2 0 4 8 5
1
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

EL ANALISIS NO ESTANDAR EN LA ENSEÑANZA DEL CALCULO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN EDUCACION EN MATEMATICAS

P R E S E N T A:

MIGUEL ANGEL ALCALA LANDETA

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JUAN RECIO ZUBIETA.

270936

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO. 1999.

pensé que no morirías
pensé que tiempo tendría
pensé que siempre podría...
pensé que nunca crecía
pensé ¡Qué suerte tenía!
pensé que siempre estarías

A LA MEMORIA DE MI PADRE

INDICE

I- JUSTIFICACIÓN

La principal preocupación que me guía para escribir este pequeño trabajo, es que durante los veinte años que llevo como profesor me he encontrado con que muchos de los estudiantes sistemáticamente sienten una gran frustración cuando se enfrentan al formalismo del análisis matemático, el cual tiene que ver en gran parte con la introducción de conceptos basados en la idea de límite (ε y δ). Dicho formalismo más que una explicación al estudiante parece ser un *enigma, que les* impide ver la riqueza de conceptos que se encierra dentro de la estructura del análisis. Sin embargo, me he topado con profesionales que estudiaron antes de los años sesentas en *libros de texto "antiguos"* basados en ideas más intuitivas y geométricas- de corte podríamos decir que infinitesimal- que los libros actuales que tienden a un mayor formalismo, y es notable darse cuenta que aquellos *estudiantes, a pesar* de haber llevado cálculo varios años atrás, sus conocimientos parece que presentan una mayor solidez.

Actualmente, la formación académica de la mayor parte de los profesores de matemáticas no es la de profesor justamente, sino de matemáticos e ingenieros principalmente, dando como resultado que los errores didácticos cometidos con ellos se repitan a su vez con sus alumnos reiterando el mecanismo de incomprensión y perdurándolo. La excusa principal que tenían los que hablaban de límites en lugar de *infinitésimos es que tales infinitésimos* no tenían carta de presentación dentro de las matemáticas, aunque aceptaban que eran realmente prácticos en cuanto a su uso, pasaba un poco como con los dos modelos *cosmológicos* el de Ptolomeo y el de Copérnico durante el siglo XVI, en el cual se usaba a este último al realizar cálculos por ser definitivamente más práctico, pero sin embargo era herejía aceptarlo formalmente.

Las cosas han cambiado durante los últimos años. Algunos matemáticos como Abraham Robinson han podido formalizar el análisis basado en infinitésimos desde el punto de la lógica (algo que la intuición humana ya había aceptado) de modo que ahora podemos hacer uso de su "existencia" dentro de nuestros programas de estudio, *volviéndole a dar al cálculo ese sabor* que tuvo durante su desarrollo inicial.

".....La enseñanza (del cálculo) debe ser intuitiva, sencilla, práctica , no sofisticada, sin desviaciones peligrosas para la ulterior formación del alumno. Dar conocimientos modestos pero efectivos. No formar pedantes que hablen mucho sin entender nada. Así contribuiremos a modernizar la enseñanza..."
FRANCISCO ZUBIETA RUSSI
(La Moderna Enseñanza de las Matemáticas)

La sencillez, la intuición y el sentido común, han demostrado ser el arma más *importante con la que cuentan* los profesores que durante muchas décadas han contribuido a la formación de profesionistas de primera calidad, donde el ejemplo geométrico ha sido la pauta para que el conocimiento se recuerde y perdure mejor aún que la fría demostración analítica y metódica que es fácil de olvidar.

Las trampas filosóficas planteadas por Zenón de Elea encuentran su respuesta en el método de exhausión de Eudoxio, evitando la "trampa" de los infinitesimales, simplemente descartándolos como sistema dialéctico, reduciendo los problemas que podían conducir a ellos, a problemas en *que se usa lógica formal. Sin* embargo dicho método llevaba la amargura de ser engorroso, y sobre todo, de que se debía conocer la solución de antemano para poder ser empleado. Los *infinitésimos aunque servían* de guía e inspiración fueron despreciados durante muchos años por no tener un modelo lógico que los justificara, no obstante los matemáticos trabajaban con ellos aplicando una "doble moral", usándolos como método de descubrimiento y a la vez ignorándolos como sistema de demostración. ¡Que hubieran dado en esa época por haberlos podido justificar!

Cuando en el siglo XIX, Cauchy y tiempo después Weierstrass, Dedekind y otros, *logran justificar el cálculo a través* de la teoría de límites, los procesos por los cuales el cálculo alcanzaba sus verdades deja de ser misterioso, para pasar a ser complicado y poco intuitivo. La herencia son nuestros modernos análisis matemáticos, donde la intuición y el sentido geométrico que animó los grandes descubrimientos parece haberse perdido en una selva de símbolos. El grueso de los estudiantes que tienen que cursar cálculo lo hacen por necesidad curricular más que por vocación matemática, pues el salto que tienen que enfrentar desde los estudios de *geometría analítica hasta* el *análisis* matemático es simplemente desproporcionado.

"... Así, desde hace más de un siglo y de manera todavía más flagrante, desde hace cuarenta años, se va consumando el divorcio: de un lado, los matemáticos puros que se enfrentan a sus propios problemas con un rigor etéreo, y de otro, los físicos que ignorando a d'Alembert y sobre todo a Weierstrass y Dedekind siguen calculando con infinitésimos y burlándole de ese rigor matemático que para ellos es puramente ideológico".
JACQUES HARTHONG (1983)
El análisis no estándar

El análisis no estándar está empezando a cobrar cada vez más fuerza dentro de la comunidad universitaria europea y americana, ya que formalmente ha eliminado las paradojas que durante muchos años lo hicieron ser despreciado, y ha demostrado ser útil en la educación matemática de los estudiantes haciendo en muchas ocasiones que los cálculos sean más sencillos que con la utilización del análisis estándar, habiendo también demostrado ser - como ya comentamos - un *poderoso instrumento de descubrimiento.*

Mucha bibliografía que ha sido empleada tradicionalmente por los estudiantes de matemáticas hasta antes de 1960, aunque mencionaba continuamente *la idea de* límite, estaba sustentada claramente sobre el concepto infinitesimal, a pesar de que los profesores *insistían que los infinitesimales no* existían, pero aquí cabría la pregunta; ¿Acaso el ser elementos ideales no es también una peculiaridad de los *números* complejos o de cualquier otro objeto de las matemáticas?. El aceptar la idea de los infinitésimos, es también manejar la idea de los infinitamente grandes. Inclusive números infinitamente más grandes que un infinito y esto es aceptado sin reservas desde el siglo pasado por Cantor y *sus seguidores.*

... *Una opinión más* definitiva ha sido expresada en una declaración hecha por Kurt Gödel después de una platica que dio en Marzo en 1973 en Estudios Avanzados, Princeton:

- Me gustaría señalar el hecho que no ha sido explícitamente señalado por el *Profesor Robinson, pero que me parece* de suma importancia; el llamado análisis no estándar frecuentemente simplifica substancialmente las pruebas, no solamente de los teoremas elementales, sino también de resultados más profundos. Esto es verdad también para la prueba de existencia de subespacios invariantes para operadores compactos, sin mirar los beneficios del resultado; y es verdad en un cada *vez mayor grado de casos.* Este estado de las cosas debería prevenir una mala pero común interpretación del análisis no estándar, llevando la idea que es alguna clase de extravagancia o moda pasajera de los lógicos matemáticos. Nada podría estar más lejos de la verdad. Y más aún, hay buenas razones para creer que el análisis no estándar en una versión o en otra, será el análisis del futuro....".

ABRAHAM ROBINSON
Non-Standar Analysis

Las anteriores opiniones junto con las cada vez más numerosas ponencias que se *presentan en los congresos internacionales* de Educación en Matemáticas avalan el hecho de que el análisis no estándar debe ser tomado en consideración dentro de los sistemas educativos modernos. Por otro lado tenemos cada vez más una mayor bibliografía sobre el tópico, que debemos analizar para poder realizar una investigación didáctica de campo, en la cual estamos obligados a participar todos los que nos dedicamos *a la enseñanza del cálculo.*

Primeramente analizaremos el marco teórico inherente al problema que queremos considerar. Y este consiste en dos partes:

1.- Los problemas que plantea el infinito dentro de nuestra experiencia.

2.- Los problemas planteados por los infinitésimos dentro de un modelo *matemático, como fue el caso* de la teoría pitagórica de la proporción.

II.- INTRODUCCIÓN

La labor del matemático, se dice, es de carácter analítico, esto es ampliar lo que los axiomas afirman, sin embargo, siempre ha habido la tendencia de que tales axiomas estén basados en una expresión inherente al diseño de nuestro universo. Los modelos para representar dicho universo son modelos basados en la naturaleza observable del mismo, es decir, en su dimensionalidad física, longitud, masa, tiempo, etc.. El modelo que nos atañe en este trabajo es de carácter didáctico, y compete únicamente a la idea de longitud.

Desde los albores del pensamiento matemático hemos reflexionado sobre la longitud, y para representarla, durante muchos años se utilizó el segmento como unidad de medida intuitiva, y tuvo que pasar mucho tiempo para que dicha representación fuera sustituida por la idea más abstracta de número.

El concepto de número para representar una distancia generó una serie de irregularidades en los modelos geométricos iniciales, como el propuesto por Pitágoras que como sabemos estaba basado en una hermosa teoría, sin embargo tales irregularidades se fueron solucionando adecuadamente a través del tiempo.

La historia de la ciencia en general y de la matemática en particular no es más que la lucha de la razón para justificar los modelos humanos en lo que respecta a los obstáculos epistemológicos. Cada obstáculo superado nos lleva a un nuevo estadio de conocimiento. La educación matemática del individuo es la lucha de su razón contra los mismos obstáculos, pero condensada en unos cuantos años, y es ahí donde la didáctica entra en acción, y convierte al matemático en pedagogo para poder efectuar la transmisión de un conocimiento que tomó centurias a un conocimiento breve en el tiempo. Deberá condensar cientos de libros y reflexiones en documentos de corta extensión pero a la vez exactos. El profesor de matemáticas debe suscribirse al hecho de que si quiere transmitir la información, está jugando contra reloj.

La matemática como medio educativo está sujeta a nuevas leyes; leyes que varían con el tiempo al estar vinculadas a la naturaleza cambiante del individuo, y a la modificación que sufre la cultura. No fue lo mismo educar en la época de Platón que en la de Galileo, ni será lo mismo con los estudiantes del siglo XXX.

El profesor de matemáticas debe ser ante todo un investigador universal, que debe hurgar tanto en la historia como en la filosofía, adentrándose en la naturaleza del educando. Debe estar al tanto de los avances de la psicología y conocer al mismo tiempo los avances en la tecnología para poder aplicarlos al proceso de la enseñanza. Debe por otro lado tener la visión necesaria para poder discernir el nivel lógico que desea transmitir, debe saber cuando mostrar y cuando demostrar, y sobre todo a que profundidad desea llegar, debe saber enfocar el conocimiento desde varios puntos de vista, pero sobre todo tener una mente liberal que en todo

momento esté consciente que en lo referente al conocimiento todo está pegado *con alfileres* y por lo tanto es solamente provisional.
El presente trabajo tiene que ver con la matemática educativa pero es a la vez la exposición de un problema muy antiguo y una proposición. La exposición consiste en analizar cómo *fue que el uso* del *concepto infinito* potencial llevó a la resolución de problemas geométrico-cinemáticos, y a la proposición en el establecimiento formal del Cálculo Infinitesimal dentro de la enseñanza del Análisis. La exposición es importante porque nos muestra el camino *que se consideró más* natural para comprender el método infinitesimal, y la proposición se sustenta en el trabajo de Abraham Robinson, donde da carta de ciudadanía matemática a los por mucho tiempo elusivos infinitésimos.

III.- ANTECEDENTES Y MARCOS DE REFERENCIA

"Creen algunos, ¡oh rey Gelón!, que el número de granos de arena es infinito; más no ya el de los que rodean Siracusa y cubren las distintas playas de Tinacaria, sino el de las que puede haber en todas las regiones habitadas y desiertas, está lejos de serlo. Hay otros que juzgan no ser infinito su número, pero dicen que es imposible ninguno determinado que lo exprese...".

ARQUÍMEDES "El Arenario"

Los adjetivos "grande" y "pequeño" para los seres humanos han tenido connotaciones distintas a lo largo de la historia. Por ejemplo, la idea geográfica que se poseía en la antigüedad inducía a asignar distancias "enormes" entre los diferentes pueblos y civilizaciones. Sin embargo, tiempo después cuando se descubrieron los territorios del ultramar europeo hubo una modificación en la sensación de distancia y de vecindad. Un grano de trigo o de comino era algo que se *podía* catalogar como muy pequeño, o el ojo de una aguja como dice la Biblia, pero con el descubrimiento del microscópio, al mirar una gota de agua se observó un pequeño universo de microbios y la sensación de pequeño sufrió una modificación. El estudio de la astronomía llevó a los hombres a magnitudes increíblemente grandes y el descubrimiento del átomo y sus componentes a magnitudes increíblemente pequeñas. Sin embargo por muy grandes o pequeñas que fueran dichas dimensiones eran de algún modo observables al estar atadas a atributos materiales.

Un número como $(10)^{80}$ es sensatamente grande, es quizá el orden del número de átomos que componen la materia del universo confinada en un espacio de unos $(10)^{10}$ años luz que es el universo. Lo anterior aunque sorprende a nuestra imaginación es de alguna manera entendible. Cuando nos adentramos en el mundo de lo pequeño un número *como* $(10)^{-15}$ *m. que es el diámetro de un protón* parece increíble para la escala humana, pero también es de alguna manera comprensible - pensamos en él como una pequeña pelotita -. ¿ Pero que sucede con ordenes de magnitud espaciales tales como $(10)^{100}$ o $(10)^{-80}$?. Sobre eso sólo podemos reflexionar y mirarlos con frialdad sin que signifiquen para nosotros nada material.

Cuando en el siglo XVII se inventó el Cálculo Diferencial e Integral hubo que emplear conceptos numéricos tan grandes o tan pequeños que hacen palidecer a los tamaños de nuestro universo material, y se empezó a hablar de cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas a las que llamaron "indivisibles" y más tarde "infinitésimos" las cuales estaban desprovistas de relación alguna con los objetos materiales conocidos.

Cuando aparece la idea de "infinito" surgió la duda y la paradoja, pero cuando se comprobó que los métodos matemáticos que hacían uso de tales conceptos conducían a conclusiones aceptadas por la razón, llegó el optimismo y junto con éste aparece la filosofía matemática, la geometría, el cálculo diferencial, el cálculo integral, la teoría de series, la geometría diferencial, el análisis de variaciones, la física en todas sus ramas y todo lo que esté por venir, todo ello basado en un acuerdo humano: "Debemos aprender a *manejar cantidades que no* comprendemos intuitivamente ajenas a nuestro mundo material".

Los primeros antecedentes se dieron con la aceptación de los números irracionales por los seguidores de Pitágoras, que aunque echaba por tierra toda la teoría de la proporción tan elegantemente construida sobre la base de los enteros, era fundamental aceptarlos en bien de la razón. Más tarde durante lo siglos XVI y XVII los matemáticos europeos llegaron a conocer los números negativos a través de los textos árabes, pero los consideraron absurdos. Algebrístas tan notables como Vieta los desecharon por completo - a las raíces negativas de las ecuaciones se las llamo falsas, pues pretendían presentar números menores que nada.

Había argumentos interesantes en contra de los números negativos, como por ejemplo el expuesto por Antoine Arnauld (1612 - 1694), el cual se preguntaba como era posible que (-1) : (1) = (1) : (-1) ya que, como decía, si (-1) es menor que (1) ¿Cómo podría ser una cosa menor a otra mayor, lo mismo que una mayor a otra menor?.

Wallis argumentaba con un poco más de liberalismo que dado que el cociente $a/0$ cuando el numerador a es positivo es infinito, entonces cuando ponemos en el denominador una cantidad negativa b y por ende menor que cero el cociente que resulte $(a)/(b)$ deberá ser ¡mayor que infinito!. El galimatías numérico se incrementó con el advenimiento de las raíces complejas de las ecuaciones algebraicas. El académicamente liberal Issac Newton declaró enfáticamente "los problemas que no tienen una solución física o geométrica significativa deben de conducir necesariamente a ecuaciones con raíces complejas" - o imaginarias como diría Descartes -. Más tarde el obispo de Berkeley le enseñaría algo a los seguidores de Newton respecto a lo "imaginario" y "fantasmagórico" que eran sus diferenciales.

A pesar de los argumentos en contra de las nuevas clases de números que empezaron a surgir, algunos matemáticos se abocaron al estudio de cuales podrían ser sus reglas de operación. Raphael Bombeolli (siglo XVI) dio definiciones claras de como operar con los números negativos y también la forma de ejecutar operaciones con los números complejos.

El establecimiento del Cálculo Diferencial e Integral por medio de Newton y Leibnitz por medio de los infinitésimos llevó al clímax la discusión medieval sobre los métodos empleados desde el lejano ARQUÍMEDES y EUDOXIO, pasando por los matemáticos del siglo XVI y XVII como Cavalieri, Roverbal etc.. Métodos que aunque ingeniosos y veraces descansaban en la base del establecimiento de unas cantidades infinitamente pequeñas de comportamiento exótico no fácilmente aceptadas por todos, pero si toleradas, de modo que las necesidades de la ciencia prevalecieran sobre los escrúpulos lógicos.

Con el transcurso de las investigaciones matemáticas, el camino infinitesimal fue tomando fuerza táctica, cimentando el análisis matemático sobre bases que en esa época se consideraron más firmes, tales como el planteamiento de la teoría de límites por Weiertrass y otros más, teniendo como consecuencia que muchos de los conceptos introducidos por ellos, aunque correctos, fueran obscuros para los estudiantes que utilizaban el Cálculo, no como una herramienta de investigación, sino como trabajo cotidiano, sin embargo el sentido geométrico-intuitivo de los infinitésimos no se perdió del todo, y muchos profesores de Cálculo continuaron basando su didáctica de enseñanza sobre argumentos infinitesimales. Fue en 1957 cuando el Dr. Abraham Robinson logró dar una estructura matemática formal a los infinitésimos mediante lo que se conoce como análisis no estándar creando una base formal para la existencia de un conjunto que abarcaba a los números reales y que fue llamado el conjunto de los hiperreales. Actualmente los números no estándar luchan por abrirse paso en la aceptación lógica dentro de los matemáticos actuales, que no tienen problema en aceptar como "lógicos" a los números negativos, así como a los números complejos.

CONCEPTOS PSICO-PEDAGÓGICOS

Cada época debido a sus características particulares tiene sus propias exigencias y necesidades, el signo de la nuestra es la búsqueda de la eficiencia en un mundo donde la información y la competencia son cada día mayores. La globalización , queramos o no, nos alcanza abarcando todos los aspectos sociales y la educación no es la excepción. El desarrollo tecnológico y científico de un país requiere tener poblaciones bien preparadas, de ahí que cada día adquiere una importancia mayor el perfeccionamiento de la enseñanza matemática.

La didáctica de la matemática es un problema muy complejo que implica un gran número de dificultades, pues depende de muchos factores – algunos conocidos y algunos quizá aun por descubrir – Se han realizado numerosos intentos didácticos para mejorar el aprendizaje, dando como resultado numerosas teorías psicológicas que han dado algunos logros positivos, sin embargo la investigación continúa sin dar a la fecha ningún resultado concluyente. Lo que funciona para un grupo de individuos, llámese escuela, grupo o país, lo hemos visto fracasar en grupos similares en otras partes, llegándose a pensar inclusive en la ausencia de un método general e invocándose a menudo sistemas de carácter personalizado, donde cada individuo sea capaz de hacerse responsable de su propia educación a través de su interacción con la literatura existente y sus propias vivencias.

La Psicología y la Didáctica experimental pretenden proveer de orientaciones y asideros para que el experimentador y el educador cuenten con un marco de referencia que sea más o menos estable y que constituya de punto de partida en donde algún día puedan colgar las " verdades inmutables" del cómo se forman las ideas y los conceptos.

Se han realizado diversos experimentos psicológicos a partir de los trabajos de Piaget referentes al desarrollo de conceptos tales como peso, tiempo, velocidad, espacio y las medidas de longitud, superficie y volumen, donde se sugiere que los mecanismos mentales involucrados para su adquisición quizá no *estén* del todo desvinculados.

La "Association of training Colleges and Departaments of Education." Subraya que un conocimiento del concepto de número debe considerarse como parte necesaria del equipo de todo aquel que se dedique a la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel. En el presente trabajo trataremos con una clase muy especial de números a la que llamamos *"infinitésimos" y los problemas* epistemológicos para su asimilación y conceptualización no distan mucho de los problemas a los que se enfrentaron los que aceptaron por primera vez a los números irracionales, a los negativos o a los números complejos.

En la madurez de *la creación de los números complejos* durante el siglo XVII se suceden en Inglaterra una serie de pensadores que se oponen al idealismo racionalista desarrollado en el continente creando un sistema filosófico que radica esencialmente en una menor ocupación de las cuestiones metafísicas *atendiendo en mayor* grado a una teoría más profunda del conocimiento. Tal corriente fue llamada "El empirísmo Inglés" del que obviamente Isaac Newton no tomó parte, sin embargo tal corriente habría de ser la responsable de poner a prueba durante los siguientes trescientos años el carácter lógico de su existencia. .

EL CONCEPTO

No sabemos con certeza el modo en que el ser humano conceptúa. Parece ser que el llegar a conceptualizar es un proceso personal y cada quien arriba por diferentes vías. Pero sabemos que cuando se forma el *concepto el individuo es* capaz de discriminar o diferenciar las propiedades de los objetos o de los acontecimientos que están frente a él y generalizar sus descubrimientos respecto a cualquier rasgo común que haya encontrado.

La *formación del concepto se apoya notablemente* en recuerdos e imágenes. Por ejemplo Keisler en su libro sobre análisis no estándar hace uso de imágenes que son vistas a través de un "microscopio" y de un "telescopio" para "visualizar" lo que son los infinitésimos y los números infinitamente grandes. Tales *recursos* didácticos no son exclusivos de la matemática, pues han sido empleadas desde hace muchos años dentro de las demás ciencias –Química, Física, Biología-.

En muchas ocasiones la formación del concepto requiere del ensayo y error que tiende a determinar si un nuevo espécimen es incluible dentro de la hipótesis previa ya existente. También sabemos que el razonamiento se ve frecuentemente implicado cuando están siendo formados los conceptos debido a que tiene que efectuarse una selección de lo que es importante para poder desechar lo que es irrelevante. Vinacke ("The Psychology of Thinking". London: McGraaw Hill 1952), un importante investigador en este campo pretende *que tanto la abstracción como* la generalización dependen más de la motivación. Debido a esto es que será de relevante importancia para el profesor de análisis no estándar el ponderar su importancia histórica ante los alumnos por medio de ejemplos impactantes que han contribuido al desarrollo del modelo infinitesimal.

EL LENGUAJE Y EL CÓDIGO

El lenguaje y los símbolos matemáticos constituyen el código de comunicación que vincula los elementos abstractos y las ideas que los conectan dentro de una estructura lógica y sistemática, y de modo de que en la medida que simplifiquemos el código, esto hará que el alumno aprenda con mayor claridad, y es aquí donde la formulación no estándar del Cálculo tiene su mayor éxito, pues a partir de un código de carácter más geométrico que el de los ε y δ se hace más cercano a la estructura perceptiva del estudiante, ya que las relaciones geométricas son más "visualizables".

Los pensamientos surgen de los actos y como veremos, las ideas que condujeron al desarrollo de los logarítmos mucho tuvieron que ver con la idea de movimiento "infinitamente lento". La "plasticidad" del análisis no estándar fue lo que le dio ventaja didáctica desde su creación, pero como no se había encontrado su fundamentación formal era sospechoso de ser falso.

Es mi hipótesis que la enseñanza del análisis no estándar , descansa en el hecho de que el alumno cree un modelo de imágenes concretas que representen una clase general de objetos "perceptibles" -los infinitésimos- y que al cabo de un tiempo puedan ser reemplazados por representaciones más abstractas distintas del estímulo inicial que produjeron, exactamente como cuando se introdujo el concepto de número en la educación primaria y de un modo similar a lo que sucedió a aquellos que estudiaron el análisis complejo, donde los diagramas de Argan sirvieron como un soporte visual que dieron estructura geométrica en un principio y contribuyeron a la visualización del concepto y a sus relaciones matemáticas al darle nombre a una idea. "Lo que tiene nombre existe" es un antiguo proverbio vasco, que podríamos adaptar a la matemática. "Lo que tiene representación visual existe", de ahí que algunos divulgadores de el análisis infinitesimal los hayan dotado de figura y nombre.

Es evidente que podríamos utilizar cualquier teoría psicológica o didáctica adaptándola a nuestra conveniencia para justificar el uso del análisis estándar dentro de la enseñanza, pero eso no dejaría de ser sólo un vulgar ardid. La mejor justificación es el uso continuado como recurso didáctico que de una u otra manera se ha venido haciendo de ellos.

La educación moderna requiere de varios factores de modo que el desarrollo intelectual del estudiante sea integral y significativo para la sociedad. Uno de los factores que debe ser determinante para que cualquier sistema didáctico sea funcional es que éste perdure en el tiempo dentro de la vida productiva del estudiante, de modo que el sistema utilizado debe tener CALIDAD EDUCATIVA y por ello lo que entiendo es que debe tener cuatro aspectos importancia bajo mi punto de vista:

Relevancia.- El estudio debe ser importante en el desarrollo profesional del estudiante, ya sea sirviéndole directamente dentro de la labor que desempeñe o *bien como* un soporte intelectual que apuntale otras asignaturas o le brinde destreza intelectual.

Eficacia.- El método utilizado debe ser de tal naturaleza que sirva a la mayor parte de nuestros estudiantes adaptándose a sus características individuales y sociales de modo que podamos hablar de un sistema educativo de características generales.

Equidad.- Debemos establecer una igualdad dentro de la clase de modo que no tengamos *grupos de élite, sino que la enseñanza* contemple una igualdad cultural dentro de los estudiantes, discriminando solamente la apatía, pero no la velocidad de aprendizaje.

Eficiencia.- Habremos de utilizar con gran cuidado los recursos que nos ofrezca la institución de modo que sean aprovechados en grado máximo sin permitirnos materiales ociosos. Lo que implica que habremos de utilizar bibliografías que realmente sean consultadas de modo que formen niveles estandarizados dentro de nuestra educación *sin querer decir con esto* que tengamos alumnos robotizados y renunciemos con ello a la diversidad intelectual y filosófica.

Uno de los problemas más frecuentes que presentan los estudiantes de Cálculo es el del olvido de la asignatura a lo largo del tiempo, dejando de pertenecer a su estructura cognoscitiva. De acuerdo con la Teoría de la Gestal, debemos poner atención en dos mecanismos importantes, de modo que no se pierda la información." El mecanismo de la asimilación", en el cual las huellas por lo que se quiere aprender son reemplazadas por huellas más significativas para la estructura cognoscitiva, las cuales se supone que son más estables, en nuestro caso particular es más asimilable pensar en cantidades infinitesimales que en los ε y en los δ del desarrollo clásico y "El mecanismo del olvido" el cual se concibe dentro de esta teoría como una desintegración autónoma dentro de las huellas o *rastros cuando el material* no esta estructurado o bien esta deficientemente organizado. También aquí el método no estándar pretende establecer una sistematización y congruencia que organice los mecanismos eurísticos dentro de una estructura común que parta siempre de la misma base, en este caso casi siempre de carácter geométrico. Al final pongo un ejemplo de ello (Análisis no estándar vs. Análisis estándar).

El plan de la creación del curriculum universitario de Cálculo, visto de esta forma, es que el alumno lo asimile *como parte de su estructura cultural y a la vez* lo tenga como un arma intelectual dentro de su formación profesional cualquiera que ésta sea, de ahí la importancia que no olvide los aspectos principales de la teoría y que los pueda aplicar a situaciones donde sea menester, dándoles así un carácter relevante.

La mayor parte de las teorías sobre la memoria (La teoría de Bartlett por ejemplo) concuerdan con la importancia que debe tener el aprendizaje significativo de cosas abstractas con la experiencia pasada, de modo que exista un afianzamiento, y en este sentido, la experiencia del estudiante es mayor en cuanto al uso de un modelo geométrico y en la aproximación y relevancia de los ordenes de magnitud que en la idea de intervalo matemático (ε y δ) , aunque no tengo una base sólida para afirmar tal cosa, solamente mi experiencia de muchos años como profesor de matemáticas. Sin embargo sólo el tiempo dirá si el análisis no estándar será enseñado dentro del curriculum de los años venideros, yo por mi parte creo que así será.

IV.- EL PROBLEMA DEL INFINITO

El trato de los matemáticos con el infinito ha existido desde épocas muy remotas. Los griegos, por ejemplo, evitaban decir que una recta es infinita, diciendo simplemente que podía prolongarse todo lo que se quiera; el mismo Euclides evadía la palabra "infinito" al referirse a la infinitud de tal conjunto, diciendo que dado un número cualquiera se puede encontrar un número primo que sea mayor que el número dado. La imaginación sólo permitía suponer un infinito potencial; cabe decir , algo que "podía" llegar a suponer cualquier cantidad fija, pero nunca algo determinado, nunca un infinito que estuviera ahí completo, como puede parecemos completo un número, por ejemplo, el "4".

LA TEORÍA DE LA PROPORCIÓN

Nuestro diseño mental desde la obscuridad de la noche de los tiempos trata de encontrar el orden donde sólo reina el caos, la armonía es extraída donde aparentemente está la trivialidad instalada y el desorden. La belleza parece ser intrínseca a la mente humana y ser el objetivo final. Desde tiempos antiguos, matemáticos y filósofos han creado modelos para explicar "la perfección" tratando de encontrar las leyes estéticas del *universo, encerrándolas* bajo los sellos del buen gusto dado por la intuición y puestas en un marco lógico cuyo intento inicial fue la proporción. Los órdenes griegos como el dórico, jónico y corintio fueron una pauta inicial que pronto desembocó en una teoría matemática. Diremos que una buena teoría de la proporción será aquella que sea capaz de colmar nuestros sentidos, ya sea por su capacidad de análisis de los *conceptos materiales* percibidos por los sentidos o bien porque con unos cuantos rasgos sintetice la armonía y la belleza.

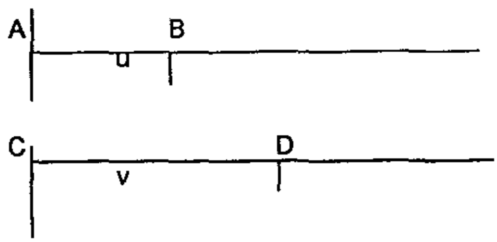
Escuchemos a Platón cuando se refiere a la proporción Áurea.
" es imposible combinar dos cosas sin una tercera; es preciso que haya entre ellas un lazo que las una, y ninguno mejor que el que, con él mismo y con las cosas que une, hace un solo y mismo todo. Y la naturaleza de proporción es tal, que logra perfectamente este objetivo, porque cuando tres números, o de tres *másas o de tres fuerzas* cualesquiera, el primero es al de en medio lo que éste es al último, y cuando, por otra parte, lo que el último es al medio es éste al primero - el medio convirtiéndose en el primero y en el último, y el primero y el último en medios - todo permanece necesariamente como era, y como las partes están entre sí en relaciones semejantes, constituyen, como antes un solo Uno".

La historia de los números es la historia de la reticencia de la mente por aceptarlos y convivir armónicamente con éstos, es la historia de la lógica contra el sentido común, la lucha entre el ejemplo y el contraejemplo, del liberalismo contra el arte del menos común de los sentidos lo que llamamos "sentido común", pero ¿Qué es al final de cuentas lógica? No es acaso *el arte de equivocarse con confianza.*

LA TEORÍA DE LA PROPORCIÓN PITAGÓRICA

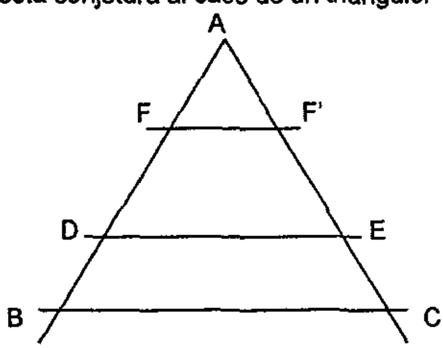
Los pitagóricos aceptaban a los enteros como algo bello y en ellos se basaba su teoría de la proporción.

Dados los segmentos AB = u y CD = v



Sí hacíamos corresponder en un principio a ambos segmentos sobre sus respectivas rectas paralelas y a continuación repetíamos los segmentos sobre las rectas, al cabo de un cierto número de repeticiones dichos segmentos *deberían* volverse a alinear uno encima de otro. Por ejemplo si AB = 3 y CD = 7 al cabo de repetir AB un número n = 7 veces y repetir CD un número m = 3 veces dichos segmentos AB y CD llegarán a estar alineados verticalmente en su extremo final. Lo anterior era *sin duda una buena conjetura* basada en una idea implícita de infinito sin hacer mención explícita de la palabra. Lo que estaba involucrado es: "Dados dos segmentos, volúmenes, fuerzas, áreas o cualquier propiedad del mundo material susceptible de ser medida siempre es posible encontrar una parte alícuota de la propiedad que quepa en ambas un número entero de veces".

Veamos como aplicar esta conjetura al caso de un triángulo:



"Una línea DE dibujada a través de los lados de un triángulo, paralela al tercero, divide a los lados proporcionalmente".

Sea DE paralela a BC. Debido a la teoría de la proporción de Pitágoras debe de *existir un segmento*
AF = u tal que AD = (n) (u) y por lo tanto AE = (n) (u') donde AF' = u' y también tendremos que DB = (m) (u) y EC = (m) (u') de lo anterior tenemos que:

$$1)\frac{AD}{DB}=\frac{n}{m}$$

y por otro lado

$$2)\frac{AE}{EC}=\frac{n}{m}$$

De donde combinando las relaciones las relaciones anteriores tenemos que:

$$3)\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

La cosa hasta aquí funcionaba, pero ...... De pronto vino el "cisma". Al estudiar el triángulo rectángulo de lados unitarios donde *la hipotenusa es la raíz cuadrada* de dos y tratar de encontrar una unidad de medida común al lado y a la hipotenusa vino el derrumbe de la teoría.

Supongamos que al recibir (n) *veces el segmento de* longitud (1) y m veces el segmento de longitud (2) los extremos coinciden nuevamente como en el caso anteriormente estudiado (m y n números enteros) entonces tendríamos que:

$n(1) = m(\sqrt{2})$ o bien $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$

Siendo los números n y m los enteros para los cuales dichos segmentos se "encuentran" por primera vez (si se encuentran *una* vez es claro que se deben encontrar muchas más) entonces tendríamos que:

$$2\,m^2 = n^2$$

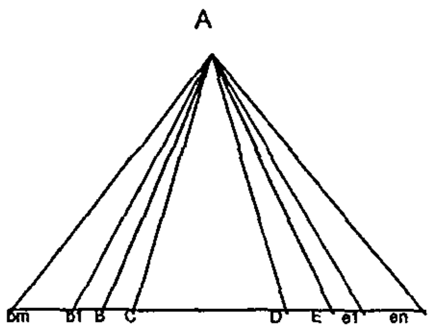
Y por tanto n deberá ser un número par digamos de la forma n = 2p.

Por un razonamiento similar m también deberá ser un número par de la forma m = 2q (obviamente p y q enteros), *pero entonces tendríamos* que:

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}=\frac{2p}{2q}=\frac{p}{q}$$

Donde claramente $p < n$ y $q < m$, esto si encontramos que ambos segmentos coincidían a una cierta distancia d_0 del punto inicial ahora hemos demostrado que coinciden a una distancia d_1 menor ($d_1 < d_0$) y razonando de forma similar podremos encontrar que también coincidirían a una distancia aún menor d_2($d_2 <$ *d_2) etc. lo cual* a todos luces es absurdo, teniendo que concluir que ambos segmentos jamás coincidirán. En la lucha entre la intuición y la lógica, la lógica lleva hasta ahora un punto a su favor.

Lo anterior hacía suponer que la hermosa teoría Pitagórica de la proporción estaba derrotada, pero la verdad no era así, solamente habría que dar un nuevo enfoque al razonamiento de modo de ajustarla. Este nuevo enfoque fue dado por un inteligente matemático griego llamado Eudoxio.



Marquemos a partir de B (m-1) segmentos todos de longitud igual a BC y a partir de E (n-1) segmentos todos de longitud DC . Conectemos los puntos resultantes $b_1, b_2, b_3,\ldots b_m$ y los puntos $e_1, e_2, e_3,\ldots. e_n$ con el vértice A, entonces tenemos que:
Si $d(b_m,C)$ *es la distancia de* b_m *a* C *y* $d(D,e_n)$ *es la distancia de* D *a* e_n, tenemos que:

$$d(b_m,C) = m(BC) \quad y \quad d(D,e_n) = n(DE)$$

Ahora recurriendo a Euclides Y-38 y a su corolario tenemos que el triángulo A,b_m,C es mayor , menor o igual que el triángulo A,D, en, esto es:

$$m(\Delta\ ABC) \text{ será mayor, menor o igual que } n(\Delta\ ADE)$$

de acuerdo con que m(BC) sea mayor menor o igual que n(DE) y de aquí Eudoxio redefine lo que debemos entender por establecer una proporción dado que:

$$\Delta\, A, b_m, C = m\left(\frac{1}{2}BC\right)h \qquad y \qquad \Delta\ A, D, e_n = n\left(\frac{1}{2}DE\right)h$$

tendremos que:

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{BC}{DE}$$

Estableciendo una nueva forma de definir la proporción sin hacer mención de cantidades inconmensurables, pues esta forma de *definir la proporción se aplica a* ambos casos.
En la actualidad muchos de los libros de texto prefieren probar la teoría de la proporción para ambos casos. En el caso conmensurable a la usanza de Pitágoras y para el caso inconmensurable estableciendo un concepto infinitesimal.

Una vez establecidas las nociones griegas sobre la proporción pasaremos a analizar la aplicación de esta teoría sobre algunos problemas de interés característicos de la época, que involucraban cantidades o infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, y que fueron el punto de arranque de las teorías modernas del actual análisis matemático, y su relación con la idea didáctica actual del análisis no estándar. Para ello es imprescindible hojear el trabajo del más grande matemático de la antigüedad.

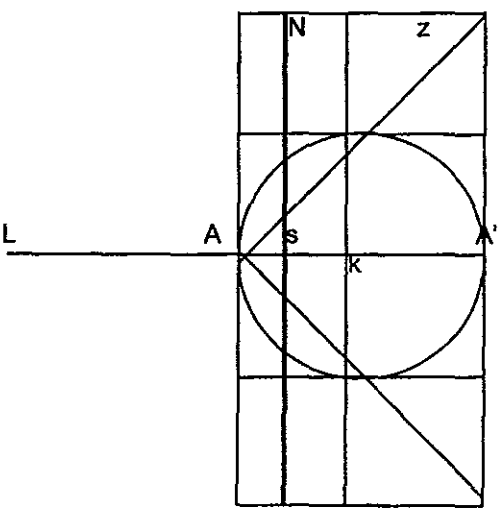
V.- ARQUÍMEDES Y LOS INFINITESIMOS

Con las conquistas de Alejandro, la Alejandría egipcia llegaría a ser el principal centro de investigaciones matemáticas de la antigüedad, siendo en este sitio donde sentaron sus reales los principales científicos y filósofos griegos. Sin embargo fue en Sicilia donde llegó a vivir el que fue sin duda el más grande matemático de ese período y el primer precursor del cálculo diferencial e integral.

La forma en que Arquímedes trata los problemas es "LA USANZA EUCLIDIANA", basándose en postulados y llegando a las conclusiones a través de un discurso lógico. Sin embargo pronto se dio cuenta de que los problemas a los que se estaba enfrentando no eran de la índole que bastara solamente el trabajo de Euclides, sino que los conceptos que necesitaba iban más allá del campo finito, perdiéndose en las profundidades de lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño, ámbito que rebasaba sin lugar a dudas el pensamiento filosófico de su era. Sin embargo con una intuición sin límites abordó el problema del infinito llegando a conclusiones válidas de una manera sumamente ingeniosa y sentando las bases que sustentarían a los matemáticos del futuro.

Hablaremos aquí de dos de sus trabajos que evocan dos tratamientos distintos del infinito, por una parte el primero, establece una relación que existe entre los volúmenes de una esfera, un cilindro y un cono, empleando intuitivamente propiedades infinitesimales y en el segundo va a la caza de un número por vía de las aproximaciones sucesivas basadas en el establecimiento de reglas de recurrencia en una secuencia infinita.

A) CALCULO DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA



(LA) = (AA')
fulcro en A

Sea c= un cilindro de altura AA' y radio sN
e = una esfera de radio AK inscrita en el cilindro c
co = un cono de altura AA' y radio de la base A'Z inscrito en el cilindro c

Sea LA = AA' una palanca con fulcro en A

Sea el volumen del cono co =(1/3) del volumen del cilindro c (probado por Eudoxio)

Demostrar que el volumen de la esfera e = (4/3)Π r^3

$$1)..\frac{As}{os}=\frac{os}{sA'}\Rightarrow (os)^2=(As)(sA')$$
$$2)..(sA)^2+(so)^2=(Ao)^2$$

Sustituyendo el valor de $(so)^2$ encontrado en las ecuaciones anteriores tenemos que:

$(sA)^2 + (sA)(sA') = (sA)[(sA) + (sA')]$ pero (sA) + (A') = (AA') de donde:

$(sA)^2 + (so)^2 = (Ao)^2 = (sA)(sA')$

3) Dado que (sA) = (sp) ya que el triángulo Asp es equilátero tenemos

$(sp)^2 + (so)^2 = (sA)^2 + (so)^2$ y finalmente igualando tenemos:

$(sp)^2 + (so)^2 = (sA)^2 + (so)^2 = (Ao)^2 = (As)(AA')$

4) De la última igualdad tenemos:

$(sp)^2 + (so)^2 = (As)(AA')$

y como sabemos que:

(sn) = (AZ') = (AA') por ser el triángulo AA'Z equilátero dividendo tenemos que:

$$\frac{(sN)^2+(so)^2}{(sN)^2}=\frac{(As)(AA')}{(AA')^2}=\frac{(As)}{(AA')}$$

De donde:

$$[(sp)^2 + (so)^2]\,(AA') = (sN)^2\,(As)$$

Si pensáramos en rebanadas de sólido muy delgadas

Para el volumen de una rebanada de cono tendríamos:

$V_{cono} = \pi\,(ps)^2\,dx$, es decir el volumen del cono es proporcional a $(ps)^2$ y este volumen sería proporcional al peso de la rebanada.

De donde:

$$V_{cono} \approx (sp)^2$$

$$V_{esfera} \approx (so)^2$$

$$V_{cilindro} \approx (sN)^2$$

Por otro lado de acuerdo con el principio de la palanca dos masas M y m están en equilibrio si:

$$M\,l_1 = m\,l_2$$

y de la ecuación A vemos que las rebanadas de cono $(sp)^2$ y de esfera $(so)^2$ combinadas y puestas a una distancia (LA) = (AA') se equilibran con la rebanada de cilindro $(sN)^2$ puesta a una distancia (As) del fulcro.

Luego entonces como (As) fue elegida al azar, podríamos recorrer toda la distancia (AA'), esto es: cortar todas las rebanadas. En otras palabras, el cono y la esfera equilibrarán a una distancia (AA') del fulcro al cilindro puesto en su lugar (su centro de masa a la mitad de (AA') del fulcro):

$$2\ (\text{CONO} + \text{ESFERA}) = (\text{CILINDRO})$$

Eudoxio había demostrado con anterioridad que:

$$\text{VOLUMEN DEL CONO} = (1/3)\ (\text{VOLUMEN DEL CILINDRO})$$

$$A'z = R = AA' = 2\,r \quad \text{ya que } R = 2r$$

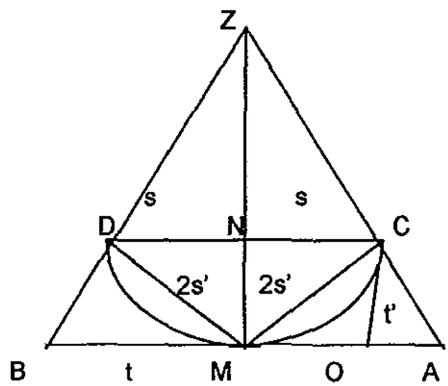
$$1/3\,\pi\,(2r)^2\,(2r) + E = ½\,\pi\,(2r)^2(2r)$$

$$E = 4/3\,\pi\,r^3$$

B) DETERMINACIÓN DE FÓRMULAS DE RECURRENCIA PARA EL CÁLCULO DE π

Veremos aquí el método que empleó Arquímedes para aproximar π basado en un proceso de la obtención de fórmulas de recurrencia utilizando el concepto de infinito potencial.

Sabemos que la circunferencia de un círculo yace entre los perímetros de polígonos ambos de n lados, uno inscrito y otro circunscrito.



El objeto es calcular el perímetro de los polígonos regulares *inscrito* y *circunscrito* de un número muy grande de lado, tal que su diferencia sea igual a un número de magnitud tan pequeña como queramos. El método es el llamado ALGORITMO DE ARQUÍMEDES y consiste en la obtención de dos fórmulas de recurrencia:

Sea Z el centro del círculo:

1) Sea AB = 2t el lado del polígono circunscrito

2) Sea DC = 2s el lado del polígono inscrito.

3)Sea M el punto medio de AB; N el punto medio de DC.

4)Sea O el *punto de intersección de MA con la tangente al círculo en C.*

5)Obviamente MO = OC (las tangentes a un círculo son iguales.

MO = OC = t' es la mitad del lado del polígono de n lados circunscrito

6) MC = MD = 2s' es el lado del polígono de 2n lados inscrito

7) Puesto que el triángulo ACO ≈ triángulo AMZ tenemos que:

$$\frac{t'}{t-t'}=\frac{OC}{OA}=\frac{MZ}{AZ}$$

8) También:

$$\frac{s}{t}=\frac{NC}{MA}=\frac{CZ}{AZ}$$

MZ y CZ son radios

Dado que los triángulos AMZ ≈ ACO ≈ CNZ

A) $\frac{t'}{t-t'}=\frac{s}{t}$

De donde:

B) $t'=\frac{ts}{t+s}$

Al aumentar el número de lados del polígono inscrito (y circunscrito) los ángulos varían en igual medida, y recordemos que los ángulos son iguales tanto para el polígono regular inscrito que para el circunscrito (dado que poseen el mismo número de lados), luego entonces:

$\frac{2s'}{2s}=\frac{t'}{2s'}$ o bien:

C) $2(s')^2= st'$

(Ver los triángulos MCD y OMC donde ∠ CMD = ∠ COM)
Por lo tanto son semejantes, de ahí la relación (B)

Si a = Perímetro del polígono P de n lados circunscrito
b = Perímetro del polígono p de n lados inscrito.

Y a' y b' los perímetros correspondientes de los polígonos de 2n lados, tenemos entonces que:

$$a = 2nt \quad y \quad b = 2ns$$
$$a' = 4nt \quad y \quad b' = 4ns'$$

Introduciendo los valores de t , s , t' s' , obtenidos sustituyendo t' en (B) tenemos:

$$a' = 4n\left[\frac{ts}{t+s}\right] = \frac{2(nt)s}{t+s}$$

Pero a = 2nt de donde:

$$a' = \frac{2as}{t+s} = \frac{n}{n}\left[\frac{2as}{t+s}\right] = \frac{a(2ns)}{nt+ns}$$

pero b = 2ns de aquí que:

$$a' = \frac{ab}{nt+ns} = \frac{2}{2}\left[\frac{ab}{nt+ns}\right] = \frac{2ab}{2nt+2ns}$$

Finalmente

$$a' = \frac{2ab}{a+b}$$

Por otro lado, despejando s' de (C) t sustituyéndolo en b' = 4ns' tenemos:

$$b' = 4ns' = 4n\sqrt{(1/2)st'} = 4n\sqrt{\frac{1}{2}\frac{2nst'}{2n}}$$ *ya que* $b = 2ns$

$$b' = 4n\sqrt{\frac{1}{2}\frac{bt'}{2n}} = 4n\sqrt{\frac{bt'}{4n}}$$

$$b' = 4n\sqrt{\left(\frac{1}{4n}\right)\left(\frac{b4nt'}{4n}\right)}$$ *pero* $4nt' = a'$

$$b' = 4n\sqrt{\frac{a'b}{16n^2}}$$ *finalmente*

$$b' = \sqrt{ba'}$$

a' = media armónica de a y b
b'= media geométrica de a y a'

El algoritmo de Arquímedes consiste en calcular el perímetro de los polígonos sucesivos. Arquímedes escogió como polígonos iniciales los hexágonos regulares, cuyos perímetros (Del inscrito y del circunscrito) iniciales sabía que eran:

$$a = 4\sqrt{3}r$$
$$b = 6r$$

Trabajó con las series hasta llegar al de 96 lados donde encontró que:

a= 3(10/70)d b=3(10/71)d

siendo d el diámetro del círculo. Lo que da como consecuencia que:

$$\pi = 3\left[\frac{1}{7}\right] = 3.14$$

Lo anterior nos muestra uno de los resultados más sorprendentes del uso del concepto de infinito potencial.

La idea de usar la *suma de un número infinito* de términos empezó quizá con Arquímedes y continuó a través de toda la historia hasta nuestros días, pasando por el descubrimiento del CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL durante el siglo XVII. Conocer si dichas sumas *infinitas tenían o no un límite* fue el arranque del análisis moderno, y la punta de lanza para una comprensión racional de la estructura matemática.

Durante la edad media sin embargo se hicieron notables progresos en lo relativo al uso de las sucesiones y las series infinitas y con ello al estudio de cantidades infinitamente pequeñas que fueron llamadas en un principio *indivisibles* y *más* tarde infinitesimales, que es el tema que nos ocupa en este trabajo.

VI.- LOS INFINITESIMOS EN ACCIÓN

Ahora veremos como las ideas infinitesimales sirvieron para el desarrollo de algunos de los resultados prácticos más espectaculares dentro de la matemática, como fue el descubrimiento de los logarítmos y la teoría de la exponencial, que dio comienzo con el trabajo de Napier y culminó con los estudios de Euler.

A) LAS NECESIDADES DE CÓMPUTO.

Con el desarrollo del estudio del movimiento de los cuerpos durante la edad media surgió una nueva forma de analizar a las figuras geométricas, esto es, como puntos que se movían en un plano o en el espacio creando formas geométricas. Esto contribuyó de una manera clara a una nueva forma de operar con las figuras, empezándose a hablar por primera vez de variables.
A continuación veremos la forma en que estas ideas cinemáticas llevaron al establecimiento de una función muy peculiar que demostraría ser un pilar dentro del análisis, y una herramienta formidable de cálculo.

Nuestros métodos actuales de multiplicación y división nunca fueron muy fáciles a lo largo de la historia. En el pasado los métodos eran lentos y complicados. Si cualquiera de nuestros escolares actuales de educación primaria pudiese desplazarse en una "máquina del tiempo" a cualquiera de los siglos XIV, XV o XVI por ejemplo, su facilidad para efectuar multiplicaciones, divisiones, extracción de raíces cuadradas o cálculo con fracciones o decimales sorprendería a los matemáticos más experimentados de esas épocas, convirtiéndolo automáticamente en un maestro de cálculo que ocuparía una cátedra en cualquier prestigiosa universidad.

Los métodos de cálculo para las multiplicaciones o divisiones usados en aquellas épocas recibían nombres curiosos, de acuerdo con las técnicas particulares usadas. Por ejemplo el método "Ajedrecístico", "Por cruz pequeña", "Por red", "Por rombo", "Por copa" etc. Para los métodos de división poseían también técnicas curiosas. Por ejemplo el descrito por el célebre matemático italiano Nicolás Tartaglia "El método de la galera". "DURA COSA E LA PARTITA" (La división es un asunto difícil).

No es de sorprender, que tal complicación y manipulación de cifras para poder multiplicar o dividir hiciesen que durante mucho tiempo se buscase reducir el problema a sumas y restas, quizás imitando un poco a los métodos egipcios.

Sabemos que los matemáticos del siglo XVI conocían formas para convertir productos en sumas o restas. Así por ejemplo:

$$(\operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Al complicarse las relaciones comerciales, así como el entrar la ciencia de la astronomía a formar un auxiliar práctico en la navegación de altura, la necesidad de acelerar los cálculos se hizo indispensable y dio lugar al invento de los logarítmos en el siglo XVI, de igual manera que la computadora se hizo indispensable con los avances y la tecnología en el siglo XX.

B) LOS LOGARÍTMOS DE NAPIER

Comparación de una serie geométrica con una aritmética.

La idea de Napier era poder efectuar multiplicaciones por medio de sumas, y así refiere el propósito que lo animaba.

".... En la medida de mis capacidades, me proponía evitar las difíciles y aburridas operaciones de cálculo, cuyo fastidio constituye una pesadilla para muchos que se dedicaban al estudio de las matemáticas.... ".

Laplace escribió más tarde "....Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculos a unos pocos días, el invento de los logarítmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.... ".

Briggs, contemporáneo de Napier, célebre más tarde por la invención de los logarítmos decimales, escribió al recibir la obra de Napier. ".... Con sus nuevos y asombrosos logarítmos, Napier me ha obligado a trabajar intensamente con la cabeza y las manos. Confío en verle este verano, pues jamás he leído un libro que tanto me agradara y asombrara, como ha sido éste....". Briggs realizó su deseo, dirigiéndose a Escocia para visitar al inventor de los logarítmos. Cuando se encontraron Briggs le dijo:

"....He emprendido este prolongado viaje con el fin exclusivo de verle a usted y conocer con ayuda de este ingenioso procedimiento y de que arte se ha valido para concebir ese admirable recurso para los astrónomos: los logarítmos, y, por cierto lo que ahora más me asombra es que nadie los hallara antes; hasta tal punto parecen sencillos después de conocerlos.....".
La forma en que Napier desarrolla su " invento" fue considerando la relación que existe entre una serie geométrica y una serie aritmética.

Ejemplo

A	1,	2,	2^2,	2^3,	2^4,	2^5,	2^6,	2^7,	2^8,.....
B	0,	3	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,

Si queremos multiplicar 2^3 por 2^5 en la serie geométrica le hacemos corresponder los términos $9 + 15 = 24$ en la escala inferior de donde la suma es 24, asignándole después el número que le corresponda en la serie geométrica (ver el diagrama superior). De modo que el producto lo estamos transformando en una suma.

Tenemos entonces que:

A	1,	q,	q^2,	q^3,	q^4,	q^5,	q^6,
B	0,	p,	2p,	3p,	4p,	5p,	6p.

De donde a la cantidad 2p le llamaremos el logarítmo de q^2

Es evidente que ni la serie A ni la serie B cubren todos los puntos de la recta real dado que van dejando huecos. De modo de que ambas series cubrieran más puntos deberían de crecer muy lentamente. Y la cantidad de precisión será la que nosotros deseemos.

Sean las series

A_1	1,	$(1+\omega)$,	$(1+\omega)^2$,	$(1+\omega)^3$,	....	$(1+\omega)^n$
B_1	0,	β,	2β,	3β,		$n\beta$

Donde las cantídades ω y β Son **"INFINITÉSIMOS"**

Postulemos que tanto la serie A_1 como la serie B_1 cubren todos los puntos de la recta real, debido a que tanto ω como β son cantídades infinitamente pequeñas.

Podemos pensar cinemáticamente y decir que ω y β son las velocidades que se emplean para ir de 1 a $1+\omega$ y de 0 a β respectivamente.

Defínamos una cantidad a la que llamaremos **MODULO (M)**

$$M=\beta/\omega$$

Y tendremos por lo tanto que:

$$\beta = M\omega$$

Haciendo el cambio de variable anterior obtendremos

A_1	1,	$(1+\omega)$,	$(1+\omega)^2$,	$(1+\omega)^{3.}$	$(1+\omega)^n$
B_2	0,	$M\omega$,	$2M\omega$,	$3M\omega$,	$nM\omega$

Al Modulo **M** le podemos asignar cualquier valor que queramos.

¿CÚAL PODRÍA SER EL MÁS "NATURAL"?. Quizás el número uno?

Pues si así lo hemos definido, entonces estamos definiendo una extraña pero "natural" base de logarítmos cuyo protagonísta es el número e .
De hecho Napier no tomó exactamente esa base, sino el inverso de ella.
Si tenemos que **M** = 1 entonces las series anteriores tendrán la forma:

A_1	1,	$(1+\omega)$,	$(1+\omega)^2$,	$(1+\omega)^3$	$(1+\omega)^n$
B_2	0,	ω,	2ω,	3ω,	$n\omega$

Si nos dan un número real positivo cualquiera. Digamos Y, como la serie A_1 avanza a "pasos muy pequeños", tan pequeños que podemos pensar que recorre todos los números reales (argumento infinitesimal), a tal número Y lo debemos poder encontrar en algún sitio de la serie, (para un exponente "enorme", Tal vez infinitamente grande), Por ejemplo N. De donde tendríamos que:

$$Y = (1+\omega)^N$$

Esto es

$$1, \quad (1+\omega), \quad (1+\omega)^2, \quad (1+\omega)^{3,}\cdots\cdots Y=(1+\omega)^N$$

$$0, \quad \omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad X=N\omega$$

Donde X es el término que le corresponde en la serie aritmética al número Y de la serie geométrica, y tendremos que:

$$X = N\omega = \log Y$$

Ya que le hemos llamado, al término de la escala aritmética el *logarítmo* de su correspondiente en la escala geométrica.

Despejando ω tenemos que:

$$\omega = X/N$$

sustituyendo en:

$$Y = (1+\omega)^N$$

Obtenemos

$$Y = (1 + X/N)^N$$

Cuando la N es muy grande el valor de Y tiende a un límite. Cosa que habrá que probar por supuesto. Sea e el número que resulte para esa "enorme" N cuando X = 1, sustituyéndolo en la ecuación anterior tendremos que:

$$e = (1 + 1/N)^N$$

Podemos ver que para el número 1 debería existir en la escala aritmética una M tal que:

$M\varpi = 1$ de donde $X = M\varpi X$

Por otro lado sabemos que $\omega = X/N$, sustituyendo en $X=M\omega X$ tenemos que $X=M(X/N)X$, de donde: $N=MX$, sustituyendo en

$$Y = \left(1 + \frac{X}{N}\right)^N$$

tenemos que:

$$\left(1 + \frac{X}{N}\right)^N = (1 + MX)^{MX} = \left[\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right]^X$$

Y como la M deberá ser enorme entonces no habrá diferencia entre M y N, por lo que tendremos:

$$e = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$$

De donde obtendremos finalmente que:

$$e^X = \left[\left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right]^X$$

C) LA DERIVADA COMO COCIENTE DE INFINITÉSIMOS

Sean las series:

A_1 1, $(1+\omega)$, $(1+\omega)^2$, $(1+\omega)^3$.................... $(1+\omega)^n$

B_2 0............ω, 2ω, 3ω..........................$n\omega$

Como sabemos $p\omega$ es el logarítmo de $(1+\omega)^p$. Para calcular la derivada tendríamos que calcular:

$$\frac{(1+\omega)^{n+1}-(1+\omega)^n}{(n+1)\omega-(n\omega)}$$

Lo que es por definición la derivada, debido a que la diferencia entre $(1+\omega)^{n+1}$ y $(1+\omega)^n$ es infinitesimal, al igual que $(n+1)\omega$ y $n\omega$, tenemos que:

$$\frac{(1+\omega)^{n+1}-(1+\omega)^n}{(n+1)\omega-(n\omega)}=(1+\omega)^n$$

Esto es hemos definido de esta forma una función cuya derivada es ella misma con argumentos heurísticos basados en infinitesimales.
Para cualquier otro valor del modulo que hubiésemos elegido distinto de **M=1** digamos por ejemplo **M=μ** la derivada hubiese sido:

$$\frac{(1+\omega)^{n+1}-(1+\omega)^n}{\mu(n+1)\omega-\mu n\omega}=\frac{(1+\omega)^n}{\mu}$$

D) LA PRESENCIA DE e EN LA MATEMÁTICA MODERNA

Sabemos que la famosa relación que en la nomenclatura actual viene dada por:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(A)}$$

Era conocida por Bonaventura Cavallieri (1598-1647) en su libro "Tratado de los indivisibles", en donde n es un entero positivo, y aunque sólo lo demostró hasta n=4 sirvió de guía para que años después Evangelista Torricelli (1608-1647) en su tratado "De infinitis hyperbolis" lo demostrará para cualquier número racional diferente de -1. Demostrando de paso que si $y^p = kx^q$ entonces:

$$\frac{ydx}{xdy} = \frac{p}{q}$$

Donde p y q son enteros positivos.

La relación (A) nos lleva directamente al hecho:

$$\int_b^a x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Sin embargo cuando tratamos de emplear la formula anterior para el valor x=-1 llegamos al absurdo (0/0).

La hipérbola equilátera y=1/x, para la cual la relación anterior deja de tener sentido, posee propiedades interesantes, que nos recordarán aquellas de nuestra serie logarítmica, y de hecho, como veremos será la definición geométrica adecuada para la función logarítmo, cosa que el inventor de éstos nunca sospechó siquiera, siendo hasta la época de Euler cuando se identificó plenamente a la función exponencial con la logarítmica tal cual y ahora la conocemos.

La hipérbola equilátera tiene propiedades muy interesantes en cuyos cimientos descansa el descubrimiento y las propiedades de los logarítmos.

¿Cuáles son las propiedades que hacen a la curva interesante?

Dependiendo del signo de x la hipérbola y=1/x tendrá dos ramas una en el primer cuadrante y otra en el tercero. La parte que estudiaremos será la del primer cuadrante en la cual analizaremos las principales propiedades que nos permitirán efectuar una investigación más a fondo de las relaciones de esta curiosa función y de su relación con el análisis matemático moderno.

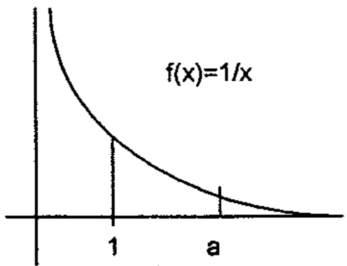


fig.I

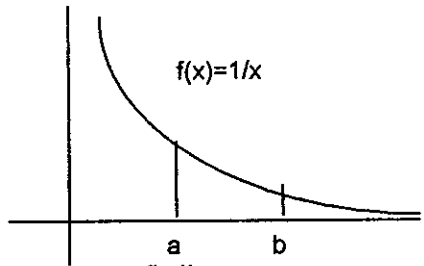


fig.II

Las áreas bajo la función serán:

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = Ln(a)$$
$$\int_1^b \frac{dx}{x} = Ln(b)$$

Obviamente la función Ln(x) dependerá del valor final en el intervalo, y será una función continua. Tendremos también que:

$$\int_p^1 \frac{dx}{x} = -Ln(p)$$

(donde $0 < p < 1$)

Si tenemos por otro lado las dos cantidades a y b tales que $1<a<b$ entonces:

EL área bajo la curva entre $x=a$ y $x=b$ será por consiguiente:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_1^b \frac{dx}{x} - \int_1^a \frac{dx}{x} = Ln(b) - Ln(a)$$

Por otra parte, es fácil ver que:

$$\int_{ca}^{cb} \frac{dx}{x} = \int_a^b \frac{dx}{x}$$

Si dividiéramos el intervalo (a,b) en n partes todas ellas de longitud h esto es:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Calculamos la suma de todos los rectángulos de base h y de altura $f(x_k)$ dentro del intervalo (a,b) donde $x_k = a+kh$ desde k=1 hasta k=n tendríamos:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a+kh} = h\sum \frac{1}{a+kh} = h\left(\frac{1}{a+1h} + \frac{1}{a+2h} + \frac{1}{a+3h} + \ldots\ldots \frac{1}{a+nh}\right)$$

Ahora, por otro lado tenemos que:

Si dividiéramos el intervalo (ca,cb) en n partes de igual longitud h_1, esto es:

$$h_1 = \frac{cb-ca}{n} = c\left(\frac{b-a}{n}\right) = ch$$

Calculando ahora la serie.

$$\int_{ca}^{cb} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ca+kh_1} h_1 = h_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ca+kh_1} = ch\left(\frac{1}{ca+1h_1} + \frac{1}{ca+2h_1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{ca+nh_1}\right)$$

y factorizando la constante c obtenemos:

$$\int_{ca}^{cb} \frac{dx}{x} = \int_a^b \frac{dx}{x}$$

(las igualdades entre las integrales surgen a partir del proceso del límite de tales sumatorias)
La propiedad anterior nos permite deducir otras no menos interesantes:

Sean a y b dos cantidades positivas tales que 1<a<b entonces:

P_1

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = Ln(ab)$$

Multiplicando los límites de la integral anterior por 1/a tenemos:

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=Ln(ab)=\int_{1/a}^{b}\frac{dx}{x}=\int_1^{b}\frac{dx}{x}-\int_1^{1/a}\frac{dx}{x}=\int_1^{b}\frac{dx}{x}+\int_1^{a}\frac{dx}{x}=Ln(a)-Ln(b)$$

P_2

$$\int_1^{b/a}\frac{dx}{x}=Ln(b/a)$$

Multiplicando ambos límites de la integral por a tendremos:

$$\int_1^{b/a}\frac{dx}{x}=Ln(b/a)=\int_a^{b}\frac{dx}{x}=\int_1^{b}\frac{dx}{x}-\int_1^{a}\frac{dx}{x}=Ln(b)-Ln(a)$$

De lo anterior es fácil deducir que:

$$\int_1^{a^n}\frac{dx}{x}=Ln(a^n)=nLn(a)$$

Si efectuamos un análisis de las dos progresiones (geométrica y aritmética) por medio de las cuales iniciamos la exposición, veremos que poseen las propiedades anteriores.

El haberse dado cuenta de lo anterior no fue sencillo, pues la identificación plena de la relación que guardaba la hipérbola equilátera f(x) = 1/x con el invento de los logarítmos no fue notada por los inventores, siendo hasta la época de Euler cuando se percataron de la similitud.

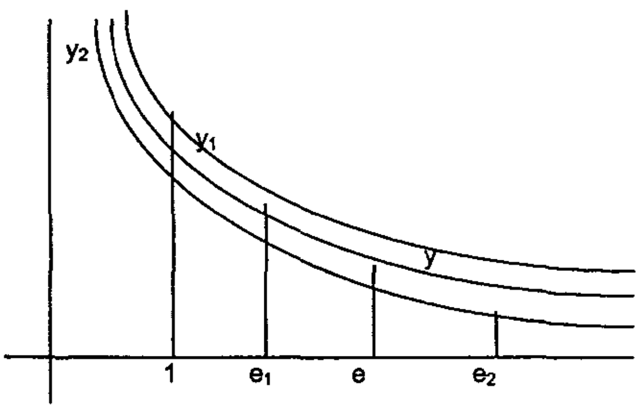
Por otro lado podemos ver que aunque no podemos utilizar la fórmula:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

para encontrar el área bajo la hipérbola equilátera, si lo podemos hacer para funciones cercanas a ella. Por ejemplo:

$$Y_1 = \frac{1}{x^{1-1/n}} \qquad\qquad Y_2 = \frac{1}{x^{1+1/(n+1)}}$$

Las funciones anteriores las podemos aproximar a la función Y = 1/x tanto como queramos haciendo la n suficientemente grande:



Es fácil observar que $Y_2 < Y < Y_1$ debido a:

$$x^{-(1-1/n+1)} < x^{-1} < x^{-(1-1/n)}$$

Ahora por otro lado deberá existir algún número **e** tal que:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

y también deberán existir números e_1 y e_2 tales que $e_1 < e < e_2$ y que:

$$\int_1^{e_1} \frac{dx}{x^{1+(1/_{n+1})}} = 1 \qquad y \qquad \int_1^{e_2} \frac{dx}{x^{1-(1/_n)}} = 1$$

Calculando las integrales anteriores tenemos que:

$$\int_1^{e_1} \frac{dx}{x^{1+(1/_{n+1})}} = \frac{-(n+1)}{e_1^{1/_{n+1}}} + (n+1) = 1 \qquad y \qquad \int_1^{e_2} \frac{dx}{x^{1-(1/_n)}} = ne_2^{1/_n} - n = 1$$

Resolviendo las dos integrales para e_1 y e_2 tenemos que:

$$e_1 = (1+1/n)^{n+1} \qquad y \qquad e_2 = (1+1/n)^n$$

De donde

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Usaremos ahora lo que se conoce como desigualdad exponencial para estudiar la convergencia de los dos límites anteriores.
Sea w cualquier fracción propia racional diferente de 1. Esto es $0<w<1$.
Entonces, para dos números cualesquiera tales que $0<b<a$ tenemos que:

$$x^w < 1 + w(x-1)$$

Introduciendo la desigualdad anterior tenemos:

(A) $x = 1 + (1/b)$ y $w = b/a$
(B) $x = 1 - (1/b+1)$ y $w = (b+1)/(a+1)$

Para el caso (A) tendremos:

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b/_a} < 1 + \left(1 - \frac{1}{b} - 1\right) = 1 + \frac{1}{a}$$

O bien:

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b < \left(1+\frac{1}{a}\right)^a \text{ ....(1)}$$

Para el caso (B) tendremos:

$$\left(1-\frac{1}{b+1}\right)^{b+1} < 1-\frac{b+1}{a+1}\left(1-\frac{1}{b+1}-1\right)$$

De donde:

$$\left(\frac{b}{b+1}\right)^{b+1} < \left(\frac{a}{a+1}\right)^{a+1} \qquad \text{O bien} \qquad \left(\frac{b+1}{b}\right)^{b+1} > \left(\frac{a+1}{a}\right)^{a+1}$$

Finalmente tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1} < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Las desigualdades (1) y (2) contienen un "notable teorema".
Sea x una variable que esta creciendo, entonces la función definida por:

$F_1(x) = (1 + 1/x)^x$ crece

Y la función definida por:

$F_2(x) = (1 + 1/x)^{x+1}$ decrece:

De modo que si tenemos $x_1 < x_2$

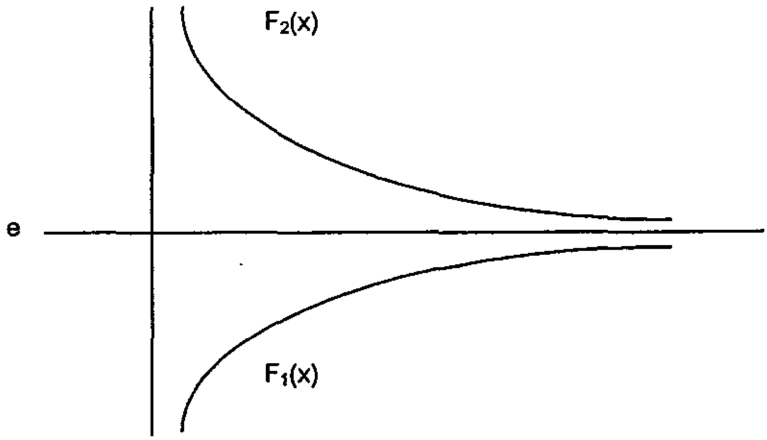
$F_1(x_1) < F_1(x_2)$ y $F_2(x_1) > F_2(x_2)$

Por otra parte para los mismos valores del argumento la función $F_2(x)$ es mayor que la función $F_1(x)$ por lo que:

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)$$

De donde

$$F_2(x) = F_1(1 + 1/x)$$



Considerando únicamente los valores positivos del argumento, vemos que ambas funciones se parecen cada vez más y serán asíntotas al número e.

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e$$

(El primero de los cuales es el límite superior y el segundo un límite inferior)

E) EL TRABAJO DE EULER

En 1748 Euler publicó, uno de sus tratados sobre Cálculo llamado "INTRODUCTIO IN ANALYSIS INFINITORUM" y es aquí donde se introduce el concepto moderno de logarítmo, diciendo que si tenemos un número $a>1$ el logarítmo base $\underline{a}$ es el exponente $\underline{z}$ tal que $a^z=x$ identificando por primera vez la relación entre la función logarítmo y la función exponencial.

También encuentra un algoritmo aritmético para calcularla. Hemos visto que:

$$e = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N \qquad \text{para un valor N muy grande}$$

De hecho:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Desarrollando por el binomio de Newton tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

La cual si factorizamos n y cancelamos, tomando el límite obtenemos:

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

Es fácil a partir de lo anterior probar que:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

Euler demuestra también que:

$$Ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} n\left[(n+1)^{1/n}-1\right]$$

Recordemos la definición de Modulo M que hicimos en la página 25 como: $M=\beta / \omega$ como la razón de las velocidades que empleábamos para ir de **1** a **(1+ω)** y de **0** a β lo cual de hecho no es más que la base elevada a la potencia ω (nuestro infinitésimo ω es la velocidad con la que avanza la serie A) y si el Modulo M hubiera sido distinto de la unidad tendríamos que:

$$a^{\omega} = 1 + M\omega$$

Y es de aquí de donde parte Euler.

Para un número cualquiera X tenemos que $X / \omega = N$ un número infinitamente grande. Tal como el que usamos en nuestras series geométrica y aritmética de la página 25 para definir nuestros números.

Sea:

$$Y = a^X + 1$$

Y dado que: $X = N\omega$ tendremos que:

$$1 + Y = a^X = a^{N\omega} = (1 + M\omega)^N$$

De donde:

$$1 + M\omega = (1 + Y)^{1/N}$$

Y nuestro infinitésimo vendrá dado por:

$$\omega = \frac{(1+Y)^{1/N} - 1}{M}$$

Pero por la definición de logaritmo base a de un número tendríamos que:

$\log_a(1+Y)$ será la potencia que habrá que elevar a la base a para que:

$a^X = (1+Y)$ y esa potencia es por supuesto $X = N\omega$. Entonces tenemos que:

$$\log_a(1+Y) = N\omega \qquad \text{de donde}$$

$$\log_a(1+Y) = \frac{N}{M}\left\{(1+Y)^{1/N} - 1\right\}$$

Si hacemos que: $z=1+Y$ y $m=1/n$ la ecuación anterior se transforma en:

$$Ln(Z) = \lim_{n\to\infty} \frac{Z^m - 1}{m}$$

Por otro lado desarrollamos usando el binomio de Newton (consultar el artículo relativo al binomio de esta misma serie) tendremos:

$$(1+Y)^{1/N} = 1+\frac{1}{N}Y+\frac{(1/N)(1/N-1)}{2!}Y^2+\frac{(1/N)(1/N-1)(1/N-2)}{3!}Y^3+\cdots\cdots$$

Pero sabemos que:

$$Ln(1+Y) = \underset{n\to\infty}{Lim}\left\{(1+Y)^{1/n}-1\right\}$$

Entonces dado que:

$$(1+Y)^{1/N}-1 = \frac{1}{N}Y+\frac{(1/N)(1/N-1)}{2!}Y^2+\frac{(1/N)(1/N-1)(1/N-2)}{3!}Y^3+\cdots\cdots$$

Multiplicando por N tenemos:

$$(1+Y)^{1/N}-1 = \frac{1}{N}Y+\frac{(1/N)(1/N-1)}{2!}Y^2+\frac{(1/N)(1/N-1)(1/N-2)}{3!}Y^3+\cdots\cdots$$

Y sacando el límite finalmente:

$$Ln(1+Y) = \underset{N\to\infty}{Lim}\, N[(1+Y)^{1/N}-1] = Y-\frac{Y^2}{2}+\frac{Y^3}{3}-\frac{Y^4}{4}+\cdots$$

Siendo la formula general

$$Ln(1+Y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Y^n}{n}$$

VII.- EL PROBLEMA INFINITESIMAL

Los números enteros positivos a los que hemos llamado NATURALES han acompañado a la humanidad desde sus albores en muchas de sus necesidades de cálculo, sin embargo, cuando los procesos comerciales se hicieron más complicados hubo necesidad de recurrir a las fracciones.

Civilizaciones tan antiguas como la egipcia o la babilónica y aún en la más moderna Grecia tenían símbolos para designar fracciones tales como 2/3, 1/3, ¾ ,¼, 1/12. Cuando los griegos de la época de Pitágoras crearon toda una teoría matemática en torno a lo que consideraban como un hecho. Esto es:

Dados dos segmentos diferentes cualesquiera a y b, siempre se podrá encontrar un tercer segmento u tal que dicho segmento u quepa un número entero de veces m en el segmento a y un número entero de veces n en el segmento b. Cosa que en mirada "normal" parece plausible, dado a que no se nos ha puesto ninguna limitación al tamaño de dicho segmento u. Aparentemente un segmento y suficientemente pequeño deberá conducir inequívocamente a:

$$m(u) = b \qquad y \qquad n(u) = a$$

de donde tendremos:

$$a/b = n/m$$

A este resultado dado por la "razón" se le dio el nombre de conmesurabilidad. Esto es:

Dos segmentos al ser divididos uno entre otro siempre formaban una fracción racional (razonable) o bien igual al cociente de dos enteros.

A pesar de lo anterior en la misma época de Pitágoras existían segmentos que al tratar de ser comparados por un segmento común a ambos era claro que éste no existía (ejemplo: la hipotenusa y uno de sus catetos en un triángulo equilátero). A esta clase de números se les llamó IRRACIONALES (ajenos a la razón), y se dice que durante algún tiempo su existencia fue rechazada por insensata y perversa, escondida inclusive al conocimiento popular.

Durante los siglos XVI y XVII paso una cosa similar con la aparición de los números negativos, cuando fueron introducidos en el mundo europeo a través de los textos árabes. Dichos números surgían cuando los algebristas trataban de dar soluciones a algunas ecuaciones. Y ahora quizá lo comprendemos un poco, ¿qué significado podían tener para aquellas mentes brillantes, pero aún en la infancia matemática, cantidades tales como -1?, ¿qué significado sensato tenía algo menos que nada?. Nicolas Chuquet en el siglo XV y Stifel en el siglo XVI hablaban de tales cantidades como absurdos. E inclusive el gran algebrista Vieta los consideró como cantidades insensatas. Con la aparición de los números imaginarios en la solución de ecuaciones las cosas llegaron al límite de lo que aquellas buenas personas podían soportar. Cardan en su obra llamada "Ars Magna" se plantea y resuelve el problema de dividir 10 en dos partes cuyo producto sea 40, lo que lo guía inexorablemente a las cantidades $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$. Sin embargo inmediatamente se justifica diciendo "Hay cantidades sofisticadas que, aunque ingeniosas, son inútiles".

MORRIS KLEIN
(La perdida de la certidumbre)

Con el paso del tiempo la "polvadera" levantada con los nuevos números poco a poco se fue atenuando, y aunque aún existía reticencia (y aún la hay), el sentimiento hacia ellos se fue transformando y la pregunta ¿Qué significado real, humano, lógico, sensato, intuitivo etc, tenían? Se transformó en la pregunta ¿Lo que lograban resolver tenía sentido?, ¿No se contradecía en alguno de sus puntos?. Ahora creemos comprender mejor y el que un número sea negativo, racional, irracional, complejo etc. ha dejado de tener sentido tangible pues al final todos ellos son para nosotros elementos ideales que pertenecen a sistemas lógicos, matemáticamente estructurados y si existen o no, no es ya una pregunta relevante en nuestro siglo.

Sólo hay una cosa que celosamente respetamos, y es el hecho de que su empleo no nos lleve a resultados contradictorios, por que eso si no lo podríamos permitir.

Es claro que cada sistema de números que se fue introduciendo debía tener sus propias leyes de operación aritmética. Dichas leyes se fueron encontrando paulatinamente, de modo que no introdujeran problemas de lógica al ser empleadas. Por ejemplo:

$$a = b$$
$$ab = b^2$$
$$ab - a^2 = b^2 - a^2$$
$$a(b - a) = (b - a)(b + a)$$
$$a = b + a$$
$$a = 2(a)$$

Es un resultado que nos lleva a una contradicción al suponer por un lado que a=a y concluir que a=2(a). El problema resulta que hemos dividido entre cero y eso nos lleva a una contradicción lógica que no podemos admitir en nuestro sistema numérico. De igual forma las características de cada nuevo número encontrado debía tener sus propias leyes aritméticas y fue trabajo de los matemáticos encontrarlas de modo de no toparse con contradicciones en el futuro al desarrollar una matemática más compleja (Gödel arruinaría más tarde esta creencia). Con el tiempo los matemáticos pudieron tener confianza en sus sistemas numéricos al manipularlos sin daño aparente y con ellos se crearon teléfonos, televisiones, computadoras, viajes a la luna, realidad virtual, filosofía y maestros que los explicaran a los profanos.

Desde los tiempos de Arquímedes y con mayor fuerza durante los siglos XVI, XVII y XVIII unas cantidades que llamaron "Infinitésimos" aparecieron dentro de las demostraciones, y con gran éxito elaboraron una vistosa, novedosa y brillante matemática cuyo desarrollo pronto hizo que la matemática antigua y la moderna fuesen como la diferencia que hay entre usar humo o usar la electrónica para poder comunicarnos. La intuición y el sentido común aplicados con sensatez junto con los elementos geométricos y estos "Infinitésimos" eran suficientes para duplicar demostraciones de antiguos teoremas que habían sido probados por caminos tortuosos dentro de una matemática que en aquel tiempo se consideraba ortodoxa. Además, por sí mismos planteaban nuevos problemas matemáticos, dando la solución a éstos. Una nueva catarata de ideas matemáticas brotó por toda Europa dando lugar a su vez a nuevas ideas que se retroalimentaban. Reglas, técnicas y teoremas que antes parecían dispersos ahora se agrupaban en un contexto único abandonando la artesanía matemática para dar cabida a la razón, al análisis y sobre todo a la síntesis. El Cálculo Infinitesimal había sido inventado. Sin embargo había un pequeño problema, nadie sabía con seguridad que eran esos "Infinitésimos" y si a final de cuentas no resultarían ser un timo lógico, tampoco se sabía si sólo era una extraña casualidad y funcionaban parcialmente dentro de problemas ingenuos y que sin embargo cuando las cosas se complicaran sacarían a relucir peligrosas contradicciones.

Cuando el dúo Newton-Leibnitz crearon cada quien a su manera el Cálculo y su pleyade de amigos matemáticos lo empezaron a difundir cual evangelio, no tardaron en venir las críticas y la desconfianza tanto entre los matemáticos profesionales como entre los filósofos. Es célebre la carta enviada por el Obispo Berkeley a el astrónomo Haley en donde con un fino humor irlandés y a la manera racionalista hace mofa de los métodos de Newton, comparando los infinitésimos (o las diferenciales) jocosamente con fantasmas que aparecían o desaparecían a voluntad de su empleador llevando a paradojas y a conclusiones hostiles a las reglas del buen razonar. Una cosa era aceptar los números negativos, irracionales o bien complejos con reglas claras de funcionamiento aunque presentaran problemas filosóficos contrarios al sentido común debido a que sus reglas de manipuleo algebraico eran imprecisas y caprichosas dejando perplejo al más liberal. A pesar como veremos, las criticas no iban dirigidas a los resultados sino a la metodología de utilización así como a los poco ortodoxos métodos de justificación junto con la pedantería que tenían los matemáticos de esa época. Dos criticas acabaron por derrotar los intentos de definir rigurosamente lo que se debía entender por infinitésimos. La primera era de carácter técnico y la segunda de orden filosófico.

1.- Si dx es un infinitésimo, seguramente 2dx, 3dx,....,etc., también lo serán. La pregunta que surge es ¿Hasta cuándo dejará de ser infinitésimo?. ¿Cuál será el entero que marque la diferencia entre lo que debemos considerar como un infinitésimo y un número real o estándar como lo empezaremos a llamar?. Era claro que (1/dx)dx ya dejaba de ser infinitésimo. Pero ningún matemático fue capaz de formular una regla rigurosa que dijera para que valor de n, ndx dejaba de ser infinitesimal.

2.- La segunda crítica era de índole filosófica y procedía de los filósofos racionalistas para los cuales el criterio de verdad no era sensorial sino intelectual y deductivo, como era el caso de Georg Berkeley en primer plano y un tiempo después D'Alambert y Lagrange. De acuerdo con los abogados de los infinitésimos, estos eran "cantidades más pequeñas que cualquier cantidad asignable aunque diferente de cero". Para los racionalistas eran por lo tanto inexistentes, inobservables y por lo tanto metafísicos. A continuación veamos al obispo de Berkeley expresarse en algunas partes de su famosa epístola dirigida a Newton vía Haley.

"......El método de los infinitésimos es la clave general con cuya ayuda abren las matemáticas modernas los secretos de la geometría y, puesto que esto es lo que les ha permitido superar tan notablemente a los antiguos en el descubrimiento de teoremas y la resolución de problemas, su ejercicio y aplicación se ha convertido en la principal, si no en la única ocupación de todos aquellos que pasan en esta época por geómetras profundos......-(Y ahora empieza el buen obispo)- Pero las velocidades de las velocidades, las segundas, las terceras, cuartas, quintas velocidades, etc., superan si no me equivoco, toda comprensión humana. Mientras más analice y persiga la mente a estas ideas fugitivas, más se perderá y confundirá.....-(Continua más adelante)- ..... No tengo ninguna discrepancia en cuanto a sus conclusiones, (Y ninguno jamás la tuvo Señor Obispo)si no solo en cuanto a su lógica y su método (Estamos de acuerdo con usted) "

Era claro que los matemáticos de esa época estaban impresionados con la nueva metodología y que sin duda alababan sus conclusiones, aunque fueran racionalistas como era el caso del Obispo Berkeley y quizá aún en secreto intentaran nuevos descubrimientos usando los infinitésimos, pero como el problema tenia también tintes políticos -pues algunos libre pensadores criticaban los argumentos teológicos y apoyaban la nueva matemática, los teólogos como Berkeley atacaban a su vez sus apoyos matemáticos -.

Y continúa el ataque:

"..... Ahora observo, en primer lugar, que la conclusión sale bien no porque el cuadro rechazado dy fuera infinitamente pequeño, si no porque este error se compensaba con otro igual y contrario".

Está criticando Berkeley en este párrafo una parte de metodología infinitesimal de Newton mediante la cual Newton desprecia en sus cálculos los infinitésimos de orden inferior. A continuación el obispo hace una clara referencia a Newton dándole la puntilla filosófica.

"..... El gran autor del método de los diferenciales se dio cuenta de esta dificultad y, por ello, aceptó aquellas graciosas abstracciones y metafísicas geométricas sin las cuales se percató de que no podía hacerse nada sobre los principios dados; y el lector juzgará lo que había hecho con ellos, en la forma de la demostración. En realidad, debe reconocerse que utilizaba los diferenciales, al igual que los andamios de una construcción como cosas que debían ser dejadas a un lado o librarse de ellas tan pronto se encontrarán líneas finitas proporcionales a ellas. Pero , entonces, estos exponentes finitos se encuentran con ayuda de los diferenciales. Por tanto, todo lo que se obtenga por medio de dichos exponentes debe adscribirse a los diferenciales, que, por ello, deben suponerse previamente. ¿Y qué son estos diferenciales? Las velocidades de incrementos que desaparecen. ¿Y qué son estos incrementos que desaparecen? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, pero tampoco son nada. ¿No podríamos denominarlas los espíritus de las cantidades desaparecidas......?".

VIII.- EL ANALISIS NO ESTANDAR

Cuando se analizó con cuidado las propiedades de los números, los matemáticos empezaron a construir un modelo adecuado que comprendiera sin lugar a dudas la clase de números abordada y que fuera a la vez suficiente para elaborar una teoría en torno a ellos. Y así por ejemplo se vio que bastaba (para los números reales) con definir dos operaciones, junto con dos números idénticos operativos para ellas; dos elementos inversos; leyes de orden y leyes para efectuar operaciones. Sin entrar en cuestiones rigurosas podemos decir que los números reales respetan los siguientes grupos axiomáticos.

Para 0,1 elementos especiales de los reales, a, b dos elementos cualesquiera del conjunto real.

AXIOMÁS ALGEBRAICOS

A) Clausura. Si 0 y 1 son números reales. Y sí a y b son números reales entonces $a+b$, ab, $-a$ también serán números reales. Y si a diferente de cero entonces $1/a$ también un número real.
B) Conmutatividad. $a+b = b+a$ y $(a)(b) = (b)(a)$
C) $a+0 = a$ y $(a)(1) = a$
D) $a+(b+c) = (a+b)+c$ y $a(bc) = (ab)c$
E) Para cualquier a (diferente de cero) existe $(-a)$ y $(1/a)$ tales que:
$a+(-a) = 0$ y $a(1/a) = 1$
F) $a(b+c) = (a)(b)+(a)(c)$

AXIOMAS DE ORDEN

O_1) $0 < 1$
O_2) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
O_3) Para cualquier a y b se cumple una de las tres relaciones siguientes:
$a < b$, $a = b$, o $b<a$
O_4) Si $a < b$ entonces $a+c < b+c$ para cualquier c real.
O_5) Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < ab$ para cualquier c un real.

AXIOMA ARQUIMEDIANO

Para cada número real a existe un número n positivo tal que: $a < n$ (también podíamos expresar el axioma arquimediano diciendo que para cada $0 < a$ existe un entero positivo n tal que $1/n < a$).

A partir del cuerpo axiomático anterior es posible probar mediante un discurso lógico que por ejemplo:

T_1 Para toda a que pertenezca a los reales $a(0) = 0$
T_2 Para $a < 0$ y $0 < b$ $(a)(b) < 0$
Para $0 < a$ y $0 < b$ $0 < (a)(b)$
Para $0 < a$ y $0 < b$ $0 < (a)(b)$

Debido a lo anterior es posible demostrar que relaciones tales como:

$$(a/0) \text{ y } (0/0)$$

carecen de sentido y pueden guiar a contradicciones.

1.- Supongamos que existiera un número real b tal que $(a/0) = b$ *siendo tanto a como b diferentes de cero*, entonces debido a nuestra estructura algebraica $a = (b)(0)$, pero esto sería igual a cero de (acuerdo con T_1) no importando quien sea b. Esto significa que a sería cero lo que contradice la hipótesis.

2.- Supongamos por otro lado que existiera un número real b tal que $(0/0) = b$ en éste caso tendríamos que de acuerdo con T_1 $b(0) = 0$, pero ¿Cuál es ese valor único de b que debe dar el cociente? La respuesta es que b puede ser cualquiera, en otras palabras que b no está definido exactamente.

Lo anterior nos lleva a aceptar que un cuerpo axiomático una vez aceptado posee leyes propias que hay que ir descubriendo (demostrando teoremas, por decirlo de esta forma). Dichas leyes no son evidentes, y siempre persiste la duda de que en alguna parte del modelo se presentase el caso de que por ejemplo demostrásemos un teorema T_N por una parte y por otra un teorema T_M que uno negase al otro y viceversa.

Por otra parte sabemos que los diferentes sistemas numéricos se fueron creando para dar soluciones a problemas prácticos o teóricos a lo largo de la historia, y que a través del trabajo cotidiano sus leyes se fueron ajustando para evitar las contradicciones antes mencionadas. Cuando aparecieron las raíces de los números negativos, llamadas imaginarias, éstas claramente violaban las leyes que habían sido encontradas para los números reales. En particular dos evidentes.
Para dos reales positivos a y b tenemos:

a) $i^2 = -1$
b) Y como consecuencia

$$\left(\sqrt{-a}\right)\left(\sqrt{-b}\right) = \left(\sqrt{ai}\right)\left(\sqrt{bi}\right) = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$

Es fácil probar que las dos igualdades anteriores no se pueden deducir a través del sistema axiomático de los reales.

Cuando los físicos del siglo XIX se dieron cuenta de que el sistema de los números complejos (como fueron llamados por Gauss a los números de la forma a+bi con a y b reales e y el imaginario raíz de uno) era altamente eficiente en el estudio de la electricidad y la hidrodinámica, y al ver que no presentaban contradicción en los resultados obtenidos, los empezaron a utilizar sin ningún recato dejando a los matemáticos la tarea de demostrar que aunque entraran en trayectoria de colisión con la razón, no presentaban problemas lógicos al ser empleados, y en cambio era una poderosa herramienta de aplicación y de descubrimiento, siendo fuente de inspiración para toda una teoría con aplicaciones al mundo material.

Las justificaciones de los matemáticos se basaron en el establecimiento de un modelo a partir de una representación geométrica de los mismos por medio de diagramas, con la cual se podían efectuar operaciones aritméticas que no representaban contradicciones lógicas. Los trabajos de Jean Argand (1786-1822), Wessel (1745-1818) y Gauss entre otros contribuyeron a darles la carta de ciudadanía dentro de la familia matemática (aunque con algunas reservas para ser sinceros).

El primero en sentar las bases lógicas tanto para los números reales como complejos fue Hamilton en 1837.

Weierstrass fue de los primeros en darse cuenta que una adecuada comprensión de los números reales era indispensable para rigorizar el análisis matemático, así como una definición irrevocable del concepto de número irracional. A través de lo anterior fue posible por fin probar cosas como :

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Sin embargo respecto a los infinitésimos no había nada en concreto que pudiera servir para formalizar e institucionalizar su uso. Eran por así decirlo, el pariente que ayudaba a toda la familia matemática pero que a todos daba vergüenza. Para empezar chocaba con el axioma arquimediano, no tenía leyes propias y su manipuleo era caprichoso, y sobre todo ¿Dónde estaban en la recta numérica? A los negativos se les había encontrado sitio a la izquierda del cero, a los complejos se les había inventado su mundo a parte en los diagramas de Argand, pero los infinitésimos por su propia naturaleza deberían vivir en el "mundo" de la recta real y convivir con éstos, seres mayores que cero pero además menores que cualquier número real asignado, y de acuerdo con el axioma antes mencionado esto no era posible, ¿Qué eran entonces?.

IX.- LA RECTA HIPERREAL

Un número ε se dice que es infinitamente pequeño o infinitesimal si:

$$-a < \varepsilon < +a$$

para cada número real positivo a.

El único número real que es infinitesimal es el cero.

Los Números Reales están contenidos en los números hiperreales.

Decimos si a y b son números hiperreales cuya diferencia (a - b) sea infinitesimal, decimos entonces que a está infinitamente cercano a b.

$\frac{1}{\varepsilon}$ *es un número infinito positivo*

$\frac{1}{-\varepsilon}$ *es un número infinito negativo*

Números que no son infinitos son llamados finitos.

El conjunto de los números reales R están esparcidos entre los números finitos.

Alrededor de cada número real c hay una porción de la línea hiperrreal compuesta de números infinitamente cercanos a c son los infinitesimales.

Si filosofáramos en la naturaleza de la línea que hemos llamado "real" de los números podemos intuir que no hay forma de saber como es verdaderamente una línea en el espacio físico, y pudiera ser:

UNA LINEA HIPERREAL
UNA LINEA REAL
NINGUNA

De donde nos damos cuenta que la línea hiperreal al igual que la línea Real no son más que modelos matemáticos para explicarnos el mundo con el que interactuamos dentro del espacio físico circundante.

NUMEROS FINITOS, INFINITOS E INFINITESIMALES.

Alrededor de cada número real c introducimos una colección de números hiperreales infinitamente cercanos a c. Siendo todos esos números reales *finitos.*

Nota: Los hiperreales infinitamente cercanos a cero son llamados infinitesimales.

La colección de todos los hiperreales satisface las mismas leyes algebraicas que los números reales.

EXISTEN 6 AXIOMAS PARA LOS NÚMEROS HIPERREALES.

1^{*} AXIOMAS ALGEBRAICOS PARA LOS HIPERREALES.

a) Cada número Real es un número hiperreal

Sean a, b elementos de R^{*} (R^{*} representa el conjunto de los hiperreales)

$$\left.\begin{array}{c} a+b \\ a-b \\ ab \\ 1/a \quad a \neq 0 \end{array}\right\} \in R^{*}$$

Valen las siguientes leyes para los hiperrreales:

CONMUTATIVA
ASOCIATIVA
IDENTIDAD (PARA LA SUMA Y EL PRODUCTO)
INVERSAS (PARA SUMA Y PRODUCTO)
DISTRIBUTIVA

2^{0} AXIOMAS DE ORDEN PARA LOS HIPERREALES

A) TRANSITIVA
B) TRICOTOMÍA
C) PRODUCTO

Para cada hiperrreal $a > 0$ y cada número positivo n hay un hiperreal $b > 0$ tal que $b^{n} = a$.

Dados dos números hiperreales cualesquiera b y c si $b < c$ entonces $-c < -b$.

Si $b < c$ entonces

$b - b < c - b$	(Ley de la suma)
$0 < c - b$	(Ley inversa)
$0 < -b+c$	(Ley conmutativa)
$0 - c < (-b+c) - c$	(Ley de suma)
$-c < (-b+c) -c$	(Ley identidad)
$-c < - b+(c - c)$	(Ley asociativa)
$-c < -b + 0$	(Ley inversa)
$-c < -b$	(Ley identidad)

Nota.- Hasta aquí los Axiomas dan las propiedades que tienen en común los Reales y los hiperrreales.

Es conveniente introducir en este momento la siguiente definición:

Definición: Se dice que un hiperreal es:

Positivo infinitesimal: Si $b > 0$ pero menor que cualquier número real positivo.

Negativo infinitesimal: Si $b < 0$ pero mayor que cualquier número negativo.

Infinitesimal: Lo llamaremos simplemente infinitesimal si es: infinitesimal positivo, infinitesimal negativo o *cero**.

3⁰ AXIOMA INFINITESIMAL

EXISTE UN NUMERO HIPERREAL POSITIVO INFINITESIMAL ε

Los números hiperreales cumplen con las siguientes reglas de operación (Las cuales pueden ser probadas a través de los axiomas):

REGLA 1

Si ε es un infinitesimal positivo entonces $-\varepsilon$ es un infinitesimal negativo:

Si por ejemplo s es un número Real negativo entonces sabemos que -s es un número Real positivo de donde $0 < \varepsilon$ y $\varepsilon < -s$ de donde $\varepsilon < -0$ y $-(-s) < \varepsilon$ y por tanto $-\varepsilon < 0$ y $s < -\varepsilon$. Y por lo tanto $-\varepsilon$ es un infinitesimal negativo.

REGLA 2

Si ε es un infinitesimal positivo y r es cualquier número real entonces:
$r + \varepsilon$ es hiperreal pero no real.

$r + \varepsilon$ no puede ser Real debido a que la diferencia entre dos números Reales es Real, mientras que la diferencia entre $r + \varepsilon$ y r es:
$(r + \varepsilon) - r = \varepsilon$ no es un número Real.

REGLA 3

Supongamos que ε es un infinitesimal positivo y a es cualquier número Real positivo, entonces $a\varepsilon$ es un infinitesimal positivo.

Intuitivamente podemos pensar en $a\varepsilon$ como en un rectángulo infinitamente pequeño o bien podíamos pensar de la manera siguiente:

$0 < \varepsilon < r/a$ de donde $0 < a\varepsilon < r$.

Introduzcamos ahora la siguiente definición, de modo de establecer un acuerdo de entendimiento dentro de la topología de los hiperreales:

Definición: Se dice que un número hiperreal b puede ser solamente de una de las tres formas siguientes:
a) ***Finito:*** Si b esta entre dos números reales cualesquiera.
b) ***Infinito positivo:*** Si b es mayor que cualquier número real
c) ***Infinito negativo:*** Si b es menor que cualquier número real.

De la definición podemos concluir que:

1^0 El único infinitesimal Real es el cero
2^0 Cada número real es finito
3^0 Cada infinitesimal es finito

REGLA 4

Si ε es un número infinitesimal positivo entonces:
a) $1/\varepsilon$ es un infinito positivo
b) $-(1/\varepsilon)$ es un infinito negativo

Sea r cualquier número real positivo puesto que $0 < \varepsilon < 1/r$ entonces:
$r < 1/\varepsilon$

NOTA: De aquí vemos claramente que el AXIOMA ARQUIMEDIANO no tiene cabida dentro del sistema de los NUMEROS HIPERREALES. Dado que si H es un hiperreal infinito positivo entonces no existe un entero positivo Real mayor que H.

Estableceremos las reglas de operación para los números infinitesimales finitos e infinitos.

TEOREMA 1

Asumimos que:

1^0 ε y δ son cantidades infinitesimales
2^0 b y c son hiperreales finitos pero no infinitesimales
3^0 H y K son hiperreales infinitos.

I) Negativos

- $-\varepsilon$ es infinitesimal
- -b es infinito pero **no** infinitesimal
- -H es infinito

II) Recíprocos

- Si ε es diferente de cero $1/\varepsilon$ es infinito
- 1/b es finito pero **no** infinitesimal
- 1/H es infinitesimal

III) Sumas

- $\varepsilon+\delta$ es infinitesimal
- $b+\varepsilon$ es finito pero **no** infinitesimal
- b+c es finito (posiblemente infinitesimal)
- $H+\varepsilon$ y H+b son infinitos

IV) Productos

- $\varepsilon\delta$ y $b\varepsilon$ son infinitesimales
- bc es finito pero no infinitesimal. Hb y KH son infinitos

V) Raíces

- Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\varepsilon}$ es infinitesimal
- Si $b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{b}$ es finita pero no infinitesimal
- Si $H > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{H}$ es infinita

Combinando las reglas de productos y los recíprocos podemos obtener las reglas para los cocientes.

Reglas para los cocientes:

- Son infinitesimales los siguientes cocientes:

ε/b , ε/H , b/H

- Es finito pero **no** infinitesimal:

b/c

- Son infinitos (para ε, y b distintos de cero)

b/ε, H/ε y H/b

Nota: De lo anterior vemos que **no hay reglas** para las siguientes relaciones, pues depende del tipo de tipo de estructura hiperreal de cada uno de ellos:

$$\varepsilon/\delta,\quad H/K,\quad H\varepsilon,\quad H+K$$

Cada uno de los cocientes anteriores puede ser

a) Infinitesimal
b) Finito pero no infinitesimal
c) Infinito

Lo anterior dependerá de la clase de números que sean ε, δ, H y K. Debido a esto llamamos las llamamos **formas indeterminadas.**

$\varepsilon^2/\varepsilon$ = infinitesimal (igual a ε)
ε/ε = finito pero no infinitesimal (igual a 1)
$\varepsilon/\varepsilon^2$ = infinito (igual a $1/\varepsilon$)

LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA 3 POSIBILIDADES PARA CADA FORMA INDETERMINADA.

Forma indeterminada	Infinitesimal	Ejemplos Finito = 1	Infinito
ε/δ	$\varepsilon^2/\varepsilon$	ε/ε	$\varepsilon/\varepsilon^2$
H/K	H/H^2	H/H	H^2/H
$H\varepsilon$	$H(1/H^2)$	H(1/H)	$H^2(1/H)$
H+K	H+(-H)	(H+1)+(-H)	H+H

TEOREMA II

- Cada hiperreal que esté entre dos infinitesimales es infinitesimal
- Cada hiperreal que esté entre dos hiperreales finitos es finito
- Cada hiperreal que sea mayor que algún numero positivo infinito es positivo infinito

Demostración: Sea H un infinito positivo y sea K tal que $H<K$ entonces para algún r que pertenezca a los Reales, $r<H<K$ por tanto $r<K$ y K=infinito positivo.

- Cada hiperreal que sea menor que algún infinito negativo es infinito negativo.

Pasaremos ahora a analizar lo que conoceremos como las **partes estándar** de los números hiperreales

PARTES ESTÁNDAR DE LOS NÚMEROS HIPERREALES

DEFINICIÓN:
"Dos números hiperreales "b y c se dice que están **infinitamente cercanos** uno de otro, si su diferencia b-c es infinitesimal".

Definimos el símbolo & como "infinitamente cercano"

En símbolos podemos poner b&c donde b es infinitamente cercano a c o bien b&c no es infinitamente cercano a c.

Establecemos tres notas importantes:

1. Si es infinitesimal, entonces b&b+ε esto es. b es infinitamente cercano a b+ε
2. b es infinitesimal si y solo si b&0
3. Si b y c son Reales y b está infinitamente cercano a c, entonces tenemos que b=c, ya que b-c deberá ser un número Real y por lo tanto igual a cero, de modo que b=c.

La relación "&" entre números hiperreales se comporta de alguna manera como una igualdad "=" pero por supuesto que **no es lo mismo** que una igualdad.

Veamos tres propiedades básicas de "&".

TEOREMA A

Sean a,b,c números hiperreales, entonces tenemos que:

- a&a (dado que a-a= al infinitesimal cero)
- Si a&b entonces b&a (ya que a-b=ε y b-a=-ε)
- Si a&b y b&c entonces a&c (a-c es la suma de 2 infinitesimales a-b y b-c)

TEOREMA B

Asumimos que a&b entonces:

- Si a es infinitesimal, también lo será b
- Si a es finito, también lo será b
- Si a es infinito, también lo será

LOS NUMEROS REALES SON LLAMADOS A VECES *ESTÁNDAR* MIENTRAS QUE LOS HIPERREALES QUE NO SON REALES SON LLAMADOS *NO ESTÁNDAR*.

Por la razón anterior el número real que está infinitamente cercano a b es llamado la **parte estándar** del número b. El siguiente axioma para los hiperreales establece que cada número finito tiene una parte estándar.

4^0 AXIOMA

"CADA NUMERO HIPERREAL FINITO ES INFINITAMENTE CERCANO A EXACTAMENTE UN NUMERO REAL".

DEFINICION.
Sea b un número hiperreal finito. La parte estándar de b denotada por **st(b)** es el número real, el cual está infinitamente cercano a b. Los números hiperreales infinitos no tienen parte estándar.

De la definición anterior surgen algunos hechos de importancia:

Sea b algún hiperreal finito, entonces:

- st(b) es un número Real
- $b = st(b)+\varepsilon$ para algún infinitesimal ε
- Si b es un número Real, entonces $b=st(b)$

El siguiente teorema nos servirá de guía para el cálculo de las partes estándar, siendo de hecho la herramienta práctica fundamental, que permitirá al alumno desarrollar sus habilidades dentro de las aplicaciones concretas.

TEOREMA III

Supongamos que dados dos números hiperreales a y b, tenemos que existen r y s que son sus partes estándar respectivamente, esto es:

$$r=st(a) \quad y \quad s=st(b)$$

Podemos escribir entonces:

$$a=r+\varepsilon \quad y \quad b=s+\delta$$

Donde ε y δ son infinitesimales.

Sean a y b números hiperreales finitos, entonces

- $st(-a)=-st(a)$

Mostraremos que -a está suficientemente cercano a -a-r de modo que -r es la parte estándar de -a

$$-a = -(r+\varepsilon) = -r-\varepsilon\&-r$$

st(-a)=-r

- st(a+b)=st(a)+st(b)

Calculemos la parte estándar de a+b mostrando que a+b esta infinitamente cercano a r+s

a+b=(r+ε) + (s+δ)=(r+s) + (ε+δ)&r+s
entonces
st(a+b)= r+s

- st(a-b)= st(a) - st(b)

La prueba es similar a la anterior

- st(ab)= st(a)st(b)

ab=(r+ε)(s+δ)= rs+rδ+sε+εδ & rs

de donde

st(ab)=rs

Si st(b) es diferente de cero, entonces st(a/b)=st(a)/st(b)
Debemos demostrar que la diferencia (a/b) - (r/s) es infinitesimal

$$\frac{a}{b}-\frac{r}{s}=\frac{as-br}{bs}=\frac{(r+\varepsilon)s-(s+\partial)r}{bs}$$

desarrollando tenemos que:

$$\frac{rs+\varepsilon s-sr-\delta r}{bs}=(\varepsilon s-\delta r)\frac{1}{b}\frac{1}{s}$$

Usando las reglas para infinitesiamles anteriormente explicadas tenemos que (εs-δr) es un infinitesimal y puesto que s=st(b) es diferente de cero sabemos que b no es infinitesimal, y por lo tanto 1/b y 1/s son números finitos de donde el producto

$$\frac{a}{b}-\frac{r}{s}=(\varepsilon s-\delta r)\frac{1}{b}\frac{1}{s}$$ es infinitesimal.

Hemos mostrado que a/b &r/s y por lo tanto:

st(a/b)=r/s

- $st(a^n) = (st(a))^n$

Tenemos que:

$$st(a^n)=st(aa........a_n) = st(a)st(a)........st(a_n)= (st(a))^n$$

(n veces)

- Si $a \geq 0$ entonces $st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$

Recordemos que para cada a>0

$\sqrt[n]{a}$ es la n-ava raíz positiva de a, sea $b=\sqrt[n]{a}$

Entonces $b^n=a$ y $b>0$ de modo que $s>0$

Ahora por la fórmula de la potencia tenemos que:

$$r=st(a)=st(b^n)=(st(b))^n=s^n$$

Así, S es un número Real NO NEGATIVO cuya enésima potencia es R de modo que:

$$s = \sqrt[n]{r}$$

- Si $a<b$ entonces $st(a) < st(b)$

Lo anterior surge del hecho que si $a<b$ entonces $r+\varepsilon < s+\delta$ y $r<s+(\delta-\varepsilon)$

Y para cada Real positivo t tenemos que:

$\delta-\varepsilon < t$ o bien: $r<s+(\delta-\varepsilon)<s+t$ y por lo tanto $r<s$

X. FUNCIONES HIPERREALES

Los diferentes fenómenos que ocurren en la naturaleza están relacionados unos con otros en un conjunto de relaciones y operaciones que el hombre a través del tiempo ha ido encontrando. Muchas de estas relaciones son sencillas, y para las más complejas, el análisis y la experimentación han conducido a encontrar modelos más o menos simples que permitan una comprensión a escala humana. Tal es el caso de la teoría cinética de la materia. Los matemáticos tardaron algún tiempo en encontrar y formular explícitamente lo que tenían en común todo ese conjunto de relaciones operacionales que se dan en el mundo material. El resultado final fue la definición explícita del concepto de FUNCIÓN.

Como ya hemos dicho la "realidad" del espacio nos es desconocida. El medir usando el modelo que hemos dado por llamar "Real" o el modelo ampliado que hemos estado discutiendo al que llamamos "hiperreal" es intuitivamente irrelevante siempre y cuando no meta contradicciones. Sin embargo debido al uso generalizado que tenemos del modelo "Real", al ampliar dicho modelo debemos garantizar que la extensión natural para el concepto función sea también adecuada como objeto de comprensión y de descripción. En pocas palabras, los sistemas operacionales en ambos modelos deberán coincidir, y esto no lo podemos probar explícitamente a través de los axiomas anteriores, sino que debemos darlo como cierto, para lo cual tenemos la necesidad de postular dos cosas.

5^0 AXIOMA DE LA FUNCIÓN

PARA CADA FUNCIÓN REAL F DE UNA O MÁS VARIABLES EXISTE UNA FUNCIÓN HIPERREAL F* CORRESPONDIENTE DEL MISMO NÚMERO DE VARIABLES LLAMADA **LA EXTENCIÓN NATURAL DE F.**

Ahora solo nos falta una cosa. Deseamos que la extensión natural de F* se comporte como las funciones Reales con la variante que será aplicada al conjunto de los hiperreales. Con la postulación del siguiente axioma lo haremos posible.

6^0 AXIOMA DE LA FUNCIÓN

SI DOS SISTEMAS DE FÓRMULAS TIENEN EXACTAMENTE LAS MISMAS SOLUCIONES REALES, ENTONCES ELLAS TIENEN EXACTAMENTE LAS MISMAS SOLUCIONES HIPERREALES.

Este axioma nos guía a tres consecuencias de gran importancia.

Si tenemos que F es una función Real tenemos que:

- Si r es un número real entonces F(r) esta definida tenemos que:

$$F^*(r) = F(r)$$

- Si r es un número real y F(r) está indefinida entonces

  $F^*(r)$ también estará indefinida

- Si una función Real F está dada por una regla de la forma F(x) = T(x) donde T(x) es un término que involucra a x, entonces la **extensión natural** de $F^*(x)$ está dada por la misma regla, aplicada a los números Reales.

DIFERENCIACIÓN

Una de las necesidades que dieron origen a la invención del cálculo fue la de encontrar las velocidades instantáneas de los cuerpos en movimiento lo que condujo a Newton y a Leibnitz al concepto de derivada.

DEFINICIÓN.
Se dice que S es la pendiente de una función F en un punto **a** si:

$$S = st\left(\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}\right)$$

Para cada infinitesimal Δx diferente de cero.

Sabemos que la pendiente de F calculada en el punto **a** no siempre existe.

Veamos cuales son las posibilidades.

- La pendiente de F en el punto **a** existe si la razón

$$\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}$$

es finita y tiene la misma parte estándar para todos los infinitesimales Δx diferentes de cero. Y tendrá el valor

$$S = st\left(\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}\right)$$

- La pendiente de F en **a** puede no existir por una de las cuatro razones siguientes:
- ◊ F(a) no está definida.
- ◊ El término $F(a+\Delta x)$ es definido para algún infinitésimo Δx distinto de cero.
- ◊ El término

$$\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}$$

es infinito para algún infinitesimal Δx distinto de cero.

◊ El término

$$\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}$$

tiene diferentes partes estándar para diferentes infinitesimales Δx distintos de cero.

DEFINICIÓN.
Sea F una función de una variable. La derivada de F es una nueva función cuyo valor en x es la pendiente de F en x.

$$F' = st\left(\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right)$$

siempre que dicha pendiente exista.

Llamamos diferenciación al proceso de encontrar la derivada de F, y decimos que F es diferenciable en un número a si F'(a) está definida.

Cuando la variable independiente x sufre un cambio, el cambio sufrido por la variable dependiente queda determinado por la ecuación.

$$\Delta y = F(x+\Delta x)-F(x)$$

Donde la ecuación anterior determina Δy como una función Real en dos variables x y Δx, cuando x y Δx varían sobre los números Reales. Pero debido al axioma 6° la ecuación también determina a Δy como una función hiperreal de dos variables cuando x y Δx varían sobre los hiperreales. Así que:
La ecuación hiperreal

$$F' = st\left(\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right)$$

Toma la forma de:

$$y' = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

El infinitesimal Δx puede ser positivo o negativo pero no cero.

La teoría anterior nos da los elementos necesarios para utilizar el Cálculo de una manera infinitesimal, pues nos provee de un conjunto de reglas prácticas para la operación con infinitesimales. Por otra parte el estudiante no se pierde en una maraña simbólica que es característica de la operación utilizando el concepto de límite.

Cuando hablamos del límite de una función podemos distinguir los siguientes casos junto con sus definiciones modernas:

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$ para toda M existe N tal que si $x>N \Rightarrow f(x)>M$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ para toda vecindad $V_\varepsilon(L)$ existe N tal que, si $x>N \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow$ para toda M existe $\delta>0$ tal que si $x \in V_\delta(a) \cap D_f \Rightarrow f(x)>M$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ Donde **a** es un punto de acumulación del dominio de la función.

Las definiciones anteriores de hecho fueron la base para la "formalización" del Cálculo Diferencial e integral, sin embargo desde el punto de vista didáctico han demostrado ser confusas para el estudiante que solo desea utilizar el Cálculo como una herramienta de trabajo aplicable a su actividad cotidiana (lo anterior por supuesto no quiere decir que no deba tener una idea clara de la verdad del procedimiento empleado), y es ahí donde el análisis no estándar aporta con su tratamiento geométrico e intuitivo y riguroso la base didáctica adecuada para su empleo.

El trabajo formal desarrollado por A. Robinson entra dentro del campo de la lógica, y su entendimiento formal representa dificultad aún para el matemático, por lo que he expuesto en este trabajo únicamente los resultados de uso inmediato que deben ser comprendidos por el estudiante. Dicho sea de paso que muchos de los libros de Cálculo Diferencial de carácter educativo no involucran el rigorísmo formal con el que los matemáticos desarrollan la teoría, sino únicamente las consecuencias prácticas, sin que por esto dichos libros perdieran mérito alguno. El estudiante que desee información adicional sobre el análisis no-estándar se puede referir en cualquier momento a fuentes más formales e incluso al trabajo mismo de Robinson.

El estudio de la teoría de los hiperreales nos lleva en primer plano a desarrollar una de las partes más importantes del análisis, como es el estudio de las funciones continuas, que será a lo que nos referiremos a continuación.

CONTINUIDAD

Cuando pensamos en la distancia entre dos puntos, estamos convencidos que, para cada punto intermedio entre ambos deberá existir una distancia para la cual exista un número en nuestro sistema numérico empleado. Por ejemplo, para un número expresado como:

$$\frac{e^{\operatorname{sen} 0.5x}}{\sqrt[0.17]{\operatorname{tg}\sqrt{0.334}}}$$

Deberá existir una distancia en una línea recta imaginaria tal que dicho extraño número la represente exactamente. En otras palabras, estamos asignando a cada distancia un número y a cada número por extraño que nos parezca una distancia. Igualmente pensamos cuando nos referimos al transcurrir del tiempo, entre dos instantes de tiempo deberá existir algo.

El problema al que nos enfrentamos consiste en ser capaces de encontrar un concepto matemático que corresponda formalmente a la imagen que ya poseemos. Dicha imagen es la sensación de continuo. La pregunta que surge es ¿Qué es una magnitud continua?, ¿Qué es lo que la caracteriza como tal? Y aunque tenemos una nueva imagen intuitiva clara sobre el continuo; lo difícil consistirá, en dar de ella una descripción adecuada.

LA IDEA BRILLANTE DE DEDEKIND

Lo que hizo DEDEKIND es encontrar un nuevo concepto que corresponda a la idea humana de continuo elevándola al rango de concepción matemática. Es claro que no ganaríamos nada definiendo la continuidad como una conexión no interrumpida de las partes más pequeñas, pues sólo estaríamos girando entorno al lenguaje. El problema es en esencia en precisar una característica de la continuidad que sirva de pilar a una deducción valida, y esta característica entrelaza con nuestra teoría numérica.

Veamos en las palabras de DEDEKIND:

"Durante mucho tiempo he estado indagando en vano esta cuestión, pero al fin hallé lo que buscaba. Quizá mi descubrimiento no será apreciado de igual modo por todos: la mayoría creerá que en sustancia no es más que una vulgaridad. He aquí en que consiste. En el capítulo anterior he llamado la atención sobre el hecho de que cada punto de una línea recta produce un corte en la misma en dos partes tales que cada punto de una de esas partes queda situado a la izquierda de cada punto de la otra parte. Yo hallo que la esencia de la continuidad queda expresada en la posición inversa, es decir, en el siguiente principio:

"Si todos los puntos de una línea recta quedan clasificados en dos conjuntos, de modo que cada punto del primer conjunto quede a la izquierda de cada punto del segundo conjunto, existe un y solo un punto que produce esta cortadura de todos los puntos en dos conjuntos; dicho punto corta la línea recta en dos porciones".

Este aparentemente sencillo principio esconde el secreto de la continuidad. Lo que surge como pregunta es ¿Realmente es un principio fundamental digno de confianza que podamos aceptar sin demostración?, o por el contrario se trata de una proposición demostrable. Los matemáticos y lógicos han llegado a la conclusión de que no se trata ni de una cosa ni de la otra, no es, ciertamente una proposición que pueda ser deducida de un sistema axiomático, pero tampoco es un postulado caprichoso que se le haya ocurrido a Dedekind, ya que si así hubiera sido Dedekind no habría afirmado categóricamente que "Todo el mundo puede asegurar la verdad de la proposición" como añade el autor más adelante.

Lo que encierra la afirmación, se trata en realidad de un Axioma que traduce de un modo exacto la manera en que podemos conceptuar matemáticamente, una característica del conjunto que resulta de la evidencia intuitiva que de él tenemos. "La esencia de la continuidad" la podemos hallar cifrada en la existencia de un y solo un punto que produce la cortadura de los demás puntos de la recta en dos conjuntos que cumplen con la condición de estar uno a la izquierda del otro.

¿Cómo podríamos enunciar la carencia de continuidad? Diciendo que, en última instancia, aquello que separa los puntos, que interrumpe la continuidad entre ellos, *es algo distinto de los puntos mismos, es una distancia, un vacío, una posibilidad* permanente de situar nuevos puntos.

Aquí vemos que la intención y la potencia indestructible de la definición, que suprime esta posibilidad, declarando que lo que separa, lo que corta, es de la misma naturaleza de lo cortado: los puntos están, en última instancia, separados por puntos actuales y no por la posibilidad de situar entre ellos puntos potenciales, y esto es la esencia del continuo: el intervalo que hay entre dos instantes cualesquiera de tiempo es única y exclusivamente TIEMPO, el intervalo que separa dos puntos del camino es exclusivamente camino y no otra cosa de naturaleza distinta.

LA CONTINUIDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ANÁLISIS NO-ESTÁNDAR.

Definición.- Una función f se dice que es **continua** en un número real **r** si se cumple la siguiente condición:
"Para cada hiperreal p infinitamente cercano a **r**, f(p) esta infinitamente cercano a f(**r**).
Esto es: f es continua a **r** si p&**r** implica f(p)&f(r)

Definición.- Una función f se dice continua si es continua en cada número real de su dominio

Ejemplo: Sea la función f(x) definida por:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

¿Es continua en $x = 1$?

Si p es un número infinitamente cercano a 1, entonces será de la forma $p = 1 + \varepsilon$
Donde ε es un infinitesimal. Por lo tanto

$$f(x) = (1+\varepsilon)^2 + 2(1 + \varepsilon) - 1 = 2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon$$

Pero $f(1) = 2$, de modo que la diferencia entre f(1) y f(p) es $\varepsilon^2 + 4\varepsilon$, algo que es claramente un infinitesimal.
La sencillez de la definición que aporta el análisis no-estándar a el establecimiento de la continuidad es obvia.

XI.- ANALISIS ESTÁNDAR VS. ANALISIS NO ESTANDAR

VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCIÓN
(Análisis no estándar)

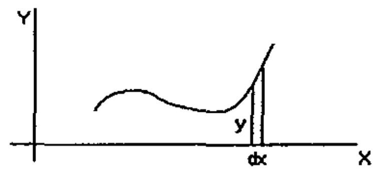
1.- Sabemos que cuando incrementamos la variable x un incremento infinitamente pequeño dx , el volumen también sufrirá un incremento dado por :

$$dV = \pi y^2 \, dx$$

como podemos observar en la figura de abajo al girar la diferencial de curva en torno al eje x.

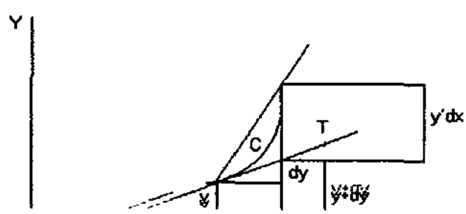
$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

o sea que V es una antiderivada de πy^2 y prácticamente eso es todo ¿todo? Quizá nos preguntemos. Pues realmente no, debido a que $dV = \pi y^2 dx$ se trata de una igualdad aproximada. Y el problema consiste en estimar ¿Qué tan grande es el error?. Sin embargo podemos mostrar que es realmente muy pequeño, es decir es de hecho infinitamente pequeño si lo comparamos con dx . Observemos la siguiente figura:



T es la tangente (su pendiente es por lo tanto y´); C es la cuerda que une (x,y) con (x+dx,y+dy). dV está comprendido entre el cono truncado generado por C y el generado por el tramo T limitado por x y dx . Al calcular los volúmenes de los conos truncados comprobaremos que difieren entre sí por un infinitésimo de segundo orden (esto es que son infinitamente más pequeño en relación con dx).

1.- Obtenemos primero el cono truncado generado por C



$$\frac{1}{3}\pi(y+dy)^2(h+dx)-\frac{1}{3}\pi y^2=\frac{1}{3}\pi\left[\left(y^2+2ydy+dy^2\right)(h+dx)-y^2h\right]$$

Lo cual es igual a:

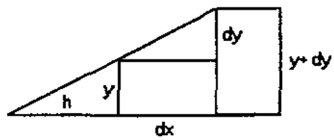
$$\frac{1}{3}\pi\left(2yhdy+hdy^2+y^2dx+2ydxdy+dxdy^2\right)$$

Ahora por semejanza de triángulos tenemos $\frac{h}{y}=\frac{dx}{dy}$, de donde $h=y\frac{dx}{dy}$.

Sustituyendo este valor en la expresión anterior obtenemos el volumen buscado;

$$\pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi(3y+dy)dxdy$$

2.- Obtenemos ahora el volumen del cono truncado generado por T.



$$\frac{1}{3}\pi(y+y'dx)^2(h+dx)-\frac{1}{3}\pi y^2h=\frac{1}{3}\pi\left[\left(y^2+2yy'dx+y'^2dx^2\right)(h+dx)-y^2h\right]$$

Lo cual nos da como resultado:

$$\frac{1}{3}\pi\left(2yy'hdx+y'^2hdx^2+y^2dx+2yy'dx^2+y'^2dx^3\right)$$

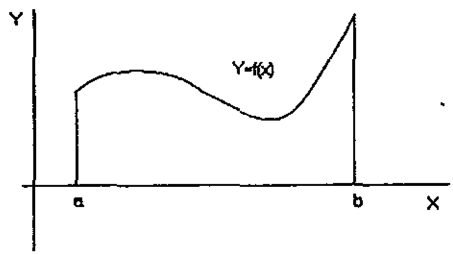
Nuevamente por semejanza de triángulos $\frac{h}{y}=\frac{dx}{y'dx}=\frac{1}{y}$ de donde $h=\frac{y}{y'}$

sustituyendo se tiene: $\pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi\left(3yy'+y'^2dx\right)dx^2$. Puesto que de los cálculos efectuados resulta que:

$$\pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi(3y+dy)dxdy\le dV\le \pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi\left(3yy'+y^2dx\right)dx^2$$

se concluye que dV difiere de πy^2dx en un infinitésimo de segundo orden que puede despreciarse.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN
(Análisis estándar)



Ahora analizaremos cual sería el enfoque del análisis estándar para resolver el problema.

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en n partes mediante los puntos de subdivisión

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n = b.$$

Consideremos el "cilindro" generado por la parte de la gráfica situado sobre el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. El volumen de este cilindro es aproximadamente igual a:

$$\pi[f(x_{i+1})]^2(x_{i+1} - x_i)$$

Puesto que el sólido que nos ocupa está compuesto de n cilindros como el descrito, su volumen V será aproximadamente igual a la suma

$$\sum_{i=1}^{i=n} \pi[f(x_{i+1})]^2(x_{i+1} - x_i)$$

A medida que las alturas de los cilindros se hacen más pequeñas las aproximaciones que escribimos serán mejores y por lo tanto,

$$V = \lim_{x_{i+1} - x_i \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} [f(x_{i+1})]^2(x_{i+1} - x_i) \quad i = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots n$$

Ahora bien, por la definición de integral este límite es igual a

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Que es la forma tradicional que nuestros estudiantes conocen, pero el problema no termina ahí, pues persiste el ¿Cómo evaluar esa integral?, para lo cual debemos emplear algunos resultados previos que relacionen la derivada con la integral.

Teorema.- Si f(x) es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y además

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$$ entonces tenemos que

$$\varphi'(x) = f(x)$$ para toda x en el intervalo $[a,b]$

(siempre que el integrando sea una función continua)
para probar lo anterior habrá que hacer diferentes consideraciones y recurrir a teoremas previos:
Para tres números reales cualesquiera a,b,c se satisface la igualdad:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ siempre que las tres integrales existan, tendremos entonces $\varphi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\Delta x} f(t)dt$ de donde $\Delta\varphi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

ahora, aplicando el teorema del valor medio para las integrales, el cual nos dice que :

"Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto α en dicho intervalo tal que satisface la igualdad:

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\alpha)$, de donde $\Delta\phi = f(\alpha)\ (x + \Delta x - x) = f(\alpha)\ \Delta x$

donde α está entre x y x+Δx.
Ahora, a partir de la razón

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{f(\alpha)\Delta x}{\Delta x} = f(\alpha) \text{ tenemos que:}$$

$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\alpha)$. Pero ya que $\alpha \to x$ cuando $\Delta x \to 0$ tenemos que: $\lim_{\Delta x \to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \to x} f(\alpha)$ y dado que la función f(x) establecimos que era continua tenemos que:

$$\lim_{\alpha \to x} f(\alpha) = f(x)$$

y por lo tanto $\varphi'(x) = f(x)$ que es lo que queríamos demostrar.

Podría parecer que el asunto ha acabado aquí, pero no, pues debemos demostrar aquí que si f(t) es continua en el intervalo $[a,x]$, la integral $\int_a^x f(t)dt$ existe, pues de no ser así nada significaría la función φ(x).
Procedamos entonces a demostrar las aseveraciones anteriores:

1.- Para tres números reales cualesquiera a,b,c se satisface la igualdad:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ siempre que las tres integrales existan.

Demostración.- Supongamos primeramente que a<c<b, y aproximemos la integral de la función por una suma de Riemann sobre el intervalo $[a,b]$.

Dado que el límite de tal suma no depende de la manera que dicho intervalo sea dividido, podemos considerar que c sea uno de los puntos de división. Entonces podemos poner la sumatoria $\sum_a^b$, correspondiente al intervalo $[a,b]$, en dos sumas : Una para en intervalo $[a,c]$ y otra para el intervalo $[c,b]$, es decir:

$$\sum_{a}^{b} f(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{a}^{c} f(\alpha_i)\Delta x_i + \sum_{c}^{b} f(\alpha_i)\Delta x_i \quad \text{donde } \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomando ahora el límite cuando la norma de la partición tienda a cero obtenemos la relación $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Si tuviésemos otro arreglo para a,b,c, por ejemplo a<b<c, por lo anteriormente probado podríamos poner

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ y ya que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ tenemos que:

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ podemos mostrar de *manera parecida para cualquier* otro arreglo de a, b y c.

2.- Teorema del valor medio para las integrales. Si una función f es continua en un intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto α en dicho intervalo tal que

$$:\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\alpha)$$

Supongamos que a<b. Si m y M son, respectivamente el mínimo y el máximo valor de la función f(x) en $[a,b]$, entonces tendremos que:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Es decir, si hacemos que $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, tendremos que $m \le \mu \le M$. A partir de las propiedades de funciones continuas sabemos que pueden tomar todos los valores entre m y M, (teorema del valor intermedio, el cual habría que probar por supuesto) tenemos que debe existir un número α en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(\alpha) = \mu$, o sea que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\alpha)$. Lo cual a su vez debe presuponer que damos por hecho el teorema que cualquier función continua en un intervalo $[a,b]$ alcanza su valor máximo en $[a,b]$.

Y habrá que probar todos y cada uno de los teoremas anteriormente señalados.

Al seguir por el camino "estándar " nos surgen nuevos problemas que debemos ir solucionando a través del establecimiento de nuevos teoremas con su correspondiente demostración haciendo el trabajo complicado al pretender ser "rigurosos". Lo anterior lleva a nuestros estudiantes y profesores muchas veces a seguir veladamente un camino no estándar donde la intuición aunada a una teoría cimentada sobre bases formales los guíe geométricamente a resultados que concuerdan en todos los casos con aquellos obtenidos por el análisis estándar .

BIBLIOGRAFÍA

1.-Kline Morris Matemáticas. – La pérdida de la certidumbre-1a.ed., al español Ed.Siglo XXI,, 1985

2.-Grattan-Guinnes. Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910), Alianza Editorial, 1980

3.-Leibniz/Newton EL cálculo infinitesimal, Ed. Universitaria de Buenos Aires, 1972

4.-Vera Francisco Veinte matemáticos célebres, Libros de Mirasol (Argentina), 1965

5.-Jammer Max. Conceptos del Espacio, ,Colección Dina Ed. Grijalvo, 1970

6.-Baron Margaret E. The origins of the Infinitesimal Calculus, Dover Pub., 1969

7.-Boyer Carl B. The history of the calculus and its conceptual development, Calculus, Dover Pub, 1949

8.-Cajori Florian. A History of mathematical notations, (dos volúmenes) The open Court Publishing, 1974

9.-Struik D.J. A source Book in Mathematics (1200-1800),Harvard University Press, 1969

10.-Birkhof Garrett. A source Book in Classical Analysis , Harvard University Press, 1974

11.-Roberval De persone. Study of the *traité des indivisibles* , Columbia University Teachers College Series N^0 446

12.-Zippin Leo. Uses of Infinty, The Mathematical Association of America, 1962

13.- Fonceca Antolin Antonio. Infinitésimos, Centro de Investigación y Estudios Avanzados I.P.N Sección de Matemática Educativa

14.-Meliujin Serafín T. El problema de lo finito y lo infinito. Ed. Grijalvo, 1960

15.-Saumells Roberto. Fundamentos de matemática y de física
Libros de Bolsillo RIALP

16.-Pita Ruiz Claudio de J Usos y fundamentos de los infinitesimos en el siglo XVIII, Centro de Investigación y Estudios Avanzados I:P:N, 1983

17.- Henle J.M & Kleinberg E.M. Infinitesimal Calculus, MIT Press, Second printing, 1980

18.- Keisler H. Jerome Elementary Calculus, Prindle, Weber et Schmidt

19.- Robinson A. Non-Estándar Analysis, North Holland Pub. Company, 1974

20.- Jacques-Harthong. " Análisis no estándar" , Mundo Científico No. 31 pag 1180-1188

21.- Francine y Marc Diener. " Las Aplicaciones del Análisis no-estándar", Mundo Científico No 89 Pag 276-285

22.- Imaz Carlos Los infinitésimos hoy, Sección Matemática Educativa Centro de estudios Avanzados
del I.P.N

23.- Meda Manuel. "Notas de clase de Análisis no-estándar"

24.- Arcos Q J. Ismael., Cálculo para estudiantes de Ingeniería. I:C:A, 1997

25.- Baena Guillermina. Instrumentos de investigación, Editores mexicanos Unidos, 13° Ed. , 1997

26.- Ausubel/Novak David. Psicología Educativa

27.- Collete Jean-Paul. História de las Matemáticas, Ed. Siglo XXI, 1986