

16  
2 ej.



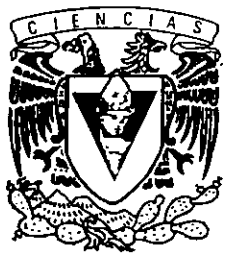
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS KLEINIANOS  
ELEMENTALES Y NO ELEMENTALES

T E S I S

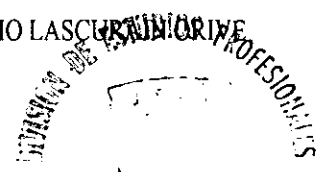
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
MATEMATICO  
PRESENTA  
JOSE LUCIO SANCHEZ GARRIDO



DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCRIBAN

27/1/92

1999



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION DE TESIS



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Grupos Kleinianos Elementales y no Elementales

realizado por José Lucio Sánchez Garrido

con número de cuenta 8109051-8 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Antonio Lascurain Orive

Propietario

Dra. Silvia de Neymet Urbina

Propietario

Dr. Guillermo Sierra Loera

Suplente

M. en C. Pilar Martínez-Téllez

Suplente

M. en C. Francisco Struck Chávez

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

## Agradecimientos

Doy gracias a mis padres y hermanos por la inmensa confianza que han depositado en mí.

A mis amigos de toda la vida.

A mis maestros.

Quiero agradecer especialmente al Dr. Antonio Lascurain, pues gracias a su dedicación, paciencia, y a sus valiosas sugerencias, es que esta tesis ha sido por fin terminada.

También le doy las gracias a la Dra. Silvia de Neymet, al Dr. Guillermo Sierra, a la M. en C. Pilar Martínez y al M. en C. Francisco Struck, por sus palabras de aliento y sus comentarios a este trabajo.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a mi esposa, Cristina, y a mis hijos Luis Eduardo, y Olivia Cristina, por ser parte de mi vida.

# Introducción

Los grupos kleinianos constituyen una rama de enorme importancia en las matemáticas de este fin de siglo, debido principalmente a sus múltiples relaciones con otras ramas, como los sistemas dinámicos y la topología en tres dimensiones.

En esta tesis se exhibe material introductorio sobre este tema, destacando el contraste entre los grupos elementales que han sido ampliamente estudiados, y los no elementales que son en muchos aspectos un campo abierto de investigación.

Después de clasificar detalladamente los grupos elementales (entre los que se encuentran los grupos clásicos de rotaciones definidos por los sólidos platónicos), se muestra la complejidad de los no elementales, al existir una infinidad de elementos loxodrómicos que no fijan los mismos puntos. Posteriormente, se exhiben diferentes definiciones del conjunto límite y se prueban sus equivalencias. También se discuten pruebas finas sobre convergencia de las normas de los elementos de los grupos discretos. En este proceso se demuestra la fórmula del volumen hiperbólico de una bola (Teorema 4.2) de una manera elemental, en contraste con la manera sofisticada que se hace de este cálculo en las notas de Minnesota de Ahlfors ([1]).

Finalmente, se discuten los  $G$ -paquetes, subconjuntos similares a regiones fundamentales que son de gran interés para estudiar productos libres de grupos. Esto se muestra de manera detallada en un ejemplo de un subgrupo del grupo *modular*. La última construcción se refiere a los grupos de *Schottky*, en donde se muestra la gran utilidad del concepto de  $G$ -paquetes para entender estos grupos.

# Contenido

Agradecimientos	i
Introducción	ii
<b>1 Definiciones y Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Grupos y Producto Libre . . . . .	1
1.2 Métricas y Transformaciones de Möbius . . . . .	3
1.3 $PSL(2, \mathbb{C})$ y sus subgrupos discretos . . . . .	9
1.4 Integral de Riemann-Stieltjes . . . . .	17
<b>2 Grupos Elementales</b>	<b>20</b>
2.1 Grupos elementales discretos de Tipo 1 . . . . .	24
2.2 Grupos elementales discretos de Tipo 2 . . . . .	27
2.3 Grupos elementales discretos de Tipo 3 . . . . .	31
<b>3 Grupos no elementales y grupos discontinuos</b>	<b>33</b>
3.1 Grupos no elementales . . . . .	33
3.2 Grupos discontinuos . . . . .	35
3.3 Grupos Kleinianos . . . . .	36
3.4 Los conjuntos límite y ordinario . . . . .	38
3.5 Otra caracterización del conjunto límite . . . . .	45
3.6 Acción discontinua en $\Omega$ . . . . .	48
<b>4 Convergencia y Ejemplos</b>	<b>52</b>
4.1 Area Cordal . . . . .	52
4.2 Volumen Hiperbólico . . . . .	54
4.3 Convergencia de normas en grupos discretos . . . . .	56
4.4 $G$ -paquetes . . . . .	59
4.5 Subgrupos del grupo modular . . . . .	60
4.6 Grupos de Schottky . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

## 1 Definiciones y Resultados Preliminares

Ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  desempeñan un papel importante en el presente trabajo:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\},$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Estos conjuntos son, respectivamente, el *n-espacio hiperbólico*, la *n-bola unitaria*, y la *n-1 esfera*.

También, es conveniente introducir el *n-espacio real extendido*:  $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Este espacio es homeomorfo a  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , por medio de la *proyección estereográfica*:

$$\pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n, \quad \pi(x) = \begin{cases} \left( \frac{2x_1}{1+|x|^2}, \frac{2x_2}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right) & \text{si } x \neq \infty. \\ (0, 0, \dots, 0, 1) & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

Observe en particular que  $\pi$  es inyectiva, lo cual permite dotar a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  de una métrica, la llamada *métrica cordal*  $d$ :  $d(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$ .

Lo que en realidad estamos haciendo, es considerar la longitud de la cuerda que une a las proyecciones de  $x$  y  $y$ . Se puede probar, aunque no lo haremos aquí, que la métrica cordal tiene una expresión explícita en términos de la métrica euclídeana:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} & \text{si } x, y \neq \infty, \\ \frac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}} & \text{si } y = \infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

Para una deducción de esta fórmula, vea [4], p. 36.

### 1.1 Grupos y Producto Libre

**Definición 1.1.** Sean  $G$  un grupo y  $S$  un subconjunto de  $G$ . El subgrupo *generado* por  $S$  es la intersección de todos los subgrupos  $H$  de  $G$  que contienen a  $S$ . Denotamos a este subgrupo mediante  $\langle S \rangle$ .

Consideremos cualquier conjunto no vacío  $X$ . Una permutación de  $X$  es una aplicación biyectiva de  $X$  en si mismo. Denotaremos con  $S_X$  al conjunto de todas la permutaciones de  $X$ . Es fácil comprobar que  $S_X$ , con la composición usual de funciones, es en realidad un grupo, el *grupo de permutaciones* de  $X$ .

**Definición 1.2.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Una acción de  $G$  en  $X$  es una función  $\varphi : G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$ , tal que

$$(i) (I, x) \mapsto x,$$

$$(ii) (g, hx) \mapsto (gh, x).$$

En particular, estamos interesados en el caso en que  $G$  es subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .  $X = \widehat{\mathbb{C}}$ . y  $\varphi$  la acción definida mediante  $\varphi(g, z) = g(z)$  (es decir, la *evaluación*). En adelante, sólo diremos que  $G$  actúa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 1.3.** Consideremos un grupo  $G$  que actúa en  $X$ , y  $x \in X$ . Definimos los siguientes conjuntos:

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\},$$

$$G(x) = \{g(x) \in X : g \in G\}.$$

$G_x$  es el *estabilizador* de  $x$ , y  $G(x)$  la *órbita* (o  $G$ -órbita) de  $x$ .

Hay que observar que  $G_x$  siempre es un subgrupo de  $G$ .

**Proposición 1.1.** Sea  $G$  un grupo que actúa en un conjunto  $X$ . Para toda  $x \in X$ , existe una correspondencia biyectiva entre los elementos de  $G(x)$  y las clases laterales de  $G_x$  en  $G$ .

**DEMOSTRACION.** Si  $h(x) = g(x)$ ,  $g^{-1}h(x) = x$ , por lo que  $g^{-1}h \in G_x$ , y  $h \in gG_x$ . Por tanto,  $gG_x = hG_x$ . Por otra parte, si  $g_1, g_2 \in hG_x$ ,  $h^{-1}g_1, h^{-1}g_2 \in G_x$ . De aquí se sigue que  $h^{-1}g_1(x) = h^{-1}g_2(x)$ , y por tanto,  $g_1(x) = g_2(x)$ . Esto muestra que  $h(x) = g(x)$  si y sólo si las clases laterales  $gG_x$  y  $hG_x$  coinciden, y que la función  $\varphi(hG_x) = h(x)$  está bien definida y es biyectiva.  $\square$

**Definición 1.4.** Sea  $G$  un grupo. El *centro* de  $G$ , denotado  $Z(G)$ , es el subgrupo de los elementos que conmutan con todo el grupo, es decir,

$$Z(G) = \{g \in G : hg = gh, \forall h \in G\}.$$

Es importante observar que  $Z(G)$  es *normal* en  $G$ .

**Definición 1.5.** Sea  $g$  un elemento de un grupo  $G$ . Los elementos *conjugados* a  $g$  son los elementos de la forma  $hgh^{-1}$ , con  $h \in G$ . El *conmutador* de  $g$  y  $h$  es  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ .

De la definición anterior, podemos considerar a  $[g, h]$  como el producto de  $g$  con un conjugado de  $g^{-1}$ .



**Definición 1.6.** Sean  $G_1, G_2$  subgrupos de un grupo  $G$ .  $G_1$  y  $G_2$  son *conjugados* si para alguna  $h \in G$ ,  $G_1 = hG_2h^{-1}$ .

*Observación 1.1.* De la Definición 1.6 se sigue de inmediato que si dos grupos  $G_1$  y  $G_2$  son conjugados, entonces son *isomorfos*. Sin embargo, si los grupos son isomorfos, no necesariamente son conjugados. Más adelante veremos un ejemplo que muestra este hecho (Ejemplo 1.3).

La noción de grupos y elementos conjugados es esencial en lo que sigue. Veremos que la mayoría de los resultados que estableceremos a partir del Capítulo 2 son invariantes bajo conjugación.

Consideremos ahora familias de grupos  $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ , con  $\Lambda$  un conjunto arbitrario de índices.

**Definición 1.7.** Sea  $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  una familia de grupos ajenos dos a dos, es decir, si  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $G_\alpha \cap G_\beta = e$ . El producto libre de los grupos  $G_\alpha$  es el grupo  $G$  generado por  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ , y sujeto a la siguiente restricción:

Todo  $g \in G$  distinto de  $e$  puede expresarse de manera única como el producto de un número finito de elementos de los grupos  $G_\alpha$ . es decir,

$$g = g_1 g_2 \dots g_n, \quad g_k \in G_{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

tal que  $g_k \neq e$  para toda  $k$ , y  $G_{\alpha_k} \neq G_{\alpha_{k+1}}$ .

*Notación.* El producto libre suele denotarse como  $G = \prod_{\alpha \in \Lambda} *G_\alpha$ , y en caso de que la familia de grupos sea finita,  $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$ . A la expresión de  $g \in G$  como en la definición anterior se le llama la *forma normal*, o *expresión irreducible* de  $g$ .

*Observación 1.2.* Esta no es la única definición posible para el concepto de producto libre. Por ejemplo, en [9] se define en términos de generadores y relaciones, y en [11] se define en términos de homomorfismos y diagramas conmutativos. La definición que recogemos en este trabajo está tomada de [7], p. 11. Además, en este mismo texto se muestra que las tres definiciones son equivalentes.

## 1.2 Métricas y Transformaciones de Möbius

**Definición 1.8.** Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto conexo, y  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función continua. Dados cualquier par de puntos  $x, y$  en  $D$ , y  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  una curva de clase  $C^1$  por tramos que una  $x$  con  $y$  en  $D$ , definimos la  $\lambda$ -*longitud* de  $\gamma$  mediante

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

También, se define la  $\lambda$ -distancia  $\rho_\lambda(x, y)$  de  $x$  a  $y$  como

$$\rho_\lambda(x, y) = \inf \{l_\lambda(\gamma)\}.$$

El ínfimo se toma sobre todas las curvas  $\gamma$  de clase  $C^1$  por tramos que unen  $x$  con  $y$  en  $D$ .

A una función  $\lambda$  como en la definición anterior se le llama una *densidad*.

La siguiente proposición justifica el que a  $\rho_\lambda(x, y)$  se le llame la  $\lambda$ -distancia. La demostración puede encontrarse en [4], p. 7.

**Proposición 1.2.**  $\rho_\lambda$  es una métrica.

Normalmente, escribiremos  $l$  y  $\rho$  sin hacer mención explícita de la función  $\lambda$ .

**Ejemplo 1.1.** (a) Sean  $D = H^n$ ,  $\lambda : H^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n}$ . Esta es la métrica hiperbólica.

(b) Sean  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . En el Capítulo 2 veremos que  $\mathbb{C}^*$  con esta métrica es isométrico al cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  con la métrica euclídeana (Proposición 2.2).

La esfera  $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto  $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . La reflexión (o inversión) en  $S(a, r)$  es la función

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|}\right)^2 (x - a).$$

En el caso especial  $S(0, 1) = \mathbb{S}^{n-1}$ , esta fórmula se reduce a  $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ .

Si denotamos a esta reflexión especial mediante  $x^*$ , la reflexión en cualquier esfera  $S(a, r)$  puede escribirse entonces como  $\varphi(x) = a + r^2(x - a)^*$ .

Esta función no está definida para  $x = a$ . Sin embargo, se puede extender  $\varphi$  a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  definiendo  $\varphi(a) = \infty$ , y  $\varphi(\infty) = a$ .

Ahora, el plano  $P(a, t) \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  es el conjunto  $P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = t\} \cup \{\infty\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ , y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interior usual en  $\mathbb{R}^n$ . La reflexión en  $P(a, t)$  es la función

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = x - 2[\langle x, a \rangle - t]a^*.$$

Igual que antes, podemos extender  $\psi$  a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , definiendo  $\psi(\infty) = \infty$ .

En [4], p. 22, se muestra que  $\varphi$  y  $\psi$  así definidas son continuas con respecto de la métrica cordal  $d$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

*Observación 1.3.* Ambas reflexiones pueden interpretarse geoméricamente. En el caso de la esfera, si  $x \neq a, \infty$ ,  $\varphi(x)$  es el único punto en la semirrecta determinada por  $a$  y  $x$  tal que  $|x - a| |\varphi(x) - a| = r^2$ . Para el plano, si  $x \neq \infty$ ,  $\psi(x)$  es el único punto en la recta ortogonal al plano  $P(a, t)$  que pasa por  $x$ , tal que  $\frac{1}{2}(x + \psi(x)) \in P(a, t)$ . Además, si escogemos el vector  $a$  tal que  $|a| = 1$ , el parámetro  $t$  es la distancia del plano al origen.

Debido al homeomorfismo  $\widehat{\mathbb{R}}^n \approx \mathbb{S}^n$ , podemos pensar en el plano  $P(a, t)$  como una esfera que pasa por  $\infty$ . Con esta convención, nos referiremos indistintamente a  $P(a, t)$  y a  $S(a, r)$  como esferas.

**Definición 1.9.** Una *transformación de Möbius* en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es la composición de un número *finito* de reflexiones en esferas.

Es trivial verificar que el conjunto de todas las transformaciones de Möbius es un grupo.

**Definición 1.10.** El grupo de las transformaciones de Möbius en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es llamado el *Grupo General de Möbius*, y es denotado por  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .

**Ejemplo 1.2.** (a) La traslación  $f(x) = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , es una transformación de Möbius, pues es la composición de la reflexión en  $P(a, 0)$  seguida de la reflexión en  $P(a, \frac{1}{2}|a|^2)$ . En efecto, si denotamos mediante  $\psi_0$  y  $\psi_1$  a estas reflexiones, entonces

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_0(x) &= \psi_1(x - 2\langle x, a \rangle a^*) = x - 2\langle x, a \rangle a^* - 2 \left[ \langle x - 2\langle x, a \rangle a^*, a \rangle - \frac{1}{2}|a|^2 \right] a^* \\ &= x - 2\langle x, a \rangle a^* - 2\langle x, a \rangle a^* + 4\langle x, a \rangle \langle a^*, a \rangle a^* + |a|^2 a^* = x + a. \end{aligned}$$

(b) La homotecia  $f(x) = kx$ ,  $k > 0$ . Consideremos ahora  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  las reflexiones en  $S(0, 1)$  y en  $S(0, \sqrt{k})$ , respectivamente. Entonces

$$\varphi_1 \varphi_0(x) = \varphi_1 \left( \frac{x}{|x|^2} \right) = k \frac{x}{|x|^2} \frac{|x|^4}{|x|^2} = kx.$$

(c) Supongamos  $n = 2$ , y consideremos la identificación natural  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ . La rotación  $f(z) = e^{i\theta}z$ ,  $\theta \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , es la composición de la reflexión en  $P(i, 0)$  seguida de la reflexión en  $P(ie^{i\theta/2}, 0)$ .

(d) Como en el ejemplo anterior,  $n = 2$ , y  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ . La función  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ , es la composición de la reflexión en  $P(i, 0)$  seguida de la reflexión en  $S(0, 1)$ .

Sea  $f$  una isometría euclídeana en  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  de la forma  $f(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ .  $|a| = 1$ . Se sigue del Ejemplo 1.2 (a) y (c) que  $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ . Aún más, las reflexiones que componen  $f$  se realizan exclusivamente sobre planos. En [4], Teorema 3.1.3. se enuncia y demuestra el siguiente Teorema que generaliza de manera notable esta observación.

**Teorema 1.3.** *Toda isometría euclídeana  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  es una composición de a lo más  $n + 1$  reflexiones en planos. En particular,  $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .*

Consideremos ahora las transformaciones de Möbius  $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  que son directamente conformes (i.e., son conformes y conservan la orientación en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ ). No es difícil mostrar que estas transformaciones son composición de un número par de reflexiones en esferas, e inversamente.

**Definición 1.11.** El subgrupo de  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  de las transformaciones de Möbius directamente conformes es llamado el *Grupo de Möbius en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$* . Este grupo es denotado por  $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .

Para toda  $n$ , podemos identificar de manera natural a  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mediante

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto ((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1}).$$

La inclusión  $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  puede escribirse entonces como  $i(x) = (x, 0)$ . Por comodidad, escribiremos  $i(x) = \tilde{x}$ .

Consideremos la reflexión  $\varphi$  en la esfera  $S(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Definimos  $\tilde{\varphi}$  como la reflexión en  $S(\tilde{a}, r)$ . De manera análoga, dada la reflexión  $\psi$  en el plano  $P(a, t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , sea  $\tilde{\psi}$  la reflexión en  $P(\tilde{a}, t)$ . Se tiene entonces para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\tilde{\varphi}i(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{a} + \frac{r^2}{|\tilde{x} - \tilde{a}|^2} (\tilde{x} - \tilde{a}) = \left( a + \frac{r^2}{|x - a|^2} (x - a), 0 \right) = (\varphi(x), 0) = i\varphi(x).$$

$$\tilde{\psi}i(x) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \tilde{x} - 2[(\tilde{x}, \tilde{a}) - t] \frac{\tilde{a}}{|\tilde{a}|^2} = \left( x - 2[(x, a) - t] \frac{a}{|a|^2}, 0 \right) = (\psi(x), 0) = i\psi(x).$$

Ahora, si  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \tilde{a} + \frac{r^2}{|x - \tilde{a}|^2} (x - \tilde{a}), \\ \tilde{\psi}(x) &= x - 2[(x, \tilde{a}) - t] \frac{\tilde{a}}{|\tilde{a}|^2}. \end{aligned}$$

Si denotamos mediante  $[g(x)]_j$  a la  $j$ -ésima coordenada de  $g$ , se sigue de las fórmulas anteriores que  $[\tilde{\varphi}(x)]_{n+1} = \frac{r^2 x_{n+1}}{|x - \tilde{a}|^2}$ , y  $[\tilde{\psi}(x)]_{n+1} = x_{n+1}$ , respectivamente. Por tanto, el plano  $x_{n+1} = 0$  y los semiespacios  $x_{n+1} > 0$  y  $x_{n+1} < 0$  son invariantes bajo  $\tilde{\varphi}$  y  $\tilde{\psi}$ .

En general, consideremos  $g \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ ,  $g = \varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_k$ , donde  $\varphi_j$  es la reflexión en una esfera. La transformación  $\tilde{g} \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ , definida como  $\tilde{g} = \tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_k$ , extiende a  $g$ . Además, esta extensión es única, pues si  $\tilde{g}_1$  y  $\tilde{g}_2$  extienden a  $g$ , entonces  $(\tilde{g}_2)^{-1} \tilde{g}_1$  fija al plano  $x_{n+1} = 0$  ( $= \mathbb{R}^n$ ) y mantiene invariante a  $H^{n+1}$ . Se sigue de [4], Teorema 3.2.4. que  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$ .

**Definición 1.12.** La extensión de Poincaré de  $g \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ ,  $g = \varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_k$ , es

$$\tilde{g} = \tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_k \in GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}).$$

La construcción anterior (que se debe a Henri Poincaré) muestra que cualquier transformación de Möbius  $g$  en  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  tiene una extensión natural a una transformación  $\tilde{g}$  en  $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$ . Por tanto, podemos identificar a  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  con un subgrupo de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$ .

La construcción tiene una ventaja adicional: Permite mostrar fácilmente que  $\frac{|x-y|^2}{x_{n+1}y_{n+1}}$  es invariante bajo cualquier extensión de Poincaré. De esta invariancia, se sigue que las extensiones de Poincaré son isometrías del espacio hiperbólico  $H^{n+1}$  con la métrica hiperbólica del Ejemplo 1.1 (a). La demostración de estas afirmaciones puede consultarse en [4], p. 34. Consideremos ahora a  $\varphi$  la reflexión en  $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ . Para  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\varphi(x) = e_{n+1} + \frac{2}{|x - e_{n+1}|^2}(x - e_{n+1}).$$

Ahora, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{x}) &= e_{n+1} + \frac{2}{1 + |\tilde{x}|^2} ((x_1, x_2, \dots, x_n, 0) - (0, 0, \dots, 0, 1)) \\ &= \left( \frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \frac{2x_2}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que la restricción de  $\varphi$  a  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  es la proyección estereográfica, y un argumento de conexidad nos permite concluir que  $\varphi$  manda al semiespacio  $x_{n+1} < 0$  en  $B^{n+1}$ . Si componemos previamente con la reflexión  $\sigma$  en el plano  $x_{n+1} = 0$ , entonces  $\pi = \varphi\sigma$  manda a  $H^{n+1}$  en  $B^{n+1}$ . Por tanto, si  $g \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ , entonces  $\pi\tilde{g}\pi^{-1}$  mantiene invariante a

$$\pi(H^{n+1}) = B^{n+1}.$$

Por otra parte, si  $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$  es tal que  $f(B^{n+1}) = B^{n+1}$ , entonces  $\pi^{-1}f\pi$  mantiene invariante a  $H^{n+1}$ . Sea ahora  $h = \pi^{-1}f\pi|_{\widehat{\mathbb{R}^n}}$ . Obsérvese ahora que  $\tilde{h}$  y  $\pi^{-1}f\pi$  extienden ambas a  $h$ , y por la unicidad de la extensión,  $\tilde{h} = \pi^{-1}f\pi$ . Se sigue por tanto que  $\pi^{-1}f\pi$  es la extensión de Poincaré de alguna  $h \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ , y  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  es conjugado en  $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$  al subgrupo que mantiene invariante a  $B^{n+1}$ .

Como además  $\pi$  es composición de un número par de reflexiones, se sigue que  $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$  es conjugado en  $M(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$  al subgrupo de transformaciones de Möbius directamente conformes que mantienen invariante a  $B^{n+1}$ .

**Definición 1.13.** Denotaremos a los grupos conjugados a  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  y a  $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$  mediante  $\pi = \varphi\sigma$ ,  $GM(B^{n+1})$  y  $M(B^{n+1})$ , respectivamente.

El siguiente resultado nos será de suma utilidad para la clasificación de todos los grupos elementales discretos. Puede consultarse la demostración en [4], p. 38:

**Teorema 1.4.** *Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(B^n) = B^n$ . Entonces  $\varphi(x) = xA$ , con  $A$  una matriz ortogonal.*

Se sigue de este Teorema el siguiente Corolario.

**Corolario 1.5.** *Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene:*

$$(i) \ O(n+1) \subset GM(B^{n+1}) \approx GM(\widehat{\mathbb{R}}^n).$$

$$(ii) \ SO(n+1) \subset M(B^{n+1}) \approx M(\widehat{\mathbb{R}}^n).$$

Es conveniente tener algunas expresiones útiles de la métrica hiperbólica en  $H^{n-1}$ . Si consideramos  $x = re_{n+1}$ ,  $y = se_{n+1}$ ,  $r, s > 0$ , es particularmente simple calcular  $\rho(x, y)$ . En efecto, sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H^{n+1}$ , con  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ , una curva de clase  $C^1$ . Entonces

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_{n+1}(t))^2}}{\gamma_{n+1}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\gamma'_{n+1}(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt.$$

Observe ahora que entre todas las posibles curvas de clase  $C^1$  que unen  $x$  con  $y$ , la curva definida por  $\gamma(t) = (tr + (1-t)s)e_{n+1}$  alcanza el valor mínimo en la desigualdad anterior. Además,  $\gamma'(t) = (r-s)e_{n+1}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $r-s > 0$ , por lo que  $|\gamma'(t)| = \gamma'_{n+1}(t) > 0$ , y por tanto

$$\rho(x, y) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt = \int_0^1 \frac{\gamma'_{n+1}(t)}{\gamma_{n+1}(t)} dt = \ln(\gamma_{n+1}(1)) - \ln(\gamma_{n+1}(0)) = \ln\left(\frac{r}{s}\right).$$

Para evitar la suposición adicional de que  $\gamma'_{n+1}(t) > 0$ , consideramos el valor absoluto. es decir  $\rho(x, y) = \left| \ln\left(\frac{r}{s}\right) \right|$ .

Una forma más utilizada de esta igualdad es  $\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$ , que se puede deducir de la anterior sin ninguna dificultad.

Consideremos ahora la esfera hiperbólica de radio  $r$  y centro  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ . es decir, el conjunto  $\{x \in H^{n+1} : \rho(x, y) = r\}$ . Por lo anterior, esto lo podemos escribir como

$$\cosh r = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}},$$

o en forma equivalente,  $2x_{n+1}y_{n+1}(\cosh r - 1) = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1})^2$ .

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 (x_{n+1} - y_{n+1})^2 + 2x_{n+1}y_{n+1}(1 - \cosh r) &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - 2x_{n+1}y_{n+1} \cosh r \\
 &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - 2x_{n+1}y_{n+1} \cosh r + y_{n+1}^2 \cosh^2 r - y_{n+1}^2 \cosh^2 r \\
 &= (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 + y_{n+1}^2 (1 - \cosh^2 r) \\
 &= (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 - y_{n+1}^2 \sinh^2 r.
 \end{aligned}$$

Esto muestra que la esfera hiperbólica con centro en  $y$ , y radio hiperbólico  $r$  es la esfera euclidea

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 = (y_{n+1} \sinh r)^2. \quad (1.2)$$

### 1.3 $PSL(2, \mathbb{C})$ y sus subgrupos discretos

Para el caso particular  $n = 2$ , identificamos de manera natural  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $\widehat{\mathbb{R}}^2$ .

En Variable Compleja, se introduce el grupo de Möbius  $\mathcal{M}$  como el grupo de funciones de la forma  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , y  $ad - bc \neq 0$ . La condición  $ad - bc \neq 0$  asegura que las funciones no son constantes. Es importante observar que los coeficientes  $a, b, c, d$  están determinados salvo por un factor distinto de 0, es decir,  $g(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$ , para toda  $\lambda \neq 0$ . Por tanto, si  $\alpha = ad - bc$ , podemos dividir los coeficientes entre  $\sqrt{\alpha}$ , y obtener

$$g(z) = \frac{(a/\sqrt{\alpha})z + b/\sqrt{\alpha}}{(c/\sqrt{\alpha})z + d/\sqrt{\alpha}} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'},$$

con  $a'd' - b'c' = 1$ . Así, siempre podemos suponer que  $ad - bc = 1$ .

Consideremos ahora el grupo de matrices complejas con determinante igual a 1.  $SL(2, \mathbb{C})$  (el grupo lineal especial), y su grupo cociente  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/K$ , donde  $K$  es el centro de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Para toda  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ , definimos  $g_A \in \mathcal{M}$  como  $g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Se tiene entonces una función  $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ , con regla de correspondencia  $\Phi(A) = g_A$ . Un cálculo de rutina muestra que  $g_{AB} = \Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B) = g_A g_B$ , por lo que tenemos un homomorfismo de grupos. Es claro que el homomorfismo es suprayectivo, y que el kernel  $\ker(\Phi)$  consiste de las matrices  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces

$$SL(2, \mathbb{C})/\ker(\Phi) \approx \mathcal{M}.$$

Observemos que cualquier matriz en  $\ker(\Phi)$  conmuta con toda  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Por tanto,  $\ker(\Phi) \subset K$ . Por otra parte, si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ , la matriz debe conmutar, en particular, con

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica que  $c = 0$ , y  $a = d$ . Ahora, también debe conmutar con  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto,  $b = 0$ . Y como  $\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2 = 1$ ,  $a = \pm 1$ . Podemos por tanto concluir que  $\ker(\Phi) = K$ . Por tanto,  $PSL(2, \mathbf{C}) \approx \mathcal{M}$ . Debido a este isomorfismo, se acostumbra identificar al grupo de transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  con el grupo  $PSL(2, \mathbf{C})$ .

Consideremos ahora el grupo  $M(\mathbf{R}^2)$ . Cualquier reflexión en rectas o círculos en  $\widehat{\mathbf{C}}$  puede escribirse como  $\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ , y  $ad - bc = 1$ . Una deducción de esta fórmula puede encontrarse, por ejemplo, en [5], p 28-30. De aquí se sigue que cualquier composición de un número par de reflexiones es de la forma

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

Por tanto,  $M(\widehat{\mathbf{R}}^2) \subset PSL(2, \mathbf{C})$ . Inversamente, supongamos que  $g \in \mathcal{M}$ . Si  $\gamma = 0$ , necesariamente  $\delta \neq 0$ , y podemos escribir  $g(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$ . Si escribimos  $\frac{\alpha}{\delta} = re^{i\theta}$  y  $\frac{\beta}{\delta} = t$ , entonces  $g$  es composición de una traslación, una rotación, y una homotecia. Se sigue del Ejemplo 1.2 (a), (b) y (c) que  $g$  es composición de un número par de reflexiones. Por otra parte, si  $\gamma \neq 0$ , podemos escribir

$$g(z) = \frac{\gamma(\alpha z + \beta)}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\gamma(\alpha z + \beta) + \alpha\delta - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha(\gamma z + \delta) + \beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma z + \delta)}.$$

Observe que  $g$  es de nuevo composición de traslaciones, rotaciones y homotecias, junto con la inversión  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Pero el Ejemplo 1.2 (d) muestra que esta transformación también

es composición de un número par de reflexiones. Por tanto, cualquier  $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , es composición de un número par de reflexiones. Se sigue entonces que  $M(\widehat{\mathbf{R}}^2) \supset PSL(2, \mathbf{C})$ , y por tanto,  $M(\widehat{\mathbf{R}}^2) = PSL(2, \mathbf{C})$ .

Consideremos ahora a  $\mathbf{C}^4$  junto con el producto hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}$  definido por  $\langle z, w \rangle = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3 + z_4\bar{w}_4$ .



Este producto es positivo definido, es decir,  $\langle z, z \rangle \geq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}^4$ , y  $\langle z, z \rangle > 0$  si  $z \neq \bar{0}$ , y por tanto, induce la norma y métrica euclidianas en  $\mathbb{C}^4$ :

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2)^{1/2},$$

$$d(z, w) = \|z - w\|.$$

Identificamos al grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  con el siguiente subconjunto  $W \subset \mathbb{C}^4$ :

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 : ad - bc = 1\}.$$

Resulta entonces que podemos considerar a  $SL(2, \mathbb{C})$  como un subespacio métrico de  $\mathbb{C}^4$ . Definimos las funciones *traza* y *determinante* mediante:

$$\text{tr} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{tr}((a, b, c, d)) = a + d,$$

$$\text{det} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \text{det}((a, b, c, d)) = ad - bc = 1.$$

Un hecho importante que hay que destacar es el siguiente:  $\text{tr}$  y  $\text{det}$  son invariantes bajo conjugación, es decir,  $\text{det}(BAB^{-1}) = \text{det}(A)$ , y  $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}(A)$ . La importancia de estas fórmulas quedará de manifiesto a partir del Capítulo 2.

Además,  $\text{tr}$  y  $\|\cdot\|$  están relacionadas por la siguiente identidad:  $\text{tr}(AA^*) = \|A\|^2$ , en donde  $A^*$  denota la *transpuesta hermitiana* de  $A$ , es decir, si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , entonces  $A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$  (En nuestra notación actual,  $A = (a, b, c, d)$ ,  $A^* = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{d})$ .)

La convergencia en  $SL(2, \mathbb{C})$  se define de la manera usual en términos de la métrica.

Uno de los conceptos centrales en este trabajo es el de subgrupos discretos.

**Definición 1.14.** Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es *discreto* si y sólo si para cualquier sucesión de matrices  $\{A_n\} \subset G$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ , existe  $n_0 > 0$  tal que  $A_n = A$  para todo  $n \geq n_0$ .

La siguiente proposición constituye un criterio adecuado para decidir si un subgrupo es o no discreto.

**Proposición 1.6.** *Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y sólo si para toda  $k > 0$ , el conjunto  $\{A \in G : \|A\| \leq k\}$  es finito.*

La demostración puede consultarse en [4], p. 15. Como consecuencia inmediata se tienen los siguientes corolarios.

**Corolario 1.7.** *Si  $G < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto, entonces  $G$  es a lo sumo numerable.*

**Corolario 1.8.** *Si  $G < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto y no es finito, entonces para cualquier sucesión de matrices distintas  $\{A_n\} \subset G$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \infty$ .*

Además, puesto que dos grupos conjugados son isomorfos (de hecho, homeomorfos como grupos topológicos), se tiene también el siguiente resultado:

**Corolario 1.9.** *Si  $G < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto, entonces cualquier grupo conjugado a  $G$  en  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto.*

En el caso de  $PSL(2, \mathbb{C})$ :

**Definición 1.15.** Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es *discreto* si y sólo si  $\Phi^{-1}(G) < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto.

Ahora, sean  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ , y  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\Phi(A) = g$ . Como también  $\Phi(-A) = g$ ,  $g$  determina al par  $\{A, -A\}$ . Por tanto, podemos definir sin ambigüedad  $\text{tr}^2(g) := \text{tr}^2(A)$ . También, definimos la norma de  $g$  como  $\|g\| := \|A\|$ .

Para el caso de  $GL(2, \mathbb{C})$ , se define  $\|g\| := \frac{\|A\|}{|\sqrt{\det A}|}$ .

El siguiente resultado relaciona de manera notable la norma de una transformación con la métrica hiperbólica. Puede consultarse la demostración en [4], p. 61.

**Teorema 1.10.** *Para toda  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  se tiene*

$$\|g\|^2 = 2 \cosh \rho(j, g(j)),$$

donde  $j = (0, 0, 1) \in H^3$ .

Si combinamos el Teorema 1.10 con la Proposición 1.6 y la Definición 1.15, obtenemos el siguiente criterio útil para grupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

**Corolario 1.11.** *Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y sólo si para toda  $k > 0$ , el conjunto  $\{g \in G : \|g\|^2 \leq k\}$  es finito.*

*Observación 1.4.* El Corolario 1.11 nos proporciona de manera automática resultados análogos en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a los Corolarios 1.7, 1.8 y 1.9. En lo sucesivo, nos referiremos a estos resultados de manera indistinta, dejando que sea el contexto el que nos indique si nos referimos a  $SL(2, \mathbb{C})$  o a  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Procedemos ahora a clasificar las transformaciones de Möbius de acuerdo a su acción geométrica. Comenzamos con una breve discusión acerca de los puntos fijos de una transformación.

Para  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ , denotamos mediante  $F_g = \{x \in \widehat{\mathbb{R}}^3 : g(x) = x\}$  al conjunto de *puntos fijos* de  $g$ .

Las siguientes transformaciones nos facilitarán el trabajo de clasificación.

**Definición 1.16.** Para toda  $k \in \mathbb{C}$ ,  $k \neq 0$ , se definen las formas canónicas  $m_k$  como:

$$m_k(z) = \begin{cases} kz & \text{si } k \neq 1, \\ z + 1 & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Observe que para las formas canónicas el cuadrado de la traza esta dado por

$$\text{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Sea  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Los puntos fijos de  $g$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  pueden ser 1 o 2. Supongamos que  $g$  tiene un único punto fijo  $\alpha$ , y consideremos  $h(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ . Entonces

$$hgh^{-1}(\infty) = hg(\alpha) = h(\alpha) = \infty, \quad hgh^{-1}(0) = hg(\infty) = \frac{1}{g(\infty) - \alpha} = t.$$

Observe que  $hgh^{-1} = f$  fija a  $\infty$ , y como no fija a 0, necesariamente es una traslación  $f(z) = z + t$ . Ahora, cualquier traslación es conjugada a  $m_1$ . Para ver esto, sólo hay que conjuguar con  $h(z) = tz$ .

Supongamos ahora que  $g$  tiene dos puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y sea  $h(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$ . Se tiene que

$$hgh^{-1}(\infty) = hg(\beta) = h(\beta) = \infty, \quad hgh^{-1}(0) = hg(\alpha) = h(\alpha) = 0.$$

Por tanto,  $g$  es conjugada a  $m_k$  para alguna  $k \neq 1$ . Se sigue que en cualquier caso,  $g$  es conjugada a alguna de las formas canónicas  $m_k$ .

Hemos visto antes que  $\text{tr}$  es un invariante bajo conjugación de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Como  $\text{tr}^2$  está bien definido en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , si  $f$  y  $g$  son conjugadas entonces  $\text{tr}^2(h) = \text{tr}^2(g)$ . El inverso de este resultado se enuncia en el siguiente Teorema. La demostración del mismo puede verse en [4], p. 66.

**Teorema 1.12.** Sean  $h, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  distintas de  $I$ .  $f$  y  $g$  son conjugadas si y sólo si  $\text{tr}^2(h) = \text{tr}^2(g)$ .

El siguiente es un ejemplo que muestra que dos grupos isomorfos no necesariamente son conjugados (Observación 1.1).

**Ejemplo 1.3.** Sean  $G = PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $h(z) = z + 1$ , y  $g(z) = 2z$ . Los subgrupos generados  $\langle h \rangle$  y  $\langle g \rangle$  son isomorfos (ambos son cíclicos infinitos). No obstante,  $\text{tr}^2(h) = 4$ , y  $\text{tr}^2(g) = 9/2$ , y se sigue del Teorema 1.12 que los grupos no pueden ser conjugados.

A continuación, vamos a clasificar las transformaciones de Möbius de acuerdo al número de puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ . Esto es más fácil si nos restringimos a las formas canónicas. Si

identificamos  $\widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , no es laborioso verificar que las extensiones de Poincaré pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} m_k(z, t) &= (kz, |k|t) & \text{si } k \neq 1, \text{ y} \\ m_1(z, t) &= (z + 1, t) & \text{si } k = 1. \end{aligned}$$

De aquí, podemos encontrar los puntos fijos de cada  $m_k$ ;  $m_1$  fija sólo a  $\infty$ , si  $|k| \neq 1$ .  $m_k$  fija 0 e  $\infty$ , y si  $|k| = 1$ , entonces  $m_k$  fija al conjunto  $\{(0, 0, t)\} \cup \{\infty\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Observese además que el número de puntos fijos es un invariante bajo conjugación, pues como hemos visto,  $g$  fija a  $\alpha$  si y sólo si  $hgh^{-1}$  fija a  $h(\alpha)$ . Podemos por tanto clasificar las transformaciones de Möbius de acuerdo al número de puntos fijos:

**Definición 1.17.** Sea  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  distinta de  $I$ :

- (i)  $g$  es parabólica si y sólo si  $g$  tiene un único punto fijo en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (ii)  $g$  es loxodrómica si y sólo si  $g$  tiene exactamente dos puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (iii)  $g$  es elíptica si y sólo si  $g$  tiene una infinidad de puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{R}^3}$  (de hecho, un círculo o una recta en  $\widehat{\mathbb{R}^3}$ ).

Esta definición podría haberse enunciado de la siguiente manera:  $g$  es parabólica si y sólo si es conjugada a  $m_1$ ;  $g$  es elíptica si y sólo si es conjugada a  $m_k$ , con  $|k| = 1$ ,  $k \neq 1$ , y  $g$  es loxodrómica si y sólo si es conjugada a  $m_k$ , con  $|k| \neq 1$ .

Aún podemos refinar esta clasificación.

**Definición 1.18.** Sea  $g$  una transformación loxodrómica. Diremos que  $g$  es *hiperbólica* si existe un disco abierto (o un semiplano)  $D \subset \mathbb{C}$  tal que  $g(D) = D$ . En caso contrario diremos que  $g$  es *estrictamente loxodrómica*.

También podemos clasificar las transformaciones de Möbius de acuerdo al valor de  $\text{tr}^2$ .

**Teorema 1.13.** Sea  $h \in PSL(2, \mathbb{C})$  distinta de  $I$ . Entonces

- (i)  $h$  es parabólica si y sólo si  $\text{tr}^2(h) = 4$ .
- (ii)  $h$  es elíptica si y sólo si  $0 \leq \text{tr}^2(h) < 4$ .
- (iii)  $h$  es hiperbólica si y sólo si  $\text{tr}^2(h) \geq 4$ .
- (iv)  $h$  es estrictamente loxodrómica si y sólo si  $\text{tr}^2(h) \notin \mathbb{R}^+$ .

La demostración puede consultarse en [4], p. 67-68.

Los siguientes tres Teoremas son resultados útiles relativos a puntos fijos de las transformaciones de Möbius. Se enuncian sin demostración, las cuales pueden consultarse en [4], p. 68-72.

Recordemos primero que el conmutador de dos elementos  $f, g$  en un grupo  $G$  se define como  $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$ . Hemos visto también que  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  determinan matrices  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$  hasta un factor de  $\pm I$ . Por tanto,

$$\text{tr}[f, g] := \text{tr}(ABA^{-1}B^{-1}),$$

está bien definido.

**Teorema 1.14.** Sean  $h, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ , entonces:

- (i)  $h$  y  $g$  tienen un punto fijo en común en  $\widehat{\mathbb{C}}$  si y sólo si  $\text{tr}[h, g] = 2$ .
- (ii) Si  $h$  y  $g$ , ambas distintas de  $I$ , tienen un punto fijo en común en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces:
  - (a)  $[h, g] = I$  y  $F_g = F_h$ , o
  - (b)  $[h, g]$  es parabólica y  $F_g \neq F_h$ .

**Teorema 1.15.** Sean  $h, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  distintas de  $I$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $hg = gh$ ;
- (ii)  $h(F_g) = F_g, g(F_h) = F_h$ ;
- (iii)  $F_h = F_g$ ; o  $h$  y  $g$  tienen un punto fijo en común en  $H^3$  con  $g^2 = h^2 = (gh)^2 = I$ . y  $F_g \cap F_h = \emptyset$ .

**Teorema 1.16.** Un subgrupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  contiene únicamente elementos elípticos y la identidad si y sólo si los elementos de  $G$  tienen un punto fijo en común en  $H^3$ .

El siguiente Teorema ilustra el comportamiento de las transformaciones de Möbius al ser iteradas. La demostración puede consultarse en [4], p. 73.

Antes de enunciar el Teorema, necesitamos una definición.

**Definición 1.19.** Sea  $C$  un círculo en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y  $\varphi$  la reflexión en  $C$ .  $\alpha$  y  $\beta$  son puntos inversos con respecto a  $C$  si  $\varphi(\alpha) = \beta$ .

**Teorema 1.17.** (i) Sea  $g$  parabólica con punto fijo  $\alpha$ . Para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$ . La convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$ .

(ii) Sea  $g$  loxodrómica. Los puntos fijos  $\alpha, \beta$  de  $g$  pueden ser renombrados de manera que para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}, z \neq \beta, \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$ . La convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\beta\}$ .

(iii) Sea  $g$  elíptica con puntos fijos  $\alpha, \beta$ . Entonces  $g$  deja invariante a cualquier círculo para el cual  $\alpha$  y  $\beta$  son puntos inversos.

**Definición 1.20.** A los puntos fijos  $\alpha, \beta$  de una transformación loxodrómica  $g$ , después de ser renombrados como en el Teorema 1.17 (ii), se les llama el *atractor* y el *repulsor* de  $g$ , respectivamente.

Observe que  $\beta$  y  $\alpha$  son el atractor y el repulsor de  $g^{-1}$ , respectivamente.

El siguiente lema nos será útil para mostrar algunos contraejemplos.

**Lema 1.18.** Sea  $\omega = e^{i\varphi}$ , con  $\varphi$  irracional. Entonces el conjunto  $A = \{\omega^n : n \in \mathbb{Z}\}$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .

**DEMOSTRACION.** Como  $\varphi$  es irracional, el conjunto  $A$  es infinito, y  $\mathbb{S}^1$  es compacto, por lo que  $A$  tiene un punto de acumulación  $\alpha \in \mathbb{S}^1$ . Por tanto, podemos extraer una sucesión  $\{\omega^{n_1}, \omega^{n_2}, \dots, \omega^{n_k}, \dots\}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega^{n_k} = \alpha$ .

Ahora, dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $n, m \in \mathbb{Z}$  distintas tales que  $|\omega^n - \alpha| < \varepsilon/3$ , y  $|\omega^m - \alpha| < \varepsilon/3$ . Además, sea  $\alpha'$  tal que  $|\alpha' - 1| \leq \varepsilon/3$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |\omega^{n-m} - \alpha'| &\leq |\omega^{n-m} - 1| + |1 - \alpha'| = |\omega^n - \omega^m| + |1 - \alpha'| \\ &< |\omega^n - \alpha| + |\omega^m - \alpha| + |1 - \alpha'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que cualquier punto en una vecindad de 1 de radio  $\varepsilon/3$  es punto de acumulación de  $A$ . Como podemos cubrir  $\mathbb{S}^1$  con un número finito de tales vecindades, se tiene por tanto que  $A$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

**Definición 1.21.** Sea  $g \in PSL(2, \mathbb{C}), g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc = 1$ . Si  $c \neq 0$ , el círculo isométrico de  $g$  es el círculo

$$I_g = \{z \in \mathbb{C} : |g'(z)| = 1\},$$

En caso de que  $c = 0$ , no definimos el círculo isométrico.

La razón del nombre es la siguiente: Si  $g(u) \neq \infty$  y  $g(v) \neq \infty$ ,

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &= \left| \frac{au + b}{cu + d} - \frac{av + b}{cv + d} \right| = \left| \frac{(au + b)(cv + d) - (av + b)(cu + d)}{(cu + d)(cv + d)} \right| \\ &= \left| \frac{adu + bcv - bcu - adv}{(cu + d)(cv + d)} \right| = \left| \frac{(ad - bc)(u - v)}{(cu + d)(cv + d)} \right| \\ &= \left| \frac{u - v}{(cu + d)(cv + d)} \right|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otra parte,  $g'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$ . Se sigue entonces que  $|g(u) - g(v)| = |u - v|$  si  $u, v \in I_g$ . Es decir,  $g$  actúa en  $I_g$  como una isometría euclídeana. Se puede probar además que si  $g$  no es una similitud euclídeana, entonces el único círculo en donde  $g$  actúa euclídeanamente es el isométrico.

Una propiedad importante del círculo isométrico es la siguiente:

**Proposición 1.19.** *Sea  $I_g$  el círculo isométrico de  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Entonces  $g(I_g) = I_{g^{-1}}$ ,  $g(\text{Int } I_g) = \text{Ext } I_{g^{-1}}$ , y  $g(\text{Ext } I_g) = \text{Int } I_{g^{-1}}$ .*

**DEMOSTRACION.** Primero hay que observar que si  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc = 1$ , entonces  $g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ , y podemos definir  $I_{g^{-1}}$ .

Ahora, para toda  $z \in \text{Int } I_g$  se tiene que  $|cz + d| < 1$ , por lo que

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{(cz + d)^2} \right| = \frac{1}{|cz + d|^2} > 1.$$

Como  $z = (g^{-1} \circ g)(z)$ ,  $1 = (g^{-1} \circ g)'(z) = (g^{-1})'(g(z))g'(z)$ , y se sigue entonces que  $|(g^{-1})'(g(z))g'(z)| = 1$ , por lo que  $|(g^{-1})'(g(z))| < 1$ . Se sigue de la observación anterior que  $g(z) \in \text{Ext } I_{g^{-1}}$ . Las restantes contenciones se demuestran de la misma forma.  $\square$

## 1.4 Integral de Riemann-Stieltjes

En el presente trabajo se utiliza la integral de Riemann-Stieltjes en sólo un resultado del Capítulo 4, el Teorema 4.3 (ii), por lo que hacemos un breve resumen de las definiciones y resultados necesarios. Las demostraciones se pueden consultar en [2], [3] y [12].

En esta sección, supondremos que  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones acotadas (no necesariamente continuas).

**Definición 1.22.** Consideremos una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$ , y  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Una *suma de Riemann-Stieltjes* de  $f$  con respecto a  $g$  correspondiente a  $P$  es un número real  $S(P, f, g)$  de la forma

$$S(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

donde  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ .

La *norma* de la partición  $P$  es

$$\|P\| = \max \{|x_k - x_{k-1}| : 1 \leq k \leq n\}.$$

Una partición  $Q$  *refina* a  $P$  si todo punto de  $P$  pertenece a  $Q$ . Esto lo denotaremos mediante  $P \subset Q$ .

**Definición 1.23.** Una función  $f$  es *integrable con respecto a  $g$*  en  $[a, b]$  si existe un número real  $I$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  exista una partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que si  $P_\varepsilon \subset P$ , y  $S(P, f, g)$  es cualquier suma de Riemann-Stieltjes correspondiente a  $P$ , entonces

$$|S(P, f, g) - I| < \varepsilon.$$

En este caso, el número  $I$  está determinado de manera única y se escribe

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t).$$

En el caso especial en que  $g(x) = x$ , la suma  $S(P, f, g)$  se reduce a una suma de Riemann, y la definición coincide con la de la integral de Riemann del cálculo elemental.

*Notación.* Si  $f$  es integrable con respecto a  $g$  en  $[a, b]$ , escribiremos  $f \in \mathfrak{R}(g)$  en  $[a, b]$ . Además, a  $f$  se le llama el *integrando* y a  $g$  el *integrador*.

El siguiente resultado nos permite intercambiar los papeles del integrando y del integrador.

**Teorema 1.20.**  $f \in \mathfrak{R}(g)$  en  $[a, b]$  si y sólo si  $g \in \mathfrak{R}(f)$  en  $[a, b]$ . Además

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Para el resultado que mencionaremos en el Capítulo 4, necesitamos condiciones suficientes para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes. Aún cuando existen estas condiciones para distintas clases de funciones integradoras, nos bastará con el siguiente caso especial.

**Teorema 1.21.** Si  $f$  es continua y  $g$  es monótona en  $[a, b]$ , entonces  $f \in \mathfrak{R}(g)$  en  $[a, b]$ .



También, necesitamos el siguiente resultado que nos permite reducir una integral de Riemann-Stieltjes a una integral de Riemann.

**Teorema 1.22.** *Sea  $f \in \mathfrak{R}(g)$  en  $[a, b]$ , y supongamos que  $g$  tiene derivada continua en  $[a, b]$ , entonces*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

No siempre es sencillo evaluar una integral de Riemann-Stieltjes. Sin embargo, existen condiciones bajo las cuales la integral puede reducirse a una suma finita.

**Definición 1.24.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua excepto en un número finito de puntos  $c_k$ , donde  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b$ .  $g$  es una *función escalonada* si y sólo si es constante en el subintervalo  $(c_{k-1}, c_k)$ . Al número  $g_{c_k} = g(c_k+) - g(c_k-)$  se le llama el *salto* de  $g$  en  $c_k$ .

**Teorema 1.23.** *Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalonada con salto  $g_{c_k}$  en  $c_k$ . Si  $f \in \mathfrak{R}(g)$  en  $[a, b]$ , entonces*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{k=1}^n f(c_k) g_{c_k}.$$

Los resultados anteriores se pueden generalizar a integrales impropias de manera natural.

## 2 Grupos Elementales

De ahora en adelante, nos concentraremos en la acción de subgrupos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en  $H^3$ . También, consideraremos la cerradura de  $H^3$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ ,

$$\overline{H^3} = H^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}.$$

**Definición 2.1.** Un subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es *elemental* si y sólo si existe una  $G$ -órbita finita en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ .

Debido a la importancia de esta definición, hacemos notar que el énfasis recae en la palabra *finita*. Es de destacar que la definición no hace ninguna referencia a si el grupo es o no discreto.

**Ejemplo 2.1.** (i) Sea  $z_0 \in \overline{H^3}$ , y  $G_{z_0}$  su estabilizador, es decir,

$$G_{z_0} = \{g \in PSL(2, \mathbb{C}) : g(z_0) = z_0\}.$$

(ii)  $G$  subgrupo finito de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

(iii)  $G$  abeliano. Aquí, se tienen dos casos

(a)  $G$  contiene sólo elementos elípticos y la identidad, o

(b)  $G$  contiene algunos elementos parabólicos o loxodrómicos.

Observe que (a) se sigue del Teorema 1.16 (aún si  $G$  es no abeliano),

**DEMOSTRACION DE (b).** Sean  $h, g \in G$ , y supongamos que una de ellas, digamos  $h$ , no es elíptica. Del Teorema 1.15 (ii),  $h(F_g) = F_g$ ,  $g(F_h) = F_h$ . Como  $h^2 \neq Id$ , se sigue del inciso (iii) del mismo Teorema que  $F_g = F_h$ . Analicemos ahora la cardinalidad de  $F_g$ .

Si  $|F_g| = 1$ ,  $g$  es parabólica y por tanto  $h$  también es parabólica, y  $G$  es conjugado a un subgrupo de  $G_\infty$ .

Si  $|F_g| = 2$ ,  $g$  puede ser elíptica o loxodrómica. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $F_g = \{0, \infty\}$ . Necesariamente,  $h(0) = 0$ ,  $h(\infty) = \infty$ , pues de otra forma  $h$  sería elíptica de orden 2, lo cual contradice nuestro supuesto original.

Por tanto, cualquier subgrupo abeliano de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es elemental.  $\square$

**Observación 2.1.** Algunas veces, los grupos elementales son definidos con la condición de que para todos  $f, g \in G$  de orden infinito, se tenga que  $\text{tr}[f, g] = 2$ . Sin embargo, con esta definición, el grupo estabilizador de un punto en  $H^3$  no es necesariamente elemental. Para probar esto, elegimos  $\varphi$  irracional, y consideramos las transformaciones  $f(z) = e^{\varphi\pi i}z$  y  $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$ , por lo cual  $hfh^{-1}(z) = \frac{(e^{\varphi\pi i} + 1)z + e^{\varphi\pi i} - 1}{(e^{\varphi\pi i} - 1)z + e^{\varphi\pi i} + 1}$ .

Ahora, los puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $f$  y  $hfh^{-1}$  son  $\{0, \infty\}$ , y  $\{-1, 1\}$ , respectivamente, y como son conjugadas, son de orden infinito. Por el Teorema 1.14 (i), se tiene que  $\text{tr}[f, hfh^{-1}] \neq 2$ . Así, el grupo  $G = \langle f, hfh^{-1} \rangle$  no es elemental en el sentido de esta nueva definición. Sin embargo,  $f$  fija el conjunto

$$\{(0, 0, t) : t > 0\} \cup \{\infty\},$$

y  $hfh^{-1}$  fija el conjunto

$$\{(x_1, 0, x_3) : -1 < x_1 < 1, \quad x_3 = \sqrt{1 - x_1^2}\}.$$

Es decir, ambas fijan a  $j = (0, 0, 1)$ , y por tanto,  $G = G_j$ .



Consideremos ahora a  $G$  un grupo elemental y supongamos que la  $G$ -órbita es  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Si  $g \in G$ , entonces los puntos  $g^m(x_k)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  no pueden ser todos distintos, por lo que existe un entero  $m_k > 0$  con la propiedad de que  $g^{m_k}$  fija a  $x_k$ . Sea  $m = m_1 m_2 \dots m_n$ , de donde  $g^m(x_k) = x_k$  para toda  $k$ . Con esta información, procedemos a clasificar los grupos elementales en tres tipos en base a la cardinalidad de la órbita finita.

Tipo 1:  $n \geq 3$ , o  $\{x_1, \dots, x_n\} \not\subset \widehat{\mathbb{C}}$ .

Si los puntos  $x_k \notin \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces cada  $g \in G$  tiene una potencia  $g^m$  que fija a  $x_k$  y así  $g^m$ , y por tanto  $g$ , es elíptica. Si  $n \geq 3$  y los  $x_k \in \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $g^m$  tiene al menos tres puntos fijos y es por tanto la identidad. Por tanto, todo elemento no trivial de  $G$  es elíptico. Esto muestra que si  $G$  es de Tipo 1, entonces  $G$  contiene sólo elementos elípticos (y la identidad). Por el Teorema 1.16, existe un  $x \in H^3$  que es fijado por cada elemento de  $G$ . Debido a que podemos conjugar  $G$  mediante  $g \in M(\mathbb{R}^3)$  de manera que  $g(x) = 0$ ,  $g(H^3) = B^3$ , se sigue del Corolario 1.5 que  $G$  es conjugado a un subgrupo de  $\mathcal{SO}(3)$ .

Tipo 2:  $n = 1$ .

En este caso,  $G$  es conjugado a un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , en donde cada elemento fija  $\infty$  y por tanto es de la forma  $g(z) = az + b$ . Por tanto,  $G$  es conjugado a un grupo de similitudes euclidianas de  $\mathbb{C}$ .

Tipo 3:  $n = 2$ .

En este caso,  $G$  es conjugado a un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , donde cada elemento deja invariante  $\{0, \infty\}$  y es por tanto de la forma  $g(z) = az^s$ , con  $a \neq 0$ ,  $s^2 = 1$ .

**Proposición 2.1.** Si  $G$  es un subgrupo elemental de  $PSL(2, \mathbb{C})$  de Tipo 3, entonces es conjugado a un grupo de isometrías del espacio  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , con la métrica inducida por la densidad  $\lambda(z) = \frac{1}{|z|}$ .

DEMOSTRACION. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  una curva de clase  $C^1$ . La longitud de la curva  $\gamma$ , en esta métrica, es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt.$$

Sea  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $g(z) = az^s$ , con  $a \neq 0$ ,  $s^2 = 1$ . Se sigue que

$$l(g \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|g'(\gamma(t))\gamma'(t)|}{|g(\gamma(t))|} dt.$$

Usando notación compleja, si  $s = 1$ ,  $g'(\gamma(t))\gamma'(t) = a\gamma'(t)$ , y  $g(\gamma(t)) = a\gamma(t)$ , y por tanto

$$l(g \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|a\gamma'(t)|}{|a\gamma(t)|} dt = l(\gamma).$$

Por otra parte, si  $s = -1$ ,  $g'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{-a\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}$ , y  $g(\gamma(t)) = \frac{a}{\gamma(t)}$ , de donde

$$l(g \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|-a\gamma'(t)/\gamma^2(t)|}{|a/\gamma(t)|} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt = l(\gamma).$$

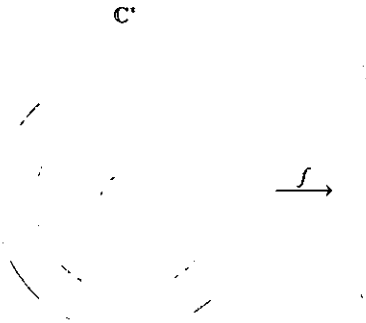
Es claro que esta prueba se puede extender a curvas de clase  $C^1$  por tramos.  $\square$

Con relación a métricas en  $\mathbb{C}^*$ , probamos ahora el resultado que habíamos mencionado en el Capítulo 1, Ejemplo 1.1 (b).

**Proposición 2.2.** La función  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ , definida por  $f(z) = \left( \frac{z}{|z|}, \ln |z| \right)$ , es una isometría, donde  $\mathbb{C}^*$  tiene la métrica inducida por  $\lambda(z) = \frac{1}{|z|}$ , y  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  la métrica euclídeana como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

DEMOSTRACION. Si identificamos  $\mathbb{C}^* \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ , podemos escribir  $f$  de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)).$$



Es suficiente mostrar que para cualquier curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  de clase  $C^1$  que una  $z_1$  con  $z_2$  en  $\mathbb{C}^*$ , se cumpla la igualdad  $\int_a^b |f'(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt$ .

Ahora, si denotamos  $\gamma(t) = (x, y)$ , y  $\gamma'(t) = (x', y')$

$$\begin{aligned} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 (x^2 + y^2)^{-1/2} & -xy (x^2 + y^2)^{-1/2} \\ -xy (x^2 + y^2)^{-1/2} & \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 (x^2 + y^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = \frac{1}{r^2} ((r - x^2 r^{-1}) x' - xy r^{-1} y', (r - y^2 r^{-1}) y' - xy r^{-1} x', xx' + yy').$$

Tomando el cuadrado de la norma se tiene

$$\begin{aligned} |f'(\gamma(t)) \gamma'(t)|^2 &= \frac{1}{r^4} \left[ (r - x^2 r^{-1})^2 (x')^2 - 2xy (r - x^2 r^{-1}) r^{-1} x' y' + x^2 y^2 r^{-2} (y')^2 \right. \\ &\quad + (r - y^2 r^{-1})^2 (y')^2 - 2xy (r - y^2 r^{-1}) r^{-1} x' y' \\ &\quad \left. + x^2 y^2 r^{-2} (x')^2 + x^2 (x')^2 + 2xy x' y' + y^2 (y')^2 \right] \\ &= \frac{1}{r^4} \left( (x')^2 \left[ (r - x^2 r^{-1})^2 + x^2 y^2 r^{-2} + x^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + (y')^2 \left[ (r - y^2 r^{-1})^2 + x^2 y^2 r^{-2} + y^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2x' y' xy [r^{-1} (r - y^2 r^{-1}) + r^{-1} (r - x^2 r^{-1}) - 1] \right) \end{aligned}$$

Desarrollamos por separado los corchetes:

$$\begin{aligned}
 (r - x^2 r^{-1})^2 + x^2 y^2 r^{-2} + x^2 &= r^2 - 2x^2 + x^4 r^{-2} + x^2 y^2 r^{-2} + x^2 \\
 &= r^2 - x^2 + r^{-2} (x^4 + x^2 y^2) \\
 &= y^2 + r^{-2} (x^2) (x^2 + y^2) = y^2 + x^2 = r^2. \\
 (r - y^2 r^{-1})^2 + x^2 y^2 r^{-2} + y^2 &= r^2 - 2y^2 + y^4 r^{-2} + x^2 y^2 r^{-2} + y^2 \\
 &= r^2 - y^2 + r^{-2} (y^4 + x^2 y^2) \\
 &= x^2 + r^{-2} (y^2) (x^2 + y^2) = x^2 + y^2 = r^2. \\
 r^{-1} (2r - (x^2 + y^2)r^{-1}) - 1 &= 2 - (x^2 + y^2)r^{-2} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $|f'(\gamma(t)) \gamma'(t)|^2 = \frac{1}{r^2} [(x')^2 + (y')^2]$ , de donde

$$|f'(\gamma(t)) \gamma'(t)| = \frac{1}{r} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Y esta última igualdad es precisamente lo que queríamos probar.  $\square$

En la siguiente sección, damos comienzo a la clasificación de todos los grupos elementales *discretos*.

## 2.1 Grupos elementales discretos de Tipo 1

Si  $G$  es elemental discreto de Tipo 1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cualquier elemento de  $G$  fija a  $j \in H^3$ . Del Teorema 1.10, se sigue que  $\|g\|^2 = 2$  para toda  $g \in G$ , y el Corolario 1.11 implica que  $G$  es finito. Por tanto,  $G$  es conjugado a un subgrupo finito de  $SO(3)$  (Corolario 1.5).

Usaremos este último hecho para obtener las posibles estructuras de  $G$ .

**Definición 2.2.** Un punto  $v \in \widehat{C}$  es un *vértice* de  $G$  si es fijado por alguna  $g \in G$ , ( $g \neq I$ ). El conjunto de vértices será denotado por  $V$ .

Consideremos ahora el conjunto  $E = \{(g, v) \in G \times V : g(v) = v, g \neq I\}$ . Como cada  $g$  en  $G$  ( $g \neq I$ ) fija exactamente dos vértices, la cardinalidad de este conjunto es

$$|E| = 2(|G| - 1). \quad (2.1)$$

Si  $G_v$  es el estabilizador de un vértice  $v$ , se tiene otra expresión para la cardinalidad de  $E$ :

$$|E| = \sum_{v \in V} (|G_v| - 1). \quad (2.2)$$

$G$  induce una partición de  $V$  en órbitas ajenas  $V_1, V_2, \dots, V_s$ . Aún más, si consideramos  $u, v \in V_j$ , sus estabilizadores  $G_u, G_v$  en  $G$  son conjugados, por lo que podemos considerar  $|G_u| = |G_v| = n_j$ , para todas  $u, v \in V_j$ , y por tanto,

$$|E| = \sum_{j=1}^s \sum_{v \in V_j} (|G_v| - 1) = \sum_{j=1}^s |V_j| (n_j - 1).$$

Por la Proposición 1.1, cada órbita  $G(v)$  está en correspondencia biyectiva con las clases laterales de  $G/G_v$ . Así, para toda  $v \in V_j$  se tiene que  $G(v) = V_j$ , y

$$|V_j| = \frac{|G|}{|G_v|} = \frac{|G|}{n_j}.$$

Igualando (2.1) y (2.2), y utilizando la identidad anterior, obtenemos

$$2(|G| - 1) = \sum_{j=1}^s \frac{|G|}{n_j} (n_j - 1) = \sum_{j=1}^s |G| \left(1 - \frac{1}{n_j}\right),$$

o en forma equivalente,

$$2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right). \quad (2.3)$$

Excluyendo al grupo trivial, podemos suponer que  $|G| \geq 2$ , así  $1 - \frac{1}{|G|} \geq \frac{1}{2}$ , y por tanto.

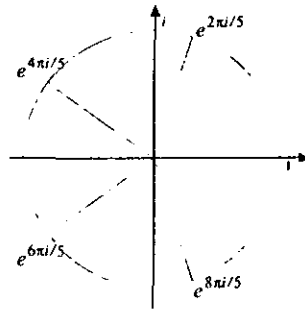
$$1 \leq 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) < 2. \quad (2.4)$$

Además, también podemos suponer que  $n_j \geq 2$ , por lo que  $1 - \frac{1}{n_j} \geq \frac{1}{2}$ , y se tiene entonces que

$$\frac{s}{2} \leq \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) < s. \quad (2.5)$$

Las desigualdades (2.4) y (2.5), junto con (2.3), muestran que  $s$  sólo puede tomar los valores 2 o 3. En efecto, si suponemos que  $s = 1$ ,  $2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = 1 - \frac{1}{n_1} < 1$ . Por otro lado, el suponer que  $s \geq 4$  nos conduce a  $2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \geq \frac{s}{2} \geq 2$ .

Caso 1:  $s = 2$ .



En este caso, de (2.3) resulta  $2 = \frac{|G|}{n_1} + \frac{|G|}{n_2}$ , y por tanto, dado que  $n_j \mid |G|$ ,  $|G| = n_1 = n_2$  y  $|V_1| = |V_2| = 1$ .

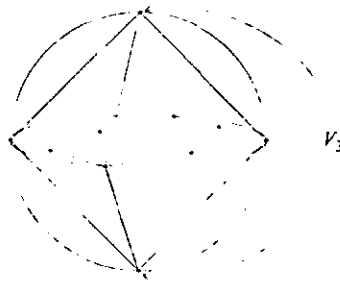
Sólo existen dos vértices y cada uno de ellos es fijado por cada elemento de  $G$ . Por conjugación, podemos suponer que los vértices son  $0$  e  $\infty$  y  $G$  es entonces un grupo cíclico finito de rotaciones en  $\mathbb{C}$ .

Caso 2:  $s = 3$ .

Aquí, de (2.3) resulta  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{|G|}$ , y podemos suponer, sin pérdida de generalidad,

que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Si  $n_1 \geq 3$ ,  $\frac{2}{|G|} \leq 0$ , por lo que  $n_1 = 2$ , y  $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{|G|}$ .

De aquí, se ve que no puede ser que  $n_3 \geq n_2 \geq 4$ , y por tanto,  $n_2 = 2$  o  $n_2 = 3$ . Con  $n_2 = 2$ ,  $|G| = 2n_3, n_3 > 0$ . Es decir, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|G| = 2n, |V_1| = |V_2| = n, |V_3| = 2$ . En este caso, el grupo resulta ser isomorfo al grupo diédrico  $D_{2n}$ .



Si  $n_2 = 3$ ,  $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|}$ . De nuevo, como  $\frac{2}{|G|} \geq 0$ ,  $n_3 \leq 5$ . Las soluciones son:

- (i)  $n_3 = 3 \Rightarrow |G| = 12, |V_1| = 6, |V_2| = 4, |V_3| = 4$ .
- (ii)  $n_3 = 4 \Rightarrow |G| = 24, |V_1| = 12, |V_2| = 8, |V_3| = 6$ .



$$(iii) n_3 = 5 \Rightarrow |G| = 60, \quad |V_1| = 30, \quad |V_2| = 20, \quad |V_3| = 12.$$

Se puede probar que estos grupos son isomorfos a los grupos de rotaciones que preservan al tetraedro ( $A_4$ ), al octaedro ( $S_4$ ) y al icosaedro ( $A_5$ ), respectivamente. Ver [6], [5], p. 49, o [10], p.172-187.

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.3.** *Sea  $G$  subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  elemental discreto de Tipo 1. Entonces  $G$  es conjugado a alguno de los siguientes grupos:*

(i)  $\mathbb{Z}_n$ ,

(ii)  $D_{2n}$ ,

(iii)  $A_4, S_4, A_5$ . □

Con esto, los grupos elementales discretos de Tipo 1 quedan totalmente determinados (hasta conjugación). A continuación, se enuncia y demuestra un Teorema que será útil para distinguir entre los grupos elementales discretos de Tipo 2 y los de Tipo 3.

**Teorema 2.4.** *Sean  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ , con  $g$  loxodrómica, y suponga que  $f$  y  $g$  tienen exactamente un punto fijo en común. Entonces el grupo generado por  $f$  y  $g$  no es discreto.*

DEMOSTRACION. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto fijo en común es  $\infty$ , y que  $f, g$  son de la forma  $g(z) = \alpha z$ ,  $f(z) = az + b$ , con  $|\alpha| > 1$  y  $b \neq 0$  (si  $|\alpha| < 1$ , se puede tomar  $g^{-1}$ ).

Consideremos

$$g^{-n} f g^n(z) = g^{-n} f(\alpha^n z) = g^{-n}(a\alpha^n z + b) = az + \alpha^{-n}b.$$

Puesto que  $|\alpha| > 1$ , se tiene que

$$\|g^{-n} f g^n\|^2 = \frac{|a|^2 + |\alpha^{-n}b|^2 + 1}{|a|} < \frac{|a|^2 + |b|^2 + 1}{|a|}$$

es una sucesión acotada de términos distintos, y se sigue del Corolario 1.11 que  $\langle f, g \rangle$  no puede ser discreto. □

## 2.2 Grupos elementales discretos de Tipo 2

Supongamos ahora que  $G$  es elemental discreto, pero no de Tipo 1. Entonces  $G$  debe contener elementos parabólicos o loxodrómicos. Si  $G$  contiene un elemento parabólico con punto fijo  $\infty$ , entonces cualquier elemento de  $G$  debe fijar  $\infty$  (debido a que las restantes órbitas

son infinitas). y se sigue del Teorema 2.4 que  $G$  no puede tener elementos loxodrómicos (aunque puede contener elementos elípticos). Se sigue entonces que  $G$  es de Tipo 2.

Examinemos ahora la estructura general de un grupo discreto de este tipo. Podemos asumir que todos los elementos de  $G$  fijan  $\infty$ , es decir, son de la forma  $g(z) = \alpha z + \beta$ . Por la observación anterior, son parabólicos o elípticos (pues  $g(z) = \alpha z + \beta$  es conjugada a la forma canónica  $m_\alpha$  si  $\alpha \neq 1$ , por medio de  $h(z) = z + \beta/(1 - \alpha)$ ), y  $G$  es conjugado a un grupo de isometrías euclidianas de  $\mathbb{C}$ .

**Definición 2.3.** Sea  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  de la forma  $g(z) = \alpha z + \beta$ . A  $\alpha$  se le llama el *multiplicador* de  $g$ , y se le denota mediante  $\alpha_g$ .

Con la definición anterior,  $\alpha_g = 1$  si y sólo si  $g$  es parabólica o la identidad. También, dado que las demás transformaciones son elípticas, el conjunto de multiplicadores  $S$  de  $G$  es subgrupo de  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Consideremos el homomorfismo  $\theta : G \rightarrow S$ ,  $\theta(g) = \alpha_g$ . De la observación anterior, se sigue que el kernel de  $\theta$ ,  $T = \ker(\theta)$ , consiste precisamente del subgrupo de traslaciones de  $G$ . Además,  $G/T \approx S = \theta(G)$ , y podemos por tanto describir a  $G$  mediante descripciones explícitas de  $S$  y de  $T$ .

Lo primero que mostraremos es que  $S$  es un grupo cíclico finito. Por hipótesis,  $G$  contiene al menos una traslación  $f(z) = z + \lambda$ , y si  $g \in G$ , con  $g(z) = \alpha z + \beta$ .

$$gfg^{-1}(z) = gf(\alpha^{-1}(z - \beta)) = g(\alpha^{-1}(z - \beta) + \lambda) = z + \alpha\lambda.$$

Entonces para toda  $\alpha \in S$ ,  $G$  contiene a  $h(z) = z + \alpha\lambda$ . Esto muestra que  $S$  es finito, pues en caso contrario podríamos extraer una subsucesión de multiplicadores distintos  $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ , y en tal caso,  $\|h_n\|^2 = 2 + |\alpha_n\lambda|^2 = 2 + |\lambda|^2$  para toda  $n$ , y se sigue del Corolario 1.11 que  $G$  no puede ser discreto.

Todo  $\alpha \in S$  es de la forma  $e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi]$ . Sea  $\varphi_0$  el mínimo de estos exponentes. Si algún  $\varphi$  no es múltiplo entero de  $\varphi_0$ , entonces existen  $p \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\varphi = p\varphi_0 + r$ , con  $0 < r < \varphi_0$ , por lo que  $e^{i(\varphi - p\varphi_0)} = e^{ir} \in S$ , lo cual contradice la elección de  $\varphi_0$ . Así,  $S$  es cíclico finito, y todo  $\alpha \in S$  es de la forma  $e^{2\pi ri/q}$ , con  $0 \leq r < q$ .

Ahora, con  $f$  y  $g$  como antes, se tiene

$$gf^n g^{-1}(z) = gf^n(\alpha^{-1}(z - \beta)) = g(\alpha^{-1}(z - \beta) + n\lambda) = z + n\alpha\lambda.$$

además,  $g^n(z) = \alpha^n z + \beta'$ , donde  $\beta'$  es una expresión en  $\alpha$  y  $\beta$ , por lo que

$$g^n f g^{-n}(z) = g^n f(\alpha^{-n}(z - \beta')) = g^n(\alpha^{-n}(z - \beta') + \lambda) = z + \alpha^n \lambda.$$

Con lo anterior, hemos mostrado que  $G$  contiene cualquier traslación de la forma  $h(z) = z + p(\alpha)\lambda$ , donde  $p$  es cualquier polinomio con coeficientes enteros en  $\alpha$ . En particular,  $G$  contiene todas las traslaciones de la forma  $h(z) = z + (\alpha \pm 1)^n \lambda$ .

Esto último implica que  $|\alpha + 1| \geq 1$  para toda  $\alpha \neq -1$ , y que  $|\alpha - 1| \geq 1$  para toda  $\alpha \neq 1$ . En efecto, si  $\alpha \neq -1$  y  $|\alpha + 1| < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha + 1|^n |\lambda| = 0$ , y si  $\alpha \neq 1$  con

$|\alpha - 1| < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - 1|^n |\lambda| = 0$ . En cualquiera de estos casos, se contradice el Corolario 1.11, y  $G$  no puede ser discreto.

Hemos llegado pues a las siguientes desigualdades:

(i)  $|\alpha - 1| \geq 1$  siempre que  $\alpha \neq 1$ , y

(ii)  $|\alpha + 1| \geq 1$  para toda  $\alpha \neq -1$ .

Si reescribimos la desigualdad (i) con  $\alpha = e^{2\pi i/q}$ ,

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| \geq 1 &\iff |\alpha - 1|^2 \geq 1 \iff \left(\cos \frac{2\pi}{q} - 1\right)^2 + \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{q}\right)^2 \\ &= 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{q}\right) \geq 1 \iff \cos \frac{2\pi}{q} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $q \geq 7$ . Entonces  $\frac{1}{q} < \frac{1}{6}$  y como coseno es decreciente en  $[0, \pi]$ ,

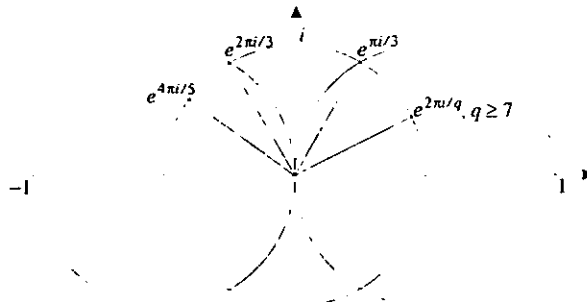
$$\cos \frac{2\pi}{q} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que se sigue que  $q \leq 6$ .

Por otro lado, de la desigualdad (ii), con  $\alpha = e^{2\pi r i/q}$

$$\begin{aligned} |\alpha + 1| \geq 1 &\iff |\alpha + 1|^2 \geq 1 \iff \left(\cos \frac{2\pi r}{q} + 1\right)^2 + \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi r}{q}\right)^2 \\ &= 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi r}{q}\right) \geq 1 \iff \cos \frac{2\pi r}{q} \geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tomando  $q = 5$ ,  $r = 2$ , se tiene que  $\cos \frac{4\pi}{5} < \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ , lo cual excluye el caso  $q = 5$ .



Así, hemos mostrado que  $S = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{q-1}\}$ , con  $\omega = e^{2\pi i/q}$ ,  $q \leq 6$ .  $q \neq 5$ .

Ahora, describiremos  $T$ . Consideremos el conjunto  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : g(z) = z + \lambda \in G\}$ . y sea  $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$ . Como  $G$  es discreto, existe  $\lambda \in \Lambda^*$  de módulo mínimo (si no es así, existiría una sucesión  $\{\lambda_n\} \subset \Lambda^*$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , por lo que se tendría una sucesión de transformaciones  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^2 = 2 + |\lambda_n|^2 = 2$ , y se sigue del Corolario 1.11 que  $G$  no puede ser discreto). Si  $\Lambda = \{n\lambda : n \in \mathbb{Z}\}$ , entonces se tiene que

$$T = \{z \mapsto z + n\lambda : n \in \mathbb{Z}\},$$

o bien existe  $\mu \in \Lambda^* \setminus \{n\lambda : n \in \mathbb{Z}\}$  de módulo mínimo con  $|\mu| \geq |\lambda|$ . El conjunto de las traslaciones  $\{z \mapsto z + n\lambda + m\mu : n, m \in \mathbb{Z}\}$  está contenido en  $G$ . Hay que mostrar que este conjunto es precisamente  $T$ . Es claro que  $\mu$  no es un múltiplo real de  $\lambda$ , pues si lo fuera, existirían  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta \in (0, 1)$  tales que  $\mu = (k + \delta)\lambda$ , y  $\mu - k\lambda = \delta\lambda$  es tal que  $\delta|\lambda| < |\lambda|$ , lo cual contradice la elección de  $\lambda$ .

Se sigue que  $\lambda$  y  $\mu$  generan a  $\mathbb{C}$  como espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Si  $f(z) = z + \gamma$  está en  $G$ , podemos escribir  $\gamma = a\lambda + b\mu$ , con  $a = n' + x$ ,  $b = m' + y$ ,  $n', m' \in \mathbb{Z}$ .  $x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Se tiene entonces que  $\gamma - (n'\lambda + m'\mu) \in \Lambda$ , y dado que  $\lambda$  y  $\mu$  son linealmente independientes.

$$|\gamma - (n'\lambda + m'\mu)| = |x\lambda + y\mu| < |x\lambda| + |y\mu| \leq \frac{1}{2}(|\lambda| + |\mu|) \leq |\mu|.$$

lo cual contradice la elección de un elemento con módulo mínimo. Por tanto,  $T$  consiste de traslaciones de la forma  $z \mapsto z + n\lambda + m\mu$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Ahora estamos en condiciones de describir a  $G$ . Sea  $\omega \in S$ ,  $\omega = e^{2\pi i/q}$ , y tomemos  $g \in G$  con multiplicador  $\omega$ . Entonces  $g, g^2, \dots, g^{q-1}$  tienen multiplicadores  $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{q-1}$ , y  $G$  tiene una descomposición en clases laterales  $G = T \cup Tg \cup Tg^2 \cup \dots \cup Tg^{q-1}$ . pues como se vió antes,  $G/T \approx S$ .

Esto muestra que cualquier elemento  $g$  de  $G$  es de la forma  $g(z) = \omega^k z + n\lambda + m\mu$ , con  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < q \leq 6$ ,  $q \neq 5$ .

Supongamos ahora que  $G$  contiene un elemento loxodrómico  $g$ . Conjugando, podemos suponer que  $g$  fija 0 e  $\infty$ , es decir,  $g(z) = \alpha z$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $|\alpha| \neq 1$ . Como  $G$  es de Tipo 2, todo elemento de  $G$  fija 0 (o  $\infty$ ), y en consecuencia, se sigue del Teorema 2.4 que  $G$  no tiene elementos parabólicos. Con la notación de la Definición 2.3 para el multiplicador de  $g$ , consideremos el homomorfismo  $\theta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\theta(g) = |\alpha_g|$ . En esta ocasión,  $E = \ker(\theta)$  consiste de las transformaciones elípticas de  $G$ . Dado que  $G$  es discreto, puede mostrarse como antes que  $E$  es cíclico finito, generado por alguna  $T(z) = e^{2\pi i/q} z$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Consideremos ahora el conjunto de imágenes  $\{|\alpha_g| : g \in G\}$ . Este conjunto no se puede acumular en 1. En efecto, supongamos que existe una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 1$ . Se sigue entonces que existen transformaciones distintas  $g_n(z) = \alpha_n z$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |\alpha_n| + \frac{1}{|\alpha_n|} \right) = 2,$$

y esto contradice de nuevo el Corolario 1.11, y por tanto,  $G$  no puede ser discreto. Podemos entonces definir  $\lambda = \min \{|\alpha_g| > 1\}$ .

**Afirmación.**  $\theta(G) = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$ .

**DEMOSTRACION.** Supongamos que existe  $\mu \in \theta(G)$  que no es potencia entera de  $\lambda$ . Existe entonces  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\lambda^m < \mu < \lambda^{m+1}$ . Pero esto es equivalente a  $1 < \mu\lambda^{-m} < \lambda$ , y entonces  $\mu\lambda^{-m} \in \theta(G)$ , lo cual contradice la elección de  $\lambda$ .  $\square$

Sea  $g \in G$  con multiplicador  $\alpha$  ( $|\alpha| = \lambda$ ), y denotemos con  $G'$  al grupo generado por  $g$ . Por la sucesión exacta,  $G$  tiene una descomposición en clases laterales  $\bigcup_{k=0}^{q-1} T^k G'$ , y todos los elementos de  $G$  son de la forma  $g(z) = \omega^k \alpha^n z$ ,  $\omega = e^{2\pi i/q}$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , y  $n \in \mathbb{Z}$ . En este caso,  $G$  es infinito.

### 2.3 Grupos elementales discretos de Tipo 3

Consideremos ahora el grupo elemental discreto de Tipo 3. Conjugando, podemos suponer que el grupo  $G$  deja invariante el conjunto  $\{0, \infty\}$ . Si denotamos por  $G_0$  al subgrupo de  $G$  que deja fijos a 0 e  $\infty$ , entonces  $G_0$  es de Tipo 2. Si  $G = G_0$ , no hay nada por hacer, así que podemos suponer que  $G_0$  es subgrupo propio de  $G$ . Entonces, existe  $h \in G$  tal que  $h(0) = \infty$ ,  $h(\infty) = 0$ . Cualquier transformación que cumple esta condición es de la forma  $h(z) = \frac{b}{z}$ . A continuación, vamos a mostrar que podemos escoger  $h(z) = \frac{1}{z}$ . En efecto, conjugemos  $h$  con  $g(z) = \sqrt{b}z$ ,

$$g^{-1}hg(z) = g^{-1}h(\sqrt{b}z) = g^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{b}z}\right) = g^{-1}\left(\frac{\sqrt{b}}{z}\right) = \frac{1}{z}.$$

Sólo basta observar que  $g$  deja fijos 0 e  $\infty$ , con lo que la afirmación queda demostrada.

Si  $f \in G$  intercambia  $\{0, \infty\}$ , entonces  $hf \in G_0$  y por tanto  $G_0$  tiene índice 2 en  $G$ . Se concluye que  $G$  tiene una descomposición en clases laterales  $G_0 \cup G_0 h$ . Por tanto, cualquier elemento de  $G$  es de la forma  $g(z) = \omega^k \alpha^n z$ , o  $g(z) = \frac{\omega^k \alpha^n}{z}$ , con  $\omega = e^{2\pi i/q}$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , y  $n \in \mathbb{Z}$ .

Con esto terminamos la clasificación de todos los grupos elementales discretos.

*Observación 2.2.* Algunos autores usan otra clasificación. Por ejemplo, en [13], p. 180-188, se clasifican los grupos elementales en elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Esta última clasificación es excluyente, a diferencia de la presentada en esta tesis, como muestran los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos las transformaciones  $f(z) = e^{2\pi i/n}z$ , y  $h(z) = \frac{1}{z}$ .

- (a)  $G = \langle f \rangle \approx \mathbb{Z}_n$ .  $G$  es de Tipo 1 ya que fija  $(0, 0, 1) \in H^3$ , y es de Tipo 2 pues tiene una órbita de longitud 1 en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (b)  $G = \langle f, h \rangle \approx D_{2n}$ .  $G$  es de Tipo 1 por tener un punto fijo en  $H^3$ , y es de Tipo 3 pues tiene una órbita de longitud 2 en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Mostramos otros ejemplos de grupos elementales.

**Ejemplo 2.3.** Sean  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  elípticas de orden 2. Entonces el grupo  $G = \langle f, g \rangle$  es elemental. Para mostrar esto, supongamos que  $f$  y  $g$  no tienen puntos fijos en común, pues en este caso claramente  $G$  es elemental. Dado  $\alpha$  punto fijo de  $fg$ , el conjunto  $\{\alpha, g(\alpha), f(\alpha)\}$  es una  $G$ -órbita finita. Esto es consecuencia de que cualquier elemento  $h \in G$  es de la forma  $g(fg)^k, (fg)^k f, (fg)^k$ , o  $(gf)^k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Se tiene entonces que  $g(fg)^k(\alpha) = g(\alpha)$ ,  $(fg)^k f = f(gf)^k(\alpha) = f(\alpha)$ ,  $(fg)^k(\alpha) = \alpha$ ,  $(gf)^k(\alpha) = \alpha$ . por lo que  $G$  es elemental.

Obsérvese que el grupo  $G$  así construido no necesariamente es discreto, como se muestra enseguida.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $\varphi$  irracional, y consideremos las transformaciones  $f(z) = -z$ , y  $g(z) = \frac{(\cos \varphi \pi) z + \sin \varphi \pi}{(\sin \varphi \pi) z - \cos \varphi \pi}$ . Es claro que ambas son elípticas de orden 2, y además

$$gf(z) = g(-z) = \frac{-\cos \varphi \pi z + \sin \varphi \pi}{-\sin \varphi \pi z - \cos \varphi \pi} = \frac{(\cos \varphi \pi) z - \sin \varphi \pi}{(\sin \varphi \pi) z + \cos \varphi \pi}.$$

Como  $\text{tr}^2(gf) = 4 \cos^2 \varphi \pi = \text{tr}^2(h)$ , donde  $h(z) = e^{2\varphi \pi i} z$ .  $gf$  es conjugada a  $h$  por el Teorema 1.12. y por tanto,  $gf$  es de orden  $\infty$ . Se sigue entonces que  $G$  no puede ser discreto.

Este ejemplo muestra también que si se toman  $f$  y  $g$  de manera adecuada,  $gf$  puede tener cualquier orden que escojamos previamente.

El último resultado del Capítulo se refiere al comportamiento de un tipo particular de grupos elementales de Tipo 2.

**Proposición 2.5.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  un grupo elemental con elementos parabólicos. Si el subgrupo de elementos parabólicos es cíclico, entonces cualquier elemento elíptico es de orden 2.

**DEMOSTRACIÓN.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto fijo de los elementos parabólicos es  $\infty$ . Sea  $f(z) = \alpha z$  un elemento elíptico, es decir.  $|\alpha| = 1$ , con  $\alpha \neq 1$ . Si  $g(z) = z + t$  es generador de  $T$ , entonces

$$fgf^{-1}(z) = fg(\alpha^{-1}z) = f(\alpha^{-1}z + t) = \alpha(\alpha^{-1}z + t) = z + \alpha t.$$

Como  $fgf^{-1}$  es parabólica. se tiene que  $fgf^{-1} = g^k$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ , por lo que  $fgf^{-1}(z) = z + kt$ . Por tanto,  $\alpha = -1$ , y  $f$  es de orden 2.  $\square$

Con este resultado, terminamos la discusión sobre los grupos elementales. En el siguiente Capítulo, comenzaremos a estudiar los grupos no elementales.

### 3 Grupos no elementales y grupos discontinuos

En el presente capítulo, estudiaremos el concepto de acción discontinua de un subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en  $H^3$  y en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Consideraremos principalmente el caso de los subgrupos no elementales.

#### 3.1 Grupos no elementales

Comenzamos el Capítulo con un resultado que nos proporciona una condición necesaria para que un grupo sea no elemental. También, este Teorema nos muestra qué tan complejos son estos grupos.

**Teorema 3.1.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental. Entonces, existe una familia infinita de elementos loxodrómicos, tales que cualesquiera  $f, g$  en esta familia no tienen puntos fijos en común.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $G$  no elemental, y supongamos que no contiene elementos loxodrómicos. Necesariamente,  $G$  contiene al menos un elemento parabólico  $f$  (pues de no ser así,  $G$  consistiría sólo de elementos elípticos y la identidad, y por el Teorema 1.16, sería elemental de Tipo 1). Después de conjugar, podemos suponer que  $f$  es la traslación  $f(z) = z + 1$ . Si consideramos a  $g \in G$ ,  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc = 1$ , se tiene que

$$f^n g(z) = \frac{az + b}{cz + d} + n = \frac{az + b + n(cz + d)}{cz + d} = \frac{(a + nc)z + b + nd}{cz + d}, \quad y$$

$$\text{tr}^2(f^n g) = (a + d + nc)^2.$$

Dado que  $f^n g$  no es loxodrómica, se sigue que para toda  $n$ ,  $\text{tr}^2(f^n g)$  es real y

$$0 \leq (a + d + nc)^2 \leq 4,$$

lo que implica que  $c = 0$ . Entonces cualquier elemento de  $G$  fija a  $\infty$ , y por tanto,  $G$  es elemental, lo que contradice nuestra hipótesis, y hemos mostrado que  $G$  necesariamente contiene elementos loxodrómicos.

Para demostrar el Teorema, sea  $g \in G$  loxodrómica con puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ . Dado que  $G$  es no elemental, existe  $f \in G$  tal que no deja invariante al conjunto  $\{\alpha, \beta\}$ . De esto se derivan dos casos:

- (i)  $\{\alpha, \beta\}$  y  $\{f(\alpha), f(\beta)\}$  son ajenos, o
- (ii)  $\{\alpha, \beta\}$  y  $\{f(\alpha), f(\beta)\}$  tienen exactamente un punto fijo en común.

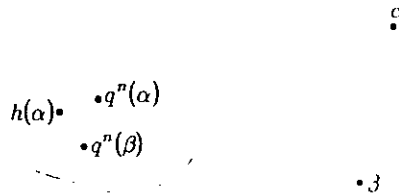
En (i),  $g$  y  $g_1 = f g f^{-1}$  son loxodrómicas sin puntos fijos en común. Se sigue que para toda  $n \in \mathbb{N}$ , las transformaciones  $g^n g_1 g^{-n}$  no tienen puntos fijos en común con  $g$  (los puntos fijos de  $g^n g_1 g^{-n}$  son  $g^n f(\alpha)$  y  $g^n f(\beta)$ ), y esta es la familia infinita que se buscaba.

En (ii),  $g$  y  $g_1 = f g f^{-1}$  tienen exactamente un punto fijo en común (digamos  $\alpha$ ). Por el Teorema 1.14 (ii) (b),  $p = [g, g_1]$  es parabólica con punto fijo  $\alpha$ . Por ser  $G$  no elemental, existe  $h \in G$  tal que  $h(\alpha) \neq \alpha$  y por tanto,  $q = h p h^{-1}$  es parabólica y no fija a  $\alpha$ . Tenemos pues dos subcasos:

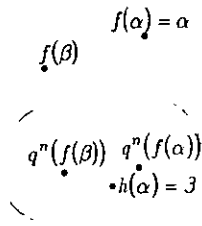
(a)  $h(\alpha) \neq \beta$ ;

(b)  $h(\alpha) = \beta$ .

En (a), puesto que el punto fijo de  $q$  es  $h(\alpha)$ , que es distinto de  $\alpha$  y de  $\beta$ , se sigue del Teorema 1.17 (i) que  $q^n(\alpha) \rightarrow h(\alpha)$ ,  $q^n(\beta) \rightarrow h(\alpha)$ , por lo que para  $n \geq n_0$ ,  $q^n(\alpha) \neq \alpha$ ,  $q^n(\beta) \neq \beta$ , y podemos aplicar (i) a  $g$  y  $q^n g q^{-n}$ .



En (b), dado que  $g$  y  $q$  tienen un punto fijo en común ( $h(\alpha) = \beta$ ), basta observar que los puntos fijos de  $g_1 = f g f^{-1}$  son  $f(\alpha) = \alpha$  y  $f(\beta) \neq \beta$ .



Como antes, se sigue del Teorema 1.17 (i) que  $q^n(\alpha) \rightarrow h(\alpha)$ ,  $q^n(f(\beta)) \rightarrow h(\alpha)$ , y por tanto existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$ ,  $q^n(f(\alpha)) \neq f(\alpha)$ , y  $q^n(f(\beta)) \neq f(\beta)$ , y podemos aplicar (i) a  $g_1$  y  $q^n g_1 q^{-n}$ . □

El Teorema anterior describe a los grupos no elementales. Más aún, exhibe otra caracterización de los grupos elementales.



**Proposición 3.2.** *Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es elemental si y sólo si para cualesquiera  $f, g \in G$ , el grupo  $\langle f, g \rangle$  es elemental.*

DEMOSTRACION.  $\Rightarrow$ ) Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  elemental. Entonces existe una  $G$ -órbita finita  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Como la órbita de  $x_1$  bajo  $\langle f, g \rangle$  es un subconjunto de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\langle f, g \rangle$  es elemental.

$\Leftarrow$ ) Por el Teorema 3.1, si  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es no elemental, entonces existen  $f, g \in G$  loxodrómicas sin puntos fijos en común, lo que implica que cualquier órbita es infinita, y por tanto,  $\langle f, g \rangle$  es no elemental.  $\square$

## 3.2 Grupos discontinuos

Un concepto importante en el presente trabajo es el de grupo discontinuo. La definición precisa de este concepto es la siguiente.

**Definición 3.1.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  en  $X$ .  $G$  actúa discontinuamente en  $X$  si y sólo si dado cualquier conjunto compacto  $K \subset X$ , se tiene que  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  para solamente un número finito de elementos de  $G$ .

La siguiente proposición nos proporciona una serie de criterios para decidir si existe o no una acción discontinua.

**Proposición 3.3.** *Sean  $X$  un espacio métrico y  $G$  un grupo que actúa discontinuamente en  $X$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) *Todo subgrupo  $H < G$  actúa discontinuamente en  $X$ .*
- (ii) *Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces  $\varphi G \varphi^{-1}$  actúa discontinuamente en  $Y$ .*
- (iii) *Si  $Y \subset X$  es un conjunto  $G$ -invariante, entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $Y$ .*
- (iv) *Si  $x \in X$  y  $g_1, g_2, \dots$  es una colección de elementos distintos de  $G$ , entonces la sucesión  $g_1(x), g_2(x), \dots$  no puede converger a ninguna  $y \in X$ .*
- (v) *Si  $x \in X$ , entonces el estabilizador  $G_x$  es finito.*
- (vi) *Si  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces  $G$  es a lo sumo numerable.*

DEMOSTRACION. (i) Se sigue inmediatamente de la definición.

(ii) Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Cualquier  $K' \subset Y$  compacto es la imagen bajo  $\varphi$  de un compacto  $K \subset X$  ( $K = \varphi^{-1}(K')$ ). Se tiene entonces

$$\varphi g \varphi^{-1}(K') \cap K' = \varphi g(K) \cap \varphi(K) = \varphi(g(K) \cap K). \quad (3.1)$$

Por hipótesis,  $G$  actúa discontinuamente en  $X$ , es decir,  $g(K) \cap K = \emptyset$  para casi toda  $g \in G$ , por lo que se sigue de (3.1) que  $\varphi G\varphi^{-1}$  actúa discontinuamente en  $Y$ .

(iii) Si  $Y \subset X$ , no es difícil mostrar que cualquier compacto  $K \subset Y$  es compacto en  $X$ , por lo que esta parte se sigue inmediatamente de la definición.

(iv) Supongamos que para  $x, y \in X$ , la sucesión  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$  converge a  $y$ . Entonces el conjunto  $K = \{y, x, g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots\}$  es compacto. Por hipótesis, los  $g_n$  son distintos, y  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$  para toda  $n$ , por lo que  $G$  no puede actuar discontinuamente en  $X$ .

(v) Para toda  $x \in X$ ,  $\{x\}$  es compacto, y de la Definición 3.1,  $G_x$  es necesariamente finito.

(vi) Por la Proposición 1.1, existe una correspondencia biyectiva entre las clases laterales de  $G/G_x$  y la órbita  $G(x)$ . Dado que  $G_x$  es finito,  $G$  es a lo sumo numerable si y sólo si  $G(x)$  lo es. Supongamos que  $G(x)$  no es numerable.

**Afirmación.** *Si  $G(x)$  no es numerable, entonces tiene un punto de acumulación  $y \in \mathbb{R}^n$ .*

**DEMOSTRACION DE LA AFIRMACION.** Supongamos que todos los puntos de  $G(x)$  son aislados. Entonces, para cada  $v \in G(x)$ , podemos elegir vecindades  $N(v, \varepsilon_v)$  tales que  $N(v, \varepsilon_v) \cap N(u, \varepsilon_u) = \emptyset$ , si  $u \neq v$ . Ahora, en cada una de estas vecindades, escogemos un punto con coordenadas racionales, y ponemos en correspondencia el centro de la vecindad con este punto. Pero esto es absurdo, pues para toda  $n$ , el conjunto de puntos con coordenadas racionales en  $\mathbb{R}^n$  es numerable. Por tanto,  $G(x)$  tiene al menos un punto de acumulación.  $\square$

Una vez que hemos mostrado que  $G(x)$  tiene un punto de acumulación  $y$ , podemos extraer una sucesión  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$  que converge a  $y$ , por lo que  $G$  no puede actuar discontinuamente en  $X$ .  $\square$

En lo que sigue, consideraremos a  $X$  como un subespacio de  $\widehat{\mathbb{R}}^3$  con la topología inducida por la métrica euclidea.

### 3.3 Grupos Kleinianos

El siguiente teorema establece la relación entre los subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  y la acción discontinua en  $H^3$ .

**Teorema 3.4.** *Un subgrupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y sólo si actúa discontinuamente en  $H^3$ .*

**DEMOSTRACION.**  $\Rightarrow$  Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  discreto. Entonces  $G$  es a lo más numerable (Corolario 1.7). Si  $G$  es finito, se sigue inmediatamente de la Definición 3.1 que  $G$  actúa discontinuamente en  $H^3$ , por lo que podemos suponer que  $G$  no es finito, es decir

$$G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}.$$

Como  $G$  es discreto, se tiene del Corolario 1.8 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = \infty$ , y por el Corolario 1.11,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(j, g_n(j)) = \infty. \tag{3.2}$$

Consideremos ahora un compacto  $K \subset H^3$ . Existe una bola hiperbólica

$$B = \{x \in H^3 : \rho(x, j) < k\}$$

tal que  $K \subset B$ .



Si  $g(K) \cap K \neq \emptyset$ , entonces  $g(B) \cap B \neq \emptyset$ , y se sigue de la desigualdad del triángulo que

$$\rho(j, g(j)) < 2k.$$

Por (3.2), esto sólo puede ocurrir para un número finito de elementos  $g \in G$ , y se sigue que  $G$  actúa discontinuamente en  $H^3$ .

$\Leftrightarrow$  Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  un grupo que actúa discontinuamente en  $H^3$  (o en un abierto conexo de  $\widehat{\mathbb{C}}$ ), y supongamos que  $G$  no es discreto. Se sigue entonces que existen matrices  $A_1, A_2, A_3, \dots \in SL(2, \mathbb{C})$ , que determinan elementos distintos de  $G$ :  $g_{A_1}, g_{A_2}, g_{A_3}, \dots$ , tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = I$ . Pero esto implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{A_n}(x) = x$  para toda  $x \in H^3$ , y esto contradice el resultado de la Proposición 3.3 (iv), por lo que el grupo no puede actuar discontinuamente en  $H^3$ . Por tanto,  $G$  es discreto.  $\square$

**Definición 3.2.** Un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{C})$  recibe el nombre de *kleiniano*.

De la demostración anterior, se deduce una relación entre grupos discretos y acción discontinua en subconjuntos abiertos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Corolario 3.5.** Si  $G$  es un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  que actúa discontinuamente en algún abierto no vacío  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $G$  es discreto.  $\square$

Desafortunadamente, el inverso es falso. Existen grupos discretos que no actúan discontinuamente en ningún abierto no vacío de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . El siguiente lema establece un criterio que excluye la posibilidad de una acción discontinua, lo cual nos permitirá mostrar un ejemplo.

**Lema 3.6.** Sean  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  y  $D \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  un abierto conexo que contiene un punto fijo  $v$  de algún elemento parabólico o loxodrómico  $g$  de  $G$ . Entonces  $G$  no actúa discontinuamente en  $D$ .

**DEMOSTRACION.** Si  $g$  es parabólica o loxodrómica, el estabilizador  $G_v$  contiene las iteraciones  $g^n$ , por lo que es infinito, y por la Proposición 3.3 (v),  $G$  no puede actuar discontinuamente en  $D$ .  $\square$

**Ejemplo 3.1.** El anillo de los enteros gaussianos es el conjunto:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Se define el grupo de Picard como el conjunto de las transformaciones de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i], \quad ad - bc = 1.$$

Claramente  $G$  es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Sea  $w = \frac{p+iq}{r}$ , con  $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 0$ . Como el conjunto de estos complejos es precisamente  $\mathbb{Q} \times \frac{r}{\mathbb{Q}}$ , se tiene que es denso en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Consideremos ahora la transformación

$$h(z) = \frac{(1 - wr^2)z + r^2w^2}{-r^2z + 1 + wr^2}.$$

Se tiene que  $\text{tr}(h) = 1 - wr^2 + 1 + wr^2 = 2$ , y  $\det(h) = 1 - w^2r^4 + r^4w^2 = 1$ , por lo que  $h \in G$ , es parabólica y

$$h(w) = \frac{(1 - wr^2)w + r^2w^2}{-r^2w + 1 + wr^2} = w.$$

Se sigue del Lema 3.6 que  $G$  no puede actuar discontinuamente en ningún abierto no vacío de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

### 3.4 Los conjuntos límite y ordinario

Nuestro objetivo actual es estudiar la situación en que un grupo discreto actúa discontinuamente en algún abierto no vacío de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Puesto que la siguiente discusión estará basada en los puntos fijos de los elementos loxodróxicos de  $G$ , primero veremos el caso de los grupos no elementales, y más adelante, trataremos la situación de los grupos elementales.

El siguiente resultado establece un criterio para localizar los puntos fijos de los elementos loxodróxicos.

**Lema 3.7.** Sean  $\Sigma$  un disco abierto en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Suponga que  $g(\overline{\Sigma}) \subset \Sigma$ . Entonces  $g$  es loxodrómica y tiene un punto fijo  $v \in g(\overline{\Sigma})$ .

**DEMOSTRACION.** Por la hipótesis  $g(\overline{\Sigma}) \subset \Sigma$ , los puntos fijos de  $g$  no están en  $\partial\Sigma$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $g(\infty) = \infty$ , con lo que  $\partial\Sigma$  es un círculo euclideo. Si  $g$  es elíptica o parabólica,  $g$  es una isometría euclidea (pues estamos suponiendo que fija a  $\infty$ ), y no puede ser que  $g(\overline{\Sigma}) \subset \Sigma$ , por lo que  $g$  es necesariamente loxodrómica. Para cualquier  $w$  que no es punto fijo de  $g$ , las imágenes de las iteraciones  $g^n(w)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , se acumulan en los puntos fijos de  $g$  (Teorema 1.17 (ii)). Si  $w \in \Sigma$ ,  $g^n(w) \in g(\overline{\Sigma})$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ , por lo que existe un punto fijo  $v \in g(\overline{\Sigma})$ .  $\square$

Con este resultado, estamos listos para estudiar la acción discontinua en subconjuntos abiertos y conexos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 3.3.** Sean  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental (no necesariamente discreto), y  $\Lambda_0$  el conjunto de puntos fijos de las transformaciones loxodrómicas de  $G$ . A la cerradura de  $\Lambda_0$  se le llama el *conjunto límite* de  $G$ , y se le denota  $\Lambda(G)$ . El *conjunto ordinario* de  $G$ ,  $\Omega(G)$ , es el complemento de  $\Lambda(G)$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Normalmente, escribiremos  $\Lambda$  y  $\Omega$  sin mención explícita del grupo  $G$ . El siguiente lema nos muestra la relación que existe entre los conjuntos límite de un grupo y de sus grupos conjugados.

**Lema 3.8.** Sean  $G < PSL(2, \mathbb{C})$ , y  $h \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Entonces  $\Lambda(hGh^{-1}) = h(\Lambda(G))$ .

**DEMOSTRACION.** Sea  $w \in h(\Lambda(G))$ , es decir,  $h^{-1}(w) \in \Lambda(G)$ . Existen  $w_1, w_2, \dots \in \Lambda_0(G)$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = h^{-1}(w)$ . Como cada  $w_n$  es punto fijo de  $g_n \in G$  loxodrómica, se sigue que  $hg_n h^{-1}$  es loxodrómica y fija a  $h(w_n)$ . Esto implica que  $h(w_n) \in \Lambda_0(hGh^{-1})$ . Además, por continuidad,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(w_n) = w$ , por lo que  $w \in \Lambda(hGh^{-1})$ .

Inversamente, supongamos que  $w \in \Lambda(hGh^{-1})$ . Entonces existen  $w_1, w_2, \dots \in \Lambda_0(hGh^{-1})$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ . De nuevo, cada  $w_n$  es punto fijo de  $hg_n h^{-1}$  loxodrómica, por lo que  $g_n$  es loxodrómica y fija a  $h^{-1}(w_n)$ . Por tanto,  $h^{-1}(w_n) \in \Lambda_0(G)$ , y por continuidad,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{-1}(w_n) = h^{-1}(w)$ , de donde se sigue que  $h^{-1}(w) \in \Lambda(G)$ , es decir,  $w \in h(\Lambda(G))$ .  $\square$

**Teorema 3.9.** Para cualquier grupo no elemental  $G < PSL(2, \mathbb{C})$ , el conjunto límite  $\Lambda$  es el mínimo conjunto cerrado no vacío  $G$ -invariante. Además,  $\Lambda$  es perfecto.

**DEMOSTRACION.** Por el Teorema 3.1, cualquier grupo no elemental  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  contiene elementos loxodrómicos, por lo que  $\Lambda \neq \emptyset$ . Además, por definición,  $\Lambda$  es cerrado. Para mostrar que  $\Lambda$  es  $G$ -invariante, sea  $w \in \Lambda_0$ , es decir, existe  $h \in G$  que fija a  $w$ . Para cualquier  $g \in G$ ,  $g(w)$  es punto fijo de  $ghg^{-1}$ , por lo que  $g(\Lambda_0) \subset \Lambda_0$ , y esto muestra que  $\Lambda_0$ , y por tanto  $\Lambda$ , es  $G$ -invariante.

Sea  $E \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  un cerrado no vacío  $G$ -invariante. Puesto que  $G$  es no elemental, cualquier órbita es infinita, y por tanto,  $E$  es infinito. Sean  $g \in G$  loxodrómica y  $v$  uno de sus puntos fijos. Consideremos  $w \in E$  que no es fijado por  $g$ . La órbita  $\{g^n(w) : n \in \mathbb{Z}\}$  se acumula en los puntos fijos de  $g$  (Teorema 1.17 (ii)). Dado que  $E$  es cerrado,  $v \in E$  y  $\Lambda_0 \subset E$ . Entonces  $\Lambda \subset E$ , y por tanto,  $\Lambda$  es el mínimo conjunto cerrado que es  $G$ -invariante.

Para mostrar que  $\Lambda$  es perfecto, es suficiente mostrar que  $\Lambda_0$  no tiene puntos aislados. o equivalentemente, que cualquier  $u \in \Lambda_0$  es punto de acumulación. Pero entonces el argumento anterior (considerando  $w \in \Lambda_0$ ) muestra que todos los puntos de  $\Lambda_0$  son de acumulación, por lo que  $\Lambda$  es perfecto.  $\square$

Si consideramos la hipótesis adicional de que el grupo  $G$  sea discreto, el Teorema anterior nos muestra que el conjunto numerable  $\Lambda_0$  es denso en el conjunto perfecto (y por tanto, no numerable)  $\Lambda$ . El siguiente ejemplo muestra que sin esta hipótesis,  $\Lambda_0$  puede ser no numerable.

**Ejemplo 3.2.** Si consideramos  $G = PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $G$  es no elemental y claramente, no es discreto. Dado  $w \in \mathbb{C}$ , siempre podemos encontrar  $f \in G$  loxodrómica con punto fijo  $w$ . En efecto, si  $h(z) = z - w$ , y  $g(z) = kz$ , con  $|k| \neq 0, 1$ , entonces  $f = h^{-1}gh$  es loxodrómica y fija a  $w$ , lo cual muestra que, en este caso,  $\Lambda_0 = \widehat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.10.** Sean  $G$  subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental, y  $O_1, O_2$  abiertos ajenos que intersectan a  $\Lambda$ . Entonces existe  $g \in G$  loxodrómica con un punto fijo en  $O_1$  y un punto fijo en  $O_2$ .

**DEMOSTRACION.** Por definición,  $\Lambda$  es la cerradura del conjunto de puntos fijos de las transformaciones loxodrómicas de  $G$ , por lo que existen  $p, q \in G$  loxodrómicas, tales que  $p$  tiene un atractor en  $O_1$  y  $q$  tiene un atractor en  $O_2$ . Por el Teorema 3.1 sabemos que existe  $f \in G$  loxodrómica con puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y que ninguno de ellos es fijado por  $p$ . Supongamos que  $\alpha$  es el atractor de  $f$ , y que  $\beta$  es el repulsor.

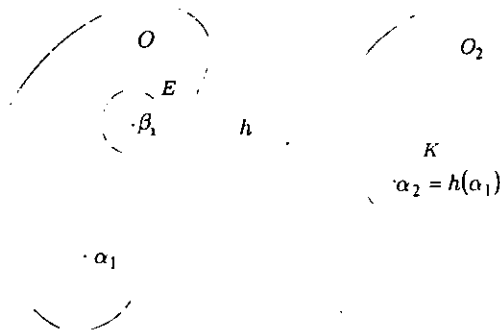
Para toda  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $g_m = p^m f p^{-m}$ . Los puntos fijos de  $g_m$  son  $p^m(\alpha)$  y  $p^m(\beta)$ . y como  $p$  no fija a  $\alpha$  ni a  $\beta$ , existe  $m_0 > 0$  tal que si  $m \geq m_0$ ,  $p^m(\alpha), p^m(\beta) \in O_1$ . Sean  $g = p^{m_0} f p^{-m_0}$ ,  $\alpha_1 = p^{m_0}(\alpha)$  y  $\beta_1 = p^{m_0}(\beta)$ . Es inmediato notar que  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son el atractor y el repulsor de  $g$  respectivamente.

Por otra parte, como  $q$  tiene un atractor en  $O_2$ ,  $q^r(\alpha_1) \in O_2$  para  $r$  suficientemente grande. Para esta  $r$ , escribimos  $h = q^r$  y  $\alpha_2 = h(\alpha_1)$ .

Como  $O_1, O_2$  son abiertos, podemos escoger discos abiertos  $E, K$  tales que

$$\beta_1 \in E \subset \overline{E} \subset O_1,$$

$$\alpha_2 \in K \subset \overline{K} \subset O_2.$$



Como el repulsor de  $g$ ,  $\beta_1 \notin \overline{K}$ , se sigue del Teorema 1.17 (ii) que  $g^n(z) \rightarrow \alpha_1$  uniformemente en  $\overline{K}$ . Además, como  $h^{-1}(K)$  es una vecindad abierta de  $\alpha_1$ , existe  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $g^n(\overline{K}) \subset h^{-1}(K)$ , es decir,

$$hg^n(\overline{K}) \subset K. \tag{3.3}$$

Por otra parte,  $\alpha_2 = h(\alpha_1) \notin \overline{E}$ , lo que implica que el atractor de  $g$ ,  $\alpha_1 \notin h^{-1}(\overline{E})$ . De nuevo, se sigue del Teorema 1.17 (ii) que  $g^{-n}(z) \rightarrow \beta_1$  uniformemente en  $h^{-1}(\overline{E})$ . Además, se eligió  $E$  de manera que fuera una vecindad abierta de  $\beta_1$ , por lo que existe  $n_1$  tal que si  $n \geq n_1$ ,

$$g^{-n}h^{-1}(\overline{E}) \subset E. \tag{3.4}$$

Sea  $n = \max(n_0, n_1)$ . Con  $n$  así determinada, se cumplen las contenciones (3.3) y (3.4). Se sigue del Lema 3.7 que  $hg^n$  es loxodrómica con un punto fijo en  $K$ , y que  $g^{-n}h^{-1} = (hg^n)^{-1}$  tiene un punto fijo en  $E$ .  $\square$

En los Teoremas 3.9 y 3.10 no se hizo ningún supuesto sobre si el grupo era o no discreto. Si se añade esta hipótesis, veremos en el Teorema 3.13 que podemos describir al conjunto límite  $\Lambda$  en términos de cualquier órbita  $G(z)$ . Como preparativo necesitamos una definición.

**Definición 3.4.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$ . Para  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\Lambda_G(z)$  es el conjunto de los puntos  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  con la propiedad de que existe una colección de transformaciones distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = w$ .

*Observación 3.1.* De acuerdo a la definición anterior, es claro que  $\Lambda_G(z) \subset \overline{G(z)}$ . Además, es importante observar que no se pide que las imágenes  $g_n(z)$  sean distintas. Por lo general, escribiremos  $\Lambda(z)$ .

En el Lema 3.8 se estableció la relación entre los conjuntos límite  $\Lambda(G)$  y  $\Lambda(hGh^{-1})$ . De manera análoga, el Lema 3.11 establece la relación entre  $\Lambda_G(z)$  y  $\Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$ .

**Lema 3.11.** Sean  $G < PSL(2, \mathbb{C})$ , y  $h \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Entonces  $\Lambda_{hGh^{-1}}(h(z)) = h(\Lambda_G(z))$ .

**DEMOSTRACION.** Sea  $w \in \Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$ . Por la Definición 3.4, existe entonces una colección de transformaciones distintas  $hg_nh^{-1} \in hGh^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hg_nh^{-1}(h(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} hg_n(z) = w.$$

Se tiene entonces por continuidad que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = h^{-1}(w)$ , de donde se sigue que  $h^{-1}(w) \in \Lambda_G(z)$ . Por tanto  $w \in h(\Lambda_G(z))$ .

Inversamente, sea  $w \in h(\Lambda_G(z))$ , o equivalentemente,  $h^{-1}(w) \in \Lambda_G(z)$ . Esto es, existen distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = h^{-1}(w)$ . Se sigue entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} hg_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} hg_nh^{-1}(h(z)) = w$ , y como las transformaciones  $hg_nh^{-1} \in hGh^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  son distintas, esto implica que  $w \in \Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$ .  $\square$

En general, no sucede que  $\Lambda(z) = \Lambda$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ . El siguiente ejemplo muestra que si el grupo no es discreto, no se cumple la igualdad.

**Ejemplo 3.3.** Sean  $B^2$  el disco unitario,  $\mathbb{S}^1 = \partial B^2$ , y  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  el grupo que deja invariante a  $B^2$ , es decir,  $G = M(B^2)$  (Definición 1.13). Este grupo es no elemental, y como contiene cualquier rotación, no es discreto.

Sean  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \theta \leq 2\pi$ , y  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots\}$  una sucesión tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \theta$ . Por tanto, si  $g_k(z) = e^{i\varphi_k}z$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(r) = re^{i\theta} = w$ . Con esta información, junto con el hecho de que  $G$  es transitivo en  $B^2$  y en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B^2}$ , podemos concluir que:

$$\Lambda(z) = \begin{cases} B^2 & \text{si } z \in B^2, \\ \mathbb{S}^1 & \text{si } z \in \mathbb{S}^1, \\ \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B^2} & \text{si } z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B^2}. \end{cases}$$

Por otra parte, es fácil probar que si  $z \in \overline{B^2}$  es punto fijo de  $g \in G$  hiperbólica, entonces  $z \in \mathbb{S}^1$ , y viceversa, todo  $z \in \mathbb{S}^1$  es punto fijo de algún elemento hiperbólico  $g \in G$ , por lo que  $\Lambda = \mathbb{S}^1$ .

El siguiente Lema exhibe una constante de Lipschitz para transformaciones de Möbius en términos de la métrica cordal.

**Lema 3.12.** Sea  $K$  un conjunto compacto en una región  $D$  en  $\mathbb{C}$ , y  $F$  una familia de transformaciones de Möbius que omite los valores 0 e  $\infty$  en  $D$ . Entonces existe una constante  $m > 0$  tal que

$$d(g(z), g(w)) \leq \frac{md(z, w)}{\|g\|^2}$$

para todas  $z, w \in K$  y toda  $g \in F$ .



DEMOSTRACION. Sean  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc = 1$ , y  $m_1$  definido por

$$2m_1 = \inf \{d(z, w) : z \in K, w \notin D\}.$$

Por hipótesis,  $g^{-1}(\infty) \notin D$ . Si suponemos que  $c \neq 0$ , se sigue que para toda  $z \in K$ ,

$$\begin{aligned} 2m_1 &\leq d(z, g^{-1}(\infty)) = d(z, -d/c) = \frac{2|z + d/c|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |-d/c|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|cz + d|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (|c|^2 + |d|^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De manera análoga, suponiendo que  $a \neq 0$ ,  $g^{-1}(0) \notin D$ , y para toda  $z \in K$ ,

$$\begin{aligned} 2m_1 &\leq d(z, g^{-1}(0)) = d(z, -b/a) = \frac{2|z + b/a|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |-b/a|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|az + b|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que si  $c = 0$ , como  $ad = 1$ ,  $a = d = \pm 1$ , entonces

$$2m_1 \leq d(z, g^{-1}(\infty)) = d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}. \quad (3.7)$$

De la misma manera, si  $a = 0$ ,  $bc = 1$ ,  $b = c = \pm 1$ , y

$$2m_1 \leq d(z, g^{-1}(0)) = d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Se tiene que (3.7) es (3.5) si  $c = 0$ ,  $|a| = |d| = 1$ , y (3.8) es (3.6) con  $a = 0$ ,  $|b| = |c| = 1$ , respectivamente.

Después de elevar al cuadrado ambas desigualdades, y de reordenarlas, se obtiene

$$(1 + |z|^2) (|c|^2 + |d|^2) m_1^2 \leq |cz + d|^2, \quad (1 + |z|^2) (|a|^2 + |b|^2) m_1^2 \leq |az + b|^2.$$

Si se suman estas desigualdades, se tiene

$$(1 + |z|^2) \|g\|^2 m_1^2 \leq |cz + d|^2 + |az + b|^2,$$

y se sigue que para toda  $z \in K$ ,

$$\frac{(1 + |z|^2)^{1/2}}{(|cz + d|^2 + |az + b|^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{\|g\| m_1}. \quad (3.9)$$

Si  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ , entonces para todas  $z, w \in \mathbb{C}$  tales que  $g(z) \neq \infty$ ,  $g(w) \neq \infty$ ,

$$|g(z) - g(w)| = \left| \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)} \right|.$$

Esta identidad se estableció en la página 17. Esto nos permite establecer la siguiente igualdad, válida para toda  $z, w \in D$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d(g(z), g(w))}{d(z, w)} &= \frac{|g(z) - g(w)|}{(1 + |g(z)|^2)^{1/2} (1 + |g(w)|^2)^{1/2}} \times \frac{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |w|^2)^{1/2}}{|z - w|} \\ &= \frac{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |w|^2)^{1/2}}{(|cz + d|^2 + |az + b|^2)^{1/2} (|cw + d|^2 + |aw + b|^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

y por tanto, si  $z, w \in K$ , se sigue de (3.9) que  $d(g(z), g(w)) \leq \frac{d(z, w)}{m_1^2 \|g\|^2}$ .  $\square$

**Teorema 3.13.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  un grupo no elemental discreto. Entonces para toda  $z$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ .  $\Lambda = \Lambda(z)$ .*

**DEMOSTRACION.** Lo primero que mostraremos es que  $\Lambda(z)$  es un conjunto cerrado no vacío  $G$ -invariante. Para esto, sean  $g \in G$  loxodrómica que no fija a  $z$ , y  $\alpha$  el atractor de  $g$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda(z)$ . Por tanto,  $\Lambda(z)$  es no vacío. Además, si  $w \in \Lambda(z)$ , y  $g \in G$ , entonces existen, por definición, distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = w$ . Pero entonces se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} gg_n(z) = g(w)$ , y por tanto  $g(w) \in \Lambda(z)$ . Se sigue entonces que  $\Lambda(z)$  es  $G$ -invariante. Supongamos ahora que  $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión en  $\Lambda(z)$  que converge a  $w$ . Se tiene entonces que para cada  $w_n$  existen transformaciones distintas  $g_{n_k} \in G$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z) = w_n$ . Con esto, es fácil escoger una colección de elementos de  $G$  distintos tales que las imágenes de  $z$  converjan a  $w$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos escoger  $w_k \in \Lambda(z)$  tal que  $|w_k - w| < \varepsilon/2$ , y  $g_{m_k} \in G$  tal que  $|w_k - g_{m_k}(z)| < \varepsilon/2$ . Entonces  $|g_{m_k}(z) - w| \leq |w_k - g_{m_k}(z)| + |w_k - w| < \varepsilon$ . Esto lo podemos hacer para toda  $\varepsilon = 1/n$ , y como además los elementos  $g_{m_k} \in G$  se pueden tomar distintos, se tiene  $w \in \Lambda(z)$ , y por tanto  $\Lambda(z)$  es cerrado. Se sigue entonces del Teorema 3.9 que  $\Lambda \subset \Lambda(z)$ .

Para probar que de hecho se tiene la igualdad, consideramos dos casos:

(i)  $z \in \Lambda$ .

(ii)  $z \in \Omega$ .

(i) En este caso,  $G(z) \subset \Lambda$ . Se sigue de la Observación 3.1 que  $\Lambda(z) \subset \overline{G(z)} \subset \Lambda$ , y por tanto,  $\Lambda = \Lambda(z)$ .

(ii) Sean ahora  $z \in \Omega$ , y  $w \in \Lambda(z)$ . Para mostrar que  $w \in \Lambda$ , supongamos que no es así, es decir,  $w \in \Omega$ . Dado que  $\Omega$  es abierto, podemos tomar un disco abierto  $Q$  tal que

$$w \in Q \subset \bar{Q} \subset \Omega.$$

Aquí, vamos a dividir la demostración en dos subcasos:

- (a)  $0, \infty \in \Lambda$ ,
- (b)  $0$  (o  $\infty$ )  $\notin \Lambda$ .

Vamos a demostrar (a), y veremos más adelante que (b) se puede deducir de (a).

Si  $0, \infty \in \Lambda$ ,  $K = \bar{Q} \cup \{z\}$  es compacto, y por el Lema 3.12,

$$d(g(z), g(z')) \leq \frac{md(z, z')}{\|g\|^2} \leq \frac{m'}{\|g\|^2}, \tag{3.10}$$

para toda  $z' \in \bar{Q}$  y toda  $g \in G$ .

Dado que  $w \in \Lambda(z)$ , existen distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $g_n(z) \rightarrow w$ . Además, como  $G$  es discreto, se sigue del Corolario 1.8 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^2 = \infty$ . Y finalmente, (3.10) implica que  $g_n(z) \rightarrow w$  uniformemente en  $\bar{Q}$ . Es decir, existe  $n_0 > 0$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $g_n(\bar{Q}) \subset Q$ , y por el Lema 3.7,  $g_n$  es loxodrómica con un punto fijo  $v \in g_n(\bar{Q})$ , es decir,  $Q \cap \Lambda \neq \emptyset$ , lo cual es absurdo, y se sigue por tanto que  $w \in \Lambda$  y  $\Lambda(z) \subset \Lambda$ .

Mostraremos ahora (b). Si  $0, (o \infty) \notin \Lambda$ , sean  $u, v \in \Lambda$ , y conjugemos al grupo  $G$  con  $h(z) = \frac{z-u}{z-v}$ . Para el grupo  $hGh^{-1}$ , se sigue de (a) que  $\Lambda(hGh^{-1}) = \Lambda_{hGh^{-1}}(h(z))$ , y los lemas 3.8 y 3.11 implican que  $h(\Lambda(G)) = h(\Lambda_G(z))$ , y por tanto,  $\Lambda(G) = \Lambda_G(z)$ .  $\square$

**Corolario 3.14.** *Sea  $G$  subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto. Si  $\Lambda \neq \hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $\Lambda$  en ninguna parte es denso.*

**DEMOSTRACION.** Por el Teorema 3.13,  $\Lambda = \Lambda(z)$  para toda  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ . Como  $\Lambda \neq \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\Omega \neq \emptyset$  y podemos tomar  $z \in \Omega$ . Dado  $w \in \Lambda(z)$ , cualquier abierto que contenga a  $w$  contiene también una infinidad de elementos de  $G(z) \subset \Omega$ . Por tanto,  $\Lambda$  no puede contener ningún abierto no vacío.  $\square$

### 3.5 Otra caracterización del conjunto límite

Presentamos otra Definición del conjunto límite de un grupo. Al igual que la Definición 3.4, esta se puede aplicar también a los grupos elementales (Vea [8], p. 10).

**Definición 3.5.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .  $w \in \hat{\mathbb{C}}$  es un punto límite de  $G$  si existen  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  y transformaciones distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = w$ . Con  $L(G)$  denotaremos al conjunto de todos los puntos límite de  $G$ .*

Como veremos en la Proposición 3.15, en el caso de los grupos no elementales discretos, la Definición 3.5 es equivalente a las Definiciones 3.3 y 3.4. Sin embargo, el Ejemplo 3.4 muestra que ambas hipótesis son necesarias.

**Ejemplo 3.4.** (i) Sean  $B^2$ ,  $\mathbb{S}^1$ , y  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  como en el Ejemplo 3.3. Se vió en ese ejemplo que  $\Lambda = \mathbb{S}^1$ , y

$$\Lambda(z) = \begin{cases} B^2 & \text{si } z \in B^2, \\ \mathbb{S}^1 & \text{si } z \in \mathbb{S}^1, \\ \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B^2} & \text{si } z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B^2}. \end{cases}$$

De esta información, se sigue directamente que  $L(G) = \widehat{\mathbb{C}}$ .

(ii) Sea  $f(z) = e^{\varphi\pi i}z$ , con  $\varphi$  irracional. El grupo  $G = \langle f \rangle$  es elemental, y se sigue del Lema 1.18 que no es discreto. Como  $G$  es elemental, no está definido  $\Lambda$ . Ahora, si  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\Lambda(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = |z|\}$ , y si  $z \in \{0, \infty\}$ ,  $\Lambda(z) = \{z\}$ . Esto mismo muestra que  $L(G) = \widehat{\mathbb{C}}$ .

**Proposición 3.15.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto. Entonces, para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $L(G) = \Lambda(z) = \Lambda$ .*

**DEMOSTRACION.** Del Teorema 3.13 se tiene que  $\Lambda(z) = \Lambda$  para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Consideremos ahora  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  fija, y  $w \in \Lambda(z)$ . Entonces  $w$  es punto límite en el sentido de la Definición 3.5, y por tanto,  $\Lambda(z) \subset L(G)$ .

Por otra parte, sea  $w \in L(G)$ . La Definición 3.5 asegura que existen  $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$  y distintas  $g_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z') = w$ , pero esto implica que  $w \in \Lambda(z')$ , y por tanto,  $L(G) \subset \Lambda(z')$ .  $\square$

En resumen, tenemos tres definiciones para el conjunto límite de un grupo. Como muestran el Teorema 3.13 y la Proposición 3.15, estas definiciones son equivalentes en el caso de los grupos no elementales discretos, y por tanto, en este caso podemos utilizar la definición más adecuada a la situación. Y las Definiciones 3.4 y 3.5 tienen la ventaja de que se pueden aplicar también a los grupos elementales. Con esto, podemos concluir el análisis de los grupos elementales discretos.

**Lema 3.16.** *Sean  $G$  subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  discreto, y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces  $L(H) \subset L(G)$ . Si además el índice de  $H$  en  $G$  es finito,  $L(H) = L(G)$ .*

**DEMOSTRACION.** La primera parte del lema es obvia, pues cualquier punto límite de  $H$  es punto límite de  $G$ . Por otra parte, si  $[G : H] = k$ ,  $G$  tiene una descomposición en clases laterales  $G = Hg_1 + Hg_2 + \dots + Hg_k$ . Supongamos ahora que  $w \in L(G)$ , es decir, existen

$z \in \widehat{\mathbb{C}}$  y distintas  $f_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = w$ . Cada  $f_n$  puede escribirse de la forma  $f_n = h_n g_{i_n}$ , con  $h_n \in H$ ,  $1 \leq i_n \leq k$ . Necesariamente, alguno de los índices  $i_n = i$  debe repetirse un infinidad de veces, por lo que podemos extraer una colección de elementos distintos  $h_m g_i$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m g_i(z) = w$ , lo que implica que  $w \in L(H)$ , y por tanto,  $L(H) = L(G)$ .  $\square$

En el Capítulo 2 clasificamos hasta conjugación a todos los grupos elementales discretos. En la siguiente proposición, se utilizarán los resultados ahí obtenidos.

**Proposición 3.17.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  elemental discreto. Para el conjunto  $L(G)$  se tiene que:*

- (i) Si  $G$  es de Tipo 1, entonces  $L(G) = \emptyset$ .
- (ii) Si  $G$  es de Tipo 2, entonces  $|L(G)| = 1$  o 2.
- (iii) Si  $G$  es de Tipo 3, entonces  $|L(G)| = 2$ .

DEMOSTRACION. (i) Este caso es inmediato, pues si  $G$  es elemental discreto de Tipo 1, es finito.

(ii) Sea  $G$  elemental discreto de Tipo 2. Se tienen dos subcasos:

- (a)  $G$  es conjugado a un grupo que tiene una descomposición en clases laterales

$$T \cup Tg \cup Tg^2 \cup \dots \cup Tg^{q-1}$$

donde  $T$  es el subgrupo de traslaciones, y  $g$  es un generador del grupo cíclico de rotaciones,  $0 < q \leq 6$ ,  $q \neq 5$ . Es decir,  $T$  tiene índice finito en  $G$ , y se sigue del Lema 3.16 que  $L(G) = L(T)$ .

- (b)  $G$  es conjugado a un grupo que tiene una descomposición en clases laterales  $\bigcup_{p=0}^{q-1} \omega^p G'$ , donde  $G'$  es un grupo generado por un elemento  $g \in G$  loxodrómico con multiplicador  $|\alpha_g| = \lambda$ , y  $w$  es una raíz primitiva  $q$ -ésima de 1. Se sigue que  $G'$  tiene índice finito en  $G$ , y por el Lema 3.16  $L(G) = L(G')$ .

(iii)  $G$  en este caso es conjugado a un grupo que tiene una descomposición en clases laterales  $G_0 \cup G_0 h$  donde  $G_0$  es como  $G'$  en (ii) (b), y  $h(z) = \frac{1}{z}$ . Entonces  $G_0$  tiene índice 2 en  $G$ , y por el Lema 3.16  $L(G) = L(G_0)$ .  $\square$

El Teorema 3.9 y la Proposición 3.17 nos proporcionan el siguiente resultado.

**Corolario 3.18.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  discreto. Entonces la cardinalidad del conjunto  $L(G)$  es 0, 1, 2, o es no numerable.*

DEMOSTRACION. En efecto, si el grupo es elemental, la cardinalidad de  $L(G)$  es 0, 1 o 2 según la Proposición 3.17, y si el grupo es no elemental, se sigue del Teorema 3.9 y de la Proposición 3.15, que  $L(G) = \Lambda$  es un conjunto perfecto no vacío, y es por tanto no numerable.  $\square$

### 3.6 Acción discontinua en $\Omega$

Con la información obtenida hasta ahora, podemos estudiar al conjunto abierto  $\Omega$ .

**Teorema 3.19.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto. Si  $\Omega \neq \emptyset$ , entonces  $\Omega$  es el dominio máximo de discontinuidad de  $G$ , es decir:*

(i)  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega$ ; y

(ii) Si  $G$  actúa discontinuamente en un abierto  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $D \subset \Omega$ .

DEMOSTRACION. (i) Supongamos que  $G$  no actúa discontinuamente en  $\Omega$ . Podemos suponer que 0. (o  $\infty$ )  $\notin \Omega$  (Proposición 3.3 (ii)). Se sigue que existen un compacto  $K \subset \Omega$  y  $g_1, g_2, g_3, \dots \in G$  distintas tales que  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$  para toda  $n$ . Por tanto, existen puntos  $z_1, z_2, z_3, \dots \in K$  tales que  $g_n(z_n) \in K$ . Esta sucesión tiene un punto de acumulación  $w \in K \subset \Omega$ , y podemos extraer una subsucesión  $g_{n_k}(z_{n_k})$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z_{n_k}) = w$ . Del Lema 3.12 se tiene que

$$d(g(z), g(w)) \leq \frac{md(z, w)}{\|g\|^2} \leq \frac{m'}{\|g\|^2},$$

para toda  $z \in K$  y toda  $g \in G$ , y como  $G$  es discreto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^2 = \infty$ , de donde se sigue que  $g_{n_k}(z) \rightarrow w$  uniformemente en  $K$ , por lo que  $w \in \Lambda$ , es decir,  $\Omega \cap \Lambda \neq \emptyset$ , lo cual contradice que  $w \in \Omega$ , y por tanto,  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega$ .

(ii) Supongamos que  $D \cap \Lambda \neq \emptyset$ , y sea  $w$  en la intersección. Como  $D$  es abierto, existe una vecindad abierta  $B$  de  $w$  totalmente contenida en  $D \cap \Lambda$ , pero por definición  $\Lambda$  es la cerradura de  $\Lambda_0$ , por lo que  $B$  contiene una infinidad de puntos de  $\Lambda_0$ , lo cual implica que  $D \cap \Lambda_0 \neq \emptyset$ , y esto contradice el Lema 3.6. Por tanto,  $D \cap \Lambda = \emptyset$ .  $\square$

*Observación 3.2.* A diferencia de la Definición 3.2, algunos autores definen a los grupos kleinianos como subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  tales que  $\Omega \neq \emptyset$ .

Con el resultado enunciado en el Teorema 3.19 estamos listos para dar otra descripción de  $\Lambda$ , siempre que se tenga en cuenta una hipótesis adicional.

**Proposición 3.20.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental, y suponga que  $G$  contiene elementos parabólicos. Entonces  $\Lambda$  es la cerradura del conjunto de puntos fijos de los elementos parabólicos de  $G$ .*

DEMOSTRACION. Si denotamos con  $\Pi_0$  al conjunto de puntos fijos parabólicos, es fácil ver que  $\overline{\Pi_0}$  es un conjunto cerrado no vacío  $G$ -invariante, y por el Teorema 3.9,  $\Lambda \subset \overline{\Pi_0}$ .

Inversamente, sean  $w \in \overline{\Pi_0}$ , y  $D$  un abierto que contenga a  $w$ . Entonces  $D$  contiene una infinidad de puntos  $w_k \in \Pi_0$  y por el Lema 3.6,  $G$  no puede actuar discontinuamente en  $D$ . Por el Teorema 3.19 (ii), se sigue que  $w \in \widehat{C} \setminus \Omega = \Lambda$ , es decir  $\overline{\Pi_0} \subset \Lambda$ .  $\square$

**Ejemplo 3.5.** En este Ejemplo, consideremos el *Grupo Modular*:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad ad - bc = 1.$$

De manera análoga al Ejemplo 3.1, sea  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = \frac{p}{q}$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ ,  $q > 0$ . La transformación  $h(z) = \frac{(1 - rq^2)z + q^2r^2}{-q^2z + 1 + rq^2}$  es parabólica y fija a  $r$ , por lo que  $\Pi_0 = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . y por tanto,  $\overline{\Pi_0} = \Lambda = \widehat{\mathbb{R}}$ .

El resultado del Lema 3.6 nos indica que los puntos fijos de los elementos parabólicos y loxodrómicos de  $G$  están en  $\Lambda$ . Es posible que los puntos fijos de los elementos elípticos estén en  $\Lambda$  o en  $\Omega$ . Sin embargo, si un punto fijo elíptico está en  $\Omega$ , entonces el estabilizador de ese punto debe ser cíclico.

**Teorema 3.21.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto y suponga que  $\Omega \neq \emptyset$ . Si  $z \in \Omega$ , entonces el estabilizador  $G_z$  es cíclico y finito.*

DEMOSTRACION. Se sigue del Teorema 3.19 que  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega$ , por lo que la Proposición 3.3 (v) implica que  $G_z$  es finito. Así, cualquier  $g \in G_z$  tiene orden  $k \leq |G_z|$  y es por tanto elíptica o la identidad. Sean  $h, g \in G_z$ . Si los otros puntos fijos de  $h$  y  $g$  no coinciden, entonces por el Teorema 1.14 (ii) (b)  $[h, g]$  es parabólica y fija a  $z$ , lo cual es absurdo, y por tanto,  $G_z$  fija los extremos de un eje en  $\overline{H^3}$ . En la clasificación de los grupos elementales discretos del Capítulo 2 (Teorema 2.3 i)) se mostró que un grupo con estas características es necesariamente cíclico.  $\square$

El Teorema 3.21 nos permite obtener el siguiente resultado relativo al comportamiento local de un grupo discreto en las proximidades de un punto en  $\Omega$  o en  $H^3$ .

**Teorema 3.22.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto. Entonces:*

- (i) *Toda  $x \in H^3$  es el centro de una bola hiperbólica abierta  $N$  tal que  $g(N) = N$  si  $g(x) = x$ , y  $g(N) \cap N = \emptyset$  en otro caso.*
- (ii) *Si  $\Omega \neq \emptyset$ , toda  $z \in \Omega$  tiene una vecindad abierta  $N \subset \Omega$  tal que  $g(N) = N$  si  $g(z) = z$ . y  $g(N) \cap N = \emptyset$  en otro caso.*

DEMOSTRACION. (i) Sea  $x \in H^3$ , y definamos  $r = \inf \{ \rho(x, g(x)) : g \notin G_x \}$ . Como  $G$  actúa discontinuamente en  $H^3$ , para toda  $k > 0$ ,  $\rho(x, g(x)) < k$  sólo para un número finito de elementos  $g \in G$ , por lo que  $r > 0$ . Consideremos ahora la bola hiperbólica

$$N = \left\{ x \in H^3 : \rho(x, y) < \frac{r}{2} \right\}.$$

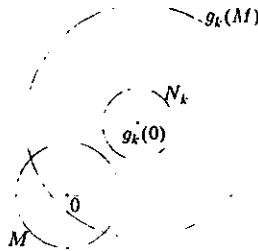
Como  $G$  es un grupo de isometrías hiperbólicas,  $\rho(x, y) = \rho(g(x), g(y))$  para toda  $g \in G$ , y por tanto,  $g(N) = N$  si y sólo si  $g(x) = x$ . Por otra parte, si  $g \notin G_x$ , se tiene que para toda  $y \in N$ ,

$$r \leq \rho(x, g(x)) \leq \rho(x, y) + \rho(y, g(x)) < \frac{r}{2} + \rho(y, g(x)).$$

Lo que implica que  $\rho(y, g(x)) > \frac{r}{2}$ , o equivalentemente,  $g(N) \cap N = \emptyset$ .

(ii) Supongamos que  $0 \in \Omega$ . Por el Teorema 3.21  $G_0$  es cíclico finito, y necesariamente fija a otro punto  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Supongamos por ahora que  $w = \infty$ . En este caso, toda  $g \in G_0$  es elíptica (de hecho, una rotación) o la identidad. Por tanto,  $G_0$  es un grupo de isometrías euclidianas. Veremos más tarde que el caso general puede reducirse a este caso particular.

Sea  $N_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < r_1 \}$  un disco tal que  $\overline{N_1} \subset \Omega$ . Como  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega$ ,  $g(\overline{N_1}) \cap \overline{N_1} \neq \emptyset$  sólo para un número finito de elementos  $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ . Sean ahora  $r = \min \{ |g_k(0)| > 0 : 1 \leq k \leq n \}$  y  $M = \left\{ z : |z| < \frac{r}{2} \right\}$ . Se sigue entonces que si  $|g_k(0)| > 0$ ,  $g_k(0) \notin M$ . Reetiquetamos con  $g_1, g_2, \dots, g_m, m \leq n$ , a los elementos que cumplen esta condición.



Para cada una de estas  $g_k$ , consideremos vecindades abiertas  $N_k$  de  $g_k(0)$  tales que  $N_k \subset g_k(M)$ , y  $N_k \cap M = \emptyset$ . Dado que  $g_k^{-1}(N_k) \subset M$  es una vecindad abierta de  $0$ , podemos entonces tomar un disco abierto  $N \subset \bigcap_{k=0} g_k^{-1}(N_k)$ . De aquí, se sigue de inmediato que si  $|g(0)| > 0$ , entonces  $g(N) \cap N = \emptyset$ , y si  $g(0) = 0$ ,  $g(N) = N$ .



Véamos ahora el caso general. Sea  $z \in \Omega(G)$ . De nuevo, por el Teorema 3.21. el estabilizador  $G_z$  también fija a un punto  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Consideremos  $h(\zeta) = \frac{\zeta - z}{\zeta - w}$ , y sea  $G' = hGh^{-1}$ . Se sigue del Lema 3.8 que  $\Omega(G') = h(\Omega(G))$ . Además,  $hG_z h^{-1} = G'_{h(z)}$ . Al aplicar la primera parte al grupo  $G'$  se tiene que existe una vecindad  $N \subset h(\Omega(G))$  de  $h(z) = 0$  tal que  $hgh^{-1}(N) = N$  si  $hgh^{-1}(0) = hg(z) = 0$ , y  $hgh^{-1}(N) \cap N = \emptyset$  en otro caso. Sólo basta observar que  $h^{-1}(N) = N'$  es una vecindad abierta de  $h^{-1}(0) = z$ , y por tanto, de la igualdad

$$hgh^{-1}(N) \cap N = hg(N') \cap h(N') = h(g(N') \cap N'),$$

se sigue que si  $g(z) = z$ ,  $g(N') = N'$ , y  $g(N') \cap N' = \emptyset$  en otro caso.  $\square$

## 4 Convergencia y Ejemplos

Como preparativo para demostrar el Teorema 4.3, necesitamos calcular el área cordal de un disco, y el volumen hiperbólico de una bola hiperbólica en  $H^3$ .

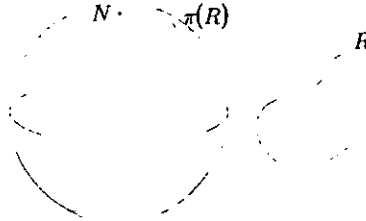
### 4.1 Area Cordal

Observemos que la proyección estereográfica  $\pi: \widehat{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , definida por

$$\pi(x) = \begin{cases} \left( \frac{2x_1}{1+|x|^2}, \frac{2x_2}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right) & \text{si } x \neq \infty, \\ (0, 0, 1) & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

es una parametrización de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ ,  $\pi(x, y) = (\pi_1(x, y), \pi_2(x, y), \pi_3(x, y))$ .

**Definición 4.1.** El *área cordal* de una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  se define como el área del sector esférico  $\pi(R) \subset \mathbb{S}^2$ .



Se tiene del cálculo elemental una fórmula explícita para esta área:

$$A_c(R) := A(\pi(R)) = \iint_R |D_x \pi(x, y) \times D_y \pi(x, y)| dx dy.$$

En esta fórmula,  $D_x \pi = \left( \frac{\partial \pi_1}{\partial x}, \frac{\partial \pi_2}{\partial x}, \frac{\partial \pi_3}{\partial x} \right)$ , y  $D_y \pi = \left( \frac{\partial \pi_1}{\partial y}, \frac{\partial \pi_2}{\partial y}, \frac{\partial \pi_3}{\partial y} \right)$ .

Procedemos a continuación a encontrar una expresión manejable para el área cordal: Para esto, tenemos que calcular la norma del vector normal  $D_x \pi(x, y) \times D_y \pi(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} &= \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial \pi_2}{\partial x} &= \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial \pi_3}{\partial x} &= \frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial y} &= \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial \pi_2}{\partial y} &= \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial \pi_3}{\partial y} &= \frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_x \pi(x, y) \times D_y \pi(x, y) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial x} & \frac{\partial \pi_2}{\partial x} & \frac{\partial \pi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial y} & \frac{\partial \pi_2}{\partial y} & \frac{\partial \pi_3}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^4} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-x^2+y^2 & -2xy & 2x \\ -2xy & 1+x^2-y^2 & 2y \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^4} \times \\
&\quad (-4xy^2 - 2x(1+x^2-y^2) - 4x^2y - 2y(1-x^2+y^2), (1-x^2+y^2)(1+x^2-y^2) - 4x^2y^2) \\
&= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^4} (-2x(1-x^2+y^2), -2y(1+x^2+y^2), -(1+x^2+y^2)(x^2+y^2-1)) \\
&= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^3} (-2x, -2y, -(x^2+y^2-1)). \\
|D_x \pi \times D_y \pi| &= \frac{4\sqrt{4x^2+4y^2+(x^2+y^2-1)^2}}{(1+x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4\sqrt{4(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1}}{(1+x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4\sqrt{(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)+1}}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iint_R |D_x \pi \times D_y \pi| \, dx dy = \iint_R \frac{4 \, dx dy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

y hemos probado la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.** *El área cordal de una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  es  $\iint_R \frac{4 \, dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ .*  $\square$

**Ejemplo 4.1.** El área cordal de  $\widehat{\mathbb{R}}^2$ . Aunque se definió el área cordal para regiones  $R \subset \mathbb{R}^2$ , una manera obvia de ampliar la definición a regiones  $R \subset \widehat{\mathbb{R}}^2$  consiste en considerar la integral sobre la región  $R = R \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{R}^2$ . Como ambas regiones difieren por un conjunto de contenido 0, las áreas son iguales. Para calcular el área cordal de  $\widehat{\mathbb{R}}^2$ , consideremos primero el área del disco  $D(0, r)$ , con  $r > 0$ ,

$$\iint_{D(0,r)} \frac{4 \, dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

En coordenadas polares, la integral se convierte en  $\int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{4\rho d\rho d\theta}{(1+\rho^2)^2}$ . Primero calculamos la integral  $\int_0^r \frac{4\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} = 2 \int_0^r \frac{2\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \frac{-2}{1+\rho^2} \Big|_0^r = 2 \left( \frac{-1}{1+r^2} + 1 \right)$ .

Se sigue entonces que  $\int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{4\rho d\rho d\theta}{(1+\rho^2)^2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{1+r^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \left( 1 - \frac{1}{1+r^2} \right)$ .

Finalmente, tomando el límite cuando  $r \rightarrow \infty$ ,

$$A_c(\widehat{\mathbb{R}}^2) = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{1+r^2} \right) = 4\pi.$$

Este resultado es natural. El área de la esfera  $\mathbb{S}^2 \approx \widehat{\mathbb{R}}^2$  es precisamente  $4\pi$ .

## 4.2 Volumen Hiperbólico

**Definición 4.2.** Sea  $B \subset H^3$  una bola hiperbólica con centro en  $(x_0, y_0, z_0)$ . El *volumen hiperbólico* de la bola es

$$V_h(B) := \iiint_B \frac{dx dy dz}{z^3}.$$

**Teorema 4.2.** Sea  $B \subset H^3$  una bola hiperbólica con centro en  $(x_0, y_0, z_0)$  y radio hiperbólico  $R$ , entonces

$$V_h(B) = \pi (\sinh(2R) - 2R).$$

*Demostración.* En la página 9 del Capítulo 1, se dedujo que la esfera hiperbólica con centro en  $(x_0, y_0, z_0)$  y radio hiperbólico  $R$  es la esfera euclidea con centro en  $(x_0, y_0, z_0 \cosh R)$  y radio  $z_0 \sinh R$ . Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \sin \theta \sin \varphi, \\ y &= y_0 + r \sin \theta \cos \varphi, \\ z &= z_0 \cosh R + r \cos \theta, \end{aligned}$$

con  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ,  $0 < r < z_0 \sinh R$ , describen el conjunto  $B$  (salvo un conjunto con contenido en dimensión 3 igual a 0). Si denotamos por  $\Phi$  a este cambio de coordenadas, el valor absoluto del determinante del jacobiano  $J_\Phi(\theta, \varphi, r)$  es  $r^2 \sin \theta$ . Además, para simplificar la notación, escribiremos  $a = z_0 \cosh R$ ,  $b = z_0 \sinh R$ . Por tanto,

$$\iiint_B \frac{dx dy dz}{z^3} = \iiint_{\Phi^{-1}(B)} \frac{|J_\Phi(\theta, \varphi, r)| d\theta d\varphi dr}{(a + r \cos \theta)^3} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{(a + r \cos \theta)^3} d\theta d\varphi dr.$$

Para evaluar esta integral, hay que observar que si  $u = a + r \cos \theta$ , entonces  $u' = -r \sin \theta$ , por lo que

$$\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta d\theta}{(a + r \cos \theta)^3} = -r \int_0^\pi \frac{(-r \sin \theta) d\theta}{(a + r \cos \theta)^3} = \frac{r}{2(a + r \cos \theta)^2} \Big|_0^\pi = \frac{r}{2(a-r)^2} - \frac{r}{2(a+r)^2}.$$

Esta expresión es independiente de  $\varphi$ , por lo cual

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{r}{(a-r)^2} - \frac{r}{(a+r)^2} \right) d\varphi = \pi \left( \frac{r}{(a-r)^2} - \frac{r}{(a+r)^2} \right).$$

Finalmente, como  $\frac{r}{(a-r)^2} = \frac{a}{(a-r)^2} - \frac{1}{(a-r)}$ , y  $\frac{-r}{(a+r)^2} = \frac{a}{(a+r)^2} - \frac{1}{(a+r)}$ ,

$$\begin{aligned} \pi \int_0^b \left( \frac{r}{(a-r)^2} - \frac{r}{(a+r)^2} \right) dr &= \pi \int_0^b \left( \frac{a}{(a-r)^2} + \frac{a}{(a+r)^2} - \frac{1}{a-r} - \frac{1}{a+r} \right) dr = \\ \pi \left( \frac{a}{a-r} - \frac{a}{a+r} + \ln(a-r) - \ln(a+r) \right) \Big|_0^b &= \pi \left( \frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} + \ln(a-b) - \ln(a+b) \right). \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} = \frac{a(a+b) - a(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ . Pero  $a = z_0 \cosh R$ , y  $b = z_0 \sinh R$ , es decir,

$$\frac{2(z_0 \cosh R)(z_0 \sinh R)}{(z_0 \cosh R)^2 - (z_0 \sinh R)^2} = \frac{z_0^2 \sinh 2R}{z_0^2} = \sinh 2R.$$

También,

$$\ln(z_0 \cosh R - z_0 \sinh R) = \ln(z_0 e^{-R}) = \ln z_0 - R,$$

y de manera análoga.

$$-\ln(z_0 \cosh R + z_0 \sinh R) = -\ln(z_0 e^R) = -\ln z_0 - R.$$

Por tanto,  $\iiint_B \frac{dx dy dz}{z^3} = \pi(\sinh(2R) - 2R)$ . Observe que esta identidad depende sólo

del radio hiperbólico de la bola. En particular, se sigue que el volumen hiperbólico en bolas es invariante bajo las transformaciones de Möbius.  $\square$

Puede consultarse otra demostración del Teorema 4.2 en [1], p. 61.

### 4.3 Convergencia de normas en grupos discretos

En varias ocasiones hemos utilizado el hecho de que si  $G$  es discreto, entonces es a lo sumo numerable, es decir,  $G = \{g_1, g_2, \dots\}$  y por tanto, si  $G$  no es finito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = \infty,$$

(Corolario 1.8). El siguiente resultado nos muestra que de hecho, la norma crece rápidamente.

**Teorema 4.3.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto, entonces*

(i) *el número  $n(t)$  de elementos  $g \in G$  con  $\|g\| \leq t$  es  $O(t^4)$ ,*

(ii) *para todo  $s > 4$ , la serie  $\sum_{g \in G} \|g\|^{-s}$  converge,*

(iii) *si  $\Omega \neq \emptyset$ , la serie  $\sum_{g \in G} \|g\|^{-4}$  converge.*

**DEMOSTRACION.** (i) Sean  $B(x, r)$  la bola hiperbólica con centro en  $x$  y radio  $r$ , y  $V(r)$  el volumen hiperbólico de la bola. Consideremos el subgrupo estabilizador de  $j$ ,  $G_j < G$ . Se sigue de la Proposición 3.3 (iv) que  $G_j$  es finito, es decir  $|G_j| = k$ . Por el Teorema 3.22 (i), existe una bola hiperbólica  $N = B(j, r)$  tal que  $g(N) \cap N = \emptyset$  si  $g \notin G_j$ .

Por el Teorema 1.10, la condición  $\|g\| \leq t$  es equivalente a  $2 \cosh \rho(j, g(j)) \leq t^2$ , o

$$\rho(j, g(j)) \leq \cosh^{-1}(t^2/2).$$

Si  $\|g\| \leq t$ , se tiene entonces para toda  $x \in N$

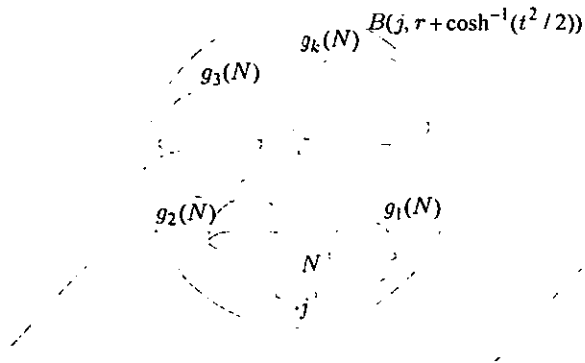
$$\rho(g(x), j) \leq \rho(g(x), g(j)) + \rho(g(j), j) = \rho(x, j) + \rho(g(j), j) \leq r + \cosh^{-1}(t^2/2),$$

y por tanto,  $g(N) \subset B(j, r + \cosh^{-1}(t^2/2))$ . Consideremos ahora la suma de los volúmenes hiperbólicos de las imágenes ajenas de  $N$ . En esta suma debemos tomar en cuenta que los volúmenes de las imágenes  $g(N)$  se repiten  $k$  veces, una vez por cada elemento en el estabilizador  $G_j$ :

$$\frac{V(r)n(t)}{k} \leq V(r + \cosh^{-1}(t^2/2)).$$

El volumen hiperbólico  $V(r)$  es, según el Teorema 4.2,  $V(r) = \pi(\sinh(2r) - 2r)$ , por lo cual

$$V(r) = \pi \left( \frac{e^{2r} - e^{-2r}}{2} - 2r \right) < \pi \left( \frac{e^{2r} - e^{-2r}}{2} \right) < \frac{\pi}{2} e^{2r}.$$



Por otra parte,

$$\cosh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) < \ln(2y).$$

Por tanto,

$$\pi(\sinh(2r) - 2r)n(t) \leq \frac{\pi k}{2} \exp(2r + 2 \cosh^{-1}(t^2/2)) \leq \frac{\pi k}{2} \exp(2r + 2 \ln(t^2)).$$

Se sigue entonces que  $n(t) \leq \frac{ke^{2r}t^4}{2(\sinh(2r) - 2r)}$ . Es decir, el cociente  $\frac{n(t)}{t^4}$  esta acotado para toda  $t > 0$ , por lo que  $n(t) = O(t^4)$ .

(ii) Para todo  $t > 1$ , la función  $n : [1, t] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona creciente, y tiene un número a lo más numerable de discontinuidades. De hecho, dado que  $n(x)$  toma valores en los naturales, el número de discontinuidades es finito. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_m$  las discontinuidades en  $[1, t]$ . Como  $n(x)$  es constante en  $(x_{k-1}, x_k)$ , es una función escalonada. Además, la función  $f : [1, t] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{-s}$ ,  $s > 4$ , es continua, y se sigue del Teorema 1.21 que  $f \in \mathfrak{R}(n)$  en  $[1, t]$ .

Por el Teorema 1.23,

$$\int_1^t \frac{dn(x)}{x^s} = \sum_{k=1}^m \frac{n_{x_k}}{x_k^s} = \frac{n(x_1+) - n(x_1-)}{x_1^s} + \frac{n(x_2+) - n(x_2-)}{x_2^s} + \dots + \frac{n(x_m+) - n(x_m-)}{x_m^s}.$$

El sumando  $\frac{n(x_k+) - n(x_k-)}{x_k^s}$  corresponde a las  $g \in G$  tales que  $x_{k-1} < \|g\| \leq x_k$ , por lo que esta integral se reduce a

$$\int_1^t \frac{dn(x)}{x^s} = \sum_{\|g\| \leq t} \|g\|^{-s}.$$

Por otra parte, dado que  $n(1) = 0$ , se sigue del Teorema 1.20 que

$$\int_1^t \frac{dn(x)}{x^s} = \frac{n(t)}{t^s} - \int_1^t n(x)d(x^{-s}),$$

y del Teorema 1.22,

$$- \int_1^t n(x)d(x^{-s}) = s \int_1^t \frac{n(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Si escribimos  $s = 4 + \delta$ ,  $\delta > 0$ , se sigue de (i) que existe una constante  $m > 0$  tal que  $\frac{n(t)}{t^{s+1}} \leq \frac{m}{t^{1+\delta}}$  para toda  $t > 0$ . Puesto que la integral impropia  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\delta}}$  existe, se sigue del criterio de comparación que la integral  $\int_1^\infty \frac{n(x)}{x^{s+1}} dx$  existe, y por tanto,  $\sum_{g \in G} \|g\|^{-s}$  converge.

(iii) En  $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$  no podemos utilizar la métrica hiperbólica, por lo que consideraremos el área cordal en  $\widehat{\mathbb{C}}$  que fue introducida en la Definición 4.1 y la Proposición 4.1. Por comodidad, utilizamos notación compleja en las integrales.

El conjunto de puntos fijos de las transformaciones elípticas de  $G$  es a lo más numerable, y como  $\Omega \neq \emptyset$ , no se puede acumular en  $\Omega$ , por lo que podemos escoger un disco abierto  $N$  tal que  $g(N) \cap N = \emptyset$  si  $g$  es distinta de la identidad. Por tanto, la suma de las imágenes ajenas de  $N$  está acotada por  $4\pi$ , que es el área cordal de  $\widehat{\mathbb{C}}$  (Ejemplo 4.1).

El área cordal de  $g(N)$  es:

$$\begin{aligned} A_c(g(N)) &= \iint_{g(N)} \frac{4dx dy}{(1+|z|^2)^2} = 4 \iint_N \frac{|g'(z)|^2 dx dy}{(1+|g(z)|^2)^2} = 4 \iint_N \frac{|1/(cz+d)|^2 dx dy}{(1+|az+b|^2/|cz+d|^2)^2} \\ &= 4 \iint_N \frac{dx dy}{(|az+b|^2 + |cz+d|^2)^2}. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|az+b|^2 + |cz+d|^2 \leq (|a|^2 + |b|^2)(1+|z|^2) + (|c|^2 + |d|^2)(1+|z|^2) = \|g\|^2(1+|z|^2),$$

y se sigue que  $(|az+b|^2 + |cz+d|^2)^{-2} \geq \|g\|^{-4}(1+|z|^2)^{-2}$ , por lo que

$$A_c(g(N)) \geq \frac{1}{\|g\|^4} \iint_N \frac{4dx dy}{(1+|z|^2)^2} = \frac{A_c(N)}{\|g\|^4}.$$

Y por tanto,  $\sum_{g \in G} \|g\|^{-4} \leq \frac{1}{A_c(N)} \sum_{g \in G} A_c(g(N)) \leq \frac{4\pi}{A_c(N)}$ , y esto implica la convergencia de la serie.  $\square$



#### 4.4 $G$ -paquetes

**Definición 4.3.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  discreto. Un conjunto abierto conexo no vacío  $D$  es un  $G$ -paquete si  $g(D) \cap D = \emptyset$  para toda  $g$  en  $G$  distinta de  $I$ .

**Teorema 4.4.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  no elemental discreto:

(i) Si  $D$  es un abierto no vacío  $G$ -invariante que no es  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $D$ .

(ii) Si  $D$  es un  $G$ -paquete, entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D)$ .

**DEMOSTRACION.** (i) El conjunto  $E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$  es cerrado no vacío  $G$ -invariante, y por el Teorema 3.9,  $\Lambda \subset E$ . Por tanto,  $D \subset \Omega$ , y por el Teorema 3.19,  $G$  actúa discontinuamente en  $D$ .

(ii) De la Definición 4.3,  $D' = \bigcup_{g \in G} g(D)$  no es conexo, y por tanto, es un subconjunto propio

de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Además,  $D'$  es abierto no vacío, y claramente es  $G$ -invariante. Se sigue entonces de (i) que  $G$  actúa dicontinuamente en  $D'$ .  $\square$

**Teorema 4.5.** Sean  $G_1, G_2, \dots$  subgrupos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  tales que su unión genera al grupo  $G$ . Sean  $D_j$   $G_j$ -paquetes tales que  $D_i \cup D_j = \widehat{\mathbb{C}}$  si  $i \neq j$ , y  $D^* = \bigcap D_j$  es no vacío. Entonces  $G$  es el producto libre de los grupos  $G_j$ ,  $D^*$  es un  $G$ -paquete, y  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$ .

**DEMOSTRACION.** Sea  $g \in G$  expresado en forma normal, es decir,  $g = g_m \dots g_1$ , con  $g_k \in G_{i_k}$ ,  $g_k \neq I$ , e  $G_{i_k} \neq G_{i_{k+1}}$  para toda  $k$ . Mostraremos que  $g_m \dots g_1(D^*) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m}$ . La demostración se realizará por inducción sobre la longitud de la expresión de  $g$ .

Para  $k = 1$ ,  $D_{i_1}$  es un  $G_{i_1}$ -paquete, por lo que

$$g_1(D^*) \subset g_1(D_{i_1}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_1}.$$

Supongamos ahora que para  $k = n$

$$g_n \dots g_1(D^*) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_n}.$$

Se sigue entonces que

$$g_{n+1}(g_n \dots g_1(D^*)) \subset g_{n+1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_n}) \subset g_{n+1}(D_{i_{n+1}}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_{n+1}}.$$

Esto implica que  $g_m \dots g_1(D^*) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m} \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D^*$ , por lo que  $D^*$  es un  $G$ -paquete. Además, esto mismo muestra que  $g_m \dots g_1 \neq I$ , y se sigue de la Definición 1.7 que  $G$  es el producto libre de los grupos  $G_j$ . Finalmente, por el Teorema 4.4 (ii),  $G$  actúa discontinuamente en

$$\bigcup_{g \in G} g(D^*). \quad \square$$

### 4.5 Subgrupos del grupo modular

Sean  $g(z) = z+6$ ,  $h(z) = \frac{z}{z+1}$ , y  $G_1, G_2$ , los grupos generados por  $g$  y  $h$ , respectivamente. Consideremos ahora los conjuntos

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < 3\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$$

El grupo  $G_1$  consiste de traslaciones, por lo que es claro que  $D_1$  es un  $G_1$ -paquete.

De acuerdo a la Definición 1.21, el círculo isométrico de  $h$  es  $I_h = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$ , y el círculo isométrico de  $h^{-1}(z) = \frac{z}{-z+1}$  es  $I_{h^{-1}} = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ . Por la Proposición 1.19,  $h(I_h) = I_{h^{-1}}$ ,  $h(\text{Int } I_h) = \text{Ext } I_{h^{-1}}$  y  $h(\text{Ext } I_h) = \text{Int } I_{h^{-1}}$ .

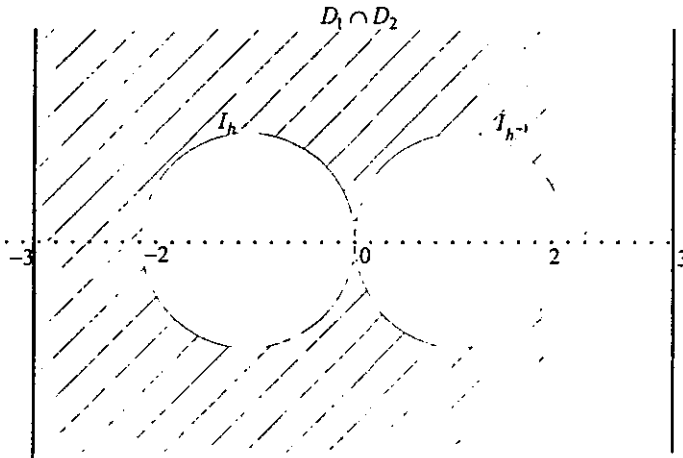
Ahora,  $D_2 \subset \text{Ext } I_h$ , por lo que

$$h(D_2) \subset h(\text{Ext } I_h) = \text{Int } I_{h^{-1}}.$$

Por tanto,  $D_2 \cap h(D_2) = \emptyset$ . Observe ahora que  $\text{Int } I_{h^{-1}} \subset \text{Ext } I_h$ , por lo que

$$h^2(D_2) \subset h(\text{Int } I_{h^{-1}}) \subset h(\text{Ext } I_h) = \text{Int } I_{h^{-1}}.$$

Se sigue entonces que  $D_2 \cap h^2(D_2) = \emptyset$ . Se tiene, en general, para toda  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ , que  $D_2 \cap h^k(D_2) = \emptyset$ , y por tanto,  $D_2$  es un  $G_2$ -paquete.



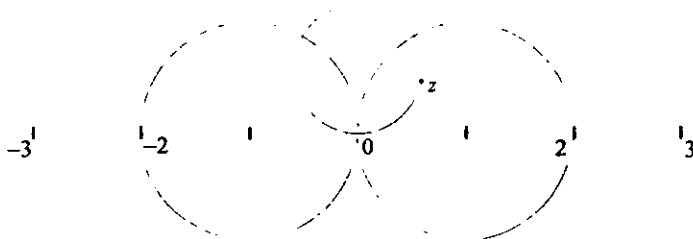
Como  $D^* = D_1 \cap D_2$  es no vacío, y  $D_1 \cup D_2 = \widehat{\mathbb{C}}$ , se cumplen las hipótesis del Teorema 4.5. Se sigue que  $G$  es el producto libre  $G_1 * G_2$ ,  $D^*$  es un  $G$ -paquete, y  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$ .

El grupo  $G$  que acabamos de construir es subgrupo propio de  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . En el Ejemplo 3.5 se vió que  $\Lambda_{PSL(2, \mathbb{Z})} = \widehat{\mathbb{R}}$ . Se sigue del Lema 3.16 que  $\Lambda_G \subset \widehat{\mathbb{R}}$ . Aún más, la contención es propia, pues si  $x \in \mathbb{R}$ , con  $2 < x < 3$ , entonces  $x \in \Omega_G$ , por lo que  $\Lambda_G \neq \widehat{\mathbb{R}}$ . Se sigue en particular que  $\Omega_G$  es conexo.

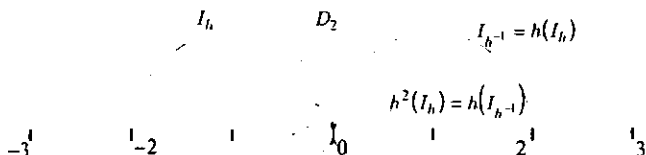
Sea ahora  $D = \overline{D^*} \setminus \{0, \infty\}$ . Este conjunto está totalmente contenido en  $\Omega_G$ . En efecto, si  $x \in D$  no es real, puesto que  $\Lambda_G \subset \widehat{\mathbb{R}}$ ,  $x \in \Omega_G$ . Los únicos puntos en  $D$  que falta verificar son  $x = \pm 2$ ,  $x = \pm 3$ . Pero  $h(-2) = 2$ ,  $h(-3) = 3/2$ , y  $h^{-1}(2) = -2$ ,  $h^{-1}(3) = -3/2$ . Esto muestra que  $x = \pm 2$ ,  $x = \pm 3$  no pueden estar en  $\Lambda_G$ , pues serían puntos aislados.

Se tiene por tanto que  $\bigcup_{f \in G} f(D) \subset \Omega_G$ . Nos proponemos a continuación mostrar que de hecho, se tiene la igualdad  $\bigcup_{f \in G} f(D) = \Omega_G$

Sea  $z \in H^2$ . Lo primero que hay que observar es que podemos suponer que  $|Re(z)| \leq 3$ . Esto es fácil de justificar, pues si  $|Re(z)| > 3$ , podemos considerar una  $k \neq 0$  tal que  $|Re(g^k(z))| \leq 3$ . Además, podemos suponer que  $z \in \text{Int } I_h$  o que  $z \in \text{Int } I_{h^{-1}}$ , pues de no ser así,  $z \in \Omega_G$ , y no hay nada que probar. Sea  $C$  el círculo fijo para  $h$  (y por tanto, para  $h^{-1}$ ) que pasa por  $z$ . El conjunto  $C \cap (D_1 \cap D_2)$  es un compacto no vacío que no contiene al 0, y por el Teorema 1.17 (i),  $h^k(w) \rightarrow 0$  uniformemente en  $C \cap (D_1 \cap D_2)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .



También, como las imágenes de  $D_2$  bajo las iteraciones de  $h$  llenan  $\text{Int } I_h$  e  $\text{Int } I_{h^{-1}}$ , esto muestra que  $z$  está en la órbita de  $C \cap (D_1 \cap D_2)$ . El mismo argumento se aplica en el caso de que  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{H^2}$ .



Por tanto, basta revisar el caso en que  $z \in \mathbb{R}$ .

**Afirmación.** Sea  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $y \notin \bigcup_{f \in G} f(D)$ . Entonces  $y \in \Lambda_G$ .

Para abreviar la notación, sea  $A = (-2, 2)$ . Lo primero que se tiene que observar es que toda  $x \in \mathbb{R}$  es imagen de un  $y \in A$ .

Consideremos los siguientes conjuntos:

$F_0 = A$  y sus imágenes trasladadas bajo  $G_1$ ,

$F'_0 = F_0 \setminus A$ ,

$F_1 = \bigcup_{k_0 \in \mathbb{N}} h^{\pm k_0}(F'_0)$ , y sus imágenes trasladadas bajo  $G_1$ ,

$F'_1 = F_1 \setminus A$ ,

$F_2 = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{N}} h^{\pm k_1}(F'_1)$ , y sus imágenes trasladadas bajo  $G_1$ ,

$F'_2 = F_2 \setminus A$ ,

etcétera.

Definimos el diámetro de  $F_k$  como la longitud del mayor intervalo conexo en  $F_k$ . Se tiene entonces que  $\text{diam}(F_0) = 4$ . En general, no es fácil calcular el diámetro de  $F_k$ . Sin embargo, demostrar el siguiente resultado es un cálculo rutinario.

**Lema 4.6.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(F_k) = 0$ .

**DEMOSTRACION.** En la demostración del Lema 1.19, página 16, usamos la siguiente identidad:

$$|f(z) - f(w)| = \left| \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)} \right|.$$

donde  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc = 1$ , siempre que  $f(z) \neq \infty$  y  $f(w) \neq \infty$ . Esta igualdad será fundamental en lo que sigue.

(i) Para un mismo intervalo  $(a, b)$ , con  $b > a > 3$ ,

$$|h(a) - h(b)| \geq |h^k(a) - h^k(b)| \quad \text{para toda } k > 0.$$

$$\text{En efecto, } |h(a) - h(b)| = \left| \frac{a - b}{(a + 1)(b + 1)} \right| \geq \left| \frac{a - b}{(ak + 1)(bk + 1)} \right| = |h^k(a) - h^k(b)|.$$

(ii) Si  $(a, b)$  y  $(a + n, b + n)$  son dos intervalos, con  $b > a > 3$ , y  $n > 0$ ,

$$|h(a) - h(b)| > |h(a + n) - h(b + n)|.$$

De nuevo, es trivial verificar esto:

$$|h(a) - h(b)| = \left| \frac{a - b}{(a + 1)(b + 1)} \right| > \left| \frac{a + n - (b + n)}{(a + n + 1)(b + n + 1)} \right| = |h(a + n) - h(b + n)|.$$

(iii) Si  $(a, b)$  y  $(a + n, b + n)$  son dos intervalos, con  $b < a < -3$ , y  $n < 0$ ,

$$|h(a) - h(b)| > |h(a + n) - h(b + n)|.$$

En efecto.

$$|h(a) - h(b)| = \left| \frac{a - b}{(a + 1)(b + 1)} \right|, \text{ y } |h(a + n) - h(b + n)| = \left| \frac{a - b}{(a + n + 1)(b + n + 1)} \right|.$$

Pero  $a + n + 1 < a + 1 < 0$ , y  $b + n + 1 < b + 1 < 0$ , por lo que

$$(a + n + 1)(b + n + 1) > (a + 1)(b + 1) > 0,$$

y se sigue la afirmación.

(iv) Para  $(a, b)$  y  $(-b, -a)$  con  $b > a > 3$ , se tiene que

$$|h(-a) - h(-b)| > |h(a) - h(b)|.$$

Por supuesto.  $|h(-a) - h(-b)| = \left| \frac{a - b}{(-a + 1)(-b + 1)} \right|$ , y además,

$$|-a + 1| < |a| + 1 = a + 1, \text{ y } |-b + 1| < |b| + 1 = b + 1,$$

entonces

$$0 < (-a + 1)(-b + 1) = |-a + 1||-b + 1| < (a + 1)(b + 1).$$

y de esta desigualdad se sigue la afirmación.

(v) Si  $0 < a < b < 3$ ,

$$|hg^{-1}(a) - hg^{-1}(b)| = |h(a - 6) - h(b - 6)| = \left| \frac{a - b}{(a - 5)(b - 5)} \right|,$$

y por otra parte,  $a - 5 < b - 5 < -2$ , y por tanto,  $(a - 5)(b - 5) > 4$ , por lo que

$$|hg^{-1}(a) - hg^{-1}(b)| < \left| \frac{a - b}{4} \right| = \frac{b - a}{4}.$$

Podemos ahora demostrar el lema: Recordemos que  $F_n$  se construye a partir de  $F'_{n-1}$ , por lo que en (i) a (iv), sólo consideramos el caso en que los intervalos que estamos analizando están fuera de  $(-3, 3)$ . Supongamos que queremos calcular el diámetro de  $F_n$ . Por (i), sólo tenemos que observar las imágenes bajo  $h$  de  $F'_{n-1}$ . Por (ii), de entre todos los intervalos a la derecha del 0, sólo hay que considerar el más cercano a 0. Y en forma análoga, de (iii), se sigue que el intervalo más cercano a la izquierda del 0 es el único que nos interesa. De (iv) se sigue finalmente que el diámetro de  $F_n$  es precisamente la longitud de la imagen bajo

$h$  del intervalo de longitud máxima de  $F'_{n-1} \cap (-9, -3)$ . Observe que hay una cantidad numerable de intervalos en  $F'_{n-1}$  que tienen la misma longitud.

Consideremos por un momento en  $F_{n-1} \cap (-2, 2)$ , el intervalo de longitud máxima  $(a, b)$ . Al trasladarlo mediante  $g^{-1}$ ,  $(g^{-1}(a), g^{-1}(b)) \subset F'_{n-1} \cap (-9, -3)$ , y por  $(v)$ ,

$$\text{diam}(F_n) = |hg^{-1}(a) - hg^{-1}(b)| < \frac{1}{4}|a - b| = \frac{1}{4} \text{diam}(F_{n-1}).$$

Y por tanto,  $\text{diam}(F_n) < \frac{1}{4^n} \text{diam}(F_0)$ , por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \text{diam}(F_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n-1}} = 0. \quad \square$$

DEMOSTRACION DE LA AFIRMACION. Se tiene por hipótesis,  $y \notin \bigcup_{f \in G} f(D)$ , por lo que en particular, dado que  $\widehat{\mathbb{R}}$  es un círculo invariante para el grupo,  $y \notin \bigcup_{f \in G} f(B)$ , donde  $B = D \cap [-3, 3]$ . Observe ahora que  $D \cap \widehat{\mathbb{R}} = A \cup B$ .

Sea  $w \in \widehat{\mathbb{R}}$ , fijo. Para cada  $k > 0$ , sea  $F_{k_y}$  la componente conexa de  $F_k$  que contiene a  $y$ . Tal componente existe siempre, pues por hipótesis,  $y \notin \bigcup_{f \in G} f(B)$ . Por tanto, existe  $f_k \in G$  tal que  $f_k(w) \in F_{k_y}$ . En efecto, si  $x \in A$ ,  $f_k$  entonces es la transformación que manda a  $A$  en  $F_{k_y}$ , y si,  $x \notin A$ , entonces  $f_k = f'_k h$ , donde  $f'_k$  es como antes. Por la forma en que se construyeron los conjuntos  $F_k$ , todas las transformaciones son distintas, y no puede haber cancelaciones. Por definición del diámetro de  $F_k$ ,

$$|f_k(x) - y| \leq \text{diam}(F_k),$$

y por el Lema 4.6,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(F_k) = 0$ , y se sigue de la Definición 3.4 que  $y \in \Lambda$ . □

Es claro que el ejemplo anterior se puede generalizar a una gran cantidad de subgrupos del grupo modular.

### 4.6 Grupos de Schottky

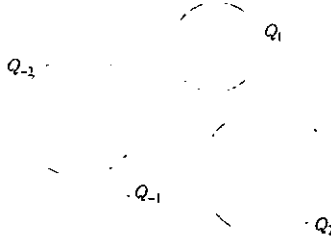
Sean  $Q_1, Q_{-1}, Q_2, Q_{-2}$  cuatro círculos mutuamente exteriores en  $\mathbb{C}$ . Para  $j = 1, 2$ , sea  $g_j$  la transformación que manda el exterior de  $Q_{-j}$  en el interior de  $Q_j$ .

Primero verificamos que en efecto tales transformaciones deben existir. Es un hecho bien conocido que  $PSL(2, \mathbb{C})$  es transitivo en círculos, esto es, dados dos círculos  $Q_1, Q_{-1}$ , existe  $g$  tal que  $g(Q_1) = Q_{-1}$ . Si se tiene que  $g(\text{Int } Q_1) = \text{Int } Q_{-1}$ , consideremos  $f \in PSL(2, \mathbb{C})$

tal que  $f(Q_1) = \widehat{\mathbb{R}}$ , y  $h(z) = -z$ . Entonces la composición  $f h f$  intercambia  $\text{Int } Q_1$  con  $\text{Ext } Q_1$ , y por tanto  $g_1 = g f h f$  es la transformación requerida. Definimos

$$D_1 = \text{Ext } Q_1 \cap \text{Ext } Q_{-1}, \quad D_2 = \text{Ext } Q_2 \cap \text{Ext } Q_{-2}.$$

Por definición,  $g_1(D_1) \subset g_1(\text{Ext } Q_{-1}) = \text{Int } Q_1$ .



Observe ahora que  $\text{Int } Q_1 \subset \text{Ext } Q_{-1}$ , y por tanto,

$$g_1^2(D_1) \subset g_1(\text{Int } Q_1) \subset g_1(\text{Ext } Q_{-1}) = \text{Int } Q_1.$$

Se sigue inductivamente que para toda  $k$ ,

$$g_1^k(D_1) \subset \text{Int } Q_1, \quad \text{y por tanto,} \quad g_1^k(D_1) \cap D_1 = \emptyset,$$

y  $D_1$  es un  $\langle g_1 \rangle$ -paquete. Análogamente,  $D_2$  es un  $\langle g_2 \rangle$ -paquete. Como  $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , se sigue del Teorema 4.5 que  $G = \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle$ ,  $D$  es un  $G$ -paquete, y  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D)$ . Además, debido a la contención ( $i = 1, 2$ )

$$g_i(\text{Int } Q_i) \subset g_i(\overline{\text{Int } Q_i}) \subset g_i(\text{Ext } Q_{-i}) = \text{Int } Q_i.$$

se sigue del Lema 3.7 que  $g_i$  es loxodrómica.

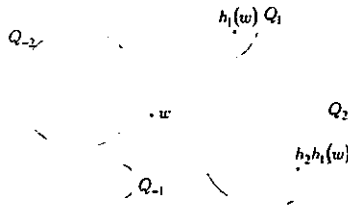
En seguida, mostraremos que de hecho,  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(\overline{D})$ . Para ver esto, es suficiente mostrar que ningún punto  $z \in \partial D$  puede estar en  $\Lambda$ .

En efecto, sean  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  y  $f = h_m h_{m-1} \cdots h_1$ , con  $h_k \in G_{i_k}$ ,  $h_k \neq I$ ,  $G_{i_k} \neq G_{i_{k+1}}$ . Ahora, hay dos posibilidades excluyentes;  $w \in D$ , o  $w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ .

Si  $w \in D$ , podemos suponer que  $h_1 \in \langle G_1 \rangle$ , y por tanto,  $h_1(w) \in h_1(D_1) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_1 \subset D_2$ .

Ahora,  $h_2 \in \langle G_2 \rangle$ , y  $h_2(h_1(w)) \in h_2(D_2) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_2 \subset D_1$ .

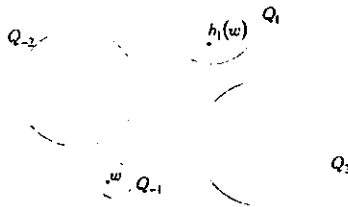
Inductivamente, si  $m \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $h_m \cdots h_1(w) \in D_2 \subset D_1$ , y si  $m \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $h_m \cdots h_1(w) \in D_1 \subset D_2$ .



Falta revisar el caso  $w \in \widehat{C} \setminus \overline{D}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$w \in \overline{\text{Int } Q_1} \cup \overline{\text{Int } Q_{-1}}.$$

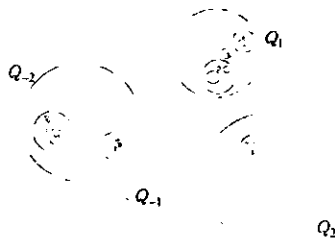
De nuevo, si  $h_1 \in \langle G_1 \rangle$ , entonces  $h_1(w) \in \overline{\text{Int } Q_1} \cup \overline{\text{Int } Q_{-1}} \subset D_2$ ,



y podemos repetir el argumento anterior.

Si por otra parte,  $h_1 \in \langle G_2 \rangle$ , como  $w \in D_2$ , de nuevo estamos en el caso anterior.

Sólo basta observar que las imágenes sucesivas de  $w$  nunca se acercan a  $\partial D$ , pues, si la longitud de la expresión de  $h$  es al menos 2, necesariamente  $f(w)$  se encuentra en la cerradura de las imágenes de  $Q_1, Q_{-1}, Q_2$ , y  $Q_{-2}$  bajo  $g_1, g_1^{-1}, g_2$ , y  $g_2^{-1}$ , y por tanto, las imágenes no se pueden acumular en  $\partial D$ .





## Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V., Möbius transformations in several dimensions, *University of Minnesota Lecture Notes*, Minnesota, 1981.
- [2] Apostol. T., *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1974.
- [3] Bartle, R. G., *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, México, 1980.
- [4] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] Jones, G. and Singerman, D., *Complex Functions, an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University, Cambridge, 1987.
- [6] Klein, F., *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of Fifth Degree*. Dover, New York, 1956.
- [7] Kuroš, A. G. *The Theory of Groups, Volume II*, Chelsea. New York, 1960.
- [8] Lehner, J., *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Wilson, New York. 1966.
- [9] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Dover, New York, 1976.
- [10] Neumann, P. M., Stoy, G. A., and Thompson, E. C., *Groups and Geometry*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [11] Rotman, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, third edition, W. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1988.
- [12] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New, York, 1976.
- [13] Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hiperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149. Springer-Verlag, New York, 1994.