

00384
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"LA MARGARITA. UN ESTUDIO A CERCA DE LA
ESTRUCTURA Y LA DISTRIBUCION DE LAS
RECTAS DE LOS PLANOS ALGEBRAICOS PG (2,2)"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
(M A T E M A T I C A S)
P R E S E N T A :

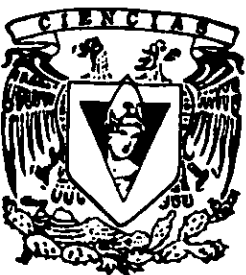
M. en C. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT.

MEXICO, D. F.

2000

273420





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

del 1966

El capítulo I es el primer capítulo del trabajo de tesis y en él formamos un diseño de bloques a partir de la estructura que forman las rectas de $PG(2, 2^n)$ en la margarita construida en el capítulo I. Además, demostramos que el diseño antes construido y el diseño de bloques que forma un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ sobre Z_2 son isomorfos.

El capítulo II es el segundo capítulo del trabajo de tesis y en él formamos un diseño de bloques a partir de la estructura que forman las rectas de $PG(2, 2^n)$ en la margarita construida en el capítulo I. Además, demostramos que el diseño antes construido y el diseño de bloques que forma un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ sobre Z_2 son isomorfos.

El capítulo

punto de vista

una línea arista de un sistema de bloques de un sistema de bloques y tres tablas

El capítulo III es la segunda parte central del trabajo de tesis y en él formamos un diseño de bloques a partir de la estructura que forman las rectas de $PG(2, 2^n)$ en la margarita construida en el capítulo I. Además, demostramos que el diseño antes construido y el diseño de bloques que forma un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ sobre Z_2 son isomorfos.

El capítulo IV es el ejemplo en $PG(2, 2^4)$ de los dos capítulos anteriores.

El capítulo V es una aplicación de los capítulos I y II a la Teoría de las Gráficas. En este pensamos en los planos proyectivos como hipergráficas donde los vértices son los puntos y la aristas las rectas y demostramos que el número heterocromático de $PG(2, q)$, para $q = 2^{2^n-1}$ tiene como cota inferior a $q^2 - 2q - 3$.

El capítulo VI consta de dos demostraciones que el número heterocromático de $PG(2, 2)$ es cuatro y que el de $PG(2, 2^n)$ es cinco.

Finalmente el capítulo VII es el último capítulo del trabajo de tesis y en él formamos un diseño de bloques a partir de la estructura que forman las rectas de $PG(2, 2^n)$ en la margarita construida en el capítulo I. Además, demostramos que el diseño antes construido y el diseño de bloques que forma un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ sobre Z_2 son isomorfos.

"The Daisy" Analysis

In the first chapter we study the algebraic projective plane

We also introduce the concept of a block design and we show some basic results on the existence of projective planes of order n .

Chapter two is the central part of the thesis. We study the construction of the lines in the daisy in $PG(2, 2^n)$ and we show that the daisy is a collection of petals and their centers.

Chapter three is the second central part of the thesis. In this chapter we make a block design which depends on the structure of the lines in the daisy in $PG(2, 2^n)$ constructed in chapter one.

We also prove that the design constructed before and the projective space of dimension $(n - 1)$ over \mathbf{Z}_2 are isomorphs as designs.

Chapter four is based on the two previous chapters and it is an example at $PG(2, 2^4)$.

Chapter five is an application to the graph theory. Now we think the projective finite planes as hypergraphs in which the set of points is the set of vertices and the set of lines is the set of edges. We prove that the set of lines in a finite projective plane is a t -design and that $h_c(PG(2, q)) \cong q - 2$ for $q \equiv 1 \pmod{2}$.

In chapter six we prove that the daisy is a t -design.

Finally in chapter seven we study the structure of the lines in the projective plane of order n .

A Camila, Julián y Héctor:

AGRADECIMIENTOS:

En primer lugar quisiera hacer un agradecimiento muy especial a mi asesor, Luis Montejano, sin el cual estoy segura, me hubiera costado mucho más trabajo hacer esta tesis. Gracias Luis por tu amistad, tu optimismo, tu apoyo y tu confianza. Oviamente, gracias por enseñarme a hacer matemáticas y por mostrarme esa parte que resulta ser apasionante.

Además quiero agradecer muy especialmente al Roli por estar siempre dispuesto a escucharme y muchas veces por aclararme y enseñarme el principio de los "caminitos", los cuales, obviamente, después uno tiene que atreverse a recorrer.

Gracias a mis sinodales: Emilio Lluís, Francisco Raggi, Rodolfo San Agustín, Eduardo Rivera y especialmente a Víctor Neumann que fué mi primer guía en esto de la investigación.

Gracias muy especialmente a algunos otros maestros que de una u otra manera me enseñaron cosas en este, ahora ya largo camino, que he recorrido, gracias a Paco Larrión, Mónica Clapp, María Emilia Caballero y muy especialmente a Jorge Arocha por haberme abierto la puerta de los planos proyectivos finitos y sus coloraciones.

Gracias a la Facultad de Ciencias, a DGAPA y sobre todo al Instituto de Matemáticas por haberme dado el espacio para poder creer y crear en las matemáticas.

Ahora quisiera agradecer a mis amigos, los matemáticos y los que no lo son. En el primer grupo quiero agradecer muy especialmente a Déborah, por haberme mostrado de alguna manera la ruta, gracias Deborita por tu amistad y sobre todo por tu fuerza y tu valor.

Gracias al Dino por compartir conmigo una historia en la Facultad y en el Instituto y por ser, de alguna manera, un buen representante de mi generación.

Gracias a Rita y a José por haber sido mis compañeros de cubículo y por su amistad.

Ahora quiero agradecer a mis otros amigos, los que no son matemáticos pero que, de alguna manera, han compartido toda esa otra parte de mi vida. Gracias a Xochitl por ser tan clavada y tan clara en sus ideas, gracias al Arman a Juan Manuel y a Merari. Gracias a Flavia y a Laura por haber compartido conmigo, sobre todo, el principio del camino de la vida.

Gracias a Gisela, Gaby, Amelia y a la Sra. Margarita ya que han hecho posible que yo tenga tiempo y tranquilidad para poder dedicarme a esta otra parte de mi cotidianidad. Gracias por el cariño que les dan a mis hijos.

Quiero agradecer en especial a Ceci por haberme ayudado con los "dibujitos", ya que sin

ella no hubieran quedado tan "matemáticas" las "margaritas" y gracias a Aldo por haberle dado chance de llevarlo a cabo.

Gracias a Logos y a todos sus integrantes.

Ahora quisiera agradecer a mi familia, ya que, al hacer estos agradecimientos me doy cuenta de que ultimamente, por circunstancias vitales, estoy mucho más cerca de ellos que de cualesquiera otras personas:

Gracias en especial a mis abuelos por confiar en este proyecto y por seguirme acompañando.

Gracias a mis tios Rebeca, Parmi y Roberto por estar cerca.

Gracias a Mónica por estar ahora con nosotros y ser parte de la familia.

Gracias a mi hermano, a Laura y al Emilio al que estamos esperando. Gracias Alejandro por compartir conmigo una vida entera, por ser tan sabio y tan observador, aunque siempre lo suficientemente loco para confiar en mi y en mis proyectos.

Gracias a Enrique por estar cerca y a mi mamá sobre todo por estos últimos tiempos, por compartir conmigo las cosas importantes y por ser siempre tan respetuosa, tan objetiva y tan optimista.

Gracias a Andrés por estar aquí, por estar con nosotros, con Julián. Gracias Licha por ser siempre cariñosa y clara. Gracias papá por creer en mí, por respetarme y siempre por apoyarme y quererme.

Ahora quiero agradecer a mi pequeña familia, esa que me ha acompañado en los últimos cinco años y a la que le debo en gran parte este doctorado:

Gracias a Julián y a Camila porque me han enseñado otra parte de la vida que yo desconocía. Gracias por mostrarme lo importante, lo valioso y lo que es imposible medir, gracias por estar conmigo.

Finalmente, gracias muy especiales a Héctor, ya que sin su apoyo, evidentemente este proyecto ahora terminado no hubiera sido posible. Gracias por tu comprensión, tu amistad y sobre todo por tu amor.

INDICE

Indice.....	1
Introducción.....	2
Capítulo 1. Preliminares.....	4
Capítulo 2. Las margaritas.....	10
Capítulo 3. Las margaritas y el espacio proyectivo.....	22
Capítulo 4. El ejemplo en $PG(2, 2^4)$.....	32
Capítulo 5. Una aplicación de las margaritas.....	40
Capítulo 6. Coloreando proyectivos.....	45
Capítulo 7. Tensión.....	56
Bibliografía.....	59

INTRODUCCION

El trabajo que presentamos a continuación está dividido a grandes rasgos en tres partes; las dos primeras son la parte medular de la tesis. En primer término estudiamos minuciosamente la distribución de los puntos en los planos proyectivos finitos algebraicos, es decir, los planos proyectivos que se construyen a partir de los campos finitos ó campos de Galois, en donde, a lo largo de esta primera parte, concluimos que los puntos se distribuyen en tres conjuntos cuya unión asemeja a una "margarita", una flor con centro, pétalos y tallo. Por otro lado analizamos como las rectas del plano proyectivo intersectan a la margarita de puntos y concluimos que dichas intersecciones dan lugar a una margarita de rectas que resulta ser dual a la anterior.

En la segunda parte damos un isomorfismo entre los planos proyectivos algebraicos de orden alguna potencia de dos y los espacios proyectivos sobre Z_2 . Esto lo hacemos a partir de la margarita de rectas y aplicamos técnicas de diseños de bloques.

Finalmente, en la tercera parte aplicamos lo demostrado en las dos anteriores a la teoría de las gráficas y sus coloraciones. Curiosamente, o mejor dicho, como sucede casi siempre con las matemáticas, la pregunta original del trabajo doctoral surgió precisamente en el contexto de las coloraciones en la teoría de las gráficas (ver introducción del capítulo V) y nos dimos cuenta que para resolver, aunque fuera en una parte, nuestro problema era necesario estudiar detalladamente la estructura de los planos proyectivos finitos. Así, este camino nos llevó a encontrar resultados que nos parecieron tanto o mas interesantes que el problema original y desviaron nuestra investigación. Sin embargo, estos resultados nos permitieron resolver, aunque de manera parcial, el problema planteado al iniciar el trabajo doctoral y obviamente consideramos de gran importancia incluir en la tesis las aplicaciones de los resultados fundamentales en la solución de nuestras preguntas iniciales.

Así, si pensamos en los planos proyectivos como hipergráficas cuyos vértices son los puntos y cuyas aristas son las rectas damos una cota inferior al número heterocromático del plano proyectivo, esta cota la obtenemos a partir de nuestra margarita de rectas; también enunciamos una cota superior, la cual no se demuestra ya que su demostración está relacionada con conjuntos bloqueadores y con subplanos de Baer, lo cual no está incluido en el trabajo previo.

Por otro lado, damos el número heterocromático de algunos planos proyectivos algebraicos de tamaño pequeño y finalmente abordamos el primer problema planteado al inicio del trabajo doctoral y que resuelve la tensión en los planos proyectivos algebraicos, pensando a estos como 3-gráficas cuyos vértices son los puntos y cuyas aristas son las ternas de puntos no colineales.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo definiremos a los planos proyectivos y en particular construiremos los planos proyectivos algebraicos sobre los Campos de Galois de orden q , cuando q es una potencia de dos; también daremos algunas propiedades que nos serán de utilidad en nuestro trabajo posterior. Introduciremos el concepto de óvalo, tanto de puntos como de rectas, describiendo también en estos algunas propiedades importantes.

DEFINICION 1.1: Un Plano Proyectivo consta de un conjunto de puntos P y un conjunto de rectas L tal que:

L1: Cualquier recta tiene al menos dos puntos.

L2: Dos puntos están en precisamente una recta.

PP1: Cualesquiera dos rectas se encuentran en un punto.

PP2: Existe un conjunto de cuatro puntos en el que no hay tres colineales (existencia del cuadrángulo).

En adelante hablaremos solo de planos proyectivos finitos.

El ejemplo mas pequeño de un plano proyectivo finito es el Plano de Fano que contiene 7 rectas y 7 puntos ordenados como en la figura 1-1, donde $l_1 = abc$, $l_2 = afd$, $l_3 = age$, $l_4 = bfe$, $l_5 = cde$, $l_6 = cfg$ y $l_7 = bdg$.

Observamos que cada recta tiene 3 puntos y en cada punto inciden 3 rectas.

Es fácil observar que en todo plano proyectivo finito, el número de puntos que contiene una recta es igual al número de rectas que se intersectan en un punto y, si este número es $q + 1$ entonces el total de puntos es $q^2 + q + 1$ que es también el total de rectas. Es por eso que decimos

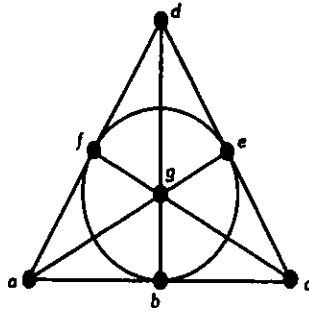


Figura 1-1: Plano de Fano

que el orden del plano proyectivo es q . Así pues, el Plano de Fano es un plano proyectivo de orden 2, y es el único de orden 2 salvo isomorfismo. En general es posible que tengamos dos o más planos proyectivos del mismo orden. Denotaremos por Π_q a cualquier plano proyectivo de orden q y por $P(\Pi_q)$ y por $R(\Pi_q)$ al conjunto de puntos y de rectas en Π_q respectivamente.

A continuación construiremos planos proyectivos de orden q donde q es una potencia de dos, usando como herramienta los campos de Galois de orden q . A estos planos proyectivos los llamaremos **algebraicos** y los denotaremos por $PG(2, q)$.

Denotemos al campo de Galois de orden q , donde $q = 2^{n+1}$ como $GF(q)$ y recordemos que se construye a partir de cualquier polinomio irreducible en \mathbb{Z}_2 de grado $n + 1$. En particular, para simplificar nuestro trabajo, construiremos a $GF(q)$ a partir de un polinomio primitivo en \mathbb{Z}_2 de grado $n + 1$, donde un polinomio primitivo es un polinomio irreducible cuya raíz es un elemento generador del subgrupo multiplicativo de $GF(q)$.

Así, tenemos a los elementos de $GF(q)$ escritos de dos maneras distintas; la primera es usando directamente el polinomio primitivo y escribiendo a los elementos de $GF(q)$ como $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha^i$ para $a_i \in \mathbb{Z}_2$ y α raíz de dicho polinomio y la segunda es escribir cada elemento como potencia de α , es decir:

$$GF(q) = \{0, \alpha^0, \alpha, \dots, \alpha^{q-2}\}.$$

En adelante α denotará el elemento generador de $GF^*(q)$ y escribimos a los elementos de $GF(q)$ como potencias de α .

Además la suma y el producto en $GF(q)$ están definidos de manera usual como en el campo de los polinomios sobre \mathbb{Z}_2 simplificando el resultado del producto mediante el polinomio primitivo para obtener un polinomio de grado menor o igual que n .

Construiremos ahora el plano proyectivo algebraico de orden q , consideremos el conjunto de ternas $\{(x_0, x_1, x_2) \text{ tal que } x_i \in GF(q)\} - \{(0, 0, 0)\}$. Observemos que tenemos $q^3 - 1$ ternas. Decimos que la terna $x = (x_0, x_1, x_2)$ es equivalente a la terna $y = (y_0, y_1, y_2)$ y escribimos $x \sim y$ si y solo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in GF^*(q)$. Observemos que \sim es por definición una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia tiene $q - 1$ elementos, entonces tenemos $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ clases de equivalencia. Denotaremos la clase de equivalencia de x por $[x]$. Entonces los puntos de $PG(2, q)$ son las clases de equivalencia anteriores.

Para definir las rectas de $PG(2, q)$ tomamos nuevamente las ternas $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ tal que $\alpha_i \in GF(q) - \{(0, 0, 0)\}$ y definimos la recta $[\alpha]$ como el conjunto de todos los puntos $[x]$ tales que satisfacen que:

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

Observemos que $[\alpha] = [\lambda\alpha]$ para todo $\lambda \in GF^*(q)$. En forma similar a como calculamos el número de puntos obtenemos que $PG(2, q)$ contiene $q^2 + q + 1$ rectas. Sea $[\alpha] = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ una recta en $PG(2, q)$ con $\alpha_0 \neq 0$, entonces si $[x] \in [\alpha]$, x_0 queda determinado por x_1 y x_2 (alguno de ellos distinto de cero), entonces existen $q^2 - 1$ elecciones para x_1 y x_2 y por lo tanto hay $q^2 - 1$ ternas x ($x \neq 0$) que satisfacen $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ y como cada clase tiene $q - 1$ elementos, entonces hay $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$ puntos $[x]$ en $[\alpha]$.

Finalmente sean $[x]$ e $[y]$ dos puntos distintos en $PG(2, q)$, como $x \neq \lambda y$ entonces x e y son linealmente independientes por lo que, las soluciones α a la ecuación:

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0 = \sum_i \alpha_i y_i$$

forman un subespacio de dimensión uno, entonces $[x]$ e $[y]$ determinan una recta. Además si α y β son soluciones de la ecuación anterior existe $\lambda \in GF^*(q)$ tal que $\alpha = \lambda\beta$, lo que implica

que $[x]$ e $[y]$ determinan una única recta.

Por lo tanto $PG(2, q)$ es un plano proyectivo finito de orden q , es decir es un Π_q .

La siguiente proposición acerca de las descomposiciones de la unidad en $GF(q)$ nos será muy útil después.

PROPOSICION 1.1: En $GF(q)$ para cada $i \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ existe una única descomposición de la unidad $1 = \alpha^{a_i} + \alpha^{a_i+i}$ en donde $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$.

Demostración:

Sea $1 = \alpha^{a_i} + \alpha^{a_j}$ una descomposición de la unidad con $a_i, a_j \in \{1, \dots, q-2\}$, claramente $a_i \neq a_j$ y $a_j = a_i + s$ para algún $s \in \{1, \dots, q-2\}$. Supongamos que $a_i = a$ y $a_j = a + s$, entonces: $1 = \alpha^a + \alpha^{a+s}$, si $s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ tenemos una de las descomposiciones que aparecen en el enunciado del teorema, ahora si $s \in \{\frac{q-2}{2} + 1, \dots, q-2\}$ entonces $-s \in \{\frac{q-2}{2}, \dots, 1\}$ ya que $s + (-s) \equiv 0 \pmod{q-1}$.

Por lo tanto $1 = \alpha^{a+s} + \alpha^{(a+s)-s}$ es ahora una de las descomposiciones que queremos obtener, entonces de cualquier manera obtenemos la descomposición: $1 = \alpha^a + \alpha^{a+s}$ para $s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$.

A continuación probaremos primero que cualquier descomposición de la unidad $1 = \alpha^b + \alpha^{b+t}$ que satisfaga las hipótesis de la proposición en la que $b \neq a$ y $b \neq a + s$ es diferente a la descomposición anterior y después que también es diferente si $s \neq t$.

Sea $1 = \alpha^b + \alpha^{b+t}$ otra descomposición de la unidad con $b \neq a$ y $b \neq a + s$, entonces $b+t \neq a$ y $b+t \neq a + s$ ya que si $b+t = a$ entonces:

$$1 = \alpha^{b+t} + \alpha^{a+s}$$

$$1 = \alpha^b + \alpha^{b+t}$$

por lo tanto $b = a + s$ lo cual no es cierto.

Análogamente si $b+t = a + s$ entonces:

$$1 = \alpha^a + \alpha^{b+t}$$

$$1 = \alpha^b + \alpha^{b+t}$$

por lo tanto $a = b$ lo cual tampoco es cierto.

Además es necesario probar que $s \neq t$. Supongamos que $s = t$, entonces:

$$1 = \alpha^a + \alpha^{a+s}$$

$$1 = \alpha^b + \alpha^{b+s}$$

con $a \neq b$.

Factorizando:

$$1 = \alpha^a(1 + \alpha^s)$$

$$1 = \alpha^b(1 + \alpha^s)$$

lo que implica que $\alpha^a = \alpha^b$ y entonces $a = b$ lo cual es falso.

Analogamente obtenemos las demás descomposiciones. ■

Introduciremos ahora la noción de óvalo de puntos y de rectas.

DEFINICION 1.1: Sea Π_q un Plano Proyectivo de orden q . Definimos un óvalo de puntos como un subconjunto de puntos de Π_q tal que toda recta que lo corta lo intersecta en exactamente dos puntos.

DEFINICION 1.2: Sea Π_q un Plano Proyectivo de orden q . Definimos un óvalo de rectas como un subconjunto de rectas de Π_q tal que por cada punto que pertenece a alguna de estas rectas pasan exactamente dos rectas del subconjunto.

En adelante, para simplificar, llamaremos a los óvalos de puntos simplemente óvalos y especificaremos cuando hablemos de los óvalos de rectas. Además al hablar de la cardinalidad de un óvalo nos referimos al número de puntos que contiene, y lo denotamos por $|O|$ para O un óvalo cualquiera. De manera análoga al hablar de los óvalos de rectas.

PROPOSICION 1.2: Todo óvalo tiene cardinalidad $q + 2$.

Demostración:

Sea p un punto de un óvalo \mathcal{O} de cardinalidad m . Entonces, como en cualquier plano proyectivo dos puntos determinan una única recta, toda recta por p toca a \mathcal{O} en exactamente otro punto por lo tanto el total de rectas por p es igual al cardinal de \mathcal{O} menos uno, es decir $q + 1 = m - 1$, de ahí $m = q + 2$ ■

En los planos proyectivos algebraicos de orden $q = 2^{n+1}$ para $n \geq 0$, es decir en $PG(2, q)$, tenemos, entre otros los siguientes óvalos:

Sea \mathcal{O}_i para $i \in \{0, \dots, q - 2\}$ definido de la siguiente manera:

$\mathcal{O}_i = \{[x, y, z] \in P(PG(2, q)) \mid z^2 = \alpha^i xy\} \cup \{[0, 0, 1]\}$ Es decir:

$\mathcal{O}_i = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, \frac{\alpha^i}{\alpha^2}, a] \mid a \in GF^*(q)\}$.

Al conjunto $\{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ lo llamaremos el centro y lo denotaremos por \mathcal{C}

Finalmente, una última proposición sobre estos óvalos.

PROPOSICION 1.3: Sea \mathcal{O}_i para $i \in \{0, \dots, q - 2\}$ definido como antes, entonces para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, q - 2\}$, con $i \neq j$, tenemos que $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \mathcal{C}$.

Demostración:

Por definición, tenemos que: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

Probaremos ahora que $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \subseteq \mathcal{C}$. Supongamos que existe $x \in (\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) \setminus \mathcal{C}$ para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, q - 2\}$ con $i \neq j$, entonces $x = [1, \frac{\alpha^i}{\alpha^2}, a]$ y $x = [1, \frac{\alpha^j}{\alpha^2}, b]$ para $a, b \in GF^*(q)$ e $i \neq j$. Por lo tanto $a = b$ lo que implica $i = j$ lo cual contradice nuestra hipótesis.

Entonces $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \mathcal{C}$, para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, q - 2\}$, con $i \neq j$. ■

Para cada $i \in \{0, \dots, q - 2\}$, $\mathcal{O}_i - \mathcal{C}$ será llamado el i -ésimo pétalo y será denotado por \mathcal{P}_i .

Observemos que $|\mathcal{P}_i| = |\mathcal{O}_i| - 3 = q - 1$.

CAPITULO 2

LAS MARGARITAS

Sea $PG(2, q)$ el Plano Proyectivo Algebraico de orden q , para $q = 2^{n+1}$.

Recordemos que un Plano Proyectivo de orden q tiene $q^2 + q + 1$ puntos y $q^2 + q + 1$ rectas y por cada punto pasan $q + 1$ rectas y cada recta contiene $q + 1$ puntos.

2.1 LA MARGARITA DE PUNTOS:

A continuación vamos a distribuir los puntos del plano proyectivo de orden q en un esquema que nos recuerda a una margarita. Así pues, los puntos estarán repartidos en tres conjuntos ajenos a los que llamaremos el centro, los pétalos y los tallos. Obtendremos entonces un centro, $q - 1$ pétalos ajenos y tres tallos también ajenos; esta distribución está dada de la siguiente manera:

El centro de la margarita:

Son los tres puntos que forman el conjunto C , recordemos que:

$$C = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$$

Los pétalos de la margarita:

Son los $q - 1$ conjuntos ajenos \mathcal{P}_i para $i \in \{0, 1, \dots, q - 2\}$. Observemos que cada pétalo tiene $q - 1$ puntos. Llamaremos p_i^j al punto $[1, \frac{\alpha^{2j}}{\alpha^i}, \alpha^j]$ en \mathcal{P}_i con $j \in \{0, 1, \dots, q - 2\}$.

Así tenemos $q - 1$ pétalos con $q - 1$ puntos cada uno, es decir tenemos en total $q^2 - 2q + 1$ puntos en los pétalos.

Recordemos que en la proposición 1.3 probamos que cualesquiera dos pétalos son ajenos y además sabemos que cada pétalo más el centro forma un óvalo de puntos.

Los tallos de la margarita:

Repartiremos los puntos en tres conjuntos ajenos de $q - 1$ puntos cada uno a los que llamaremos tallos.

Si tomamos una recta generada por dos puntos del centro de la margarita, entonces ya no toca a ningún punto de los pétalos (porque toda recta que intersecta a un óvalo lo intersecta solo en dos puntos).

Llamaremos un tallo a los $q - 1$ puntos de la recta antes descrita que no son puntos del centro. Como los puntos del centro generan tres rectas tenemos tres rectas de este tipo; además estas tres rectas se intersectan dos a dos en el centro por lo tanto los tallos son ajenos y de tamaño $q - 1$; entonces hay $3(q - 1)$ puntos de $PG(2, q)$ que están en los tallos.

Observemos que en la distribución anterior obtenemos tres puntos en el centro, $q^2 - 2q + 1$ puntos en los pétalos y $3q - 3$ puntos en los tallos, es decir obtenemos $q^2 + q + 1$ puntos que es el número de puntos de $PG(2, q)$.

La figura 2-1 muestra a la margarita de puntos en $PG(2, 2^4)$, la cual consta de 273 puntos distribuidos en un centro, quince pétalos y tres tallos. Escogimos este ejemplo porque trabajaremos con el más adelante, además de que resulta ser lo suficientemente grande para ser ilustrativo y lo suficientemente pequeño para ser fácil de manejar.

2.2 LA MARGARITA DE RECTAS:

Analizaremos ahora a las rectas del plano proyectivo $PG(2, q)$ y construiremos una margarita de rectas a partir de la margarita de puntos.

La construcción de la margarita de rectas está dada de manera combinatoria y la haremos observando la estructura que forman las rectas del plano proyectivo al intersectar a la margarita de puntos, es decir, al tocar los puntos de la margarita de puntos. Además, la margarita de rectas resulta ser dual a la margarita de puntos, es decir, contiene un centro, tres tallos y quince pétalos.

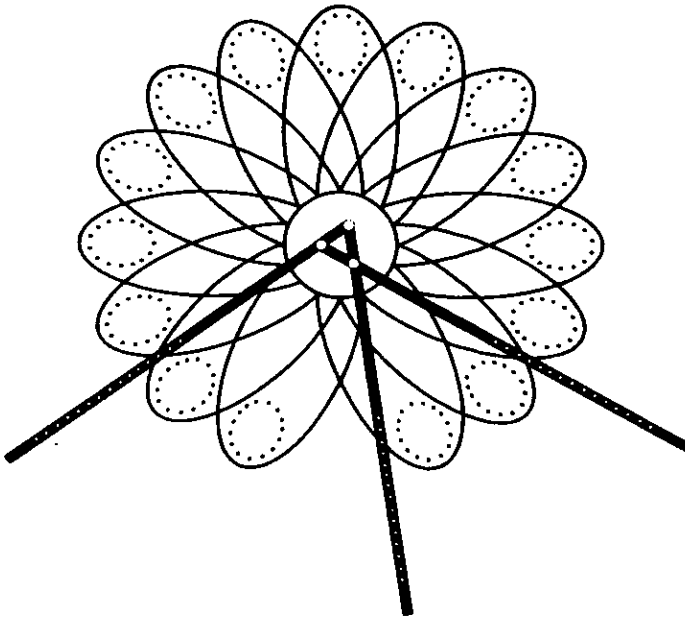


Figura 2-1: La Margarita de Puntos en $PG(2, 2^4)$

Por comodidad en lo descrito a continuación, al nombrar el centro, los pétalos y el tallo nos referimos a los que pertenecen a la margarita de puntos.

Vamos a agrupar a las $q^2 + q + 1$ rectas del plano proyectivo en $q + 2$ conjuntos ajenos, a partir de la siguiente definición:

DEFINICION 2.1: Decimos que dos rectas cualesquiera de $PG(2, q)$ son equivalentes si intersectan a los mismo pétalos. Es decir, decimos que l y l' rectas de $PG(2, q)$ son equivalentes, y escribimos $l \sim l'$ cuando $\mathcal{P}_i \cap l \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}_i \cap l' \neq \emptyset$.

Observemos que la equivalencia definida es una relación de equivalencia.

DEFINICION 2.2: Sea l una recta cualquiera de $PG(2, q)$, definimos el soporte de l , y lo denotaremos $S(l)$, al conjunto de pétalos a los que intersecta l .

A partir de lo anterior enunciamos el siguiente teorema:

TEOREMA DE LA MARGARITA DE RECTAS: Las clases de equivalencia de las rectas de $PG(2, q)$ inducen una margarita de rectas dual a la margarita de puntos.

Para demostrar este teorema son necesarias dos cosas, en primer lugar agrupar a las $q^2 + q + 1$ rectas en tres conjuntos, el centro de la margarita, los tallos y los pétalos; y en segundo demostrar que cualquier pétalo de rectas unión el centro es un óvalo de rectas.

Para la primera parte describiremos completamente al centro y a los tallos de la margarita de rectas, los cuales aparecen de manera natural y parcialmente a los pétalos de rectas, ya que la distribución de las rectas en los pétalos de rectas, resulta ser más compleja y por lo tanto es necesario demostrar algunos resultados previos.

Centro de la margarita de rectas (rectas del tipo I):

Son las rectas que tocan al centro en dos puntos y por lo tanto son las tres rectas generadas por:

$$C = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$$

A este conjunto lo denotaremos C^* .

Observemos que, por definición de óvalo, son las rectas que pertenecen a la clase de equivalencia cuyo soporte es el vacío, es decir son rectas que no intersectan a ningún pétalo.

Tallos de la margarita de rectas (rectas del tipo II):

Son las rectas que tocan al centro en un solo punto.

Estas rectas están repartidas en tres paquetes o tallos de rectas, de la siguiente manera:

Como toda recta toca a un óvalo en exactamente dos puntos, cada recta del tipo II toca a los $q - 1$ pétalos en exactamente un punto en cada uno y ya que, cada recta tiene $q + 1$ puntos, los puntos en las rectas del tipo II son uno del centro, uno del tallo y los $q - 1$ restantes están uno en cada pétalo.

Ahora podemos clasificar a las rectas del tipo II en tres paquetes de $q - 1$ rectas cada uno; donde dos rectas del tipo II están en el mismo paquete o tallo de rectas si pasan por el mismo punto del centro.

Sabemos además que por cada punto del centro pasan $q + 1$ rectas; dos de ellas son de C^* , entonces las $q - 1$ restantes son las del tipo II que forman un tallo de rectas.

Observemos que si c es un punto del centro y T_c es el tallo que no pasa por c , las $q - 1$ rectas

de paquete que pasa por c tocan cada una a exactamente un punto de T_c , es decir las $q-1$ rectas por c tocan a los $q-1$ puntos de T_c que no pasan por el centro. Entonces podemos relacionar a cada recta del tallo de rectas que pasa por c con un y solo un punto de T_c ; relacionando así biunivocamente a las $3(q-1)$ rectas del tipo II de la margarita de rectas con los $3(q-1)$ puntos de los tallos de la margarita de puntos.

Entonces, regresando a nuestra definición de clases de equivalencia, las rectas del tipo II pertenecen a la clase cuyo soporte es el conjuntos de todos los pétalos.

Pétalos de la margarita de rectas (rectas del tipo III):

Son las rectas que no tocan al centro.

Las rectas del tipo III intersectan a cada una de las rectas del centro de la margarita de rectas en un punto, como este no está en el centro debe de estar en el tallo.

Así pues, cada recta del tipo III tiene un punto en cada tallo y los $q-2$ restantes están en los pétalos, de manera que cada recta del tipo III intersecta exactamente a $\frac{q-2}{2}$ pétalos, en dos puntos a cada uno.

Ya que $PG(2, q)$ tiene $q^2 + q + 1$ rectas tenemos $q^2 - 2q + 1$ rectas del tipo III. Afirmamos que están distribuidas en $q-1$ clases de equivalencia a las que llamaremos pétalos de rectas, cada una con $q-1$ rectas.

La anterior afirmación requiere de ciertas observaciones y de una explicación mayor que es la que haremos a continuación:

Consideremos las rectas del tipo III cuyo soporte contiene a algún pétalo fijo \mathcal{P}_i , estas rectas están en biyección con las aristas de la gráfica completa K_{q-1} cuyos vértices son los puntos $p_i^j = [1, \frac{\alpha^{2j}}{\alpha^i}, \alpha^j]$, es decir los puntos de \mathcal{P}_i :

Agruparemos las rectas del tipo III que intersectan al pétalo \mathcal{P}_i , en $\frac{q-2}{2}$ conjuntos cada uno con $(q-1)$ líneas, de la siguiente manera:

Para $k \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$, sea:

$$S_i^k = \left\{ \text{Rectas que pasan por los puntos } p_i^j \text{ y } p_i^{j+k} \mid j \in \{0, 1, \dots, q-2\} \right\}$$

Es decir S_i^k es el conjunto de rectas que dan el salto k en \mathcal{P}_i para $i \in \{0, 1, \dots, q-2\}$.

A continuación probaremos que:

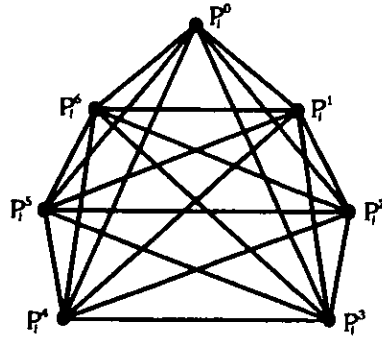


Figura 2-2: Pétalo \mathcal{P}_i

i) Si dos rectas tienen el mismo salto k en un pétalo, los $\frac{q-2}{2}$ pétalos a los que intersectan son los mismos, es decir, su soporte es el mismo.

ii) En cada uno de estos pétalos ambas dan el mismo salto r .

La recta que pasa por los puntos p_i^j y p_i^s en \mathcal{P}_i para $i, j, s \in \{0, 1, \dots, q-2\}$ es la recta que satisface la siguiente ecuación:

$$\alpha^j \alpha^s x + \alpha^i y + (\alpha^j + \alpha^s) z = 0$$

Esta ecuación se obtiene de desarrollar el producto cruz entre los puntos p_i^j y p_i^s .

Recordemos que por la proposición 1.1, $1 = \alpha^{a_k} + \alpha^{a_k+k}$ para $k \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ lo cual induce las descomposiciones:

$$\alpha^s = \alpha^{s+a_k} + \alpha^{s+a_k+k}$$

para $s \in \{0, 1, \dots, q-2\}$. Entonces las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos $p_i^{s+a_k}$ y $p_i^{s+a_k+k}$.

Es decir las rectas de S_i^k son de la siguiente forma:

$$(\alpha^{s+a_k} \alpha^{s+a_k+k}) x + \alpha^i y + (\alpha^{s+a_k} + \alpha^{s+a_k+k}) z = 0 \tag{1}$$

Observemos que el coeficiente de z es α^s .

Multiplicamos por α^p , para alguna $p \in \{0, 1, \dots, q-2\}$,

$$\begin{aligned}\alpha^p(\alpha^{s+a_k}\alpha^{s+a_k+k})x + \alpha^{p+i}y + \alpha^p(\alpha^{s+a_k} + \alpha^{s+a_k+k})z &= 0 \\ (\alpha^{p+2s+2a_k+k})x + \alpha^{p+i}y + (\alpha^{p+s+a_k} + \alpha^{p+s+a_k+k})z &= 0\end{aligned}$$

Aquí el coeficiente de z es ahora α^{p+s} , entonces una de estas rectas está en el pétalo \mathcal{P}_{i+p} si existen m y n tales que:

$$\alpha^m + \alpha^n = \alpha^{p+s} \text{ y } m + n \equiv p + 2s + 2a_k + k \pmod{q-1}$$

Observemos que m y n son de la forma:

$$\begin{aligned}m &\equiv p + s + a_r \pmod{q-1} \\ n &\equiv p + s + a_r + r \pmod{q-1}\end{aligned}$$

Para alguna $r \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$

Es fácil ver que $r \neq k$ pues:

$$m + n \equiv 2s + 2p + 2a_r + r \not\equiv 2s + p + 2a_k + k$$

Substituyendo, una recta de salto k en \mathcal{P}_i es de salto r en \mathcal{P}_{i+p} si:

$$2s + 2p + 2a_r + r \equiv 2s + p + 2a_k + k \pmod{q-1}$$

Es decir si:

$$p \equiv 2(a_k - a_r) + (k - r) \pmod{q-1}.$$

Por comodidad escribimos: $\langle k, r \rangle = 2(a_k - a_r) + (k - r)$

Resumiendo tenemos el siguiente lema:

LEMA 2.3: Las rectas de salto k en \mathcal{P}_i son de salto r en \mathcal{P}_{i+p} donde $p = \langle k, r \rangle$. Para $i, p \in \{0, 1, \dots, q-2\}$ y $k, r \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$.

Nótese que de aquí podemos concluir inmediatamente que una recta l de salto k en \mathcal{P}_i no es de salto k en \mathcal{P}_j para $i \neq j$ ya que si l es de salto k en \mathcal{P}_j entonces $j = i + \langle k, k \rangle$ y como $\langle k, k \rangle = 0$ tenemos que $i = j$.

Para demostrar i y ii necesitamos primero probar que $\langle k, r \rangle \neq \langle k, s \rangle$ para $r \neq s$ donde $k, r, s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$.

Supongamos que:

$\langle k, r \rangle \neq \langle k, s \rangle$ es decir:

$$2(a_k - a_r) + (k - r) = 2(a_k - a_s) + (k - s)$$

$$-2a_r - r = -2a_s - s$$

$$2a_r + r = 2a_s + s$$

$$\alpha^{2a_r+r} = \alpha^{2a_s+s}$$

Pero esto implica que $a_r = a_s$ puesto que si:

$$1 = \alpha^{a_r} + \alpha^{a_r+r} \text{ entonces:}$$

$$\alpha^{a_r} = \alpha^{2a_r} + \alpha^{2a_r+r} \text{ por lo tanto:}$$

$$\alpha^{2a_r+r} = \alpha^{a_r} + \alpha^{2a_r}, \text{ igualmente:}$$

$$\alpha^{2a_s+s} = \alpha^{a_s} + \alpha^{2a_s}$$

Entonces si: $\alpha^{2a_r+r} = \alpha^{2a_s+s}$ tenemos que:

$$\alpha^{a_r} + \alpha^{2a_r} = \alpha^{a_s} + \alpha^{2a_s}$$

$$\alpha^{a_r}(1 + \alpha^2) = \alpha^{a_s}(1 + \alpha^2)$$

$$\alpha^{a_r} = \alpha^{a_s}, \text{ de ahí:}$$

$$a_r = a_s, \text{ es decir:}$$

$$r = s$$

Lo que contradice nuestra hipótesis de que $r \neq s$ ■

Tomemos ahora cualquier recta l de salto k en \mathcal{P}_i , sabemos que entonces l pasa por $\mathcal{P}_{i+\langle k,r \rangle}$ y ahí es de salto r , lo cual implica que l interseca a los $\frac{q-2}{2}$ pétalos distintos:

$\mathcal{P}_{i+\langle k,r \rangle} \cdot r \in \left\{1, \dots, \frac{q-2}{2}\right\}$ ya que si $r, s \in \left\{1, \dots, \frac{q-2}{2}\right\}$ $r \neq s$ entonces $\langle k, r \rangle \neq \langle k, s \rangle$.

Sabemos también que l interseca exactamente a $\frac{q-2}{2}$ pétalos, estos son precisamente los anteriores cuyos índices dependen ahora exclusivamente de los índices i y k . Por lo tanto dos rectas con el mismo salto en \mathcal{P}_i tienen el mismo soporte y en cada uno de los pétalos a los que intersecan ambas dan el mismo salto, de lo que se sigue inmediatamente i y ii.

Resumiendo tenemos que, si l es una recta en $PG(2, q)$ y l dá el salto k en \mathcal{P}_i entonces:

$$S(l) = \left\{ \mathcal{P}_{i+\langle k,r \rangle} \text{ tal que } r \in \left\{1, \dots, \frac{q-2}{2}\right\} \right\}.$$

Sea $k \in \left\{1, \dots, \frac{q-2}{2}\right\}$ fijo, entonces:

DEFINICION 2.4: Un k -pétalo de rectas es el conjunto de rectas en $PG(2, q)$ que en \mathcal{P}_i para $i \in \{0, \dots, q-2\}$, dan el salto k .

Así tenemos las siguientes dos afirmaciones:

i) Los r -pétalos de rectas dan lugar a una descomposición de las $q^2 - 2q + 1$ rectas del tipo III en $q-1$ conjuntos donde cada uno tiene $q-1$ rectas.

Esto es cierto ya que para $k \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ fija, cada conjunto S_i^k , con $i \in \{0, \dots, q-2\}$, es por definición un k -pétalo de rectas y como sabemos que $|S_i^k| = q-1$ para cualquier $i \in \{0, \dots, q-2\}$, entonces cualquier k -pétalo de rectas tiene automáticamente $q-1$ rectas, además, como observamos a continuación de enunciar el lema 2.1, una recta de salto k en \mathcal{P}_i no es de salto k en \mathcal{P}_j para $i \neq j$ entonces $S_i^k \cap S_j^k = \emptyset$, es decir dos k -pétalos de rectas cualesquiera no se intersectan.

ii) La descomposición de las rectas del tipo III es independiente de la elección del salto.

Esto es evidente ya que cualquier k -pétalo de rectas es un r -pétalo de rectas, ya que por el lema 2.1 tenemos que $S_i^k = S_{i+(k,r)}^r$.

Por lo tanto existe una descomposición de las $q^2 - 2q + 1$ rectas del tipo III en $q-1$ conjuntos cada uno con $q-1$ rectas.

A estos conjuntos los llamaremos simplemente **pétalos de rectas** y los denotaremos \mathcal{P}^*

A continuación demostraremos que:

El centro, los tallos y los pétalos de rectas corresponden a las $q+2$ clases de equivalencia inducidas por la definición 2.1

Sabemos que si dos rectas pertenecen al centro, a los tallos o están ambas en el mismo pétalo de rectas entonces intersectan a los mismos pétalos, por lo tanto están en la misma clase de equivalencia. Tendríamos entonces que demostrar el inverso, es decir que si dos rectas son equivalentes pertenecen o bien al centro a los tallos ó están en el mismo pétalo de rectas. Sabemos que si son equivalentes entonces intersectan a los mismos pétalos, por lo tanto si son del tipo I ó II no tenemos nada que probar, nos quedaría demostrar que si son del tipo III ambas dan el mismo salto en cada uno de los pétalos que comparten:

Supongamos $l, l' \in PG(2, q)$ y $l \sim l'$, sea \mathcal{P}_i para alguna $i \in \{0, \dots, q-2\}$ tal que $l, l' \in \mathcal{P}_i$, probaremos que si $l \in S_i^k$ y $l' \in S_i^r$ para $k, r \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ entonces $r = k$.

Como $l \in S_i^k$ entonces $Pet_l = \{\mathcal{P}_{i+(k,s)}\}$ tal que $s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ y como $l' \in S_i^r = S_{i+(r,k)}^k$

entonces $Pet_{l'} = \{ \mathcal{P}_{i+(r,k)+(k,s)} \text{ tal que } s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\} \}$.

Entonces para $s \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ fija, l dá el salto s en $\mathcal{P}_{i+(k,s)}$ mientras l' dá el salto s en $\mathcal{P}_{i+(r,k)+(k,s)}$, es decir:

Si l dá el salto s en \mathcal{P}_j para alguna $j \in \{0, \dots, q-2\}$ entonces l' dá el salto s en $\mathcal{P}_{j+(r,k)}$.

Sabemos, por hipótesis que $Pet_l = Pet_{l'}$ y $\mathcal{P}_i \in Pet_l$ entonces:

$$\mathcal{P}_{i+(r,k)} \in Pet_{l'} = Pet_l$$

Así, siguiendo un proceso sucesivo, afirmamos que:

$$\mathcal{P}_{i+m(r,k)} \in Pet_l \text{ para } m \in \{0, \dots, q-2\}$$

Y como $|Pet_l| = \frac{q-2}{2}$ existen m_1 y $m_2 \in \{0, \dots, q-2\}$ con $m_1 \neq m_2$ tal que $\mathcal{P}_{i+m_1(r,k)} = \mathcal{P}_{i+m_2(r,k)}$ por lo tanto:

$$i + m_1 \langle r, k \rangle = i + m_2 \langle r, k \rangle \text{ por lo que:}$$

$$m_1 \langle r, k \rangle = m_2 \langle r, k \rangle \text{ entonces concluimos que:}$$

$$\langle r, k \rangle = 0 \text{ y de ahí:}$$

$$r = k$$

Con lo anterior queda demostrado el teorema de la margarita de rectas.

Entonces, si \mathcal{P}^* es un pétalo de rectas denotaremos $S(\mathcal{P}^*)$ como el conjunto de pétalos que intersectan las rectas que están en el pétalo de rectas \mathcal{P}^* .

Para completar la demostración del teorema de la margarita de rectas es necesario probar que, cualquier pétalo de rectas unión el centro de rectas es un óvalo de rectas.

Recordemos que una recta del tipo III tiene un punto en cada tallo y sus $q-2$ puntos restantes en $\frac{q-2}{2}$ pétalos diferentes (dos en cada pétalo).

A continuación probaremos que dos rectas de un mismo pétalo de rectas se intersectan en un punto que no pertenece al tallo.

PROPOSICION 2.5: La intersección de cualesquiera dos rectas que están en el mismo pétalo de rectas está en alguno de los $\frac{q-2}{2}$ pétalos que comparten.

Demostración:

Sea l una recta en algún pétalo de rectas \mathcal{P}^* , entonces por comodidad hablaremos de este pétalo de rectas como un k -pétalo de rectas, es decir sin pérdida de generalidad, $l \in S_i^k$ para alguna $i \in \{0, \dots, q-2\}$. Entonces l intersecciona, en cada uno de los $\frac{q-2}{2}$ pétalos por los que pasa, a dos rectas de \mathcal{P}^* (ya que las rectas de salto k en los pétalos son un ciclo). Estas $q-2$ rectas son todas distintas, ya que si l se interseccionara con la recta l' en dos pétalos diferentes la intersección de l y l' serían dos puntos, lo cual no es posible. Por lo tanto, l se intersecciona con cada una de las $q-2$ rectas de \mathcal{P}^* distintas de ella misma, en alguno de los pétalos que comparten. ■

TEOREMA 2.6: Sea \mathcal{P}^* cualquier pétalo de rectas, entonces $\mathcal{O}^* = \mathcal{P}^* \cup \mathcal{C}^*$ es un óvalo de rectas.

Demostración: Observemos que $|\mathcal{O}^*| = q+2$ ya que $|\mathcal{P}^*| = q-1$ y $|\mathcal{C}^*| = 3$.

Sea $p \in l$ y $l \in \mathcal{O}^*$

Como la Margarita de Puntos particiona a los puntos de $PG(2, q)$ en tres conjuntos, analizaremos tres casos:

Caso 1) $p \in \mathcal{C}$. Entonces $l \in \mathcal{C}^*$ ya que las rectas de \mathcal{P}^* no tocan puntos del centro. Además por p pasan exactamente dos rectas de \mathcal{C}^* , lo cual implica que por p pasan exactamente dos rectas de \mathcal{O}^* .

Caso 2) Si $p \in \mathcal{P}_i$ para alguna $i \in \{0, \dots, q-2\}$. Entonces $l \in \mathcal{P}^*$, ya que las rectas de \mathcal{C}^* no tocan a los puntos de los pétalos. Como \mathcal{P}^* es un r -pétalo, $\mathcal{P}^* = S_i^r$ para alguna $r \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$ y por lo tanto por p pasan exactamente dos rectas de salto r en \mathcal{P}_i , es decir, por p pasan exactamente dos rectas de \mathcal{P}^* , con lo que concluimos que pasan exactamente dos rectas de \mathcal{O}^* .

Caso 3) Si p está en el tallo. Afirmamos que en este caso, p es la intersección de una recta de \mathcal{C}^* con una recta de \mathcal{P}^* .

Observemos que si p está en el tallo, p está en una sola recta de \mathcal{C}^* . Además p no puede estar en dos rectas de \mathcal{P}^* por la proposición 2.5, entonces nos falta demostrar que hay una recta

de \mathcal{P}^* que pasa por p .

Sabemos que \mathcal{P}^* tiene $q - 1$ rectas y cada una de estas tiene tres puntos del tallo, entonces las rectas de \mathcal{P}^* tocan $3(q - 1)$ puntos del tallo, pero los puntos del tallo son exactamente $3(q - 1)$, de ahí por cada punto del tallo pasa una recta de \mathcal{P}^* .

Por lo tanto, por p pasan exactamente dos rectas de \mathcal{O}^* . ■

Con el teorema anterior completamos la demostración del teorema de la margarita de rectas.

CAPITULO 3

LAS MARGARITAS Y EL ESPACIO PROYECTIVO

En este capítulo relacionaremos a la margarita de rectas, que construimos a partir del plano proyectivo algebraico de orden q para $q = 2^{n+1}$ con los espacios proyectivos de dimensión n sobre Z_2 .

En concreto, probaremos que la estructura en la que las rectas del tipo III intersectan a los pétalos de puntos en nuestra margarita, es precisamente la forma en la que se distribuyen los puntos del espacio proyectivo en sus diferentes hiperplanos.

Tomemos el conjunto de los $q - 1$ pétalos de puntos y a partir de él contruyamos los $q - 1$ conjuntos de cardinalidad $\frac{q}{2} - 1$, inducidos por el soporte de los pétalos de rectas, entonces, afirmamos que:

TEOREMA 3.1: Existe un isomorfismo entre el conjunto de pétalos de la margarita de puntos de un $PG(2, q)$, para $q = 2^{n+1}$, y el espacio proyectivo de dimensión n sobre Z_2 , donde los hiperplanos del espacio proyectivo corresponden a los soportes de los pétalos de rectas.

A continuación daremos una serie de definiciones y resultados necesarios para la demostración del teorema anterior.

3.1 DISEÑOS DE BLOQUES:

DEFINICION 3.2: Un Diseño de Bloques Balanceado (DBB) ó un (v, k, λ) -diseño es una colección de k -subconjuntos (llamados bloques) de un v -conjunto, tal que cada par de elementos de S ocurren juntos en exactamente λ de los bloques.

Por ejemplo, un plano proyectivo Π_q de orden q es un $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ -diseño con $q \geq 2$.

En un (v, k, λ) -diseño con b bloques cada elemento aparece en r bloques, donde:

(i) $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$, y

(ii) $bk = vr$

En caso de ser necesario, para ser mas precisos escribimos el (v, k, λ) -diseño como (v, b, r, k, λ) -diseño.

DEFINICION 3.3: Se dice que dos (v, k, λ) -diseños D_1 y D_2 son isomorfos si existe una función biyectiva del conjunto de los elementos de D_1 al conjunto de los elementos de D_2 tal que los bloques de D_1 son mapeados sobre los bloques de D_2 . Si tal función no existe entonces D_1 no es isomorfo a D_2 y decimos que los diseños son diferentes.

DEFINICION 3.4: La matriz de incidencia de un (v, b, r, k, λ) -diseño es una $b \times v$ matriz $M = (m_{ij})$ en donde $m_{ij} = 1$ si el i -ésimo bloque contiene al j -ésimo elemento y $m_{ij} = 0$ en otro caso.

DEFINICION 3.5: Un (v, b, r, k, λ) -diseño es **simétrico** si el número de elementos coincide con el número de bloques, es decir, si $v = b$

Observemos que si el diseño es simétrico entonces $k = r$

DEFINICION 3.6: Decimos que una $v \times v$ matriz de incidencia $M = (m_{ij})$ de un diseño simétrico es **circulante** si:

$$m_{(i+1)(j+1)} = m_{ij} \text{ con } i, j \in \mathbf{Z}_v$$

Mediante sencillos argumentos obtenidos a partir de la matriz de incidencia de un (v, k, λ) -diseño simétrico es posible deducir el siguiente resultado:

TEOREMA 3.7: Cualquier par de bloques, en un (v, k, λ) -diseño simétrico, se intersecta en exactamente λ elementos.

DEFINICION 3.8: Un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico es un conjunto $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ de k elementos distintos de \mathbb{Z}_v tal que cada elemento distinto de cero puede ser expresado en la forma $d = d_i - d_j$ en precisamente λ formas.

Notemos que para un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico, se tiene que $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$.

Si $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ es un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico entonces, para $a \in \mathbb{Z}_v$, el conjunto $D + a = \{d_1 + a, \dots, d_k + a\}$, llamado la trasladada de D , es también un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico.

TEOREMA 3.9: Si $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ es un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico entonces las trasladadas $D, D + 1, \dots, D + (v - 1)$ son los bloques de un (v, k, λ) -diseño simétrico con matriz de incidencia circulante al que llamaremos $B(D)$.

TEOREMA 3.10: Todo (v, k, λ) -diseño simétrico con matriz de incidencia circulante es isomorfo al (v, k, λ) -diseño simétrico $B(D)$ obtenido a partir de un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico D .

LEMA 3.11: Si $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ es un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico entonces

$-D = \{-d_1, \dots, -d_k\}$ también lo es.

Más aún $B(D)$ es isomorfo a $B(-D)$.

Demostración:

Sea $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ un (v, k, λ) -conjunto diferencia cíclico y sea $-D = \{-d_1, \dots, -d_k\}$, tenemos que demostrar que todo $v \in \mathbb{Z}_v$ puede escribirse como $v = a_i - a_j$ con $a_i, a_j \in -D$ de λ maneras distintas.

Sabemos que si $v \in \mathbb{Z}_v$ puede escribirse como $v = d_i - d_j$ con $d_i, d_j \in D$ de λ maneras distintas, entonces también puede escribirse como $v = -d_i - (-d_j)$ de λ maneras distintas.

Sea $f : D \rightarrow -D$ la función biyectiva definida como $f(d_i) = -d_i$.

Demostraremos que f manda biyectivamente bloques de $B(D)$ en bloques de $B(-D)$.

Sea \mathcal{B} un bloque en $B(D)$ entonces $\mathcal{B} = D + a$ para alguna $a \in \mathbb{Z}_v$, entonces $f(\mathcal{B}) = -D - a = -D + b$, para alguna $b \in \mathbb{Z}_v$ por lo que $f(\mathcal{B})$ es un bloque de $B(-D)$

Supongamos que $f(\mathcal{B}_1) = f(\mathcal{B}_2)$ para \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 bloques de $B(-D)$

Entonces:

$$-D - a = -D - b \text{ para } a, b \in \mathbb{Z}_v$$

Entonces: $D + a = D + b$, y por lo tanto,

$$a = b$$

Sea ahora $-D + a$ un bloque cualquiera en $B(-D)$ con $a \in \mathbb{Z}_v$, entonces existe $b \in \mathbb{Z}_v$ tal que $a = -b$ y por lo tanto: $f(D + b) = -D - b = -D + a$ ■

3.2 ESPACIOS PROYECTIVOS:

Como un ejemplo de un (v, k, λ) -diseño simétrico con matriz de incidencia circulante, construiremos los espacios proyectivos algebraicos de dimensión $m > 2$ sobre un campo de orden q , denotados por $PG(m, q)$.

Tomemos $GF(q)$ el campo de Galois de orden q y consideremos el conjunto S de todas las $(m + 1)$ -adas, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_m)$, donde no toda x_i es cero y $x_i \in GF(q)$.

El conjunto S tiene $q^{m+1} - 1$ elementos. Definimos una relación de equivalencia en S y decimos que \mathbf{x} es equivalente a \mathbf{y} , escribimos $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, si $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ para alguna $\lambda \in GF(q)$ con $\lambda \neq 0$. Observemos que cada clase de equivalencia tiene $q - 1$ elementos, entonces tenemos en total:

$$\frac{q^{m+1}-1}{q-1} = q^m + q^{m-1} + \dots + q + 1$$

clases de equivalencia diferentes. Denotamos por $[\mathbf{x}]$ a la clase de equivalencia que contiene a \mathbf{x} y decimos que estas clases son los puntos de $PG(m, q)$.

Así como las rectas en $PG(2, q)$ fueron definidas con una ecuación lineal, ahora definimos un hiperplano $[\alpha]$ en $PG(m, q)$ como el conjunto de puntos $[\mathbf{x}]$ que satisfacen la ecuación:

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$$

donde $[\alpha] = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ es una $(m + 1)$ -ada, diferente de cero, de elementos en $GF(q)$.

Nótemos que, como en las rectas de $PG(2, q)$ tenemos que $[\lambda x] = [x]$ siempre que $\lambda \neq 0$ para $\lambda \in GF(q)$, así el número de hiperplanos es también $q^m + q^{m-1} + \dots + q + 1$.

No es difícil probar que $PG(m, q)$ es un diseño en donde los bloques son los hiperplanos. El que este diseño de bloques sea circulante se debe al siguiente teorema clásico cuya demostración aparece en [3]:

TEOREMA 3.12 (Singer 1938): El espacio proyectivo de dimensión m sobre un campo de orden q es un $\left(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, \frac{q^m-1}{q-1}, \frac{q^{m-1}-1}{q-1}\right)$ -diseño simétrico con matriz de incidencia circulante

3.3 EL DISEÑO DE BLOQUES DE LA MARGARITA:

A continuación probaremos el teorema enunciado al inicio del capítulo.

Para probar lo anterior construiremos un diseño de bloques en $PG(2, q)$, donde $q = 2^{n+1}$, al que llamaremos el diseño de bloques de la margarita, a partir de los pétalos de rectas que aparecen en nuestra margarita de rectas, cuyos elementos serán los pétalos de puntos y cuyos bloques serán los soportes de los pétalos de rectas. Nuestro objetivo será entonces probar que este diseño es isomorfo al diseño formado por $PG(n, 2)$.

Denotaremos como \mathcal{P}_i^* al pétalo de rectas que contiene a las rectas que dan el salto 1 en el pétalo \mathcal{P}_i . Sea ahora, por la proposición 2.2, $S(\mathcal{P}_i^*)$ el conjunto de pétalos a los que intersecta cualquier recta de \mathcal{P}_i^* . Recordemos que:

$$S(\mathcal{P}_i^*) = \left\{ \mathcal{P}_{i+(1,j)} \mid j \in \left\{ 1, \dots, \frac{q-2}{2} \right\} \right\}$$

Vamos a mostrar en una tabla al diseño de bloques de la margarita, esta tabla tiene $q - 1$ renglones y $\frac{q-2}{2}$ columnas y sus entradas son pétalos.

El i -ésimo renglón contiene los pétalos del soporte del i -ésimo pétalo de rectas y la j -ésima columna consta de todos los j -pétalos de rectas, es decir, el diseño de bloques de la margarita es el siguiente:

	Salto 1	...	Salto j	...	Salto $\frac{q-2}{2}$
$S(\mathcal{P}_0^*)$	\mathcal{P}_0	...	$\mathcal{P}_{0+(1,j)}$...	$\mathcal{P}_{0+(1, \frac{q-2}{2})}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$S(\mathcal{P}_i^*)$	\mathcal{P}_i	...	$\mathcal{P}_{i+(1,j)}$...	$\mathcal{P}_{i+(1, \frac{q-2}{2})}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$S(\mathcal{P}^*)$	\mathcal{P}_{q-2}	...	$\mathcal{P}_{q-2+(1,j)}$...	$\mathcal{P}_{q-2+(1, \frac{q-2}{2})}$

A partir del diseño de bloques de la margarita y de algunos resultados acerca de óvalos tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3.13: El diseño de bloques de la margarita en $PG(2, q)$ es un $(q-1, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{4}-1)$ -diseño simétrico con matriz de incidencia circulante.

Demostración:

Los elementos de nuestro diseño son los $q-1$ pétalos de puntos y los $\frac{q-2}{2}$ bloques son los renglones de el diseño de bloques de la margarita, es decir los soportes de los pétalos de rectas.

Sean \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j dos pétalos cualesquiera, empezaremos probando que \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j aparecen juntos en exactamente $\frac{q}{4}-1$ soportes distintos de los pétalos de rectas, es decir, aparecen juntos en exactamente $\frac{q}{4}-1$ bloques distintos.

Sea $x \in \mathcal{P}_i$. Como el óvalo $\mathcal{O}_j = \mathcal{P}_j \cup \mathcal{C}$ tiene $q+2$ puntos, existen $\frac{q+2}{2}$ rectas por x que intersectan a \mathcal{O}_j , de esas tres pasan por el centro, de manera que por x pasan exactamente $\frac{q+2}{2}-3$ rectas del tipo III que intersectan a \mathcal{P}_j .

Como \mathcal{P}_i tiene $q-1$ puntos y cada recta del tipo III intersecta a \mathcal{P}_i en exactamente dos puntos existen $\frac{(\frac{q+2}{2}-3)(q-1)}{2}$ rectas del tipo III que pasan por \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j .

Sabemos además que cada pétalo de rectas contiene $q-1$ rectas del tipo III, por lo tanto, el número de pétalos de rectas que intersectan a \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j es $\frac{\frac{q+2}{2}-3}{2}$, es decir $\frac{q}{4}-1$.

Así pues \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j están en exactamente $\frac{q}{4}-1$ bloques distintos, lo cual prueba que el diseño de bloques de la margarita en $PG(2, q)$, $q = 2^{n+1}$, es un $(q-1, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{4}-1)$ -diseño simétrico.

Nos falta verificar que la matriz de incidencia es circulante, pero eso se sigue de inmediato del lema 2. como bien puede notarse en la tabla. ■

Demostraremos a continuación el teorema enunciado al inicio del capítulo:

Demostración: La demostración consiste en probar que el diseño de bloques de la margarita en $PG(2, q)$, $q = 2^{n+1}$, es un $(q-1, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{4}-1)$ -diseño de bloques isomorfo al diseño de bloques del espacio proyectivo $PG(n, 2)$.

Llamaremos \mathcal{M} al $(q-1, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{4}-1)$ -diseño del diseño de bloques de la margarita. Notemos que los elementos de \mathcal{M} son los pétalos $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{q-1}\}$. Sea M el diseño de bloques isomorfo a \mathcal{M} cuyos elementos están en \mathbb{Z}_q y el isomorfismo $g : \mathcal{M} \rightarrow M$ está dado por $g(\mathcal{P}_i) = i$ para toda i .

Observemos que entonces cualquier bloque D de M es un conjunto diferencia y $B(D) = M$, que a su vez es isomorfo a \mathcal{M} . Así, por el lema 3.10, $B(-D)$ es un diseño de bloques isomorfo a \mathcal{M} .

Sea ahora \mathcal{N} el diseño de bloques isomorfo a $B(-D)$ en donde los elementos están en $GF(q)$ y el isomorfismo $\sigma : B(-D) \rightarrow \mathcal{N}$ está dado por $\sigma(i) = \alpha^i$, en donde α es un elemento primitivo de $GF(q)$. De nuevo, por construcción, \mathcal{N} es isomorfo al diseño \mathcal{M} del diseño de bloques de la margarita.

Recordemos que el primer bloque de \mathcal{M} está formado por los pétalos:

$$\{P_{1+(1,j)} \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\}.$$

Así pues:

$$\{1 + (1, j) \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\}$$

es el primer bloque de M . Ya que M es circulante tenemos que:

$$\{(1, j) \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\}$$

es también un bloque de M .

Recordemos que:

$$(1, j) = 2(a_1 - a_j) + (1 - j) = 2a_1 + 1 - (2a_j + j).$$

Por lo tanto existe otro bloque de $M = B(D)$ de la forma:

$$\{-(2a_j + j) \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\},$$

por lo que existe un bloque en $B(-D)$ de la forma:

$$\{2a_j + j \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\}.$$

Finalmente, en \mathcal{N} existe un bloque cuyos elementos son:

$$\mathbf{B} = \{\alpha^{2a_j + j} \mid j \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}\},$$

en donde α es un elemento primitivo de $GF(q)$.

A continuación demostraremos un resultado que necesitaremos más adelante y consiste en probar que $\mathbf{B} \cup \{0\}$ es un subgrupo aditivo de $GF(q)$.

Así pues, tenemos que demostrar que si $\alpha^{2a_i + i}$ y $\alpha^{2a_j + j}$ son dos elementos de \mathbf{B} entonces la suma de ellos es también un elemento de la forma $\alpha^{2a_\lambda + \lambda}$ en \mathbf{B} , para alguna $\lambda \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$.

Antes de hacer esto verificaremos que $\alpha^{2a_i + i}$ puede escribirse como: $\frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}}$ para $i \in \{1, \dots, \frac{q-2}{2}\}$, ya que por la proposición 1.1:

$$\alpha^{a_i} + \alpha^{a_i + i} = 1 \text{ entonces:}$$

$$\alpha^{a_i}(1 + \alpha^i) = 1$$

$$\alpha^{a_i} = \frac{1}{1 + \alpha^i}$$

$$\alpha^{2a_i} = \frac{1}{1 + \alpha^{2i}}$$

$$\alpha^{2a_i + i} = \frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}}.$$

Además observemos que: $\frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}} = \frac{\alpha^{-i}}{\alpha^{-2i} + 1}$, si multiplicamos el lado izquierdo de la igualdad arriba y abajo por α^{-2i} .

Hemos probado entonces que:

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}} \text{ tal que } i \in \left\{ 1, \dots, \frac{q-2}{2} \right\} \right\}$$

Recordemos, por otro lado, que si $i \in \{1, \dots, q-1\}$, siempre existe $s \in \{1, \dots, q-1\}$ tal que $\alpha^i + \alpha^s = 1$.

Afirmamos entonces que si i y s satisfacen lo anterior, entonces:

$$\frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}} = \frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}} = \alpha^{-s}(1 + \alpha^{-s}), \text{ ya que:}$$

$$\frac{\alpha^i}{1 + \alpha^{2i}} = \frac{\alpha^i + 1}{1 + \alpha^{2i} + 1} = \frac{\alpha^i + 1}{\alpha^{2i}} = \frac{\frac{1 + \alpha^{-i}}{\alpha^{-i}} + 1}{\frac{1 + \alpha^{-2i}}{\alpha^{-2i}}} = \frac{\alpha^{-2i}(1 + \alpha^{-s})}{\alpha^{-2i}} = \alpha^{-s}(1 + \alpha^{-s})$$

Sean entonces $\frac{\alpha^i}{1+\alpha^{2i}}$ y $\frac{\alpha^j}{1+\alpha^{2j}}$ elementos de \mathbf{B} , entonces existen s y $k \in \{1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tales que: $\alpha^i + \alpha^s = 1$ y $\alpha^j + \alpha^k = 1$, y por lo tanto tales que $\frac{\alpha^i}{1+\alpha^{2i}} = \alpha^{-s}(1 + \alpha^{-s})$ y $\frac{\alpha^j}{1+\alpha^{2j}} = \alpha^{-k}(1 + \alpha^{-k})$, así tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^i}{1+\alpha^{2i}} + \frac{\alpha^j}{1+\alpha^{2j}} &= \\ \alpha^{-s}(1 + \alpha^{-s}) + \alpha^{-k}(1 + \alpha^{-k}) &= \\ \alpha^{-s} + \alpha^{-2s} + \alpha^{-k} + \alpha^{-2k} &= \\ \alpha^{-s} + \alpha^{-k} + \alpha^{-2s} + \alpha^{-2k} &= \\ \alpha^{-s} + \alpha^{-k}(1 + \alpha^{-s} + \alpha^{-k}) & \end{aligned}$$

Además, sabemos que: $\alpha^{-s} + \alpha^{-k} = \alpha^p$ para alguna $p \in \{1, \dots, q-1\}$, y además existe $r \in \{1, \dots, q-1\}$ tal que $\alpha^p + \alpha^r = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^{-s} + \alpha^{-k}(1 + \alpha^{-s} + \alpha^{-k}) &= \\ \alpha^p(1 + \alpha^p) &= \\ \frac{\alpha^r}{1+\alpha^{2r}} \blacksquare & \end{aligned}$$

Con esto hemos probado que $\mathbf{BU}\{0\}$ es un subgrupo aditivo de $GF(q)$.

Siguiremos ahora el espíritu de Singer en la demostración de su teorema [3]:

Sea $f: PG(n, 2) \rightarrow GF^*(q)$ tal que $f[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] = \sum a_i \alpha^i$ para $a_i \in \mathbf{Z}_2$. Claramente f es una correspondencia uno a uno que manda hiperplanos en subconjuntos de elementos de $GF^*(q)$ cuyos exponentes forman un conjunto diferencia, tal y como se demuestra en la prueba del teorema se Singer que aparece en [1].

Sea $PG(n, 2) \cup \{0\} = PG(n, 2) \cup \{[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] \text{ tal que } a_i = 0 \text{ para toda } i\}$

Definimos, obviamente, $f(0) = 0$. Entonces f es nuevamente una correspondencia uno a uno entre $PG(n, 2) \cup \{0\}$ y $GF(q)$

Observemos que $PG(n, 2) \cup \{0\}$ es el espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre \mathbf{Z}_2 y $GF(q)$ es un grupo cerrado bajo la operación de aditividad. Entonces f manda a los subespacios vectoriales de $PG(n, 2) \cup \{0\}$ de dimensión $\frac{n}{2}$ a los subgrupos de $GF(q)$ también de orden $\frac{q}{2}$.

Verificaremos a continuación que si H es un hiperplano de $PG(n, 2)$, entonces $H \cup \{0\}$ es un subespacio de dimensión $\frac{n}{2}$:

Sea $H \cup \{0\} = H \cup \{[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] \text{ tal que } a_i = 0 \text{ para toda } i\}$ para cualquier H hiperplano de $PG(n, 2)$.

Sabemos, por definición, que cualquier hiperplano H consta de los elementos $[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] \in PG(n, 2)$ que satisfacen que $[b_n, b_{n-2}, \dots, b_0][a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] = 0$ para alguna $[b_n, b_{n-2}, \dots, b_0] \in PG(n, 2)$ fija.

Sean entonces $[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0], [c_n, c_{n-1}, \dots, c_0]$ elementos de H , esto implica que:

$$\begin{aligned} [b_n, b_{n-2}, \dots, b_0][a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] &= 0 \text{ y} \\ [b_n, b_{n-2}, \dots, b_0][c_n, c_{n-1}, \dots, c_0] &= 0 \end{aligned}$$

Pero $[b_n, b_{n-2}, \dots, b_0][a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] = b_n a_n + b_{n-1} a_{n-1} + \dots + b_0 a_0$, entonces:

$$\begin{aligned} b_n a_n + b_{n-1} a_{n-1} + \dots + b_0 a_0 &= 0 \text{ y} \\ b_n c_n + b_{n-1} c_{n-1} + \dots + b_0 c_0 &= 0 \text{ por lo tanto:} \\ b_n (a_n + c_n) + b_{n-1} (a_{n-1} + c_{n-1}) + \dots + b_0 (a_0 + c_0) &= 0 \text{ entonces:} \\ [b_n, b_{n-2}, \dots, b_0]([a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] + [c_n, c_{n-1}, \dots, c_0]) &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, $[a_n, a_{n-2}, \dots, a_0] + [c_n, c_{n-1}, \dots, c_0]$ es también un elemento de H .

Ahora sabemos que $H \cup \{0\}$ son los subespacios de $PG(n, 2) \cup \{0\}$ de cardinalidad $\frac{q}{2}$ y la imagen de estos bajo f son los subgrupos aditivos de $GF(q)$.

Como $\mathbf{B} \cup \{0\}$ es un subgrupo aditivo de $GF(q)$ de orden $\frac{q}{2}$, tenemos que \mathbf{B} es la imagen de un hiperplano, además \mathcal{N} que es el $(q-1, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{2}-1)$ -diseño generado a partir de \mathbf{B} , y por lo tanto es isomorfo como diseño a $PG(n, 2)$. ■

CAPITULO 4

EL EJEMPLO EN $PG(2, 2^4)$

En este capítulo daremos un ejemplo concreto, es decir construiremos las margaritas y el diseño de bloques de la margarita de $PG(2, 2^4)$, así como la función f que dá la correspondencia entre $PG(3, 2)$ y el diseño de bloques inducido por la configuración de pétalos de rectas de $PG(2, 2^4)$ y muestra el teorema 3.1.

Construyamos el plano proyectivo algebraico $PG(2, 2^4)$, de orden 16 a partir del Campo de Galois $GF(2^4)$, de 16 elementos. Sea $f(x) = x^4 + x + 1$ el polinomio irreducible de grado cuatro en Z_2 y sea α una raíz de $f(x)$. Es fácil verificar que $f(x)$ es un polinomio primitivo de $GF(2^4)$, es decir, que α es un elemento primitivo ó generador de $GF^*(2^4)$ pues $\alpha^{15} = 1$ y $\alpha^p \neq 1$ para todo $p \in Z_{15} \setminus \{0\}$.

Entonces $GF(2^4) = Z_2[x] / \langle f(x) \rangle$, es decir:

$$GF(2^4) = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \text{ tal que } a_i \in Z_2, i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

Además, como α es generador de $GF^*(2^4)$ entonces los elementos de $GF(2^4)$ son también de la forma:

$$\{0, \alpha^0, \dots, \alpha^{14}\}$$

Para construir tanto la margarita de puntos como su dual, la de rectas, en $PG(2, 2^4)$ es necesario recordar que el número de puntos que contiene una recta y dualmente, el número de rectas que inciden en un punto es 17, así como que el total de puntos y de rectas es 273 y además

que todo óvalo consta de 18 puntos y de nuevo, dualmente, todo óvalo de rectas contiene 18 rectas.

Así, la margarita de puntos, como se muestra en la figura que aparece a continuación, consta de un centro con tres puntos, 15 pétalos, cada uno con 15 puntos y de tres tallos cada uno también con 15 puntos:

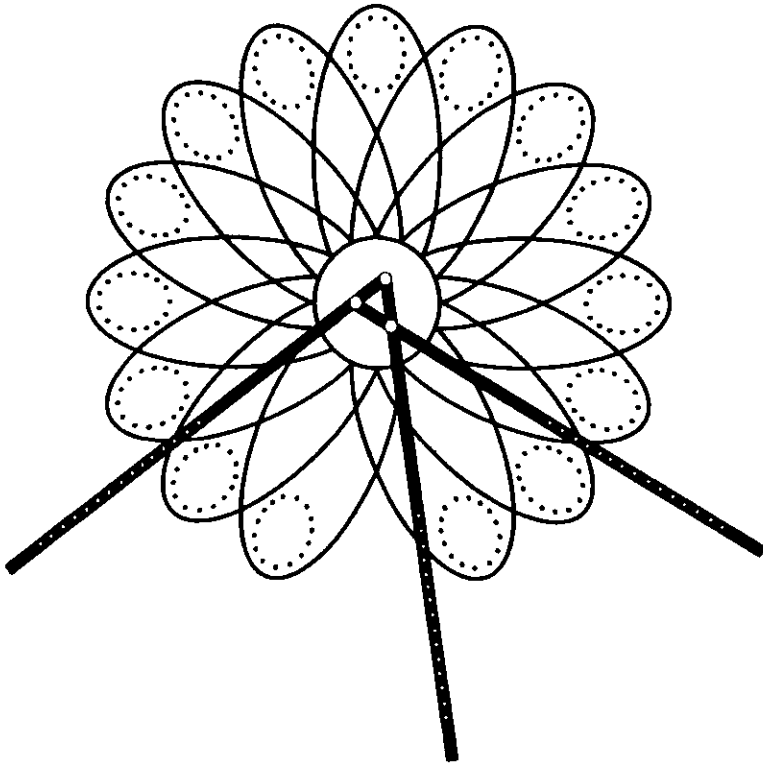


Figura 4-1: La Margarita de Puntos en $PG(2, 2^4)$

De manera dual están distribuidas las rectas de la margarita de rectas. Tenemos 3 rectas del centro de rectas o rectas del tipo I. Hay 45 rectas del tallo de rectas ó rectas del tipo II.

que son las rectas que pasan por un punto del centro, un punto en cada pétalo y un punto del tallo. Recordemos que estas 45 rectas están distribuidas en tres paquetes de 15 rectas cada uno y dos rectas están en el mismo paquete si pasan por el mismo punto del centro; más aún si c es un punto del centro, las rectas del tipo II que pasan por c intersectan a T_c en un punto distinto cada una, donde T_c es precisamente el tallo que no pasa por c .

Finalmente las 225 rectas de los pétalos de rectas están también distribuidas en 15 pétalos de 15 rectas cada uno.

A continuación haremos los cálculos necesarios para construir el diseño de bloques de la margarita, el cual, entre otras cosas, nos permitirá observar claramente cuales son los pétalos del soporte de cada pétalo de rectas. Es mas ilustrativo si mostramos la figura de la margarita de pétalos de rectas después de la tabla del diseño de bloques de la margarita.

Regresando a nuestro campo de Galois escribiremos los elementos de $GF(2^4)$ de las dos maneras expuestas en el capítulo 1, basandonos en el polinomio irreducible $f(x) = x^4 + x + 1$.

$$0 = 0,$$

$$1 = 1,$$

$$\alpha = \alpha,$$

$$\alpha^2 = \alpha^2,$$

$$\alpha^3 = \alpha^3,$$

$$\alpha^4 = \alpha + 1,$$

$$\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha,$$

$$\alpha^6 = \alpha^3 + \alpha^2,$$

$$\alpha^7 = \alpha^3 + \alpha + 1,$$

$$\alpha^8 = \alpha^2 + 1,$$

$$\alpha^9 = \alpha^3 + \alpha,$$

$$\alpha^{10} = \alpha^2 + \alpha + 1,$$

$$\alpha^{11} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,$$

$$\alpha^{12} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1,$$

$$\alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,$$

$$\alpha^{14} = \alpha^3 + 1.$$

Así, en la proposición 1.1, las siete descomposiciones de la unidad son:

$$1 = \alpha + \alpha^4,$$

$$1 = \alpha^2 + \alpha^8,$$

$$1 = \alpha^3 + \alpha^{14},$$

$$1 = \alpha^5 + \alpha^{10},$$

$$1 = \alpha^6 + \alpha^{13},$$

$$1 = \alpha^7 + \alpha^9,$$

$$1 = \alpha^{11} + \alpha^{12}.$$

Lo cual quiere decir que de acuerdo a nuestra notación (ver cap 1, prop 1.1, pp 4) que:

$$a_1 = 11,$$

$$a_2 = 7,$$

$$a_3 = 1,$$

$$a_4 = 14,$$

$$a_5 = 5,$$

$$a_6 = 2,$$

$$a_7 = 6.$$

A continuación escribiremos $\langle 1, j \rangle = 2(a_1 - a_j) + (1 - j)$ para $j \in \{1, \dots, 7\}$. Esto nos permitirá escribir la para poder escribir la configuración de pétalos de rectas:

$$\langle 1, 1 \rangle = 0,$$

$$\langle 1, 2 \rangle = 7,$$

$$\langle 1, 3 \rangle = 3,$$

$$\langle 1, 4 \rangle = 6,$$

$$\langle 1, 5 \rangle = 8,$$

$$\langle 1, 6 \rangle = 13,$$

$$\langle 1, 7 \rangle = 4.$$

Por lo tanto en el **Diseño de bloques de la Margarita** el i -ésimo renglón tiene la siguiente forma:

Renglón	Salto 1	Salto 2	Salto 3	Salto 4	Salto 5	Salto 6	Salto 7
i	P_i	P_{i+7}	P_{i+3}	P_{i+6}	P_{i+8}	P_{i+13}	P_{i+4}

Entonces el **Diseño de bloques de la Margarita** es el siguiente:

Renglón	Salto 1	Salto 2	Salto 3	Salto 4	Salto 5	Salto 6	Salto 7
0	P_0	P_7	P_3	P_6	P_8	P_{13}	P_4
1	P_1	P_8	P_4	P_7	P_9	P_{14}	P_5
2	P_2	P_9	P_5	P_8	P_{10}	P_0	P_6
3	P_3	P_{10}	P_6	P_9	P_{11}	P_1	P_7
4	P_4	P_{11}	P_7	P_{10}	P_{12}	P_2	P_8
5	P_5	P_{12}	P_8	P_{11}	P_{13}	P_3	P_9
6	P_6	P_{13}	P_9	P_{12}	P_{14}	P_4	P_{10}
7	P_7	P_{14}	P_{10}	P_{13}	P_0	P_5	P_{11}
8	P_8	P_0	P_{11}	P_{14}	P_1	P_6	P_{12}
9	P_9	P_1	P_{12}	P_0	P_2	P_7	P_{13}
10	P_{10}	P_2	P_{13}	P_1	P_3	P_8	P_{14}
11	P_{11}	P_3	P_{14}	P_2	P_4	P_9	P_0
12	P_{12}	P_4	P_0	P_3	P_5	P_{10}	P_1
13	P_{13}	P_5	P_1	P_4	P_6	P_{11}	P_2
14	P_{14}	P_6	P_2	P_5	P_7	P_{12}	P_3

En seguida mostraremos la figura de la margarita de rectas en la cual dibujaremos una recta de cada tipo. Observemos que la recta del tipo III pertenece al pétalo de rectas que determina el primer renglón dibujando de manera continua los pétalos a los que intersecta y de manera punteada los pétalos por los que no pasa:

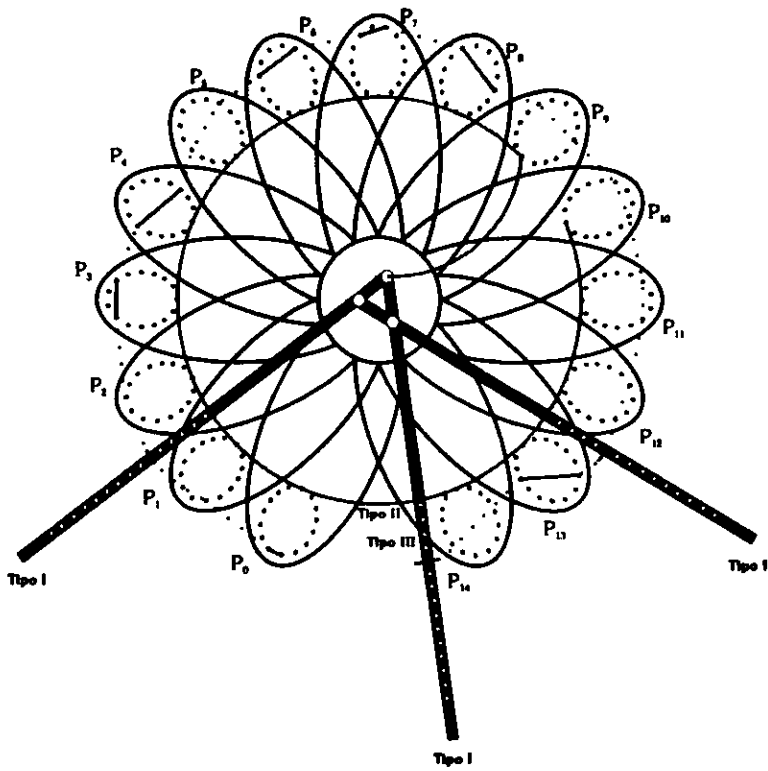


Figura 4-2: La Margarita de Rectas en $PG(2, 2^4)$

Por otro lado, $f : PG(3, 2) \cup \{0\} \rightarrow GF(2^4)$ está definida de la siguiente manera (ver demostración del teorema 3.1, cap 3):

$$f(0) = 0,$$

$$f[0, 0, 0, 1] = \alpha^0 = 1,$$

$$f[0, 0, 1, 0] = \alpha^1 = \alpha,$$

$$f[0, 1, 0, 0] = \alpha^2,$$

$$f[1, 0, 0, 0] = \alpha^3,$$

$$f[0, 0, 1, 1] = \alpha + 1 = \alpha^4,$$

$$f[0, 1, 0, 1] = \alpha^2 + 1 = \alpha^8,$$

$$\begin{aligned}
f\{1, 0, 0, 1\} &= \alpha^3 + 1 = \alpha^{14}, \\
f\{0, 1, 1, 0\} &= \alpha^2 + \alpha = \alpha^5, \\
f\{1, 0, 1, 0\} &= \alpha^3 + \alpha = \alpha^9, \\
f\{1, 1, 0, 0\} &= \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^6, \\
f\{0, 1, 1, 1\} &= \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^{10}, \\
f\{1, 0, 1, 1\} &= \alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^7, \\
f\{1, 1, 0, 1\} &= \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^{13}, \\
f\{1, 1, 1, 0\} &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^{11}, \\
f\{1, 1, 1, 1\} &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^{12}.
\end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a nuestra notación en la demostración del teorema 3.1, el diseño de bloques \mathcal{N} es el siguiente:

α^0	α^8	α^{12}	α^9	α^7	α^2	α^{11}
α^{14}	α^7	α^{11}	α^8	α^6	α^1	α^{10}
α^{13}	α^6	α^{10}	α^7	α^5	α^0	α^9
α^{12}	α^5	α^9	α^6	α^4	α^{14}	α^8
α^{11}	α^4	α^8	α^5	α^3	α^{13}	α^7
α^{10}	α^3	α^7	α^4	α^2	α^{12}	α^6
α^9	α^2	α^6	α^3	α^1	α^{11}	α^5
α^8	α^1	α^5	α^2	α^0	α^{10}	α^4
α^7	α^0	α^4	α^1	α^{14}	α^9	α^3
α^6	α^{14}	α^3	α^0	α^{13}	α^8	α^2
α^5	α^{13}	α^2	α^{14}	α^{12}	α^7	α^1
α^4	α^{12}	α^1	α^{13}	α^{11}	α^6	α^0
α^3	α^{11}	α^0	α^{12}	α^{10}	α^5	α^{14}
α^2	α^{10}	α^{14}	α^{11}	α^9	α^4	α^{13}
α^1	α^9	α^{13}	α^{10}	α^8	α^3	α^{12}

Así, el renglon B que aparece en el teorema es el marcado en la tabla, ya que es de la forma:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha + \alpha^{14}}, \frac{1}{\alpha^2 + \alpha^{13}}, \frac{1}{\alpha^3 + \alpha^{12}}, \frac{1}{\alpha^4 + \alpha^{11}}, \frac{1}{\alpha^5 + \alpha^{10}}, \frac{1}{\alpha^6 + \alpha^9}, \frac{1}{\alpha^7 + \alpha^8} \right\} = \left\{ \frac{1}{\alpha^7}, \frac{1}{\alpha^{14}}, \frac{1}{\alpha^{10}}, \frac{1}{\alpha^{13}}, \frac{1}{\alpha^0}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\alpha^{11}} \right\} =$$

CAPITULO 5

UNA CONSECUENCIA DE LAS MARGARITAS

En este capítulo como en los posteriores retomaremos la idea original de nuestro trabajo doctoral. Haciendo un poco de historia, nuestra primera pregunta se ubicó dentro de la Teoría de las Gráficas y estaba relacionada concretamente con el problema de las coloraciones.

La investigación acerca de las coloraciones en hipergráficas, ha sido ampliamente estudiada en nuestro país en los últimos años por un grupo de matemáticos encabezado por Víctor Neumann, el cual ha obtenido importantes resultados, algunos de los cuales aparecen en los artículos siguientes [14], [15] y [19].

En particular han surgido interesantes preguntas formuladas por Jorge Arocha para coloraciones en \mathbb{R}^2 [1]. En este trabajo se piensa a \mathbb{R}^2 como los vértices de diferentes hipergráficas. Es decir, el conjunto de vértices es el conjunto de puntos del plano y las aristas varían según el caso, pueden ser los triángulos, los triángulos equiláteros, los triángulos isosceles, etc.

En trabajos como el anterior se trató la teoría de la tensión en hipergráficas introducida por Bracho, Arocha y Neumann en [4], para más información sobre tensión ver [1], [4], [5] y [6].

Así mismo, J. Arocha se pregunta sobre el concepto de tensión en un plano proyectivo finito. Sobre este tema trabajaremos en el último capítulo de esta tesis. Al resolver la tensión en los planos proyectivos finitos abordamos también el problema de calcular el número heterocromático de los mismos, pensando en ellos como hipergráficas cuyos vértices son los puntos y cuyas aristas

son las líneas.

A pesar de que encontrar el número heterocromático de los planos proyectivos finitos resultó un problema muy difícil, fuimos capaces en esta tesis de encontrar cotas superiores e inferiores para el mismo.

Utilizando técnicas de conjuntos bloqueadores y de subplanos de Baer (ver [8], [9] y [10]) obtuvimos como cota superior $q^2 - \sqrt{q} - 1$ para cualquier plano proyectivo finito de orden q .

Por otro lado, usando técnicas en las que aparecen los planos afines es posible afirmar que la cota inferior para cualquier plano proyectivo de orden q es $q^2 - 2q + 4$.

La noción de margarita de puntos y rectas en los planos proyectivos nos permite mejorar la cota inferior anterior para el caso en el que el plano proyectivo es algebraico y q es una potencia de 2; en estos casos la cota es $q^2 - 2q + 5$.

Como se verá en el siguiente capítulo esta cota es exacta para el caso de $PG(2, 4)$, lo que nos permite, entre otras intuiciones, aventurar la siguiente conjetura:

Si $q = 2^{n+1}$, donde $n \geq 1$, entonces el número heterocromático de $PG(2, q)$ es $q^2 - 2q + 5$.

Empezamos el capítulo recordando los conceptos de hipergráfica y número heterocromático y a continuación mostraremos como se aplican la margarita y el diseño de bloques de la margarita en la obtención de la cota inferior para el número heterocromático.

DEFINICION 5.1: Una k -gráfica $H = (V; E)$ es una hipergráfica que consta de un conjunto de vértices V y de un conjunto de aristas E , donde cada $e \in E$, consta de k vértices.

DEFINICION 5.2: Una k -gráfica $H = (V; E)$ es h -heterocromática si para cada función sobreyectiva $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, h\}$ existe una arista $e \in E$ heterocromática.

DEFINICION 5.3: El número heterocromático de una k -gráfica $H = (V; E)$ es el mínimo natural h tal que H es h -heterocromática. A este número lo denotamos por $h_c(H)$.

A continuación pensamos en $PG(2, q)$ como una $(q + 1)$ -gráfica cuyos conjuntos de vértices y de aristas son los puntos y las líneas de $PG(2, q)$ respectivamente. Entonces afirmamos que:

TEOREMA 5.4: Si $q = 2^{n+1}$, donde $n \geq 1$, entonces $h_c(PG(2, q)) \geq q^2 - 2q + 5$.

Para probar este teorema es necesario familiarizarnos con algunos resultados conocidos en espacios proyectivos y demostrar a partir de ellos algunos resultados relacionados con la estructura de la margarita y el diseño de bloques de la margarita.

Sea $PG(m, q)$ el Espacio Proyectivo de dimensión m sobre el Campo de Galois de orden q . Sabemos que los hiperplanos de $PG(m, q)$ son los subespacios proyectivos de dimensión $m - 1$ sobre el Campo de Galois de orden q , es decir un hiperplano de $PG(m, q)$ es un $PG(m - 1, q)$.

Un k -plano está definido como un subespacio determinado por $m - k$ relaciones linealmente independientes. Una línea es un 1-plano y es la intersección de $(m - 1)$ hiperplanos.

LEMA 5.5: Un k -plano en $PG(m, q)$ tiene $\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ puntos.

LEMA 5.6: El número de k -planos en $PG(m, q)$ es:

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{m+1}-1)(q^m-1)\dots(q^{m-k+1}-1)}{(q^{k+1}-1)(q^k-1)\dots(q-1)}$$

LEMA 5.7: Si $t \geq u$, entonces el número de t -planos en $PG(m, q)$ que contienen a un u -plano dado es $\begin{bmatrix} m-u \\ t-u \end{bmatrix}_q$.

Para la demostración de los lemas anteriores ver [3]

LEMA 5.8: Tres puntos en $PG(n, 2)$ aparecen en $2^{n-1} - 1$ hiperplanos si son colineales y en $2^{n-2} - 1$ hiperplanos si no lo son.

Demostración:

Caso 1) Si los puntos son colineales están en un 1-plano, entonces aplicando el lema 5.3, el número de hiperplanos que contienen a este 1-plano es $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_2$, que es igual a:

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}_2 = \frac{(2^{n-1}-1)\dots(2^2-1)}{(2^{n-2}-1)\dots(2-1)} = 2^{n-1} - 1$$

Caso 2) Si los puntos no son colineales, entonces generan un 2-plano, y por lo tanto, aplicando el lema 5.3, el número de hiperplanos que contienen a este 2-plano es $\binom{n-2}{(n-1)-2}_2$, que es igual a:

$$\binom{n-2}{n-3}_2 = \frac{(2^{n-2}-1)\dots(2^2-1)}{(2^{n-3}-1)\dots(2-1)} = 2^{n-2} - 1 \blacksquare$$

LEMA 5.9: Cualesquiera tres pétalos de puntos en \mathcal{M} están exactamente en $\frac{q}{4} - 1$ ó en $\frac{q}{8} - 1$ bloques de \mathcal{M} .

Demostración:

Recordemos que, por el teorema 3.1, existe un isomorfismo h de diseños de bloques entre $PG(n, 2)$ y \mathcal{M} .

Caso 1) Si los tres pétalos son la imagen bajo h de tres elementos de $PG(n, 2)$ colineales, entonces, por el lema anterior, aparecen los tres juntos en exactamente $2^{n-1} - 1$ bloques de \mathcal{M} . Es decir, de acuerdo a nuestra notación inicial, si $q = 2^{n+1}$, aparecen los tres juntos en exactamente $\frac{q}{4} - 1$ bloques de \mathcal{M} .

Caso 2) Si los tres pétalos son la imagen bajo h de tres elementos de $PG(n, 2)$ que no son colineales, entonces, también por el lema anterior, aparecen los tres juntos en exactamente $2^{n-2} - 1$ bloques de \mathcal{M} , es decir, en $\frac{q}{8} - 1$ bloques de \mathcal{M} .

TEOREMA 5.10: Existen tres óvalos en $PG(2, q)$, $q = 2^{n+1}$, con la propiedad que cualquier recta de $PG(2, q)$ tiene dos puntos en al menos uno de ellos.

Demostración: Sabemos, por el lema 5.9, que existen tres pétalos en $PG(2, q)$ que aparecen en $\frac{q}{4} - 1$ bloques de \mathcal{M} . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 aparecen en $\frac{q}{4} - 1$ bloques de \mathcal{M} . Como cualquier pareja de pétalos \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j aparecen juntos en $\frac{q}{4} - 1$, entonces no existe ningún renglón que contenga a dos de los tres pétalos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 y no contenga al otro. Sabemos también que cada pétalo aparece en exactamente $\frac{q}{2} - 1$ bloques. Por lo tanto, cada \mathcal{P}_i para $i = 1, 2, 3$, está en $\frac{q}{2} - 1 - (\frac{q}{4} - 1) = \frac{q}{2} - \frac{q}{4} = \frac{q}{4}$ bloques y en dichos bloques no está ninguno de los otros dos pétalos. Por lo tanto los bloques que contienen a los pétalos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 son en total:

$$\frac{q}{2} - 1 + 3\left(\frac{q}{2}\right) = q - 1.$$

Es decir, todos los bloques contienen a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 . Esto significa que cualquier recta del tipo III interseca al menos a uno de los tres pétalos en dos puntos. Cabe señalar que existen rectas que intersecan a los tres pétalos.

Si tomamos ahora los óvalos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ y \mathcal{O}_3 , donde $\mathcal{O}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{C}$, afirmamos que cualquier recta de $PG(2, q)$ tiene dos puntos en al menos uno de ellos. La demostración se completa observando que las rectas del tipo I y II son rectas que intersecan a cualquier óvalo en dos puntos. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 5.4, exhibiendo una $(q^2 - 2q + 4)$ -coloración que no induce aristas heterocromáticas.

Sean $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ y \mathcal{O}_3 tres óvalos que satisfagan el Teorema 5.10 y sea $f : V \rightarrow \{1, \dots, r\}$ una coloración tal que $f(\mathcal{O}_1) = 1$, $f(\mathcal{P}_2) = 2$, $f(\mathcal{P}_3) = 3$ y coloreamos el resto de los vértices de $PG(2, q)$ con colores distintos entre si y distintos a $\{1, 2, 3\}$, entonces:

$$r = 3 + q^2 + q + 1 - (q + 2 + 2(q - 1))$$

$$r = 3 + q^2 + q + 1 - (3q)$$

$$r = q^2 - 2q + 4$$

Esta coloración no induce aristas heterocromáticas ya que por el teorema anterior toda recta tiene al menos dos puntos de color 1, 2 ó 3.

CAPITULO 6

COLOREANDO PROYECTIVOS

En el capítulo anterior definimos la $(q + 1)$ -gráfica $PG(2, q)$, como la hipergráfica $(V; E)$ cuyo conjunto de vértices son los puntos de $PG(2, q)$ y cuyo conjunto de aristas son las rectas del mismo. Así pues $PG(2, 2)$ es una 3-gráfica y $PG(2, 4)$ es una 5-gráfica.

Además, también en el capítulo V, dimos una cota inferior para el número heterocromático. En este capítulo demostraremos que $h_c(PG(2, 2)) = 4$ y que el número heterocromático de $PG(2, 4)$ alcanza la cota inferior obtenida, es decir, que $h_c(PG(2, 4)) = 13$.

A continuación daremos dos definiciones necesarias para la prueba de nuestro primer resultado:

DEFINICION 6.1: Sea X un subconjunto de los puntos de un Plano Proyectivo de orden q , denotado Π_q . Decimos que una recta de Π_q es generada por X si tiene dos o mas puntos en X y denotamos por X_L al conjunto de rectas generadas por X .

DEFINICION 6.2: Un cuadrángulo en Π_q es un conjunto de cuatro puntos en Π_q en posición general, es decir no hay tres de ellos colineales.

Observemos que en $PG(2, 2)$ los cuadrángulos son precisamente los óvalos de puntos, introducidos en el capítulo I.

Con lo anterior podemos demostrar que:

TEOREMA 6.3: El número heterocromático de $PG(2, 2)$ es cuatro.

Demostración:

Primero demostraremos que $h_c(PG(2, 2)) > 3$ exhibiendo una 3-coloración que no induce rectas heterocromáticas.

Sea \mathcal{O} un óvalo del Plano de Fano, $PG(2, 2)$, sabemos que \mathcal{O} tiene cuatro puntos y toda recta que lo intersecta lo hace en exactamente dos puntos, es decir es un cuadrángulo. Como \mathcal{O} genera seis rectas del Plano y el número total de rectas es siete, entonces hay una sola recta del Plano de Fano que no toca al óvalo. Sea l la recta de $PG(2, 2)$ que no toca a \mathcal{O} y sea $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ una coloración de $PG(2, 2)$ tal que todos los puntos de \mathcal{O} bajo f son de color 0, dos puntos de l de color 1 y el otro punto de l de color 2, afirmamos entonces que no hay ninguna recta del Plano de Fano que sea heterocromática, ya que si la recta toca a \mathcal{O} tiene dos puntos de color 0 y si no lo toca es l y entonces tiene dos puntos de color 1. Lo anterior se puede observar en la siguiente figura:

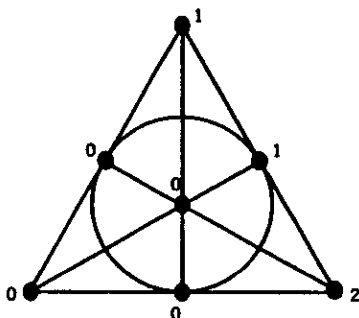


Figura 6-1: Plano de Fano

A continuación demostraremos que cualquier 4-coloración de $PG(2, 2)$ induce al menos una arista heterocromática.

Supongamos que $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ es una 4-coloración de $PG(2, 2)$ sin rectas heterocromáticas y sea $X \subset V$ tal que X contiene cuatro vértices con un punto de cada color.

El conjunto X está en posición general, puesto que no hay tres puntos colineales, y por lo tanto es un óvalo de $PG(2, 2)$. Entonces, de las siete rectas de $PG(2, 2)$ seis tocan a X y lo tocan en exactamente dos puntos, más aun, estas seis rectas se intersectan dos a dos. Por lo tanto hay tres parejas de ellas que se intersectan en tres puntos colineales que no pertenecen a X . Sean l_1 y l_2 dos rectas que tocan a X y que se intersectan en un punto fuera de X . Llamemosle x a dicho punto. Entonces, independientemente del color que tenga x bajo f una de las dos rectas

l_1 y l_2 es heterocromática lo cual es una contradicción. ■

Observemos que en el capítulo anterior demostramos que $h_c(PG(2, q)) \geq q^2 - 2q + 5$, donde $q = 2^{n+1}$ y $n \geq 1$, es decir que este resultado no podía aplicarse al Plano de Fano. La razón de lo anterior es que $PG(2, 2)$ no contiene rectas del tipo III en la margarita de rectas, ya que dichas rectas tocan dos puntos de cada pétalo, sin embargo, en $PG(2, 2)$ los pétalos constan de un solo punto, ya que, los óvalos tienen cuatro puntos de los cuales tres están en el centro y el restante en el pétalo que corresponde a cada óvalo.

A continuación demostraremos que el número heterocromático de $PG(2, 4)$ es trece. Por el capítulo anterior sabemos que $h_c(PG(2, 4)) \geq 13$, entonces basta demostrar que para cualquier 13-coloración de $PG(2, 4)$ siempre existe una arista heterocromática.

La demostración es mucho más compleja y requiere de algunas definiciones y resultados que veremos a continuación:

LEMA 6.4: Sea Π_q cualquier plano proyectivo finito de orden q y sea X un conjunto de puntos de Π_q tal que X genera al menos $q + 3$ rectas, entonces X contiene un cuadrángulo.

Demostración:

Supongamos que X no contiene un cuadrángulo y sean l, m y n tres rectas distintas generadas por X que no se intersectan las tres en un solo punto, esto es posible ya que el conjunto de rectas generadas por X es al menos $q + 3$ y sabemos que por todo punto de Π_q pasan solamente $q + 1$ rectas.

Supongamos que al menos una de las intersecciones de dos de las tres rectas es un punto que no está en X , supongamos, sin pérdida de generalidad, que la intersección de l y m es un punto que no pertenece a X . Como l y m son rectas generadas por X existen dos puntos en cada una de ellas que pertenecen a X , es fácil observar que estos cuatro puntos forman un cuadrángulo, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Supongamos ahora que las tres intersecciones de las tres rectas son puntos de X , si existe $x \in X$ que no está en ninguna de las tres rectas, entonces x y las tres intersecciones de las rectas forman un cuadrángulo, lo que también es una contradicción. Entonces, podemos suponer que cualquier punto de X está en alguna de las tres rectas l, m y n ; observemos que si existen dos puntos p y q en X que estén uno en cada una de las rectas, por ejemplo $p \in l$ y $q \in m$ entonces

se ve claramente, como se muestra en la figura 6-2, que si $a = l \cap n$ y $b = m \cap n$ entonces $\{p, q, a, b\}$ es un cuadrángulo contenido en X , lo cual tampoco es posible .

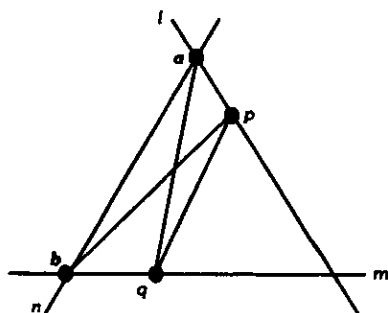


Figura 6-2: Un cuadrángulo

Finalmente, pensemos que alguna de las tres rectas, sin pérdida de generalidad, la recta l , contiene a todos los puntos de X , entonces X genera a lo mas $q + 2$ rectas, como se muestra también en la figura 6-3. Lo anterior es falso, ya que sabemos que X genera al menos $q + 3$ rectas. ■

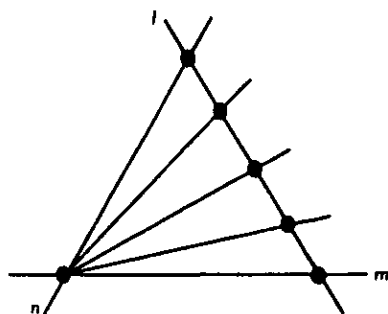


Figura 6-3: $q + 2$ rectas

LEMA 6.5: Sea Π_q un plano proyectivo con $q \geq 4$. Entonces cualquier cuadrángulo está contenido en un conjunto de cinco puntos en posición general.

Demostración:

Sea C un cuadrángulo, entonces C genera seis rectas, es decir $|C_L| = 6$ y en C_L hay tres parejas de rectas que se intersectan dos a dos en puntos fuera del cuadrángulo y el resto de las intersecciones son puntos en C :

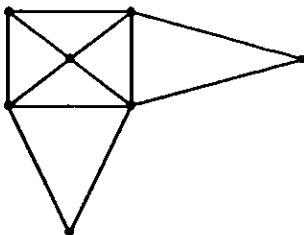


Figura 6-4: Rectas generadas por C

Además, sabemos que toda recta de C tiene $q + 1$ puntos. Sea C_p el conjunto de puntos contenidos en las rectas de C_L , entonces:

$$|C_p| = 4 + 6(q + 1 - 3) + 3 = 6q - 5$$

Pero para $q \geq 4$, tenemos que $6q - 5 < q^2 + q + 1$, entonces existe $x \in \Pi_q$ tal que $x \notin C_p$ y por lo tanto $C \cup \{x\}$ es un conjunto de cinco puntos en posición general. ■

Sea X un conjunto de puntos en un Π_q .

DEFINICION 6.6: Una recta l es llamada una i -secante de X si l y X tienen i puntos en común. En particular vamos a llamar:

- Secante de X a una 2-secante de X ,
- Tangente de X a una 1-secante de X , y
- Recta externa de X a una 0-secante de X

DEFINICION 6.7: Un conjunto X que no tiene i -secantes para $i > k$ es llamado un k -arco.

TEOREMA 6.8: Todo 2-arco de Π_q tiene a lo mas $q + 2$ puntos y es un óvalo cuando contiene exactamente $q + 2$ puntos.

Demostración:

Vamos a mostrar que todo 2-arco de Π_q tiene a lo mas $q + 2$ puntos. Sea X un 2-arco y p un punto de X . Si X tiene m elementos, entonces existen $m - 1$ rectas por p que tocan otros puntos de X ; estas rectas son todas diferentes (ya que, de otra manera tendríamos 3-secantes), entonces p está en exactamente $m - 1$ secantes y, en consecuencia, en $q + 2 - m$ tangentes. Por lo tanto $m \leq q + 2$

Si X es un 2-arco con $m = q + 2$, entonces toda recta de Π_q es una secante o una recta exterior, ya que el número de tangentes de un 2-arco es $m(q + 2 - m) = 0$. Por lo tanto el 2-arco es un óvalo.

DEFINICION 6.9: Un semióvalo en Π_q es un 2-arco con $q + 1$ puntos.

Observemos de la demostración del teorema anterior que un semióvalo tiene $q + 1$ tangentes, una por cada punto.

La demostración del lema que se enuncia a continuación aparece en [20]:

LEMA 6.10: Si X es un semióvalo en un Π_q y q es par entonces las tangentes de X son concurrentes en un punto que será llamado el centro de X .

Es fácil observar que si X es un semióvalo en un Π_q , q es par y m es el centro de X entonces tenemos que $X \cup \{m\}$ es un óvalo de $PG(2, q)$. Como corolario a lo anterior, tenemos que un Π_q , para q par, contiene un óvalo si y sólo si contiene un semióvalo.

Los resultados siguientes aparecen en [20] y relacionan a los óvalos en los planos proyectivos de orden par con diseños de bloques y nos serán de gran utilidad para probar que el número heterocromático de $PG(2, 4)$ es 13.

LEMA 6.11: Sea \mathcal{O} un óvalo en un Π_{2s} , entonces \mathcal{O} induce un $(4s^2 - 1, 2s^2 - s, s, 2s + 1, 1)$ -diseño, donde los elementos del diseño son los puntos de Π_{2s} que no están en \mathcal{O} y los bloques corresponden a las rectas que no tocan al óvalo.

La demostración se sigue fácilmente. Observemos que el diseño indica que cada punto fuera del óvalo (cada elemento del diseño) está en exactamente $2s + 1$ rectas que no tocan al óvalo (bloques del diseño).

Ahora estamos en condiciones de demostrar:

TEOREMA 6.12: Cualquier 13-coloración de los puntos de $PG(2, 4)$ induce al menos una recta heterocromática, es decir $h_c(PG(2, 4)) \geq 13$.

Demostración:

Sea f cualquier 13-coloración de $PG(2, 4)$ y supongamos que f no induce rectas heterocromáticas. Sea X un subconjunto cualquiera de los puntos de $PG(2, 4)$ tal que tenga uno y solo un punto de cada uno de los colores de la coloración f , es decir X tiene cardinalidad 13 y no hay dos puntos en X del mismo color bajo la coloración f .

Sea Y el conjunto de puntos de $PG(2, 4)$ que no son puntos de X . Se sigue inmediatamente que Y tiene 8 elementos. Recordemos que Y_L es el conjunto de rectas generadas por Y y sea Y_T el conjunto de rectas tangentes a Y . Si $l_i \in Y_T$ denotamos por p_i al punto que está en $l_i \cap Y$ y denotamos por $g(p_i, Y_T)$, el grado de p_i en Y_T , como el número de rectas por p_i que estén en Y_T .

Afirmamos que para toda $p \in Y$, $g(p_i, Y_T) \leq 1$, ya que si existe $p \in Y$ tal que $g(p_i, Y_T) \geq 2$, entonces existen l_1 y l_2 en Y_T tal que $l_1 \cap Y = l_2 \cap Y = \{p\}$ y por lo tanto l_1 y l_2 tienen cada una cuatro puntos en X de distinto color. Independientemente del color de p , alguna de las dos rectas es heterocromática, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Ahora, sabemos que $g(p_i, Y_T) \leq 1$ para todo $p \in Y$, entonces el número de rectas en Y_T es a lo mas 8.

Sea $L = Y_L \cup Y_T$. Como $Y_L \cap Y_T = \emptyset$, entonces $|L| = |Y_L| + |Y_T|$. Observemos que si $|L| < 21$, es decir, el número de rectas de $PG(2, 4)$, existe al menos una recta $l \in PG(2, 4)$ que está totalmente contenida en X , es decir es heterocromática, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo anterior, $|L| = 21$, es decir, toda recta de $PG(2, 4)$ tiene al menos un punto en el conjunto Y .

Como $|Y_T| \leq 8$ entonces $|Y_L| \geq 13$, es decir, Y es un conjunto de puntos en $PG(2, 4)$ que genera al menos 13 rectas. Por el Lema 6.4 Y contiene un cuadrángulo C y por el lema 6.5 cualquier cuadrángulo en $PG(2, 4)$ está contenido en un conjunto \mathcal{P} de cinco puntos en posición general, pero \mathcal{P} en $PG(2, 4)$ es un semióvalo y por la observación previa \mathcal{P} está contenido en un óvalo \mathcal{O} de orden seis.

Observemos que como $C \subseteq Y$ el resto de los puntos del óvalo que contiene a C pueden o no estar contenidos en Y , más aún, puede estar uno contenido y el otro no y esto nos da origen a tres casos distintos. Antes de analizarlos, obtendremos algunos resultados previos que nos servirán en cualquiera de los tres casos.

Sabemos, gracias al lema 6.11, que si \mathcal{O} es un óvalo en $PG(2, 4)$ existe un $(15, 6, 2, 5, 1)$ -diseño cuyos elementos son los puntos de $PG(2, 4)$ que no son los puntos del óvalo y cuyos bloques son las rectas de $PG(2, 4)$ que no tocan al óvalo. Además, recordemos que este diseño nos dice que cada punto fuera de \mathcal{O} está en dos rectas que no intersectan a \mathcal{O} y por lo tanto, como por cada punto pasan cinco rectas, cada punto fuera de \mathcal{O} está en tres rectas que intersectan a \mathcal{O} en dos puntos cada una.

Definimos el conjunto Z como los puntos en Y que no están en el óvalo, es decir $Z = Y - \mathcal{O}$. Sabemos que por todo $z \in Z$ pasan exactamente dos rectas fuera del óvalo, de las cuales a lo mas una de ellas está en Y_T . Sea $A \subseteq Z$ el subconjunto de los puntos de Z por los que pasa una recta de Y_T , que es además una recta exterior al óvalo. Definimos $|A| = a$, entonces si llamamos W al número de rectas que pasan por Z y están fuera del óvalo, tenemos que:

$$W \leq \frac{a(1)+2(|Z|-a)}{2} + a,$$

pues las rectas exteriores al óvalo que tocan un punto de Z son a y las rectas exteriores al óvalo que tocan dos o más puntos de Z son a lo mas $\frac{a(1)+2(|Z|-a)}{2}$. Haciendo ciertas operaciones algebraicas obtenemos que:

$$W \leq \frac{a+2|Z|}{2}$$

Como $a \leq |Z|$ entonces de lo anterior se sigue que W es a lo más $\frac{3}{2}|Z|$

Analizamos los tres casos de los que hablamos anteriormente:

Caso 1) El óvalo O está totalmente contenido en Y . Si esto sucede $|Z| = 2$ por lo tanto $W \leq 3$ lo que implica que existe una recta exterior a O totalmente contenida en X , lo cual no es posible ya que, por hipótesis, toda recta de $PG(2, 4)$ toca a Y en al menos un punto.

Caso 2) Que el óvalo O tenga cinco puntos en Y y uno en X . Si lo anterior sucede entonces $|Z| = 3$ y por lo tanto $W \leq \frac{9}{2} < 5$. Esto implica que hay al menos una recta exterior al óvalo totalmente contenida en X , lo que, por hipótesis, tampoco es posible.

Caso 3) Que el óvalo O tenga cuatro puntos en Y y dos puntos en X . Entonces $|Z| = 4$ y obtenemos inmediatamente que $W \leq 6$. Si $W < 6$, nuevamente contradecimos nuestra hipótesis. Supongámos que $W = 6$, como $|Z| = 4$ entonces $a = 4$. Es decir, todo punto en Z tiene una recta en Y_T que está fuera del óvalo y por lo tanto la otra recta por z , fuera del óvalo, toca al menos otro punto de Z .

Observemos que como $a = 4$, y $W = 6$ las rectas por los puntos de Z que no tocan puntos de O son exactamente dos. Como $|Z| = 4$, estos cuatro puntos no pueden ser colineales, entonces las dos rectas fuera del óvalo que tocan a más de un punto de Z tocan cada una exactamente a dos puntos de Z y obviamente el resto de sus puntos está en X . Llamaremos, por comodidad l_1 y l_2 a estas rectas y pensaremos que l_1 pasa por los puntos z_1 y z_2 y la recta l_2 por los puntos z_3 y z_4 .

Además denotaremos por l^i a la recta exterior al óvalo que está en Y_1 y pasa por el punto z_i . Así, estas seis rectas están distribuidas como se ve a continuación:

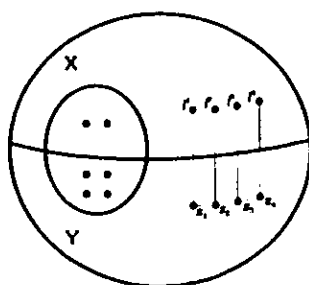


Figura 6-5: Seis rectas fuera de O

Por hipótesis ninguna de estas seis rectas es heterocromática, entonces afirmamos que $f(z_1) = f(z_2)$ y que $f(z_3) = f(z_4)$.

Supongamos que $f(z_1) \neq f(z_2)$, como l^1 y l^2 no son heterocromáticas existen dos puntos en X , a los que llamaremos x_1 y x_2 tales que $f(z_1) = f(x_1)$ y $f(z_2) = f(x_2)$ y además sabemos que l_1 no pasa por ninguno de estos dos puntos ya que dos puntos determinan una única recta. Entonces, los tres puntos en X que pertenecen a l_1 son de colores distintos a $f(z_1)$ y a $f(z_2)$ y por lo tanto l_1 es heterocromática, lo cual contradice nuestra hipótesis original. Observemos que lo mismo sucede si suponemos que $f(z_3) \neq f(z_4)$, por lo tanto es claro que $f(z_1) = f(z_2)$ y $f(z_3) = f(z_4)$.

Sean $c = f(z_1) = f(z_2)$ y $d = f(z_3) = f(z_4)$. Es fácil observar que las rectas l^1 y l^2 se intersectan en un punto en X de color c , ya que si este punto es de color diferente a c las dos rectas son heterocromáticas; ya que, para que una recta de Y_1 no sea heterocromática debe pasar en X por un punto que tenga el mismo color que el punto por el que pasó en Y .

De forma análoga las rectas l^3 y l^4 se intersectan en X en un punto de color d .

Llamaremos u al punto de intersección de l^1 y l^2 y v a la intersección de l^3 y l^4 . Sea T_c el triángulo monocromático formado por los puntos z_1 , z_2 y u y sea T_d el triángulo monocromático formado por los puntos z_3 , z_4 y v . Lo anterior se muestra en la figura 6-6.

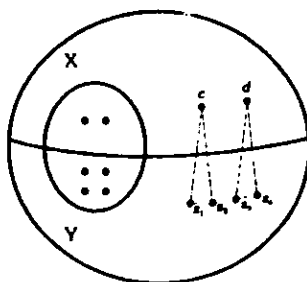


Figura 6-6: Seis rectas fuera de \mathcal{O}

El óvalo \mathcal{O} tiene dos puntos en el conjunto X y además observemos que estos puntos no son ni u ni v . Afirmamos que la recta del óvalo que pasa por los dos puntos que están en X es heterocromática. Si está totalmente contenida en X , la afirmación es inmediata. Si toca puntos

de Y , por definición de óvalo, toca solamente puntos de Z ; más aún, toca a lo más un punto de Z en cada uno de los triángulos T_a y T_b , ya que las rectas que tocan dos puntos de cada triángulo son precisamente las seis rectas exteriores al óvalo que pasan por Z . El resto de sus puntos está en X y por lo tanto todos los puntos de la recta tienen colores distintos, es decir es heterocromática; lo cual nuevamente contradice nuestra hipótesis original. ■

CAPITULO 7

TENSION

En este último capítulo resolvemos el primer problema planteado en el trabajo doctoral.

El problema aborda el concepto de tensión en hipergráficas, concretamente el concepto de tensión en planos proyectivos finitos.

A continuación pensamos en un plano proyectivo de orden q , denotado por Π_q como una 3-gráfica H cuyos vértices son los puntos de Π_q y cuyas aristas son las ternas de puntos en Π_q que no son colineales, es decir los triángulos de puntos que aparecen en el plano proyectivo. A esta hipergráfica la llamaremos la 3-gráfica de triángulos inducida por Π_q .

Damos ahora las definiciones que se relacionan con el concepto de tensión en hipergráficas:

DEFINICION 7.1: Una q -gráfica H es tensa si para cada función sobreyectiva $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ existe una arista $e \in E$ tal que $f|_e$ es inyectiva, es decir, si para cada coloración de los vértices de H existe al menos una arista heterocromática.

DEFINICION 7.2: Una q -gráfica H es s -tensa si para cada función sobreyectiva $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ que es una coloración de los vértices de H existen al menos s aristas heterocromáticas.

A continuación tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 7.3: La 3-gráfica de triángulos H , inducida por Π_q , es tensa.

Sea $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ una 3-coloración de H , y sea T un conjunto de tres vértices de H tal que cada color de f está asociado a un y sólo un vértice de T , observemos que tenemos únicamente los siguientes dos casos:

Caso 1) Que T conste de tres vértices no colineales en cuyo caso automáticamente obtenemos una arista heterocromática.

Caso 2) Que T conste de tres vértices colineales. En este caso, cualquier otro vértice de H tiene asociado uno de los tres colores, tomemos un vértice fijo de H que no este en la recta generada por los vértices de T entonces obtenemos una arista heterocromática que consta del vértice y de los dos vértices de T de colores distintos al del vértice seleccionado. ■

El resultado anterior es parte del teorema más general:

TEOREMA 7.4: La 3-gráfica de triángulos H , inducida por Π_q , es q^2 -tensa.

Demostración:

Sea $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ una 3-coloración de H y sea T un conjunto de tres vértices de H tal que cada color de f está asociado a un y sólo un vértice de T , aquí tenemos también dos casos:

Caso 1) Que T conste de tres vértices colineales. En este caso cualquier otro vértice de H tiene asociado uno de los tres colores, tomemos un vértice fijo de H que no esté en la recta generada por los vértices de T , entonces obtenemos una arista heterocromática que consta de dicho vértice y de los dos vértices de T de colores distintos al del vértice seleccionado. Sabemos que existen q^2 vértices en H que no están en la recta generada por los vértices de T y lo anterior puede hacerse para cada uno de ellos, entonces obtenemos al menos q^2 aristas heterocromáticas.

Caso 2) Que T conste de tres vértices no colineales, en cuyo caso tenemos automáticamente una arista heterocromática. Tomemos un vértice fijo de H . Sea T' el conjunto formado por dicho vértice y los dos vértices de T de colores distintos a él. Si T' es un conjunto de vértices colineales estamos en el caso anterior tomando ahora el conjunto T' en lugar del conjunto T . Si T' consta de tres vértices no colineales obtenemos otra arista heterocromática. Como lo anterior puede hacerse en los $q^2 + q - 2$ vértices de H que no son vértices de T , o bien T' es

una línea en cuyo caso estamos en el caso anterior, o bien obtenemos al menos $q^2 + q - 1$ aristas heterocromáticas, incluyendo a T . ■

Observemos que el resultado anterior es lo mejor posible pues la 3-gráfica de triángulos H , inducida por Π_q , no es $(q^2 + 1)$ -tensa, ya que, existe una 3-coloración que no tiene $q^2 + 1$ aristas heterocromáticas. Dicha coloración consiste en colorear tres vértices colineales con los tres colores y el resto de los vértices de H con uno y solo uno de estos tres colores.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA
BIBLIOGRAFIA

- [1] B. Ábrego, J.L. Arocha, S. Fernández-Merchant, V. Neumann-Lara, "Tightness problems in the plane", *Discrete Mathematics*, No. 194 (1999), 1-11.
- [2] N. Alon, Z. Füredi, "Legitimate coloring of projective planes", *Graphs and Combinatorics*, 5, Springer-Verlag 1989, 95-106.
- [3] I. Anderson. "*Combinatorial Designs: Construction Methods*", Ellis Horwood Limited Publishers. Chichester.
- [4] J.L. Arocha, J. Bracho, V. Neumann-Lara, "On the minimum size of tight hypergraphs". *J. Graph Theory*, 16(4) (1992), 319-326.
- [5] J.L. Arocha, J. Bracho, V. Neumann-Lara, "Tight and untight triangulated surfaces". *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(4), (1995), 319-326.
- [6] J.L. Arocha, J. Bracho, V. Neumann-Lara, R. Strauss, "On tight k-graphs". In preparation.
- [7] L.M. Batten. "*Combinatorics of finite geometries*", Cambridge University Press, 1986.
- [8] A. Blokhuis, K. Metsch. "Large minimal blocking sets, strong representative systems, and partial unitals", *Finite Geometry and Combinatorics*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 191. Edited by F. De Clerck et al., Cambridge University Press, 1993. 37-53.
- [9] A.A. Bruen, J.A. Thas, "Blocking sets", *Geometriae Dedicata* 6, 1977, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 193-203.

- [10] A.A. Bruen, "Blocking sets in finite projective planes", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 21, No. 3, 1971, 380-392.
- [11] Harary. F. "*Graph Theory*", Addison Wesley, 1969.
- [12] J.W.P. Hirschfeld, "*Projective geometries over finite fields*". Clarendon Press Oxford 1979.
- [13] D. Hughes F. Piper. "*Projective Planes*". Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [14] J.J. Montellano. "*Número heterocromático lineal en gráficas*", Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.
- [15] V. Neumann-Lara. "*Números heterocromáticos en gráficas*", Comunicación Interna, Fac. Ciencias, UNAM.
- [16] L. Rudolf, N. Harald. "*Finite Fields*", Encyclopedia of mathematics and its applications 20, Cambridge University Press, 1977.
- [17] F. Sterboul, "An extremal problem in hypergraph colouring", *J. Combinatorial Theory*, Serie B, 22 (1977), 159-164.
- [18] F. Sterboul, D. Wertheimer, "Colorations extremes dans les hypergraphes", *Annals of Discrete Mathematics*, 17. Proceedings of the International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics, University of Marseille Luminy, 1981, North-Holland Mathematics Studies. 606-612.
- [19] P. Valencia. "*Número heterocromático de triangulaciones en superficies*", Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.
- [20] W.D. Wallis, "*Combinatorial Designs*", Dekker, 1988.