

011617
2y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

**“MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERÍA DE
EDIFICIOS HISTÓRICOS”**

PRESENTADA POR:

GUILLERMO MARTÍN ROEDER CARBO

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)**

DIRIGIDA POR:

DR. ROBERTO MELI PIRALLA

CIUDAD UNIVERSITARIA, febrero de 1999

271520

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi Madre, Estela Carbo Tenaud, a mis hermanos y sobrinos.

Y a ti Raquel.

Índice

1.- Introducción	1
1.1 Alcances y Objetivos	1
1.2 Contenido	2
2.- Métodos de Análisis	4
2.1 Método de Equilibrio de Fuerzas	4
2.2 Métodos Elasto-Energéticos	5
2.3 Métodos de Elementos Finitos	9
2.3.1 Análisis Estático Lineal	10
2.3.2 Análisis No-Lineal	14
2.3.2.1 Agrietamiento Distribuido	21
3.- Programas de Elementos Finitos para el Análisis de Fractura	32
3.1 Programas para Modelos de Grietas Discretas	32
3.2 Programas para Modelos de Agrietamiento Distribuido	34
3.3 Selección del Programa para el Análisis	36
4.- Elaboración de los Modelos Numéricos	39
4.1 Modelo de comportamiento	39
4.2 Modelo Geométrico	40
4.3 Incorporación de las Propiedades Físicas de los Materiales al Modelo	42
4.4 Efectos Estructurales que Influyen en el Comportamiento del Modelo	
5.- Análisis de Estructuras de Mampostería: Ejemplos	45
5.1 Arco Circular	45
5.2 Eje Transversal al Eje Principal de la Catedral de la Ciudad de México	51

6.- Métodos Convencionales y Elementos Finitos: Resultados	55
6.1 Arcos Circulares	55
6.1.1 Análisis Lineal con Carga de Peso Propio	55
6.1.2 Análisis Lineal con Desplazamientos en los Extremos del Arco	62
6.1.3 Análisis No-Lineal con Carga de Peso Propio	71
6.1.4 Análisis No-Lineal con Desplazamientos en los Extremos del Arco	77
6.2 Conjunto de Arcos Circulares	82
7.- Conclusiones y Recomendaciones	87
Agradecimientos	92
Referencias	93

1. Introducción

La mampostería, material compuesto formado por piezas de arcilla cocida o piedra unidas con material aglomerante, ha sido una de las modalidades de construcción más antigua que ha sobrevivido a las exigencias del mundo moderno. Las características de los materiales utilizados, así como las técnicas de ensamblaje de las unidades sólidas, han variado a través del tiempo; pero la sencillez en la construcción de las estructuras se ha mantenido. A pesar del uso tan extenso que ha tenido la mampostería en la industria de la construcción, muchas de las técnicas de análisis que se utilizan son empíricas o tradicionales y la aplicación de procedimientos numéricos automatizados es aún incipiente.

1.1 Alcances y Objetivos

El presente estudio describe algunas de las técnicas de análisis utilizadas en edificaciones de mampostería; se utilizarán métodos como el de fuerzas unitarias y el de los elementos finitos. Las estructuras, arcos semicirculares, serán sometidas a desplazamientos en los puntos de apoyo y a cargas verticales, tomando en cuenta las características mecánicas de los materiales para el análisis elástico-lineal y en el estado agrietado.

El objetivo principal del presente trabajo es de evaluar métodos de análisis no-lineal que emplean conceptos de grietas distribuidas para estructuras de mampostería; comparando la calidad de los resultados y, además, tomando en cuenta el costo en tiempo de elaboración de los modelos numéricos y costo en tiempo de ejecución de los análisis estructurales. Para ello se han preparado dos tipos de estructuras en arco:

- Estructura de arco simple, donde se calcularán líneas de presiones, considerando que el material se comporta elásticamente, así como también considerando que las estructuras se encuentran en estado agrietado.
- Conjunto de arcos, comparando cualitativamente el daño observado en el medio en estudio con resultados obtenidos en análisis lineal con elementos finitos que reducen el módulo de elasticidad del material para considerar el flujo plástico en el medio, y los resultados producto de un análisis no-lineal que utiliza conceptos de grietas distribuidas.

En dichas estructuras se adoptan modelos macroscópicos de comportamiento, considerando que las unidades de arcilla o piedra, juntas con mortero y las interfaces unidad-mortero se encuentran distribuidas en el medio continuo.

Finalmente, se discutirá la aplicabilidad de estos análisis a estructuras de mampostería en edificios históricos.

1.2 Contenido

El trabajo se desarrolla en siete capítulos que a continuación se describen:

El capítulo 2, inicialmente trata de manera general el método de equilibrio de fuerzas y el de fuerza unitaria que se empleará en el análisis de arcos semicirculares de mampostería. También se presenta el procedimiento empleado en el método de los elementos finitos, mostrando un resumen de las ecuaciones que describen el comportamiento de un sólido bidimensional con una relación constitutiva de un material lineal elástico y otra no-lineal para considerar el comportamiento del material agrietado.

Se proporciona una descripción de los programas utilizados para el análisis de fractura en el capítulo 3. Además se hace una evaluación de cada uno de estos programas para la elección del más conveniente, que se utilizó para el análisis de las estructuras propuestas.

El criterio de elaboración de los modelos numéricos se presenta en el capítulo 4. Primero se trata la configuración geométrica que se debe tener, según el método de análisis a seguir. En la segunda parte de este capítulo se menciona brevemente el comportamiento de la mampostería, estableciendo los parámetros necesarios para poder incorporar al modelo numérico las características del material. La última parte de este capítulo explica otros aspectos importantes que influyen en la respuesta obtenida de los análisis, tales como las cargas impuestas sobre el modelo numérico, condiciones de apoyo y desplazamientos prescritos.

Los parámetros necesarios para el análisis de las estructuras antes mencionadas, se describen a lo largo del capítulo 5, presentado primero los datos que deben introducirse en los métodos convencionales, luego el método de elementos finitos para un análisis elástico lineal estático y uno no-lineal incremental que utiliza el concepto de grietas distribuidas. Los procesos adicionales para obtener líneas de presiones, según el tipo de análisis estructural, también se explican en este capítulo.

El capítulo 6 detalla los resultados obtenidos con los distintos métodos, comparándolos entre sí por medio de gráficos de elementos mecánicos, líneas de presiones y de configuración de grietas que se presenta en la estructura.

Finalmente en el capítulo 7 se presentan las recomendaciones y conclusiones derivadas de este estudio.

2. Métodos de Análisis

En este capítulo revisaremos, de manera general, algunos métodos de análisis empleados para obtener la solución de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones en estructuras de mampostería sometidas a determinadas solicitaciones. Se resaltan las expresiones generales para la solución mediante métodos de energía elástica y de los elementos finitos, con relaciones constitutivas lineales y no-lineales del material.

2.1 Método de Equilibrio de Fuerzas

Desde la edad media, los arquitectos establecían sus criterios de seguridad estructural basándose en reglas geométricas que permitían encontrar relaciones entre las distintas dimensiones de los elementos estructurales principales. Mediante la bajada de cargas, cuantificación de los pesos de las componentes de la edificación e identificación de las partes de la estructura donde inciden, se pueden observar las posibles trayectorias de esfuerzos según el arreglo secuencial de los elementos estructurales que permiten la transmisión de las cargas mencionadas a la cimentación. El proceso de bajar las cargas resulta sencillo si la estructura tiene simetría geométrica.

La determinación de la trayectoria de fuerzas también se facilita si la estructura se puede representar mediante un modelo isostático, definiendo las condiciones necesarias de equilibrio para que las fuerzas aplicadas sean resistidas por la estructura. Algunas estructuras hiperestáticas se pueden simplificar razonablemente si se consideran articuladas las conexiones entre los elementos estructurales cuando son sometidas a cargas de gravedad. Esto es sólo posible si los momentos flexionantes, debido a la continuidad en la conexión, son de magnitudes pequeñas en comparación con las fuerzas normales actuantes.

Para la solución de sistemas estructurales hiperestáticos, en general, la solución debe establecerse además con base en las condiciones de equilibrio, con las condiciones de compatibilidad de deformaciones.

Los métodos de equilibrio de fuerzas empleados en el siglo XVIII, utilizaban sólo las condiciones de equilibrio, aplicando restricciones a las trayectorias de fuerzas, de manera que estas debían pasar en el límite del tercio central de la sección en determinado número de puntos para volver determinado el problema. El método puede ser explicado fácilmente observando el cálculo de la trayectoria de fuerzas internas o línea de presiones en arcos semicirculares^[1]

2.2 Métodos Elasto-Energéticos

Después de 1678, cuando Robert Hooke caracterizó matemáticamente las propiedades elásticas de los materiales mediante ciertas relaciones funcionales que conectan las deformaciones con los esfuerzos, la ciencia de la elasticidad de los materiales ha tenido un crecimiento sorprendente. Dentro del grupo de científicos que ayudaron a un desarrollo sostenido de la teoría matemática de la elasticidad se encuentra a George Green(1793-1841). En 1837, Green presentó el revolucionario principio de la conservación de la energía, introduciendo el concepto de energía de deformación para deducir las ecuaciones básicas de la teoría de la elasticidad^[2,3].

En muchos problemas que se presentan en la ingeniería; la solución de un sistema estructural sometido a condiciones de cargas y apoyos de distinta naturaleza, ha sido posible, en muchos casos, empleando sólo métodos energéticos. Es necesario, antes de establecer las ecuaciones involucradas en la solución de un problema determinado, conocer algunos conceptos importantes que permitan entender el procedimiento de solución. El primer concepto que se revisará será el de “Energía de Deformación o Energía Potencial Elástica”.

Para facilitar la escritura de algunas de las expresiones algebraicas, que se mostrarán a continuación, se usará notación indicial.

Un sólido elástico al ser sometido a un sistema de cargas, P_i , que son nulas inicialmente y que incrementan su magnitud muy lentamente hasta alcanzar su valor máximo, se deforma

en cada instante de manera que la configuración del sólido es la correspondiente a la posición de equilibrio relativa a los valores particulares p_i , de las fuerzas P_i en ese instante.

En el proceso de deformación, las fuerzas aplicadas realizan un cierto trabajo que se denomina “*trabajo de deformación*”. En virtud al principio de conservación de energía, el trabajo realizado por este sistema de cargas externas que se aplican al sólido se invierte en vencer la resistencia de las fuerzas que actúan entre las moléculas (fuerzas moleculares) que componen el cuerpo, y que se oponen a la modificación de las distancias relativas que hay entre dichas moléculas en el estado no deformado del sólido. Este proceso de carga es adiabático, es decir; la energía calorífica generada durante el proceso de carga debe ser prácticamente nula. Así, en este estado conservativo de energía, el sistema de cargas impuestas sobre el sólido no produce aceleraciones sensibles en éste y las condiciones de sujeción o apoyos del cuerpo elástico no realizan trabajo alguno^[2,3].

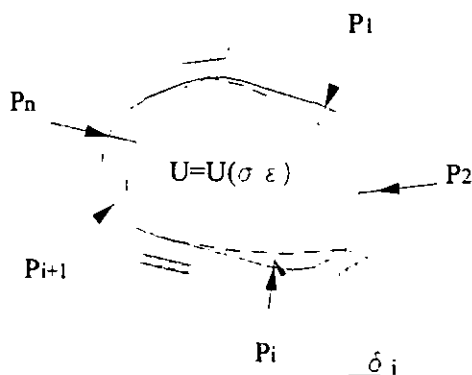


Figura 2.1 Sólido sometido a un sistemas de fuerzas P_i

Para calcular el trabajo de deformación realizado por el sistema de cargas P_i (figura 2.1), se debe suponer que dichas cargas son aplicadas lentamente hasta alcanzar su valor final. Así, si suponemos una función “ α ”, continua en el tiempo y creciente entre los límites de 0 a 1. cuando t varia entre t_1 y t_2 , las fuerzas tienen valores de αP_i en el instante t , de manera que para $t=t_1$, el cuerpo se encuentra en el estado natural y para $t=t_2$ ha alcanzado el estado final. Si aceptamos la aplicabilidad general de la ley de Hooke, los desplazamientos en el instante

serán $\alpha \delta_i$. Al variar el tiempo en dt , los desplazamientos varían en $d\alpha \delta_i$, y por tanto, en ese intervalo elemental las fuerzas hacen el trabajo^[3]:

$$dW = P_i \delta_i \alpha d\alpha = \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta_i \right) \alpha d\alpha \quad (2.1)$$

Integrando la expresión (2.1), encontramos el trabajo de deformación total:

$$W = P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (2.2)$$

Puesto que este trabajo es igual a la energía potencial del cuerpo, tenemos finalmente que.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (2.3)$$

En teoría de vigas, las fuerzas que están involucradas son momentos flectores, fuerzas cortantes, fuerzas normales y momentos de torsión. Así, la energía de deformación queda definida como^[4]:

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{AE} dL + \int \frac{1}{2} \frac{\kappa V^2}{AG} dL + \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL + \int \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GJ} dL \quad (2.4)$$

donde N , es la fuerza normal, V es la fuerza cortante, κ representa el factor de forma de la sección efectiva a cortante, M es el momento flector y M_t el momento de torsión en una sección genérica de viga. Los símbolos A , E , G , I y J representan los valores del área de la sección transversal, módulo de elasticidad, módulo de corte, momento de inercia con respecto al eje neutro y la constante de rigidez a torsión, respectivamente, del miembro estructural.

Otro concepto importante que permite establecer las ecuaciones de solución es “El Teorema de Betti-Maxwell”. En la forma general, este teorema nos dice que en una estructura que se

encuentra sometida a dos sistemas de cargas; el trabajo realizado por el primer sistema de cargas en los desplazamientos debidos al segundo sistema de cargas es igual al trabajo realizado por el segundo sistema de cargas en los desplazamientos debidos al primer sistema. La consecuencia de este teorema cuando aplicamos cargas unitarias p_1 en una dirección d_1 , y otra carga p_2 en una dirección d_2 en los puntos 1 y 2 escogidos dentro de la región que define el sólido elástico, es que el desplazamiento en el punto 1 proyectado en la dirección d_1 cuando se aplica p_2 en la dirección d_2 , es igual al desplazamiento en el punto 2 proyectado en la dirección d_2 cuando se aplica p_1 en la dirección d_1 .

Un complemento importante, además de los ya mencionados en los métodos energéticos, es el “Principio de los Trabajos Virtuales”. Este principio, llamado antiguamente “Principio de las Velocidades Virtuales”, es la base de la mecánica analítica. Este principio fue empleado por primera vez por Galileo. Jean Bernoulli señaló en 1717 su importancia para la estática. Luego D’Alembert y Lagrange lo instituyeron en forma definitiva. El principio puede enunciarse así^[3]:

“Para que un sistema de puntos materiales sujeto a ligazones sin rozamiento, y solicitado por fuerzas directamente aplicadas a dichos puntos, esté en equilibrio en una cierta posición, es necesario y suficiente que si se imprime al sistema un desplazamiento virtual cualquiera compatible con las ligazones, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas directamente aplicadas sea nula.”

La combinación del concepto de los trabajos virtuales con el teorema de Betti-Maxwell permite establecer un método muy útil para el cálculo de estructuras hiperestáticas. Así, podemos considerar que el desplazamiento en un punto “n” cualquiera de la estructura en una dirección “d” cualquiera, debido a un sistema de cargas P_i , es igual al trabajo de las fuerzas interiores a que da lugar ese sistema de cargas, en las deformaciones debidas a una sola fuerza unitaria aplicada en el punto “n”, y dirigida en la dirección “d”. Este método es conocido como “Método de Fuerza Unitaria”. Así, utilizando este método podemos encontrar las fuerzas que representan las incógnitas redundantes que se presentan en una estructura hiperestática. En el capítulo 6 de este trabajo, se ilustra el procedimiento de

solución mediante un ejemplo de cálculo para hallar los momentos y fuerza axial que se presenta en una estructura en arco sometida a cargas de peso propio y desplazamientos en los extremos.

Si al tratar de resolver un sistema estructural con condiciones específicas de carga y sujeción, las ecuaciones que se obtienen y que describen el fenómeno físico son demasiado complicadas para ser resueltas analíticamente, es necesario recurrir a procedimientos numéricos. El siguiente tema tratará sobre uno de los procedimientos de solución más utilizados en la ingeniería, el método de los elementos finitos.

2.3 Método de los Elementos Finitos

Uno de las dificultades para solucionar determinadas expresiones matemáticas que describen un fenómeno físico donde se encuentran involucradas ecuaciones diferenciales con derivadas parciales, es la de poder obtener soluciones cerradas del problema en estudio. Las pocas soluciones que se obtienen mediante procedimientos analíticos son de casos particulares y de limitado alcance. Un procedimiento típico para resolver problemas complicados de diversa índole, es de subdividir el sistema definiendo las características particulares de cada una de las partes componentes para luego ensamblar estas componentes reconstruyendo el sistema original, estudiando después su comportamiento^[5a].

En muchas situaciones se puede representar un modelo con un número finito de componentes, denominando tales problemas como “discretos”; en otras, la subdivisión es continuamente indefinida, siendo la única manera de definirlo con la ficción matemática de un infinitesimal, conduciendo a ecuaciones diferenciales. Estos se denominan sistemas “continuos”.

Debido a lo limitado de la solución de los sistemas continuos, se ha tratado de definir estos mediante la subdivisión en componentes, llevando el problema estrictamente matemático a un problema numérico. Muchos métodos de “discretización” han sido propuestos por matemáticos e ingenieros, los primeros desarrollaron técnicas generales aplicables

directamente a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema mediante diferencias finitas, procedimientos de pesos residuales o técnicas aproximadas para la determinación de la condición estacionaria de funcionales apropiadamente definidos para el problema en estudio. De otro lado, los ingenieros intuitivamente han desarrollado procedimientos buscando la analogía entre sistemas reales discretos y porciones finitas de un medio continuo.

La representación del medio continuo mediante estas porciones finitas o “elementos finitos”, Clough usó este último término por primera vez en 1960^[5a], favoreció el desarrollo de una metodología estandarizada para sistemas discretos. Así el método de representar el sistema físico o matemático utilizando elementos finitos se desarrolló como un procedimiento general de discretización de problemas continuos con una base matemática adecuadamente establecida.

El avance tecnológico dirigido a la disponibilidad de computadoras digitales de gran capacidad de proceso, ha acrecentado el interés en el desarrollo de este método por la cantidad de ecuaciones matemáticas complejas que deben ser resueltas numéricamente.

Se presenta a continuación una breve descripción de la formulación del método de elementos finitos para el análisis estático lineal y no-lineal para la mecánica de sólidos.

2.3.1 Análisis Estático Lineal

Una derivación muy popular de las ecuaciones de equilibrio para el método de los elementos finitos es la de desplazamientos virtuales^[6]. Para ello, consideremos un cuerpo sólido sometido a fuerzas de cuerpo, \mathbf{f}^B ; fuerzas de tracción en la superficie, \mathbf{f}^S y fuerzas concentradas, \mathbf{F}^i . Cada una de estas fuerzas tiene tres componentes según los ejes de referencia especificados en la figura 2.2:

La descripción vectorial de estas fuerzas se representa en la ecuación (2.5):

$$\mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \\ f_Z^B \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} f_X^S \\ f_Y^S \\ f_Z^S \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} F_X^i \\ F_Y^i \\ F_Z^i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

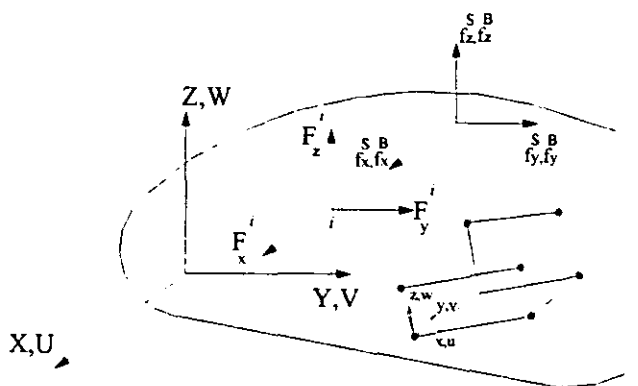


Figura 2.2 Sólido tridimensional

Los desplazamientos del sólido a partir de la configuración no deformada son denotados por:

$$\mathbf{U}^T = [U \quad V \quad W] \quad (2.6)$$

Las correspondientes deformaciones para \mathbf{U} son,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{XX} \quad \varepsilon_{YY} \quad \varepsilon_{ZZ} \quad \gamma_{XY} \quad \gamma_{YZ} \quad \gamma_{ZX}] \quad (2.7)$$

y los esfuerzos correspondientes para $\boldsymbol{\varepsilon}$ son,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{XX} \quad \sigma_{YY} \quad \sigma_{ZZ} \quad \tau_{XY} \quad \tau_{YZ} \quad \tau_{ZX}] \quad (2.8)$$

Suponiendo que las cargas externamente aplicadas son dadas y que se desea obtener los resultados para los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, considerados en las expresiones (2.6), (2.7) y (2.8), se deben plantear las ecuaciones diferenciales que gobiernan el equilibrio, las cuales deben ser resueltas tomando en cuenta las condiciones de

frontera y de compatibilidad^[5,6]. Si se imponen desplazamientos virtuales en el sólido en estudio, respetando las condiciones de apoyo, el trabajo virtual interno total desarrollado es igual al trabajo virtual externo total, lo que conduce a la siguiente expresión:

$$\iiint_V \bar{\varepsilon}^T \sigma dV = \iiint_V \bar{U}^T \mathbf{f}^B dV + \iint_S \bar{U}^S{}^T \mathbf{f}^S dS + \sum_i \bar{U}^i{}^T \mathbf{F}^i \quad (2.9)$$

El trabajo interno se encuentra definido en el lado izquierdo de la ecuación (2.9), siendo igual al vector de esfuerzos reales, σ , premultiplicado por el vector de deformaciones virtuales, $\bar{\varepsilon}$, que corresponden a los desplazamientos virtuales impuestos, siendo $\bar{\varepsilon}$ de la forma:

$$\bar{\varepsilon}^T = \left[\bar{\varepsilon}_{xx} \quad \bar{\varepsilon}_{yy} \quad \bar{\varepsilon}_{zz} \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{zx} \right] \quad (2.10)$$

El lado derecho de la ecuación (2.9), expresa el trabajo externo debido a las fuerzas reales, \mathbf{f}^B , \mathbf{f}^S y \mathbf{F}^i premultiplicadas por los correspondientes desplazamientos virtuales:

$$\bar{U}^T = \left[\bar{U} \quad \bar{V} \quad \bar{W} \right] \quad (2.11)$$

Para cuerpos elásticos lineales, la relación esfuerzo deformación se expresa mediante la siguiente forma:

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon + \sigma^I \quad (2.12)$$

El símbolo \mathbf{C} representa, la matriz constitutiva del material y σ^I , un vector de esfuerzos iniciales impuestos en el sólido.

Para proceder con un análisis de elementos finitos, se subdivide el sólido en porciones finitas, elementos finitos, donde cada una de estas porciones se conecta entre sí, mediante nudos en los bordes de los elementos. Los desplazamientos medidos dentro del elemento

respecto a un sistema de ejes local, sistema que debe ser convenientemente elegido, se suponen que están en función de los desplazamientos en los N puntos nodales del elemento. Así, para el elemento m se tiene:

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.13)$$

Donde $\mathbf{H}^{(m)}$, es la matriz de interpolación de desplazamientos en el elemento m y $\hat{\mathbf{U}}$ es el vector de dimensión $3N$, que contienen los desplazamientos U_i, V_i, W_i de todos los nudos con respecto a los ejes globales.

Si se tiene los desplazamientos $\hat{\mathbf{U}}$ evaluados, y derivando la ecuación (2.13), es posible calcular las correspondientes deformaciones en el elemento con la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.14)$$

La matriz de desplazamiento-deformación, $\mathbf{B}^{(m)}$, se obtiene de la diferenciación de la matriz $\mathbf{H}^{(m)}$.

Usando la expresión (2.12) para el elemento m , y reemplazando en la ecuación (2.9), bajo la suposición de que los desplazamientos dentro de cada elemento son definidos por (2.13), llegamos a la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{U}} \left[\sum_m \iiint_V \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] = \hat{\mathbf{U}} \left[\begin{array}{l} \left\{ \sum_m \iiint_V \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} \right\} \\ + \sum_m \iint_S \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \\ - \sum_m \iiint_V \mathbf{B}^{(m)T} \sigma^I dV^{(m)} \\ + \mathbf{F} \end{array} \right] \quad (2.15)$$

Así, en esta última se aplica el teorema de desplazamientos virtuales imponiendo desplazamientos virtuales unitarios ($\hat{U}^T = \text{matriz identidad} = I$) y denotando los desplazamientos \hat{U} como U , se tiene:

$$KU=R \quad (2.16)$$

$$R=R_B+R_S-R_I+R_C \quad (2.17)$$

Si vemos la expresión del lado izquierdo de la ecuación (2.15), la suma de integrales corresponde a la matriz de rigidez de la estructura, K , y U corresponde a los desplazamientos de todos los nudos respecto a los ejes globales.

El lado derecho de esta misma ecuación, corresponde a las fuerzas aplicadas, siendo la suma algebraica de las fuerzas de cuerpo, fuerzas de superficie esfuerzos iniciales y fuerzas concentradas respectivamente.

Esta deducción debida a una aproximación de desplazamientos, es muy útil en problemas de mecánica de sólidos con comportamiento lineal elástico. También se aplican a problemas no-lineales como se verá a continuación.

2.3.2 Análisis No-Lineal

Si los desplazamientos en todos los puntos de un sólido son infinitesimales y si también se considera que la naturaleza de las condiciones de frontera permanece inalterada durante la aplicación de las cargas sobre el sólido, las ecuaciones de equilibrio son las que se muestran en la expresión (2.16).

Estas ecuaciones corresponden a un análisis lineal de una determinada estructura debido a que el vector de desplazamientos es una función lineal de las cargas aplicadas, es decir, si el vector de cargas, R , se multiplica por un factor α constante, los resultados también serán

un producto de desplazamientos, U , por α . Si no es el caso, se debe ejecutar un análisis no-lineal.

Existen distintas categorías de análisis no-lineal^[6]. En este estudio nos ocuparemos de la no-linealidad del material, es decir, donde los desplazamientos y deformaciones son infinitesimales en el sólido, teniendo una relación esfuerzo-deformación no-lineal.

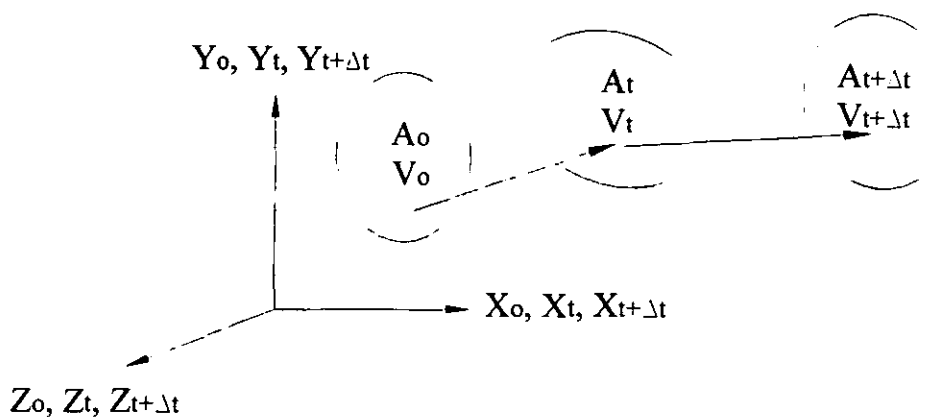


Figura 2.3 Movimiento del sólido respecto a un sistema cartesiano fijo

Para desarrollar las ecuaciones de equilibrio, se toma en cuenta la configuración de la estructura en un paso de tiempo o un paso de carga t (figura 2.3). El movimiento del cuerpo sólido se describe a partir de un sistema de coordenadas estacionario, asumiendo, además, que el cuerpo sólido puede experimentar grandes desplazamientos, grandes deformaciones o una respuesta constitutiva no-lineal. Así, el objetivo es de evaluar las posiciones de equilibrio del sólido completo en los pasos $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, donde Δt es un incremento de paso de tiempo o de carga. Para poder establecer una estrategia de solución, se supone que todas las soluciones para las variables estáticas y cinemáticas en todos los pasos desde el paso 0 , hasta el paso t , se han obtenido, siendo el proceso de solución para el instante $t+\Delta t$, llevado a cabo de la misma manera que en los pasos anteriores; así, se aplica repetitivamente el proceso hasta el total desarrollo del camino de solución. El seguimiento del movimiento de todas partículas en el sólido llevado a cabo durante el análisis, desde la

configuración original a la configuración final, implica el uso de una formulación lagrangiana del problema^[5b,6,7].

Así, la formulación incremental del proceso de solución se obtiene a partir del equilibrio del sólido en un instante $t+\Delta t$; utilizando el principio de trabajos virtuales se tiene lo siguiente^[6]:

$$\iiint_{t+\Delta t, V} \varepsilon^{T, t+\Delta t} \sigma dV = \iiint_{t+\Delta t, V} \bar{\mathbf{U}}^{T, t+\Delta t} \mathbf{f}^B dV + \iint_{t+\Delta t, S} \bar{\mathbf{U}}^{S, T, t+\Delta t} \mathbf{f}^S dS + \sum_{t+\Delta t, i} \bar{\mathbf{U}}^{i, T, t+\Delta t} \mathbf{F}^i \quad (2.18)$$

La principal dificultad de resolver (2.18) es que la configuración del sólido en el tiempo $t+\Delta t$ es desconocida. Esta es la diferencia más destacable con respecto al análisis lineal, donde se supone que los desplazamientos son tan pequeños que la configuración del cuerpo no se altera. Este punto es importante pues nos indica que la solución de los problemas lineales debe ser única^[5a], mientras que en la solución de los problemas no-lineales no lo es^[5b,6,7]. Así, si se obtiene una solución, no necesariamente es la solución buscada. La correcta interpretación física de la naturaleza del problema con la utilización de procesos incrementales con pasos pequeños, es esencial para la obtención de resultados con significado físico.

El problema se puede generalizar, de la manera que se verá a continuación, para poder introducir los esquemas iterativos de solución en los problemas no-lineales. Así en el $t+\Delta t$, se tiene lo siguiente:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Donde el vector ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$ representa las cargas externamente aplicadas y el vector ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$, representa las fuerzas producto de los esfuerzos internos en el sólido. Debido a que las fuerzas ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$ tiene una relación no-lineal con los desplazamientos, es necesario llevar a cabo iteraciones en la ecuación (2.19). Existen muchos algoritmos que muestran los procedimientos generales de solución que utilizan técnicas iterativas^[5b,6,7,8,9,10]. Se

estudiarán brevemente dos de ellas; el Método de Newton-Raphson y el Método de Longitud de Arco.

El esquema de solución de tipo Newton-Raphson se utiliza para resolver los requerimientos de equilibrio según la ecuación (2.19), buscando la solución de las siguientes ecuaciones^[6]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

donde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}^*) \quad (2.21)$$

y \mathbf{U}^* , es la solución final de (2.20).

Se asume que en la solución iterativa se ha evaluado ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$; así, en una expansión de la ecuación (2.20) en series de Taylor encontramos que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (2.22)$$

donde se han despreciado los términos de orden superior a dos. Reemplazando (2.22) en (2.21) y usando (2.20), obtenemos:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{F}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (2.23)$$

Donde se asume que las cargas externas aplicadas son independientes de los desplazamientos. Definiendo ahora:

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (2.24)$$

y reconociendo que:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \quad (2.25)$$

donde ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$, es la matriz de rigidez tangente en la iteración (i-1), así la ecuación (2.23) puede ser escrita como:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{F}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (2.26)$$

ya que la ecuación (2.22) es una representación aproximada de las series de Taylor, el vector de incrementos correctivos de desplazamientos $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$, se debe usar para poder obtener la siguiente aproximación de desplazamiento:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (2.27)$$

Las expresiones en (2.26) y (2.27), constituyen la solución de (2.19) por medio del método regular de Newton-Raphson (figura 2.4). Debido a que la solución se lleva a cabo mediante un análisis incremental, se requiere de condiciones iniciales apropiadas y criterios de convergencia para poder alcanzar resultados adecuados.

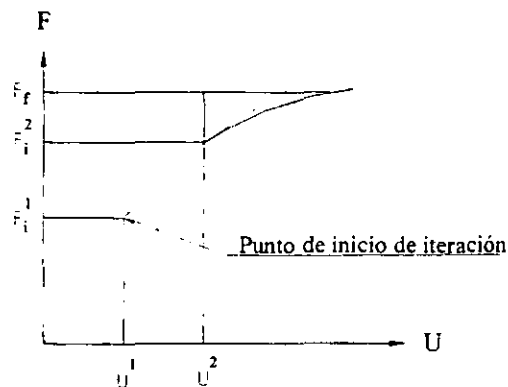


Figura 2.4 Método de Newton-Raphson

Para llegar a la convergencia, del proceso de iteración del equilibrio, se debe establecer criterios que permitan interrumpir el proceso cuando se obtienen resultados satisfactorios.

Los criterios de convergencia se basan generalmente en normas o módulos de vectores que se describen a continuación (figura 2.5):

- *Norma de fuerzas.*- La norma de fuerzas es el módulo euclidiano del vector de fuerzas desequilibradas f . Para chequear la convergencia, la norma de la fuerza después del incremento actual es comparada contra la norma del desequilibrio inicial f_0 . Esta comparación se hace utilizando la relación (2.28). El valor de R_f es comparado con algún valor que defina la tolerancia en la solución para interrumpir el proceso iterativo.

$$R_f = \frac{\sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i}}{\sqrt{\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0}} \quad (2.28)$$

- *Norma de desplazamientos.*- En este caso se calcula la magnitud del vector de incremento de desplazamiento iterado. El chequeo de la convergencia se lleva a cabo comparando la norma del vector de incremento de desplazamiento con el valor de la norma del vector de incremento de desplazamiento encontrado en la primera predicción. Esta comparación se hace según la ecuación (2.29).

$$R_d = \frac{\sqrt{\delta \mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i}}{\sqrt{\Delta \mathbf{U}_0^T \Delta \mathbf{U}_0}} \quad (2.29)$$

- *Norma de la energía.*- Otra manera de chequear la convergencia es con la norma de la energía. Esta norma es calculada con las fuerzas internas y desplazamientos relativos (figura 2.5). La relación (2.30) es comparada con la tolerancia señalada previamente para establecer si el proceso converge o no.

$$Re = \left| \frac{\delta U_i^T (\mathbf{F}_{int,i+1} + \mathbf{F}_{int,i})}{\Delta U_o^T (\mathbf{F}_{int,1} + \mathbf{F}_{int,o})} \right| \quad (2.30)$$

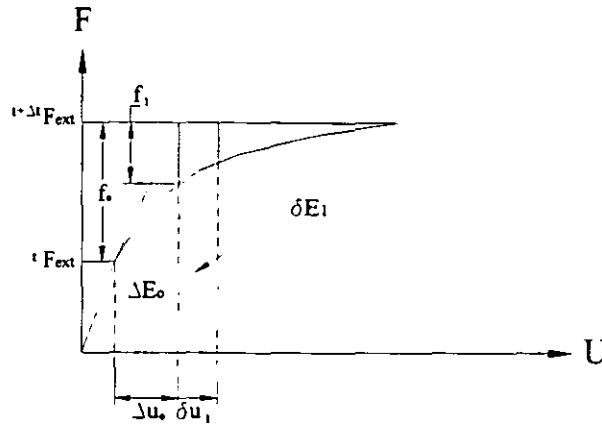


Figura 2.5 Esquema de criterios de convergencia de las normas

Si las predicciones utilizadas en los criterios de convergencia están lejos del equilibrio, el proceso de iteración falla. Estos casos se producen cuando existe un alto grado de no linealidad; un ejemplo de ello es la manifestación de agrietamiento en el material; siendo necesario buscar algoritmos que incrementen la velocidad de convergencia. Un algoritmo de búsqueda lineal, usualmente utilizado en procesos de optimización, usa una predicción del vector de incremento de desplazamiento, obtenido de un proceso normal de iteración, escalándolo por algún valor para minimizar la energía potencial que en este caso represente el equilibrio. Este algoritmo actúa durante la fase correctiva en la solución^[8].

Otra manera de atacar este tipo de problemas es con el uso de métodos de longitud de arco^[10,11c].

En un proceso de iteración ordinaria, las predicciones para los incrementos de los desplazamientos pueden llegar a ser muy grandes. Este último caso se puede presentar si la curva carga-desplazamientos es casi horizontal. Si se prescribe un incremento fijo de carga, puede resultar en predicciones de valores grandes de desplazamiento. El método de longitud de arco puede resolver este problema. Un comportamiento de la curva carga

desplazamiento como el que se muestra en la figura 2.6(a), puede ser analizado como se haría en un control por desplazamientos. Este método también puede resolver problemas como el mostrado en la figura 2.6(b), donde un control por desplazamientos falla^[11c].

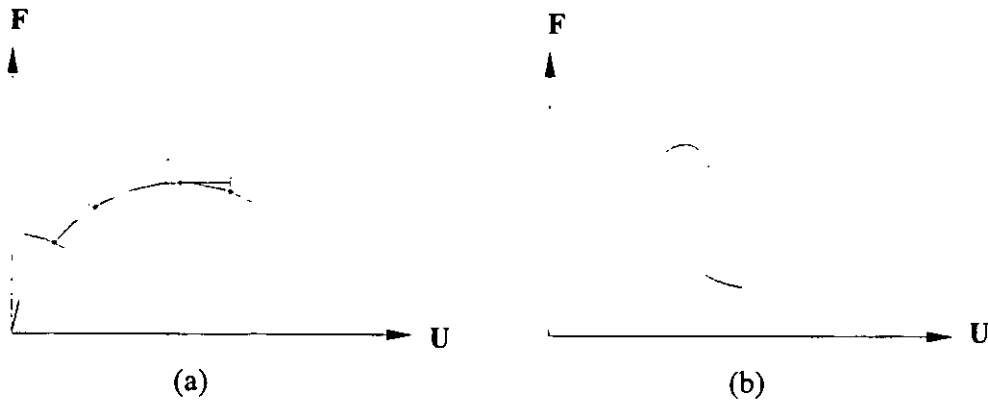


Figura 2.6 Control por longitud de arco

Se han mostrado algunos de los procedimientos generales de solución para problemas donde el comportamiento del material es lineal y no-lineal. Para la solución de problemas lineales se mencionó la unicidad de la solución, mientras en los problemas no lineales la convergencia hacia una solución depende de los pasos de carga o desplazamientos y del método de iteración a emplear.

Como parte de la descripción del análisis no-lineal que se utiliza en este trabajo, se tratará a continuación el concepto de agrietamiento distribuido.

2.3.2.1 Agrietamiento Distribuido

Los criterios utilizados para describir el medio continuo agrietado son mediante grietas discretas y agrietamiento distribuido. El primero de ellos trata a las grietas como discontinuidades geométricas^[11c,12,13,14,15], mientras el segundo imagina al sólido agrietado como un medio continuo que posee relaciones constitutivas apropiadas para simular el comportamiento del sólido en ese estado^[11c,14,15]. Nuestro estudio se concentrará en el empleo de algunos de los conceptos de agrietamiento distribuido.

Agrietamiento distribuido fijo con descomposición de la deformación

Las relaciones esfuerzo-deformación, utilizadas en el concepto de agrietamiento distribuido, se establecen con respecto a ejes locales ortogonales fijos n, s, t ; como se indica en la figura 2.7 que se muestra a continuación:

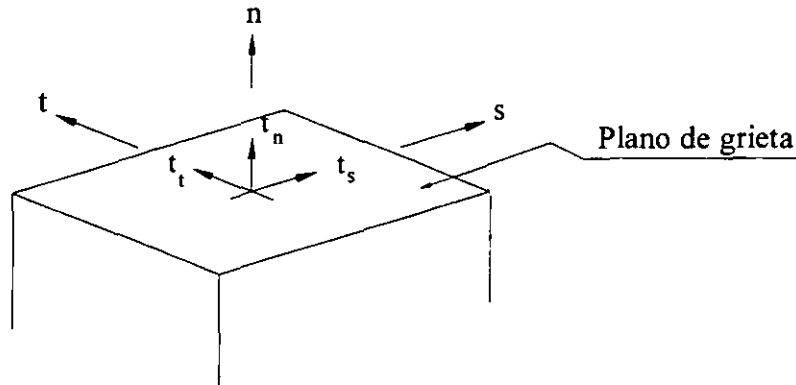


Figura 2.7 Ejes de referencia respecto al plano de la grieta

donde "n" es un eje paralelo a la normal de la superficie de la grieta y los ejes "s", "t" son paralelos a las direcciones tangenciales de la grieta. Estos ejes se relacionan a los modos fundamentales de deformación del sólido agrietado I, II y III respectivamente (figura 2.8).

La relación se puede expresar entonces como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{ts} \\ \sigma_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & E_{ns} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{tt} & E_{ts} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ts} & E_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{tt} \\ \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{nt} \\ \epsilon_{ts} \\ \epsilon_{sn} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

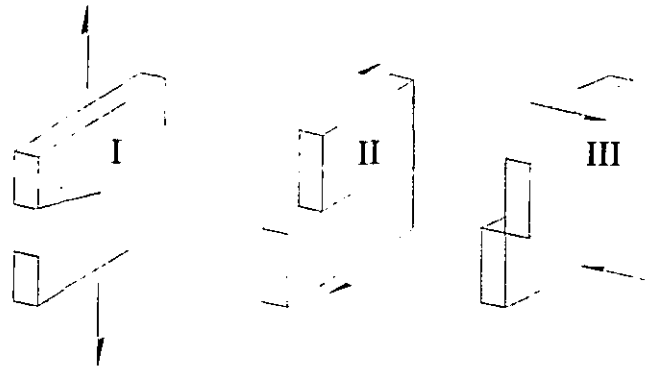


Figura 2.8 Modos fundamentales de deformación de un sólido agrietado

Una característica fundamental es la descomposición de la deformación total en una parte elástica y otra agrietada:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{cr} \quad (2.32)$$

La sub-descomposición de la deformación de agrietamiento, ε^{cr} , da la posibilidad de modelar las varias grietas que ocurren simultáneamente, intentando aproximarse al concepto de grietas discretas, el cual separa el material sólido de la grieta usando técnicas de remallado de los elementos finitos para describir la singularidad producto de la grieta^[13].

Se puede tomar ventaja de lo anterior descomponiendo la deformación de agrietamiento, que ocurre en un punto del sólido, en contribuciones separadas de un cierto número de grietas en distintas direcciones que ocurren simultáneamente en dicho punto. Esto último es utilizado en el concepto básico de agrietamiento multidireccional fijo^[14], el cual supone que el esfuerzo s_i , y la deformación ε^{cr} existen, para un sistema plano de coordenadas $n-t$ alineado con cada grieta i (figura 2.9). Se puede establecer un vector que denota el ensamblaje de vectores de deformación por agrietamiento de cada grieta individual, como:

$$\varepsilon^{cr} = [e_1^{cr}, e_2^{cr}, \dots, e_i^{cr}, \dots, e_n^{cr}]^T \quad (2.33)$$

donde el vector de deformación para cada grieta i tiene la forma:

$$\mathbf{e}_i^{cr} = [\varepsilon_{nn,i}^{cr}, \gamma_{nt,i}^{cr}]^T \quad (2.34)$$

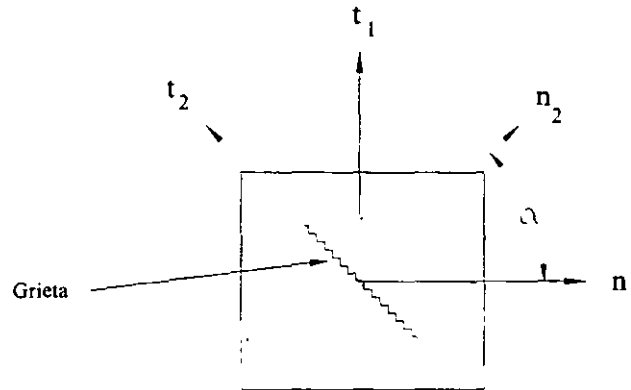


Figura 2.9 Modelo de grietas fijas multidireccionales

La relación entre la deformación global y el vector ε^{cr} se establece como $\varepsilon^{cr} = \mathbf{N}e^{cr}$, siendo la matriz de transformación ensamblada $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_i, \dots, \mathbf{N}_n]$.

La forma de cada una de las matrices de transformación, \mathbf{N}_i , de la grieta i , para el caso de estado plano de deformación es:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ m_x^2 & m_x m_y \\ n_x^2 & n_x n_y \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

y para el estado plano de esfuerzos:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ m_x^2 & m_x m_y \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

siendo $\mathbf{n}^T = [l_x, m_x, n_x]$ y $\mathbf{n}^T = [l_x, m_x]$, vectores unitarios normales al plano de la grieta, según se este empleando un modelo plano de deformaciones o plano de esfuerzos respectivamente. Las componentes de estos vectores son los cosenos directores del eje local paralelo al vector \mathbf{n} con respecto a los ejes globales de referencia. El vector de esfuerzos en la grieta también puede ser ensamblado de manera similar, donde la forma de este es:

$$\sigma^{cr} = [s_1^{cr}, s_2^{cr}, \dots, s_i^{cr}, \dots, s_n^{cr}]^T \quad (2.37)$$

con el vector de tensión de agrietamiento en cada grieta i :

$$\mathbf{s}_i^{cr} = [\sigma_{nn,i}^{cr}, \tau_{nt,i}^{cr}]^T \quad (2.38)$$

La relación entre la tensión global y el vector σ^{cr} se establece como $\sigma^{cr} = \mathbf{N}^T \mathbf{s}^{cr}$, siendo la matriz de transformación \mathbf{N} , la misma que en (2.35) ó (2.36), según sea el caso.

Una suposición importante es que las tensiones de agrietamiento son funciones de la deformaciones de agrietamiento. Así se puede generalizar:

$$\mathbf{s}^{cr} = \mathbf{f}(\mathbf{e}^{cr}) \quad (2.39)$$

El efecto acoplado entre las distintas grietas es posible dentro de esta formulación general; pero se eleva innecesariamente el nivel de refinamiento. Por esta razón, las tensiones de agrietamiento están gobernadas solamente por las deformaciones de agrietamiento correspondientes^[11c,14,15].

El modelo constitutivo se debe completar con el criterio de iniciación de la grieta y definiendo la relación entre tensión de agrietamiento y deformación de agrietamiento.

La iniciación de la grieta esta definida por una tensión límite y un ángulo límite entre dos grietas consecutivas.

Relación tensión deformación en el estado agrietado

Se ha mencionado en el inciso anterior que las tensiones en el estado agrietado en el sistema de coordenadas $n-t$, están determinadas por las correspondientes deformaciones en ese estado, $s_i=f(e_i^{cr})$. Simplificaciones adicionales se pueden hacer ignorando el acoplamiento que existe entre los esfuerzos normales σ_{nn}^{cr} , y los esfuerzos cortantes τ_{nt}^{cr} . Esto resulta en la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nt}^{cr} \\ \tau_{nt}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{secante}^I & 0 \\ 0 & D^II \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn}^{cr} \\ \gamma_{nt}^{cr} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

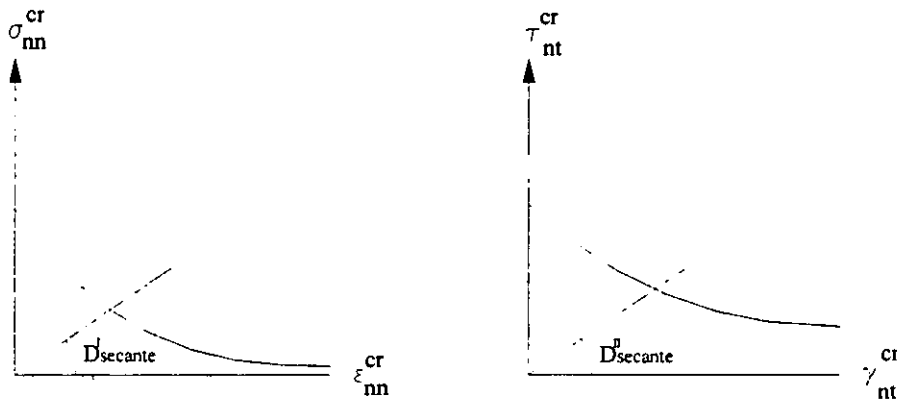


Figura 2.10 Rigidez secante de la grieta

El módulo secante para el modo I (figuras 2.8 y 2.10), se determina usando la relación de relajamiento, $\sigma_{nn}^{cr}=f(\varepsilon_{nn}^{cr})$, de acuerdo a la expresión:

$$D_{secanteactual}^I = \min \left[D_{secanteprevia}^I, \frac{f_{nn}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{\varepsilon_{nn}^{cr}} \right] \quad (2.41)$$

En caso de descarga, la rigidez secante es constante, lo que significa que al cerrarse la grieta las tensiones normales a la grieta como la deformación normal a la grieta se vuelven cero.

Existen parámetros de agrietamiento que es necesario conocer. El factor de reducción del módulo de Young, μ , y el factor de reducción del módulo de corte, β . Estos factores están involucrados en la relación constitutiva del material agrietado. Por ejemplo, en una configuración bidimensional en un estado plano de esfuerzos, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Los parámetros μ y β se relacionan con los parámetros D^I_{secante} y D^{II}_{secante} :

$$D^I_{\text{secante}} = \frac{1-\mu}{\mu} E \quad D^{II}_{\text{secante}} = \frac{\beta}{1-\beta} G \quad (2.43)$$

Relaciones de relajamiento de tensión

La relación entre la tensión de agrietamiento σ_{nn}^{cr} y la deformación ε_{nn}^{cr} de agrietamiento en la dirección normal puede ser escrita como:

$$\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) = f_t \cdot y \left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \right) \quad (2.44)$$

siendo f_t , la resistencia a la tensión y $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$, la deformación última de agrietamiento.

La función general y , representa el diagrama de relajamiento real del material a la tensión. Si el comportamiento de relajación de tensión a un nivel constitutivo se relaciona a la energía de fractura en el modo I, G_f^I , a través de una longitud equivalente o un ancho de banda de fractura, h , se puede derivar la siguiente relación:

$$G_f^I = h \int_0^{\infty} \sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (2.45)$$

Finalmente, suponiendo que la deformación $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$ es finita, se obtiene la siguiente relación:

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = \frac{1}{\alpha} \frac{G_f^I}{hf_t} \quad (2.46)$$

El valor de α , se calcula de la integral:

$$\alpha = \int_0^{\infty} y(x) dx \quad (2.47)$$

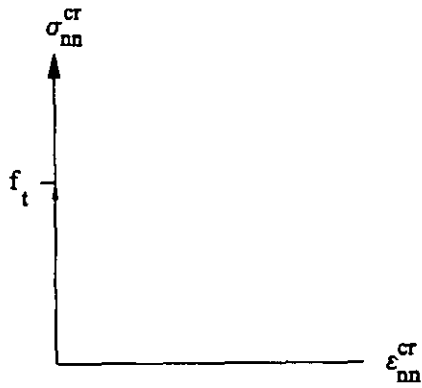
siendo $y(x)$, la función de relajamiento.

Existen muchas relaciones de relajamiento del material en el estado agrietado, relaciones importantes que nos permiten estimar el nivel de tensiones y deformaciones en el sólido después de alcanzar la resistencia límite a tensión; se mencionan a continuación algunas de ellas^[11c].

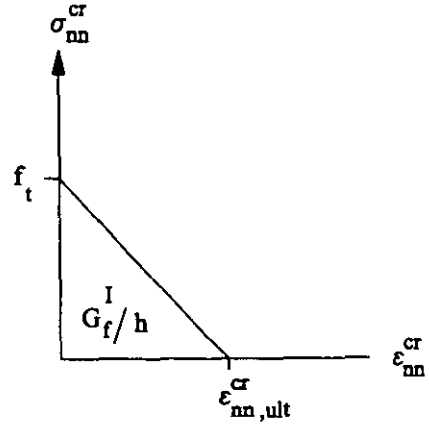
Agrietamiento Frágil

El agrietamiento frágil se caracteriza por una total reducción de la resistencia, después de que se sobrepasa una resistencia límite del material. El comportamiento se puede describir mediante la siguiente relación(figura 2.11a):

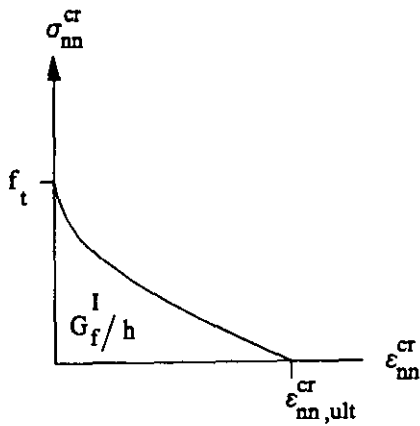
$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{nn}^{cr} \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (2.48)$$



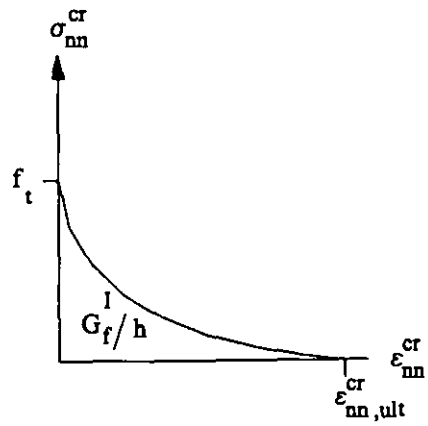
(a) Agrietamiento frágil



(b) Relajamiento de tensión lineal



(c) Modelo de relajamiento de tensión no-lineal de Moelands y Reinhardt



(d) Modelo de relajamiento de tensión no-lineal de Hordijk

Figura 2.11 Relaciones de relajamiento de la tensión

Relajamiento de tensión lineal

Para el caso donde las tensiones después de alcanzar la resistencia del material a tensión, tenga un decaimiento lineal, se presenta la relación(figura 2.11b):

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} \right) & \text{si } 0 < \epsilon_{nn}^{cr} \leq \epsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & \text{si } \epsilon_{nn,ult}^{cr} < \epsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (2.49)$$

Relajamiento de tensión no-lineal

Se presenta a continuación dos curvas de relajamiento. La primera de Moelands y Reinhardt, es una modificación de la curva de (2.49), y se presenta como(figura 2.11c):

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} \right)^c & \text{si } 0 < \epsilon_{nn}^{cr} \leq \epsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & \text{si } \epsilon_{nn,ult}^{cr} < \epsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (2.50)$$

donde el exponente "c" toma un valor de 0.31^[11c].

La segunda propuesta es debido a Hordijk con la siguiente expresión(figura 2.11d):

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \left(1 + \left(c_1 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} \right)^3 \right) \exp \left(-c_2 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} \right) - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad (2.51)$$

para valores de deformación de agrietamiento dentro de un rango de $0 < \epsilon_{nn}^{cr} < \epsilon_{nn,ult}^{cr}$ y anulándose para valores mayores a $\epsilon_{nn,ult}^{cr}$. Las constantes, c_1 y c_2 , toman valores de 3 y 6.93 respectivamente^[11c].

Se han mostrado las principales ecuaciones para el análisis de estructuras considerando un comportamiento lineal y no-lineal del material. Los parámetros necesarios para dichos análisis serán tomados de acuerdo a criterios de diseño de la malla de elementos finito y de ensayos de laboratorio. Esto último se discute en el capítulo 4.

En el siguiente capítulo se revisa la disponibilidad de programas de cómputo que desarrollan las teorías que se han presentado en este capítulo.

3. Programas de Elementos Finitos para el Análisis de Fractura

Algunas compañías comerciales formadas, en muchos casos, por investigadores de renombre que desean divulgar los trabajos de investigación más recientes en el campo que les competen; implantan y adaptan los programas que utilizan el método de elementos finitos a fin de satisfacer los requerimientos de análisis para la solución de los problemas que diariamente los analistas y diseñadores deben enfrentar para conseguir resultados óptimos. En este capítulo se tratará de dar una descripción general de algunos de los programas de elementos finitos para el análisis de la fractura disponibles en el mercado que utilizan los conceptos de agrietamiento distribuido y grietas discretas.

3.1 Programas para Modelos de Grietas Discretas

Algunos de los principales programas comerciales de elementos finitos, tales como NASTRAN o ANSYS o programas de análisis estructural y diseño tales como el STRUDL, tienen muchas de las características necesarias para el análisis de fractura. Estos son básicamente adaptables para modelar grietas discretas. En años recientes se han diseñado programas de análisis de elementos finitos para la mecánica de fractura discreta, entre ellos el CRACKER y el FRANC, desarrollados por la Universidad de Cornell y que son de dominio público.

El CRACKER está dedicado a aplicaciones de propagación dinámica de grietas, donde el crecimiento de las grietas es inestable. En este caso, las fuerzas introducidas en el sólido es mayor que la fuerza resistente de éste. Así, la energía excesiva, el cual no puede ser absorbida por el proceso de fractura, es convertida en otras formas tales como energía cinética o térmica. Este tipo de propagación se lleva a cabo muy rápidamente, y es típicamente medido en milisegundos, debiendo considerar los efectos inerciales.

Las grietas que son modeladas por el programa, pueden ser iniciadas en cualquier lugar del sólido en estudio, tanto por introducción directa del punto donde inicia la grieta por el usuario o especificando algún criterio como puede ser la tensión máxima. Así, las grietas

pueden propagarse entonces en direcciones que no son especificadas a priori. Dentro de las características significativas del programa se incluye el uso de integración explícita en el tiempo, elementos triangulares con funciones de forma cuadrática, numeramiento arbitrario de nudos o elementos y remallamiento automático durante la propagación de la fractura (a pesar de que la intervención del usuario es requerida para definir la dirección de propagación de la grieta). La grieta se modela con conceptos de fractura lineal elástica, utilizando para ello factores de intensidad de tensión. En cualquier instante, el factor de intensidad de tensión es comparado con el factor de intensidad de tensión crítico del material en dicho instante. Si el valor de intensidad de tensión calculado se encuentra encima de la curva que describe el factor de intensidad crítico, el crecimiento de la grieta se acelera, mientras si yace por debajo de dicha curva, el crecimiento de la grieta se desacelera. La dirección de propagación se determina usando el criterio de esfuerzo principal máximo. Para la mecánica de fractura no-lineal se utiliza el criterio de Dugdale^[12,13], donde es necesario especificar una curva de esfuerzo-desplazamiento de abertura de la grieta. Si se desea estudiar la propagación quasi-estática de las grietas en un sólido con este programa, se deben conocer tres condiciones. Estas condiciones son las siguientes:

1. Las fuerzas introducidas al sólido deben ser iguales a la fuerza resistente de agrietamiento.
2. La razón de cambio de las fuerzas externas con respecto a la longitud de la grieta debe ser negativa.
3. La velocidad de crecimiento de las grietas debe ser lo suficientemente pequeña para poder despreciar los efectos inerciales.

Esta situación se obtiene para algunas configuraciones, cuando las cargas actuantes se aplican lenta y monótonamente.

Este programa puede ser obtenido en la Universidad del Estado de Kansas, Departamento de Ingeniería Mecánica, y el ejecutable está implementado para Estaciones de Trabajo SUN.

Otro programa basado en conceptos de grietas discretas es el FRANC(Fracture Analysis Code). Este programa tiene características similares al anterior ya discutido; pero orientado a problemas de propagación estática de grietas. Éste cuenta con rutinas especiales para remallado automático del modelo de elementos finitos, permitiendo modificaciones semiautomáticas para representar nuevas configuraciones de grietas. El programa fue diseñado inicialmente para ser utilizado en Estaciones de Trabajo, siendo posteriormente adaptado para trabajar en computadoras personales limitándolo a medios bidimensionales y esta compilado para operar bajo Windows 95. Este último cuenta con las mismas facilidades para la generación de datos y la interpretación de resultados mediante interfaces gráficas que dispone el programa original. El paquete está a disposición del público interesado, pudiéndose obtener contactando con la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Cornell.

3.2 Programas para Modelos de Agrietamiento Distribuido

Los dos programas que a continuación describiremos, se basan en conceptos de agrietamiento distribuido y están siendo ya comercializados.

El primero que trataremos será el programa de cómputo S-BETA. Este programa fue desarrollado de manera conjunta por la Universidad Técnica Checa en Praga, República Checa y la Universidad de Stüttgard en Alemania bajo la supervisión de V. Cervenka, R. Eligehausen y R. Pukl. Se diseñó para utilizarse en computadoras personales que trabajan con sistemas operativos DOS, encontrándose también versiones ejecutables disponible en estaciones de trabajo APOLLO. Con él se puede modelar medios bidimensionales que poseen relaciones constitutivas del material no-lineal bajo condiciones estáticas de carga. El análisis mediante este programa incluye todos los estados de respuesta estructural: carga de servicio, carga (pico) de falla, y respuesta después de alcanzar la carga de falla.

Se puede modelar también los siguientes efectos para el comportamiento de la mampostería:

- Comportamiento no-lineal, incluyendo el relajamiento.
- Fractura a la tensión en la mampostería basado en el criterio de energía de fractura.
- Criterios de falla por tensiones bi-axiales.
- Retención de rigidez al corte después del agrietamiento (en el caso de modelos de grietas fijas).
- Modelos de grietas de dirección fija y dirección variable.

El medio continuo puede representarse por elementos finitos cuadriláteros, cada uno de los cuales está formado por dos elementos triangulares de cuatro nudos, resultando un elemento con cuatro nudos en las esquinas y uno en el interior del elemento.

Como en los otros programas ya mencionados, el S-BETA tiene la capacidad de pre-procesar para la definición de los datos y post-procesar los resultados generados por el programa, interactuando amigablemente con el usuario.

Otro de los programas que ha ganado prestigio en estos últimos tiempos es el DIANA(DISplacement method ANAlyser). Este programa de elementos finitos, de propósito general, comenzó a desarrollarse a partir de 1972 por el Instituto de Investigación de Construcciones y Edificaciones TNO en Delft, Holanda. En él se incorpora una amplia variedad de tipos de elementos finitos que facilitan el análisis de diversos sistemas estructurales de concreto reforzado y mampostería con relaciones constitutivas de material elástico, elasto-plástico, plástico, etc.; además de poder introducir al mismo tiempo los conceptos de grietas discretas y agrietamiento distribuido.

El empleo de este programa para el análisis con elementos finitos de estructuras de mampostería, puede ser de dos maneras diferentes:

- El nivel macroscópico, donde se pueden utilizar modelos de grietas fijas multi-direccionales y modelos de plasticidad, para simular el agrietamiento y el aplastamiento respectivamente. Sin embargo, la naturaleza ortotrópica de la

mampostería no puede ser representada, debido a que los modelos de grietas son isotrópicos y la combinación con elasticidad ortotrópica aún no ha sido implantada en el programa.

- El nivel microscópico, que es un análisis más detallado que el anterior, donde el programa tiene la capacidad de poder modelar el comportamiento ortotrópico de la mampostería, donde los ladrillos o bloques de arcilla se modelan con elementos continuos y las juntas por elementos de interface que pueden ser descritos con modelos de grietas discretas y modelos de fricción de Coulomb.

Algunos de los conceptos que se utilizan en este programa se han sido descritos en el capítulo anterior.

3.3 Selección del Programa para el Análisis

Para escoger uno de los programas ya mencionados en párrafos anteriores, debe ser de acuerdo a la disponibilidad de datos; en especial, los que describen el comportamiento del material en las diversas etapas de análisis, conociendo también la capacidad del programa para generar otros datos adicionales tales como la geometría, condiciones de apoyo y carga presentes en la estructura.

Los programas que utilizan conceptos de grietas discretas deben definir un parámetro muy importante que establece el criterio de falla o de iniciación de una grieta. Este parámetro que controla el comportamiento de la grieta, llamado factor de intensidad de tensión crítica, se obtiene mediante ensayos de laboratorio, o definido de acuerdo al criterio del analista^[15]. Un conocimiento previo de los puntos donde deben iniciar las grietas es también fundamental para poder generar la dirección de éstas.

Esto último es un inconveniente observado en estos programas si no se conoce la secuencia exacta de formación de grietas, especialmente si se tiene una estructura con una configuración geométrica complicada, como podría ser el caso del conjunto de arcos que definen uno de los ejes de la Catedral Metropolitana de México. Se ha observado también,

que estos programas no permiten formación simultánea de grietas, lo que es posible que ocurra en estructuras como la antes mencionada.

Por otro lado, los programas de análisis que consideran los conceptos de agrietamiento distribuido requieren de mayor información, en cuanto a las propiedades del material se refiere, para incorporar comportamiento del material en el estado agrietado, estableciendo el sólido agrietado como parte del medio continuo y no como una discontinuidad geométrica como en el caso discreto. La ventaja de ello es que no existe un cambio continuo de la conectividad nodal y de no tener que establecer donde inician las grietas y que trayectoria seguirán éstas en las diversas etapas de análisis, pues el programa se encarga de generarlas automáticamente.

El S-BETA, que pertenece al grupo de programas que incorpora los conceptos de agrietamiento distribuido, es un programa hecho para el análisis de estructuras de concreto armado. Este programa muestra ciertos inconvenientes en su uso. La introducción de datos de geometría y propiedades del material en el S-BETA no es eficiente, pues se hace definiendo regiones que el programa restringe a cierto número. Así, la generación de modelos de elementos finitos es difícil cuando se tiene estructuras complicadas.

La información sobre este programa aún es bastante restringida, no pudiendo establecer con precisión las limitaciones en su empleo. Su manual no presenta comparaciones claras de los resultados con ensayos u observaciones de laboratorio, debiendo verificar cuidadosamente las soluciones obtenidas.

DIANA, un programa más general, utiliza conceptos de grietas discretas y agrietamiento distribuido, además de poder incorporar el comportamiento plástico del material definiendo varias superficies de fluencia. El programa ofrece la facilidad al usuario de poder introducir nuevas relaciones constitutivas que definan el comportamiento del material. La reproducción de los datos es menos complicada que en el S-BETA y sin restricción en el número de nudos, elementos finitos y tipos de materiales. El programa también posee módulos de interface, que permiten la generación de datos y resultados de manera gráfica,

con programas comerciales tales como PATRAN e IDEAS^[11a]. Cuenta además con una librería de elementos finitos con mucha variedad de formas. Los algoritmos de solución para el análisis no-lineal ofrecen mayores alternativas para optimizar el proceso de convergencia que a los ofrecidos por el programa anterior.

Todos las teorías para el análisis estructural que desarrolla este programa se encuentran ampliamente documentados en los manuales, además de ser continuamente actualizadas con los trabajos de investigación que se desarrollan en la Universidad de Delft, Holanda.

Para el presente estudio, en virtud a lo anteriormente expuesto, se ha considerado conveniente elaborar los modelos numéricos para que DIANA interprete el problema y utilizar los resultados obtenidos con el programa, por ser éste de mayor consistencia en la generación de datos y resultados que los anteriores ya mencionados, además de mostrar una amplia información sobre la teoría que se ha implantado en él; siendo calibrado con ensayos de laboratorio, además de ser utilizado en numerosos trabajos de investigación llevados a cabo en Europa y Estados Unidos.

En el próximo capítulo se estudiarán las características que debe tener un modelo numérico que será utilizado para el análisis con elementos finitos, revisando los modelos de comportamiento, elaboración de los modelos geométricos y la incorporación de las propiedades físicas del material, como también las condiciones de apoyo y de carga sobre la estructura.

4. Elaboración de los Modelos Numéricos

En el capítulo 2 se han presentado las ecuaciones básicas para comprender los procedimientos para el análisis de estructuras con métodos como el de los elementos finitos, cuando el material de éstas presenta una respuesta constitutiva lineal y no-lineal. Para cada análisis, se necesitan conocer ciertos parámetros que describan las condiciones físicas y geométricas en que describan el medio en estudio. Estos parámetros deben ser determinados mediante ensayos de laboratorio o experiencia en el conocimiento del comportamiento del material, estudios de las características geométricas que detallan el aspecto que tiene el medio continuo, condiciones de apoyo que contribuyen a la estabilidad cinemática de la estructura y cargas a las que la estructura se encuentra sometida por diversos medios externos. Con estos parámetros, se procede a la elaboración del modelo numérico. Un factor importante en el proceso de implantar un modelo numérico, es establecer la herramienta de cálculo que se empleará en la solución del problema considerado, debiendo conocer la fortaleza y debilidad de ésta para poder adaptar un problema real a uno numérico. La herramienta, en general, es un programa de cómputo con diversas rutinas de cálculo escritas en determinados lenguajes de programación, y que incluyen algoritmos para la solución numérica de ecuaciones matemáticas que describen determinado problema físico. El presente estudio se apoya en un programa de propósito general de elementos finitos, DIANA, descrito en el capítulo anterior.

4.1 Modelo de Comportamiento

La mampostería exhibe un comportamiento anisotrópico en sus propiedades mecánicas, debido a la unión de dos materiales de características distintas. Dependiendo del grado de precisión que se desea obtener en la respuesta de las estructuras de mampostería, debe escogerse el nivel de refinamiento del tipo de modelo a emplear. Existen estrategias para modelar los sólidos que es posible utilizar, tales como las siguientes^[16] (figura 4.1):

- Micro modelo detallado, donde las unidades sólidas y juntas de mortero, son representadas por elementos finitos continuos y la interface unidad-mortero por elementos discontinuos (figura 4.1b).
- Micro modelo simplificado, en que las unidades sólidas se representan expandidas hasta las juntas como elementos continuos y el comportamiento de las juntas de mortero y la interface unidad-mortero es concentrado en elementos discontinuos (figura 4.1c).
- Macro modelo, en el cual las unidades sólidas, las juntas de mortero y las interfaces se homogenizan en el medio continuo formando una unidad (figura 4.1d).

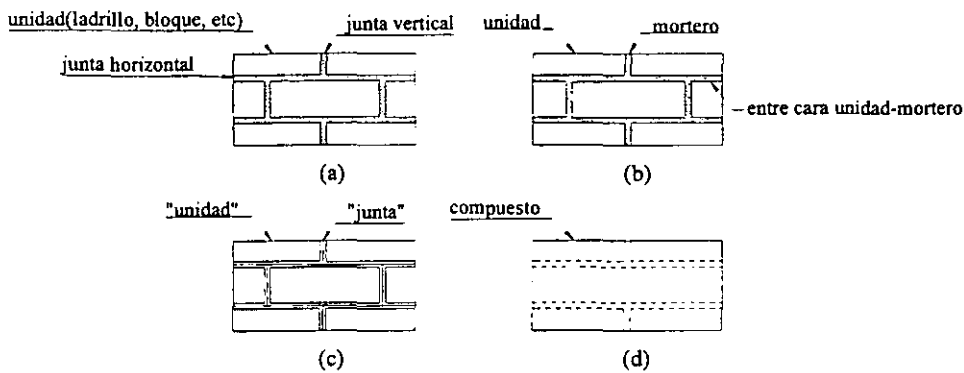


Figura 4.1 Estrategias de modelamiento para estructuras de mampostería: (a) muestra de mampostería; (b) micro modelo detallado; (c) micro modelo simplificado y (d) macro modelo.

En el presente estudio, se utilizará un macro modelo de comportamiento isotrópico, implantando el modelo para el análisis en el estado plano de deformación.

4.2 Modelo Geométrico

Se ha limitado el espacio geométrico para estudiar medios continuos bidimensionales.

Para el caso de los métodos convencionales, como el de fuerzas unitarias, la representación acotada o a escala de la estructura en estudio es suficiente. En el capítulo 5, se muestra la

representación geométrica de la estructura de arco que se estudiará, mostrando los datos necesarios para poder llevar a cabo el análisis mediante el método de fuerzas unitarias.

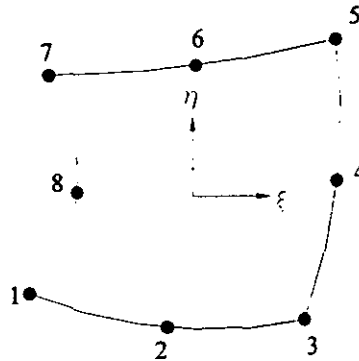


Figura 4.2 Elemento cuadrilátero isoparamétrico de ocho nudos

Para el análisis mediante técnicas numéricas, como lo es el método de los elementos finitos, se debe subdividir la geometría representativa de la estructura en elementos, triangulares o cuadriláteros, cada uno de estos con determinado número de nudos. El grado de precisión de la respuesta deseada depende del refinamiento de la malla y de la cantidad de nudos que posee el elemento^[5a,6].

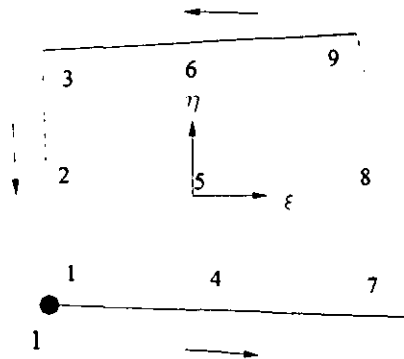


Figura 4.4 Esquema de integración para elementos planos

Para un análisis en un medio bidimensional, se han escogido elementos cuadriláteros de ocho nudos con funciones de forma cuadráticas (figura 4.2), convenientes para que estas

funciones dependan de los valores de los nodos en los lados del elemento. Los esquemas de integración adoptados en el programa DIANA, es según el método de Gauss de 3x3 en el sentido que se aprecia en la figura 4.4, para elementos que representen el comportamiento del material en el estado plano de deformaciones. Este esquema integra exactamente la matriz de rigidez y de esfuerzos iniciales para elementos isoparamétricos de ocho nudos^[5a,6].

El orden que deben seguir los nudos que definen el elemento se puede observar en la figura 4.2, además de los ejes de referencia local. La posición y dirección de estos ejes locales no está explícitamente descrito en el programa. Por ello, se ha creído conveniente obtener los resultados respecto a los ejes globales de la estructura.

4.3 Incorporación de las Propiedades Físicas de los Materiales al Modelo

Una parte importante en todo análisis es la representación de las propiedades de los materiales en los modelos numéricos.

En el caso de un análisis elástico lineal, tomando en cuenta que se trata de una formulación en un estado plano de deformaciones, asociado a un modelo estructural con grados de libertad de translación horizontal y vertical, la matriz constitutiva es:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Así, se puede establecer el modelo para un material elástico lineal (que debe cumplir con las condiciones de continuidad, la ley de Hooke y el principio de superposición) conociendo el módulo de elasticidad o de Young y el módulo de Poisson.

Para el análisis de grietas distribuidas, uno de los parámetros que debemos identificar es la energía requerida para el crecimiento de la grieta en el modo I, G_f^I . Este valor de energía es

resultado de pruebas a deformación controlada. En especímenes de mampostería, G_f^I se define como la energía necesaria para crear un área unitaria de grieta a lo largo de la entre cara unidad sólida y junta de mortero^[16,17]. Otro valor de importancia es la longitud equivalente h , longitud donde se distribuirán las grietas liberándose la energía de fractura sobre un ancho definida por esta longitud, que se expresa como^[16]:

$$h = \alpha_h \sqrt{A_e} = \alpha_h \left(\sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} \det(J) w_\xi w_\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

donde A_e es el área del elemento, w_ξ y w_η , son factores de peso de la regla de integración Gaussiana, donde se reconoce que los elemento finitos son siempre integrables numéricamente. El valor de α_h , es un factor de modificación el cual es igual a uno para elementos cuadráticos y a la raíz de dos en elementos lineales^[15]. Las coordenadas isoparamétricas están dadas por ξ y η . Como se observa el valor de “ h ”, se relaciona a la configuración de la malla de elementos finito utilizada para representar el modelo.

Como consecuencia de lo anterior, pues en este estudio no se tiene una base de datos confiables de laboratorio que permitan definir el comportamiento del material en estado agrietado, se ha supuesto un comportamiento frágil del material. Esta suposición permite estudiar una malla de elementos finitos sin recurrir a un refinamiento estricto del medio que se está considerando, pues no se toma en cuenta ninguna relación de relajamiento del material.

Se ha presentado en esta parte del capítulo 4 algunas ideas básicas para la definición de los parámetros que rigen el comportamiento del material. A continuación se presentan otros efectos que rigen también la respuesta estructural.

4.4 Efectos Estructurales que Influyen en el Comportamiento del Modelo

Todo problema de elementos finitos debe reunir ciertas condiciones que garanticen una feliz culminación del análisis, según los resultados que se desean conocer. En incisos anteriores, se ha mencionado la importancia de establecer los parámetros para definir la geometría y el comportamiento que seguirá el material durante el proceso de deformación que sufrirá la estructura durante las distintas etapas del análisis. Pero otro factor de gran importancia en la solución de un determinado problema de elementos finitos, es la definición de las condiciones de frontera y las sollicitaciones que excitarán a la estructura a dar una respuesta determinada, según los grados de libertad definidos previamente.

Para el problema de estado planos de deformación que se está revisando, se presentan dos grados de libertad, translación paralela al eje global "X" y translación paralela al eje global "Y". Según esto, las condiciones de carga o de desplazamientos a que debe ser sometida la estructura se establecerán en función de estos grados de libertad siguiendo, por supuesto, las direcciones de los ejes globales definidos previamente cuando se consideró el modelo geométrico. Las condiciones de apoyo o de restricción de los grados de libertad serán también controlados por los ejes globales designados. Se dará mayor detalle de la representación gráfica de las restricciones de los grados de libertad de la estructura que estudiaremos al presentar los modelos numéricos.

Se ha mencionado en este capítulo los requerimientos generales que se deben observar para poder realizar los análisis de las estructuras según la herramienta de cálculo que se vaya a emplear con los métodos expuestos, en la siguiente parte del estudio se presenta con mayor detalle las formulaciones de los modelos de las estructuras consideradas, así como los resultados que se han obtenido del empleo de los distintos métodos.

5. Análisis de Estructuras de Mampostería: Ejemplos

Este capítulo presenta ejemplos de análisis de dos estructuras: un arco circular sometido a desplazamientos horizontales en la base y a cargas puntuales que simulan el peso propio de la estructura, y uno de los ejes transversales al eje longitudinal de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México, con desplazamientos verticales en la base de la estructura.

5.1 Arco Circular

Se presenta a continuación la descripción de las características principales del arco circular de mampostería para poder ejecutar un análisis lineal y no lineal.

Geometría.- Las características geométricas del arco son las que se muestran en la figura 5.1. Este arco tiene un radio de curvatura de 7.5 m, con espesor de un metro.

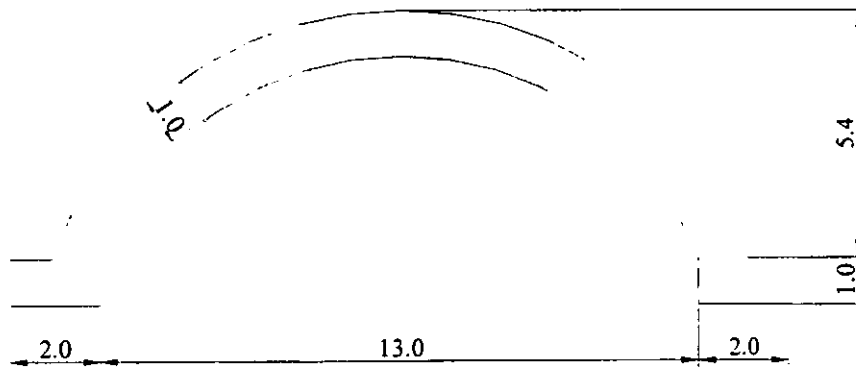


Figura 5.1 Arco circular de mampostería (acotaciones en metros)

La figura 5.2 muestra la geometría que se utilizó para el análisis mediante el método convencional de fuerzas unitarias.

En la figura 5.3 se presenta la mitad de la malla de elementos finitos mostrándose también el origen de coordenadas utilizado. La malla total está compuesta por 600 elementos cuadriláteros de ocho nudos.

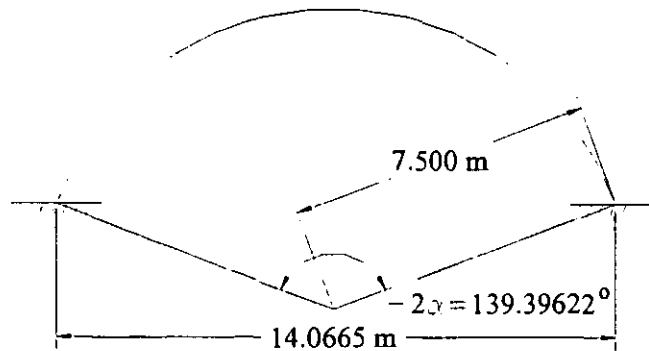


Figura 5.2 Modelo de arco para método convencional

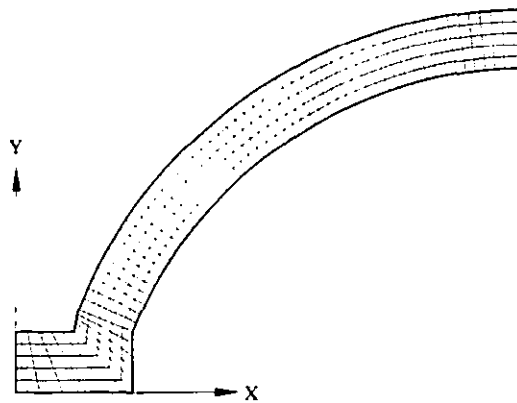


Figura 5.3 Malla de elementos finitos de la mitad de la estructura

Cuando se desea realizar un análisis no-lineal, se debe tener especial cuidado en la elección del tamaño del elemento finito que describe la geometría del medio continuo. Si el tamaño del elemento es demasiado grande, los cambios de rigidez debido al agrietamiento del material es posible que sean demasiados bruscos que lleven a un comportamiento de la respuesta de tipo “snap-back”^[11c]. Esto último se produce porque el valor absoluto de la

pendiente inicial de la curva de relajamiento es mayor al módulo de elasticidad de Young del material. Formalmente esto se puede expresar como:

$$\left(\frac{\sigma_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn}^{cr}} \right) \geq -E \quad (5.1)$$

cuando $\epsilon_{nn}^{cr} = 0$. Si tomamos en cuenta una curva de relajamiento de forma $y(x)$, según lo visto en el capítulo 2, la ecuación 5.1 puede ser expresada también como:

$$\frac{f_t}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} \frac{dy}{dx} \geq -E \quad (5.2)$$

cuando se evalúa en $x=0$, resultando una expresión para la deformación última de agrietamiento de:

$$\epsilon_{nn,ult}^{cr} \geq \frac{f_t}{E} \frac{dy}{dx} = \epsilon_{nn,ult,min}^{cr} \quad (5.3)$$

calculándose $\epsilon_{nn,ult}^{cr}$, con la ecuación (2.43). Si se viola la condición expresada en (5.3), se pueden considerar varios tipos de solución. Una de estas soluciones es adoptar una longitud "h" de menor valor, lo que nos llevaría a un mayor refinamiento de la malla; otra es incrementar el valor de la energía G_f^I , aumentando la ductilidad del material o disminuyendo la resistencia a la tensión, llevando implícitamente a incrementar la ductilidad, desde que la energía de fractura se mantiene constante en este caso.

En este trabajo se ha supuesto que el material es frágil, teniendo una total reducción de rigidez después de que el criterio de resistencia ha sido violado, cumpliendo el criterio expuesto en (5.3).

Características del Material.- El conocimiento de las propiedades mecánicas del material que ha sido utilizado en edificaciones históricas para su evaluación estructural es de suma

importancia. La identificación de estas propiedades es mediante la obtención de parámetros que describan el comportamiento del material el cual se define con modelos matemáticos. Una manera común de establecer estos parámetros es mediante ensayos de laboratorio, donde se observa la respuesta del material ante sollicitaciones controladas para establecer la capacidad de éste de absorber y liberar energía.

El material que se estudiará brevemente en este capítulo es la mampostería, y predomina en muchas edificaciones históricas. Este material está compuesto de bloques de piedra o material de cantera, unidos entre sí por mezclas de cal y arena.

Una de las edificaciones hechas de mampostería de piedra que ha sido motivo de muchos estudios es la Catedral de la ciudad de México, donde se han llevado a cabo una amplia variedad de ensayos a fin de establecer las propiedades de los materiales de que está construida esta estructura. En la tabla 5.1^[17] se presentan valores de resistencia y módulos de elasticidad de los distintos tipos de material hallados en la estructura de la Catedral de México, que describen parte de las características de un material lineal elástico.

Tabla 5.1 Propiedades de los materiales

Material	Resistencia (kN/m ²)		Módulo de Elasticidad (kN/m ²)	Deformación Máxima
	Compresión	Tensión		
Cantera de mala calidad	10,780.00	999.60	3.92*10 ⁶	0.0040
Cantera de buena calidad	39,200.00	3,645.60	1.47*10 ⁷	0.0026
Mampostería de mala calidad	5321.40	0.00	3.36*10 ⁶	0.0032
Mampostería de buena calidad	18,777.78	0.00	8.64*10 ⁶	0.0043
Mortero	2450.00	-----	6.47*10 ⁵	0.0080

De otro lado, Lorenço^[16] señala los siguientes parámetros elásticos del material, obtenidos de ensayos de unidades de mampostería, que se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5.2 Propiedades elásticas de la Mampostería

Módulo de Elasticidad E_x (kN/m ²)	Módulo de Elasticidad E_y (kN/m ²)	Módulo de Poisson ν_{xy}	Energía de Fractura G_{xy} (kN/m ²)
2.46*10 ⁶	5.46*10 ⁶	0.18	1.13*10 ⁶

Las fuentes de donde se han obtenido los datos, no mencionan las condiciones físicas en que se encontraban los especímenes de ensayo. Usualmente, las edificaciones históricas pueden presentar ciertas alteraciones en las propiedades de los materiales debido a medios externos como el ataque químico debido a la filtración del agua de lluvia expuesta al anhídrido carbónico que aumenta el grado de acidez, o biológico por la presencia de microorganismos. Esto podría traer como consecuencia una reducción en los valores de los parámetros que definen las propiedades. Se ha creído conveniente utilizar el límite inferior de los módulos de elasticidad en las tablas antes mostradas. Así, las propiedades físicas del material utilizadas para el modelo numérico en el análisis lineal y análisis de grietas considerando estado plano de deformaciones, son las que se presentan a continuación en las siguientes tablas:

Tabla 5.3 Parámetros para simular comportamiento elástico lineal

Módulo de Elasticidad	Coefficiente de Poisson
2.46E6 kN/m ²	0.18

Tabla 5.4 Parámetros para simular comportamiento agrietado

Tensión Límite (kN/m ²)	Factor de Retención de Corte
280	1.00

Condiciones de Frontera.- Las condiciones de frontera se han tomado de acuerdo a las cargas aplicadas en el modelo; en la figura 5.4 se muestran los ejes globales definidos y las condiciones de apoyo para los respectivos análisis realizados en este trabajo:

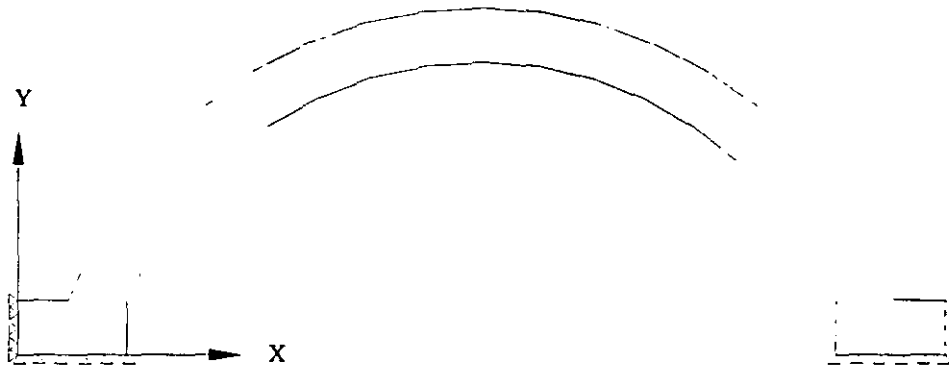


Figura 5.4 Condiciones de apoyo en el arco

Condiciones de Carga.- Para los análisis lineales y no-lineales, se han introducido las siguientes cargas sobre la estructura:

- Cargas concentrada. Estas cargas simulan el peso propio de la estructura, calculándose como dovelas, según el tamaño de cada elemento.
- Desplazamientos horizontales. Se introducen desplazamientos en el sentido X, positivo y negativo, en los apoyos extremos de los arcos.

Para el análisis lineal, se ha supuesto una carga distribuida de 19.6 kN/m^2 , y se han tomado desplazamientos de 2.0 cm, en ambos sentidos paralelos al eje X en la base del arco. Para el análisis no-lineal, se han tomado incrementos de carga de 0.05 veces el valor de la carga total, en ambos casos.

5.2 Eje Transversal al Eje Principal de la Catedral de la Ciudad de México

Se ha escogido el eje transversal designado con el número 6, según la nomenclatura adoptada en la figura 5.5^[18], de la Catedral de México para poder hacer un estudio del comportamiento de grietas.

El daño ocasionado en esta estructura ha sido debido a hundimientos diferenciales en la cimentación por la consolidación de la arcilla bajo la elevada carga impuesta por el peso de la Catedral, y en parte importante a la extracción de agua del subsuelo^[17,18].

Esta parte de la estructura cuenta con dos muros laterales, que confinan lateralmente al sistema de cubiertas, contrarrestan el efecto de empuje de las bóvedas cilíndricas que cubren el espacio entre dichos muros y las columnas interiores. El material que predomina en los muros es el tezontle combinado con piedras pequeñas unidos por mortero de cal y arena, en las bóvedas se tiene el mismo material con una disminución apreciable de la cantidad de piedras. Las columnas están constituidas por sillares de piedra que le otorgan al elemento una elevada capacidad de resistir esfuerzos de compresión.

El modelo de elementos finitos con algunas de las dimensiones de este eje se muestra en la figura 5.6 donde se muestran también las condiciones de apoyo. Este modelo utiliza elementos de ocho nudos siendo en total 1553 nudos. En la línea de base, 98 nudos tienen desplazamientos prescritos "Y"; el nudo que se encuentra en la intersección en la línea de la base y el eje de simetría de la estructura tiene restricciones en los desplazamientos en dirección "X" e "Y". El número total de grados de libertad en total en el modelo es de 3104. El número de elementos en el modelo numérico es de 624. Dada la heterogeneidad de la estructura se ha creído conveniente homogenizar las propiedades del material tomándolas iguales a la del caso anterior. El análisis se ha restringido también a un estado plano de deformaciones. Se ha impuesto, sobre esta estructura, desplazamientos verticales en toda la base siguiendo una distribución parabólica, positivos y negativos según el eje positivo Y. La ubicación de los ejes de referencia se encuentra en el extremo inferior izquierdo de la estructura.

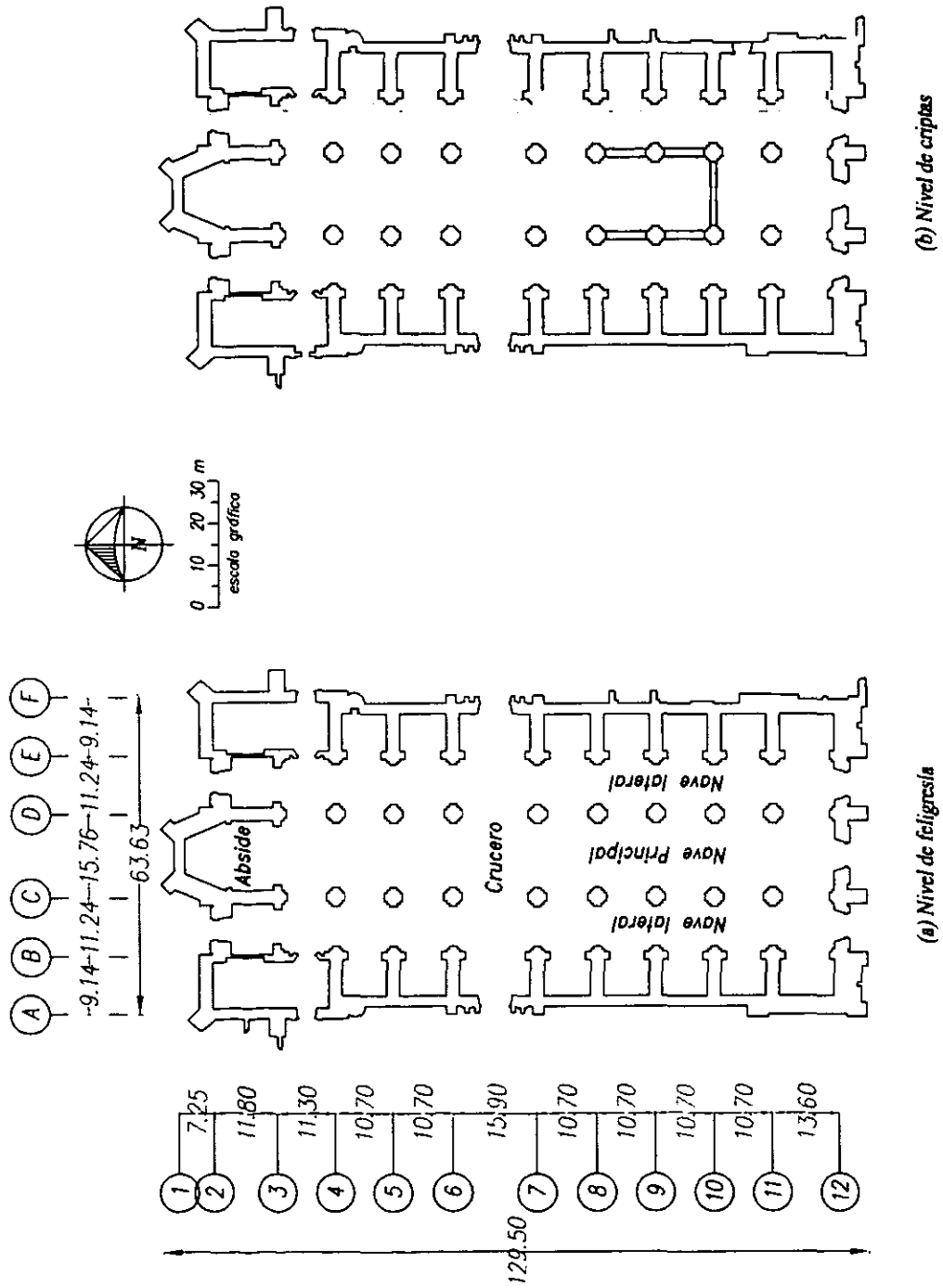


Figura 5.5 Planta de la Catedral

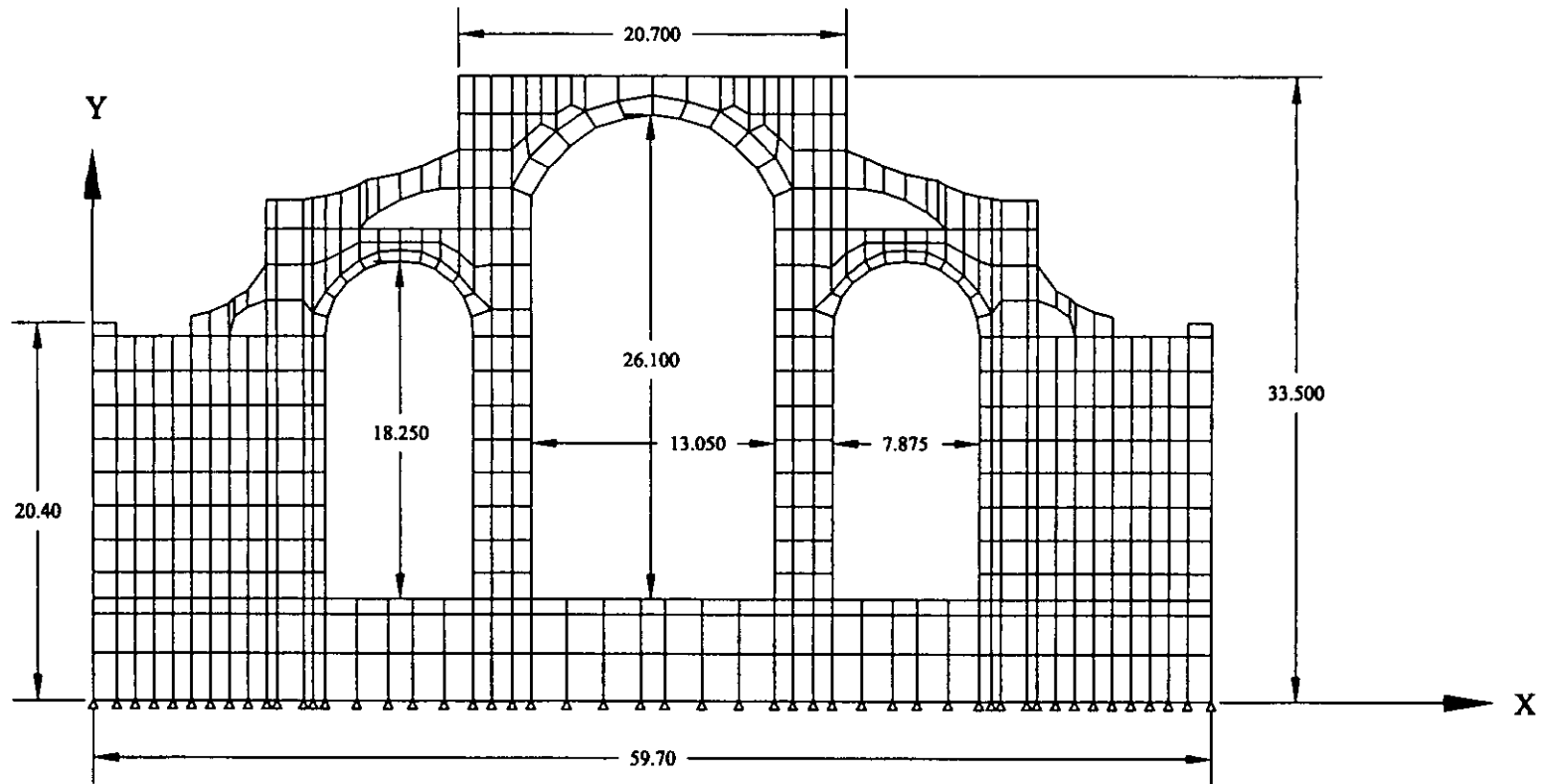


Figura 5.5 Modelo de elementos finitos para el eje en estudio (acotaciones en metros)

En este capítulo se han presentado los datos necesarios para poder establecer los modelos en el programa DIANA. En el siguiente capítulo se mostrarán los resultados producto de los análisis según los métodos que se están revisando en este trabajo.

Capítulo 6 Métodos Convencionales y Elementos Finitos: Resultados

En este capítulo se detallan los resultados obtenidos con los distintos métodos ya expuestos en capítulos anteriores, mostrando las soluciones mediante gráficos de esfuerzos, líneas de presiones y configuración de grietas; señalando, además, la calidad de la solución desde el punto de vista de resultados de cada uno de estos análisis

La primera parte de este capítulo, muestra los resultados para el arco simple de mampostería. La segunda, presenta la solución correspondiente al conjunto de arcos que forman parte de uno de los ejes transversales al eje principal de la Catedral de la Ciudad de México.

6.1 Arcos Circulares

Los resultados que se muestran a continuación, son para los estados no agrietados y agrietados del material presente en los arcos. Para el análisis por peso propio, se detallan las líneas de presiones y la variación de éstas en los distintos tipos de análisis realizados. En el caso de desplazamientos prescritos horizontales en la base, se presentan las distribuciones de fuerzas de sección en la estructura. También, al final de esta parte, se presentan resultados de la variación de las líneas de presiones con carga de peso propio combinado con desplazamientos horizontales en los apoyos.

6.1.1 Análisis Lineal con Cargas de Peso Propio.- Se presenta a continuación un ejemplo de cálculo de las reacciones que se producen en el arco por el método de fuerza unitaria, el cual puede agruparse dentro de los métodos convencionales de análisis. Los resultados de diagrama de momentos flectores y fuerza axial se han obtenido bajo una carga distribuida de 19.6 kN/m. El ancho de la sección transversal del arco se considera uno.

Para el análisis mediante el método convencional se considerará el modelo que se presenta en la figura 6.1. En la figura 6.2, se muestra el modelo con las cargas actuantes del arco isostático y finalmente en la figura 6.3, el arco isostático con las redundantes de apoyo.

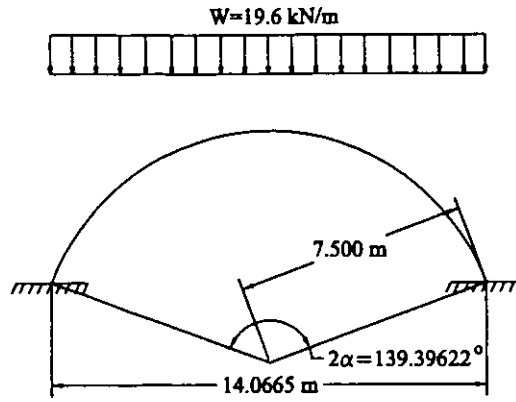


Figura 6.1 Modelo para el análisis convencional

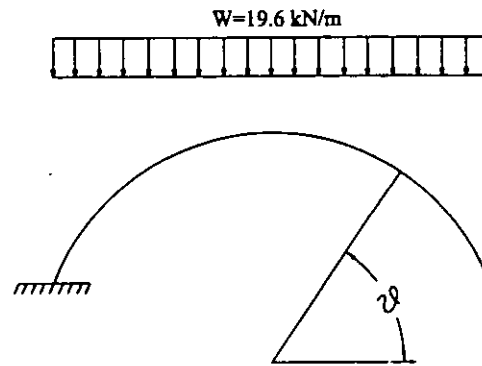


Figura 6.2 Estructura primaria con carga actuante

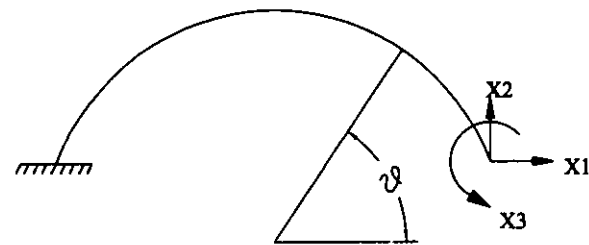


Figura 6.3 Estructura primaria con redundantes como carga

Según se observa en la figura 6.1, el grado de hiperestaticidad exterior del arco mostrado es tres. Para resolver la estructura utilizando el método de carga unitaria o método de las flexibilidades primero se debe proponer una estructura primaria que cumpla con los requisitos de estabilidad. En este caso, se libera uno de los extremos del arco como se muestra en las figuras 6.2 y 6.3; con incógnitas X_1 , X_2 y X_3 , componentes de reacción del arco bajo carga distribuida.

Por superposición de efectos, se van a tener tantas estructuras como cargas tenga ésta. En la figura 6.2, la estructura primaria se encuentra sometida a la carga real actuante "W". Llamando M_w , la función de momento flector debido a la carga distribuida "W" en una sección genérica definida por el ángulo ϑ ; e introduciendo una fuerza diferencial dP_i en el extremo con una dirección "i"; se generará por esta última, una distribución de momentos, m_i , en la misma sección, produciendo rotaciones $d\vartheta$ que según teorema de área de momentos^[4] son iguales a:

$$d\vartheta = m_i \frac{ds}{EI} \quad (6.1)$$

Por lo expuesto en el capítulo 2, la energía de deformación diferencial que se produce por el trabajo de las fuerzas interiores, resultante de la aplicación de las cargas externas en las deformaciones generadas por dP_i , es igual al producto del desplazamiento "d_i", en la dirección "i" por la carga dP_i . La expresión que resume lo último es:

$$d_i dP_i = M_w \frac{m_i ds}{EI} \quad (6.2)$$

Si se hace dP_i igual a la unidad e integrando sobre todo el dominio de variación de la longitud "s", se obtiene la siguiente expresión:

$$d_i = \int_s M_w m_i \frac{ds}{EI} \quad (6.3)$$

Los momentos m_i , son los debidos a una carga unitaria aplicada en el punto donde se desea calcular los desplazamientos d_i .

Con la expresión 6.3, se pueden determinar los desplazamientos de traslación horizontal, vertical y de rotación en el extremo liberado del arco y que se denominarán como δ_j^i . El subíndice "i" indica la carga externa a la que se somete la estructura primaria, y el subíndice "j" la dirección donde se desea calcular el desplazamiento.

Con esto último se formará las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones que se presentan en el apoyo extremo ya señalado, y que permitirá resolver las incógnitas de reacción del arco.

Las distribuciones de momentos debido a la carga distribuida "W" y las cargas unitarias en dirección X1, X2, y X3; en función del ángulo ϑ y considerando "r" como el radio del arco, son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} M(\vartheta) &= \frac{Wr^2}{2} [\text{sen } \alpha - \cos \vartheta]^2 \\ m_1 &= r[\text{sen } \vartheta - \cos \alpha] \\ m_2 &= r[\text{sen } \alpha - \cos \vartheta] \\ m_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

donde el ángulo ϑ varia entre $\left[\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha \right]$.

Utilizando la ecuación 6.3 con las expresiones en 6.4, se tendrá lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^0 &= \frac{Wr^4}{6EI} [3\alpha \text{sen } \alpha + 6\alpha \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha - 8\text{sen}^3 \alpha - 3\text{sen } \alpha \cos^2 \alpha] \\ \delta_2^0 &= -\frac{Wr^4}{2EI} [2\alpha \text{sen}^3 \alpha - 3\text{sen}^2 \alpha \cos \alpha + 3\alpha \text{sen } \alpha] \\ \delta_3^0 &= -\frac{Wr^3}{2EI} [2\alpha \text{sen}^2 \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha + \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Estas ecuaciones representan los desplazamientos debidos a la carga W en las direcciones paralelas a las cargas X_1 , X_2 y X_3 . Las siguientes expresiones representan los desplazamientos δ_j^i , cuando se aplica una carga unitaria en la dirección “ i ” para hallar el desplazamiento en la dirección “ j ”. Así, para los desplazamientos en la dirección de X_1 se tiene lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^1 &= \frac{r^3}{EI} [\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] \\ \delta_1^2 &= 2 \frac{r^3}{EI} [\operatorname{sen}^2 \alpha - \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] \\ \delta_1^3 &= 2 \frac{r^3}{EI} [\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Para la dirección paralela a X_2 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^1 &= 2 \frac{r^3}{EI} [\operatorname{sen}^2 \alpha - \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] \\ \delta_2^2 &= \frac{r^3}{EI} [2\alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \alpha] \\ \delta_2^3 &= 2 \frac{r^2}{EI} \alpha \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

y por último, las expresiones para las rotaciones en el sentido de X_3 están definidas como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \delta_3^1 &= 2 \frac{r^2}{EI} [\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha] \\ \delta_3^2 &= 2 \frac{r^2}{EI} \alpha \operatorname{sen} \alpha \\ \delta_3^3 &= 2\alpha \frac{r}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones en el extremo de arco son entonces:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^0 + \delta_1^1 X1 + \delta_1^2 X2 + \delta_1^3 X3 &= 0 \\ \delta_2^0 + \delta_2^1 X1 + \delta_2^2 X2 + \delta_2^3 X3 &= 0 \\ \delta_3^0 + \delta_3^1 X1 + \delta_3^2 X2 + \delta_3^3 X3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Al reemplazar con los datos del problema y resolviendo el sistema de ecuaciones 6.9 se obtiene lo siguiente:

$$X = \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -105.2 \\ 137.9 \\ 51.7 \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

Las unidades de X1 y X2 están en kN y X3 en kN-m. El signo indica el sentido correcto de la dirección de las incógnitas.

La comprobación del resultado para la fuerza vertical X2, puede ser hecha fácilmente de la siguiente manera: Por simetría de las cargas y de la estructura, las reacciones verticales en ambos apoyos son iguales; y por equilibrio de fuerzas verticales, la suma de estas reacciones es igual al producto de la longitud "L" por la carga "W" dividido entre dos, esto da como resultado 137.9 kN, igual al obtenido para X2 como se muestra en la expresión 6.10 que representa la solución.

Con estos resultados, se ha procedido a calcular los diagramas de momentos y fuerza axial que se presentan de manera gráfica.

En las figuras 6.4 y 6.5, se muestran el diagrama de fuerzas normales y momentos flectores; la tabla 6.1 muestra algunos valores momentos flectores y fuerza axial en determinadas secciones y su posición según el eje de referencia escogido.

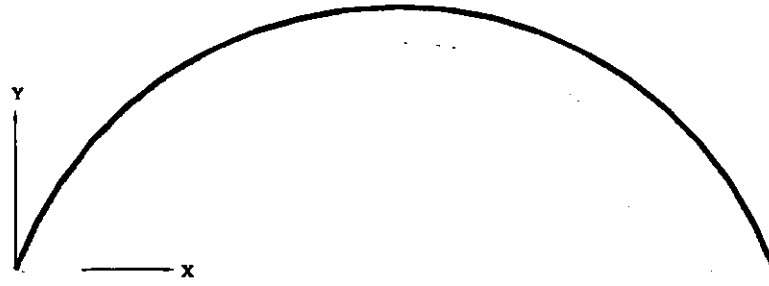


Figura 6.4 Diagrama de fuerza axial en el arco por carga distribuida

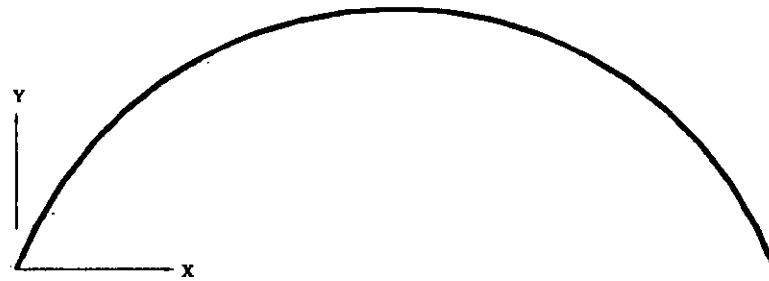


Figura 6.5 Diagrama de momentos flectores en el arco por carga distribuida

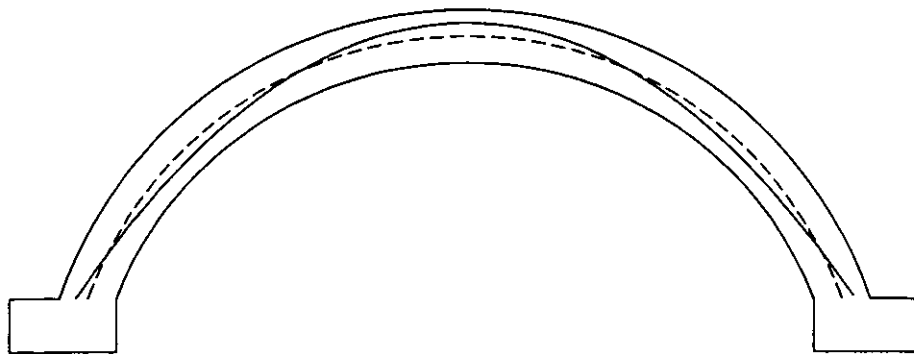


Figura 6.6 Línea de presiones por carga distribuida

Tabla 6.1 Momentos Flectores y Fuerzas Axiales por Carga Distribuida

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	51.7	-165.8
2	2.03	3.00	-22.7	-143.8
3	7.03	4.90	21.6	-105.2

La línea de presiones se calcula a partir de estos datos; dividiendo los valores de momentos entre los correspondientes a las fuerzas axiales.

En la figura 6.6, la línea continua representa la línea de presiones y la punteada el eje del arco. Se observa un claro desfase de la línea de presiones con respecto a la línea eje del arco; dicha línea pasa por encima de este eje en la parte superior del arco. En la zona intermedia, el eje de éste se encuentra encima de esta línea y en las zonas extremas nuevamente la línea de presiones está encima del eje del arco. Esta línea de presiones pasa por el tercio central, en todas las secciones

6.1.2 Análisis Lineal con Desplazamientos en los Extremos del Arco.- Para este caso se ha procedido de manera similar al anterior. Las condiciones de apoyo en los extremos del arco se han restringido sólo para el desplazamiento vertical y la rotación de la sección. La estructura primaria es la misma que se muestran en la figura 6.2; pero con dos reacciones en el extremo libre. Las carga lateral X_1 representa la fuerza necesaria para poder desplazar el extremo una cantidad Δ y X_2 (antes X_3 en la figura 6.3) el momento aplicado para que la sección no gire. Las expresiones de momentos flectores debido a estas cargas unitarias son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= r[\sin \vartheta - \cos \alpha] \\ m_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Estas expresiones coinciden con la segunda y cuarta ecuación en (6.4). Así los coeficientes para las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones para el apoyo extremo son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^1 &= \frac{r^3}{EI} [\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] \\ \delta_1^2 &= 2 \frac{r^3}{EI} [\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

que representan los desplazamientos en la dirección paralela al la fuerza X1, debido a las fuerzas aplicadas X1 y X2. Los correspondientes desplazamientos correspondientes al giro de la sección por X1 y X2 son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^2 &= 2 \frac{r^2}{EI} [\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha] \\ \delta_2^2 &= 2\alpha \frac{r}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones en este caso son:

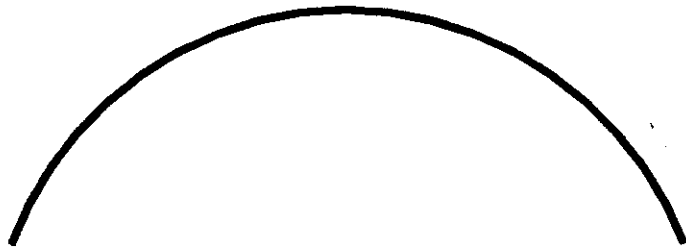
$$\left. \begin{aligned} \delta_1^1 X1 + \delta_1^2 X2 &= \Delta \\ \delta_2^1 X1 + \delta_2^2 X2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Reemplazando con los datos de la estructura tenemos la siguiente solución:

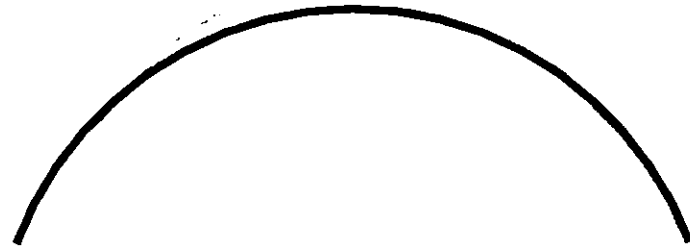
$$X = \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200.8 \\ -638.7 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

X1 esta en kN y X2 en kN-m.

La figura 6.7, muestra el diagrama de las fuerzas normales y momentos flectores cuando se abren los extremos del arco a dos centímetros. En este caso, las secciones se encuentran sometidas a esfuerzos de tensión, no estando definida una línea de presiones en el arco. La tabla 6.2, muestra los valores en algunas secciones.



(a) Diagrama de fuerzas normales

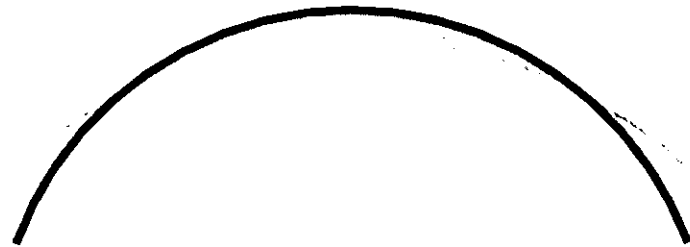


(b) Diagrama de momentos flectores

Figura 6.7 Elementos mecánicos en arco por abertura de apoyos.



(a) Diagrama de fuerzas normales



(b) Diagrama de momentos flectores

Figura 6.8 Elementos mecánicos en arco por cierre de apoyos.

Tabla 6.2 Momentos Flectores y Fuerzas Axiales por Abertura de Extremos del Arco

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	-638.7	69.7
2	2.03	3.00	-38.8	149.7
3	7.03	4.90	344.9	200.8

Para el caso donde se cierran los extremos del arco con el mismo valor de desplazamiento; la tabla 6.3 contiene los correspondientes valores de fuerza normal y momentos flectores, los diagramas correspondientes se encuentran en la figura 6.8. Al calcularse algunos de los puntos que forman parte de la línea de presiones, se observó que éstos no caen dentro de los límites que definen el arco, por lo que no se pudo encontrar una línea de presiones de manera adecuada, como sucede como en el caso anterior.

Tabla 6.3 Momentos Flectores y Fuerzas Axiales por Abertura de Extremos del Arco

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	638.7	69.7
2	2.03	3.00	38.8	149.7
3	7.03	4.90	-344.9	200.8

Otro punto de interés, ha sido obtener la distribución de fuerzas normales y momentos flectores, cuando se combinan las cargas de peso propio y de apertura de apoyos. Los resultados para este caso presenta en la figura 6.9 con desplazamientos de 2 cm; la tabla 6.4 muestra los valores de fuerzas normales y momentos flectores. La línea de presiones no se ha podido definir también, pues se presentan fuerzas de tensión en varias secciones normales al arco, con valores de excentricidad de la línea de presiones con respecto al eje del arco demasiados altos.

Si reducimos el desplazamiento, por ejemplo a un décimo del valor propuesto de desplazamiento, podemos definir la línea de presiones. La tabla 6.5 resume algunos de los valores de los momentos y fuerzas axial y la figura 6.10.

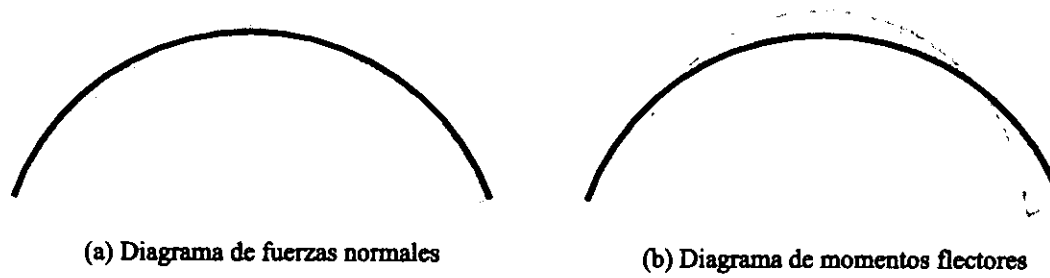


Figura 6.9 Elementos mecánicos en arco por peso propio y abertura de apoyos.

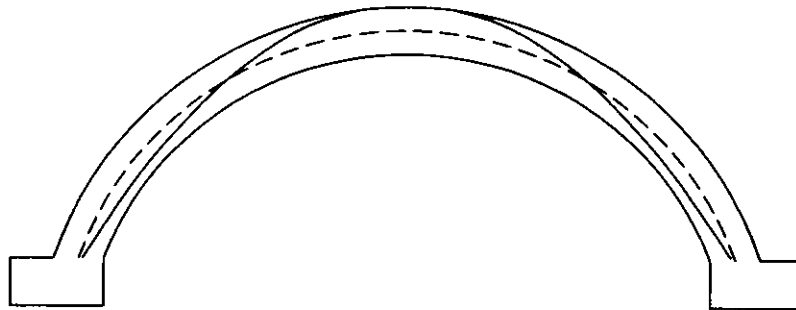


Figura 6.10 Línea de presiones por carga distribuida y desplazamiento reducido de abertura

Tabla 6.4 Resultados de Combinación de Carga Distribuida con Abertura de Apoyos

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	-587.0	-96.2
2	2.03	3.00	-61.5	5.9
3	7.03	4.90	366.4	95.6

Tabla 6.5 Resultados de Combinación de Carga Distribuida con Desplazamiento Reducido

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	-12.20	-158.9
2	2.03	3.00	-26.6	-128.8
3	7.03	4.90	56.1	-85.1

En esta última situación, la línea de presiones no exhibe cambio de curvatura como en el caso de cargas distribuidas. La diferencia de posición entre el eje del arco y esta línea es más evidente, especialmente en la parte superior del arco, donde la línea prácticamente coincide con el límite superior del arco, lo que demuestra la tendencia de la línea a desaparecer cuando se produce la abertura de apoyos.

Finalmente, para el caso donde se combinan las cargas por peso propio y desplazamientos de cierre de la base de 2 cm; los diagramas de fuerza axial y momentos flectores se presentan en el figura 6.11 y en la tabla 6.6, algunos estos valores. En este caso, la línea de presiones no se pudo definir a pesar de que todas las líneas en el arco se encuentran bajo fuerzas de compresión. La excentricidad de la línea de presiones también resulto alta, pero con valores menores que en el caso anterior.

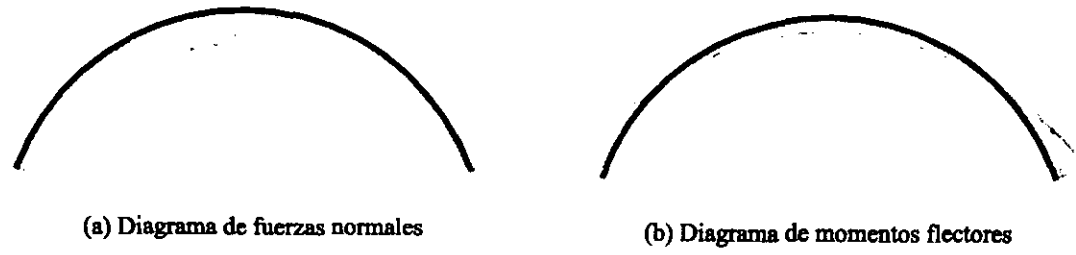


Figura 6.11 Elementos mecánicos en arco por carga distribuida y cierre de apoyos

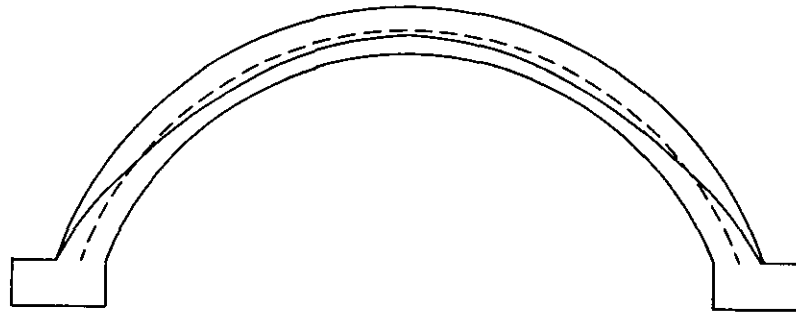


Figura 6.12 Línea de presiones por carga distribuida y desplazamiento reducido de cierre

Tabla 6.6 Resultados de Combinación de Carga Distribuida por Cierre de Apoyos

Sección	X (m)	Y (mm)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	638.70	-69.7
2	2.03	3.00	38.8	-149.7
3	7.03	4.90	344.9	-200.8

Los resultados con la misma reducción del desplazamiento como en el caso de abertura de apoyos se resumen en la tabla 6.7 y la figura 6.12.

Tabla 6.7 Resultados de Combinación de Carga Distribuida con Desplazamiento Reducido

Sección	X (m)	Y (m)	Momento (kN-m)	Fuerza Axial (kN)
1	0.00	0.00	115.6	-172.8
2	2.03	3.00	-18.8	-158.7
3	7.03	4.90	-12.9	-125.3

En este caso también la línea de presiones no presenta cambio de curvatura; pero esta vez comienza a desaparecer a partir de los extremos del arco.

Se ha visto en esta parte como se puede resolver un arco circular utilizando el método fuerza unitaria. La solución se ha representado de manera gráfica, diagrama de momentos flectores y de fuerzas de compresión normales a las secciones del arco. De los diferentes estados de cargas y combinaciones, se ha podido obtener la línea de presiones al someter a la estructura a una carga distribuida que represente el peso propio de ésta, como también para una combinación de carga distribuida y desplazamientos pequeños en los extremos. A continuación se presentan resultados obtenidos utilizando el método de los elementos finitos. El resultado de este análisis es por peso propio y lineal considerando que existe una carga distribuida. Esta carga fue descompuesta en cargas puntuales aplicadas sobre los nudos que se encuentran en la parte superior del arco, tomando en cuenta la longitud proyectada sobre la horizontal de cada elemento finito que se ubica en la frontera superior.

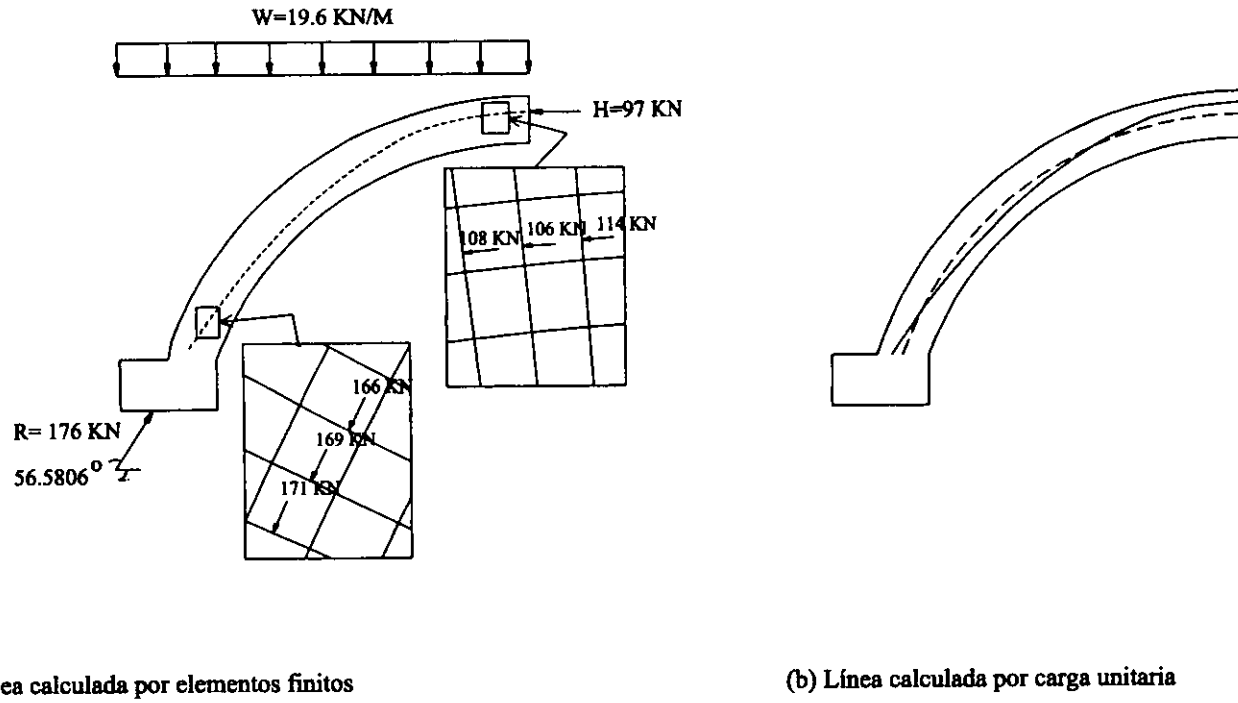


Figura 6.13 Comparación de línea de presiones

Los resultados en las fuerzas de compresión que se obtuvieron tienen una diferencia de cinco por ciento en promedio, con relación al caso ya visto cuando se mostraron resultados por peso propio con el método convencional. Cada una de estas fuerzas se calcularon integrando numéricamente los esfuerzos en las secciones normales al eje del arco. Para calcular la posición de estas fuerzas normales en la sección, se integró el producto de la fuerza normal por la distancia al eje y luego se dividió este resultado por la fuerza normal total en la sección. El resultado total se muestra en el gráfico 6.13.

La línea de presiones, es similar a la obtenida en el caso antes mencionado en el análisis convencional; en la parte superior del arco, la línea se encuentra encima del eje, pasando luego debajo de este eje en las zonas intermedias y volviendo a pasar por encima en las zonas extremas. Hay pequeñas diferencias en la posición de la línea, en este caso, con respecto al resultado obtenido del análisis convencional; aunque se puede considerar iguales desde el punto de vista práctico.

Para el caso de introducir desplazamientos en la base del arco utilizando el método de elementos finitos con comportamiento lineal del material, se obtienen resultados similares a los presentados con el método antes mostrado; es decir, se obtienen las líneas de presiones con carga distribuida, como también para la combinación de carga distribuida y desplazamientos con valores pequeños.

6.1.3 Análisis No-lineal con Carga de Peso Propio.- Los resultados que a continuación se presentan, son producto de considerar un material frágil, utilizando el concepto de grietas distribuidas. Las cargas impuestas de peso propio sobre el modelo son las mismas que se utilizaron para el análisis lineal con elementos finitos; pero ahora se incorporan de manera incremental. Para obtener el tamaño del paso de carga se realizaron varios análisis variando el tamaño del paso y comparando los resultados obtenidos de cada experimento. Además, se buscó el método de solución de ecuaciones no-lineales más adecuado desde el punto de vista de resultados y de cómputo. Los métodos estudiados fueron de “Newton-Raphson” y de “Longitud de Arco”. Un dato importante considerado también, fue la resistencia a la tensión del material de 280 kN/m^2 .

Para obtener los resultados que se muestran a continuación, se han utilizando pasos de carga de 0.05 la carga nodal; los procedimientos de solución empleados fueron de Longitud de Arco combinado con Newton-Raphson y utilizando solamente Newton-Raphson. Para el primer método, se fijó los puntos de control, en los nodos donde se aplicó la carga concentrada; en el procedimiento de Newton-Raphson se utilizó el procedimiento regular, calculando antes de cada iteración la matriz de rigidez tangencial, además de utilizar un procedimiento de búsqueda lineal para escalar los desplazamientos incrementales automáticamente en cada proceso de iteración.

El número máximo de iteraciones fue, en todos los análisis, de 30. Se empló como criterio de convergencia norma de la energía interna^[11c]. La tolerancia para la convergencia con respecto a este criterio fue, en todos los análisis, de $1.0 \cdot 10^{-6}$. Los bloques de memoria necesarios para inicializar el archivo de administración de datos fue de 40,000 (20 MB aproximadamente). En ambos casos se obtuvieron iguales resultados en el análisis cuando se somete a la estructura a cargas concentradas; considerando la solución obtenida por el método de Newton-Raphson con búsqueda lineal para el cálculo de las líneas de presiones. Esta elección se debe principalmente que no se puede utilizar el método de Longitud de Arco en el análisis de la estructura cuando se imponen desplazamientos incrementales fijos; y en algunos de los casos que se desarrollan, se consideró la combinación de las cargas puntuales y desplazamientos prescritos. Los gráficos 6.14 y 6.15, muestran correspondientemente la configuración agrietada de la estructura, y la línea de presiones que se calculó como en el caso lineal, integrando los esfuerzos en cada sección normal al eje del arco y también integrando el producto de los esfuerzos por la distancia al eje.

Las figura 6.15, presenta las líneas de presión obtenidas utilizando los resultados del análisis convencional y análisis no-lineal considerando conceptos de agrietamiento distribuido. Se puede observar poca dispersión entre ambas líneas, notándose mayor diferencia en los extremos del arco. La diferencia observada en la solución no-lineal es debida a la nueva distribución de esfuerzos de compresión producto de la manifestación de agrietamiento en el arco, según se observa en la figura 6.14; en la figura 6.15.

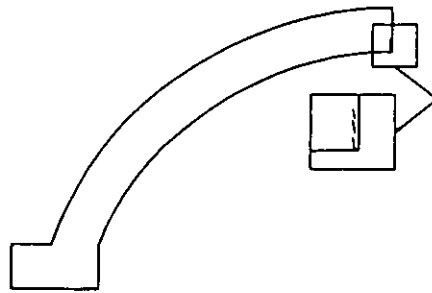


Figura 6.14 Configuración de grietas por carga distribuida en el arco

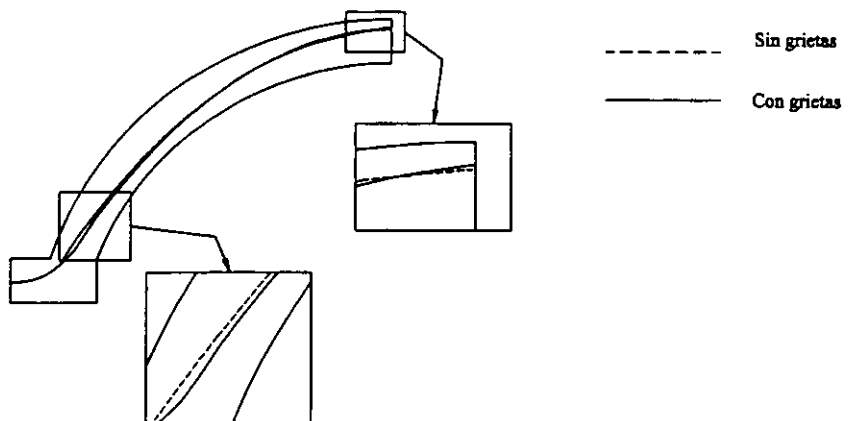


Figura 6.15 Líneas de presiones por carga distribuida

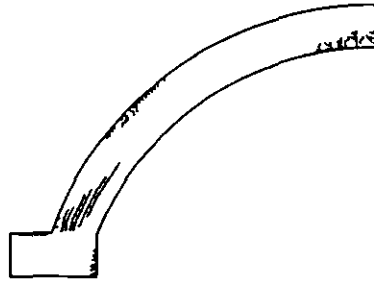


Figura 6.16 Configuración de por carga distribuida ampliada

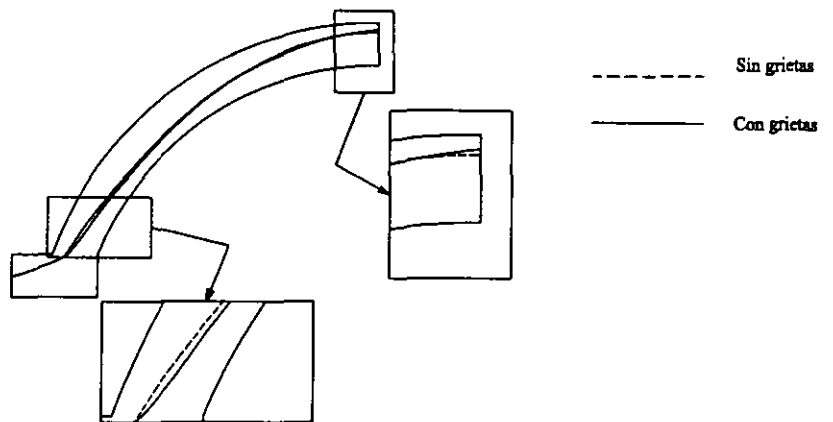


Figura 6.17 Línea de presiones por carga distribuida ampliada

La línea punteada representa la línea de presiones producto del análisis convencional y la sólida obtenida con análisis no-lineal utilizando conceptos de agrietamiento distribuido.

Se tratará de observar ahora la diferencia entre líneas de presiones, al amplificar 10 veces el valor de la carga por peso propio. En el análisis lineal, la línea de presiones se mantiene en la misma posición; la línea de presiones, en el caso de análisis no-lineal, al redistribuirse los esfuerzos a medida que aumenta la cantidad de grietas en el arco, presenta cierta variación con respecto a la anterior. La configuración de grietas se puede apreciar en la figura 6.16.

La línea de presiones para este caso, se presenta en la figura 6.17. Se compara este resultado con la línea de presiones calculada por métodos elásticos. Como en el caso sin amplificar las cargas de peso propio, las diferencias entre las líneas se manifiestan en los extremos del arco, donde la línea resultante en el modelo agrietado esta debajo a la correspondiente del modelo sin grietas por la concentración de daño que existe en esa zona; pero la discrepancia no es importante.

En esta parte del presente capítulo, se ha tratado de observar el comportamiento de las líneas de presión al someter al modelo que representa el arco a cargas por peso propio. Las líneas de presiones en los casos de utilizar métodos de análisis lineal y no-lineal con elementos finitos y métodos convencionales de análisis, no ha arrojado diferencias significativas en los resultados. El costo en tiempo de elaboración del modelo y ejecución del análisis sí muestra diferencias apreciables, dado el grado de complejidad que representa establecer un modelo de elementos finitos comparado con la solución de un problema elástico hiperestático, resolviendo ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones, lo que lleva a pensar que un modelo sencillo utilizando métodos simples de análisis ofrece resultados apropiados, sin recurrir a un método sofisticado, para este caso donde se impone a la estructura a cargas por peso propio.

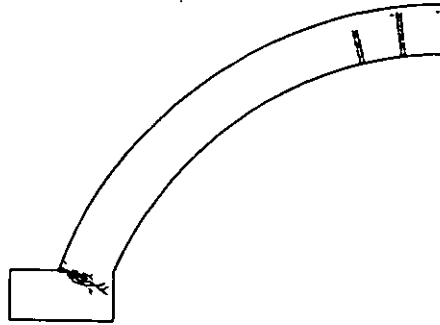


Figura 6.18 Configuración de grietas por abertura de apoyos en arco

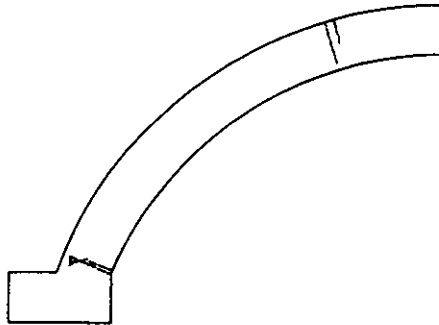


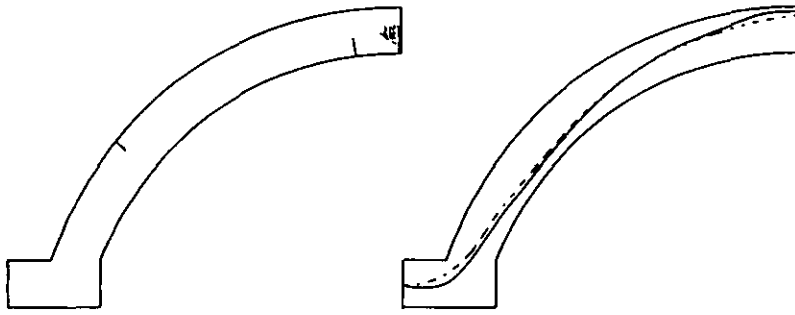
Figura 6.19 Configuración de grietas por cierre de apoyos en arco

Los resultados que se presentarán a continuación, corresponden a la imposición de desplazamientos en los extremos del arco, observando las características del daño generado y la variación de las líneas de presiones cuando se combinan estos desplazamientos prescritos con cargas que representan el peso propio de la estructura.

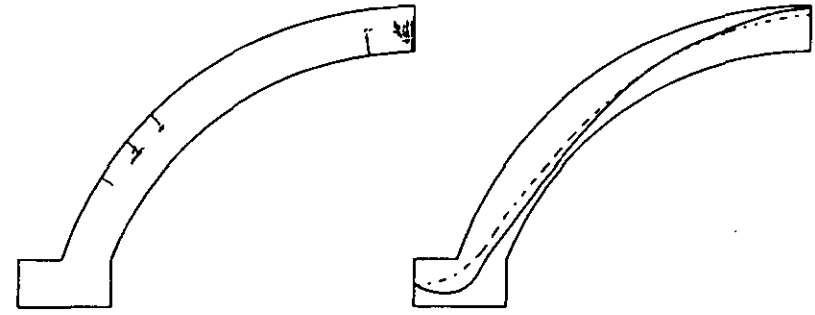
6.1.4 Análisis no-lineal con desplazamientos en los extremos del arco.- Se procederá a estudiar la respuesta del arco de mampostería cuando se le somete a desplazamientos en los extremos de la base, además de las cargas puntuales que simulan el peso propio de la estructura. Los desplazamientos son de la misma magnitud del caso lineal, dos centímetros. Se revisarán los cambios de posición en las líneas de presiones al considerarse daño por agrietamiento. Las características introducidas en el modelo fueron las mismas que en el caso de peso propio; se utilizó el método de Newton-Raphson con búsqueda lineal para el proceso de solución no-lineal con incrementos de 0.05 y con veinte pasos de carga para alcanzar 0.5 cm de desplazamiento, completando en cuatro etapas un total de dos centímetros en los extremos del arco. El primer análisis corresponde a la apertura de los apoyos sin incluir la carga de peso propio. El daño por agrietamiento se puede apreciar en la figura 6.18.

El segundo análisis también no considera el peso propio y corresponde al cierre de apoyos, los parámetros de análisis son iguales a la situación anterior; se impusieron esta vez desplazamientos en los extremos en sentido contrario. En la figura 6.19 se puede observar la configuración de grietas que resulta.

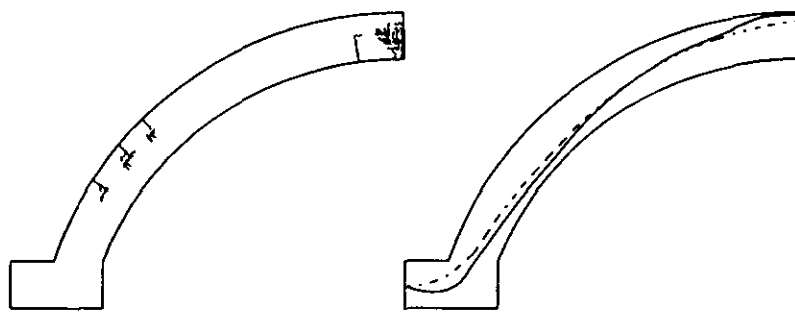
A continuación se procede con el estudio de la variación de las líneas de presión cuando se combinan las condiciones de carga ya mencionadas. La estructura es sometida primero a cargas por peso propio y luego se incorpora los desplazamientos en los extremos del arco. Este proceso se ha llevado a cabo de manera similar a los anteriores, con los mismos incrementos de carga hasta alcanzar los valores máximos de éstas, sin cambiar el procedimiento de solución no-lineal.



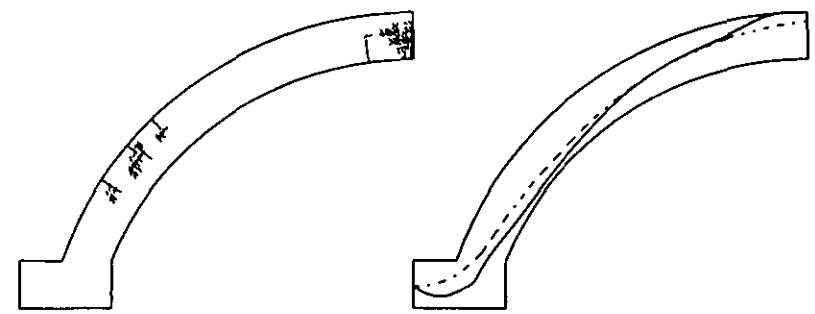
(a) Peso propio + 0.5 cm de desplazamiento



(b) Peso propio + 1.0 cm de desplazamiento



(c) Peso propio + 1.5 cm de desplazamiento



(d) Peso propio + 2.0cm de desplazamiento

Figura 6.20 Configuración de grietas y líneas de presiones por apertura de apoyos en Arco

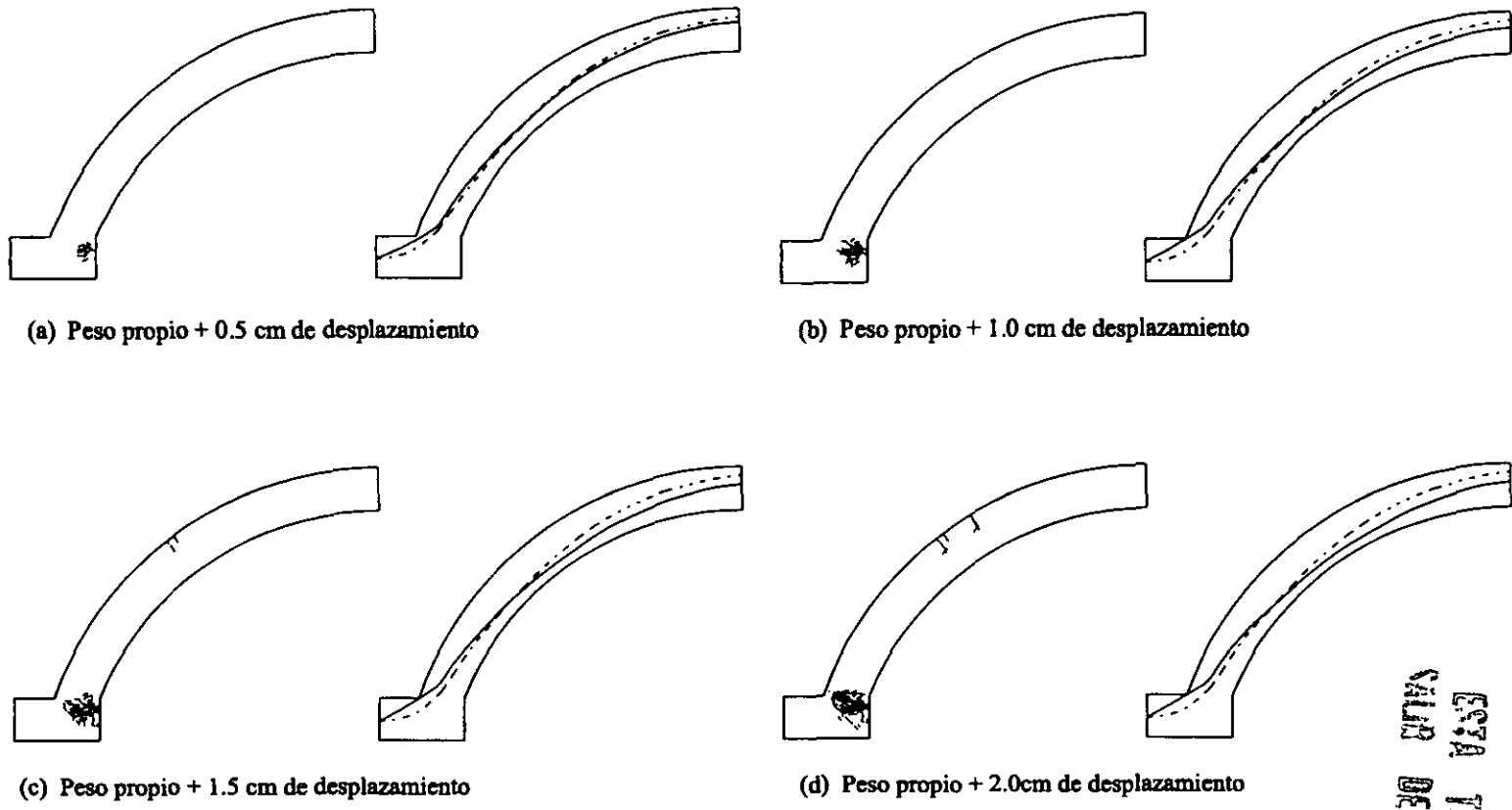


Figura 6.21 Configuración de grietas y líneas de presiones por cierre de apoyos en Arco

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

El primer caso considera cargas de peso propio y desplazamientos de abertura del arco. La figura 6.20 muestra las soluciones en las sucesivas etapas de carga con el cambio en la configuración de grietas y el movimiento de las líneas de presiones. La línea punteada, representa la línea de presiones obtenida sólo cuando se imponen cargas de peso propio.

A diferencia con el caso lineal, se ha podido definir las líneas de presiones en las diversas etapas de carga por la redistribución de esfuerzos que se producen al formarse grietas en las sucesivas etapas de carga. La línea de presiones en la parte superior del arco, cuando el arco alcanza 2.0 cm de desplazamiento en sus apoyos extremos muestra mayor diferencia con respecto a la calculada con peso propio, observándose claramente la tendencia a la separación entre ambas.

En la figura 6.21 se han podido calcular las líneas de presiones al cerrar los apoyos, observando que la tendencia a la separación es más rápida en este caso que en el anterior, a pesar de tener niveles de desplazamientos similares, resultados que en el caso lineal no son posibles de obtener.

En esta parte del capítulo seis, se ha pretendido entender cómo pueden ser utilizados los métodos de análisis considerados, qué resultados podemos esperar de cada uno de los métodos y la conveniencia de ellos en su uso. Primero se pudo observar que los métodos convencionales y los métodos de elementos finitos producen resultados de líneas de presión muy similares entre sí, cuando se somete al arco solamente a cargas de peso propio. Al incluir desplazamientos en los extremos de los apoyos y combinarlos con el peso del arco, los resultados fueron insatisfactorios al querer definir una línea de presiones al utilizar métodos lineales. Para el caso de análisis no-lineal usando conceptos de grietas distribuidas, la línea de presiones por peso propio, sin amplificar y amplificando dicha carga, no estableció amplias diferencias con relación al caso de análisis convencional y con el método de elementos finitos con relación constitutiva lineal del material. Se vio, para este caso, que el empleo de métodos sofisticados de análisis no está justificado, debido a que el costo en tiempo de elaboración del modelo numérico y en tiempo de ejecución de los análisis (para este trabajo el tiempo de ejecución de un análisis lineal fue en promedio de

3% el empleado en el análisis no-lineal) es demasiado elevado en comparación con los empleados por los métodos más simples de análisis y que pueden ofrecer similar calidad de resultados. En los casos de desplazamientos en los apoyos, los resultados empleando métodos de análisis no-lineal, conducen a resultados esperados, lo que con un método convencional de análisis no es posible en los casos observados. Para el estudio del movimiento de las líneas de presiones cuando se encuentra sometida la estructura de arco a estas combinaciones de carga, se justifica el uso de métodos de análisis más elaborados. La calidad de los resultados es ampliamente superior a los métodos convencionales de análisis al poder obtener distribuciones de presiones adecuadas que nos permitan calcular las líneas de presiones en la etapa de carga considerada.

Una preocupación en problemas de mampostería es la determinación del posible daño y la redistribución de esfuerzos que sufre debido a la configuración de grietas presente en la estructura. El emplear métodos de análisis no-lineal que utilizan conceptos de agrietamiento distribuido, permite una primera aproximación en la caracterización del daño, en este caso, la distribución de grietas. Por tanto, no es necesario localizar las zonas donde se concentran las tensiones que exceden el criterio de resistencia con objeto de ubicar los puntos de inicio de las grietas, y también suponer qué dirección seguirán éstas, como en el caso de utilizar conceptos de grietas discretas. Otros métodos proponen ablandar o reducir el módulo de elasticidad en determinadas zonas de la estructura, para poder obtener las distribuciones de esfuerzos en ésta, llevando a cabo un análisis elástico con elementos finitos^[19,20]. Un problema que podría aparecer en estos casos, es saber qué zonas deben ser sometidas a esta degradación del módulo de elasticidad y para qué condiciones de carga y de frontera estas zonas blandas comienzan a producirse.

A continuación se precederá con una discusión de los resultados que se pueden obtener con métodos de elementos finitos, al usar conceptos de grietas distribuidas y métodos de reducción de módulo de elasticidad en la descripción del daño en una estructura de geometría más complicada. Para ello se ha analizado uno de los ejes transversales al eje longitudinal de la Catedral de la Ciudad de México. Los parámetros de análisis del modelo son similares a la de los arcos ya antes vistos, las solicitaciones para este caso son

desplazamientos prescritos en la base de la estructura. Estos desplazamientos son de forma parabólica con una flecha máxima de veinte centímetros; considerando para este caso, un análisis en el estado plano de deformaciones. Los resultados se muestran de manera gráfica, haciendo una comparación cualitativa respecto al uso de métodos que reducen el módulo de elasticidad para obtener concentraciones de esfuerzos que indiquen la localización del daño.

6.2 Conjunto de Arcos Circulares

Para esta sección, se pretende generar resultados gráficos y comparar la calidad de los resultados en cuanto a la localización del daño y descripción de trayectorias de grietas. La referencia 17 da una descripción detallada del método de reducción de módulos. La figura 6.22 muestra la deformación que sufre el modelo de la estructura para asentamiento negativo en los diversos puntos de la base.

El daño registrado para este tipo de configuración de desplazamientos es el que se muestra a continuación en la figura 6.23, mostrando las zonas donde se localizan las grietas y la dirección de estas.

En el caso de utilizar conceptos de agrietamiento distribuido, podemos anticipar resultados sin recurrir a gráficos de esfuerzos, para obtener la configuración de grietas en la estructura estudiada, como se aprecia en la figura 6.23.

Si imponemos un desplazamiento en los puntos de la base de la estructura en sentido contrario al desplazamiento del análisis anterior, obtenemos la configuración deformada de la estructura que se aprecia en la figura 6.24.

La correspondiente configuración de grietas se observa en la figura 6.25.

Se puede decir entonces, que los métodos no lineales que utilizan conceptos de grietas discretas permiten representar directamente el nivel de daño, sin tener que recurrir a reducciones de las propiedades mecánicas del material y luego observar las concentraciones

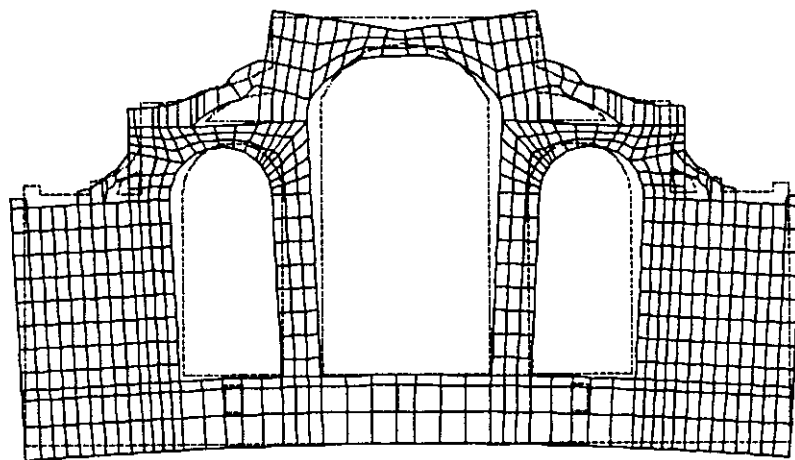


Figura 6.22 Deformación de la estructura por levantamiento parabólico en la base

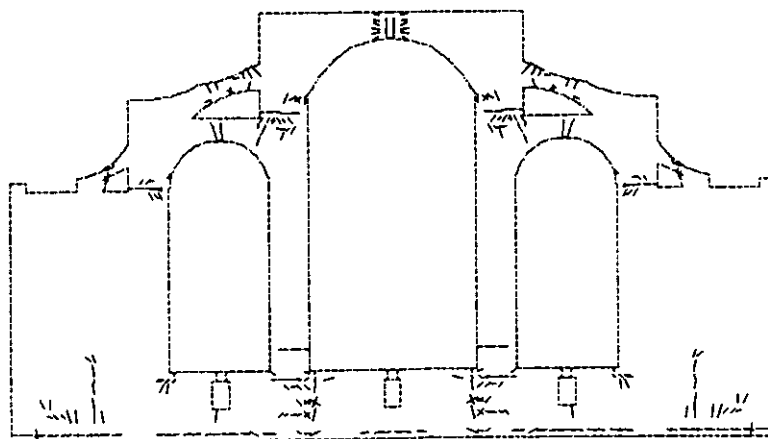


Figura 6.23 Configuración de grietas por levantamiento parabólico en la base

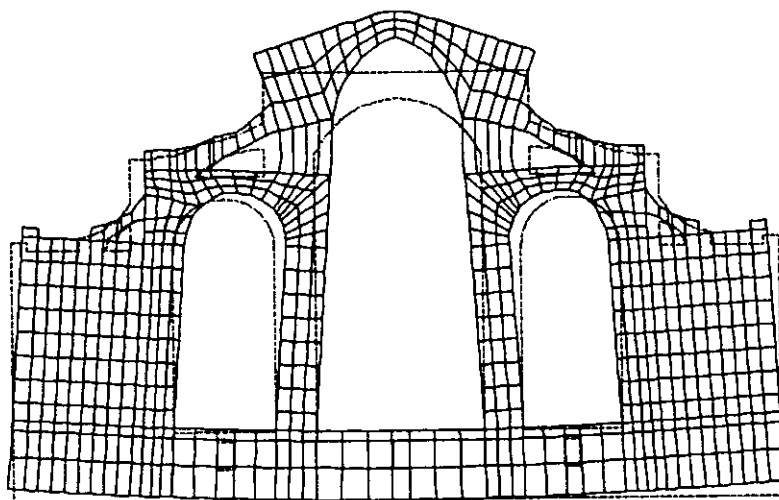


Figura 6.24 Deformación de la estructura por asentamiento parabólico en la base

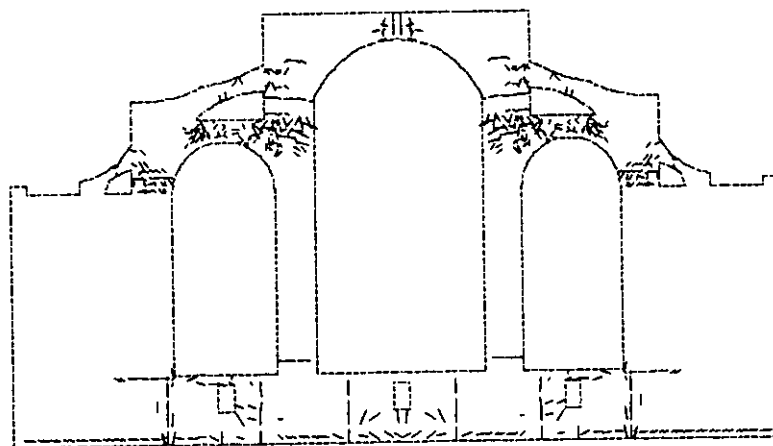


Figura 6.25 Configuración de grietas por asentamiento parabólico en la base

de esfuerzos. Otra ventaja de utilizar conceptos de grietas distribuidas es la recuperación de rigidez cuando se invierte la dirección de las cargas que generan las grietas en la estructura, transmitiendo esfuerzos de compresión perpendiculares a las direcciones de las grietas.

A pesar del mayor esfuerzo que se debe realizar para poder solucionar estructuras de mampostería utilizando conceptos no-lineales como el de grietas distribuidas, las soluciones son de mayor calidad y pueden describir adecuadamente el nivel de daños sin tener que recurrir a estudio de gráficas de contorno de tensiones principales para ver las zonas de concentración de esfuerzos que excedan el criterio de resistencia del material. La ventaja también se puede observar en la configuración de esfuerzos generados al producirse el daño, pues en métodos no-lineales se actualiza el estado de tensión en la estructura después de evaluar el daño producido cuando se excede tensiones límites, para un nuevo proceso de carga incremental. Los otros métodos, como el de reducción de módulos, requieren conocer las zonas dañadas de antemano, no corrigen de manera incremental, sino que solucionan los sistemas con análisis lineal, sin tomar en cuenta la historia de relajación del material en determinadas zonas. Hemos visto, sin embargo, que algunos resultados productos de la solución lineal de las estructuras no guardan grandes diferencias con respecto al los obtenidos con análisis lineal de elementos finitos o análisis convencional de fuerzas.

Se debe indicar que los resultados de análisis presentados para el eje transversal de la Catedral propuesto para el estudio, no sugieren una configuración de grietas final, sino zonas de daño; además, la configuración real del asentamiento en la cimentación no sigue necesariamente una distribución parabólica, como se sugiere en este trabajo. A pesar de lo anterior, se ha comparado el daño definido por el procedimiento utilizado en la parte superior de las columnas con el observado en la columna C-6, como se observa en la figura 6.26, reflejando la causa del agrietamiento por efecto de distorsión de las columnas como consecuencia del hundimiento de la cimentación.

En el siguiente capítulo discutiremos las conclusiones y también se harán algunas recomendaciones sobre este tipo de procesos de solución.



Figura 6.26 Columna C-6 de la Catedral de la Ciudad de México^[18]

Capítulo 7 Conclusiones y Recomendaciones

En capítulos anteriores se han expuesto algunos de los métodos de análisis empleados en estructuras de mampostería para de compararlos entre sí, tomando en cuenta la calidad de resultados, además de considerar cualitativamente la cantidad de trabajo necesario para la elaboración de los modelos y el esfuerzo involucrado de la ejecución de los análisis para obtener los resultados que se han presentado en este trabajo.

El primero de los métodos estudiados, el de fuerzas unitarias, se le ha denominado convencional; dentro de este grupo se encuentran, además del mencionado, el método de los trabajos virtuales, métodos energéticos y otros, que permiten resolver estructuras hiperestáticas utilizando las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de las deformaciones considerando un comportamiento del material lineal con desplazamientos pequeños en la estructura. Con este método de fuerza unitaria o método de flexibilidades se ha analizado un arco de mampostería sometido a dos sistemas de sollicitación: carga distribuida, que simula el peso propio de la estructura, y desplazamientos en los apoyos extremos. Con los resultados de estos análisis se ha calculado los elementos mecánicos para cada sistema, además de utilizar la combinación de éstos. Los resultados, para el nivel de las sollicitaciones introducidas en la estructura, han sido satisfactorios sólo para las cargas de peso propio y una combinación de esta última con desplazamientos pequeños en los extremos.

La imposición de desplazamientos de abertura en los extremos de dos centímetros, además de la carga distribuida, da como resultado fuerzas de tensión en varias secciones transversales al eje del arco. Cuando se cierran los apoyos, se definen en todas las secciones transversales fuerzas de compresión; pero con valores de momentos flectores demasiado altos ocasionando que las fuerzas normales se ubiquen fuera de los límites que definen la geometría del arco.

El resultado, para peso propio, depende de las configuraciones de geometría de la estructura y de las cargas impuestas, como se vio en el proceso de cálculo y solución expuesto en el

capítulo 6. Cambiar las propiedades del material, o tener una geometría de la sección transversal distinta a la considerada, no altera los resultados obtenidos para este caso.

Ocurre lo contrario al considerar desplazamientos extremos, el resultado si cambia al variar las propiedades del material o de la sección transversal. En una sección de ancho unitario como se consideró en el estudio, la robustez de la sección ocasiona valores altos de momentos y fuerza axial comparados con los de carga distribuida. Así, para poder obtener líneas de presiones con este método convencional, se debe reducir la inercia de la sección. La reducción esta en función del daño ocasionado en la estructura que puede ser establecido con un criterio de falla que puede ser, por ejemplo, la resistencia a la tensión del material. El cambiar la rigidez de la sección implica efectuar nuevos cálculos para considerar la nueva redistribución de fuerzas en las secciones de la estructura y luego observar si el criterio de falla ha sido excedido en la nueva configuración de fuerzas internas obtenidas durante el proceso. Esto último implica un proceso iterativo; pero sin saber cómo debe establecerse la imposición de cargas durante el proceso. Se debe recordar lo visto en el capítulo 5 cuando se desplazaron los apoyos extremos en una pequeña cantidad. El cambio en la línea de presiones fue considerable comparado con el caso de carga distribuida, lo que lleva a pensar en la necesidad de hacer análisis sucesivos con solicitaciones incrementales. Esto último, sumado a la necesidad de actualizar la rigidez de la sección en varios tramos del arco y que cambian las ecuaciones de compatibilidad en cada etapa de cálculo, resulta en un proceso demasiado extenso que aumenta el costo del análisis. Por tanto, el uso de métodos convencionales de análisis no es práctico para situaciones donde de alguna manera la respuesta dependa no solamente de las cargas distribuidas, sino también de efectos que tengan que ver directamente con la rigidez de la estructura como es la imposición de desplazamientos.

Una situación similar se presenta con el análisis lineal con elementos finitos, respecto al caso analizado con fuerzas unitarias cuando se consideran cargas de peso propio, siendo las líneas de presión resultantes coincidentes con el método inicialmente discutido. El inconveniente es el mismo, debiendo considerar cambios de propiedades en zonas donde se

exceda la resistencia a la tensión en el material, además de incrementos de cargas adecuados.

En el caso no-lineal, la línea de presiones en el arco con carga distribuida es prácticamente la misma, con la observación de que el material se comporta de manera frágil, llegando al mismo resultado cuando se amplifica dicha carga por un factor de diez. La diferencia, en este caso, está en la elaboración del modelo numérico y la ejecución del análisis. Así, con estas características de sollicitación, se puede considerar apropiado emplear métodos convencionales de análisis para poder obtener líneas de presión, recurriendo a modelos sencillos que representen adecuadamente la estructura.

El análisis no-lineal con agrietamiento distribuido de esta estructura de arco, es más congruente que el análisis lineal cuando se desea obtener líneas de presión al someter la estructura a cargas de peso propio combinado con desplazamientos en los extremos. La incorporación de un criterio de resistencia del material con pasos incrementales de carga; permiten registrar los cambios en la rigidez de la estructura según el daño ocasionado, redistribuyendo los esfuerzos adecuadamente en el medio y estableciendo una traslación de la línea de presiones de manera consecuente dentro de los límites del arco. Se concluye así, que un análisis que utiliza conceptos más refinados y complejos como el de grietas distribuidas, ofrece resultados compatibles a las características de degradación del material en la estructura que los que puede ofrecer análisis convencional o de elementos finitos con relaciones constitutivas del material lineal.

En el caso de modelos más complejos, como el que representa el conjunto de arcos presente en la Catedral de la Ciudad de México, se han propuesto métodos como el de reducción de módulos para considerar el flujo plástico de la mampostería en la estructura; éstos ofrecen de manera sencilla, una alternativa en cuanto a la localización de daño. Un primer inconveniente es que no se establece criterios de objetividad de la malla de elementos finitos. Este criterio esta ligado al tamaño que debe tener el elemento finito para poder caracterizar la falla en el material^[21]. Al introducir arbitrariamente tamaños de elementos con módulo reducidos, la redistribución de esfuerzos en los elementos adyacentes podría

generar que el daño se propague a esos elementos sin que esto ocurra necesariamente, especialmente si se está considerando un análisis lineal sin incrementos de carga adecuados, pudiendo alterar la respuesta global del sistema.

Otros inconvenientes surgen con estos métodos al propagarse el daño, pues existe la posibilidad de que la configuración de daño inicial propuesta puede ser alterada por el cierre de grietas al redistribuirse los esfuerzos que genera un nuevo estado de deformaciones. Así, este procedimiento sufre de fuertes inconsistencias que no son fácilmente evitadas. El concepto de agrietamiento distribuido implementado para un análisis de elementos finitos exige establecer tamaños adecuados de elementos para poder desarrollar las grietas de manera consistente según los criterios establecidos para la falla del material; además, al ser solucionado de manera incremental, ofrece una idea de la historia del daño producido por las cargas impuestas considerando también el restablecimiento de la rigidez en el material agrietado cuando, por diversas circunstancias, se cierran las grietas. Una ventaja también de ver una historia de daños es de saber si las condiciones de apoyo que posee la estructura son las adecuadas al comparar el daño calculado con el observado. Así, con las limitaciones que posee el modelo simple de representar el comportamiento del material frágil en la estructura, la información obtenida con estos conceptos es inmediata; sin recurrir al estudio de gráficos que representen distribuciones de esfuerzos para definir las zonas de posible daño que generan los errores ya mencionados.

Algunas recomendaciones obligadas deben seguirse en la elaboración de los modelos numéricos para poder estimar el comportamiento no-lineal de las estructuras que se desean estudiar. La principal es la de saber qué parámetros deben introducirse en los diversos procedimientos de solución, para estimar cómo reaccionará el material a diversas situaciones de esfuerzos que se podrían presentar en él. A pesar de haber considerado en el presente estudio un comportamiento frágil del material, existen otras posibilidades que permiten refinar los modelos para obtener resultados más congruentes. Como se mencionó, el suponer un material frágil permite hacer un análisis preliminar de la estructura en estudio sin recurrir a posibles remallados del modelo numérico al no considerar el problema de

falta de objetividad de la malla, al no tomar en cuenta cómo se van relajando los valores de esfuerzos en el material después de alcanzar la deformación de agrietamiento.

Para un análisis más detallado, es importante definir una curva de esfuerzo deformación del material después de la aparición del agrietamiento. Esto último debe hacerse mediante ensayos de laboratorio que ayuden a establecer el comportamiento del material después de la falla; siendo tomadas cuenta en las historias de esfuerzos producto de las etapas sucesivas de análisis. El resultado final ofrece los detalles necesarios para ser comparado con el estado real de la estructura. Esto posibilita la calibración del modelo numérico elaborado para representar a ésta. Obviamente esta representación más elaborada del material no es la única que afecta en los resultados, debemos tomar en cuenta también, las condiciones de apoyo y de carga que influyen en la respuesta de la estructura considerada. Un análisis no-lineal considerando el material presente en la estructura con características frágiles, es un paso importante en la elaboración de modelos más detallados que requieren refinamiento en las condiciones de frontera y de carga. Así, al unir las condiciones necesarias que representen un modelo numérico controlado, se pueden obtener resultados útiles cuando se desee estudiar la estabilidad estructural y también para establecer alternativas de reforzamiento y reparación necesarias en estructuras históricas de mampostería que se encuentren dañadas.

Agradecimientos

Pienso que las palabras que escribo en esta parte no son suficientes para expresar mi sincero agradecimiento a las personas que me ayudaron a poder realizar este trabajo.

Al Dr. Roberto Meli Piralla debo agradecer mucho su apoyo, sugerencias, consejos, y, en especial, por su paciencia.

Otra persona a la que debo agradecer es al Dr. Gustavo Ayala Milián, con el que comparto el gusto por los elementos finitos, porque su valioso apoyo para facilitarme los programas para realizar esta tesis, además de las sugerencias y comentarios.

Al Dr. David Murià Vila y al Ing. Roberto Sánchez Ramírez, por su preocupación para que cuente con los recursos necesarios.

A mis amigos que me brindaron apoyo en mi estadía en México, tales como: Roberto Montes, Juan Carlos Botero, John J. Blandón, Hugo Monzalve, Hernán Martínez, Carlos Reyes, María L. Bermúdez, Adriana y Marcela Martínez Cantú, el Dr. José Alberto Escobar y todos los amigos que hice en el Instituto de Ingeniería.

A las personas que tiene a su cargo la responsabilidad del buen funcionamiento del Instituto de Ingeniería que sin su política de ayuda, mediante becas de estudio a estudiantes mexicanos y extranjeros, no hubiera podido solventar mis estudios de maestría en México.

Agradezco a otras dos personas a quien estimo y admiro. Ellos son el Dr. Javier Piqué del Pozo y el Dr. Hugo Scaletti Farina. A ellos les debo haberme ayudado a mantener la ilusión de poder estudiar fuera del Perú, además de darme trabajo cuando más lo necesitaba.

A mi Madre y a mis hermanos, por su cariño y apoyo en mis estudios a pesar de lo difícil de nuestra situación.

Solamente gracias a todos.

Referencias

- [1] R. Meli, *Ingeniería Estructural de los Edificios Históricos*, Fundación ICA, México D.F., 1998.
- [2] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- [3] J. Tola., *Energía de Deformación*, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 1975.
- [4] F.L. Singer y A. Pytel, *Resistencia de Materiales*, Prentice Hall, New Jersey, 1985.
- [5] O.C. Zienkiewics y R.L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*, (a) Volumen 1 y (b) volumen 2, McGraw-Hill, Londres, 1995.
- [6] K.J. Bathe, *Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- [7] M.A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of solids and Structures*, volumen 1: Essentials, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [8] J.W. Simons y G.H. Powell, *Solution Strategies for Statically Loaded Non-linear Structures*, Report N° UBC/EERC-82/22, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, 1982.
- [9] R.H. Dodds, L.A. Lopez y D.A. Pecknold, *Numerical and Software Requirements for General Non-linear Finite Element Analysis*, Report N° UILU-ENG-78-2020, Dept. of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1978.
- [10] T.J.R. Hughes, *Non-linear Finite Element Methods*, Custom Course Materials, Standford Bookstore, Standford, 1996.
- [11] TNO Building and Construction Research, *DIANA User's Manual, Release 6.1*, (a) Introduction and Utilities, (b) Linear Analysis, (c) Non-linear Analysis y (d) Element Library, Delft, 1996.
- [12] M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, *Numerical Fracture Mechanics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.
- [13] P.A. Wawrzynek y A.R. Ingraffea, *Discrete Modeling of Crack Propagation: Theoretical Aspects and Implementacion Issues in Two and Three Dimensions*, Report 91-5, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, 1991.
- [14] J.G. Rots, *Computational Modeling of Concrete Fracture*, Ph.D. Thesis,

- Technische Universiteit Delft, 1988.
- [15] S.P. Sha S.E. Swart y C. Ouyang, *Fracture Mechanics of Concrete*, John, Wiley & Sons, New York, 1995.
- [16] P.B. Lourenço, *Computational Strategies for Masonry Structures*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, 1996.
- [17] J.L. Luna, *Propiedades Mecánicas de la Cantera Utilizada en construcciones de la Epoca Colonial*, Tesis de Ingeniero Civil, Facultad de Ingeniería-UNAM, 1995.
- [18] R. Meli y A.R. Sánchez, *Rehabilitación de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México*, Instituto de Ingeniería-SEDESOL, México D.F.,1993.
- [19] G. Rodríguez, *Estudios Sobre el Comportamiento Estructural del Sagrario Metropolitano*, Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM, 1997.
- [20] A. Tena-Colunga y P. Abrams, *Estimating Response of Masonry Structures with Linear Finite Elements*, Memories, Fifth North American Masonry Conference, University of Illinois at Urbana Champaign, junio, vol I, pp. 213-224, 1990.
- [21] Z. Bazant y L. Cedolin, *Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis*, Journal of the Engineering Mechanics Division-ASCE, abril, EM2, pp. 297-315, 1979.