

6
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MODOS EFECTIVOS EN PULSOS OPTICOS"

T E S I S

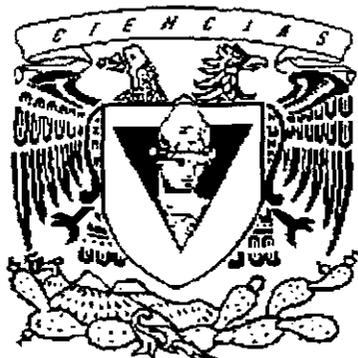
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

EDUARDO GOMEZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. DMITRII KOUZNETSOV KALLISTRATOVA



27/11/99

1999



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION
DISCONTINUA.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Modos efectivos en pulsos
sónicos.

realizado por GOMEZ GARCIA EDUARDO

con número de cuenta 9550444-1 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. DMITRII KOULNETSOV KALLISTRATOVA

DK

Propietario

DR. HECTOR MOYA

HM

Propietario

DR. SALVADOR CUEVAS CARDONA

SC

Suplente

DR. ROCIO JAUREGUI RENAUD

Rocio Jauregui Renaud

Suplente

DR. RAMON LUPEZ PENA

Ramon Lopez Pena

[Signature]

Consejo Departamental de Física
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

A G R A D E C I M I E N T O S

La presente tesis está dedicada a mi madre a quien quiero con todo mi corazón y admiro grandemente.

Quisiera agradecer también el apoyo y la amistad de Dmitrii, quien próximamente recibirá el nobel y se olvidará de todos nosotros.

Agradezco también el apoyo del Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas.

Agradezco también a todos aquellos que me brindaron su apoyo real y moral, pero que por falta de toner no aparecen aquí.

Índice

INTRODUCCIÓN	1
1. El Oscilador armónico.	
1.1. Introducción	4
1.2. El oscilador armónico en Mecánica Clásica	4
1.3. El oscilador armónico en Mecánica Cuántica	5
1.4. Operadores de creación y aniquilación	6
1.5. Estados fotónicos	8
2. Estados coherentes.	
2.1. Introducción	12
2.2. Estados cuasiclásicos	12
2.3. Eigenestados del operador de aniquilación	14
2.4. Expansión de estados coherentes en estados fotónicos	15
2.5. Estados cuasiclásicos como estados de mínima incertidumbre ..	16
2.6. Operador de desplazamiento	17
2.7. Relaciones de ortonormalidad y completéz	19
3. Cuantización para el medio no lineal.	
3.1. Introducción	21
3.2. Medio lineal	21
3.3. Medio no lineal	25
3.4. Transformación a la representación de interacción	26
4. Modos efectivos.	
4.1. Introducción	31
4.2. Operadores efectivos	31
4.3. Solución perturbativa	34
4.4. Ejemplos de modos efectivos	37
5. Aproximación por algunos modos.	
5.1. Introducción	41
5.2. Cuasiprobabilidad Q	41
5.3. Un solo modo	45
5.4. Dos modos	48
6. Detección de Squeezing.	
6.1. Introducción	54
6.2. Medición de componente del operador de campo	54
6.3. Dispersión mínima	56
CONCLUSIONES	62
REFERENCIAS	63

I N T R O D U C C I O N

Durante finales de este siglo ha sido notable el desarrollo de los láseres así como sus aplicaciones. Debido a la gran energía y baja entropía de una luz láser, ésta puede concentrarse y producir perturbaciones tan grandes que saca a nuestro estado de su aproximación lineal manifestándose fenómenos no lineales. Por ejemplo dentro de la evolución de las comunicaciones en este siglo hemos avanzado desde el telégrafo que funcionaba con frecuencias de unos cuantos Hertz y energías cercanas a los Joules, hasta las comunicaciones actuales con el uso de la fibra óptica, que funciona con frecuencias de cerca de 10^{14} y energías del orden de 10^{-9} Joules. En algún momento de esta evolución llegaremos al punto donde las frecuencias a las que se transmite la información correspondan a una energía similar a la que se esté utilizando, es decir, tendremos comunicaciones a base de unos cuantos fotones. De aquí la necesidad de desarrollar una teoría cuántica de la luz.

Suelen tratarse los problemas cuánticos relacionados con la luz en la aproximación de unos cuantos modos. Dentro de estos problemas existen una gran cantidad de interacciones de tipo no lineal que tienen la propiedad de poder producir estados no clásicos. Una de las interacciones no lineales más simples corresponde al caso de una no linealidad de Kerr sobre la cual se han publicado una gran cantidad de trabajos (Ref.1-9). En estos trabajos se muestran la producción de fenómenos muy interesantes para los pulsos que se propagan en este tipo de medios, como por ejemplo la existencia de "revivals", la producción de estados comprimidos (squeezing) e incluso la generación de superposición de estados cuasiclásicos (gato de Schrödinger).

Se ha logrado observar experimentalmente la producción de estados comprimidos obtenido mediante una interacción no lineal de éste tipo (Ref.10), mientras que no se ha logrado la observación de gatos. Se sabe que para la observación de gatos en una fibra, se requieren tiempos de interacción exce-

sivamente grandes. Se ha demostrado (Ref.11-12) que debido a los efectos de disipación en la fibra la observación de gatos se vuelve bastante improbable. Dentro de esta tesis se propone una definición formal de modo efectivo, y se analiza un mecanismo independiente de cualquier disipación en la fibra, que hace improbable la producción de gatos por este modo. Este mecanismo consiste en analizar el efecto que tendrían los modos adicionales que no se toman en cuenta dentro de la aproximación por un solo modo sobre nuestro modo principal. Debido a la no linealidad de nuestro sistema, nuestro hamiltoniano permite el intercambio de fotones entre los distintos modos, y para conservar la validez de nuestra aproximación con un solo modo necesitamos que la mayor parte de nuestros fotones se encuentren contenidos en éste modo. Este requisito nos lleva a la necesidad de considerar tan solo tiempos de interacción cortos, tan cortos que no alcanzan para la producción de gatos.

Para el estudio de tiempos de interacción largos se describe a nuestro sistema en términos de solitones cuánticos (Ref.13-14). Se ha mostrado (Ref.15) que los solitones cuánticos son estables, que tienen una forma definida (Ref.16), y que corresponden correctamente al caso clásico en el límite apropiado. La expansión de un estado, en un medio con dispersión cromática pequeña en comparación con los efectos no lineales, en términos de solitones cuánticos requerirá de muchos términos, lo que hará demasiado complicado cualquier tipo de cálculo. Este es también el caso para la óptica no lineal clásica. Un ejemplo de esto está contenido en el libro de Newell y Moloney (Ref.17) donde se presenta la solución analítica exacta a la ecuación de Schrödinger no lineal en términos de solitones cuánticos, mientras que se presenta un algoritmo para cálculos numéricos que no usan esta solución "exacta".

La organización de la presente tesis consta de seis capítulos. El primer capítulo es una introducción a la teoría cuántica del oscilador armónico y se introducen a los operadores del campo que tendrán una gran utilidad en los capítulos subsecuentes. La información contenida en estos capítulos

se puede encontrar también en cualquier libro básico de Mecánica Cuántica (Ref.18-19). En el capítulo dos se presentan los estados cuasiclásicos, que son los estados cuánticos que corresponden a los clásicos en el límite apropiado. Una explicación introductoria sobre los estados cuasiclásicos se encuentra en algunos textos elementales (Ref.18-19), mientras que un estudio más profundo de estos estados se puede encontrar en libros especializados (Ref.20-21). En el capítulo tres se presenta una manera de cuantizar al campo electromagnético, y se obtiene al final una expresión para el hamiltoniano efectivo para el medio no lineal. Los mecanismos para la cuantización del campo electromagnético se encuentran también en libros especializados (Ref.20-21). El capítulo cuatro proporciona una definición formal de modos efectivos, y establece límites bajo los cuales es posible hacer cada aproximación. El capítulo cinco da ejemplos de modos efectivos y muestra los resultados que se pueden obtener bajo la aproximación de un solo modo, mismos resultados que ya habían sido obtenidos por otras personas anteriormente (Ref.1-9). Finalmente el capítulo seis nos da un método experimental para la observación de estos estados no clásicos.

Capítulo 1. El oscilador armónico

1.1 Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de un problema de suma importancia dentro de la Física: el oscilador armónico. La importancia del problema del oscilador armónico radica en que una gran cantidad de sistemas son gobernados (al menos de manera aproximada) por las ecuaciones del oscilador armónico. El oscilador armónico está involucrado también en el estudio del campo electromagnético, como es el caso de la presente tesis. Nosotros sabemos que en una cavidad existen una gran cantidad de posibles ondas estacionarias (modos normales de la cavidad) [18]. El campo electromagnético puede expandirse en términos de estos modos. Se puede demostrar mediante las ecuaciones de Maxwell que cada uno de los términos en esta expansión obedece una ecuación diferencial que es idéntica a la del oscilador armónico cuya frecuencia angular ω es aquella asociada al modo normal [20]. Por lo tanto, el campo electromagnético es formalmente equivalente a un conjunto de osciladores armónicos independientes. Finalmente el oscilador armónico tiene importancia académica, ya que es uno de los pocos problemas de Mecánica Cuántica cuya solución se conoce de manera exacta.

1.2 El Oscilador armónico en Mecánica Clásica

La ecuación que gobierna el movimiento de una partícula en un potencial de oscilador armónico es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad . \quad (102)$$

La solución general a esta ecuación es de la forma

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad , \quad (103)$$

donde A y φ se determinan a partir de condiciones iniciales. La partícula por lo tanto oscila alrededor del origen con amplitud A y frecuencia ω .

El problema del oscilador armónico es un problema de potencial conservativo, por lo que la energía es una constante en el tiempo, y su expresión está dada por

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad . \quad (104)$$

Como mencionamos anteriormente, una de las razones para estudiar el problema del oscilador armónico, es que sirve como aproximación para cualquier potencial alrededor de algún punto estable. Vamos a suponer que x_0 es dicho punto estable, podemos por lo tanto hacer un desarrollo de Taylor del potencial alrededor de este punto

$$V(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + \dots , \quad (105)$$

donde

$$a = V(x_0) , \quad (106)$$

$$b = \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0} , \quad (107)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} . \quad (108)$$

Como el origen de nuestro potencial es arbitrario, nosotros podemos tomar como el cero de nuestro potencial en $V(x_0)$, y debido a que x_0 se trata de un mínimo, entonces $b = 0$. Podemos por lo tanto aproximar nuestro potencial en una pequeña vecindad alrededor de x_0 a segundo orden como

$$V(x) \simeq c(x-x_0)^2 . \quad (109)$$

Note que es exactamente el potencial para el oscilador armónico.

1.3 El oscilador armónico en Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica, podemos sustituir las cantidades clásicas x y p por sus operadores cuánticos análogos x y p , que satisfacen la siguiente relación de conmutación

$$[x, p] = i\hbar \quad (110)$$

Como ejemplo podemos escribir a los operadores x y p en la representación de coordenadas de la siguiente manera

$$x = x \quad (111)$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (112)$$

Podemos obtener el hamiltoniano de nuestro sistema a partir de la energía clásica (104) simplemente sustituyendo x y p por sus contrapartes cuánticas. De tal manera, el hamiltoniano del oscilador armónico queda como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 . \quad (113)$$

Debido a que tenemos un sistema conservativo, la energía del sistema (el hamiltoniano) es una constante, por lo que la función de onda se puede escribir como el producto de una parte temporal y una parte espacial

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) T(t) , \quad (114)$$

donde la parte temporal tiene la siguiente forma:

$$T(t) = T(0) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \quad (115)$$

Mientras que la parte espacial satisface una ecuación de eigenvalores (valores propios)

$$\mathcal{H} \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (116)$$

En principio podríamos intentar resolver la ecuación diferencial que representa la ecuación de eigenvalores, de donde eventualmente obtendríamos la solución en términos de los polinomios de Hermite. Sin embargo vamos a tratar de encontrar las eigenfunciones (funciones propias) mediante un método un poco distinto, donde encontraremos a los operadores del campo que nos permitirán cuantizar al campo electromagnético.

1.4 Operadores de creación y de aniquilación

Tomando la expresión del hamiltoniano del oscilador armónico (113), y suponiendo que x y p conmutan podemos factorizar al hamiltoniano de la siguiente manera

$$H = \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m}} p \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m}} p \right) \quad (117)$$

Sin embargo nosotros sabemos que x y p no conmutan, por lo que debemos agregar a esta expresión el conmutador de x y p de la siguiente forma

$$\mathcal{H} = \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m}} p \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m}} p \right) - i\frac{\omega}{2} [x, p] . \quad (118)$$

Definimos ahora el siguiente operador

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p \quad (119)$$

Y por lo tanto su hermitiano conjugado estará dado por

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p . \quad (120)$$

Con estas nuevas definiciones podemos reescribir el hamiltoniano para el oscilador armónico como

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) . \quad (121)$$

Podemos calcular fácilmente el conmutador de a y a^\dagger de la manera siguiente

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p \right] = \\ &= \frac{i}{2\hbar} ([p, x] - [x, p]) = 1 \end{aligned} \quad (122)$$

La parte importante de nuestro hamiltoniano es la que contiene a estos nuevos operadores, ya que la solución a la parte constante es trivial. Vamos por lo tanto a estudiar las propiedades de este producto particular de operadores al que llamaremos $N = a^\dagger a$. Algunas de éstas son las siguientes:

(i) Los eigenvalores de N son todos positivos o cero

Considere un eigenvector (vector propio) $|\Psi_n^k\rangle$ de N , donde n representa su eigenvalor y k distingue entre distintas eigenfunciones con el mismo eigenvalor en el caso en que exista degeneración. La norma al cuadrado de cualquier función es siempre positiva o igual a cero, entonces

$$\|a|\Psi_n^k\rangle\|^2 = \langle\Psi_n^k|a^\dagger a|\Psi_n^k\rangle = n\langle\Psi_n^k|\Psi_n^k\rangle \geq 0 \quad (123)$$

Como la norma de cualquier función es no negativa, entonces $n \geq 0$.

(ii) a es un operador de descenso

Primero probaremos que $a|\Psi_0^k\rangle = 0$. Tomando la misma deducción de arriba observamos que cuando $n = 0$ la norma al cuadrado de $a|\Psi_0^k\rangle$ es igual a cero. Esto sólo puede ocurrir si el vector mismo es igual a cero. Ahora probamos que $a|\Psi_n^k\rangle$ tiene un eigenvalor igual a $n-1$. Calculamos primero el conmutador de a con N .

$$[N, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a . \quad (124)$$

Calculamos ahora el eigenvalor de $a|\Psi_n^k\rangle$:

$$Na|\Psi_n^k\rangle = (aN - a)|\Psi_n^k\rangle = (n-1)a|\Psi_n^k\rangle . \quad (125)$$

Por lo tanto $a|\Psi_n^k\rangle$ es un operador de descenso.

(iii) a^\dagger es un operador de ascenso

Calculamos primero el conmutador de a^\dagger con N .

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger . \quad (126)$$

Calculamos ahora el eigenvalor de $a^\dagger |\Psi_n^k\rangle$:

$$Na^\dagger |\Psi_n^k\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |\Psi_n^k\rangle = (n+1)a^\dagger |\Psi_n^k\rangle . \quad (127)$$

Por lo tanto $a^\dagger |\Psi_n^k\rangle$ es un operador de ascenso.

(iv) **El espectro del operador N está compuesto por enteros no negativos.**

Nosotros ya demostramos anteriormente que los eigenvalores de N deben ser positivos. Supongamos que tenemos un cierto eigenvalor (m) de N no entero. Mediante aplicaciones sucesivas de operadores de descenso, nosotros podemos continuar obteniendo eigenfunciones con eigenvalores $m-1$, $m-2$, $m-3$,... Lo que se observa es que esta secuencia no pasaría por el cero, ya que m no es entero, y por lo tanto entraría a eigenvalores negativos, lo cual no puede ser. Por lo tanto todos los eigenvalores de N son enteros no negativos.

(v) **Todos los estados son no degenerados** El problema que estamos tratando corresponde a un problema unidimensional, por lo que no existe degeneración. Por lo tanto ningún estado es degenerado y podemos omitir el superíndice k .

1.5 Estados fotónicos

A continuación vamos a introducir una nueva notación para estos estados. De la relación de Planck nosotros sabemos que la energía de un fotón de frecuencia ω está dada por $E = \hbar\omega$. Vamos a calcular el hamiltoniano sobre la función $|\Psi_n\rangle$, lo que obtenemos es

$$\mathcal{H} |\Psi_n\rangle = n\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega |\Psi_n\rangle . \quad (128)$$

El segundo término de la energía corresponde a la energía de vacío que es una consecuencia de la no conmutatividad de las variables x y p , mientras que el primer término corresponde a la energía que tendrían n fotones de frecuencia ω . Se puede entender por lo tanto al estado $|\Psi_n\rangle$ como el estado con n fotones

(osciladores) en el campo, y por lo tanto lo denotaremos simplemente $|n\rangle$ (denominados estados fotónicos). Con esta nueva notación se puede comprender un poco el nombre de operador de aniquilación al operador de descenso, ya que si el operador de aniquilación actúa sobre un estado con n fotones, éste aniquila un fotón y nos produce un estado con $n-1$ fotones; e igualmente si hacemos actuamos con el operador de ascenso sobre un estado de n fotones, éste nos crea un fotón y nos produce un estado con $n+1$ fotones. Con estas ideas en la cabeza podemos generar el eigenestado del oscilador armónico con n fotones en el campo simplemente mediante aplicaciones sucesivas del operador de creación sobre el estado de vacío (estado con cero fotones), lo único que habría que cuidar es que cada uno de los estados que produzcamos esté debidamente normalizado.

Ortonormalización y completez. Supongamos que tenemos el estado base normalizado, entonces el primer estado estará dado por

$$|1\rangle = c_1 a^\dagger |0\rangle , \quad (129)$$

donde c_1 es simplemente una constante de normalización. Calculamos esta constante del modo siguiente

$$1 = \langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 | a c_1^* c_1 a^\dagger | 0 \rangle = |c_1|^2 \langle 0 | (a^\dagger a + 1) | 0 \rangle = |c_1|^2 . \quad (130)$$

Entonces $c_1 = 1$ por alguna fase que tomaremos igual a cero.

Podemos hacer lo mismo para el estado con n fotones de la siguiente manera

$$|n\rangle = c_n a^\dagger |n-1\rangle . \quad (131)$$

Calculando la constante de modo análogo a como lo hicimos para el primer caso obtenemos

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle . \quad (132)$$

Repitiendo este cálculo con $n-1, n-2, \dots, 1$ obtenemos

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle . \quad (133)$$

Podemos reescribir la relación (137) de la siguiente manera

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle . \quad (134)$$

Aplicando a en ambos lados obtenemos

$$a a^\dagger |n\rangle = (a^\dagger a + 1) |n\rangle = (n+1) |n\rangle = \sqrt{n+1} a |n+1\rangle . \quad (135)$$

Reescribiendo esta última igualdad tenemos que

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle . \quad (136)$$

Esta relación, junto con la relación (139) serán muy importantes en los cálculos que se realizarán más adelante, y nos dicen cómo actúan nuestros operadores del campo sobre estados fotónicos. La ortonormalización de nuestros estados está asegurada desde el momento en que observamos que cada eigenfunción corresponde a un eigenvalor distinto, es decir, desde que vimos que no existía degeneración. Podemos expresar esta relación de ortonormalización como

$$\langle n | m \rangle = \delta_{mn} . \quad (137)$$

Hemos encontrado todas las eigenfunciones de la observable H , por lo tanto este conjunto de soluciones debe formar una base, es decir, debe ser un conjunto completo. La relación de completitud se escribe como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 . \quad (138)$$

Vale la pena mencionar a esta altura algunos puntos. Primero, se puede demostrar que la solución encontrada para la función con n fotones (138), coincide con la que se obtiene en términos de los polinomios de Hermite verificando de esta manera la validez del método. Segundo, los estados $|n\rangle$ no tienen un análogo clásico, su energía es distinta de cero, aún cuando sus valores esperados de posición y momento son iguales a cero. Se puede calcular también la incertidumbre en la posición y en el momento, y se observa que ésta crece linealmente con n . La analogía con el caso clásico únicamente se puede establecer mediante combinaciones lineales de estados fotónicos, estas combinaciones nos llevarán a la definición de estados coherentes. Tercero, nosotros mencionamos en la introducción que podíamos tratar al campo electromagnético como una colección de osciladores independientes unos de otros. Por lo que si despreciamos por un momento la energía de vacío, podemos proponer que el hamiltoniano para el campo electromagnético en el caso de una sola dimensión estará dado por

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} dk a_k^\dagger a_k . \quad (139)$$

en donde incluimos el hecho de que los osciladores sean independientes bajo la condición siguiente

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta(k-p) . \quad (140)$$

Una de las condiciones que debe cumplir una nueva teoría que pretenda representar la realidad mejor que cualquier otra, es que debe al menos reproducir los éxitos que haya tenido alguna teoría anterior. En el capítulo siguiente estudiaremos los estados cuánticos que se reducen a sus análogos clásicos en los límites apropiados.

Capítulo 2. Estados coherentes

2.1 Introducción

En esta sección nos haremos la pregunta de si es posible construir un estado cuántico que nos lleve a predicciones físicas similares a las que esperaríamos en la teoría clásica, al menos para un oscilador macroscópico. Dentro de este estudio encontraremos unos estados nuevos que entre otras cosas cuentan, como veremos más adelante, con una importancia particular ya que forman parte de una familia más grande de estados de mínima incertidumbre.

2.2 Estados cuasiclásicos

Las ecuaciones clásicas de movimiento para el oscilador armónico en una sola dimensión son [18-12]

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{m} p(t) , \quad (201)$$

$$\frac{d}{dt} p(t) = -m \omega^2 x(t) . \quad (202)$$

Para simplificar todos los cálculos definimos un nuevo par de variables que son simplemente proporcionales a las anteriores de la siguiente manera:

$$X(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x(t) . \quad (203)$$

$$P(t) = \sqrt{\frac{1}{\hbar m \omega}} p(t) . \quad (204)$$

De manera que las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\frac{d}{dt} X(t) = \omega P(t) , \quad (205)$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\omega X(t) \quad (206)$$

Podemos encontrar clásicamente la solución de estas ecuaciones como

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \exp(-i\omega t) + \alpha^* \exp(i\omega t)) , \quad (207)$$

$$P(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha \exp(-i\omega t) - \alpha^* \exp(i\omega t)) , \quad (208)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (X(0) + iP(0)) . \quad (209)$$

Con esta misma solución podemos calcular la energía de nuestro sistema. Dado que nuestro sistema es conservativo, podemos calcular la energía en el instante inicial, que será la misma que la energía para cualquier otro momento. De esta manera obtenemos que la energía es igual a

$$E = \hbar\omega |\alpha|^2 . \quad (210)$$

Vamos a considerar ahora un estado $|\Psi(t)\rangle$ y vamos ahora a calcular sobre este estado la evolución temporal del operador de aniquilación. Podemos calcular esta evolución de la siguiente manera:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle a \rangle = \langle [a, \mathcal{H}] \rangle = \hbar\omega \langle a \rangle . \quad (211)$$

Podemos resolver esta ecuación de manera trivial obteniendo

$$\langle a \rangle (t) = \langle a \rangle \Big|_{t=0} \exp(-i\omega t) . \quad (212)$$

Repitiendo este mismo procedimiento para el operador a^\dagger obtenemos

$$\langle a^\dagger \rangle (t) = \langle a^\dagger \rangle \Big|_{t=0} \exp(i\omega t) . \quad (213)$$

Los operadores de creación y aniquilación son combinaciones lineales de los operadores de posición y momento, por lo que podemos invertir las relaciones (119-120) y poner a los operadores de posición y momento en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) . \quad (214)$$

$$P = -i \frac{1}{\sqrt{2}} (a - a^\dagger) . \quad (215)$$

Calculando la evolución temporal del valor esperado de estos operadores en términos de lo ya calculado para los operadores de creación y aniquilación obtenemos lo siguiente

$$\langle X \rangle (t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle a \rangle \Big|_{t=0} \exp(-i\omega t) + \langle a^\dagger \rangle \Big|_{t=0} \exp(i\omega t) \right) \quad (216)$$

$$\langle P \rangle (t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\langle a \rangle \Big|_{t=0} \exp(-i\omega t) - \langle a^\dagger \rangle \Big|_{t=0} \exp(i\omega t) \right) \quad (217)$$

Esta relación sería la misma que la calculada clásicamente si el valor esperado de a en el tiempo inicial cumple la condición

$$\langle a \rangle \Big|_{t=0} = \alpha . \quad (218)$$

Ahora calculamos el valor esperado del hamiltoniano de nuestro sistema y obtenemos

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \hbar\omega \langle a^\dagger a \rangle \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} \hbar\omega . \quad (219)$$

Si nuestro oscilador es un oscilador macroscópico, entonces podemos despreciar la energía de vacío, y por lo tanto la segunda condición que debe cumplirse es

$$\langle a^\dagger a \rangle \Big|_{t=0} = |\alpha|^2 . \quad (220)$$

Con estas dos condiciones podremos obtener el estado cuántico $|\Psi(0)\rangle$ correspondiente a un oscilador clásico.

2.3 Eigenestados del operador de aniquilación

Vamos a demostrar que los estados cuasiclásicos, cuyos valores esperados definimos anteriormente, son eigenestados del operador de aniquilación. Para ésto definiremos un nuevo operador definido de la manera siguiente

$$b = a - \alpha . \quad (221)$$

Calculemos la norma cuadrada del vector formado por este nuevo operador actuando sobre un estado cuasiclásico

$$\|b|\Psi(0)\rangle\|^2 = \langle \Psi(0) | a^\dagger a | \Psi(0) \rangle - \alpha \langle \Psi(0) | a^\dagger | \Psi(0) \rangle - \alpha^* \langle \Psi(0) | a | \Psi(0) \rangle + \alpha^* \alpha . \quad (222)$$

Aplicando las relaciones (218,220) de la sección anterior obtenemos

$$\|b|\Psi(0)\rangle\|^2 = |\alpha|^2 - |\alpha|^2 - |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 0 . \quad (223)$$

Como la norma del vector es cero la única opción es que el vector mismo sea cero. Reescribiendo ésto y recordando la definición del operador b obtenemos que

$$a|\Psi(0)\rangle = \alpha|\Psi(0)\rangle . \quad (224)$$

Por lo tanto el estado cuasiclásico es eigenestado del operador de aniquilación, y tiene un eigenvalor igual a α . Vamos a proponer una nueva notación para este tipo de estados y los vamos a denotar como $|\alpha\rangle$ donde α representa al eigenvalor correspondiente a este eigenvector.

2.4 Expansión de estados coherentes en estados fotónicos

Debido a la propiedad de completitud de los estados fotónicos podemos expandir cualquier otro estado en términos de ellos. En particular es posible hacer ésto para un estado cuasiclásico. Vamos a representar a un estado coherente arbitrario como combinación lineal de estados en fotónico de la siguiente manera

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (225)$$

Aplicaremos a ambos lados el operador de aniquilación. Por lo visto anteriormente el estado cuasiclásico es eigenestado del operador de aniquilación, por lo que tendremos

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_n c_n a|n\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n} |n-1\rangle . \quad (226)$$

Podemos cambiar el índice de la suma del lado izquierdo por $m = n-1$ y expandir el lado izquierdo

$$\sum_m c_m \alpha |m\rangle = \sum_m c_{m+1} \sqrt{m+1} |m\rangle . \quad (227)$$

Igualando los coeficientes obtenemos una relación de recurrencia para nuestros coeficientes

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n . \quad (228)$$

Iterando esta relación de recurrencia podemos expresar a todos los coeficientes en términos de c_0 de la siguiente manera

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 . \quad (229)$$

Lo único que falta para poder determinar todos los coeficientes es determinar el coeficiente inicial. Este coeficiente nos proporciona la normalización de nuestro estado cuasiclásico, y lo calcularemos de la siguiente manera

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_n |c_n|^2 = |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 \exp(|\alpha|^2) . \quad (230)$$

Por lo tanto la expansión completa de nuestros estados cuasiclásicos en términos de estados fotónicos queda como

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (231)$$

Debido a la presencia de α misma en la expansión en términos de estados fotónicos, podemos estar seguros que cualquier estado cuasiclásico estará unívocamente definido mediante su eigenvalor.

2.5 Estados cuasiclásicos como estados de mínima incertidumbre

Vamos a calcular a continuación los valores esperados de los operadores de posición y momento así como sus incertidumbres en un estado cuasiclásico. Como hicimos anteriormente podemos poner estos operadores en términos de los operadores de creación y aniquilación cuya acción ya conocemos sobre un estado cuasiclásico

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}(\alpha) , \quad (232)$$

$$\langle \alpha | p | \alpha \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im}(\alpha) , \quad (233)$$

$$\langle \alpha | x^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1] , \quad (234)$$

$$\langle \alpha | p^2 | \alpha \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2] , \quad (235)$$

Con estos números, nosotros podemos calcular la incertidumbre en la posición y el momento. Como estamos tratando de operadores hermitianos la incertidumbre está dada por

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} , \quad (236)$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2} . \quad (237)$$

El producto de estas dos incertidumbres es independiente de α , y por lo tanto es el mismo para cualquier estado cuasiclásico de que se trate, y está dado por

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} . \quad (238)$$

Este es el valor mínimo que permite el principio de incertidumbre, es por ésto que los estados cuasiclásicos son estados de mínima incertidumbre. Estos estados además conservan su forma al estar en un potencial armónico simple, es

por esto que también se les denomina estados coherentes. De las relaciones de incertidumbre en la posición y momento podemos observar que tienen valores fijos ambas. Si nosotros en vez de calcular la incertidumbre para estos operadores, la hubieramos calculado para los operadores transformados (203,204) lo que hubieramos encontrado es que la incertidumbre de los dos operadores transformados sería la misma y sería igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Podríamos pensar que por lo tanto los estados coherentes no son los únicos estados de *mínima* incertidumbre. Este es en realidad el caso, los estados coherentes son un caso particular de un grupo más general de estados de *mínima* incertidumbre llamados estados comprimidos (squeezed states en ingles), con la propiedad de tener la misma incertidumbre en ambas componentes. Se les llama componentes a las partes hermitianas — componente en fase — y antihermitianas — componente en cuadratura — del operador de aniquilación, que para nuestro caso corresponden simplemente a nuestros operadores transformados de posición y momento (203,204).

2.6 Operador de desplazamiento

Definiremos a continuación un nuevo operador que llamaremos de desplazamiento, y comprobaremos que la acción del operador de desplazamiento sobre un estado vacío (sin ningún fotón) nos puede producir un estado coherente. La definición del operador de desplazamiento es la siguiente

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) . \quad (239)$$

Este es un operador unitario ya que

$$D(\alpha) D^\dagger(\alpha) = D^\dagger(\alpha) D(\alpha) = 1 . \quad (240)$$

Haremos actuar ahora el operador de desplazamiento sobre un estado vacío, pero antes estableceremos una importante relación entre los conmutadores. Esta relación es la llamada relación de Baker-Hausdorff y lo que dice es lo siguiente

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2} [A, B]\right) , \quad (241)$$

donde A y B representan dos operadores que cumplen con la condición de que el conmutador de A con B conmuta tanto con A como con B . Para nuestro caso del operador de desplazamiento nuestros operadores A y B son proporcionales a los operadores de creación y aniquilación, y como su

conmutador es igual a uno, esto conmuta con cualquier cosa. Por lo tanto podemos reescribir a nuestro operador de desplazamiento de una manera un tanto distinta como

$$D(\alpha) = \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a) . \quad (242)$$

Calculamos ahora sí su acción sobre un estado de vacío. El primer operador que actúa sobre el vacío es una exponencial de un operador de aniquilación. Podemos expandir esta exponencial como suma de potencias del operador de aniquilación. Debido a que la acción de un operador de aniquilación sobre un estado de vacío nos da cero, el único término de esta suma que va a sobrevivir es el primero que no contiene ningún operador de aniquilación. Este término es igual a uno, por esto, la acción de la primera exponencial sobre un estado de vacío nos deja al estado totalmente igual. Escribiendo lo que queda tenemos

$$\begin{aligned} D(\alpha) |0\rangle &= \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \\ &= \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \end{aligned} \quad (243)$$

donde para la última expresión se utilizó la relación (138). Podemos ver que esta última relación corresponde totalmente a la expansión de un estado coherente en términos de estados en fotónico (231), por lo tanto la acción del operador de desplazamiento sobre un estado de vacío nos genera un estado coherente.

Para poder explicar el nombre de operador de desplazamiento, es necesario hacer algunos cuantos cálculos más. Primero, se puede demostrar por inducción la siguiente relación de conmutación

$$[a, (a^\dagger)^n] = n (a^\dagger)^{n-1} . \quad (244)$$

Es decir el conmutador funciona como una especie de derivada. Calcularemos ahora otro nuevo operador

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = D^\dagger(\alpha) a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(-\alpha^* a) . \quad (245)$$

Utilizando la relación de conmutación (244) podemos pasar al operador de aniquilación del lado derecho

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) &= D^\dagger(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left((a^\dagger)^n a + n (a^\dagger)^{n-1} \right) \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(-\alpha^* a) \\ &= D^\dagger(\alpha) D(\alpha) (a + \alpha) = a + \alpha . \end{aligned} \quad (246)$$

Por lo tanto el operador $D(\alpha)$ desplaza al operador de aniquilación en α , es por esto que se llama de desplazamiento. Se puede demostrar una relación análoga para el operador de creación y se obtiene

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \quad (247)$$

Este conjunto de ecuaciones nos dan las herramientas para conmutar a los operadores del campo con el operador de desplazamiento.

2.7 Relaciones de ortonormalidad y completez

Para finalizar el estudio de los estados coherentes vamos a calcular el producto punto de dos estados coherentes con parámetros α y β .

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \quad (248)$$

Por la ortogonalidad de los estados fotónicos esta doble suma se convierte en una sola suma:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^m}{m!} = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - 2\alpha\beta^* + |\beta|^2)\right). \end{aligned} \quad (249)$$

La norma al cuadrado de este producto punto está dado por

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2). \quad (250)$$

Este resultado muestra que aunque los estados coherentes no son ortogonales entre sí, dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ se vuelven aproximadamente ortogonales en el límite $|\alpha - \beta| \gg 1$. Los estados coherentes forman un continuo de estados bidimensional (parte real y compleja), por lo que esperamos que sean de hecho sobrecompletos. Vamos a considerar la siguiente integral:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int_0^\infty dr \exp(-r^2) r^{m+n+1} \int_0^{2\pi} \exp(i(m-n)\theta) d\theta. \quad (251)$$

La integral angular vale $2\pi\delta_{mn}$. por lo que nuestra integral queda

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty d\rho \rho^n \exp(-\rho). \quad (252)$$

Esta última integral vale $n!$, y nuestra integral inicial queda como

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1 . \quad (253)$$

Por lo que nuestra relación de (sobre)completez queda demostrada.

Para concluir únicamente escribiremos las definiciones equivalentes que se pueden dar de los estados coherentes. Los estados coherentes son:

- a) Los estados cuánticos correspondientes a los estados clásicos en el límite de los grandes números.
- b) Estados propios del operador de aniquilación.
- c) Estados de mínima incertidumbre con igual incertidumbre en ambas componentes.
- d) Estados generados por la acción del operador de desplazamiento sobre el estado de vacío.

Los estados coherentes son los estados más clásicos posibles dentro de los estados cuánticos. Debido a su propiedad de alta coherencia, son estos estados los utilizados para representar la luz producida por una fuente láser.

Capítulo 3. Cuantización para el medio no lineal

3.1 Introducción

El objetivo de esta parte es encontrar una expresión para el hamiltoniano para un medio con no linealidad de Kerr, en términos de los operadores del campo. La cuantización de cualquier campo siguiendo las ideas que vamos a desarrollar a continuación recibe el nombre de segunda cuantización.

3.2 Medio lineal

Vamos a buscar inicialmente la cuantización para el caso más sencillo que podamos encontrar, esto es, para el medio lineal. De la electrodinámica clásica, nosotros sabemos que el campo eléctrico debe satisfacer una ecuación de onda de la siguiente manera

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 E = 0, \quad (302)$$

donde μ corresponde a la permeabilidad magnética del medio y ϵ a la permitividad eléctrica. Nuestro interés va a estar centrado en el estudio de un haz de luz (cuasimonocromático) que se propaga a lo largo de un medio no lineal (por ejemplo de una fibra óptica). por lo que podemos considerar a nuestro campo eléctrico como una superposición de ondas planas con cierta estructura transversal. Si suponemos que nuestro haz se propaga en la dirección z , el campo eléctrico para una sola frecuencia estaría dado por

$$E_k = M_k(x, y) \exp(ikz) c_k(t), \quad (303)$$

donde M_k cuenta por la estructura transversal, es decir, es función de x y de y , y c_k cuenta por la dependencia temporal, de tal manera que estará dado

por

$$c_k(t) = c_k(0) \exp(-i\omega_k t) \quad (304)$$

El campo eléctrico completo (al menos su magnitud), estará formado por la integral de expresiones de la forma (303) para todas las frecuencias, esto es

$$E = \int dk M_k \exp(ikz) c_k + \text{c.c.} , \quad (305)$$

donde c.c. quiere decir complejo conjugado. De las ecuaciones de Maxwell podemos obtener fácilmente el campo de intensidad magnética (H) tomando la relación

$$\nabla \times H = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} E . \quad (306)$$

Tenemos que el campo de intensidad magnética está dado por

$$H = \int dk N_k \exp(ikz) c_k + \text{c.c.} , \quad (307)$$

donde

$$N_k = -\frac{\epsilon\omega_k}{kc} M_k \quad (308)$$

Como estamos en el medio lineal, las siguientes dos relaciones se cumplen

$$D = \epsilon E , \quad B = \mu H . \quad (309)$$

Por lo tanto, podemos expresar a D y a B de manera similar que con E y H . Vamos ahora a calcular la energía de nuestro campo electromagnético. La energía del campo electromagnético está dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (ED + BH) . \quad (310)$$

Calculamos el primer término de nuestra integral

$$\begin{aligned}
\int d^3x (ED) &= \int d^3x dk dp \epsilon M_k M_p \times \\
&\quad \times (\exp(ikz) c_k + \exp(-ikz) c_k^*) (e^{ipz} c_p + e^{-ipz} c_p^*) = \\
&= \int d^3x dk dp \epsilon M_k M_p \times \\
&\quad \times \left(e^{i(k+p)z} c_k c_p + e^{i(k-z)z} c_k c_p^* + e^{i(p-k)z} c_p c_k^* + e^{-i(p+k)z} c_p^* c_k^* \right) .
\end{aligned} \tag{311}$$

Como las exponenciales son los únicos términos en nuestro integrando que dependen de z podemos realizar estas integrales inmediatamente observando primero que los términos que contengan un exponente de la forma $k+p$ oscilarán demasiado rápido como para dar alguna contribución importante a nuestro hamiltoniano, ya que estos términos promediarán aproximadamente cero. Para calcular estas integrales sólo debemos recordar la expresión de la delta de Dirac en la representación de la transformada de Fourier, esta expresión es

$$\int dz \exp(ikz) = 2\pi\delta(k) . \tag{312}$$

Sustituyendo esta integral, y considerando la aproximación mencionada arriba obtenemos lo siguiente

$$\int d^3x (ED) = 4\pi\epsilon \int dx dy dk M_k^2 c_k^* c_k . \tag{313}$$

Los coeficientes temporales no dependen de las coordenadas transversales, y podemos suponer también que los coeficientes transversales no dependen fuertemente de la frecuencia, lo que nos va a simplificar un poco más la expresión para nuestra energía. La integral de la energía magnética es muy similar, solamente cambian nuestros coeficientes, por lo que la expresión completa para la energía es

$$\mathcal{H} = \int dk m_k c_k^* c_k , \tag{314}$$

donde

$$m_k = \left(\frac{1}{8\pi} \int dx dy M_k^2 \left(\epsilon + \frac{\epsilon^2 \omega_k^2 \mu}{c^2 k^2} \right) \right) . \quad (315)$$

Esta expresión para la energía, la compararemos con la expresión para la energía en el caso cuántico. Por lo tanto tomaremos como postulado que esta energía obtenida clásicamente será igual a la energía calculada cuánticamente que es

$$\mathcal{H} = \int dk \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k , \quad (316)$$

de donde se obtiene directamente la siguiente identificación

$$c_k = \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{m_k}} a_k . \quad (317)$$

Esta es la identificación que buscábamos, ya que con ayuda de esta identificación podremos expresar a nuestro campo eléctrico, y por lo tanto también todos los demás, en términos de nuestros operadores del campo. Sustituyendo esta nueva identificación en la expresión para nuestro campo eléctrico (305) obtenemos lo siguiente

$$E = \int dk L_k \left(\exp(ikz) a_k + \exp(-ikz) a_k^\dagger \right) , \quad (318)$$

donde

$$L_k = M_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{m_k}} . \quad (319)$$

De la expresión del campo eléctrico observamos que esto se parece a una transformada de Fourier. En la aproximación cuasimonocromática nuestros coeficientes L_k no dependen fuertemente de k , por lo que pueden salir de nuestra integral. Si definimos un nuevo tipo de operadores como la transformada de Fourier de nuestros operadores del campo de la siguiente manera

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \exp(ikz) a_k . \quad (320)$$

Tenemos que nuestro campo eléctrico adquiere la forma siguiente

$$E = \sqrt{2\pi} L \left(a(z) + a^\dagger(z) \right) \quad (321)$$

Esta expresión nos permitirá proponer de manera simple una expresión para nuestro hamiltoniano en el caso de un medio no lineal. Podemos entender al operador $a(z)$ como un operador de aniquilación de fotones en el punto z de nuestro medio, a diferencia del operador anterior que nos aniquilaba un fotón pero de cierta frecuencia. E será por lo tanto el operador del campo en el punto (x, y, z) .

3.3 Medio no lineal

Vamos ahora a considerar el caso de un medio no lineal homogéneo e isotrópico. El caso más sencillo de un medio que cumpla con estas características es un medio con no linealidad cúbica. En este caso la polarización estará dada por

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(3)}|E|^2 E \quad (322)$$

Con esta polarización podemos calcular el producto del campo eléctrico por el campo de desplazamiento que aparece en la energía electromagnética del modo siguiente

$$ED = E(\epsilon_0 E + P) = E((\epsilon_0 + \chi^{(1)})E + \chi^{(3)}|E|^2 E) = \epsilon E^2 + \chi^{(3)}|E|^2 E^2. \quad (323)$$

El primer término cuenta por la energía lineal que nosotros ya calculamos, mientras que la segunda parte incluye la contribución no lineal de nuestro medio, y podemos observar que es proporcional a la cuarta potencia de nuestro campo eléctrico. Utilizaremos ahora esta nuestra expresión para el campo eléctrico que recién obtuvimos (321), para calcular cuánto vale esta contribución no lineal a la energía de nuestro medio

$$\begin{aligned}
\int d^3x E^4 &= 4\pi^2 \left(\int dx dy L^2 \right) \int dz (a(z) + a^\dagger(z))^4 = \\
&= 4\pi^2 \left(\int dx dy L^2 \right) \times \\
&\quad \times \int dz \left(a(z)^4 + 4a^\dagger(z)a(z)^3 + 6a^\dagger(z)^2a(z)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4a^\dagger(z)^3a(z) + a^\dagger(z)^4 \right) . \tag{324}
\end{aligned}$$

De los cinco términos anteriores que están incluidos en la integral, sólo el tercero da una contribución importante, ya que es el término resonante, los demás términos debido a que contienen en grados desiguales a los operadores de creación y aniquilación, serán términos que oscilarán demasiado rápido, por lo que no darán ninguna contribución importante a nuestra energía. Con esta aproximación resonante, nuestro hamiltoniano para el medio no lineal puede quedar expresado de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{nl} = \int dk \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + S \int dz a^\dagger(z)^2 a(z)^2 , \tag{325}$$

donde

$$S = 24\pi^2 \left(\int dx dy L^2 \right) . \tag{326}$$

En esta última ecuación tenemos tanto operadores de creación de una determinada frecuencia como operadores de creación en un punto determinado de la fibra. En la siguiente sección vamos a transformar este hamiltoniano a una representación más adecuada.

3.4 Transformación a la representación de interacción

Vamos a suponer por un momento que estamos trabajando con una luz cuasi-monocromática. Podemos aproximar nuestra frecuencia en el hamiltoniano mediante un desarrollo de Taylor hasta segundo orden alrededor de nuestra frecuencia central. De esta manera nuestro hamiltoniano lineal queda como

$$\mathcal{H}_0 \simeq W_0 + W_i , \tag{327}$$

donde

$$W_0 = \hbar \int dk (\omega_0 + \omega'_0(k - k_0)) a_k^\dagger a_k, \quad (328)$$

$$W_i = \hbar \int dk \frac{\omega''_0}{2} (k - k_0)^2 a_k^\dagger a_k. \quad (329)$$

Procedemos ahora a ponernos en la representación de interacción, esto es, suponemos que la solución es de la forma

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} W_0 t\right) \varphi \quad (330)$$

Con esta sustitución la ecuación de Schrödinger queda de la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = V \varphi, \quad (331)$$

donde

$$V = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W_0 t\right) W_i \exp\left(-\frac{i}{\hbar} W_0 t\right) = W_i. \quad (332)$$

Ya que W_i y W_0 conmutan. Para lograr ponernos en la representación de interacción debemos estudiar primero cómo se transforman nuestros operadores en nuestro nuevo sistema de referencia. Si \bar{a} representa a nuestros operadores en la representación de interacción, entonces éstos son iguales a

$$\bar{a}_{p-p_0} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W_0 t\right) a_p \exp\left(-\frac{i}{\hbar} W_0 t\right). \quad (333)$$

Para efectuar este cálculo primero debemos saber cuál es el conmutador de a con W_0 .

$$\begin{aligned} a_p W_0 &= a_p \hbar \int dk (\omega + \omega'(k - k_0)) a_k^\dagger a_k = \\ &= \hbar \int dk (\omega + \omega'(k - k_0)) (a_k^\dagger a_p + \delta(k - p)) a_k = \\ &= (W_0 + \hbar (\omega + \omega'(p - p_0))) a_p. \end{aligned} \quad (334)$$

Podemos repetir este mismo cálculo n veces para obtener

$$a_p W_0^n = (W_0 + \hbar (\omega + \omega'(p - p_0)))^n a_p \quad (335)$$

Con esto podemos calcular nuestro operador transformado

$$\begin{aligned}\bar{a}_{p-p_0} &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}W_0t\right) \sum_n \frac{(-it)^n}{\hbar^n n!} \left(W_0 + \hbar(\omega + \omega'(p-p_0))\right)^n a_p = \\ &= \exp(-it(\omega + \omega'(p-p_0))) a_p\end{aligned}\quad (336)$$

Hacemos finalmente un cambio de variable $\nu = k - k_0$, con lo que nuestra transformación queda como

$$\bar{a}_\nu = \exp(-it(\omega + \omega'\nu)) a_{k_0+\nu} . \quad (337)$$

Ahora nuestro hamiltoniano lineal de interacción queda como

$$V = \hbar \int d\nu \frac{\omega''_0}{2} \nu^2 \bar{a}_\nu^\dagger \bar{a}_\nu \quad (338)$$

Si cambiamos a la representación para la parte lineal, entonces debemos hacerlo también para la parte no lineal. El problema es que en la parte no lineal tenemos un tipo de operadores distintos a los operadores de la parte lineal. Debemos encontrar cuál es la transformada de Fourier de nuestros nuevos operadores, y traducirlo a la transformada de Fourier de los viejos operadores.

$$\begin{aligned}\bar{a}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\nu \exp(i\nu z) \bar{a}_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\nu \exp(i\nu z - it(\omega + \omega'\nu)) a_{k_0+\nu} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik_0(\omega't - z) - i\omega t) \int dk \exp(ik(z - \omega't)) a_k = \\ &= \exp(ik_0(\omega't - z) - i\omega t) a(z - \omega't)\end{aligned}\quad (339)$$

Entonces la relación de las transformadas difiere simplemente por una fase

$$a(z) = \bar{a}(z + \omega't) \exp(ik_0 z - i\omega t) \quad (340)$$

Por lo que su combinación en el hamiltoniano no lineal queda igual que en la representación anterior (325) tan solo cambiando la notación de nuestros

operadores. Nuestro hamiltoniano aún no está como quisieramos, ya que la parte lineal del hamiltoniano tiene un tipo de operadores y la no lineal otro. Vamos a modificar la parte lineal para colocarlo todo en términos del mismo tipo de operadores. La expresión de nuestros operadores en términos de sus transformadas de Fourier está dado simplemente por la transformada de Fourier inversa

$$\bar{a}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int dz \exp(-i\nu z) \bar{a}(z) \quad (341)$$

Sustituyendo ésto en la expresión para la parte lineal de nuestro hamiltoniano de interacción obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} V &= \frac{\omega'_0 \hbar}{4\pi} \int d\nu ds dz \nu^2 \exp(i\nu(s-z)) \bar{a}^\dagger(s) \bar{a}(z) = \\ &= \frac{\omega'_0 \hbar}{4\pi} \int d\nu ds dz \bar{a}^\dagger(s) \bar{a}(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} \exp(i\nu(s-z)) \end{aligned} \quad (342)$$

Integramos por partes esta última ecuación, de donde obtenemos lo siguiente

$$V = \frac{\omega''_0 \hbar}{4\pi} \int d\nu ds dz \left(\frac{\partial}{\partial s} \bar{a}^\dagger(s) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}(z) \right) \exp(i\nu(s-z)) \quad (343)$$

De esta última expresión podemos integrar directamente con respecto de ν recordando la expresión (312) y obtenemos

$$V = \frac{\omega''_0 \hbar}{2} \int dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}^\dagger(z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}(z) \right) \quad (344)$$

El resultado final de todo este proceso es el resultado buscado que corresponde a la expresión para el hamiltoniano para el medio no lineal que queda expresado de la siguiente manera

$$H = \hbar \zeta \int dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}^\dagger(z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}(z) \right) + \hbar \eta \int dz \bar{a}^\dagger(z)^2 \bar{a}(z)^2, \quad (345)$$

donde

$$\zeta = \omega''_0 \hbar / 2, \quad \eta = S / \hbar. \quad (346)$$

Como éste es el hamiltoniano con el que estaremos trabajando de ahora en adelante, con objeto de simplificar la notación, eliminaremos en lo sucesivo el circunflejo de operador transformado y denotaremos a nuestros operadores del campo simplemente como a . Se puede calcular la evolución de nuestro operador de aniquilación mediante la ecuación de Heisenberg y el hamiltoniano que recién acabamos de calcular. Este cálculo nos genera la siguiente ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}(z) = \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{a}(z) + 2\eta \bar{a}^\dagger(z) \bar{a}(z)^2, \quad (347)$$

esta ecuación tiene la forma usual de la ecuación de Schrödinger no lineal, por lo que los resultados que obtengamos con nuestro hamiltoniano del medio no lineal (345) reflejarán de manera adecuada las propiedades de un medio con no linealidad cúbica.

Capítulo 4. Modos efectivos

4.1 Introducción

El objetivo de esta sección es dar una definición formal de osciladores efectivos para poder escribir el hamiltoniano para el medio no lineal (345) mediante la aproximación de un solo modo, y poder dar los límites en los cuales es válida esta aproximación.

4.2 Operadores efectivos

Para empezar daremos una definición de operadores efectivos de aniquilación de la siguiente manera

$$a_n = \int dz f_m(z) a(z) , \quad (401)$$

donde las funciones $\{f_m\}$ forman un conjunto ortonormal completo de funciones, esto es

$$\int dz f_m(z)^* f_n(z) = \delta_{m,n} \quad (402)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)^* f_n(z) = \delta(s-z) \quad (403)$$

De tal manera que la relación inversa a (401) queda como

$$a(z) = \sum_n f_n(z) a_n . \quad (404)$$

Esta expresión de nuestros operadores en términos de operadores efectivos la podemos sustituir en nuestro hamiltoniano para el medio no lineal (345) de donde obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_{m,n} L_{mn} a_m^\dagger a_n + \hbar \sum_{j,l,m,n} N_{j,l,m,n} a_j^\dagger a_l^\dagger a_m a_n , \quad (405)$$

donde

$$L_{m,n} = \frac{\omega''}{2} \int dz \left(\frac{\partial}{\partial z} f_m(z)^* \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) \right), \quad (406)$$

$$N_{j,l,m,n} = \eta \int dz f_j(z)^* f_l(z)^* f_m(z) f_n(z), \quad (407)$$

Esta expresión de nuestro hamiltoniano como una suma de modos efectivos nos saca del continuo, y nos permite realizar aproximaciones a la misma utilizando un número finito de modos. Podemos por ejemplo utilizar la aproximación mediante un solo modo, que correspondería al modo principal de nuestra fibra, es decir, este modo debe describir la forma inicial de nuestro pulso. Si por ejemplo nuestro pulso inicialmente se encuentra en un estado coherente, podemos expresar al estado inicial en términos de nuestro modo principal de la siguiente manera

$$\Psi(0) = \exp(\alpha a_0^\dagger - \alpha^* a_0) |0\rangle \quad (408)$$

Si queremos que nuestra aproximación mediante un solo modo sea válida, requerimos entonces estimar el número de fotones que abandonan nuestro modo principal y se escapan a otros modos, ya que si esta cantidad es grande, entonces necesitaremos de una mayor cantidad de modos para poder representar correctamente el estado de nuestro sistema. Para estos fines reescribiremos todos los términos de nuestro hamiltoniano en orden de importancia de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 \quad (409)$$

Donde en \mathcal{H}_0 colocaremos todos los términos del hamiltoniano que no intercambian fotones entre los modos, en \mathcal{H}_1 a todos los términos que contengan operadores de modos distintos al modo principal pero sólo en grado uno, en \mathcal{H}_2 los que contengan operadores de otros modos en grado dos, etc. Estos hamiltonianos quedan de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_0 = \hbar \sum_{n=0}^K (L_{nn} a_n^\dagger a_n + N_{nnnn} a_n^\dagger a_n^\dagger a_n a_n) + 4\hbar \sum_{n < j} N_{n_j n_j} a_n^\dagger a_j^\dagger a_n a_j \quad (410)$$

$$\mathcal{H}_1 = \hbar \sum_{n=1}^K \left(L_{n0} a_n^\dagger a_0 + 2N_{n000} a_n^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \text{H.c.} \right) \quad (411)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \hbar \sum_{n \neq j}^K \left(L_{nj} a_n^\dagger a_j + N_{nj00} a_n^\dagger a_j^\dagger a_0 a_0 + N_{00nj} a_0^\dagger a_0^\dagger a_n a_j + \pm N_{n0j0} a_n^\dagger a_0^\dagger a_j a_0 \right) + \\ & + \hbar \sum_{n=1}^K \left(N_{nn00} a_n^\dagger a_n^\dagger a_0 a_0 + \text{H.c.} \right) , \end{aligned} \quad (412)$$

donde H.c. significa hermitiano conjugado. En lo que sigue vamos a despreciar \mathcal{H}_3 y \mathcal{H}_4 ya que debido a que la mayor parte de los fotones se encuentran en el modo principal, hay una muy pequeña cantidad de fotones en otros modos, ésto provoca que estos dos hamiltonianos tengan una contribución muy pequeña para nuestro hamiltoniano total.

Vamos a resolver primero la parte de \mathcal{H}_0 que por no intercambiar fotones entre los modos tiene una solución exacta. Si tomamos la generalización de los estados fotónicos para el caso de muchos modos, podemos representar un estado del sistema como $|\vec{l}\rangle$ donde $\vec{l} = \{l_0, l_1, \dots, l_K\}$ es el vector de número de fotones en cada uno de los osciladores efectivos, de este modo podemos calcular la acción de nuestro hamiltoniano \mathcal{H}_0 sobre nuestro estado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |\vec{l}\rangle &= \hbar \sum_{n=0}^K \left(L_{nn} a_n^\dagger a_n |\vec{l}\rangle + N_{nnnn} a_n^\dagger a_n^\dagger a_n a_n |\vec{l}\rangle \right) + 4\hbar \sum_{n < j} N_{n_j n_j} a_n^\dagger a_j^\dagger a_n a_j |\vec{l}\rangle \\ &= \left(\hbar \sum_{n=0}^K (L_{nn} l_n + N_{nnnn} l_n (l_n - 1)) + 4\hbar \sum_{n < j} N_{n_j n_j} l_n l_j \right) |\vec{l}\rangle . \end{aligned} \quad (413)$$

Por lo tanto $|\vec{l}\rangle$ es un eigenestado de \mathcal{H}_0 y entonces podemos escribir la solución de la siguiente manera

$$\Phi_l(t) = \Phi(0) \exp \left(-it \left(\sum_{n=0}^K (L_{nn} l_n + N_{nnnn} l_n (l_n - 1)) + 4 \sum_{n < j} N_{n_j n_j} l_n l_j \right) \right) \quad (414)$$

Conociendo esta solución podemos proponer una solución para el hamiltoniano total como

$$\Psi(t) = \sum_{\vec{l}} C_{\vec{l}}(t) \Phi_{\vec{l}}(t) |\vec{l}\rangle . \quad (415)$$

Esto equivale a *montarnos* en la representación de interacción, y la expresión para nuestros coeficientes $C_{\vec{l}}(t)$ está dada por la ecuación de Schrödinger de la siguiente manera

$$i\hbar \sum_{\vec{l}} \left(\frac{\partial}{\partial t} C_{\vec{l}}(t) \right) \Phi_{\vec{l}}(t) |\vec{l}\rangle = \sum_{\vec{l}} C_{\vec{l}}(t) \Phi_{\vec{l}}(t) (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) |\vec{l}\rangle \quad (416)$$

Conviene a estas alturas utilizar la teoría de perturbaciones para darnos una idea de cuál sería el comportamiento de nuestro estado (415) bajo la acción de nuestro hamiltoniano.

4.3 Solución perturbativa

En esta sección vamos a aplicar la teoría de perturbaciones para poder dar una estimación de la validez de la aproximación de nuestro hamiltoniano para el medio no lineal mediante un solo modo. Expandimos nuestros coeficientes de la manera siguiente

$$C(t) = C^{(0)} + C^{(1)}(t) + C^{(2)}(t) + \dots \quad (417)$$

Aplicando teoría de perturbaciones y utilizando la expresión para nuestros coeficientes $C_{\vec{l}}(t)$ obtenemos la expresión para $C^{(1)}(t)$ de la siguiente manera

$$i\hbar \sum_{\vec{l}} \left(\frac{\partial}{\partial t} C_{\vec{l}}^{(1)}(t) \right) \Phi_{\vec{l}}(t) |\vec{l}\rangle = \sum_{\vec{l}} C_{\vec{l}}^{(0)} \Phi_{\vec{l}}(t) (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) |\vec{l}\rangle \quad (418)$$

Para calcular la acción de nuestro hamiltoniano sobre nuestro estado, simplemente debemos recordar la acción de nuestros operadores del campo sobre los estados en fotónico (139,141) y observar que como nuestro estado sólo

contiene inicialmente fotones en el modo principal, cualquier operador de aniquilación de algún otro modo que aparezca actuando sobre nuestro estado nos dara un cero por resultado. Este cálculo queda por lo tanto de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(H_1 + \mathcal{H}_2) |\vec{l}\rangle &= \hbar \sum_{n=1}^K \left(L_{n0} \sqrt{l_0} + 2N_{n000} (l_0 - 1) \sqrt{l_0} \right) |l_0 - 1, 1_n\rangle + \\
&+ \hbar \sum_{n \neq j}^K N_{nj00} \sqrt{l_0(l_0 - 1)} |l_0 - 2, 1_n, 1_j\rangle + \\
&+ \hbar \sum_{n=1}^K N_{nn00} \sqrt{2l_0(l_0 - 1)} |l_0 - 2, 2_n\rangle, \quad (419)
\end{aligned}$$

donde l_0 se refiere al estado fotónico en el modo principal y $|l_0 - 1, 1_n\rangle$ representa un estado con $l_0 - 1$ fotones en el estado fotónico del modo principal y un fotón en el modo número n . Todos los demás modos tienen cero fotones. Efectuamos un cambio de variable en la suma sobre l_0 de la ecuación de Schrödinger para poder comparar los coeficientes de ambos lados (los límites de la suma quedan iguales ya que los términos extras son iguales a cero), de tal manera que nos queda la expresión para nuestros coeficientes de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
i\hbar \sum_{\vec{l}} \left(\frac{\partial}{\partial t} C_{\vec{l}}^{(1)}(t) \right) \Phi_{\vec{l}}(t) |\vec{l}\rangle &= \\
= \sum_{\vec{l}} C_{l_0+1, \vec{0}}^{(0)} \Phi_{l_0+1, \vec{0}}(t) \hbar \sum_{n=1}^K \left(L_{n0} \sqrt{l_0+1} + 2N_{n000} l_0 \sqrt{l_0+1} \right) |l_0, 1_n\rangle + \\
+ \sum_{\vec{l}} C_{l_0+2, \vec{0}}^{(0)} \Phi_{l_0+2, \vec{0}}(t) \hbar \sum_{n \neq j}^K N_{nj00} \sqrt{(l_0+2)(l_0+1)} |l_0, 1_n, 1_j\rangle + \\
+ \sum_{\vec{l}} C_{l_0+2, \vec{0}}^{(0)} \Phi_{l_0+2, \vec{0}}(t) \hbar \sum_{n=1}^K N_{nn00} \sqrt{2(l_0+2)(l_0+1)} |l_0, 2_n\rangle, \quad (420)
\end{aligned}$$

donde $\vec{0}$ es una secuencia de ceros repetidos K veces; el subíndice 1_j significa que un fotón aparece en el modo j , 2_j significa que dos fotones aparecen

en el modo j , etc., todos los demás modos (excepto en el modo principal) no contienen ningún fotón. Igualando coeficientes sobre estados fotónicos iguales, obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} C_{l_0,1n}^{(1)}(t) &= -i \frac{\Phi_{l_0+1,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,1n}(t)} \left(L_{n0} \sqrt{l_0+1} + 2N_{n000} l_0 \sqrt{l_0+1} \right) C_{l_0+1,\bar{0}}^{(0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} C_{l_0,1n,1j}^{(1)}(t) &= -i \frac{\Phi_{l_0+2,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,1n,1j}(t)} N_{nj00} \sqrt{l_0(l_0-1)} C_{l_0+2,\bar{0}}^{(0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} C_{l_0,2n}^{(1)}(t) &= -i \frac{\Phi_{l_0+2,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,2n}(t)} N_{nn00} \sqrt{2l_0(l_0-1)} C_{l_0+2,\bar{0}}^{(0)}.\end{aligned}\quad (421)$$

Todos los coeficientes que no sean los aquí mencionados son constantes que son iguales a su valor inicial, que es cero. De estas ecuaciones lo único que depende del tiempo son las $\Phi(t)$. Vamos a calcular los cocientes de estas funciones que se encuentran involucrados en estas ecuaciones, y son

$$\frac{\Phi_{l_0+1,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,1n}(t)} = e^{-it(L_{00}-L_{nn}+2l_0 N_{0000}-4l_0 N_{0n0n})}, \quad (422)$$

$$\frac{\Phi_{l_0+2,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,1n,1j}(t)} = e^{-it(2L_{00}-L_{nn}-L_{jj}+(4l_0+2)N_{0000}-4l_0(N_{0n0n}+N_{0j0j})-4N_{njnj})}, \quad (423)$$

$$\frac{\Phi_{l_0+2,\bar{0}}(t)}{\Phi_{l_0,2n}(t)} = e^{-it(2L_{00}-2L_{nn}+(4l_0+2)N_{0000}-2N_{nnnn}-8l_0 N_{0n0n})} \quad (424)$$

De tal manera que integrando las ecuaciones con respecto al tiempo desde cero hasta t , obtenemos las expresiones siguientes para nuestros coeficientes

$$C_{l_0,1n}^{(1)}(t) = \frac{e^{-it(L_{00}-L_{nn}+2l_0 N_{0000}-4l_0 N_{0n0n})} - 1}{L_{00} - L_{nn} + 2l_0 N_{0000} - 4l_0 N_{0n0n}} \times \\ \times (L_{n0} + 2N_{n000} l_0) \sqrt{l_0+1} C_{l_0+1,\bar{0}}^{(0)} \quad (425)$$

$$C_{l_0,1n,1j}^{(1)}(t) = \frac{e^{-it(2L_{00}-L_{nn}-L_{jj}+(4l_0+2)N_{0000}-4l_0(N_{0n0n}+N_{0j0j})-4N_{njnj})} - 1}{2L_{00} - L_{nn} - L_{jj} + (4l_0+2)N_{0000} - 4l_0(N_{0n0n}+N_{0j0j}) - 4N_{njnj}} \times \\ \times N_{nj00} \sqrt{l_0(l_0-1)} C_{l_0+2,\bar{0}}^{(0)} \quad (426)$$

$$C_{l_0,2n}^{(1)}(t) = \frac{e^{-it(2L_{00}-2L_{nn}+(4l_0+2)N_{0000}-2N_{nnnn}-8l_0 N_{0n0n})} - 1}{2L_{00} - 2L_{nn} + (4l_0+2)N_{0000} - 2N_{nnnn} - 8l_0 N_{0n0n}} \times \\ \times N_{nn00} \sqrt{2l_0(l_0-1)} C_{l_0+2,\bar{0}}^{(0)} \quad (427)$$

Con la ayuda de estas soluciones podemos estimar el número de fotones que se nos escapan a otros modos. Supongamos por ejemplo que nos encontramos en un modo n , y queremos estimar el número de fotones que hay en este modo. Si $|\Psi\rangle$ representa a nuestro estado en este modo, entonces el número de fotones en este modo estará dado por $\langle\Psi|a_n^\dagger a_n|\Psi\rangle = l_n \langle\Psi|\Psi\rangle$. Haciendo esto mismo con los coeficientes que acabamos de encontrar y considerando el número de fotones que corresponden a cada coeficiente, tenemos que podemos estimar el número de fotones (para la aproximación con $K+1$ modos) que se escapan hacia otros modos como

$$N = \sum_{l_0=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^K |C_{l_0,1n}^{(1)}|^2 + 2 \sum_{n=1}^K |C_{l_0,2n}^{(1)}|^2 + 2 \sum_{n=1}^K \sum_{j=1, j \neq n}^K |C_{l_0,1n,1j}^{(1)}|^2 \right) \quad (428)$$

No se cuenta aún con una demostración de que esta cantidad sea grande para una elección arbitraria de funciones f_n , sin embargo en las secciones siguientes haremos algunas estimaciones para una elección específica de funciones, y verificaremos la validez de la aproximación con un solo modo para esta elección.

4.4 Ejemplos de modos efectivos

Para esta sección proporcionaremos un ejemplo de funciones f_n en términos de las cuales desarrollaremos nuestros osciladores efectivos. Supondremos que nuestro pulso inicial corresponde a un pulso rectangular, por lo que nuestro modo principal debe ser de la forma

$$f_0 = \begin{cases} 1/\sqrt{2L+2M/3} & , \text{ si } |x| \leq L \\ (L+M-|x|)/\sqrt{2L+2M/3} & , \text{ si } L \leq |x| \leq L+M \\ 0 & , \text{ si } |x| \geq L+M \end{cases} \quad (429)$$

La razón de la forma de los bordes es debido a la presencia de derivadas en nuestro hamiltoniano, por lo que nuestra función debe ser continua. Para

tener un conjunto completo de funciones propondremos como siguientes términos los términos convencionales de la serie de Fourier, es decir senos y cosenos de distintas frecuencias de la siguiente manera

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) & , \text{ si } |x| \leq L \\ 0 & , \text{ si } |x| \geq L \end{cases} \quad (430)$$

Igual con los cosenos. Para estas funciones podemos dar la expresión de los coeficientes L_{mn} y N_{jlmn} que aparecen en nuestras expresiones. El cálculo de algunos de estos coeficientes que tienen particular importancia nos da

$$L_{00} = \frac{\omega''}{2M(M/3 + L)} \quad (431)$$

$$L_{nn} = \frac{\omega''}{2} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \quad (432)$$

$$N_{0000} = \eta \frac{L/2 + M/5}{4(L/2 + M/3)^2} \simeq \frac{\eta}{2L} \quad (433)$$

$$N_{0n0n} = \frac{\eta}{2L + \frac{2}{3}M} \simeq \frac{\eta}{2L} \quad (434)$$

$$N_{nmnn} = \frac{3\eta}{4L} \quad (435)$$

$$N_{n_j n_j} = \frac{\eta}{2L} \quad (436)$$

De las expresiones calculadas la primera cosa que se puede observar es que la mayor parte coeficientes no lineales tienen el mismo orden de magnitud. La primera consecuencia de esto es que no tenemos parámetros pequeños en nuestro hamiltoniano, y por lo tanto lo único que podemos tomar como aproximación son tiempos muy pequeños de interacción. La segunda consecuencia es que las contribuciones de los coeficientes no lineales para la evolución temporal de nuestros coeficientes para nuestro estado ($C_I(t)$) se eliminen unos a otros, ya que existen tanto positivos como negativos ambos con el mismo orden de magnitud, por lo que la parte dominante en estas exponenciales serán los términos lineales (L_{nn}).

Los tiempos de interacción están también limitados por el ensanchamiento del pulso inicial. Dicho ensanchamiento se produce a un tiempo $\omega''t = L^2$ por lo que debemos considerar tiempos mucho menores a esta condición, o considerar ésto como un límite inferior para el ancho de nuestro pulso. Nosotros queremos también conservar la coherencia de nuestro sistema. Podemos determinar el número de modos que se encuentran en resonancia a un tiempo t si nos fijamos en el modo que se sale de resonancia más rápido. El estado de resonancia está determinado por los factores lineales en las expresiones (425-427). De los términos lineales, el que más rápidamente se sale de resonancia es el que tenga la frecuencia más alta de ellos, por lo que podemos expresar esta condición de resonancia pidiendo que la fase del modo más rápido sea a lo más π , esto es

$$\frac{\omega''}{2} \left(\frac{\pi K}{L} \right)^2 t \approx \pi \quad (437)$$

Esta expresión se puede tomar como una consideración del orden de magnitud de K^2 de la siguiente manera

$$K^2 \approx \frac{2L^2}{\pi\omega''t} \quad (438)$$

Dentro de la expresión para estimar el número de fotones que se escapan hacia otros modos (428) el último término es el más "peligroso" de todos ya que es del orden de K^2 . Podemos dar una estimación del orden de magnitud de los fotones que se escapan utilizando la expresión que recién acabamos de proponer, y estimando la raíz cuadrada en la expresión (426) por el número de fotones iniciales de nuestro estado coherente n_0 . Tomando en consideración que los modos con coseno nos darán el mismo número de fotones escapados que los modos con seno, obtenemos una estimación del orden de magnitud de fotones escapados como

$$N_0 \approx \frac{32}{\pi} \frac{L^2}{\omega''t} (Nn_0t)^2 \quad (439)$$

La cantidad $Nn_0t = \varphi$ corresponde a la fase no lineal clásica. Para dar una idea de los tiempos que se pueden alcanzar con esta aproximación consideremos un ejemplo particular. Si tomamos $L^2/\omega''t \approx 100$, $n_0 \approx 10^7$, y proponemos que para que sea válida la aproximación el número de fotones que se escapen del modo principal no sea mayor que el 1%, entonces el cambio de fase no lineal máximo que podríamos alcanzar manteniendo la coherencia de nuestro sistema sería del orden de

$$\varphi_{\max} \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{32}\right) \times 0.01 \times 10^5} \approx 10. \quad (440)$$

Más adelante mostraremos que esta fase es suficiente para la producción de "squeezing", pero no lo es para la generación de gatos de Schrödinger.

Capítulo 5. Aproximación por algunos modos

5.1 Introducción

En esta sección aproximaremos nuestro hamiltoniano para el medio no lineal (405) mediante un solo modo. La aproximación por un solo modo promete principalmente dos fenómenos de gran importancia. El primero es la producción de “squeezing” en nuestro estado inicial [4-6,8], y el segundo es la producción de superposición de estados clásicos (gato de Schrödinger) [1-3,7]. Se estudiará si estos procesos pueden ser llevados a cabo en la realidad mediante la verificación de la validez de la aproximación hecha. Debido a que cualquier concepto se puede entender más fácilmente de manera visual, trabajaremos en esta sección con la cuasiprobabilidad Q , por lo que comenzaremos este capítulo con una breve introducción a dicha cuasiprobabilidad.

5.2 Cuasiprobabilidad Q

Dentro de las combinaciones de operadores de creación y aniquilación que se puedan efectuar, existe una combinación que es de particular importancia dentro de la Óptica Cuántica que es el siguiente generador

$$\langle \exp(ua^\dagger) \exp(-u^*a) \rangle , \quad (501)$$

donde u es un número complejo. Este generador se llama “the characteristic function” [20]. El valor esperado de esta combinación es conocido como la función característica en orden normal ($C_N(u)$) — ya que todos los operadores se encuentran colocados en orden normal, es decir, todos los operadores de creación están a la izquierda y los de aniquilación a la derecha —. En particular las derivadas de esta función característica con respecto a u y a u^* generan valores esperados de combinaciones de operadores de creación

y aniquilación en orden normal, esto es

$$\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial u^n \partial (-u^*)^m} \langle \exp(ua^\dagger) \exp(-u^*a) \rangle \right]_{\substack{u=0 \\ u^*=0}} = \langle a^{\dagger n} a^m \rangle . \quad (502)$$

Se pueden definir otras dos funciones características. La primera es la función característica simple ($C(u)$) y la otra es la función característica antinormal ($C_A(u)$) definidas de la siguiente forma

$$C(u) = \langle \exp(ua^\dagger - u^*a) \rangle , \quad (503)$$

$$C_A(u) = \langle \exp(-u^*a) \exp(ua^\dagger) \rangle , \quad (504)$$

Es posible establecer una conexión entre estas tres funciones características mediante la relación de Baker-Hausdorff (241). Se define a la función Q como la doble transformada de Fourier de la función característica en orden antinormal

$$Q(v) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2u \exp(vu^* - v^*u) C_A(u) \quad (505)$$

Vamos a desarrollar un poquito esta expresión. Para empezar vamos a utilizar la relación de completez para los estados coherentes (253) para desarrollar nuestra expresión

$$C_A(u) = \langle \exp(-u^*a) \exp(ua^\dagger) \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \exp(-u^*a) | \alpha \rangle \langle \alpha | \exp(ua^\dagger) \rangle \quad (506)$$

Recordamos que los estados coherentes se pueden generar a partir de un operador de desplazamiento actuando sobre el vacío (243)

$$C_A(u) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \exp(-u^*a) D(\alpha) | 0 \rangle \langle 0 | D(\alpha)^\dagger \exp(ua^\dagger) \rangle . \quad (507)$$

Poniendo las exponenciales como sumas podemos intercambiar a nuestros operadores de desplazamiento con las respectivas exponenciales obteniendo como resultado un desplazamiento de las exponenciales en una cantidad α

de la siguiente manera

$$C_A(u) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle D(\alpha) \exp(-u^*(a+\alpha)) |0\rangle \langle 0| \exp(u(a^\dagger + \alpha^*)) D(\alpha)^\dagger \rangle . \quad (508)$$

Las exponenciales que quedan están actuando sobre un estado de vacío, por lo que el resultado de esta operación es simplemente el estado de vacío

$$\begin{aligned} C_A(u) &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \exp(-u^*\alpha + u\alpha^*) \langle D(\alpha) |0\rangle \langle 0| D(\alpha)^\dagger \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \exp(-u^*\alpha + u\alpha^*) \langle |\alpha\rangle \langle \alpha| \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \exp(-u^*\alpha + u\alpha^*) |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 \end{aligned} \quad (509)$$

Una relación que nos será útil un poco más adelante es la expresión para la delta de Dirac en dos dimensiones. Consideremos dos números complejos $a = x+iy$, $b = u+iv$. Calculamos ahora la siguiente integral

$$\frac{1}{\pi^2} \int d^2b \exp(ab^* - a^*b) = \frac{1}{\pi^2} \int du dv \exp(i2yu - i2xv) = \delta(x)\delta(y) = \delta(a) \quad (510)$$

Ahora sí tenemos todos los elementos para el cálculo de la función Q :

$$\begin{aligned} Q(v) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2u \exp(vu^* - v^*u) C_A(u) = \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int d^2\alpha d^2u \exp((v-\alpha)u^* - (v-\alpha)^*u) |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (511)$$

Integrando con respecto a u obtenemos la expresión para nuestra delta

$$Q(v) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \delta(v-\alpha) |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} |\langle v | \Psi \rangle|^2 \quad (512)$$

Lo que nos dice esta última expresión, es que la función Q es simplemente el módulo cuadrado de la proyección de nuestro estado Ψ sobre un estado coherente, y es por lo tanto una cantidad real y positiva. Podemos representar gráficamente a la función Q en una gráfica tridimensional, donde el eje x estaría dado por la parte real de v , el eje y por la parte imaginaria de v , y el eje z por $Q(v)$.

A estas alturas es muy ilustrativo calcular la cuasiprobabilidad Q para algunos estados representativos de los cuales ya hemos hablado antes. Vamos a calcular cual sería la función Q para el caso de un estado fotónico $|n\rangle$. Nosotros conocemos cuál es la expansión de un estado coherente en estados en fotónico (231), usando esta expresión podemos calcular fácilmente la proyección de un estado coherente sobre un fotónico

$$\langle n | v \rangle = \langle n | \exp(-|v|^2/2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle = \exp(-|v|^2/2) \frac{v^n}{\sqrt{n!}}. \quad (513)$$

Con ésto calculamos la función Q que queda

$$Q(v) = \frac{1}{\pi} |\langle v | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|v|^2) \frac{|v|^{2n}}{n!}. \quad (514)$$

Esta función sólo depende de $|v|^2$, por lo que su gráfica corresponderá a una especie de dona como se muestra en la figura 1a.

Podemos realizar el mismo cálculo para un estado coherente $|\alpha\rangle$. Al calcular la no ortonormalidad de los estados coherentes, lo que nosotros calculamos fue la proyección de un estado coherente sobre otro estado coherente (249). Utilizando este resultado nosotros podemos calcular la función Q de manera directa para este caso

$$Q(v) = \frac{1}{\pi} |\langle v | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \left| \exp\left(-\frac{1}{2}(|v|^2 + |\alpha|^2)\right) + \alpha v^* \right|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha - v|^2). \quad (515)$$

Esta expresión corresponde a una gaussiana centrada en α como se muestra en la figura 1b. El ancho que tenga nuestra figura en el eje x estará relacionado con la incertidumbre de la parte hermitiana de nuestro operador, es decir, estará relacionado con la incertidumbre en la posición: mientras que el ancho que tenga nuestra figura en el eje y estará relacionado con la incertidumbre de la parte antihermitiana de nuestro operador, es decir, con la incertidumbre en la posición. Se puede observar a partir de la figura 1b que el ancho en el eje x es igual al ancho en el eje y , esto es debido a que se

trata de un estado coherente que tiene igual incertidumbre en ambas componentes y es a la vez la mínima incertidumbre permitida por el principio de incertidumbre. Si calculáramos la función Q para un estado "squeeze", lo que esperaríamos es obtener una componente más ancha que la de un estado coherente, y la otra componente más angosta que la de un estado coherente. Este es de hecho el caso, y las curvas de nivel que se observan para un estado "squeezed" son aproximadamente elipses como se muestra en la figura 1c, en contraparte de los círculos que se obtienen para un estado coherente, y por ser ambos estados de mínima incertidumbre tienen la misma área.

5.3 Un solo modo

Vamos ahora a aproximar nuestro hamiltoniano para el medio no lineal (405) por un solo modo. Si suponemos que la no linealidad del medio es superior a la dispersión cromática, podemos escribir a nuestro hamiltoniano de la siguiente manera

$$H = \hbar\xi (a^\dagger)^2 a^2 = \hbar\xi \left((a^\dagger a)^2 - (a^\dagger a) \right) \quad (516)$$

Tomando la expresión para el hamiltoniano en términos de modos efectivos (405) podemos relacionar la constante no lineal con los coeficientes involucrados, de tal modo que la constante de interacción $\xi = N_{0000}$ depende de la forma inicial del pulso, es decir, de la forma del modo principal f_0 .

Debido a que los estados fotónicos son eigenestados de este hamiltoniano, es muy sencillo expresar la evolución de un estado fotónico bajo este hamiltoniano

$$|n\rangle(t) = \exp(-it\xi(n^2 - n)) |n\rangle \quad (517)$$

Supongamos ahora que inicialmente tenemos un estado coherente con parámetro α , entonces podemos representar al estado de nuestro sistema al tiempo t de

la siguiente manera

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(-it\xi n(n-1)) |n\rangle \quad (518)$$

Este estado presenta una gran cantidad de peculiaridades. Primero vemos que la cantidad $n(n-1)$ que aparece en la exponencial es siempre un número par ya que n es un entero, de tal manera que cuando $\xi t = \pi$ vamos a tener que el argumento de nuestra exponencial será $2\pi i$, por lo que todas las exponenciales se van a anular y regresaremos al estado inicial, es decir es un sistema que va a presentar "revivals". Vamos a tomar ahora el tiempo $\xi t = \frac{\pi}{2}$ para averiguar lo que pasa. En este caso el argumento de nuestra exponencial va a ser πi o $2\pi i$ o múltiplos de ellos dependiendo si es par o impar, pero $\exp(\pi i) = -1$. Podemos separar a la suma de nuestro estado en dos sumas donde en la primera suma se encuentren todos los términos pares y otra donde estén los impares

$$\begin{aligned} \left| \Psi \left(\frac{\pi}{2\xi} \right) \right\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n} (-1)^n}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle + e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1} (-1)^n}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle - ie^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle . \end{aligned} \quad (519)$$

Podemos calcular la proyección de nuestro estado sobre un estado coherente, de donde obtendríamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle \beta | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|\beta - i\alpha|^2}{2}\right) \exp\left(i \left(\frac{\alpha^* \beta + \alpha \beta^*}{2} - \frac{\pi}{4} \right)\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|\beta + i\alpha|^2}{2}\right) \exp\left(-i \left(\frac{\alpha^* \beta + \alpha \beta^*}{2} - \frac{\pi}{4} \right)\right) . \end{aligned} \quad (520)$$

Si nosotros tuviéramos un estado coherente $|i\alpha\rangle$ y otro estado coherente $|-i\alpha\rangle$ y los proyectáramos sobre otro estado coherente obtendríamos lo siguiente

$$\langle \beta | i\alpha \rangle = \exp(-|\beta - i\alpha|^2/2) \exp\left(i \frac{\alpha^* \beta + \alpha \beta^*}{2}\right) \quad (521)$$

$$\langle \beta | -i\alpha \rangle = \exp\left(-\frac{|\beta - i\alpha|^2}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\alpha^* \beta + \alpha \beta^*}{2}\right) \quad (522)$$

Podemos observar que la primera de estas relaciones se asemeja mucho al primer término de la proyección de nuestro estado sobre el estado coherente, mientras que el segundo se asemeja mucho al segundo término. Por lo tanto podemos decir que

$$\left| \Psi \left(\frac{\pi}{2\xi} \right) \right\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) |i\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) |-i\alpha\rangle \quad (523)$$

Es decir, nuestro estado a este tiempo es una superposición de dos estados coherentes (cuasiclásicos), es decir, tenemos un gato de Schrödinger. Esta misma situación ocurre al tiempo $\frac{\pi}{j\xi}$ sólo que para este tiempo en lugar de tener dos estados coherentes tendremos j estados coherentes. Esta superposición de estados coherentes se puede visualizar más fácilmente mediante la graficación de la función Q para la evolución de este estado 2a. Debido a los tiempos tan grandes de interacción que se requieren para poder observar superposición de estados coherentes, se tenía la idea que los efectos de disipación en la fibra harían imposible la observación de dicho fenómeno. En este trabajo se mostrará un fenómeno independiente de la absorción del medio que impedirá la observación de tal superposición. Dicho fenómeno corresponde al escape de fotones del modo principal hacia otros modos. Podemos calcular también el valor esperado de nuestro operador de aniquilación como función del tiempo. Realizando este cálculo el resultado que obtenemos es el siguiente

$$\langle a \rangle (t) = \alpha \exp\left(|\alpha|^2 (-1 + \exp(-i2t\xi))\right) \quad (524)$$

Si nos fijamos en nuestra expresión para tiempos lo suficientemente pequeños nuestra expresión queda como

$$\langle a \rangle (t) = \alpha \exp\left(-i|\alpha|^2 t\xi - (|\alpha| t\xi)^2/2\right) \quad (525)$$

Este resultado muestra dos efectos. El primero es una rotación de la amplitud media por un factor $|\alpha|^2 t\xi = \varphi$ que es el cambio de fase no lineal clásica. El

segundo es un decaimiento en la amplitud que cambia cuadráticamente con el tiempo. El efecto total de ambos es que la curva de nivel circular inicial del estado coherente sufre alargamientos mientras está rotando manteniendo su área constante. Esto nos sugiere que nuestro sistema, al menos para tiempos muy pequeños, es propenso a producir un estado “squeezed”. Esta producción de estado comprimido se puede apreciar también en la graficación de la función Q para nuestro estado (figura 2a, $t = 0.035$).

5.4 Dos modos

A manera de comparación con el caso de un solo modo calcularemos nuestra función para el siguiente caso más sencillo que corresponde al caso de solo dos modos. Los dos modos que tomaremos serán el modo principal y el primer modo de los modos que habíamos definido anteriormente (430). Debido a que el seno es una función impar y el pulso rectangular es una función par, todos los coeficientes del hamiltoniano H_1 (411) son iguales a cero. El cálculo de los coeficientes restantes nos dan la siguiente expresión aproximada para nuestro hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \simeq & \frac{\hbar\omega''}{2} \left(\frac{1}{ML} a_0^\dagger a_0 + \frac{\pi^2}{L^2} a_1^\dagger a_1 \right) + \\ & + \frac{\hbar\eta}{2L} \left(a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \frac{3}{2} a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_0^\dagger a_0^\dagger a_1 a_1 + a_0 a_0 a_1^\dagger a_1^\dagger + \pm a_0^\dagger a_0 a_1^\dagger a_1 \right) . \end{aligned} \quad (526)$$

Vamos a montarnos en un sistema que gira a la velocidad de la parte lineal del modo principal. Se observa que este hamiltoniano (526) es muy parecido al hamiltoniano de [22], que fue usado para describir el estado cuántico de la polarización de la luz en la fibra óptica, por lo que los resultados obtenidos en ambos casos deben ser muy similares.

De acuerdo a la jerarquización de nuestro hamiltoniano propuesta anterior-

mente (409) tenemos lo siguiente

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_2 \quad (527)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \hbar \left(a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \frac{3}{2} a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + 4 a_0^\dagger a_0 a_1^\dagger a_1 \right) \quad (528)$$

$$\mathcal{H}_2 = \hbar \left(a_0^\dagger a_0^\dagger a_1 a_1 + a_0 a_0 a_1^\dagger a_1^\dagger \right) \quad (529)$$

Como estamos trabajando en dos modos, proponemos una solución de la forma

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{lm}(t) \Phi_{lm}(t) |l, m\rangle, \quad (530)$$

donde

$$\Phi_{lm}(t) = \exp\left(-it \left(l(l-1) + \frac{3}{2} m(m-1) + 4lm \right)\right). \quad (531)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de Schrödinger llegamos a la siguiente fórmula para calcular nuestros coeficientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{lm}}{\partial t} = & -i\sqrt{l(l-1)(m+2)(m+1)} \exp(-it(4l-2m-7)) C_{l-2,m+2} - \\ & -i\sqrt{(l+2)(l+1)m(m-1)} \exp(-it(-4l+2m-5)) C_{l+2,m-2}. \end{aligned} \quad (532)$$

Podemos simular por computadora la evolución de nuestro sistema para compararla con el caso de un solo modo (figura 2b). De esta simulación se puede observar que para ambos casos se produce un “squeezing” inicial, sin embargo para el caso de dos modos la superposición de estados así como la aparición de “revivals” se ve disminuída por la presencia del modo adicional. La adición de mayor número de modos hará más realista nuestro modelo e imposible tanto la producción de gatos como de “revivals”.

La razón de esta imposibilidad radica en el hecho de que se requieren grandes tiempos de interacción para la aparición de gatos, mientras que para estos

tiempos tan grandes el número de fotones que abandonan nuestro modo principal es demasiado grande, por lo que nuestra aproximación con un solo modo pierde validez.

De nuestro hamiltoniano para dos modos (526) podemos observar que la frecuencia angular del modo principal es en general distinta a la frecuencia angular del primer modo. Podemos tomar en cuenta esta diferencia considerando un parámetro r que sea igual a la diferencia de frecuencia angular del modo principal con la frecuencia angular del primer modo, esto es:

$$r = \left(\frac{4\pi^2}{L^2} - \frac{2}{ML} \right) \frac{\omega''}{2} . \quad (533)$$

En la figura 2 se esquematiza la evolución de nuestro estado para distintos valores de r . En estas gráficas se observa que la supresión de la superposición de estados cuasiclásicos es aún más marcada tanto mayor sea la incompatibilidad en las frecuencias angulares de ambos modos.

De cualquier manera debido a que el "squeezing" es producido a tiempos muy cortos, este no se ve tan afectado por la presencia de los modos adicionales como podríamos preveer.

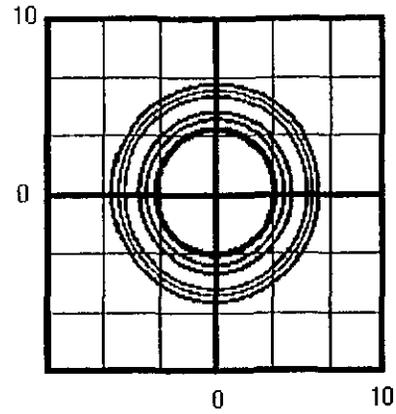


Fig. 1a

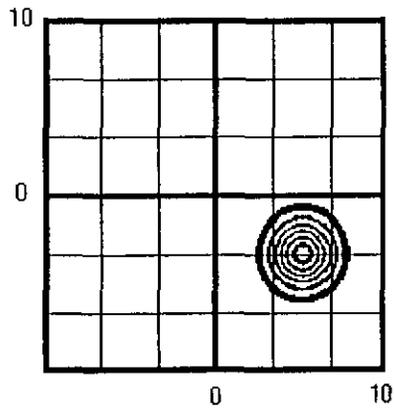


Fig. 1b

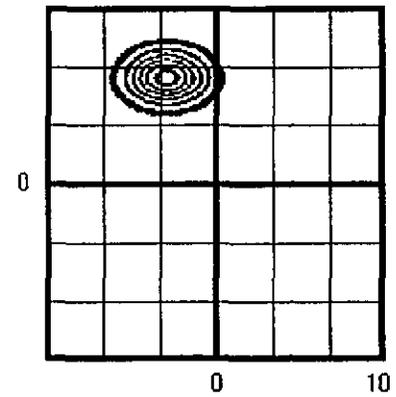


Fig. 1c

Figura 1. Curvas de nivel de la función Q para: (a) Un estado fotónico, (b) Un estado coherente y (c) Un estado comprimido (squeezed state)

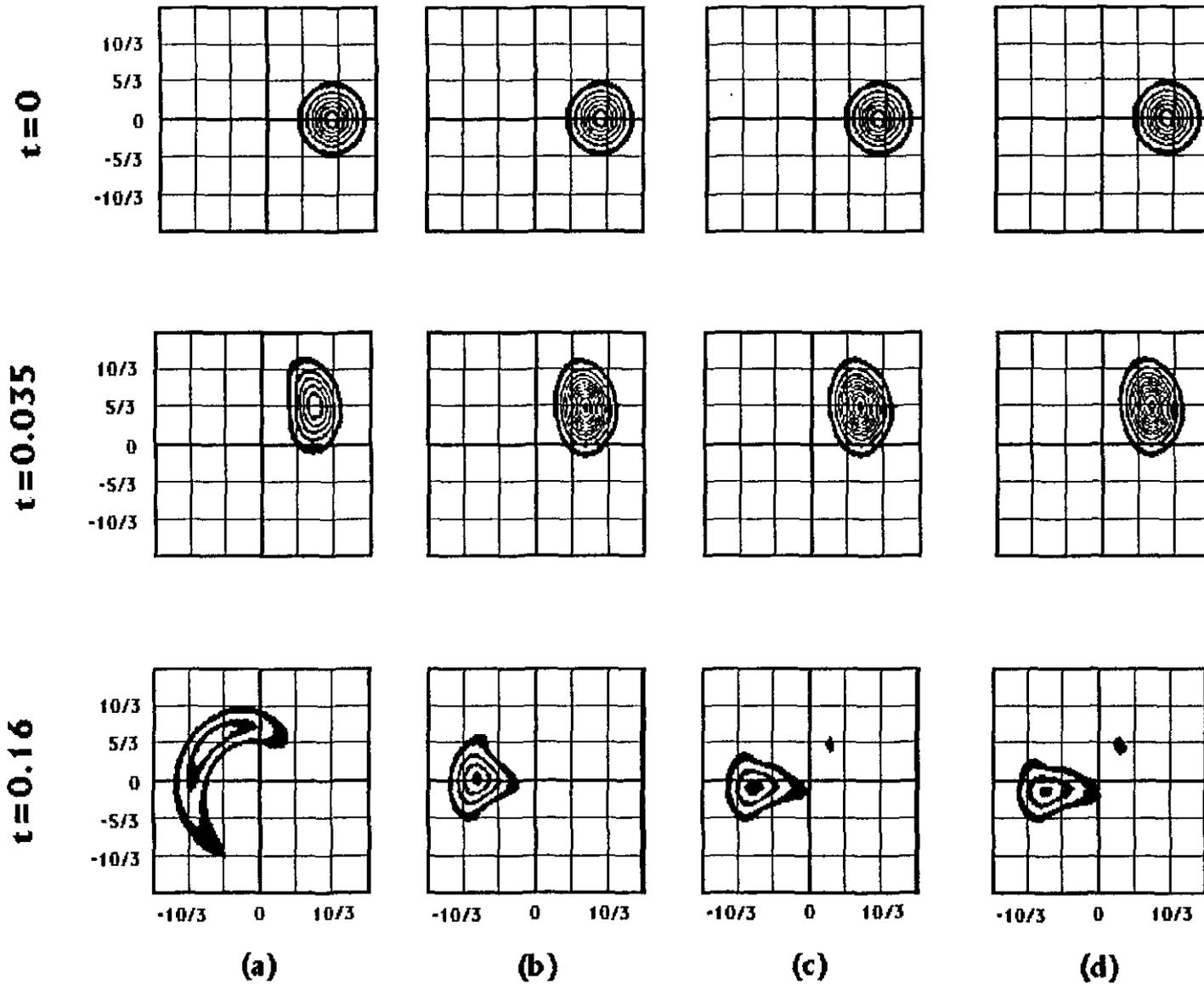


Figura 2. Curvas de nivel de la función Q que muestran la evolución del estado a $t=0$, $t=0.035$, $t=0.16$, $t=0.3$, $t=\pi/2$ y $t=\pi$ para (a) un solo modo, (b) $r=0$, (c) $r=2$ y (d) $r=2\sqrt{2}$.

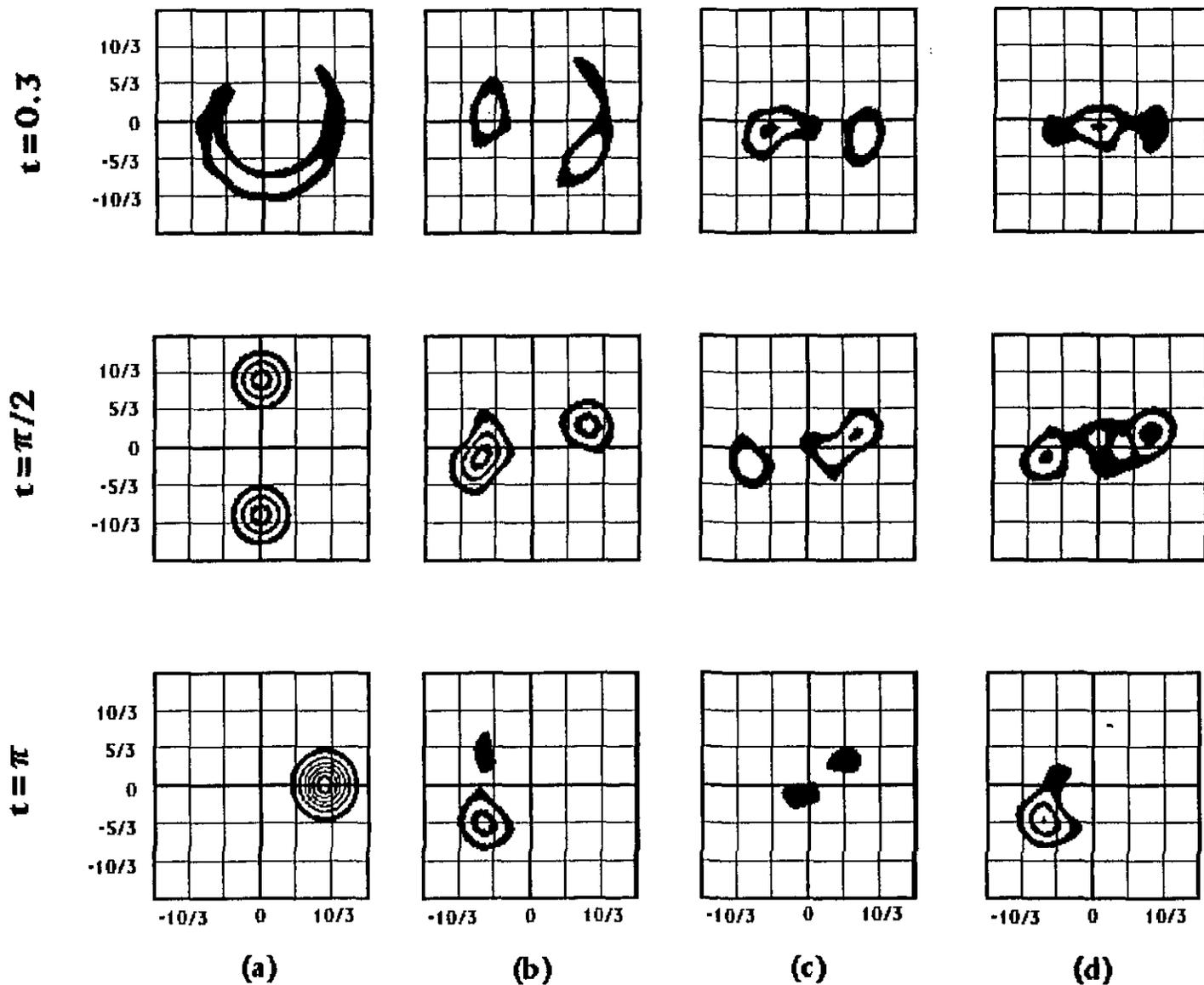


Figura 2. Curvas de nivel de la función Q que muestran la evolución del estado a $t=0$, $t=0.035$, $t=0.16$, $t=0.3$, $t=\pi/2$ y $t=\pi$ para (a) un solo modo, (b) $r=0$, (c) $r=2$ y (d) $r=2\sqrt{2}$.

Capítulo 6. Detección de Squeezing

6.1 Introducción

Esta sección podría considerarse como un apéndice, ya que el objetivo de esta tesis es analizar los límites en los cuales se puede realizar una aproximación por un solo modo, y no analizar los resultados en sí de un hamiltoniano de un solo modo. Sin embargo, ahora vamos a considerar un poco el dispositivo experimental mediante el cual se podría observar el “squeezing” que se produce en la fibra no lineal.

6.2 Medición de componente del operador de campo

Nosotros ya mencionamos anteriormente que cuando se produce el “squeezing”, alguna de nuestras componentes reduce su incertidumbre mientras que la otra la aumenta. Podemos expresar de manera general cualquier componente de nuestro operador de creación en el modo principal de la siguiente manera

$$U = \gamma^* a + \gamma a^\dagger \quad (601)$$

Con

$$\gamma = \exp(i\phi) \quad (602)$$

Entonces por ejemplo si $\phi = 0$, lo que estaríamos midiendo sería dos veces la componente hermitiana mientras que si $\phi = \frac{\pi}{2}$ entonces estaríamos midiendo menos dos veces la componente antihermitiana, y cuando tiene otro valor podemos medir la componente a cualquier ángulo. Como estamos diciendo que a corresponde a nuestro operador en el modo principal, entonces podemos expresar a a de la siguiente manera.

$$a = \int dz f_0^*(z) a(z) \quad (603)$$

Vamos ahora a tratar de medir experimentalmente la componente definida por el operador U . Para esto vamos a proponer un experimento con un divisor de haz (fig.3). El segundo divisor va a ser un divisor 50-50, por lo que refleja tanto como lo que deja pasar. El haz a corresponde a nuestro estado que

queremos analizar; el haz b corresponde a un estado coherente con parámetro $\beta(z) = M\gamma f(z)$ que simule a nuestro haz que queremos analizar, y que es igual a nuestro estado inicial, de aquí la existencia del primer divisor para que ambos haces sean muy similares al menos inicialmente. A la salida de nuestro divisor de haz, tendremos dos haces A y B dados por

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a(z) + b(z)) \quad (604)$$

$$B(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a(z) + b(z)) \quad (605)$$

El signo menos en la expresión de B corresponde a un cambio de fase de π debido a la reflexión interna. Como los detectores con los que se cuenta actualmente no hacen más que contar fotones, vamos a contar el número de fotones que llegan por el haz A y restarle a esto el número de fotones que llegan por el haz B . Para cualquier operador en cualquier modo que se trate, el operador de número de fotones está dado por combinaciones de la forma $a^\dagger a$. De esta manera podemos expresar la diferencia de fotones que llegan a nuestros detectores de la siguiente manera

$$V = \int dz (A^\dagger(z)A(z) - B^\dagger(z)B(z)) \quad (606)$$

Escribiendo estos operadores en términos de a y b (eq. (604)-(605)) llegamos a la siguiente expresión para V

$$V = \int dz (a^\dagger(z)b(z) + a(z)b^\dagger(z)) \quad (607)$$

Podemos calcular el valor esperado de este operador tomando en cuenta que nuestro haz b se encuentra en un estado coherente, por lo que obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \left\langle \int dz a^\dagger(z)\beta(z) + \int dz a(z)\beta^*(z) \right\rangle = \\ &= M \left\langle \gamma \int dz a^\dagger(z) f(z) + \gamma^* \int dz a(z) f^*(z) \right\rangle \end{aligned} \quad (608)$$

Las integrales dentro del valor esperado corresponden a nuestra expresión para el operador efectivo Eq. (603), de tal manera que podemos reescribir el valor esperado como

$$\langle V \rangle = M \langle \gamma a^\dagger + \gamma^* a \rangle = M \langle U \rangle \quad (609)$$

Entonces salvo una constante, el valor esperado de la diferencia de fotones que llegan a uno de nuestros detectores menos los que llegan al otro es igual al valor esperado de la componente de nuestro operador que estemos midiendo. Para estar seguros que el operador V nos sirve para la medición de la componente de nuestro operador de campo, podemos calcular cuál sería la incertidumbre en esta medición. Por ser una cantidad hermitiana la variancia estará dada por

$$(\Delta V)^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2 \quad (610)$$

Realizando el cálculo de nuestra varianza llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned} (\Delta V)^2 &= M^2 \left(\langle (\gamma a^\dagger + \gamma^* a)^2 \rangle - \langle \gamma a^\dagger + \gamma^* a \rangle^2 \right) + \int dz \langle a^\dagger(z) a(z) \rangle = \\ &= M^2 (\Delta U)^2 + \int dz \langle a^\dagger(z) a(z) \rangle . \end{aligned} \quad (611)$$

Por lo tanto, si nuestro haz de referencia (b) es mucho más intenso que nuestro haz que queremos estudiar, entonces podemos despreciar la integral en esta última expresión en comparación con el otro término. Esto se logra manejando la proporción de reflectancia-transmitancia del primer divisor. Entonces la medición de la diferencia de fotones que llegan a nuestros detectores corresponderá, salvo una constante, a la medición de la componente de nuestro operador de campo.

6.3 Dispersión mínima

Para poder detectar el "squeezing" debemos fijarnos en la componente de nuestro operador que se encuentra comprimida, y no en la que está extendida. Esto se logra con la adecuada elección de el ángulo ϕ . Para saber cuál debe de ser este ángulo vamos a minimizar la expresión para la incertidumbre de la componente de nuestro operador. Como mencionamos anteriormente, la incertidumbre de nuestro operador está relacionada con la variancia (D) que ésta dada del siguiente modo

$$\begin{aligned} D &= \langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2 = \\ &= \left(\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 \right) \exp(2i\phi) + \left(\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2 \right) \exp(-2i\phi) + \\ &\quad + 2 \left(\langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \right) + 1 . \end{aligned} \quad (612)$$

Para obtener un extremo de esta expresión, sacamos su derivada y la igualamos a cero

$$\frac{\partial}{\partial \phi} D = 2i (\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2) \exp(2i\phi) - 2i (\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2) \exp(-2i\phi) = 0 . \quad (613)$$

Entonces el extremo de nuestra función se dará con

$$\exp(2i\phi) = \pm \sqrt{\frac{\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2}{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}} \quad (614)$$

Sustituyendo este ángulo extremo en la expresión para la incertidumbre obtenemos

$$D_e = \pm 2 \sqrt{(\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2) (\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2)} + 2 (\langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle) + 1 . \quad (615)$$

Si observamos que $\langle a^\dagger \rangle = \langle a \rangle^*$ entonces podemos reescribir nuestra expresión como

$$D_e = 1 + 2 (\langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \pm |\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2|) \quad (616)$$

Debido a que la norma de cualquier cosa es algo real y positivo, entonces sabemos que el signo positivo corresponderá a un máximo, mientras que el negativo a un mínimo, y por lo tanto la mínima incertidumbre estará dada por

$$D_e = 1 + 2 (\langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle - |\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2|) \quad (617)$$

Donde el ángulo ϕ al que ésto ocurre estará dado por la expresión (614) tomando el signo negativo. Con esta expresión recién calculada podemos graficar la incertidumbre mínima de nuestro pulso a medida que atraviesa la fibra para los casos calculados de uno y dos modos en el campo. La dispersión mínima al igual que el número de fotones en el modo principal se encuentran graficados para tiempos cortos en la figura 4, y para tiempos más largos en la figura 5. En estas gráficas se observa que la incertidumbre mínima inicial es igual a uno, ya que estamos partiendo inicialmente de un estado coherente que tiene igual incertidumbre en cualquier componente y es igual a uno. Para tiempos lo suficientemente pequeños observamos que la incertidumbre mínima disminuye a un valor inferior a uno, ésto significa

que estamos comprimiendo alguna de las componentes de nuestro operador, es decir, estamos obteniendo “squeezing” tanto para la simulación con un modo como con dos. Parece ser que el grado de “squeezing” que se obtiene mediante este método no es muy grande, sin embargo hay que recordar que esta simulación está hecha por computadora. que debido a sus limitaciones no puede soportar un gran número de fotones, y como el grado de “squeezing” depende de la cantidad de fotones de nuestro estado inicial, podemos esperar que esta simulación no represente del todo el caso real. Para mayor cantidad de fotones, un “squeezing” mayor del 90 por ciento puede ser obtenido [5].

Para tiempos más grandes observamos la aparición de revivals en el caso de un solo modo y una reducción en los mismos para el caso de dos modos. La cantidad de fotones en el modo principal sufre una disminución muy grande a tiempos muy pequeños para continuar con oscilaciones alrededor de un valor promedio que disminuye lentamente debido al tamaño finito del paso de iteración. Estas variaciones en la cantidad de fotones en el modo principal se ven reflejadas en la disminución gradual de las cimas en las gráficas de la dispersión mínima para el caso de dos modos.

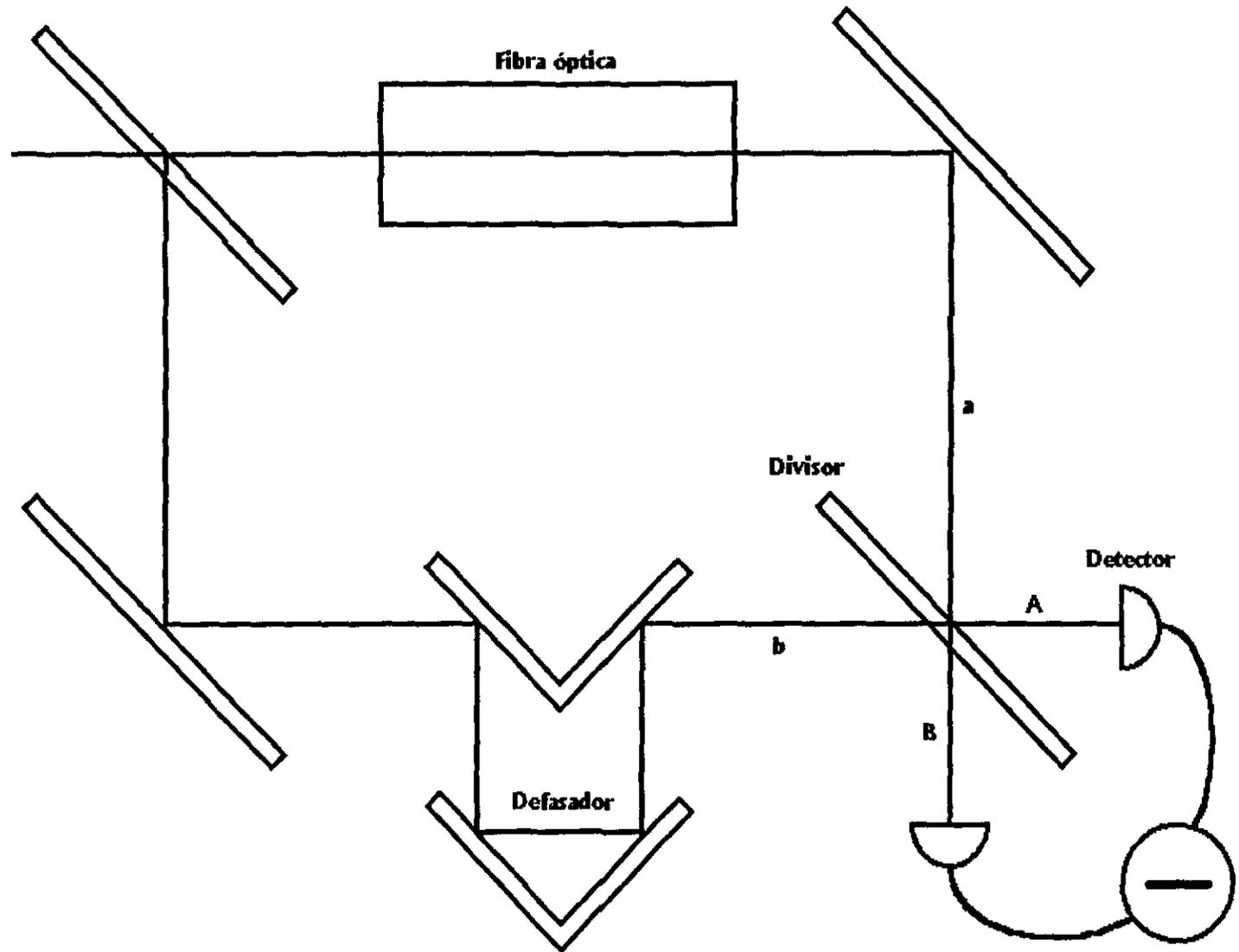


Figura 6. Esquema de Interferómetro Completo para la detección de Squeezing

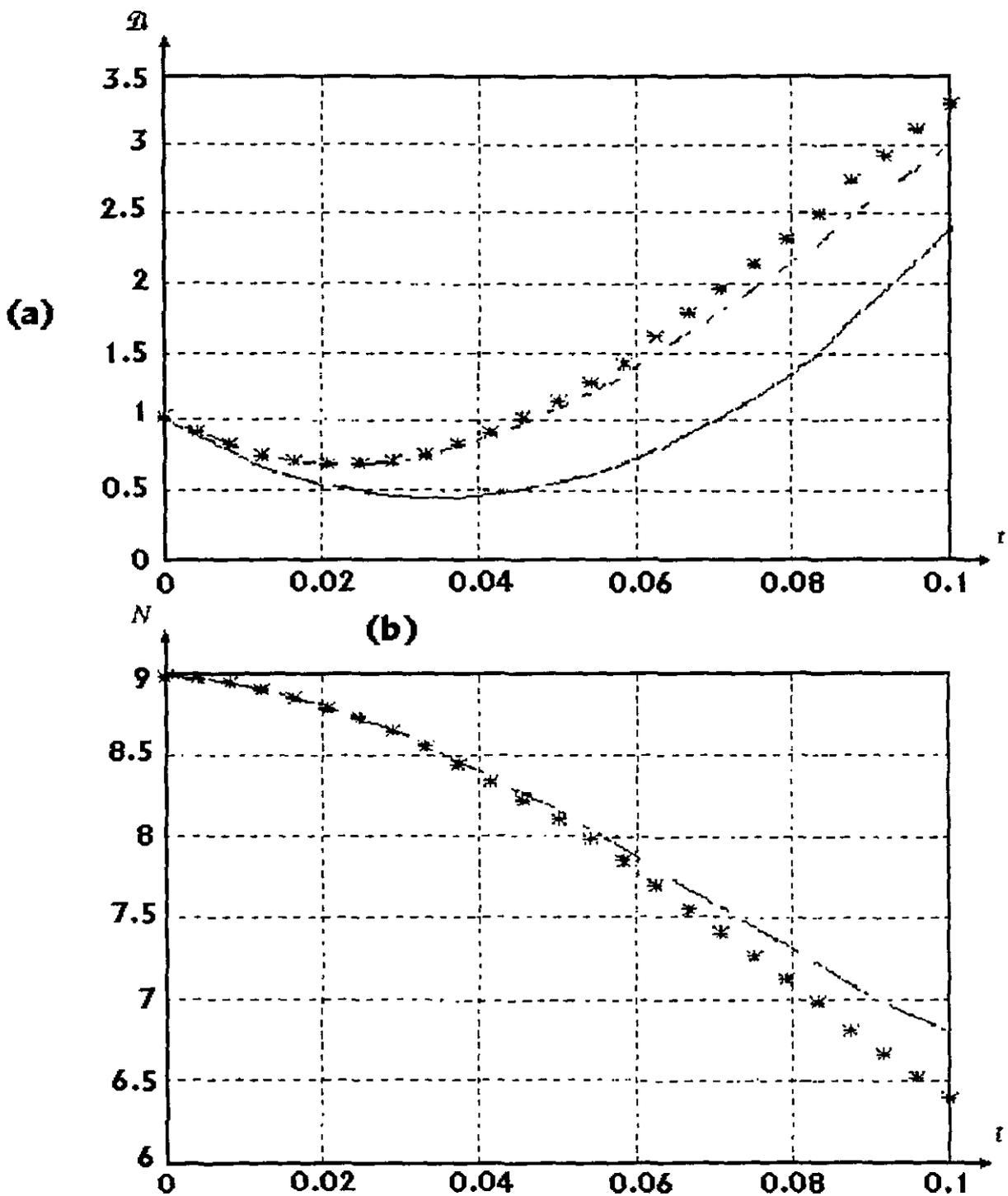


Figura 4. (a) Evolución de la dispersión mínima (ec. 617) del operador de campo para la aproximación por un solo modo (curva sólida) y para la aproximación por dos modos con $r=0$ (línea punteada) y $r=2$ (estrellas). (b) Evolución de la cantidad de fotones en el modo principal para el caso de dos modos con $r=0$ (línea punteada) y $r=2$ (estrellas).

Condiciones: estado inicial coherente con $\alpha=3$, Hamiltoniano (526), $\chi/2L=1$.

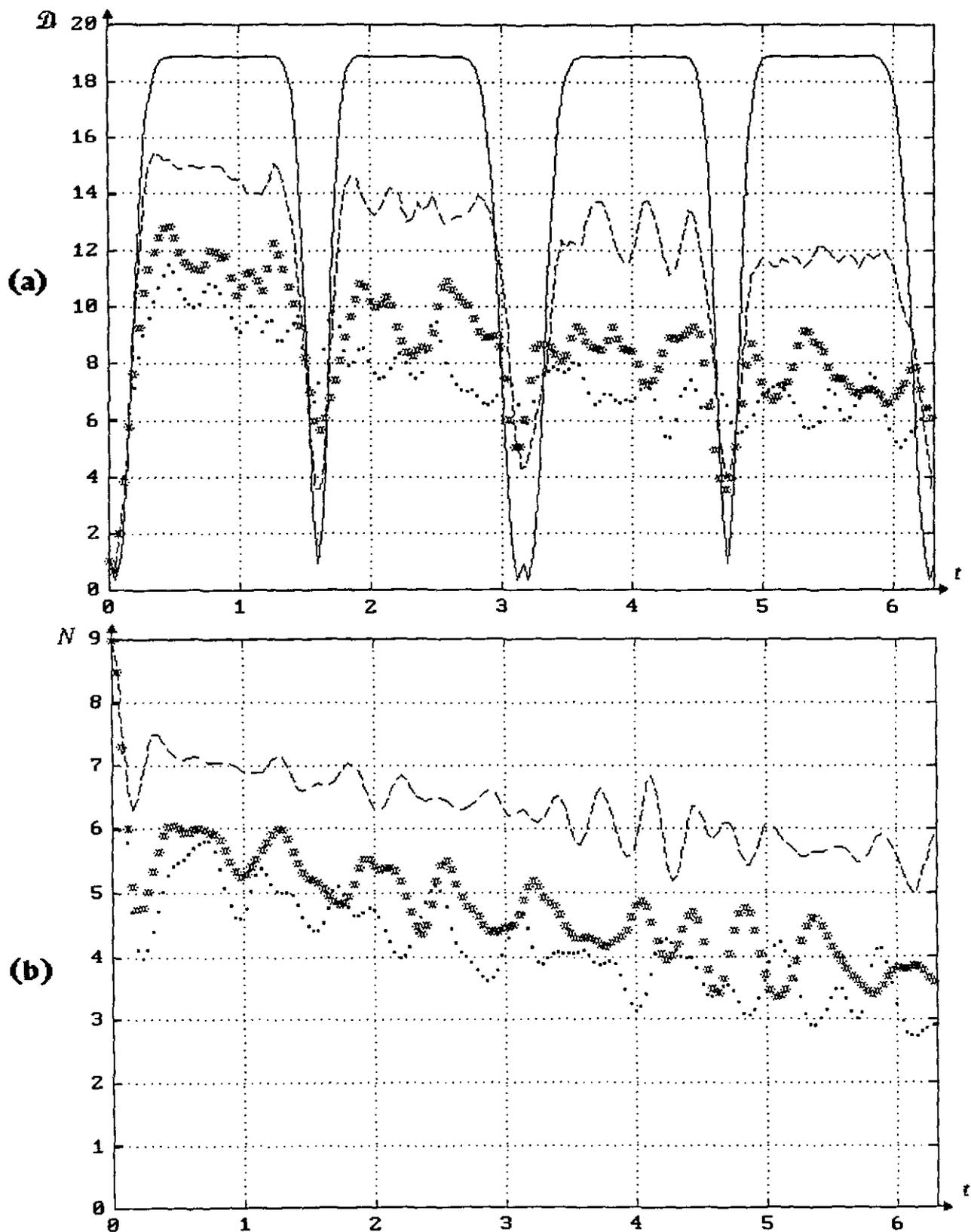


Figura 5. Evolución de la dispersión mínima (a) y de la cantidad de fotones en el modo principal (b) para la aproximación por un modo (curva sólida), por dos modos con $r=0$ (línea quebrada), $r=2$ (estrellas) y $r=2\sqrt{2}$ (línea punteada).

Conclusiones

Se presenta la descripción del estado cuántico de un sistema con no linealidad cúbica. Esta no linealidad corresponde a un medio de Kerr. Este caso se realiza en las fibras ópticas.

Se propuso una definición formal de modos efectivos y se desarrolló el Hamiltoniano no lineal en estos términos.

Como ya había sido mencionado por otros autores, la interacción con un solo modo produce estados no clásicos como lo son los estados comprimidos, la superposición de estados cuasiclásicos, o la aparición de "revivals".

Se mostró de manera gráfica mediante una simulación por computadora que la presencia de modos adicionales al modo principal destruyen la creación de gatos de Schrödinger, así como la aparición de "revivals", pero conservan la aparición de estados comprimidos.

Este comportamiento es debido a que la presencia de modos adicionales producen, a partir de la no linealidad, el escape de fotones del modo principal hacia otros modos.

Se propone por primera vez una estimación del número de fotones que abandonan el modo principal excitando otros modos. Con esta estimación se da validez a la aproximación utilizando algunos modos efectivos para un intervalo de tiempo dado.

Se puede observar también que dentro de esta estimación, todos los parámetros del sistema aparecen en combinaciones adimensionales, por lo que es de esperar que esta estimación tiene un carácter general, independientemente de la elección de modos efectivos particulares.

La idea de modos efectivos es aplicable a una gran cantidad de sistemas (como por ejemplo la interacción dipolar), y mediante esta idea se puede lograr un mejor entendimiento y una más fácil manipulación de dichos sistemas.

Referencias.

1. Averbukh I. Sh., Perelman N. F. (1989) Fractional revivals of wave packets during the long-term evolution of highly excited quantum states. – (Soviet Phys: J. Theor. Exp. Phys., 1989, v.3(9), p.818-827. – Intense laser phenomena and Related topics. Series in Optics and Photonics, v.3, (World Scientific, Singapur, New Jersey, London, Hong Kong), p.316-329.
2. Gantsog Ts. and Tanas R., (1991). Phase properties of self-squeezed states generated by the anharmonic oscillator, J. Mod. Opt. 38, 1021
3. Miranowicz A., Tanas R. and Kielich S., (1990). Generation of discrete superpositions of coherent states in the anharmonic oscillator model, Quantum Optics 2, 253
4. Tanas R. and Kielich S. (1983) Self-squeezing of light propagating through nonlinear optically isotropic media, Opt. Commun. 45, 351
5. Tanas R. and Kielich S., (1984). On the possibility of almost complete self-squeezing of strong electromagnetic fields, Optica Acta 31, 81
6. Tanas R. (1989) Squeezing from an anharmonic oscillator model $a^{+2}a^2$ versus $(a^+a)^2$ interaction Hamiltonians, Phys. Lett. A 141, 217
7. Tanas R. (1991). Nonclassical effects in the anharmonic oscillator model. Optics and Spectroscopy, 1991, v.70, N3, p.376-377.
8. Tanas R., A. Miranowicz A. and S. Kielich S., (1991). Squeezing and its graphical representations in the anharmonic oscillator model, Phys. Rev. A 43, 4014
9. Kouznetsov D., (1986). Interaction between a spatially modulated wave with a complex structure and a plane wave in a medium with nonlinear refraction. - Sov. J. Quantum Electron., v.16, N3, p.408-410.
10. Yamamoto Y., Machida S., Imoto N., Kitagawa M., Björl G. (1987) Generation of number-phase minimum uncertainty states and number states. – J. Opt. Soc. Am. B, v.4, N10, p.1645-1661.
11. Daniel D. J., Milburn G. J., (1989). Destruction of a quantum coherence in a nonlinear oscillator via attenuation and amplification. – Physical Review, v.39, No.9, p. 4628-4640.
12. Schmidt E., Jeffers J., Barnett S., Knöll L., Welsch D., (1998). Quantum theory of light in nonlinear media with dispersion and absorption. – J. Mod. Opt. v. 45, N2, p.377-401
13. Lai Y., Haus H. A. (1991). Quantum theory of optical solitons. – Phys. Rev. A, v.40, p.844-853.
14. Yao D. (1995) Quantum coherence of optical solitons in fibers. – Phys. Rev. A, v.52, N2, p.1574-1583.
15. Kouznetsov D., (1992). Quantum fluctuations do not annihilate optical soliton. – Quantum Optics, v.4, p.221-227.

16. Kärtner F. X., Haus H. A. (1993). Quantum mechanical stability of solitons and the correspondence principle. – Phys. Rev. A, v.48, N3, p.2361-2369.
17. Newell A.C., Moloney J.V., (1992). Nonlinear optics. – Adison Wesley Publishing Company, NY, p.437.
18. Cohen-Tannoudji C., Diu B. and Laloë F., (1977). Quantum Mechanics. John Wiley & sons.
19. De la Peña L.(1991), Introducción a la mecánica cuántica. Fondo de Cultura Económica.
20. Walls D.,Milburn G., (1994). Quantum Optics. Springer-Verlag.
21. Mandel L., Wolf E., (1995). Optical Coherence and Quantum Optics Cambridge University Press.
22. Alodjants A. P., Arakelian S. M., Chirkin A. S. (1997). Interaction of two polarization modes in a space-periodic nonlinear medium: generation of polarization-squeezed light and quantum nondemolition measurements of the Stokes parameters. – Quantum and Semiclassical Optics, v.9, p.311-329.
23. Shirasaki M., Haus H.A., Wong D. L. (1989). Quantum theory of the nonlinear interferometer. – J. Opt. Soc. Am. N, v. 6, N1,p.82-88.