot Manipulators", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 37, Núm. 1, Enero 1992, pp. 106-110
- [Gavel89] D.T. Gavel y D.D. Siljak, "Decentralized Adaptive Control: Structural Conditions for Stability", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, Núm. 4, Abril 1992, pp. 413-426
- [Goldstein80] Herbert Goldstein, "Classical Mechanics", 2da ed., 1980, John Wiley & Sons, E.U.
- [Gong96] Z. Gong, C. Wen y D.P. Mital, "Decentralized Robust Controller Design for a Class of Interconnected Uncertain Systems with Unknown Bound of Uncertainty", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 41, Núm. 6, Junio 1996, pp. 850-854
- [Ikeda80] M. Ikeda y D.D. Siljak, "On Decentralized Stabilisable Large-Scale Systems", en *Automatica*, Vol. 16, 1980, pp.331-334
- [Ioannou86] P. A. Ioannou, "Decentralized Adaptive Control on Interconnected Systems", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 31, Núm. 4, Abril 1986, pp. 291-298
- [Jain97] S. Jain y F. Khorrami, "Decentralized Adaptive Control of a Class of Large-Scale Interconnected Nonlinear Systems", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, Núm. 2, Feb. 1997, pp. 136-154
- [Khalil96] Hassan K. Khalil, "Nonlinear Systems", 2da ed., 1996, Prentice Hall, E.U.
- [Langhaar62] Henry L. Langhaar, "Energy Methods in Applied Mechanics", 1962, John Wiley & Sons.
- [Liu99] M. Liu, "Decentralized Control of Robot Manipulators: Nonlinear and Adaptive Approaches", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, Núm. 2, Feb. 1999, pp. 357-363

- [Liu96] Y.Liu y S. Arimoto, "Distributively Controlling Two Robots Handling an Object in the Task Space without any communication", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 41, Núm. 8, Agosto 1996, pp. 1193-1198
- [Seraji89] H. Seraji, "Decentralized Adaptive Control of manipulators: Theory, simulation, and Experimentation", en *IEEE Trans. on Robotic and Autom.*, Vol. 5, Núm. 2, Abril 1989, pp. 183-201
- [Shi92] L. Shi y S.K. Singh, "Decentralized Adaptive Controller design for a large-scale systems with higher order interconnections", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 37, Núm. 8, Agosto 1992, pp. 1106-1118
- [Slotine87] J-J. E. Slotine y W. Li, "On the Adaptive Control of Robot Manipulators", en *Int. J. Robot. Research*, Vol. 6, Núm. 3, Otoño 1987, pp. 49-59
- [Spong89] Mark W. Spong y M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", 1989, John Wiley & Sons, Singapur.
- [Rivin88] Eugene I. Rivin, "Mechanical Design of Robots", 1988, McGraw-Hill, E.U.
- [Tang] Yu Tang, Masayoshi Tomizuka, G. Guerrero y G. Montemayor, "Decentralized Robust Control for a Class of Nonlinear Systems", aceptado para publicación en *IEEE Trans. on Automatic Control*
- [Zhu98] W. Zhu, Z. Bien y J. De schutter, "Adaptive Motion/Force Control of Multiple Manipulators with Joint Flexibility Based on Virtual Decomposition", en *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, Núm. 1, Enero 1998, pp. 46-60
- [LM12] Datos técnicos del LM12, Linear Databook, National Semiconductor Corporation

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Apéndice A

Parámetros de las simulación

Los parámetros utilizados en las simulaciones del sistema de los dos péndulos invertidos son:

Simulación de dos péndulos invertidos

30-May-1999

7: 3

<>Parámetros:

- m10 = 0.400000 % Masa nominal péndulo 1 [Kg]
- p1_ = 10.000000 % Incertidumbre masa péndulo 1 [%]
- l1_ = 0.300000 % Longitud péndulo 1 [m]
- m20 = 0.500000 % Masa nominal péndulo 2 [Kg]
- p2_ = 10.000000 % Incertidumbre masa péndulo 2 [%]
- l2_ = 0.400000 % Longitud péndulo 2 [m]
- B__ = 0.009000 % Fricción péndulo [N·m·s/rad]
- K__ = 30.000000 % Constante del resorte [N/m]
- A__ = 0.100000 % Constante no-lineal resorte [1/m]
- sd_ = 1.000000 % Opción resorte suave/duro (-1/+1)
- l0_ = 0.500000 % Distancia entre péndulos [m]
- g__ = 9.810000 % Aceleración gravedad [m/s²]
- m1 = 0.440000 % Masa real péndulo 1 [Kg]
- m2 = 0.550000 % Masa real péndulo 2 [Kg]

<>Variación parámetros:

- a1 % Posición resorte (péndulo 1) [m]
- a2 % Posición resorte (péndulo 2) [m]

<>Controlador:

- k1_ = 30.000000 % Ganancia k1
- d10 = 0.100000 % $\delta_1(t_0)$
- si1 = 0.000000 % Parámetro σ_1
- ga1 = 0.000000 % Parámetro γ_1
- e1_ = 0.010000 % Parámetro ϵ_1
- la1 = 20.000000 % Parámetro λ_1
- k2_ = 40.000000 % Ganancia k2
- d20 = 0.100000 % $\delta_2(t_0)$
- si2 = 0.000000 % Parámetro σ_2
- ga2 = 0.000000 % Parámetro γ_2
- e2_ = 0.010000 % Parámetro ϵ_2
- la2 = 30.000000 % Parámetro λ_2

<>Condiciones Iniciales:

- pos1[°] = 0.000000
- vel1[°/s] = 0.000000
- pos2[°] = 0.000000
- vel2[°/s] = 0.000000

<>Parámetros de tiempo:

- Tiempo de simulación = 10
- Dimensión vector T = 400
- Paso máximo de inte. = 0.011111

<>Señal de referencia:

- Pos1[°] : Escalón: 20 @2[seg]
- Vel1[°/s] : Escalón: 0 @0[seg]
- Acel[°/s²]: Escalón: 0 @0[seg]
- Pos2[°] : Escalón: -40 @5[seg]
- Vel2[°/s] : Escalón: 0 @0[seg]
- Ace2[°/s²]: Escalón: 0 @0[seg]

Los parámetros utilizados en la simulación del manipulador de dos grados de libertad son:

Manipulador de 2gdl, con un control descentralizado 09-May-1999 11:50

<>Parámetros:

· a1_ = 0.230000 % Longitud elemento 1 [m]
· m1_ = 0.300000 % Masa elemento 1 [Kg]
· rr1 = 0.020000 % Parámetro en I1 (radio cono) [m]
· h1_ = 0.355500 % Parámetro en I1 (altura cono) [m]
· r1_ = 0.004536 % Relación trans. unión 1 []
· a2_ = 0.216000 % Longitud elemento 2 [m]
· m2_ = 0.250000 % Masa elemento 2 [Kg]
· rr2 = 0.020000 % Parámetro en I2 (radio cono) [m]
· h2_ = 0.348000 % Parámetro en I2 (altura cono) [m]
· r2_ = 0.005443 % Relación trans. unión 2 []
· km_ = 0.033000 % Cte. de par (motor) [N·m/A]
· kb_ = 0.033420 % Cte. fza. contra-electromotriz (motor) [V·s]
· Ra_ = 0.650000 % Resistencia de la armadura (motor) [ohms]
· Jm_ = 0.000032 % Inercia (motor) [Kg·m²]
· Bm_ = 0.001000 % Amortiguamiento (motor) [N·m·s/rad]
· g__ = 9.810000 % Aceleración de la gravedad [m/s²]
· I1_ = 0.002136 % Inercia del elemento 1 [Kg·m²]
· I2_ = 0.001707 % Inercia del elemento 2 [Kg·m²]
· oc1x = 0.095000 % Centroide elemento 1 [m]
· oc2x = 0.096000 % Centroide elemento 2 [m]

<>Controlador:

· k1_ = 200.00000 % Ganancia k1
· d10 = 1.500000 % $\delta_1^{-1}(t_0)$
· si1 = 0.000000 % Parámetro σ_1
· ga1 = 0.000000 % Parámetro γ_1
· e1_ = 0.100000 % Parámetro ϵ_1
· la1 = 40.000000 % Parámetro λ_1
· k2_ = 200.00000 % Ganancia k2
· d20 = 1.500000 % $\delta_2^{-1}(t_0)$

```
· si2 = 0.000000 % Parámetro sigma2
· ga2 = 0.000000 % Parámetro gamma2
· e2_ = 0.100000 % Parámetro epsilon2
· la2 = 40.000000 % Parámetro lambda2
```

<>Condiciones Iniciales:

```
· pos1[rad] = 0.000000
· vel1[rad/s] = 0.000000
· pos2[rad] = 0.000000
· vel2[rad/s] = 0.000000
```

<>Parámetros de tiempo:

```
· Tiempo de simulación = 10
· Dimensión vector T = 400
· Paso máximo de inte. = 0.011111
```

<>Señal de referencia:

```
· Pos1[rad] : Senoidal: 0.27925*sin(2*pi*0.42*t) + 1.5708
· Vel1[rad/s] : Senoidal: 0.27925*(2*pi*0.42)*cos(2*pi*0.42*t)
· Ace1[rad/s^2]: Senoidal: -0.27925*(2*pi*0.42)^2*sin(2*pi*0.42*t)
· Pos2[rad] : Senoidal: -0.27925*sin(2*pi*0.42*t) + 1.5708
· Vel2[rad/s] : Senoidal: -0.27925*(2*pi*0.42)*cos(2*pi*0.42*t)
· Ace2[rad/s^2]: Senoidal: 0.27925*(2*pi*0.42)^2*sin(2*pi*0.42*t)
```

Apéndice B

Arreglo experimental: Robot dos grados de libertad

Equipo utilizado

- Manipulador de dos GDL (planar).
- Interfase de potencia.
- Fuente de voltaje "Power Module PAO103".
- Computadora PC486-33 con tarjeta dSPACE (DS1102).

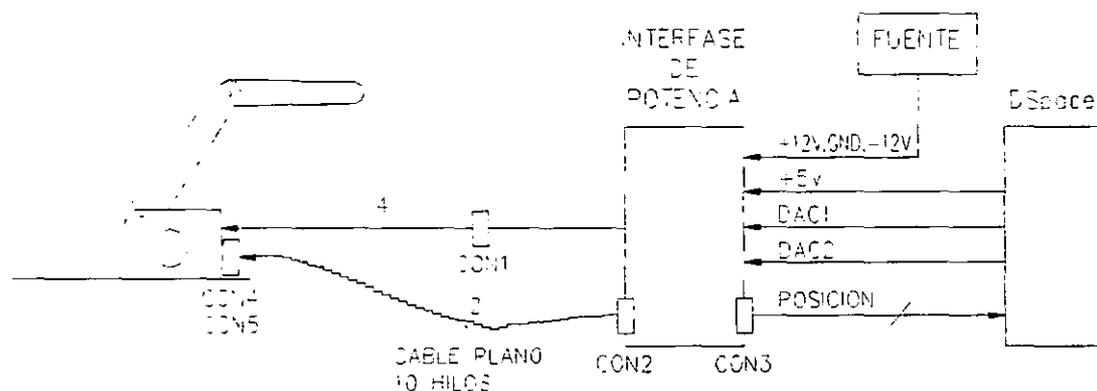


Figura B.1: Diagrama de interconexiones

Interfase de potencia:

La alimentación de voltaje a los motores del manipulador se realiza por medio de dos amplificadores operacionales de potencia conectados en una configuración de seguidor de voltaje. La interfase de potencia se completa con varias protecciones para asegurar un buen comportamiento de la señal de voltaje a los motores. Estas protecciones son el desacoplo del voltaje de alimentación a los amplificadores operacionales, una protección por la carga inductiva de los motores y un filtro para aminorar las

oscilaciones de la señal de salida de los amplificadores, debida a la ganancia unitaria de estos. Para más información de estos circuitos ver[LM12]

Cada motor cuenta con un conector a cable plano, el cual lleva las señales del sensor de posición (un encodificador óptico), una señal para detección de una posición límite ("limit switch") y la posibilidad de llevar el voltaje de alimentación al motor. Por consideraciones de ruido, el voltaje se alimenta a los motores por medio de cables conectados directamente a los amplificadores operacionales, con la intención de que la forma de onda de la señal no se modifique.

Tarjeta dSPACE:

La tarjeta dSPACE (DS1102) está diseñada con base en el DSP TMS320C30 /40MHz y es especialmente útil en la implementación de sistemas de control, ya que ofrece una plataforma de desarrollo muy potente que permite llegar rápidamente a pruebas de los algoritmos. La programación se puede realizar en 'C', o directamente desde Simulink/Matlab en donde se genera automáticamente el código ejecutable; en el caso específico del manipulador toda la programación se realizó en 'C'.

Los programas "Cockpit3" y "Trace3" hacen de la dSPACE una herramienta muy valiosa; "Cockpit3" es una interfase gráfica para el código objeto que corre en la tarjeta y básicamente es un enlace entre las variables del programa y diversos controles gráficos, de forma que se puede alterar u observar el contenido de las variables. Por medio de esto se puede controlar el flujo del programa y/o alterar los parámetros de los algoritmos que se estén ejecutando. "Trace3" permite graficar el comportamiento en el tiempo de las variables y por tanto obtener resultados experimentales de las pruebas. Para la documentación de los experimentos o para continuar el análisis de éstos, existe la posibilidad de guardar los resultados experimentales y llevarlos a MatLab.

Manipulador:

El manipulador utilizado tiene dos uniones de revolución y la disposición de éstas es tal que únicamente puede realizar movimientos en un plano vertical; en la Figura 2.2 se muestra el espacio de trabajo, el cual está limitado por el rango de movimiento de las uniones y por la interferencia entre los propios elementos. El manipulador está construido por perfiles de aluminio y cuenta con una transmisión de potencia para cada unión, con la característica especial que la segunda unión (codo) está actuada a distancia, es decir, el motor está situado a la altura de la primera unión y provoca que la orientación del segundo elemento no cambie por el movimiento de la primera unión.

Actuadores:

Cada elemento del manipulador se mueve por medio de un motor de CD acoplado a una transmisión de potencia como se muestra en la Figura B.2. El motor de corriente directa, de imán permanente, tiene un voltaje máximo de ± 20 volts y no hay datos del fabricante, pero si una caracterización de sus parámetros:

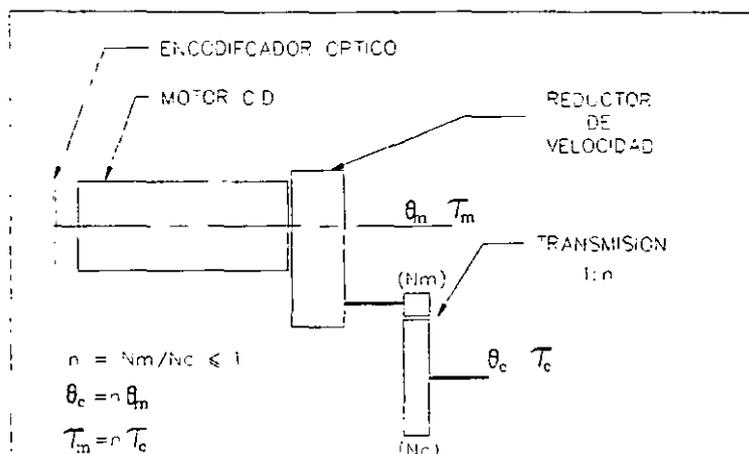


Figura B.2: Actuadores del manipulador

$B_m = 1e^{-6}$ [N·m·s/rad]; amortiguamiento en motor y transmisión.

$J_m = 32e^{-7}$ [Kg·m²]; inercia motor.

$K_m = 33e^{-3}$ [N·m/A]; constante de par.

$K_b = 33.44e^{-3}$ [V·s]; constante de la fuerza contraelectromotriz.

$R_a = 4.5$ [Ω]; resistencia de los devanados del motor.

Al despreciar la inductancia del motor se llega a un modelo del par entregado a la carga en función del voltaje de alimentación del motor

$$J_m \ddot{\theta}_m + \left(B_m + \frac{K_b K_m}{R_a} \right) \dot{\theta}_m = \frac{K_m}{R_a} u(t) - n \tau_c$$

donde: θ_m es la posición de la unión del lado del motor
 $n \tau_c$ es el par de carga reflejado al lado del motor
 $u(t)$ es el voltaje de entrada

El término n es la relación de la transmisión de potencia y está formado por el reductor de velocidad en cada motor, 1:29/1918, y por la transmisión de potencia en cada elemento, por lo que se tiene una relación total dada por:

Elemento 1 (hombro):

$$n_1 = \left(\frac{N_m}{N_c} \right) \left(\frac{29}{1918} \right) = \left(\frac{9}{30} \right) \left(\frac{29}{1918} \right) = 0.00454$$

Elemento 2 (codo):

$$n_2 = \left(\frac{N_m}{N_c} \right) \left(\frac{29}{1918} \right) = \left(\frac{9}{25} \right) \left(\frac{29}{1918} \right) = 0.00544$$

Sensores:

Aunque no se está tomando en cuenta la dinámica de los sensores, se tiene que listar sus características para obtener los factores de conversión entre la lectura de los encodificadores ópticos y la posición en radianes de cada unión. El sensor incorporado al motor es un "encoder" incremental que genera dos señales 'A' y 'B', las cuales están defasadas 90° y se tiene una resolución de 6 pulsos por revolución del lado del motor. La tarjeta dSPACE realiza la adquisición de las señales 'A/B' para cada uno de los motores, de forma que se genera una cuenta en un registro interno (de 24 bits) la cual está normalizada a ± 1 . Para obtener la posición en radianes de cada unión, lado del elemento, se tiene que leer el registro y multiplicarlo por un factor. Para la primera unión se tiene:

$$\theta_1 = n_1 \theta_{m1}$$

donde

$$\theta_{m1} = (\text{registro}[\text{cuenta}]) \left(\frac{2^{23}[\text{pulsos}]}{\text{registro}[\text{cuenta}]} \right) \left(\frac{1[\text{rev}]}{4 \cdot 6[\text{pulsos}]} \right) \left(\frac{2\pi[\text{rad}]}{1[\text{rev}]} \right)$$

para la unión 2 es similar y entonces los factores para cada unión son:

$$\theta_1 = (9961.615820)(\text{registro})[\text{rad}]$$

$$\theta_2 = (11953.90967)(\text{registro})[\text{rad}]$$

El manipulador sólo cuenta con sensores de posición y la velocidad se estima a partir del error de posición; de esta forma no se tiene los problemas causados por el ruido, ya sea por la medición de la velocidad, o por la aproximación numérica de la derivada de la posición [Berghuis94, Canudas91] El estimador de velocidad [Berghuis93] utilizado es

$$\dot{x} = -Lx + K_d e; \quad x \text{ es la velocidad estimada}$$

$$e = p - p^d$$

$$L = 20;$$

$$K_d = 100;$$