UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTUDIO DE UNA SECUENCIA DE OSCILADORES NEURONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA
P R E S E N T A

RAFAEL PRIETO MELÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. ALBERTO A. HERRERA BECERRA

LABORATORIO DE NEUROCOMPUTACIÓN
CENTRO DE INSTRUMENTOS

MÉXICO, D. F. 1999

A mis padres,
por su apoyo,
por su guía,
por su ejemplo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Alberto Herrera Becerra y a José Luis Pérez Silva, por sus enseñanzas, su apoyo y sus consejos, durante la maestría y la realización de este trabajo

A todos los integrantes de los laboratorios de neurocomputación y de electrónica por su apoyo y su motivación.

A los sinodales por sus valiosos comentarios y el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

Al Centro de Instrumentos por las facilidades prestadas en el uso de equipo, material y sus instalaciones en general.

A todos aquellos que de alguna manera estuvieron conmigo colaborando y apoyándome durante la maestría y la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las redes neuronales artificiales son arreglos de dispositivos simples de procesamiento de señales inspirados en las neuronas biológicas, que son capaces de procesar señales en forma paralela. En general, una neurona artificial puede ser entendida como un dispositivo que desarrolla una transformación no lineal de un conjunto de señales externas a una única señal de salida. De esta forma, una red neuronal artificial realiza una transformación no lineal de un conjunto de señales externas a un conjunto de señales de salida.

En la actualidad, el mayor interés en la computación neuronal está basado en la sugerencia hecha por Hopfield [1], en la cual menciona que las propiedades colectivas de sistemas neuronales artificiales permiten realizar operaciones no lineales de mayor complejidad que aquellas que se pueden realizar con otro tipo de técnicas. Sin embargo, no hay que perder de vista que el estudio de los circuitos neuronales con pocas neuronas también es importante por la aplicación misma de estos circuitos, pero principalmente para facilitar el entendimiento de sistemas de gran tamaño, en los que por la gran complejidad que representa el estudio de este tipo de sistemas no lineales se dificulta enormemente su comprensión.

La función llevada a cabo por una neurona artificial depende del modelo conceptual usado para definirla. Este modelo es obtenido del comportamiento de la neurona biológica, y tiene la intención de describir las características básicas del modelo artificial. Sin embargo, con el fin de tener un modelo de neurona factible de ser usado en una aplicación real, debemos construir realizaciones matemáticas o físicas del modelo conceptual. Actualmente la mayoría de los modelos utilizados en aplicaciones son modelos matemáticos. En este caso, las redes neuronales son concebidas como sistemas dinámicos no lineales, en el sentido de que las activaciones futuras de todas sus unidades pueden ser computadas a partir del conocimiento de sus activaciones iniciales.

Las capacidades de procesamiento de información que presentan los sistemas neuronales artificiales con arquitecturas recurrentes (esto es, aquellas que presentan vías de retroalimentación) se han asociado, principalmente, a la dinámica convergente que pueden exhibir dichos sistemas. A diferencia de esto, las capacidades computacionales que se puedan asociar a la dinámica oscilatoria de las redes neuronales artificiales han sido muy poco exploradas. Sin embargo, el estudio de modelos neuronales biológicos, por ejemplo en las cortezas olfatoria y visual de mamíferos, ha mostrado que la dinámica oscilatoria de una red neuronal puede estar asociada a fenómenos computacionales no triviales, por ejemplo, en la formación de memorias asociativas dinámicas [2], en donde la transformación de un conjunto de entradas puede definir atractores dentro de la dinámica de las redes, los cuales se identifican con los elementos memorizados. Así, una de las principales líneas de investigación en el campo de los osciladores neuronales es usarlos como dispositivos de memoria. Ahora bien, el análisis de la dinámica oscilatoria de una red recurrente, sobre todo si ésta presenta un gran número de neuronas, es difícil de realizar, particularmente en forma analítica, ya que las técnicas matemáticas para el estudio de osciladores en espacios de fases de gran dimensión no se han desarrollado plenamente. Debido al gran interés, tanto teórico como práctico, que presentan las redes neuronales con dinámicas oscilatorias, se han propuesto diferentes estrategias para analizarlas, aunque muchas de ellas son de carácter numérico.

Por otro lado, en fechas recientes se ha presentado un gran interés por estudiar los fenómenos de memoria a corto plazo [3] que se pueden presentar en sistemas neuronales artificiales. En particular los fenómenos de memoria a corto plazo se han asociado con fenómenos de histéresis [4], y esos últimos se han asociado con comportamientos dinámicos multiestables en el sistema neuronal. De esta manera se plantean, entre otros, dos problemas interesantes. Primero, ¿el comportamiento oscilatorio de un sistema neuronal se puede interpretar como una clase particular de fenómeno de memoria a corto plazo?. Segundo, ¿los comportamientos oscilatorios están relacionados, de alguna forma, con la transición del fenómeno de memoria a corto plazo al de memoria permanente?. En este trabajo vamos a explorar este segundo problema.

Así, en este trabajo se presenta un estudio del comportamiento de un arreglo lineal formado por dos osciladores neuronales, con el objeto de determinar la forma en que se establece y las características del estado oscilatorio del circuito y las condiciones en que este estado se presenta, así como el efecto de algunos de los parámetros del circuito sobre el comportamiento oscilatorio.

El trabajo se inicia con la revisión de las características de un modelo matemático de neurona del tipo integrador con fugas retroalimentado en el que se considera un retardo axonal, haciendo énfasis a las condiciones necesarias para que esta neurona presente un comportamiento oscilatorio, así como las características de dichas oscilaciones. Para el estudio de los osciladores neuronales, se trabaja con un grupo de neuronas basadas en el mismo modelo matemático, en el cual se consideran diferentes tipos de función de activación: escalón, rampa con saturación y logística. Primero se hace el estudio considerando a cada tipo de neurona asilada, para posteriormente concentrarse en el caso de un circuito lineal homogéneo con dos neuronas. El interés en este tipo de arreglos de osciladores neuronales radica en el hecho de que a pesar de lo simple de este tipo de circuitos neuronales, con las condiciones adecuadas se pueden presentar comportamientos oscilatorios complejos que difícilmente podrían ser obtenidos utilizando osciladores neuronales simples o algún otro tipo de dispositivo oscilador, debido al carácter no lineal de estos osciladores así como a los diversos fenómenos de acoplamiento que se presentan. Finalmente se presentan las conclusiones haciendo una recopilación de las características de los circuitos neuronales estudiados y las condiciones en que se pueden dar tales comportamientos.

CAPÍTULO 1

MODELO DE NEURONA ARTIFICIAL

Los modelos de neuronas artificiales están basados en algunas de las propiedades de procesamiento de señales que se han observado en las neuronas biológicas. De esta forma, es necesario considerar las características morfológicas y fisiológicas que permiten a las neuronas realizar tareas de procesamiento de señales.

Morfología de la neurona biológica [5]

Las neuronas se diferencian de otras células por la presencia de cuatro regiones morfológicamente diferentes, a saber: *el cuerpo celular*, *las dendritas*, *el axón* y *las terminales axónicas*, según se ilustra en la figura I.1. Adicionalmente, las neuronas biológicas poseen sistemas bioquímicos especializados en la generación de señales electroquímicas en cada una de dichas regiones.

El cuerpo celular o *soma* es donde se localizan los principales sistemas bioquímicos de síntesis, secreción y transporte de sustancias que requiere la célula para su funcionamiento. Del cuerpo celular se originan diversas extensiones o protuberancias que se ramifican repetidas veces hasta formar una arborización fina, denominadas *dendritas*, y una protuberancia especial de forma tubular que, en general, sólo se divide en su parte terminal, denominada *axón*.

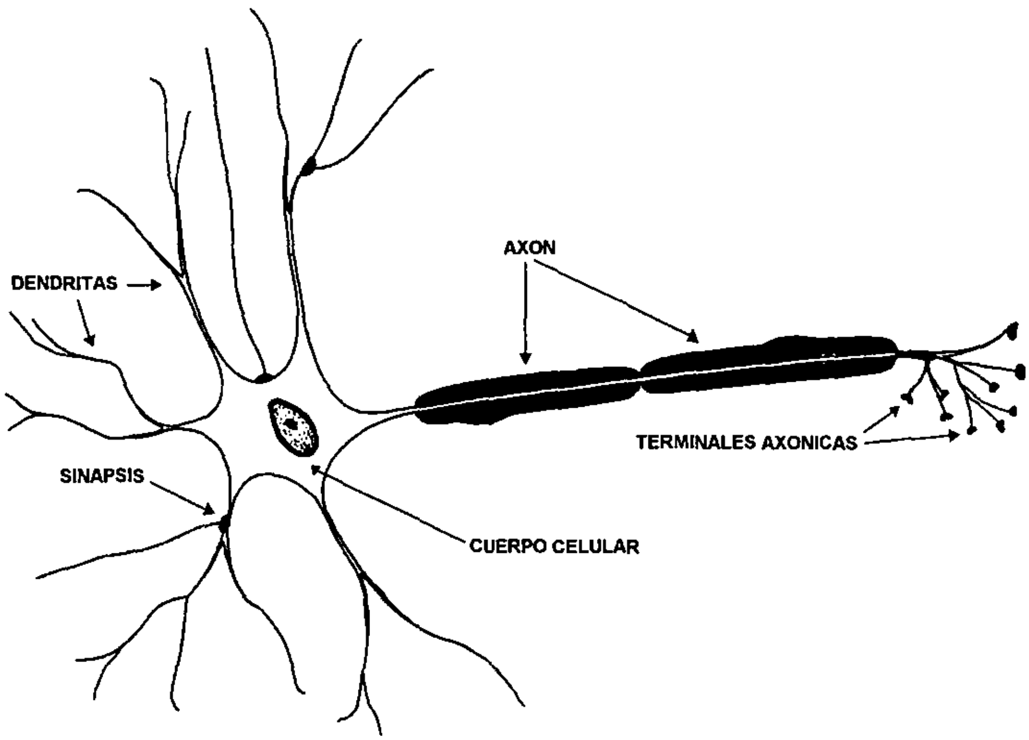


Figura I.1. Neurona biológica.

El axón constituye la unidad conductora de señales procesadas por la neurona. Puede extenderse hasta alcanzar distancias grandes; en este caso, el axón se encuentra cubierto por una capa aislante denominada capa de mielina y cuya función es permitir la conducción sin decaimiento y a grandes velocidades de señales eléctricas. La capa de mielina no es continua, denominándose Nodos de Ranvier a los puntos de interrupción.

La parte terminal del axón se divide repetidas veces hasta formar una gran cantidad de ramas finas. Dichas ramas se denominan *terminales axónicas* y constituyen los elementos transmisores de señales de la neurona. Por medio de sus terminales, una neurona establece puntos de contacto con otras neuronas y, en ocasiones, consigo misma. Estos puntos de contacto se denominan *sinápsis*, las cuales están formadas por la terminal de la célula presináptica, la superficie receptora de la célula postsináptica y un espacio que las separa, denominada hendidura sináptica. Las sinápsis se establecen principalmente en las dendritas de la neurona postsináptica, aunque también se puede encontrar en el cuerpo celular y, ocasionalmente, en las partes iniciales y terminales del axón de la neurona postsináptica.

Fisiología básica de la neurona [5]

Toda neurona genera en su membrana externa un potencial electroquímico de reposo y cuatro tipos de señales: las de entrada, las de integración, las de conducción y las de salida. La membrana celular se comporta como un medio excitable, es decir, es capaz de propagar una perturbación externa local a toda su superficie. Los mecanismos de propagación no involucran, en general, el uso de energía metabólica, por lo que la magnitud de la perturbación tiende a decaer tanto con la distancia como con el tiempo.

Cada neurona es activada por el flujo de bioquímicos a través de la sinapsis. La transmisión de estos bioquímicos a través de la unión sináptica causa un cambio en la concentración iónica dentro de la neurona, la cual, como respuesta, produce un cambio en su potencial electroquímico. Estas entradas pueden ser excitatorias (positivas) e incrementar el potencial electroquímico de la neurona, o por el contrario, pueden ser inhibitorias (negativas) y reducir el potencial electroquímico. Si el potencial de la red en el nacimiento del axón está por arriba de cierto nivel de umbral entonces la neurona "disparará" una secuencia de pulsos a lo largo del axón, llamados potencial de acción, los cuales viajan rumbo a la unión sináptica con otra neurona.

Las actividades electroquímicas de estas uniones sinápticas exhiben un comportamiento complejo porque cada neurona cuenta con varios cientos de interconexiones con otras neuronas. Cada neurona actúa como un procesador paralelo por que recibe pulsos en paralelo de todas sus neuronas vecinas y transmite pulsos en paralelo a todas sus sinápsis vecinas.

Modelo de neurona artificial

Desde el punto de vista de procesamiento de señales, una neurona biológica consiste de las siguientes partes, cada una asociada con una operación particular :

1) Las dendritas son el área receptora de señales que provienen de otras neuronas o del medio externo que rodea a la neurona.
2) El cuerpo celular o soma colecta y combina las señales de entrada que recibe la neurona.
3) El axón que es una fibra simple a través de la cual se transmiten a otras neuronas las señales procesadas.
4) El punto de unión de un axón con las dendritas de otra neurona es llamado *sinápsis*. De hecho, un mismo axón puede verse involucrado con cientos de conexiones sinápticas.

En esta forma, una neurona artificial puede ser considerada, desde el punto de vista de teoría de sistemas, como un dispositivo procesador de múltiples entradas y salida única (MISO) como se muestra en la figura I.3.

Figura I.3. Una neurona artificial como un dispositivo MISO.

El modelo formal mostrado en la figura anterior es propuesto para la construcción de redes neuronales artificiales con un alto poder computacional. Ahora bien, los ingenieros, a diferencia de los neurobiólogos, no tienen la intención de emular el comportamiento del sistema biológico. Los primeros toman los modelos biológicos solamente como dispositivos formales que son usados, como inspiración, para diseñar y construir sistemas computacionales capaces de resolver diferentes problemas tecnológicos. En este caso, un modelo biológico puede ser modificado tanto como sea necesario para satisfacer los propósitos tecnológicos.

Modelo matemático de neurona artificial

Como se mencionó previamente, una neurona artificial es un dispositivo procesador elemental que realiza una transformación no lineal. En particular, entenderemos a nuestra neurona como dispositivo que transforma de un vector de señales de entrada externas $I(t)$, a una única señal de salida $R(t)$. En otras palabras, nuestra neurona artificial es un sistema dinámico no lineal de la forma general :

$$R(t) = F_N(I(t)), \quad \text{donde} \quad F_N : R^n \times [t_0,t_f] \to R \times [t_0,t_f],$$

donde $[t_0,t_f]$ es un intervalo real. La operación no lineal realizada por el dispositivo neuronal puede ser definida en términos de un estado interno $m(t)$, llamado la actividad de la neurona, de la siguiente manera :

$$R(t) = F_O(m(t-\delta)), \quad \text{con} \quad m(t) = F_I(I(t))$$

donde F_I es una función lineal real llamada función de entrada, F_O es una función no lineal real llamada función de salida de la neurona y δ es el retardo axonal. De esta manera, la neurona artificial está caracterizada por la forma de las funciones F_I y F_O.

En este trabajo, caracterizaremos a la función de entrada F_I en términos de la evolución de la actividad $m(t)$. Esto es, definiremos F_I implícitamente como la solución de la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) - m_0 = E(t) \qquad \text{(I.1)},$$

donde $m(t)$ es la actividad de la neurona al tiempo t, τ es su constante de tiempo característica, m_0 es su potencial de reposo y $E(t)$ es un término de forzamiento llamado *entrada dendrítica*, que representa a las señales externas que llegan a la neurona. La ecuación (I.1) indica que si el efecto global se anula ($E(t) = 0$), entonces la actividad de la neurona tiende, de manera exponencial, hacia su valor de reposo m_0; por otro lado, si el efecto global es excitador ($E(t) > 0$) o inhibidor ($E(t) < 0$), entonces la actividad de la neurona se depolariza o hiperpolariza respectivamente, también de manera exponencial, mientras se mantenga presente el efecto. Si bien, este modelo también ha sido usado para definir fenómenos biológicos como los reportados por Sejnowski [6] y Elman [7], no es nuestra intención usar la ecuación (I.1) como modelo biológico, sino como parte de modelo matemático que define un dispositivo neuronal elemental.

Por otra parte, el término de forzamiento $E(t)$, también llamado *estímulo externo total* que recibe la neurona está relacionado con el vector de señales externas $I(t)$ de la manera siguiente :

$$E(t) = \mathbf{w} \cdot I(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i I_i(t) \qquad \text{(I.2)},$$

donde $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]^T$ es el *vector de pesos sinápticos* asociado a la neurona. Ahora bien, si en la i-ésima sinápsis ocurre que $w_i I_i > 0$, entonces dicha sinápsis se denomina *excitadora*. Es decir, un incremento en la magnitud de la señal I_i hace que la actividad $m(t)$ de la neurona tiende a aumentar, si las restantes entradas se mantienen constantes. De manera análoga, una sinapsis se denomina *inhibitoria* si ocurre que $w_i I_i < 0$. Así, un incremento en I_i ocasiona que la actividad $m(t)$ de la neurona tiende a disminuir, si las entradas restantes se mantienen constantes. En el vector $I(t)$ se consideran todas las señales que afectan a la neurona, ya sea que provengan del medio externo a la neurona o de otras neuronas.

En adición, nuestra neurona artificial también está caracterizada por una función de salida no lineal $F_O(m(t\text{-}\delta))$. Ahora bien, existen diversas formas de describir a la función de salida, por ejemplo, podemos definir ésta en términos de funciones lineales a trazos o en términos de funciones continuas suaves. Sin embargo, no existen restricciones a priori en la formulación del modelo conceptual que establezcan un tipo particular de función, salvo su carácter no lineal. En este trabajo se estudiarán tres clases diferentes de neuronas, caracterizadas por tres funciones de salida también diferentes.

La primer clase de neurona está caracterizada por una función escalón de la forma

$$F_O(m(t)) = F_{esc}(m(t)) = \begin{cases} k & \text{si } m(t) \geq \theta \\ 0 & \text{si } m(t) < \theta \end{cases} \qquad \text{(I.3)},$$

donde $k > 0$ es la amplitud de la señal de la salida y $\theta > m_0$ es el umbral de la neurona. La forma de la función de respuesta escalón se presenta en la siguiente figura.

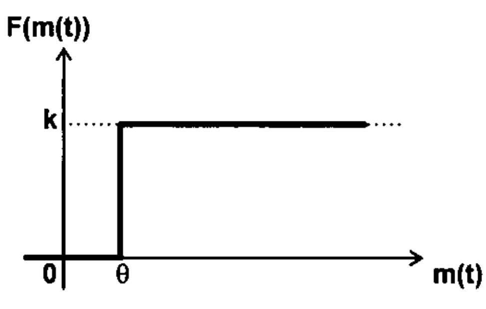


Figura I.4. Función de respuesta tipo escalón.

Otra clase de neurona que se que se considerará es la que utiliza la función rampa con saturación, la cual es de la forma

$$F_O(m(t)) = F_{rsat}(m(t)) = \begin{cases} k & \text{si } m(t) \geq \theta_{sup} \\ k\left(\dfrac{m(t) - \theta_{inf}}{\theta_{sup} - \theta_{inf}}\right) & \text{si } \theta_{inf} \leq m(t) \leq \theta_{sup} \\ 0 & \text{si } m(t) < \theta_{inf} \end{cases} \qquad (I.4),$$

donde $k > 0$ es la amplitud de la señal de la salida y θ_{inf} es el umbral inferior y θ_{sup} es el umbral superior entre los cuales responde la neurona, con $\theta_{sup} > \theta_{inf} > m_0$. La pendiente de la rampa está dada por el término $\dfrac{k}{\theta_{sup} - \theta_{inf}}$. La forma de la función de respuesta rampa con saturación se presenta en la siguiente figura.

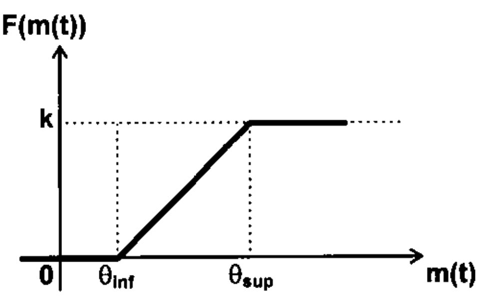


Figura I.5. Función de respuesta tipo rampa con saturación.

La tercer clase de neurona que consideramos utiliza una función logística de la forma

$$F_O(m(t)) = F_{log}(m(t)) = k\left(\frac{1}{2}tanh\left(2\frac{M}{k}(m(t) - \theta)\right) + \frac{1}{2}\right) \qquad (I.5),$$

donde $k > 0$ es la amplitud de la señal de la salida, $\theta > m_0$ es el umbral de la neurona y $M > 0$ es la pendiente máxima de la función la cual se da en el punto de inflexión. La forma de la función de respuesta logística se presenta en la siguiente figura.

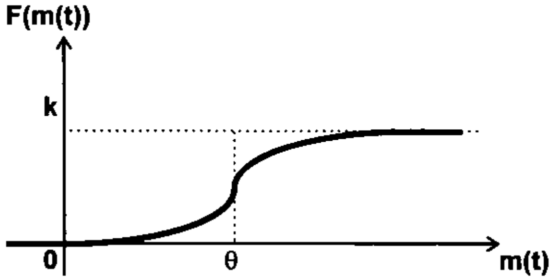


Figura I.6. Función de respuesta tipo sigmoide logística.

Es importante notar que estas tres funciones, en un caso límite, tienen un comportamiento similar; tanto la función rampa con saturación como la función logística, cuando su pendiente tiende a infinito, su forma tiende a ser la de un escalón En el caso de la función rampa con saturación llegamos a este caso límite cuando hacemos que $(\theta_{sup} - \theta_{inf}) \rightarrow 0$, y para el caso de la función logística esto se logra simplemente haciendo que $M \rightarrow 0$, por lo que podemos considerar que en este caso límite las tres funciones las podemos aproximar por la ecuación I.3.

Implantación del modelo neuronal

Para realizar la implantación de este procesador neuronal se considera que está compuesto de dos partes principales, un componente lineal y otro no lineal. La parte lineal está formada por un sumador que se encarga de sumar todas las entradas a la neurona, tanto excitatorias como inhibitorias. La señal resultante, la entrada dendrítica *E(t)*, pasa por un módulo integrador con fugas. La parte no lineal del modelo está formada por un retardo (el retardo axonal) y por la función de activación de la neurona.

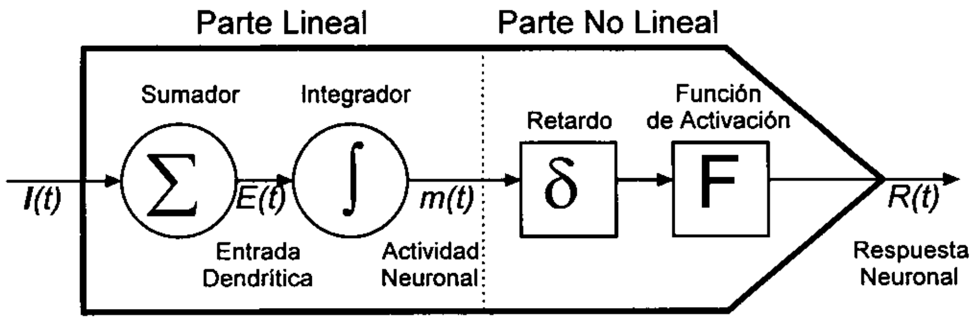


Figura I.7. Composición del procesador neuronal.

Considerando este modelo de neurona, es posible que uno de los términos I_i de la ecuación (I.2) corresponda a la respuesta de la misma neurona, es decir, es posible que la respuesta de una neurona, además de ser distribuida a otras neuronas, también afecte su propio comportamiento. Cuando esto ocurre se dice que la neurona presenta una *autosinápsis.* Ahora bien, si en una autosinápsis ocurre que $wI_i > 0$, entonces se dice que la neurona presenta una *autosinápsis positiva.* En caso contrario, i.e., cuando $wI_i < 0$, entonces se dice que la neurona presenta una *autosinápsis negativa.* Si este es el caso, entonces nuestro modelo de neurona se comportará como un sistema MISO retroalimentado. De esta forma, la implantación de este modelo que se utilizará es la que se muestra en la figura I.8.

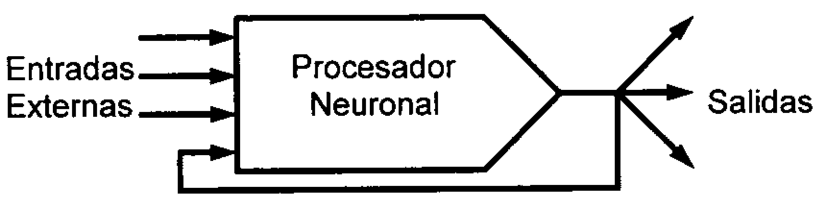


Figura I.8. Modelo de neurona retroalimentada y con retardo.

En particular en este trabajo nos ocuparemos de neuronas que presentan una autosinápsis negativa, la cual, bajo ciertas circunstancias que se describen a continuación, produce una respuesta oscilatoria, comportamiento que nos interesa analizar.

El oscilador neuronal [8]

Al introducir una autosinápsis el comportamiento de la neurona queda descrito por la ecuación diferencial

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = I(t) + w_r R(t)$$

para todo $t >= 0$, donde $w_r < 0$ es el peso de conexión de la autosinápsis. La solución de esta ecuación diferencial depende de la forma de las funciones $I(t)$ y $R(t)$. Considerando una función de activación escalón de la forma de la ecuación I.3, se puede analizar la respuesta de la neurona en dos partes: cuando la autoexcitación se encuentra activa ($R(t) = k$), donde el comportamiento de la neurona queda descrito por la ecuación

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = I(t) + w_r k$$

y cuando la autoexcitación se encuentra inactiva ($R(t) = 0$), donde el comportamiento de la neurona queda descrito por la ecuación

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = I(t)$$

y si adicionalmente consideramos que la excitación externa $I(t)$ es una función escalón de la forma

$$I(t) = \begin{cases} I \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0. \end{cases}$$

donde I es la amplitud de la entrada, entonces, considerando la condición inicial $m(0) = m_0 < \theta$, tendremos que la actividad de la neurona tendrá una evolución de la forma

$$m(t) = I + (m_0 - I)\, e^{\frac{-t}{\tau}}$$

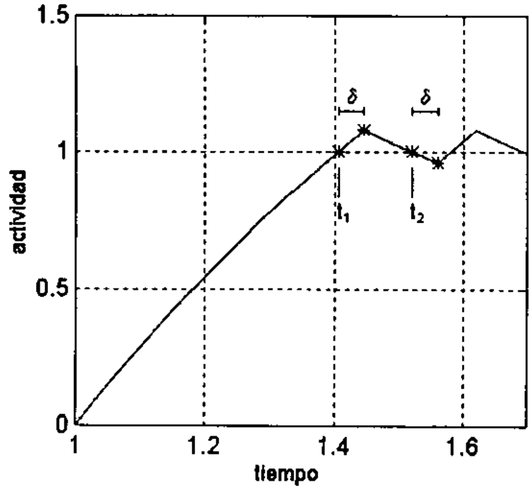
es decir, $m(t)$ aumentará tendiendo a un valor de equilibrio $m_{eq} = I$. Si la amplitud de la señal externa es tal que $I > \theta$, la actividad de la neurona alcanzará el valor de umbral θ en un tiempo $t_1 > 0$, resultando que a partir del tiempo $t > t_1+\delta$ el comportamiento de la neurona estará determinado por

$$m(t) = I + w_r k + (m_{max} - I - w_r k)\, e^{\frac{t_1+\delta-t}{\tau}} \qquad \text{(I.6)},$$

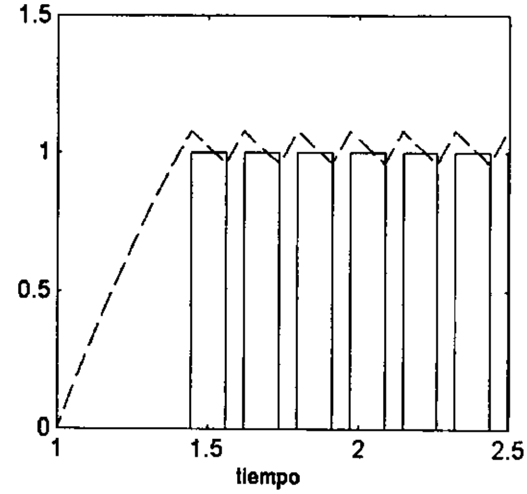
donde $m_{max} = I + (m_0 - I)\, e^{\frac{-(t_1+\delta)}{\tau}}$, y tenderá a un valor de equilibrio $m_{eq} = I+w_r k$, mientras se cumpla que $m(t) > \theta$. Si se cumple que $m_{eq} > \theta$, $m(t)$ eventualmente llegará al valor de umbral en un tiempo $t = t_2 > t_1$, de tal forma que a partir del tiempo $t = t_2+\delta$ la neurona tendrá nuevamente la autosinápsis inactiva y la actividad de la neurona tiene una evolución de la forma

$$m(t) = I + (m_{min} - I)\, e^{\frac{t_2+\delta-t}{\tau}} \qquad \text{(I.7)},$$

donde $m_{min} = I + w_r k + (m_{max} - I - w_r k)\, e^{\frac{t_1-t_2}{\tau}}$, con lo que la actividad de la neurona vuelve a crecer, repitiéndose nuevamente este proceso descrito, por lo que la actividad de la neurona se mantendrá oscilando en torno al umbral, según se observa en la gráfica I.1, y como se está considerando una función de activación escalón, la respuesta del sistema será un tren de pulsos cuadrados, según se observa en la gráfica I.2.



Gráfica I.1. Evolución de la actividad neuronal



Gráfica I.2. Respuesta de la neurona

La actividad de la neurona, cuando alcanza el estado estacionario, entra en un estado oscilatorio, y su descripción [9] relaciona los términos involucrados en las ecuaciones I.6 y I.7, que por ser una función periódica es de la forma

$$m(t+T) = m(t) \qquad \text{(I.8)},$$

donde el período T está dado por $T = 2\delta + \tau\, ln \left[\frac{(m_{max} - I - w_r k)\ (m_{min} - I)}{(\theta - I - w_r k)\ (\theta - I)} \right]$ con

$m_{max} = I - (\theta - I)\, e^{-\frac{\delta}{\tau}}$ y $m_{min} = I + w_r k + (\theta - I - w_r k)\, e^{-\frac{\delta}{\tau}}$, siendo $w_r < 0$.

Como la respuesta de la neurona es función de la actividad neuronal, ésta también es periódica, y es de la forma

$$R(t+\Delta) = R(t) \qquad \text{(I.9)},$$

donde $\Delta = \delta + \tau \, ln \left[\frac{m_{max} - I - w_r k}{\theta - I - w_r k} \right]$ para el caso de una función escalón.

De este modo, podemos considerar a la respuesta de la neurona como una función de la forma

$$R = R(\delta, \tau, \theta, k, w_r; I) \qquad (I.10).$$

Un hecho importante que podemos observar en la gráfica I.2 es que la respuesta de la neurona se presenta hasta un tiempo ϕ después de que se presenta la excitación de la neurona. Este tiempo de retraso está dado por

$$\phi = \delta + \tau \, ln \left[\frac{I - m(0)}{I - \theta} \right] \qquad (I.11)$$

para $m(0) < \theta$.

Este modelo de neurona retroalimentada negativamente será utilizado a lo largo de este trabajo como oscilador neuronal básico, y serán estudiadas sus características y las condiciones en que esta neurona se comporta como oscilador, que como podemos ver en la ecuación I.10, estas condiciones dependen de un conjunto de parámetros, de los que estudiará el efecto que producen en la respuesta de la neurona.

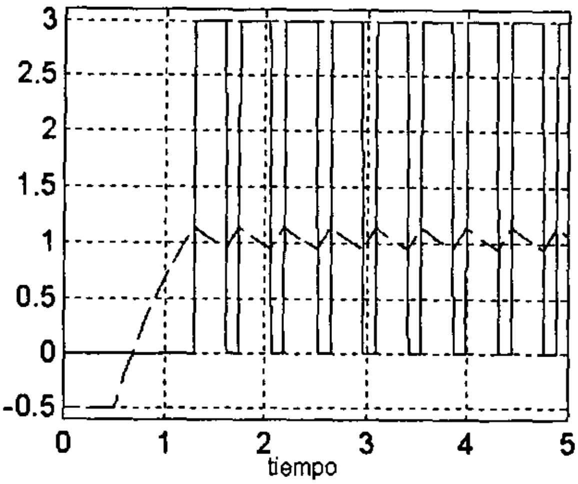
CAPÍTULO 2

COMPORTAMIENTO DE UNA NEURONA RETROALIMENTADA Y CON RETARDO

Ya se mostró cómo y por qué se origina el carácter oscilatorio de una neurona retroalimentada y con retardo cuando ésta posee una función de activación escalón. Como se desea trabajar con las otras dos clases de neuronas propuestas, hay que determinar si éstas también se comportarán como osciladores y bajo que condiciones se dará este fenómeno. Por tanto primero estudiaremos el comportamiento de neuronas que cuentan con funciones de activación rampa con saturación y sigmoide.

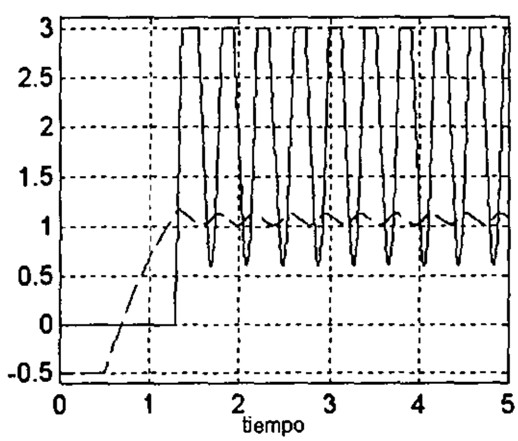
Oscilador neuronal con función de activación rampa con saturación

Lo primero que debemos asegurar es que cuando cambiamos la función de activación de la neurona por una rampa con saturación la neurona mantendrá un carácter oscilatorio. En principio esto es fácil de comprobar, ya que podemos considerar a la función escalón como un caso particular de la rampa con saturación, en la cual la pendiente de la rampa es infinita. Por tanto es fácil entender que cuando la pendiente de la rampa es grande el comportamiento de la neurona mantendrá características similares. Esto lo podemos observar en la siguiente gráfica donde vemos el comportamiento de una neurona con los siguientes parámetros: $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$ y $M = 300$ (para obtener esta pendiente se utilizaron $\theta_{inf} = 1$, $\theta_{sup} = 1.01$ y $k = 3$), cuya respuesta, como se puede observar, es muy similar a la obtenida utilizando una función escalón.

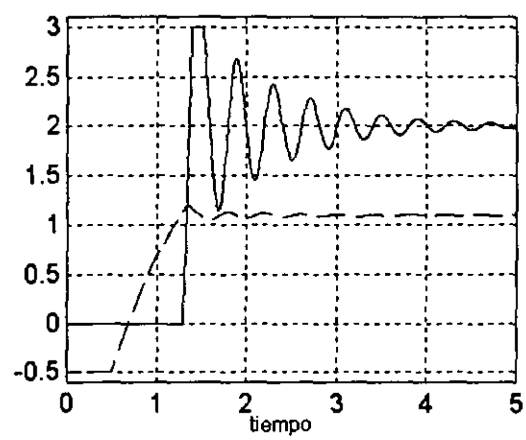


Gráfica II.1. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación rampa con saturación, con parámetros M = 300, δ = 0.1, τ = 1 y w_r = -0.7
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

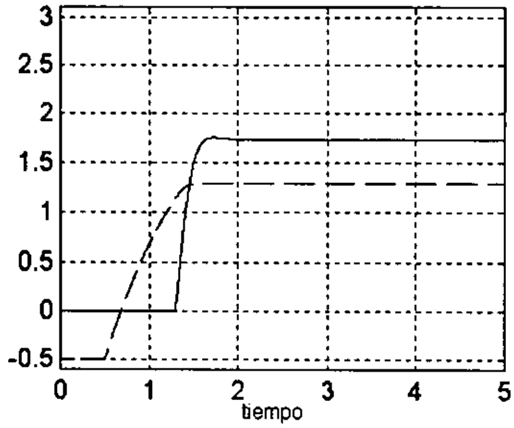
Sin embargo, al disminuir la pendiente de la rampa, el comportamiento oscilatorio de la neurona comienza a mostrar diferencias significativas con respecto a lo obtenido con la función escalón, debido a que ahora el cambio en el estado de la salida ya no es instantáneo, sino que la salida puede adoptar valores intermedios entre los valores máximo y mínimo, y por lo tanto el efecto que producirán estos cambios de la forma de la salida al ser retroalimentados a la neurona tendrán un efecto importante. Las siguientes gráficas muestran la respuesta de neuronas con pendientes M = 30, M = 20 y M = 6, para lo cual se utilizó θ_{sup} = 1.1, θ_{sup} = 1.15 y θ_{sup} = 1.5 respectivamente, conservando todos los demás parámetros de la neurona.



a) M = 30



b) M = 20



c) M = 6

Gráfica II.2. Respuesta de la neurona con función de activación rampa con saturación para diferentes pendientes

_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

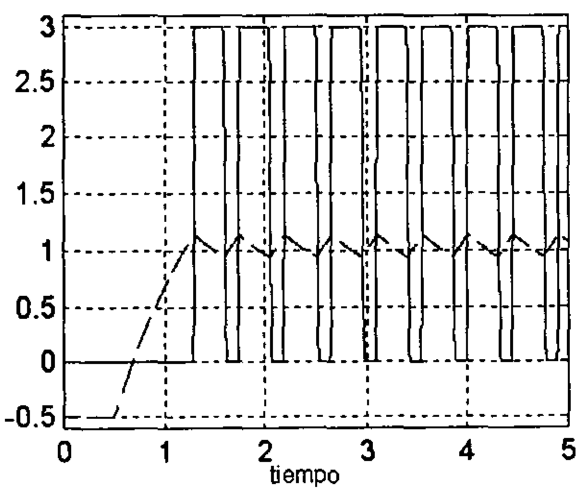
Como se puede observar, al disminuir la pendiente de la rampa la forma de la respuesta ya no está formada por un tren de pulsos cuadrados, ahora los cambios de la salida ya no son abruptos sino mas bien tienden a seguir una curva suave, algo similar a una senoide. Una característica importante de notar es que las oscilaciones están limitadas por los límites de saturación de la rampa, es decir, sólo puede oscilar entre cero y k, debido a que la actividad de la respuesta de la neurona es proporcional al nivel de actividad de la neurona en el intervalo definido por los umbrales superior e inferior, y si el nivel de actividad sale de este intervalo, la salida se saturará. Cuando la pendiente disminuye por debajo de cierto límite, la respuesta de la neurona simplemente tenderá a un valor de equilibrio, pudiendo llegar a él directamente, como en el último caso, o presentando un transitorio con oscilaciones que decaen hasta llegar al valor de equilibrio, como se observa en la segunda neurona.

En el caso de la neurona con función de activación rampa con saturación, la pendiente pasa a ser un parámetro importante en la respuesta de la neurona. Dado que la pendiente depende de θ_{inf}, θ_{sup} y k, la respuesta de la neurona expresada en la ecuación I.10 pasa a ser de la forma

$$R = R(\delta,\ \tau,\ \theta_{inf},\ \theta_{sup},\ k,\ w_r;\ I) \qquad \text{(II.1).}$$

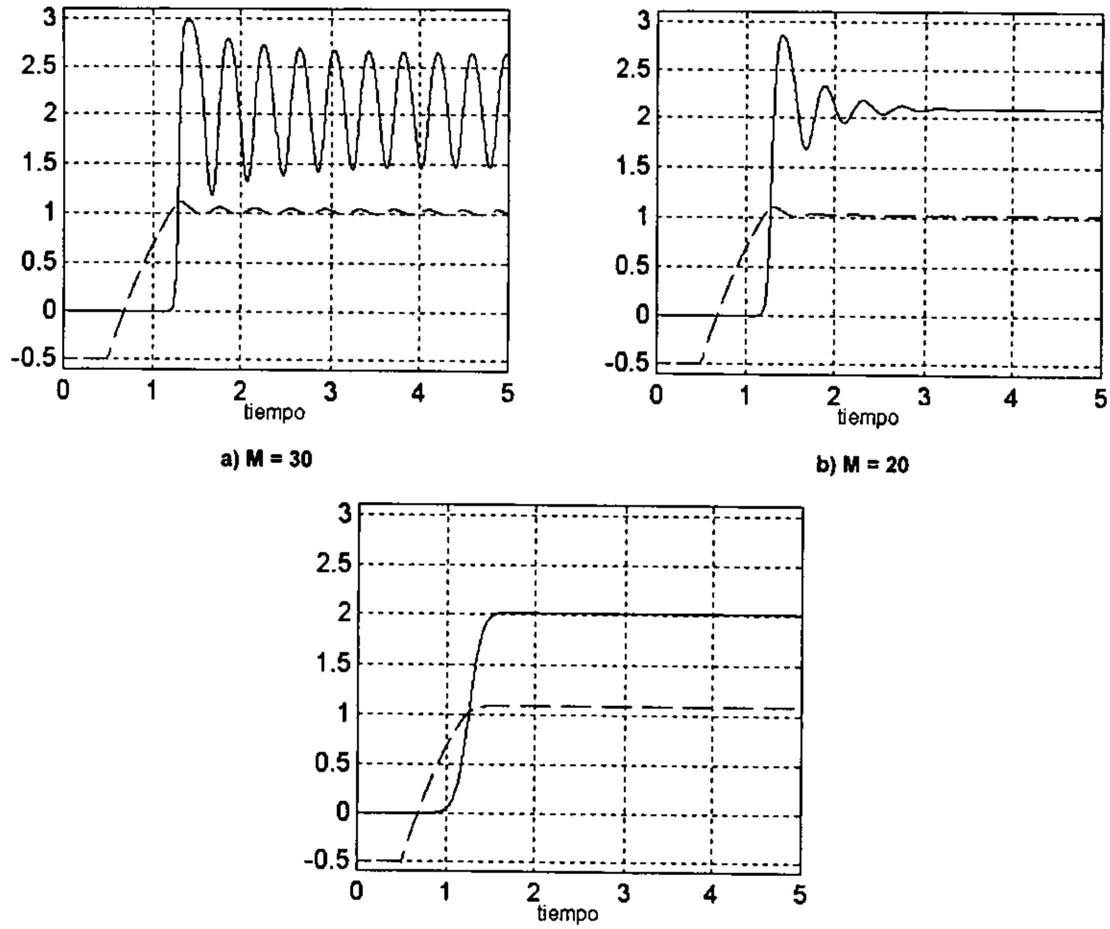
Oscilador neuronal con función de activación sigmoide

Al igual que en el caso de la función rampa con saturación, vamos a partir del hecho de que en un caso extremo podemos considerar a la función escalón como el caso de una función logística con pendiente infinita, por lo que para pendientes altas de la sigmoide la neurona presentará el mismo comportamiento oscilatorio. En la siguiente gráfica podemos observar este hecho, en la cual la neurona tiene los siguientes parámetros: $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$, $\theta = 1$ y M = 300.



Gráfica II.3. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación logística, con parámetros M = 300, $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$ y $\theta = 1$
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Al igual que con la rampa, al disminuir la pendiente de la sigmoide comienzan a observarse un cambio en las características de la respuesta. Las siguientes gráficas muestran neuronas con pendientes M = 30, M = 20 y M = 6.



a) M = 30

b) M = 20

c) M = 6

Gráfica II.4. Respuesta de la neurona con función de activación logística para diferentes pendientes
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En estas gráficas podemos observar comportamientos cualitativamente similares a los presentados con la rampa con saturación, al disminuir la pendiente la respuesta de la neurona pierde su carácter oscilatorio, tendiendo a un valor de equilibrio, pudiendo presentar un transitorio con oscilaciones amortiguadas, o si la pendiente es menor, ir directamente al valor de equilibrio. Las semejanzas y diferencias entre las respuestas de neuronas con respuesta rampa con saturación y sigmoide las estudiaremos más adelante.

Nuevamente, en el caso de la neurona con función de activación sigmoide la pendiente es un parámetro importante a considerar. En este caso, la respuesta de la neurona queda de la forma

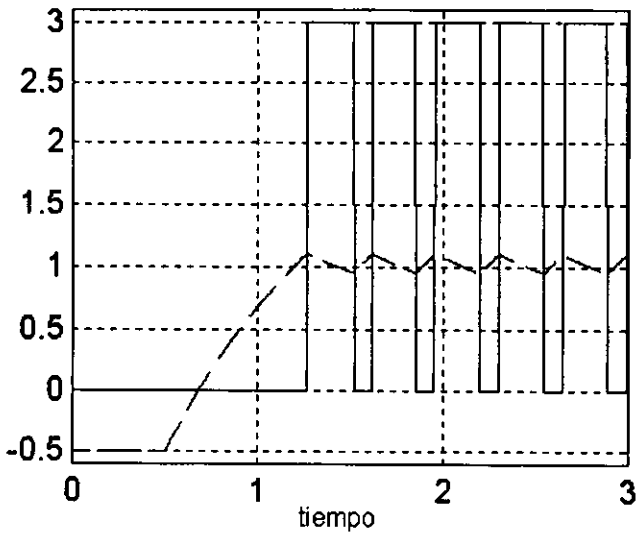
$$R = R(\delta, \tau, \theta, M, k, w_r; I) \qquad \text{(II.2).}$$

Ahora que sabemos que las tres clases de neuronas que utilizaremos tienen la capacidad de oscilar, vamos a analizar el comportamiento individual de una neurona con retardo y retroalimentada para más adelante poder analizar el comportamiento de circuitos complejos. Para esto, se estudiará por separado cada una de las clases de neuronas propuestas, las cuales se diferencian por su función de activación (escalón, rampa con saturación y sigmoide).

Neurona con función de activación escalón

En el caso de una neurona con función de activación escalón, según lo establecido en la ecuación I.10, los parámetros que determinan su comportamiento son el retardo axonal, el peso de la retroalimentación, la constante de tiempo del integrador, el umbral de disparo y la amplitud de la respuesta, además de las señales de excitación externas. Para las neuronas que se utilizan a lo largo de este estudio, se mantienen constantes una excitación escalón de amplitud $I = 3$, el umbral de disparo $\theta = 1$ y una amplitud de salida $k = 3$. Para determinar el efecto de los demás parámetros, vamos a analizar como se afecta la respuesta de la neurona al variar cada uno de ellos.

Como referencia tomamos una neurona, en la cual sus parámetros son los adecuados para mantener un estado oscilatorio autosostenido. En la siguiente figura se muestra el comportamiento de una sola neurona con salida escalón de amplitud $k = 3$, con un umbral de disparo $\theta = 1$ y excitada con una entrada escalón de amplitud I = 3, cuando se encuentra en estado oscilatorio. Los parámetros con que opera esta neurona de referencia son: $\delta = 0.075$, $\tau = 1$ y $w_r = -0.7$.

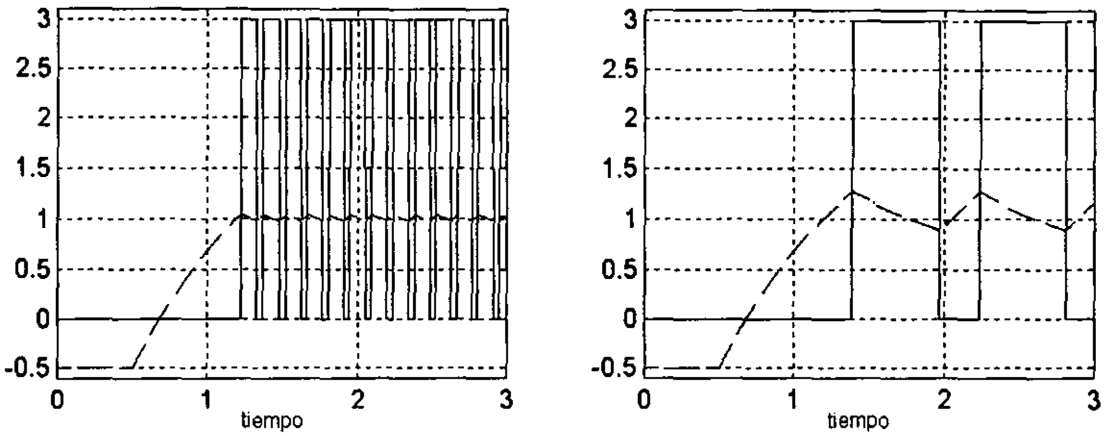


Gráfica II.5. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación escalón, con parámetros $\delta = 0.075$, $\theta = 1$, $\tau = 1$ y $w_r = -0.7$
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Una característica importante que podemos observar en la respuesta de la neurona es el tiempo de retardo ϕ que le toma a la neurona en comenzar a responder a partir de que se presenta la excitación. Este retardo, como se estableció en la ecuación I.11, está formado por el retardo axonal más un cierto tiempo de retardo intrínseco t_i de la neurona, es decir, $\phi = \delta + t_i$. Para esta neurona de referencia, se tiene un retardo $\phi = 0.768$. Por otra parte, para el caso de la neurona con función de activación escalón, es posible caracterizar a la oscilación de la respuesta a partir de la frecuencia de oscilación y, en este caso como la respuesta está formada por un tren de pulsos, por el ciclo de trabajo de la respuesta. Para la neurona de referencia se tiene una frecuencia f = 2.91 y un ciclo de trabajo CT = 70.9 %.

a) Retardo Axonal.

A partir del estado mostrado anteriormente podemos comparar los resultados obtenidos cuando se altera alguno de los parámetros. Así, a continuación se presenta a la neurona anterior haciendo variar el tiempo de retardo de la señal por el axón. Las siguiente gráficas muestran a la neurona con tiempos de retardo $\delta = 0.03$ y $\delta = 0.2$.



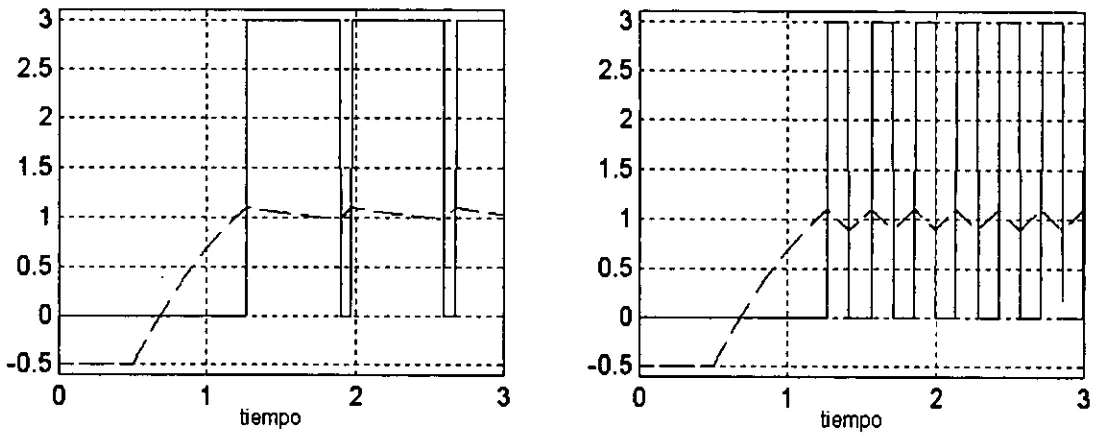
a) $\delta = 0.03$ b) $\delta = 0.2$

Gráfica II.6. Variaciones en la respuesta de la neurona en función del tiempo de retardo
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Como se observa, en este caso el efecto del retardo es el de modificar la frecuencia de la oscilación, dado que este retardo hace variar el tiempo que tarda en afectar los cambios de la salida a la entrada. Para las respuestas mostradas se tienen frecuencias de oscilación $f = 6.79$ y $f = 1.19$ con ciclos de trabajo $CT = 70.7$ % y $CT = 68.1$ % respectivamente. En lo que al retardo de la neurona se refiere, se tienen retardos $\phi = 0.725$ y $\phi = 0.895$ para cada caso, donde podemos observar que estos retardos varían en la misma cantidad que se varió el retardo axonal, es decir, esto no afectó al retardo intrínseco de la neurona.

b) Peso de la Autosinápsis

El efecto del peso de la retroalimentación lo podemos observar en las siguientes gráficas, donde este peso lo hacemos variar a $w_r = -0.55$ y $w_r = -1$.



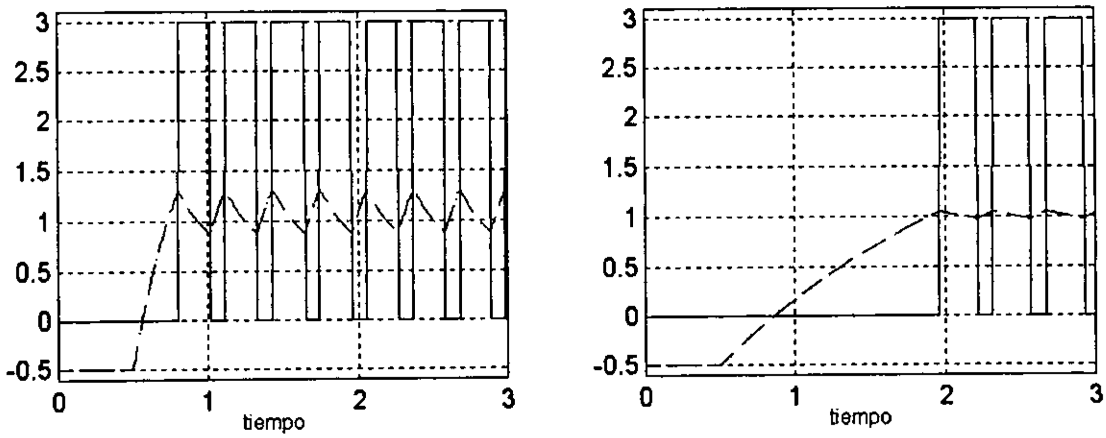
a) $w_r = -0.55$ b) $w_r = -1$

Gráfica II.7. Variaciones en la respuesta de la neurona en función de la retroalimentación
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Aquí podemos observar que el efecto del peso de la autosinápsis es el de modificar forma de la descarga de la actividad de la neurona, dado que su restablecimiento está en función de la salida multiplicada por el peso de la retroalimentación. Por esta razón, otra forma de lograr el mismo efecto sobre las oscilaciones, es modificando la amplitud de la señal de salida de la neurona (dada por la función de activación). Al modificar la forma de descarga de la actividad de la neurona, se modifica el tiempo que permanece la respuesta en alto, afectando al ciclo de trabajo y la frecuencia de las oscilaciones. Para estas neuronas se tienen frecuencias $f = 1.42$ y $f = 3.43$ con ciclos de trabajo $CT = 88.6$ % y $CT = 49.2$ % respectivamente. En este caso, el peso de la retroalimentación no tiene efecto alguno sobre el retardo de la respuesta, por lo que se mantuvo en $\phi = 0.770$.

c) Constante de Tiempo de Integración

El efecto de la constante de tiempo del integrador puede observarse en las siguientes gráficas, donde se hizo variar la constante del integrador a τ = 0.33 y τ = 2.



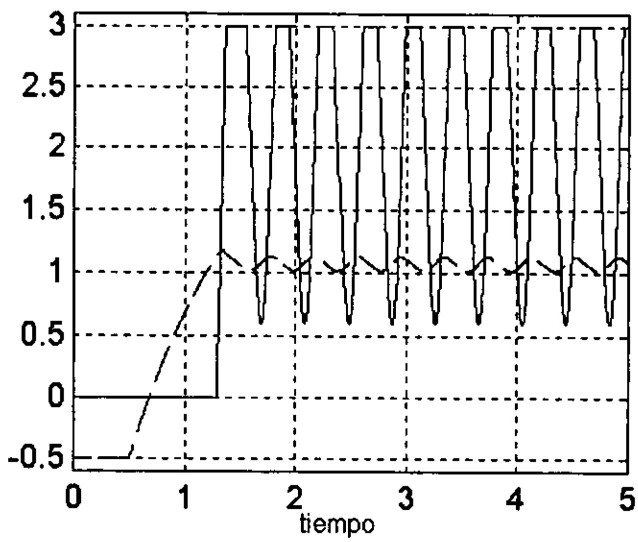
a) τ = 0.33 b) τ = 2

Gráfica II.8. Variaciones en la respuesta de la neurona en función de la constante de tiempo del integrador
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

La constante de tiempo del integrador tiene el efecto de modificar la rapidez con que cambia la actividad de la neurona, por lo que el ciclo completo de la oscilación se verá afectado, desde el retardo intrínseco de la neurona (ϕ = 0.306 y ϕ = 1.461), hasta la forma de carga y descarga de la actividad modificando la frecuencia (f = 3.24 y f = 2.83) y el ciclo de trabajo de la respuesta (CT = 67.9 % y CT = 70.7 %).

Neurona con función de activación rampa con saturación

Como ya se mencionó, cuando se utiliza esta función de activación se producen diferencias significativas en la respuesta de la neurona con respecto a la función escalón. Una neurona de este tipo también puede presentar oscilaciones autosostenidas si sus parámetros son los adecuados, y nos interesa caracterizar las diferencias que presenta en su respuesta con respecto a la neurona con función de activación escalón. Para esto nuevamente tomaremos como referencia una neurona que presente comportamiento oscilatorio y se analizará el efecto de los parámetros neuronales expresados en la ecuación II.1 sobre la respuesta. Esta neurona de referencia opera con los siguientes parámetros: $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$ y $M = 30$ (Para obtener esta pendiente se utilizaron $\theta_{inf} = 1$, $\theta_{sup} = 1.1$ y $k = 3$).

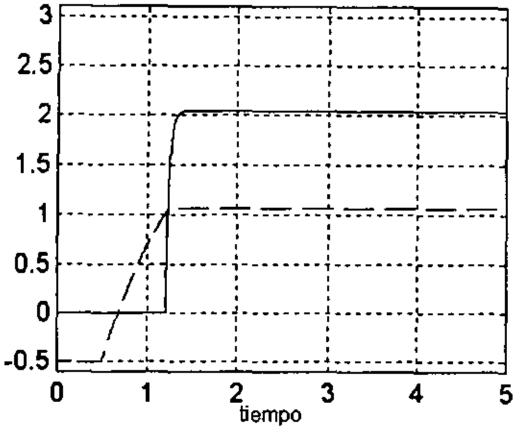


Gráfica II.9. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación rampa con saturación con parámetros $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$ y $M = 30$
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

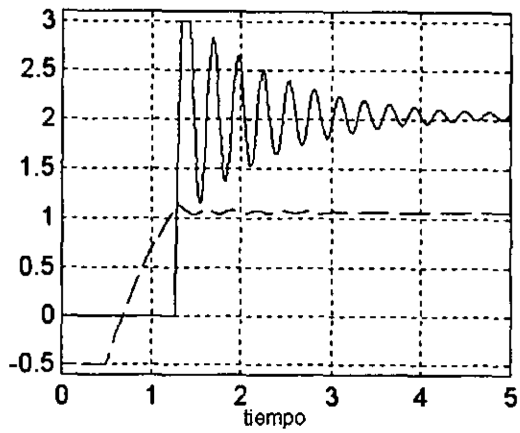
Aquí resulta importante considerar nuevamente el retardo de la neurona, que para esta neurona de referencia es $\phi = 0.795$.

a) Retardo Axonal

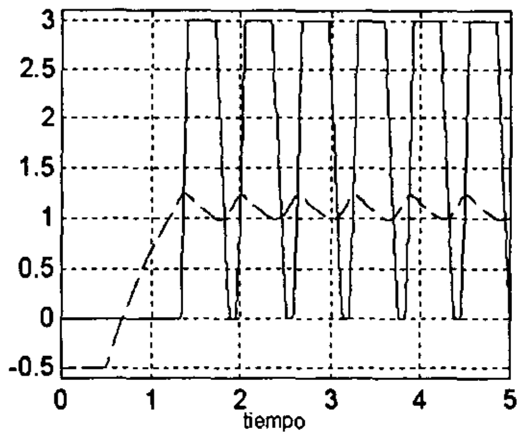
Para observar el efecto de los parámetros en el comportamiento de la neurona, iniciaremos nuevamente con el efecto del tiempo de retardo. En la siguiente figura se puede observar los resultados obtenidos al variar este retardo a $\delta = 0.01$, $\delta = 0.07$ y $\delta = 0.15$.



a) $\delta = 0.01$



b) $\delta = 0.07$



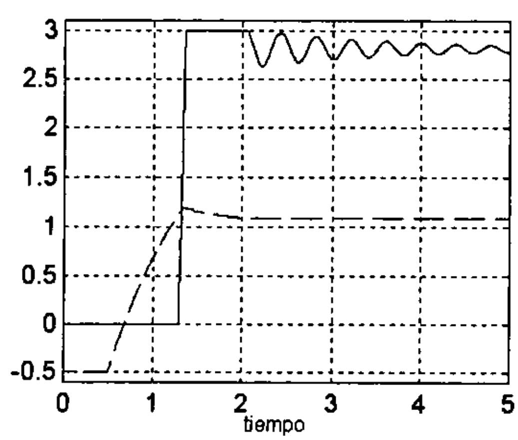
c) $\delta = 0.15$

Gráfica II.10. Variaciones en la respuesta de la neurona en función del tiempo de retardo
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

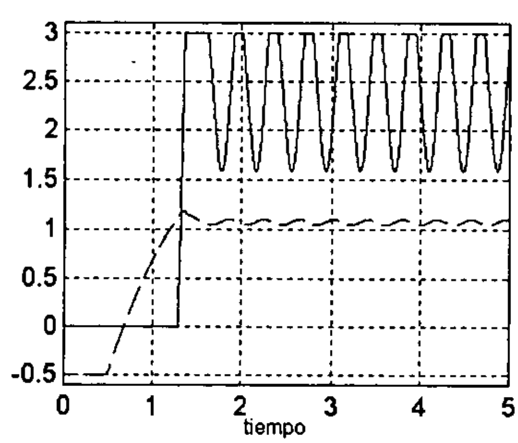
Al igual que en el caso de la respuesta escalón, el retardo tiene efecto sobre la frecuencia con que oscila la neurona, sólo que ahora, a diferencia del escalón que siempre mantendrá su carácter oscilatorio, existe un límite para que el estado oscilatorio se pueda sostener, a partir del cual las oscilaciones se amortiguan hasta llegar a un estado estable, o si este tiempo de retardo es lo suficientemente pequeño, la salida alcanza un estado estable sin pasar por un estado oscilatorio. Dadas estas características de la respuesta de la neurona, se podrían relacionar con los tipos de respuestas de un sistema de segundo orden; cuando el sistema cambia de estado sin presentar oscilación, como en el primer caso, se puede considerar como una respuesta sobreamortiguada; cuando se presentan oscilaciones que se amortiguan, como en el segundo caso, se puede ver como una respuesta subamortiguada; y como en el último caso donde la neurona oscila libremente, se puede considerar como una respuesta no amortiguada. Dado que cuando se presenta un comportamiento subamortiguado, con el paso del tiempo la forma de la carga y descarga de la actividad de la neurona tiende a variar con mayor lentitud al ir disminuyendo la amplitud de la respuesta, hay una tendencia a disminuir la frecuencia de las oscilaciones, lo que no permite determinar una frecuencia característica con que oscila la neurona, por lo que sólo es posible hacer esto únicamente en el caso en que la respuesta es del tipo no amortiguado. Por esta razón, la frecuencia no resulta ser un buen parámetro para comparar estos tipos de respuesta. Otro problema que se presenta al tratar de determinar cómo varia la respuesta al variar los parámetros de la neurona es debido a que fácilmente se alcanza la saturación por uno o ambos lados de las oscilaciones, por lo que sólo se pueden caracterizar y cuantificar las variaciones de amplitud en un rango muy reducido, además de que al saturarse la respuesta, como ésta es retroalimentada, se ve afectada a la actividad de la neurona y consecuentemente la forma en que responde. Respecto al retardo de la respuesta de la neurona, nuevamente el retardo intrínseco no se ve afectado, por lo que el retardo varía la misma cantidad que el retardo axonal, teniéndose $\phi = 0.705$, $\phi = 0.765$ y $\phi = 0.845$ respectivamente.

b) Peso de la Autosinápsis

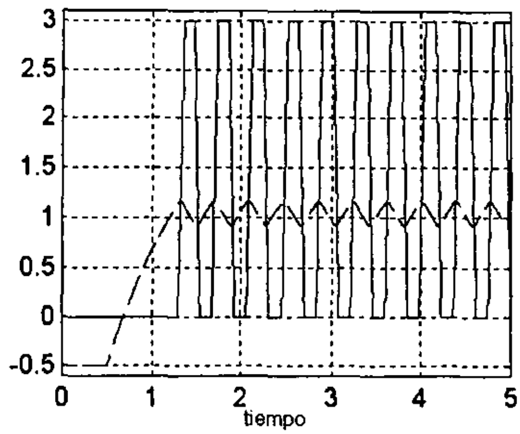
Para el caso del peso de la autosinápsis, las siguientes gráficas muestran la respuesta correspondiente a $w_r = -0.5$, $w_r = -0.6$ y $w_r = -1$.



a) $w_r = -0.5$



b) $w_r = -0.6$



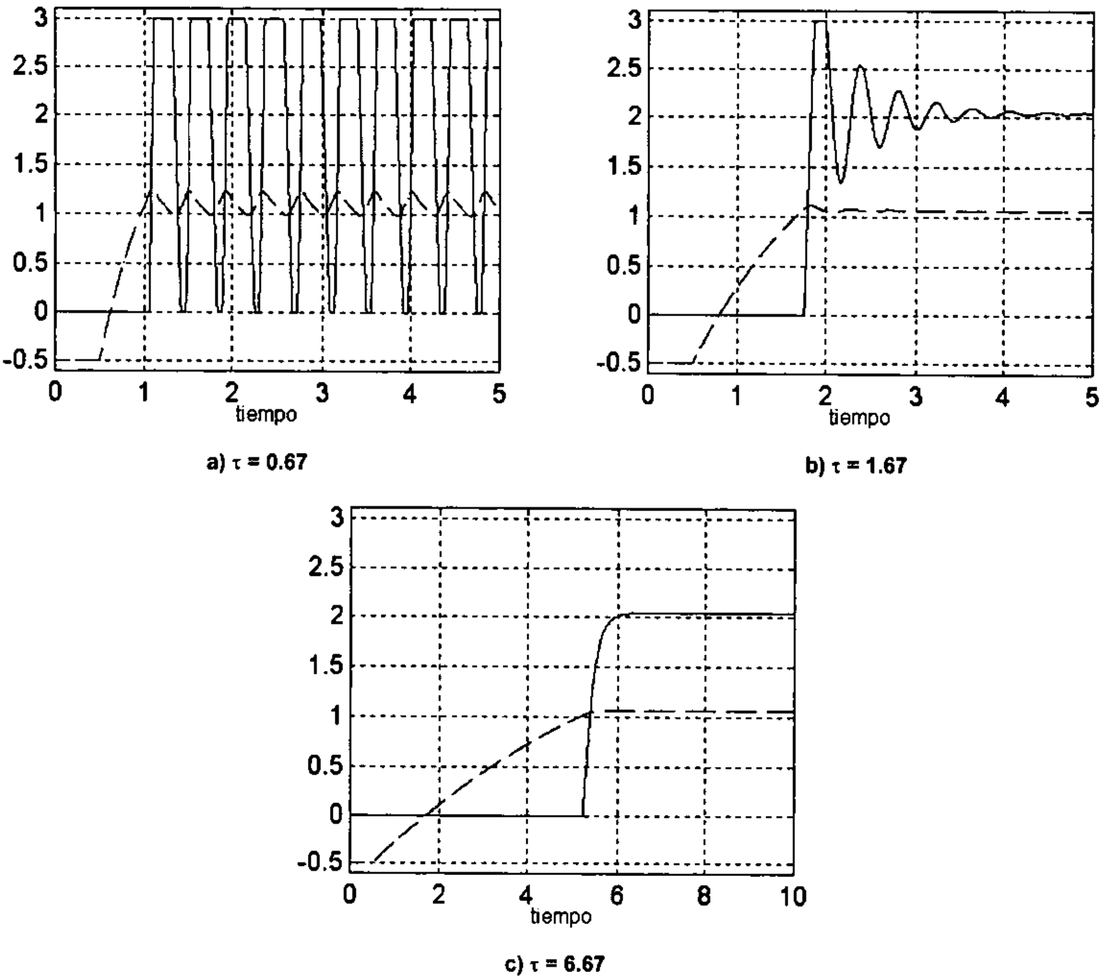
c) $w_r = -1$

Gráfica II.11 Variaciones en la respuesta de la neurona en función del peso de la retroalimentación
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Como se puede observar, el peso de la autosinápsis tiene el efecto de modificar la amplitud de las oscilaciones, existiendo límites en el valor de este peso para seguir obteniendo una oscilación sostenida. El límite superior está impuesto por la saturación de la rampa, que no le permite a las oscilaciones sobrepasar los límites de saturación, como se ve en el tercer caso; en el límite inferior, el cual al ser alcanzado, las oscilaciones se amortiguan y no puede mantenerse oscilando la neurona, como se da en el tercer caso. Además, otro efecto notable del peso de la retroalimentación es que afecta directamente al *offset* de la respuesta, considerándolo como el valor medio de la señal; mientras mayor sea la retroalimentación menor es el offset de la salida, ya que al restarse a las otras entradas (por el hecho de ser negativa) tiende a disminuir el valor final de la actividad de la neurona y consecuentemente el nivel de la salida. En cuanto al retardo, como ya se comentó, no lo afecta a la respuesta de la neurona, por lo que éste se conservó en todos los casos en $\phi = 0.795$.

c) Constante de Tiempo de Integración

El efecto de este parámetro se muestran a continuación para el caso de $\tau = 0.67$, $\tau = 1.67$ y $\tau = 6.67$.

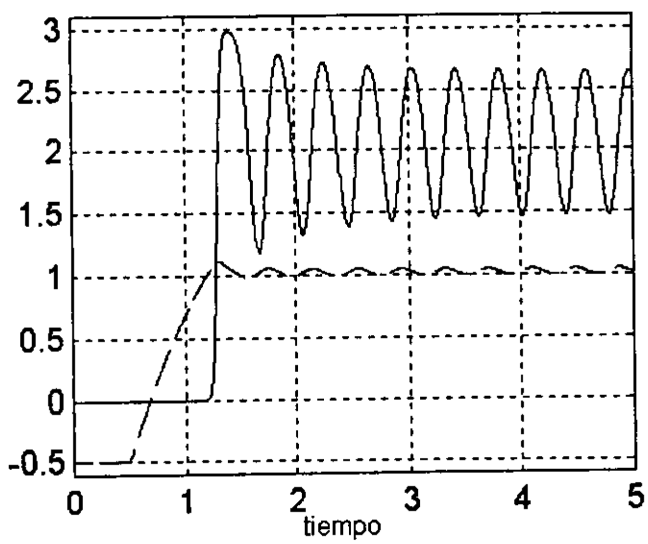


Gráfica II.12. Variaciones en la respuesta de la neurona en función de la constante de tiempo del integrador
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En este caso tenemos que el efecto de la constante de tiempo del integrador nuevamente es producir cambios en la rapidez con que varía la actividad de la neurona (teniendo como consecuencia el hacer variar el retardo intrínseco de la neurona, produciendo retardos $\phi = 0.565$, $\phi = 1.255$ y $\phi = 4.722$ respectivamente), así como la rapidez con que varía la salida, lo que, según se ve, afecta al ciclo completo de la oscilación, pudiéndose presentar alguno de los tipos de respuesta que se habían mencionado anteriormente, como si fuera un sistema de segundo orden.

Neurona con función de activación sigmoide

Cuando se utiliza una función de activación sigmoide de tipo logística, en términos generales podemos decir que la respuesta es similar a la de la rampa con saturación, la salida tiene una variación paulatina entre los valores máximo y mínimo entorno al valor de umbral, con la diferencia de que en este caso la pendiente con que varía la salida no es constante. Para hacer una comparación entre la respuesta entre una neurona con función de activación rampa con saturación y una con función de activación logística veremos el comportamiento de la neurona con los mismos parámetros característicos que en el caso anterior. Aquí, cuando hagamos referencia a la pendiente de la sigmoide, estaremos haciendo referencia a la pendiente máxima de la sigmoide, la cual se va a dar en el punto de inflexión. Entonces, al igual que en el caso anterior, como referencia tenemos en la gráfica siguiente la respuesta de la neurona teniendo como parámetros de operación los siguientes: $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$, $\theta = 1$ y $M = 30$.



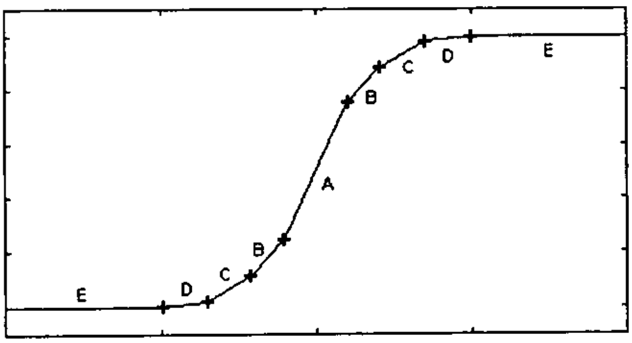
Gráfica II.13. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación logística con parámetros $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$, $\theta = 1$ y $M = 30$
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En esta gráfica podemos ver desde un inicio las diferencias con respecto al caso anterior, aunque cualitativamente son similares, hay diferencias cuantitativas importantes; aquí la salida presenta cambios más suaves, lo cual se nota claramente en las crestas y los valles de la oscilación, los cuales son más redondeados y en este caso no alcanzan la saturación.

Las diferencias en la respuesta al usar una función rampa con saturación y una sigmoide está en que en la sigmoide la pendiente nunca es constante, además de que en todo momento está variando por aproximarse asintóticamente a los valores máximo y mínimo, afectando notoriamente en los valores cercanos al punto de inflexión donde los cambios en la pendiente son notorios.

Una primer consecuencia de este tipo de respuesta es que, dado el carácter asistólico de la respuesta, en todo momento la neurona está presentando una salida diferente de cero, y que por muy pequeña que ésta sea, su efecto puede llegar a ser significativo después de un cierto tiempo de estar siendo retroalimentada, y esto es especialmente notorio cuando la pendiente de la sigmoide es muy pequeña. En estos casos el efecto que se tiene es que el nivel de actividad de reposo de la neurona se ve modificado por esta salida que es retroalimentada. Como la respuesta de la neurona nunca es cero, para este tipo de neurona también se debe definir de diferente forma la manera de medir el retardo, ya que en todo momento la neurona presenta una salida mayor que cero. Dado que en este estudio se utilizan pendientes relativamente altas y tiempos muy cortos antes de que se aplique alguna entrada externa a la neurona, se pueden considerar despreciables estos efectos. Para medir el retardo de la neurona se considera el tiempo cuando la salida presenta una variación mayor a una milésima del valor máximo de respuesta de la neurona. Haciendo esta consideración, para el caso de la respuesta de la neurona de referencia se tiene un retardo $\phi = 0.685$.

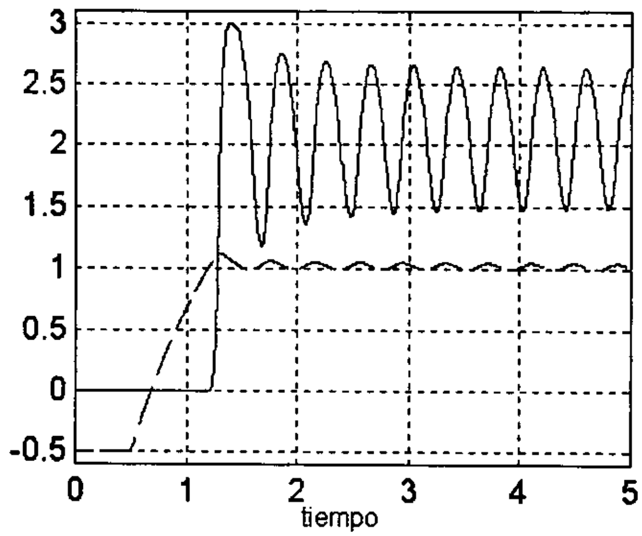
Para entender como está afectando la variación de la pendiente, podemos hacer una aproximación de la sigmoide por medio de varios segmentos de recta con pendientes diferentes, entonces, podemos ver cada intervalo aproximado por un segmento de recta como una neurona con función de activación rampa, como en el ejemplo que se muestra en la siguiente figura, donde la función logística está aproximada por nueve segmentos de recta para todo su dominio. Cuando el valor de una señal se aproxima a la región donde se presenta la menor pendiente (región D), la salida comienza a variar muy lentamente; al pasar a las regiones de pendiente intermedia (regiones B y C), el efecto que producen ya es notorio, y aunque el mayor efecto es producido cuando se encuentra en la región central (región A), donde se tiene la mayor pendiente, el paso por las regiones de pendiente media es lo que produce las principales diferencias con respecto a utilizar solamente una rampa.



Gráfica II.14. Aproximación de la sigmoide con segmentos de recta

Los efectos ya mencionados corresponden a la utilización de rampas con pendientes menores, que como se vio anteriormente, hace que la neurona responda con mayor lentitud, lo que produce el efecto de "suavizar" la salida este tipo de neurona.

Una forma de verificar lo anterior es utilizar la aproximación descrita como función de activación en una neurona. Al hacer esto, se obtiene la respuesta que se muestra en la gráfica siguiente.



Gráfica II.15. Neurona en estado oscilatorio autosostenido con función de activación logística aproximada con parámetros $\delta = 0.1$, $\tau = 1$, $w_r = -0.7$, $\theta = 1$ y $M = 30$
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

A simple vista el resultado obtenido de utilizar la función logística aproximada es igual al de utilizar la función exacta, no presenta diferencias apreciables, sin embargo, si observamos con detalle, con el paso del tiempo las pequeñas diferencias se van acumulando, como se observa en la siguiente gráfica. Al usar la aproximación de la sigmoide se produce una muy pequeña variación en el retardo, la amplitud y forma de la respuesta, pero principalmente un cambio en la frecuencia de la oscilación que con el transcurso del tiempo provoca un defasamiento entre las dos respuestas.

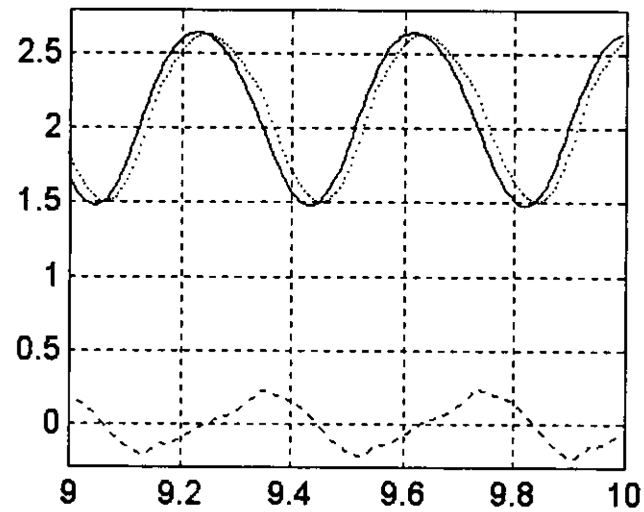
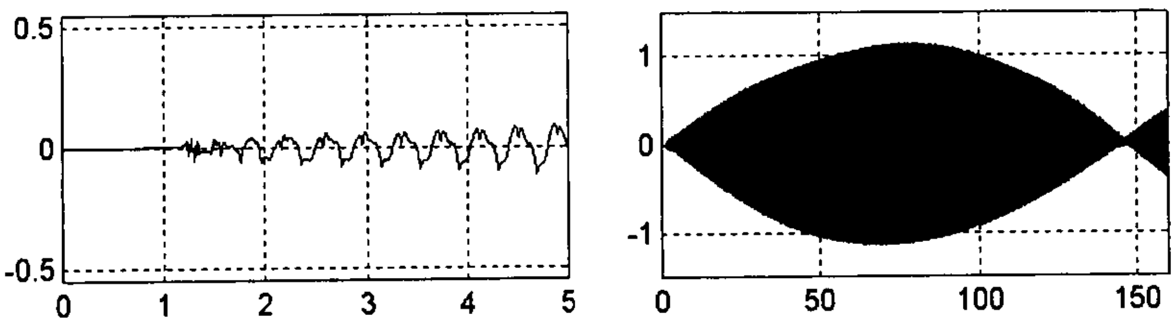


Figura II.16. Comparación entre la respuesta de la sigmoide y su aproximación
_____ Respuesta con la sigmoide . . . . . Respuesta con la aproximación _ _ _ _ _ Error

Esto hace que el error vaya aumentando mientras el defasamiento crece, pero al sobrepasar el defasamiento los 180°, las dos señales vuelven a aproximarse disminuyendo el error, repitiéndose esto nuevamente de forma cíclica. La siguiente gráfica muestra el error producido por utilizar la aproximación, cómo se dan estas variaciones de forma cíclica. Cabe observar que cuando las dos señales vuelven a coincidir, el error no disminuye hasta cero, debido principalmente a las diferencias en amplitud entre las dos señales.

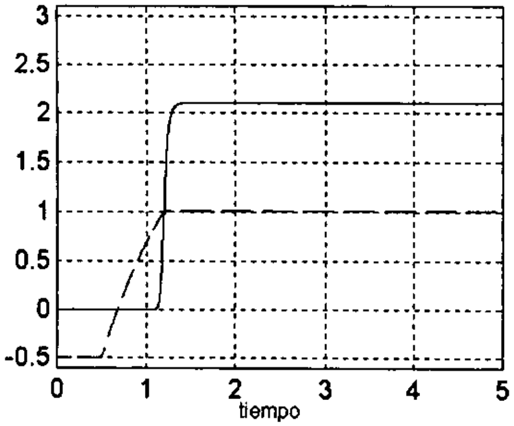


Gráfica II.17. Error producto de utilizar una función de activación logística aproximada

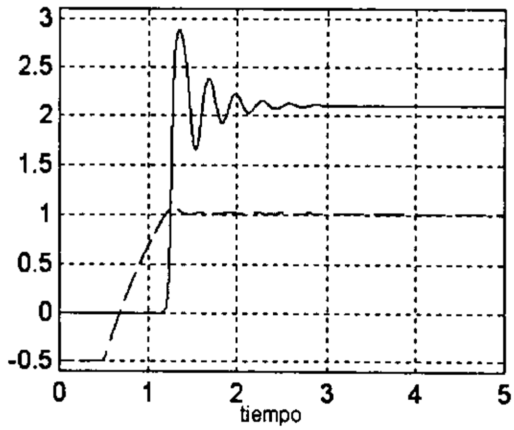
Dado lo anterior podemos considerar que la aproximación es aceptable y por tanto lo antes expuesto explica las diferencias entre utilizar una función de activación rampa con saturación y una función sigmoide.

a) Retardo Axonal

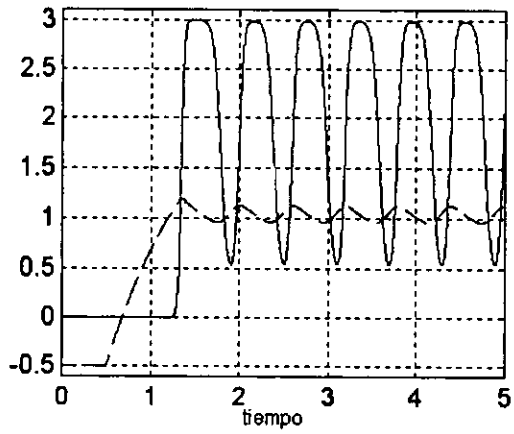
El efecto de las variaciones del tiempo de retardo se muestran en las siguientes gráficas, donde a la neurona nuevamente se le dieron los mismos parámetros que en el caso de la rampa, $\delta = 0.01$, $\delta = 0.07$ y $\delta = 0.15$.



a) δ = 0.01



b) δ = 0.07



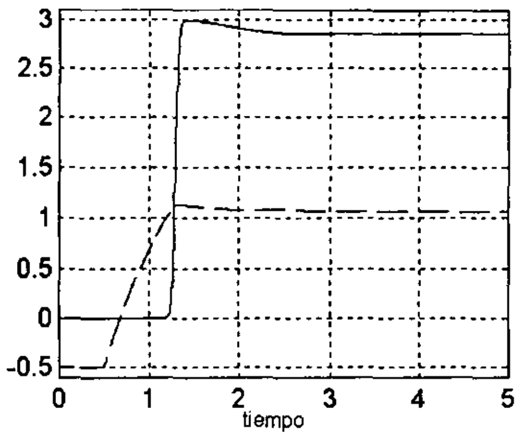
c) δ = 0.15

Gráfica II.18. Variaciones en la respuesta de la neurona en función del tiempo de retardo
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

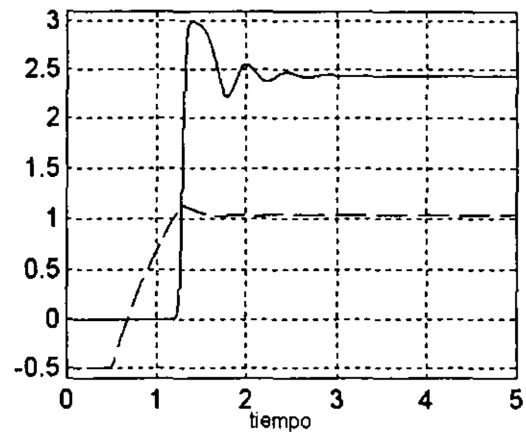
Aquí nuevamente vemos que cualitativamente el comportamiento de la neurona es similar al de la rampa, se presentan respuestas sin oscilación, oscilaciones amortiguadas y oscilaciones no amortiguadas, sin embargo, los rasgos característicos de las oscilaciones nuevamente se ven suavizados, lo cual se refleja como un amortiguamiento mayor en el segundo caso, una menor amplitud de las oscilaciones en el tercer caso y una frecuencia ligeramente mayor de las oscilaciones en todos los casos. En el caso del retardo nuevamente se observa que únicamente presenta cambios de la misma magnitud que el retardo axonal (ϕ = 0.595, ϕ = 0.655 y ϕ = 0.735 respectivamente).

b) Peso de la Autosinápsis

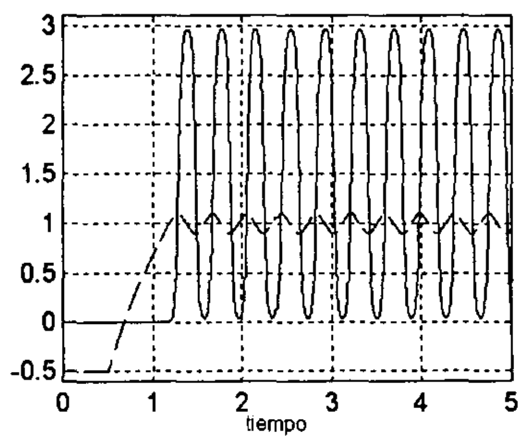
A continuación se muestran las gráficas correspondientes a las variaciones de la respuesta al variar el peso de la retroalimentación, para los casos en donde $w_r = -0.5$, $w_r = -0.6$ y $w_r = -1$.



a) $w_r = -0.5$



b) $w_r = -0.6$



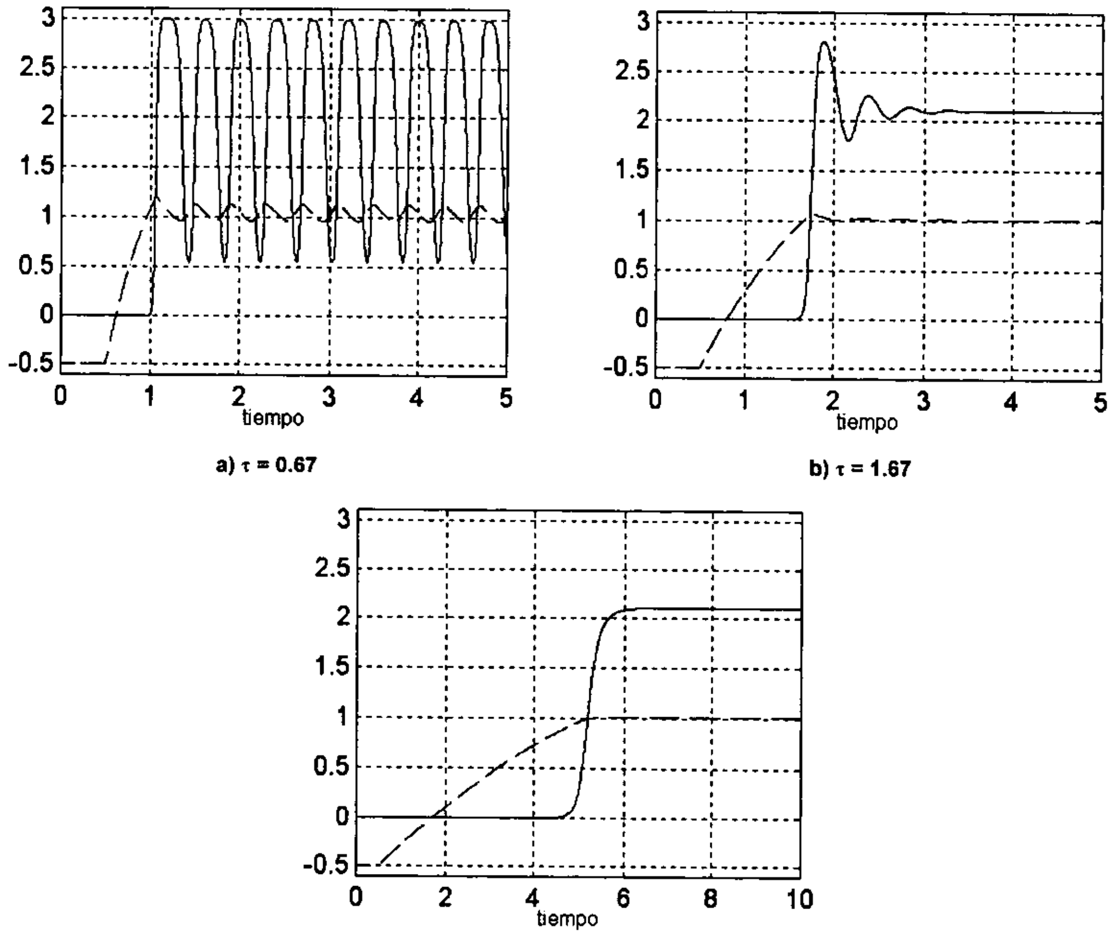
c) $w_r = -1$

Gráfica II.19. Variaciones en la respuesta de la neurona en función del peso de la retroalimentación
a) $w_r = -0.5$ b) $w_r = -0.6$ c) $w_r = -1$
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En estos resultados nuevamente se observan las diferencias en la salida, siendo los más notorios el segundo caso, en donde las oscilaciones se amortiguan rápidamente y no permiten que se sostengan las oscilaciones, y en el tercer caso en que las oscilaciones no alcanzan la saturación, reduciendo ligeramente la frecuencia y aumentando el offset de la salida, mientras que en todos los casos se mantiene el mismo retardo que en la neurona de referencia.

c) Constante de Tiempo de Integración

Para observar el efecto de la constante de tiempo del integrador sobre la respuesta, se tienen las siguientes gráficas, donde $\tau = 0.67$, $\tau = 1.67$ y $\tau = 6.67$.



Gráfica II.20. Variaciones en la respuesta de la neurona en función de la constante de tiempo del integrador
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En este caso, nuevamente la diferencia apreciable está en que en este caso los cambios en la salida son más suaves, es decir, se dan más lentamente, como consecuencia de que la actividad de la neurona varía más lentamente, lo que produce que en la segunda gráfica sea claramente notable un amortiguamiento mayor y que en todos los casos varíe notablemente el retardo de la salida, $\phi = 0.490$, $\phi = 1.075$ y $\phi = 4.002$ para cada caso, en donde se observa que, en comparación con el caso de la rampa con saturación, estos retardos son menores debido al carácter asintótico de la sigmoide, siendo mayor este efecto para tiempos de integración mayores.

CAPÍTULO 3

CIRCUITO CON DOS NEURONAS RETROALIMENTADAS EN CASCADA

El circuito con dos neuronas que se utilizó para estas pruebas se forma colocando en serie dos elementos del tipo de los descritos anteriormente unidos con un peso de conexión entre neuronas, y se realizaron pruebas con diferentes tipos de función de activación y diferentes parámetros de las neuronas. Con estas condiciones, la respuesta observada del circuito corresponde a la respuesta de la segunda neurona, y su respuesta dependerá de los parámetros que regulan el comportamiento de ambas neuronas.

La figura III.1 muestra el circuito con las dos neuronas (cada bloque de neurona representa un circuito como el descrito anteriormente).

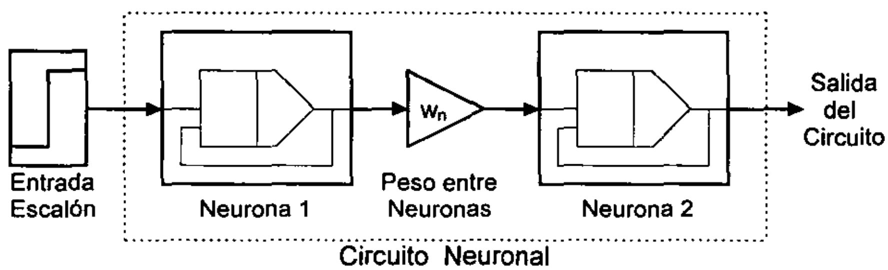


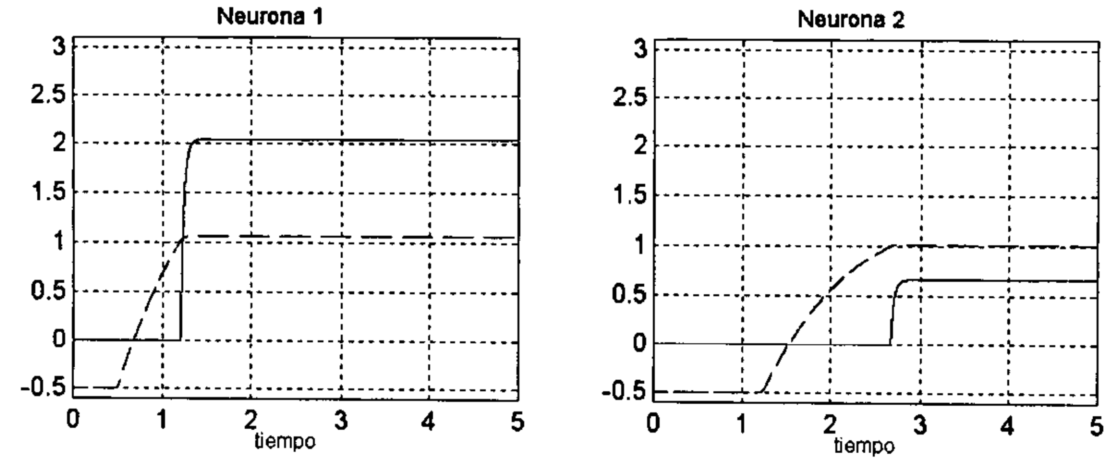
Figura III.1. Circuito con dos neuronas.

Dado el circuito anterior, nuestro interés se centra en caracterizar la respuesta del circuito y en las condiciones con que generan cada una de estas respuestas. Una primera aproximación a la respuesta del circuito la podemos hacer esperando que la respuesta del circuito sea similar a la de una neurona, ya que la salida del circuito es precisamente una neurona como las que se estudiaron anteriormente. Partiendo de este hecho podemos revisar las condiciones en que se presentan cada una de las respuestas del tipo de las de un sistema de segundo orden (sobreamortiguado, subamortiguado y no amortiguado), y se irán destacando las diferencias que se produzcan en la respuesta del circuito, dado que la respuesta final dependerá de la forma en que se acoplen las respuestas de ambas neuronas.

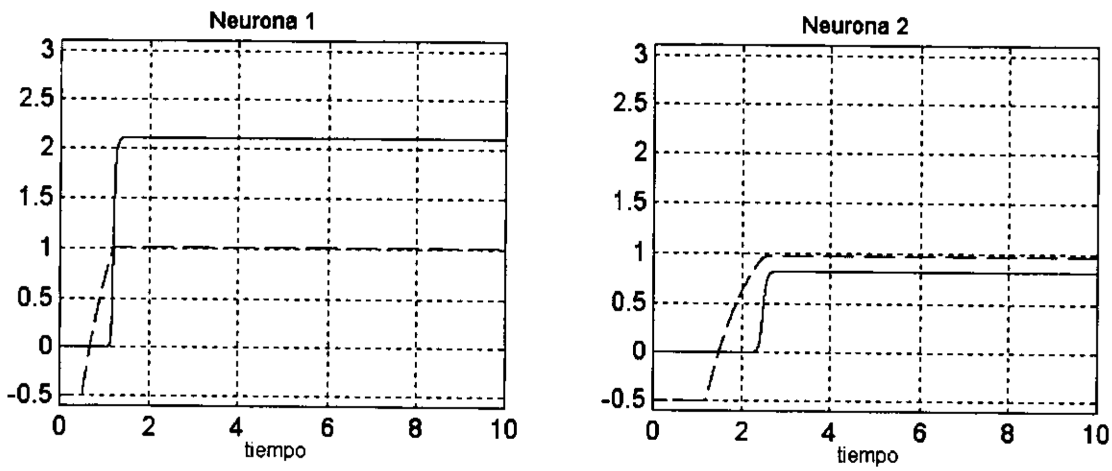
Respuesta sobreamortiguada

Al igual que en el caso de la respuesta de una sola neurona, el circuito puede presentar una respuesta de tipo sobreamortiguada. Para que esta respuesta se dé, es necesario que la primera neurona no oscile, ya que un comportamiento oscilatorio en la primer neurona siempre inducirá oscilaciones en la segunda neurona. Entonces, si la primera neurona tiene una respuesta sobreamortiguada, a la entrada de la segunda neurona se tendrá algo muy similar a un escalón, con la única diferencia que el cambio en la entrada no es instantáneo, sino que ésta aumenta gradualmente hasta alcanzar el valor estacionario, por lo que para tener una respuesta sobreamortiguada sólo basta dar a la segunda neurona las mismas condiciones similares a las que se tenían anteriormente para este tipo de respuesta.

Las siguientes gráficas muestran la respuesta del circuito con este tipo de comportamiento utilizando primero neuronas con función de activación rampa con saturación y después con función de activación sigmoide, en ambos casos con una pendiente M = 30, una ganancia del integrador $\tau = 1$, un peso de retroalimentación $w_r = 0.7$, un peso entre neuronas $w_n = 0.97$, y un tiempo de retardo un tiempo de retardo $\delta = 0.01$ para ambas neuronas.



a) Función de activación rampa con saturación con M = 30, τ = 1, w_r = 0.7, w_n = 0.97 y δ = 0.01



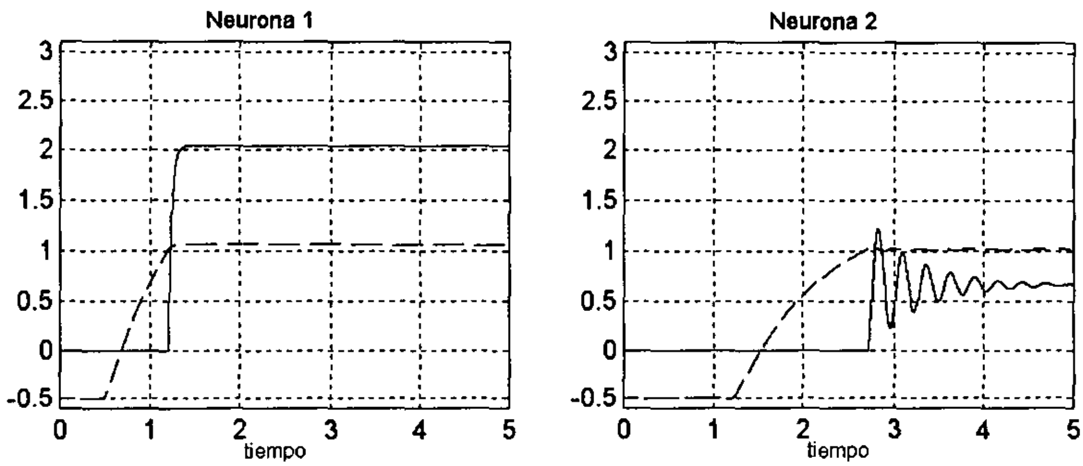
b) Función de activación sigmoide con M = 30, τ = 1, w_r = 0.7, w_n = 0.97 y δ = 0.01

Gráfica III.1. Respuesta sobreamortiguada del circuito.
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

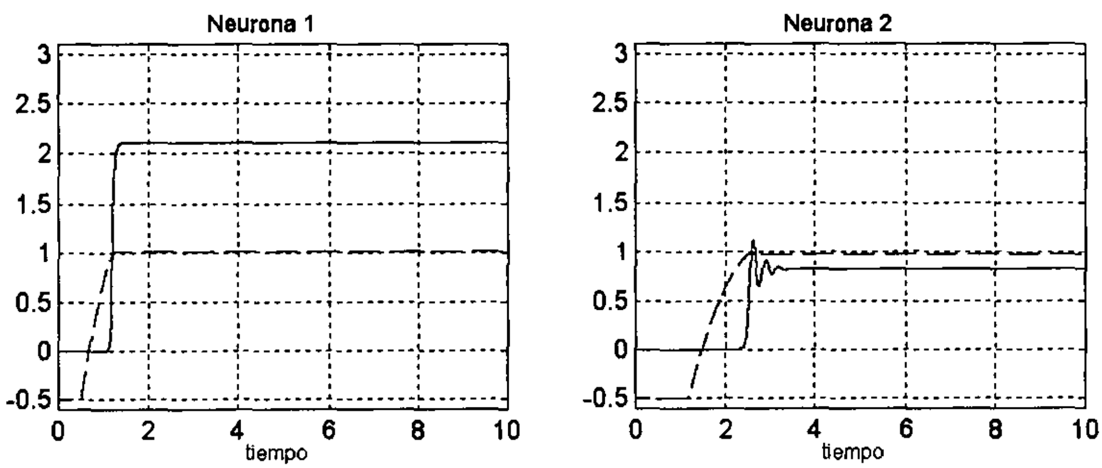
Este tipo de respuesta del circuito no resulta ser de particular interés ya que el resultado final es el mismo que si se tuviera una sola neurona aislada. Por la misma razón, para este tipo de respuesta no se consideran neuronas con función de activación escalón, ya que como el cambio en la salida es instantáneo, la respuesta del circuito sería nuevamente un escalón con un cierto retardo con respecto a la excitación del circuito, mismo resultado que se puede obtener con una sola neurona, por lo que este circuito también carece de interés.

Respuesta subamortiguada

Para obtener este tipo de respuesta del circuito se puede conseguir de varias formas diferentes. La primera es haciendo que la primer neurona tenga una respuesta sobreamortiguada para que, al igual que en el caso anterior, la entrada de la segunda neurona sea algo similar a un escalón, y el comportamiento sobreamortiguado esté dado por las características de la segunda neurona. Esto se muestra en la siguiente gráfica, donde se tienen nuevamente circuitos con funciones de activación rampa con saturación y sigmoide, con tiempo de retardo para la segunda neurona δ_2 = 0.065 y manteniendo los demás parámetros igual que en el caso de la respuesta sobreamortiguada.



a) Función de activación rampa con saturación con δ_2 = 0.065

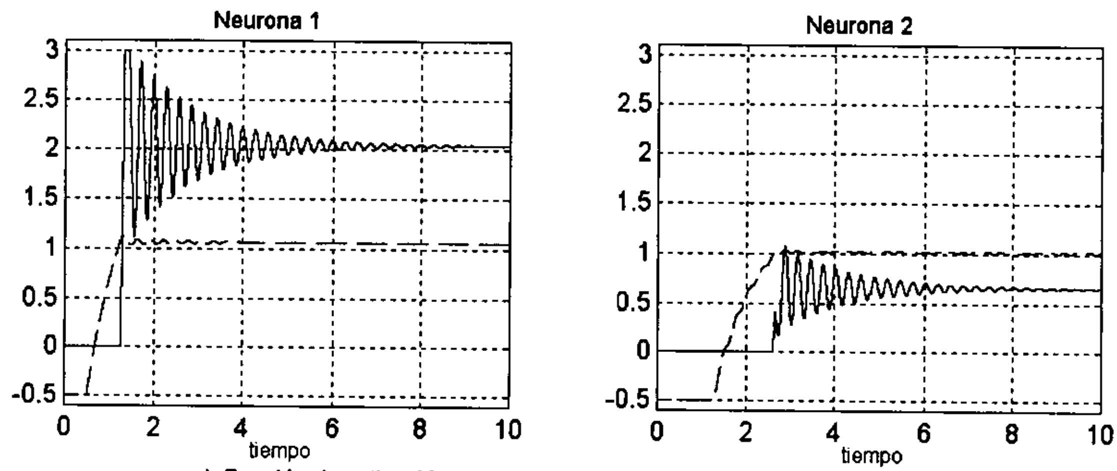


b) Función de activación sigmoide con δ_2 = 0.065

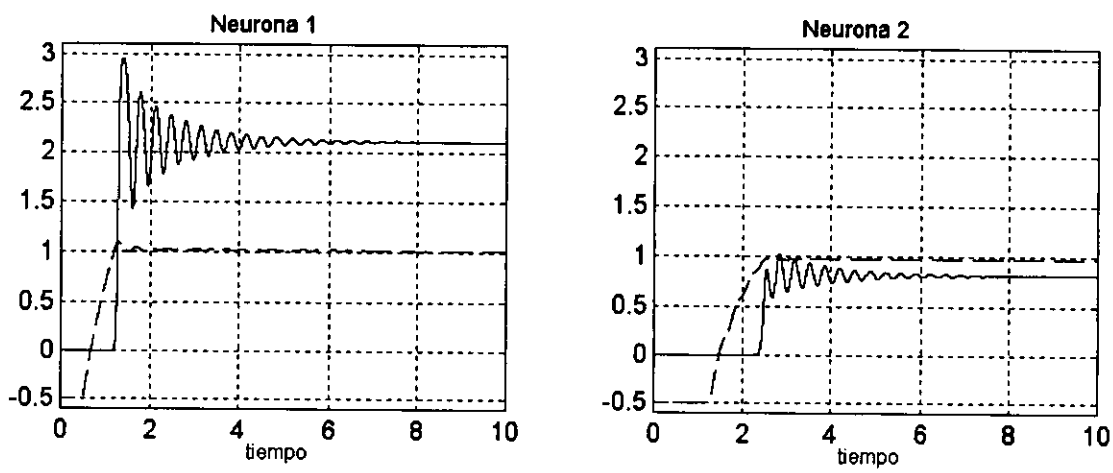
Gráfica III.2. Respuesta subamortiguada del circuito con comportamiento sobreamortiguada de la primer neurona.

_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Una segunda forma de obtener una respuesta similar del circuito, es produciendo una respuesta subamortiguada en la primer neurona y estableciendo en la segunda las condiciones con las que presentaría por si sola una respuesta sobreamortiguada. Estas condiciones las podemos ver en la siguiente gráfica donde a la primer neurona se le da un retardo axonal δ_1 = 0.072 y a la segunda de δ_2 = 0.01 para el caso de la función de activación rampa con saturación y un retardo axonal δ_1 = 0.085 en la primer neurona y δ_2 = 0.01 para la segunda en el caso de la función de activación sigmoide, conservando los demás parámetros de las neuronas.



a) Función de activación rampa con saturación con δ_1 = 0.072 y δ_2 = 0.01

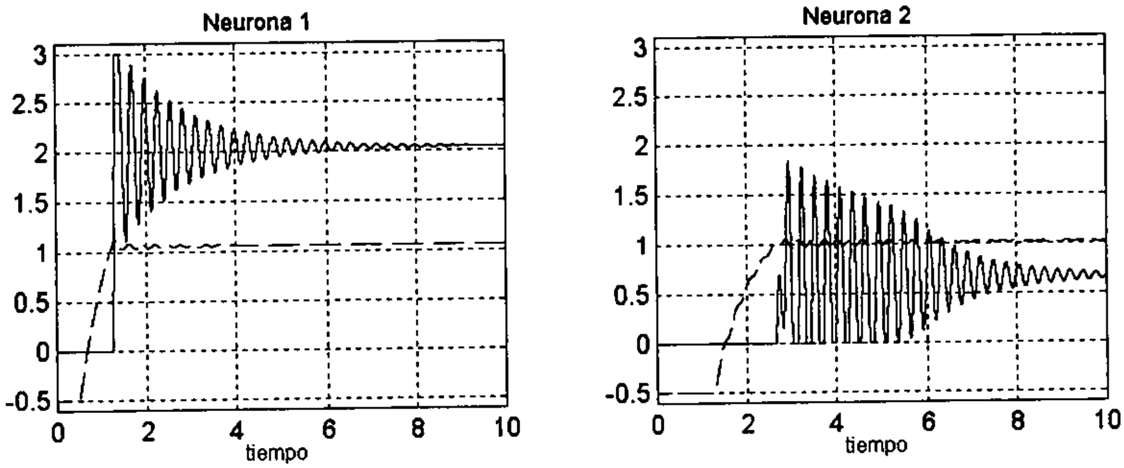


b) Función de activación sigmoide con δ_1 = 0.085 y δ_2 = 0.01

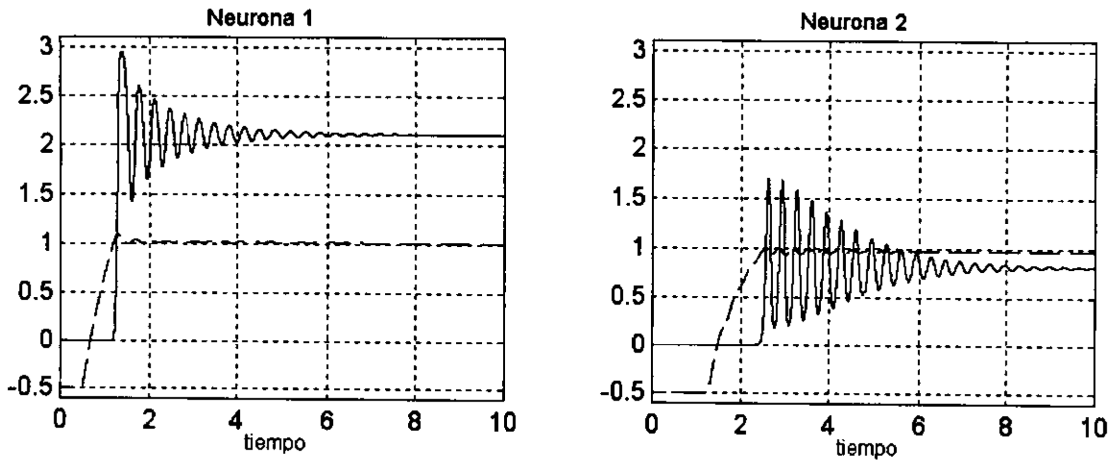
Gráfica III.3. Respuesta subamortiguada del circuito con comportamiento subamortiguado de la primer neurona.

_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Adicionalmente a las formas mencionadas de obtener una respuesta de este tipo, esto también se puede lograr si establecemos los parámetros de ambas neuronas de tal forma que si se encontraran aisladas presentaran una respuesta subamortiguada. En este caso, al menos mientras existan oscilaciones en las respuestas, se tendrá un oscilador forzado (la segunda neurona por efecto de la primera), por lo que la respuesta del circuito resulta ahora será más compleja, no pudiendo obtenerse simplemente con una sola neurona. La gráfica siguiente nos muestra circuitos con estas características, para el caso de la rampa con saturación se tienen neuronas con retardos axonales δ_1 = 0.072 y δ_2 = 0.065 y para el caso de la sigmoide se tienen retardos axonales δ_1 = 0.085 y δ_2 = 0.075, manteniendo sin cambio los demás parámetros.



a) Función de activación rampa con saturación con δ_1 = 0.072 y δ_2 = 0.065



b) Función de activación sigmoide con $\delta_1 = 0.085$ y $\delta_2 = 0.075$

Gráfica III.4. Respuesta subamortiguada del circuito con comportamiento subamortiguado de la primer neurona.

_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

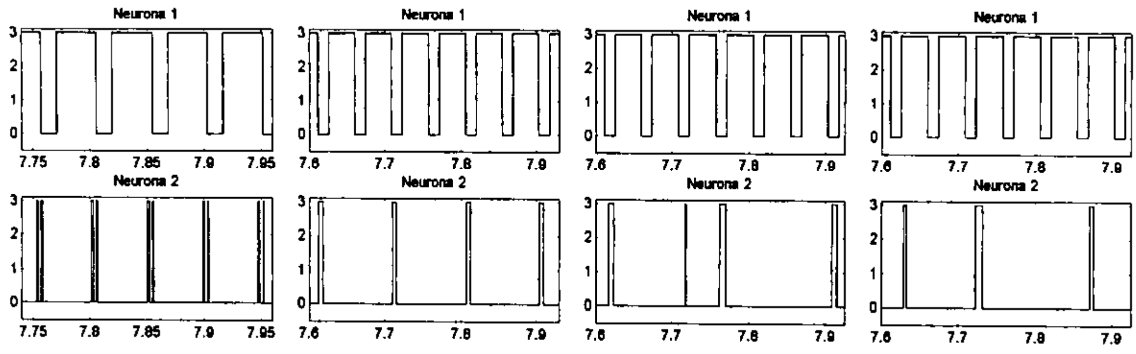
En estos resultados podemos ver que este circuito presenta una respuesta que no se puede obtener una sola neurona. Aquí la respuesta del circuito también presenta oscilaciones amortiguadas, pero su envolvente no decae exponencialmente, como cuando se tiene una neurona aislada (cuyo comportamiento es como el de la primer neurona que se muestra en la gráfica); aquí hay un período durante el cual la salida del circuito es una combinación de ambas oscilaciones. Cabe mencionar que no sólo se ve afectada la amplitud de las oscilaciones, sino que también se ve afectada su frecuencia.

Igual que en la respuesta sobreamortiguada, aquí no tiene sentido el considerar un circuito con función de activación escalón, ya que una neurona de este tipo con una excitación escalón, su respuesta sólo puede ser de dos tipos: presentar oscilaciones autosostenidas o mantener una respuesta constante en cualquiera de los niveles del escalón.

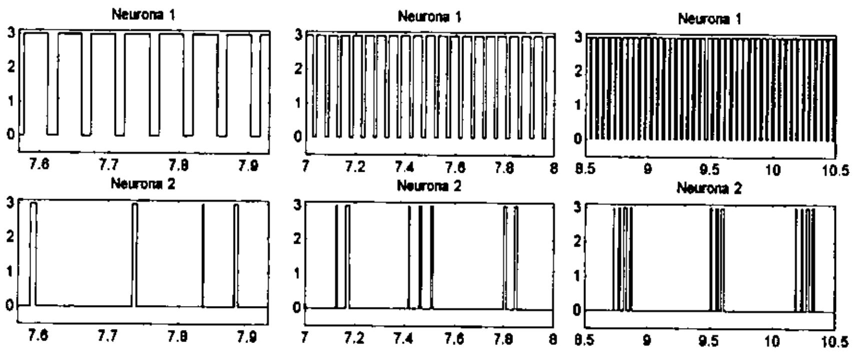
Respuesta no amortiguada

Este tipo de respuesta es el que presenta características más interesantes, ya que bajo ciertas condiciones se presentan comportamientos oscilatorios con mayor complejidad. Las condiciones necesarias para lograr que presente una respuesta con oscilaciones autosostenidas son varias. Una primera opción nuevamente es que la primer neurona presente una respuesta sobreamortiguada para que el efecto sobre la segunda sea nuevamente algo muy similar a un escalón, por lo que si a la segunda neurona se le dan las parámetros adecuados para que oscile. su respuesta será como la de una neurona aislada. Otra manera de lograr esta repuesta es haciendo que la primer neurona presente oscilaciones autosostenidas. Esta condición es suficiente para que el circuito presente una respuesta no amortiguada, ya que una excitación oscilatoria siempre producirá una respuesta con oscilaciones en este tipo de neuronas. Las características de esta oscilación dependerán ahora de las características de la segunda neurona.

Para obtener una respuesta oscilatoria se pueden utilizar circuitos formados con neuronas con función de activación escalón además de la rampa con saturación y la sigmoide; en este caso las oscilaciones tomarán la forma de un tren de pulsos. Las siguientes gráficas muestran la respuesta del circuito con función de activación escalón, en donde la primer neurona presenta una respuesta oscilatoria con un retardo axonal $\delta_1 = 0.01$ y se modifican los retardos de la segunda neurona en $\delta_2 = 0.001$, $\delta_2 = 0.005$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_2 = 0.02$, $\delta_2 = 0.03$, $\delta_2 = 0.05$ y $\delta_2 = 0.1$ para cada caso.



a) $\delta_2 = 0.001$ b) $\delta_2 = 0.005$ c) $\delta_2 = 0.01$ d) $\delta_2 = 0.02$

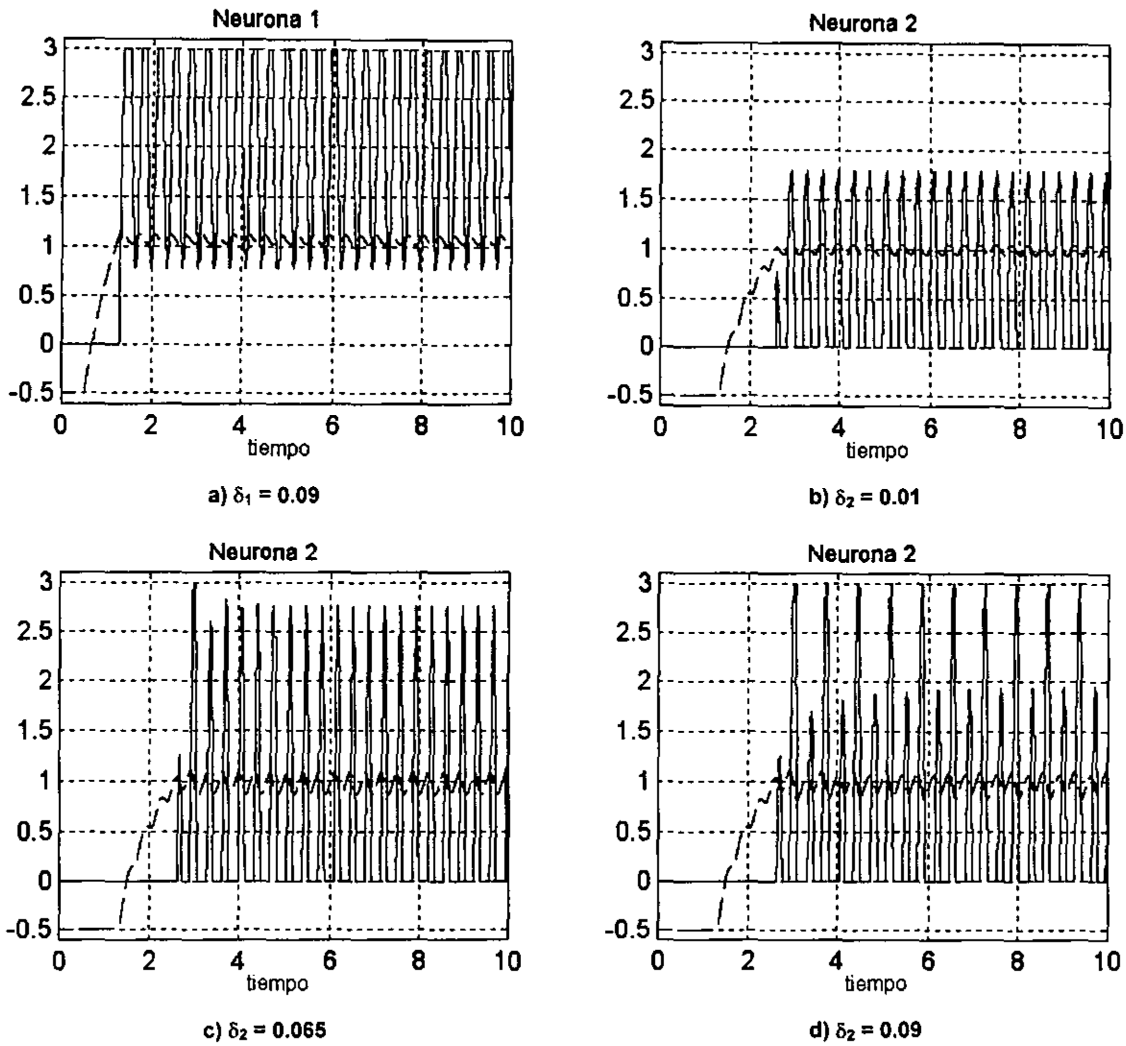


e) $\delta_2 = 0.001$ f) $\delta_2 = 0.001$ g) $\delta_2 = 0.001$

Gráfica III.5. Respuesta no amortiguada del circuito con función de activación escalón.
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

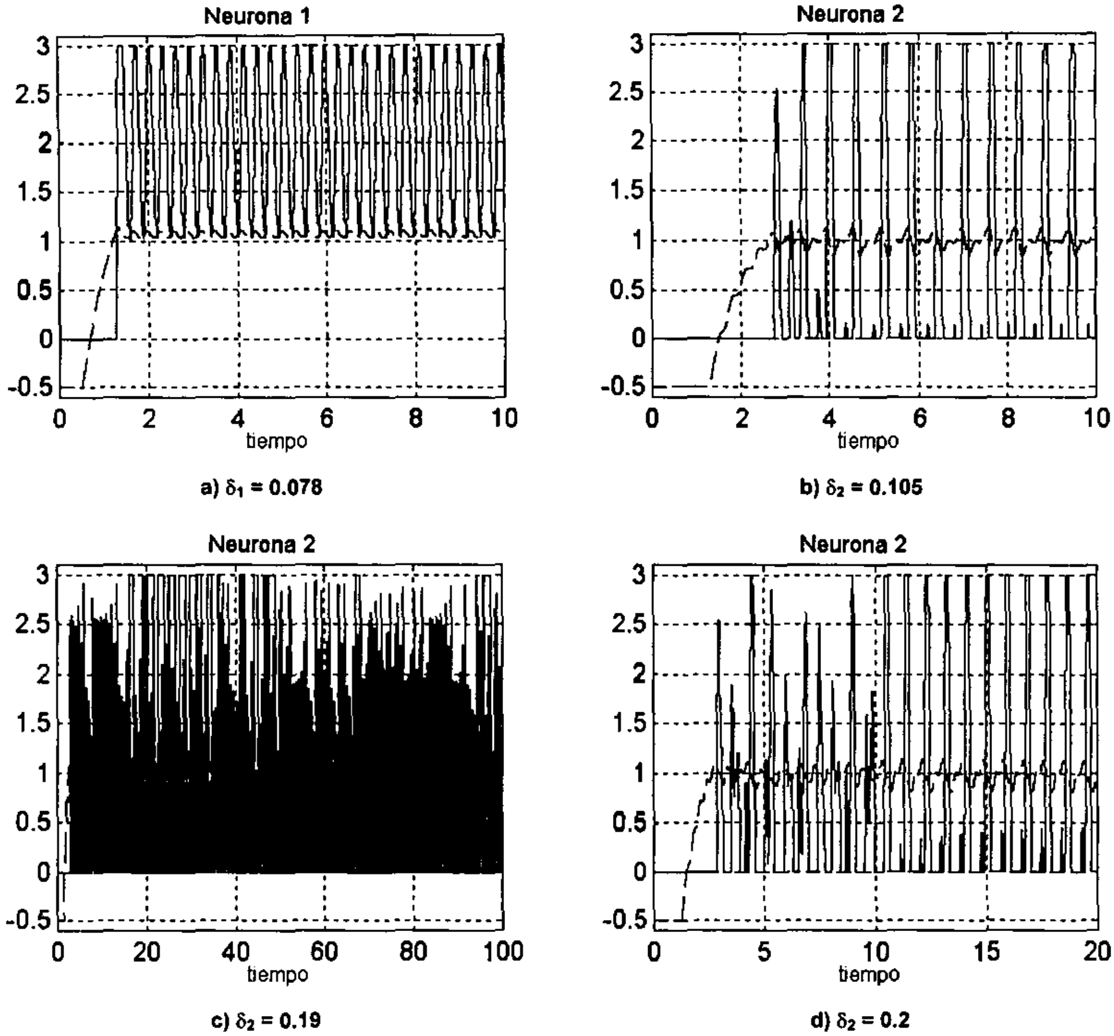
Aquí podemos ver como las condiciones de la segunda neurona son las que van a caracterizar las oscilaciones de la salida, puede presentar una ráfaga de pulsos por cada pulso de la entrada, presentar pulsos de manera irregular respecto a los de entrada o presentar ráfagas de pulsos con la misma frecuencia que los de entrada.

Para el caso de la función de activación rampa con saturación, en las siguientes gráficas podemos observar el efecto de la segunda neurona cuando la primera presenta oscilaciones sostenidas. Para la segunda neurona se modifica en cada caso el tiempo de retardo de tal manera que si tuviera una entrada escalón presentara cada uno de los comportamientos posibles. Aquí la primera presenta un retardo axonal $\delta_1 = 0.09$, y la segunda neurona $\delta_2 = 0.01$, $\delta_2 = 0.065$ y $\delta_2 = 0.09$ para cada caso, manteniendo los demás parámetros igual que en los tipos de respuesta anteriores.



Gráfica III.6. Respuesta no amortiguada del circuito con función de activación rampa con saturación.
a) Primer neurona. b), c) y d) Segunda neurona
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

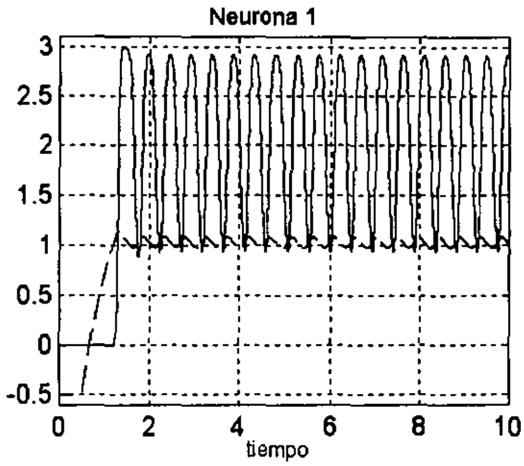
Aquí podemos ver que en todos los casos el circuito presenta oscilaciones que siempre serán de la misma frecuencia que las de la primer neurona, pero con características diferentes, que pueden simplemente seguir a su entrada, o presentar una respuesta cuya envolvente siga un patrón diferente, como en el último caso. Con este tipo de circuitos se pueden obtener patrones de respuesta de mayor complejidad que no se pueden obtener al utilizar una sola neurona, como los que se muestran a continuación.



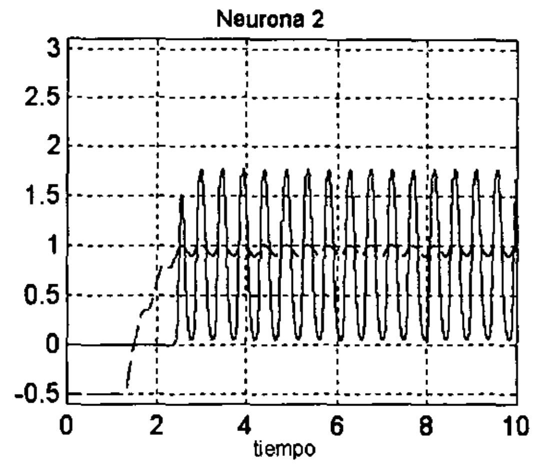
Gráfica III.7. Respuesta no amortiguada del circuito con función de activación sigmoide con respuestas irregulares. a) Primer neurona. b), c) y d) Segunda neurona
____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

En estas gráficas podemos observar características que no se dan en una neurona simple. En el tercer caso podemos observar una respuesta en donde el transitorio presenta una estructura irregular, y en el estado permanente es tiene un comportamiento periódico en el que cada ciclo está formado por tres oscilaciones de la primer neurona. En la segunda gráfica tenemos el caso en el la que no se ve un patrón de comportamiento regular, debido a que el período de la respuesta es extremadamente largo.

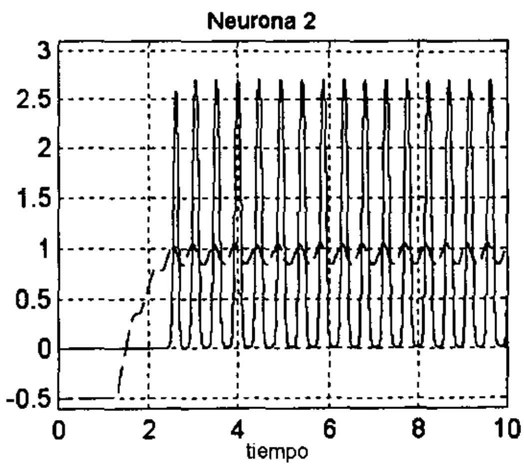
Cuando se tiene una función de activación sigmoide las características son muy similares a las que en el caso de la rampa con saturación, aunque el efecto que produce la segunda neurona es menos notable, ya que como se mencionaba anteriormente, el carácter asintótico provoca que se suavice todo cambio en la respuesta. Las siguientes gráficas muestran al circuito con un retardo axonal de $\delta_1 = 0.12$, y para la segunda neurona de $\delta_2 = 0.01$, $\delta_2 = 0.065$ y $\delta_2 = 0.09$ en cada caso.



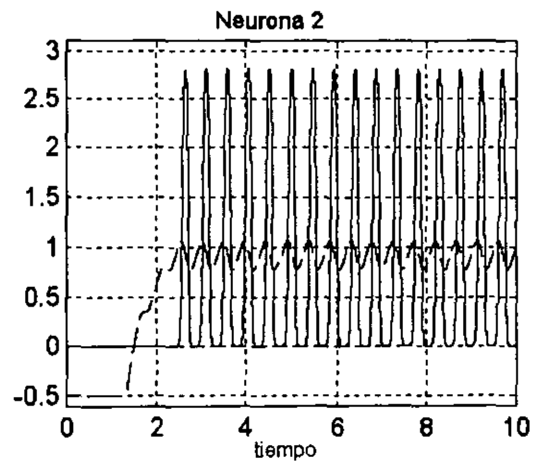
a) $\delta_1 = 0.12$



b) $\delta_2 = 0.01$



c) $\delta_2 = 0.065$

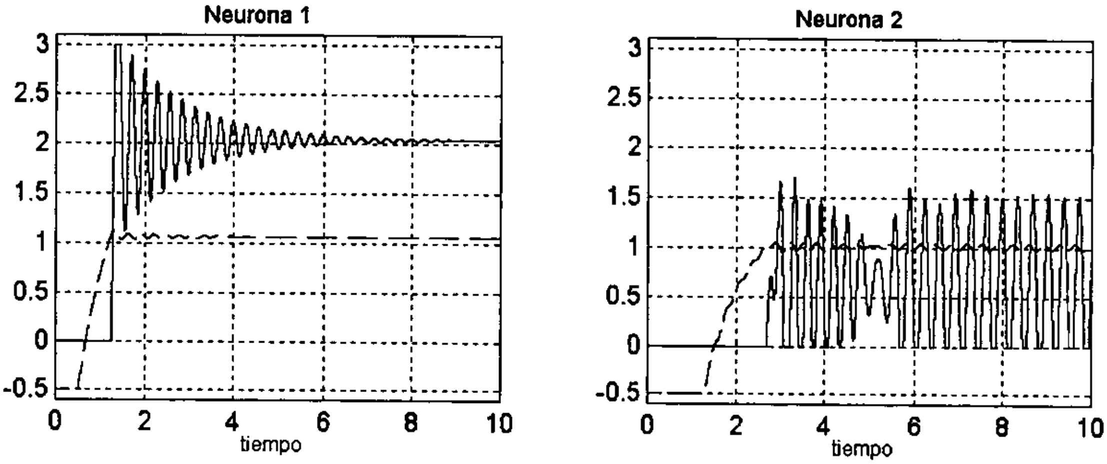


d) $\delta_2 = 0.09$

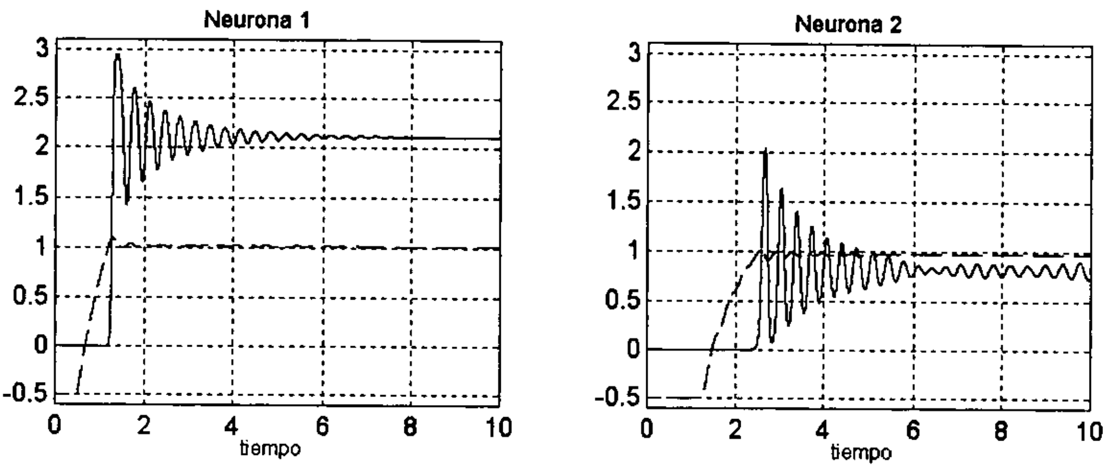
Gráfica III.8. Respuesta no amortiguada del circuito con función de activación sigmoide.
a) Primer neurona. b), c) y d) Segunda neurona
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ Actividad de la neurona

Un caso interesante se presenta cuando la segunda presenta una tendencia propia a oscilar, y la primer neurona presenta un comportamiento subamortiguado.

Al inicio, la respuesta tiende a seguir el comportamiento de la primer neurona, tanto en frecuencia como en forma, pero al disminuir la amplitud de las oscilaciones, el circuito tiende a oscilar de acuerdo con sus características propias, presentándose un fenómeno interesante durante esa transición, lo cual se muestra en las siguientes gráficas. Para las función de activación rampa con saturación se tiene un retardo $\delta_1 = 0.072$ para la primer neurona y $\delta_2 = 0.09$ para la segunda, mientras que para la función de activación sigmoide se tiene un retardo $\delta_1 = 0.085$ para la primer neurona y $\delta_2 = 0.102$ para la segunda.



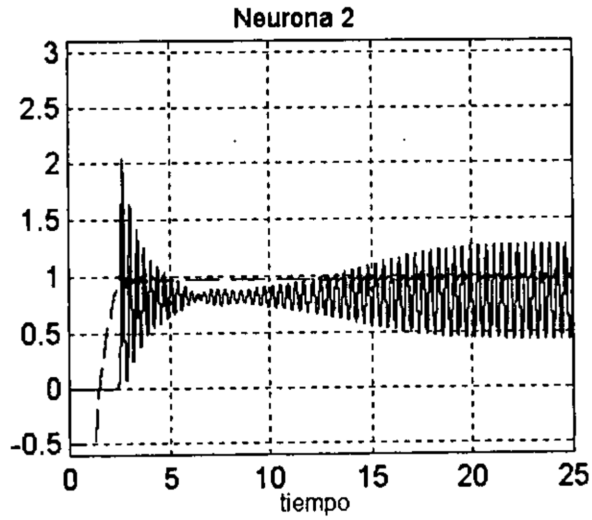
a) Función de activación rampa con saturación con $\delta_1 = 0.072$ y $\delta_2 = 0.09$



b) Función de activación sigmoide con $\delta_1 = 0.085$ y $\delta_2 = 0.102$

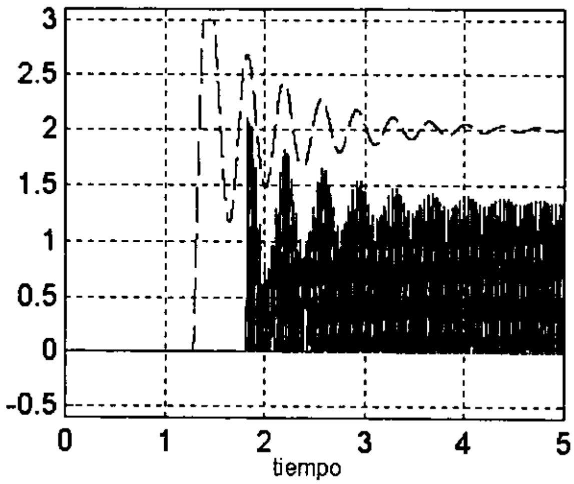
Gráfica III.9. Efecto del retardo axonal con función de activación sigmoide.
_____ Respuesta de la neurona   _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Es notoria la forma en que la salida del circuito deja de seguir a la primer neurona, presentándose un transitorio con amplitud que oscila respecto al valor final y la frecuencia cambia lentamente. También es importante notar como en el caso de la sigmoide, como los cambios se dan con mayor lentitud el tiempo que dura el transito de un estado es mucho mas largo. En la siguiente gráfica se muestra la salida del mismo circuito durante un mayor tiempo, donde podemos apreciar cuanto tarda en alcanzar el estado final oscilatorio.



Gráfica III.10. Respuesta del circuito con función de activación sigmoide con $\delta_1 = 0.085$ y $\delta_2 = 0.102$
_____ Respuesta de la neurona _ _ _ _ _ Actividad de la neurona

Otra observación importante es el hecho de que en todos los casos cuando la segunda neurona tiene una tendencia propia a oscilar, su comportamiento se ve regulado por la acción de la primer neurona dentro de ciertos límites. En los casos antes mostrados las frecuencias de oscilación de las dos neuronas son muy similares, pero si la diferencia entre estas frecuencias es mayor, se puede ver claramente como la amplitud de la respuesta de la segunda neurona de alguna manera se verá modulada por su entrada, según lo podemos observar en la siguiente gráfica.



Gráfica III.11. Respuesta de la segunda neurona modulada por la primera.
____ Respuesta de la primer neurona _ _ _ _ _ Respuesta de la segunda neurona

Efecto de los parámetros de las neuronas sobre el circuito

Debido a que el comportamiento del circuito depende de los parámetros de ambas neuronas, es importante determinar como afecta la variación de estos parámetros en el comportamiento del circuito. En particular nos vamos a enfocar en el retardo axonal y en la pendiente por ser los parámetros de mayor interés.

Efecto del retardo axonal

Como ya se vio anteriormente, el retardo tiene la capacidad de modificar la forma de la respuesta de la neurona. Cuando las modificaciones de este retardo se aplican a la primera neurona, se modifica la forma de la excitación de la segunda neurona, lo que provoca que el circuito responda con las diferentes formas antes presentadas. Para variaciones pequeñas del retardo axonal, tales que no llegan a cambiar la forma de la respuesta y si el circuito presenta una respuesta oscilatoria, estas variaciones tienen el efecto de producir modificaciones en la frecuencia de la oscilación (a mayor retardo, menor frecuencia de oscilación), lo que afecta a la respuesta del circuito ya que, como se mencionaba, al presentase oscilaciones en la primer neurona, la salida presentará oscilaciones a la misma frecuencia. Cuando las variaciones en el retardo axonal tienen lugar en la segunda neurona, nuevamente puede afectar a la forma de la respuesta del circuito, llegando a inducir oscilaciones cuando no las hay en la primer neurona, pero cuando la primera neurona presenta oscilaciones la respuesta del circuito no modifica su frecuencia de oscilación, sino que sólo se afecta a la forma de la oscilación, lo cual se aprecia principalmente en la envolvente de la respuesta oscilatoria a través de la combinación de los efectos de las dos neuronas, como se aprecia, por ejemplo, en la gráficas III.4 y III.6.d).

También es importante mencionar el efecto sobre el tiempo de retardo de la respuesta del circuito. Los cambios en el retardo axonal en la primer neurona tienen el efecto inverso en la respuesta del circuito que los cambios en el retardo axonal de la segunda neurona. Como al reducir el retardo axonal de la primer neurona su frecuencia de oscilación aumenta, la actividad de la segunda neurona crece con mayor rapidez, por lo que alcanzará más rápidamente el nivel del umbral de disparo de la neurona, teniéndose un menor retardo del circuito. Para el cambio en el retardo axonal de la segunda neurona, por corresponder su respuesta a la del circuito, el modificar este retardo produce un cambio de la misma magnitud en la respuesta del circuito.

Efecto de la pendiente

A través de la pendiente de la función de activación (rampa con saturación o sigmoide) también podemos modificar la forma de la respuesta del circuito. Al modificar la pendiente lo que hacemos es modificar el nivel que alcanzará la respuesta para un cierto nivel de actividad dado en la neurona. Esto además de modificar el nivel de la salida, al ser retroalimentado a la neurona modifica la forma en que se autoinhibe, por lo que también se ve afectada la forma en que varía la actividad de la neurona y, consecuentemente, su comportamiento. En general podemos decir que a menor pendiente hay una menor tendencia a oscilar (oscilaciones de menor amplitud) y un menor offset en la salida (entendiéndolo como el nivel medio de la respuesta), aunque la respuesta oscila con mayor frecuencia. Si se modifica la pendiente de la primer neurona afectará directamente a la frecuencia de la respuesta del circuito y a la forma de las oscilaciones, ya que al ser mayor la pendiente la respuesta del circuito disminuye la frecuencia de las oscilaciones del circuito, y el tiempo de retardo de la respuesta también disminuye dado que el offset de la excitación de la segunda neurona es mayor y hace que su actividad aumente con mayor rapidez. Si las modificaciones de la pendiente se dan en la segunda neurona y si la respuesta del circuito es oscilatoria, estas oscilaciones aumentarán su amplitud y su offset al aumentar la pendiente, aunque su frecuencia y el retardo de la respuesta se conservan iguales.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron tres clases de neuronas artificiales retroalimentadas y con retardo, que tienen la capacidad de comportarse como osciladores, primero estudiándolas de forma aislada y después formando circuitos lineales de dos neuronas. Cada una de estas clases de neuronas, cuando las vemos de forma aislada, muestra diferentes formas de comportamiento, las cuales dependen de la función de activación que se utilice.

Para la clase de neurona con función de activación escalón, la respuesta puede mantenerse en un nivel constante, en cualquiera de los dos niveles de salida del escalón, o bien permanecer en un estado oscilatorio sostenido. Si el estímulo externo total I es menor que el umbral θ, la neurona no presentará respuesta, es decir, su salida permanecerá en el nivel bajo del escalón. Por otro lado, si la neurona responde, pero la retroalimentación es tan pequeña que la actividad de la neurona no alcanza a disminuir por debajo del umbral, entonces la respuesta de la neurona permanecerá en el nivel de salida alto del escalón. En caso de que se cumpla que $I > \theta$ y $w_r < \frac{\theta - I}{k_e}$, es decir, que el estímulo, al igual que la retroalimentación, sean de la magnitud adecuada, la neurona mantendrá un estado oscilatorio sostenido. Cuando la neurona presenta este estado oscilatorio, la neurona comienza a responder un tiempo ϕ más tarde, a partir del cual la neurona entra en un estado donde presenta oscilaciones sostenidas que toman la forma de un tren de pulsos, el cual podemos caracterizar a través del ciclo de trabajo de los pulsos y por la frecuencia con que éstos se presentan. Estas características dependen del conjunto de parámetros de la neurona. El efecto que producen estos parámetros sobre esta clase de neuronas lo podemos resumir de forma cualitativa en el siguiente cuadro.

	Retardo Axonal		Peso de la Autosinápsis (Valor absoluto)		Constante de Integración	
	Menor	Mayor	Menor	Mayor	Menor	Mayor
Frecuencia	+	–	–	+	+	–
Ciclo de Trabajo	+	–	+	–	–	+
Retardo de la Respuesta	–	+	No Afecta		–	+

Para el caso de las clases de neuronas con función de activación rampa con saturación y sigmoide, las formas que pueden tomar sus respuestas son similares, y sus formas son tales que las podemos asociar con las formas de respuesta de un sistema lineal de segundo orden, de tal modo que podemos reconocer respuestas de la forma sobreamortiguada, subamortiguada y no amortiguada. Para el caso de la respuesta sobreamortiguada, la respuesta de la neurona parte de su estado de reposo y paulatinamente aumenta hasta alcanzar su estado final, para después mantenerse en él. También puede presentarse el caso subamortiguado, en el que, al responder la neurona, en su salida se presenten oscilaciones las cuales se van atenuando hasta desaparecer un tiempo después, manteniendo un valor constante en la salida de la neurona. Finalmente, para el caso no amortiguado, las oscilaciones que hay en la salida no se amortiguan, permaneciendo la neurona en este estado oscilatorio. Cuando en la respuesta de la neurona se presentan oscilaciones, estas conservan la misma frecuencia, incluso en el caso en que las oscilaciones se atenúan.

El tipo de respuesta que presenta una neurona, así como sus características, dependen del conjunto de parámetros de las neuronas, de los cuales podemos resumir su efecto de forma cualitativa en el siguiente cuadro.

	Retardo Axonal		Peso de la Autosinápsis (Valor absoluto)		Constante de Integración		Pendiente	
	Menor	Mayor	Menor	Mayor	Menor	Mayor	Menor	Mayor
Frecuencia	+	–	–	+	+	–	+	–
Amplitud	–	+	–	+	+	–	–	+
Offset	No Afecta		+	–	No Afecta		–	+
Retardo de la Respuesta	–	+	No Afecta		–	+	No Afecta	
Tendencia a Oscilar	–	+	–	+	+	–	–	+

La respuesta que presenta la neurona, independientemente de las características que tenga, podemos separarlas en dos partes, una parte correspondiente al estado transitorio y otra correspondiente al estado permanente. Para el caso de la respuesta sobreamortiguada la etapa transitoria inicia cuando neurona comienza a responder, y podemos considerar termina cuando la salida alcanza el 90% de su valor final, para considerar a partir de éste momento el estado permanente. Para el caso de la respuesta subamortiguada el transitorio inicia con la presentación de una respuesta de la neurona y podemos considerar que dura hasta que la amplitud de las oscilaciones han disminuido por debajo del 10% de la amplitud de la primera oscilación, para considerar de ahí en adelante el estado permanente. Finalmente, para el caso de la respuesta no amortiguada, el estado transitorio va desde que comienza a responder la neurona hasta que la variación en la amplitud de las oscilaciones es menor al 10% de la amplitud final de las oscilaciones, y de ahí en adelante se considera el estado permanente.

Es importante notar que a pesar de que cualitativamente son similares la forma de las respuestas de las neuronas con función de activación rampa con saturación y sigmoide, cuantitativamente hay diferencias importantes que debemos resaltar.

Si comparamos la respuesta de dos neuronas, una de cada clase, con los mismos parámetros, en el caso de la respuesta sobreamortiguada se presentan diferencias tanto en el valor de la respuesta en el estado permanente, como en la duración del transitorio. En el caso de la rampa con saturación, a partir del momento en que la actividad de la neurona alcanza el umbral inferior la neurona comienza a responder proporcionalmente hasta alcanzar el nivel de saturación, es decir, hasta que la actividad de la neurona alcance el umbral superior; el estado permanente de la respuesta dependerá de en que parte de la rampa haya quedado la actividad de la neurona, incluso pudiendo haber alcanzado el nivel de saturación. En el caso de la sigmoide, siempre hay una respuesta presente en la neurona debido al carácter asintótico de la función, por lo tanto, esta clase de neurona comienza a presentar cambios notorios en su respuesta en menor tiempo que una neurona con función de activación rampa con saturación. En lo que se refiere al valor final de la respuesta, la de las neuronas con función de activación sigmoide siempre es del orden de un 3% mayor que el producido por la rampa con saturación, según lo observado.

Para el caso de la respuesta subamortiguada las diferencias comienzan a ser más notorias, particularmente en el estado transitorio. Debido nuevamente al carácter asintótico de la sigmoide, su respuesta nunca alcanza el nivel de saturación, por lo que sus oscilaciones no presentan cambios abruptos, siempre forman una curva suave, mientras que con la rampa con saturación las oscilaciones son recortadas al alcanzar cualquiera de los niveles de saturación, además de que la amplitud de las oscilaciones es mayor en el caso de la rampa. El factor de amortiguamiento en el caso de la sigmoide es mayor que el de la rampa con saturación, por lo que la duración del transitorio siempre es menor en la sigmoide. Cabe mencionar que a diferencia de un sistema lineal de segundo orden, el factor de amortiguamiento de la respuesta no es constante, sino que este factor de amortiguamiento disminuye con el tiempo.

En la respuesta no amortiguada, las diferencias en la forma de las oscilaciones es la misma que en el caso subamortiguado, en la sigmoide los lóbulos de las oscilaciones siempre forman curvas suaves, mientras que en el caso de la rampa con saturación se puede alcanzar los límites de saturación y presentar cortes en estos lóbulos; además de que la amplitud de las oscilaciones en el caso de la rampa es mayor que en la sigmoide, y la frecuencia de las oscilaciones es mayor en la sigmoide. Hay que mencionar que aunque la frecuencia de las oscilaciones es constante, si durante el estado transitorio, en el caso de la rampa con saturación, las oscilaciones alcanzan la saturación, la frecuencia de oscilación es ligeramente menor mientras se mantenga esta condición. Otra diferencia notable está dada en la forma del transitorio, ya que en el caso de la neurona con función de activación rampa con saturación el estado permanente de las oscilaciones se alcanza muy rápidamente, normalmente para el segundo ciclo la respuesta ya alcanzó la amplitud y frecuencia del estado permanente, mientras que en el caso de la sigmoide puede llevarle varios ciclos para alcanzar el estado permanente.

Es importante recordar que en un caso extremo, las clases de neuronas con función de activación rampa con saturación y sigmoide, cuando su pendiente tiende a infinito, su comportamiento es similar al de una neurona con función de activación escalón.

Independientemente del tipo de respuesta de la neurona, podemos distinguir claramente las dos partes que la forman, el estado transitorio y el estado permanente, cada una de los cuales lo podemos asociar con algún tipo de memoria; el estado transitorio lo podemos asociar con un fenómeno de memoria a corto plazo, mientras que el estado permanente lo podemos asociar con un fenómeno de memoria permanente. De este modo podemos ver que cada clase de neurona puede presentar los fenómenos de memoria con diferentes características, y éstas características dependerán de los valores de los parámetros con que opere la neurona.

Así, para una memoria a corto plazo podemos tener el caso de una respuesta con oscilaciones que varían su amplitud hasta alcanzar una amplitud estable, incluso llegando hasta desaparecer las oscilaciones; podemos tener el caso de una respuesta que se incrementa paulatinamente hasta alcanzar un valor estable; o puede darse el caso de sistemas que no presenten el efecto de memoria a corto plazo, como sucede con las neuronas con función de activación escalón, en donde no existe un transitorio, ya que después del retardo, cuando la neurona comienza a responder, entra directamente al estado permanente. El que no se presente un transitorio también se puede dar para las otras clases de neurona si recordamos que en el caso extremo, cuando su pendiente tiende a infinito, se llega al caso del escalón. De aquí podemos concluir que mientras mayor sea la pendiente de la rampa con saturación o de la sigmoide, el efecto de memoria a corto plazo tendrá una duración menor.

Para una memoria permanente básicamente se puede tener dos tipos de respuesta, ya sea una respuesta constante o bien una respuesta oscilatoria, presentando características que dependen de la clase de neuronas que se utiliza y de como estén configuradas. En la neurona con función de activación escalón, si la respuesta es constante, ésta tendrá el valor máximo, y si es oscilatoria, estará formada por un tren de pulsos. En la neurona con función de activación rampa con saturación, si la respuesta es constante, ésta puede tomar cualquier valor mayor que cero y llegar hasta el valor de saturación; y si la respuesta es oscilatoria, ésta puede estar completa o estar recortada por uno o ambos lados si se alcanza la saturación. Con la neurona con función de activación sigmoide en la respuesta constante se puede tener cualquier valor comprendido entre los límites de saturación (sin alcanzarlos), y si es oscilatoria las oscilaciones siempre son completas, ya que aquí nunca se puede alcanzar los límites de saturación.

Cuando utilizamos dos neuronas de alguna de las clases anteriormente descritas para formar un circuito lineal con ellas, podemos observar comportamientos que no se presentan al utilizar una sola neurona. La respuesta del circuito depende de la combinación del comportamiento de las dos neuronas. La respuesta de la segunda neurona es la respuesta final del circuito, y ésta depende, entre otras cosas, de su entrada, es decir, de la primer neurona, que tiene la función de servir de excitación a la segunda neurona. Para determinar el comportamiento del circuito ahora se cuenta con el conjunto de parámetros de cada una de las neuronas, más el peso de conexión entre neuronas.

Cuando el circuito está formado por dos neuronas con función de activación escalón a la salida se tendrán nuevamente pulsos, pero la forma en que se presentan los pulsos muestra cambios significativos, pudiendo presentarse en forma aislada e irregular y con un ancho del pulso diferente, o presentarse en forma de ráfagas de pulsos. Los pulsos se presentan de forma irregular cuando el retardo axonal de ambas neuronas es similar mientras que las ráfagas de pulsos se presentan cuando la diferencia entre los retardos es mayor. Mientras mayor sea la diferencia entre los retardos, las ráfagas tienden a ser más regulares en el ancho y la frecuencia de éstas, al igual que los pulsos que las forman.

Para circuitos formados por neuronas con función de activación rampa con saturación y sigmoide observamos nuevamente semejanzas cualitativas en sus comportamientos. Se pueden observar respuestas que se asemejan a las presentadas por una sola neurona, es decir, podemos encontrar respuestas sobreamortiguadas, subamortiguadas y no amortiguadas, sólo que aquí cada uno de estos tipos de respuesta puede presentar diferentes características que no se presentan cuando se tiene una sola neurona. Dado que la entrada de la segunda neurona es la respuesta de la primer neurona, una respuesta sobreamortiguada de la primera se puede aproximar a un escalón y por lo tanto la respuesta de la segunda neurona será similar a la de una neurona aislada. Los comportamientos que vale la pena observar del circuito se dan cuando la primer neurona presenta un comportamiento subamortiguado o no amortiguado, lo que afecta al comportamiento de la segunda neurona y, por tanto, del circuito. Cada uno de estos casos presenta características importantes, ya que una oscilación (amortiguada o no) de la primer neurona induce oscilaciones en la respuesta del circuito.

Para el caso en que la primer neurona presenta una respuesta subamortiguada, si la segunda tiene una tendencia a presentar un comportamiento subamortiguado o no amortiguado, en la respuesta del circuito tendremos respectivamente comportamientos subamortiguado y no amortiguado. Para el caso subamortiguado, podemos distinguir dos partes en donde se presentan oscilaciones con características diferentes, la primera se presenta mientras dura el transitorio en la primer neurona, en donde las oscilaciones llevan la frecuencia de oscilación de la primer neurona, y en la segunda parte, cuando la primer neurona ya no oscila, la respuesta del circuito esta dada por las características de la segunda neurona, cambiando la frecuencia de oscilación y la forma con que decaen las oscilaciones. Para el caso de la respuesta no amortiguada del circuito podemos observar un estado transitorio con oscilaciones que se amortiguan casi hasta desaparecer, similar a lo que sucede en el caso subamortiguado, pero al finalizar el transitorio de la primer neurona el circuito comienza a oscilar nuevamente hasta alcanzar el estado oscilatorio permanente. En estas dos situaciones podemos considerar que el estado transitorio está formado por una primera parte regida por la respuesta de la primer neurona, seguida de una etapa de transición al estado permanente en donde la respuesta del circuito esta determinada por la segunda neurona. La duración de esta etapa de transición puede llegar a ser varias veces mayor a la duración de la primera parte del transitorio.

En el otro caso, cuando la primer neurona presenta una respuesta no amortiguada, el circuito tendrá una respuesta no amortiguada, y sus características están dadas por la segunda neurona. Aquí, el caso notable se presenta cuando la segunda neurona tiene una tendencia propia a oscilar. La respuesta del circuito oscila a la frecuencia de oscilación de la primer neurona. En este sentido, la segunda neurona se comporta como un oscilador forzado. La amplitud de las oscilaciones estará dada por una combinación de la amplitud de las oscilaciones de cada neurona. Para ciertas combinaciones de respuestas de las neuronas, la respuesta del circuito resulta estar formada por oscilaciones que alternan ciclos con amplitudes diferentes.

Considerando a nuestro circuito como un elemento de memoria, vemos que las características de memoria a corto plazo y memoria permanente que pueden presentarse son más complejas. En lo que se refiere a la memoria a corto plazo, dado que está asociada con el estado transitorio, además de que podemos observar las características del tipo sobreamortiguado, subamortiguado y no amortiguado, se pueden presentan otras formas de respuesta con características que pueden llegar a ser irregulares. Estos patrones más complejos que se presentan en la memoria a corto plazo indican una mayor capacidad para almacenar información.

Con la memoria permanente sucede algo similar, ya que además de poder mantener una respuesta constante o una respuesta oscilatoria con períodos formados por una sola oscilación, se pueden tener respuestas que en muchas ocasiones tienen períodos extremadamente largos. Esto le da una mayor riqueza en cuanto a las posibilidades de respuesta, y nuevamente, en cuanto a las posibilidades para almacenar información.

Finalmente podemos decir que este trabajo puede servir como punto de partida para el estudio de circuitos neuronales mas complejos, los cuales estén formados por un mayor número de neuronas. En este sentido, resultaría interesante realizar un estudio similar a éste para caracterizar como se van modificando las oscilaciones al ir pasando de una neurona a la siguiente, o como en el caso de los circuitos con función de activación escalón, el determinar como se van modificando las ráfagas de pulsos que se generan a lo largo del circuito. También resultaría de interés estudiar circuitos "híbridos", es decir, que estén formados por neuronas de diferente clase, al igual que circuitos que presentaran algún tipo de retroalimentación de una neurona hacia otra.

REFERENCIAS

[1] Hopfield J. J., "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities". *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol 79, pp 2554-2558, Abril 1982.

[2] Buhmann, J. M., "Oscillatory Associative Memories". En *Gupta M. M., Rao D. H. (eds), Neuro control systems. Theory and applications.* IEEE Press. 1994.

[3] Tom, M. D., Tenorio M. F., "A neural computation model with short-term memory". *IEEE transactions on neural networks*, Vol 6, No 2, pp 387-397, Marzo 1995.

[4] Gupta M. M., Knopf G. K., "A multitask visual information processor with a biological motivated design". *J. Visual Cumminicat., Image Representation*, Vol 3, No 3, pp 230-246. Septiembre 1992.

[5] Gupta M. M., Rao D. H., "Neuro-control systems: a tutorial". En *Gupta M. M., Rao D. H. (eds), Neuro control systems. Theory and applications.* IEEE Press. 1994.

[6] Sjenowski, T. J., "Skeleton filters in the brain". En *Hinton G. E., Anderson J. A. (eds), Parallel models of associative memory.* Erlbaum, NJ. 1981.

[7] Elman J. L., "Finding structure in time". *Cognitive Science*, Vol 14, pp 179-211. 1990.

[8] Herrera A., Pérez J. L., Quintana S., Prieto R., "Análisis de la respuesta oscilatoria de una neurona aislada con una autoexcitación". *Memorias SOMI XII. Congreso de Instrumentación.* pp 659-663.1997.

[9] Herrera A., Pérez J. L., Prieto R., "Dinámica de una neurona electrónica con una autosinápsis". *Reporte técnico RTSTN-9801.* Laboratorio de Neurocomputación, CI. UNAM. 1998.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Aleksander I., Morton, H. *"An introduction to neural computing".* Chapman & Hall, Londres, G.B. 1991.

Freeman, J., Skapura, D. M. *"Neural networks: algorithms, applications, and programming".* Addison-Wesley. Computation and neural system series. 1992.

Khanna, T. *"Foundations of neural networks"*. Addison-Wesley. 1990.

Kopell N., "Chains of Coupled Oscillators". En *Gupta M. M., Rao D. H. (eds), Neuro control systems. Theory and applications*. IEEE Press. 1994.

Widrow, B., Lehr, M. A., "30 years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation". *Proceedings of the IEEE*, Vol 78, No 9, pp 1415-1442, Septiembre 1990.

Wu, J.K. *"Neural networks and simulation methods"*. M.dekker, Nueva York, N.Y. 1994.