12
2 ej'

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS DE DESIGUALDADES EN LAS OLIMPIADAS DE MATEMATICAS

T E S I S

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C A

p r e s e n t a

OLGA ROSARIO PONCE DE LEON TAPIA

Director de Tesis: M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1999

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"PROBLEMAS DE DESIGUALDADES EN LAS OLIMPIADAS DE MATEMATICAS"

realizado por Olga Rosario Ponce de León Tapia

con número de cuenta 7633780-0 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas
Propietario	Dr. Fernando Brambila Paz
Suplente	Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara Bravo

Índice General

Simbología

IMO Olimpiadas Internacionales de Matemáticas.

URO Olimpiadas Matemáticas Unión Rusa.

CMO Crux Mathematicorum.

OPP Problema Práctica de Olimpiada USA.

USAMO Olimpiadas Matemáticas de Estados Unidos.

KMO Olimpiada Matemática de Kiev.

HMO Olimpiada Matemática Húngara.

BrMO Olimpiada Matemática de Brasil.

LHSO Olimpiada de Nivel Preparatoria en Leningrado.

OIM Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

OMM Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Introducción

Resolver un problema de Matemáticas está ligado a la creatividad, en sí mismo el hacerlo muestra cierto grado de creatividad de la persona que lo resolvió.

Hablando de los problemas que encontramos en las competencias Olímpicas de Matemáticas (estatales, nacionales, continentales o mundiales). Además el resolverlos sirve de un entrenamiento para la creatividad en Matemáticas, en particular, y la creatividad en general.

En este trabajo presentamos algunos problemas de las Olimpiadas Internacionales, de Olimpiadas de Estados Unidos, Olimpiadas Húngaras, etc., y algunos problemas que son llamados "problemas prácticos para entrenar alumnos de Olimpiadas", el tema de estos problemas específicamente "desigualdades" con el objeto de que los estudiantes se entrenen en la resolución de este tipo de problemas e indiréctamente para que desarrollen su creatividad.

El método que se emplea para este entrenamiento no descansa en algún aspecto psicopedagógico o algún otro concepto de la solución de problemas desde el punto de vista de la educación matemática, aquí simplemente recopilamos una serie de problemas de desigualdades y los clasificamos de acuerdo a las técnicas y/o clase de problema con el objeto que el estudiante primero observe las diferentes técnicas y posteriormente con el repetido uso de estas el alumno enfrentará con más posibilidades de éxito al tratar de resolver un problema "nuevo" de desigualdades.

Este trabajo está dirigido para estudiantes de nivel bachillerato, preparatorianos y niveles equivalentes. Los conocimientos necesarios son: propiedades de desigualdades, algunas desigualdades muy famosas y demasiado útiles como: desigualdad media aritmética - media geométrica, desigualdad media armónica, desigualdad de Cauchy, desigualdad de Jensen, desigualdad del rearreglo, desigualdad de la potencia, etc. y conocimientos elementales de geometría.

Este trabajo ha sido seccionado de acuerdo a las herramientas utilizadas para ser resueltos. Sin embargo en muchos de ellos el uso de la creatividad es fundamental, pero también esta se puede ir desarrollando con la práctica.

Capítulo 1

Desigualdades Más Importantes y Algunas Definiciones Básicas

1.1 Desigualdades

Desigualdades que involucran valores medios

Para cada conjunto de números positivos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} && \text{(media armónica)} \\
&\leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} && \text{(media geométrica)} \\
&\leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} && \text{(media aritmética)} \\
&\leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \right)^{1/2} && \text{(media raíz cuadrada)} \\
&\leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Desigualdad del triángulo

Para dos conjuntos de números reales $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ se tiene:

$$\left[(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \right)^{1/2} + \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \right)^{1/2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Para dos conjuntos de números reales $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

Desigualdad de Jensen

Para cada función $f(x)$ convexa en el intervalo $[\alpha, \beta]$

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

donde $a_k \in [\alpha, \beta]$ y n es un número natural.

Desigualdad del Rearreglo
Sea $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ números reales. Para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n \\ &\geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n \end{aligned}$$

con igualdad si y solo si $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ es igual respectivamente a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

Corolario 1 *Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ una permutación de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ entonces*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1' + a_2a_2' + \cdots + a_na_n'.$$

Corolario 2 *Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ una permutación de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ entonces*

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Desigualdad de las Medias Potenciales Para $s < t$

$$\left(\frac{p_1a_1^t + p_2a_2^t + \cdots + p_na_n^t}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{1/t} \leq \left(\frac{p_1a_1^s + p_2a_2^s + \cdots + p_na_n^s}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{1/s}$$

donde las p's y las a's son números reales positivos arbitrarios.

1.2 Definiciones Básicas

Centroide de un triángulo Punto de intersección de las medianas.

Circuncentro de un triángulo Centro del círculo circunscrito del triángulo, o punto de intersección de las mediatrices.

Función convexa Una función $f(x)$, definida sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ es convexa sobre ese intervalo si para cada $a, b \in [\alpha, \beta]$ se tiene

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

Fórmula de Herón El área (ABC) del triángulo ΔABC con lados a, b, c es

$$(ABC) = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Teorema isoperimétrico para triángulos Se tiene lo siguiente

- De todos los triángulos con área dada, el equilátero tiene el perímetro más pequeño.
- De todos los triángulos con perímetro dado, el triángulo equilátero tiene el área máxima.

Capítulo 2

Problemas

2.1 Propiedades de Orden

Problema 1 *(IMO 1960) Determina todos los números reales x, los cuales satisfacen la desigualdad*

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Problema 2 *(IMO 1960 Para que valores de la variable x, la siguiente desigualdad se cumple*

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

Problema 3 *(IMO 1965) Determina todos los valores x, sobre el intervalo*

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

para los cuales se satisface la siguiente desigualdad

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

Problema 4 *(IMO 1977) Sean a, b, A, B cuatro constantes reales dados y*

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta.$$

Probar que si $f(\theta) \geq 0$ para todo real θ, entonces

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ y } A^2 + B^2 \leq 1$$

Problema 5 *(IMO 1974) Dadas las funciones $F(x) = ax^2 + bx + c$ y $G(x) = cx^2 + bx + a$ donde*

$$|F(0)| \leq 1, \qquad |F(1)| \leq 1, \qquad |F(-1)| \leq 1$$

Probar que, para $|x| \leq 1$

i) $|F(x)| \leq \frac{5}{4}$

ii) $|G(x)| \leq 2$

Problema 6 *(IMO 1970) Sean a, b, n, números enteros mayores que 1. Sean a, b las bases de dos sistemas de números.*

$$A_{n-1} \qquad y \qquad A_n$$

números en el sistema con base a.

$$B_{n-1} \qquad y \qquad B_n$$

números en el sistema con base b estos números están relacionados de la siguiente manera

$$A_n = x_n x_{n-1} \dots x_0 \qquad A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$$

y

$$B_n = x_n x_{n-1} \dots x_0 \qquad B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$$

con

$$x_n > 0 \qquad x_{n-1} \neq 0$$

Probar que

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad a > b$$

Problema 7 *Sea n un entero positivo y $a_i \geq 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Probar que*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} \cdot (1 + a_1 + \cdots + a_n)$$

Problema 8 *Para cada entero $n > 1$, probar que*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Problema 9 *(URO 1986) Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son tres o más enteros positivos, acomodados en orden alrededor de un círculo, de tal forma que la suma de los vecinos de cada x_i, es un múltiplo de x_i, es decir*

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = K_i$$

un entero positivo, donde ($x_{n+1} = x_1$). Probar que la suma S_n de todos estos enteros K_i es siempre por lo menos $2n$ pero nunca más grande que $3n$, es decir

$$2n \leq S_n < 3n$$

Problema 10 *(IMO 1974) Sean $a, b, c, d > 0$. Encontrar todos los posibles valores de la suma*

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

Problema 11 *Para $x, y, z > 0$*

a)

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

b)

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Problema 12 *(OMM 1998) Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1,2,\ldots,m-1,m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $\frac{1}{\sqrt{2}}m$.*

Problema 13 *Probar que para reales a,b,c*

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

Problema 14 *Si a, b, c son números reales tales que $0\leq a,b,c\leq 1$ entonces*

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

Problema 15 *Sean a, b, $c>0$, $a>c$, $b>c$. Probar que*

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$$

Problema 16 *Sean a,b,c reales positivos, probar que*

$$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b}\geq 0.$$

Problema 17 *(HMO 1896) Probar que $\log n\geq k\log 2$, donde n es un número natural y k es el número de primos distintos que dividen a n.*

2.2 Desigualdad Media Aritmética - Media Geométrica

Problema 18 *(IMO 1969) Probar que para todos los números reales x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, con*

$$\begin{aligned} x_1 &> 0\\ x_2 &> 0\\ x_1y_1-z_1^2 &> 0\\ x_2y_2-z_2^2 &> 0 \end{aligned}$$

Se cumple la desigualdad

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leq\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

Dar una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad.

Problema 19 *(IMO 1984) Probar que*

$$0\leq yz+zx+xy-2xyz\leq\frac{7}{27}$$

donde x, y, z, son números reales positivos los cuales cumplen

$$x+y+z=1.$$

Problema 20 *(IMO 1972) Encuentra todas las soluciones* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *del siguiente sistema de desigualdades.*

$$\begin{aligned}
({x_1}^2 - x_3x_5)({x_2}^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\
({x_2}^2 - x_4x_1)({x_3}^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\
({x_3}^2 - x_5x_2)({x_4}^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\
({x_4}^2 - x_1x_3)({x_5}^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\
({x_5}^2 - x_2x_4)({x_1}^2 - x_2x_4) &\leq 0
\end{aligned}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *son números reales positivos.*

Problema 21 *(CMO) Si* a, b, c *son números reales mayores que 1. Probar para cualquier exponente* $r > 0$

$$S = (\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3{\cdot}2^r$$

Problema 22 *Si* a, b, c, *son números reales no-negativos tales que*

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$$

Probar que $abc \leq 1$.

Problema 23 *Probar la desigualdad*

$$n[(n+1)^{\frac{1}{n}} - 1] < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < n - (n-1)n^{\frac{-1}{(n-1)}}$$

Problema 24 *(OPP) Supongamos que* x, y *son números reales no-negativos, con*

$$x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} = 4.$$

Probar que x^2y *es siempre menor que* 4.

Problema 25 *Dados* p, q, r *números positivos tales que* $2p = q + r$, *con* $q \neq r$ *Mostrar que*

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$

Problema 26 *Si los números reales positivos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *son tales que*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

Probar que

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

Problema 27 *(LHSO 1980) Si* a, b, c, d *son números reales positivos tales que*

$$a + b + c + d = 1$$

Probar que

$$S = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$$

Problema 28 *Supongamos que* $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *y sea* $x_{n+1} = x_1$. *Probar que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n.$$

2.3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Problema 29 *(USAMO 1978) Sean a, b, c, d, e números reales tales que*

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16 \end{aligned}$$

Determinar el valor máximo de e.

Problema 30 *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde $n \geq 2$ números positivos tales que*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Probar que

$$S = \frac{x_1}{1+x_2+x_3+\cdots+x_n} + \frac{x_2}{1+x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Problema 31 *Probar que si a y b son números positivos tales que $a+b=1$, entonces*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Problema 32 *(IMO 1995) Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc=1$. Probar que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Problema 33 *Sea $a+b+c=1$, probar la desigualdad*

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

Problema 34 *Si $a, b, c > 0$, ¿es verdadero que $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta < c$ implica que $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$?*

Problema 35 *Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son reales y*

$$A + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

probar que $A < 2a_ia_j$ para $1 \leq i < j \leq n$.

2.4 Desigualdad del Rearreglo

Problema 36 *(IMO 1975) Sea x_i, y_i con $(i = 1, 2, \ldots, n)$ números reales tales que $\{x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$ y $\{y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n\}$ Probar que si $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ es cualquier permutación de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ entonces*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

Problema 37 *Sea $x_i > 0$, $S = x_1 + \cdots + x_n$. Probar que*

$$\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

La desigualdad del rearreglo es un resultado de fundamental importancia. Debido a esto probaremos algunas desigualdades muy útiles y familiares utilizando rearreglos.

Problema 38 *(Desigualdad media aritmética - media geométrica) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 39 *(Desigualdad media geométrica - media armónica) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos, entonces*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 40 *(Desigualdad media raíz cuadrada - media aritmética) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 41 *(Desigualdad de Cauchy) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales, entonces*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

con la igualdad si y solo si para alguna constante k, $a_i = kb_i$ para $1 \leq i \leq n$ o $b_i = ka_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Problema 42 *Si a, b, c, son números reales positivos, probar que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.*

Problema 43 *Sea $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Probar la desigualdad*

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

2.5 Convexidad, Desigualdad de Jensen

Problema 44 *(USA 1974) Probar que si a, b, c son números reales positivos, entonces*

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{(a+b+c)}{3}}$$

Problema 45 *(USAO 1980) Probar que si $1 \geq a, b, c \geq 0$, entonces*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

2.6 Desigualdades Geométricas

Desigualdades para los lados de un triángulo son muy populares. En este caso la desigualdad del triángulo juega un papel central. Durante las pruebas tienes que usar la desigualdad del triángulo o también la desigualdad es válida para todas las tripletas (a, b, c) de números reales positivos que incluye todos los triángulos, la desigualdad del triángulo ocurre en cuatro formas equivalentes.

Problema 46

I) $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$.

II) $a>|b-c|$, $b>|a-c|$, $c>|a-b|$

III) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$

IV) $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ *donde* x, y, z *son positivos.*

Problema 47 *(IMO 1961) Sean* a, b, c *los lados de un triángulo y* T *su área. Probar* $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}T$.

Problema 48 *(IMO 1961) Considera el* $\triangle P_1P_2P_3$ *y un punto* P *en él. Sea* P_1P, P_2P, P_3P *líneas que intersectan los lados opuestos del triángulo y sean los puntos de intersección* Q_1, Q_2, Q_3 *respectivamente. Prueba que de los números* $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ *al menos uno es* ≤ 2 *y al menos uno es* ≥ 2

Problema 49 *(IMO 1964) Si* a, b, c *son los lados de un triángulo. Probar que*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$

Problema 50 *(IMO) Para cada punto* P*, que está dentro del* $\triangle ABC$*. Sean* D, E, F *los puntos de intersección de las líneas* AP, BP, CP *con los lados opuestos a* A, B, C *respectivamente. Determina* P*, tal que el área del* $\triangle DEF$ *sea la máxima.*

Problema 51 *(IMO) Dos triángulos equiláteros están inscritos en un círculo de radio* r*. Sea* K*, el área del conjunto de todos los puntos interiores a ambos triángulos. Probar que*

$$2K \geq r^2\sqrt{3}$$

Problema 52 *Sea* P *un punto interior del* $\triangle ABC$*. Sean* D, E, F *los pies de las perpendiculares desde* P *a las líneas* BC, CA, AB *respectivamente. Encuentra todos los puntos* P*, para los cuales*

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

es mínimo.

Problema 53 *(USAMO 1976) Si la suma de las longitudes de los seis lados de un tetraedro trirectangular* $PABC$ *(es decir* $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^0$*) es* S*, determinar su volumen máximo.*

Problema 54 *Sea* P *un punto en el interior del* $\triangle ABC$ *y sean* r_1, r_2, r_3 *las distancias desde* P *a los lados* a_1, a_2, a_3 *del triángulo respectivamente. Sea* R *el circunradio de* ABC*. Probar que*

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leq \frac{1}{\sqrt{2R}}\cdot({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde la igualdad se cumple $\Leftrightarrow$ $\triangle ABC$ *es equilátero y* P *es el incentro.*

Problema 55 *(KMO 1988) Sea $H = PQRSTU$ un hexágono determinado en el $\triangle ABC$ dibujando tangentes a el incírculo que son paralelas a los lados del triángulo. Probar que el perímetro de H, nunca es mayor que dos tercios del perímetro del $\triangle ABC$.*

Problema 56 *(KMO 1954) Un círculo está inscrito en un triángulo y un cuadrado está circunscrito alrededor del círculo. Probar que más de la mitad del perímetro del cuadrado está dentro o sobre el triángulo.*

Problema 57 *(HMO 1897) Mostrar que si α, β, γ son ángulos de un triángulo arbitrario entonces*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}.$$

Problema 58 *(IMO 1966) En el interior de los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, cualesquiera K, L, M puntos respectivamente son seleccionados. Probar que el área de por lo menos uno de los triángulos AML, BKM, CLK es menor o igual que un cuarto del área del triángulo ABC.*

Problema 59 *Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que*

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

Problema 60 *Sean a, b, c los lados de un triángulo, entonces*

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

Problema 61 *Si a, b, c son los lados de un triángulo, probar que*

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) < (a + b + c)^2.$$

Problema 62 *Si a, b y c son los lados de un triángulo, entonces*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Problema 63 *Un punto es escogido sobre cada lado de un cuadrado unitario, los cuatro puntos son lados de un cuadrilátero con lados a, b, c, d. Mostrar que*

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$$

y

$$2\sqrt{2} \leq a + b + c + d \leq 4.$$

Problema 64 *Si x, y, z son lados de un triángulo, entonces*

$$\left|\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}\right| < 1.$$

Problema 65 *Las diagonales de un cuadrilátero convexo se intersectan en O. Cual es el área más pequeña que este cuadrilátero puede tener si los triángulos AOB y COD tienen áreas 4 y 9 respectivamente.*

Problema 66 *(BrMO 1978) Encontrar un punto P dentro del triángulo ABC, tal que el producto $PL \cdot PM \cdot PN$ sea máximo, L, M, N son los pies de las perpendiculares desde P sobre BC, CA, AB.*

Problema 67 *(IMO 1983) Para cualquier triángulo con lados a, b, c*

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0.$$

Problema 68 *Sean x, y, z las longitudes de los lados de un triángulo y sea*

$$f(x,y,z) = \left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

probar que

a) $f(x,y,z) < 1$

b) $f(x,y,z) < \frac{1}{8}$

c) *Encontrar el límite superior de $f(x,y,z)$.*

Problema 69 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y sea S_a, S_b, S_c las longitudes de las medianas. D es el diámetro del circuncírculo. Probar que*

$$\frac{a^2+b^2}{S_c} + \frac{b^2+c^2}{S_a} + \frac{c^2+a^2}{S_b} \leq 6D.$$

Problema 70 *Sea a, b, c los lados de un triángulo. Probar que*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

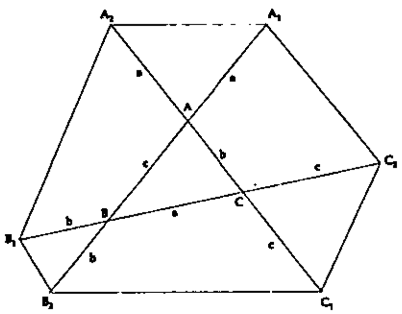
Problema 71 *Sean R y r los radios del circuncírculo y del incírculo de un triángulo, respectivamente, probar que $R \geq 2r$.*

Problema 72 *Veinte cuadrados disjuntos están dentro de un cuadrado de lado 1. Probar que cuatro de ellos tienen la suma de las longitudes de sus lados menor o igual a $\frac{2}{\sqrt{5}}$.*

Problema 73 *(IMO 1991) En un triángulo ABC, los bisectores AD, BE y CF se intersectan en el punto I. Mostrar que*

$$\frac{1}{4} < \frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27}.$$

Problema 74 *(OIM 1992) A partir del triángulo T de vértices A, B y C se ha construido un hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 como se muestra en la figura 2.6. Demostrar que el área del hexágono H es mayor o igual que trece veces el área del triángulo T.*



Problema 75 *(HMO 1904) Sean A_1A_2 y B_1B_2 las diagonales de un rectángulo y sea O el centro. Encontrar y construir el conjunto de todos los puntos P que satisfacen al mismo tiempo las cuatro desigualdades*

$$A_1P > OP,\ A_2P > OP,\ B_1P > OP,\ B_2P > OP.$$

Problema 76 *(OMM 1998) Sea $ABCDE$ un pentágono (convexo) de manera que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$ y $\triangle EAB$ son todos de igual área. Demuestra que*

$$\frac{\text{área }(ABCDE)}{4} < \text{ área }(\triangle ABC) < \frac{\text{área }(ABCDE)}{3}.$$

Problema 77 *(OMM 1998) Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, las longitudes de los lados de un pentágono convexo y m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 las longitudes de sus diagonales. Demostrar que*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \leq 1.$$

Problema 78 *Tres lineas son dibujadas a través de un punto O adentro de un triángulo con área S tal que cada lado del triángulo es cortado por dos de ellos. Las lineas cortan el triángulo en tres triángulos con vértice común O y áreas S_1, S_2, S_3. Probar que*

a) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S}$

b) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{18}{S}$

Capítulo 3

Sugerencias

3.1 Propiedades de Orden

1 *Encontrar el intervalo donde la función* $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ *decrece continuamente.*

2 *Encontrar los valores para los cuales la desigualdad está definida, manipular algebraicamente la expresión y resolver.*

3 *Utilizar el resultado: el valor absoluto de la diferencia de dos números positivos es a lo mas igual a el más grande, e utilizar algunas identidades trigonométricas.*

4 *Utilizar expresiones trigonométricas y analizar el comportamiento de la función coseno en determinado intervalo.*

5 *Ayudarse del resultado: una función cuadrática* $F(x)$ *está dada por tres pares de valores* $(x, F(x))$, *y aplicar la desigualdad del triángulo. Escribir* $G(x)$ *en términos de* $F(x)$ *y aplicar desigualdad del triángulo.*

6 *Escribir los números utilizando* $P(t) = x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0$ *un polinomio y resolver.*

7 *Manipular algebraicamente y utilizar el resultado* $(1+x)(1+y) \geq 1 + x + y$.

8 *Fijarse en las secuencias generadas en los lados de la desigualdad, compararlas término a término y analizar su crecimiento. Utilizar el resultado:* $0 < \frac{x}{y} < 1$ *y* $z > 0$ *entonces* $y > x$ *y* $\frac{x+z}{y+z} - \frac{x}{y} = \frac{xy+zy-yx-xz}{y(y+z)} = \frac{z(y-x)}{y(y+z)} > 0$.

9 *Para el lado izquierdo aplicar el resultado: si* $a > 0$, $b > 0$ *entonces* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. *Para el lado derecho usar inducción.*

10 *Acotar* s *y demostrar que* s *toma valores muy cercanos a los límites de acotamiento.*

11

a) *Descomponer la desigualdad como el producto de dos sucesiones y aplicar la desigualdad del rearreglo.*

b) *Manipular algebraicamente y aplicar esta idea muy útil* $z - x = z - y + y - x$.

12 *Utilizar la relación que existe entre la suma de los elementos de los conjuntos dados.*

13 *Aplicar propiedades de orden.*

14 *Ordenar los números. Aplicar propiedades de orden.*

15 *Desarrollar la desigualdad y factorizar, utilizar* $(ab - ac - bc)^2 \geq 0$.

16 *Resolver algebraicamente y factorizar con términos cuadráticos ya que estos son no-negativos.*

17 *Utilizar que cualquier número natural se puede expresar como producto de sus divisores primos.*

3.2 Desigualdad Media Aritmética - Media Geométrica

18 *Encontrar una expresión equivalente y aplicar desigualdad media aritmética - media geométrica.*

19 *Para demostrar el lado izquierdo escribir* G *como una suma de términos no negativos. Para el derecho aplicar desigualdad media aritmética - media geométrica.*

20 *Primera solución: Aplicar propiedades de orden y reescribir algebraicamente.*

21 *Utilizar propiedades de logaritmos y aplicar desigualdad media aritmética - media geométrica.*

22 *Multiplicar la expresión dada y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica a* $(a + b + c)$, $(ab + bc + ca)$.

23 *Manipular la expresión algebraicamente y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica.*

24 *Aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica a los factores* $\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 4\right)$ *similarmente para* $\left(\frac{2x^2}{8} + \frac{2x^2}{8} + \cdots + \frac{2x^2}{8}\right)$, $\left(\frac{2xy}{4} + \frac{2xy}{4} + \cdots + \frac{2xy}{4}\right)$ *y* $\left(y^2, y^2, y^2\right)$.

25 *Si los números son enteros, aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica, para números no enteros reescribir la desigualdad y usar* $G(x) = \ln F(x)$.

26 *Trabajar algebraicamente y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica.*

27 *Aplicar la desigualadad media aritmética - media geométrica a* $(4a + 1)$ *y* 1.

28 *Desarrollar la sumatoria para el caso* $n = 3$, *utilizar* $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}\frac{c}{b}$ *y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica.*

3.3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

29 *Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los conjuntos* $\{a, b, c, d\}$ *y* $\{1, 1, 1, 1\}$, *seguir los mismos pasos para el caso general.*

30 *Reescribir* S, *manipular el término general y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

31 *Utilizar el resultado* $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ *y aplicar Cauchy-Schwarz.*

32 *Hacer* $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, *reescribir la desigualdad en estos términos y después aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores* $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ *y* $\left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right)$.

33 *Aplicar la desigualdad de Cauchy a los vectores* $(1, 1, 1)$ *y* $\left(\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1}\right)$.

34 *Usar* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ *y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

35 *Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $(1, 1, \ldots, 1)$.

3.4 Desigualdad del Rearreglo

36 *La desigualdad a probar se reduce a demostrar*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i.$$

para esto analizamos los factores tanto del lado derecho como del lado izquierdo de la desigualdad.

37 *Aplicar desigualdad del rearreglo.*

38 *Hacer* $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, $a_1 = \frac{x_1}{G}$, $a_2 = \frac{x_1 x_2}{G^2}, \cdots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G^n} = 1$. *Aplicar el corolario 2 de la desigualdad del rearreglo.*

39 *Lo mismo que el ejercicio anterior.*

40 *Aplicar directamente el corolario 1 de la desigualdad del rearreglo.*

41 *Hacer* $S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$, $T = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$, $x_i = \frac{a_i}{S}$, $x_{n+i} = \frac{b_i}{T}$ *para* $1 \leq i \leq n$. *Aplicar el corolario 1 de la desigualdad del rearreglo.*

42 *Hacer* $a_1 = a^2$, $a_2 = b^2$, $a_3 = c^2$, $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$ *y aplicar la desigualdad del rearreglo.*

43 *Hacer* $a_1, \ldots, a_n$ *y* $\frac{1}{S-a_1}, \ldots, \frac{1}{S-a_n}$ *secuencias y aplicar rearreglos.*

3.5 Convexidad, Desigualdad de Jensen

44 *Probar este resultado* $x^x y^y \geq x^y y^x$ *y aplicarlo. Para el caso general aplicar la desigualdad de Jensen.*

45

Primera prueba: *Usar el hecho de que máximo valor de una función convexa sobre un intervalo tiene que ser un punto final del intervalo.*

Segunda prueba: *Manipulación algebraica utilizando la factorización adecuada.*

3.6 Desigualdades Geométricas

46 *Utilizar propiedades de orden.*

47 *Este problema se resolvió de diferentes maneras, para esto necesitamos*

1° *Usar el teorema isoperimétrico para triángulos "de todos los triángulos con el perímetro dado, el equilátero tiene el área más grande".*

2° *Por contradicción y utilizando la ley de los cosenos.*

3° *Usando la fórmula de Herón y la desigualdad media aritmética - media geométrica.*

4° *Usar la identidad* $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

48 *Utilizar el resultado: dos triángulos que tienen la misma base y sus alturas están en la razón de sus lados por lo tanto sus áreas están en la razon de sus lados. Además aplicar el resultado* $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

49 *Varias soluciones*

1° *Reescribir a, b, c en términos de x, y, z y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica.*

2° *Aplicando propiedades de desigualdades.*

3° *Utilizando propiedades trigonométricas.*

50 *Expresar el área de un triángulo en forma del seno del ángulo, es decir área$[ABC] = \frac{1}{2}ac\sin B$ y aplicar el teorema de Ceva.*

51 *Utilizar la simetría de la figura, aplicar el teorema isoperimétrico "de todos los triángulos con un perímetro dado, el equilátero tiene el área máxima", y "el área de un triángulo equilátero es igual a un cuarto del cuadrado de un lado multiplicado por $\sqrt{3}$".*

52 *Expresar ax, by, cz en términos de sus áreas y minimizar $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$, para esto aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $\sqrt{ax}$, $\sqrt{by}$, $\sqrt{cz}$ y $\sqrt{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{\frac{b}{y}}$, $\sqrt{\frac{c}{z}}$.*

53 *Aplicamos Pitágoras, y para maximizar el volumen usamos la desigualdad media geométrica - media aritmética.*

54 *Aplicar Cauchy y expresar el área de un triángulo en términos del circunradio R.*

55 *Probar que el hexágono tiene lados opuestos iguales. Utilizar la fórmula para el área del triángulo en términos del radio del círculo inscrito $A = rs$ y aplicar la desigualdad de la potencia.*

56 *Utilizar que en un triángulo rectángulo tenemos la especial relación:*

$$\textit{suma de los catetos - la hipotenusa} = \textit{diámetro del incírculo}$$

usar el hecho que tenemos triángulos isósceles con ángulo recto.

57 *Varias soluciones*

1ª *Utilizamos identidades trigonométricas y el comportamiento del incremento de un ángulo agudo con el incremento del seno de ese ángulo*

2ª *Expresar*

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}\\
\sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}
\end{aligned}$$

y el teorema de Euler.

58 *Utilizar el resultado:*

$$\textit{área del triángulo} = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ca\sin B}{2}$$

59 *Utilizar propiedades de orden y aplicar desigualdad del triángulo.*

60 *Manipular algebraicamente y utilizar el hecho de que la suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es más grande que el tercer lado.*

61 *Aplicar el resultado del problema anterior.*

62 *Para el lado derecho de la desigualdad aplicar el resultado "la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el semi-perímetro.*

Para el lado izquierdo se probará de varias formas. Ponerlo en términos de $f(a,b,c)$

1° *Utilizar* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

2° *Utilizar la desigualdad media aritmética - media geométrica, la desigualdad media armónica y por rearreglos.*

63 *Aplicar Pitágoras y manipular la expresión.*

64 *Sacar denominador* xyz. *Resolver el polinomio cúbico en* x, y, z *para el caso en que se hace cero y aplicar la desigualdad del triángulo.*

65 *Aplicar que áreas de dos triángulos con alturas iguales son proporcionales a sus bases.*

66 *Aplicar desigualdad media aritmética - media geométrica y probar que* P *es el centroide del triángulo* ABC. *Usar ley de cosenos.*

67 *Aplicar la desigualdad del rearreglo.*

68 *Resolver sacando denominador común, resolver el polinomio de grado 3 igualado a cero y aplicar la desigualdad del triángulo y el resultado* $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

69 *Prolongar las medianas hasta que intersecten al circuncírculo, utilizar* $A_1A_2\cdot AA_2 = BA_2\cdot A_2C$ *y congruencia de triángulos.*

70 *Utilizar desigualdad del triángulo y el resultado* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

71 *Utilizar ley de los senos,* $A=rS$ *donde* S *es el semiperímetro.*

72 *Tomar las diferencias de las longitudes al cuadrado de los cuadrados escogidos y trabajar la expresión para llegar al resultado.*

73 *Aplicar el teorema geométrico: un bisector de un triángulo divide el lado opuesto en la razón de los otros lados. Trabajar el resultado y aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica. Usar desigualdad del triángulo.*

74 *Usar la ley de senos y* $abc=4RS$ *donde* a, b, c *son los lados del triángulo,* S *es el área y* R *el radio de la circunferencia circunscrita.*

75 *Encontrar un punto* P *en el plano y su proyección sobre una recta. Trazar las perpendiculares bisectores de los segmentos* A_1O, A_2O, B_1O, B_2O.

76 *Utilizar el hecho de que las áreas de los triángulos son iguales, y la base común, entonces las alturas son iguales.*

77 *Aplicar la desigualdad del triángulo y sumar.*

Capítulo 4

Soluciones

4.1 Propiedades de Orden

Problema 1 *(IMO 1960) Determina todos los números reales x, los cuales satisfacen la desigualdad*

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

Solución:
Sea

$$f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$$

Para que $f(x)$ sea real debemos tener que $-1\leq x\leq 3$ en este intervalo $f(x)$ decrece continuamente desde $f(-1)=2$ a $f(3)=-2$. Pues $f\prime(x)=-\left(\frac{1}{2\sqrt{3-x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)<0$. Por lo tanto hay un único valor $x=a$ tal que $f(a)=\frac{1}{2}$ y la solución consiste de todos los x tales que $-1\leq x<a$. Nosotros notamos que $f(1)=0$, entonces $a<1$. Para encontrar a nosotros resolvemos la ecuación

$$f(a)=\sqrt{3-a}-\sqrt{a+1}=\frac{1}{2}$$

elevando al cuadrado ambos lados, nosotros encontramos que

$$4-2\sqrt{(3-a)(a+1)}=\frac{1}{4}$$

por lo tanto

$$\sqrt{(3-a)(a+1)}=\frac{15}{8}$$

elevando al cuadrado otra vez, nosotros obtenemos la ecuación cuadrática

$$(\sqrt{(3-a)(a+1)})^2=\left(\frac{15}{8}\right)^2.$$

$$(3-a)(a+1)=\frac{225}{64}$$

las raíces de esta ecuación son

$$a=1\pm\frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Como $a < 1$, nosotros tenemos

$$a = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$$

entonces la solución es

$$-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Problema 2 *(IMO 1960) Para que valores de la variable x, la siguiente desigualdad se cumple*

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

Solución:

El lado izquierdo de la desigualdad está definido si $x \neq 0$, y para números reales con $x \geq -1/2$.

Asumimos que x satisface estas condiciones. Multiplicamos numerador y denominador del lado izquierdo por $(1+\sqrt{1+2x})^2$ y obtenemos la siguiente desigualdad equivalente

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{4x^2} < 2x + 9.$$

Volvemos a cancelar términos semejantes y llegamos a la desigualdad equivalente

$$(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x + 9.$$

Desarrollando el cuadrado y cancelando llegamos a que

$$2\sqrt{1+2x} < 7$$

y entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2x &< \frac{49}{4} \\ \therefore x &< \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

La solución completa del problema anterior consiste de todas las x que satisfagan

$$\frac{-1}{2} \leq x < \frac{45}{8} \text{ con } x \neq 0$$

Problema 3 *(IMO 1965) Determina todos los valores x, sobre el intervalo*

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

para los cuales se satisface la siguiente desigualdad

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

Solución:

Nosotros observamos que la desigualdad

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

se cumple para toda x, ya que el valor absoluto de la diferencia de dos números positivos es a lo más igual a el mas grande. Asi tenemos

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{1 \pm \sin 2x} \leq \sqrt{2}.$$

Ahora bien, tomamos el lado izquierdo de la desigualdad a probar, es decir

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|$$

ciertamente esta desigualdad se cumple para x, que cumplen con $\cos x \leq 0$. Y esos valores son

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

Para encontrar todos los otros valores de x, vemos que si

$$\cos x \geq 0$$

la desigualdad anterior es equivalente a la siguiente que es el resultado de elevar al cuadrado ambos lados. Es decir

$$4\cos^2 x \leq 1+\sin 2x - 2\sqrt{1-\sin^2 2x} + 1 - \sin 2x = 2 - 2|\cos 2x|.$$

ya que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

sustituyendo obtenemos

$$2 + 2\cos 2x \leq 2 - 2|\cos 2x|$$

finalmente tenemos

$$|\cos 2x| \leq -\cos 2x$$

esta desigualdad se cumple si y solo si $\cos 2x \leq 0$ es decir cuando x está en cualquiera de los siguientes intervalos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ó $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ combinando estos intervalos con el primero es decir con $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Por lo tanto el conjunto solución son las x, tales que están en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Problema 4 *(IMO 1977) Sean a, b, A, B cuatro constantes reales dadas y*

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta.$$

Probar que si $f(\theta) \geq 0$ para todo real θ, entonces

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ y } A^2 + B^2 \leq 1$$

Solución:

Sea $\sqrt{a^2+b^2} = r$ entonces

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.$$

Hay un ángulo α tal que

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha \text{ y } \frac{b}{r} = \sin\alpha$$

usamos estas expresiones para escribir

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= r\left(\frac{a}{r}\cdot\cos\theta + \frac{b}{r}\cdot\sin\theta\right) \\ &= r(\cos\alpha\cdot\cos\theta + \sin\alpha\cdot\sin\theta) \\ &= r\cos(\theta-\alpha) \end{aligned}$$

Similarmente tenemos, que si

$$\sqrt{A^2+B^2} = R,\ \frac{A}{R} = \cos 2\beta,\ \frac{B}{R} = \sin 2\beta,\ \text{para algún ángulo } \beta,$$

usamos estas expresiones para escribir

$$\begin{aligned} A\cos 2\theta + B\sin 2\theta &= R\left(\frac{A}{R}\cdot\cos 2\theta + \frac{B}{R}\cdot\sin 2\theta\right) \\ &= R(\cos 2\beta\cdot\cos 2\theta + \sin 2\beta\cdot\sin 2\theta) \\ &= R\cos 2(\theta-\beta) \end{aligned}$$

ahora f puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(\theta) = 1 - r\cos(\theta-\alpha) - R\cos 2(\theta-\beta) \tag{1}$$

para

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{4} \text{ y } \theta = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

la ecuación (1) quedaría

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) &= 1 - r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - R\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta\right) \qquad (2) \\ &= 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

y

$$f\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

Si $r > \sqrt{2}$, entonces $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} < 0$ y si los ángulos

$$2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}\right) \text{ y } 2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

difieren por π, sus cosenos tienen signo opuesto. Por lo tanto una de las expresiones

$$R\cos 2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right),\ R\cos 2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right)$$

es positiva, entonces el lado derecho de una de las ecuaciones (2), (3) es negativo.

Esto significa que por lo menos uno de los valores $f(\alpha+\frac{\pi}{4})$, $f(\alpha-\frac{\pi}{4})$ es negativo, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto

$$r^2 = a^2 + b^2 \leq 2$$

Similarmente nosotros evaluamos f, para β y para $\beta+\pi$

$$f(\beta) = 1 - r\cos(\beta-\alpha) - R\cos 0 = 1 - r\cos(\beta-\alpha) - R \tag{4}$$

y

$$f(\beta+\pi) = 1 - r\cos(\beta+\pi-\alpha) - R\cos 2\pi = 1 - r\cos(\beta-\alpha+\pi) - R \tag{5}$$

si $R > 1$ entonces $1 - R < 0$ y desde $\beta-\alpha$ y $\beta-\alpha+\pi$ son diferentes por π, sus cosenos tienen signos positivos. Esto quiere decir que el lado derecho de una de las ecuaciones (4) y (5) es negativo, es decir que por lo menos uno de los valores $f(\beta)$, $f(\beta+\pi)$ son menores que cero.

Lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto

$$R^2 = A^2 + B^2 \leq 1.$$

Problema 5 *(IMO 1974) Dadas las funciones* $F(x) = ax^2 + bx + c$ *y* $G(x) = cx^2 + bx + a$ *donde*

$$|F(0)| \leq 1, \qquad |F(1)| \leq 1, \qquad |F(-1)| \leq 1$$

Probar que, para $|x| \leq 1$

i) $|F(x)| \leq \frac{5}{4}$

ii) $|G(x)| \leq 2$

Solución:

(*i*) Sabemos que una función cuadrática $F(x)$, está determinada por tres pares de valores, $(x, F(x))$. Elegimos los siguientes pares

$$(-1, F(-1)), \qquad (0, F(0)), \qquad (1, F(1))$$

obtenemos

$$F(x) = \frac{x(x-1)}{2}\cdot F(-1) - (x+1)(x-1)\cdot F(0) + \frac{(x+1)x}{2}\cdot F(1) \tag{1}$$

por hipótesis sabemos que $|F(0)| \leq 1$, $|F(1)| \leq 1$, $|F(-1)| \leq 1$ y aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$|F(x)| = \left|\frac{x(x-1)}{2}F(-1) + (x+1)(x-1)F(0) + \frac{(x+1)x}{2}F(1)\right| \leq \left|\frac{x(x-1)}{2}\right| + |(x+1)(x-1)| + \left|\frac{(x+1)x}{2}\right|$$

$$2|F(x)| \leq |x(x-1)| + 2|x^2-1| + |x(x+1)|.$$

Sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ tenemos

$$0 \leq 1+x \leq 2,\ 0 \leq 1-x \leq 2,\ 0 \leq 1-x^2 \leq 1$$

entonces

$$2|F(x)| \leq |x|(1-x+1+x) + 2(1-x^2) = 2\left(|x| + 1 - x^2\right)$$

o

$$|F(x)| \leq -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

donde la igualdad se da para,

$$F(x) = 1 + |x| - x^2$$

pues

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

(ii) Si $F(x) = ax^2 + bx + c$ entonces

$$x^2F\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\right) = cx^2 + bx + a = G(x).$$

Ahora por (1)

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^2}\left[(1-x)F(-1) + 2(1-x^2)F(0) + (1+x)F(1)\right]$$

entonces por $-1 \leq x \leq 1$ y aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} 2|G(x)| &\leq |1-x| + 2|1-x^2| + |1+x| = 4 - 2x^2 \\ |G(x)| &\leq 2 - x^2 \leq 2 \end{aligned}$$

donde la igualdad se cumple para

$$F(x) = 2x^2 - 1,\ G(x) = 2 - x^2,\ G(0) = 2$$

Problema 6 *(IMO 1970) Sean a, b, n, números enteros mayores que 1. Sean a, b las bases de dos sistemas de números.*

$$A_{n-1} \qquad y \qquad A_n$$

números en el sistema con base a.

$$B_{n-1} \qquad y \qquad B_n$$

números en el sistema con base b estos números están relacionados de la siguiente manera

$$A_n = x_nx_{n-1}\dots x_0 \qquad A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0$$

y

$$B_n = x_nx_{n-1}\dots x_0 \qquad B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0$$

con

$$x_n > 0 \qquad x_{n-1} \neq 0$$

Probar que

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad a > b$$

Solución:

Así como en base diez escribimos cualquier número. Por ejemplo

$$144 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 1 = P(10)$$

Sea $P(t)$, un polinomio

$$P(t) = x_n t^n + x_{n-1}t^{n-1} + \cdots + x_0$$

al utilizar este polinomio nuestro ejemplo anterior quedaría escrito de la siguiente forma

$$p(t) = t^2 + 4t + 1$$

entonces

$$A_n = P(a) \qquad B_n = P(b) \qquad A_{n-1} = P(a) - x_n a^n \qquad B_{n-1} = P(b) - x_n b^n.$$

En esta notación la desigualdad que queremos probar queda escrita de la siguiente forma

$$\frac{P(a) - x_n a^n}{P(a)} < \frac{P(b) - x_n b^n}{P(b)} \quad \Leftrightarrow \quad a > b \tag{1}$$

lo cual es equivalente a

$$1 - \frac{x_n a^n}{P(a)} < 1 - \frac{x_n b^n}{P(b)}.$$

Como $x_n > 0$ se tendrá la desigualdad anterior, si y solo si

$$\frac{a^n}{P(a)} > \frac{b^n}{P(b)}$$

lo cuál es equivalente

$$\frac{P(a)}{a^n} < \frac{P(b)}{b^n}$$

sustituimos y obtenemos

$$\frac{x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \cdots + x_0}{a^n} < \frac{x_n b^n + x_{n-1}b^{n-1} + \cdots + x_0}{b^n}$$

$\Leftrightarrow$

$$x_n + \frac{1}{a}\cdot x_{n-1} + \frac{1}{a^2}\cdot x_{n-2}\cdots, + \frac{1}{a^n}\cdot x_0 < x_n + \frac{1}{b}\cdot x_{n-1} + \cdots + \frac{1}{b^n}\cdot x_0$$

esta desigualdad es claramente verdadera ya que $x_{n-1} \neq 0$, si $a > b$, y esta desigualdad es falsa si $a < b$ como ha sido probada.

Problema 7 *Sea n un entero positivo y $a_i \geq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}\cdot(1 + a_1 + \cdots + a_n)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) &= 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2} + \frac{a_n}{2}\right) \\
&= 2^n \cdot (1 + \frac{a_1 - 1}{2})(1 + \frac{a_2 - 1}{2})\cdots(1 + \frac{a_n - 1}{2}) \\
&\geq 2^n \cdot \left(1 + \frac{a_1 - 1}{2} + \frac{a_2 - 1}{2} + \cdots + \frac{a_n - 1}{2}\right) \\
&\geq 2^n \cdot \left(1 + \frac{a_1 - 1}{n+1} + \frac{a_2 - 1}{n+1} + \cdots + \frac{a_n - 1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2^n}{n+1}\cdot(n + 1 + a_1 - 1 + a_2 - 1 + \cdots + a_n - 1) \\
&= \frac{2^n}{n+1}\cdot(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}\cdot(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

Problema 8 *Para cada entero $n > 1$, probar que*

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Solución:

Como no tenemos una fórmula para el lado izquierdo de la desigualdad, consideraremos el hecho de que el dominio de n, es esencialmente el conjunto de enteros positivos. Como n, corre a través de $1, 2, 3, \ldots$, el lado izquierdo genera una sucesión a_n

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

similarmente el lado derecho genera otra sucesión

$$b_n = \frac{3n}{2n+1}.$$

El problema puede ser ahora interpretado en términos de sucesiones de la siguiente manera

Para cada $n > 1$, probar que $a_n > b_n$. Podemos ver que para $n = 1$, esto no se cumple pues los dos lados son iguales a 1, pero esto no se toma en cuenta pues $n = 1$, no está incluido en el dominio de n.

Sin embargo esta información nos dice que las dos sucesiones

$$a_n \text{ y } b_n$$

inician en el mismo valor.

Para $n = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= 1+\frac{1}{2^2} = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ b_2 &= \frac{3(2)}{2(2)+1} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

por tanto

$$a_2 > b_2.$$

Vamos a investigar las relaciones de incremento de tamaño de los incrementos en general, es decir

$$a_n - a_{n-1} \text{ y } b_n - b_{n-1}$$

Podemos observar lo siguiente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} - \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{n^2} \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{3n}{2n+1} - \frac{3(n-1)}{2(n-1)+1} = 3\left[\frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1}\right] = \frac{3}{4n^2-1} \end{aligned}$$

para $n > 1$, esta fracción es positiva pero menor que 1. Luego

$$b_n - b_{n-1} = \frac{3}{4n^2-1} < \frac{3+1}{4n^2-1+1} = \frac{4}{4n^2} = \frac{1}{n^2} = a_n - a_{n-1}$$

es decir

$$b_n - b_{n-1} < a_n - a_{n-1} \tag{1}$$

vemos que a_n, siempre aumenta más de término a término que b_n. De (1), tenemos cambiando términos

$$a_n - b_n > a_{n-1} - b_{n-1} > \cdots > a_2 - b_2 = \frac{1}{20} > 0$$

entonces $a_n - b_n > 0$ para toda n. Por lo tanto $a_n > b_n$ para toda n.

Problema 9 *(URO 1986) Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son tres o más enteros positivos, acomodados en orden alrededor de un círculo, de tal forma que la suma de los vecinos de cada x_i, es un múltiplo de x_i, es decir*

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = K_i$$

un entero positivo, donde $(x_{n+1} = x_1)$. Probar que la suma S_n de todos estos enteros K_i es siempre por lo menos $2n$ pero nunca más grande que $3n$, es decir

$$2n \leq S_n < 3n$$

Solución:
Un ejemplo con $n = 7$ (ver figura 4.1)

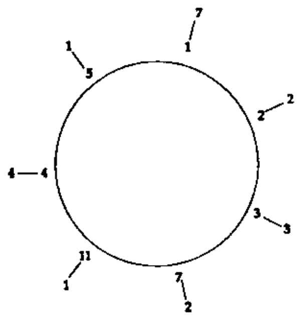


Figura 1: Problema 9

$$S_7 = 7 + 2 + 3 + 2 + 1 + 4 + 1 = 20,\ 14 \leq S_7 = 20 < 21.$$

Comenzamos nuestra prueba. Claramente

$$\begin{aligned} S_n &= K_1 + K_2 + \cdots + K_n \\ &= \frac{x_n + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n} \end{aligned} \tag{1}$$

esta expresión contiene estas dos fracciones

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \text{ y } \frac{x_i}{x_{i+1}} \text{ para cada } i$$

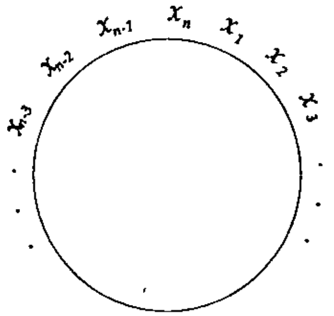


Figura 2: Problema 9

y utilizando el siguiente lema

Lema $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, para números reales positivos a, b.

PRUEBA DEL LEMA

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$$

sabemos que $(a-b)^2$, siempre es positivo.

Ahora podemos escribir la expresión (1), en los siguientes términos y aplicarle el resultado. Tenemos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{i+1}} \right) \geq 2n.$$

Tenemos demostrado que $S_n \geq 2n$. Ahora nos dedicaremos a probar por inducción que $S_n < 3n$. Observemos que el caso para tres enteros se cumple.

(a) $n = 3$

$$S_3 = \frac{x_3 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_1}{x_3}$$

esto se cumple, para el caso que los números x_i, son todos los iguales ya que $K_i = 2$, y tenemos fácilmente que

$$S_3 = 2 + 2 + 2 = 6 < 3 \cdot 3,$$

suponemos entonces que algunos, dos de x_1, x_2, x_3 son diferentes y además los denotaremos de la siguiente forma, sea x_1 el más grande y sea x_3 el más pequeño.

Ninguno, ni el más grande, ni el más pequeño son únicos y con esto hay tres posibilidades para x_2, que son

$$x_1 > x_2 > x_3 \qquad x_1 > x_2 = x_3 \qquad x_1 = x_2 > x_3$$

en cualquier caso, podemos siempre contar con las siguientes dos relaciones

$$x_1 \geq x_2 \text{ y } x_1 > x_3.$$

Consecuentemente tenemos

$$2x_1 = x_1 + x_1 > x_2 + x_3 \qquad \Rightarrow \qquad 2 > \frac{x_2 + x_3}{x_1}$$

implicando que

$$K_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1} < 2$$

como K_1 es un entero positivo menor que 2, entonces K_1 tiene que ser $K_1 = 1$. En tal caso se sigue que $x_1 = x_2 + x_3$, sustituyendo este valor de x_1 en la expresión para S_3 tenemos

$$\begin{aligned}
S_3 &= K_1 + K_2 + K_3 = 1 + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} \\
&= 1 + \frac{x_2 + x_3 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_3 + x_2}{x_3} \\
&= 1 + \frac{x_2 + 2x_3}{x_2} + \frac{2x_2 + x_3}{x_3} \\
&= 1 + \left(1 + \frac{2x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{2x_2}{x_3} + 1\right).
\end{aligned}$$

Por que K_2, K_3 son enteros, entonces las fracciones en esta última expresión y sabiendo además que son claramente positivas estas fracciones, más aún son enteros positivos, vemos que su producto es igual a 4 es decir

$$\left(\frac{2x_3}{x_2}\right)\left(\frac{2x_2}{x_3}\right) = 4.$$

Esto implica que sus valores tienen que ser 2 y 2 ó 1 y 4, en cualquier caso, la suma de ellos no puede exceder de 5, y tenemos

$$S_3 \leq 1 + 1 + 1 + 5 = 8 < 3 \cdot 3$$

por lo tanto decimos que es válida para $n = 3$.

(b) Supongamos que $S_{n-1} < 3(n-1)$ en una colección de $(n-1)$ enteros positivos y que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto apropiado de n enteros.

Trabajaremos este caso como el caso para $n = 3$. Si todas las x_i son iguales, tenemos inmediatamente que $S_n = 2n < 3n$. Ahora suponemos que hay por lo menos dos diferentes valores de las x_i, otra vez las denotamos como x_n el máximo entero y x_1 el más pequeño; de nuevo ninguno de estos dos es único por lo tanto las otras x_i, tienen tres posibilidades.

$$x_n > x_{n-1} \qquad x_n > x_{n-1} = x_1 \qquad x_n = x_{n-1} > x_1$$

en cualquier caso, podemos siempre contar con dos relaciones

$$x_n > x_{n-1} \text{ y } x_n > x_1$$

consecuentemente tenemos

$$2x_n = x_n + x_n > x_{n-1} + x_1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 > \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n}$$

haciendo $K_n = 1$ y $x_n = x_{n-1} + x_1$, nos fijamos en los enteros

$$K_1 = \frac{x_n + x_2}{x_1} = \frac{x_{n-1} + x_1 + x_2}{x_1} = 1 + \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1}$$

haciendo la fracción

$$r = \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1}$$

un entero positivo. Similarmente para

$$K_{n-1} = \frac{x_{n-2}+x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}+x_1}{x_{n-1}} = 1 + \frac{x_{n-2}+x_1}{x_{n-1}}$$

haciendo

$$s = \frac{x_{n-2}+x_1}{x_{n-1}}$$

un entero positivo.

Resumiendo tenemos

$$K_1 = 1 + r \text{ y } K_{n-1} = 1 + s$$

donde r, s, son enteros positivos. Ahora consideraremos el conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que resulta de haber quitado el máximo entero x_n.

La pregunta es ¿La hipótesis de inducción puede ser aplicada a este conjunto reducido?

Sí todas las fracciones asociadas $K'_1, K'_2, \ldots, K'_{n-1}$ son enteros positivos, estos valores $K'_2, K'_3, \ldots, K'_{n-2}$ son los mismos, es decir

$$K'_2 = K_2,\ K'_3 = K_3, \ldots, K'_{n-2} = K_{n-2}$$

todo lo demás depende de K'_1 y K'_{n-1} pero

$$K'_1 = \frac{x_{n-1}+x_2}{x_1} \text{ (= el entero } r\text{) y } K'_{n-1} = \frac{x_{n-2}+x_1}{x_{n-1}} \text{(= el entero } s\text{)}$$

entonces tenemos

$$S_{n-1} = r + K_2 + K_3 + \cdots + K_{n-2} + s < 3(n-1)$$

recordando que, para el conjunto completo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tenemos

$$K_1 = 1 + r \text{ y } K_{n-1} = 1 + s$$

entonces

$$\begin{aligned}
S_n &= K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1} + K_n \\
&= (1+r) + K_2 + \cdots + K_{n-2} + (1+s) + K_n \\
&= 1 + [r + K_2 + \cdots + K_{n-2} + s] + 1 + 1 \text{ (recordamos } K_n = 1) \\
&= 1 + S_{n-1} + 1 + 1 \\
&= S_{n-1} + 3 < 3(n-1) + 3 = 3n
\end{aligned}$$

Problema 10 *(IMO 1974) Sean $a, b, c, d > 0$. Encontrar todos los posibles valores de la suma*

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

Solución:

Claramente

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que d es el mayor de los cuatro números a, b, c, d. Entonces

$$S \leq \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d} = 1 + \frac{d}{a+c+d} < 1 + 1 = 2.$$

Probaremos que S toma todos los valores en el intervalo abierto $(1,2)$. Observamos que S varía continuamente con los números positivos a, b, c, d.

Si mostramos que S toma valores arbitrarios cercanos a los puntos extremos 1 y 2 de este intervalo. Entonces S toma todos los valores entre 1 y 2.

Sea $a=1$, $b=\epsilon$, $c=d=\epsilon^2$, donde $\epsilon \geq 0$. Entonces

$$S=\frac{1}{1+\epsilon+\epsilon^2}+\frac{\epsilon}{1+\epsilon+\epsilon^2}+\frac{\epsilon^2}{\epsilon+2\epsilon^2}+\frac{\epsilon^2}{1+2\epsilon^2}.$$

Como $\epsilon \to 0$, el primer término se aproxima a 1, los otros se aproximan a 0, entonces $S \to 1$.

Sea $a=c=1$, $b=d=\epsilon$, entonces

$$S=\frac{1}{1+2\epsilon}+\frac{\epsilon}{2+\epsilon}+\frac{1}{1+2\epsilon}+\frac{\epsilon}{2+\epsilon}.$$

Cuando $\epsilon \to 0$, la primera y tercera fracciones se aproximan a 1 mientras que la segunda y cuarta se aproximan a 0, entonces $S \to 2$.

Problema 11 *Para* $x, y, z > 0$

a)

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$$

b)

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Solución:

a) Reescribimos la desigualdad de la siguiente manera

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\cdot\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{x} \geq \frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}$$

el lado izquierdo es el producto escalar de dos secuencias en el mismo sentido y el lado derecho es el producto escalar de un rearreglo de secuencias (por la desigualdad del rearreglo, nuestra desigualdad es válida).

b) Vamos a aplicar una idea muy útil, primero limpiamos denominadores y queda

$$x^4z^2+y^4z^2+z^4y^2 \geq x^3yz^2+x^2y^3z+xy^2z^3$$

ahora suponemos que $x \geq y \geq z$, entonces transformamos como sigue

$$x^3z^2(x-y)+x^2y^3(y-z)+y^2z^3(z-x) \geq 0$$

en esta desigualdad, los dos primeros paréntesis son mayores o iguales a cero, pero el tercero es negativo. En este caso usualmente escribimos $z-x=z-y+y-x$, al ponerlos juntos

$$x^3z^2(x-y)+x^2y^3(y-z)-y^2z^3(x-y)-y^2z^3(y-z) \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$z^2\left(x^3-y^2z\right)(x-y)+y^2\left(x^2y-z^3\right)(y-z) \geq 0$$

esta última desigualdad es obviamente correcta.

Problema 12 *(OMM 1998) Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1,2,\ldots,m-1,m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $\frac{1}{\sqrt{2}}m$.*

Solución:
Supongamos que $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ y $B=\{b_1,\ldots,b_r\}$, por hipótesis

$$a_1+\cdots+a_n=b_1+\cdots+b_r\le\frac{1}{2}\{1+2+\cdots+n\}=\frac{1}{4}m(m+1)$$

como los elementos de A son al menos tan grandes como los primeros n números, tenemos que

$$1+2+\cdots+n\le a_1+a_2+\cdots+a_n\le\frac{1}{4}m(m+1)$$

luego

$$\frac{n(n+1)}{2}\le\frac{1}{4}m(m+1)$$

por tanto

$$n^2+n\le\frac{m^2+m}{2}=\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{m}{2}<\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{m}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(n^2+n+\frac{1}{4}\right)<\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{m}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}=\left(\frac{m}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2$$

Por tanto

$$n<\frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Problema 13 *Probar que para reales a,b,c*

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

Solución:
Primera prueba: Multiplicamos por 2 y obtenemos

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

esta última desigualdad es cierta y queda demostrado.
Segunda Prueba: Tenemos que $a^2+b^2\ge 2ab$, $b^2+c^2\ge 2bc$, $c^2+a^2\ge 2ca$, entonces

$$\begin{aligned} a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 &\ge 2ab+2bc+2ca\\ 2\left(a^2+b^2+c^2\right) &\ge 2(ab+bc+ca)\cdot \end{aligned}$$

dividiendo entre 2, tenemos

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca.$$

Tercera prueba: Supongamos que $a \geq b \geq c$, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

$\Leftrightarrow$

$$a(a-b) + b(b-c) - c(a-c) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$a(a-b) + b(b-c) - c(a-b+b-c) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$a(a-b) + b(b-c) - c(a-b) - c(b-c) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(a-c)(a-b) + (b-c)^2 \geq 0$$

y esta última desigualdad es verdadera.

Problema 14 *Si a, b, c son números reales tales que $0 \leq a, b, c \leq 1$ entonces*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

Solución:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ y $0 \leq (1-a)(1-b)$.

Como $(1-a)(1-b) \geq 0$, entonces $a + b \leq 1 + ab \leq 1 + 2ab$, ya que $c \leq 1$ entonces $a + b + c \leq a + b + 1 \leq 2 + 2ab = 2(1+ab)$.

Asi

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} &\leq \frac{a}{1+ab} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+ab} \\ &\leq \frac{a+b+c}{1+ab} \\ &\leq \frac{2(1+ab)}{(1+ab)} = 2 \end{aligned}$$

Problema 15 *Sean a, b, $c > 0$, $a > c$, $b > c$. Probar que*

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Solución:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

elevando al cuadrado

$$c(a-c) + 2\sqrt{c(a-c)}\sqrt{c(b-c)} + c(b-c) \leq ab$$

$\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{c(a-c)}\sqrt{c(b-c)} \leq ab - ca + c^2 - cb + c^2$$

$\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{c(a-c)}\sqrt{c(b-c)} \leq c(-a+2c-b)+ab$$

elevando de nuevo al cuadrado

$$4\left[\left(ca-c^2\right)\left(cb-c^2\right)\right] \leq c^2(-a+2c-b)^2+2(ab)(c(-a+2c-b))+a^2b^2$$

$\Leftrightarrow$

$$4c^2ab-4c^3a-4c^3b+4c^4 \leq c^2\left(a^2+b^2+2ab-4ca-4cb+4c^2\right)+2c\left(-a^2b+2abc-ab^2\right)+a^2b^2$$

cancelando términos semejantes, nos queda

$$0 \leq a^2c^2+c^2b^2+a^2b^2-2ca^2b-2ab^2c+2abc^2$$

factorizando

$$0 \leq (ab-ac-bc)^2$$

donde la igualdad se cumple si

$$c=\frac{ab}{a+b}.$$

Problema 16 *Sean a, b, c reales positivos, probar que*

$$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b} \geq 0.$$

Solución:

Efectuamos la operación

$$\frac{(a+b-2c)(c+a)(a+b)+(b+c-2a)(b+c)(a+b)+(c+a-2b)(b+c)(c+a)}{(b+a)(c+a)(a+b)} \geq 0$$

multiplicando y cancelando términos semejantes, nos queda

$$\frac{a^3+b^3+c^3-2a^2c-2b^2a-2c^2b+c^2a+a^2b+cb^2}{(b+a)(c+a)(a+b)} \geq 0$$

factorizando el numerador, tenemos

$$\frac{a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(c-b)^2}{(b+c)(c+a)(a+b)} \geq 0$$

que siempre es positivo.

Problema 17 *(HMO 1896) Probar que $\log n \geq k \log 2$, donde n es un número natural y k es el número de primos distintos que dividen a n.*

Solución:

Sea n un número natural mayor que 1 y sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sus divisores primos y sean $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ las potencias más grandes de estos primos que dividen a n. Entonces

$$n=p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

ya que ninguna de las p_i's es menor que 2 y cada $\alpha_i \geq 1$

$$n \geq 2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \geq 2^k$$

esta es verdad también para $n=1$, entonces $k=0$ y $n=1=2^0=2^k$. Si aplicamos el logaritmo entonces nuestra desigualdad nos da el resultado querido

$$\log n \geq k \log 2.$$

4.2 Desigualdad Media Aritmética - Media Geométrica

Problema 18 *(IMO 1969) Probar que para todos los números reales: x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, con:*

$$\begin{aligned} x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0 \\ x_1y_1 - z_1^2 &> 0 \\ x_2y_2 - z_2^2 &> 0 \end{aligned}$$

Se cumple la desigualdad:

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

Dar una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad.

Solución:

Introducimos las siguientes abreviaciones:

$$\begin{aligned} D_1 &= x_1y_1 - {z_1}^2 \\ D_2 &= x_2y_2 - {z_2}^2 \\ D &= (x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

y notamos que de las relaciones dadas: $D_i > 0$, $x_i > 0$, tenemos entonces $y_i > 0$ $(i = 1, 2)$. También tenemos:

$$D_i = x_iy_i - {z_i}^2 \Rightarrow x_i = \frac{D_i + {z_i}^2}{y_i}.$$

La desigualdad a ser probada es equivalente a:

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \geq \frac{8}{D}.$$

o si $D > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{D_2 + D_1}{D_1D_2} &\geq \frac{8}{D} \\ (D_1 + D_2)D &\geq 8(D_1D_2) \end{aligned} \tag{2}$$

ahora escribimos D, en términos de D_i, z_i, y_i:

$$\begin{aligned} D &= (x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2 \\ &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - z_1^2 - 2z_1z_2 - z_2^2 \\ &= D_1 + D_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2 \\ &= D_1 + D_2 + \frac{D_1 + z_1^2}{y_1}\cdot y_2 + \frac{D_2 + z_2^2}{y_2}\cdot y_1 - 2z_1z_2 \\ &= D_1 + D_2 + \frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2} + \frac{z_1^2}{y_1}\cdot y_2 + \frac{z_2^2}{y_2}\cdot y_1 - 2z_1z_2 \\ &= D_1 + D_2 + \frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2} + \left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 \cdot y_1y_2 > 0 \end{aligned}$$

sustituyendo esta expresión de D en (2), obtenemos:

$$(D_1+D_2)\cdot\left[\left(D_1+D_2+\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right)+\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)^2\cdot y_1y_2\right] \geq 8D_1D_2$$

$$(D_1+D_2)^2+(D_1+D_2)\cdot\left(\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right)+(D_1+D_2)\cdot\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)^2\cdot y_1y_2 \geq 8D_1D_2$$

sustrayendo $4D_1D_2$ a ambos lados, encontramos que la desigualdad deseada es equivalente a:

$$(D_1-D_2)^2+(D_1+D_2)\cdot\left[\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right]+(D_1+D_2)\cdot\left[\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right]^2\cdot y_1y_2\geq 4D_1D_2 \tag{3}$$

Ahora vamos a ver si el factor de en medio es $\geq 4D_1D_2$, y para eso aplicamos la desigualdad media aritmética y la desigualdad media geométrica ($r+s\geq 2\sqrt{rs}$) es decir satisface:

$$\begin{aligned} D_1+D_2 &\geq 2\sqrt{D_1D_2}\\ \frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2} &\geq 2\sqrt{\frac{D_1D_2y_1y_2}{y_1y_2}}=2\sqrt{D_1D_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (D_1+D_2)\left[\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right] &\geq \left(2\sqrt{D_1D_2}\right)\cdot\left(2\sqrt{D_1D_2}\right)\\ &= 4D_1D_2.\end{aligned}$$

La igualdad se cumple en (3), si y solo si $D_1=D_2$, $\frac{D_1y_2}{y_1}=\frac{D_2y_1}{y_2}$, $\frac{z_1}{y_1}=\frac{z_2}{y_2}$ las primeras dos de estas ecuaciones implican que: $y_1=y_2$, con la tercera nos da: $z_1=z_2$ y estas combinadas con $D_1=D_2$ nos da $x_1=x_2$. Por lo tanto la igualdad se da si y solo si

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2.$$

Problema 19 *(IMO 1984) Probar que*

$$0\leq yz+zx+xy-2xyz\leq\frac{7}{27}$$

donde x, y, z, son números reales positivos los cuales cumplen:

$$x+y+z=1.$$

Solución:

Como x, y, z, son positivos y $x+y+z=1$, por lo menos uno de estos tres números, digamos que z, es $\leq\frac{1}{2}$.

Sea $G=yz+zx+xy-2xyz=z(x+y)+xy(1-2z)$, ahora G está escrito como una suma de términos no-negativos es no-negativo. Por lo tanto $G\geq 0$.

Nos queda probar que $G\leq\frac{7}{27}$. Para esto, usaremos la desigualdad media aritmética - media geométrica, es decir, $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

Sabemos por hipótesis que $x+y=1-z$ entonces:

$$(1-z)^2=(x+y)^2\geq 4xy$$

entonces sustituyendo estos valores en G, y restando $\frac{7}{27}$ es decir:

$$\begin{aligned} G-\frac{7}{27} &= z(x+y)+xy(1-z)-\frac{7}{27} \\ &\leq z(1-z)+\frac{1}{4}(1-z)^2(1-2z)-\frac{7}{27} \\ &= -\frac{(3z-1)^2(6z+1)}{108} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$0 \leq G \leq \frac{7}{27}$$

y el máximo valor de G, es decir $G=\frac{7}{27}$ es alcanzado solamente cuando

$$x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Problema 20 *(IMO 1972) Encuentra todas las soluciones:* (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) *del siguiente sistema de desigualdades.*

$$\begin{aligned} ({x_1}^2-x_3x_5)({x_2}^2-x_3x_5) &\leq 0 \\ ({x_2}^2-x_4x_1)({x_3}^2-x_4x_1) &\leq 0 \\ ({x_3}^2-x_5x_2)({x_4}^2-x_5x_2) &\leq 0 \\ ({x_4}^2-x_1x_3)({x_5}^2-x_1x_3) &\leq 0 \\ ({x_5}^2-x_2x_4)({x_1}^2-x_2x_4) &\leq 0 \end{aligned}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *son números reales positivos.*

Solución:

(utilizando algunas propiedades de las desigualdades):

$$(x_i^2-x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4}) \leq 0 \tag{1}$$

donde los indices son leidos módulo 5, es decir: $x_{j+5}=x_j$.

Multiplicamos cada expresión del lado izquierdo de las desigualdades y luego las sumamos y nos queda la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} 0 \geq\ & {x_1}^2{x_2}^2-{x_1}^2x_3x_5-{x_2}^2x_3x_5+{x_3}^2{x_5}^2+{x_2}^2{x_3}^2 \\ & -{x_2}^2x_4x_1-{x_3}^2x_4x_1+{x_4}^2{x_1}^2+{x_3}^2{x_4}^2-{x_3}^2x_5x_2 \\ & -{x_4}^2x_5x_2+{x_5}^2{x_2}^2+{x_4}^2{x_5}^2-{x_4}^2x_1x_3-{x_5}^2x_1x_3 \\ & +{x_2}^2{x_3}^2+{x_5}^2{x_1}^2-{x_5}^2x_2x_4-{x_1}^2x_2x_4+{x_2}^2{x_4}^2 \end{aligned}$$

encontramos que en la suma anterior hay diez términos de la forma:

$${x_i}^2{x_j}^2 \qquad (i \neq j)$$

y diez términos cruzados de los cuales cinco son de la forma:

$$-{x_i}^2x_{i+1}x_{i+3}$$

y los otros cinco de la forma:

$$-{x_i}^2 x_{i+2} x_{i+4}.$$

Entonces agrupamos los términos y llegamos a la siguiente representación de las suma de las desigualdades dadas:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^{5}({x_i}^2 - x_{i+2}x_{i+4})({x_{i+1}}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(x_i x_{i+1} - x_i x_{i+3})^2 + (x_{i-1}x_{i+1} - x_{i-1}x_{i+3})^2 \end{aligned}$$

esta suma de cuadrados no puede ser negativa, concluimos que es cero. Lo cual significa que cada término se desaparece, esto implica que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Cada conjunto de cinco números positivos iguales es una solución del sistema de desigualdades.

Problema 21 *(CMO 1987) Si a, b, c son números reales mayores que 1. Probar para cualquier exponente* $r > 0$,

$$S = (\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3{\cdot}2^r$$

Solución:

Primero recordaremos el siguiente resultado:

$$\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}.$$

Tenemos que:

$$\log_a bc = \frac{\ln bc}{\ln a} = \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a}$$

aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica

$$\frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a} \geq 2\left[\frac{\ln b{\cdot}\ln c}{(\ln a)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

entonces sustituyendo nos queda:

$$\log_a bc \geq \frac{2(\ln b \cdot \ln c)^{\frac{1}{2}}}{\ln a}$$

elevando a la $r > 0$, ambos lados tenemos

$$(\log_a bc)^r \geq \frac{2^r(\ln b \cdot \ln c)^{\frac{r}{2}}}{(\ln a)^r}$$

similarmente tenemos

$$(\log_b ca)^r \geq \frac{2^r(\ln c \cdot \ln a)^{\frac{r}{2}}}{(\ln b)^r}$$

y

$$(\log_c ab)^r \geq \frac{2^r(\ln a \cdot \ln b)^{\frac{r}{2}}}{(\ln c)^r}$$

de esta manera la suma S, está acotada por

$$S \geq \frac{2^r(\ln b \cdot \ln c)^{\frac{r}{2}}}{(\ln a)^r} + \frac{2^r(\ln c \cdot \ln a)^{\frac{r}{2}}}{(\ln b)^r} + \frac{2^r(\ln a \cdot \ln b)^{\frac{r}{2}}}{(\ln c)^r}$$

finalmente aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica a los términos sobre el lado derecho tenemos:

$$\frac{S}{3} \geq \left[\frac{2^r(\ln b \cdot \ln c)^{\frac{r}{2}}}{(\ln a)^r} \cdot \frac{2^r(\ln c \cdot \ln a)^{\frac{r}{2}}}{(\ln b)^r} \cdot \frac{2^r(\ln a \cdot \ln b)^{\frac{r}{2}}}{(\ln c)^r}\right]^{\frac{1}{3}}$$

y

$$S \geq 3\left[\frac{2^{3r}(\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r}{(\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r}\right]^{\frac{1}{3}}$$

que es

$$S \geq 3 \cdot 2^r$$

como queriamos probar.

Problema 22 *Si a, b, c, son números reales no-negativos tales que:*

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$$

Probar que $abc \leq 1$.

Solución:

Vamos a multiplicar la expresión dada:

$$8 = (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc$$

aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica, a los términos $(a+b+c)$ entonces

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Sea $P = \sqrt[3]{abc}$ entonces la desigualdad anterior quedaría de la siguiente forma

$$a+b+c \geq 3P$$

ahora aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica a los siguientes términos (ab, bc, ca), entonces

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = P^2$$

y

$$ab + bc + ca \geq 3P^2.$$

Como un resultado la relación dada quedaría expresada en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 8 &\geq 1 + 3P + 3P^2 + P^3 \\ 8 &\geq (1+P)^3 \\ 2 &\geq (1+P) \\ 1 &\geq P. \end{aligned}$$

Tenemos que $P \leq 1$, recordemos que $P = \sqrt[3]{abc}$, por lo tanto

$$P^3 = abc \leq 1$$

Problema 23 *Probar la desigualdad:*

$$n[(n+1)^{\frac{1}{n}} - 1] < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < n - (n-1)n^{\frac{-1}{(n-1)}}$$

Solución:

Sea
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
ahora analicemos el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos lo siguiente:
$$S_n > n[(n+1)^{\frac{1}{n}} - 1]$$
si y solo si
$$\frac{S_n + n}{n} > (n+1)^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$
Para probar (1), tiene un ligero parecido a la desigualdad media aritmética media geométrica; primero trabajaremos el lado izquierdo de (1) de la siguiente manera y después le aplicaremos la desigualdad media aritmética - media geométrica
$$\begin{aligned}
\frac{n+S_n}{n} &= \frac{n + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})}{n} \\
&= \frac{(1+1) + (1+\frac{1}{2}) + \cdots + (1 + \frac{1}{n})}{n} \\
&= \frac{2 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n}}{n} \\
&\geq (2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n})^{\frac{1}{n}} \\
&= (n+1)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$
lo que queríamos probar.

Ahora para el lado derecho de la desigualdad necesitamos demostrar que:
$$S_n < n - (n-1)n^{\frac{-1}{(n-1)}}$$
si y solo si
$$\frac{S_n - n}{(n-1)} > n^{\frac{-1}{(n-1)}}$$
de nuevo utilizaremos la desigualdad media aritmética - media geométrica pero primero trabajaremos el resultado de la siguiente forma:
$$\begin{aligned}
\frac{n - S_n}{(n-1)} &= \frac{n - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})}{n-1} \\
&= \frac{(1-1) + (1 - \frac{1}{2}) + \cdots + (1 - \frac{1}{n})}{n-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{(n-1)}{n}}{n-1}
\end{aligned}$$
aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos:
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{(n-1)}{n}}{n-1} &> (\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n})^{\frac{1}{(n-1)}} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{(n-1)}} = n^{\frac{-1}{(n-1)}}
\end{aligned}$$

lo que queríamos probar.

$$n[(n+1)^{\frac{1}{n}}-1] < S_n < n-(n-1)n^{\frac{-1}{(n-1)}}$$

Problema 24 *(OPP) Supongamos que x, y son números reales no-negativos, con*

$$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=4$$

Probar que x^2y es siempre menor que 4.

Solución:

Vamos a utilizar la bien conocida desigualdad media aritmética - media geométrica. Nosotros tendríamos que escoger con mucho cuidado nuestros números de tal manera que al hacerlo nos quede del lado derecho de la desigualdad el término

Sabemos que x^2y, es el producto de tres factores

$$x \qquad x \qquad y$$

entonces se nos ocurre tratar de usar:

$$\frac{x+x+y}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y}$$

si utilizamos esos números nuestro lado derecho esta bien, pero el lado izquierdo solo necesitamos tener $x+y$, es decir necesitamos tener solamente $x+y$ del lado izquierdo y x^2y del lado derecho. Si hacemos unos pequeños ajustes, es decir si usamos $\frac{x}{2}$, dos veces en vez de x, tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}y}$$

$\Rightarrow$

$$x+y \geq 3\left[\frac{x^2y}{4}\right]^{\frac{1}{3}}$$

lo cual es una parte que necesitamos. Ahora vamos a tratar de obtener un resultado similar con

$$2x^2+2xy+3y^2$$

en el lado izquierdo al aplicar la desigualdad media aritmética - media geométrica. Después de varios intentos llegamos a lo siguiente:

$$\frac{\left[\frac{2x^2}{8}+\frac{2x^2}{8}+\cdots+\frac{2x^2}{8}\right]+\left[\frac{2xy}{4}+\cdots+\frac{2xy}{4}\right]+\left[y^2+y^2+y^2\right]}{15}$$

dentro de los corchetes tenemos respectivamente 8, 4, y 3 términos iguales.

$$\geq \left[\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8\left(\frac{2xy}{4}\right)^4(y^2)^3\right]^{\frac{1}{15}}$$

que es:

$$2x^2+2xy+3y^2 \geq 15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

poniendo todo junto nos queda:

$$\begin{aligned} 4 &= x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2} \\ &\geq 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{15}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &> 4\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 &> \left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ 4 &> x^2y. \end{aligned}$$

Lo que queríamos probar.

Problema 25 *Dados p, q, r números positivos tales que $2p = q + r$, con $q \neq r$ Mostrar que:*

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$

Solución:
Suponemos que q y r son enteros positivos y consideramos los q números $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}$ y los r números $\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}$. Por la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{q^q}\frac{1}{r^r}\right)^{\frac{1}{(q+r)}} &< \frac{q\left(\frac{1}{q}\right)+r\left(\frac{1}{r}\right)}{q+r} = \frac{2}{q+r} = \frac{1}{p} \\ \left(\frac{1}{q^q}\cdot\frac{1}{r^r}\right)^{\frac{1}{(q+r)}} &< \frac{1}{p} \end{aligned}$$

elevando a la $(q+r)$, tenemos:

$$\frac{1}{q^q r^r} < \frac{1}{p^{(q+r)}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p^{(q+r)}}{q^q r^r} < 1$$

lo cual es equivalente a la desigualdad querida. Este método no funciona cuando cualquiera de los dos q o r no es un número entero. ¿Qué haremos ahora? Una idea es reescribir la desigualdad de la siguiente manera, sabemos que:

$$2p = q + r \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{q+r}{2}$$

tenemos:

$$p^{q+r} < q^q r^r$$

sustituyendo el valor de p, nos queda:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q+r}{2}\right)^{q+r} &< q^q r^r \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{q+r} &< \left(\frac{q}{q+r}\right)^q \left(\frac{r}{q+r}\right)^r \end{aligned}$$

sacando raíz $q+r$, tenemos:

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{q}{q+r}\right)^{\frac{q}{q+r}} \left(\frac{r}{q+r}\right)^{\frac{r}{q+r}}$$

sea

$$x = \frac{q}{q+r} \text{ y } y = \frac{r}{q+r}$$

observamos que

$$x + y = 1 \text{ y } 0 < x, y < 1$$

entonces el problema es equivalente a probar que:

$$F(x) \equiv x^x(1-x)^{1-x} > \frac{1}{2}, \qquad 0 < x < 1, \qquad x \neq \frac{1}{2}.$$

Introduciendo la función de esta manera estamos habilitados para usar los métodos de análisis. La idea es encontrar el valor mínimo de F sobre $(0,1)$. Para simplificar la derivada consideraremos la función:

$$G(x) = \log F(x)$$

para encontrar los puntos críticos derivamos:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx}[x\log x + (1-x)\log(1-x)] \\ &= (\log x + 1) - 1 - \log(1-x) \\ &= \log\frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

podemos ver que:

$$G'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}$$

más aún $G'(x) < 0$ sobre el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y $G'(x) > 0$ sobre el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$. Por lo tanto $G(x)$ toma su valor mínimo sobre $(0,1)$ en $x = \frac{1}{2}$.

El valor mínimo de $F(x)$, sobre $(0,1)$, es:

$$F(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

de lo anterior tenemos que:

$$F(x) > \frac{1}{2} \qquad \forall x \text{ en } (0,1),\, x \neq \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$

Problema 26 *Si los números reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ son tales que:*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

Probar que:

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

Solución:

Sea:

$$\frac{1}{(1+x_i)} = a_i$$

entonces tenemos

$$a_i + a_i x_i = 1 \ \text{ y } \ x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$$

denotando $a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ por A tenemos el siguiente producto:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1-a_i}{a_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{A}$$

ahora dando la condición:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 1$$

tenemos que:

$$1 - a_i = a_1 + \cdots a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1}.$$

Aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos: para cada i

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1}}{n} \geq [a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{n+1}]^{\frac{1}{n}}$$

que es:

$$\frac{1-a_i}{n} \geq \left[\frac{A}{a_i}\right]^{\frac{1}{n}}$$

multiplicando las $n+1$ relaciones dadas:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{n^{n+1}} \geq \left[\frac{A^{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{A^{n+1}}{A}\right]^{\frac{1}{n}} = A.$$

Por lo tanto tenemos:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{A} \geq n^{n+1}$$

lo que queríamos demostrar.

Problema 27 *(LHSO 1980) Si a, b, c, d son números reales positivos tales que*

$$a + b + c + d = 1$$

Probar que:

$$S = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$$

Solución:

Por la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos:

$$\frac{(4a+1)+1}{2} \geq \sqrt{(4a+1)\cdot 1}$$

es decir:

$$\sqrt{4a+1} \leq 2a+1$$

dándose la igualdad si $4a+1=1$, es decir si $a=0$.

Por hipótesis a es positivo, entonces la desigualdad es estricta y tenemos:

$$\sqrt{4a+1} < 2a+1$$

similarmente tenemos las relaciones para b, c, d es decir:

$$\sqrt{4b+1} < 2b+1 \qquad \sqrt{4c+1} < 2c+1 \qquad \sqrt{4d+1} < 2d+1$$

sustituyendo estos valores en S, nos queda:

$$\begin{aligned} S &< (2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1) \\ &= 2(a+b+c+d)+4 \\ &= 2+4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

por lo tanto $S < 6$, lo que necesitamos probar.

Problema 28 *Supongamos que $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea $x_{n+1} = x_1$. Probar que*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n.$$

Solución:

Consideremos el caso para $n = 3$, por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1 \le \frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3} \\ \frac{x_3}{x_2} &= \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1 \le \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3} \\ \frac{x_1}{x_3} &= \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot 1 \le \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

también

$$1 = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1} \le \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3$$

sumando estas desigualdades nos da el resultado querido. El caso para n entero positivo arbitrario es similar.

4.3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Problema 29 *(USAMO 1978) Sean a, b, c, d, e números reales tales que:*

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16 \end{aligned}$$

Determinar el valor máximo de e.

Solución:

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los siguientes dos conjuntos $\{a, b, c, d\}$ y $\{1, 1, 1, 1\}$, tenemos:

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 \tag{1}$$

sabemos que

$$a + b + c + d = 8 - e \text{ y } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2$$

al sustituir estos valores en (1), tenemos:

$$\begin{aligned} 4(16 - e^2) &\geq (8 - e)^2 \\ 64 - 4e^2 - (8 - e)^2 &\geq 0 \\ 64 - 4e^2 - 64 + 16e - e^2 &\geq 0 \\ -(5e^2 + 16e) &\geq 0 \\ e(5e - 16) &\leq 0 \end{aligned}$$

resolviendo para e, encontramos que la solución es el intervalo: $\frac{16}{5} \geq e \geq 0$. La cota superior $\frac{16}{5}$ es obtenida cuando $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

En un camino similar podemos generalizar el problema y encontrar el valor máximo de a_n donde

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = K \text{ y } {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 = L$$

y las $a_i's$, son números reales.

Prueba: Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los siguientes conjuntos:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \text{ y } \{1, 1, \ldots, 1\}$$

y obtenemos

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} {a_i}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \tag{2}$$

sabemos que:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &= K - a_n \\ {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_{n-1}}^2 &= L - {a_n}^2 \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en (2) tenemos

$$\begin{aligned} (n-1)(L - {a_n}^2) &\geq (K - a_n)^2 \\ (n-1)L - (n-1){a_n}^2 &\geq k^2 - 2Ka_n + {a_n}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$n{a_n}^2 - 2Ka_n + K^2 - (n-1)L \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$n{a_n}^2 - 2Ka_n + K^2 - (n-1)L \leq 0$$

si $(n-1)L = K^2$ cancelamos esos términos y nos queda:

$$\begin{aligned} na_n{}^2 - 2Ka_n &\leq 0 \\ a_n(na_n - 2K) &\leq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$a_n \geq 0 \text{ y } na_n - 2K \leq 0$$

de lo anterior tenemos que:

$$na_n \leq 2K \qquad \Rightarrow \qquad a_n \leq \frac{2K}{n}$$

por lo tanto

$$0 \leq a_n \leq \frac{2K}{n}$$

y el valor máximo de a_n se alcanza cuando tenemos:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$$

Problema 30 *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde $n \geq 2$ números positivos tales que*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Probar que:

$$S = \frac{x_1}{1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1 + \cdots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Solución:

Por hipótesis tenemos lo siguiente que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ entonces

$$S = \frac{x_1}{1 + (1 - x_1)} + \frac{x_2}{1 + (1 - x_2)} + \cdots + \frac{x_n}{1 + (1 - x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2 - x_i}$$

ahora vamos a manipular el término general, de la siguiente manera:

$$\frac{x_i}{2 - x_i} = \frac{2 - 2 + x_i}{2 - x_i} = \frac{2}{2 - x_i} - \frac{2 - x_i}{2 - x_i} = \frac{2}{2 - x_i} - 1 \qquad .$$

Luego:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2 - x_i} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - x_i}\right] - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - x_i}\right] - n$$

nuestro siguiente paso es la aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que dice:

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

con

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2 - x_i}} \qquad b_i = \sqrt{2 - x_i}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\right)((2-x_1)+(2-x_2)+\cdots+(2-x_n)) &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{2-x_1}}\sqrt{2-x_1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2-x_n}}\sqrt{2-x_n}\right)^2\\
\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\right)(2n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)) &\geq n^2\\
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}(2n-1) &\geq n^2\\
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i} &\geq \frac{n^2}{2n-1}\\
S=2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\right]-n &\geq \frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}\\
\therefore S &\geq \frac{n}{2n-1}
\end{aligned}$$

Problema 31 *Probar que si a y b son números positivos tales que $a+b=1$, entonces:*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

Solución:

Sabemos que:

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

sea

$$x=a+\frac{1}{a} \text{ y } y=b+\frac{1}{b}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right] &\geq \frac{1}{4}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]^2\\
&= \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geq(1+1)^2=4$$

entonces

$$\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2\geq\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{a+b}\right)\right]^2=\left(\frac{1+4}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

el resultado sigue después de poner juntas las dos anteriores desigualdades y multiplicando cada lado por 2, es decir, tenemos:

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right]\geq\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2\geq\frac{25}{4}$$

multiplicando por dos ambos lados tenemos:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

Problema 32 *(IMO 1995) Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc=1$. Probar que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Solución:

Sean

$$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}$$

entonces $xyz=1$ y

$$\frac{1}{a^3\,(b+c)}+\frac{1}{b^3\,(c+a)}+\frac{1}{c^3\,(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

ya que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3\,(b+c)}+\frac{1}{b^3\,(c+a)}+\frac{1}{c^3\,(a+b)} &= \frac{x^2}{ab+ac}+\frac{y^2}{bc+ba}+\frac{z^2}{ac+bc}\\ &= \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \qquad (1)\end{aligned}$$

Para probar que $S\geq\frac{3}{2}$, aplicamos la desigualdad de Cauchy a los vectores

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{z+x}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)\ \text{y}\ \left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right) &\leq \left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{z+x}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right]\cdot\\ &\quad\left[\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{z+x}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

nos queda

$$(x+y+z)^2\leq S\cdot 2\,(x+y+z)$$

o

$$S\geq\frac{(x+y+z)}{2}$$

usando la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos

$$S\geq\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{3}{2}\geq\sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

la igualdad se cumple si $x=y=z=1$, lo cual es equivalente a $a=b=c=1$.

Problema 33 * *Sea $a+b+c=1$, probar la desigualdad*

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

Solución:
Consideremos los vectores $(1,1,1)$ y $\left(\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1}\right)$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left(1\cdot\sqrt{4a+1}+1\cdot\sqrt{4b+1}+1\cdot\sqrt{4c+1}\right)^2 &\leq [(1^2+1^2+1^2)]\left[\left(\sqrt{4a+1}\right)^2+\left(\sqrt{4b+1}\right)^2+\left(\sqrt{4c+1}\right)^2\right]\\
\left(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\right)^2 &\leq 3(4a+1+4b+1+4c+1)=3(4(a+b+c)+3)=21
\end{aligned}$$

y tenemos la igualdad si y solo si $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema 34 * *Si $a,b,c>0$, ¿es verdadero que $a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$ implica que $\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}$?*

Solución:
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta &\leq \left[\left(\sqrt{a}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{b}\sin\theta\right)^2\right]^{1/2}\left[(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right]^{1/2}\\
&= \left(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\right)^{1/2}\\
&< \sqrt{c}.
\end{aligned}$$

También hay una buena solución basada en la desigualdad media aritmética - media geométrica

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta\right)^2 &= a\cos^4\theta+2\sqrt{a}\sqrt{b}\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta\\
&\leq a\cos^4\theta+(a+b)\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta\\
&= \left(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\
&< c.
\end{aligned}$$

Problema 35 * *Supongamos que $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son reales y*

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

probar que $A<2a_ia_j$ para $1\leq i<j\leq n$.

Solución:
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 &= [(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n]^2\\
&\leq (1+\cdots+1)\left((a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\right)\\
&= (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_1a_2\right]
\end{aligned}$$

esto, junto con la desigualdad dada implica que

$$\begin{aligned} A &< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \\ &< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left[(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1a_2\right]\right] \\ &= 2a_1a_2 \end{aligned}$$

de manera similar $A < 2a_ia_j$ para $1 \leq i < j \leq n$.

4.4 Desigualdad del Rearreglo

Problema 36 *(IMO 1975) Sea x_i, y_i con $(i = 1, 2, \ldots, n)$ números reales tales que $\{x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$ y $\{y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n\}$. Probar que si $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ es cualquier permutación de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

Solución:
Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$$

además sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$$

entonces la desigualdad a ser probada es equivalente a probar la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_iz_i \qquad (1)$$

en la suma del lado izquierdo, los factores y_i, ocurren en orden descendiente, mientras en la suma del lado derecho, los factores z_i, quizás no ocurren en orden descendiente, es decir, hay términos

$$x_kz_k \text{ y } x_lz_l$$

con $k < l$ tales que:

$$x_k \geq x_l \text{ y } z_k < z_l \qquad (2)$$

cualquiera que sea el caso, intercambiamos z_k y z_l, reemplazamos los términos: $x_kz_k + x_lz_l$ por $x_kz_l + x_lz_k$ aseguramos que este reemplazamiento, no decrece la suma del lado derecho de (1).

Para el producto:

$$(x_k - x_l) \cdot (z_k - z_l) = x_kz_k + x_lz_l - (x_kz_l + x_lz_k) \text{ es } \leq 0$$

por (2)

$$x_k z_k + x_l z_l \leq x_k z_l + x_l z_k$$

Después de un número finito de estos intercambios, la suma del lado derecho de (1), es reemplazada por una suma como la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i'$$

donde:

$$\{z_1' \geq z_2' \geq \cdots \geq z_n'\}$$

y en este punto tenemos que: $z_i' = y_i$. Por lo tanto la suma del lado derecho de (1), es menor o igual que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ lo cual prueba lo que queríamos, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

Problema 37 *Sea $x_i > 0$, $S = x_1 + \cdots + x_n$. Probar que*

$$\frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + \cdots + \frac{S}{S - x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

Solución:

Utilizando el siguiente Lema: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Prueba del Lema: Apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las colecciones

$$(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

para obtener que

$$n^2 = \left(\sqrt{a_1}\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2}\frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \leq \sum (\sqrt{a_i})^2 \sum \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 = \left(\sum a_i\right)\left(\sum \frac{1}{a_i}\right)$$

Tenemos que

$$\left[\frac{S}{(S - x_1)} + \cdots + \frac{S}{S - x_n}\right]\left[\frac{(S - x_1)}{S} + \cdots + \frac{(S - x_n)}{S}\right] \geq n^2,$$

el segundo factor del lado izquierdo es $(n-1)$ y eso implica el resultado.

Problema 38 *(Desigualdad media aritmética - media geométrica) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solución:
Sean

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},\ a_1 = \frac{x_1}{G},\ a_2 = \frac{x_1 x_2}{G^2}, \cdots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G^n} = 1$$

por el corolario 2 de la desigualdad del rearreglo, tenemos

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &\leq \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_n}{G} \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq G$$

la igualdad se cumple si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ o $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 39 *(Desigualdad media geométrica - media armónica) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos, entonces*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solución:
Sean $G, a_1, a_2, \ldots, a_n$ como en el problema anterior, aplicando el corolario 2 de la desigualdad del rearreglo, tenemos

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \\ &= \frac{G}{x_1} + \frac{G}{x_2} + \cdots + \frac{G}{x_n} \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$G \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 40 *(Desigualdad media raíz cuadrada - media aritmética) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solución:
Por el corolario 1 de la desigualdad del rearreglo, tenemos

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &\geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_n x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &\geq x_1 x_3 + x_2 x_4 + \cdots + x_n x_2 \\ &\vdots \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &\geq x_1 x_n + x_2 x_1 + \cdots + x_n x_{n-1} \end{aligned}$$

sumando estas y

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

tenemos

$$n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \geq \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^2$$

lo que queríamos probar.

Problema 41 *(Desigualdad de Cauchy) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales, entonces*

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

con la igualdad si y solo si para alguna constante k, $a_i = kb_i$ para $1 \leq i \leq n$ o $b_i = ka_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Solución:
Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ o $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ entonces el resulatdo es trivial. Por otro lado, sean

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},\ T = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

son ambos no-cero.
Sea

$$x_i = \frac{a_i}{S} \text{ y } x_{n+i} = \frac{b_i}{T} \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

aplicando el corolario 1 de la desigualdad del rearreglo

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{S^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{T^2} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\
&\geq x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n} + x_{n+1} x_1 + x_{n+2} x_2 + \cdots + x_{2n} x_n \\
&= \frac{2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)}{ST}
\end{aligned}$$

lo cual es equivalente al resultado querido. La igualdad se cumple si y solo si $x_i = x_{n+i}$ para $1 \leq i \leq n$ o $a_i T = b_i S$ para $1 \leq i \leq n$.

Problema 42 *Si a, b, c, son números reales positivos, probar que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.*

Solución:
Sea $a_1 = a^2$, $a_2 = b^2$, $a_3 = c^2$, $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, aplicando la desigualdad del rearreglo, tenemos

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

$\Rightarrow$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Problema 43 *Sea $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Probar la desigualdad*

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Solución:
Obviamente las sucesiones $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $\frac{1}{S-a_1}, \ldots, \frac{1}{S-a_n}$ ambas crecen o ambas decrecen, por lo tanto

$$a_1 \cdot \frac{1}{S-a_1} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{S-a_n} \geq a_1' \cdot \frac{1}{S-a_1} + a_2' \cdot \frac{1}{S-a_2} + \cdots + a_n' \cdot \frac{1}{S-a_n}$$

donde $\{a_1', \ldots, a_n'\}$ es una permutación de $\{a_1, \ldots, a_n\}$, si consideramos las $(n-1)$ permutaciones

$$\begin{gathered}(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)\\ (a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_2)\\ \vdots\\ (a_n, a_1, \ldots, a_{n-1})\end{gathered}$$

la suma de estas desigualdades nos da el resultado esperado.

4.5 Convexidad, Desigualdad de Jensen

Problema 44 *(USA 1974) Probar que si a, b, c son números reales positivos, entonces*

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{(a+b+c)}{3}}$$

Solución:
Primero probaremos que:

$$x^x y^y \geq x^y y^x \tag{1}$$

para $x > 0$, $y > 0$.
Podemos decir sin pérdida de generalidad que $x \geq y$. Ahora

$$\begin{aligned} x \geq y \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{y} \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^x y^y}{x^y y^x} \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad x^x y^y \geq x^y y^x. \end{aligned}$$

por lo tanto (1), es obviamente verdadera. Entonces multiplicando las siguientes tres desigualdades:

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \; b^b c^c \geq b^c c^b, \; c^c a^a \geq c^a a^c$$

tenemos:

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$

ahora multiplicamos ambos lados de la desigualdad por $a^a b^b c^c$, tenemos $\left(a^a b^b c^c\right)^3 \geq (abc)^{a+b+c}$ la cual es equivalente a el resultado querido. La igualdad se cumple $\Leftrightarrow a = b = c$
Podemos generalizar la desigualdad (1), de la siguiente manera:

$$\left(a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}\right)^n \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \tag{2}$$

donde las $a_i's$ son números reales positivos.
Prueba: Aplicaremos la desigualdad de Jensen para funciones convexas, recuerde que esta dice que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Sea $f(x) = \ln x^n$, que es convexa, aplicando Jensen nos queda:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln {a_i}^{a_i} \geq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica a el argumento de esta función es decir:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

de donde

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}} \geq (a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n^2}}$$

entonces

$$\ln\left({a_1}^{a_1}\cdots {a_n}^{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}} \geq \ln\left(\prod a_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n^2}}$$

es decir:

$$\left({a_1}^{a_1}{a_2}^{a_2}\ldots {a_n}^{a_n}\right)^n \geq (a_1a_2\ldots a_n)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Lo que queremos demostrar.

Problema 45 * *(USAO 1980) Probar que si* $1 \geq a, b, c \geq 0$, *entonces*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Solución:
Primera prueba:

La función $F(a,b,c)$ sobre el lado izquierdo de la desigualdad es convexa en cada una de las variables a, b, c separadamente. Por decir a dos de los términos son lineales, mientras los otros dos términos son de la forma

$$\frac{A}{B+x}$$

con $A \geq 0$, $B \geq 0$, la gráfica del término

$$\frac{A}{B+x}$$

para $x > -B$ es una rama de una hipérbola. Podemos probar esta convexidad observando que su segunda derivada

$$\frac{2A}{(B+x)^3} < 0 \text{ para } x > -B.$$

Usar el hecho que el máximo valor de una función convexa sobre un intervalo tiene que ser un punto final del intervalo, por lo tanto el máximo valor de $F(a,b,c)$ será alcanzado en uno de los 8 vértices del cubo dado por $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$, en coordenadas rectangulares (a,b,c). De hecho, en cada vértice $F(a,b,c) = 1$.
Segunda prueba:

Primero asumir, sin pérdida de generalidad, que $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Entonces, tenemos que: $a+b+1 \leq c+a+1 \leq b+c+1$, por lo que,

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c}{a+b+1} \tag{1}$$

Por lo tanto la desigualdad original se reduce a probar que

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Expresamos asi

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) &= \frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\\ &= 1-\left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]\end{aligned}$$

la desigualdad requerida se sigue de esta expresión después de notar que

$$\begin{aligned}(1+a+b)(1-a)(1-b) &\leq (1+a+b+ab)(1-a)(1-b)\\ &= (1+a)(1+b)(1-a)(1-b)\\ &= \left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\\ &\leq 1\end{aligned}$$

4.6 Desigualdades Geométricas

Problema 46

I) $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$

II) $a>|b-c|,\ b>|a-c|,\ c>|a-b|$

III) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$

IV) $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ *donde* $x,\ y,\ z$ *son positivos.*

Solución:

(I) ⇔ (II)

$$\begin{array}{lcl} a+b>c & & a>c-b \text{ y } b>c-a & & a>|b-c| \\ b+c>a & \Leftrightarrow & b>a-c \text{ y } c>a-b & \Leftrightarrow & b>|c-a| \\ c+a>b & & c>b-a \text{ y } a>b-c & & c>|b-a| \end{array}$$

(I) ⇔ (III)

$$\begin{array}{lclcl} a+b>c & & a+b-c>0 & & \\ b+c>a & \Leftrightarrow & b+c-a>0 & \Rightarrow & (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0 \\ c+a>b & & c+a-b>0 & & \end{array}$$

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ implica los tres factores positivos o uno positivo y los otros dos negativos, esto último no es posible pues si por ejemplo

$$a+b-c<0 \text{ y } b+c-a<0$$

entonces, al sumar tenemos que $2b<0$ lo cual es imposible.

(I) $\Leftrightarrow$ (IV)

$$\begin{array}{lcl} a = y + z & & 2z = a + b - c \\ b = z + x & \Leftrightarrow & 2y = c + a - b \\ c = x + y & & 2x = b + c - a. \end{array}$$

Problema 47 *(IMO 1961) Sean a, b, c los lados de un triángulo y T su área. Probar* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T$.

Solución:

Sea p el perímetro del triángulo, $p = a + b + c$. De acuerdo al Teorema Isoperimétrico para Triángulos que dice: "De todos los triángulos con el perímetro dado, el equilátero tiene el área más grande". El área de un triángulo equilátero con lado $p/3$ es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{p^2}{12\sqrt{3}} \\ \therefore T &\leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}} \qquad (1) \end{aligned}$$

más aún, la suma de las identidades

$$p^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

y

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$$

es

$$p^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Entonces

$$p^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

con la igualdad si y solo si $a = b = c$. Desde (1) y (2) tenemos que

$$T \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{12\sqrt{3}} \Rightarrow T \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4\sqrt{3}}$$

que es equivalente a

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T$$

la igualdad en (1) y (2) se da, si y solo si $a = b = c$ y en la última desigualdad si y solo si el triángulo es equilátero.

Problema 48 *(IMO 1961) Considera el* $\Delta P_1P_2P_3$ *y un punto P en él. Sea* P_1P, P_2P, P_3P *líneas que intersectan los lados opuestos del triángulo y sean los puntos de intersección* Q_1, Q_2, Q_3 *respectivamente. Prueba que de los números* $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ *al menos uno es* ≤ 2 *y al menos uno es* ≥ 2

Solución:

Refiriéndonos a la Figura 3 y denotando el área del ΔXYZ por (XYZ). Sea $A = (PP_2P_3)$, $B = (PP_1P_3)$ y $C = (PP_1P_2)$, entonces $A + B + C = (P_1P_2P_3)$. Ahora los triángulos PP_2P_3 y $P_1P_2P_3$ tienen la misma base P_2P_3 y sus alturas están en la razón $\frac{PQ_1}{P_1Q_1}$. Por lo tanto sus áreas están en la razón:

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} = \frac{A}{(A + B + C)}$$

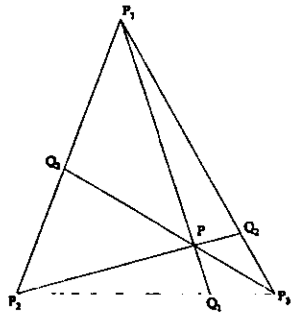


Figura 3: Problema 48

similarmente con los triángulos PP_1P_3 y PP_1P_2 relacionados con $P_1P_2P_3$ tenemos

$$\frac{PQ_2}{P_2Q_2} = \frac{B}{(A+B+C)} \text{ y } \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{C}{(A+B+C)}$$

Por lo tanto

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} + \frac{PQ_2}{P_2Q_2} + \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{A+B+C}{A+B+C} = 1$$

lo cual implica que al menos una de las razones:

$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \text{ es } \leq \frac{1}{3}$$

y al menos una es

$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \text{ es } \geq \frac{1}{3}$$

esto es equivalente a la desigualdad propuesta.

Para

$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \leq 1/3$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{P_iQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP + PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + \frac{PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + 1 \geq 3$$

$\Rightarrow$

$$\frac{P_iP}{PQ_i} \geq 3 - 1 = 2 \Rightarrow \frac{P_iP}{PQ_i} \geq 2$$

Similarmente

$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \geq 1/3$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{P_iQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP + PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + \frac{PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + 1 \leq 3$$

$\Rightarrow$

$$\frac{P_iP}{PQ_i} \leq 3 - 1 = 2 \Rightarrow \frac{P_iP}{PQ_i} \leq 2$$

Por lo tanto

$$\text{para alguna } \frac{P_iP}{PQ_i} \geq 2$$

$$\text{y para alguna } \frac{P_iP}{PQ_i} \leq 2$$

Problema 49 *(IMO 1964) Si a, b, c son los lados de un triángulo. Probar que*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Solución:

Prueba 1: (Utilizando la desigualdad media geométrica - media aritmética).

Sea

$$x = b+c-a$$
$$y = c+a-b$$
$$z = a+b-c$$

Notamos que x, y, z son positivos, ya que a, b, c son lados de un triángulo. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = \frac{2c}{2} = c \\
\frac{y+z}{2} &= \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\
\frac{z+x}{2} &= \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = \frac{2b}{2} = b
\end{aligned}$$

de acuerdo a la desigualdad media geométrica - media aritmética

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\
\frac{y+z}{2} &\geq \sqrt{yz} \\
\frac{z+x}{2} &\geq \sqrt{zx}
\end{aligned}$$

por lo tanto, multiplicando estas desigualdades tenemos:

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx} = \sqrt{(x^2y^2z^2)} = xyz$$

la cual sustituyendo valores tenemos:

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Cuando los factores del lado derecho son multiplicados y los términos son agrupados entonces esta desigualdad toma la siguiente forma:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc \leq abc$$

desde la cual, nosotros llegamos a la desigualdad deseada.

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Prueba 2: (Utilizando propiedades de desigualdades)
Llamémosle a los lados, tales que $0 \leq a \leq b \leq c$, entonces $c - b \geq c - a \geq b - a \geq 0$ y

$$c(c-b)(c-a) \geq b(c-b)(b-a) \geq 0$$

asi

$$c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \geq 0$$

sumamos el siguiente término no-negativo $a(a-b)(a-c)$ al lado izquierdo, obteniendo

$$a(a-b)(a-c) + c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \geq 0$$

o equivalentemente:

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - c^2b - c^2a - b^2c - b^2a + 3(abc) \geq 0$$

Esta puede ser escrita en la siguiente forma

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3(abc)$$

la igualdad se da si y solo si $a = b = c$

Prueba 3: (Utilizando Propiedades Trigonométricas).
"Ley de los Cosenos" El lado izquierdo de la desigualdad a ser probada, podemos escribirla en la siguiente forma

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

aplicando la Ley de los Cosenos a la expresión anterior tenemos lo siguiente

$$a(2bc\cos A) + b(2ac\cos B) + c(2ab\cos C) = 2abc(\cos A + \cos B + \cos C)$$

donde $A + B + C = 180^0$. Ahora, si conservamos C fijo, la expresión $\cos A + \cos B + \cos C$ es la más grande cuando $A = B$. Como

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

y siendo $A + B$ constante, este producto es el más grande cuando

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$$

es decir, para $A = B$. Ya que A, B, C están ubicados simétricamente $\cos A + \cos B + \cos C$ tiene su máximo valor cuando $A = B = C = 60^0$, en tal caso

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$

por lo tanto

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 2(abc)\left(\frac{3}{2}\right) = 3(abc)$$

Problema 50 *(IMO) Para cada punto P, que está dentro del $\triangle ABC$. Sean D, E, F los puntos de intersección de las líneas AP, BP, CP con los lados opuestos a A, B, C respectivamente. Determina P, tal que el área del $\triangle DEF$ sea la máxima.*

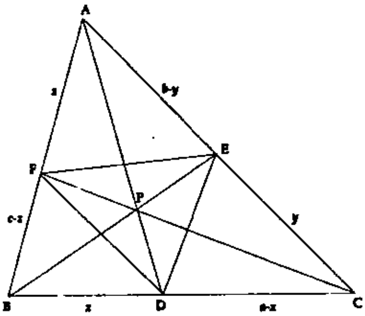


Figura 4: Problema 50

Solución:

Sea $[UVW]$ el área de un triángulo UVW, refiriéndonos a la figura 4, vemos que:

$$[DEF] = [ABC] - [BDF] - [DCE] - [EAF] \tag{1}$$

sabemos que

$$[ABC] = \frac{1}{2}ac\sin B$$

y tenemos que

$$\frac{1}{2}\sin B = \frac{[ABC]}{ac}$$

entonces

$$[BDF] = \frac{1}{2}x(c-z)\sin B = \frac{[ABC]x(c-z)}{ac}$$

análogamente damos las expresiones para las otras áreas es decir

$$[DCE] \;=\; \frac{1}{2}y(a-x)\sin C = \frac{[ABC]y(a-x)}{ba}$$

y

$$[EAF] = \frac{1}{2}z(b-y)\sin A = \frac{[ABC]z(b-y)}{cb}$$

sustituyendo estas en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} [DEF] &= [ABC]\left(1 - \frac{x(c-z)}{ac} - \frac{y(a-x)}{ba} - \frac{z(b-y)}{cb}\right) \\ &= [ABC]\,(1 - u(1-w) - v(1-u) - w(1-v)) \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}.$$

Queremos maximizar el segundo factor del lado derecho de (2) el cual escribimos de la siguiente forma

$$F = (1-u)(1-v)(1-w) + uvw \tag{3}$$

aplicando el Teorema de Ceva, tenemos:

$$\frac{x}{a-x}\cdot\frac{y}{b-y}\cdot\frac{z}{c-z}=1$$

pero

$$\frac{u}{1-u}=\frac{x}{a-x},\ \frac{v}{1-v}=\frac{y}{b-y},\ \frac{w}{1-w}=\frac{z}{c-z}$$

sustituyendo tenemos lo siguiente

$$\frac{x}{a-x}\cdot\frac{y}{b-y}\cdot\frac{z}{c-z}=\frac{u}{1-u}\cdot\frac{v}{1-v}\cdot\frac{w}{1-w}=1$$

por lo tanto u, v, w satisfacen que

$$uvw=(1-u)(1-v)(1-w) \tag{4}$$

Sea $uvw = G$, entonces por (3), tenemos que $F = 2G$ y F, alcanzaría su máximo cuando G lo alcance, es decir, cuando

$$u=\frac{x}{a},\ v=\frac{y}{b},\ w=\frac{z}{c}.$$

Fácilmente deducimos que los anteriores valores de u, v, w, alcanzarán su valor máximo cuando el denominador sea el número más pequeño y además todos los denominadores sean iguales. Entonces es fácil decir que esto ocurre cuando

$$u=v=w=\frac{1}{2}$$

y satisface (4). Por lo tanto, sustituyendo estos valores en (2) tenemos

$$Max[DEF]=\frac{[ABC]}{4}$$

y esto se alcanzará cuando el punto P sea el centroide del $\triangle ABC$ es decir P, es el punto donde las medianas se intersectan.

Problema 51 *(IMO) Dos triángulos equiláteros están inscritos en un círculo de radio r. Sea K, el área del conjunto de todos los puntos interiores a ambos triángulos. Probar que:*

$$2K \geq r^2\sqrt{3}$$

Solución:

Sean $\triangle ABC$, $\triangle PQR$, dos triángulos equiláteros; Sean D, E, los puntos de intersección del lado AB, con el lado PR y el lado PQ respectivamente. La figura entera es simétrica respecto a la línea OD y también a la línea OE, también tenemos que $K = Area\triangle ABC - 3\cdot Area\triangle PDE$. Así K, tendrá su valor mínimo cuando el $\triangle PDE$ alcance su área máxima. Intuitivamente esperamos esto cuando P, sea el punto medio del arco AB. Para probar esto, sabemos que $PD = AD$ y $PE = BE$ por la simetría antes mencionada; entonces el $\triangle PDE$ tiene perímetro constante e igual a $AB = r\sqrt{3}$.

Ahora utilizando el siguiente Teorema Isoperimétrico que dice "De todos los Triángulos con un perímetro dado, el triángulo equilátero tiene el área máxima". En consecuencia el $\triangle PDE$, tiene su área máxima cuando P, es el punto medio del arco AB, en este caso, los lados del $\triangle PDE$ son $\frac{1}{3}$ de la longitud de los lados del $\triangle ABC$, entonces el área del $\triangle PDE$ es $\frac{1}{9}$ del área del $\triangle ABC$.

Sabemos que el área de un triángulo equilátero es igual a un cuarto del cuadrado de un lado multiplicado por $\sqrt{3}$, aplicando este resultado obtenemos lo siguiente:

$$K \geq (AreaABC)\left(1-\frac{3}{9}\right)=\frac{2}{3}(r\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

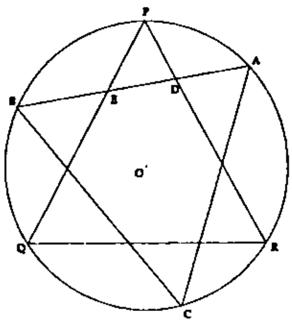


Figura 5: Problema 51

por lo tanto

$$K \geq \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2K \geq r^2\sqrt{3}.$$

lo que queríamos probar.

Problema 52 *Sea P un punto interior del $\triangle ABC$. Sean D, E, F los pies de las perpendiculares desde P a las líneas BC, CA, AB respectivamente. Encuentra todos los puntos P, para los cuales:*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

es mínimo.

Solución:

Sean a, b, c, las longitudes de los lados opuestos del $\triangle ABC$, respectivamente y sean x, y, z, las longitudes de los segmentos PD, PE, PF como se muestra en la Figura 6. Sea K, el área del $\triangle ABC$. Sabemos que

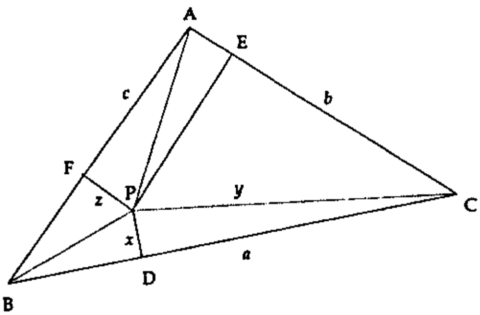


Figura 6: Problema 52

$$\begin{aligned} ax &= 2(\text{área del } \triangle BPC) \\ by &= 2(\text{área del } \triangle CPA) \\ cz &= 2(\text{área del } \triangle APB) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$ax + by + cz = 2(\text{área del } \triangle ABC)$$

es decir

$$ax + by + cz = 2K. \tag{1}$$

Ahora, nosotros queremos minimizar

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

sujeto a la restricción (1). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz que dice

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_k{}^2\right)$$

con $\sqrt{ax}$, $\sqrt{by}$, $\sqrt{cz}$ sirviendo como las $a's$ y $\sqrt{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{\frac{b}{y}}$, $\sqrt{\frac{c}{z}}$, como $b's$, tenemos

$$\left(\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by}\sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz}\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2 \leq \left(\sqrt{ax}^2 + \sqrt{by}^2 + \sqrt{cz}^2\right)\left(\sqrt{\frac{a}{x}}^2 + \sqrt{\frac{b}{y}}^2 + \sqrt{\frac{c}{z}}^2\right)$$

que nos lleva a

$$(a+b+c)^2 \leq (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = 2K\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \tag{2}$$

es decir

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2K}.$$

La igualdad se cumple, si y solo si los vectores $\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}\right)$ y (ax, by, cz) son proporcionales, es decir, si y solo si $x = y = z$.

Por lo tanto el mínimo valor de (2), ocurre cuando P es el incentro del $\triangle ABC$.

Problema 53 *(USAMO 1976) Si la suma de las longitudes de los seis lados de un tetraedro trirectangular $PABC$ (es decir $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90$) es S, determinar su volumen máximo.*

Solución:

Sea $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ como se muestra en la figura 7. Aplicando Pitágoras a $\triangle BPC$, $\triangle CPA$ $\triangle BPA$, tenemos

$$BC^2 = b^2 + c^2,\ CA^2 = c^2 + a^2,\ BA^2 = a^2 + b^2$$

sustituyendo en S nos queda:

$$S = a + b + c + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Ahora tenemos que maximizar el Volumen $V = \frac{abc}{6}$, sujeto a la restricción (1). Aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica y tenemos

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}} \text{ y } b^2 + c^2 \geq 2bc$$

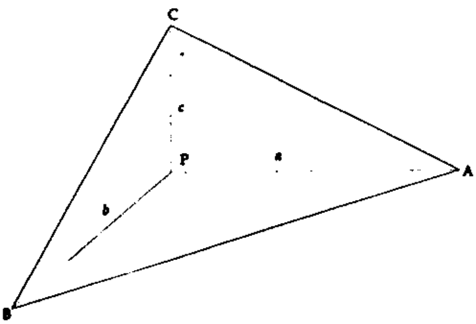


Figura 7: Problema 53

por lo tanto

$$S \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2bc} + \sqrt{2ca} + \sqrt{2ab})$$

aplicando de nuevo la desigualdad media aritmética - media geométrica a la suma en parentesis obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sqrt{2bc} + \sqrt{2ca} + \sqrt{2ab} &\geq 3(\sqrt{2bc} \cdot \sqrt{2ca} \cdot \sqrt{2ab})^{\frac{1}{3}} \\
S &\geq 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{2bc} \cdot \sqrt{2ca} \cdot \sqrt{2ab})^{\frac{1}{3}} \\
&\geq 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(2\sqrt{2}abc)^{\frac{1}{3}} \\
&= 3(abc)^{\frac{1}{3}}[1 + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}}] \\
&= 3(1+\sqrt{2})(abc)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

sustituyendo (V) nos queda

$$S = 3(1+\sqrt{2})(6V)^{\frac{1}{3}}$$

despejando el Volumen tenemos

$$V \leq \frac{S^3}{6 \cdot 3^3 (1+\sqrt{2})^3} = \frac{S^3}{162(5\sqrt{2}+7)}$$

y esto se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Problema 54 *Sea P un punto en el interior del $\triangle ABC$ y sean r_1, r_2, r_3 las distancias desde P a los lados a_1, a_2, a_3 del triángulo, respectivamente. Sea R el circunradio de ABC. Probar que*

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \cdot ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde la igualdad se cumple si y solo si $\triangle ABC$ es equilátero y P es el incentro.

Solución:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} &= \sqrt{a_1r_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{a_2r_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\sqrt{a_3r_3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_3}}\\ &\leq (a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

la igualdad se cumple si y solo si

$$\frac{\sqrt{a_1r_1}}{\sqrt{\frac{1}{a_1}}}=\frac{\sqrt{a_2r_2}}{\sqrt{\frac{1}{a_2}}}=\frac{\sqrt{a_3r_3}}{\sqrt{\frac{1}{a_3}}}$$

o equivalentemente si y solo si

$${a_1}^2r_1={a_2}^2r_2={a_3}^2r_3.$$

Sabemos que $a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=2A$ donde A es el área del $\triangle ABC$. También sabemos que el área de un triángulo en términos del circumradio R, está dado por

$$A=\frac{a_1a_2a_3}{4R}$$

por lo tanto

$$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=\frac{a_1a_2a_3}{2R}$$

y tenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} &\leq \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2R}}(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ahora aplicando de nuevo la Desiguladad de Cauchy-Schwarz

$$a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2\leq({a_2}^2+{a_3}^2+{a_1}^2)^{\frac{1}{2}}\cdot({a_3}^2+{a_1}^2+{a_2}^2)^{\frac{1}{2}}=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)$$

donde la igualdad se cumple si y solo si

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}\qquad (=\frac{(a_2+a_3+a_1)}{(a_3+a_1+a_2)}=1)$$

$$\Leftrightarrow\qquad a_1=a_2=a_3$$

por lo tanto, tenemos:

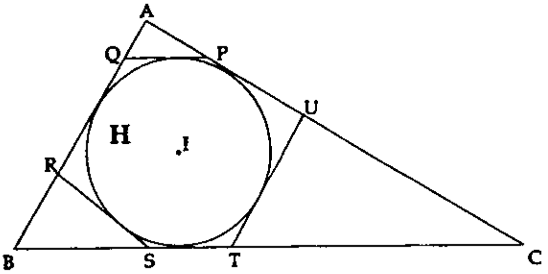
$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leq\frac{1}{\sqrt{2R}}\cdot({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)^{\frac{1}{2}}$$

la igualdad se cumple si y solo si

$${a_1}^2r_1={a_2}^2r_2={a_3}^2r_3 \text{ y } a_1=a_2=a_3$$

si y solo si

$$a_1=a_2=a_3 \text{ y } r_1=r_2=r_3$$



Problema 55 *(KMO 1988) Sea $H = PQRSTU$ un hexágono determinado en el $\triangle ABC$ dibujando tangentes a el incírculo que son paralelas a los lados del triángulo. Probar que el perímetro de H, nunca es mayor que dos tercios del perímetro del $\triangle ABC$.*

Solución:

Si las longitudes de las tangentes son $PQ = a'$, $RS = b'$, $TU = c'$ entonces $a' + b' + c'$ es el semiperímetro de H, y la razón querida es L, donde

$$L = \frac{\text{perímetro de } H}{\text{perímetro del } \triangle ABC} = \frac{\text{semiperímetro de } H}{\text{semiperímetro del } \triangle ABC} = \frac{a' + b' + c'}{s}$$

si $AD = h_a$ es la altura desde A, (ver figura 8), entonces ya que QP es paralela a BC, el $\triangle AQP$ es semejante

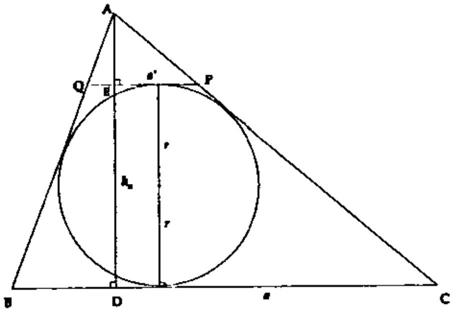


Figura 8: Problema 55

al $\triangle ABC$ y tenemos

$$\frac{QP}{BC} = \frac{a'}{a} = \frac{Altura AE}{Altura AD} = \frac{h_a - DE}{h_a} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a}.$$

Usando la fórmula para el área de un triángulo en términos del radio del círculo inscrito. $A = rs$. Tenemos

$$A = \frac{1}{2} a h_a = rs \text{ de donde } \frac{2r}{h_a} = \frac{a}{s},$$

así

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{a}{s} \text{ y } a' = a - \frac{a^2}{s}$$

similarmente tenemos las expresiones para b' y c'. Sustituyendo nos queda lo siguiente

$$L = \frac{a - \frac{a^2}{s} + b - \frac{b^2}{s} + c - \frac{c^2}{s}}{s} = \frac{a+b+c-\frac{1}{s}(a^2+b^2+c^2)}{s}$$

y sabiendo que

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2s = a+b+c$$

tenemos

$$L = 2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2} = 2 - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

Necesitamos acotar

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

para esto utilizamos la desigualdad de la Potencia que dice: Para $t < s$

$$\left(\frac{p_1a_1{}^t + p_2a_2{}^t + \cdots + p_na_n{}^t}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(\frac{p_1a_1^s + p_2a_2{}^s + \cdots + p_na_n{}^s}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{s}}$$

donde las p's, las a's son números reales positivos arbitrarios con la igualdad si y solo si todas las a's, son iguales.

Para aplicar este resultado a nuestro problema hacemos $t = 1$, $s = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, aplicamos y tenemos

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{1}{1}}}{3} \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{(a+b+c)^2}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

lo que queríamos acotar. Entonces

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

sustituimos

$$L \leq 2 - 4\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

por lo tanto

$$L \leq \frac{2}{3}$$

con lo que queda demostrado.

Problema 56 *(KMO 1954) Un círculo está inscrito en un triángulo y un cuadrado está circunscrito alrededor del círculo. Probar que más de la mitad del perímetro del cuadrado está dentro o sobre el triángulo.*

Solución:

En general tres orillas del cuadrado quedan fuera del triángulo. Sean p, q, r, s, t, u las partes del cuadrado que cortan al triángulo formando triángulos rectángulos, sean los pares de tangentes iguales a el círculo tienen longitudes a, b, c, d, e, f, g como se muestra en la figura 10.

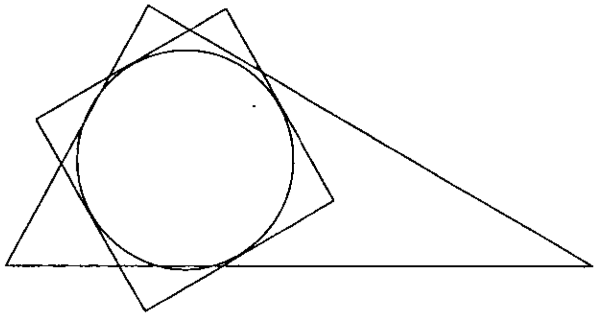


Figura 9: Problema 56

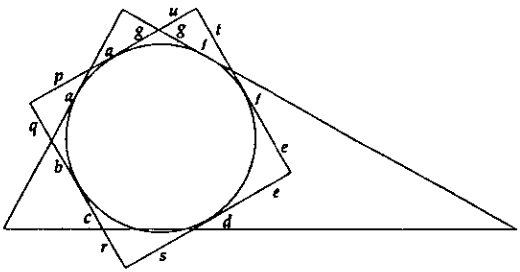


Figura 10: Problema 56

Entonces la longitud del perímetro del que está dentro del triángulo es

$$(a+b)+(c+d)+(f+g)+2e$$

donde e es el radio del círculo. La longitud del perímetro que está afuera del triángulo es

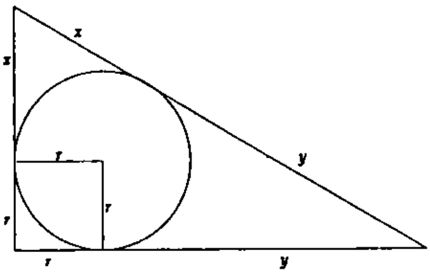
$$(p+q)+(r+s)+(t+u).$$

Como sabemos, en un triángulo rectángulo tenemos la especial relación:
(la suma de los catetos) - la hipotenusa = el diámetro del incírculo.
Esto se ve más claro con la siguiente figura.
Consecuentemente nosotros tenemos

$$\begin{aligned}(p+q)-(a+b) &= d_1\\(r+s)-(c+d) &= d_2\\(t+u)-(f+g) &= d_3\end{aligned}$$

donde d_1, d_2, d_3, son los respectivos diámetros de los incírculos de los triángulos rectos traslapados. Sumando tenemos

$$(p+q)+(r+s)+(t+u)-[(a+b)+(c+d)+(f+g)]=d_1+d_2+d_3$$



restando $2e$, a cada lado tenemos

$$(p+q)+(r+s)+(t+u)-[(a+b)+(c+d)+(f+g)+2e]=d_1+d_2+d_3-2e$$

es decir

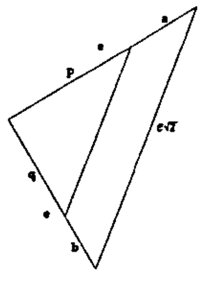
$$\text{perímetro de afuera} - \text{perímetro de adentro} = d_1+d_2+d_3-2e.$$

Ahora multiplicando por (-1) tenemos

$$\text{Perímetro de Adentro} - \text{Perímetro de Afuera} = 2e-(d_1+d_2+d_3).$$

Esto se reduce solamente a probar que la diferencia es positiva ó equivalentemente que $2e > d_1+d_2+d_3$. Esto nos da mucha información relevante acerca de estos diámetros.

Ahora si nosotros notamos cada uno de estos pequeños triángulos están contenidos en un triángulo isósceles con ángulo recto, teniendo lados iguales a el radio e del círculo, por ejemplo, consideramos el triángulo rectángulo con lados p y q (como se muestra en la figura),



tenemos

$$p+a=e \text{ y } q+b=e.$$

Claramente, entonces cada uno de los diámetros d_1, d_2, d_3 no es más grande que el diámetro d del incírculo del tal triángulo rectángulo isósceles, pero d es justamente

$$d=(e+e)-e\sqrt{2}=e(2-\sqrt{2})=e(2-1.4142...)<e(.6)=\frac{3}{5}e$$

entonces sumando los diámetros tenemos

$$d_1+d_2+d_3<\frac{9}{5}e<2e$$

es decir

$$2e > d_1 + d_2 + d_3$$

lo que queríamos probar.

Problema 57 *(HMO 1897) Mostrar que si α, β, γ son ángulos de un triángulo arbitrario entonces*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}$$

Solución:

Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, entonces los ángulos

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\gamma}{2}$$

son ángulos agudos. También sabemos que cuando un ángulo agudo incrementa su seno también incrementa. De que

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$$

y como $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, tenemos

$$\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^0 - \frac{\beta}{2} < 90^0$$

entonces tenemos:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} < \sin(90^0 - \frac{\beta}{2})\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

y ya que:

$$\sin 2\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

tenemos:

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sin\beta \leq \frac{1}{2}$$

por lo que

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}\sin\beta \leq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Supongamos que γ es el más pequeño de los tres ángulos, entonces

$$\gamma \leq \frac{180^0}{3} \text{ y } \frac{\gamma}{2} \leq 30^0$$

entonces:

$$\sin\frac{\gamma}{2} \leq \sin 30^0 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

desde (1) y (2) obtenemos

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{3}$$

Segunda solución:

Es conocido que

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R} \tag{a}$$

donde r es el radio del incírculo (Círculo inscrito) del triángulo con ángulos α, β, γ y R es el radio del circuncírculo (Círculo circunscrito). Ya que, claramente $r < R$, el producto sobre el lado izquierdo es menos que $\frac{1}{4}$.

Vamos a probar la desigualdad (3) Sabemos que

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\
\sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}
\end{aligned}$$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\\
&= \frac{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{sabc}\\
&= \frac{\Delta^2}{sabc}=\frac{(rs)\,abc}{sabc4R}\\
&= \frac{r}{4R}.
\end{aligned}$$

Ahora probar que

$$\frac{r}{4R}\leq\frac{1}{8}$$

es equivalente a probar que

$$r\leq 4R\frac{1}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad r\leq\frac{R}{2}$$

para esto utilizamos el Teorema de Euler: $d^2 = R^2 - 2Rr$ donde d es la distancia entre el centro del incírculo y el centro del circuncírculo. Y Tenemos

$$\begin{aligned}
2Rr &\leq R^2\\
r &\leq \frac{R^2}{2R}=\frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

Si el triángulo es equilátero, entonces $d = 0$ y el valor del producto

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

es exactamente $\frac{1}{8}$.

Problema 58 *(IMO 1966) En el interior de los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, cualesquiera K, L, M puntos respectivamente son seleccionados. Probar que el área de por lo menos uno de los triángulos AML, BKM, CLK es menor o igual que un cuarto del área del triángulo ABC.*

Solución:

Sean $a_1 = KC = ra$, $b_1 = LA = sb$ y $c_1 = MB = tc$. Supongamos además que las tres áreas son mayores que $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC.

Recuerde que el área de un triángulo

$$(ABC) = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ca\sin B}{2}.$$

Asi

$$(KCL) = \frac{a_1\,(b-b_1)\sin C}{2},\ (AML) = \frac{b_1\,(c-c_1)\sin A}{2}\ \text{y}\ (BKM) = \frac{c_1\,(a-a_1)\sin B}{2}.$$

Que las tres áreas sean mayores que $\frac{1}{4}\,(ABC)$ nos lleva a las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} a_1\,(b-b_1) > \frac{1}{4}ab & \Rightarrow & r\,(1-s) > \frac{1}{4} \\ b_1\,(c-c_1) > \frac{1}{4}bc & \Rightarrow & s\,(1-t) > \frac{1}{4} \\ c_1\,(a-a_1) > \frac{1}{4}ca & \Rightarrow & t\,(1-r) > \frac{1}{4} \end{array}$$

Luego

$$r\,(1-s)\,s\,(1-t)\,t\,(1-r) > \frac{1}{4^3} \tag{1}$$

Por otro lado, para $0 \leq x \leq 1$, se tiene que $0 \leq x\,(1-x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y entonces

$$r\,(1-r)\,s\,(1-s)\,t\,(1-t) \leq \frac{1}{4^3} \tag{2}$$

(1) y (2) nos llevan a una contradicción.

Problema 59 *Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que*

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca).$$

Solución:

Primero probaremos el lado izquierdo de la desigualdad, es decir

$$\begin{array}{rcl} 3\,(ab+bc+ca) & \leq & (a+b+c)^2 \\ 3\,(ab+bc+ca) & \leq & a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca) \\ ab+bc+ca & \leq & a^2+b^2+c^2 \end{array}$$

entonces

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

multiplicando por 2

$$\begin{array}{rcl} 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca & \geq & 0 \\ \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) & \geq & 0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 & \geq & 0 \end{array}$$

esta última desigualdad es verdadera para todos los valores de a, b, c.

Ahora consideremos la desigualdad del lado derecho, es decir

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &\leq 4(ab+bc+ca) \\
a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) &\leq 4(ab+bc+ca) \\
a^2+b^2+c^2 &\leq 2(ab+bc+ca) \\
a^2+b^2+c^2 &\leq a(b+c)+b(a+c)+c(b+a)
\end{aligned}
$$

esta última desigualdad es verdadera (aplicando la desigualdad del triángulo) ya que la suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el otro lado.

Entonces tenemos

$$
\begin{array}{lll}
a \leq b+c, & b \leq b+c, & c \leq b+a, \\
a^2 \leq a(b+c), & b^2 \leq b(b+c), & c^2 \leq c(b+a)
\end{array}
$$

sumando, tenemos

$$a^2+b^2+c^2 \leq a(b+c)+b(b+c)+c(b+a)$$

cada paso en cada uno de estos argumentos puede ser reversible, entonces la prueba esta completa. Este problema nos ilustra un tema muy común, manipular la expresión a una forma para tomar la ventaja del hecho que un número cuadrado es no-negativo.

Problema 60 *Sean a, b, c los lados de un triángulo, entonces*

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca).$$

Solución:

Consideremos el lado izquierdo de la desigualdad

$$
\begin{aligned}
ab+bc+ca &\leq a^2+b^2+c^2 \\
0 &\leq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
0 &\leq 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \\
0 &\leq \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) \\
0 &\leq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2
\end{aligned}
$$

esta última desigualdad es verdadera para todos los valores de a, b, c.

Ahora consideramos el lado derecho de la desigualdad

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\leq 2(ab+bc+ca) \\
a^2+b^2+c^2 &\leq a(b+c)+b(a+c)+c(b+a)
\end{aligned}
$$

esta última desigualdad es verdadera, ya que la suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es más grande que el tercer lado, es decir

$$a^2 \leq a(b+c), \; b^2 \leq b(a+c) \text{ y } c^2 \leq c(b+a).$$

Los pasos en cada uno de estos argumentos puede ser revertido, entonces la prueba está completa.

Problema 61 *Si a, b, c son los lados de un triángulo, probar que*

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) < (a+b+c)^2.$$

Solución:
Por el problema 60 sabemos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\leq 2(ab+bc+ca) \\ 2(a^2+b^2+c^2) &\leq 2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

entonces

$$2(a^2+b^2+c^2)<(a+b+c)^2$$

Problema 62 *Si a,b y c son los lados de un triángulo, entonces*

$$\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

Solución:
Primero demostraremos el lado derecho de la desigualdad y para eso solo necesitamos aplicar el siguiente resultado "la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el semiperímetro ($s=\frac{a+b+c}{2}$)", es decir,

$$b+c>\frac{a+b+c}{2},\ c+a>\frac{a+b+c}{2},\ a+b>\frac{a+b+c}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{b+c}<\frac{2}{a+b+c},\ \frac{1}{c+a}<\frac{2}{a+b+c},\ \frac{1}{a+b}<\frac{2}{a+b+c}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c},\ \frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c},\ \frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$$

sumando obtenemos

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Ahora el lado izquierdo lo demostraremos de varias formas, este es un problema favorito de Olimpiadas y daremos algunas pruebas muy instructivas. Transformar el lado izquierdo como sigue:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=f(a,b,c).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3 \\ &= (a+b+c)\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right]-3 \\ &= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right]-3 \qquad (1) \end{aligned}$$

Primera prueba: En (1), sea $a+b=x$, $b+c=y$, $a+c=z$, entonces

$$\begin{aligned} 2f(a,b,c) &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6 \\ &= \underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{x}{z}+\frac{z}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}_{\geq 2}-3\geq 3 \end{aligned}$$

la igualdad se cumple para $x = y = z$, que es $a = b = c$.

Segunda prueba: Usando media aritmética - media armónica como sigue

$$\frac{u+v+w}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}}$$

$\Leftrightarrow$

$$(u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \geq 9$$

de (1) tenemos

$$f(a,b,c) \geq \frac{1}{2}\cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$$

Observación, vamos a probar la forma del producto de la media aritmética - media armónica

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

multiplicando el lado izquierdo nos queda n veces 1 y $\binom{n}{2}$ pares de $\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}$ donde cada par es al menos 2, por lo tanto el lado izquierdo es a lo menos $n + 2\binom{n}{2} = n^2$, donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tercera prueba: Aplicamos la desigualdad media aritmética - media geométrica a (1), es decir $u+v+w \geq \sqrt[3]{uvw}$, a ambos paréntesis y nos queda

$$f(a,b,c) \geq \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Cuarta prueba: Sea $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ y $b_1 = \frac{1}{b+c}$, $b_2 = \frac{1}{c+a}$, $b_3 = \frac{1}{a+b}$. Por la desigualdad del rearreglo tenemos

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b} \geq a\cdot\frac{1}{c+a}+b\cdot\frac{1}{a+b}+c\cdot\frac{1}{b+c}$$

y

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b} \geq a\cdot\frac{1}{a+b}+b\cdot\frac{1}{b+c}+c\cdot\frac{1}{c+a}$$

sumando estas dos desigualdades nos queda

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq 3$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 63 *Un punto es escogido sobre cada lado de un cuadrado unitario, los cuatro puntos son lados de un cuadrilátero con lados a, b, c, d. Mostrar que*

$$2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$$

y

$$2\sqrt{2} \leq a+b+c+d \leq 4.$$

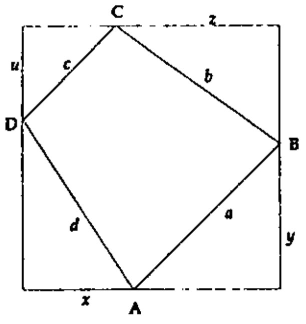


Figura 11: Problema 63

Solución:
En la figura 11 nosotros tenemos

$$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+z^2+(1-z)^2+u^2+(1-u)^2 \tag{1}$$

ahora

$$x^2+(1-x)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

y por otro lado $x^2+(1-x)^2\leq 1$. Similarmente decimos para $y^2+(1-y)^2$, $z^2+(1-z)^2$ y $u^2+(1-u)^2$, sumando estas cuatro desigualdades obtenemos que

$$2\leq a^2+b^2+c^2+d^2\leq 4.$$

Para la otra parte, sabemos que $2\leq a^2+b^2+c^2+d^2\leq 4$ y sacando raíz cuadrada a (1) tenemos

$$a+b+c+d\leq x+1-x+y+1-y+z+1-z+u+1-u=4$$

queda probar que $a+b+c+d\geq 2\sqrt{2}$. El perímetro de $ABCD$ es mínimo si tenemos que los cuatro puntos son los puntos medios de cada lado y este perímetro es $2\sqrt{2}$, entonces cualquier otro movimiento en los puntos, el perímetro será mayor o igual a $2\sqrt{2}$.

Problema 64 *Si x, y, z son lados de un triángulo, entonces*

$$\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|<1.$$

Solución:
El denominador es xyz. El numerador es un polinomio cúbico en x, y, z.
Observamos que: $x=y$, $y=z$, $z=x$, son ceros del numerador. Por lo tanto y aplicando la desigualdad del triángulo nos queda:

$$f(x,y,z)=\frac{|x-y|}{z}\cdot\frac{|y-z|}{x}\cdot\frac{|z-x|}{y}<1.$$

Por una especial selección de las variables. Trataremos de acercarnos a 1 como sea posible.

Sea $x = 1$, $y = 1+\epsilon$, $z = \epsilon+\epsilon^2$ entonces

$$f\left(1, 1+\epsilon, \epsilon+\epsilon^2\right) = \frac{|1-\epsilon| \cdot \left|1-\epsilon-\epsilon^2\right|}{1+\epsilon} \to 1$$

cuando $\epsilon \to 0$.

Problema 65 *Las diagonales de un cuadrilátero convexo se intersectan en O. Cual es el área más pequeña que este cuadrilátero puede tener si los triángulos AOB y COD tienen áreas 4 y 9 respectivamente.*

Solución:
Sean las áreas de BCO y DAO, x y y respectivamente. Sabemos que las áreas de dos triángulos con alturas iguales son proporcionales a sus bases, es decir

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{y} \text{ o } y = \frac{36}{x}$$

de lo anterior, el área de $ABCD$ es

$$f(x) = x + \frac{36}{x} + 13$$

es decir

$$f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}}\right)^2 + 25$$

esta fórmula prueba que el valor mínimo del área es 25 y esto cuando $x = y = 6$.

Problema 66 *(BrMO 1978) Encontrar un punto P dentro del triángulo ABC, tal que el producto $PL \cdot PM \cdot PN$ sea máximo, L, M, N son los pies de las perpendiculares desde P sobre BC, CA, AB.*

Solución:
Sea a, b, c las longitudes de los lados BC, AC y AB respectivamente (ver figura 12), aplicando la

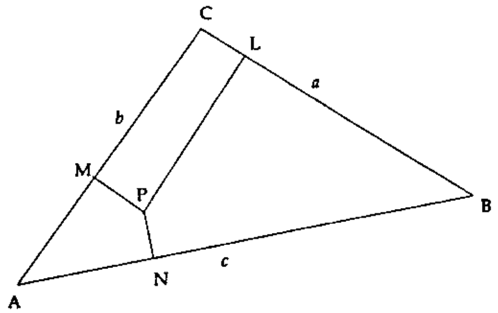


Figura 12: Problema 66

desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos

$$\sqrt[3]{(aPL)(bPM)(cPN)} \leq \frac{aPL + bPM + cPN}{3} = \frac{(2A)}{3}.$$

Sabemos que $aPL + bPM + cPN = 2A$ donde A es el área del triángulo, entonces el máximo valor de $PLPMPN$ es $\frac{8A^3}{27abc}$ y esto ocurre si y solo si $aPL = bPM = cPN$.

Mostraremos que $aPL = bPM = cPN$ si y solo si P es localizado en el centroide del triángulo ABC. Para esto suponemos que CP intersecta a AB en D. Sea α, β, γ, δ los ángulos como se muestra en la figura 13, es conocido que

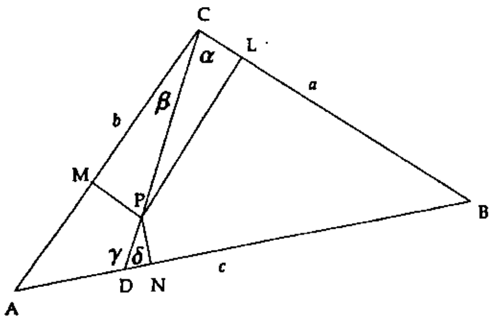


Figura 13: Problema 66

$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha} = \frac{AD}{DB}$$

(estas relaciones son muy útiles en muchos problemas) para ver que esto es verdad, aplicamos la ley de los senos a $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$ para obtener

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma} \text{ y } \frac{DB}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\delta}$$

usando estas ecuaciones tenemos que

$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha} = \frac{AD\sin\gamma}{DB\sin\delta} = \frac{AD}{DB}$$

como γ y δ son obviamente suplementarios, usando la ecuación de arriba tenemos

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha} = \frac{bPM/CP}{aPL/CP} = \frac{bPM}{aPL}$$

y esto sigue que $AD = DB$ si y solo si $bPM = aPL$, $aPL = bPM$ si y solo si P está sobre la línea de la mediana desde C.

En una forma similar $aPL = CPN$ si y solo si P está sobre la línea de la mediana desde B. De esto se sigue que $aPL = bPM = CPN$ si y solo si P es el centroide del $\triangle ABC$.

Problema 67 *(IMO 1983) Para cualquier triángulo con lados a, b, c*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Solución:

Primera prueba: Asumamos que $a \geq b \geq c$. Como en el problema 34 tenemos

$$a\,(b+c-a) \geq b\,(c+a-b) \geq c\,(a+b-c)$$

aplicando la desigualdad del rearreglo, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c}\right)a\,(b+c-a)+\left(\frac{1}{a}\right)b\,(c+a-b)+\left(\frac{1}{b}\right)c\,(a+b-c) &\leq \left(\frac{1}{a}\right)a\,(b+c-a)+\left(\frac{1}{b}\right)b\,(c+a-b)\\
&\quad+\left(\frac{1}{c}\right)c\,(a+b-c)\\
&= a+b+c
\end{aligned}$$

esta desigualdad se reduce a

$$\frac{a\,(b-a)}{c}+\frac{b\,(c-b)}{a}+\frac{c\,(a-c)}{b}\leq 0$$

la cual es equivalente a la desigualdad querida.

Segunda prueba:

$$\begin{aligned}
a^2b\,(a-b)+b^2c\,(b-c)+c^2a\,(c-a) &\geq 0\\
a^3b-a^2b^2+b^3c-b^2c^2+c^3a-c^2a^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \tag{1}$$

Cuando probamos desigualdades triangulares es muy común usar transformaciones. Sea $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, donde x, y, z son números positivos. Ver figura 14 que muestra la interpretación geométrica de esta tranformación.

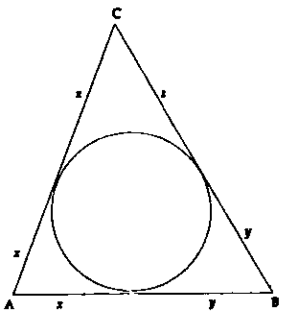


Figura 14: Problema 67

Resolviendo para x, y, z nos queda $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$ con $s=\frac{a+b+c}{2}$, aplicando los valores de a, b, c transformados a (1), la desigualdad (1) se reduce a

$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2 \tag{2}$$

dividiendo entre xyz nos queda

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z \tag{3}$$

ahora estas dos sucesiones $\left(x^2, y^2, z^2\right)$ y $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ están colocadas colocadas opuestamente, aplicando la desigualdad del rearreglo

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} + y^2 \cdot \frac{1}{y} + z^2 \cdot \frac{1}{z} \leq x^2 \cdot \frac{1}{y} + y^2 \cdot \frac{1}{z} + z^2 \frac{1}{x}$$

que es lo que queremos probar.

Problema 68 *Sean x, y, z las longitudes de los lados de un triángulo y sea*

$$f(x,y,z) = \left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right|$$

probar que

a) $f(x,y,z) < 1$

b) $f(x,y,z) < \frac{1}{8}$

c) *Encontrar el límite superior de $f(x,y,z)$.*

Solución:
Sea

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \\ &= \frac{x^2y + zy^2 - xy^2 + z^2x + z^2y - x^2z}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \end{aligned}$$

$P(x,y,z) = (x-y)(y-z)(x-z)$ tiene grado 3 y asi

$$f(x,y,z) = \frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

a) Sabemos que $|x-y| < x+y$, $|y-z| < y+z$, $|x-z| < z+x$, entonces tenemos $|f(x,y,z)| < 1$.

b) Usando $|x-y| < z$, $|y-z| < x$, $|z-x| < y$, nos queda

$$\begin{aligned} |f(x,y,z)| &< \frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x} = \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \cdot \frac{\sqrt{yz}}{y+z} \cdot \frac{\sqrt{xz}}{z+x} \\ &\leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

aquí usamos el hecho que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

c) Por análisis una de las más pequeñas cotas superiores, la cual se da para un triángulo degenerado, $z=1$, $y = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}{2}$, $x = z+y$, tenemos

$$f(x,y,z) = \frac{(8\sqrt{2} - 5\sqrt{5})}{3} < 0.04446.$$

Problema 69 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y sea S_a, S_b, S_c las longitudes de las medianas. D es el diámetro del circuncírculo. Probar que*

$$\frac{a^2+b^2}{S_c}+\frac{b^2+c^2}{S_a}+\frac{c^2+a^2}{S_b}\leq 6D.$$

Solución:

Extendemos las medianas AA_2, BB_2, CC_2 hasta que ellas se intersecten al circuncírculo en A_1, B_1, C_1. Se tiene $AA_2 \leq D$, $BB_2 \leq D$, $CC_2 \leq D$, es decir $m_a + A_1A_2 \leq D$, $m_b + B_1B_2 \leq D$, $m_c + C_1C_2 \leq D$. Un conocido teorema implica

$$A_1A_2 \cdot AA_2 = BA_2 \cdot A_2C,$$

es decir

$$A_1A_2 = \frac{a^2}{4m_a}$$

similarmente

$$B_1B_2 = \frac{b^2}{4m_b} \text{ y } C_1C_2 = \frac{c^2}{4m_c}$$

poniéndo esto en las desigualdades de arriba y sumándolas, nos queda

$$\frac{4m_a^2+a^2}{4m_a}+\frac{4m_b^2+b^2}{4m_b}+\frac{4m_c^2+c^2}{4m_c}\leq 3D$$

ya que los triángulos AA_2B y AA_2C son congruentes, por L.A.L. tenemos que

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

similarmente con los triángulos AC_2C y BC_2C y B_2BA y B_2BC, tenemos

$$4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2 \text{ y } 4m_c^2 + c^2 = 2c^2 + 2a^2$$

sustituyendo tenemos

$$\frac{a^2+b^2}{2m_c}+\frac{b^2+c^2}{2m_a}+\frac{c^2+a^2}{2m_b}\leq 3D$$

multiplicando por 2 nos queda el resultado.

Problema 70 *Sea a, b, c los lados de un triángulo. Probar que*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Solución:

Sea $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$. La desigualdad del triángulo implica que x, y, z son números positivos, más aun

$$a = \frac{(y+z)}{2},\; b = \frac{(z+x)}{2},\; c = \frac{(x+y)}{2},$$

entonces la desigualdad a probar se puede reescribir asi

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} &= \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\end{aligned}$$

y esto es obviamente mayor o igual que 3.

Problema 71 *Sean R y r los radios del circuncírculo y del incírculo de un triángulo, respectivamente, probar que $R \geq 2r$.*

Solución:

El área de un triángulo es $A = rS$ donde S es el semiperímetro.

Aplicando la ley de los senos, tenemos $a = 2R\sin\alpha$, multiplicando por bc ambos lados nos queda

$$abc = 2Rbc\sin\alpha = 4RA$$

de donde $R = \frac{abc}{4A}$, sustituyando A y despejando r nos queda

$$\frac{R}{r} = \frac{Sabc}{4S(S-a)(S-b)(S-c)} = \frac{2abc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{abc}{4(S-a)(S-b)(S-c)} = \frac{2abc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$\Leftrightarrow$

$$abc(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 8abc(S-a)(S-b)(S-c)$$

$\Leftrightarrow$

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 2\cdot 2\cdot 2(S-a)(S-b)(S-c)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2\cdot 2\cdot 2} = (S-a)(S-b)(S-c)$$

ahora decimos

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2c^2}}$$

es decir, que

$$\frac{2abc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \geq \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2c^2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \geq \frac{1}{abc}$$

$\Leftrightarrow$

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) < abc$$

esta última desigualdad la demostramos aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica, ver la demostración en el problema 49. Por lo tanto

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2c^2}} = 2 \Rightarrow R = 2r.$$

Problema 72 *Veinte cuadrados disjuntos están dentro de un cuadrado de lado 1. Probar que cuatro de ellos tienen la suma de las longitudes de sus lados menor o igual a* $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Solución:

Escogemos los cuatro cuadrados más pequeños. Denotamos las longitudes de sus lados por a_1, a_2, a_3, a_4 y la suma de sus áreas por A. Es obvio que $A \leq \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Ahora

$$\begin{aligned}
&(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_1-a_4)^2\\
&+(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+(a_3-a_4)^2 &= \; & 3\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)\\
&&& -2\left(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_4+a_3a_4\right)\\
&&= \; & 4\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2\\
&&= \; & 4A-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2
\end{aligned}$$

que es

$$4A-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$a_1+a_2+a_3+a_4 \leq 2\sqrt{A} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Problema 73 *(IMO 1991) En un triángulo ABC, los bisectores AD, BE y CF se intersectan en el punto I. Mostrar que*

$$\frac{1}{4} < \frac{IA}{AD}\cdot\frac{IB}{BE}\cdot\frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27}. \tag{1}$$

Solución:

Para resolverlo usamos el siguiente teorema geométrico (ver figura 15), un bisector de un triángulo divide el lado opuesto en la razón de los otros dos lados, $b : c = p : q$.

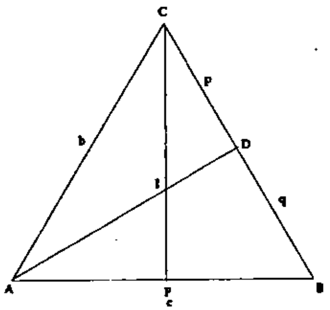


Figura 15: Problema 73

Tenemos $a = p + q$, $a - p = q$, $\frac{b}{c} = \frac{p}{q}$, $bq = cp$, sustituyendo q,

$$b(a-p) = cp \;\Rightarrow\; ba - bp = cp \;\Rightarrow\; ba = cp + bp = p(c+b) \;\Rightarrow\; p = \frac{ba}{c+b}$$

similarmente, para encontrar el valor de q, tenemos.

$$p = cd = \frac{ab}{b+c}, \; q = db = \frac{ac}{b+c}.$$

Ahora aplicamos el mismo teorema, pero al triángulo ADC, es decir

$$\frac{b}{p} = \frac{CA}{CD} = \frac{AI}{ID}$$

esto nos da

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b}{p} = \frac{b+c}{a}, \; \frac{AI}{AD} = \frac{AI}{AI+ID} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

similarmente

$$\frac{BI}{BE} = \frac{a+c}{a+b+c}, \; \frac{CI}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica a el numerador, nos queda

$$f(a,b,c) = \frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

el cual es $\frac{8}{27}$. Con esto quedo demostrado el lado derecho de la desigualdad.

Para probar el lado izquierdo usamos la desigualdad del triángulo

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0 \tag{2}$$

introducimos las siguientes funciones simétricas

$$\mu = a+b+c, \; \nu = ab+bc+ca, \; \omega = abc \tag{3}$$

poniéndo (3) en términos de (2) nos queda

$$-\mu^3 + 4\mu\nu - 8\omega > 0 \tag{4}$$

sobre el otro lado

$$f(a,b,c) > \frac{1}{4} \tag{5}$$

dando

$$-\mu^3 + 4\mu\nu - 4\omega > 0 \tag{6}$$

ahora, (4) es correcta, por lo tanto (6) también. Daremos una prueba de (5).

Sea $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ (ver figura 16). Con

$$r = \frac{x}{x+y+z}, \; s = \frac{y}{x+y+z}, \; t = \frac{z}{x+y+z}.$$

Tenemos

$$\frac{AI}{AD} = \frac{1}{2}(1+r), \; \frac{BI}{BE} = \frac{1}{2}(1+s), \; \frac{CI}{CF} = \frac{1}{2}(1+t)$$

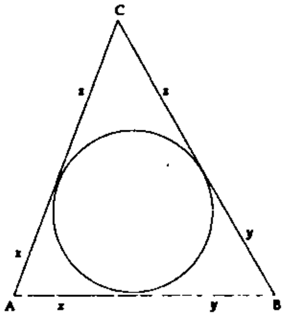


Figura 16: Problema 73

con $r+s+t=1$, de donde

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \\ &= \frac{1}{8}(1+1+rs+st+tr+rst) \\ &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Problema 74 *(IMO) A partir del triángulo T de vértices A, B y C se ha construido un hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 como se muestra en la figura. Demostrar que el área del hexágono H es mayor o igual que trece veces el área del triángulo T.*

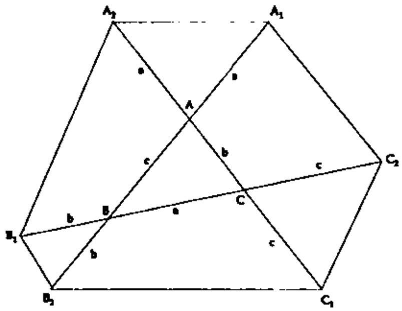


Figura 17: Problema 74

Solución:

Sea S el área del triángulo ABC. Tenemos

$$\begin{aligned}
\text{área de } H &= (AB_2C_1)+(BC_2A_1)+(CA_2B_1)-2(ABC)+(AA_1A_2)+(BB_1B_2)+(CC_1C_2)\\
&= \frac{1}{2}(b+c)^2\sin A+\frac{1}{2}(a+c)^2\sin B+\frac{1}{2}(a+b)^2\sin C\\
&\quad -2S+\frac{1}{2}a^2\sin A+\frac{1}{2}b^2\sin B+\frac{1}{2}c^2\sin C\\
&= \frac{1}{2}\left[(a^2+b^2+c^2)(\sin A+\sin B+\sin C)-4S+\underbrace{2bc\sin A}_{4S}+\underbrace{2ac\sin B}_{4S}+\underbrace{2ab\sin C}_{4S}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(a^2+b^2+c^2)(\sin A+\sin B+\sin C)+8S\right]
\end{aligned}$$

por el teorema de los senos,

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}.$$

Entonces

$$\text{área de } H=\frac{1}{2}\left[(a^2+b^2+c^2)\frac{1}{2R}(a+b+c)+8S\right]$$

por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, tenemos

$$a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc} \text{ y } a^2+b^2+c^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}$$

luego

$$\begin{aligned}
\text{área de } H &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2R}3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}3\cdot\sqrt[3]{abc}+8S\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{9abc}{2R}+8S\right]
\end{aligned}$$

como $abc=4RS$, tenemos finalmente

$$\text{área de } H\geq\frac{1}{2}\left[\frac{9\cdot 4RS}{2R}+8S\right]=\frac{1}{2}[26S]=13S\ .$$

Problema 75 *(HMO 1904) Sean A_1A_2 y B_1B_2 las diagonales de un rectángulo y sea O el centro. Encontrar y construir el conjunto de todos los puntos P que satisfacen al mismo tiempo las cuatro desigualdades*

$$A_1P>OP,\ A_2P>OP,\ B_1P>OP,\ B_2P>OP.$$

Solución:

Sea P cualquier punto en el plano y sea P' su proyección sobre la línea a través de A_1 y A_2 (ver figura 18). Entonces A_1P es mayor que, igual a, menor que OP de acuerdo como A_1P' es mayor que, igual a, menor que OP', similarmente el conjunto de puntos que satisfacen $A_1P>OP$ es la mitad del plano conteniendo O y bordeado por el bisector perpendicular del segmento A_1O. El conjunto de puntos P que satisfacen $A_2P>OP$ es la mitad del plano conteniendo O y bordeado por el bisector perpendicular de A_2O. El conjunto de puntos P que satisfacen, respectivamente $B_1P>OP$ y $B_2P>OP$ consiste de la mitad del plano conteniendo O y bordeado por el bisector perpendicular de B_1O y B_2O. El conjunto de puntos que satisfacen las 4 desigualdades simultáneamente es el interior del paralelogramo formado por los bisectores perpendiculares de los segmentos A_1O, A_2O, B_1O, B_2O. Este paralelogramo es siempre un rombo porque estas diagonales bisectan los ángulos a los cuales A_1A_2 y B_1B_2 intersectan y por lo tanto son perpendiculares.

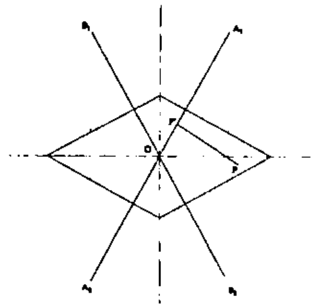


Figura 18: Problema 75

Problema 76 *(OMM 1998) Sea $ABCDE$ un pentágono (convexo) de manera que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$ y $\triangle EAB$ son todos de igual área. Demuestra que:*

$$\frac{\text{área } (ABCDE)}{4} < \text{ área } (\triangle ABC) < \frac{\text{área } (ABCDE)}{3}.$$

Solución:

Si las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son iguales, como tienen la misma base BC, entonces las alturas son iguales y así los vértices A y D se encuentran sobre una línea paralela a BC, es decir $AD \parallel BC$. Por la misma razón como las áreas de los triángulos $\triangle EAB$ y $\triangle ABC$ son iguales se tiene que $AB \parallel CE$; lo anterior implica que $ABCX$ es un paralelogramo, donde X es la intersección de AD y CE. En el paralelogramo $ABCX$, es claro que las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACX$ son iguales. También observemos que el área del $\triangle AXE$ es estríctamente menor que el área del $\triangle DEA$ (la base AX es

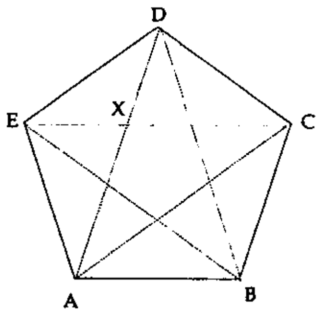


Figura 19: Problema 76

estríctamente menor que la base AD y ambos tienen la misma altura sobre tales bases). Finalmente se tiene que el área del $\triangle ACE$ es mayor que el área del $\triangle ACX$ (la base AE del $\triangle ACE$ es mayor que la base AX del $\triangle ACX$ y ambos tienen la misma altura sobre esta base).

Si $(XYZ\ldots)$ denota el área de la figura $XYZ\ldots$ tenemos:

$$\begin{aligned}(ABCDE) &= (ABC)+(ACX)+(CDE)+(EAX)\\ &= 3\,(ABC)+(EAX)<4\,(ABC)\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{1}{4}(ABCDE)<(ABC)$$

y también

$$(ABCDE)=(ABC)+(CDE)+(EAC)>3\,(ABC)$$

y de aquí que

$$(ABC)<\frac{1}{3}(ABCDE).$$

Problema 77 *(OMM 1998) Sean a_1,a_2,a_3,a_4,a_5, las longitudes de los lados de un pentágono convexo y m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 las longitudes de sus diagonales. Demostrar que:*

$$\frac{1}{2}\le\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}\le 1.$$

Solución:

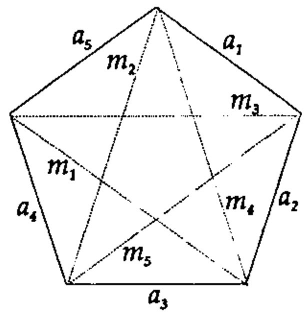


Figura 20: Problema 77

Por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\begin{aligned}m_4 &\le a_1+a_2\\ m_5 &\le a_2+a_3\\ m_1 &\le a_3+a_4\\ m_2 &\le a_4+a_5\\ m_3 &\le a_5+a_1\end{aligned}$$

luego $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5\le 2\,(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ por lo que $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} m_i\le\sum_{i=1}^{5} a_i$.

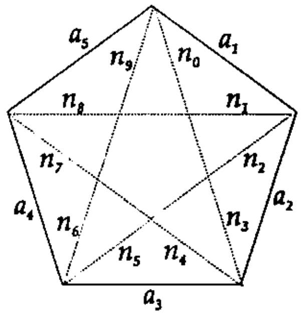


Figura 21: Problema 77

Nuevamente por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq n_0 + n_1 \\ a_2 &\leq n_2 + n_3 \\ a_3 &\leq n_4 + n_5 \\ a_4 &\leq n_6 + n_7 \\ a_5 &\leq n_8 + n_9 \end{aligned}$$

entonces $\sum_{i=1}^{5} a_i \leq \sum_{i=0}^{9} n_i$, y el resultado se sigue observando que $\sum_{i=0}^{9} n_i \leq \sum_{i=1}^{5} m_i$.

Bibliografía

- Rapaport, Elvira; *Hungarian Problem, book I*, The Mathematical Association of America, 1963.
- Murray, S. Klamkin; *USA Mathematical Olympiads, 1972-1986*, The Mathematical Association of America, 1988.
- Murray, S. Klamkin; *International Mathematical Olympiads, 1979-1985, and forty supplementary problems*, The Mathematical Association of America, 1986.
- Greitzer, Samuel L.; *International Mathematical Olympiads, 1959-1977*, The Mathematical Association of America, 1978.
- Mitrinovic, D.S.; *Elementary Inequalities*, 1964.
- Honsberger, Ross; *From Erdös to Kiev*, The Mathematical Association of America, 1996.
- Perry, Earl; *Geometry (Axiomatic Developments With Problem Solving)*, Editorial Board.
- Coxeter; *Introduction to Geometry*, 1965.
- Engel, Arthur; *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.
- Beckenbach, Edwin; Bellman, Richard; *An Introduction to Inequalities*, The Mathematical Association of America, 1961.
- Kazarinoff, Nicholas P.; *Geometric Inequalities*, The Mathematical Association of America, 1961.