

13  
2 ej

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE INGENIERIA

BIOMECANICA DEL BRAZO HUMANO:  
UNA DESCRIPCION MATEMATICA DE SU  
MOVIMIENTO

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
( A R E A M E C A N I C A )  
P R E S E N T A  
FRANCISCO DAVID BAZAINE ZEA

DIRECTOR DE TESIS: M.I. IGNACIO JUAREZ CAMPOS



MEXICO, D.F.

1999

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

273570



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Para mi *mamá*, por su incalculable amor**

**y, para *Saba*, por su tierna locura**

# CONTENIDO

Lista de Símbolos  
Objetivos  
Definición del problema  
Justificación  
Establecimiento de Hipótesis  
Metodología de Investigación

<b>1. Introducción</b> .....	9
<b>2. Investigación documental</b> .....	13
2.1 Fisiología del brazo humano	
2.1.1 Tipos de huesos constitutivos	
2.1.2 Tipos de articulaciones constitutivas	
2.1.3 Tipos de músculos constitutivos	
2.1.4 Glosario y terminología	
2.2 Rango de desplazamiento de las articulaciones	
<b>3. Modelación Matemática</b> .....	52
3.1 Introducción	
3.2 Modelación en el espacio operacional	
3.2.1 Posición del brazo humano de acuerdo a ${}^0T_8$	
3.2.2 Parámetro de inclinación del brazo $\varphi$	
3.3 Modelación en el espacio articular	
3.3.1 Obtención de la primera variable articular $\theta_1$	
3.3.2 Obtención de la segunda variable articular $\theta_2$	

- 3.3.3 Obtención de la tercer variable articular  $\theta_3$
- 3.3.4 Obtención de la cuarta variable articular  $\theta_4$
- 3.3.5 Obtención de la quinta variable articular  $\theta_5$
- 3.3.6 Obtención de la sexta variable articular  $\theta_6$
- 3.3.7 Obtención de la séptima variable articular  $\theta_7$

3.4 Limitaciones del modelo matemático

**4. Simulación por computadora ..... 102**

**Resultados y conclusiones ..... 109**

**Bibliografía ..... 124**

**Anexos ..... 126**

## LISTA DE SÍMBOLOS

### OPERACIONES

$a \cdot b$	Producto escalar entre los vectores <b>a</b> y <b>b</b>
$a \otimes b$	Producto vectorial entre los vectores <b>a</b> y <b>b</b>
$\ a\ $	Norma del vector <b>a</b> , donde $\ a\  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

### ESCALARES

$\theta_i$	Variable articular <i>i-ésima</i> , donde $i=1,2,3,4,5,6,7$
$\varphi$	Parámetro angular denominado "ángulo de inclinación del brazo"
$l_1$	Distancia entre el hombro (H) y el codo (C)
$l_2$	Distancia entre el codo (C) y la muñeca (M)
$l_3$	Distancia entre la muñeca (M) y el punto de agarre <b>MAN</b>
$r_{ij}$	Elemento <i>ij</i> de la matriz de rotación ${}^aR_b$ .

### VECTORES

${}^aH$	Vector de posición del punto <b>H</b> referido a la base <b>a</b>
${}^aC$	Vector de posición del punto <b>C</b> referido a la base <b>a</b>
${}^aM$	Vector de posición del punto <b>M</b> referido a la base <b>a</b>
${}^aMAN$	Vector de posición del punto <b>MAN</b> referido a la base <b>a</b>
${}^aCC$	Vector de posición del punto <b>CC</b> referido a la base <b>a</b>

### PUNTOS

<b>H</b>	Punto ubicado en el hombro del brazo humano
<b>C</b>	Punto ubicado en el codo del brazo humano
<b>M</b>	Punto ubicado en la muñeca del brazo humano
<b>MAN</b>	Punto ubicado en lugar donde se cierran los dedos

**CC** Punto localizado por la intersección entre la línea definida por los puntos **H** y **M**, y la perpendicular a ésta que pasa por el punto **C**

## LÍNEAS

**HC** Línea definida entre los puntos **H** y **C**

**CM** Línea definida entre los puntos **C** y **M**

**HM** Línea definida entre los puntos **H** y **M**

## BASES

**{0}** Base inercial fija que representa el sistema universal de referencia, el cual se ubica en el punto **H**. Sus elementos son  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$

**{1}** Base móvil ubicada en el punto **H**. Sus elementos son  $\{X_1, Y_1, Z_1\}$

**{2}** Base móvil ubicada en el punto **H**. Sus elementos son  $\{X_2, Y_2, Z_2\}$

**{3}** Base móvil ubicada en el punto **C**. Sus elementos son  $\{X_3, Y_3, Z_3\}$

**{4}** Base móvil ubicada en el punto **C**. Sus elementos son  $\{X_4, Y_4, Z_4\}$

**{5}** Base móvil ubicada en el punto **M**. Sus elementos son  $\{X_5, Y_5, Z_5\}$

**{6}** Base móvil ubicada en el punto **M**. Sus elementos son  $\{X_6, Y_6, Z_6\}$

**{7}** Base móvil ubicada en el punto **M**. Sus elementos son  $\{X_7, Y_7, Z_7\}$

**{8}** ó **{MAN}** Base móvil ubicada en el punto **MAN**. Sus elementos son  $\{X_8, Y_8, Z_8\}$  ó bien  $\{X_{MAN}, Y_{MAN}, Z_{MAN}\}$

## **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

$C_i, C\theta_i$	Función trigonométrica <b>Cos</b> $\theta_i$
$S_i, S\theta_i$	Función trigonométrica <b>Sen</b> $\theta_i$
$\tan^{-1}(\arg_1/\arg_2)$	Función arco tangente de 2 argumentos $\arg_1$ y $\arg_2$
$\cos^{-1}(\arg)$	Función arco coseno del argumento $\arg$

## **MATRICES**

${}^aT_b$	Matriz de transformación homogénea que define la relación de la base <b>b</b> respecto de <b>a</b>
${}^aR_b$	Matriz de rotación que describe la orientación del sistema de referencia <b>b</b> con respecto al sistema <b>a</b> .



## OBJETIVOS

- Establecer y validar un modelo matemático del movimiento del brazo humano.
- Efectuar una simulación por computadora del movimiento del brazo humano empleando la modelación desarrollada.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El brazo humano está constituido por tres articulaciones, dos de las cuales son esféricas. La primera ubicada en el hombro y la segunda ubicada en la muñeca. La articulación perteneciente al codo puede considerarse como una rotacional pura. Estas tres articulaciones le dan al brazo una enorme movilidad permitiendo la orientación y posicionamiento de su órgano terminal, la mano. Esta orientación y posicionamiento exigen *seis grados de libertad (GDL)*. Pero además el brazo humano es capaz de cambiar su configuración sin cambiar la orientación y/o posición de la mano u objeto que sostenga, agregando entonces lo que llamamos redundancia cinemática. Esto significa que el segmento *hombro-codo* y *codo-muñeca* puede girar en el espacio (plano de inclinación del brazo), adicionando un grado de libertad. Así pues, tenemos un total de siete grados de libertad para el brazo humano que corresponden a siete ángulos o variables articulares, desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$ .

## OBJETIVOS

- Establecer y validar un modelo matemático del movimiento del brazo humano.
- Efectuar una simulación por computadora del movimiento del brazo humano empleando la modelación desarrollada.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El brazo humano está constituido por tres articulaciones, dos de las cuales son esféricas. La primera ubicada en el hombro y la segunda ubicada en la muñeca. La articulación perteneciente al codo puede considerarse como una rotacional pura. Estas tres articulaciones le dan al brazo una enorme movilidad permitiendo la orientación y posicionamiento de su órgano terminal, la mano. Esta orientación y posicionamiento exigen *seis grados de libertad (GDL)*. Pero además el brazo humano es capaz de cambiar su configuración sin cambiar la orientación y/o posición de la mano u objeto que sostenga, agregando entonces lo que llamamos redundancia cinemática. Esto significa que el segmento *hombro-codo* y *codo-muñeca* puede girar en el espacio (plano de inclinación del brazo), adicionando un grado de libertad. Así pues, tenemos un total de siete grados de libertad para el brazo humano que corresponden a siete ángulos o variables articulares, desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$ .

Este trabajo contempla determinar dos reglas de correspondencia  $F$  y  $G$  tales que :

$$X = F(\Theta) \quad \text{y} \quad \Theta = G(X) \quad \Theta \in \mathfrak{R}^7 \quad \text{y} \quad X \in \mathfrak{R}^7$$

donde  $\Theta$  es el espacio articular y  
 $X$  es el espacio operacional.

Una vez alcanzada la modelación está será sometida a simulación para obtener el comportamiento del movimiento de, principalmente, las dos articulaciones esféricas, indicando claramente sus limitaciones.

## JUSTIFICACIÓN

“En el campo de la robótica, las bases para controlar estructuras con *más de seis grados de libertad* han sido intensamente estudiadas por más de dos décadas. La mayoría de los robots industriales tienen un diseño simple de manera que la formulación matemática necesitada para controlar su trayectoria sea simple. Existen varios problemas asociados con la manipulación de estructuras articuladas, pero la mayoría de estos problemas son concernientes a la formulación y resolución de ecuaciones para controlar manipuladores. Manipuladores teniendo más 6 grados de libertad son difíciles de formular. Aún si la formulación fuera posible, podría ser susceptible a errores e ineficiencias de manera que su control real no podría ser alcanzado[...]<sup>1</sup>”

<sup>1</sup> “In the field of robotics, the basis for controlling highly articulated structures with more than 6 DOF has been heavily researched for more than two decades. Most industrial robots have a simple design so that the mathematical formulation needed to control their trajectory is simple. There are various problems associated with manipulating articulated structures but most of these problems are concerned with formulating and solving equations for controlling manipulators. Manipulators having DOF higher than six are difficult to formulate. Even if the formulation is possible, it could be susceptible to errors and inefficiencies, such that real-time control cannot be achieved[...].”

Este trabajo contempla determinar dos reglas de correspondencia  $F$  y  $G$  tales que :

$$X = F(\Theta) \quad \text{y} \quad \Theta = G(X) \quad \Theta \in \mathfrak{R}^7 \quad \text{y} \quad X \in \mathfrak{R}^7$$

donde  $\Theta$  es el espacio articular y

$X$  es el espacio operacional.

Una vez alcanzada la modelación está será sometida a simulación para obtener el comportamiento del movimiento de, principalmente, las dos articulaciones esféricas, indicando claramente sus limitaciones.

## JUSTIFICACIÓN

“En el campo de la robótica, las bases para controlar estructuras con *más de seis grados de libertad* han sido intensamente estudiadas por más de dos décadas. La mayoría de los robots industriales tienen un diseño simple de manera que la formulación matemática necesitada para controlar su trayectoria sea simple. Existen varios problemas asociados con la manipulación de estructuras articuladas, pero la mayoría de estos problemas son concernientes a la formulación y resolución de ecuaciones para controlar manipuladores. Manipuladores teniendo más 6 grados de libertad son difíciles de formular. Aún si la formulación fuera posible, podría ser susceptible a errores e ineficiencias de manera que su control real no podría ser alcanzado[...]<sup>1</sup>”

---

<sup>1</sup> “In the field of robotics, the basis for controlling highly articulated structures with more than 6 DOF has been heavily researched for more than two decades. Most industrial robots have a simple design so that the mathematical formulation needed to control their trajectory is simple. There are various problems associated with manipulating articulated structures but most of these problems are concerned with formulating and solving equations for controlling manipulators. Manipulators having DOF higher than six are difficult to formulate. Even if the formulation is possible, it could be susceptible to errors and inefficiencies, such that real-time control cannot be achieved[ ]”

[Kwan W. Chin, *Closed-form and generalized solutions for animating the human articulated structure*, 1996]

"[...]un sistema robótico debería tener dos o más brazos, en lugar de uno; tres o más dedos, en lugar de una simple pinza; y siete o más grados de libertad para cada brazo, en lugar de seis o menos. Formulación y control adecuados de este alto grado de libertad es requerido si se quiere que el sistema satisfaga una meta dada."<sup>2</sup>

[Yoshihiko Nakamura, *Advanced Robotics, redundancy and optimization*, Addison-Wesley Publishing, 1991]

Podemos notar de párrafos como los mostrados anteriormente la necesidad de tener sistemas robóticos con más de seis grados de libertad. También se destaca la necesidad y dificultad de crear una formulación adecuada para el control de manipuladores con alto grado de *GDL's*, es decir la de crear un modelo matemático del cual su control aplicado sea eficiente y nos permita conocer claramente sus limitaciones.

Siendo pues el brazo humano el equivalente a un manipulador con 7 *GDL's* de tipo *antropomórfico*, surge la necesidad de realizar el estudio biomecánico de este, de tal manera que logremos crear un modelo matemático de su movimiento y limitaciones.

## ESTABLECIMIENTO DE HIPÓTESIS

La articulación esférica está compuesta por tres articulaciones rotacionales cuyos ejes coinciden en un punto. Entonces el movimiento de la articulación esférica depende del movimiento de las tres articulaciones

---

<sup>2</sup> "[...] *a robot system should have two or more arms, rather than one, three or more fingers, rather than a simple jaw-type gripper, and seven or more DOF for each arm, rather than six or less. Consistent management of this high degree of freedom is required if the system is to satisfy a given goal.*"

[Kwan W. Chin, *Closed-form and generalized solutions for animating the human articulated structure*, 1996]

"[...]un sistema robótico debería tener dos o más brazos, en lugar de uno; tres o más dedos, en lugar de una simple pinza; y siete o más grados de libertad para cada brazo, en lugar de seis o menos. Formulación y control adecuados de este alto grado de libertad es requerido si se quiere que el sistema satisfaga una meta dada."<sup>2</sup>

[Yoshihiko Nakamura, *Advanced Robotics, redundancy and optimization*, Addison-Wesley Publishing, 1991]

Podemos notar de párrafos como los mostrados anteriormente la necesidad de tener sistemas robóticos con más de seis grados de libertad. También se destaca la necesidad y dificultad de crear una formulación adecuada para el control de manipuladores con alto grado de GDL's, es decir la de crear un modelo matemático del cual su control aplicado sea eficiente y nos permita conocer claramente sus limitaciones.

Siendo pues el brazo humano el equivalente a un manipulador con 7 GDL's de tipo *antropomórfico*, surge la necesidad de realizar el estudio biomecánico de este, de tal manera que logremos crear un modelo matemático de su movimiento y limitaciones.

## ESTABLECIMIENTO DE HIPÓTESIS

La articulación esférica está compuesta por tres articulaciones rotacionales cuyos ejes coinciden en un punto. Entonces el movimiento de la articulación esférica depende del movimiento de las tres articulaciones

---

<sup>2</sup> "[...] a robot system should have two or more arms, rather than one, three or more fingers, rather than a simple jaw-type gripper; and seven or more DOF for each arm, rather than six or less. Consistent management of this high degree of freedom is required if the system is to satisfy a given goal."

rotacionales equivalentes. Pero estas a su vez tienen una manera clara y precisa de evolución para que la esférica produzca, por ejemplo, una rotación del plano de inclinación del brazo humano, ¿Cuál es esta evolución? Matemáticamente, como es  $\theta_{ESF} = \theta_1 \hat{u} + \theta_2 \hat{v} + \theta_3 \hat{w}$  ?

Como ya se mencionó anteriormente, el brazo humano tiene dos articulaciones esféricas, ¿Qué relación existe entre estas?  $\theta_{esf_H} = \theta_1 \hat{u} + \theta_2 \hat{v} + \theta_3 \hat{w} = \theta_{esf_M} = \theta_5 \hat{u} + \theta_6 \hat{v} + \theta_7 \hat{w}$  ?

¿Qué pasa entonces con la articulación rotacional correspondiente al codo  $\theta_4$ ? ¿Tiene acaso influencia la orientación del parámetro de inclinación del brazo sobre ésta?

¿Qué limitaciones tiene el modelo matemático a obtener, especialmente si existe dependencia entre variables articulares?

La suposición es entonces que se puede obtener un modelo matemático que describa adecuadamente el movimiento del brazo, atendiendo apropiadamente las preguntas anteriores.

## METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología empleada, competente a este trabajo puede reunirse de la siguiente forma:

- a) Definir y analizar el problema
- b) Resumir todas las hipótesis fundamentales
- c) Buscar soluciones posibles
- d) Justificar las mejores ideas de solución posibles
- e) Simulación
- f) Obtener resultados y evaluarlos
- g) Concluir

rotacionales equivalentes. Pero estas a su vez tienen una manera clara y precisa de evolución para que la esférica produzca, por ejemplo, una rotación del plano de inclinación del brazo humano, ¿Cuál es esta evolución? Matemáticamente, como es  $\theta_{ESF} = \theta_1\hat{u} + \theta_2\hat{v} + \theta_3\hat{w}$ ?

Como ya se mencionó anteriormente, el brazo humano tiene dos articulaciones esféricas, ¿Qué relación existe entre estas?  $\theta_{esf_H} = \theta_1\hat{u} + \theta_2\hat{v} + \theta_3\hat{w} = \theta_{esf_M} = \theta_5\hat{u} + \theta_6\hat{v} + \theta_7\hat{w}$ ?

¿Qué pasa entonces con la articulación rotacional correspondiente al codo  $\theta_4$ ? ¿Tiene acaso influencia la orientación del parámetro de inclinación del brazo sobre ésta?

¿Qué limitaciones tiene el modelo matemático a obtener, especialmente si existe dependencia entre variables articulares?

La suposición es entonces que se puede obtener un modelo matemático que describa adecuadamente el movimiento del brazo, atendiendo apropiadamente las preguntas anteriores.

## METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología empleada, competente a este trabajo puede reunirse de la siguiente forma:

- a) Definir y analizar el problema
- b) Resumir todas las hipótesis fundamentales
- c) Buscar soluciones posibles
- d) Justificar las mejores ideas de solución posibles
- e) Simulación
- f) Obtener resultados y evaluarlos
- g) Concluir



*“La naturaleza es dominada  
por el brazo humano...  
y, al convertirse en técnica,  
la naturaleza entera sirve al hombre”*

**Leopoldo Zea**  
*filósofo*

---

# CAPÍTULO UNO

## *INTRODUCCIÓN*

---

EL BRAZO humano representa uno de los sistemas mecánicos mejor capacitados para desarrollar una innumerable cantidad de tareas y trabajos. Este ha permitido efectuar cambios físicos en la naturaleza como ningún otro. Con la ayuda de su inteligencia y por medio de su brazo, el hombre ha transformado el mundo en que vivimos de una manera jamás antes alcanzada simplemente por una capacidad que diferencia al hombre de los demás seres vivos: la posibilidad de crear herramientas para propósitos específicos. El brazo humano está constituido por una cadena cinemática sumamente flexible y por un miembro prensil extremadamente adaptable que lo sostienen como la herramienta más poderosa que hemos conocido.

El brazo humano es un sistema cinemático que cuenta con siete grados de libertad:<sup>3</sup> tres en el hombro, uno en el codo y finalmente otros tres en la muñeca. Este es un sistema con redundancia cinemática ya que puede cambiar su estructura o configuración interna sin cambiar ni la posición ni la orientación de su órgano terminal u objeto que sostiene. Esto quiere decir que mientras mantenemos fijos el hombro y la muñeca, podemos cambiar aún la posición del codo. Esta redundancia puede ser utilizada para evitar obstáculos presentes y límites en las articulaciones y, en un robot, además permitiría evitar singularidades como también minimizar el

consumo de energía. Es importante mencionar que, en este trabajo, al hablar del análisis del brazo humano estamos omitiendo el análisis de los movimientos de los dedos. Solo se estudiarían los movimientos efectuados desde el hombro hasta la muñeca, junto con la orientación de ésta. El analizar el movimiento de los dedos implicaría el estudio de aproximadamente 45 GDL<sup>4</sup>, lo cual estaría completamente fuera del alcance de este trabajo y además sería sumamente complejo, aún para estudios muy avanzados en la materia de robótica.

Tal vez una de las definiciones más aceptadas en cuanto a que es la biomecánica sería "...la ciencia que analiza las fuerzas y movimientos actuantes sobre y dentro de una estructura biológica y los efectos producidos por dichas fuerzas y movimientos".<sup>5</sup> Por tanto, esta definición implica el entendimiento de tres áreas *i)* estructuras biológicas, *ii)* análisis mecánico, y *iii)* comprensión del movimiento. Es mediante esta disciplina, la biomecánica, que podemos lograr nuestro estudio sobre el funcionamiento del movimiento del brazo humano correlacionado al análisis de los sistemas o estructuras robóticas. Esta es la razón por la cual primeramente se estudiará la fisiología del brazo humano, sus tipos de articulaciones y músculos que animan dichas articulaciones para después hacer un estudio matemático en base a métodos de análisis para estructuras robóticas. Estaremos entonces realizando una investigación sobre una estructura de tipo *antropomórfica*, significando esto un manipulador de siete grados de libertad con tres articulaciones intersectadas en el hombro, tres intersectadas en la muñeca y una articulación en el codo. Este nombre es dado así, por la semejanza con el brazo humano.

La mayor parte de los libros sobre robótica investigan estructuras con seis GDL o menos. Y en el mejor de los casos son manipuladores *cuasi-antropomórficos*. Esto es debido a la complejidad matemática que implica el

---

<sup>3</sup> El número de grados de libertad es el número de variables independientes de posición que deben de ser especificadas para localizar todas las partes de un robot

<sup>4</sup> John J. Craig, *Introduction to robotics, mechanics and control*, Addison-Wesley Publishing, 1986

<sup>5</sup> "... the science that examines forces and movements acting upon and within a biological structure and the effects produced by such forces and movements". Hay, 1973, p. xi

simple hecho de aumentar de 6 a 7 GDL. El número y extensión de las ecuaciones involucradas se incrementa de manera considerable y, la existencia de múltiples soluciones y puntos singulares desaniman el estudio de este tipo de estructuras. Pero, como ya se mencionó anteriormente, siendo el brazo humano una herramienta tan perfectamente creada vale bien la pena hacer un esfuerzo por tratar de plasmar su comportamiento y funcionamiento en modelos que nos permitan hacer uso sus capacidades para crear nuestras propias "copias" de estos brazos humanos.

Este trabajo se divide básicamente en tres partes constitutivas; una investigación documental sobre la fisiología del brazo humano, una modelación matemática y finalmente la simulación por computadora del modelo obtenido.

El capítulo 2 expondrá las estructuras fisiológicas que conforman el brazo humano. Sus huesos, articulaciones y músculos serán estudiados en este capítulo con detalle, a fin de que el lector pueda comprender su función dentro del complejo sistema de movimiento del brazo humano.

El capítulo 3 se adentrará en el análisis matemático de una estructura antropomórfica, utilizando las herramientas proporcionadas para el estudio de sistemas robóticos. Los dos principales métodos que son utilizados extensamente en robótica para controlar estructuras articuladas son la cinemática y la dinámica. La *cinemática* es la ciencia que estudia el movimiento sin importarle las fuerzas que lo afectan. Su única preocupación es la posición, velocidad y aceleración relativa al tiempo. La cinemática aplicada en la robótica está separada *en cinemática directa e inversa* (modelación en el espacio operacional y modelación en el espacio articular). En la directa, los ángulos para cada articulación son conocidos y la posición y orientación del órgano terminal son calculados. En la inversa, la posición y orientación del órgano terminal son conocidos y los ángulos de cada articulación son determinados. Por otro lado, la *dinámica* trata con fuerzas, momentos de inercia y masas de cada segmento. También puede ser separada en *dinámica directa e inversa*. La definición es similar a la de la

cinemática pero las variables tratan con fuerzas, masas y momentos de inercia para cada articulación. Para este trabajo no se utilizará la dinámica, quedando sólo el estudio de cinemática del movimiento. Dentro de este mismo capítulo, ya habiendo obtenido el modelo matemático, se expondrán cuales son las limitaciones o restricciones a aplicar para nuestro modelo a manera de poder evitar posiciones o valores que expulsen datos erróneos y tratar de visualizar que posiciones son éstas.

El capítulo 4 se adentra en la aplicación del modelo matemático utilizando una simulación por computadora en algún lenguaje de programación que nos permita verificar lo obtenido. Aquí se tratará de crear un sistema interactivo con el cual podamos modificar valores constantemente y observar los resultados tanto numéricamente como gráficamente. En este capítulo se tomará especial importancia a las limitaciones matemáticas obtenidas del capítulo anterior.

Y finalmente, en la última sección, se obtendrán los resultados y conclusiones analizando tanto individual como globalmente el movimiento de las siete variables articulares obtenidas para el brazo.

---

# CAPÍTULO DOS

## *INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL*

---

### 2.1 FISIOLÓGÍA DEL BRAZO HUMANO

LA HABILIDAD de realizar tareas en el ser humano está basada en la estructura del cuerpo (el esqueleto), los músculos que hacen mover este esqueleto, el sistema nervioso, y las características fisiológicas que controlan el metabolismo. Es necesario comprender el funcionamiento de este complejo sistema móvil humano, mediante una división de estas partes conjuntivas. Este capítulo trata de adentrarse en las partes que forman el brazo humano, para poder comprender el funcionamiento de cada una de ellas y su aportación en el movimiento global de este. Esto es, analizar los huesos, articulaciones y músculos constitutivos del brazo, dejando a un lado el estudio detallado del sistema nervioso y los procesos químicos involucrados en la creación de energía destinada al movimiento.

Primeramente tenemos la estructura del cuerpo, los huesos. El tipo de huesos que a nosotros nos interesan son los llamados huesos esqueléticos, que conciernen principalmente la ejecución de actividades físicas. Este tipo de huesos están conectados en juntas, llamadas articulaciones. Las articulaciones de nuestro interés son las *sinoviales*, las cuales incluyen articulaciones de tipo bisagra, de pivote, etc. Los huesos del cuerpo se mantienen juntos mediante ligamentos en sus articulaciones. Los músculos esqueléticos (los que dan el movimiento a los huesos), se forman por paquetes de fibras que tienen la propiedad de contraerse; las fibras

---

musculares convierten la energía química en trabajo mecánico. El final de las fibras musculares forman tendones que se conectan a los músculos esqueléticos en tal manera que cuando los músculos son “activados”, estos aplican palancas mecánicas al igual que los cables en una grúa. Las fibras individuales pueden contraerse aproximadamente a la mitad de su longitud al recibir la señal nerviosa. Cada fibra se contrae con cierta fuerza, y la fuerza aplicada por el músculo entero es la suma de la fuerza de estas fibras individuales. Un músculo produce su máxima fuerza al inicio de la contracción (en su longitud más relajada), y mientras el músculo se hace más corto, la fuerza se reduce.

En los siguientes subcapítulos se dará una descripción más amplia de los elementos constitutivos del brazo humano.

## 2.1.1 Tipos de huesos constitutivos

### Generalidades

LOS HUESOS son rígidos y elásticos resistiendo fuerzas tanto de tensión como de compresión con la misma eficacia, y soportando cargas estáticas y dinámicas de hasta muchas veces el peso del cuerpo. La naturaleza obviamente mecánica del esqueleto ha determinado que se hagan muchos intentos para interpretar la arquitectura externa e interna del hueso desde un punto de vista mecánico. Los huesos tienen una admirable construcción que combina resistencia, elasticidad y poco peso, propiedades que se pueden modificar bajo diversas condiciones mecánicas.

En el esqueleto del cuerpo humano existen 206 huesos; pero este número puede variar ligeramente, ya que hay varios huesos pequeños que unas personas poseen y otras no.<sup>6</sup>

Observando la forma general del esqueleto humano (fig. 2-1), podemos notar que está formado por el llamado *esqueleto axial*, donde se encuentran el cráneo, en la parte superior, la columna

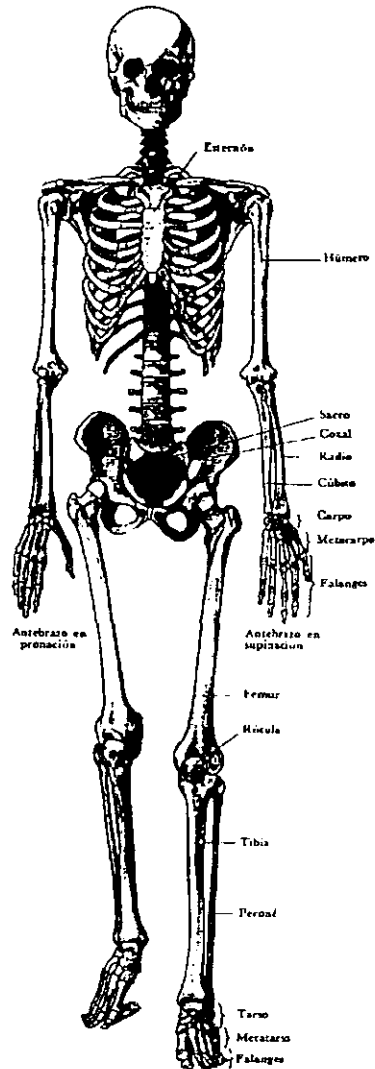


Fig. 2-1. Esqueleto humano

<sup>6</sup> Chihro Yokochi, *Atlas fotográfico de anatomía del cuerpo humano*, México, McGraw-Hill, 1991, p. 6



vertebral y las costillas, en la parte central, y la pelvis, en la parte inferior. De este esqueleto axial, salen unas prolongaciones llamadas *esqueleto apendicular*, que comprenden las extremidades superiores y las extremidades inferiores (brazos y piernas).

Según su forma podemos clasificar los huesos en: largos, cortos, planos e irregulares (fig. 2-2). A continuación se da una breve descripción de cada una de estas clasificaciones.

**Huesos largos.** Son aquellos en que la longitud predomina sobre la anchura y el grosor. Entre ellos se encuentran la clavícula, húmero, cúbito y radio en el miembro superior, y fémur, tibia y peroné en el inferior. También se incluyen los metacarpianos, los metatarsianos y las falanges, que son pequeños huesos que tenemos en manos y pies. Cada hueso largo presenta un cuerpo y dos extremidades, que por lo general son articulares. El cuerpo recibe el nombre técnico de *diáfisis*, y las extremidades, que suelen ser más voluminosas, el de *epífisis*.

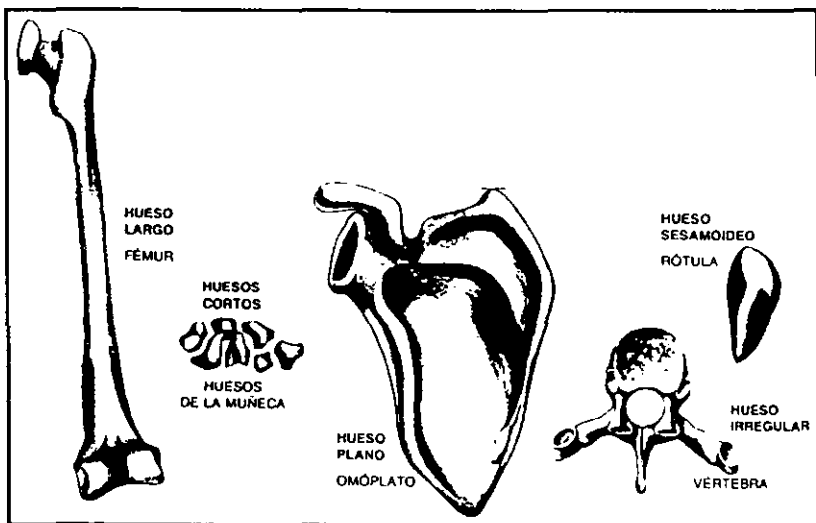


Fig. 2-2. Algunos ejemplos de los tipos de huesos del cuerpo humano

**Huesos cortos.** Son aquellos en que las tres dimensiones son aproximadamente iguales. Suele haber varios juntos para que su resistencia sea mayor, como es el caso de los huesos del carpo y el tarso, situados en la muñeca y el tobillo. Dentro de esta clasificación de huesos cortos también tenemos a los *huesos sesamoideos*, los cuales se encuentran sobre todo en manos y pies. Varían en tamaño y número. Algunos sirven claramente para modificar el ángulo de tracción de un tendón, pero otros son tan pequeños que tienen escasa importancia funcional. Un ejemplo claro de hueso sesamoideo es la rótula, situada en la articulación de la rodilla.

**Huesos planos.** Son delgados, y mucho más largos y anchos que gruesos. Su misión es proteger partes blandas del cuerpo, como el corazón, los pulmones y el cerebro. Son huesos planos las costillas, los omóplatos y varios huesos del cráneo.

**Huesos irregulares.** Son aquellos a los que no es fácil incluir en los otros tipos. Incluyen muchos de los huesos del cráneo, las vértebras y el sacro.

### Huesos que forman el brazo humano

En términos anatómicos, el miembro superior está constituido por cuatro segmentos: cintura escapular, brazo, antebrazo y mano. En este

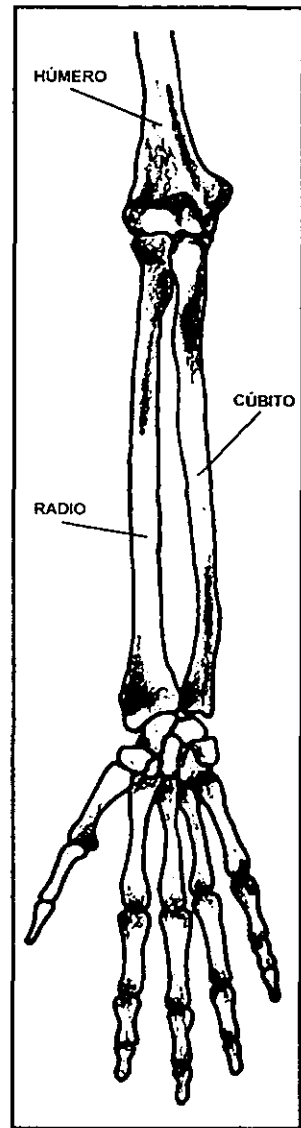


Fig. 2-3. Antebrazo y mano derechos en supinación

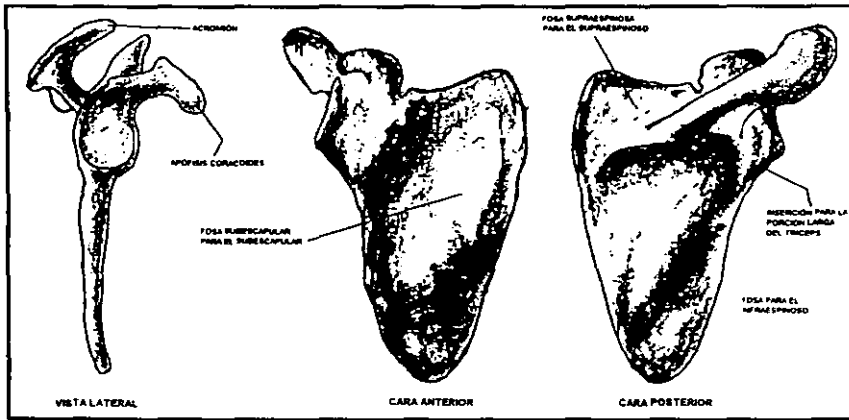


Fig. 2-4. Escápula u omóplato derecho

trabajo se considerará el "brazo humano" como el segmento formado únicamente por lo mencionado anteriormente como brazo y antebrazo (húmero, cúbito y radio), pero claro que estos en conjunto con sus articulaciones respectivas en el hombro, codo y muñeca y además de un elemento terminal, la mano. A continuación tenemos una descripción y figuras de estos huesos para una posición anatómica estándar (ver sección 2.1.4), la cual será utilizada en la generalidad de este trabajo a menos que sea especificada otra.

**Húmero** (fig. 2-5 y 2-6). Se articula con la escápula u omóplato (fig.2-4) en el hombro y con el cúbito y el radio en el codo. Es un hueso largo y asimétrico. Su cuerpo es cilindroideo en la mitad superior y prismático triangular en la parte inferior. Termina por arriba en una cabeza lisa, que se articula con el omóplato. En la parte inferior presenta una superficie articular compuesta de dos partes: una externa semiesférica, el cóndilo, que se articula con el radio, y una interna, la tróclea, en forma de polea, que se articula con el cúbito. En la figura (2-5) podemos ver la forma en que unen el húmero, radio, cúbito y los huesos que forman la mano (carpo, metacarpo y falanges). Aquí se muestra el brazo en supinación, siendo esta posición la misma que para la anatómica estándar.

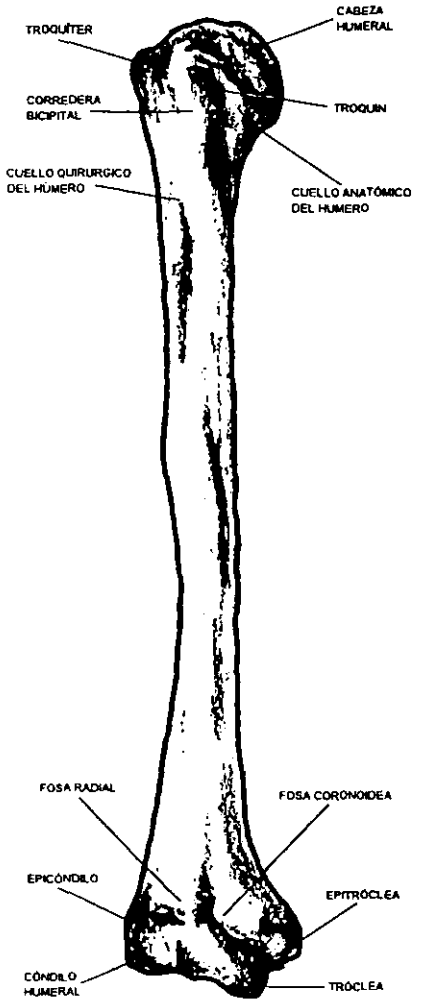


Fig. 2-5. Húmero, brazo derecho, vista anterior

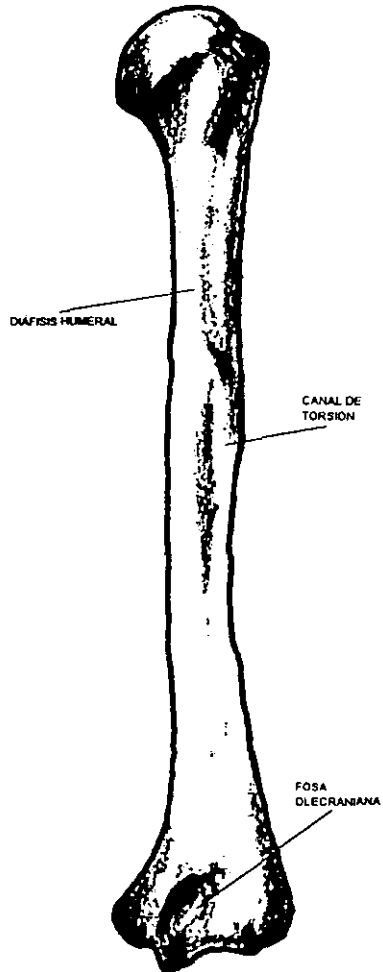


Fig. 2-6. Húmero, brazo derecho, vista posterior

**Radio (fig. 2-7 y 2-8).** Este hueso es el más corto y externo del antebrazo. Se articula con el húmero en la parte proximal, con el carpo en la distal, y con el cúbito hacia adentro.

**Cúbito (fig. 2-7 y 2-8).** Este hueso es el más largo e interno del antebrazo. Se articula con el húmero por arriba, el disco articular por abajo, y el radio por afuera.

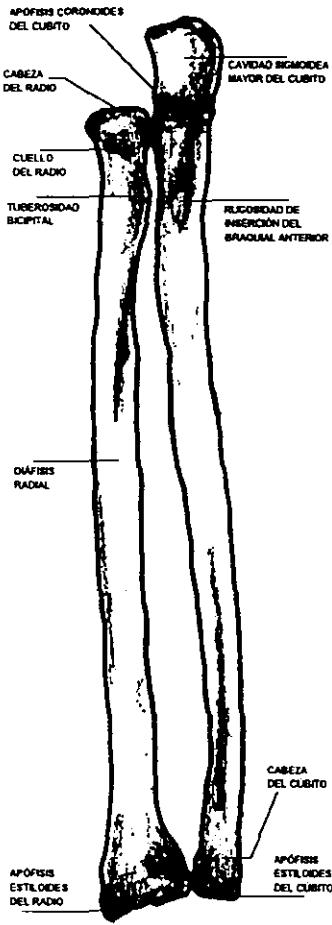


Fig. 2-7. Radio y cúbito, antebrazo derecho, vista anterior

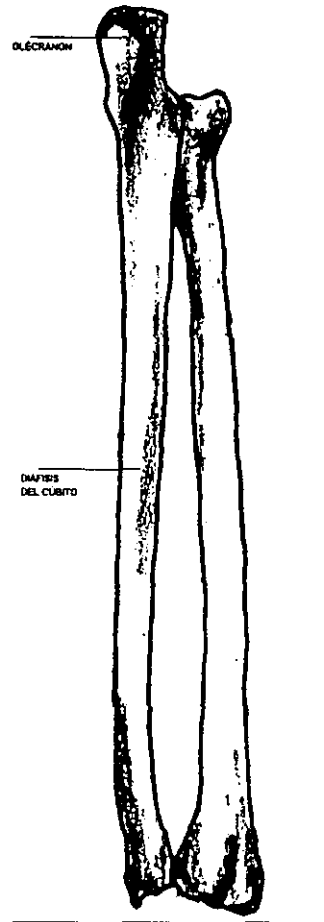


Fig. 2-8. Cúbito y radio, antebrazo derecho, vista posterior

## 2.1.2 Tipos de Articulaciones Constitutivas

### Generalidades

EN LENGUAJE cotidiano, el término *articulación* significa lugar donde se unen dos cosas. En anatomía, se ha descrito una articulación como “la conexión que subsiste en el esqueleto entre cualesquiera de sus componentes rígidos, ya sean huesos o cartílagos”.<sup>7</sup> Toda unión entre dos o más huesos, aunque éstos no se muevan, se conoce como *articulación*.<sup>8</sup>

Las articulaciones varían mucho en su estructura y disposición, y con frecuencia están especializadas para funciones específicas. Sin embargo presentan ciertas características estructurales y funcionales comunes. Por tanto se pueden clasificar, en tres tipos principales: *fibrosa*, *cartilagosas* y *sinoviales*, siendo esta última la de nuestro interés.

En las articulaciones *fibrosas* (llamadas *sinartrosis*, por su movimiento) los huesos se unen por medio de tejido fibroso. Con pocas excepciones, muy poco o ningún movimiento se efectúa en ellas y carecen de cavidad articular entre los huesos que se unen. Para este tipo de articulación, tenemos como ejemplo, las suturas del cráneo.

En las articulaciones *cartilagosas* (también denominadas *anfiartrosis*, por su movimiento), los huesos se unen por medio de cartílago ya sea hialino o bien fibroso y presentan ligero movimiento. Tenemos como ejemplo las articulaciones entre los cuerpos vertebrales.

Pero en el cuerpo humano, la mayoría de las articulaciones son *sinoviales* (denominadas *diartrosis*, por su movimiento) y tienen libre movimiento. Las articulaciones sinoviales presentan una cavidad articular que está llena con líquido sinovial y se encuentran envueltas por una cápsula articular.

---

<sup>7</sup> Ronan O’Rahilly, *Anatomía*, México, Nueva Editorial Interamericana, 1986, p. 19

<sup>8</sup> Chihiro Yokochi, *Atlas fotográfico de anatomía del cuerpo humano*, México, McGraw-Hill, 1991, p. 8

Los mecanismos de lubricación de las articulaciones sinoviales son tales que los efectos de la fricción sobre el cartílago articular son mínimos. El coeficiente de fricción durante el movimiento es menor que el de deslizamiento de hielo sobre hielo. Esto es posible por la naturaleza del líquido lubricante (sinovial), la naturaleza de las superficies cartilaginosas de soporte que absorben líquido sinovial, y por diversos mecanismos que permiten la existencia de un líquido renovable en lugar de un mecanismo no renovable para reducir la fricción.<sup>9</sup>

Abajo se muestra una tabla donde se encuentran las clasificaciones de las *articulaciones sinoviales* según la literatura médica. Dentro de estas articulaciones sinoviales tenemos distintos grados de movilidad que nos indica que tan libres son estas. Así podemos tener entonces una clasificación según los **grados de libertad (GDL)**

### ***Clasificación de las articulaciones sinoviales (diartrosis)***

<i>Tipo</i>	<i>Movimiento</i>	<i>GDL</i>
Troclear (bisagra)	Monoaxial	1
Trocoide (pivote)	Monoaxial	1
Artrodia (deslizante)	Monoaxial	1
Condílea (elíptica)	Biaxial	2
Silla de Montar	Biaxial	1
Enartrosis (esférica)	Triaxial	3

<sup>9</sup> *Los ruidos en las articulaciones, como los que se producen cuando se tira bruscamente de los dedos, se deben por lo general a la súbita formación de un vacío parcial en la cavidad articular al separarse las superficies articulares por tracción. El vacío parcial es ocupado por vapor de agua y gases sanguíneos a baja presión. Es probable que otros tipos de ruidos (con más frecuencia chasquidos) se deban al deslizamiento súbito de un tendón o ligamento sobre una prominencia ósea o cartilaginosa* – J. B. Roston y R. W. Haines, *J. Anatomy.*, London, 1947, pp. 81-165

## Movimientos activos

En las articulaciones sinoviales se realizan tres tipos de movimientos activos (movimientos voluntarios producidos por la acción de los músculos). Por lo general se habla de movimiento *de* una parte y de movimiento *en* una articulación; así tenemos la flexión *del* antebrazo y la flexión *en* el codo. Estos movimientos activos son:

- movimientos de deslizamiento
- movimientos angulares alrededor de un eje horizontal o laterolateral (flexión y extensión) o alrededor de un eje anteroposterior (abducción y aducción)
- movimientos de rotación alrededor de un eje longitudinal (rotación hacia adentro y hacia afuera)

Si en una articulación en particular se realizan uno, varios o todos los tipos de movimientos, esto dependerá de la forma de esa articulación y de la disposición de sus ligamentos.

En las articulaciones, la amplitud de los movimientos son limitados por los músculos, los ligamentos, la cápsula, la forma de los huesos y la oposición de las partes blandas, como lo es el contacto de la cara anterior del antebrazo y el brazo durante la flexión completa en el codo. Cabe mencionar que existe una gran variación en la amplitud de los movimientos para diferentes personas. Esto puede ser debido a ejercicios que se desarrollen desde la infancia.

## Movimientos pasivos y accesorios

Los movimientos pasivos son producidos por una fuerza externa, como la gravedad o la acción de otra persona. Por ejemplo, si nosotros manipulamos la muñeca de otra persona, podemos lograr flexión, extensión,



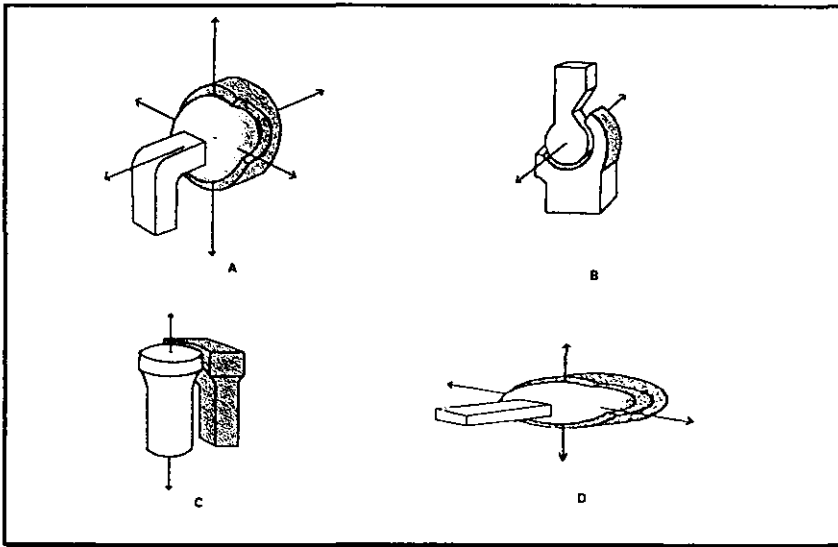
aducción y abducción de esta, obteniendo movimientos que normalmente puede efectuar, sin embargo mediante la aplicación de una fuerza ajena; pero también podemos producir un ligero grado de deslizamiento y de rotación en la muñeca, movimientos que la otra persona no puede realizar activamente por sí misma. Estos son los llamados movimientos accesorios y se definen como movimientos para los que no es adecuada la disposición de los músculos, pero que se pueden producir por manipulación.

### **Articulaciones del brazo humano (fig. 2-9)**

Para la **articulación del hombro**, tenemos una de tipo esférica o enartrosis muy móvil entre la cavidad glenoidea de la escápula y la cabeza del húmero. El encaje mecánico laxo de la articulación del hombro, permite una gran libertad de movimiento. La resistencia y estabilidad están dadas por los músculos y tendones adyacentes. Los movimientos en esta articulación son: 1) abducción y aducción, 2) flexión y extensión, y 3) circunducción y rotación. La articulación del hombro tiene mayor libertad y amplitud de movimiento que cualquier otra articulación, en gran parte debido a los movimientos escapulares que por lo general acompañan a los movimientos en la articulación del hombro. Esta articulación cuenta pues, con **3 GDL** (grados de libertad)

La **articulación del codo** es la del húmero y los huesos del antebrazo (cúbito y radio). Se puede subdividir en articulaciones humeroradial y humerocubital. El codo es una articulación troclear y el movimiento voluntario se limita a la flexión y la extensión, contando entonces con **1 GDL**.

Después de la articulación del codo, tenemos las **articulaciones radiocubitales** que, como su nombre lo indican son las formadas entre el radio y el cúbito, y nos proporcionan los movimientos de pronación y supinación (descritos más adelante). Aquí tenemos dos articulaciones semejantes entre sí, la articulación radiocubital proximal y la articulación radiocubital distal, siendo las dos de tipo trocoide. Ambas funcionan de manera conjunta, aportando a el antebrazo **1 GDL**. Al efectuarse el movimiento de pronación y supinación entre el cúbito y radio, es este último el hueso móvil aunque, en realidad, el cúbito tiene movimiento debido a la forma de articulación con la tróclea del húmero. El término **supinación** se emplea para la posición del antebrazo en que la palma de la mano mira hacia adelante, como en la posición anatómica. El término **pronación** se utiliza cuando la palma mira hacia atrás. Se puede considerar a la pronación



**Fig. 2-9.** Articulaciones del brazo humano

- A. Esférica (Enartrosis) - Hombro
- B. Bisagra (Troclear) - Codo
- C. Pivote (Trocoide) - Antebrazo
- D. Elíptica (Condílea) - Muñeca

como rotación hacia adentro alrededor de un eje longitudinal, y a la supinación como la rotación hacia afuera, pero en realidad ambos movimientos son bastante más complejos. En realidad en la rotación del antebrazo, a menos que se fije el codo, se acompaña de rotación del húmero.<sup>10</sup>

Posteriormente tenemos la articulación radiocarpiana o bien llamada propiamente **articulación de la muñeca**. Es una articulación condílea formada por el radio, y la hilera proximal de los huesos del carpo. El cúbito no forma parte de esta articulación ya que este es aislado de los huesos del carpo por un ligamento llamado triangular. Tenemos aquí **2 GDL**.

---

<sup>10</sup> *Se dice que la supinación es más fuerte que la pronación del antebrazo, y es por eso que el sentido de giro de los tornillos se disponen así para poder aprovechar esto, de manera que se introduzcan por el movimiento de supinación del antebrazo derecho.* H.D Darcus, J Anatomy, London, 85 55, 1951

## 2.1.3 Tipos De Músculos Constitutivos

### Generalidades

**E**L SISTEMA muscular del cuerpo humano está compuesto por más de 700 músculos esqueléticos y tejidos conectivos asociados; constituye alrededor del 40% del peso corporal.<sup>11</sup>

Al igual que otras partes del cuerpo como los huesos y los nervios, los músculos están formados por tejido construido por células. Podríamos hacer una comparación simple si tomamos a los tejidos como las paredes de una casa y a las células como los ladrillos necesarios para formar estas paredes. El tejido muscular se diferencia de otros tejidos, como del tejido óseo, en que tiene una forma muy alargada, que se denomina *fibra*. Cada fibra muscular está envuelta en una especie de membrana muy delgada (fig. 2-10). El conjunto formado por la fibra y la membrana se llama *paquete muscular primario*. A la unión de varios paquetes musculares envueltos en otra membrana delgada forman un *paquete muscular secundario*. Un músculo voluminoso puede estar formado por un tercer o cuarto paquete muscular. Rodeando los paquetes musculares,

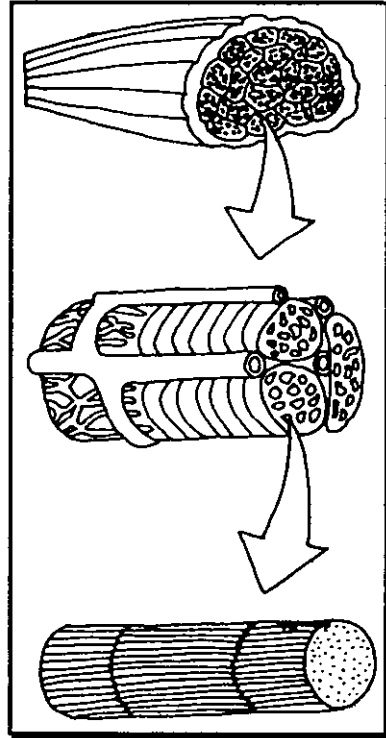


Fig. 2-10. Paquetes musculares

rodeando los paquetes musculares,

<sup>11</sup> Chihiro Yokochi, *Atlas fotográfico de anatomía del cuerpo humano*, México, McGraw-Hill, 1991, p.10

existe una membrana de tejido conjuntivo, es decir resistente, llamada *perimisio*.

En los músculos de fibra estriada (que, como se verá más adelante forman el aparato locomotor) el perimisio termina en un tejido de color blanco, llamado *tendón*. Los tendones unen el músculo al hueso.

Los nombres de los músculos generalmente se asignan dependiendo de ciertos criterios los cuales suelen indicar alguna característica morfológica o funcional. Por ejemplo, el nombre de un músculo puede estar relacionado con la dirección de los fascículos (e.g. recto, transverso y oblicuo); localización, como el hueso subyacente (e.g. frontal) o huesos entre los cuales se extiende (e.g. intercostal); tamaño relativo, (e.g. mayor, menor, corto o largo); forma (e.g. triangular, cuadrado o redondo); número de inserciones (e.g. bíceps, tríceps o cuádriceps); tipo de movimiento que producen (e.g. flexor, extensor, pronador o supinador), y sitio de origen e inserción (e.g. esternocleidomastoideo).

Los músculos del cuerpo se clasifican, según el tipo de fibra, en *músculos de fibra estriada* y *músculos de fibra lisa*. Músculos estriados son los que se insertan en los huesos, el globo ocular, la lengua y el miocardio. Para distinguirlo de otros músculos estriados, el miocardio es denominado músculo cardíaco y a los otros se les da el nombre de músculos esqueléticos los cuales forman el aparato locomotor. También los músculos esqueléticos son llamados *voluntarios* ya que se contraen cuando reciben ordenes por parte nuestra de manera intencional, aunque muchas de sus acciones son automáticas, y las de algunas de ellos son reflejas. Entonces se denominan músculos *involuntarios* a los músculos liso y cardíaco, los cuales realizan funciones "automáticas" como lo es el bombeo de sangre por parte del corazón.

## **Músculos que intervienen en el movimiento del brazo humano**

Los músculos que influyen en el movimiento del brazo humano están localizados no solo en el brazo mismo, sino que existen algunos que actúan desde la región inferior del tronco, algunos en el hombro y otros en el brazo y antebrazo. Son 22 músculos los principales contribuyentes directos, siendo estos (los cuales se describirán más adelante de forma individual):

- |                      |  |
|----------------------|--|
| 1 - Pectoral mayor   | 12 - Braquial anterior                   |
| 2 - Serrato mayor    | 13 - Tríceps braquial                    |
| 3 - Dorsal ancho     | 14 - Supinador largo                     |
| 4 - Deltoides        | 15 - Pronador redondo                    |
| 5 - Supraespinoso    | 16 - Supinador corto                     |
| 6 - Infraespinoso    | 17 - Pronador cuadrado                   |
| 7 - Redondo menor    | 18 - Cubital anterior                    |
| 8 - Redondo mayor    | 19 - Cubital posterior                   |
| 9 - Subescapular     | 20 - Palmar mayor                        |
| 10 - Bíceps braquial | 21 - Palmar menor                        |
| 11 - Coracobraquial  | 22 - Primero y segundo radiales externos |

## **Músculos de la región pectoral**

**Pectoral mayor.** Es un músculo ancho, multilaminar y en forma de abanico, que se origina en la clavícula, en el esternón y en la aponeurosis del músculo oblicuo mayor. Su inserción se realiza por medio de un tendón en el labio externo del *canal o corredera bicipital* del húmero, localizado cercano a la parte superior de este hueso.

**Acciones.** El pectoral mayor es un músculo muy interesante; sus fascículos claviculares (la parte del músculo que se origina en la clavícula) actúan sinérgicamente con la porción anterior del deltoides para elevar el brazo hacia adelante o regular su descenso. Los manojos esternocostales (originados en el esternón y en la aponeurosis del músculo oblicuo mayor)

actúan sinérgicamente con el dorsal ancho y el redondo mayor y tiran del brazo hacia abajo contra resistencia, o impulsan al tronco hacia arriba cuando los brazos están fijos, como al trepar. El músculo origina rotación interna del húmero y su acción de aducción puede hacer que el brazo se coloque por delante del tórax. Este músculo anima la articulación del hombro.

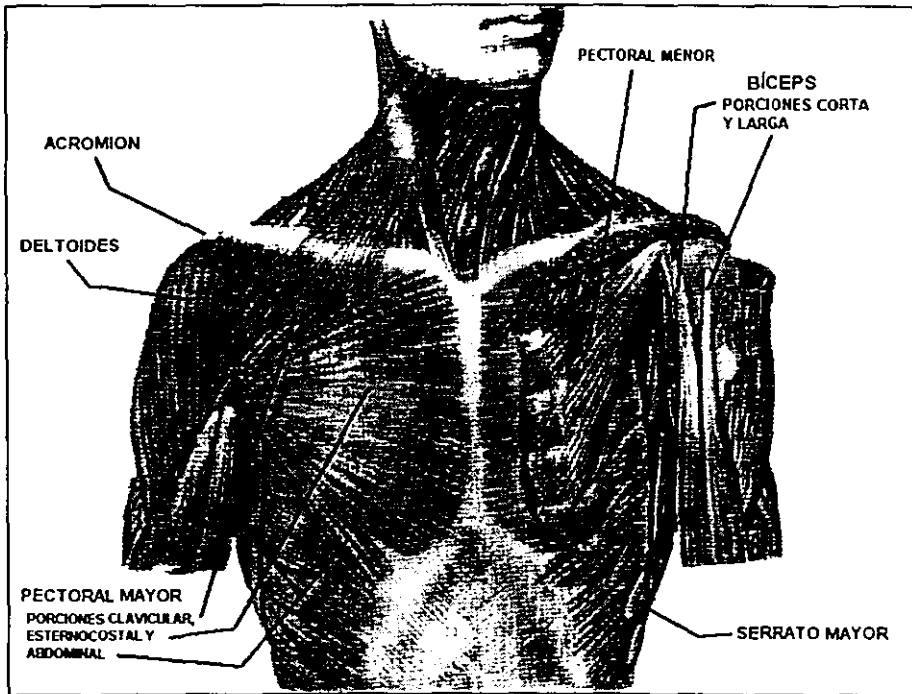


Fig. 2-11. Músculos de la región pectoral

**Serrato mayor.** Es un músculo ancho que se origina por una serie de digitaciones en la cara externa de las ocho primeras costillas, y se inserta en la superficie costal del borde interno de la escápula.

*Acciones.* El serrato mayor actúa en el movimiento de desplazar hacia adelante el brazo con fuerza, como al dar un puñetazo, y es importante para elevar verticalmente el brazo. Este músculo anima la articulación del

hombro, aunque lo hace mediante el movimiento de la escápula (u omóplato) y no directamente del húmero.

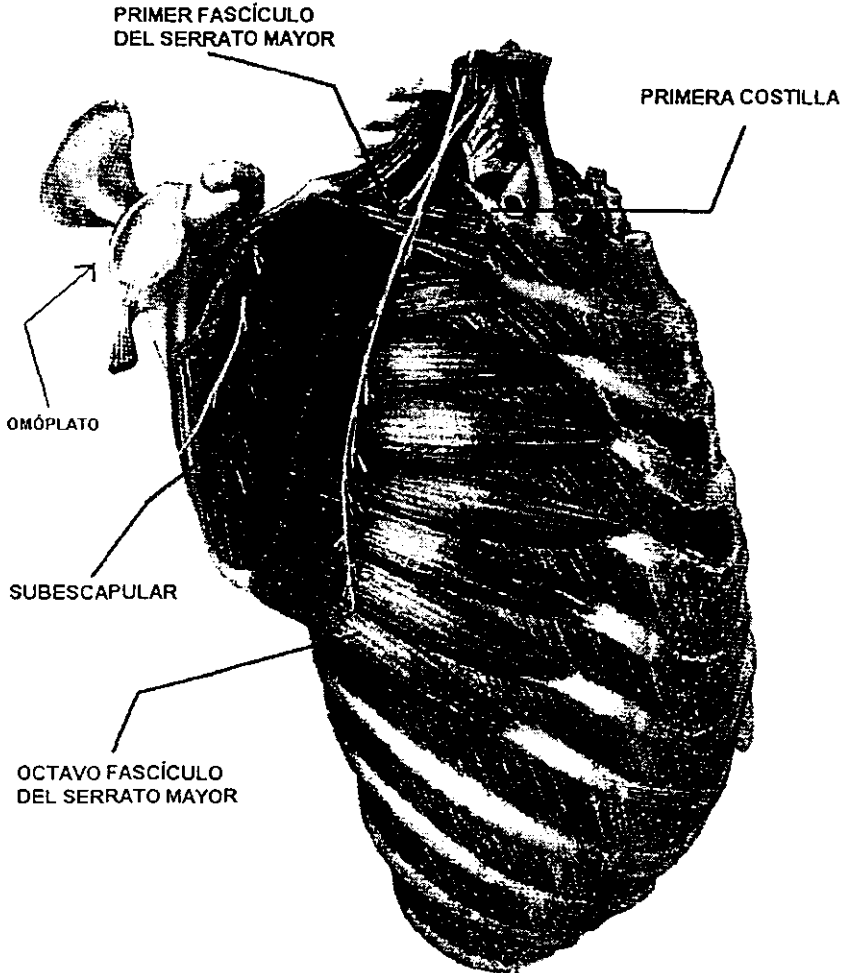


Fig. 2-12. Vista lateral de la jaula torácica



## **Músculos superficiales del dorso**

**Dorsal ancho.** Es un músculo ancho y triangular situado superficialmente, excepto en su parte más superior, donde está cubierto por el trapecio. Tiene su origen en la apófisis espinosa de las seis últimas vértebras dorsales y en la cresta iliaca. El músculo termina en un tendón que se inserta en el fondo de la *corredera bicipital* del húmero por detrás del tendón de la porción larga del bíceps.

*Acciones.* Es un potente aductor y extensor del brazo. Desempeña un papel importante en el movimiento descendente del brazo al nadar, y también al remar, trepar, martillar y sostener el peso del cuerpo sobre las manos. Este músculo **anima la articulación del hombro.**

## **Músculos del hombro**

**Deltoides.** Es un músculo grueso, situado superficialmente, al que se debe la redondez característica del hombro. Se origina en la parte superior del omóplato (en la espina del omóplato), continuando en la parte superior de la clavícula. Se inserta en el húmero en la impresión deltoidea localizado aproximadamente ligeramente arriba de la mitad del húmero, en la parte externa.

*Acciones.* Su porción media o acromial es un potente abductor del brazo. La porción posterior del deltoides extiende el brazo y lo gira hacia afuera. Cuando las porciones posterior y media actúan juntas, abducen el brazo en un plano coronal. La porción anterior flexiona el brazo y lo gira hacia adentro. Cuando las tres porciones del deltoides se contraen simultáneamente producen la abducción o elevación del brazo en el plano de la escápula. El deltoides tiene una importante función como estabilizador en muchos movimientos, en particular los horizontales, como trazar una línea a través de un pizarrón o deslizar un libro a lo largo de un estante, que a veces reciben los nombres de abducción o aducción horizontales. El

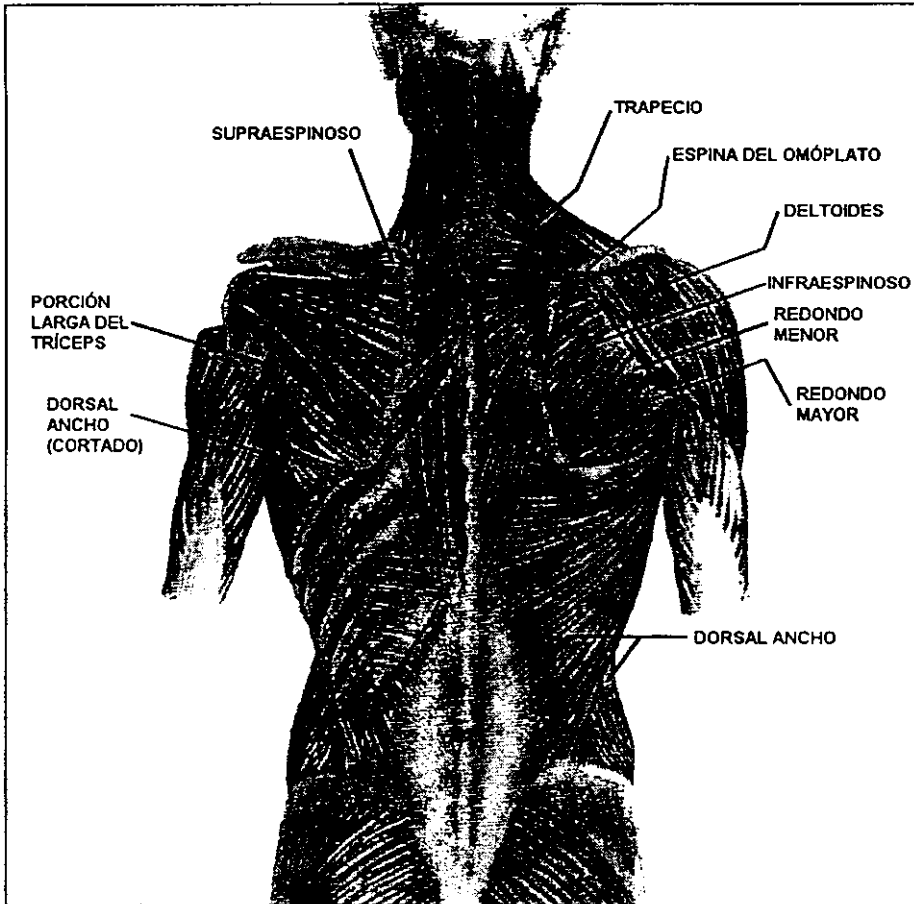


Fig. 2-13. Músculos superficiales del dorso

deltoides puede controlar la aducción directamente o modificar la acción de los aductores. Este músculo anima la articulación del hombro.

**Supraespinoso, Infraespinoso y Redondo Menor.** Todos estos músculos tienen su origen en la cara posterior del omóplato. El **supraespinoso** se origina en la *fosa supraespinosa*; el **infraespinoso** en la mayor parte de la

*fosa infraespinosa*; el **redondo menor** en una rugosidad a lo largo del borde externo del omóplato. Es supraespinoso pasa entre el acromión y la articulación escapulo-humeral y se inserta en el troquíter del húmero. El infraespinoso y el redondo menor, que a veces están estos fusionados entre sí, convergen detrás de la articulación del hombro en tendones que se insertan en el troquíter del húmero. Los tendones de estos tres músculos se confunden con la cápsula de la articulación escapulo-humeral. Estos músculos están cubiertos en su mayor parte por el trapecio y el deltoides.

*Acciones.* El supraespinoso origina abducción y, el infraespinoso y redondo menor rotación externa del húmero. Estos tres **músculos animan la articulación del hombro.**

**Redondo mayor.** Se origina en la cara posterior del omóplato, y se inserta en el labio interno de la corredera o canal bicipital del húmero, por abajo de la inserción del músculo subescapular. Con frecuencia su tendón está fusionado con el del dorsal ancho.

*Acciones.* El redondo mayor actúa junto con el dorsal ancho en la aducción del brazo. Es probable que la acción del redondo mayor sea en gran parte estática; esto es, que con la escápula fija ayude a conservar el brazo en aducción contra resistencia. Este músculo **anima la articulación del hombro.**

**Subescapular.** Forma parte de la pared posterior de la axila. Se origina en casi toda la *fosa subescapular*, y su tendón de inserción pasa por delante de la cápsula de la articulación del hombro, a la cual se adhiere, y se inserta en el troquíter del húmero.

*Acciones.* Es un potente rotador del húmero hacia adentro y ayuda a sostener la cabeza del húmero en la cavidad glenoidea. Este **músculo anima la articulación del hombro.**

## **Músculos del brazo**

Los músculos anteriores del brazo son el *bíceps braquial*, el *coracobraquial* y el *braquial anterior*. El músculo posterior es el *tríceps braquial*.

**Bíceps braquial.** Este es un músculo voluminoso y notable situado por delante del braquial anterior, se origina cerca de la articulación escapulo-humeral por virtud de dos tendones que, escapando por debajo del deltoides y el pectoral mayor, se ensanchan para formar las porciones larga y corta del músculo. El tendón de la porción corta del bíceps, el cual es el más grueso de los dos tendones, se origina en la punta de la *apófisis coracoides* localizada en una saliente del omóplato. El segundo tendón, el de la porción larga del bíceps, se origina en la cápsula de la articulación escapulo-humeral para luego descender por la corredera bicipital del húmero. La inserción de este importante músculo se encuentra en la *tuberosidad bicipital* del radio. También existe una banda fibrosa (llamada *expansión aponeurótica del bíceps*) que se desprende del tendón de inserción hasta llegar a la aponeurosis de los músculos flexores del antebrazo.

**Acciones.** El bíceps es muy interesante por su acción doble: como el supinador más fuerte del antebrazo, y como flexor de la articulación del codo; ambas acciones son independientes. Este músculo **anima la articulación del codo.**

**Coracobraquial.** Este músculo se inserta en la parte superior por medio de fibras musculares en la punta de la *apófisis coracoides* del omóplato y en el tendón de la porción corta del bíceps; en la parte inferior se fija aproximadamente en la porción media de la *diáfisis humeral*, cercano al origen del braquial anterior.

**Acciones.** El coracobraquial participa en la flexión, la aducción y la rotación interna del brazo. Este músculo **anima la articulación del hombro.**

**Braquial anterior.** Se origina en la mitad inferior de la *diáfisis humeral* (anterior). Desciende por delante de la articulación del codo, y termina en un tendón resistente que se inserta en la base de la *apófisis coronoideas* del cúbito.

*Acciones.* El braquial anterior actúa contra la gravedad o la resistencia como flexor puro y poderoso del antebrazo, con la ayuda del bíceps braquial, supinador largo y pronador redondo. Este músculo **anima la articulación del codo.**

**Tríceps braquial.** Es el único músculo de la cara posterior del brazo que antagoniza al braquial anterior y al bíceps; consta de tres vientres: *vasto externo*, *vasto interno* y *porción larga*. La porción larga y el vasto interno ocupan un plano superficial, mientras que el vasto interno está en un plano más profundo. El *vasto externo* se origina en la cara posterior del húmero, en la parte superior de su *diáfisis*. El *vasto interno* se origina por debajo del vasto externo, pero ubicado más hacia el lado interno del húmero. La *porción larga* se origina en el cara *infraglenoidea* del omóplato. Los tres vientres de este músculo tienen una inserción común, en el *olécranon* del cúbito

*Acciones.* El tríceps es el extensor poderoso y único del codo, exceptuando la acción débil del ancóneo. Este músculo **anima la articulación del codo.**

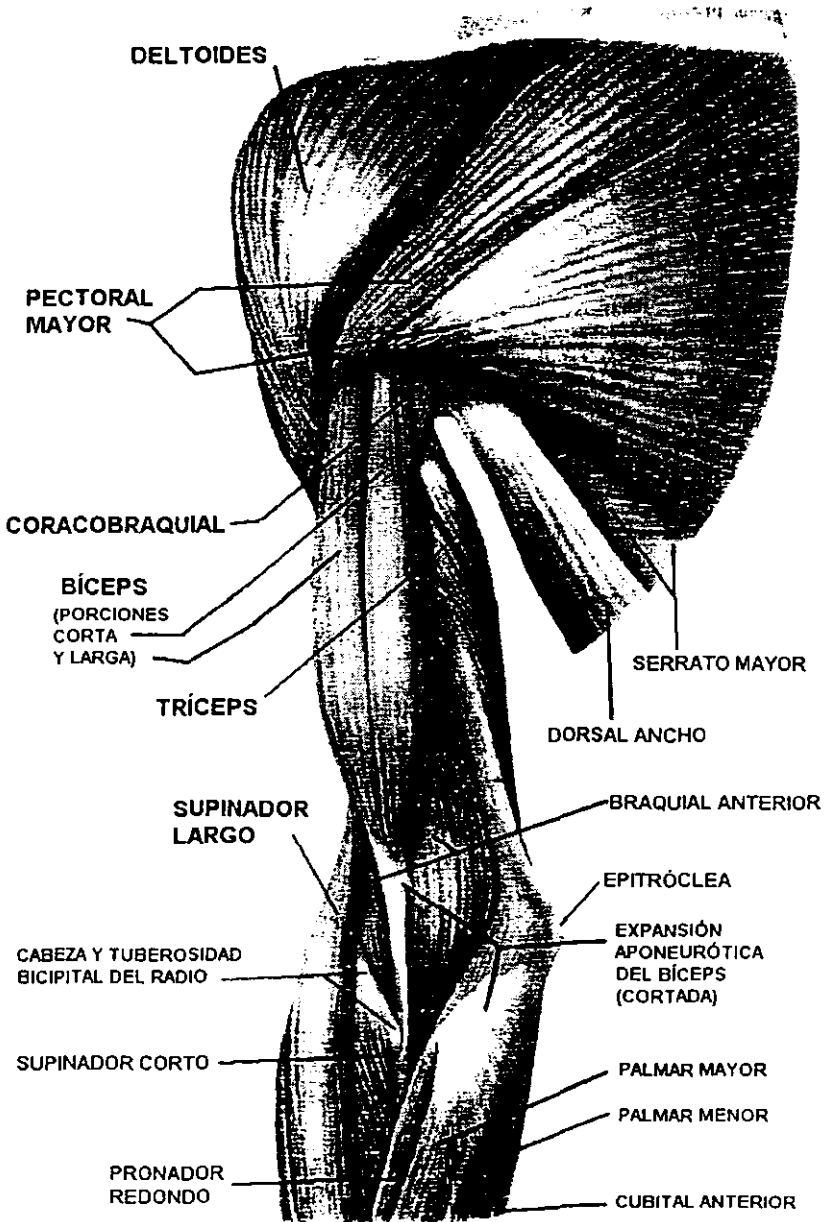


Fig. 2-14. Plano superficial de los músculos anteriores del hombro y brazo

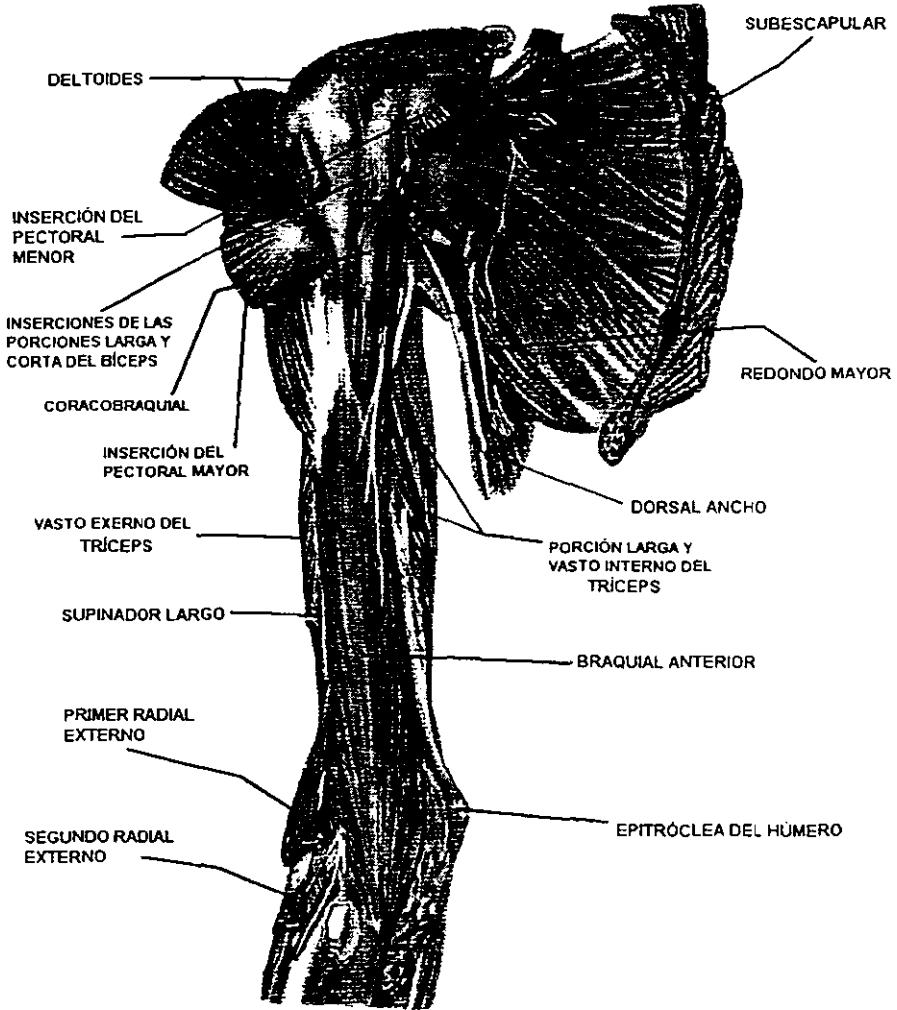


Fig. 2-15. Músculos profundos de la cara anterior del hombro y brazo

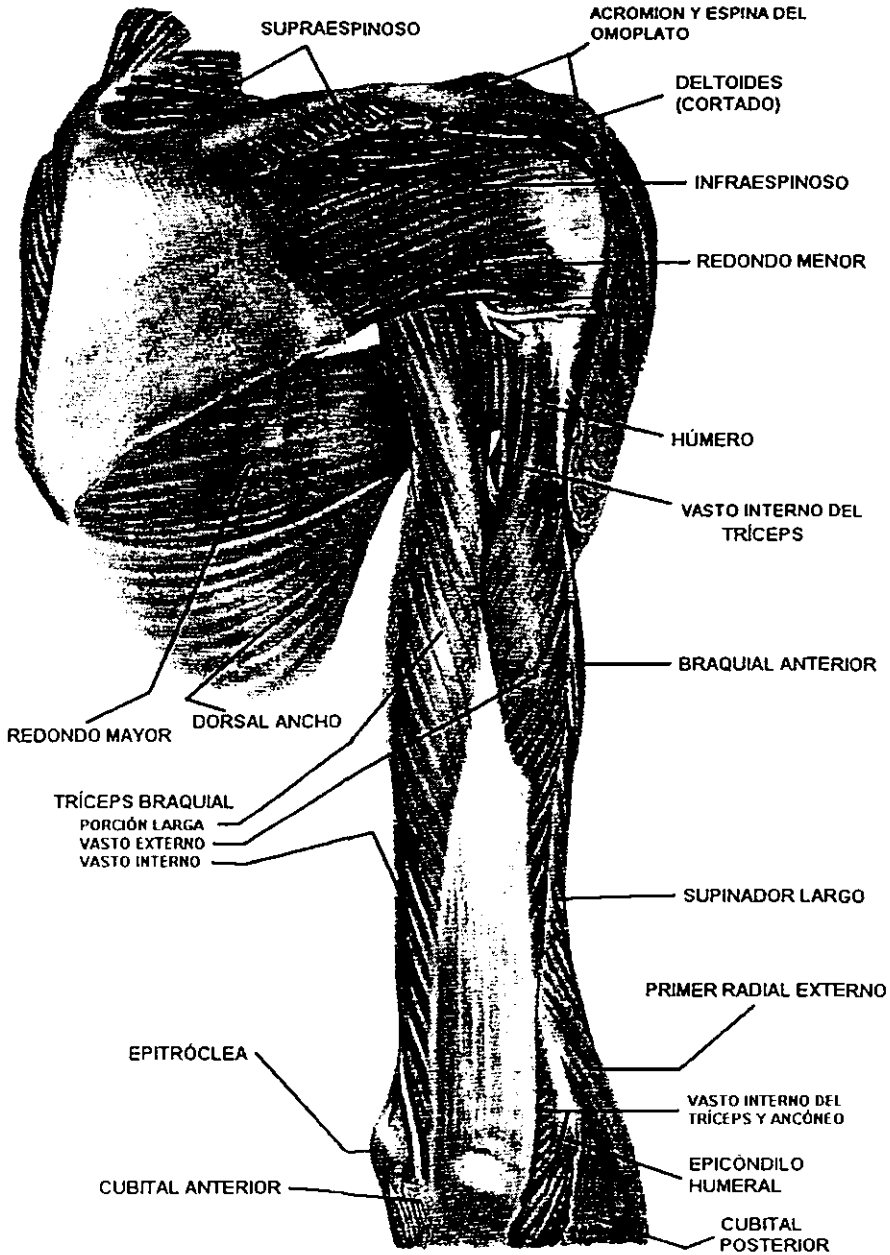


Fig. 2-16. Hombro y brazo vistos por la cara posterior



## **Músculos del antebrazo**

Los músculos del antebrazo se dividen en un grupo anterior y uno posterior. Los del grupo anterior son los flexores de la muñeca y de los dedos, así como los pronadores. Los del posterior son los extensores de la muñeca y los dedos, así como los supinadores.

**Supinador largo.** Forma la curva del borde externo del antebrazo y el límite externo del triángulo del pliegue del codo. Tiene su origen en los dos tercios superiores del borde externo del húmero. Hacia la porción media del antebrazo, el músculo termina en un tendón que se inserta en la cara externa del radio, inmediatamente por arriba de la *apófisis estiloides*.

*Acciones.* El supinador largo es flexor del codo y, a pesar de su nombre, nunca es supinador ni pronador del antebrazo, aunque resalta netamente cuando el antebrazo en semipronación se flexiona contra resistencia. Este músculo **anima la articulación del codo**.

**Pronador redondo.** Se origina en la epitroclea del húmero. El músculo se dirige hacia abajo y afuera, y se inserta en una zona rugosa de la parte media de la cara externa del radio.

*Acciones.* El pronador redondo, que tiene ligera acción flexora, produce pronación del antebrazo con el auxilio del pronador cuadrado y, cuando se opone resistencia a la mano con ayuda del palmar mayor y el palmar menor. Este músculo **anima las articulaciones radio-cubitales**, y en menor grado la del codo.

**Supinador corto.** Este músculo está oculto en gran parte por los músculos superficiales. Se origina principalmente en el *epicóndilo* del húmero. Se inserta en una zona ancha en la cara externa del radio, en su mitad superior.

*Acciones.* El supinador corto ayuda al bíceps en la supinación. Este músculo **anima las articulaciones radio-cubitales**.

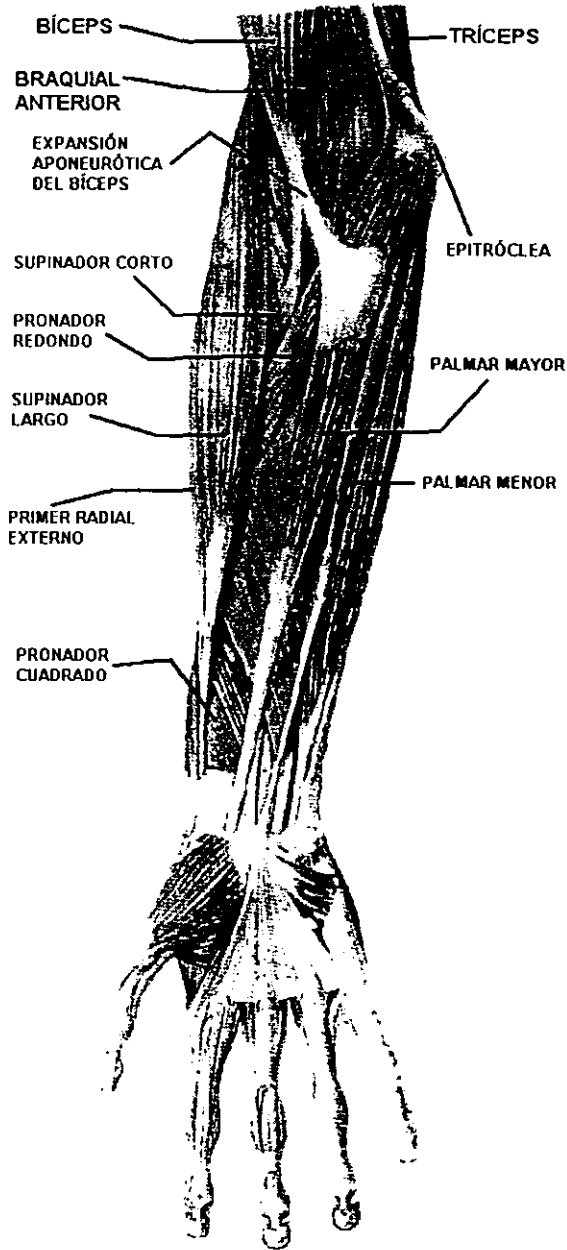


Fig. 2-17. Cara anterior del antebrazo. Plano muscular superficial

**Pronador cuadrado.** Es un músculo pequeño y aplanado, situado en la parte inferior (o distal) del antebrazo y que se extiende entre los dos huesos del mismo (radio y cúbito). Se origina en la cara y borde anteriores del cúbito y se dirige hacia el radio, insertándose en la cara y borde anteriores de este.

*Acciones.* Ayuda al pronador redondo en la pronación del antebrazo. Este músculo **anima las articulaciones radio-cubitales.**

**Cubital anterior.** Se origina en la *epitróclea* por el tendón común de los músculos epitrocleares, pero tiene una segunda porción de origen en el *olécranon* del cúbito y el borde posterior de la *diáfisis* del cúbito. Este músculo es más notable visto por la cara posterior del antebrazo. Se inserta en el hueso pisiforme (localizado en el carpo en el lado del meñique).

*Acciones.* El cubital anterior flexiona la muñeca junto con el palmar mayor, y actúa asociándose con el cubital posterior en la aducción de la mano. El cubital anterior y el cubital posterior tienen acción sinérgica, en lo que se refiere a impedir la abducción de la mano cuando se extiende el pulgar. Este músculo **anima la articulación de la muñeca.**

**Cubital posterior.** El cubital posterior, al igual que el anterior, está formado por dos porciones: *epicondílea* y *olecraniana*. La porción epicondílea se origina en el *epicondilo* del húmero por medio del tendón común de los músculos epicondíleos. La porción olecraniana nace del borde posterior del cúbito, en el *epicondilo*. Este músculo se inserta en la cara interna de la base del quinto metacarpiano. **Anima la articulación de la muñeca.**

*Acciones.* El cubital posterior extiende la muñeca, actuando simultáneamente con los radiales externos primero y segundo; junto con el cubital anterior, pone en aducción la mano. Al actuar junto con otros extensores, mantiene la extensión necesaria en la muñeca para que los flexores digitales puedan ejercer la prensión adecuada.

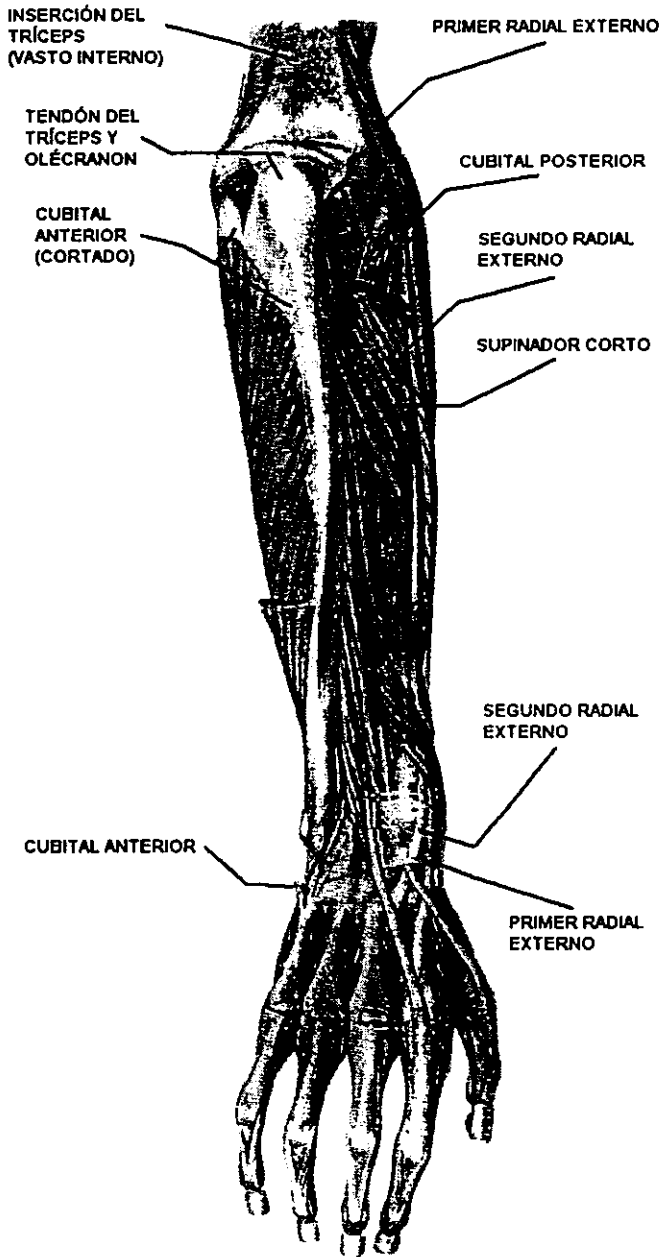


Fig. 2-18. Cara posterior del antebrazo. Plano muscular profundo

**Palmar mayor.** Se origina por medio de un tendón en la *epitróclea*, y se inserta en la cara anterior de la base del segundo y tercer metacarpianos.

*Acciones.* El palmar mayor actúa sinérgicamente con el cubital anterior para flexionar la muñeca, y pone en abducción la mano al funcionar junto con los radiales externos. Este músculo anima la articulación de la muñeca.

**Palmar menor.** Se origina por medio de un tendón en la *epitróclea*, y se inserta en la cara anterior del ligamento anular anterior del carpo y en el vértice de la aponeurosis palmar. Este músculo falta con frecuencia, hecho que se relaciona con el sexo y la raza.

*Acciones.* El palmar menor flexiona la muñeca y pone tensa la aponeurosis palmar en los movimientos de la mano, en particular los del pulgar. Puede ayudar al pronador redondo. Este músculo anima la articulación de la muñeca.

**Primero y Segundo radiales externos.** El primer radial externo tiene su origen en el borde externo del húmero, arriba de el *epicóndilo*. El segundo radial externo tiene su origen en el *epicóndilo*, estando cubierto por el primer radial externo. Cada tendón de estos músculos pasa por un canal especial labrado en el dorso inferior del radio. El primer radial se inserta en la parte dorsal de el segundo metacarpiano. El segundo radial se inserta en la parte dorsal de el tercer metacarpiano. Ambas inserciones están localizadas en el extremo cercano a los huesos del carpo.

*Acciones.* Estos músculos extienden la muñeca al actuar sinérgicamente con el cubital posterior; ponen en abducción la mano contrayéndose simultáneamente con el cubital anterior; su actividad principal es la extensión sinérgica de la muñeca para permitir la presión de los dedos. Ambos músculos animan la articulación de la muñeca.

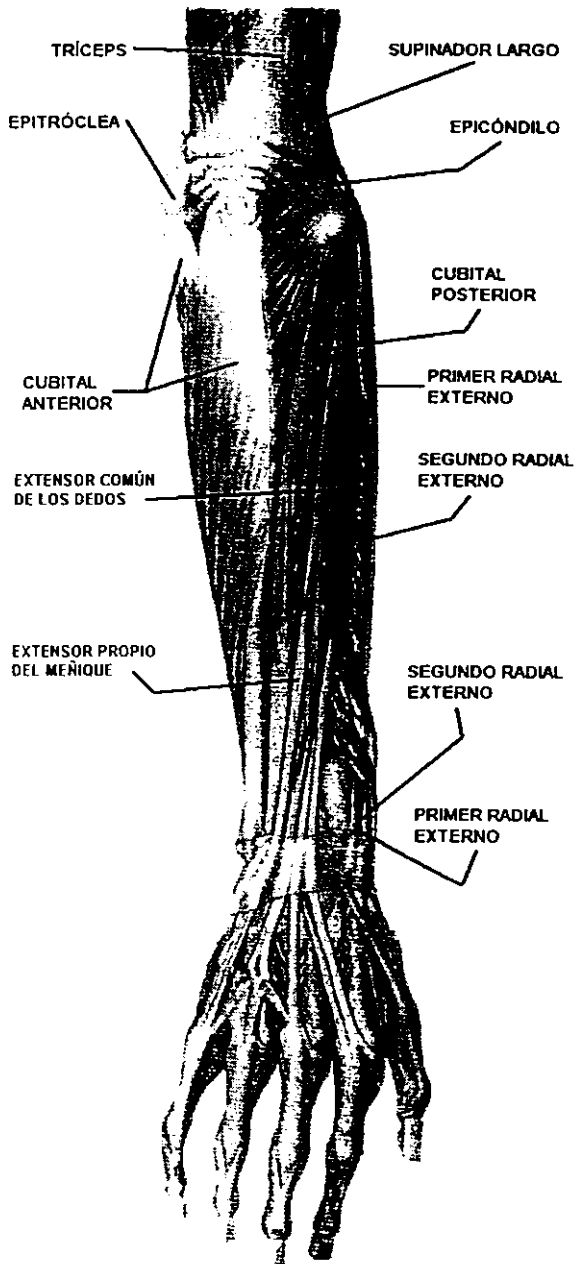


Fig. 2-19. Cara posterior del antebrazo. Plano muscular superficial

## 2.1.4 Glosario y terminología

CON EL FIN de describir la localización de las partes del cuerpo, así como las relaciones que hay entre las mismas, se observa al cuerpo humano en una **posición anatómica estándar**. En esta posición, el cuerpo se halla en postura erguida (de pie), los pies juntos, planos sobre el piso y los miembros superiores colgando rectos a los lados, con las palmas hacia adelante y los pulgares dirigidos hacia afuera.

**Superior/craneal/cefálico.** significan hacia la cabeza o la parte más alta del cuerpo; por ejemplo, el hombro es superior con respecto a la cadera, pero la cadera es superior con respecto a la rodilla.

**Inferior/caudal.** significan hacia la parte más baja del cuerpo; por ejemplo, la cadera es inferior con respecto al hombro, pero la rodilla es inferior con respecto a la cadera.

**Anterior/ventral.** Significan hacia el frente del cuerpo; por ejemplo, las costillas y el esternón son anteriores con respecto al corazón y los pulmones, pero el corazón es anterior con respecto a la columna vertebral.

**Posterior/dorsal.** Significan hacia la superficie de la espalda, lado opuesto a la superficie anterior;

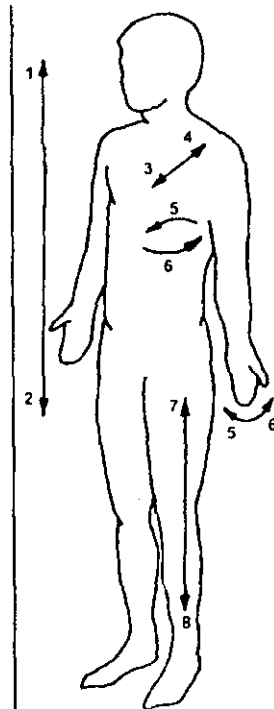


Fig. 2-20. Términos posicionales y direccionales comúnmente utilizados

1. Superior/craneal/cefálico
2. Inferior/caudal
3. Anterior
4. Posterior
5. Medial
6. Lateral
7. Proximal
8. Distal

por ejemplo, la columna vertebral es posterior con respecto al corazón, pero éste es posterior con respecto al esternón.

**Medial.** Significa hacia la línea media del cuerpo; por ejemplo, el esternón es medial.

**Lateral.** Significa hacia uno de los lados del cuerpo, lejos de la línea media; por ejemplo, las costillas son laterales con respecto al esternón. Los brazos se describen como laterales con respecto al tronco del cuerpo, y los dedos meñiques como mediales con respecto a los pulgares.

**Proximal.** Significa hacia el sitio de unión u origen de una parte del cuerpo, cercanía a dicho origen o coyuntura; por ejemplo, el hueso del muslo, el fémur, es proximal cuando se compara con los huesos bajo la rodilla, la tibia y el peroné.

**Distal.** Significa alejado del sitio de unión o de origen de una parte del cuerpo, o su distancia relativa a dicho origen o coyuntura; por ejemplo, la tibia y el peroné son distales cuando se comparan con el fémur.

**Superficial.** Significa cerca de la superficie; por ejemplo, el músculo oblicuo mayor del abdomen (externo) es superficial con respecto al músculo oblicuo menor del abdomen (interno).

**Profundo.** Significa bajo la superficie, a distintos niveles; por ejemplo, el músculo oblicuo menor del abdomen (interno) es profundo con respecto al músculo oblicuo mayor del abdomen (externo).

**Palmar.** Se refiere a la superficie anterior del antebrazo y la mano (palma).

### **Planos del cuerpo humano**

En disección, el cuerpo y las partes del cuerpo se cortan siguiendo planos verticales o longitudinales y planos horizontales o transversos. Un plano vertical que divide al cuerpo en porciones derecha e izquierda es el **plano sagital o mediano**. Cuando este plano pasa a través de la línea media, dividiendo al cuerpo en mitades derecha e izquierda, hablamos del



plano sagital medio (mesosagital); cuando este plano pasa a la derecha o a la izquierda de la línea media, hablamos de un plano parasagital. El **plano frontal** o **coronal** es vertical y se traza en ángulo recto con respecto al plano sagital; divide al cuerpo en porciones anterior y posterior. Se llama **plano transverso** al que se traza en ángulo recto con respecto a los planos frontal y sagital; este plano corta al cuerpo en secciones transversales de izquierda a derecha y de adelante hasta atrás, dividiéndolo en porciones superior e inferior.

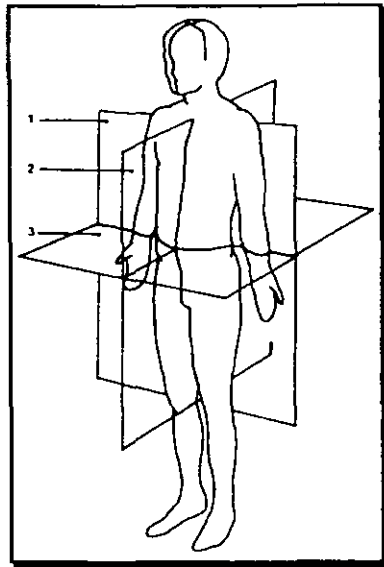


Fig. 2-21. Planos del cuerpo humano

1. Frontal
2. Sagital
3. Transverso

### Terminología del movimiento articulario

**Flexión.** Curvatura o reducción del ángulo que forman partes del cuerpo.

**Extensión.** Enderezamiento o incremento del ángulo que forman partes del cuerpo. Se define, por lo general, como el retorno de la flexión. Cuando la extensión de una articulación excede a lo normal, se denomina hiperextensión.

**Abducción.** Movimiento de un segmento del cuerpo más allá del eje medio de éste o de la parte a que va unido.

**Aducción.** Movimiento de un segmento o combinación de segmentos del cuerpo hacia el eje medio de éste o de la parte que está o están unidos.

**Rotación media.** Giro hacia el eje medio del cuerpo.

**Rotación lateral.** Giro más allá del eje medio del cuerpo.

**Pronación.** Giro del antebrazo de manera que la palma de la mano se oriente hacia abajo.

**Supinación.** Giro del antebrazo de manera que la palma de la mano se oriente hacia arriba.

## 2.2 RANGO DE DESPLAZAMIENTO DE LAS ARTICULACIONES

EL ESTUDIO, medición y evaluación de la magnitud de movimientos articulatorios es una ciencia relativamente compleja y alambicada. Las técnicas de medición no son perfectas y quedan muchas por inventar. La investigación que concierne a aspectos encerrados en la propia dinámica, sobre todo en función de la interacción de dos o más articulaciones o músculos, se halla todavía en sus primeros pasos. Los datos son escasos y la información relativa a estudios con gran número de población es

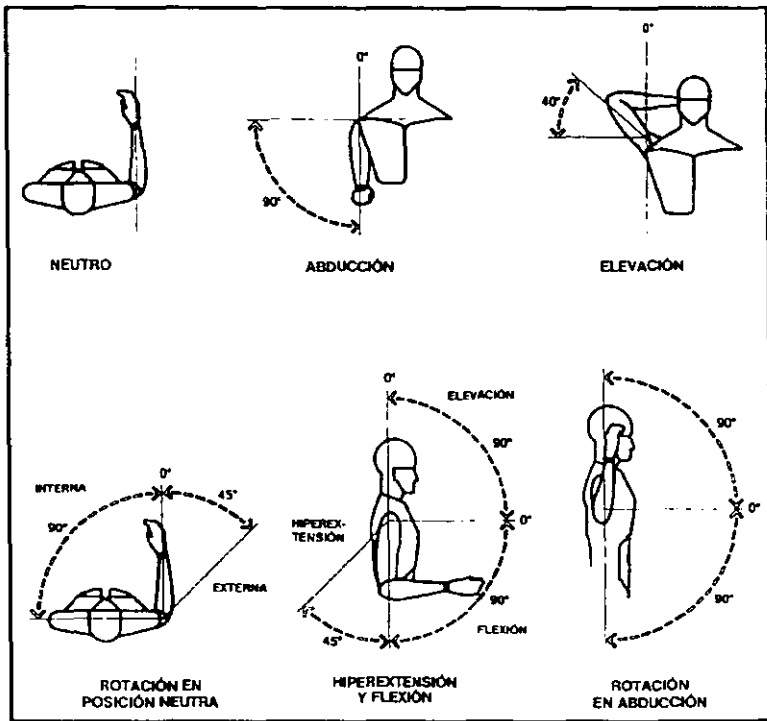


Fig. 2-22. Movimiento articulatorio. Hombro

inexistente. La mayoría de los datos mostrados se basan en observaciones de la población militar<sup>12</sup> y tan sólo del movimiento de una articulación, independientemente de su influencia sobre otra.

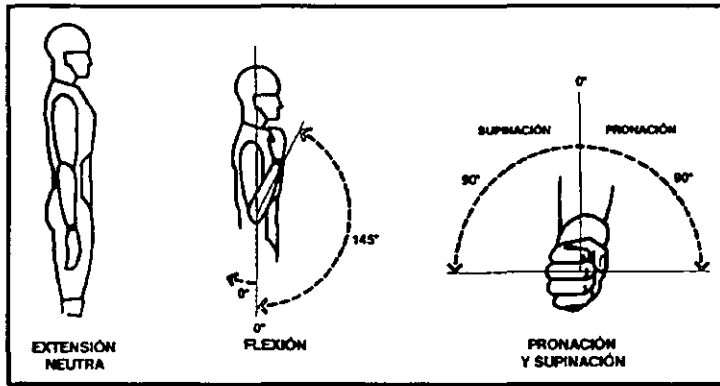


Fig. 2-23. Movimiento articulatorio. Codo-antebrazo

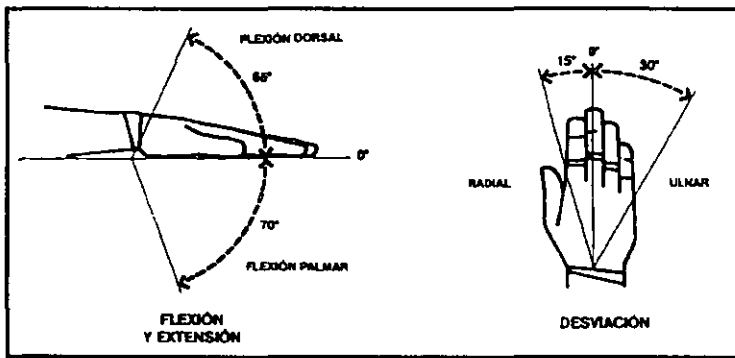


Fig.2-24. Movimiento articulatorio. Muñeca

<sup>12</sup> Fuente original *Human Factors Engineering*, AFSC Design Handbook 1-3, Departamento de la Fuerza Aérea, Cuartel General de los Sistemas de Mando Andrews de las Fuerzas Aéreas AFB, DC 20334, enero 1977, pp. 16 y 17.

# CAPÍTULO TRES

## MODELACIÓN MATEMÁTICA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

LA REALIZACIÓN de movimientos en las articulaciones de un brazo humano o de un robot, da como resultado un movimiento de la mano u órgano terminal para una posición y orientación deseada. La cinemática del brazo es entonces el estudio analítico de la geometría del movimiento de una brazo con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo, sin considerar las fuerzas/momentos que originan dicho movimiento.

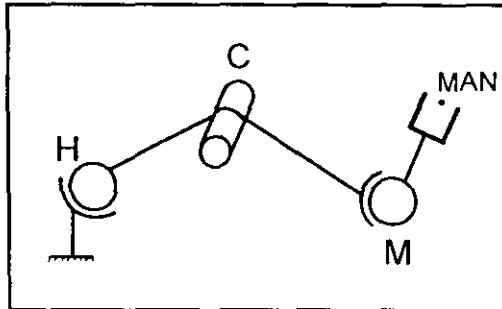


Fig. 3-1. Modelo simplificado del brazo

Surgen entonces dos preguntas básicas para el estudio cinemático del brazo: ¿cuál es la orientación y posición de la mano con respecto a un

sistema de coordenadas de referencia, para configuraciones conocidas de las articulaciones? ¿qué configuraciones deben tener las articulaciones del brazo para una posición y orientación dada de la mano?

La primera pregunta define el problema *cinemático directo* (modelación en el espacio operacional), mientras que la segunda el problema *cinemático inverso* (modelación en el espacio articular).

### 3.2 MODELACIÓN EN EL ESPACIO OPERACIONAL

**P**ARA LA modelación utilizaremos álgebra vectorial y matricial para poder describir y representar la localización de los elementos del brazo. El problema cinemático directo se reduce a encontrar *una matriz de transformación homogénea* que relacione el sistema de coordenadas de referencia con el sistema localizado en el órgano terminal. *Una matriz de transformación homogénea* es una matriz  $4 \times 4$  que transforma un vector de posición desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Una matriz de transformación homogénea se puede considerar que consiste de cuatro *submatrices*:

$$T = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \hline \text{transformación de perspectiva} & \text{escalado} \end{array} \right) \quad (1)$$

Las submatrices inferior izquierda e inferior derecha se han puesto como 0 y como 1 respectivamente, ya que son utilizadas para visión por computadora y para escalados globales de las coordenadas en informática gráfica, y por tanto en este trabajo no se utilizarán. Quedan entonces solamente las submatrices **R** y **P** las cuales nos indicarán la rotación y posición de los elementos del brazo, siendo de suma importancia para nosotros.

Para describir la relación traslacional y rotacional entre elementos adyacentes, *Denavit y Hartenberg* (1975) propusieron un método matricial para establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas (sistema ligado al cuerpo) para cada elemento de una cadena articulada. La representación de Denavit-Hartenberg resulta en una matriz de transformación homogénea de  $4 \times 4$  que representa cada uno de los sistemas de coordenadas de los elementos en la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento previo. Así, mediante transformaciones secuenciales, el efector final expresado en las *coordenadas de la mano* se puede transformar y expresar en las *coordenadas de base* que constituyen el sistema inercial de este sistema dinámico.

La representación de Denavit-Hartenberg de un elemento rígido depende de cuatro parámetros geométricos asociados con cada elemento. Estos cuatro parámetros describen completamente cualquier articulación prismática o de revolución. Estos se definen como sigue:

$a_{i-1}$  Es llamado "longitud real de eslabón" y es la distancia más corta entre el eje  $i-1$  y el eje  $i$ , y como vector va desde el eje  $i-1$  hacia el eje  $i$ .

$\alpha_{i-1}$  Es llamado "torsión de eslabón" y es el ángulo empleado en llevar el positivo del eje  $i-1$  hacia el positivo de la proyección del eje  $i$ , donde  $a_{i-1}$  corta al eje  $i-1$ , alrededor de  $a_{i-1}$  según la regla de la mano derecha.

$d_i$  Es la distancia medida sobre el eje  $i$  desde donde  $a_{i-1}$  corta al eje  $i$  hasta donde  $a_i$  corta al eje  $i$ , y como vector va desde donde  $a_{i-1}$  corta al eje  $i$  hasta donde  $a_i$  corta al eje  $i$ . Este parámetro da la dirección positiva del eje.

$\theta_i$  Es el ángulo empleado en llevar la prolongación de  $a_{i-1}$  hasta la proyección de  $a_i$  en el punto donde  $a_{i-1}$  corta al eje  $i$  alrededor de  $d_i$  según la regla de la mano derecha.

Para una articulación giratoria,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son los parámetros de articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que  $\theta_i$  es la variable para una articulación que cambia cuando el elemento  $i$  se mueve (o gira) con respecto al elemento  $i-1$ . Para una articulación prismática,  $\theta_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son los parámetros de la articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que  $d_i$  es la variable de la articulación.

Se puede desarrollar una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo con el sistema de coordenadas  $i-1$  ésimo. Esto se logra mediante cuatro operaciones, siendo estas: una rotación, una traslación, otra rotación y por último una nueva traslación. Cada una de estas operaciones se expresa con una matriz homogénea básica, y el producto de estas cuatro matrices da una matriz de transformación Denavit-Hartenberg para sistemas de coordenadas adyacentes  $i$  e  $i-1$ . Obteniéndose la siguiente matriz,

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ C\alpha_{i-1}S\theta_i & C\alpha_{i-1}C\theta_i & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1}d_i \\ S\alpha_{i-1}S\theta_i & S\alpha_{i-1}C\theta_i & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde **C** y **S** son abreviaturas para Cosenos y Senos.

La matriz homogénea  ${}^0T_i$  que especifica la localización del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base es el producto en cadena de matrices de transformación de coordenadas sucesivas  ${}^{i-1}A_i$  y se expresa como

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$



Específicamente, para  $i=8$ , obtenemos la matriz  ${}^0T_8$  (o bien  ${}^0T_{MAN}$ , donde MAN=manipulador) que especifica la orientación y posición del punto final del manipulador con respecto al sistema de coordenadas de la base.

$${}^0T_{MAN} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_7 {}^7T_{MAN} \quad (4)$$

Por tanto, la solución cinemática directa de un manipulador de 8 elementos es simplemente un asunto de calcular  ${}^0T_{MAN}$  mediante la multiplicación en cadena de las ocho matrices  ${}^{i-1}A_i$  y evaluar cada elemento en la matriz  ${}^0T_{MAN}$ .

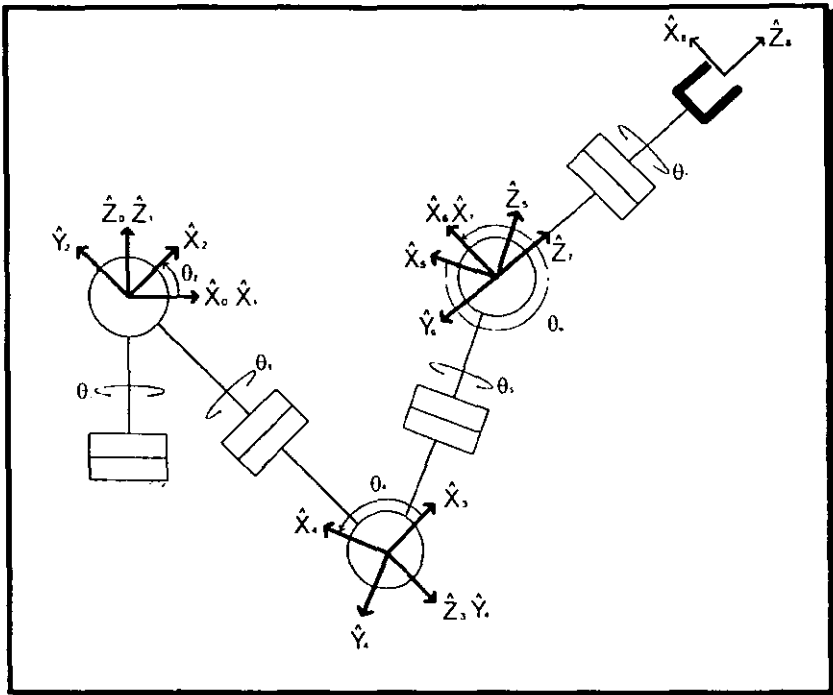


Fig. 3-2. Bases referenciales y ángulos obtenidos mediante el método de Denavit-Hartenberg

Para poder crear nuestra matriz necesitamos entonces obtener todos los parámetros de eslabonamiento desde  $i=1$  hasta  $i=8$ . Es una buena costumbre ordenar estos datos en forma de tabla:

$i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	90	0	$\theta_2$
3	0	90	L1	$\theta_3$
4	0	270	0	$\theta_4$
5	0	90	L2	$\theta_5$
6	0	270	0	$\theta_6$
7	0	90	0	$\theta_7$
8	0	0	L3	

Vaciando los datos de la tabla sucesivamente en la ecuación (2), se obtienen las 8 matrices correspondientes:

$${}^0T_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l1 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{pmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$${}^6T_7 = \begin{pmatrix} C\theta_7 & -S\theta_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_7 & C\theta_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^7T_{MAN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando estas 8 matrices en cadena, finalmente tenemos

$${}^0T_{MAN} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde

$$n_x = C_7 (C_6 (C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) + (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) S_5) - (C_1 C_4 S_2 + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4) S_6) + (C_5 (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) - (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) S_5) S_7$$

$$n_y = C_7 (C_6 (C_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) + (-C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) S_5) - (C_4 S_1 S_2 + (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) S_4) S_6) + (C_5 (-C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) - (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) S_5) S_7$$

$$n_z = C_7 (C_6 (C_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) - S_2 S_3 S_5) - (-C_2 C_4) + C_3 S_2 S_4) S_6) + (-C_5 S_2 S_3) - (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) S_5) S_7$$

$$s_x = C_7 (C_5 (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) - (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) S_5) - (C_6 (C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) + (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) S_5) - (C_1 C_4 S_2 + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4) S_6) S_7$$

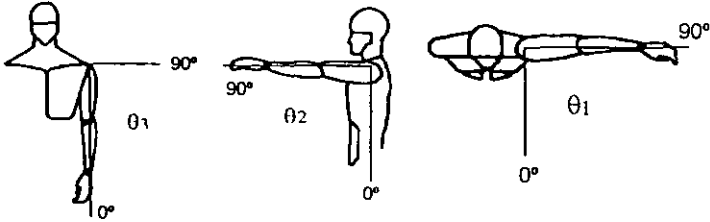
$$\begin{aligned}
S_y &= C_7 (C_5 (-(C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) -(C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) S_5) -(C_6 (C_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) + (-(C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) S_5) -(C_4 S_1 S_2 + (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) S_4) S_6) S_7 \\
S_z &= C_7 (-(C_5 S_2 S_3) - (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) S_5) -(C_6 (C_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) - S_2 S_3 S_5) -(C_2 C_4) + C_3 S_2 S_4) S_6) S_7 \\
a_x &= C_6 (C_1 C_4 S_2 + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4) + (C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) + (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) S_5) S_6 \\
a_y &= C_6 (C_4 S_1 S_2 + (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) S_4) + (C_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) + (-(C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) S_5) S_6 \\
a_z &= C_6 (-(C_2 C_4) + C_3 S_2 S_4) + (C_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) - S_2 S_3 S_5) S_6 \\
p_x &= I_1 C_1 S_2 - I_2 (-(C_1 C_4 S_2) -(C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4) + I_3 (C_6 (C_1 C_4 S_2 + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4) + (C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) + (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) S_5) S_6) \\
p_y &= I_1 S_1 S_2 - I_2 (-(C_4 S_1 S_2) - (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) S_4) + I_3 (C_6 (C_4 S_1 S_2 + (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) S_4) + (C_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) + (-(C_1 C_3) - C_2 S_1 S_3) S_5) S_6) \\
p_z &= -(I_1 C_2) - I_2 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) + I_3 (C_6 (-(C_2 C_4) + C_3 S_2 S_4) + (C_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) - S_2 S_3 S_5) S_6)
\end{aligned}$$

donde  $C_i = \cos \theta_i$ ;  $S_i = \sin \theta_i$

### 3.2.1 Posición del brazo humano de acuerdo a ${}^0T_8$

**A** SIGNANDO valores a los ángulos  $\theta_i$ , podemos obtener posiciones para el brazo humano a partir de la matriz  ${}^0T_8$ , (o bien  ${}^0T_{MAN}$ ) la cual nos indicará tanto la posición terminal de la mano como su orientación.

Analizando los resultado de esta matriz  ${}^0T_8$  para diferentes ángulos, observamos que para las coordenadas de la base  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$  es idónea una localización de esta en el hombro del brazo izquierdo directamente. Esto es debido a el obstáculo que crea el propio cuerpo humano y a un movimiento lógicamente posible de una persona común. Si quisiéramos simular el movimiento para el brazo derecho, simplemente es cuestión de localizar la base  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$  en el hombro del brazo derecho e introducir los ángulos correctos en las articulaciones adecuadas, por ejemplo un  $\theta_1=90^\circ$ , lo cambiaríamos por un  $\theta_2=-90^\circ$  o bien  $\theta_2=270^\circ$

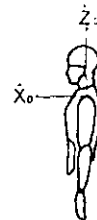
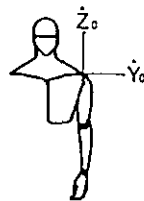


**Ejemplos de posiciones del brazo humano**

para el brazo izquierdo:

$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	0	0	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_1 - l_2 - l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	180°	0	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + l_2 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	90°	0	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & /1+12+13 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



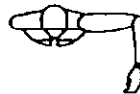
$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	0	0	90°	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & /2+13 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	90°	90°	90°	90°	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & /2+13 \\ -1 & 0 & 0 & /1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l1+l2+l3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



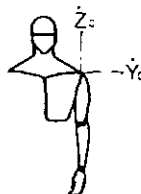
$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$90^\circ$	$90^\circ$	0	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l1+l2+l3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$90^\circ$	0	0	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l1-l2-l3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



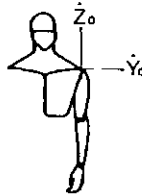
$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$90^\circ$	0	0	$90^\circ$	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + l_3 \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$90^\circ$	0	$90^\circ$	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_1 - l_2 - l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	$90^\circ$	0	$90^\circ$	0	0	0

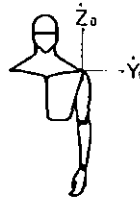
$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	0	90°	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_1 - l_2 - l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	90°	90°	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & l_1 + l_2 + l_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	0	90°	90°	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 - l_3 \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	0	90°	90°	90°	0	0	0

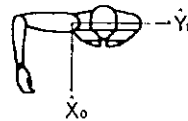
$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & l1 \\ 0 & 0 & -1 & -l2-l3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



para el brazo derecho mostramos solo algunas posiciones ya que básicamente son las mismas que para el brazo izquierdo:

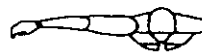
$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	-90°	90°	-90°	90°	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & l2+l3 \\ 1 & 0 & 0 & l1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



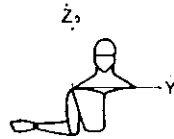
$\theta_i$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	-90°	90°	-90°	0	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l1-l2-l3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
	$-90^\circ$	0	0	$90^\circ$	0	0	0

$${}^0T_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 - l_3 \\ 1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



### 3.2.2 Parámetro de inclinación del brazo $\varphi$

AL HABLAR de un manipulador con 7 grados de libertad, estamos hablando de un manipulador con redundancia cinemática. Es decir, tenemos más grados de libertad de los requeridos para realizar una tarea específica. Por eso al mantener fijos en un brazo humano tanto el hombro **H**, como la muñeca **M**, podemos tener aún cierta inclinación del codo **C** con respecto a un eje de giro situado entre la muñeca y el hombro, ver figura (3-3). Queremos conocer entonces, alguna relación matemática que nos muestre en que forma están vinculadas las variables articulares  $\theta_n$  con este mencionado ángulo de inclinación del brazo  $\varphi$ .

Como puede apreciarse en la figura (3-3), el plano **HCM** puede tener una inclinación diferente a un plano vertical que pase por los puntos **HM**. El ángulo plano comprendido entre los planos vertical y **HCM** es un parámetro que permite cuantificar la orientación del brazo y controlar a éste para evitar colisiones con posibles obstáculos dentro del área de trabajo.

El plano vertical llamado *plano de referencia* contiene al vector unitario **V** y a la línea **HM**. El ángulo  $\varphi$  es aquel que va desde el plano de referencia al plano **HCM** alrededor de la línea **HM** y de **H** a **M**, según la regla de la mano derecha.

Necesitaremos del uso de  ${}^0P_3$  y de  ${}^0P_5$ , ya que son los vectores que nos indican la posición del codo y de la muñeca respectivamente. Los mostramos a continuación.

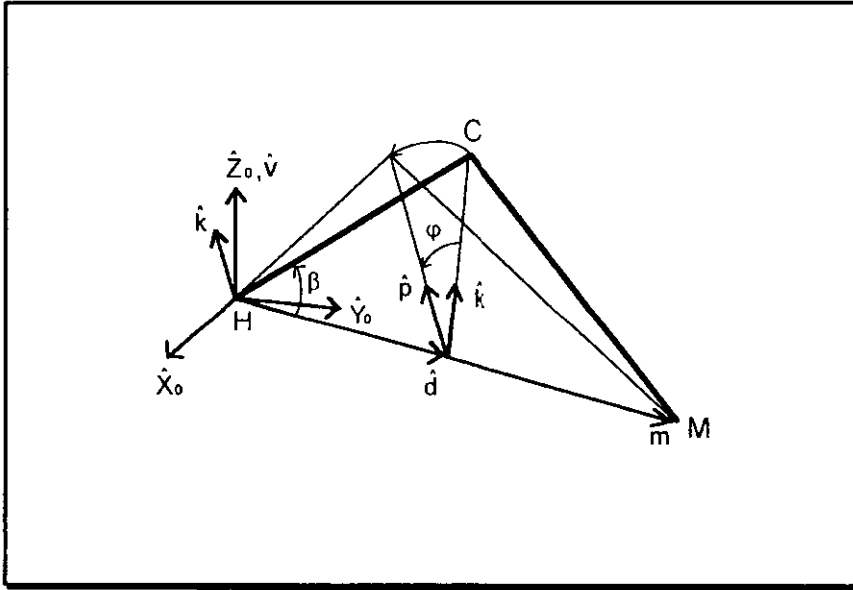


Fig. 3-3. Parámetro de inclinación del brazo  $\phi$

$${}^0T_3 = \begin{pmatrix} {}^0R_3 & {}^0P_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donde, } {}^0P_3 = \begin{pmatrix} {}^0p_{3x} \\ {}^0p_{3y} \\ {}^0p_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 C \theta_1 S \theta_2 \\ l_1 S \theta_1 S \theta_2 \\ -l_1 C \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{también tenemos, } {}^0T_3 = \begin{pmatrix} {}^0R_3 & {}^0P_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donde, } {}^0P_3 = \begin{pmatrix} {}^0p_{3,x} \\ {}^0p_{3,y} \\ {}^0p_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 C \theta_1 S \theta_2 - ((-C \theta_1 C \theta_4 S \theta_2) - (C \theta_1 C \theta_2 C \theta_3 + S \theta_1 S \theta_3) S \theta_4) \\ l_1 S \theta_1 S \theta_2 - l_2 ((-C \theta_4 S \theta_1 S \theta_2) - (C \theta_2 C \theta_3 S \theta_1 - C \theta_1 S \theta_3) S \theta_4) \\ -l_1 C \theta_2 - l_2 (C \theta_2 S \theta_4 - C \theta_3 S \theta_2 S \theta_4) \end{pmatrix}$$

La mínima distancia desde la línea **HM** al punto **C** está a lo largo del vector **P**, el cual obtenemos de la siguiente manera

de la figura (3-3) notamos que  ${}^0d = \hat{m}({}^0c \cdot \hat{m})$

$$\text{donde, } \hat{m} = \frac{M}{\|M\|} = \frac{{}^0p_3}{\|{}^0p_3\|} \text{ y } {}^0c = {}^0p_3$$

también  ${}^0p = {}^0c - {}^0d$ , que es uno de los vectores que forman el ángulo  $\phi$

el otro vector es  $k = (\hat{m} \otimes \hat{v}) \otimes \hat{m}$ , el cual es un vector que está en el plano de referencia, siendo ortogonal a **m**.

$$\text{transformando a vectores unitarios } \hat{k} = \frac{k}{\|k\|} \text{ y } {}^0\hat{p} = \frac{{}^0p}{\|{}^0p\|}$$

El vector **k** es tratado como un vector libre que se desliza a lo largo de la línea **HM** hasta que su base coincide con la de **p** en el punto **CC**. Así  $\phi$  es el ángulo formado desde **k** hasta **p**.

De la definición de producto punto sabemos que

$$\hat{k} \cdot \hat{p} = \|\hat{k}\| \|\hat{p}\| \cos \varphi$$

por tanto el ángulo buscado  $\varphi$  es :  $\varphi = \cos^{-1}(\hat{k} \cdot \hat{p})$

### 3.3 MODELACIÓN EN EL ESPACIO ARTICULAR

EN ESTA sección planteamos el segundo problema cinemático: la cinemática inversa o solución del brazo para nuestro manipulador de 7 grados de libertad. Con el fin de controlar la posición y orientación de la mano u órgano terminal para alcanzar un objeto, es más importante la solución cinemática inversa. En otras palabras, dada la posición y orientación de la mano, nos gustaría conocer los ángulos de las articulaciones del brazo de manera que se pueda posicionar como se desee la mano.

En general, el problema cinemático inverso se puede resolver por diversos métodos, tales como la transformación inversa (Paul y col. [1981]), el álgebra de tornillo (Kohli y Soni [1975]), matrices duales (Denavit [1956]), cuaterniones duales (Yang y Freudenstein [1964]), iterativo (Uicker y col. [1964]), y métodos geométricos (Lee y Ziegler [1984]). A menudo se utilizan soluciones iterativas, pero generalmente requieren más cálculos y no garantizan la convergencia a la solución correcta especialmente en los puntos singulares. Más aún, no existe indicación sobre como escoger la solución correcta para una configuración de brazo particular. En este trabajo utilizaremos por tanto, un método geométrico que proporciona más comprensión en resolver este tipo de manipuladores, un brazo humano.

Entonces para el análisis cinemático inverso de este trabajo necesitamos de la entrada de 2 datos cruciales, siendo estos el ángulo de

inclinación del brazo  $\varphi$ , y la matriz  ${}^0T_{MAN}$  que nos indica la posición y orientación del elemento terminal o mano. Esto es

$${}^0T_{MAN} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & MAN_x \\ n_y & s_y & a_y & MAN_y \\ n_z & s_z & a_z & MAN_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las variables  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{a}$  son las correspondientes a la rotación, es decir  ${}^0R_6$ . Recordemos que al ser ortonormal, se debe cumplir que :

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1 ; \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = 1 ; \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$$

En los siguientes subcapítulos mostraremos la obtención de cada una de las siete variables articulares, desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$ .

### 3.3.1 Obtención de la primera variable articular $\theta_1$

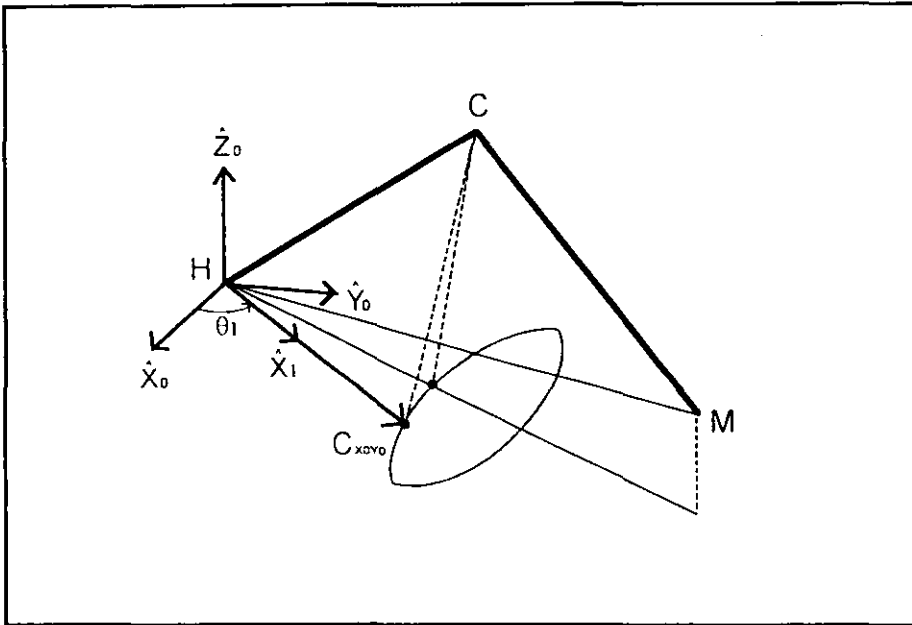


Fig. 3-4.

PARA la obtención del ángulo  $\theta_1$ , ver figura (3-4), que es aquel formado entre los vectores  $X_0$  y  $X_1$  alrededor del eje  $Z_1$ , necesitamos conocer la relación existente entre la posición del brazo formado por los puntos HCM (Hombro, Codo y Muñeca) y la base  $\{0\}$ , es decir  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ . Esto quiere decir que si fijamos tanto el punto H como el M, pudiendo el codo realizar un giro alrededor de la línea formada entre estos dos puntos, el ángulo  $\theta_1$  tendrá una variación que podemos cuantificar analizando la *elipse* (ver figura 3-4) que se forma en el plano  $X_0Y_0$ . Esta elipse es la proyección del punto C al evolucionar el ángulo de inclinación del codo  $\varphi$  el cual ya definimos previamente. Cada punto de esta elipse lo ubicaremos mediante



un vector que llamaremos  $C_{x_0y_0}$ , el cual parte de la base referencial  $\{0\}$  sobre el plano  $X_0Y_0$  hasta tocar la elipse (ver figura 3-4 y 3-5).

Observando la figura (3-5), que muestra el plano  $X_0Y_0$ , podemos descomponer el vector  $C_{x_0y_0}$  en sus proyecciones sobre los ejes  $X_0$  y  $Y_0$ , lo cual nos permite cuantificar el ángulo  $\theta_1$  mediante:

$$\theta_1 = \tan^{-1}({}^0C_y / {}^0C_x) \tag{7}$$

El problema entonces es encontrar los vectores  ${}^0C_y$  y  ${}^0C_x$ , referidos a la base generadora  $\{0\}$ .

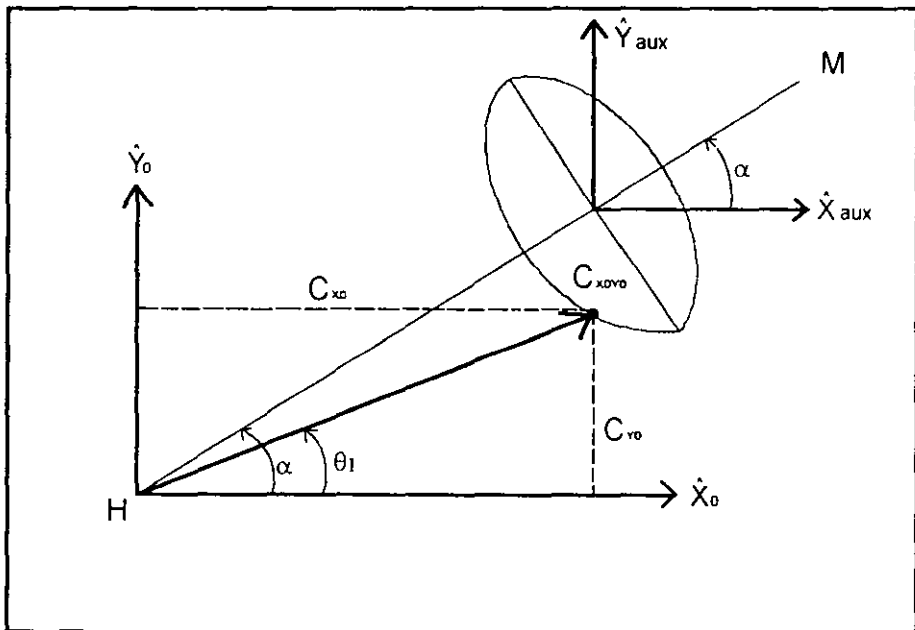


Fig. 3-5.

Si observamos la figura (3-4) desde el punto  $M$  en dirección al punto  $H$  obtendríamos una vista similar a la figura (3-6). Desde esta vista notamos

un vector que llamaremos  ${}^{cc}C$ , el cual es un vector originado en una base referencial  $\{CC\}$ , la cual está orientada de la siguiente manera: el eje  $X_{cc}$  con la misma dirección y sentido que el vector  $k$  (ver figura 3-3), eje  $Z_{cc}$  con la misma dirección y sentido que el vector  $m$  y por último el eje  $Y_{cc}$  mediante el producto vectorial  $Y_{cc} = Z_{cc} \times X_{cc}$ . Aquí podemos ver la evolución del ángulo  $\varphi$  al moverse el codo  $C$ . Descomponiendo el vector  ${}^{cc}C$  y presentándolo en forma de columna tenemos:

$${}^{cc}C = \begin{pmatrix} {}^{cc}C_x \\ {}^{cc}C_y \\ {}^{cc}C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

donde la componente en  $Z_{cc}$  es nula debido a que el vector  ${}^{cc}C$  solo existe en el plano  $X_{cc}Y_{cc}$ .

La longitud  $r$  (equivalente al módulo del vector  $p$ ) se obtiene de la siguiente manera:

De la ley de cosenos tenemos que

$$l_2^2 = l_1^2 + \|m\|^2 - 2l_1\|m\|\cos\theta \quad (9)$$

$$\text{y observamos que } \cos\theta = \|\mathbf{d}\| / l_1 \quad (10)$$

sustituyendo (10) en (9)

$$l_2^2 = l_1^2 + \|m\|^2 - 2l_1\|m\|\left(\|\mathbf{d}\| / l_1\right)$$

despejando  $d$

$$\|{}^0d\| = \frac{l_1^2 - l_2^2 + \|m\|^2}{2\|m\|}$$

de Pitágoras sabemos que  $\|d\|^2 + \|p\|^2 = l_1^2$ , por lo tanto

$$r = \|p\| = \sqrt{l_1^2 - \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + \|m\|^2}{2\|m\|}\right)^2} \quad (11)$$

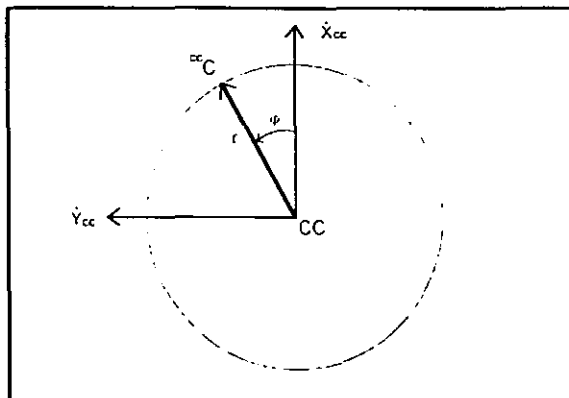


Fig. 3-6.

Para poder utilizar la ecuación (7), es necesario encontrar el vector  ${}^0C$  (la posición del codo respecto a la base  $\{0\}$ ). Pero, nosotros tenemos la posición del codo respecto a la base  $\{cc\}$  y, por tanto, precisamos de la utilización de transformaciones para obtener  ${}^0C$  a partir de  ${}^{cc}C$ , esto es

$${}^0C = {}^0T_{cc} {}^{cc}C \quad (12)$$

donde la matriz de transformación  ${}^0T_{cc}$ , se compone de una traslación y de una rotación

$${}^0T_{cc} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & {}^0CC \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{aux}R_{cc} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0R_{cc} & {}^0CC \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

La parte correspondiente a la traslación significa el mover nuestro sistema de referencia  $\{cc\}$  hasta el sistema de referencia  $\{0\}$ . Esto implica moverse a lo largo de la línea creada por un vector  ${}^0CC$  que va desde el origen hasta el punto  $CC$ . Por tanto este vector se expresa de la siguiente manera:

$${}^0CC = \begin{pmatrix} {}^0CC_x \\ {}^0CC_y \\ {}^0CC_z \end{pmatrix} = \|{}^0d\| \hat{m} = \left( \frac{l_1^2 - l_2^2 + \|m\|^2}{2\|m\|} \right) \left( \frac{1}{\|m\|} \right) \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

Ahora bien, para determinar la parte correspondiente a la rotación de la ecuación (13)  ${}^0R_{cc}$ , se necesitó crear una base referencial auxiliar  $\{aux\}$  la cual se encuentra orientada de la misma manera que la base  $\{0\}$ , pero trasladada al punto  $CC$ . Nuestra matriz de rotación  ${}^{aux}R_{cc}$ , está formada por sus respectivos elementos, siendo estos:

$${}^{aux}R_{cc} = \begin{pmatrix} {}^{aux}\hat{X}_{cc} & {}^{aux}\hat{Y}_{cc} & {}^{aux}\hat{Z}_{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{x}_{aux} \cdot \hat{x}_{cc} & \hat{x}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} & \hat{x}_{aux} \cdot \hat{z}_{cc} \\ \hat{y}_{aux} \cdot \hat{x}_{cc} & \hat{y}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} & \hat{y}_{aux} \cdot \hat{z}_{cc} \\ \hat{z}_{aux} \cdot \hat{x}_{cc} & \hat{z}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} & \hat{z}_{aux} \cdot \hat{z}_{cc} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Ya previamente habíamos establecido la dirección de los ejes de la base referencial  $\{cc\}$ , de donde notamos que  ${}^0Z_{cc}$  está dispuesto con la misma orientación y sentido que el vector  $m$ , y por tanto  ${}^{aux}Z_{cc}$  también lo estará. Tenemos entonces que,

$${}^{aux}\hat{Z}_{cc} = {}^0\hat{Z}_{cc} = \hat{m} = \frac{m}{\|m\|} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \frac{1}{\|m\|} = \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Observando la figura (3-7), podemos encontrar una relación para obtener  ${}^{aux}Y_{cc}$  de la matriz de rotación de la ecuación (15).

$$r_{12} = \hat{x}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} = \cos(90 - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$$

$$r_{22} = \hat{y}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} = \cos(180 - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$r_{32} = \hat{z}_{aux} \cdot \hat{y}_{cc} = 0$$

por lo que tenemos

$$\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Podemos además obtener el ángulo  $\alpha$  en términos de parámetros conocidos como lo son el vector  $m$  que va desde el hombro hasta la muñeca, que viene siendo la matriz de transformación  ${}^0T_5$ .

$$\text{Sen}\alpha = \frac{m_y}{\|m_{x1}\|} = \frac{m_y}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad (18)$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{m_x}{\|m_{x1}\|} = \frac{m_x}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad (19)$$

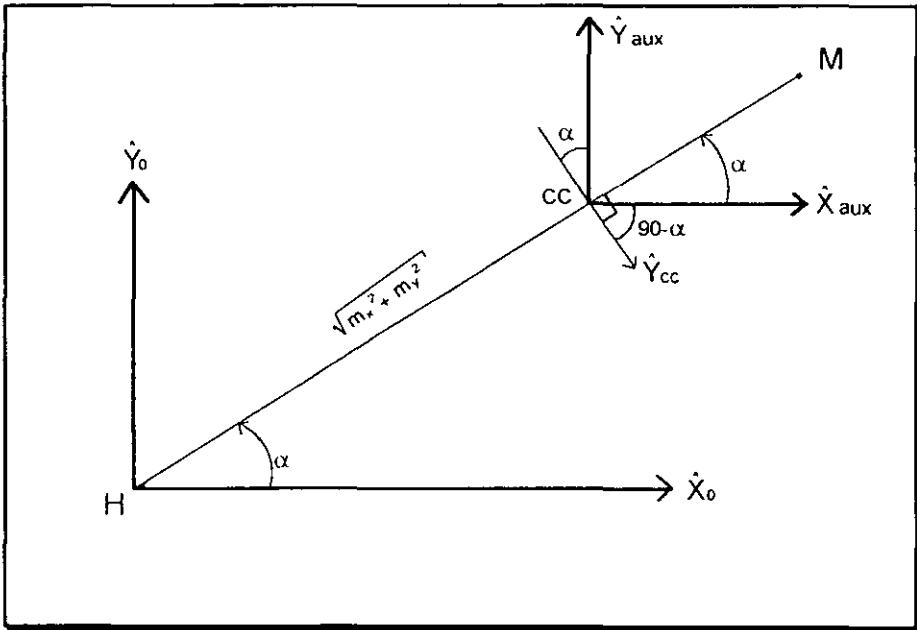


Fig. 3-7.

De la ecuación (15) solo nos hace falta la primera columna, es decir la parte correspondiente a  ${}^{aux}X_{cc}$ . La podemos obtener fácilmente mediante el producto cruz entre  ${}^{aux}Y_{cc}$  y  ${}^{aux}Z_{cc}$ .

$${}^{aux}\hat{X}_{cc} = {}^{aux}\hat{Y}_{cc} \otimes {}^{aux}\hat{Z}_{cc}$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \frac{m_z}{\|m\|} \\ -\sin \alpha \frac{m_z}{\|m\|} \\ \sin \alpha \frac{m_y}{\|m\|} + \cos \alpha \frac{m_x}{\|m\|} \end{pmatrix} \quad (20)$$

De esta manera completamos ya la matriz de rotación, ecuación (15). Podemos entonces calcular la ecuación (13) que nos permite también el cálculo de la ecuación (12). Esta ecuación nos otorga el vector  ${}^0C$ , el cual es el que necesitamos para el cómputo de nuestra variable articular  $\theta_1$ .

Solo necesitamos las componentes X y Y del vector  ${}^0C$ , las cuales mostramos a continuación (obtenidas mediante las sustituciones antes mencionadas):

$${}^0C_x = \frac{\|d\|m_x}{\|m\|} + \frac{\|p\|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \left( m_y \text{Sen} \varphi - \frac{m_x m_z \text{Cos} \varphi}{\|m\|} \right) \quad (21)$$

$${}^0C_y = \frac{\|d\|m_y}{\|m\|} + \frac{\|p\|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \left( -m_x \text{Sen} \varphi - \frac{m_y m_z \text{Cos} \varphi}{\|m\|} \right) \quad (22)$$

$${}^0C_z = \frac{\|d\|m_z}{\|m\|} + \frac{\|p\| \text{Cos} \varphi \sqrt{m_x^2 + m_y^2}}{\|m\|} \quad (23)$$

donde,  $\|m\| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$ ;  $\|d\| = \frac{l_1^2 - l_2^2 + \|m\|^2}{2\|m\|}$ ;  $\|p\| = \sqrt{l_1^2 - \|d\|^2}$

Recordamos que  $\theta_1 = \tan^{-1}({}^0C_y / {}^0C_x)$

Aquí surge un detalle de suma importancia. Debido a que el vector  $C_{xoyz}$  puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes formados por los ejes X e Y de la base {0}, y la función arco tangente solo expulsa ángulos comprendidos entre 0° y 90° o bien 0° y -90°, es necesario tener una correcta interpretación del ángulo  $\theta_1$  para lograr formar un intervalo entre 0° y 360°. Para esto se expone la siguiente tabla donde se muestran los ángulos a sumar para todos los cuadrantes.

I Cuadrante (Cx=+1, Cy=+1)	$\theta_1$
II Cuadrante (Cx=-1, Cy=+1)	$\theta_1+180^\circ$
III Cuadrante (Cx=-1, Cy=-1)	$\theta_1+180^\circ$
IV Cuadrante (Cx=+1, Cy=-1)	$\theta_1+360^\circ$

El mismo sistema se usará para todas las variables articulares donde se usen arco tangentes para su obtención.

### Ángulo-eje equivalente

Si bien hemos logrado obtener las ecuaciones (21), (22) y (23) que nos determinan la posición del vector  ${}^0C$ , estas se encuentran en función de la variable  $m$ , la cual es un vector que va desde el hombro hasta la muñeca de nuestro brazo. Pero este vector no es un dato conocido para la cinemática inversa de nuestro trabajo, pero si lo es el punto MAN ( $MAN_x$ ,  $MAN_y$ ,  $MAN_z$ ). Este punto es aquel que se encuentra entre el dedo pulgar y

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA



los otros cuatro de la mano humana (recordemos que no estamos haciendo un análisis de la mano humana con los cinco dedos con sus respectivos grados de libertad, sino que la consideramos como una pinza que simplemente puede abrir o cerrar. O bien como la mano tomando alguna herramienta, donde el punto **MAN** se trasladaría a algún punto de esta herramienta de nuestro interés como lo podría ser comúnmente la punta de la misma). Por tanto tenemos que lograr encontrar una relación entre el vector  ${}^0m$  y datos que sí sean conocidos, como lo es el punto **MAN** y la orientación de la mano. Para lograr esto necesitamos del concepto de *ángulo-eje equivalente*, que mostramos a continuación.

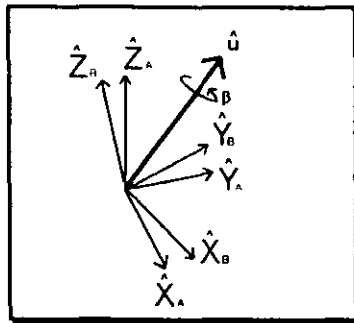


Fig. 3-8.

Suponiendo que tenemos dos bases referenciales, ver figura (3-8), las cuales tienen la misma posición y orientación, y queremos que alguna de ellas tenga una rotación  $\beta$  con respecto a la otra pero alrededor de un cierto eje  $u$  cualesquiera, se puede demostrar<sup>13</sup> que la matriz de rotación equivalente es

<sup>13</sup> Craig, John J., *Introduction to Robotics, mechanics and control*, Ob. cit

$$R_u(\beta) = \begin{pmatrix} u_x u_x v\beta + C\beta & u_x u_y v\beta - u_z S\beta & u_x u_z v\beta + u_y S\beta \\ u_x u_y v\beta + u_z S\beta & u_y u_y v\beta + C\beta & u_y u_z v\beta - u_x S\beta \\ u_x u_z v\beta - u_y S\beta & u_y u_z v\beta + u_x S\beta & u_z u_z v\beta + C\beta \end{pmatrix} \quad (24)$$

donde  $v\beta = 1 - \text{Cos}\beta$  y  $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_z)^T$ ;  $S\beta = \text{Sen}\beta$ ,  $C\beta = \text{Cos}\beta$

El signo de  $\beta$  se determina por la regla de la mano derecha con el pulgar apuntando en la dirección positiva de  $\mathbf{u}$ . La ecuación (24) convierte de una representación de ángulo-eje hacia una representación de matriz. Nótese que dado un eje de rotación y una cantidad angular, podemos fácilmente construir una matriz de rotación equivalente.

El problema inverso, la determinación de  $\mathbf{u}$  y  $\beta$  desde una matriz de rotación dada, es de nuestro interés. Tenemos entonces,

$$\beta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{n_x + s_x + a_z - 1}{2}\right) \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{2\text{Sen}\beta} \begin{pmatrix} S_z - a_y \\ a_x - n_z \\ n_y - s_x \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\text{donde } {}^0R_{MAN} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{pmatrix}$$

Esta solución siempre calcula el valor de  $\beta$  entre 0 y 180 grados.

Las ecuaciones anteriores implican que nosotros podemos tener, como datos conocidos, la matriz  ${}^0T_{MAN}$  y de aquí obtener el ángulo y eje equivalentes de rotación, ecuaciones (25) y (26), para después obtener la matriz de rotación equivalente, ecuación (24).

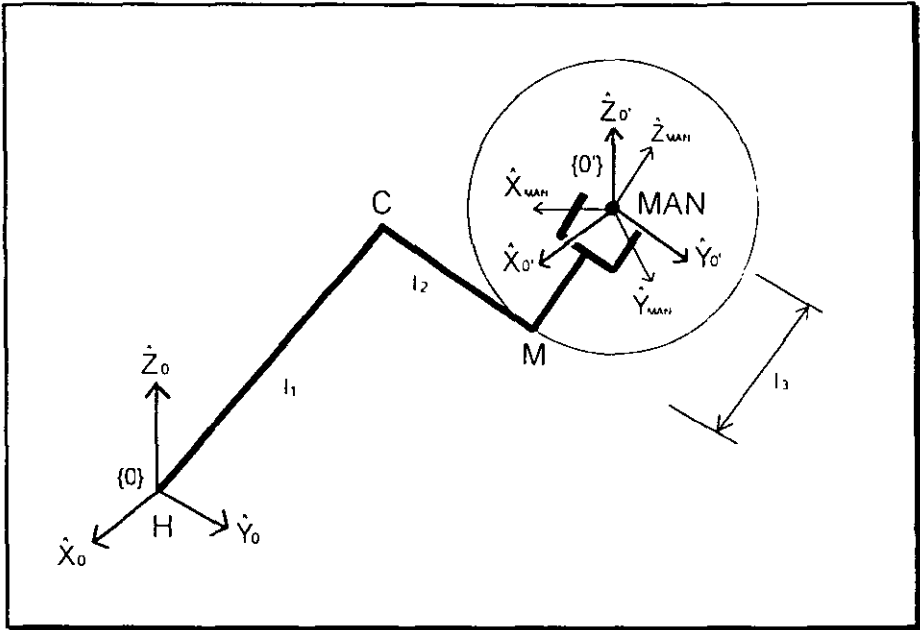


Fig. 3-9.

Una vez definido este concepto, podemos hacer uso de éste de la siguiente manera. Observando la figura (3-9) notamos que la mano puede girar libremente alrededor de una esfera con centro en el punto **MAN** y de radio  $l_3$ .

En la figura (3-9) se ha colocado una base auxiliar  $\{0'\}$  que se encuentra trasladada hasta el punto **MAN** pero con la misma orientación que  $\{0\}$ . Necesitamos conocer el punto **M** en relación a  $\{0'\}$ , esto es,

$${}^0m = ({}^0T_{0'}) {}^0m \tag{27}$$

$$\text{donde } {}^0T_{0'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & MAN_x \\ 0 & 1 & 0 & MAN_y \\ 0 & 0 & 1 & MAN_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero hasta el momento desconocemos  ${}^0m$ , que para obtenerlo utilizaremos nuestra matriz de rotación equivalente encontrada anteriormente

$${}^0m = {}^0R_{MAN} {}^{MAN}m \tag{28}$$

donde  ${}^{MAN}m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_3 \end{pmatrix}$  ya que la relación que existe entre la base ubicada en

el punto **M**, y la base **{MAN}** ubicada en la mano siempre será solo una traslación de  $l_3$  unidades en la dirección negativa del eje  $Z_{MAN}$ .

La matriz  ${}^0R_{MAN}$  es nuestra matriz de rotación equivalente  $R_u(\beta)$ , ecuación (24). Sustituyendo (28) en (27) junto con (24),

$${}^0m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & MAN_x \\ 0 & 1 & 0 & MAN_y \\ 0 & 0 & 1 & MAN_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x u_x v\beta + C\beta & u_x u_x v\beta - u_z S\beta & u_x u_x v\beta + u_x S\beta \\ u_x u_x v\beta + u_z S\beta & u_x u_x v\beta + C\beta & u_x u_x v\beta - u_x S\beta \\ u_x u_x v\beta - u_x S\beta & u_x u_x v\beta + u_x S\beta & u_x u_x v\beta + C\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_3 \end{pmatrix}$$

y finalmente efectuando operaciones

$${}^0m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MAN_1 - l_3(u_1 u_2 (1 - \cos\beta) + u_1 \text{Sen}\beta) \\ MAN_1 - l_3(u_1 u_2 (1 - \cos\beta) - u_1 \text{Sen}\beta) \\ MAN_2 - l_3(u_2^2 (1 - \cos\beta) + \cos\beta) \end{pmatrix} \quad (29)$$

Así podemos ya utilizar esta ecuación para el cálculo de la variable articular  $\theta_1$ .

*Resumimos la manera de obtener  $\theta_1$ :*

- 1) Teniendo como dato la posición y orientación de la mano, es decir la matriz homogénea  ${}^0T_{MAN}$ , junto con el ángulo de inclinación del brazo  $\varphi$ , calcular el ángulo-eje equivalente, ecuaciones (25) y (26).
- 2) Calcular el vector  ${}^0m$ , ecuación (29)
- 3) Calcular  ${}^0C_x$  y  ${}^0C_y$ , ecuaciones (21) y (22).
- 4) Calcular  $\theta_1$ , ecuación (7)

### 3.3.2 Obtención de la segunda variable articular $\theta_2$

**Q**UEREMOS ahora conocer alguna relación para el ángulo  $\theta_2$ , el cual es el que se forma entre los vectores  $X_1$  y  $X_2$  alrededor del eje  $Z_2$  (ver fig 3-2). Podemos notar que el eje formado entre los puntos H y C (vector  ${}^1C$ ) siempre va a mantener un ángulo de  $90^\circ$  con respecto a el eje  $X_2$ . Esto debido a la forma en que se eligieron los parámetros de eslabonamiento según Denavit-Hartenberg. También encontramos un ángulo entre el eje HC y el vector  $X_1$ , el cual llamaremos  $\theta_2'$ . Por tanto el ángulo  $\theta_2$  que a nosotros nos interesa es:

$$\theta_2 = 90^\circ + \theta_2' \tag{30}$$

tenemos entonces que,

$$\theta_2' = \tan^{-1}({}^1C_z / {}^1C_x) \tag{31}$$

$${}^1C = ({}^1T_0)^0C = ({}^0T_1^{-1})^0C$$

Sabemos que la inversa de una matriz de rotación es equivalente a su traspuesta, sin embargo la inversa de una matriz de transformación homogénea no es equivalente a su traspuesta. Necesitamos alguna forma de calcularla. En general, la inversa de una matriz de transformación se puede encontrar que es<sup>14</sup>

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De tal forma

$${}^1C = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^0C_x \\ {}^0C_y \\ {}^0C_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

<sup>14</sup> K S Fu, R C González, C S G Lee, *Robotics, Ob cit Pág 32*

$${}^1C = \begin{pmatrix} C\theta_1 {}^0C_x + S\theta_1 {}^0C_y \\ -S\theta_1 {}^0C_x + C\theta_1 {}^0C_y \\ {}^0C_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1C_x \\ {}^1C_y \\ {}^1C_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores  ${}^0C_x$ ,  ${}^0C_y$ ,  ${}^0C_z$  obtenidos de las ecuaciones (21), (22) y (23):

$${}^1C_z = \frac{\|d\|m_z}{\|m\|} + \frac{\|p\| \cos \varphi \sqrt{m_x^2 + m_y^2}}{\|m\|} \quad (32)$$

$${}^1C_x = \frac{\|d\|}{\|m_x\|} (m_x \cos \theta_1 + m_y \sin \theta_1) + \frac{\|p\|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \left( \sin \varphi (m_x \cos \theta_1 - m_y \sin \theta_1) - \frac{m_x \cos \varphi}{\|m\|} (m_x \cos \theta_1 + m_y \sin \theta_1) \right) \quad (33)$$

Recordamos que,  $\theta_2 = 90^\circ + \tan^{-1}({}^1C_z / {}^1C_x)$

### 3.3.3 Obtención de la tercer variable articular $\theta_3$

EL ÁNGULO  $\theta_3$  es el formado entre los ejes  $X_2$  y  $X_3$ , alrededor de  $Z_3$ . (Debido a que la base {3} está alejada una distancia  $l_1$  de la base {2}, es decir no son coincidentes, ver figura (3-2), nosotros supondremos que sí lo son ya que visto desde un plano perpendicular a  $Z_3$  es válido y suficiente para estos cálculos, ver figura 3-10)

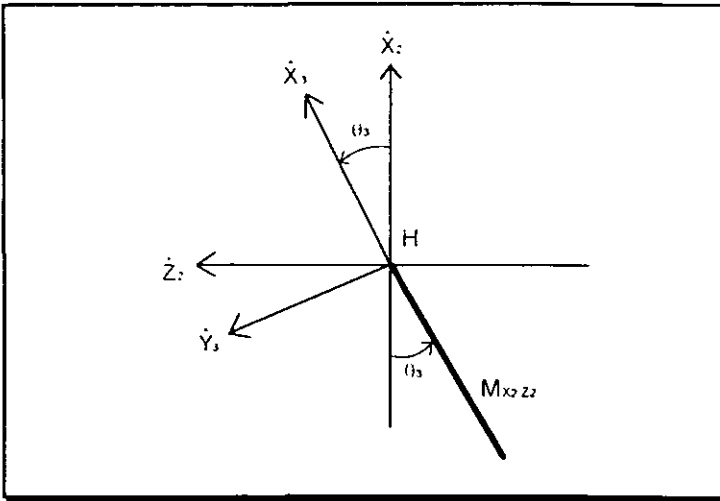


Fig. 3-10.

Observando la figura (3-10), notamos que el vector  $M_{x_2z_2}$  es la proyección del punto  $M$  sobre el plano  $X_2Z_2$ , cuya magnitud y dirección varían conforme evolucionan las variables articulares  $\theta_4$  y  $\theta_3$  respectivamente. Es importante mencionar que el vector  $M_{x_2z_2}$  puede no existir, esto es cuando  $\theta_4$  es igual a cero, ya que el vector  ${}^2m$  sería paralelo a  $Z_3$ . En este caso no podremos definir la variable articular  $\theta_3$ .

De lo dicho anteriormente y nuevamente observando la figura (3-10) :

$$\theta_3 = \tan^{-1}({}^2m_z / {}^2m_x) \quad (34)$$

para obtener  ${}^2m$  necesitamos del uso de una matriz de transformación

$${}^2m = ({}^2T_1)^{-1} m \quad (35)$$



y esta matriz es equivalente a

$${}^2T_0 = {}^0T_2^{-1} = ({}^0T_1 {}^1T_2)^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación (35) tenemos,

$${}^2m = \begin{pmatrix} {}^2m_x \\ {}^2m_y \\ {}^2m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 {}^0m_x + S\theta_1 C\theta_2 {}^0m_y + S\theta_2 {}^0m_z \\ -C\theta_1 S\theta_2 {}^0m_x - S\theta_1 S\theta_2 {}^0m_y + C\theta_2 {}^0m_z \\ S\theta_1 {}^0m_x - C\theta_1 {}^0m_y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto nuestra variable articular  $\theta_3$  es

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{S\theta_1 {}^0m_x - C\theta_1 {}^0m_y}{C\theta_1 C\theta_2 {}^0m_x + S\theta_1 C\theta_2 {}^0m_y + S\theta_2 {}^0m_z} \right) \quad (36)$$

### 3.3.4 Obtención de la cuarta variable articular $\theta_4$

**P**ODEMOS ver en la figura (3-11) la relación existente entre el ángulo  $\theta_4$  (cuarta variable articular) y las bases {3} y {4}. Por definición  $\theta_4$  va desde el vector  $X_3$  hacia el vector  $X_4$  alrededor de  $Z_4$ . El ángulo formado entre las líneas HC y CM ( $I_1$  y  $I_2$ ) lo llamaremos  $\theta_4'$ . Observamos una sencilla relación entre  $\theta_4$  y  $\theta_4'$ :

$$\theta_4 = 180^\circ - \theta_4' \quad (37)$$

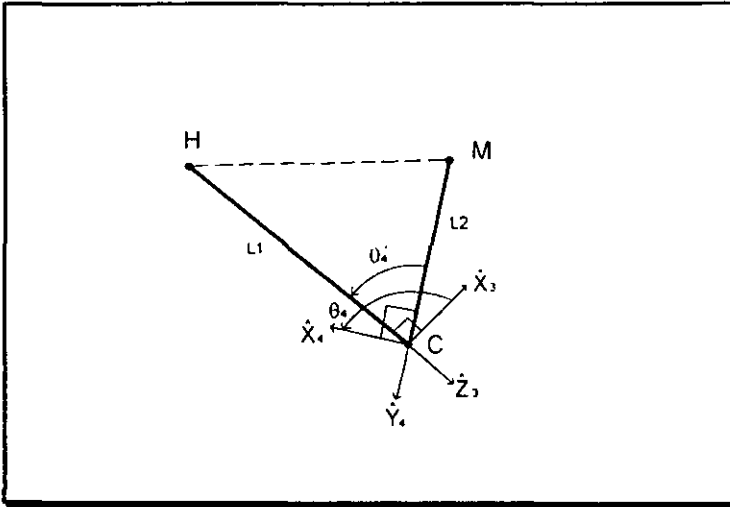


Fig. 3-11.

Necesitamos entonces obtener  $\theta_4'$  en función de términos conocidos, y, ya que este ángulo depende únicamente de la posición del punto **M** y no de la inclinación diedra del brazo, podemos obtenerlo fácilmente sin aún conocer las primeras variables articulares antes encontradas. Por tanto, de la ley de cosenos tenemos,

$$\|m\|^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2C\theta_4'$$

despejando  $\theta_4'$

$$\theta_4' = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{\|m\|^2 - l_1^2 - l_2^2}{-2l_1l_2}\right)$$

Entonces la cuarta variable articular  $\theta_4$  es:

$$\theta_4 = 180^\circ - \text{Cos}^{-1} \left( \frac{\|m\|^2 - l_1^2 - l_2^2}{-2l_1 l_2} \right) \quad (38)$$

### 3.3.5 Obtención de la quinta variable articular $\theta_5$

SIENDO  $\theta_5$  el ángulo formado entre los vectores  $X_4$  y  $X_5$ , alrededor de  $Z_5$ , podemos utilizar un método similar al utilizado para encontrar  $\theta_3$ . En la figura (3-12) podemos observar las bases {4} y {5} vistas desde un plano perpendicular al eje  $Z_5$ . Aquí se muestra el vector  $\text{MAN}_{x_4 z_4}$ , el cual es la proyección del punto **MAN** sobre el plano  $X_4 Z_4$ , cuya magnitud y dirección varían conforme evolucionan las variables  $\theta_6$  y  $\theta_5$  respectivamente, donde precisamente  $\theta_5$  es la variable de nuestro interés, por lo que el movimiento de el vector  $\text{MAN}_{x_4 z_4}$  nos determina  $\theta_5$ . Aquí también es importante

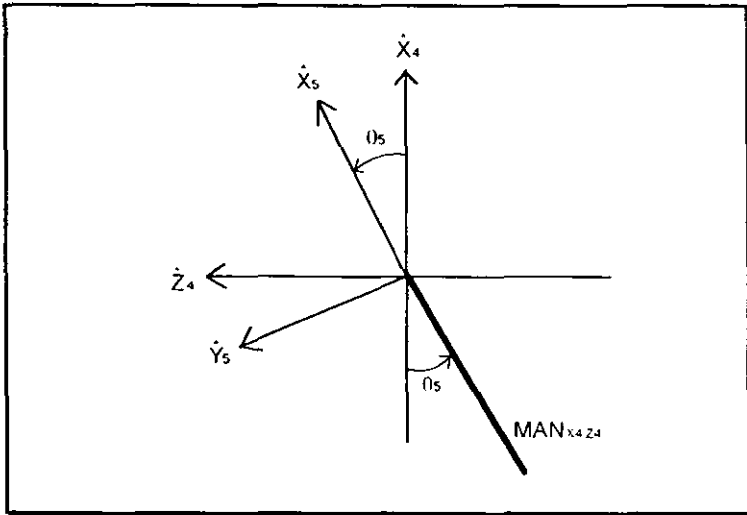


Fig. 3-12.

mencionar que  $M_{x4z4}$  puede no existir cuando  $\theta_6$  sea nulo, ya que la línea entre el codo **C** y la mano **MAN** sería paralela a  $Z_5$ . En este caso no podremos definir  $\theta_5$ .

De lo dicho anteriormente y nuevamente observando la figura (3-12) :

$$\theta_5 = \tan^{-1}({}^4MAN_z / {}^4MAN_x) \quad (39)$$

para obtener  ${}^4MAN$  necesitamos del uso de una matriz de transformación

$${}^4MAN = ({}^4T_0)^0MAN = ({}^0T_4^{-1})^0MAN \quad (40)$$

$${}^0T_4 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & l_1 C_1 S_2 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & l_1 S_1 S_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -l_1 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$r_{11} = C_4(C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4$$

$$r_{12} = S_4(-S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2$$

$$r_{13} = C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3$$

$$r_{21} = C_4(C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4$$

$$r_{22} = S_4(C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2$$

$$r_{23} = -C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3$$

$$r_{31} = C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4$$

$$r_{32} = C_2 C_3 - C_3 S_2 S_4$$

$$r_{33} = -S_2 S_3$$

entonces tomando la inversa de esta matriz y multiplicando por  ${}^0MAN$  obtenemos

$${}^1MAN_1 = (C_4(C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4)(MAN_1 - l_1 C_1 S_2) + (C_4(C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4)(MAN_1 - l_1 S_1 S_2) + (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4)(MAN_2 + l_1 C_2)$$

$${}^1MAN_2 = (S_4(-S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2)(MAN_1 - l_1 C_1 S_1) + (S_4(C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2)(MAN_1 - l_1 S_1 S_2) + (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)(MAN_2 + l_1 C_2)$$

$${}^1MAN_3 = (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3)(MAN_1 - l_1 C_1 S_1) + (-C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(MAN_1 - l_1 S_1 S_2) + (-S_2 S_3)(MAN_2 + l_1 C_2)$$

la variable articular  $\theta_5$  es por consiguiente :

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left( \frac{(C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3)(MAN_1 - l_1 C_1 S_1) + (-C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(MAN_1 - l_1 S_1 S_2) + (-S_2 S_3)(MAN_2 + l_1 C_2)}{(C_4(C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4)(MAN_1 - l_1 C_1 S_2) + (C_4(C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4)(MAN_1 - l_1 S_1 S_2) + (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4)(MAN_2 + l_1 C_2)} \right) \quad (41)$$

### 3.3.6 Obtención de la sexta variable articular $\theta_6$

**P**ODEMOS ahora obtener  $\theta_6$ , el cual es el ángulo comprendido entre los vectores  $X_5$  y  $X_6$ , alrededor de  $Z_6$ . Observando la figura (3-13) vemos que  $\theta_6$  lo podemos obtener mediante el uso de un ángulo auxiliar, el cual llamaremos  $\theta_6'$ . Este ángulo está formado entre la línea que forma el antebrazo y la que forma la muñeca, es decir C-M y M-MAN respectivamente. De tal manera, la relación requerida es

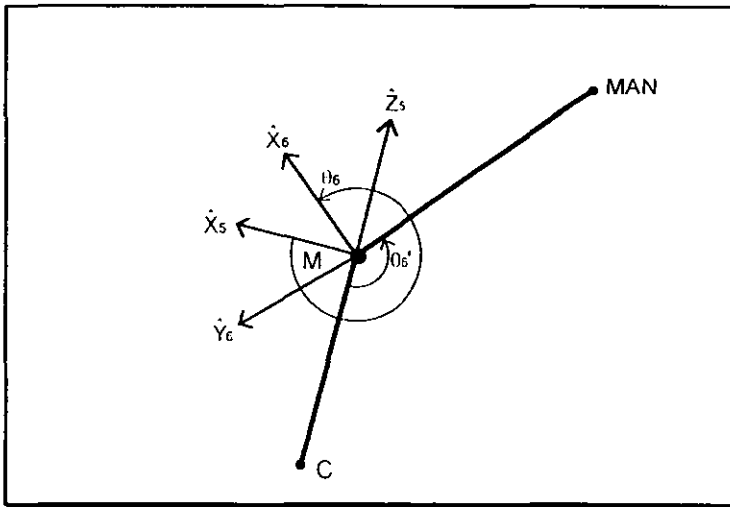


Fig. 3-13.

$$\theta_6' = \left( 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{{}^5MAN_z}{{}^5MAN_x} \right) \right) - 180^\circ \quad (42)$$

$$\theta_6 = 180^\circ + \theta_6' = 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{{}^5MAN_z}{{}^5MAN_x} \right) \quad (43)$$

$${}^5MAN = ({}^5T_0)^0 MAN = ({}^0T_5^{-1})^0 MAN \quad (44)$$

y la matriz de transformación requerida es

$${}^0T_5 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & l_1 C_1 S_2 + l_2 (C_1 C_4 S_2 + S_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)) \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & l_1 S_1 S_2 + l_2 (C_4 S_1 S_2 + S_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3)) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -l_1 C_2 - l_2 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$r_{11} = C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4) + S_5 (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3)$$

$$r_{12} = C_5 (C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) - S_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4)$$

$$r_{13} = C_1 C_4 S_2 + S_4 (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)$$

$$r_{21} = C_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4) - S_5 (C_1 C_3 + C_2 S_1 S_3)$$

$$r_{22} = C_5 (-C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) - S_5 (C_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3) - S_1 S_2 S_4)$$

$$r_{23} = C_4 S_1 S_2 + S_4 (C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3)$$

$$r_{31} = C_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4) - S_2 S_3 S_5$$

$$r_{32} = -C_5 S_2 S_3 - S_5 (C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4)$$

$$r_{33} = C_3 S_2 S_4 - C_2 C_4$$

por lo tanto,

$${}^5MAN_z = (C_1(C_2(C_3C_4 + S_3S_4) - C_3S_2S_4) + S_1(C_3S_4 - C_3C_2S_3S_4)) \left( {}^5MAN_z - (I_1C_1S_2 + I_2(C_3C_4S_2 + S_4(C_3C_2C_4 + S_3S_4))) \right) + (C_1(C_2(C_3C_4S_1 - C_3S_4) - S_3S_2S_4) - S_1(C_3C_4 + C_2S_3S_4)) \left( {}^5MAN_z - (I_1S_1S_2 + I_2(C_3S_1S_2 + S_4(C_3C_2C_4 - C_3S_4))) \right) + (C_3(C_2C_4S_2 + C_3S_4) - S_2S_3S_4) \left( {}^5MAN_z - (-I_1C_2 - I_2(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \right)$$

$${}^5MAN_x = (C_1(C_2S_4 - C_3C_2S_4) - S_1(C_2(C_3C_4C_2 + S_3S_4) - C_3S_2S_4)) \left( {}^5MAN_x - (I_1C_1S_2 + I_2(C_3C_4S_2 + S_4(C_3C_2C_4 + S_3S_4))) \right) + (C_1(-C_2C_4 - C_3S_2S_4) - S_1(C_2(C_3C_4S_1 - C_3S_4) - S_3S_2S_4)) \left( {}^5MAN_x - (I_1S_1S_2 + I_2(C_3S_1S_2 + S_4(C_3C_2C_4 - C_3S_4))) \right) + (-C_3S_2S_4 - S_1(C_3C_4S_2 + C_3S_4)) \left( {}^5MAN_x - (-I_1C_2 - I_2(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \right)$$

$${}^5MAN_y = (C_1C_4S_2 + S_1(C_3C_2C_4 + S_3S_4)) \left( {}^5MAN_y - (I_1C_1S_2 + I_2(C_3C_4S_2 + S_4(C_3C_2C_4 + S_3S_4))) \right) + (C_3S_1S_2 + S_1(C_3C_4S_1 - C_3S_4)) \left( {}^5MAN_y - (I_1S_1S_2 + I_2(C_3S_1S_2 + S_4(C_3C_2C_4 - C_3S_4))) \right) + (C_3S_2S_4 - C_2C_4) \left( {}^5MAN_y - (-I_1C_2 - I_2(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \right)$$

tomando lo anterior, la variable articular  $\theta_6$  es finalmente:

$$\theta_6 = 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{{}^5MAN_z}{{}^5MAN_x} \right) \tag{45}$$

### 3.3.7 Obtención de la séptima variable articular $\theta_7$

HASTA el momento conocemos ya todos los ángulos desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_6$ , solo faltándonos  $\theta_7$  para lograr completar nuestro análisis cinemático para un brazo con 7 grados de libertad. Conocemos pues la matriz  ${}^0T_6$  la cual está en función de estos ángulos  $\theta_1$  hasta  $\theta_6$ . De aquí tomaremos solamente la matriz de rotación  ${}^0R_6$ . También conocemos la matriz  ${}^0T_8$  ya que es un dato de entrada por ser un análisis de cinemática inversa. De aquí



tomaremos solamente la matriz de rotación  ${}^0R_8$ , de donde sabemos que  ${}^0R_8 = {}^0R_7$  debido a que no existe rotación entre las bases {7} y {8}, sino solo una traslación de 1<sub>3</sub> unidades (por lo cual  ${}^0T_8 \neq {}^0T_7$ ). De lo dicho anteriormente sabemos entonces que

$${}^0R_8 = {}^0R_7 = {}^0R_6 {}^6R_7 \quad (46)$$

despejando  ${}^6R_7$

$${}^6R_7 = ({}^0R_6)^{-1} {}^0R_7$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}n_x + r_{21}n_y + r_{31}n_z & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad (47)$$

donde las variables  $n$ ,  $s$ ,  $a$  son datos de entrada de cinemática inversa. (En la última matriz expuesta, no mostramos todos los elementos ya que, como veremos más adelante, no serán necesarios para la obtención de  $\theta_7$ )

también sabemos que

$$r_{11} = C_6 \left( C_5 \left( C_4 \left( C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 \right) - C_2 S_2 S_4 \right) + S_5 \left( C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3 \right) \right) - S_6 \left( C_1 C_4 S_2 + S_4 \left( C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 \right) \right) \quad (48)$$

$$r_{21} = C_6 \left( C_5 \left( C_4 \left( C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3 \right) - S_1 S_2 S_4 \right) + S_5 \left( -C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3 \right) \right) - S_6 \left( C_4 S_1 S_2 + S_4 \left( C_2 C_3 S_1 - C_1 S_3 \right) \right) \quad (49)$$

$$r_{31} = C_6 \left( C_5 \left( C_3 C_4 S_2 + C_2 S_4 \right) - S_2 S_3 S_5 \right) - S_6 \left( -C_2 C_4 + C_3 S_2 S_4 \right) \quad (50)$$

y por definición

$${}^6R_7 = \begin{pmatrix} \hat{x}_6 \cdot \hat{x}_7 & \hat{x}_6 \cdot \hat{y}_7 & \hat{x}_6 \cdot \hat{z}_7 \\ \hat{y}_6 \cdot \hat{x}_7 & \hat{y}_6 \cdot \hat{y}_7 & \hat{y}_6 \cdot \hat{z}_7 \\ \hat{z}_6 \cdot \hat{x}_7 & \hat{z}_6 \cdot \hat{y}_7 & \hat{z}_6 \cdot \hat{z}_7 \end{pmatrix} \quad (51)$$

tomando el primer elemento  $\hat{x}_6 \cdot \hat{x}_7$  de la matriz anterior y utilizando la definición de producto punto

$$\hat{x}_6 \cdot \hat{x}_7 = \|\hat{x}_6\| \|\hat{x}_7\| \cos \theta_7 \quad (52)$$

y por ser el módulo de un vector unitario igual a la unidad

$$\hat{x}_6 \cdot \hat{x}_7 = \cos \theta_7$$

finalmente despejando  $\theta_7$

$$\theta_7 = \cos^{-1}(r_{11}n_x + r_{21}n_y + r_{31}n_z) \quad (53)$$

donde  $r_{11}$ ,  $r_{21}$  y  $r_{31}$  se obtienen de las ecuaciones (48), (49) y (50) respectivamente.

### 3.4 LIMITACIONES DEL MODELO MATEMÁTICO

**O**BSERVANDO con detenimiento las ecuaciones que han sido obtenidas hasta el momento, notamos que existen valores para los cuales no es posible obtener una solución de estas. Esto puede ser debido a, por ejemplo, divisiones entre cero, raíces cuadradas negativas u otras que no permitan su solución. Es por esto que, a continuación, se enlistan los casos en que existen estos puntos singulares o limitaciones matemáticas.

De la ecuación (7),  $\theta_1 = \tan^{-1}({}^0C_1 / {}^0C_2)$ , notamos que la tangente está indeterminada para un valor de  ${}^0C_2$  igual a cero. Entonces siempre que  ${}^0C_2 = 0$  la ecuación anterior no será válida. En la figura (3-14), podemos observar casos en los que nuestra ecuación será indeterminada. Aquí se muestra la ya antes mencionada *ellipse* de la figura (3-4 y 3-5), con la cual

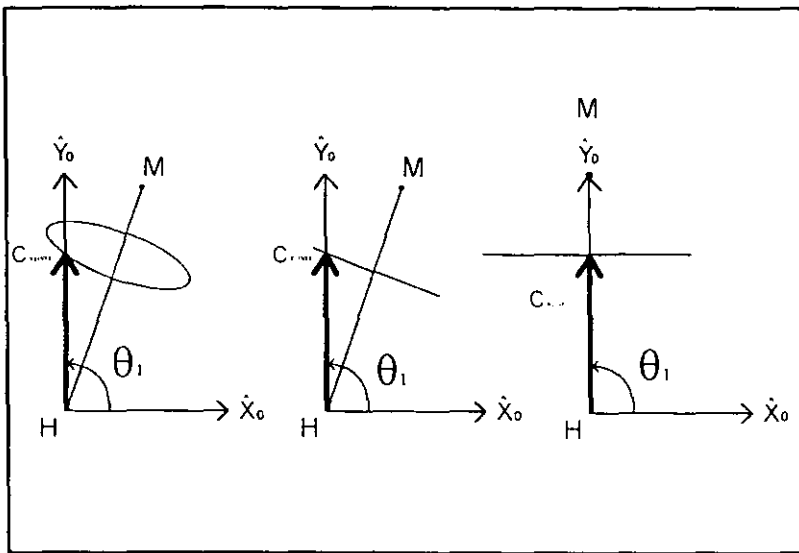


Fig. 3-14.

obtuvimos la variable articular  $\theta_1$ . (Cuando la componente en Z de  $\mathbf{M}$  es nula, se forma una línea y no una elipse)

Sabemos entonces que cuando  ${}^0\mathbf{C}_x \rightarrow 0$ ,  $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$ . Por tanto tenemos que poner atención al utilizar nuestro modelo matemático, de manera que siempre que  ${}^0\mathbf{C}_x$  sea nulo, pondremos un condicional para un ángulo  $\theta_1$  igual a  $90^\circ$ .

Observamos también que en la obtención de  ${}^0\mathbf{C}_x$ ,  ${}^0\mathbf{C}_y$ , y  ${}^0\mathbf{C}_z$ , ecuaciones (21,22 y 23), se utiliza la variable  $\|p\| = \sqrt{l_1^2 - \|d\|^2}$  en cada una de ellas. Estas ecuaciones no son válidas cuando  $d$  es mayor que  $l_1$ . Si esto llegara a suceder sería debido a que se está tratando de invadir un punto fuera del *espacio de trabajo* posible de nuestro manipulador. Esto quiere decir que físicamente no es posible tal configuración.

Otra limitante que notamos en las ecuaciones (21,22 y 23) es el divisor  $\sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ , el cual si llegase a ser nulo invalidará nuestras ecuaciones. Para que este divisor sea cero, el punto correspondiente a la muñeca  $\mathbf{M}$  debe estar colocado en algún lugar sobre el eje  $Z_0$ . Para esta configuración del brazo, la evolución del ángulo  $\phi$ , dibujará un círculo de radio  $P$ , con centro en el origen de la base  $\{0\}$ .

De la ecuación (30 y 31),  $\theta_2 = 90^\circ + \tan^{-1}({}^1\mathbf{C}_z / {}^1\mathbf{C}_x)$ , tenemos el mismo problema que para la primera variable articular, la tangente no está definida para  ${}^1\mathbf{C}_x = 0$ . Entonces cuando  ${}^1\mathbf{C}_x \rightarrow 0$ ,  $\tan^{-1}({}^1\mathbf{C}_z / {}^1\mathbf{C}_x) \rightarrow 90^\circ$ . De aquí la variable articular  $\theta_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

El condicional de nuestro modelo matemático indicará pues, que siempre que el vector  ${}^1\mathbf{C}_x$  sea nulo,  $\theta_2$  tendrá el valor de  $180^\circ$ .

De la ecuación (34),  $\theta_3 = \tan^{-1}\left({}^2m_z / {}^2m_x\right)$ , análogamente notamos que cuando  ${}^2m_x \rightarrow 0$ ,  $\theta_3 \rightarrow 90^\circ$ .

Pero tenemos también otra limitante para la existencia de  $\theta_3$ . Ya que esta variable está en función de la proyección del punto **M** sobre un plano paralelo a  $X_2Z_2$ , ver figura (10), puede no existir tal proyección (simplemente sería un punto) cuando  ${}^2m$  se vuelve paralelo a el vector  $y_2$ , es decir cuando es colineal a la línea formada entre el punto **H** y el punto **C**. Esto pasará cuando  $\theta_4$  sea igual a  $0^\circ$ . Nuestro modelo matemático esta limitado en este aspecto, de manera que no podemos obtener  $\theta_3$  cuando  $\theta_4 = 0^\circ$ .

Para la ecuación (41),  $\theta_5 = \tan^{-1}\left({}^4MAN_z / {}^4MAN_x\right)$ , al haber sido obtenida de manera similar que para la tercer variable articular  $\theta_3$ , tendremos las mismas restricciones. Primeramente cuando  ${}^4MAN_x$  tienda a cero,  $\theta_5$  tenderá  $90^\circ$ . Segundo, debido a que  $\theta_5$  está obligado a la existencia de  $MAN_{x4z4}$  y este a su vez depende de un ángulo  $\theta_6$  no nulo, tendremos aquí un punto singular para nuestro modelo matemático. Es decir cuando  $\theta_6 = 0^\circ$ , entonces  $\theta_5$  no está determinado.

De la ecuación (45),  $\theta_6 = 180^\circ + \tan^{-1}\left({}^5MAN_z / {}^5MAN_x\right)$ , cuando  ${}^5MAN_x$  tienda a cero, el ángulo cuya tangente tenderá a  $90^\circ$  por lo que la sexta variable articular  $\theta_6 = 270^\circ$ .

Las restricciones anteriores han sido en su mayoría debidas a divisiones entre cero. Igualmente tenemos una restricción para la obtención del *ángulo-eje equivalente*, más específicamente la obtención del vector  $u$ , ecuación (26).

$$\hat{u} = \frac{1}{2\text{Sin}\beta} \begin{pmatrix} S_z - a_y \\ a_x - n_z \\ n_y - s_x \end{pmatrix}$$

Aquí, cuando el valor del ángulo  $\beta$  toma el valor de  $0^\circ$  ó  $180^\circ$  tenemos como resultado una división entre cero. En este caso simplemente la ecuación quedará con un punto indefinido, y no como en el caso de las arco tangentes que podíamos sustituirlas por ángulos como  $90^\circ$ . Físicamente es difícil darse cuenta en que posiciones se adquieren estos valores de ángulos, ya que tendríamos que visualizar las dos bases referenciales intrínsecas que utiliza la ecuación (26), junto con su vector  $u$ , el cual es el eje de rotación de  $\beta$ . De hecho, el solo tratar de visualizar la matriz de rotación ya es complicado.

Finalmente es importante mencionar que al ir obteniendo resultados para las ecuaciones, es esencial el tener siempre en consideración una correcta interpretación geométrica de estos. No hay que olvidar, por ejemplo, que los arco tangentes solo nos proporcionan valores entre  $0$  y  $90^\circ$  ó  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  cuando en realidad el ángulo podría ser  $135^\circ$  si se tratara del II cuadrante. (ver página 79).

---

# CAPÍTULO CUATRO

## *SIMULACIÓN POR COMPUTADORA*

---

EL SIGUIENTE paso a realizar en este trabajo es utilizar lo obtenido del capítulo anterior mediante la aplicación de las ecuaciones para las variables articulares en algún lenguaje computacional. Lo que estamos buscando es primordialmente una simulación interactiva, es decir que permita entradas y salidas de datos de manera inmediata, capaz de crear una imagen gráfica del brazo preferentemente en un espacio tridimensional. La aplicación de esto se hará para la modelación en el espacio articular o bien cinemática inversa la cual, como ya vimos en el capítulo anterior, es la más laboriosa pero también la más utilizada en las aplicaciones prácticas.

Entonces en el programa a desarrollar necesitamos que el usuario introduzca los datos requeridos para la cinemática inversa del manipulador con 7 grados de libertad, siendo estos la matriz de transformación  ${}^0T_{MAN}$  y el ángulo de inclinación del brazo  $\varphi$ . Pero recordemos también que la matriz de transformación  ${}^0T_{MAN}$  está compuesta por un vector de posición **MAN** (**MAN<sub>x</sub>**, **MAN<sub>y</sub>**, **MAN<sub>z</sub>**, que es el punto medido desde el hombro, base {0}, hasta el punto **MAN**, base {8}), y una matriz de rotación  ${}^0R_{MAN}$ . Estos datos deben ser introducidos por el usuario, y entonces la computadora calculará los valores correspondientes para las variables articulares  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$  y también mostrará la posición visual correspondiente para esa configuración del brazo. Al ir cambiando la matriz  ${}^0T_8$  y el ángulo  $\varphi$ , se logrará observar el cambio en los valores y la posición del brazo en un sistema tridimensional

Otro punto importante en la programación es el considerar las limitaciones del modelo matemático (ver sección 3.4), de manera que estas sean sustituidas por los valores adecuados en caso de ser posible, o bien se de notificación al usuario de que el cálculo para cierta posición e inclinación específica no es factible. Dentro del programa se creó una subrutina que verifica estas limitantes matemáticas para dar aviso de ellas.

El código para el programa terminado se muestra en los ANEXOS, al final de este trabajo. La programación fue elaborada en el lenguaje *QuickBASIC*, siendo este un lenguaje sumamente sencillo de programar, lo cual demuestra que no se necesitan de lenguajes de *alto nivel*, ni mucho menos programas extremadamente complejos para poder utilizar el modelo matemático obtenido en este trabajo de tesis.

El primer problema que se tuvo para la elaboración de este programa fue la introducción por parte del usuario de la matriz  ${}^0R_8$ . Sería ideal que el usuario diera directamente esta matriz a la computadora, pero es realmente difícil lograr visualizar esta en el sentido físico además de que los componentes de la matriz tienen cierta dependencia entre sí. Observemos la matriz  ${}^0T_8$  o bien  ${}^0T_{MAN}$ :

$${}^0T_{MAN} = \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & a_1 & MAN_1 \\ n_1 & s_1 & a_1 & MAN_1 \\ n_2 & s_2 & a_2 & MAN_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La submatriz  ${}^0R_8$  es la correspondiente a la formada por las variables  $n_i$ ,  $s_i$  y  $a_i$ . Por el hecho de ser una matriz ortonormal, se debe cumplir que,



$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1 ; \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = 1 ; \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$$

junto con  $n_i \otimes s_j = a_i$

De esta manera, sería difícil para el usuario introducir valores para esta matriz los cuales cumplan con estas reglas, además de poder obtener la rotación deseada. Por estas razones se optó por utilizar una matriz auxiliar de rotación que permite una visualización sencilla, siendo esta :

$$R_{\delta, \gamma, \alpha} = \begin{pmatrix} C_\delta C_\gamma & C_\delta S_\gamma S_\alpha - S_\delta C_\alpha & C_\delta S_\gamma C_\alpha + S_\delta S_\alpha \\ S_\delta C_\gamma & S_\delta S_\gamma S_\alpha + C_\delta C_\alpha & S_\delta S_\gamma C_\alpha - C_\delta S_\alpha \\ -S_\gamma & C_\gamma S_\alpha & C_\gamma C_\alpha \end{pmatrix}$$

Esta es llamada matriz de representación para ángulos de Euler YPR (yaw, pitch, roll)<sup>15</sup>, desviación, elevación y giro, ver figura (4-1), los cuales han sido denominados  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  respectivamente.

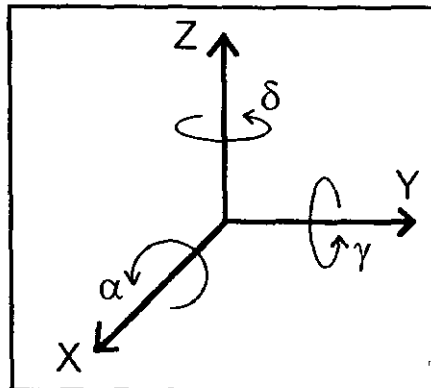


Fig. 4-1. Desviación, elevación y giro

<sup>15</sup> K S Fu, R C González, C S G. Lee, *Robotics*, Ob. cit., pág 26

Utilizando el concepto de giro, elevación y desviación, serán estas tres variables las que el usuario tendrá que dar a la computadora para luego ella calcular la matriz anterior y sustituirla por la matriz de rotación  ${}^0R_8$ . Mediante el cambio de estos tres ángulos, el usuario será capaz de ir rotando la muñeca gradualmente alrededor de los ejes correspondientes y observar el cambio que se produce en pantalla, donde se mostrará la matriz  ${}^0T_8$  con los valores correspondientes para esta posición y orientación.

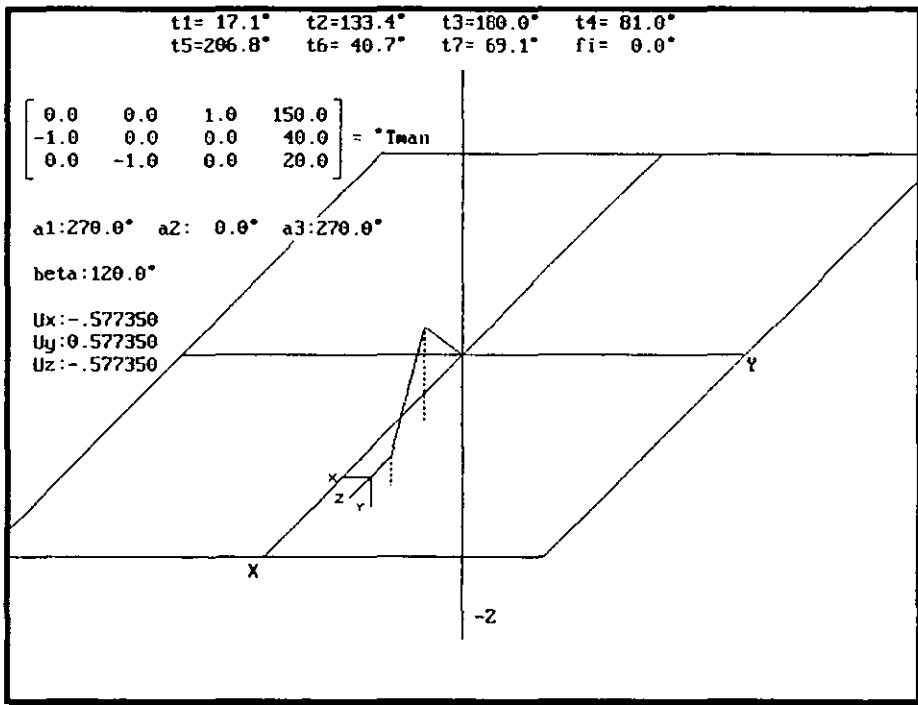


Fig. 4-2. Salida del programa para una posición aleatoria

Podemos observar en la figura (4-2), el resultado al correr el programa computacional para una posición aleatoria de la mano, una inclinación paralela de la muñeca con respecto al eje X, y una inclinación de  $0^\circ$  para el ángulo  $\phi$  (fi). Apreciamos en la figura la matriz  ${}^0T_{MAN}$ , que incluye

la matriz de rotación  ${}^0R_8$ , y la posición final del órgano terminal (se han eliminado los ceros y unos que vuelven homogénea la matriz, ya que no tienen importancia para su presentación). Aquí podemos ver también los ángulos de Euler de desviación, elevación y giro, nombrados  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  respectivamente. En la parte superior de la pantalla se despliegan todas las variables articulares  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$  ( $t_1$  hasta  $t_7$ ). Se muestra adicionalmente el ángulo-eje equivalente calculado ( $\beta$  y  $U$ ).

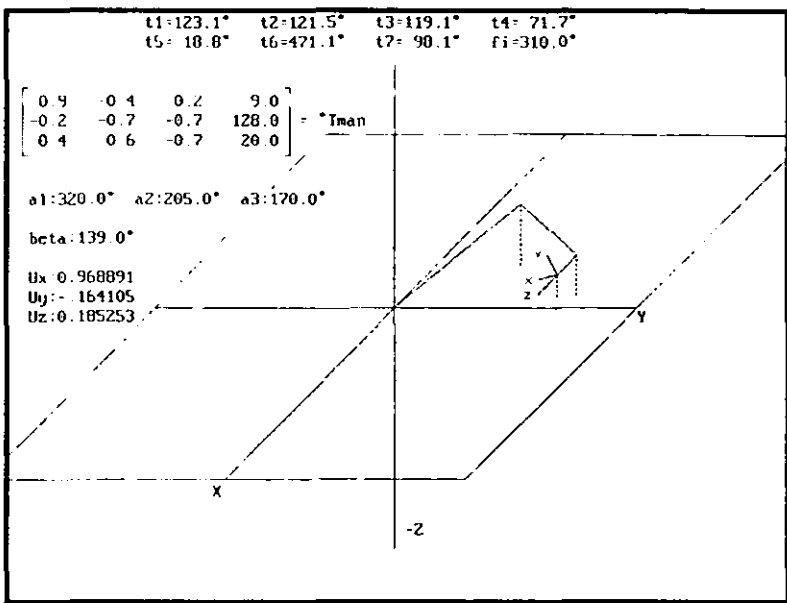
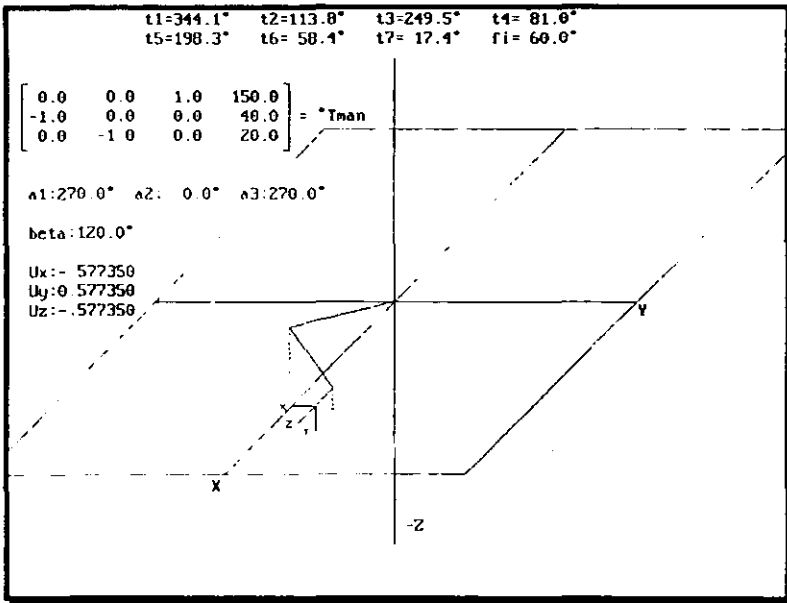
El pequeño sistema de referencia móvil **{8}** es mostrado al final de la línea que forma la mano (que viene siendo el punto **MAN**) con el propósito que se pueda ir visualizando la rotación de la misma. Las líneas punteadas son las proyecciones del punto **C** localizado en el codo y del punto **M** localizado en la muñeca, sobre el plano **XY** cuyo objetivo es también facilitar la visualización. Se utilizaron  $l_1=100$ ,  $l_2=80$ , y  $l_3=20$ .

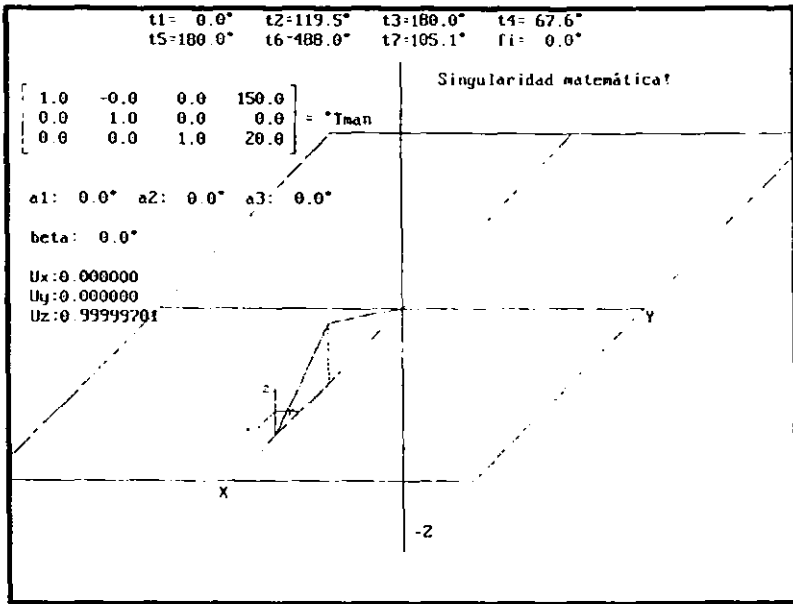
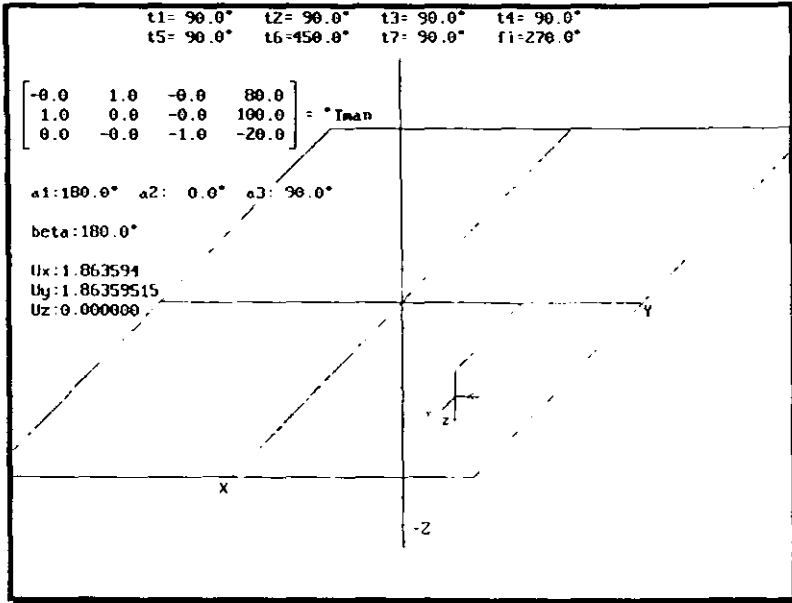
QuickBASIC no permite la obtención de arco cosenos, los cuales son necesarios para el cálculo de  $\theta_4$ , de  $\theta_7$  y del ángulo  $\beta$ . Por tanto se utilizó la siguiente identidad trigonométrica,

$$\text{Cos}^{-1}(\text{arg}) = \frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\text{arg}}{\sqrt{1 - \text{arg}^2}}\right)$$

Pero el inconveniente de hacer esto, es que se crean más limitaciones matemáticas que hay considerar durante la programación. Entonces, cuando el argumento (**arg**) toma el valor de 1 ó de -1, el arco tangente tiende a  $90^\circ$  ó a  $-90^\circ$  respectivamente, de donde el arco coseno será  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ . De esta manera es corregido el problema.

A continuación se muestran más salidas del programa para posiciones aleatorias





---

# RESULTADOS Y CONCLUSIONES

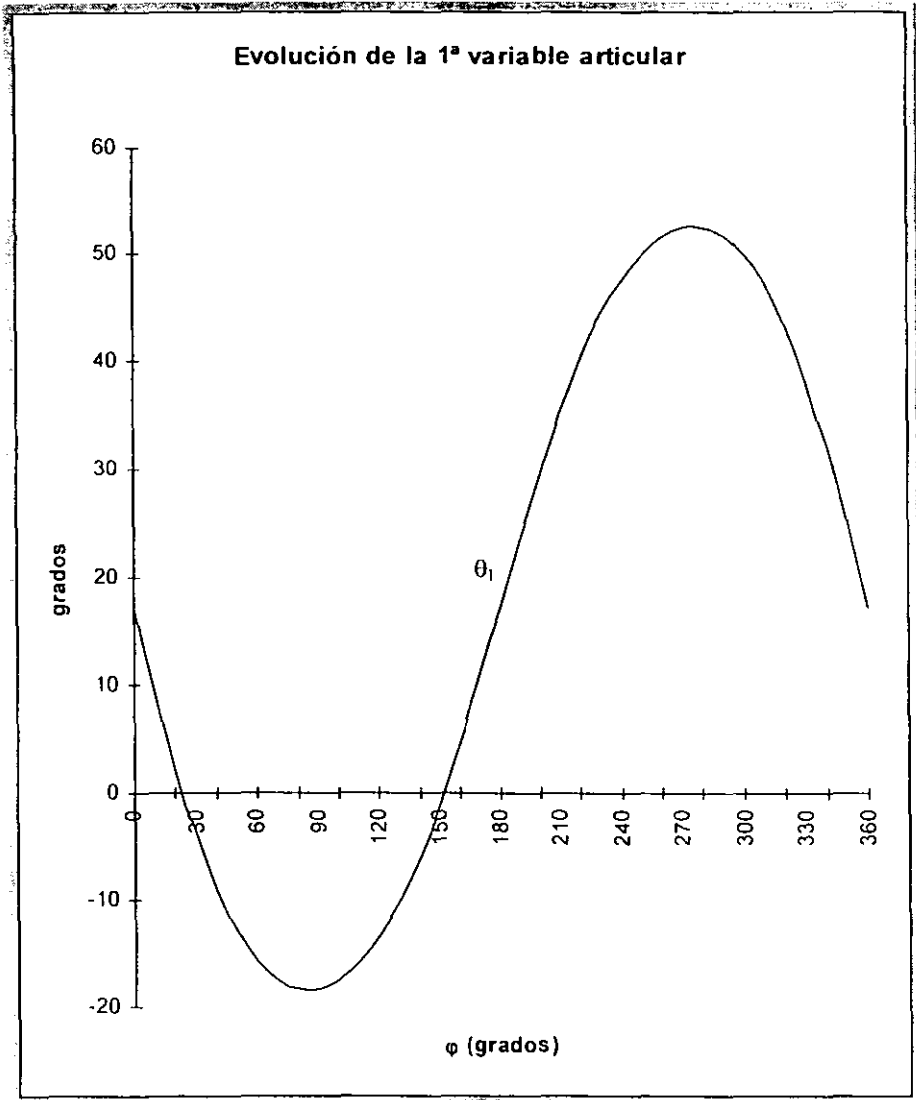
---

**D**URANTE el desarrollo de este trabajo se ha buscado determinar el comportamiento de tres articulaciones que conforman el brazo humano: una articulación esférica en el hombro, una articulación rotacional en el codo y una articulación esférica en la muñeca. Concluimos también que las articulaciones esféricas pueden sustituirse por tres articulaciones rotacionales cuyos ejes de movimiento fueran coincidentes en un solo punto. De esta manera las articulaciones correspondientes al hombro y a la muñeca serían sustituidas por rotacionales, dando como resultado un brazo con 7 variables articulares  $\theta_1$  hasta  $\theta_7$ .

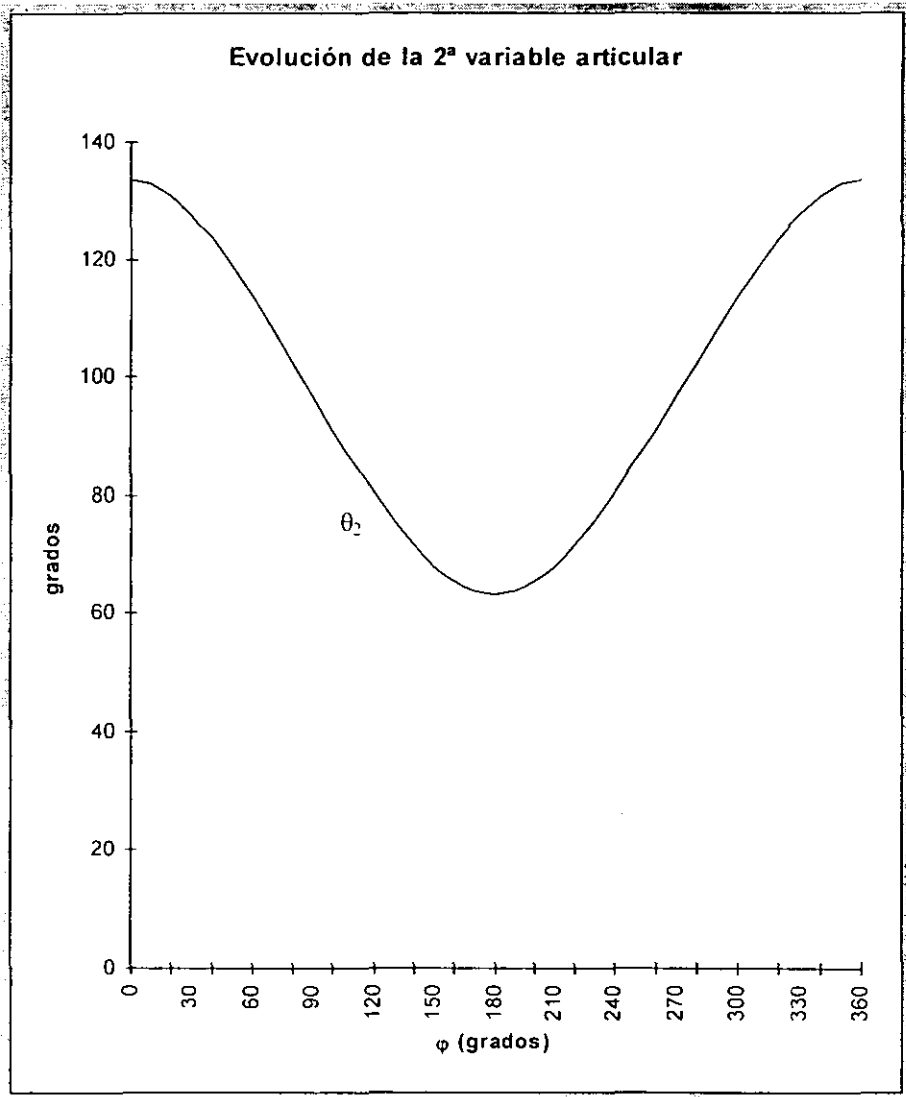
Para poder obtener resultados sobre la forma en que evolucionan estas variables articulares, según los modelos matemáticos obtenidos, se crearon gráficas correspondientes a cada variable. Los datos tomados para graficar fueron los siguientes (*ver figura 4.2*):

$$\begin{array}{lll} I_1=100 ; & I_2=80 ; & I_3=20 \\ MAN_x=150 ; & MAN_y=40 ; & MAN_z=20 \\ \alpha=270^\circ ; & \gamma=0^\circ & \delta=270^\circ \end{array}$$

Todos los demás valores son calculados por la computadora.

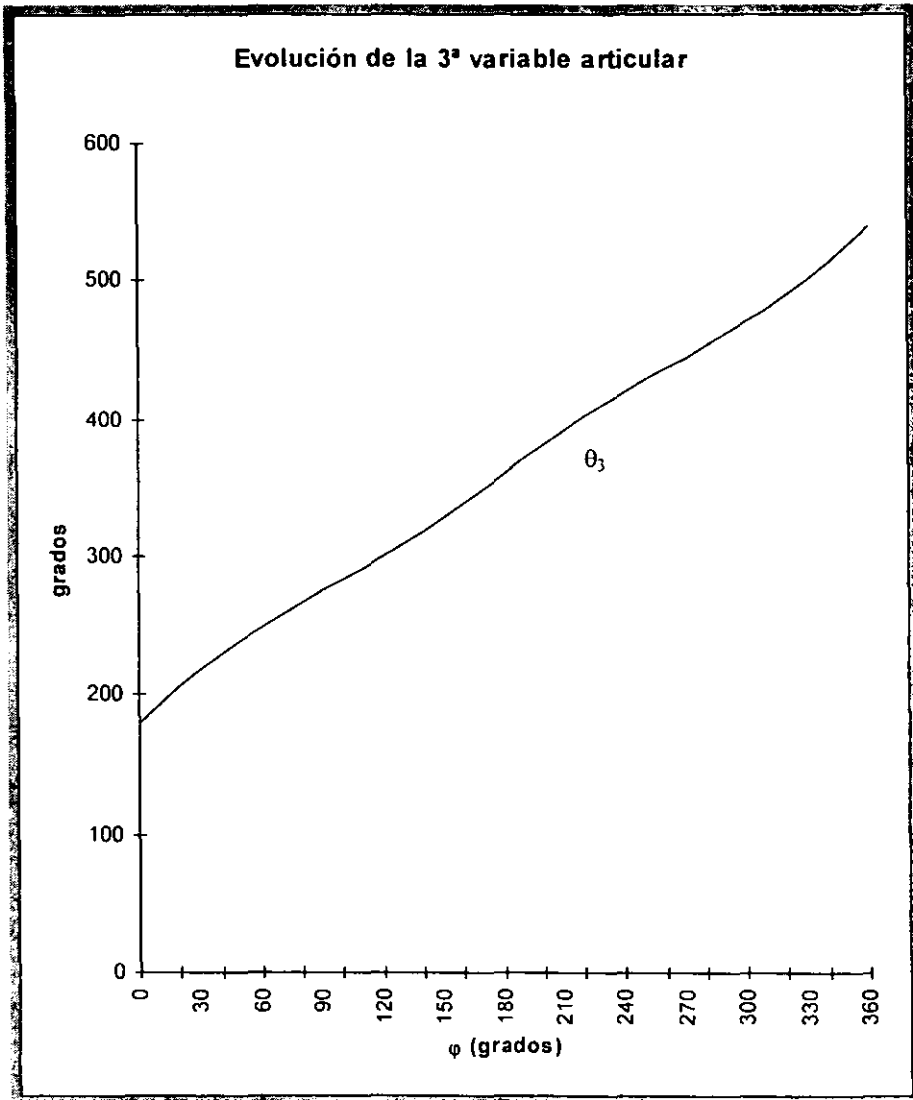


Gráfica R-1

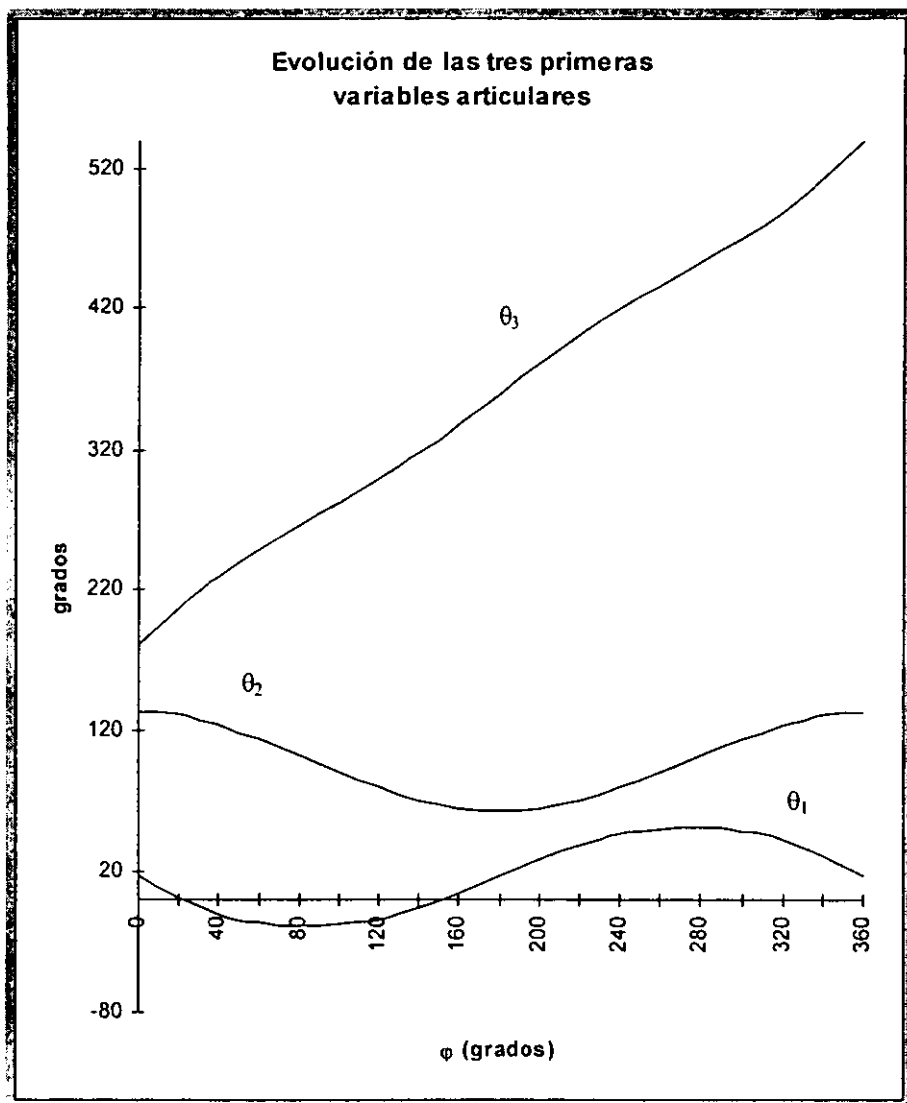


Gráfica R-2

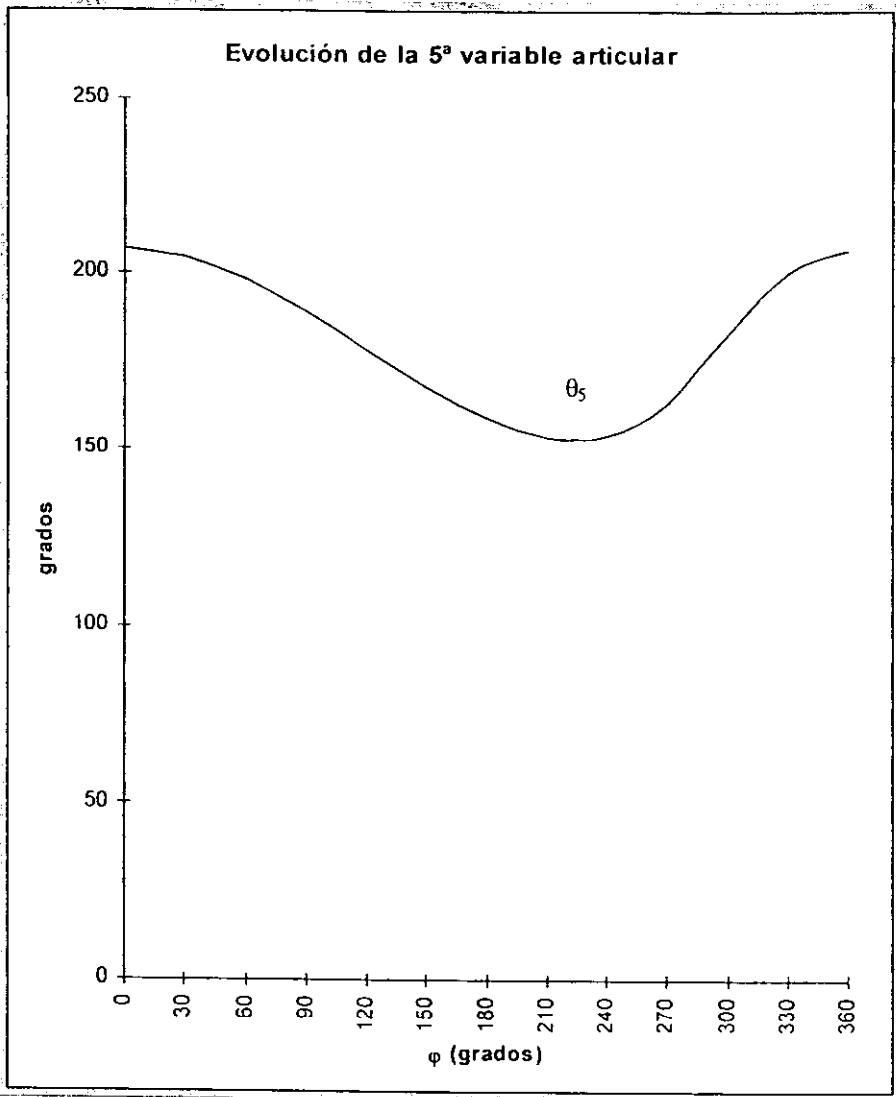




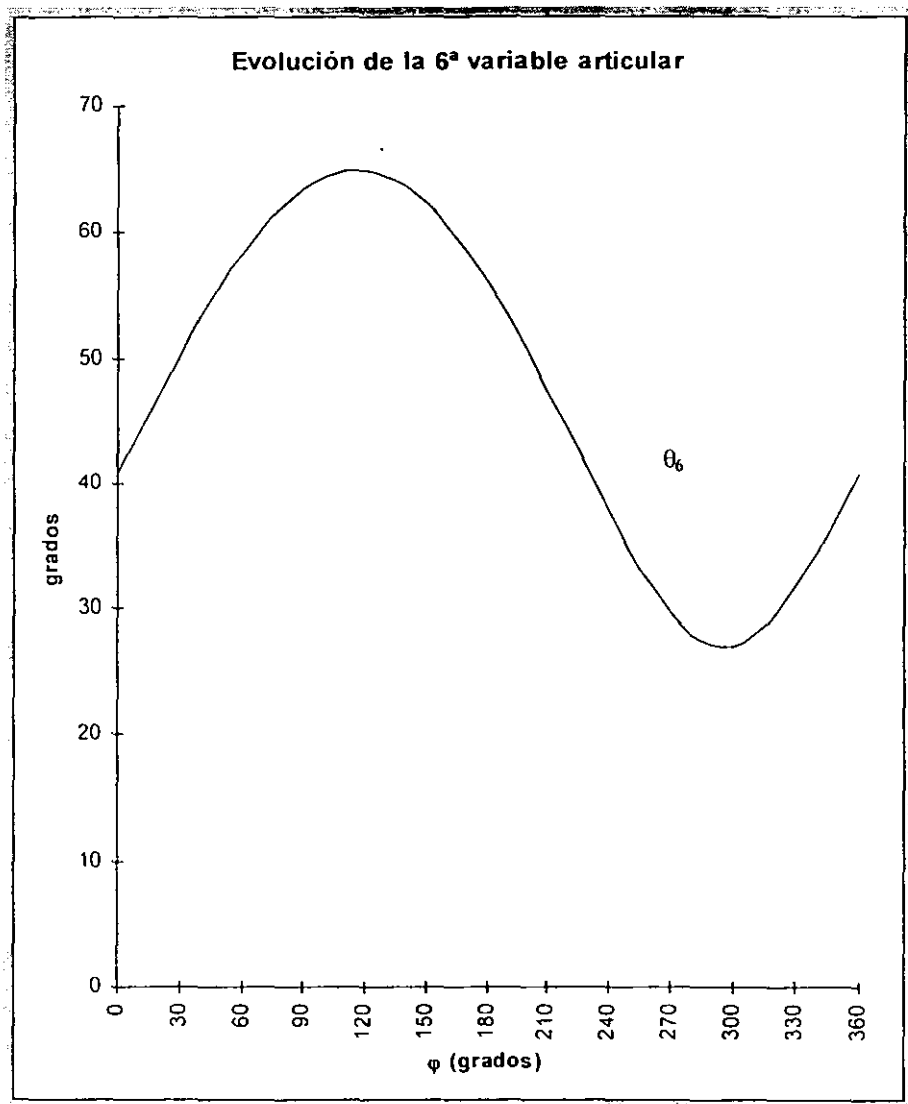
Gráfica R-3



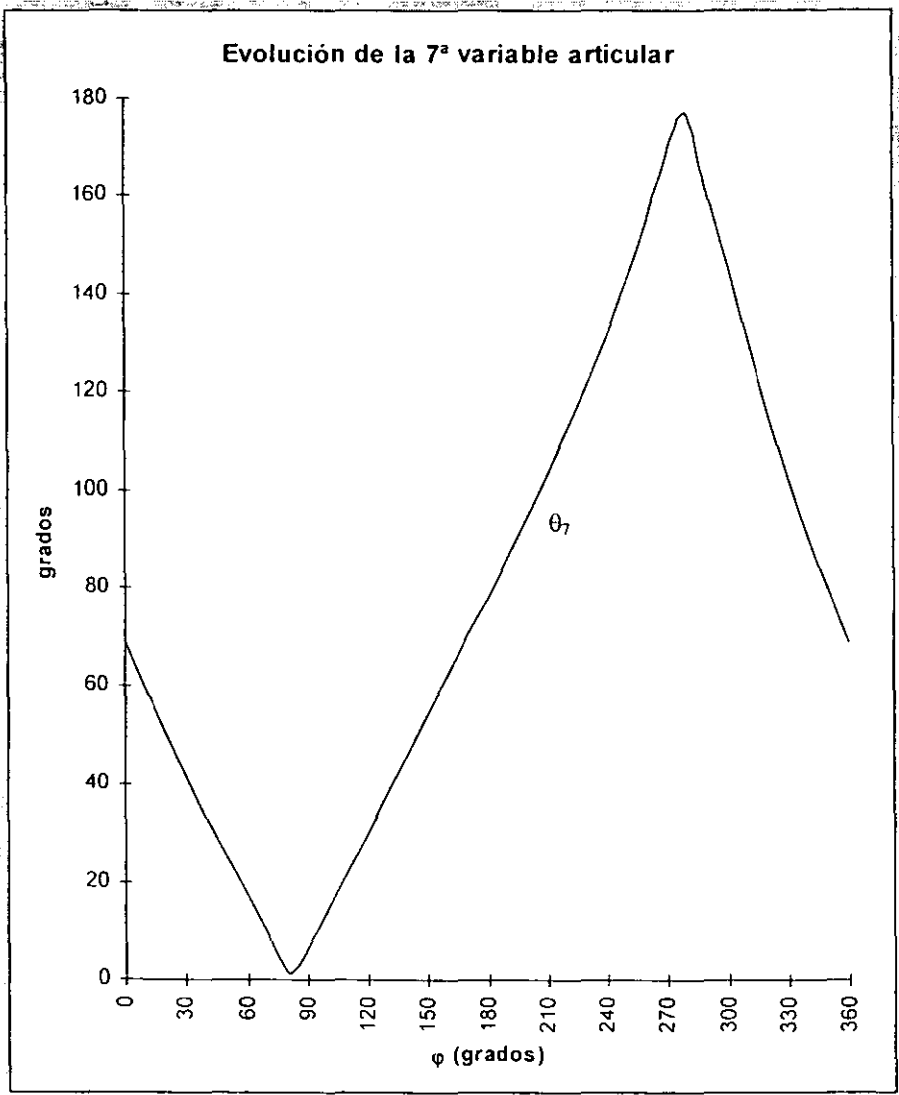
Gráfica R-4



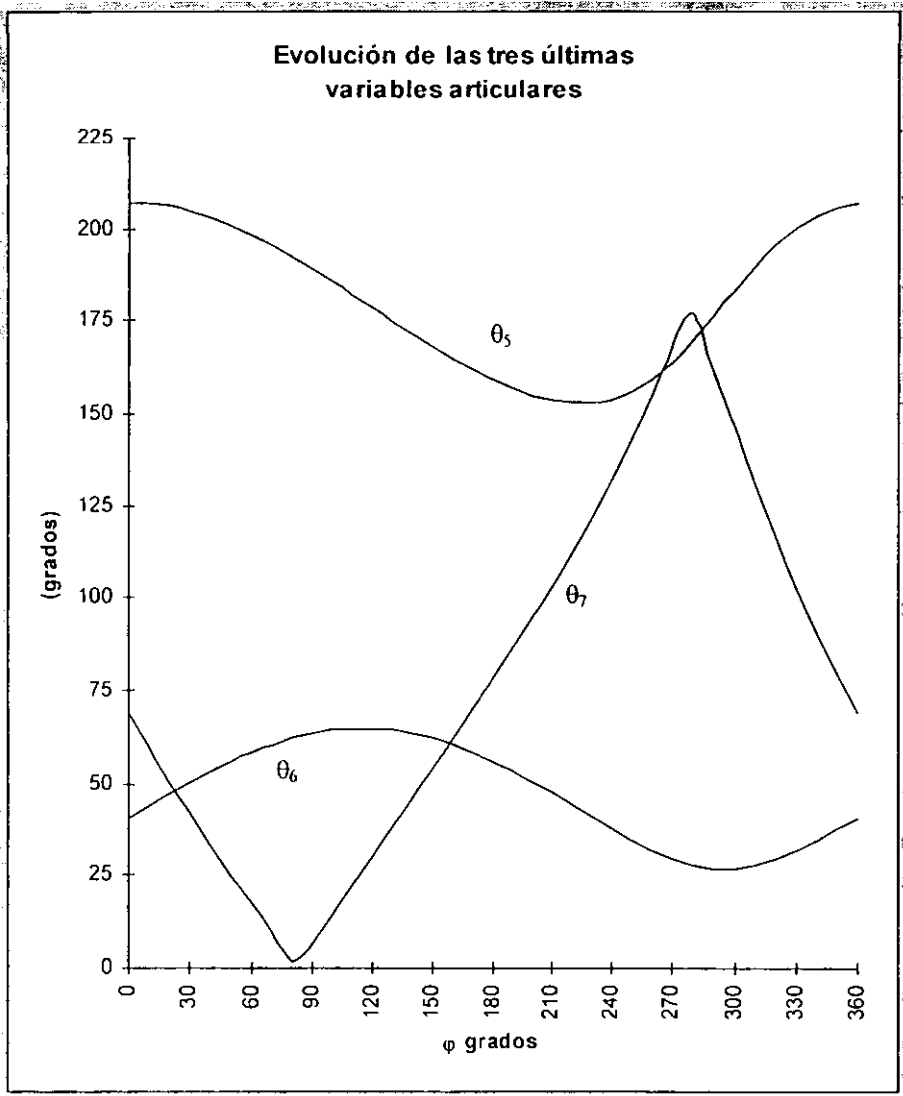
Gráfica R-5



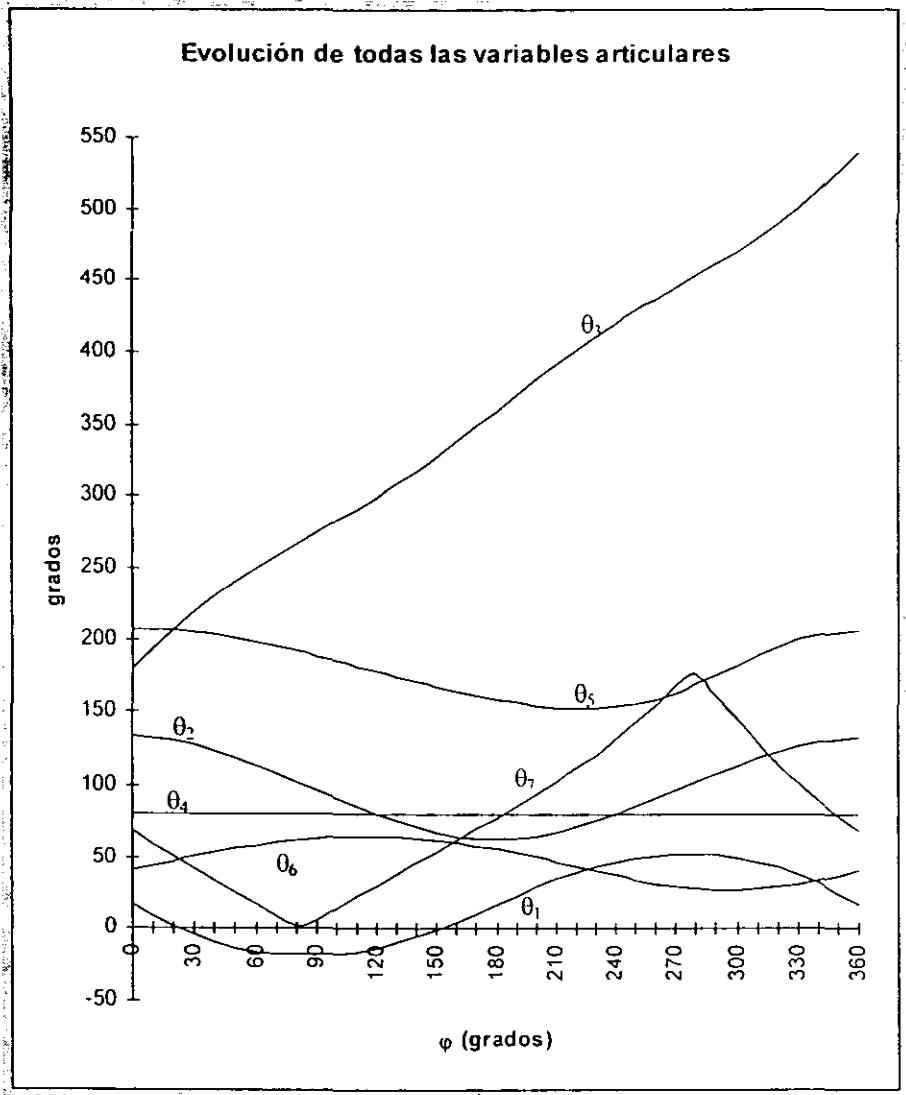
Gráfica R-6



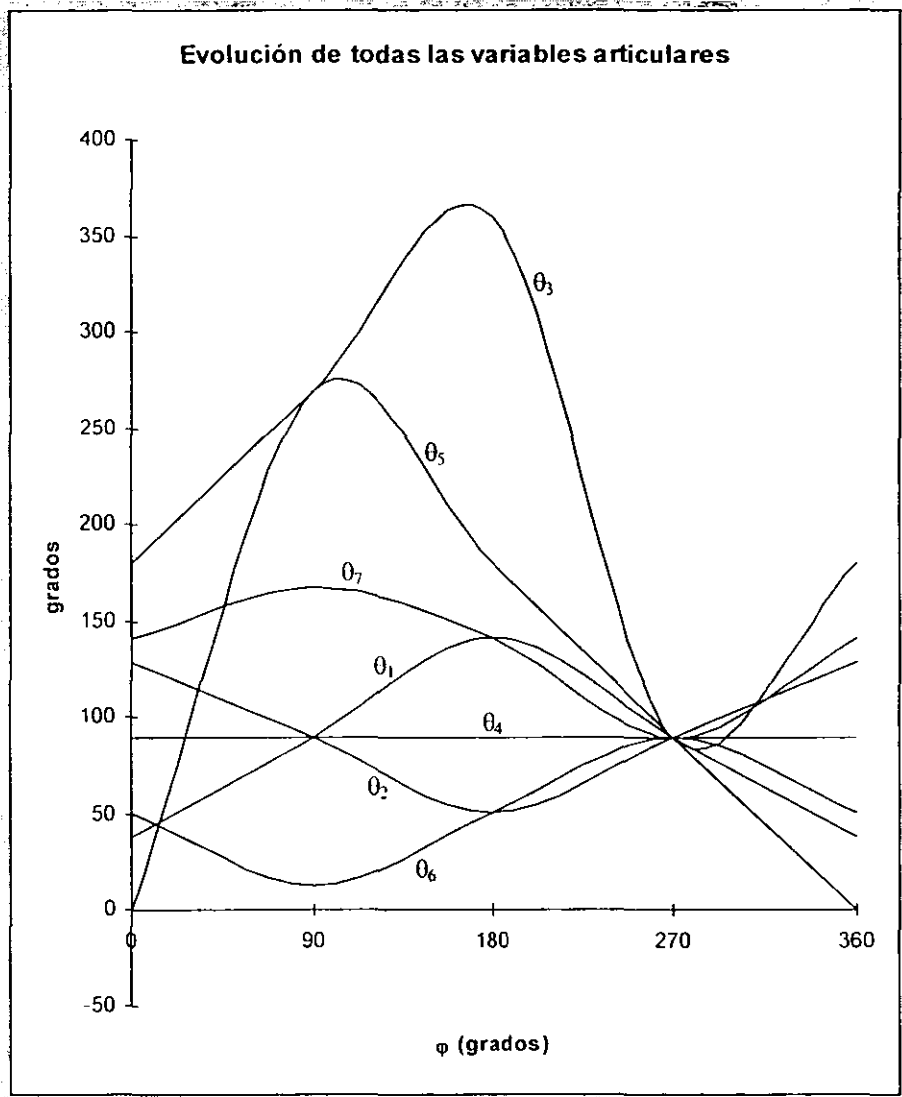
Gráfica R-7



Gráfica R-8



Gráfica R-9



Gráfica R-10



Las gráficas mostradas están en función de la variación del parámetro de inclinación del brazo  $\varphi$  desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ , es decir una revolución completa.

Las gráficas (R-1), (R-2) y (R-3) muestran la variación para cada variable articular  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  respectivamente. Notamos que tanto  $\theta_1$  como  $\theta_2$  presentan ser funciones periódicas<sup>16</sup> con máximos y mínimos, pero no así la variable  $\theta_3$  la cual asemeja una recta creciente que en principio se podría pensar que tiene un desenvolvimiento lineal, pero esto no es así. Observando con más detenimiento  $\theta_3$  tiene una forma sinuosa, la cual se verificaría si se vieran los valores punto a punto de la gráfica. Entonces esta variable presenta también un comportamiento similar aunque, para esta posición específica, no tan notorio.

$\theta_1$  comienza y termina con un valor de  $17.10^\circ$ , teniendo su mínimo en  $\varphi=80^\circ$  con  $-18.34^\circ$ . El máximo se encuentra en  $\varphi=280^\circ$  con  $52.55^\circ$ .  $\theta_2$  comienza y termina con  $133.44^\circ$ , teniendo su mínimo en  $\varphi=180^\circ$  con  $63.28^\circ$ .  $\theta_3$  comienza con un valor de  $180^\circ$ , pasa por  $360^\circ$  en  $\varphi=180^\circ$  y termina con un valor de  $540^\circ$  en  $\varphi=360^\circ$ , pero recordemos que un ángulo de  $540^\circ$  es equivalente a  $180^\circ$  por lo que se cumple el ciclo (la gráfica real mostraría dos cuasi-rectas ascendentes que se cortan en  $\varphi=180^\circ$ , pero para una presentación más adecuada se optó por permitir ángulos mayores a  $360^\circ$ , como también ángulos negativos).

La variable articular  $\theta_4$  presenta un valor constante de  $81^\circ$  a lo largo de toda la variación de  $\varphi$ . Esto era bastante obvio y de esperarse, ya que  $\theta_4$  no depende de  $\varphi$ , como de ninguna otra variable articular. Solamente está en función de las longitudes del brazo y antebrazo ( $l_1$  y  $l_2$ ) y de la posición de

---

<sup>16</sup> Matemáticamente, una función es periódica si existe un número  $p$  diferente de cero, tal que  $f(x+p)=f(x)$

la muñeca (*ver ecuación (38)*), las cuales se han mantenido constantes. No tendría caso mostrar una gráfica con solo esta variable ya que sería una línea horizontal a todo lo largo de las abscisas.

Agrupando las gráficas analizadas anteriormente, obtenemos la gráfica (R-4) donde podemos apreciar las posiciones relativas para las variaciones de las tres primeras articulaciones del brazo.

Analicemos ahora las gráficas (R-5), (R-6) y (R-7). Estas son las correspondientes a las articulaciones rotacionales equivalentes para la esférica de la muñeca. Nuevamente distinguimos un comportamiento periódico formado por máximos y mínimos, pero esta vez bastante claros en las tres variables  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  y  $\theta_7$  y no solo en las dos primeras.

$\theta_5$  comienza y termina con un valor de  $206.78^\circ$ , presentado un mínimo de  $153.16^\circ$  en  $\varphi=220^\circ$ .  $\theta_6$  comienza y termina con  $40.74^\circ$ , siguiéndole un máximo de  $64.86^\circ$  en  $\varphi=120^\circ$ , para después llegar a un mínimo de  $26.46^\circ$  en  $\varphi=290^\circ$ .  $\theta_7$  comienza y termina con  $69^\circ$ , luego llega a un mínimo de  $1.44^\circ$  en  $\varphi=80^\circ$ , para después presentar un máximo de  $177.3^\circ$  en  $\varphi=280^\circ$ .

Agrupemos estas tres variables para obtener la gráfica (R-8). Aquí se puede observar que  $\theta_7$  tiene el mayor rango de oscilación (amplitud) de las variables para la articulación de la muñeca, siendo este de aproximadamente  $175^\circ$  a comparación de unos  $53^\circ$  para  $\theta_5$  y de  $38^\circ$  para  $\theta_6$ .

Finalmente tenemos la gráfica (R-9) que conjunta las siete variables articulares incluyendo  $\theta_4$  que no se había mostrado en ninguna otra.

Cambiamos de posición y de inclinación el brazo. Mostramos la gráfica (R-10) que corresponde a una posición como es presentada en la figura superior de la página 108. Aquí todos los ángulo adquieren un valor de  $90^\circ$  solamente cuando la inclinación del brazo alcanza los  $270^\circ$ . De hecho no existe ninguna otra posición en el espacio en la cual todas las variables

articulares tomen este valor. La posición del órgano terminal es  $[80, 100, -20]^T$ .

Esta última gráfica nos sirve para observar nuevamente el comportamiento periódico de máximos y mínimos de todas las variables articulares excluyendo claro esta, la constante  $\theta_4$ . Comparando las últimas dos gráficas vemos que los valores de amplitud de las variables cambian y no mantienen un orden de valores, es decir no siempre  $\theta_5$  será mayor que  $\theta_1$ , por ejemplo.

Concluyendo de manera general, sin restarle importancia a lo sostenido anteriormente se resumen los siguientes puntos:

- Se logró cumplir el objetivo de este trabajo, siendo este el establecimiento de un modelo matemático del movimiento del brazo humano junto con una simulación por computadora que pone en manifiesto su validez funcional.
- Se lograron modelos tanto para la cinemática directa, como para la cinemática inversa, de donde esta última es la que tiene la mayor utilización práctica pero también, por desgracia, es donde existen las singularidades matemáticas que hay que tener cuidado a manera de evitarlas.
- Ambas articulaciones esféricas, la del hombro y la de la muñeca, se comportan como funciones periódicas pero no son iguales, ni tampoco lo son las articulaciones rotacionales equivalentes para estas articulaciones.
- Como era de esperarse, sobre la cuarta variable  $\theta_4$  no se tiene influencia al cambiar el parámetro de inclinación del brazo. Su dependencia solo esta en la posición de la muñeca y en las longitudes del brazo y antebrazo.

- Al sobrepasar los **6 GDL**, las ecuaciones se complican de manera sustancial, al igual que la extensión de las mismas. La existencia de varias soluciones para una misma posición existe, dando lugar a la redundancia cinemática (la cual es una de las primordiales razón de querer utilizar este tipo de manipuladores).
- Es sumamente recomendable el acercamiento geométrico y no uno por métodos numéricos (iterativo) o similar, ya que los cálculos se volverían excesivos y sumamente lentos, aún para computadoras con alta capacidad.
- Se obtuvieron limitaciones en el modelo matemático que restringen su uso. Se llegó a dos clases de estas limitaciones: las singularidades que pueden ser sustituidas mediante programación, como lo pueden ser los arco tangentes con divisores cero. Y las singularidades que simplemente no tienen reemplazo y deben ser evitadas, por ejemplo posiciones para  $\beta=0^\circ$  y  $180^\circ$ . Nuevamente aquí se destaca la importancia del enfoque geométrico ya que nos permite saber que posición se tiene para una solución que nuestro modelo no puede calcular directamente.
- Este trabajo permite la posibilidad de tener una extensión abordando la parte que cinemática y dinámicamente le seguirían, el estudio de las velocidades y aceleraciones y más adelante de momentos y fuerzas.

## **Bibliografía**

O'Rahilly, Ronan, *Anatomía*, Ed. Interamericana, México, 1989. 5ª edición, 928 pp.

Yokochi, Rohen, Weinreb, *Atlas fotográfico de anatomía del cuerpo humano*, Ed. Interamericana, Japón, 1991, 3ª edición. 139 pp.

Lockhart, Hamilton, Fyfe, *Anatomía humana*, Ed. Interamericana, México, 1965, 695 pp.

Biblioteca juvenil del cuerpo humano, *El cuerpo humano. El esqueleto*, Ed. Multilibro, S.A., España, 1989, 29 pp.

Biblioteca juvenil del cuerpo humano, *El cuerpo humano. La musculatura*, Ed. Multilibro, S.A., España, 1990, 29 pp.

Panero, Julios, *Las dimensiones humanas en los espacios interiores. Estándares antropométricos*, Ediciones G. Gili, S.A., México, 1989, 320 pp.

Sanders, Mark, *Human factors in engineering and design*, Editorial McGraw-Hill, Singapore, 1987, 664 pp.

Oborne, David, *Ergonomía en acción. La adaptación del medio de trabajo al hombre*, Editorial Trillas, México, 1987. 401 pp.

Juárez Campos, Ignacio, Tesis de maestría: *Diseño y construcción de un manipulador de 5 grados de libertad*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1995.

Craig, John J., *Introduction to Robotics, mechanics and control*, Addison-Wesley Publishing, 1986, 446 pp.

Nakamura, Yoshihiko, *Advanced Robotics, redundancy and optimization*, Addison-Wesley Publishing, 1991. 337 pp.

---

K.S. Fu, R.C. González, C.S.G. Lee, *Robotics. Control, sensing, vision and control*, Mac Graw Hill, 1987.

——, Qbasic Interpreter, *Microsoft Corporation*, Mac Graw Hill, 2ª ed., 1984, 498 pp.

Larson, Roland, *Cálculo y geometría analítica*, 3º ed., 1989, 1134 pp.

Barnett, Raymond, *Álgebra*, Mac Graw Hill, 2ª ed., 1984, 498 pp.

---

# ANEXOS

---

## Código para el programa de *QuickBASIC*

```
ON ERROR GOTO errores
CLS
CONST pi = 3.141592654#
fig = 0
I1 = 100: I2 = 80: I3 = 20 'POSICIÓN INICIAL
Manx = 150: Many = 40: Manz = 20

beta = 120 * (pi / 180)
Ux = -1 / SQR(3): Uy = 1 / SQR(3): Uz = -1 / SQR(3)
a1 = 270 * (pi / 180): a2 = 0: a3 = 270 * (pi / 180)

SCREEN 12: WINDOW (-320, -240)-(320, 240)

DO
GOSUB calculos
GOSUB ejes
GOSUB dibujobrazo
GOSUB texto
GOSUB terminal
GOSUB terminalnom

DO
k$ = INKEY$
LOOP WHILE k$ = ""

GOSUB borrar
GOSUB unterminal
GOSUB unterminalnom
```

```
GOSUB teclado
LOCATE 4, 45: PRINT "
```

```
LOOP UNTIL k$ = "q"
END
```

teclado:

```
IF k$ = "a" THEN Manx = Manx + 1
IF k$ = "z" THEN Manx = Manx - 1
IF k$ = "s" THEN Many = Many + 1
IF k$ = "x" THEN Many = Many - 1
IF k$ = "d" THEN Manz = Manz + 1
IF k$ = "c" THEN Manz = Manz - 1
```

```
IF k$ = "f" THEN a1 = a1 + 5 * (pi / 180)
IF k$ = "v" THEN a1 = a1 - 5 * (pi / 180)
IF k$ = "g" THEN a2 = a2 + 5 * (pi / 180)
IF k$ = "b" THEN a2 = a2 - 5 * (pi / 180)
IF k$ = "h" THEN a3 = a3 + 5 * (pi / 180)
IF k$ = "n" THEN a3 = a3 - 5 * (pi / 180)
```

```
IF k$ = "o" THEN fig = fig + 5: IF fig = 360 THEN fig = 0
IF k$ = "p" THEN fig = fig - 5: IF fig = -5 THEN fig = 355
```

```
RETURN
```

dibujobrazo:

```
x1 = 0: y1 = 0: z1 = 0: x2 = c0x: y2 = c0y: z2 = c0z: col = 6: GOSUB linea
'HOMBRO-CODO
x1 = c0x: y1 = c0y: z1 = c0z: x2 = mx: y2 = my: z2 = mz: col = 6: GOSUB linea
'CODO-MUÑECA
x1 = mx: y1 = my: z1 = mz: x2 = Manx: y2 = Many: z2 = Manz: col = 6: GOSUB
linea 'MUÑECA-MANO
x1 = c0x: y1 = c0y: z1 = c0z: x2 = c0x: y2 = c0y: z2 = 0: col = 8: GOSUB lineapunt
'PROYECCION CODO EN PLAONO X-Y
x1 = mx: y1 = my: z1 = mz: x2 = mx: y2 = my: z2 = 0: col = 8: GOSUB lineapunt
'PROYECCION MUÑECA EN PLANO X-Y
```



```
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx: y2 = Many: z2 = 0: col = 8:
GOSUB lineapunt 'PROYECCION MANO EN PLANO X-Y
RETURN
```

borrar:

```
x1 = 0: y1 = 0: z1 = 0: x2 = c0x: y2 = c0y: z2 = c0z: col = 0: GOSUB linea
x1 = c0x: y1 = c0y: z1 = c0z: x2 = mx: y2 = my: z2 = mz: col = 0: GOSUB linea
x1 = mx: y1 = my: z1 = mz: x2 = Manx: y2 = Many: z2 = Manz: col = 0: GOSUB
linea
x1 = c0x: y1 = c0y: z1 = c0z: x2 = c0x: y2 = c0y: z2 = 0: col = 0: GOSUB lineapunt
x1 = mx: y1 = my: z1 = mz: x2 = mx: y2 = my: z2 = 0: col = 0: GOSUB lineapunt
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx: y2 = Many: z2 = 0: col = 0:
GOSUB lineapunt
RETURN
```

linea:

```
xdib1 = y1 - x1 * COS(45 * (pi / 180))
ydib1 = z1 - x1 * COS(45 * (pi / 180))
xdib2 = y2 - x2 * COS(45 * (pi / 180))
ydib2 = z2 - x2 * COS(45 * (pi / 180))
LINE (xdib1, ydib1)-(xdib2, ydib2), col
RETURN
```

lineapunt:

```
xdib1 = y1 - x1 * COS(45 * (pi / 180))
ydib1 = z1 - x1 * COS(45 * (pi / 180))
xdib2 = y2 - x2 * COS(45 * (pi / 180))
ydib2 = z2 - x2 * COS(45 * (pi / 180))
LINE (xdib1, ydib1)-(xdib2, ydib2), col, , &HEEEE
RETURN
```

ejes:

```
col = 7
x1 = 200: y1 = 0: z1 = 0: x2 = -200: y2 = 0: z2 = 0: GOSUB linea
LINE (0, 0)-(0, -200), 7
x1 = 200: y1 = -200: z1 = 0: x2 = 200: y2 = 200: z2 = 0: GOSUB linea
```

```

x1 = 200: y1 = 200: z1 = 0: x2 = -200: y2 = 200: z2 = 0: GOSUB linea
x1 = -200: y1 = 200: z1 = 0: x2 = -200: y2 = -200: z2 = 0: GOSUB linea
x1 = -200: y1 = -200: z1 = 0: x2 = 200: y2 = -200: z2 = 0: GOSUB linea
LINE (-200, 0)-(-200, 0), 7: LINE (0, 0)-(0, 200), 7
LOCATE 25, 22: PRINT "X": LOCATE 16, 66: PRINT "Y": LOCATE 27, 42:
PRINT "-Z"
RETURN

```

texto:

```

LOCATE 1, 1
PRINT , "t1="; : PRINT USING "###.#°"; t1 * (180 / pi); : PRINT " t2="; : PRINT
USING "###.#°"; t2 * (180 / pi);
PRINT " t3="; : PRINT USING "###.#°"; t3 * (180 / pi); : PRINT " t4="; :
PRINT USING "###.#°"; t4 * (180 / pi)
PRINT , "t5="; : PRINT USING "###.#°"; t5 * (180 / pi); : PRINT " t6="; : PRINT
USING "###.#°"; t6 * (180 / pi);
PRINT " t7="; : PRINT USING "###.#°"; t7 * (180 / pi);
PRINT " fi="; : PRINT USING "###.#°"; fig

```

```

LINE (-310, 180)-(-310, 125): LINE (-310, 180)-(-305, 180): LINE (-310, 125)-(-
305, 125)
LINE (-88, 180)-(-88, 125): LINE (-88, 180)-(-93, 180): LINE (-88, 125)-(-93, 125)

```

```

LOCATE 5, 3: PRINT USING "###.#"; nx
LOCATE 6, 3: PRINT USING "###.#"; ny
LOCATE 7, 3: PRINT USING "###.#"; nz
LOCATE 5, 10: PRINT USING "###.#"; sx
LOCATE 6, 10: PRINT USING "###.#"; sy
LOCATE 7, 10: PRINT USING "###.#"; sz
LOCATE 5, 17: PRINT USING "###.#"; ax
LOCATE 6, 17: PRINT USING "###.#"; ay
LOCATE 7, 17: PRINT USING "###.#"; az

```

```

LOCATE 5, 24: PRINT USING "###.#"; Manx
LOCATE 6, 24: PRINT USING "###.#"; Many
LOCATE 7, 24: PRINT USING "###.#"; Manz

```

```
LOCATE 6, 31: PRINT "= °Tman"
```

```
LOCATE 10, 1: PRINT USING " a1:###.#°"; a1 * (180 / pi);
PRINT USING " a2:###.#°"; a2 * (180 / pi);
PRINT USING " a3:###.#°"; a3 * (180 / pi)
```

```
LOCATE 12, 1: PRINT " beta: "; : PRINT USING "###.#°"; beta * (180 / pi)
LOCATE 14, 1: PRINT " Ux: "; : PRINT USING "#.#####"; Ux
LOCATE 15, 1: PRINT " Uy: "; : PRINT USING "#.#####"; Uy
LOCATE 16, 1: PRINT " Uz: "; : PRINT USING "#.#####"; Uz
```

```
RETURN
```

calculos:

```
nx = COS(a3) * COS(a2)
ny = SIN(a3) * COS(a2)
nz = -SIN(a2)
sx = COS(a3) * SIN(a2) * SIN(a1) - SIN(a3) * COS(a1)
sy = SIN(a3) * SIN(a2) * SIN(a1) + COS(a3) * COS(a1)
sz = COS(a2) * SIN(a1)
ax = COS(a3) * SIN(a2) * COS(a1) + SIN(a3) * SIN(a1)
ay = SIN(a3) * SIN(a2) * COS(a1) - COS(a3) * SIN(a1)
az = COS(a2) * COS(a1)
```

```
arg = (nx + sy + az - 1) / 2
```

```
IF ABS(arg) = 1 THEN
```

```
beta = (pi / 2) - arg * (pi / 2)
```

```
ELSE
```

```
beta = (pi / 2) - ATN(arg / SQR(1 - (arg ^ 2)))
```

```
END IF
```

```
Ux = (1 / (2 * SIN(beta))) * (sz - ay)
```

```
Uy = (1 / (2 * SIN(beta))) * (ax - nz)
```

```
Uz = (1 / (2 * SIN(beta))) * (ny - sx)
```

```
mx = Manx - I3 * (Ux * Uz * (1 - COS(beta)) + Uy * SIN(beta))
```

```
my = Many - I3 * (Uy * Uz * (1 - COS(beta)) - Ux * SIN(beta))
```

```
mz = Manz - I3 * (Uz * Uz * (1 - COS(beta)) + COS(beta))
```

```

m = SQR(mx ^ 2 + my ^ 2 + mz ^ 2)
d = (l1 ^ 2 - l2 ^ 2 + m ^ 2) / (2 * m)
p = SQR(l1 ^ 2 - d ^ 2)
fi = fig * (pi / 180)

c0x = (d * mx / m) + (p / SQR(mx ^ 2 + my ^ 2)) * (my * SIN(fi) - (mx * mz *
COS(fi) / m))
c0y = (d * my / m) + (p / SQR(mx ^ 2 + my ^ 2)) * (-mx * SIN(fi) - (my * mz *
COS(fi) / m))
c0z = (d * mz / m) + ((p * COS(fi) * SQR(mx ^ 2 + my ^ 2)) / m)
IF c0x = 0 THEN t1 = pi / 2 ELSE t1 = ATN(c0y / c0x)
ang = t1: x = c0x: y = c0y: GOSUB cuadrante: t1 = ang

c1x = c0x * COS(t1) + c0y * SIN(t1)
c1z = c0z
IF c1x = 0 THEN t2 = pi ELSE t2 = (90 * (pi / 180)) + (ATN(c1z / c1x))
ang = t2: x = c1x: y = c1z: GOSUB cuadrante: t2 = ang

m2x = (COS(t1) * COS(t2) * mx) + (SIN(t1) * COS(t2) * my) + (SIN(t2) * mz)
m2z = SIN(t1) * mx - COS(t1) * my
IF m2x = 0 THEN t3 = pi / 2 ELSE t3 = ATN(m2z / m2x)
ang = t3: x = m2x: y = m2z: GOSUB cuadrante: t3 = ang

arg = ((m ^ 2 - l1 ^ 2 - l2 ^ 2) / (-2 * l1 * l2))

IF ABS(arg) = 1 THEN
t4p = (pi / 2) - arg * (pi / 2)
ELSE
t4p = (pi / 2) - ATN(arg / SQR(1 - (arg ^ 2)))
END IF
t4 = pi - t4p

man4x = ((COS(t4) * (COS(t1) * COS(t2) * COS(t3) + SIN(t1) * SIN(t3)) - COS(t1)
* SIN(t2) * SIN(t4)) * (Manx - l1 * COS(t1) * SIN(t2))) + ((COS(t4) * (COS(t2) *
COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) * SIN(t3)) - SIN(t1) * SIN(t2) * SIN(t4)) * (Many - l1
* SIN(t1) * SIN(t2))) + ((COS(t3) * COS(t4) * SIN(t2) + COS(t2) * SIN(t4)) *
(Manz + l1 * COS(t2)))

```

```

man4z = ((COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) * COS(t2) * SIN(t3)) * (Manx - 11 *
COS(t1) * SIN(t2))) + ((-COS(t1) * COS(t3) - COS(t2) * SIN(t1) * SIN(t3)) *
(Many - 11 * SIN(t1) * SIN(t2))) + ((-SIN(t2) * SIN(t3)) * (Manz + 11 * COS(t2)))
IF man4x = 0 THEN t5 = pi / 2 ELSE t5 = ATN(man4z / man4x)
ang = t5: x = man4x: y = man4z: GOSUB cuadrante: t5 = ang

```

```

Px = 11 * COS(t1) * SIN(t2) + 12 * (COS(t1) * COS(t4) * SIN(t2) + SIN(t4) *
(COS(t1) * COS(t2) * COS(t3) + SIN(t1) * SIN(t3)))
Py = 11 * SIN(t1) * SIN(t2) + 12 * (COS(t4) * SIN(t1) * SIN(t2) + SIN(t4) *
(COS(t2) * COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) * SIN(t3)))
Pz = -11 * COS(t2) - 12 * (COS(t2) * COS(t4) - COS(t3) * SIN(t2) * SIN(t4))
man5x = (COS(t5) * (COS(t4) * (COS(t1) * COS(t2) * COS(t3) + SIN(t1) *
SIN(t3)) - COS(t1) * SIN(t2) * SIN(t4)) + SIN(t5) * (COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) *
COS(t2) * SIN(t3))) * (Manx - Px) + (COS(t5) * (COS(t4) * (COS(t2) * COS(t3) *
SIN(t1) - COS(t1) * SIN(t3)) - SIN(t1) * SIN(t2) * SIN(t4)) - SIN(t5) * (COS(t1) *
COS(t3) + COS(t2) * SIN(t1) * SIN(t3))) * (Many - Py) + (COS(t5) * (COS(t3) *
COS(t4) * SIN(t2) + COS(t2) * SIN(t4)) - SIN(t2) * SIN(t3) * SIN(t5)) * (Manz -
Pz)
man5z = ((COS(t1) * COS(t4) * SIN(t2) + (SIN(t4) * (COS(t1) * COS(t2) *
COS(t3) + SIN(t1) * SIN(t3)))) * (Manx - Px)) + ((COS(t4) * SIN(t1) * SIN(t2) +
(SIN(t4) * (COS(t2) * COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) * SIN(t3)))) * (Many - Py)) +
((COS(t3) * SIN(t2) * SIN(t4) - COS(t2) * COS(t4)) * (Manz - Pz))
IF man5x = 0 THEN t6 = 0 ELSE t6 = (pi / 2) - ATN(man5z / man5x)
ang = t6: x = man5x: y = man5z: GOSUB cuadrante: t6 = ang

```

```

r11 = COS(t6) * (COS(t5) * (COS(t4) * (COS(t1) * COS(t2) * COS(t3) + SIN(t1) *
SIN(t3)) - COS(t2) * SIN(t2) * SIN(t4)) + SIN(t5) * (COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) *
COS(t2) * SIN(t3))) - SIN(t6) * (COS(t1) * COS(t4) * SIN(t2) + SIN(t4) * (COS(t1)
* COS(t2) * COS(t3) + SIN(t1) * SIN(t3)))

```

```

r21 = COS(t6) * (COS(t5) * (COS(t4) * (COS(t2) * COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) *
SIN(t3)) - SIN(t1) * SIN(t2) * SIN(t4)) + SIN(t5) * (-COS(t1) * COS(t3) - COS(t2)
* SIN(t1) * SIN(t3))) - SIN(t6) * (COS(t4) * SIN(t1) * SIN(t2) + SIN(t4) * (COS(t2)
* COS(t3) * SIN(t1) - COS(t1) * SIN(t3)))

```

```

r31 = COS(t6) * (COS(t5) * (COS(t3) * COS(t4) * SIN(t2) + COS(t2) * SIN(t4)) -
SIN(t2) * SIN(t3) * SIN(t5)) - SIN(t6) * (COS(t3) * SIN(t2) * SIN(t4) - COS(t2) *
COS(t4))

```

```

arg = r11 * nx + r21 * ny + r31 * nz

```

```

IF ABS(arg) = 1 THEN

```

```
(7 = (pi / 2) - arg * (pi / 2)
ELSE
(7 = (pi / 2) - ATN(arg / SQR(1 - (arg ^ 2)))
END IF
```

```
RETURN
```

```
terminal:
```

```
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (nx * 20): y2 = Many + (ny * 20):
z2 = Manz + (nz * 20): col = 3: GOSUB linea
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (sx * 20): y2 = Many + (sy * 20):
z2 = Manz + (sz * 20): col = 4: GOSUB linea
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (ax * 20): y2 = Many + (ay * 20):
z2 = Manz + (az * 20): col = 5: GOSUB linea
```

```
RETURN
```

```
unterterminal:
```

```
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (nx * 20): y2 = Many + (ny * 20):
z2 = Manz + (nz * 20): col = 0: GOSUB linea
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (sx * 20): y2 = Many + (sy * 20):
z2 = Manz + (sz * 20): col = 0: GOSUB linea
x1 = Manx: y1 = Many: z1 = Manz: x2 = Manx + (ax * 20): y2 = Many + (ay * 20):
z2 = Manz + (az * 20): col = 0: GOSUB linea
```

```
RETURN
```

```
terminalnom:
```

```
'eje X
```

```
pax = Manx + (nx * 20): pay = Many + (ny * 20): paz = Manz + (nz * 20)
x1 = pax + 0: y1 = pay - 10: z1 = paz + 2.5: x2 = pax + 0: y2 = pay - 5: z2 = paz -
2.5: col = 3: GOSUB linea
x1 = pax + 0: y1 = pay - 5: z1 = paz + 2.5: x2 = pax + 0: y2 = pay - 10: z2 = paz -
2.5: col = 3: GOSUB linea
```

```
'eje Y
```

```
pax = Manx + (sx * 20): pay = Many + (sy * 20): paz = Manz + (sz * 20)
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz +
.4; col = 4; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 5; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz +
.4; col = 4; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 7.5; z1 = paz + .4; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz -
2.5; col = 4; GOSUB linea
```

```
'eje Z
```

```
pax = Manx + (ax * 20); pay = Many + (ay * 20); paz = Manz + (az * 20)
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 5; z2 = paz +
2.5; col = 5; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 5; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 10; z2 = paz -
2.5; col = 5; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz - 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 5; z2 = paz -
2.5; col = 5; GOSUB linea
```

```
RETURN
```

```
unterterminalnom:
```

```
'eje X
```

```
pax = Manx + (nx * 20); pay = Many + (ny * 20); paz = Manz + (nz * 20)
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 5; z2 = paz -
2.5; col = 0; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 5; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 10; z2 = paz -
2.5; col = 0; GOSUB linea
```

```
'eje Y
```

```
pax = Manx + (sx * 20); pay = Many + (sy * 20); paz = Manz + (sz * 20)
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz +
.4; col = 0; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 5; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz +
.4; col = 0; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 7.5; z1 = paz + .4; x2 = pax + 0; y2 = pay - 7.5; z2 = paz -
2.5; col = 0; GOSUB linea
```

```
'eje Z
```

```
pax = Manx + (ax * 20); pay = Many + (ay * 20); paz = Manz + (az * 20)
```

```
x1 = pax + 0; y1 = pay - 10; z1 = paz + 2.5; x2 = pax + 0; y2 = pay - 5; z2 = paz +
2.5; col = 0; GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0: y1 = pay - 5: z1 = paz + 2.5: x2 = pax + 0: y2 = pay - 10: z2 = paz - 2.5: col = 0: GOSUB linea
```

```
x1 = pax + 0: y1 = pay - 10: z1 = paz - 2.5: x2 = pax + 0: y2 = pay - 5: z2 = paz - 2.5: col = 0: GOSUB linea
```

```
RETURN
```

```
cuadrante:
```

```
IF SGN(x) = 1 AND SGN(y) = 1 THEN ang = ang: RETURN
```

```
IF SGN(x) = -1 AND SGN(y) = 1 THEN ang = pi + ang: RETURN
```

```
IF SGN(x) = -1 AND SGN(y) = -1 THEN ang = pi + ang: RETURN
```

```
IF SGN(x) = 1 AND SGN(y) = -1 THEN ang = (2 * pi) + ang: RETURN
```

```
IF SGN(x) = 1 AND SGN(y) = 0 THEN ang = 0: RETURN
```

```
IF SGN(x) = 0 AND SGN(y) = 1 THEN ang = pi / 2: RETURN
```

```
IF SGN(x) = -1 AND SGN(y) = 0 THEN ang = pi: RETURN
```

```
IF SGN(x) = 0 AND SGN(y) = -1 THEN ang = (3 * pi) / 2: RETURN
```

```
RETURN
```

```
errores:
```

```
SELECT CASE ERR
```

```
CASE 5 AND (l1 ^ 2 - d ^ 2) < 0
```

```
LOCATE 4, 45: PRINT "Fuera del área de trabajo!"
```

```
CASE 11
```

```
LOCATE 4, 45: PRINT "Singularidad matemática!"
```

```
CASE ELSE
```

```
END SELECT
```

```
RESUME NEXT
```